



AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

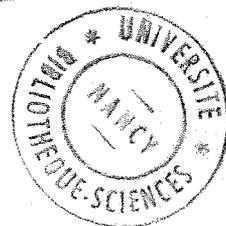
92/969

UNIVERSITÉ NANCY I

U.F.R. S.T.M. I. A.

G.F.D. MATHÉMATIQUES

SN 92 / 79 B



PROBLÈMES DE GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE COMPLEXE LOCALE

Thèse présentée et soutenue le 15 juin 1992 pour l'obtention d'un

Doctorat d'Etat ès Sciences Mathématiques

par

Alain HÉNAUT

Membres du Jury

Président	F. NORGUET	Professeur
Rapporteurs	D. BARLET	Professeur
	D. CERVEAU	Professeur
	J. VAROUCAS	Professeur
Examineurs	J.-P. DUFOUR	Professeur
	R. GAY	Professeur
	J.-L. JOLY	Professeur

BIBLIOTHEQUE SCIENCES NANCY 1



D 095 137281 6

UNIVERSITÉ NANCY I

U.F.R. S.T.M. I. A.
G.F.D. MATHÉMATIQUES



PROBLÈMES DE GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE COMPLEXE LOCALE

Thèse présentée et soutenue le 15 juin 1992 pour l'obtention d'un

Doctorat d'Etat ès Sciences Mathématiques

par

Alain HÉNAUT

Membres du Jury

Président	F. NORGUET	Professeur
Rapporteurs	D. BARLET	Professeur
	D. CERVEAU	Professeur
	J. VAROUCHAS	Professeur
Examineurs	J.-P. DUFOUR	Professeur
	R. GAY	Professeur
	J.-L. JOLY	Professeur

PROBLÈMES DE GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE
COMPLEXE LOCALE

REPORT OF THE COMMISSIONER OF THE GENERAL LAND OFFICE

FOR THE YEAR 1881

Je tiens à exprimer ici ma profonde gratitude à Daniel Barlet qui, ayant guidé mes premières recherches vers des problèmes relatifs aux cycles, n'a cessé depuis lors de s'intéresser à mes travaux ; nos entretiens nancéens m'apportèrent une aide précieuse.

Je remercie vivement Jean-Luc Joly qui, dans le sérail des résonances, m'a fait découvrir la géométrie des tissus ; nos conversations d'ouvroir furent stimulantes.

J'adresse mes remerciements à Dominique Cerveau qui, attentif à mes premières gammes dans le Cercle des webistes hexagonaux, m'a permis de mener à son terme le seconde partie de ce mémoire.

Je remercie Roger Gay pour l'attention bienveillante qu'il ne cessa de manifester à l'égard de ce travail.

Je remercie également Jean-Paul Dufour qui, en m'ouvrant son atelier languedocien, me donna l'occasion d'exposer une première version de mes résultats sur les tissus linéarisables.

Enfin, j'exprime ma vive reconnaissance à François Norguet qui, par son enseignement et la direction de son séminaire mais aussi par les rencontres qu'il suscita, m'a permis d'étudier de la Géométrie.

Je remercie Jean Varouchas d'avoir accepté de se joindre au sextette précédent pour constituer le jury de cette thèse.

TABLE DES MATIÈRES

Introduction

Première partie : FAMILLES DE CYCLES ET ÉCLATEMENTS

1. Cycles et cône tangent de Zariski

§0. Introduction

§1. Platitude de la déformation d'un germe d'espace analytique complexe vers son cône tangent de Zariski

§2. Revêtement ramifié transverse à l'origine

§3. Cycle tangent de Zariski à un germe de cycle

Appendice. a. Cycle sous-jacent à un espace analytique complexe de dimension finie

b. Multiplicité géométrique et multiplicité algébrique

Bibliographie

2. Cycle exceptionnel de l'éclatement d'un idéal définissant l'origine de \mathbb{C}^n et applications

§0. Introduction

§1. Remarques préliminaires

§2. Préparation de I

§3. Polynôme caractéristique de ψ par rapport à J où $I = (J; \psi)$ et applications

§4. Détermination du cycle exceptionnel de l'éclatement de l'idéal $I = (J; \psi)$

§5. Eclatement d'une famille d'idéaux ponctuels paramétrée par un germe d'espace réduit

§6. Application au schéma de Hilbert $\text{Hilb}^1(\mathcal{O}_n)$

Bibliographie

3. Cycle exceptionnel de l'éclatement de Nash d'une hypersurface analytique complexe à singularité isolée

§0. Introduction et notations

§1. Premières remarques

§2. Polynôme caractéristique de f par rapport à J

§3. Valuation de φ

§4. Détermination du cycle exceptionnel de l'éclatement de Nash de H

Bibliographie

Deuxième partie : GÉOMÉTRIE DES TISSUS DE \mathbb{C}^2

1. \mathcal{D} -modules et géométrie des tissus de \mathbb{C}^2

- §0. Introduction
 - §1. Finitude de $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{S}$
 - §2. Majoration de $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{S}$
 - §3. Passage de n à $n + 1$ champs de vecteurs
 - §4. Application à la géométrie des tissus de \mathbb{C}^2
- Bibliographie

2. Sur la linéarisation des tissus de \mathbb{C}^2

- §0. Introduction
 - §1. Préliminaires sur les isomorphismes locaux de \mathbb{C}^2
 - §2. Linéarisation des tissus de $(\mathbb{C}^2, 0)$
 - §3. Polynôme associé à un d -tissu de $(\mathbb{C}^2, 0)$
 - §4. Applications
- Références

3. Détermination des tissus de rang maximal de \mathbb{C}^2 qui sont linéarisables

- §0. Introduction
 - §1. Rappels et introduction des notations
 - §2. Application de Darboux-Blaschke pour les tissus de $(\mathbb{C}^2, 0)$ dont le rang est maximal
 - §3. Détermination des tissus de rang maximal de $(\mathbb{C}^2, 0)$ qui sont linéarisables
- Appendice.*
- §1. Rappels sur la géométrie des courbes algébriques de \mathbb{P}^2
 - §2. Théorème d'Abel : version différentielle de Griffiths
 - §3. Tissu linéaire associé à une courbe algébrique de \mathbb{P}^2
 - §4. Algébrisation des tissus linéaires de $(\mathbb{C}^2, 0)$

Bibliographie

INTRODUCTION

Ce mémoire comporte deux parties qui peuvent être lues indépendamment.

La première partie intitulée "Familles de cycles et éclatements" est consacrée à la description des cycles exceptionnels d'éclatements usuels de la géométrie analytique complexe locale : cône tangent de Zariski d'un germe d'espace analytique, éclatement d'un idéal (z_1, \dots, z_n) -primaire de $\mathbb{C}\{z_1, \dots, z_n\}$ (i.e. définissant l'origine de \mathbb{C}^n) et éclatement de Nash d'une hypersurface à singularité isolée.

Les résultats obtenus permettent de donner quelques applications dans des domaines voisins.

Dans le chapitre 1, on démontre la platitude de la déformation d'un germe d'espace analytique vers son cône tangent de Zariski. On en déduit le résultat suivant : un germe d'espace analytique est de Cohen-Macaulay si son cône tangent de Zariski l'est. De plus, en utilisant la notion naturelle de revêtement ramifié transverse et l'existence du morphisme Douady-Barlet, on peut définir et représenter le *cycle tangent de Zariski* à un germe de cycle. Ce qui donne une méthode pour obtenir des équations explicites du cône tangent de Zariski à un germe d'espace analytique. Dans un appendice à ce chapitre, on compare la multiplicité algébrique d'un idéal de $\mathbb{C}\{y_1, \dots, y_q\}$ à la multiplicité géométrique de son germe de cycle associé.

Soit I un idéal de $\mathbb{C}\{z_1, \dots, z_n\} = \mathbb{C}\{z\}$ définissant l'origine de \mathbb{C}^n . Les résultats du chapitre 1 permettent de donner, dans le chapitre 2, une méthode pour déterminer après un choix convenable des générateurs de $I = (f_1, \dots, f_{n+p})$, le cycle $[E]$ de \mathbb{P}^{n+p-1} sous-jacent à la fibre exceptionnelle $E = \text{Proj}(\bigoplus_{\nu \geq 0} I^\nu / I^{\nu+1})$ de l'éclatement de \mathbb{C}^n relativement à

l'idéal I . Au cours de ce chapitre, on indique un procédé pour construire pour tout $h \in \bar{I}$ où \bar{I} est la clôture intégrale de I dans $\mathbb{C}\{z\}$, une relation intégrale explicite de h sur I , de degré la multiplicité $e(I)$ au sens de Samuel de l'idéal I . On étudie également l'éclatement d'une famille équimultiple d'idéaux ponctuels paramétrée par un germe d'espace analytique réduit. Ce qui permet d'obtenir quelques résultats concernant le schéma de Hilbert $\text{Hilb}^l(\mathcal{O}_n)$ des idéaux de longueur l définissant l'origine de \mathbb{C}^n .

Des techniques voisines des précédentes permettent de montrer dans le chapitre 3 que la forme initiale de la *norme* de l'équation d'une hypersurface à singularité isolée représente le cycle sous-jacent à la fibre exceptionnelle de l'éclatement de Nash de cette hypersurface. Comme conséquence, on obtient que le hessien d'une hypersurface à singularité isolée n'est pas identiquement nul sur cette hypersurface.

La seconde partie est consacrée à l'étude de la géométrie des tissus de \mathbb{C}^2 .

Un d -tissu \mathcal{W} de $(\mathbb{C}^2, 0)$ est défini par d feuilletages ($d \geq 2$) de courbes lisses de $(\mathbb{C}^2, 0)$ en position générale. L'étude géométrique de telles configurations (*i.e.* à un isomorphisme local $\phi : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, \phi(0))$ près) a commencé dans les années trente avec les travaux de Thomsen, Blaschke et Bol.

Les feuilles de \mathcal{W} sont les courbes de niveau d'éléments $F_i \in \mathbb{C}\{x, y\}$ tels que $dF_i \wedge dF_j(0) \neq 0$ pour $1 \leq i < j \leq d$.

Le rang de \mathcal{W} , noté $rg\mathcal{W}$, est la dimension du \mathbb{C} -espace vectoriel

$$\mathcal{A} = \{(g_i(F_i))_{1 \leq i \leq d} ; g_i \in \mathbb{C}\{t\} \text{ et } \sum_{i=1}^d g_i(F_i)dF_i = 0\}$$

des relations abéliennes de \mathcal{W} . On retrouvera que $rg\mathcal{W}$ ne dépend que de \mathcal{W} , et que l'on a les inégalités suivantes :

$$0 \leq rg\mathcal{W} \leq \frac{1}{2}(d-1)(d-2).$$

Les feuilles de \mathcal{W} sont les courbes intégrales de d champs de vecteurs $X_i = A_i\partial_x + B_i\partial_y$, à coefficients dans $\mathbb{C}\{x, y\}$ et deux à deux linéairement indépendants. L'espace des relations abéliennes \mathcal{A} de \mathcal{W} est, aux constantes près, égal au \mathbb{C} -espace vectoriel des solutions $(f_1, \dots, f_d) \in \mathbb{C}\{x, y\}^d$ du système différentiel de la résonance donné par :

$$\mathcal{R}(d) \begin{cases} X_i(f_i) = 0 & \text{pour } 1 \leq i \leq d \\ \partial_x(f_1 + \dots + f_d) = 0 \\ \partial_y(f_1 + \dots + f_d) = 0 \end{cases}$$

Dans le cadre C^∞ , les équations de la résonance ont été introduites par Joly et Rauch pour étudier le problème de l'interaction des ondes oscillantes non linéaires en dimension 1 d'espace. Dans ce problème, les fonctions f_i sont les phases réelles d'ondes oscillantes solutions d'un système différentiel non linéaire et strictement hyperbolique de d équations du premier ordre à d inconnues, et les équations $X_i(f_i) = 0$ sont les équations eikonales associées à ce système. Les deux autres équations proviennent des interactions non linéaires entre les oscillations des divers modes. On doit à Jean Martinet d'avoir remarqué que les équations de la résonance n'étaient que des relations abéliennes déguisées.

Dans le chapitre 1, on étudie le système $\mathcal{R}(d)$ du point de vue des \mathcal{D} -modules et l'on relie $\mathcal{R}(d)$ et $\mathcal{R}(d+1)$. De plus, on décrit complètement le cas de 3 champs de vecteurs et l'on caractérise géométriquement les tissus *hexagonaux* (*i.e.* les 3-tissus de $(\mathbb{C}^2, 0)$ de rang maximal 1).

Un d -tissu \mathcal{W} de $(\mathbb{C}^2, 0)$ est *linéarisable* s'il existe un isomorphisme local $\phi : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, \phi(0))$ qui transforme \mathcal{W} en un d -tissu *linéaire* (*i.e.* un d -tissu dont les feuilles sont des (morceaux de) droites de \mathbb{C}^2 , non nécessairement parallèles).

Toute courbe algébrique réduite $C \subset \mathbb{P}^2$, non nécessairement irréductible et éventuellement singulière dont le degré est d définit, par dualité, un d -tissu linéaire \mathcal{L}_C de (\mathbb{P}^2, H) pour H générique ; de plus, d'après le théorème d'Abel, on a $rg \mathcal{L}_C = \frac{1}{2}(d-1)(d-2)$.

Dans le chapitre 2, on donne une condition nécessaire et suffisante en terme de résolution d'un système différentiel non linéaire pour qu'il existe une linéarisation d'un d -tissu \mathcal{W} de $(\mathbb{C}^2, 0)$ de rang quelconque. De plus, on décrit toutes les linéarisations possibles. Dans ce chapitre, on construit pour un système de coordonnées (x, y) donné, un polynôme $P_{\mathcal{W}} = \sum_{k=0}^{d-1} P_k b^k$ de $\mathbb{C}\{x, y\}[b]$ qui "mesure" si \mathcal{W} est linéarisable ou non. Par définition, les d feuilles de \mathcal{W} vérifient l'équation différentielle du second ordre $y'' = P_{\mathcal{W}}(x, y; y')$, ce qui permet de préciser des résultats classiques sur ce type d'équation différentielle.

On utilise dans le chapitre 3 les propriétés géométriques de l'espace des relations abéliennes pour déterminer les d -tissus \mathcal{W} de $(\mathbb{C}^2, 0)$ de rang maximal qui sont linéarisables. Plus précisément, on caractérise ces derniers grâce au chapitre 2 et l'on décrit (pour $d \geq 4$) toutes les linéarisations possibles, ce qui répond à une question de Chern. A un changement de variable près, \mathcal{W} sera de la forme \mathcal{L}_C où la courbe algébrique réduite $C \subset \mathbb{P}^2$ de degré d est obtenue à partir des relations abéliennes de \mathcal{W} . On montre, en particulier, que si \mathcal{W} est un d -tissu de $(\mathbb{C}^2, 0)$ de rang maximal, alors \mathcal{W} est linéarisable si et seulement si $\deg P_{\mathcal{W}} \leq 3$. Les méthodes utilisées prolongent celles introduites par Poincaré et Darboux dans leurs travaux sur les surfaces de translation. Dans un appendice à ce chapitre, on a regroupé les résultats essentiels et leurs démonstrations concernant la géométrie des tissus linéaires de $(\mathbb{C}^2, 0)$.

Repères bibliographiques

Dans les deux parties de ce mémoire, chaque chapitre possède sa propre bibliographie.

En ce qui concerne la seconde partie, on pourra consulter les références complémentaires suivantes :

G. THOMSEN, *Un teorema topologico sulle schiere di curve e una caratterizzazione geometrica delle superficie isoterma-asintotiche*, Boll. Un. Mat. Ital. (1927), 3-8.

P.A. GRIFFITHS, *On Abel's differential equations*, Algebraic Geometry, The Johns Hopkins Centennial Lectures, Ed. by J.-I. Igusa (1977), 26-51.

A. BEAUVILLE, *Géométrie des tissus (d'après S.S. Chern et P.A. Griffiths)*, Séminaire Bourbaki, 531, 1978/79.

J.-L. JOLY, G. MÉTIVIER and J. RAUCH, *Resonant one dimensional nonlinear geometric optics*, Prépublication Bordeaux (1990).

Le chapitre 1 de la première partie de ce mémoire a été annoncé dans une note des

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, Paris 287 (1978), 333-335, et a été publié dans le Séminaire F. Norguet IV, Lect. Notes in Math., 807, Springer-Verlag, (1980).

Le chapitre 2 a été en partie publié aux Annales de l'Institut Fourier, Grenoble 37 (1987), 143-157.

Le chapitre 3 a été publié dans le Bulletin de la Société Mathématique de France 109 (1981), 475-481.

Enfin, le chapitre 1 de la seconde partie de ce mémoire a été en partie publié aux Mathematica Scandinavica, 66 (1990), 161-172.

Première partie

FAMILLES DE CYCLES ET ÉCLATEMENTS

CYCLES ET CONE TANGENT DE ZARISKI

§ 0. - Introduction

Dans le § 1 on démontre la platitude de la déformation d'un germe d'espace analytique complexe vers son cône tangent de Zariski, et l'on en déduit le corollaire suivant : un germe d'espace analytique complexe est de Cohen-Macaulay si son cône tangent de Zariski l'est. Dans le § 2 on introduit le cadre naturel dans lequel se fera l'étude du paragraphe suivant en définissant par une série d'équivalence la notion de revêtement ramifié transverse à l'origine. Dans le § 3 on définit grâce au morphisme Douady-Barlet de [B, chap. V] et au résultat du § 1 , le cycle tangent de Zariski à un germe de cycle. De plus, une méthode est donnée pour obtenir des équations explicites du cône tangent de Zariski à un germe d'ensemble analytique complexe. Enfin dans un appendice, on précise la nature du cycle sous-jacent à un espace analytique complexe et l'on compare la multiplicité algébrique d'un idéal de $\mathbb{C}\{y_1, y_2, \dots, y_q\}$ à la multiplicité géométrique de son germe de cycle associé.

§ 1. - Platitude de la déformation d'un germe d'espace analytique complexe vers son cône tangent de Zariski

Soit I un idéal de l'anneau des séries entières convergentes à n variables $\mathbb{C}\{x\} = \mathbb{C}\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, on note $\text{in}[I]$ l'idéal de $\mathbb{C}\{x\}$ engendré par les formes initiales d'éléments de I . Si f appartient à $\mathbb{C}\{x\}$ on désigne par $\text{in}(f)$ sa forme initiale et $\text{val}(f)$ sa valuation.

Soit $f = \sum_{\alpha} a_{\alpha} x^{\alpha} \in \mathbb{C}\{x\}$ où $\alpha \in \mathbb{N}^n$, on pose pour $\rho = (\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n)$

où $\rho_i > 0$; $|f|_{\rho} = \sum_{\alpha} |a_{\alpha}| \rho^{\alpha}$.

$|\cdot|_{\rho}$ est une norme sur $\mathbb{C}\{x\}(\rho) = \{f \in \mathbb{C}\{x\}; |f|_{\rho} < +\infty\}$.

Lemme 1.

Soient h_1, h_2, \dots, h_r des éléments de I tels que $\text{in}(h_1), \text{in}(h_2), \dots, \text{in}(h_r)$ engendrent $\text{in}[I]$. Alors il existe $\rho = (\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n)$, $K > 0$ et $0 < \ell < 1$ tels que : pour tout $f \in \mathbb{C}\{x\}(\rho) \cap I$ il existe A_1, A_2, \dots, A_r des éléments de $\mathbb{C}\{\bar{x}\}$ vérifiant :

i) $f = \sum_{i=1}^r A_i h_i$ (En particulier les h_i engendrent I).

ii) $\text{in}(f) = \sum_{i=1}^r \text{in}(A_i) \text{in}(h_i)$ avec $\text{val}(A_i) = \text{val}(f) - \text{val}(h_i)$ pour $1 \leq i \leq r$.

iii) $|A_i|_{\ell\rho} \leq K |f|_{\rho}$ pour $1 \leq i \leq r$.

Démonstration : Soit $u : \mathbb{C}\{x\}^r \longrightarrow \mathbb{C}\{x\}$ telle que $u(\alpha_i) = \sum_{i=1}^r \alpha_i \text{in}(h_i)$.

Soit $\rho = (\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n)$ tel que $H = \sum_{i=1}^r |h_i|_\rho < +\infty$.

Si $g = (g_1, g_2, \dots, g_r) \in \mathbb{C}\{x\}^r$ on pose $|g|_\rho = \sum_{i=1}^r |g_i|_\rho$. D'après une

forme affaiblie du théorème des voisinages privilégiés de [M, th. 1.1, p. 164]

il existe, quitte à restreindre ρ , une scission λ de u adaptée à ρ (i.e. une

application \mathbb{C} -linéaire $\lambda : \mathbb{C}\{x\} \longrightarrow \mathbb{C}\{x\}^r$ vérifiant $u \lambda u = u$ et

$C = C(\rho) > 0$ tel que pour tout $\xi \in \mathbb{C}\{x\}$ on ait $|\lambda \xi|_\rho \leq C |\xi|_\rho$. Soit

$f = f_0 \in \mathbb{C}\{x\}(\rho) \cap I$, alors $\text{in}(f_0) \in \text{Im } u$. Posons $\lambda \text{in}(f_0) = (\alpha_i^0)$, alors on a

$$\text{in}(f_0) = \sum_{i=1}^r \alpha_i^0 \text{in}(h_i) \quad \text{car } u \lambda u = u \text{ et pour tout } 1 \leq i \leq r$$

$|\alpha_i^0|_\rho \leq |\lambda \text{in}(f_0)|_\rho \leq C |\text{in}(f_0)|_\rho \leq C |f_0|_\rho$. Soit P_i^0 la partie homogène

de degré $\text{val}(f_0) - \text{val}(h_i)$ de α_i^0 , alors $\text{in}(f_0) = \sum_{i=1}^r P_i^0 \text{in}(h_i)$ et

$|P_i^0|_\rho \leq C |f_0|_\rho$. Posons $f_1 = f_0 - \sum_{i=1}^r P_i^0 h_i$, alors $f_1 \in \mathbb{C}\{x\}(\rho) \cap I$ car

l'on a $|f_1|_\rho \leq (1 + CH) |f_0|_\rho$. En réitérant ce qui précède, on obtient une

suite $(f_n) \in \mathbb{C}\{x\}(\rho) \cap I$ telle que $f_{n+1} = f_n - \sum_{i=1}^r P_i^n h_i$ où P_i^n est un polynôme

homogène éventuellement nul si $n > 0$ ou bien de degré $\text{val}(f_n) - \text{val}(h_i)$,

$$\text{in}(f_n) = \sum_{i=1}^r P_i^n \text{in}(h_i) \quad \text{et} \quad |P_i^n|_\rho \leq C |f_n|_\rho.$$

On a $|f_{n+1}|_\rho \leq (1 + CH) |f_n|_\rho \leq (1 + CH)^{n+1} |f_0|_\rho$ d'où $|P_i^n|_\rho \leq C(1 + CH)^n |f_0|_\rho$.

Pour construction, on a

$$(*) \quad \text{val}(f_{n+1}) > \text{val}(f_n)$$

or $\text{val}(f_0) > 0$, d'où $\text{val}(f_n) > n$.

Ainsi si $P_i^n \neq 0$ degré $P_i^n = \text{val}(f_n) - \text{val}(h_i) > n - \text{val}(h_i)$. Notons $n_i = \text{val}(h_i)$. Si

$x = \ell y$, alors on a $P_i^n(x) = \ell^{\text{degré } P_i^n} P_i^n(y)$ et si $0 < \ell < 1$, on a

$\ell^{\text{degré } P_i^n} < \ell^{\text{degré } P_i^{n-1}}$. Ainsi pour $0 < \ell < 1$, on a

$|P_i^n|_{\ell \rho} \leq \ell^{n-n_i} |P_i^{n-1}|_{\rho}$. Soit $\ell > 0$ tel que $\ell(1+CH) < 1$, alors

$|P_i^n|_{\ell \rho} \leq \ell^{n-n_i} C(1+CH)^n |f|_{\rho} \leq |f|_{\rho} \frac{C}{\ell^{n_i}} [\ell(1+CH)]^n$, ce qui prouve

que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} P_i^n$ converge uniformément sur le polycylindre

$P(\ell \rho) = \{(x_i) \in \mathbb{C}^n; |x_i| < \ell \rho_i\}$. La série $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n - f_{n+1}$ est donc conver-

gente sur $P(\ell \rho)$ et l'on a $f = \sum_{i=1}^r \left(\sum_{n=0}^{+\infty} P_i^n \right) h_i$ sur $P(\ell \rho)$. Posons

$A_i = \sum_{n=0}^{+\infty} P_i^n$ alors i) est vérifié. D'après (*), on a $\text{in}(A_i) = P_i^0$ ce qui

montre que ii) est vérifié. Soit $\ell = \frac{1}{2(1+CH)}$ alors $\ell(1+CH) < 1$ d'où

$|A_i|_{\ell \rho} \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |f|_{\rho} C 2^{n_i} (1+CH)^{n_i} \left(\frac{1}{2}\right)^n = |f|_{\rho} C 2^{n_i+1} (1+CH)^{n_i}$. Posons

$K = \max_{1 \leq i \leq r} C 2^{n_i+1} (1+CH)^{n_i}$ alors $|A_i|_{\ell \rho} \leq K |f|_{\rho}$ ce qui prouve iii).

D'où le résultat.

Théorème 1.

Soit I un idéal de $\mathbb{C}\{x\}$ engendré par h_1, h_2, \dots, h_r tels que $\text{in}(h_1), \text{in}(h_2), \dots, \text{in}(h_r)$ engendrent $\text{in}[I]$. Notons $n_i = \text{val}(h_i)$ et soit H l'idéal de $\mathbb{C}\{t, x\}$ engendré par les $\frac{h_i(t, x)}{t^{n_i}}$ où $1 \leq i \leq r$. Alors

$\mathbb{C}\{t, x\}/H$ considéré comme un $\mathbb{C}\{t\}$ -module grâce à l'injection canonique

$\mathbb{C}\{t\} \longrightarrow \mathbb{C}\{t, x\}$ est plat.

Démonstration : Soit $t f(t, x) \in H$, il suffit de montrer que $f(t, x) \in H$. Soient $0 < a < 1$ et f une fonction holomorphe sur $\{|t| < a\} \times \{\|x\| < 3a\}$ représentant le germe $f(t, x)$.

α) Pour $\|x\| < \frac{a^2}{2}$, posons pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$F_n(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_{|t|=e} f(t, \frac{x}{t}) \frac{dt}{t^{n+1}} \quad \text{où } e \text{ est choisi de manière que } e < a \text{ et}$$

$\|x\| < 3ea$. F_n est holomorphe sur $\{\|x\| < \frac{a^2}{2}\}$ et pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a

$$|F_n(x)| \leq \frac{M(e, x)}{e^n} \quad \text{où } M(e, x) = \sup_{|t|=e} |f(t, \frac{x}{t})|. \text{ Soit } \|x\| < \frac{a^2}{2} \text{ pour}$$

$e = \frac{a}{2}$ (resp. $e = \frac{\|x\|}{2a}$) on obtient :

$$(1) \quad |F_n(x)| \leq M\left(\frac{a}{2}, x\right) \left(\frac{2}{a}\right)^n \quad \text{pour } n \geq 0.$$

$$(2) \quad |F_{-n}(x)| \leq M\left(\frac{\|x\|}{2a}, x\right) \left(\frac{\|x\|}{2a}\right)^n \quad \text{pour } n > 0.$$

ce qui prouve que la série de Laurent en t de $f(t, \frac{x}{t})$ converge pour

$\frac{\|x\|}{2a} < |t| < \frac{a}{2}$. Ainsi pour $\|x\| < \frac{a^2}{2}$, on a $f(t, \frac{x}{t}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n(x) t^n$ dans la couronne $\frac{\|x\|}{2a} < |t| < \frac{a}{2}$.

$$\beta) \quad \text{D'après l'hypothèse, on a } t f(t, x) = \sum_{i=1}^r \lambda_i(t, x) \frac{h_i(t, x)}{t^{n_i}}$$

où quitte à restreindre a , on peut supposer que les λ_i sont holomorphes sur $\{|t| < a\} \times \{\|x\| < 3a\}$ et les h_i sont holomorphes sur $\{\|x\| < 3a\}$. Soit

$$|t| = \frac{a}{2} \text{ et } \|x\| < \frac{a^2}{2}, \text{ alors on a } f(t, \frac{x}{t}) = \sum_{i=1}^r \lambda_i\left(t, \frac{x}{t}\right) \frac{h_i(x)}{t^{n_i+1}}, \text{ d'où par}$$

définition des F_n , $F_n(x) = \sum_{i=1}^r h_i(x) \left[\frac{1}{2i\pi} \int_{|t|=\frac{a}{2}} \lambda_i(t, \frac{x}{t}) \frac{dt}{t^{n+2+n_i}} \right]$

ce qui montre que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $F_n \in I$.

De plus, il existe $\rho = (\rho, \rho, \dots, \rho)$ où $\rho < \frac{a}{2}$ et des constantes positives

M'_1 et M'_2 telles que :

$$(1)' \quad |F_n|_{\rho} \leq M'_1 \left(\frac{2}{a}\right)^n \text{ pour } n \geq 0$$

$$(2)' \quad |F_{-n}|_{\rho} \leq M'_2 \left(\frac{a}{4}\right)^n \text{ pour } n > 0.$$

En effet, quitte à restreindre a pour $\|x\| < \frac{a}{2}$ on a $F_n(x) = \sum_{\alpha} a(n)_{\alpha} x^{\alpha}$.

Soit $\rho < \delta < \frac{a}{2}$, posons $\rho = (\rho, \dots, \rho)$ et $\delta = (\delta, \dots, \delta)$, alors on a

$$|a(n)_{\alpha}| \rho^{\alpha} \leq \sup_{|x_i| \leq \delta} |F_n(x)| \left(\frac{\rho}{\delta}\right)^{\alpha}. \text{ Soient } M_1 = \sup_{|x_i| \leq \delta} M\left(\frac{a}{2}, x\right) \text{ et}$$

$$M_2 = \sup_{|x_i| \leq \delta} M\left(\frac{\|x\|}{2a}, x\right) \text{ alors d'après (1) et (2) on a } |a(n)_{\alpha}| \rho^{\alpha} \leq M_1 \left(\frac{2}{a}\right)^n \left(\frac{\rho}{\delta}\right)^{\alpha}$$

pour $n \geq 0$ et $|a(-n)_{\alpha}| \rho^{\alpha} \leq M_2 \left(\frac{a}{4}\right)^n \left(\frac{\rho}{\delta}\right)^{\alpha}$ pour $n > 0$. D'où ce qui précède.

D'après la partie β), quitte à restreindre $\rho = (\rho, \dots, \rho)$ où $\rho < \frac{a}{2}$, il existe d'après le lemme précédent et sa démonstration ; $K > 0$, $0 < \ell < 1$ et des A_i^n ($1 \leq i \leq r$, $n \in \mathbb{Z}$) holomorphes sur $\{\|x\| < \ell \rho\}$

vérifiant :

$$i) \quad F_n = \sum_{i=1}^r A_i^n h_i \text{ sur } \{\|x\| < \ell \rho\}$$

$$ii) \quad \text{in}(F_n) = \sum_{i=1}^r \text{in}(A_i^n) \text{in}(h_i) \text{ avec } \text{val}(A_i^n) = \text{val}(F_n) - n_i$$

$$iii) \quad |A_i^n|_{\ell \rho} \leq K |F_n|_{\rho}$$

Pour $\|x\| < \ell \rho$, on a d'après le iii) ci-dessus $|A_i^n(x)| \leq K |F_n| \rho$, ce qui

prouve grâce à (1)' et (2)' que pour $\|x\| < \ell \rho$, $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_i^n(x) t^n$ converge dans

la couronne $\frac{a}{4} < |t| < \frac{a}{2}$. Pour $n > 0$, on a d'après le (2), $\text{val}(F_{-n}) \geq n$,

ce qui prouve grâce au ii) ci-dessus que $\text{val}(A_i^{-n}) \geq n - n_i$. Ainsi pour

$\|x\| < \frac{2\ell\rho}{a}$ la série $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_i^n(t x) t^{n+n_i}$ qui converge dans la couronne

$\frac{a}{4} < |t| < \frac{a}{2}$ ne présente en fait que des termes holomorphes en t car pour

$p > 0$, $\text{val}(A_i^{-n_i-p}) \geq n_i + p - n_i = p$. Ceci prouve que $G_i(t, x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_i^n(t x) t^{n+n_i}$

est holomorphe sur $\{|t| < \frac{a}{2}\} \times \{\|x\| < \frac{2\ell\rho}{a}\}$. Sur $\{\frac{a}{4} < |t| < \frac{a}{2}\} \times \{\|x\| < \frac{2\ell\rho}{a}\}$

$$\text{on a } \sum_{i=1}^r G_i(t, x) \frac{h_i(t x)}{t^{n_i}} = \sum_{i=1}^r \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_i^n(t x) t^{n+n_i} \right) \frac{h_i(t x)}{t^{n_i}}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n(t x) t^n \text{ d'après le i) ci-dessus}$$

$= f(t, x)$ d'après la partie a) car $\frac{\|t x\|}{2a} < \frac{a}{4}$, ce qui prouve d'après le

principe du prolongement analytique que $f(t, x) = \sum_{i=1}^r G_i(t, x) \frac{h_i(t x)}{t^{n_i}}$ sur

$\{|t| < \frac{a}{2}\} \times \{\|x\| < \frac{2\ell\rho}{a}\}$. D'où le résultat.

Soit (X, \mathcal{O}_X) un espace analytique complexe de dimension finie. Soit

$x \in (X, \mathcal{O}_X)$, notons $\mathfrak{m}_{X,x}$ l'idéal maximal de $\mathcal{O}_{X,x}$ et $\text{gr } \mathcal{O}_{X,x} = \bigoplus_{v \geq 0} \mathfrak{m}_{X,x}^v / \mathfrak{m}_{X,x}^{v+1}$

la \mathbb{C} -algèbre graduée relativement à $\mathbb{N}_{X,x}$. On désigne par $C_{X,x} = \text{Spec}(\text{gr } \mathcal{O}_{X,x})$ le cône tangent de Zariski en x à (X, \mathcal{O}_X) .

Corollaire

Si $C_{X,x}$ est de Cohen-Macaulay en x , (X, \mathcal{O}_X) l'est aussi.

Démonstration : Le problème est local en x . Supposons $\dim_x X = q$ et soit I l'idéal de $\mathbb{C}\{u, v\}$ correspondant au germe en x défini par (X, \mathcal{O}_X) . On peut supposer que $I = (h_1, h_2, \dots, h_r)$ et $\text{in}[I] = (\text{in}(h_1), \text{in}(h_2), \dots, \text{in}(h_r))$. D'après le théorème 1 et le théorème de paramétrisation locale, on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 D_\varepsilon \times U \times V \supset Y & \xrightarrow{\text{pr}_Y} & D_\varepsilon \\
 \downarrow \pi & \nearrow \text{pr}_\varepsilon & \\
 D_\varepsilon \times U & &
 \end{array}$$

où U (resp. V) est un polydisque ouvert de centre 0 dans \mathbb{C}^q (resp. \mathbb{C}^p),

$D_\varepsilon = \{t \in \mathbb{C} ; |t| < \varepsilon\}$, (Y, \mathcal{O}_Y) est le sous-espace analytique fermé de

$D_\varepsilon \times U \times V$ défini par les $\frac{h_i(tu, tv)}{t^{n_i}}$ où $1 \leq i \leq r$ et $n_i = \text{val}(h_i)$,

pr_ε est la projection donc un morphisme plat, π induit par la projection est un morphisme fini et pr_Y induit par la projection est un morphisme plat en $(0, 0, 0)$.

Soit $t \in D_\varepsilon$, on note (Y_t, \mathcal{O}_{Y_t}) la fibre de (Y, \mathcal{O}_Y) au dessus de t et

$\pi_t = \pi|_{Y_t}$. π_t induit un morphisme d'anneaux $\mathcal{O}_{U,0} = \mathbb{C}\{u\} \longrightarrow \mathcal{O}_{Y_t, (t,0,0)} = \mathcal{O}_{Y_t}$

qui fait de \mathcal{O}_{Y_t} un $\mathbb{C}\{u\}$ -module de type fini.

Lemme 2 .

Les conditions suivantes sont équivalentes :

- i) O_{Y_t} est un $\mathbb{C}\{u\}$ -module plat (i. e. π_t est plat en $(t, 0, 0)$).
- ii) O_{Y_t} est un $\mathbb{C}\{u\}$ -module libre .
- iii). O_{Y_t} est un anneau de Cohen-Macaulay.

Démonstration : i) \Leftrightarrow ii) par [S. Prop. 20, IV-33]. On sait que

$\dim O_{Y_t} = \dim \mathbb{C}\{u\} = q$ par construction, or $\mathbb{C}\{u\}$ est un anneau régulier d'où ii) \Leftrightarrow iii) grâce à [S. Prop. 22, IV-37].

On a le critère de platitude par fibres suivant [cf. E. G. A. (IV), th. 11. 3. 10 p. 138] :

pr_ε est plat en $(t, 0)$ et π est plat en $(t, 0, 0)$

$\Leftrightarrow \text{pr}_Y$ et π_t sont plats en $(t, 0, 0)$.

D'après l'hypothèse et le lemme ci-dessus, π_0 est plat en $(0, 0, 0)$ car $O_{Y_0} = \mathbb{C}\{u, v\} / \text{in}[I]$. Donc d'après le critère ci-dessus π est plat en $(t, 0, 0)$ pour $|t|$ suffisamment petit, donc également π_t . Ce qui prouve d'après le lemme ci-dessus que pour $|t|$ suffisamment petit, (Y_t, O_{Y_t}) est de Cohen-Macaulay en $(t, 0, 0)$. D'où le résultat, puisque pour $t \neq 0$, l'homothétie de rapport $\frac{1}{t}$ induit localement en x un isomorphisme $(X, \mathcal{O}_X) \xrightarrow{\sim} (Y_t, \mathcal{O}_{Y_t})$.

§ 2. - Revêtement ramifié transverse à l'origine

On utilise les définitions, notations et résultats de [B. Chap. 0].

Soient U un polydisque ouvert de centre 0 dans \mathbb{C}^n et

$$X = \sum_{i=1}^{\ell} m_i X_i \text{ un revêtement ramifié de degré } k \text{ de } U, \text{ contenu dans } U \times \mathbb{C}^p$$

Si $0 \in X_i$, on désigne par $\text{mult}(X_i, 0)$ la multiplicité de X_i en 0 [cf. par exemple W, chap. 7, sect. 7] . On note t (resp. x) les coordonnées sur \mathbb{C}^n (resp. \mathbb{C}^p) et

$$P(t, x) = x^k - S_1(t) \cdot x^{k-1} + \dots + (-1)^k S_k(t)$$

le polynôme à valeurs dans $S_k(\mathbb{C}^p)$ associé à X ; pour $1 \leq m \leq k$ les $S_m(t)$ sont les fonctions symétriques élémentaires des points de \mathbb{C}^p "au dessus" de t .

On désigne par $\text{val}_0(S_m)$ la valuation de S_m en 0 , $\|t\| = \text{Max}_{1 \leq s \leq n} |t_s|$ et

$$\|x\| = \text{Max}_{1 \leq j \leq p} |x_j| .$$

Proposition 1.

On suppose que $X \cap \{0\} \times \mathbb{C}^p = \{0\}$.

Notons $\text{mult}(X, 0) = \sum_{i=1}^{\ell} m_i \text{mult}(X_i, 0)$. Alors, quitte à restreindre U , les conditions suivantes sont équivalentes :

- i) $C_{X, 0} \cap \{0\} \times \mathbb{C}^p = \{0\}$.
- ii) $\text{val}_0(S_m) \geq m$ pour $1 \leq m \leq k$.
- iii) Il existe $c > 0$ tel que pour tout $(t, x) \in X$, on ait : $\|x\| \leq c \|t\|$.
- iv) $\text{mult}(X, 0) = k$.

Démonstration : i) \Leftrightarrow iv) C'est une conséquence de [W, th. 7 P, p. 234] .

i) \Rightarrow iii) L'hypothèse implique qu'il existe $a > 0$ tel que $C_{X,0}$ soit contenu dans le cône $\|x\| \leq a \|t\|$. Il suffit alors de montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $r > 0$ tel que $X \cap \{\|(t,x)\| < r\}$ soit contenu dans le cône $\|x\| \leq (a + \varepsilon) \|t\|$. Supposons le contraire. Pour chaque entier $n > 0$, on peut alors trouver un point (t_n, x_n) de $X \cap \{\|(t,x)\| < \frac{1}{n}\}$ vérifiant $\|x_n\| > (a + \varepsilon) \|t_n\|$.

Soit f un germe en 0 de fonction analytique s'annulant sur X . Pour n assez grand, (t_n, x_n) est dans le domaine de définition d'un représentant de f et l'on a

$f(t_n, x_n) = \text{in}_0(f)(t_n, x_n) + g(t_n, x_n) = 0$ où $\text{in}_0(f)$ est la forme initiale de f

en 0. De plus si $q = \text{val}_0(f)$ on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{g(t_n, x_n)}{\|(t_n, x_n)\|^q} = 0$. Quitte à prendre

une suite extraite, on peut supposer que l'on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(t_n, x_n)}{\|(t_n, x_n)\|} = y$. On a

alors $\text{in}_0(f)(y) = 0$, ce qui prouve que $y \in C_{X,0}$ (en réalité, on doit éventuellement extraire une suite pour chaque f , or le faire pour un système fini suffit).

Or par construction y est dans le cône $\|x\| \geq (a + \varepsilon) \|t\|$, ce qui est absurde

puisque par hypothèse $C_{X,0}$ est contenu dans le cône $\|x\| \leq a \|t\|$.

iii) \Rightarrow i) C'est une conséquence des propriétés du cône tangent de Zariski en 0 à X .

ii) \Rightarrow iii) Parmi les $q_k = \dim_{\mathbb{C}} S_k(\mathbb{C}^p)$ fonctions scalaires correspondantes à P notons $(\xi_j)_{1 \leq j \leq p}$ celles de la diagonale

(i.e. $\xi_j(t, x) = x_j^k - S_{1j}(t) x_j^{k-1} + \dots + (-1)^k S_{kj}(t)$). Il suffit alors d'utiliser les

$(\xi_j)_{1 \leq j \leq p}$ et le lemme classique suivant :

Lemme 3.

Soient x, s_1, s_2, \dots, s_k des nombres complexes vérifiant la relation

$$x^k - s_1 x^{k-1} + \dots + (-1)^k s_k = 0.$$

Alors on a l'inégalité $|x| \leq 2 \max_{1 \leq m \leq k} |s_m|^{1/m}$

iii) \Rightarrow ii) Soit $1 \leq m \leq k$, alors d'après l'hypothèse il existe un entier positif

$N(k, m)$ tel que $\|S_m(t)\| \leq N(k, m) c^m \|t\|^m$. D'où le résultat.

Définition 1.

On dit qu'un revêtement ramifié X de degré k de U , contenu dans $U \times \mathbb{C}^p$ est transverse en 0 s'il vérifie l'une des conditions de la proposition précédente.

Remarque : Dans le cas où X est lisse, sans multiplicité et transverse en 0, la paramétrisation locale est simplement une carte locale.

§ 3. - Cycle tangent de Zariski à un germe de cycle

On rappelle qu'un germe de cycle est la donnée d'une combinaison linéaire

finie $\sum_{i=1}^l m_i (X_i, 0)$ à coefficients dans \mathbb{N}^* , de germes d'ensembles analytiques complexes irréductibles distincts. On dit qu'un tel germe de cycle est de

dimension pure n si chaque $(X_i, 0)$ est de dimension n .

Soit I un idéal de $\mathbb{C}\{y\} = \mathbb{C}\{y_1, y_2, \dots, y_{n+p}\}$, on suppose que le germe d'espace analytique complexe $(X, 0)$ correspondant à I est de dimension pure n .

On note $(C_X, 0)$ le germe d'espace analytique complexe correspondant à l'idéal

$\text{in}[I]$ de $\mathbb{C}\{y\}$. On désigne par $\text{cycle}(X, 0)$ (resp. $\text{cycle}(C_X, 0)$), le

germe de cycle sous-jacent à $(X, 0)$ (resp. $(C_X, 0)$) (cf. l'appendice a), et

[B, chap. V]).

On peut représenter $\text{cycle}(X, 0)$ comme un revêtement ramifié de degré k de U , contenu dans $U \times \mathbb{C}^P$ tel que $(X, 0) \cap \{0\} \times \mathbb{C}^P = \{0\}$ où U est un polydisque ouvert de centre 0 dans \mathbb{C}^n . De plus, on peut toujours supposer que $\text{cycle}(X, 0)$ en tant que revêtement ramifié est transverse en 0 (il suffit de réaliser la condition i) de la proposition 1.).

Théorème 2.

Soit X un revêtement ramifié de degré k de U , contenu dans $U \times \mathbb{C}^P$, transverse en 0 et de polynôme associé P . Alors

- 1) La partie homogène de degré k de P , notée $\text{in}(P)$, définit un cône qui est un revêtement ramifié de degré k de U , contenu dans $U \times \mathbb{C}^P$.
- 2) Supposons que X représente $\text{cycle}(X, 0)$, alors le revêtement ramifié défini par $\text{in}(P)$ représente $\text{cycle}(C_X, 0)$.

Démonstration : 1) D'après la proposition 1., pour $\lambda \in D = \{\lambda \in \mathbb{C}; |\lambda| < 1\}$ on a $P(\lambda t, \lambda x) = \lambda^k \text{in}(P)(t, x) + \lambda^{k+1} Q(t, x, \lambda)$. Pour $\lambda \neq 0$ $\frac{P(\lambda t, \lambda x)}{\lambda^k}$ est à valeurs dans $\text{Sym}^k(\mathbb{C}^P)$ qui est fermé dans $\bigoplus_{m=1}^k S^m(\mathbb{C}^P)$, ce qui montre par passage à la limite lorsque λ tend vers 0 que $\text{in}(P)$ est à valeurs dans $\text{Sym}^k(\mathbb{C}^P)$. D'où le résultat d'après [B. chap. 0].

2) On obtient d'après le 1) par $(\lambda, t, x) \rightsquigarrow \frac{P(\lambda t, \lambda x)}{\lambda^k}$

une famille analytique de cycles, (X_λ) , de $U \times \mathbb{C}^P$, de dimension pure n , paramétrée par D et telle que $\text{in}(P)$ est associé à X_0 . D'après le théorème 1. et [B, th. 8 (local)], on peut construire, pour $|\lambda|$ suffisamment petit, une famille analytique de cycles, (Y_λ) , de $U \times \mathbb{C}^P$, de dimension pure n , paramétrée par D_ε et telle que Y_0 représente $\text{cycle}(C_X, 0)$.

$(D_\varepsilon \times U \times \mathbb{C}^P \supset Y \xrightarrow{\pi} D_\varepsilon \times U, Y = (Y_\lambda))$ est D_ε -plat et $D_\varepsilon \times U$ -propre).

Soit $O(U)$ (resp. $O(Y_\lambda)$) l'anneau des fonctions analytiques sur U (resp. Y_λ), et soit $K(U)$ le corps des fractions de $O(U)$. Quitte à restreindre U , $E(Y_\lambda, U) = O(Y_\lambda) \otimes_{O(U)} K(U)$ est un $K(U)$ -espace vectoriel de dimension finie.

Soit $\ell \in (\mathbb{C}^P)^*$, (Y_λ) est obtenu "en Newton" [cf. B, chap. V] grâce à $\langle N_m^{Y_\lambda}(t), \ell^m \rangle = \text{Trace}_{Y_\lambda}(\ell^m)(t)$ où ℓ^m est l'endomorphisme de $E(Y_\lambda, U)$

induit par multiplication. Soit $\lambda \neq 0$. On a par définition de (X_λ) ,

$\text{Trace}_{X_\lambda}(\ell^m)(t) = \frac{1}{\lambda^m} \text{Trace}_{X_1}(\ell^m)(\lambda t)$. En utilisant l'isomorphisme

$(X_1, \mathcal{O}_{X_1}) \simeq (Y_\lambda, \mathcal{O}_{Y_\lambda})$ induit par l'homothétie de rapport $\frac{1}{\lambda}$, on peut lire

$\text{Trace}_{Y_\lambda}(\ell^m)(t)$ comme trace de $f(\lambda t, \lambda x) \otimes 1 \rightsquigarrow \ell(x)^m f(\lambda t, \lambda x) \otimes 1$.

Or $\text{Trace}_{X_1}(\ell^m)(\lambda t)$ correspond à la trace de

$$f(\lambda t, \lambda x) \otimes 1 \rightsquigarrow \ell(\lambda x)^m f(\lambda t, \lambda x) \otimes 1 = \lambda^m \ell(x)^m f(\lambda t, \lambda x) \otimes 1$$

d'où $\lambda^m \text{Trace}_{Y_\lambda}(\ell^m)(t) = \text{Trace}_{X_1}(\ell^m)(\lambda t)$. Ce qui montre que pour

$\lambda \in D_\varepsilon - \{0\}$, les cycles X_λ et Y_λ sont égaux. D'où le résultat par continuité.

On remarquera que $\text{cycle}(C_{X_\lambda}, 0)$ ne dépend que de $\text{cycle}(X, 0)$. En effet d'après le théorème précédent, $\text{cycle}(C_X, 0)$ ne dépend ni de la paramétrisation locale utilisée ni du choix de l'idéal I de $\mathbb{C}\{y\}$ correspondant à $(X, 0)$. D'où la

Définition 2.

Soit $(X, 0)$ un germe de cycle de dimension pure n . Soit I un idéal de $\mathbb{C}\{y\}$ dont le germe de cycle associé est $(X, 0)$. On appelle cycle tangent de Zariski à $(X, 0)$ le germe de cycle, $(C_X, 0)$, associé à l'idéal $\text{in}[I]$ de $\mathbb{C}\{y\}$.

Application.

Soit X un revêtement ramifié de degré k de U , contenu dans $U \times \mathbb{C}^p$, transverse en 0 et d'équations canoniques $P(t, x) = 0$. Alors $\text{in}(P)(t, x) = 0$ donne des équations explicites du cône tangent de Zariski en 0 à X .

APPENDICE

On se propose, d'une part de préciser la nature algébrique du cycle sous-jacent à un espace analytique complexe de dimension finie défini dans [B, chap. V], d'autre part de montrer grâce à [D] que si G est un idéal de $A = \mathbb{C}\{t, x\}$ dont le germe de cycle associé $\text{cycle}(X, 0)$ est de dimension pure, la multiplicité algébrique de A/G et la multiplicité géométrique de $\text{cycle}(X, 0)$ sont égales. En particulier on obtient en utilisant le théorème 2. une démonstration géométrique de l'égalité des multiplicités algébriques de A/G et $A/\text{in}[G]$.

a) cycle sous-jacent à un espace analytique complexe de dimension finie.

Soit (X, \mathcal{O}_X) un espace analytique complexe de dimension finie, on note $(\text{red } X, \mathcal{O}_{\text{red } X})$ le réduit associé. Soit $S(X)$ le lieu singulier de $\text{red } X$, on note $(X'_i)_{i \in I}$ les composantes connexes de $\text{red } X - S(X)$ et $X_i = \overline{X'_i}$ les composantes irréductibles de $\text{red } X$. Soit $\xi \in \text{red } X - S(X)$, grâce à un plongement au voisinage de ξ , on peut faire de $\mathcal{O}_{X, \xi}$ un $\mathcal{O}_{\text{red } X, \xi}$ -module de type fini.

Posons $\text{mult}_{\xi}(X) = \text{rg}_{\mathcal{O}_{\text{red } X, \xi}} \mathcal{O}_{X, \xi}$. Cet entier ne dépend que de ξ et

(X, \mathcal{O}_X) . En effet on a le résultat suivant :

Proposition 2.

Notons $\mathcal{O}_{X, \xi} = \mathcal{O}$ et η le nilradical de \mathcal{O} . Alors

i) $\ell_{\mathcal{O}_{\eta}}(\mathcal{O}_{\eta})$ est non nulle et finie .

ii) $\text{mult}_{\xi}(X) = \ell_{\mathcal{O}_{\eta}}(\mathcal{O}_{\eta})$.

Démonstration: i) Puisque $\xi \in \text{red } X - S(X)$, $\mathcal{O}_{\text{red } X, \xi} = \mathcal{O}_{\text{red}} = \mathcal{O} / \eta$ est régulier donc intègre et η est un idéal premier minimal de \mathcal{O} . Or \mathcal{O} est nœtherien, d'où le résultat d'après [B.A.C, (IV), cor. 1, p. 136 et cor. 2, p. 148]

ii) D'après i) et puisque \mathcal{O}_η est un $(\mathcal{O}_{\text{red}})_\eta$ -espace vectoriel de dimension finie on a $\ell_{\mathcal{O}_\eta}(\mathcal{O}_\eta) = \dim_{(\mathcal{O}_{\text{red}})_\eta} \mathcal{O}_\eta$ car $(\mathcal{O}_{\text{red}})_\eta = \mathcal{O}_\eta / \eta \cdot \mathcal{O}_\eta$ est le corps résiduel de \mathcal{O}_η . Or c'est aussi le corps des fractions de \mathcal{O}_{red} , d'où le résultat par définition du rang.

De plus, $\text{mult}_\xi(X)$ ne dépend que de la composante connexe contenant ξ . Posons $\text{mult}(X) [X_i] = \text{mult}_\xi(X)$ si $\xi \in X'_i$. On peut alors définir le cycle de (X, \mathcal{O}_X) , sous-jacent à (X, \mathcal{O}_X) par $\text{cycle } X = \sum_{i \in I} \text{mult}(X) [X_i] \cdot X_i$.

b) Multiplicité géométrique et multiplicité algébrique.

Soit \mathcal{Q} un idéal de $A = \mathbb{C}\{t, x\}$, on note $(\mathcal{P}_i)_{i \in I}$, l'ensemble fini des idéaux premiers minimaux de \mathcal{Q} et l'on suppose que pour tout $i \in I$, la dimension de Krull de l'anneau A/\mathcal{P}_i est égale à n . Soient $(X, 0)$ le germe d'espace analytique complexe correspondant à l'idéal \mathcal{Q} et

$\text{cycle}(X, 0) = \sum_{i \in I} m_i(X_i, 0)$ son germe de cycle sous-jacent.

On désigne par $\text{mult}(\text{cycle}(X, 0)) = \sum_{i \in I} m_i \text{mult}(X_i, 0)$ la multiplicité géométrique de $\text{cycle}(X, 0)$.

On peut représenter $\text{cycle}(X, 0)$ comme un revêtement ramifié

$$X = \sum_{i \in I} m_i X_i \text{ de degré } k = \sum_{i \in I} m_i \text{ deg } X_i \text{ de } U, \text{ contenu dans } U \times \mathbb{C}^p$$

et tel que $X \cap \{0\} \times \mathbb{C}^p = \{0\}$ où U est un polydisque ouvert de centre 0 dans \mathbb{C}^n .

Soit $i \in I$, alors puisque \mathfrak{p}_i est un élément minimal de $\text{Ass}(A/G)$, $\ell_{A_{\mathfrak{p}_i}}(A/G)_{\mathfrak{p}_i}$ est non nulle et finie d'après [B. A. C., (IV), cor. 2, p. 148].

Proposition 3.

Pour tout $i \in I$, on a $m_i = \ell_{A_{\mathfrak{p}_i}}(A/G)_{\mathfrak{p}_i}$.

Démonstration : 1) cas irréductible

On suppose que $(\mathfrak{p}_i)_{i \in I}$ est réduit à un seul élément \mathfrak{p} , c'est-à-dire que $X = m | X |$. Dans ce cas, on doit montrer que $m = \ell_{A_{\mathfrak{p}}}(A/G)_{\mathfrak{p}}$. La projection induit un morphisme fini $\pi : X \longrightarrow U$, et l'on peut donc supposer que

$$t \longmapsto \text{rg}_{\mathbb{C}_{U,t}}(\pi_* \mathcal{O}_X) = \sum_{\xi = (t,x)} \text{rg}_{\mathbb{C}_{U,t}} \mathcal{O}_{X,\xi} \text{ est constante sur } U. \text{ Si}$$

K (resp. k) désigne le corps des fractions de A/\mathfrak{p} (resp. $\mathbb{C}\{t\}$) on a

$$\text{deg } |X| = [K : k] = \text{rg}_{\mathbb{C}\{t\}} A/\mathfrak{p} \text{ d'où } \text{rg}_{\mathbb{C}\{t\}} A/G = m \text{rg}_{\mathbb{C}\{t\}} A/\mathfrak{p}. \text{ Il}$$

suffit donc de démontrer le lemme suivant :

Lemme 4.

$$\text{rg}_{\mathbb{C}\{t\}} A/G = \ell_{A_{\mathfrak{p}}}(A/G)_{\mathfrak{p}} \text{rg}_{\mathbb{C}\{t\}} A/\mathfrak{p}.$$

Démonstration : i) $\text{rg}_{\mathbb{C}\{t\}} A/G \geq \ell_{A_{\mathfrak{p}}}(A/G)_{\mathfrak{p}} \text{rg}_{\mathbb{C}\{t\}} A/\mathfrak{p}$.

Puisque A est nœtherien, il existe une suite de composition $(M_i)_{0 \leq i \leq n}$ de A/G telle que pour $0 \leq i \leq n-1$, M_i / M_{i+1} soit isomorphe à A/\mathfrak{p}_i où $\mathfrak{p}_i \in \text{Spec}(A)$, de plus \mathfrak{p} est minimal parmi les \mathfrak{p}_i [B. A. C., (IV), th. 1, p. 136 et th. 2, p. 137]. Puisque $\varphi_A A_{\mathfrak{p}}$ est exact, $((M_i)_{\mathfrak{p}})$ est une suite de

composition de $(A/G)_{\mathfrak{P}}$ et $(M_i)_{\mathfrak{P}} / (M_{i+1})_{\mathfrak{P}}$ est isomorphe à $(A/\mathfrak{P}_i)_{\mathfrak{P}}$. Si $\mathfrak{P} \notin \mathfrak{P}_i$, $\mathfrak{P}_i A_{\mathfrak{P}} = A_{\mathfrak{P}}$ d'où $(A/\mathfrak{P}_i)_{\mathfrak{P}} = 0$ et si $\mathfrak{P}_i = \mathfrak{P}$, $(A/\mathfrak{P}_i)_{\mathfrak{P}}$ est le corps résiduel de $A_{\mathfrak{P}}$ ce qui prouve que pour les i tels que $\mathfrak{P}_i = \mathfrak{P}$, $((M_i)_{\mathfrak{P}})$ est une suite de Jordan-Hölder de $(A/G)_{\mathfrak{P}}$.

D'où $\ell_{A_{\mathfrak{P}}}(A/G)_{\mathfrak{P}} = \{ \text{nombre des indices } i \text{ tels que } \mathfrak{P}_i = \mathfrak{P} \}$.

Puisque $k \otimes_{\mathbb{C}\{t\}}$ est exact, $(k \otimes_{\mathbb{C}\{t\}} M_i)$ est une suite de sous- k -espaces vectoriels de $k \otimes_{\mathbb{C}\{t\}} A/G$ et $k \otimes_{\mathbb{C}\{t\}} M_i / k \otimes_{\mathbb{C}\{t\}} M_{i+1}$ est isomorphe à $k \otimes_{\mathbb{C}\{t\}} A/\mathfrak{P}_i$.

Par définition on a :

$$\text{rg}_{\mathbb{C}\{t\}} A/G = \dim_k k \otimes_{\mathbb{C}\{t\}} A/G \quad \text{et} \quad \text{rg}_{\mathbb{C}\{t\}} A/\mathfrak{P} = \dim_k k \otimes_{\mathbb{C}\{t\}} A/\mathfrak{P}$$

$$\text{d'où} \quad \text{rg}_{\mathbb{C}\{t\}} A/G \geq \ell_{A_{\mathfrak{P}}}(A/G)_{\mathfrak{P}} \text{rg}_{\mathbb{C}\{t\}} A/\mathfrak{P}$$

$$\text{ii)} \quad \text{rg}_{\mathbb{C}\{t\}} A/G \leq \ell_{A_{\mathfrak{P}}}(A/G)_{\mathfrak{P}} \text{rg}_{\mathbb{C}\{t\}} A/\mathfrak{P}$$

Soit $\ell = \ell_{A_{\mathfrak{P}}}(A/G)_{\mathfrak{P}}$, il existe une suite de Jordan-Hölder $(N_i)_{0 \leq i \leq \ell}$ de $(A/G)_{\mathfrak{P}}$. Puisque $\mathfrak{P} = \text{Ass}(A/G)$, l'homomorphisme canonique $A/G \rightarrow (A/G)_{\mathfrak{P}}$ est injectif [B. A. C, (IV), prop. 6, p. 135]. Posons $M_i = N_i \cap A/G$, on obtient ainsi une suite de composition de A/G , de plus M_i/M_{i+1} est isomorphe à un sous- A/\mathfrak{P} -module de A/\mathfrak{P} . En effet, par construction M_i/M_{i+1} est un sous- A/\mathfrak{P} -module de $K = A/\mathfrak{P} \otimes_A A_{\mathfrak{P}}$, de plus M_i/M_{i+1} est également un A -module de type fini, donc c'est aussi un A/\mathfrak{P} -module de type fini. Or M_i/M_{i+1} est un A/\mathfrak{P} -module sans torsion et de rang 1, il est donc isomorphe à un sous- A/\mathfrak{P} -module de A/\mathfrak{P} . Puisque $k \otimes_{\mathbb{C}\{t\}}$ est exact, $(k \otimes_{\mathbb{C}\{t\}} M_i)$ est une suite de sous- k -espaces vectoriels de $k \otimes_{\mathbb{C}\{t\}} A/G$ et $k \otimes_{\mathbb{C}\{t\}} M_i / k \otimes_{\mathbb{C}\{t\}} M_{i+1}$ est isomorphe à $k \otimes_{\mathbb{C}\{t\}} M_i / M_{i+1}$. D'après ce qui précède on a pour $0 \leq i \leq \ell-1$

$$\dim_k k \otimes_{\mathbb{C}\{t\}} M_i/M_{i+1} \leq \dim_k k \otimes_{\mathbb{C}\{t\}} A/\mathfrak{p} \quad \text{d'où}$$

$$\text{rg}_{\mathbb{C}\{t\}} A/G \leq \sum_{\mathfrak{p}} \ell_{A_{\mathfrak{p}}} (A/G)_{\mathfrak{p}} \text{rg}_{\mathbb{C}\{t\}} A/\mathfrak{p}. \quad \text{Ce qui prouve le résultat.}$$

2) cas général.

Soit $G = \bigcap_{i \in J} Q_i$ une décomposition primaire réduite de G , alors $I \subset J$.

Soit $i \in I$, alors $\mathfrak{p}_i = \sqrt{Q_i}$ est isolé et $Q_i = \{a \in A; \text{il existe } r \in A - \mathfrak{p}_i \text{ et } ra \in G\}$

d'où $(Q_i/G)_{\mathfrak{p}_i} = 0$, ce qui prouve en utilisant la suite exacte de A -modules

$$0 \longrightarrow Q_i/G \longrightarrow A/G \longrightarrow A/Q_i \longrightarrow 0 \quad \text{et l'additivité des longueurs que}$$

$$\ell_{A_{\mathfrak{p}_i}} (A/Q_i)_{\mathfrak{p}_i} = \ell_{A_{\mathfrak{p}_i}} (A/G)_{\mathfrak{p}_i}. \quad \text{On peut "éviter" toutes les composantes}$$

immergées de G , d'où en utilisant le début de 1) et le lemme 4. on a

$$m_i \text{rg}_{\mathbb{C}\{t\}} A/\mathfrak{p}_i = \text{rg}_{\mathbb{C}\{t\}} A/Q_i = \ell_{A_{\mathfrak{p}_i}} (A/G)_{\mathfrak{p}_i} \text{rg}_{\mathbb{C}\{t\}} A/\mathfrak{p}_i, \quad \text{ce qui prouve}$$

le résultat.

Notons $m(A/G)$ (resp. $m(A/\mathfrak{p}_i)$) la multiplicité de l'anneau local A/G

(resp. A/\mathfrak{p}_i) i.e. la multiplicité de l'idéal maximal de cet anneau. En utilisant

[S, V-3], on peut démontrer la formule d'additivité suivante :

$$(A) \quad m(A/G) = \sum_{i \in I} \ell_{A_{\mathfrak{p}_i}} (A/G)_{\mathfrak{p}_i} m(A/\mathfrak{p}_i).$$

Proposition 4.

Supposons que le revêtement ramifié X de degré k de U , contenu dans

$U \times \mathbb{C}^P$ et représentant cycle $(X, 0)$ soit transverse en 0 .

Alors $m(A/G) = \text{mult}(\text{cycle}(X, 0)) = k$.

Démonstration : D'après la proposition 1.iv) , on a

$$k = \sum_{i \in I} m_i \deg X_i = \sum_{i \in I} m_i \text{mult}(X_i, 0). \text{ Or d'après [D, th. 6. 5, p. 198]}$$

on a $\text{mult}(X_i, 0) = m(A/p_i)$ d'où le résultat d'après la formule (A) et la proposition 3.

Corollaire.

On a $m(A/G) = m(A/\text{in}[G])$.

Démonstration : C'est une conséquence du théorème 2. et de la proposition 4.

BIBLIOGRAPHIE

- [B. A. C.] N. BOURBAKI Algèbre commutative. Hermann (1961).
- [B] D. BARLET Espace analytique réduit des cycles analytiques complexes compacts d'un espace analytique complexe de dimension finie. Fonct. de Plus. Var. Compl. II, sémin. F. Norguet 1974-75. Lect. Notes in Math. 482, Springer-Verlag (1975) p. 1-158.
- [D] R. DRAPER Intersection theory in analytic geometry. Math. Ann. 180 (1969) p. 175-204.
- [E. G. A.] A. GROTHENDIECK et J. DIEUDONNE Eléments de géométrie algébrique. Publ. Math. I. H. E. S. 28 (1966).
- [M] B. MALGRANGE Frobenius avec singularités - 1. codimension un Publ. Math. I. H. E. S. 46 (1976) p. 163-174.
-
- [S] J. P. SERRE Algèbre locale. Multiplicités. Lect. Notes in Math. 11, Springer Verlag (1965).
- [W] H. WHITNEY Complex analytic varieties. Addison-Wesley (1972).

Cycle exceptionnel de l'éclatement d'un idéal
définissant l'origine de C^n et applications

§ 0 . Introduction.

On note \mathfrak{m} l'idéal maximal de $C(z) = C(z_1, z_2, \dots, z_n)$.

Soit I un idéal \mathfrak{m} -primaire de $C(z)$, c'est-à-dire définissant l'origine de C^n ($\sqrt{I} = \mathfrak{m}$), alors I est engendré par $n+p$ éléments de $C(z)$ notés f_1, f_2, \dots, f_{n+p} où $p \geq 0$ et l'on peut supposer que l'on a un morphisme analytique fini $f : U \longrightarrow C^{n+p}$ dont les composantes sont des représentants des f_i pour $1 \leq i \leq n+p$ où U est un polydisque ouvert de C^n centré en o .

On désigne par $\pi : Z \longrightarrow U$ l'éclatement de U relativement à I et $E = \text{Proj} \left(\bigoplus_{\nu \geq 0} I^\nu / I^{\nu+1} \right)$ sa fibre exceptionnelle. On rappelle que si $\sigma : C^{n+p} \setminus \{o\} \longrightarrow P^{n+p-1}$ est la surjection canonique, Z est l'adhérence dans $U \times P^{n+p-1}$ du graphe de l'application analytique $F : U \setminus \{o\} \longrightarrow P^{n+p-1}$ définie par $F(z) = \sigma [f(z)]$ et qu'ensemblément on a $|E| = |\pi^{-1}(o)|$, π étant induit par la première projection.

Dans ce qui suit, on donne de "bonnes" équations de $|E|$ et plus précisément on indique une méthode explicite, après un choix convenable des générateurs de I , pour déterminer le cycle X de P^{n+p-1} sous-jacent à E . Pour cela, on montre (cf. § 4) que si $C(f_*(U), o)$ est le cycle tangent de Zariski au germe de cycle $(f_*(U), o)$ induit par image directe, alors on a $X = \text{Proj}[C(f_*(U), o)]$;

il suffit alors, grâce aux § 2 et 3 d'utiliser les résultats de [9] pour déterminer X . On donne également un critère effectif pour caractériser les éléments entiers sur un idéal $J = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ engendré par un système de paramètres de $C(z)$ (cf. § 3) ; en particulier, on indique un procédé pour construire pour tout $h \in \bar{I}$ où \bar{I} est la clôture intégrale de I dans $C(z)$, une relation intégrale explicite de h sur I , de degré la multiplicité $e(I)$ au sens de Samuel de l'idéal I . Au § 5, on s'intéresse à l'éclatement d'une famille d'idéaux ponctuels paramétrée par un germe d'espace analytique réduit S et l'on montre que, sous l'hypothèse d'équimultiplicité relative, le germe d'application $S \longrightarrow \text{Chow}_{n-1}^k(P^q)$ défini par les cycles exceptionnels des éléments de la famille est analytique, ce qui permet d'aborder au § 6 l'étude de la stratification naturelle, par la multiplicité, du schéma de Hilbert $\text{Hilb}^{\ell}(\mathcal{O}_n)$ des idéaux de longueur ℓ définissant l'origine de C^n .

§ 1. Remarques préliminaires.

Le morphisme fini $f : U \longrightarrow C^{n+p}$ induit un morphisme fini et surjectif d'espaces analytiques complexes réduits et irréductibles, noté encore $f : U \longrightarrow V$, où $V = f(U)$. On note π_V l'idéal maximal de $\mathcal{O}_{V,0}$, alors via f on a $\pi_V.C(z) = I$ et d'après la propriété universelle des éclatements on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 U \times P^{n+p-1} \supset Z & \xrightarrow{f \times \text{id} \mid Z} & \tilde{V} \subset V \times P^{n+p-1} \\
 \downarrow \pi & & \downarrow \pi_V \\
 U & \xrightarrow{f} & V \subset C^{n+p}
 \end{array}$$

(*)

où $\pi_V : \tilde{V} \longrightarrow V$ est l'éclatement de V relativement à l'idéal \mathfrak{m}_V .

On a $\pi_V^{-1}(o) = \text{Proj} \left(\bigoplus_{\nu \geq 0} \mathfrak{m}_V^\nu / \mathfrak{m}_V^{\nu+1} \right) = \text{Proj} (C(V, o))$ où $C(V, o)$

est le cône tangent de Zariski de V en o .

Proposition 1. On a $|\pi_V^{-1}(o)| = |\pi^{-1}(o)|$.

Démonstration : On a $|\pi_V^{-1}(o)| \subset |\pi^{-1}(o)|$ car le diagramme (*) est commutatif. Inversement, soit $(o, \sigma(y)) \in \pi^{-1}(o)$, alors $y \in C(V, o) \setminus \{o\}$ et d'après ([17]), p. 210 il existe une suite $(y_k) \in V \setminus \{o\}$ et une suite $(\lambda_k) \in \mathbb{C}^*$ telles que $\lim_{k \rightarrow +\infty} \lambda_k y_k = y$

et $\lim_{k \rightarrow +\infty} y_k = o$. Pour tout k , soit $z_k \in U$ tel que $f(z_k) = y_k$;

puisque f est propre et $f^{-1}(o) = o$, il existe une suite extraite $(z_k) \in U \setminus \{o\}$ telle que $\lim_{s \rightarrow +\infty} z_k = o$. On a alors

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} \sigma [f(z_k)] = \lim_{s \rightarrow +\infty} \sigma(\lambda_k y_k) = \sigma(y).$$

On a donc $|\pi_V^{-1}(o)| \subset |\pi^{-1}(o)|$, ce qui prouve le résultat.

L'espace analytique $E = (f \circ \pi)^{-1}(o)$ est un diviseur de Z et les composantes irréductibles $(X_i)_{1 \leq i \leq q}$ de E sont des sous-variétés projectives de \mathbb{P}^{n+p-1} (en général non lisses) de dimension $n-1$. En utilisant ce qui précède, on note

$X = \sum_{i=1}^q \alpha_i X_i$ (resp. $Y = \sum_{i=1}^q \delta_i X_i$) le cycle de \mathbb{P}^{n+p-1} sous-jacent

à E (resp. $\pi_V^{-1}(o)$), et $\deg f$ le degré générique du morphisme

$f : U \longrightarrow V$.

Définition 1 . On appelle X le cycle exceptionnel de l'éclatement de l'idéal I .

Proposition 2 . En tant que cycles de P^{n+p-1} , on a

$$X = \text{deg } f \cdot Y.$$

Démonstration : Puisque $\sqrt{I} = \mathfrak{m}$, on a $\mathfrak{m}^s \subset I$ pour s convenable ; on peut donc supposer que $I \subset C[z_1, z_2, \dots, z_n]$ et $U = C^n$, alors V est une variété algébrique et d'après ([8], p. 166), Z et \tilde{V} le sont aussi ; de plus, on a $\text{deg } f = [K(Z) : K(\tilde{V})]$. Soit x_1 (resp. y_1) le point générique de X_1 sur E (resp. $\pi_V^{-1}(o)$) , alors on a

$$\mathfrak{A}_{E, x_1} = \mathfrak{g}_{\mathfrak{R}_1} \quad (\text{resp. } \mathfrak{A}_{\pi_V^{-1}(o), y_1} = \mathfrak{F}_{\mathfrak{P}_1}), \quad \text{où } \mathfrak{g} = \bigoplus_{\nu > 0} \mathfrak{m}_V^\nu / \mathfrak{m}_V^{\nu+1} \quad (\text{resp.}$$

$$\mathfrak{F} = \bigoplus_{\nu > 0} \mathfrak{m}_V^\nu / \mathfrak{m}_V^{\nu+1}) \quad \text{et } \mathfrak{R}_1 \text{ (resp. } \mathfrak{P}_1) \text{ est l'idéal premier minimal}$$

de \mathfrak{g} (resp. \mathfrak{F}) correspondant à X_1 . D'après les propriétés de f et la proposition 1, on a un morphisme local, fini et injectif d'anneaux locaux noethériens intègres $A = \mathfrak{A}_{\pi_V^{-1}(o), y_1} \xrightarrow{\quad} B = \mathfrak{A}_{Z, x_1}$;

de plus d'après la propriété universelle des éclatements on a

$$\mathfrak{A}_{\pi_V^{-1}(o), y_1} = A / \xi A \quad \text{et} \quad \mathfrak{A}_{Z, x_1} = B / \xi B . \quad \text{L'anneau } A / \xi A \text{ est artinien}$$

donc pour $\nu \gg 0$, on a $(\mathfrak{m}_A / \xi \mathfrak{m}_A)^\nu = \mathfrak{m}_A^\nu / \xi A \cap \mathfrak{m}_A^\nu = 0$ soit

$$\mathfrak{m}_A^\nu \subset \xi A \subset \mathfrak{m}_A, \quad \text{ce qui montre que } \xi A \text{ est un idéal } \mathfrak{m}_A\text{-primaire}$$

de A . D'après la formule de projection de Samuel ([18], p.297),

ξB est un idéal \mathfrak{m}_B -primaire de B et l'on a

$$[B : A] \cdot e(\xi A) = [B / \mathfrak{m}_B : A / \mathfrak{m}_A] \cdot e(\xi B) .$$

Puisque le corps des fractions de A (resp. B) est $K(\tilde{V})$ (resp. $K(Z)$) on a $[B : A] = \deg f$; de plus, on a $B / \mathfrak{m}_B \cong K(X_1) \cong A / \mathfrak{m}_A$, d'où $\deg f \cdot e(\xi A) = e(\xi B)$. Puisque la dimension de Krull de A (resp. B) est 1, on a pour $\nu \gg 0$:

$$e(\xi A) = \ell_A(\xi^\nu A / \xi^{\nu+1} A) \quad (\text{resp. } e(\xi B) = \ell_B(\xi^\nu B / \xi^{\nu+1} B)).$$

Par définition, et puisque ξ n'est pas un diviseur de zéro dans A (resp. B), on a pour $\nu \geq 0$:

$$\delta_1 = \ell_{A/\xi A}(A/\xi A) = \ell_A(A/\xi A) = \ell_A(\xi^\nu A / \xi^{\nu+1} A)$$

(resp. $\alpha_1 = \ell_B(\xi^\nu B / \xi^{\nu+1} B)$). D'où $\deg f \cdot \delta_1 = \alpha_1$, ce qui prouve le résultat.

§ 2. Préparation de I .

On note $e(I)$ la multiplicité de I (i.e. le coefficient normalisé de plus haut degré du polynôme de Hilbert-Samuel de I). On dit qu'un élément $h \in C(z)$ est entier sur un idéal \mathfrak{A} de $C(z)$ s'il existe une relation intégrale

$$h^s + a_1 h^{s-1} + \dots + a_{s-1} h + a_s = 0$$

dans $C(z)$ où $a_i \in \mathfrak{A}^i$ pour $1 \leq i \leq s$; l'ensemble des éléments de $C(z)$ entiers sur \mathfrak{A} est un idéal de $C(z)$, noté $\overline{\mathfrak{A}}$ et appelé clôture intégrale de \mathfrak{A} dans $C(z)$ (cf. par exemple [15], chap. 0).

Lemme . Il existe J un idéal m -primaire de $C(z)$ contenu dans I tel que :

- i) J soit engendré par un système de paramètres de $C(z)$, noté (f_1, f_2, \dots, f_n) ;
- ii) $e(J) = e(I)$;
- iii) il existe $r \geq 0$ tel que $J I^r = I^{r+1}$;
- iv) $\bar{J} = \bar{I}$;
- v) les images des f_i ($1 \leq i \leq n$) dans le C -espace vectoriel I/mI soient linéairement indépendantes.

Démonstration : Si l'on se donne $I = (u_1, u_2, \dots, u_N)$, alors d'après

([12], Th. 2, p. 154 et § 7), il existe des $a_{ij} \in C$ ($1 \leq i \leq n$ et

$1 \leq j \leq N$) "suffisamment généraux" tels que si $f_i = \sum_{j=1}^N a_{ij} u_j$ pour

$1 \leq i \leq n$, alors l'idéal $J = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ vérifie les propriétés i) à iv). De plus, J est une réduction de I (i.e. J est contenu dans I et vérifie iii)) minimale pour l'inclusion et d'après ([12], p. 148) on a $J n mI = mJ$. D'où le v) d'après i).

Proposition 3 . Soit $n + p = \dim_C(I/mI)$. Il existe un système minimal

de générateurs $(f_1, f_2, \dots, f_n, f_{n+1}, \dots, f_{n+p})$ de l'idéal I , un polydisque ouvert U de C^n centré en o et une constante $c > 0$ tels que :

- a) l'idéal de $C(z)$, $(f_1, f_2, \dots, f_n) = J$ soit m -primaire et $e(J) = e(I)$;

b) chaque f_{n+j} ($1 \leq j \leq p$) soit entier sur J ou encore
pour tout $z \in U$ on ait :

$$(T) \quad \text{Max}_{1 \leq j \leq p} |f_{n+j}(z)| \leq c \cdot \text{Max}_{1 \leq i \leq n} |f_i(z)| .$$

Démonstration : a) est une conséquence du lemme précédent et du lemme de Nakayama.

b) s'obtient grâce au iv) du lemme précédent (cf. par exemple [15], chap. 0).

On écrira désormais I sous la forme $I = (J; \Psi)$ où
 $J = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ et $\Psi = (f_{n+1}, f_{n+2}, \dots, f_{n+p})$ vérifient
 les propriétés a) et b) de la proposition 3.

§ 3 . Polynôme caractéristique de Ψ par rapport à J où $I = (J; \Psi)$ et applications.

On utilise les définitions, notations et résultats de Barlet (cf. [1], chap. 0).

Quitte à restreindre U , il existe un polydisque ouvert U_0 de \mathbb{C}^n centré en o tel que le morphisme $\varphi : U \longrightarrow U_0$ dont les composantes sont les f_i pour $1 \leq i \leq n$, soit fini, plat et de degré $k = \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[z]/J = e(J) = e(I)$; on désigne par

$g' : U_0 \longrightarrow \text{Sym}^k(U)$ son morphisme associé

$(g'(t) = \langle z^{(1)}, z^{(2)}, \dots, z^{(k)} \rangle = \langle z^{(j)} \rangle$ sont les points de U

"au dessus" de $t \in U_0$, via φ). Soit $g = \text{Sym}^k(\Psi) \circ g' : U_0 \longrightarrow \text{Sym}^k(\mathbb{C}^p)$

$(g(t) = \langle \psi(z^{(j)}) \rangle)$, alors g définit un revêtement ramifié de degré k de U_0 , contenu dans $U_0 \times \mathbb{C}^p$ dont on note

$$P(t, x) = x^k - S_1(t).x^{k-1} + \dots + (-1)^k S_k(t)$$

le polynôme à valeurs dans $S_k(\mathbb{C}^p)$ associé ; pour $1 \leq m \leq k$, les $S_m(t)$ sont les fonctions symétriques vectorielles élémentaires des points $\langle \psi(z^{(j)}) \rangle$ de \mathbb{C}^p .

Puisque le morphisme fini et surjectif $f : U \longrightarrow V = f(U)$ a pour composantes les f_i ($1 \leq i \leq n+p$), d'après ce qui précède, on a ensemblistement l'égalité suivante :

$$V = \{ (t, x) \in U_0 \times \mathbb{C}^p ; P(t, x) = 0 \}.$$

De plus, d'après l'inégalité (T) de la proposition 3, le polynôme P est transverse en o (i.e. $C(V, o) \cap \{o\} \times \mathbb{C}^p = \{o\}$, cf. par exemple [9], § 2).

Avant de poursuivre, on donne ci-dessous quelques compléments sur la construction de P .

Pour $1 \leq m \leq k$, on note $N_m(t)$ les fonctions de Newton des points $\langle \psi(z^{(j)}) \rangle$ de \mathbb{C}^p , alors pour déterminer P il suffit de connaître

$$\langle N_m(t), l^m \rangle = \sum_{j=1}^k l[\psi(z^{(j)})]^m,$$

pour tout $t \in U_0$, $l \in (\mathbb{C}^p)^*$ et $1 \leq m \leq k$. Grâce à la formule de Cauchy, on a

$$\langle N_m(t), l^m \rangle = \frac{1}{(2i\pi)^n} \int_{\Gamma} \frac{l[\psi(z)]^m J(\varphi)(z)}{\prod_{s=1}^n (f_s(z) - t)} dz,$$

où Γ_z est le n -cycle réel défini, pour $z > 0$ convenable, par
 $\Gamma_z = \{z \in \mathbb{C}^n ; |f_s(z)| = z \text{ pour } 1 \leq s \leq n\}$ et $J(\varphi)$ est le jacobien de φ . En fait, d'après le théorème de Stokes, si z est suffisamment petit, cette intégrale ne dépend pas de z (cf. par exemple [7], chap. 5).

D'après les hypothèses, $C(z)$ est via φ un $C(t)$ -module libre de rang k ; si $l \in (C^p)^*$ s'écrit $l = (l_{n+1}, l_{n+2}, \dots, l_{n+p})$ dans la base canonique, on désigne par $l(\Psi) = \sum_{i=1}^p l_{n+i} f_{n+i}$ le $C(t)$ -endomorphisme de $C(z)$ induit par multiplication, alors d'après ([1], p. 122), on a

$$\langle N_m(t), l^m \rangle = \text{Trace} [l(\Psi)^m](t).$$

De plus, on peut montrer qu'avec les notations précédentes on a :

$$\langle P(t, x), l^k \rangle = \det \begin{matrix} l(x) \cdot \text{id} & & \\ & & - l(\Psi) \end{matrix} \begin{matrix} \\ \\ C(z) \end{matrix} (t)$$

ce qui justifie la définition suivante :

Definition 2 . On appelle P le polynôme caractéristique de Ψ par rapport à J où $l = (J; \Psi)$. Si $\Psi = f_{n+1}$, on a alors

$$P(t, x) = \det \begin{matrix} x \cdot \text{id} & & \\ & & - f_{n+1} \end{matrix} \begin{matrix} \\ \\ C(z) \end{matrix} (t) \text{ et l'on retrouve le polynôme}$$

caractéristique habituel du $C(t)$ -endomorphisme de $C(z)$ induit par la multiplication par f_{n+1} .

Applications.

Soit $J = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ un idéal \mathfrak{m} -primaire de $C\{z\}$; il est engendré par une suite régulière et via $\varphi = (f_i)_{1 \leq i \leq n}$, $C\{z\}$ est un $C\{t\}$ -module libre de rang $k = \dim C\{z\}/J$. Si $h \in C\{z\}$, on désigne par

$$P_h(t, x) = x^k - S_1(t) x^{k-1} + \dots + (-1)^k S_k(t)$$

le polynôme caractéristique du $C\{t\}$ -endomorphisme de $C\{z\}$ induit par la multiplication par h et l'on note, pour $1 \leq m \leq k$, $S_m(t)$ (resp. $N_m(t) = \text{Trace}(h^m)(t)$) la m -ième fonction symétrique (resp. de Newton) élémentaire de $P_h(t, x)$.

Proposition 4. Soient $J = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ un idéal \mathfrak{m} -primaire de $C\{z\}$ et $h \in C\{z\}$, alors les conditions suivantes sont équivalentes

- i) $h \in \bar{J}$;
- ii) pour tout $1 \leq m \leq k$, $S_m(t) \in (t_1, t_2, \dots, t_n)^m$;
- iii) pour tout $1 \leq m \leq k$, $\text{Trace}(h^m)(t) \in (t_1, t_2, \dots, t_n)^m$.

Démonstration : ii) \Leftrightarrow iii) . D'après les relations universelles entre les fonctions de Newton et les fonctions symétriques élémentaires.

i) \Rightarrow ii). Puisque $h \in \bar{J}$, il existe un polydisque ouvert U de C^n , centré en o et une constante $K > 0$ tels que pour tout $z \in U$ on ait $|h(z)| \leq K \cdot \max_{1 \leq i \leq n} |f_i(z)|$. Ainsi, pour tout

$1 \leq m \leq k$ et tout t voisin de $o \in C^n$, on a

$$|S_m(t)| \leq C_k \cdot K^m \cdot \left(\max_{1 \leq i \leq n} |t_i| \right)^m, \text{ ce qui montre que } S_m \in (t_1, t_2, \dots, t_n)^m.$$

ii) \Rightarrow i). D'après le théorème de Hamilton-Cayley, on a $h^k - S_1 \circ \varphi \cdot h^{k-1} + \dots + (-1)^k S_k \circ \varphi = 0$ dans $C[z]$, ce qui montre, puisque pour tout $1 \leq m \leq k$, $S_m \circ \varphi \in (f_1, f_2, \dots, f_n)^m$, que P_h détermine une relation intégrale, de degré k , de h sur J .

Soit I un idéal \mathfrak{m} -primaire de $C[z]$, on peut écrire $I = (J; \Psi)$ (cf. § 2) où $J = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ est engendré par un système de paramètres, $\bar{I} = \bar{J}$ et $e(I) = e(J) = \dim_C C[z]/J$. Soit $h \in \bar{I}$, alors $h \in \bar{I} = \bar{J}$ et d'après la proposition précédente, le polynôme caractéristique P_h de h par rapport à J détermine une relation intégrale de degré $e(J) = e(I)$, de h sur J donc a fortiori sur I ; autrement dit, on a le résultat suivant :

Corollaire . Soit I un idéal \mathfrak{m} -primaire de $C[z]$, alors tout $h \in \bar{I}$ vérifie une relation intégrale explicite, de degré $e(I)$, sur I .

§ 4 . Détermination du cycle exceptionnel de l'éclatement de l'idéal $I = (J; \Psi)$.

Pour tout germe de cycle (Z, o) de dimension pure, on note $C(Z, o)$ le cycle tangent de Zariski à (Z, o) ; on rappelle (cf. [9], p. 158) que si \mathfrak{A} est un idéal de $C[t, x]$ dont le germe de cycle associé est (Z, o) , $C(Z, o)$ est le germe de cycle associé à l'idéal $\text{in}[\mathfrak{A}]$ de $C[t, x]$ engendré par les formes initiales d'éléments de \mathfrak{A} ; le germe de cycle $C(Z, o)$ ne dépend que du germe de cycle (Z, o) .

Theorème 1. Soit $I = (J; \Psi)$ un idéal \mathfrak{m} -primaire de $C(z)$. On désigne par P le polynôme caractéristique de Ψ par rapport à J , par $\text{in}(P)$ sa partie homogène de degré $e(I)$ et par X le cycle exceptionnel de I .

1) P représente le germe de cycle $(f_*(U), o)$ induit par image directe ;

2) $\text{in}(P)$ représente $C(f_*(U), o)$ et en tant que cycles de P^{n+p-1} on a $X = \{\text{in}(P) = 0\}$.

Démonstration : 1) Soit $m(\theta_{V,o})$ la multiplicité de l'anneau local $\theta_{V,o}$, d'après la formule de projection de Samuel ([18], p.297), on a via f ,

$$e(I) = e(\mathfrak{m}_V, C(z)) = \deg f \cdot m(\theta_{V,o}).$$

D'après les hypothèses et le § 3, le germe de cycle représenté par P s'écrit $m \cdot (V, o)$. D'après la transversalité de P en o et un résultat de Draper ([4]), on a $e(I) = m \cdot m(\theta_{V,o})$ (cf. par exemple [9]), d'où $\deg f = m$ d'après ce qui précède, ce qui prouve le résultat puisque par définition $(f_*(U), o) = \deg f \cdot (V, o)$.

2) D'après 1) et grâce à ([9], Th.2, p.157), $\text{in}(P)$ représente $C(f_*(U), o)$ puisque P est transverse en o . En tant que germes de cycles, on a $C(f_*(U), o) = \deg f \cdot C(V, o)$, ce qui montre d'après la proposition 2 que l'on a $X = \text{Proj}[C(f_*(U), o)]$ en tant que cycles de P^{n+p-1} , d'où le résultat.

Exemple : Soit $I = (y^2, xy, x^3)$ dans \mathbb{C}^2 , on peut écrire $I = (J; x^3)$ où $J = (y^2 + x^3, xy)$; en effet, J est engendré par un système de paramètres de $\mathbb{C}\{x, y\}$ et $e(I) = e(J) = \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}\{x, y\}/J = 5$ puisque $x^3 \in \bar{J}$ ($(x^3)^2 - x^3(y^2 + x^3) + x(xy)^2 = 0$). Les éléments $(1, x, x^2, x^3, y)$ forment une base du $\mathbb{C}\{t_1, t_2\}$ -module libre $\mathbb{C}\{x, y\}$, via J , et l'endomorphisme induit par la multiplication par x^3 a, dans cette base, la matrice suivante :

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -t_2^2 & 0 & 0 \\ 0 & t_1 & 0 & -t_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & t_1 & 0 & t_2 \\ 1 & 0 & 0 & t_1 & 0 \\ 0 & -t_2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

et pour polynôme caractéristique : $P_3(t_1, t_2, X) = X^2(X-t_1)^3 + t_2^6$

d'où $\text{in}_X(P_3)(t_1, t_2, X) = X^2(X-t_1)^3$. Ce qui montre que le cycle

exceptionnel de I dans \mathbb{P}^2 est $\{X^2(X-t_1)^3 = 0\}$.

§ 5 . Eclatement d'une famille d'idéaux ponctuels paramétrée par un germe d'espace réduit.

Soient (S, o) un germe d'espace analytique complexe réduit et $(X, o) \subset (S \times \mathbb{C}^n, (o, o) = o)$ un germe de sous-espace analytique tel que $|X| = S \times \{o\}$. On suppose que $\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_{S \times \mathbb{C}^n} / \mathcal{J}$ et l'on note

$\mathcal{O} = \mathcal{O}_X = \mathbb{C}\{z\}$. Pour tout s voisin de $o \in S$, $\mathcal{J}_{(s, o)}$ est un idéal

m -primaire de \mathcal{O} dont on note $e(s)$ la multiplicité au sens de Samuel.

Pour tout s voisin de $o \in S$, on a d'une part

$$E_s = \text{Proj}_{\mathbb{A}^1} \bigoplus_{\nu \geq 0} (\mathcal{J} / \mathcal{J}^{\nu+1}) \otimes_{\mathcal{O}_{S,s}} \mathcal{C} \quad \text{qui est la fibre "au dessus" de } s,$$

du diviseur exceptionnel E de l'éclatement de $S \times \mathbb{C}^n$ relativement

$$\text{à } \mathcal{J}, \text{ et d'autre part } D_s = \text{Proj}_{\mathbb{A}^1} \bigoplus_{\nu \geq 0} (\mathcal{J}^{\nu} \cdot \mathcal{O} / \mathcal{J}^{\nu+1} \cdot \mathcal{O}) \text{ qui est}$$

le diviseur exceptionnel de l'éclatement de $(s) \times \mathbb{C}^n$ relativement à

$\mathcal{J} \cdot \mathcal{O}$. L'interprétation topologique des éclatements montre que

$$l'on a \quad |D_s| \subset |E_s|, \quad \text{d'où } \dim E_s > \dim D_s = n-1. \text{ Plus précisément,}$$

puisque (S,o) est réduit, le théorème de platitude générique de Frisch ([6]) montre que

$$A = \{s \in S ; \bigoplus_{\nu \geq 0} \mathcal{J}^{\nu} / \mathcal{J}^{\nu+1} \text{ n'est pas } \mathcal{O}_{S,s}\text{-plat}\}$$

est un germe de sous-ensemble analytique fermé de (S,o) dont le complémentaire est partout dense ; de plus, il existe une immersion fermée canonique $D_s \longrightarrow E_s$ qui est un isomorphisme si $s \notin A$.

L'idéal \mathcal{J} de $\mathcal{O}_{S \times \mathbb{C}^n}$ admet des réductions (i.e. des idéaux $\bar{\mathcal{J}} \subset \mathcal{J}$ tels que $\bar{\mathcal{J}} = \bar{\mathcal{J}}$ dans $\mathcal{O}_{S \times \mathbb{C}^n}$) et d'après les hypothèses et un résultat de Northcott et Rees, le nombre minimum d'éléments de $\mathcal{O}_{S \times \mathbb{C}^n}$ engendrant une réduction de \mathcal{J} est $\dim E_0 + 1$ (cf [12],

p. 149 et 151).

Proposition 5 . Les conditions suivantes sont équivalentes :

- i) au voisinage de $o \in S$, on a $\dim E_s = n-1$ ($= \dim D_s$) ;
- ii) au voisinage de $o \in S \times \mathbb{C}^n$, il existe une suite régulière
 $(f_j)_{1 \leq j \leq n}$ de $\mathcal{O}_{S \times \mathbb{C}^n}$ telle que l'on ait : $\bar{\mathcal{J}} = (f_1, f_2, \dots, f_n) \subset \bar{\mathcal{J}}$
et $\bar{\mathcal{J}} = \bar{\mathcal{J}}$ dans $\mathcal{O}_{S \times \mathbb{C}^n}$.
- iii) au voisinage de $o \in S$, la multiplicité $e(s)$ est
constante.

Démonstration : i) \rightarrow ii) . D'après ce qui précède la proposition 5, il existe $\bar{\mathcal{J}} = (f_1, f_2, \dots, f_n) \subset \bar{\mathcal{J}}$ tel que l'on ait $\bar{\mathcal{J}} = \bar{\mathcal{J}}$ dans $\mathcal{O}_{S \times \mathbb{C}^n}$; de plus \mathcal{O} est un anneau de Cohen-Macaulay et $\mathcal{O}_{S \times \mathbb{C}^n}$ est \mathcal{O} -plat ce qui montre d'après les hypothèses que $(f_j)_{1 \leq j \leq n}$ est une suite régulière de $\mathcal{O}_{S \times \mathbb{C}^n}$.

ii) \rightarrow i) D'après ce qui précède la proposition 5, on a $\dim E_s \leq n-1$ or la fonction $s \mapsto \dim E_s$ est semi-continue supérieurement, d'où le résultat puisqu'au voisinage de $o \in S$ on a $\dim E_s \geq \dim D_s = n-1$.

iii) \rightarrow ii) C'est le "vrai" principe de spécialisation de la dépendance intégrale de Teissier (cf. [16], p. 134).

ii) \rightarrow iii) Puisque $\bar{\mathcal{J}} = \bar{\mathcal{J}}$, on a

$$e(s) = e[\bar{\mathcal{J}}_{(s,o)} \cdot \mathcal{O}] = e[\bar{\mathcal{J}}_{(s,o)} \cdot \mathcal{O}] = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{(s,o)} / \bar{\mathcal{J}}_{(s,o)} \cdot \mathcal{O}$$

puisque un idéal a même multiplicité que sa clôture intégrale et que l'anneau \mathcal{O} est de Cohen-Macaulay. D'où le résultat puisque l'on a $\sqrt{\bar{\mathcal{J}}} = \sqrt{\bar{\mathcal{J}}}$ et que $\mathcal{O}_{S \times \mathbb{C}^n} / \bar{\mathcal{J}}$ et \mathcal{O} -plat.

On suppose désormais que l'une des conditions de la proposition précédente est vérifiée ; comme dans le § 2, puisqu'en fait \bar{J} est une réduction minimale de J , on peut alors écrire $J = (\bar{J} ; \Psi)$ où $\bar{J} = (f_1, \dots, f_n)$ et $\Psi = (f_{n+1}, \dots, f_{n+p})$ avec $n + p = \dim_{\mathbb{C}} J / \mathfrak{m}_{S \times \mathbb{C}^n} J$. Soit $\lambda : S \times \mathbb{C}^n \longrightarrow S \times \mathbb{C}^n$ le germe de morphisme défini par $\lambda(s, z) = (s ; f_1(s, z), \dots, f_n(s, z))$, alors d'après les hypothèses λ est fini ; de plus, grâce au critère de platitude par fibres, λ est plat et de degré $e(0) = k$. Ainsi via λ , $\mathcal{O}_{S \times \mathbb{C}^n}$ est un $\mathcal{O}_{S \times \mathbb{C}^n}$ -module libre de rang k et l'on peut considérer le polynôme caractéristique P de Ψ (cf. § 3) dont on note encore $P : S \times \mathbb{C}^n \longrightarrow \text{Sym}^k(\mathbb{C}^p)$ le germe de morphisme associé ; si $P(s, t; x) = x^k - S_1(s, t) \cdot x^{k-1} + \dots + (-1)^k S_k(s, t)$, alors pour $1 \leq m \leq k$, les $S_m(s, t)$ sont les fonctions symétriques vectorielles élémentaires des points $\langle \Psi(s, z^{(j)}(s, t)) \rangle$ de \mathbb{C}^p où $\lambda(s, z^{(j)}(s, t)) = (s, t)$. Puisque chaque $f_{n+1} \in \bar{J}$ pour $1 \leq i \leq p$, il existe un germe de morphisme $Q : S \times \mathbb{C}^n \longrightarrow \text{Sym}^k(\mathbb{C}^p)$ tel que pour chaque s voisin de $0 \in S$, Q_s soit la partie homogène de degré $e(s) = k$ de P_s .

D'après le théorème 1, pour chaque s voisin de $0 \in S$, Q_s représente explicitement le cycle de dimension $n-1$ de P^{n+p-1} sous-jacent à D_s ; de plus, par construction, le degré de ce cycle dans P^{n+p-1} est égal à $e(s) = k$ (cf. par exemple [4]).

On désigne par $\text{Chow}_{n-1}^k(P^{n+p-1})$ l'espace analytique complexe réduit des cycles de dimension $n-1$ de P^{n+p-1} dont le degré est k ; c'est une sous-variété projective de P^N pour $N = N(n, p, k)$ convenable.

D'après ce qui précède, pour $\mathcal{J} = (\mathcal{J}; \Psi)$ donné, on a un germe d'application

$$\beta : S \longrightarrow \text{Chow}_{n-1}^k(\mathbb{P}^{n+p-1}) \text{ où } \beta(s) = \{\text{cycle de } \mathbb{P}^{n+p-1} \text{ sous-}\langle \text{jacent à } D_s = \text{Proj}_S \bigoplus_{\nu \geq 0} (\mathcal{J}^{(\nu)} \cdot \mathcal{O} / \mathcal{J}^{(\nu+1)} \cdot \mathcal{O}) \cdot \mathcal{O} \}.$$

Théorème 2. Soit $\mathcal{J} = (\mathcal{J}; \Psi)$. On suppose qu'au voisinage de

$o \in S$, on ait $e(s) = k$, alors $\beta : S \longrightarrow \text{Chow}_{n-1}^k(\mathbb{P}^{n+p-1})$ est un germe de morphisme analytique.

Démonstration : D'après ce qui précède et les résultats de Barlet (cf. [1], chap. IV et II), il suffit de montrer que le germe de morphisme $Q : S \times \mathbb{C}^n \longrightarrow \text{Sym}^k(\mathbb{C}^p)$ est isotrope. On identifie $\mathcal{P}(\mathbb{C}^p, \mathbb{C}^n)$ et \mathbb{C}^{np} et l'on considère le germe de morphisme $L : \mathbb{C}^{np} \times S \times \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^{np} \times S \times \mathbb{C}^n$ défini par

$$L(u, s, z) = (u, s, \varphi(s, z) - u \circ \Psi(s, z)) \text{ où } u = (u_{ij}) \in \mathbb{C}^{np} \text{ et}$$

$$\varphi - u \circ \Psi = (f_i - \sum_{j=1}^p u_{ij} f_{n+j})_{1 \leq i \leq n}; \text{ d'après les hypothèses}$$

L est fini et grâce au critère de platitude par fibres, L est plat et de degré $e(o) = k$ ($L(o, s, z) = \lambda(s, z)$). On désigne par

$$P_\Psi : \mathbb{C}^{np} \times S \times \mathbb{C}^n \longrightarrow \text{Sym}^k(\mathbb{C}^p) \text{ le germe de morphisme associé}$$

au polynôme caractéristique P_Ψ de Ψ par rapport à

$$L(P_\Psi(o, s, t, x) = P(s, t, x)). \text{ D'après un résultat de Northcott et Rees}$$

([12], p. 153), il existe un sous-ensemble algébrique strict A de

$$\mathbb{C}^{n(n+p)} \text{ tel que si } a = (a_{\alpha\beta}) \notin A \text{ les idéaux de } \mathcal{O}_{S \times \mathbb{C}^n},$$

$$\left(\sum_{\alpha=1}^{n+p} a_{\alpha\beta} f_\alpha \right)_{1 \leq \beta \leq n} \text{ et } \mathcal{J} = (\varphi, \Psi) \text{ aient la même clôture intégrale.}$$

D'après l'hypothèse, on a $\overline{(f_1, f_2, \dots, f_n)} = \bar{J}$ dans $\mathcal{O}_{S \times C}^n$, ce qui

montre qu'en prenant $u = (u_{ij})$ suffisamment voisin de $o \in C^{np}$,

on a $\overline{(\varphi - u\psi)} = \bar{J}$ dans $\mathcal{O}_{S \times C}^n$. Ainsi pour $u = (u_{ij})$ voisin

de $o \in C^{np}$ et fixé, on a $f_{n+j} \in \overline{(\varphi - u\psi)}$ dans $\mathcal{O}_{S \times C}^n$ pour

$1 \leq j \leq p$; ce qui montre qu'il existe un germe de morphisme

$Q_\psi : C^{np} \times S \times C^n \longrightarrow \text{Sym}^k(C^p)$ tel que pour chaque (u, s)

voisin de $(o, o) \in C^{np} \times S$, $(Q_\psi(u, s))$ soit la partie homogène de

degré $e(s) = k$ de $(P_\psi(u, s))$ ($Q_\psi(o, s, t, x) = Q(s, t, x)$). Autrement dit

Q est isotrope (cf. [1], p. 56 et 64), d'où le résultat.

Corollaire. On suppose que (S, o) est normal et qu'au voisinage de $o \in S$, on ait $e(s) = k$. Alors pour s voisin de $o \in S$, les cycles de P^{n+p-1} sous-jacents à D_s et E_s sont égaux.

Démonstration : D'après la proposition 5, pour s voisin de $o \in S$, on a $\dim E_s = n-1$ et puisque (S, o) est normal, la famille paramétrée par (S, o) , de cycles de dimension $n-1$ de P^{n+p-1} sous-jacents à E_s est analytique (cf. [1], p. 39). D'où le résultat d'après le théorème 2 puisque D_s et E_s coïncident génériquement sur (S, o) .

§ 6. Application au schéma de Hilbert $\text{Hilb}^{\ell}(\mathcal{O}_n)$.

On note $\mathcal{O}_n = \mathbb{C}[z_1, z_2, \dots, z_n]$, \mathfrak{m} l'idéal maximal de \mathcal{O}_n et
 $\text{Hilb}^{\ell}(\mathcal{O}_n) = \{ \mathcal{O}_n/I ; \mathfrak{m} \subset I \text{ et } \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_n/I = \ell \}$. Pour tout espace
analytique complexe S , soit

$\text{Hilb}^{\ell}(S) = \{ \text{sous-espaces analytiques } Y \subset S \times \mathbb{C}^n, \text{ plats sur } S \text{ vérifiant}$
 $|Y| = |S| \times \{0\} \text{ et tels que pour tout } s \in S \text{ on ait}$
 $\dim_{\mathbb{C}} (\mathcal{O}_{Y,s} / \mathcal{O}_{Y,s} \cap \mathfrak{m}_s) = \ell \}$,

alors le foncteur contravariant Hilb^{ℓ} est représentable par $\text{Hilb}^{\ell}(\mathcal{O}_n)$

et l'espace universel $H^{\ell} \in \text{Hilb}^{\ell}(\text{Hilb}^{\ell}(\mathcal{O}_n))$: pour tout $Y \in \text{Hilb}^{\ell}(S)$,

il existe un unique morphisme $h : S \longrightarrow \text{Hilb}^{\ell}(\mathcal{O}_n)$ tel que Y

s'obtienne à partir de H^{ℓ} par le changement de base défini par h .

Si $I \in \text{Hilb}^{\ell}(\mathcal{O}_n)$, alors on a $\mathfrak{m} \subset I$ et la suite exacte :

$$0 \longrightarrow I/\mathfrak{m} \longrightarrow \mathcal{O}_n/\mathfrak{m} \longrightarrow \mathcal{O}_n/I \longrightarrow 0$$

permet de définir $\text{Hilb}^{\ell}(\mathcal{O}_n)$ comme un sous-espace algébrique (en
général non réduit) de la grassmannienne des sous-espaces vectoriels
de codimension ℓ de $\mathcal{O}_n/\mathfrak{m}$ (cf. [2]) : de plus $\text{Hilb}^{\ell}(\mathcal{O}_n)$ est
compact, et connexe d'après un résultat de Fogarty ([5]).

Pour tout idéal $I \in \text{Hilb}^{\ell}(\mathcal{O}_n)$, on note $H_I^{\ell} : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$
sa fonction de Hilbert-Samuel (i.e. $H_I^{\ell}(\nu) = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_n/I^{(\nu)}$ pour $\nu \geq 0$)

et $e(I) \in \mathbb{N}^{\bullet}$ sa multiplicité : pour $\nu \gg 0$, on a

$$H_I^{\ell}(\nu) = e(I) \frac{\nu^n}{n!} + R_{n-1}(\nu)$$

où R_{n-1} est un élément de $\mathbb{Q}[\nu]$ de degré $\leq n-1$.

D'après le théorème de platitude générique de Frisch ([6]), il n'apparaît localement sur $\text{Hilb}^{\ell}(\mathcal{O}_n)$ qu'un nombre fini de fonctions de Hilbert-Samuel et en adaptant les résultats de Lejeune et Teissier (cf. [11], § 4) on obtient les propositions suivantes :

Proposition 6. Soit $k = (k_{\nu}) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, alors

$F_k = \{I \in \text{Hilb}^{\ell}(\mathcal{O}_n) ; H_I(\nu) \geq k_{\nu} \text{ pour tout } \nu > 0\}$ est un sous-ensemble algébrique fermé de $\text{Hilb}^{\ell}(\mathcal{O}_n)$. En particulier les fonctions $I \rightsquigarrow H_I$ (resp. $I \rightsquigarrow e(I)$) sont semi-continues supérieurement sur $\text{Hilb}^{\ell}(\mathcal{O}_n)$.

Proposition 7. Il existe une partition finie $\text{Hilb}^{\ell}(\mathcal{O}_n) = \bigcup_{\alpha \in A} S_{\alpha}$ de $\text{Hilb}^{\ell}(\mathcal{O}_n)$ en sous-ensembles algébriques et une famille finie $(H_{\alpha})_{\alpha \in A}$ de fonctions de \mathbb{N} dans \mathbb{N} telles que pour tout $\alpha \in A$ on ait :

- 1) $I \in S_{\alpha} \Leftrightarrow H_I = H_{\alpha}$;
- 2) $\overline{S_{\alpha}}$ et $\overline{S_{\alpha}} \setminus S_{\alpha}$ sont des sous-ensembles algébriques fermés de $\text{Hilb}^{\ell}(\mathcal{O}_n)$, et $\dim(\overline{S_{\alpha}} \setminus S_{\alpha}) < \dim S_{\alpha}$.

Après regroupement éventuel des strates précédentes, on obtient une partition finie $\text{Hilb}^{\ell}(\mathcal{O}_n) = \bigcup_{k \in K \subset \mathbb{N}^{\bullet}} S_k$ de $\text{Hilb}^{\ell}(\mathcal{O}_n)$ en sous-ensembles algébriques où les $S_k = \{I \in \text{Hilb}^{\ell}(\mathcal{O}_n) ; e(I) = k\}$ sont les différentes strates d'équimultiplicité de $\text{Hilb}^{\ell}(\mathcal{O}_n)$; de plus

$\overline{S_k}$ et $\overline{S_k} \setminus S_k$ sont des sous-ensembles algébriques fermés de $\text{Hilb}^{\ell}(\mathcal{O}_n)$.

En utilisant, par exemple la réduction des idéaux, pour tout

$I \in \text{Hilb}^{\ell}(\mathcal{O}_n)$ on a $e(I) \geq \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_n/I = \ell$, ce qui montre d'après un

résultat de Lech (cf. [10], p. 74) que l'on a :

$$K \subset \mathbb{N}^{\bullet} \cap [2, (n!) \ell].$$

De plus, d'après un résultat de Sally ([14]), pour tout $I \in \text{Hilb}^{\ell}(\mathcal{O}_n)$ on a :

$$n \leq \dim_{\mathbb{C}} I/\mathfrak{m}I \leq n + e(I) - \ell,$$

ce qui montre en particulier que S_{ℓ}^{ℓ} est l'ouvert des intersections

complètes de $\text{Hilb}^{\ell}(\mathcal{O}_n)$ (i.e. $S_{\ell}^{\ell} = \{I \in \text{Hilb}^{\ell}(\mathcal{O}_n) ; \dim_{\mathbb{C}} I/\mathfrak{m}I = n\}$)

puisque par platitude (cf. par exemple [3], p. 68), la fonction

$I \rightsquigarrow \dim_{\mathbb{C}} I/\mathfrak{m}I$ est semi-continue supérieurement sur $\text{Hilb}^{\ell}(\mathcal{O}_n)$.

On désigne par $H_k^{\ell} \subset S_k^{\ell} \times \mathbb{C}^n$ l'espace universel "au dessus"

du sous-espace réduit S_k^{ℓ} de $\text{Hilb}^{\ell}(\mathcal{O}_n)$. Soit $I \in S_k^{\ell}$ tel que $n+p = \dim_{\mathbb{C}} I/\mathfrak{m}I$ ($0 \leq p \leq k-\ell$), alors au voisinage de $(I, 0)$ dans

$S_k^{\ell} \times \mathbb{C}^n$, H_k^{ℓ} est défini par un idéal J qu'on peut écrire d'après la proposition 5, $J = (\bar{J}; \Psi)$ où $\bar{J} = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ est engendré par une suite régulière de $\mathcal{O}_{S_k^{\ell} \times \mathbb{C}^n}$, $\bar{J} = \bar{J}$ et $\Psi = (f_{n+1}, \dots, f_{n+p})$

puisque H_k^{ℓ} est S_k^{ℓ} -plat. Avec les notations du § 5, on a un germe d'application qui dépend de $J = (\bar{J}; \Psi)$

$$\beta_I^{\ell} : (S_k^{\ell}, I) \longrightarrow (\text{Chow}_{n-1}^k(P^{n+p-1}), \beta_I(I))$$

où pour I' voisin de I dans $S_k^{\mathcal{L}}$, $\beta_I(I')$ est le cycle exceptionnel dans P^{n+p-1} de l'éclatement de C^n relativement à I' , et d'après le théorème 2 on a le résultat suivant :

Théorème 3 . Le germe d'application

$$\beta_I : (S_k, I) \longrightarrow (\text{Chow}_{n-1}^k(P^{n+p-1}), \beta_I(I))$$

est un germe de morphisme analytique.

Soit $I \in \text{Hilb}^{\mathcal{L}}(\mathcal{O}_n)$, on désigne par $\text{in}[I]$ l'idéal initial de I , c'est-à-dire l'idéal homogène de \mathcal{O}_n engendré par les formes initiales d'éléments de I (l'idéal $\text{in}[I]$ définit au voisinage de $o \in C^n$ le cône tangent de Zariski en o à $((o), \mathcal{O}_n/I)$). Soient $(f_i)_{1 \leq i \leq n+p}$ des éléments de I tels que les $\text{in}(f_i)$ engendrent l'idéal $\text{in}[I]$, alors les (f_i) engendrent l'idéal I (cf. par exemple [9], p. 146) ; on note $D = \{\lambda \in C ; |\lambda| < 2\}$ et $\text{val}(f_i) = n_i$ pour $1 \leq i \leq n+p$, et l'on considère le sous-espace analytique \mathcal{X} de $D \times U$ défini par

$$\mathcal{X} = \{(\lambda, z) \in D \times U ; \frac{f_i(\lambda z)}{\lambda^{n_i}} = 0 \text{ pour } 1 \leq i \leq n+p\},$$

où U est un polydisque ouvert convenable de C^n centré en o . Alors $|\mathcal{X}| = D \times \{o\}$ et \mathcal{X} est D -plat d'après ([9], p. 149) ; de plus, par définition $\mathcal{X}_0 = \mathcal{O}_n / \text{in}[I]$, $\mathcal{X}_1 = \mathcal{O}_n / I$ et pour $\lambda \neq 0$, \mathcal{X}_1 et \mathcal{X}_λ

sont isomorphes via $z \rightsquigarrow \frac{z}{\lambda}$. D'après la propriété universelle de

$\text{Hilb}^{\mathcal{L}}(\mathcal{O}_n)$, on a un chemin analytique $\gamma_I : D \longrightarrow \text{Hilb}^{\mathcal{L}}(\mathcal{O}_n)$

où $\gamma_I(o) = \text{in}[I]$ et $\gamma_I(1) = I$, ce qui montre d'après ce qui précède

et la proposition 5 qu'en général $e(I) \leq e(\text{in}[I])$; on peut avoir

inégalité stricte : par exemple, dans C^2 on a $I = (y^2 + x^3, xy) \in S^5$

et $\text{in}[I] = (y^2, xy, x^4) \in S^6$.

Proposition 8. Soit $I = (f_1, f_2, \dots, f_{n+p}) \in S_k^{\mathcal{L}}$ où tous les f_i ont la même valuation. On suppose que $\text{in}[I] = (\text{in}(f_1), \text{in}(f_2), \dots, \text{in}(f_{n+p})) \in S_k^{\mathcal{L}}$ et que $(\text{in}(f_1), \text{in}(f_2), \dots, \text{in}(f_n))$ est un système de paramètres de \mathcal{O}_n tel que $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_n / (\text{in}(f_i))_{1 \leq i \leq n} = k$. Alors, les cycles exceptionnels dans \mathbb{P}^{n+p-1} de I et $\text{in}[I]$ sont égaux.

Démonstration : Avec les notations précédentes, \mathcal{X} est D -équimultiple

et est défini par l'idéal $\mathcal{J} = \left(\frac{f_i(\lambda z)}{\lambda} \right)_{1 \leq i \leq n+p}$ de $\mathcal{O}_{D \times U}$; de plus

$\bar{\mathcal{J}} = \left(\frac{f_i(\lambda z)}{\lambda} \right)_{1 \leq i \leq n}$ est une suite régulière de $\mathcal{O}_{D \times U}$. D'après un

résultat de Rees ([13]), on a $\frac{\bar{\mathcal{J}}}{\lambda} = \frac{\bar{\mathcal{J}}}{\lambda}$ dans $\mathbb{C}[z]$ pour tout $\lambda \in D$,

ce qui montre (cf. [16], p. 134) que $\frac{\bar{\mathcal{J}}}{\lambda} = \bar{\mathcal{J}}$ dans $\mathcal{O}_{D \times U}$. Avec les

notations du § 5, on a d'après le théorème 2 un morphisme analytique $\beta : D \longrightarrow \text{Chow}_{n-1}^k(\mathbb{P}^{n+p-1})$ où $\beta(\lambda)$ est le cycle exceptionnel dans \mathbb{P}^{n+p-1} de l'éclatement de U relativement à l'idéal \mathcal{J}_{λ} de $\mathbb{C}[z]$, et il suffit de montrer que pour tout $\lambda \neq 0$, $\beta(\lambda) = \beta(1)$. Pour tout $\lambda \in D$, on a un morphisme fini $f_{\lambda} : U \longrightarrow \mathbb{C}^{n+p}$ dont

les composantes sont les $\left(\frac{f_i(\lambda z)}{\lambda} \right)_{1 \leq i \leq n+p}$, et d'après le théorème 1

on a $\beta(\lambda) = \text{Proj}[\mathbb{C}((\frac{f_{\lambda}}{\lambda})_{\bullet}(U), \mathfrak{o})]$, d'où le résultat puisque pour $\lambda \neq 0$,

les germes de cycles $((f_{\lambda})_{\bullet}(U), \mathfrak{o})$ et $((f_1)_{\bullet}(U), \mathfrak{o})$ sont isomorphes

via $y \rightsquigarrow \frac{y}{\lambda}$.

Exemple : Dans \mathbb{C}^2 , on a $I = (x^4 + x^3 y, y^4, xy) \in S_{16}$ et

$\text{in}[I] = (x^4, y^4, xy) \in S_{16}$ ce qui montre que I et $\text{in}[I]$ ont le même

cycle exceptionnel dans \mathbb{P}^2 , à savoir $\{(X - t_1 t_2) = 0\}$.

Bibliographie

- [1] D. Barlet. Espace analytique réduit des cycles analytiques complexes compacts d'un espace analytique complexe de dimension finie.
Sém. F.Norguet II, Lect. Notes in Math. 482. Springer-Verlag (1975).
- [2] J. Briançon. Description de $\text{Hilb}^n \mathbb{C}(x,y)$.
Inventiones Math. 41 (1977), 45-89.
- [3] A. Douady. Le problème des modules pour les sous-espaces analytiques compacts d'un espace analytique donné.
Ann. Inst. Fourier. 16 (1966), 1-95.
- [4] R. Draper. Intersection theory in analytic geometry.
Math. Ann. 180 (1969), 175-204.
-
- [5] J. Fogarty. Algebraic families on an algebraic surface.
Am. J. Math. 10 (1968), 511-521.
- [6] J. Frisch. Points de platitude d'un morphisme d'espaces analytiques.
Inventiones Math. 4 (1967), 118-138.
- [7] P. Griffiths et J. Harris. Principles of algebraic geometry.
Wiley-Interscience (1978).
- [8] R. Hartshorne. Algebraic geometry. Springer-Verlag (1977).
- [9] A. Hénaut. Cycles et cône tangent de Zariski.
Sém. F.Norguet IV, Lect. Notes in Math. 807. Springer-Verlag (1980).
- [10] C. Lech. Note on multiplicities of ideals.
Arkiv Mat. 4 (1960), 63-86.
- [11] M. Lejeune-Jalabert et B. Teissier. Normal cones and sheaves of relative jets.
Compositio Mat. 28 (1974), 305-331.
- [12] D. Northcott et D. Rees. Reductions of ideals in local rings.
Proc. Camb. Phil. Soc. 50 (1954), 145-158.

- [13] D. Rees. A-transforms of local rings and a theorem on multiplicities of ideals.
Proc. Camb. Phil. Soc. 57 (1961), 8-17.
- [14] J. Sally. On the number of generators of ideals of dimension zero.
Conf. com. Algebra, Lect. Notes in Math. 311. Springer-Verlag (1973).
- [15] B. Teissier. Cycles évanescents, sections planes et conditions de Whitney.
Singularités à Cargèse 1972. Astérisque 7-8. S.M.F. (1973).
- [16] B. Teissier. Résolution simultanée I, II. Sémin. Sing. des surfaces,
Lect. Notes in Math. 777. Springer-Verlag (1980).
- [17] H. Whitney. Complex analytic varieties. Addison-Wesley (1972).
- [18] O. Zariski et P. Samuel. Commutative algebra. vol. II.
Van Nostrand (1960).
-

- 110) U. S. State Department of Health and Human Services (1973)
- 111) U. S. State Department of Health and Human Services (1974)
- 112) U. S. State Department of Health and Human Services (1975)
- 113) U. S. State Department of Health and Human Services (1976)
- 114) U. S. State Department of Health and Human Services (1977)
- 115) U. S. State Department of Health and Human Services (1978)
- 116) U. S. State Department of Health and Human Services (1979)
- 117) U. S. State Department of Health and Human Services (1980)
- 118) U. S. State Department of Health and Human Services (1981)
- 119) U. S. State Department of Health and Human Services (1982)
- 120) U. S. State Department of Health and Human Services (1983)

CYCLE EXCEPTIONNEL DE L'ECLATEMENT DE NASH
D'UNE HYPERSURFACE ANALYTIQUE COMPLEXE A SINGULARITE ISOLEE

§ 0 - INTRODUCTION ET NOTATIONS

Soient un entier $n \geq 2$, U un polydisque ouvert de \mathbb{C}^n centré en 0 et $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe telle que $f(0) = 0$. On suppose que 0 est un point singulier isolé de $H = f^{-1}(0)$. Quitte à restreindre U , il existe un polydisque ouvert U_0 de \mathbb{C}^n centré en 0 tel que le morphisme $\delta f : U \longrightarrow U_0$ dont les composantes sont les $\frac{\partial f}{\partial z_i}$ pour $1 \leq i \leq n$, soit fini et plat. Soit $\mathcal{J} = (\frac{\partial f}{\partial z_i})_{1 \leq i \leq n}$ l'idéal jacobien de f dans $\mathcal{O} = \mathbb{C}\{z_1, z_2, \dots, z_n\}$, alors le degré de δf est le nombre de Milnor $\mu = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O} / \mathcal{J}$ de H . Si $\langle z^{(1)}, z^{(2)}, \dots, z^{(\mu)} \rangle = \langle z^{(j)} \rangle$ sont les points de U "au dessus" de $t \in U_0$, on peut par normalité de U_0 définir une fonction holomorphe $\phi : U_0 \longrightarrow \mathbb{C}$ vérifiant $\phi(t) = \prod_{j=1}^{\mu} f(z^{(j)})$. On appelle ϕ la norme de f et l'on note $\text{in}(\phi)$ sa forme initiale en 0.

On suppose désormais que H est irréductible.

On désigne par $\pi : \tilde{H} \longrightarrow H$ l'éclatement de Nash de H . On rappelle que si $\sigma : \mathbb{C}^n - \{0\} \longrightarrow \mathbb{P}^{n-1}$ est la surjection canonique, \tilde{H} est l'adhérence

dans $H \times \mathbb{P}^{n-1}$ du graphe Γ_F de l'application analytique $F : H - \{0\} \longrightarrow \mathbb{P}^{n-1}$ définie par $F(z) = \sigma[\delta f(z)]$; de plus, \tilde{H} est un espace analytique complexe réduit et $|\pi^{-1}(0)|$ correspond via le plongement de la grassmannienne des $(n-1)$ -plans de \mathbb{C}^n dans \mathbb{P}^{n-1} aux limites d'espaces tangents à H en 0 (cf. [H-L; p.251]). Autrement dit, $\pi : \tilde{H} \longrightarrow H$ est l'éclatement de H relativement à l'idéal $\mathcal{J} \cdot \mathcal{O}_H$ de $\mathcal{O}_H = \mathcal{O} / \mathfrak{f}$ engendré par l'idéal jacobien \mathcal{J} . On note $E = \text{Proj} \left(\bigoplus_{v \geq 0} \mathcal{J}^v \cdot \mathcal{O}_H / \mathcal{J}^{v+1} \cdot \mathcal{O}_H \right)$ la fibre exceptionnelle de l'éclatement de Nash de H .

Dans ce qui suit, on précise la nature de la norme ϕ de f et l'on montre le résultat suivant :

THEOREME. - Les cycles de \mathbb{P}^{n-1} sous-jacents à E et $\{in(\phi) = 0\}$ sont égaux.

§ 1 - PREMIERES REMARQUES

Le morphisme fini $\delta f : U \longrightarrow U_0$ induit un morphisme fini et surjectif d'espaces analytiques complexes réduits et irréductibles $h : H \longrightarrow V$, où $V = \delta f(H)_{\text{red}}$. On note \mathfrak{m} l'idéal maximal de $\mathcal{O}_{V,0}$, alors via h on a $\mathfrak{m} \cdot \mathcal{O}_H = \mathcal{J} \cdot \mathcal{O}_H$ et d'après la propriété universelle des éclatements on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 H \times \mathbb{P}^{n-1} \supset \tilde{H} & \xrightarrow{h \times \text{id} |_{\tilde{H}}} & \tilde{V} \subset V \times \mathbb{P}^{n-1} \\
 \downarrow \pi & & \downarrow \pi_V \\
 H & \xrightarrow{h} & V
 \end{array}$$

(*)

où $\pi_V : \tilde{V} \longrightarrow V$ est l'éclatement de V relativement à l'idéal \mathfrak{m} . On a

$$\pi_V^{-1}(0) = \text{Proj} \left(\bigoplus_{v \geq 0} \mathfrak{m}^v / \mathfrak{m}^{v+1} \right) = \text{Proj} (C(V, 0))$$

où $C(V, 0)$ est le cône tangent de Zariski de V en 0 .

PROPOSITION 1. - On a $|\pi^{-1}(0)| = |\pi_V^{-1}(0)|$.

Démonstration. - On a $|\pi^{-1}(0)| \subset |\pi_V^{-1}(0)|$ car le diagramme (*) est commutatif. Inversement, soit $(0, \sigma(y)) \in \pi_V^{-1}(0)$, alors $y \in C(V, 0) - \{0\}$ et d'après [W ; p. 210] il existe une suite $(y_k) \in V - \{0\}$ et une suite $(\lambda_k) \in \mathbb{C}^*$ telles que $\lim_{k \rightarrow +\infty} \lambda_k y_k = y$ et $\lim_{k \rightarrow +\infty} y_k = 0$. Pour tout k , soit $z_k \in H$ tel que $h(z_k) = y_k$; puisque h est propre et $h^{-1}(0) = 0$, il existe une suite extraite $(z_{k_s}) \in H - \{0\}$ telle que $\lim_{s \rightarrow +\infty} z_{k_s} = 0$. On a alors

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} \sigma[h(z_{k_s})] = \lim_{s \rightarrow +\infty} \sigma(\lambda_{k_s} y_{k_s}) = \sigma(y).$$

On a donc $|\pi_V^{-1}(0)| \subset |\pi^{-1}(0)|$, ce qui prouve le résultat.

L'espace analytique $E = (h \circ \pi)^{-1}(0)$ est un diviseur de \tilde{H} et les composantes irréductibles $(X_i)_{1 \leq i \leq \ell}$ de E_{red} sont des hypersurfaces de \mathbb{P}^{n-1} . En

utilisant ce qui précède, on note $X = \sum_{i=1}^{\ell} \sigma_i X_i$ (resp. $Y = \sum_{i=1}^{\ell} \delta_i X_i$) le

cycle de \mathbb{P}^{n-1} sous-jacent à E (resp. $\pi_V^{-1}(0)$), et $\deg h$ le degré générique du morphisme $h : H \longrightarrow V$.

DEFINITION 1. - On appelle X le cycle exceptionnel de l'éclatement de Nash de H .

PROPOSITION 2. - En tant que cycles de \mathbb{P}^{n-1} , on a $X = \deg h \cdot Y$.

Démonstration. - D'après un théorème de Samuel [S], on peut supposer que H est une variété algébrique, alors V est également une variété algébrique et d'après [H ; p. 166], \tilde{H} et \tilde{V} le sont aussi ; de plus, on a $\deg h = [K(\tilde{H}) : K(\tilde{V})]$. Soit x_i (resp. y_i) le point générique de X_i sur E (resp. $\pi_V^{-1}(0)$), alors

on a $\mathcal{O}_{E, x_i} = \bigoplus_{v \geq 0} \mathcal{O}_i^v$ (resp. $\mathcal{O}_{\pi_V^{-1}(0), y_i} = \mathcal{K}_{P_i}$), où $\mathcal{O} = \bigoplus_{v \geq 0} \mathcal{J}^v \cdot \mathcal{O}_H / \mathcal{J}^{v+1} \cdot \mathcal{O}_H$ (resp. $\mathcal{K} = \bigoplus_{v \geq 0} \mathcal{M}_i^v / \mathcal{M}_i^{v+1}$) et \mathcal{O}_i (resp. P_i) est l'idéal premier minimal

de \mathcal{O} (resp. \mathcal{K}) correspondant à X_i . D'après les propriétés de h et la proposition 1, on a un morphisme local, fini et injectif d'anneaux locaux noëthériens intègres $A = \mathcal{O}_{V, y_i} \hookrightarrow B = \mathcal{O}_{H, x_i}$; de plus d'après la

propriété universelle des éclatements on a $\mathcal{O}_{\pi_V^{-1}(0), y_i} = A / \xi A$ et

$\mathcal{O}_{E, x_i} = B / \xi B$. L'anneau $A / \xi A$ est artinien donc pour $v \gg 0$, on a

$(\mathcal{M}_A / \xi A)^v = \mathcal{M}_A^v / \xi A \cap \mathcal{M}_A^v = 0$ soit $\mathcal{M}_A^v \subset \xi A \subset \mathcal{M}_A$, ce qui montre que ξA

est un idéal \mathcal{M}_A -primaire de A . D'après la formule de projection de Samuel [Z-S. II ; p. 297], ξB est un idéal \mathcal{M}_B -primaire de B et l'on a

$[B : A] \cdot e(\xi A) = [B / \mathcal{M}_B : A / \mathcal{M}_A] \cdot e(\xi B)$. Puisque le corps des fractions de

A (resp. B) est $K(\tilde{V})$ (resp. $K(\tilde{H})$), on a $[B : A] = \deg h$; de plus, on a

$B/\mathfrak{m}_B \simeq K(X_i) \simeq A/\mathfrak{m}_A$, d'où $\deg h.e(\xi A) = e(\xi B)$. Puisque la dimension de Krull de A (resp. B) est 1, on a pour $\nu \gg 0$:

$$e(\xi A) = \ell_A(\xi^{\nu} A / \xi^{\nu+1} A) \quad (\text{resp. } e(\xi B) = \ell_B(\xi^{\nu} B / \xi^{\nu+1} B)).$$

Par définition, et puisque ξ n'est pas un diviseur de zéro dans A (resp. B), on a pour $\nu \geq 0$:

$$\delta_i = \ell_{A/\xi A}(A/\xi A) = \ell_A(A/\xi A) = \ell_A(\xi^{\nu} A / \xi^{\nu+1} A) \quad (\text{resp. } \alpha_i = \ell_B(\xi^{\nu} B / \xi^{\nu+1} B)).$$

D'où $\deg h. \delta_i = \alpha_i$, ce qui prouve le résultat.

§ 2 - POLYNOME CARACTERISTIQUE DE f PAR RAPPORT A \mathcal{J}

On note $\mathcal{O}_{U_0} = \mathcal{O}_{U_0,0} = \mathbb{C}\{t_1, t_2, \dots, t_n\}$ et $\mathcal{O} = \mathcal{O}_{U,0}$, alors via le morphisme fini et plat $\delta f: U \longrightarrow U_0$, \mathcal{O} est un \mathcal{O}_{U_0} -module libre de rang μ .

DEFINITION 2. - On appelle polynôme caractéristique de f par rapport à \mathcal{J} , le polynôme caractéristique $P_f(t, x)$ du \mathcal{O}_{U_0} -endomorphisme de \mathcal{O} induit par la multiplication par f .

Si l'on écrit $P_f(t, x) = x^{\mu} - S_1(t).x^{\mu-1} + \dots + (-1)^{\mu} S_{\mu}(t)$, alors pour $1 \leq m \leq \mu$, quitte à restreindre U_0 , $S_m(t)$ est la m -ième fonction symétrique élémentaire des points $\langle f(z^{(j)}) \rangle$ (cf. [B; chap. V, § 2]); en particulier, on a $\phi = S_{\mu}$. De plus, quitte à restreindre U , on a $P_f(\delta f(z), f(z)) = 0$ pour tout $z \in U$.

Ce qui montre que l'on a

$$|V| = |\delta f(H)| = \{t \in U_0 ; \phi(t) = 0\}.$$

PROPOSITION 3. - Le polynôme caractéristique de f par rapport à \mathcal{J} détermine une relation intégrale explicite de degré μ , de f sur \mathcal{J} .

Démonstration. - Pour $1 \leq m \leq \mu$, on note $\text{val}_0(S_m) = \text{degré} [\text{in}(S_m)]$ la valuation de S_m en 0, alors d'après ce qui précède, il suffit de montrer que $\text{val}_0(S_m) \geq m$. D'après [T ; p. 291], f est entier sur \mathcal{J} , donc quitte à restreindre U , il existe $c > 0$ tel que pour tout $z \in U$ on ait :

$$|f(z)| \leq c \cdot \sup_{1 \leq i \leq n} \left| \frac{\partial f}{\partial z_i}(z) \right|. \text{ Ce qui prouve le résultat.}$$

§ 3 - VALUATION DE ϕ

Via h , \mathcal{O}_H est un \mathcal{O}_{U_0} -module de type fini, et d'après le paragraphe précédent on a une suite exacte de \mathcal{O}_{U_0} -modules :

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{U_0}^\mu \xrightarrow{(x f)} \mathcal{O}_{U_0}^\mu \longrightarrow \mathcal{O}_H \longrightarrow 0$$

ce qui prouve que l'on a $F_0(\mathcal{O}_H) = (\phi)$, où $F_0(\mathcal{O}_H)$ est le 0-ième idéal de Fitting du \mathcal{O}_{U_0} -module \mathcal{O}_H ($P_f(t, 0) = (-1)^\mu \phi(t)$).

Pour préciser ϕ et calculer $\text{val}_0(\phi) = \text{degré} [\text{in}(\phi)]$, on va construire une autre présentation finie du \mathcal{O}_{U_0} -module \mathcal{O}_H .

D'après [T ; p. 315] , on peut supposer que $\frac{\partial f}{\partial z_1} \cdot \mathbb{C}_H$ est entier sur $(\frac{\partial f}{\partial z_2}, \frac{\partial f}{\partial z_3}, \dots, \frac{\partial f}{\partial z_n}) \cdot \mathbb{C}_H$. Ainsi, si \mathfrak{m}_H est l'idéal maximal de \mathbb{C}_H et $\delta'f = (\frac{\partial f}{\partial z_2}, \frac{\partial f}{\partial z_3}, \dots, \frac{\partial f}{\partial z_n})$, l'idéal $(\delta'f) \cdot \mathbb{C}_H$ est \mathfrak{m}_H -primaire car $\mathcal{J} \cdot \mathbb{C}_H$ l'est. De plus, puisque \mathbb{C}_H est un anneau de Cohen-Macaulay, $(\frac{\partial f}{\partial z_2}, \frac{\partial f}{\partial z_3}, \dots, \frac{\partial f}{\partial z_n})$ est une suite régulière dans \mathbb{C}_H et l'on a (cf. par exemple [T ; chap. 0]):

$$e(\mathcal{J} \cdot \mathbb{C}_H) = e((\delta'f) \cdot \mathbb{C}_H) = \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}_H / (\delta'f) \cdot \mathbb{C}_H$$

où $e(I)$ est la multiplicité de I (i.e. le coefficient normalisé de plus haut degré du polynôme de Hilbert-Samuel de I).

D'après ce qui précède, il existe un polydisque ouvert U'_0 de \mathbb{C}^{n-1} centré en 0 tel que le morphisme $h' : H \longrightarrow U'_0$, induit par $\delta'f$ soit fini et plat. On note $\mathbb{C}_{U'_0} = \mathbb{C}_{U'_0, 0} = \mathbb{C}\{t_2, t_3, \dots, t_n\}$, alors via h' , \mathbb{C}_H est un $\mathbb{C}_{U'_0}$ -module libre de rang $\delta = e(\mathcal{J} \cdot \mathbb{C}_H)$.

Soit $\lambda(t', t_1)$ le polynôme caractéristique du $\mathbb{C}_{U'_0}$ -endomorphisme de \mathbb{C}_H induit par la multiplication par $\frac{\partial f}{\partial z_1}$, alors puisque le polynôme minimal d'un endomorphisme est dans la racine du polynôme caractéristique, quitte à restreindre U'_0 , on a

$$|V| = |\delta f(H)| = \{(t', t_1) \in U'_0 \times \mathbb{C} ; \lambda(t', t_1) = 0\}$$

De plus, puisque $\frac{\partial f}{\partial z_1} \cdot \mathcal{O}_H$ est entier sur $(\partial' f) \cdot \mathcal{O}_H$, on a $\text{val}_0(\lambda) = \delta = e(\mathcal{J} \cdot \mathcal{O}_H)$.

Remarque. - Si l'on considère la suite de Teissier de f :

$$\mu^* = (\mu = \mu^{(n)}, \mu^{(n-1)}, \dots, \mu^{(1)}, 1 = \mu^{(0)})$$

on a $\delta = e(\mathcal{J} \cdot \mathcal{O}_H) = \mu^{(n)} + \mu^{(n-1)}$ (cf. [T ; p. 320]).

PROPOSITION 4. - On a $(\phi) = F_0(\mathcal{O}_H) = (\lambda)$. En particulier $\text{val}_0(\phi) = e(\mathcal{J} \cdot \mathcal{O}_H)$.

Démonstration. - Le germe λ est un polynôme de Weierstrass en t_1 et d'après le théorème de division, on a un isomorphisme de $\mathcal{O}_{U'_0}$ -modules :

$$\mathcal{O}_{U'_0}^\delta \cong \mathcal{O}_{U_0} / \lambda \text{ défini par } (\beta'_i) \rightsquigarrow \sum_{i=1}^{\delta} \beta'_i t_1^{i-1} \text{ modulo } (\lambda). \text{ On}$$

considère l'homomorphisme de \mathcal{O}_{U_0} -algèbres $\mathcal{O}_{U_0} \otimes_{\mathcal{O}_{U'_0}} \mathcal{O}_{U_0} / \lambda \longrightarrow \mathcal{O}_{U_0} / \lambda$ défini par

$$\alpha \otimes \left(\sum_{i=1}^{\delta} \beta'_i t_1^{i-1} \text{ modulo } (\lambda) \right) \rightsquigarrow \sum_{i=1}^{\delta} \alpha \beta'_i t_1^{i-1} \text{ modulo } (\lambda);$$

il induit un homomorphisme surjectif Λ par passage au quotient

$$A = \left(\mathcal{O}_{U_0} \otimes_{\mathcal{O}_{U'_0}} \mathcal{O}_{U_0} / \lambda \right) / (t_1 \otimes 1 - 1 \otimes t_1) \xrightarrow{\Lambda} \mathcal{O}_{U_0} / \lambda$$

Pour tout $n \geq 0$, on a $t_1^n \otimes 1 - 1 \otimes t_1^n \in (t_1 \otimes 1 - 1 \otimes t_1)$ d'où, en utilisant le théorème de division, on a $\alpha \otimes \dot{r} = (\lambda q + p) \otimes \dot{r} = p \otimes \dot{r} = 1 \otimes \dot{p}r$ dans A , soit $\Lambda(\alpha \otimes \dot{r}) = \dot{p}r$. Ainsi, si $\Lambda(\sum \alpha_j \otimes \dot{r}_j) = 0$, on a $\sum \alpha_j \otimes \dot{r}_j = 0$ dans A ce qui montre que Λ est un isomorphisme. Via h' , on a $\mathcal{O}_{U'_0}^\delta \simeq \mathcal{O}_H$; de plus, on a $\mathcal{O}_{U_0} \otimes \mathcal{O}_{U'_0} \otimes \mathcal{O}_{U_0} / \lambda \simeq \mathcal{O}_{U_0}^\delta$. Alors, en utilisant ce qui précède, on obtient une suite exacte de \mathcal{O}_{U_0} -modules :

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{U_0}^\delta \xrightarrow{(t_1 \cdot \text{id} - (x \frac{\partial f}{\partial z_1}))} \mathcal{O}_{U_0}^\delta \longrightarrow \mathcal{O}_H \longrightarrow 0$$

Puisque $F_0(\mathcal{O}_H)$ ne dépend pas de la présentation de \mathcal{O}_H , on a $F_0(\mathcal{O}_H) = (\lambda)$, d'où le résultat.

§ 4 - DETERMINATION DU CYCLE EXCEPTIONNEL DE L'ECLATEMENT DE NASH DE H.

D'après les § 1 et 2, on a un morphisme fini et surjectif $h : H \longrightarrow V$ où $|V| = \{t \in U_0 ; \phi(t) = 0\}$, et ϕ_{red} la réduite de ϕ est irréductible car H l'est. D'après la formule de projection de Samuel appliquée à $\mathcal{O}_V = \mathcal{O}_{V,0} \longleftarrow \mathcal{O}_H$ ou d'après la proposition 2, on a grâce au § 3 :

$$\deg h \cdot \text{val}_0(\phi_{\text{red}}) = \deg h \cdot m(\mathcal{O}_V) = e(\mathcal{O}_H) = \text{val}_0(\phi) \text{ soit}$$

$$(**) \quad \phi = (\phi_{\text{red}})^{\deg h} .$$

En tant que cycles de \mathbb{P}^{n-1} , on a par définition

$$Y = \{ \text{in}(\phi_{\text{red}}) = 0 \} \quad \text{d'où} \quad \text{deg h} \cdot Y = \{ [\text{in}(\phi_{\text{red}})]^{\text{deg h}} = \text{in}(\phi) = 0 \}$$

ce qui, d'après la proposition 2 prouve le résultat suivant :

THEOREME. - En tant que cycles de \mathbb{P}^{n-1} , on a $X = \{ \text{in}(\phi) = 0 \}$.

L'auteur remercie le rapporteur de cet article de lui avoir signalé le corollaire suivant de (**):

PROPOSITION 5. - Le hessien de f n'est pas identiquement nul sur H .

Démonstration. - Si l'on suppose que $H \subset S = \{ z \in U ; \text{Hess}(f)(z) = 0 \}$, alors on a $V \subset \partial f(S) = \Delta$. Soit $t_0 \in U_0$, un point régulier de V au voisinage duquel on a $V = \Delta$, et tel que $t_0 \notin R$, où R est l'ensemble de ramification du morphisme fini $h : H \longrightarrow V$. Alors, on peut choisir un système de coordonnées locales $(y_1, y_2, \dots, y_n) = (y', y_n)$ sur U_0 , centré en t_0 , tel que l'on ait grâce à (**): $\phi(y', y_n) = y_n^{\text{deg h}}$. On a $\mu \geq \text{deg h}$. Si l'on suppose que $\mu = \text{deg h}$, alors "au dessus" de t_0 , puisque $t_0 \notin R$, il y a $\mu = \text{deg h}$ points distincts dans H , mais puisque $t_0 \in \Delta$, deux au moins de ces points sont égaux, ce qui est absurde, d'où $\mu > \text{deg h}$. Puisque f est entier sur \mathcal{J} , la majoration déjà utilisée dans la démonstration de la proposition 3 montre que l'on a $\text{val}_0(\phi(0, y_n)) = \text{val}_0\left(\prod_{j=1}^{\mu} f[z^{(j)}(0, y_n)]\right) \geq \mu > \text{deg h}$, ce qui est absurde, d'où le résultat.

BIBLIOGRAPHIE

- [B] D. BARLET , Espace analytique réduit des cycles analytiques complexes compacts d'un espace analytique complexe de dimension finie. Sémin. F. Norguet II, Lect. Notes in Math. n° 482. Springer-Verlag (1975).
- [H] R. HARTSHORNE , Algebraic Geometry. Springer-Verlag (1977).
- [H-L] J.P. HENRY et LÊ D.T. , Limites d'espaces tangents. Sémin. F. Norguet II. Lect. Notes in Math. n° 482 Springer-Verlag (1975).
- [S] P. SAMUEL , Algébricité de certains points singuliers algébroides. J. Math. Pures Appl. , 35, (1956), 1-6.
- [T] B. TEISSIER, Cycles évanescents, sections planes et conditions de Whitney. Singularités à Cargèse 1972. Asterisque n° 7-8 (S. M. F. 1973).
- [W] H. WHITNEY, Complex analytic varieties. Addison-Wesley (1972).
- [Z-S. II] O. ZARISKI et P. SAMUEL, Commutative Algebra. Vol. II Van Nostrand (1960).

1. The first part of the document discusses the importance of maintaining accurate records of all transactions and activities. It emphasizes that this is crucial for the company's financial health and for providing reliable information to stakeholders.

2. The second part of the document outlines the specific procedures and controls that should be implemented to ensure the accuracy and integrity of the records. This includes regular audits, proper documentation, and the use of secure systems for data storage and retrieval.

3. The third part of the document discusses the role of management in ensuring that the records are maintained in accordance with the established procedures and controls. It highlights the need for clear communication and oversight.

4. The fourth part of the document provides a summary of the key points discussed and offers recommendations for further improvement. It suggests that regular training and updates to the procedures are essential for maintaining the highest standards of record-keeping.

5. The fifth part of the document concludes with a statement of commitment to transparency and accountability. It expresses the company's dedication to providing accurate and timely information to all interested parties.

Deuxième partie

GÉOMÉTRIE DES TISSUS DE C^2

\mathcal{D} -MODULES ET GEOMETRIE DES TISSUS DE \mathbb{C}^2

§ 0 . Introduction

On désigne par $\mathcal{O} = \mathbb{C}\{z_1, z_2\}$ l'anneau des séries entières convergentes à deux variables et l'on pose $\partial_1 = \frac{\partial}{\partial z_1}$, $\partial_2 = \frac{\partial}{\partial z_2}$.

Soient n champs de vecteurs $X_i = A_i \partial_1 + B_i \partial_2$ ($n \geq 2$), à coefficients dans \mathcal{O} et deux à deux linéairement indépendants (i.e. $(A_i B_j - A_j B_i)(0) \neq 0$ pour $1 \leq i < j \leq n$). On s'intéresse aux solutions du problème suivant : ce sont les n -uplets $(f_1, \dots, f_n) \in \mathcal{O}^n$ tels que $X_i(f_i) = 0$ pour $1 \leq i \leq n$ et $d(f_1 + \dots + f_n) = 0$; l'analogie réel correspond aux équations de la résonance étudiées par Joly et Rauch (cf. [J-R]).

Dans ce qui suit, on étudie ce problème du point de vue des \mathcal{D} -modules ; on montre que la dimension $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{S}$ du \mathbb{C} -espace vectoriel \mathcal{S} des solutions est finie et que l'on a les inégalités suivantes :

$$n \leq \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{S} \leq n + \frac{1}{2} (n-1)(n-2) .$$

On montre également que cette majoration est optimale puisque la borne est atteinte lorsque les n champs de vecteurs sont à coefficients constants. On étudie complètement le cas de 3 champs de vecteurs. Enfin, on montre comment ces questions sont reliées à la géométrie des tissus étudiée par Blaschke et ses élèves autour de 1930 ; une caractérisation des 3-tissus de \mathbb{C}^2 de rang maximum est obtenue.

L'auteur remercie Daniel Barlet, Roger Gay et Jean-Luc Joly; tous trois pour des raisons diverses ont permis que tissus et \mathcal{D} -modules résonnent !

§ 1 . Finitude de $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{S}$

On désigne par \mathcal{D} l'anneau des opérateurs différentiels (linéaires et d'ordre fini) à coefficients dans \mathcal{O} et l'on considère la suite exacte de \mathcal{D} -modules à gauche

$$\mathcal{D}^{n+2} \longrightarrow \mathcal{D}^n \longrightarrow \mathcal{M} = \mathcal{D}^n / \text{Im} \rho \longrightarrow 0$$

où l'homomorphisme ρ est défini, dans les bases canoniques, par la matrice d'opérateurs différentiels suivante :

$$\rho = \begin{bmatrix} X_1 & & & \partial_1 & \partial_2 \\ & \cdot & 0 & \cdot & \cdot \\ & & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & & & X_n & \partial_1 & \partial_2 \end{bmatrix}$$

Tout élément $(f_1, \dots, f_n) \in \mathcal{O}^n$ de \mathcal{S} détermine un unique élément du \mathbb{C} -espace vectoriel $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}, \mathcal{O})$ des homomorphismes de \mathcal{D} -modules à gauche de \mathcal{M} dans \mathcal{O} et inversement (cf. par exemple [P]), ce que l'on se permettra d'écrire $\mathcal{S} = \text{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}, \mathcal{O})$.

Pour $k \in \mathbb{N}$, on désigne par \mathcal{D}_k l'espace vectoriel des opérateurs différentiels d'ordre inférieur ou égal à k et l'on pose $\mathcal{D}_{-1} = 0$; alors $\bigoplus_{k \geq 0} \mathcal{D}_k / \mathcal{D}_{k-1} = \mathcal{O}[\xi_1, \xi_2] = \mathcal{O}[\xi]$ est l'anneau gradué des polynômes

en ξ_1 et ξ_2 à coefficients dans \mathcal{O} . Pour $k \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{M}_k = \mathcal{D}_k^n / \text{Im} \rho \cap \mathcal{D}_k^n$ et l'on pose $\mathcal{M}_{-1} = 0$; on peut identifier \mathcal{M}_{k-1} à son image dans \mathcal{M}_k et ainsi $\text{gr}(\mathcal{M}) = \bigoplus_{k \geq 0} \mathcal{M}_k / \mathcal{M}_{k-1}$ est un $\mathcal{O}[\xi]$ -module gradué de type fini

dont on note $\text{mult gr}(\mathcal{M})$ la multiplicité. La racine de l'annulateur de $\text{gr}(\mathcal{M})$ est un idéal homogène de $\mathcal{O}[\xi]$ et définit un germe, à l'origine de $\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2$, d'ensemble analytique ξ -conique car (\mathcal{M}) qu'on appelle la variété caractéristique de \mathcal{M} (si $\mathcal{M} = \mathcal{D}/\mathcal{F}$ alors $\text{Ann gr}(\mathcal{M})$ est l'idéal de $\mathcal{O}[\xi]$ engendré par les symboles principaux

de tous les éléments de \mathcal{G} ; l'entier non nul défini par $\text{mult}(M) = \text{mult gr}(M)$ s'appelle la *multiplicité* de M (cf. par exemple [L-M]).

Pour $k \in \mathbb{N}$, on considère le diagramme commutatif aux lignes exactes

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & \mathcal{D}_{k-2}^{n+2} & \hookrightarrow & \mathcal{D}_{k-1}^{n+2} & \longrightarrow & \mathcal{D}_{k-1}^{n+2}/\mathcal{D}_{k-2}^{n+2} \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow \rho_{k-1} & & \downarrow \rho_k & & \downarrow (\bar{\rho})_k \\
 0 & \longrightarrow & \mathcal{D}_{k-1}^n & \hookrightarrow & \mathcal{D}_k^n & \longrightarrow & \mathcal{D}_k^n/\mathcal{D}_{k-1}^n \longrightarrow 0
 \end{array}$$

où ρ_k est induit par ρ et $(\bar{\rho})_k$ est obtenu par passage aux quotients. Ainsi $\mathcal{G}_k = \text{Coker } (\bar{\rho})_k$ est aussi le conoyau de l'homomorphisme naturel $\mathcal{D}_{k-1}^n/\text{Im}\rho_{k-1} \longrightarrow \mathcal{D}_k^n/\text{Im}\rho_k$; de plus $\mathcal{G} = \bigoplus_{k \geq 0} \mathcal{G}_k$ est un

$\mathcal{O}[\xi]$ -module gradué de présentation finie qui est le conoyau du morphisme $\bar{\rho} : \mathcal{O}[\xi]^{n+2} \longrightarrow \mathcal{O}[\xi]^n$ défini, dans les bases canoniques, par la matrice suivante :

$$\bar{\rho} = \begin{bmatrix} \ell_1 & & & \xi_1 & \xi_2 \\ & \cdot & 0 & \cdot & \cdot \\ & & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & & & \cdot & \cdot \\ & & & \ell_n & \xi_1 & \xi_2 \end{bmatrix}$$

où $\ell_i = A_i \xi_1 + B_i \xi_2$ est le symbole principal de X_i . Puisque $\text{Im}\rho_k \subseteq \text{Im}\rho \cap \mathcal{D}_k^n$, on a le diagramme commutatif aux lignes exactes

$$\begin{array}{ccccccc}
 \mathcal{D}_{k-1}^n/\text{Im}\rho_{k-1} & \longrightarrow & \mathcal{D}_{k-1}^n/\text{Im}\rho \cap \mathcal{D}_{k-1}^n = \mathcal{M}_{k-1} & \longrightarrow & 0 \\
 \downarrow & & \downarrow & & \\
 \mathcal{D}_k^n/\text{Im}\rho_k & \longrightarrow & \mathcal{D}_k^n/\text{Im}\rho \cap \mathcal{D}_k^n = \mathcal{M}_k & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

D'après ce qui précède, par passage aux quotients, on obtient une surjection $\varphi : \mathcal{G} \longrightarrow \text{gr}(M)$ de $\mathcal{O}[\xi]$ -modules gradués de type fini.

Remarque 1 - En général φ n'est pas injective, cependant c'est le cas si les n champs de vecteurs sont à coefficients constants ; en effet, dans cette situation on a $\text{Imp}_k = \text{Imp} \cap \mathcal{D}_k^n$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Soit $F_0(\mathcal{G})$ le 0-ième idéal de Fitting de \mathcal{G} (i.e. l'idéal de $\mathcal{O}[\xi]$ engendré par les mineurs d'ordre n de la matrice $\bar{\rho}$), alors

on a $\sqrt{F_0(\mathcal{G})} = (\xi_1, \xi_2)$. En effet, puisque $F_0(\mathcal{G})$ est homogène, via l'extension $\mathcal{O}[\xi] \longrightarrow \mathbb{C}\langle z, \xi \rangle = \mathbb{C}\langle z_1, z_2, \xi_1, \xi_2 \rangle$, il suffit de montrer

que $\sqrt{F_0(\mathcal{G}) \cdot \mathbb{C}\langle z, \xi \rangle} = (\xi_1, \xi_2) \cdot \mathbb{C}\langle z, \xi \rangle$; or ceci revient à montrer d'après le théorème des zéros de Hilbert dans $\mathbb{C}\langle z, \xi \rangle$ que l'ensemble des zéros Z de $F_0(\mathcal{G}) \cdot \mathbb{C}\langle z, \xi \rangle$ est $\mathbb{C}^2 \times \{0\}$. Par définition de $\bar{\rho}$, on a $\mathbb{C}^2 \times \{0\} \subseteq Z$. Soit $(z, \xi_1, \xi_2) \in Z$, alors pour $1 \leq i \leq 2$ on a

$l_1 \dots \widehat{l_j} \dots l_n \xi_i = 0$ pour $1 \leq j \leq n$ où $l_k = A_k(z)\xi_1 + B_k(z)\xi_2$; grâce à l'hypothèse d'indépendance et la règle de Cramer, on obtient en regroupant les différentes équations deux à deux

$l_1 \dots \widehat{l_j l_{j+1}} \dots l_n \xi_i^2 = 0$ pour $1 \leq j \leq n$, puis en réitérant

$l_1 \dots \widehat{l_j l_{j+1} l_{j+2}} \dots l_n \xi_i^3 = 0$ pour $1 \leq j \leq n, \dots, l_n \xi_i^{n-1} = l_1 \xi_i^{n-1} = 0$ soit $\xi_i^n = 0$ d'où $Z = \mathbb{C}^2 \times \{0\}$.

On a $\sqrt{F_0(\mathcal{G})} = \sqrt{\text{Ann } \mathcal{G}}$ (cf. [T1]) et la surjection φ montre que

l'on a $\text{Ann } \mathcal{G} \subseteq \text{Ann } \text{gr}(M)$, d'où $\sqrt{\text{Ann } \mathcal{G}} = \sqrt{\text{Ann } \text{gr}(M)} = (\xi_1, \xi_2)$ puisque par définition $\text{Ann } \text{gr}(M) \subseteq (\xi_1, \xi_2)$. Autrement dit, on a $\text{car}(M) = \mathbb{C}^2 \times \{0\}$.

Proposition 1. Le \mathcal{D} -module à gauche M est \mathcal{D} -isomorphe à $\mathcal{O}^{\text{mult}(M)}$ et $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{P} = \dim_{\mathbb{C}} \text{Hom}_{\mathcal{D}}(M, \mathcal{O})$ est finie et égale à $\text{mult}(M)$. De plus, on a $\text{mult}(M) \leq \text{mult}(\mathcal{G})$ avec égalité si les n champs de vecteurs sont à coefficients constants.

Démonstration. Puisque $\text{car}(M) = \mathbb{C}^2 \times \{0\}$, M est \mathcal{D} -isomorphe à \mathcal{O}^m (cf. par exemple [L-M]). D'où $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(M, \mathcal{O}) = (\text{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{O}, \mathcal{O}))^m = \mathbb{C}^m$ puisque $\mathcal{O} = \mathcal{D}/(\partial_1, \partial_2)$. D'après les propriétés de la multiplicité (cf. loc. cit.) et puisque $\text{gr}(\mathcal{O}) = \mathcal{O}$ on a $\text{mult}(M) = \text{mult}(\mathcal{O}^m) = m$; de plus, grâce à la surjection φ on a $\text{mult}(M) \leq \text{mult}(\mathcal{G})$ avec égalité si les n champs de vecteurs sont à coefficients constants d'après la remarque 1.

Exemples. Soient $X_1 = \partial_1$ et $X_2 = \partial_2$; pour $X_3 = \partial_1 + \partial_2$ ou $(1+z_1)\partial_1 + \partial_2$ ou $(1+z_2)\partial_1 + \partial_2$ on obtient $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{S} = 4 = \text{mult}(\mathcal{S})$, alors que pour $X_3 = (1+z_1+z_2)\partial_1 + \partial_2$ on a $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{S} = 3 < \text{mult}(\mathcal{S}) = 4$.

§ 2. Majoration de $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{S}$

On va déterminer $\text{mult}(\mathcal{S})$ en comparant les situations avec n et $n+1$ champs de vecteurs ($n \geq 2$).

On désigne par $\mathcal{S}(n)$ le $\mathcal{O}[\xi]$ -module gradué de présentation finie correspondant aux symboles des n premiers champs de vecteurs X_i (i.e. $\mathcal{S}(n) = \text{Coker } \bar{\rho}(n)$ où comme précédemment

$$\bar{\rho}(n) = \begin{bmatrix} \ell_1 & & & \xi_1 & \xi_2 \\ & \cdot & 0 & \cdot & \cdot \\ & & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & & & \cdot & \cdot \\ & & & \ell_n & \xi_1 & \xi_2 \end{bmatrix} .$$

Le diagramme commutatif aux lignes exactes :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{O}[\xi] & \xrightarrow{m} & \mathcal{O}[\xi]^{n+1+2} & \xrightarrow{p} & \mathcal{O}[\xi]^{n+2} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \ell_{n+1} & & \downarrow \bar{\rho}(n+1) & & \downarrow \bar{\rho}(n) \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{O}[\xi] & \xrightarrow{\mu} & \mathcal{O}[\xi]^{n+1} & \xrightarrow{\pi} & \mathcal{O}[\xi]^n \longrightarrow 0 \end{array}$$

où $m(P) = (0, \dots, 0, P, 0, 0)$

$$p(P_1, \dots, P_{n+3}) = (P_1, \dots, P_n, \widehat{P_{n+1}}, P_{n+2}, P_{n+3})$$

$$\ell_{n+1}(P) = P \ell_{n+1}$$

$$\mu(C) = (0, \dots, 0, C)$$

$$\pi(a_1, \dots, a_{n+1}) = (a_1, \dots, a_n)$$

induit la suite exacte de $\mathcal{O}[\xi]$ -modules gradués :

$$\mathcal{O}[\xi]/(\ell_{n+1}) \xrightarrow{\tilde{\mu}} \mathcal{G}(n+1) \xrightarrow{\tilde{\kappa}} \mathcal{G}(n) \longrightarrow 0$$

et l'on a $\text{Ker } \tilde{\mu} = \{P+(\ell_{n+1})\}$; il existe $(P_1, \dots, P_{n+1}) \in \mathcal{O}[\xi]^{n+1}$ tel que $P - P_{n+1}\ell_{n+1} = -P_1\ell_1 = \dots = -P_n\ell_n$.

Lemme 1. On a $\text{Ker } \tilde{\mu} = (\ell_{n+1}, \prod_{i=1}^n \ell_i) / (\ell_{n+1})$.

Démonstration. Si $Y = P_1\ell_1 = \dots = P_n\ell_n$, il suffit de montrer que

$Y \in (\prod_{i=1}^n \ell_i)$, or $P_1\ell_1 = P_2\ell_2$ s'écrit $(P_1A_1 - P_2A_2)\xi_1 = (-P_1B_1 + P_2B_2)\xi_2$

ce qui montre qu'il existe $r \in \mathcal{O}[\xi]$ tel que
$$\begin{cases} P_1A_1 - P_2A_2 = r\xi_2 \\ -P_1B_1 + P_2B_2 = r\xi_1 \end{cases}$$

Mais $A_1B_2 - A_2B_1$ est inversible dans \mathcal{O} , d'où d'après la règle de Cramer $P_1 = Q_2(B_2\xi_2 + A_2\xi_1) = Q_2\ell_2$ où $Q_2 \in \mathcal{O}[\xi]$. Par le même procédé, on obtient que $P_1 = Q_2\ell_2 = Q_3\ell_3 = \dots = Q_n\ell_n$ où $Q_i \in \mathcal{O}[\xi]$; puis, en réitérant $Q_2 = R_3\ell_3 = \dots = R_n\ell_n$ où $R_j \in \mathcal{O}[\xi]$, ... , $U_{n-2} = V_{n-1}\ell_{n-1} = V_n\ell_n$ où $V_k \in \mathcal{O}[\xi]$ et $V_{n-1} = W_n\ell_n$ où $W_n \in \mathcal{O}[\xi]$;

d'où en regroupant $Y = W_n\ell_1\ell_2 \dots \ell_n \in (\prod_{i=1}^n \ell_i)$, ce qui prouve le résultat.

Ainsi, d'après le lemme 1 et ce qui précède, on obtient une suite exacte de $\mathcal{O}[\xi]$ -modules de type fini :

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}[\xi]/(\ell_{n+1}, \prod_{i=1}^n \ell_i) \xrightarrow{\tilde{\mu}} \mathcal{G}(n+1) \xrightarrow{\tilde{\kappa}} \mathcal{G}(n) \longrightarrow 0$$

où $\tilde{\mu}$ est induit naturellement par $\tilde{\mu}$; d'après le §1, on a

$$\sqrt{\text{Ann } \mathcal{G}(n)} = (\xi_1, \xi_2) \text{ pour } n \geq 2, \text{ ce qui montre que } \sqrt{(\ell_{n+1}, \prod_{i=1}^n \ell_i)} = (\xi_1, \xi_2)$$

et que l'on a $\text{mult } \mathcal{G}(n+1) = \text{mult } \mathcal{G}(n) + \text{mult } \mathcal{O}[\xi]/(\ell_{n+1}, \prod_{i=1}^n \ell_i)$

(cf. [L-M]).

D'après l'hypothèse d'indépendance, on peut toujours supposer que $l_{n+1} = \xi_2$; mais dans ce cas, tous les A_i ($1 \leq i \leq n$) sont inversibles dans \mathcal{O} , d'où

$$\begin{aligned} \text{mult } \mathcal{O}[\xi] / (\xi_{n+1}, \prod_{i=1}^n l_i) &= \text{mult } \mathcal{O}[\xi_1] / (\prod_{i=1}^n A_i \xi_1) \\ &= \text{mult } \mathcal{O}[\xi_1] / (\xi_1^n) = \text{mult } (\mathcal{O}^n) = n. \end{aligned}$$

Théorème 1. Soit $n \geq 2$. On a $\text{mult } \mathcal{G}(n) = n + \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$, et les inégalités suivantes :

$$n \leq \dim_c \mathcal{P} = \text{mult } (M) \leq n + \frac{1}{2}(n-1)(n-2) ;$$

de plus, si les n champs de vecteurs sont à coefficients constants, alors

$$\dim_c \mathcal{P} = n + \frac{1}{2}(n-1)(n-2).$$

Démonstration. Les constantes sont solutions d'où $\dim_c \mathcal{P} \geq n$. Grâce à ce qui précède et la proposition 1, il suffit par récurrence sur n d'établir que $\text{mult } \mathcal{G}(2) = 2$. On a le diagramme commutatif (aux lignes exactes) suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} & & \overline{\mathcal{O}}(2) & & & & \\ & & \downarrow & & & & \\ \mathcal{O}[\xi]^4 & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{O}[\xi]^2 & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{G}(2) & \xrightarrow{\quad} & 0 \\ & & \downarrow M & & \downarrow \text{id} & & \\ & & \mathcal{O}[\xi]^4 & \xrightarrow{\quad H \quad} & \mathcal{O}[\xi]^2 & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{O}^2 \xrightarrow{\quad} 0 \end{array}$$

où $H = \begin{bmatrix} \xi_1 & \xi_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \xi_1 & \xi_2 \end{bmatrix}$ correspond à la résolution canonique de

Hilbert de $\mathcal{O}^2 = \mathcal{O} \oplus \mathcal{O}$ et

$$M = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & 1 & 0 \\ B_1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & A_2 & 1 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Puisque $\det M = -A_1 B_2 + A_2 B_1$ est inversible dans \mathcal{O} , $\mathcal{G}(2)$ et \mathcal{O}^2 sont $\mathcal{O}[\xi]$ -isomorphes, d'où $\text{mult } \mathcal{G}(2) = 2$.

Remarque 2. Pour $n=2$, on a $\dim_{\mathcal{O}} \mathcal{F} = 2$ (!).

§ 3. Passage de n à $n+1$ champs de vecteurs

a) Cas général.

Soit $n \geq 2$. On désigne par $\mathcal{M}(n)$ le \mathcal{D} -module à gauche de présentation finie correspondant aux n premiers champs de vecteurs X_i (i.e. $\mathcal{M}(n) = \text{Coker } \rho(n)$ où comme précédemment

$$\rho(n) = \begin{bmatrix} X_1 & & & \partial_1 & \partial_2 \\ & \cdot & 0 & \cdot & \cdot \\ & & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & & & \cdot & \cdot \\ & & & X_n & \partial_1 & \partial_2 \end{bmatrix})$$

et l'on considère l'idéal à gauche de \mathcal{D} défini par

$$\mathcal{F}(n) = \{Y \in \mathcal{D} ; \text{il existe } (P_1, \dots, P_n) \in \mathcal{D}^n \text{ tel que } Y = P_1 X_1 = \dots = P_n X_n\}.$$

Alors, comme dans le §2, on a une suite exacte de \mathcal{D} -modules à gauche :

$$0 \longrightarrow \mathcal{D}/(X_{n+1}, \mathcal{F}(n)) \longrightarrow \mathcal{M}(n+1) \longrightarrow \mathcal{M}(n) \longrightarrow 0 \quad (*)$$

ayant tous, d'après la proposition 1, $\mathbb{C}^2 \times \{0\}$ comme variété caractéristique. D'après la proposition 1 et la résolution canonique

de Hilbert de \mathcal{O} (i.e.

$$0 \longrightarrow \mathcal{O} \xrightarrow{\begin{pmatrix} -\partial_2 \\ \partial_1 \end{pmatrix}} \mathcal{O}^2 \xrightarrow{(\partial_1, \partial_2)} \mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{O} \longrightarrow 0$$

on a, grâce au lemme de Poincaré, $\text{Ext}_{\mathcal{O}}^i(\mathcal{M}(n), \mathcal{O}) = 0$ pour $i \geq 1$; ce qui donne, en appliquant le foncteur $\text{Hom}_{\mathcal{O}}(\cdot, \mathcal{O})$ à (*), une suite exacte de \mathbb{C} -espaces vectoriels de dimension finie :

$$0 \longrightarrow \mathcal{S}(n) \longrightarrow \mathcal{S}(n+1) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}/(X_{n+1}), \mathcal{S}(n)), \mathcal{O} \longrightarrow 0$$

où $\mathcal{S}(n) = \text{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathcal{M}(n), \mathcal{O})$ pour $n \geq 2$. Ainsi, pour $n \geq 2$ on a

$$\begin{aligned} \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{S}(n+1) &= \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{S}(n) + \dim_{\mathbb{C}} \text{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}/(X_{n+1}), \mathcal{S}(n)), \mathcal{O} \\ &= \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{S}(n) + \text{mult } \mathcal{O}/(X_{n+1}, \mathcal{S}(n)). \end{aligned}$$

De plus, on a $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{S}(2) = 2$ d'après la remarque 2.

b) Etude de $\mathcal{S}(3)$.

Lemme 2. On a $X_2^* \delta^{-1} X_1 = X_1^* \delta^{-1} X_2$ et $\mathcal{S}(2) = (X_2^* \delta^{-1} X_1)$ où X_i^* est l'opérateur différentiel adjoint de X_i , et δ^{-1} est l'inverse dans \mathcal{O} de $\delta = A_1 B_2 - A_2 B_1$.

Démonstration. Si $Y = P_1 X_1 = P_2 X_2$, alors $(P_1 A_1 - P_2 A_2) \partial_1 = (-P_1 B_1 + P_2 B_2) \partial_2$ ce qui montre qu'il existe $U \in \mathcal{O}$ tel que

$$\begin{cases} P_1 A_1 - P_2 A_2 = U \partial_2 \\ -P_1 B_1 + P_2 B_2 = U \partial_1 \end{cases}$$

D'où $P_1 \delta = U(\partial_1 A_2 + \partial_2 B_2) = -U X_2^*$, de même $P_2 \delta = -U X_1^*$ soit $Y = -U X_2^* \delta^{-1} X_1 = -U X_1^* \delta^{-1} X_2$. Il suffit donc de vérifier que $X_2^* \delta^{-1} X_1 = X_1^* \delta^{-1} X_2$.

On a $-X_2^* \delta^{-1} X_1 = \partial_1 A_2 \delta^{-1} A_1 \partial_1 + \partial_1 A_2 \delta^{-1} B_1 \partial_2 + \partial_2 B_2 \delta^{-1} A_1 \partial_1 + \partial_2 B_2 \delta^{-1} B_1 \partial_2$,

et $-X_1^* \delta^{-1} X_2 = \partial_1 A_1 \delta^{-1} A_2 \partial_1 + \partial_1 A_1 \delta^{-1} B_2 \partial_2 + \partial_2 B_1 \delta^{-1} A_2 \partial_1 + \partial_2 B_1 \delta^{-1} B_2 \partial_2$

où tous les produits sont calculés dans \mathcal{O} . Or $\delta^{-1}(A_1 B_2 - A_2 B_1) = 1$ ce qui montre que dans \mathcal{O} , on a les relations

$\partial_1 \delta^{-1} A_1 B_2 = \partial_1 \delta^{-1} A_2 B_1 + \partial_1$ pour $1 \leq i \leq 2$, d'où le résultat.

Ainsi, d'après ce qui précède et le théorème 1, on a

$$3 \leq \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{S}(3) = 2 + \text{mult } \mathcal{O}/(X_3, X_2^* \delta^{-1} X_1) \leq 4.$$

On suppose désormais que l'on a

$$\begin{cases} X_1 = A_1 \partial_1 + \partial_2 \\ X_2 = A_2 \partial_1 + \partial_2 \\ X_3 = \partial_1 \end{cases}$$

Ceci est toujours possible d'après l'hypothèse d'indépendance et puisque l'on veut seulement évaluer $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{P}(3)$; en effet, quitte à faire un changement de variables on peut supposer que $X_3 = \partial_1$, puis éventuellement faire des divisions puisque $X_i = A_i \partial_1 + B_i \partial_2$ avec B_i inversible dans \mathcal{O} pour $i=1$ et 2 . Alors $\delta = A_1 - A_2$, et en tant qu'idéaux à gauche de \mathcal{O} (donnés par leurs générateurs) on a $(X_3, X_2^* \delta^{-1} X_1) = (\partial_1, \partial_1 (\delta^{-1} A_2) \partial_2 + \partial_2 (\delta^{-1}) \partial_2 + \delta^{-1} \partial_2^2) = (\partial_1, \partial_2^2 + \alpha \partial_2)$ où l'on pose $\alpha = [\partial_1 (\delta^{-1} A_2) + \partial_2 (\delta^{-1})] \delta$.

Théorème 2. On a les deux éventualités possibles :

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{P}(3) = \begin{cases} 3 & \text{si } \partial_1(\alpha) \neq 0 \\ 4 & \text{si } \partial_1(\alpha) = 0 \end{cases}$$

Démonstration. On a $[\partial_1, \partial_2^2 + \alpha \partial_2] = \partial_1(\alpha) \partial_2$ d'où $\text{gr } \mathcal{O} / (X_3, X_2^* \delta^{-1} X_1) = \mathcal{O}[\xi] / (\xi_1, \xi_2^2, \partial_1(\alpha) \xi_2)$. D'où le résultat d'après ce qui précède puisque par définition $\text{mult } \mathcal{O} / (X_3, X_2^* \delta^{-1} X_1) = \text{mult } \mathcal{O}[\xi] / (\xi_1, \xi_2^2, \partial_1(\alpha) \xi_2)$.

En particulier, on a le résultat suivant :

Corollaire. Dans le cas où les 3 champs de vecteurs sont ∂_1, ∂_2 et $A \partial_1 + \partial_2$, on a les deux éventualités possibles :

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{P}(3) = \begin{cases} 3 & \text{si } A \partial_1 \partial_2(A) \neq \partial_1(A) \partial_2(A) \\ 4 & \text{si } A \partial_1 \partial_2(A) = \partial_1(A) \partial_2(A) \end{cases}$$

§ 4. Application à la géométrie des tissus de \mathbb{C}^2

a) Généralités (cf. la référence classique [B-B], et [C] pour des développements récents).

On rappelle qu'un n -tissu \mathcal{T} de codimension 1 au voisinage de l'origine de \mathbb{C}^2 est défini par n feuilletages (au voisinage de l'origine de \mathbb{C}^2) dont les feuilles sont les hypersurfaces (lisses) de niveau de n éléments $F_i \in \mathcal{O}$ vérifiant $F_i(0) = 0$ et $dF_i(0) \neq 0$, tels qu'en tout point z voisin de $0 \in \mathbb{C}^2$, les espaces tangents en z aux n feuilles passant par z soient en position générale.

Un n-uplet $(g_1(F_1), \dots, g_n(F_n)) \in \mathcal{O}^n$ où $g_i \in \mathbb{C}\{t\}$ et qui vérifie

$$g_1(F_1)dF_1 + \dots + g_n(F_n)dF_n = 0$$

est appelé *une relation abélienne* du n-tissu \mathcal{S} ; la dimension (dont on va montrer la finitude) du \mathbb{C} -espace vectoriel \mathcal{A} des relations abéliennes est un invariant géométrique du n-tissu \mathcal{S} noté $\text{rang}_{\mathbb{C}} \mathcal{S}$ et appelé *le rang* du n-tissu \mathcal{S} (si l'on remplace F_i par $v_i(F_i)$ où $v_i \in \mathbb{C}\{t\}$ vérifie $v_i(0)=0$ et $v_i'(0) \neq 0$, il existe

$$h_i = \frac{g_i}{v_i} \circ v_i^{-1} \in \mathbb{C}\{t\} \text{ tel que } h_i(v_i(F_i)) = \frac{g_i(F_i)}{v_i'(F_i)} \text{ pour } 1 \leq i \leq n,$$

d'où $\sum_{i=1}^n h_i(v_i(F_i))d(v_i(F_i))=0$).

Puisque les n champs de vecteurs X_i sont deux à deux linéairement indépendants, il existe $(F_1, \dots, F_n) \in \mathcal{O}^n$ tel que $X_i F_i = 0$ pour $1 \leq i \leq n$, avec $F_i(0)=0$ et $dF_i(0) \neq 0$; ce qui montre que les F_i définissent un n-tissu \mathcal{S} et réciproquement (il suffit de poser

$$X_i = \frac{\partial F_i}{\partial z_2} \partial_1 - \frac{\partial F_i}{\partial z_1} \partial_2). \text{ Soit } (f_1, \dots, f_n) \in \mathcal{S}, \text{ alors } f_i = \alpha_i(F_i) \text{ où}$$

$\alpha_i \in \mathbb{C}\{t\}$ et $\sum_{i=1}^n \alpha_i'(F_i)dF_i = 0$; l'application \mathbb{C} -linéaire $\Theta : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{A}$

définie par $\Theta(f_1, \dots, f_n) = (\alpha_1'(F_1), \dots, \alpha_n'(F_n))$ est surjective

(si \tilde{g}_i est une primitive de g_i , alors

$$\Theta(\tilde{g}_1(F_1), \dots, \tilde{g}_n(F_n)) = (g_1(F_1), \dots, g_n(F_n))$$

et son noyau est constitué des solutions constantes, d'où

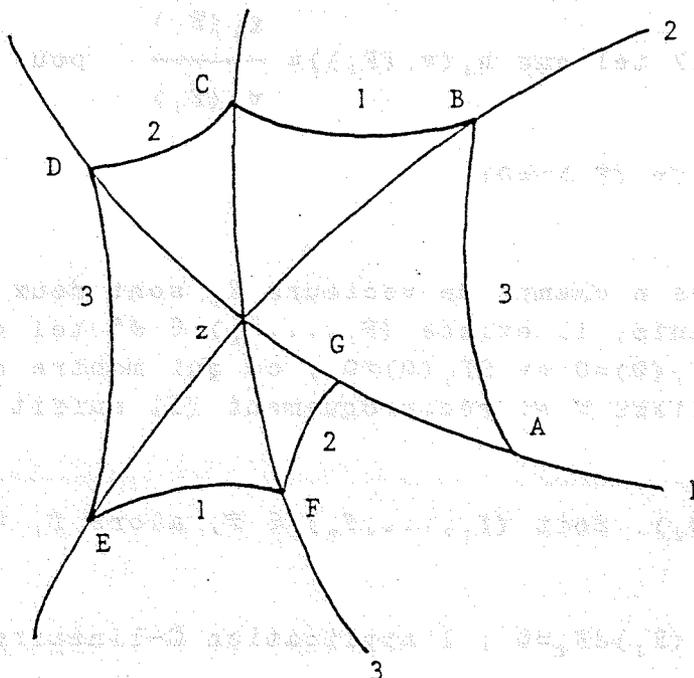
$$\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{S} = \text{rang}_{\mathbb{C}} \mathcal{S} + n.$$

D'après le théorème 1, on a $\text{rang}_{\mathbb{C}} \mathcal{S} \leq \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ ce qui, dans le cadre classique (i.e. l'analogie réel), est un résultat dû à Bol (cf. [B-B]).

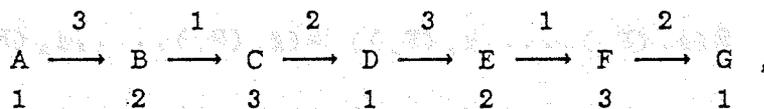
b) Caractérisation des 3-tissus de \mathbb{C}^2 .

On dit que deux tissus (de codimension 1 au voisinage de l'origine) de \mathbb{C}^2 sont *équivalents* s'ils sont transformés l'un dans l'autre par un isomorphisme analytique.

Soit \mathcal{T} un 3-tissu de \mathbb{C}^2 , pour z voisin de $0 \in \mathbb{C}^2$ on fait la construction suivante (précisée, à équivalence près, dans la proposition qui suit) : on "trace" les trois feuilles passant par z , et on fixe un point A proche de z et sur la feuille de la famille 1 qui passe par z ; puis on "se promène" le long des feuilles du tissu \mathcal{T} , comme indiqué sur le dessin (réel !) ci-dessous (B est précisément l'unique point d'intersection de la feuille de la famille 2 qui passe par z et de la feuille de la famille 3 qui passe par A , etc...).



Après un "tour" qu'on peut représenter par



on se retrouve sur la feuille de la famille 1 qui passe par z , en un point $G = G(z,A)$ éventuellement égal à A . On dit que le tissu \mathcal{T} est de Thomsen (ou hexagonal) si pour tout point z voisin de $0 \in \mathbb{C}^2$ et tout point A voisin de z , les points G et A coïncident.

Proposition 2. Soit \mathcal{G} un 3-tissu de \mathbb{C}^2 dont les champs de vecteurs associés sont ∂_1, ∂_2 et $X = A\partial_1 + \partial_2$. Il existe un élément $\theta \in \mathcal{O}\{t\} = \mathbb{C}\{t, z_1, z_2\}$, construit à partir du flot engendré par X , où

$$\theta = -t + \theta_2 \cdot \frac{t^2}{2} + \theta_3 \cdot \frac{t^3}{3!} + \dots \quad \text{avec } \theta_2 = \frac{-2\partial_2(A)}{A} \text{ et}$$

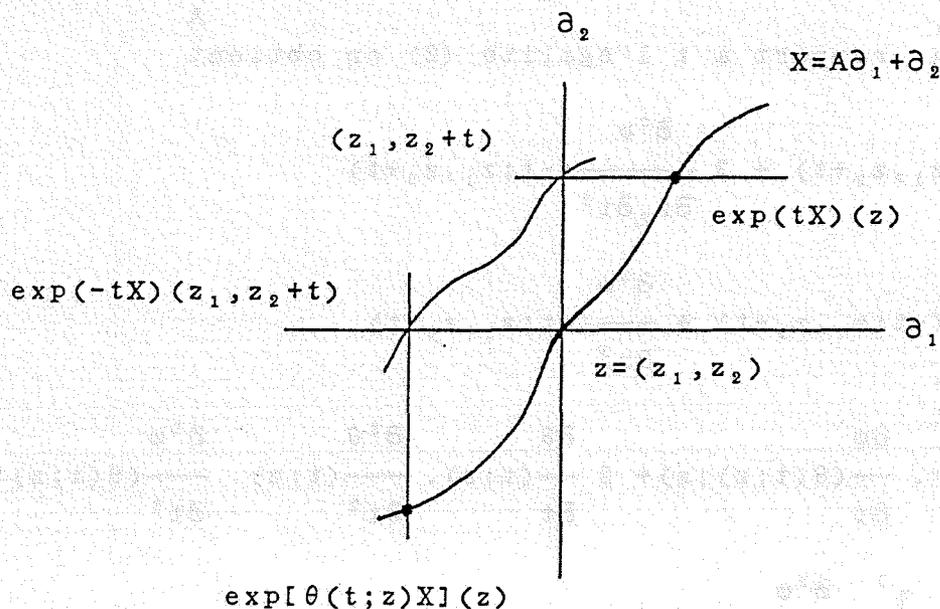
$$\theta_3 = \frac{1}{A^2} [3A \cdot \partial_2(X(A)) - 3A \cdot \partial_2^2(A) - 6X(A) \cdot \partial_2(A)], \text{ et tel que : } \mathcal{G} \text{ est de}$$

Thomsen si et seulement si, on a identiquement $\theta[\theta(t; z); z] = t$.

Démonstration. Si l'on désigne par $\exp(tX)(z)$ le flot engendré par X , on a $\exp(tX)(z) = (\psi(t; z), z_2 + t)$ où

$$\psi(t; z) = z_1 + tA(z) + \frac{t^2}{2} X(A)(z) + \frac{t^3}{3!} X^2(A)(z) + \dots$$

Puisque \mathcal{G} est un 3-tissu de \mathbb{C}^2 , A est inversible dans \mathcal{O} et le théorème des fonctions implicites montre qu'il existe un unique $\theta \in \mathcal{O}\{t\}$ vérifiant $\psi(-t; z_1, z_2 + t) = \psi(\theta(t; z); z)$ et $\theta(0; 0) = 0$. On peut donc faire le dessin (réel !) ci-dessous :



D'après ce qui précède, \mathcal{F} est de Thomsen si et seulement si on a

$\theta[\theta(t; z); z] = t$. Par définition de θ , on a $\frac{\partial^1 \theta}{\partial t^1}(0, z) = \theta_1(z)$ et

$$(1) \quad \begin{cases} - \frac{\partial \psi}{\partial t}(-t; z_1, z_2+t) + \frac{\partial \psi}{\partial z_2}(-t; z_1, z_2+t) \\ = \frac{\partial \theta}{\partial t}(t; z) \cdot \frac{\partial \psi}{\partial t}(\theta(t; z); z) \end{cases}$$

Or $\theta(0; z) = 0$, ce qui montre en prenant $t=0$ que

$$-A(z) = \theta_1(z) \cdot A(z), \text{ soit } \theta_1(z) = -1.$$

En dérivant par rapport à t l'égalité (1) on obtient

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}(-t; z_1, z_2+t) - 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial z_2 \partial t}(-t; z_1, z_2+t) + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z_2^2}(-t; z_1, z_2+t) \\ = \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}(t; z) \cdot \frac{\partial \psi}{\partial t}(\theta(t; z); z) + \left[\frac{\partial \theta}{\partial t}(t; z) \right]^2 \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}(\theta(t; z); z) \end{cases}$$

Ce qui montre en prenant $t=0$ que l'on a

$$X(A) - 2\partial_2(A) = \theta_2 \cdot A + X(A), \text{ soit } \theta_2 = \frac{-2\partial_2(A)}{A}.$$

En dérivant par rapport à t l'égalité (2) on obtient

$$\begin{cases} - \frac{\partial^3 \psi}{\partial t^3}(-t; z_1, z_2+t) + 3 \frac{\partial^3 \psi}{\partial z_2 \partial t^2}(-t; z_1, z_2+t) \\ - 3 \frac{\partial^3 \psi}{\partial z_2^2 \partial t}(-t; z_1, z_2+t) + \frac{\partial^3 \psi}{\partial z_2^3}(-t; z_1, z_2+t) \\ = \frac{\partial^3 \theta}{\partial t^3}(t; z) \cdot \frac{\partial \psi}{\partial t}(\theta(t; z); z) + 3 \frac{\partial \theta}{\partial t}(t; z) \cdot \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}(t; z) \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}(\theta(t; z); z) \\ + \left[\frac{\partial \theta}{\partial t}(t; z) \right]^3 \cdot \frac{\partial^3 \psi}{\partial t^3}(\theta(t; z); z) \end{cases}$$

Ce qui montre en prenant $t=0$ que l'on a

$$- X^2(A) + 3\partial_2(X(A)) - 3\partial_2^2(A) = \theta_3 \cdot A - 3\theta_2 X(A) - X^2(A) ,$$

soit $\theta_3 = \frac{1}{A^2} [3A \cdot \partial_2(X(A)) - 3A \cdot \partial_2^2(A) - 6X(A) \cdot \partial_2(A)]$; ce qui démontre la proposition.

Théorème 3. Pour un 3-tissu \mathcal{F} de \mathbb{C}^2 , les conditions suivantes sont équivalentes :

- i) le tissu \mathcal{F} est de Thomsen ;
- ii) le tissu \mathcal{F} est équivalent à un 3-tissu de \mathbb{C}^2 constitué de 3 familles de droites parallèles ;
- iii) le rang de \mathcal{F} est maximum (i.e $\text{rang}_t \mathcal{F} = 1$).

Démonstration. iii) \implies ii). Il existe une relation abélienne de \mathcal{F} , non triviale : $g_1(F_1)dF_1 + g_2(F_2)dF_2 + g_3(F_3)dF_3 = 0$; soit

$Z_1 = \tilde{g}_1(F_1)$ où \tilde{g}_1 est une primitive de g_1 , alors $dZ_1 + dZ_2 + dZ_3 = 0$ et l'on peut supposer que Z_1 et Z_2 sont des fonctions coordonnées. D'où le résultat, puisqu'après changement de variables le tissu est défini par Z_1, Z_2 et $Z_1 + Z_2$.

ii) \implies i). La condition de Thomsen est invariante par changement de variables ; on peut donc supposer que \mathcal{F} est défini par z_1, z_2 et $z_1 - z_2$ qui est clairement de Thomsen ($\theta(t; z) = -t$).

i) \implies iii). On peut supposer que les champs de vecteurs associés à \mathcal{F} sont ∂_1, ∂_2 et $X = A\partial_1 + \partial_2$. D'après la proposition 2, $\theta = -t + \theta_2 \cdot \frac{t^2}{2} + \theta_3 \cdot \frac{t^3}{3!} + \dots$ vérifie $\theta[\theta(t; z); z] = t$

ce qui impose $2\theta_3 + 3\theta_2^2 = 0$, soit $A \cdot \partial_2(X(A)) - A \cdot \partial_2^2(A) - 2X(A) \cdot \partial_2(A) + 2[\partial_2(A)]^2 = 0$. Or $X(A) = A\partial_1(A) + \partial_2(A)$, ce qui montre que l'on a $A\partial_1\partial_2(A) - \partial_1(A)\partial_2(A) = 0$. D'après le corollaire du théorème 2, on a $\text{rang}_t \mathcal{F} = 1$ d'où le résultat.

Remarque 3. Dans le cadre classique, on a le théorème suivant dû à Thomsen (cf. [B-B]) : tout 3-tissu de Thomsen de \mathbb{R}^2 équivaut topologiquement à un 3-tissu de \mathbb{R}^2 constitué de 3 familles de droites parallèles .

Bibliographie

- [B-B] W. Blaschke et B. Bol. Geometrie der Gewebe. Springer, Berlin (1938).

- [C] S.S. Chern. Web geometry. Bull. Amer. Math. Soc. 6 (1982), 1-8.

- [J-R] J.L. Joly et J. Rauch. Ondes oscillantes semi-linéaires en l.d. Prépublication Bordeaux (1986).

- [L-M] M. Lejeune et B. Malgrange. Opérateurs différentiels. Séminaire Grenoble : 1975/76.

- [P] F. Pham. Singularités des systèmes différentiels de Gauss-Manin. Progress in Math. Birkhäuser (1979).

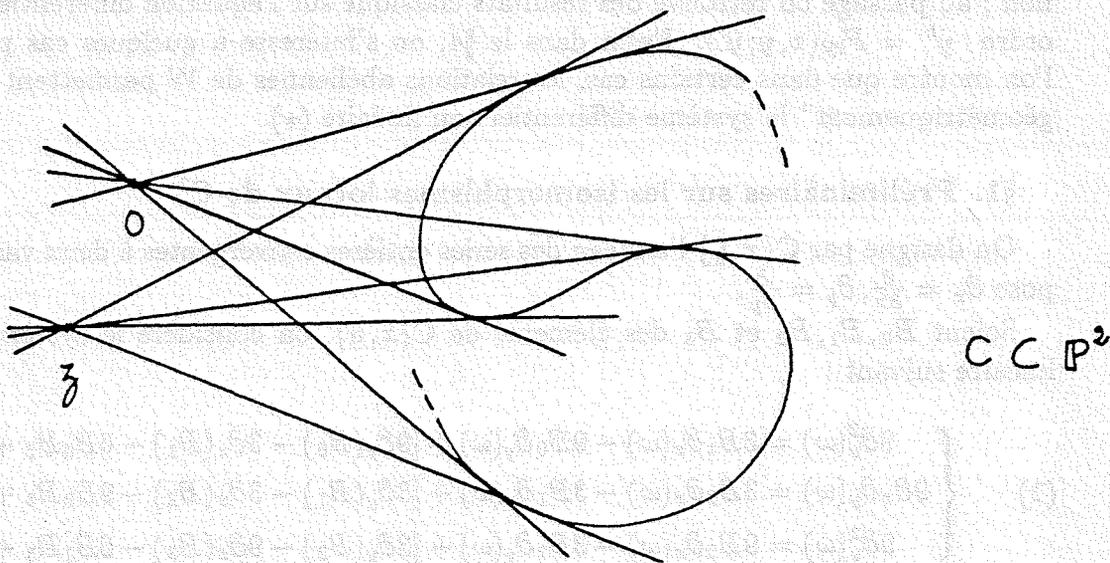
- [T] J.C. Tougeron. Idéaux de fonctions différentiables. Springer-Verlag (1972).

SUR LA LINÉARISATION DES TISSUS DE \mathbb{C}^2

§0. Introduction

Un d -tissu \mathcal{W} de $(\mathbb{C}^2, 0)$ est défini par d feuilletages ($d \geq 2$) de courbes analytiques complexes lisses de $(\mathbb{C}^2, 0)$ en position générale ; on s'intéresse à l'étude géométrique de telles configurations, c'est-à-dire à un isomorphisme local $\phi : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, \phi(0))$ près (cf. le livre classique de Blaschke et Bol [B-B] et l'article de Chern [C] ; on peut également consulter [H]).

Un d -tissu est *linéaire* si ses d feuilles $\{F_i(x, y) = \text{cste}\}$ sont des (morceaux de) droites de \mathbb{C}^2 , non nécessairement parallèles ; par exemple, le d -tissu de $(\mathbb{P}^2, 0)$ constitué par les tangentes issues d'un point générique à une courbe algébrique C de \mathbb{P}^2 de classe d est linéaire :



Si le d -tissu \mathcal{W} est linéaire, l'existence d'une relation abélienne $\sum_{i=1}^d g_i(F_i) dF_i = 0$ avec $g_i(F_i) \neq 0$ pour $1 \leq i \leq d$ permet de montrer que \mathcal{W} est associé, par dualité, à une

courbe algébrique de \mathbb{P}^2 (pour une description précise du tissu linéaire associé à une courbe algébrique de \mathbb{P}^2 , cf. par exemple la fin du §4 ci-dessous).

On dit qu'un d -tissu \mathcal{W} est *linéarisable* s'il existe un isomorphisme local $\phi : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, \phi(0))$ qui transforme \mathcal{W} en un d -tissu linéaire. On sait depuis l'exemple de Bol (cf. §2) que le rang du tissu \mathcal{W} (i.e. la dimension du \mathbb{C} -espace vectoriel \mathcal{A} des relations abéliennes de \mathcal{W} où $\mathcal{A} = \{(g_i(F_i))_{1 \leq i \leq d} ; g_i \text{ analytiques et } \sum_{i=1}^d g_i(F_i)dF_i = 0\}$) ne suffit pas, en général, à caractériser les tissus \mathcal{W} linéarisables.

Dans ce qui suit, on donne essentiellement une condition nécessaire et suffisante, en terme de résolution d'un système différentiel non linéaire (\star) , pour qu'il existe un isomorphisme local $\phi : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, \phi(0))$ qui linéarise \mathcal{W} ; de plus, on détermine les isomorphismes locaux ϕ possibles. Ces résultats constituent une contribution nouvelle au problème de la linéarisation des tissus de \mathbb{C}^2 ; auparavant seuls des cas particuliers avaient été étudiés (cf. [B-B] et sa bibliographie). On retrouvera d'ailleurs dans le §4 quelques résultats classiques.

Dans le §1, on montre qu'à une transformation projective près, un isomorphisme local $\phi : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, \phi(0))$ correspond à la solution d'un système différentiel non linéaire ce qui permet de démontrer le théorème général de linéarisation dans le §2. On montre dans le §3, qu'il existe un polynôme $P_{\mathcal{W}} = \sum_{k=0}^{d-1} P_k b^k \in \mathbb{C}\{x, y\}[b]$ qui "mesure" si \mathcal{W} est linéarisable ou non ; au passage on retrouve des résultats classique sur l'équation différentielle du second ordre $y'' = P_{\mathcal{W}}(x, y; y')$. Enfin dans le §4, on s'intéresse à quelques cas particuliers et l'on montre que dans certains cas, les relations abéliennes de \mathcal{W} permettent de "résoudre géométriquement" le système différentiel non linéaire (\star) .

§1. Préliminaires sur les isomorphismes locaux de \mathbb{C}^2

On désigne par $\mathbb{C}\{x, y\}$ l'anneau des séries entières convergentes à deux variables et l'on pose $\partial_x = \frac{\partial}{\partial x}$, $\partial_y = \frac{\partial}{\partial y}$.

Soient B_0, B_1, B_2 et B_3 des éléments de $\mathbb{C}\{x, y\}$, on considère le système différentiel linéaire suivant :

$$(1) \quad \begin{cases} 9\partial_x^2(\omega) = 3B_1\partial_x(\omega) - 9B_0\partial_y(\omega) + [9\partial_y(B_0) - 3\partial_x(B_1) - 6B_0B_2 + 2B_1^2]\omega \\ 9\partial_x\partial_y(\omega) = 3B_2\partial_x(\omega) - 3B_1\partial_y(\omega) + [3\partial_y(B_1) - 3\partial_x(B_2) - 9B_0B_3 + B_1B_2]\omega \\ 9\partial_y^2(\omega) = 9B_3\partial_x(\omega) - 3B_2\partial_y(\omega) + [3\partial_y(B_2) - 9\partial_x(B_3) - 6B_1B_3 + 2B_2^2]\omega. \end{cases}$$

Les conditions d'intégrabilité du système (1), à savoir

$$\partial_y\{\partial_x^2(\omega)\} = \partial_x\{\partial_x\partial_y(\omega)\} \text{ et } \partial_x\{\partial_y^2(\omega)\} = \partial_y\{\partial_x\partial_y(\omega)\}$$

imposent, après différentiation et élimination, que les B_i vérifient le système différentiel

non linéaire suivant :

$$(2) \quad \begin{cases} \partial_x^2(B_2) - 2\partial_x\partial_y(B_1) + 3\partial_y^2(B_0) + 6B_0\partial_x(B_3) - 3B_2\partial_y(B_0) - 3B_0\partial_y(B_2) \\ \quad + 3B_3\partial_x(B_0) + 2B_1\partial_y(B_1) - B_1\partial_x(B_2) = 0 \\ 3\partial_x^2(B_3) - 2\partial_x\partial_y(B_2) + \partial_y^2(B_1) - 6B_3\partial_y(B_0) + 3B_1\partial_x(B_3) + 3B_3\partial_x(B_1) \\ \quad - 3B_0\partial_y(B_3) - 2B_2\partial_x(B_2) + B_2\partial_y(B_1) = 0. \end{cases}$$

Proposition 1. On suppose que les B_i vérifient le système (2), alors on a les propriétés suivantes :

- a) le \mathbb{C} -espace vectoriel \mathcal{S} des solutions du système (1) est de dimension 3 ;
- b) toute base $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ de \mathcal{S} détermine un isomorphisme local $\phi : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{P}^2, \phi(0))$ où $\phi = [\omega_1, \omega_2, \omega_3]$; de plus, si $\tilde{\phi} = [\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2, \tilde{\omega}_3]$ est associé à une autre base $(\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2, \tilde{\omega}_3)$ de \mathcal{S} , alors ϕ et $\tilde{\phi}$ sont projectivement équivalents (i.e. $\tilde{\phi} = M \cdot \phi$ où la matrice M appartient à $GL(3, \mathbb{C})$).

Démonstration. a) Soit \mathcal{D} l'anneau des opérateurs différentiels linéaires à coefficients dans $\mathcal{O} = \mathbb{C}\{x, y\}$; on désigne par \mathcal{D}/\mathcal{J} le \mathcal{D} -module à gauche associé au système (1). Puisque les B_i vérifient le système (2), l'idéal de $\mathcal{O}[\xi, \eta]$ engendré par les symboles principaux des éléments de \mathcal{J} est

$$(\xi^2, \xi\eta, \eta^2)\mathcal{O}[\xi, \eta]$$

ce qui montre que \mathcal{D}/\mathcal{J} est \mathcal{D} -isomorphe à \mathcal{O}^3 ; en particulier, on a

$$\dim_{\mathbb{C}}\mathcal{S} = \dim_{\mathbb{C}}\text{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{D}/\mathcal{J}, \mathcal{O}) = 3$$

(cf. par exemple [B]).

- b) Soit $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ une base de \mathcal{S} , on peut vérifier que le déterminant

$$\delta = \begin{vmatrix} \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ \partial_x(\omega_1) & \partial_x(\omega_2) & \partial_x(\omega_3) \\ \partial_y(\omega_1) & \partial_y(\omega_2) & \partial_y(\omega_3) \end{vmatrix}$$

est un élément non nul de $\mathbb{C}\{x, y\}$, sinon les ω_j seraient \mathbb{C} -linéairement dépendants (cf. par exemple [A], p. 193). De plus, le système (1) montre que l'on a $\partial_x(\delta) = \partial_y(\delta) = 0$, soit $\delta \in \mathbb{C}^*$. L'un des $\omega_j(0)$ est donc non nul, ce qui montre l'existence d'un isomorphisme local $\phi = [\omega_1, \omega_2, \omega_3]$ d'après ce qui précède. L'équivalence projective est alors une conséquence de la propriété a). \square

Sous les hypothèses de la proposition précédente, si $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ est une base de \mathcal{S} on a grâce au système (1) :

$$\begin{aligned} \delta &= (\omega_j, \partial_x(\omega_j), \partial_y(\omega_j)) = \text{cste} \neq 0 \\ \delta B_0 &= -(\omega_j, \partial_x(\omega_j), \partial_x^2(\omega_j)) \\ \delta B_1 &= 3(\omega_j, \partial_x^2(\omega_j), \partial_y(\omega_j)) = -3(\omega_j, \partial_x(\omega_j), \partial_x\partial_y(\omega_j)) \\ \delta B_2 &= -3(\omega_j, \partial_x(\omega_j), \partial_y^2(\omega_j)) = 3(\omega_j, \partial_x\partial_y(\omega_j), \partial_y(\omega_j)) \\ \delta B_3 &= (\omega_j, \partial_y^2(\omega_j), \partial_y(\omega_j)) \end{aligned}$$

où ω_j est le vecteur colonne $\begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}$ et $(, ,)$ désigne le produit mixte dans \mathbb{C}^3 . En particulier si $\phi = [\phi_1, \phi_2, 1]$ est associé à une base de \mathcal{S} on a les formules suivantes :

$$(3) \quad \begin{cases} \partial_x^2(\phi_1)\partial_x(\phi_2) - \partial_x^2(\phi_2)\partial_x(\phi_1) = \Delta B_0 \\ \partial_x^2(\phi_1)\partial_y(\phi_2) - \partial_x^2(\phi_2)\partial_y(\phi_1) + 2[\partial_x\partial_y(\phi_1)\partial_x(\phi_2) - \partial_x\partial_y(\phi_2)\partial_x(\phi_1)] = \Delta B_1 \\ \partial_y^2(\phi_1)\partial_x(\phi_2) - \partial_y^2(\phi_2)\partial_x(\phi_1) + 2[\partial_x\partial_y(\phi_1)\partial_y(\phi_2) - \partial_x\partial_y(\phi_2)\partial_y(\phi_1)] = \Delta B_2 \\ \partial_y^2(\phi_1)\partial_y(\phi_2) - \partial_y^2(\phi_2)\partial_y(\phi_1) = \Delta B_3 \end{cases}$$

où $\Delta = \partial_x(\phi_1)\partial_y(\phi_2) - \partial_x(\phi_2)\partial_y(\phi_1)$. Les expressions B_i sont invariantes par les homographies de ϕ_1 et ϕ_2 , et ont été introduites par Goursat (cf. [G], p. 1363 ; on peut également consulter la note de Painlevé [P]).

Inversement, soit $\phi = (\phi_1, \phi_2) : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, \phi(0))$ un isomorphisme local ; on peut montrer, en généralisant un calcul de Gronwall (cf. [Gro], §1), que les B_i définis à l'aide des formules (3) vérifient le système (2) ; on peut également vérifier que $(\phi_1 e^{-\frac{1}{3}\theta}, \phi_2 e^{-\frac{1}{3}\theta}, e^{-\frac{1}{3}\theta})$ est une base du \mathbb{C} -espace vectoriel des solutions du système (1) où $e^\theta = \Delta$.

Autrement dit, on peut résumer ce qui précède par le résultat suivant :

Proposition 2. *A une transformation projective près, les isomorphismes analytiques locaux $\phi : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, \phi(0))$ correspondent aux solutions analytiques (B_0, B_1, B_2, B_3) du système différentiel non linéaire (2).*

§2. Linéarisation des tissus de $(\mathbb{C}^2, 0)$

Un d -tissu \mathcal{W} de $(\mathbb{C}^2, 0)$ est défini par d feuilletages ($d \geq 2$) de courbes lisses de $(\mathbb{C}^2, 0)$ en position générale ; ses feuilles sont les courbes intégrales de d champs de vecteurs $X_i = \alpha_i \partial_x + \beta_i \partial_y$, à coefficients dans $\mathcal{O} = \mathbb{C}\{x, y\}$, qui sont deux à deux linéairement indépendants (i.e. $\alpha_i \beta_j - \alpha_j \beta_i \in \mathcal{O}^*$ pour $1 \leq i < j \leq d$).

On dit que \mathcal{W} est linéarisable s'il existe un isomorphisme local $\phi : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, \phi(0))$ qui transforme \mathcal{W} en un d -tissu linéaire (i.e. un d -tissu dont les feuilles sont des (morceaux de) droites de \mathbb{C}^2 , non nécessairement parallèles).

Lemme. *Soient \mathcal{W} un d -tissu de $(\mathbb{C}^2, 0)$ de champs de vecteurs associés X_i pour $1 \leq i \leq d$ et $\phi = (\phi_1, \phi_2) : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, \phi(0))$ un isomorphisme local. Alors ϕ linéarise \mathcal{W} si et seulement si, on a*

$$X_i^k(\phi_1)X_i(\phi_2) = X_i^k(\phi_2)X_i(\phi_1) \text{ pour } 1 \leq i \leq d,$$

où pour $k \geq 1$, X_i^k est l'opérateur différentiel linéaire obtenu par composition des champs de vecteurs X_i .

Démonstration. Si l'on désigne par $\exp(tX_i)(x, y)$ le flot engendré par X_i , alors son image par ϕ est

$$\phi[\exp(tX_i)(x, y)] = \begin{cases} \phi_1(x, y) + tX_i(\phi_1)(x, y) + \frac{t^2}{2}X_i^2(\phi_1)(x, y) + \dots \\ \phi_2(x, y) + tX_i(\phi_2)(x, y) + \frac{t^2}{2}X_i^2(\phi_2)(x, y) + \dots \end{cases}$$

Ainsi, ϕ transforme \mathcal{W} en un d -tissu linéaire si et seulement si, on a

$$\begin{vmatrix} X_i(\phi_1) & X_i^k(\phi_1) \\ X_i(\phi_2) & X_i^k(\phi_2) \end{vmatrix} = 0 \text{ pour } k \geq 2 \text{ et } 1 \leq i \leq d.$$

Ce qui montre le résultat par itération des X_i . \square

Corollaire 1. Soit \mathcal{W} un d -tissu de $(\mathbb{C}^2, 0)$ dont les champs des vecteurs associés sont $X_i = \partial_x + b_i \partial_y$ pour $1 \leq i \leq d$, alors on a les propriétés suivantes :

- a) \mathcal{W} est linéaire si et seulement si, on a $X_i(b_i) = 0$ pour $1 \leq i \leq d$;
- b) un isomorphisme local $\phi = (\phi_1, \phi_2) : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, \phi(0))$ linéarise \mathcal{W} si et seulement si avec les notations du §1 (formules (3)), on a

$$B_0 + b_i B_1 + b_i^2 B_2 + b_i^3 B_3 = X_i(b_i) \text{ pour } 1 \leq i \leq d.$$

Démonstration. a) Il suffit de faire $\phi_1 = x$ et $\phi_2 = y$ dans le lemme précédent.

b) dans l'anneau \mathcal{D} des opérateurs différentiels linéaires à coefficients dans \mathcal{O} , on a $X_i = \partial_x + b_i \partial_y$ et $X_i^2 = \partial_x^2 + 2b_i \partial_x \partial_y + b_i^2 \partial_y^2 + X_i(b_i) \partial_y$ ce qui montre qu'avec les formules (3) du §1, on a

$$X_i^2(\phi_1)X_i(\phi_2) - X_i^2(\phi_2)X_i(\phi_1) = \Delta B_0 + b_i(\Delta B_1) + b_i^2(\Delta B_2) + b_i^3(\Delta B_3) - X_i(b_i)\Delta$$

où $\Delta = \partial_x(\phi_1)\partial_y(\phi_2) - \partial_x(\phi_2)\partial_y(\phi_1)$. Il suffit alors pour conclure d'utiliser le lemme précédent. \square

Soit \mathcal{W} un d -tissu de $(\mathbb{C}^2, 0)$, puisqu'on ne s'intéresse qu'à la géométrie des feuilles de \mathcal{W} , on peut toujours supposer, quitte à faire un changement linéaire des coordonnées, que les champs de vecteurs associés à \mathcal{W} sont de la forme $X_i = \partial_x + b_i \partial_y$ pour $1 \leq i \leq d$ où d'après l'hypothèse de position générale $b_i(0) \neq b_j(0)$ pour $1 \leq i < j \leq d$.

D'après la propriété b) du corollaire 1 et la proposition 2, on a le résultat suivant :

Théorème 1. Soit \mathcal{W} un d -tissu de $(\mathbb{C}^2, 0)$ dont les champs de vecteurs associés sont $X_i = \partial_x + b_i \partial_y$ pour $1 \leq i \leq d$. Alors \mathcal{W} est linéarisable si et seulement si le système différentiel non linéaire suivant :

$$(*) \quad \begin{cases} \partial_x^2(B_2) - 2\partial_x \partial_y(B_1) + 3\partial_y^2(B_0) + 6B_0 \partial_x(B_3) - 3B_2 \partial_y(B_0) - 3B_0 \partial_y(B_2) \\ \quad + 3B_3 \partial_x(B_0) + 2B_1 \partial_y(B_1) - B_1 \partial_x(B_2) = 0 \\ 3\partial_x^2(B_3) - 2\partial_x \partial_y(B_2) + \partial_y^2(B_1) - 6B_3 \partial_y(B_0) + 3B_1 \partial_x(B_3) + 3B_3 \partial_x(B_1) \\ \quad - 3B_0 \partial_y(B_3) - 2B_2 \partial_x(B_2) + B_2 \partial_y(B_1) = 0 \\ B_0 + B_1 b_i + B_2 b_i^2 + B_3 b_i^3 = X_i(b_i) \text{ pour } 1 \leq i \leq d \end{cases}$$

admet une solution (B_0, B_1, B_2, B_3) où $B_k \in \mathbb{C}\{x, y\}$ pour $0 \leq k \leq 3$.

Pour $d \geq 4$, l'hypothèse de position générale montre (via un déterminant de Vandermonde) que le système (*) admet au plus une solution. Ainsi, grâce à la proposition 2 on a le résultat suivant :

Corollaire 2. Un d -tissu de $(\mathbb{C}^2, 0)$ avec $d \geq 4$ admet au plus, à une transformation projective près, une linéarisation.

Soit \mathcal{W} un d -tissu de $(\mathbb{C}^2, 0)$, pour simplifier les énoncés (mais perdre une certaine symétrie des expressions) on peut toujours supposer, quitte à faire un changement de variables, que les champs de vecteurs associés à \mathcal{W} sont ∂_x, ∂_y et $X_i = \partial_x + b_i \partial_y$ pour $3 \leq i \leq d$ où $b_i(0) \neq 0$ pour $3 \leq i \leq d$ et $b_i(0) \neq b_j(0)$ pour $3 \leq i < j \leq d$.

Théorème 1 bis. Soit \mathcal{W} un d -tissu de $(\mathbb{C}^2, 0)$ dont les champs de vecteurs associés sont ∂_x, ∂_y et $X_i = \partial_x + b_i \partial_y$ pour $3 \leq i \leq d$. Alors \mathcal{W} est linéarisable si et seulement si le système différentiel non linéaire suivant :

$$(\star \text{ bis}) \quad \begin{cases} \partial_x^2(B_2) - 2\partial_x \partial_y(B_1) - B_1[\partial_x(B_2) - 2\partial_y(B_1)] = 0 \\ \partial_y^2(B_1) - 2\partial_x \partial_y(B_2) + B_2[\partial_y(B_1) - 2\partial_x(B_2)] = 0 \\ B_1 + b_i B_2 = \frac{X_i(b_i)}{b_i} \text{ pour } 3 \leq i \leq d \end{cases}$$

admet une solution analytique (B_1, B_2) .

Démonstration. Compte-tenu des hypothèses, les conditions de linéarisation s'écrivent d'après le lemme et le corollaire 1 (propriété b)) :

$$\begin{cases} B_0 = B_3 = 0 \\ B_1 b_i + B_2 b_i^2 = X_i(b_i) \text{ pour } 3 \leq i \leq d \end{cases}$$

ce qui, après simplification du système (2) du §1, montre le résultat d'après la proposition 2. \square

La compatibilité du système linéaire contenu dans le système (* bis) donne le résultat suivant :

Corollaire 3. Soit \mathcal{W} un d -tissu de $(\mathbb{C}^2, 0)$ avec $d \geq 5$ et dont les champs de vecteurs associés sont ∂_x, ∂_y et $X_i = \partial_x + b_i \partial_y$ pour $3 \leq i \leq d$. Alors si \mathcal{W} est linéarisable, la matrice

$$\begin{bmatrix} b_3 & b_4 & b_5 & \dots & b_d \\ b_3^2 & b_4^2 & b_5^2 & \dots & b_d^2 \\ X_3(b_3) & X_4(b_4) & X_5(b_5) & \dots & X_d(b_d) \end{bmatrix}$$

est nécessairement de rang 2.

Exemple 1. On désigne par \mathcal{B} le 5-tissu de Bol de \mathbb{C}^2 ; ce 5-tissu de rang maximal (cf. [Bo]) est constitué par 4 pinceaux de droites de \mathbb{C}^2 dont les sommets sont en position

générale et de l'unique famille des coniques passant par ces sommets ; on peut le représenter par le 5-tissu de (\mathbb{C}^2, p_0) dont les champs de vecteurs associés sont $\partial_x, \partial_y, X_3 = \partial_x + \frac{y}{x}\partial_y, X_4 = \partial_x + \frac{y-1}{x-1}\partial_y$ et $X_5 = \partial_x + \frac{y(y-1)}{x(x-1)}\partial_y$ avec p_0 générique. Le 5-tissu \mathcal{B} n'est pas linéarisable. Ce résultat connu peut être vérifié aisément grâce au corollaire 3 ; en effet, on a

$$\begin{vmatrix} b_3 & b_4 & b_5 \\ b_3^2 & b_4^2 & b_5^2 \\ X_3(b_3) & X_4(b_4) & X_5(b_5) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_3 & b_4 & b_5 \\ b_3^2 & b_4^2 & b_5^2 \\ 0 & 0 & X_5(b_5) \end{vmatrix} \neq 0$$

par un calcul direct ou le corollaire 1 (propriété a)). On peut aussi vérifier ce résultat en utilisant le corollaire 2 ; en effet, une transformation projective ne rendra jamais linéaire les courbes intégrales de X_5 .

Remarque 1. Le "théorème" fondamental de la nomographie encore appelé conjecture de Gronwall (résultat annoncé en 1912 à la fin de l'introduction de [G]) peut s'énoncer avec les hypothèses du théorème 1 bis sous la forme suivante :

si $d = 3$ et $\partial_x \partial_y (\text{Log } b_3) \neq 0$ le système (\star bis) admet au plus une solution.

§3. Polynôme associé à un d -tissu de $(\mathbb{C}^2, 0)$

Soit \mathcal{W} un d -tissu de $(\mathbb{C}^2, 0)$ dont les champs de vecteurs associés sont $X_i = \partial_x + b_i \partial_y$ pour $1 \leq i \leq d$. L'hypothèse de position générale montre (via un déterminant de Vandermonde) qu'il existe des $P_k \in \mathbb{C}\{x, y\}$ uniques tels que l'on ait :

$$P_0 + P_1 b_i + P_2 b_i^2 + \dots + P_{d-1} b_i^{d-1} = X_i(b_i) \text{ pour } 1 \leq i \leq d$$

et l'on pose $P_{\mathcal{W}}(x, y; b) = \sum_{k=0}^{d-1} P_k(x, y) b^k$.

On appelle $P_{\mathcal{W}}$ le polynôme associé à \mathcal{W} et l'on note $\text{deg } P_{\mathcal{W}}$ son degré par rapport à b ; le polynôme $P_{\mathcal{W}}$ est l'unique élément de $\mathbb{C}\{x, y\}[b]$ tel que l'on ait :

$$\text{deg } P_{\mathcal{W}} \leq d-1 \text{ et } P_{\mathcal{W}}(x, y; b_i(x, y)) = X_i(b_i)(x, y) \text{ pour } 1 \leq i \leq d.$$

Proposition 3. Soit \mathcal{W} un d -tissu de $(\mathbb{C}^2, 0)$ dont les champs de vecteurs associés sont $X_i = \partial_x + b_i \partial_y$ pour $1 \leq i \leq d$. Alors le polynôme $P_{\mathcal{W}} = \sum_{k=0}^{d-1} P_k b^k \in \mathbb{C}\{x, y\}[b]$ associé à \mathcal{W} possède les propriétés suivantes :

- i) \mathcal{W} est linéaire si et seulement si $P_{\mathcal{W}} = 0$;
- ii) en tout point z voisin de $0 \in \mathbb{C}^2$, les d feuilles de \mathcal{W} passant par z sont les graphes dans $(\mathbb{C}^2, 0)$ d'éléments $y_i \in \mathbb{C}\{x\}$ qui vérifient l'équation différentielle du second ordre suivante :

$$y'' = P_0 + P_1 y' + \dots + P_{d-1} (y')^{d-1} = P_{\mathcal{W}}(x, y; y');$$

iii) \mathcal{W} est linéarisable si et seulement si, $\deg P_{\mathcal{W}} \leq 3$ et (P_0, P_1, P_2, P_3) est une solution du système différentiel non linéaire (2) du §1.

Démonstration. i) Par définition de $P_{\mathcal{W}}$, c'est une conséquence du corollaire 1 (propriété a)).

ii) Soient $F_i(x, y) = \text{cste}$, les feuilles de \mathcal{W} passant par z . D'après le théorème des fonctions implicites, il existe $y_i \in \mathbb{C}\{x\}$ tel que $F_i(x, y_i(x)) = \text{cste}$ et l'on a

$$\partial_x(F_i)(x, y_i(x)) + y_i'(x)\partial_y(F_i)(x, y_i(x)) = 0$$

soient $y_i'(x) = b_i(x, y_i(x))$ et $y_i''(x) = X_i(b_i)(x, y_i(x))$, d'où le résultat par définition de $P_{\mathcal{W}}$.

iii) *Suffisance.* Par définition de $P_{\mathcal{W}}$, c'est une conséquence du théorème 1 du §2. *Nécessité.* Pour $d \geq 4$, c'est également une conséquence du théorème 1 du §2. Pour $d \leq 4$, on peut vérifier que si $\phi = (\phi_1, \phi_2) : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, \phi(0))$ est un isomorphisme local alors $y'' = P_0 + P_1.y' + P_2.(y')^2 + P_3.(y')^3$ est transformée par ϕ en une équation différentielle de la même forme

$$Y'' = Q_0 + Q_1.Y' + Q_2.(Y')^2 + Q_3.(Y')^3$$

où les Q_k dépendent de $\phi_1, \phi_2, P_0, P_1, P_2$ et P_3 . D'après l'hypothèse on peut supposer que ϕ linéarise \mathcal{W} et l'hypothèse de position générale entraîne (quitte à composer ϕ avec une transformation linéaire) que l'on a $Q_k = 0$ pour $0 \leq k \leq 3$. Un calcul montre alors que l'on a nécessairement les formules (3) du §1 dans lesquelles B_k est remplacé par P_k pour $0 \leq k \leq 3$. Ce qui démontre le résultat d'après le §1. \square

Remarque 2. On peut vérifier que la condition : (P_0, P_1, P_2, P_3) est une solution du système (2) du §1, est la condition (nécessaire et suffisante) de R. Liouville-Tresse pour que l'équation différentielle $y'' = P_0 + P_1.y' + P_2.(y')^2 + P_3.(y')^3$ soit transformée par un isomorphisme local $\phi : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, \phi(0))$ en $Y'' = 0$ (cf. [L] et [T] ; pour un point de vue légèrement différent, on peut également consulter [Ar], chap. 1 ; §6). Ce qui précède donne une nouvelle démonstration de ce résultat ; de plus, on notera que la proposition 1 du §1 détermine les isomorphismes locaux ϕ possibles.

§4. Applications

On s'intéresse ci-dessous à quelques cas particuliers.

Proposition 4. Soit \mathcal{W} un d -tissu de $(\mathbb{C}^2, 0)$ dont les champs de vecteurs associés sont ∂_x, ∂_y et $X_i = \partial_x + b_i\partial_y$ pour $3 \leq i \leq d$. Alors \mathcal{W} est linéarisable en un d -tissu linéaire contenant deux familles de droites parallèles aux axes de coordonnées si et seulement s'il existe des fonctions $B_1 = B_1(x)$ et $B_2 = B_2(y)$ telles que $B_1 + b_i B_2 = \frac{X_i(b_i)}{b_i}$ pour $3 \leq i \leq d$.

Démonstration. Les feuilles des familles 1 et 2 sont transformées par un isomorphisme local $\phi = (\phi_1, \phi_2) : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, \phi(0))$ en des droites parallèles aux axes de coordonnées si et seulement si $\partial_y(\phi_1) = \partial_x(\phi_2) = 0$. Nécessairement, d'après les formules (3) du §1, on a $B_1 = \frac{\phi_1''(x)}{\phi_1'(x)}$ et $B_2 = -\frac{\phi_2''(y)}{\phi_2'(y)}$, et le système (\star bis) du §2 se réduit à

$$B_1(x) + B_2(y)b_i = \frac{X_i(b_i)}{b_i} \text{ pour } 3 \leq i \leq d$$

puisque $\partial_x(B_2) = \partial_y(B_1) = 0$. Ce qui montre le résultat d'après le théorème 1 bis du §2. \square

Exemple 2. Soit \mathcal{W} un 3-tissu de $(\mathbb{C}^2, 0)$ dont les champs de vecteurs associés sont ∂_x, ∂_y et $X = \partial_x + b\partial_y$ avec

$$\partial_x \partial_y (\text{Log } b) = \partial_x \left(\frac{\partial_y(b)}{b} \right) = 0.$$

Alors $b = \frac{\varphi'(x)}{\psi'(y)}$ où φ et ψ sont des fonctions analytiques d'une variable et $\frac{X(b)}{b} = \frac{\varphi''(x)}{\varphi'(x)} + b \left(-\frac{\psi''(y)}{\psi'(y)} \right)$, ce qui montre que $\phi = (\varphi(x), \psi(y))$ linéarise \mathcal{W} en le 3-tissu de \mathbb{C}^2 dont les courbes intégrales sont (si ξ et η sont les fonctions coordonnées)

$$\xi = \text{cste}, \eta = \text{cste} \text{ et } \xi - \eta = \text{cste}$$

(on a $X(\varphi) = X(\psi)$ d'après ce qui précède). Autrement dit, ϕ linéarise \mathcal{W} en le 3-tissu de \mathbb{C}^2 constitué par 3 pinceaux de droites dont les sommets $[1,0,0]$, $[0,1,0]$ et $[1,1,0]$ sont alignés.

Soit \mathcal{W} un d -tissu de $(\mathbb{C}^2, 0)$, on rappelle que si $F_i = \text{cste}$ sont les courbes de niveau de \mathcal{W} alors le rang de \mathcal{W} , noté $\text{rg}\mathcal{W}$, est la dimension du \mathbb{C} -espace vectoriel des relations abéliennes \mathcal{A} de \mathcal{W} où

$$\mathcal{A} = \{(g_i(F_i))_{1 \leq i \leq d}; g_i \text{ analytiques et } \sum_{i=1}^d g_i(F_i) dF_i = 0\};$$

on sait que $\text{rg}\mathcal{W}$ ne dépend pas du choix des F_i et que l'on a les inégalités suivantes (cf. par exemple [H]) :

$$0 \leq \text{rg}\mathcal{W} \leq \frac{1}{2}(d-1)(d-2).$$

Par exemple, si \mathcal{W} est un 3-tissu de $(\mathbb{C}^2, 0)$ dont les champs de vecteurs associés sont ∂_x, ∂_y et $X = \partial_x + b\partial_y$ on a l'équivalence suivante :

$$\text{rg}\mathcal{W} = 1 \text{ si et seulement si } \partial_x \partial_y (\text{Log } b) = 0.$$

En effet, les courbes intégrales de \mathcal{W} sont $x = \text{cste}$, $y = \text{cste}$ et $F = \text{cste}$ où $b = -\frac{\partial_x(F)}{\partial_y(F)}$; si $\text{rg}\mathcal{W} = 1$ et si $\varphi'(x)dx - \psi'(y)dy + \chi'(F)dF = 0$ est une relation abélienne alors nécessairement $b = \frac{\varphi'(x)}{\psi'(y)}$ et par suite $\partial_x \partial_y (\text{Log } b) = 0$; inversement si $b = \frac{\varphi'(x)}{\psi'(y)}$ alors $X(\varphi - \psi) = 0$ et $\varphi(x) - \psi(y) + \chi(F) = 0$, d'où le résultat.

Pour illustrer ce qui précède, on se propose de revisiter en compagnie de Poincaré le théorème de Mayrhofer et Reidemeister suivant :

tout 4-tissu \mathcal{W} de $(\mathbb{C}^2, 0)$ tel que tout 3-tissu extrait de \mathcal{W} soit de rang 1 est linéarisable en un 4-tissu de \mathbb{C}^2 constitué par 4 pinceaux de droites.

On peut supposer que les champs de vecteurs associés à \mathcal{W} sont $\partial_x, \partial_y, X_3 = \partial_x + b_3 \partial_y$ et $X_4 = \partial_x + b_4 \partial_y$. Par hypothèse on a des relations abéliennes de \mathcal{W} :

$$(1\ 3\ 4) = (\alpha_1(x), 0, \alpha_3(F_3), \alpha_4(F_4))$$

$$(2\ 3\ 4) = (0, \beta_2(y), \beta_3(F_3), \beta_4(F_4))$$

$$(1\ 2\ 3) = (\varphi'(x), -\psi'(y), \chi'_3(F_3), 0)$$

$$(1\ 2\ 4) = (\eta'(x), -\theta'(y), 0, \chi'_4(F_4))$$

où $b_3 = \frac{\varphi'(x)}{\psi'(y)}$ et $b_4 = \frac{\eta'(x)}{\theta'(y)}$. Les relations (1 3 4) et (2 3 4) sont \mathbb{C} -linéairement indépendantes et il y a deux cas à envisager.

Cas 1. (1 2 3) et (1 2 4) sont engendrées par (1 3 4) et (2 3 4) ; on vérifie alors que dans ce cas $b_4 = k_0 b_3$ où $k_0 \in \mathbb{C} - \{0, 1\}$ et que $\phi = (\varphi(x), \psi(y))$ linéarise \mathcal{W} en 4 pinceaux de droites de \mathbb{C}^2 dont les sommets $[1, 0, 0]$, $[0, 1, 0]$, $[1, 1, 0]$ et $[1, k_0, 0]$ sont alignés (on a $X_3(\phi_2) = X_3(\phi_1)$ et $X_4(\phi_2) = k_0 X_4(\phi_1)$). De plus, on peut supposer que $\varphi - \psi + \chi_3(F_3) = 0$ et que l'on a $k_0 \varphi - \psi + \rho_4(F_4) = 0$; en effet, $b_4 = k_0 \frac{\varphi'(x)}{\psi'(y)}$ entraîne que l'on a $X_4(k_0 \varphi - \psi) = 0$. Ce qui montre que l'espace vectoriel des relations abéliennes \mathcal{A} de \mathcal{W} admet la base suivante :

$$\left\{ \begin{array}{llll} (\varphi' & , & -\psi' & , & \chi'_3 & , & 0 &) \\ (k_0 \varphi' & , & -\psi' & , & 0 & , & \rho'_4 &) \\ (k_0(k_0 - 1)\varphi\varphi' & , & (1 - k_0)\psi\psi' & , & k_0\chi_3\chi'_3 & , & -\rho_4\rho'_4 &) \end{array} \right.$$

puisque l'on sait que dans tous les cas on a $\text{rg } \mathcal{W} \leq 3$.

Cas 2. Par exemple (1 2 3) n'est pas engendré par (1 3 4) et (2 3 4), et il y a deux situations possibles :

(a) (1 2 4) est engendré par (1 3 4) et (2 3 4) ; dans ce cas, quitte à multiplier par des constantes convenables les relations abéliennes précédentes, \mathcal{A} admet la base suivante :

$$(P.) \quad \left\{ \begin{array}{l} (\alpha_1(x), 0, \alpha_3(F_3), \alpha_4(F_4)) \\ (0, \beta_2(y), \beta_3(F_3), \beta_4(F_4)) \\ (\varphi'(x), -\psi'(y), \chi'_3(F_3), 0) \end{array} \right.$$

$$\text{avec } \alpha_3(F_3) + \beta_3(F_3) = 0.$$

(b) (1 2 4) n'est pas engendré par (1 3 4) et (2 3 4) ; dans ce cas, quitte à multiplier par des constantes convenables les relations abéliennes précédentes, \mathcal{A} admet une base du même type que (P.), mais avec

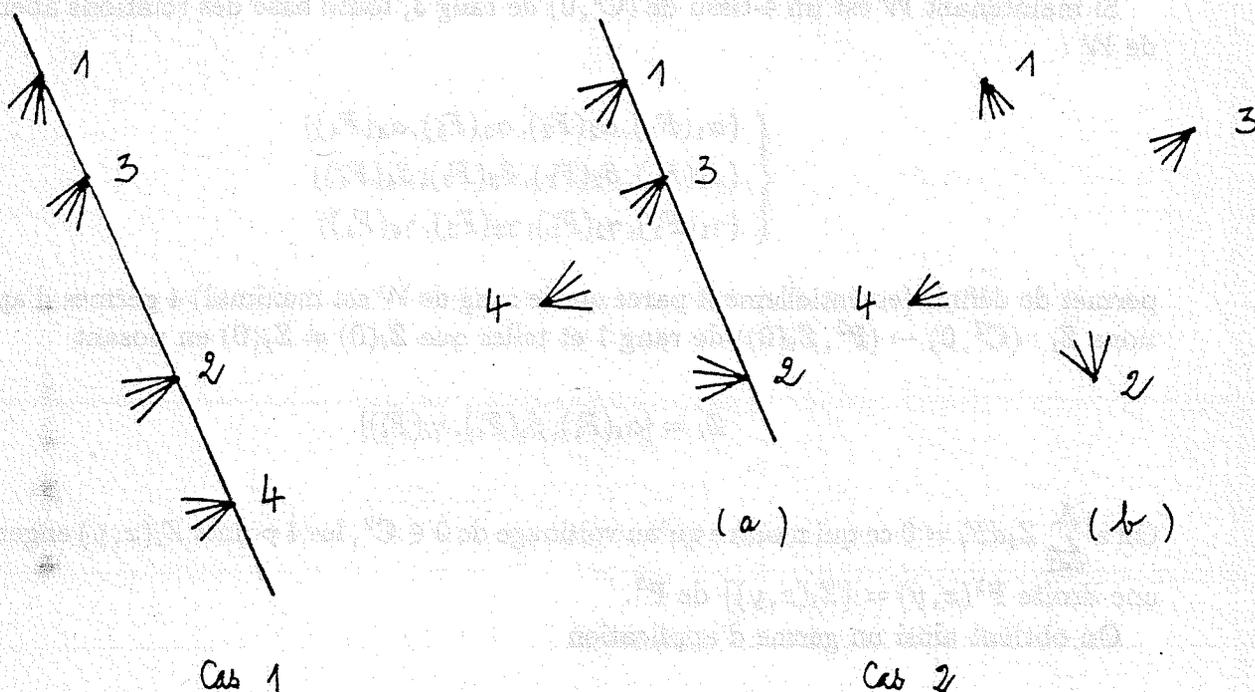
$$\alpha_3(F_3) + \beta_3(F_3) + \chi'_3(F_3) = 0.$$

Dans le cas 2, (a) ou (b), on vérifie que $\phi = \left(\frac{-\varphi'(x)}{\alpha_1(x)}, \frac{\psi'(y)}{\beta_2(y)} \right)$ linéarise \mathcal{W} en 4 pinces de droites de \mathbb{C}^2 dont les sommets sont $[1,0,0]$, $[0,1,0]$, $[0,0,1]$ et $[1,1,0]$ pour (a) (resp. $[1,1,1]$ pour (b)) ; en effet, d'après ce qui précède les 4 points

$$[\alpha_1(x), 0, \varphi'(x)], [0, \beta_2(y), -\psi'(y)], [\alpha_3(F_3), \beta_3(F_3), \chi_3'(F_3)] \text{ et } [\alpha_4(F_4), \beta_4(F_4), 0]$$

de \mathbb{P}^2 engendrent une droite de \mathbb{P}^2 , ce qui par dualité donne ϕ (cette remarque n'est qu'un cas particulier de la construction de l'application de Poincaré (cf. [C] et ci-dessous)).

Pour résumer ce qui précède, on a $\text{rg}\mathcal{W} = 3$ et les trois linéarisations possibles :



Enfin l'on montre comment l'interprétation géométrique du théorème général de linéarisation du §2 permet de "comprendre", via l'application de Poincaré, le résultat classique suivant :

tout 4-tissu \mathcal{W} de $(\mathbb{C}^2, 0)$ dont le rang est maximal (i.e. $\text{rg}\mathcal{W} = 3$) est linéarisable.

Soit \mathcal{W} un d -tissu de $(\mathbb{C}^2, 0)$ dont les courbes intégrales sont $F_i = \text{cste}$, quitte à faire un changement linéaire des coordonnées, on peut supposer que $\partial_y(F_i)(0) \neq 0$ pour $1 \leq i \leq d$.

A toute solution (B_0, B_1, B_2, B_3) du système différentiel non linéaire (*) du §2, on peut associer un isomorphisme local $\phi : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{P}^2, \phi(0))$ qui linéarise \mathcal{W} ; il suffit d'après le théorème 1 du §2 de poser $\phi = [\omega_1, \omega_2, \omega_3]$ où $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ est une base des solutions du système différentiel linéaire (1) du §1 déterminé par les B_k . Inversement, si $\phi = [\omega_1, \omega_2, \omega_3]$

linéarise \mathcal{W} , les expressions qui précèdent les formules (3) du §1 déterminent les B_k pour $0 \leq k \leq 3$.

On notera que si $\phi = [\omega_1, \omega_2, \omega_3]$ linéarise \mathcal{W} , il existe d relations dans $\mathbb{C}\{x, y\}$ de la forme suivante :

$$(d) \quad \omega_1 \alpha_i(F_i) + \omega_2 \beta_i(F_i) + \omega_3 \gamma_i(F_i) = 0 \quad \text{pour } 1 \leq i \leq d$$

où les α_i, β_i et γ_i sont analytiques.

Si maintenant \mathcal{W} est un 4-tissu de $(\mathbb{C}^2, 0)$ de rang 3, toute base des relations abéliennes de \mathcal{W} :

$$\begin{cases} (\alpha_1(F_1), \alpha_2(F_2), \alpha_3(F_3), \alpha_4(F_4)) \\ (\beta_1(F_1), \beta_2(F_2), \beta_3(F_3), \beta_4(F_4)) \\ (\gamma_1(F_1), \gamma_2(F_2), \gamma_3(F_3), \gamma_4(F_4)) \end{cases}$$

permet de définir (essentiellement parce que le rang de \mathcal{W} est maximal) 4 germes d'applications $Z_i : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{P}^2, Z_i(0))$ de rang 1 et telles que $Z_i(0) \neq Z_j(0)$ en posant

$$Z_i = [\alpha_i(F_i), \beta_i(F_i), \gamma_i(F_i)].$$

On a $\sum_{i=1}^4 Z_i dF_i = 0$ ce qui montre qu'au voisinage de $0 \in \mathbb{C}^2$, les 4 points $Z_i(x, y)$ engendrent une droite $\mathbb{P}^1(x, y) = \{Z_i(x, y)\}$ de \mathbb{P}^2 .

On obtient ainsi un germe d'application

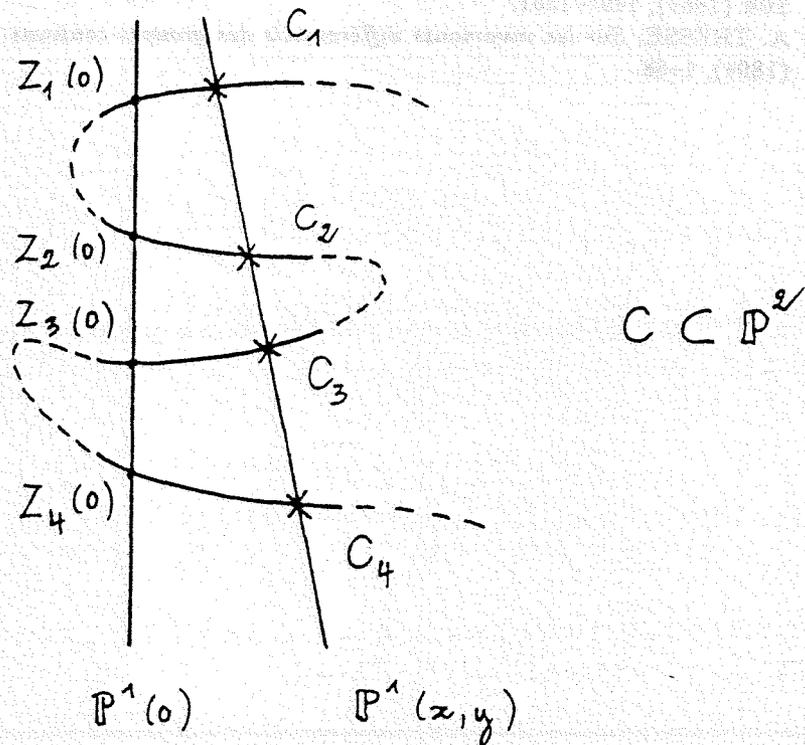
$$F : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\check{\mathbb{P}}^2, F(0)) \text{ où } F(x, y) = \mathbb{P}^1(x, y)$$

appelée "application" de Poincaré de \mathcal{W} ; on vérifie, grâce à l'hypothèse de position générale, que F est un isomorphisme ; ce qui montre que F linéarise \mathcal{W} : si \cdot désigne le produit scalaire dans \mathbb{C}^3 on a $F(x, y) \cdot Z_i(x, y) = 0$ pour $1 \leq i \leq 4$ ce qui correspond aux relations ($d = 4$) ci-dessus !

Autrement dit, les relations abéliennes d'un 4-tissu \mathcal{W} de $(\mathbb{C}^2, 0)$ dont le rang est maximal permettent de "résoudre géométriquement", via l'application de Poincaré de \mathcal{W} , le système différentiel non linéaire (*) du §2 associé à \mathcal{W} .

Remarque 3. Les Z_i définissent 4 germes de courbes analytiques lisses $(C_i, Z_i(0))$ dans \mathbb{P}^2 qui sont transverses à la droite $\mathbb{P}^1(0)$ en 4 points distincts $Z_i(0)$. La relation $\sum_{i=1}^4 Z_i dF_i = 0$ permet de construire une relation abélienne d'algébrisation $\sum_{i=1}^4 g_i(F_i) dF_i = 0$ où $g_i(F_i) \neq 0$ pour $1 \leq i \leq 4$, et d'après le théorème de Lie-Darboux-Griffiths (cf. [Gri], p.

367) il existe une courbe algébrique $C \subset \mathbb{P}^2$ de degré 4 (non nécessairement irréductible et éventuellement singulière) contenant les germes $(C_i, Z_i(0))$.

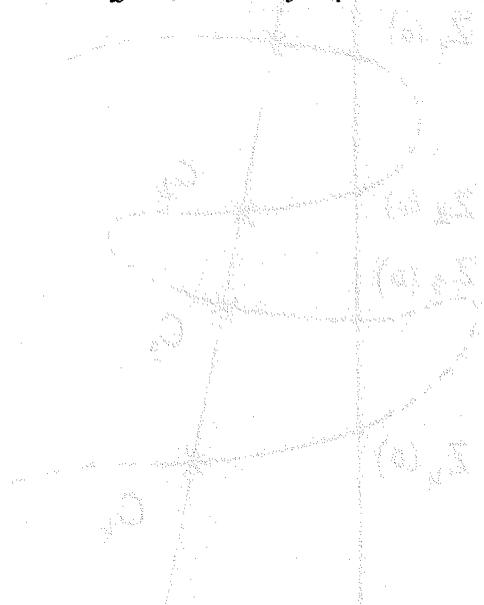


Autrement dit, l'application de Poincaré F transforme W en le 4-tissu linéaire \mathcal{L}_C de $\check{\mathbb{P}}^2$ associé à la courbe C de \mathbb{P}^2 ; par dualité, si aucune des composantes irréductibles de C est une droite projective de \mathbb{P}^2 , alors \mathcal{L}_C est constitué par les tangentes à la courbe duale $\check{C} \subset \check{\mathbb{P}}^2$, de C ; sinon toute composante irréductible de C qui est une droite projective D de \mathbb{P}^2 correspond à la famille de \mathcal{L}_C constituée par le pinceau de droites de $\check{\mathbb{P}}^2$ dont le sommet est le point \check{D} de $\check{\mathbb{P}}^2$.

REFERENCES

- [A] M. APPELL, *Sur les fonctions hypergéométriques de deux variables*, Journ. de Math. 3ème série, 8 (1882).
- [Ar] V. ARNOLD, *Chapitres supplémentaires de la théorie des équations différentielles ordinaires*, MIR, Moscou (1980).
- [B] J.E. BJÖRK, *Rings of differential operators*, North-Holland (1979).
- [B-B] W. BLASCHKE und G. BOL, *Geometrie der Gewebe*, Springer, Berlin (1938).
- [Bo] G. BOL, *Über ein bemerkenswertes Fünfgewebe in der Ebene*, Abh. Hamburg 11 (1936), 387-393.
- [C] S.S. CHERN, *Web geometry*, Bull. Amer. Math. Soc. 6 (1982), 1-8.
- [G] E. GOURSAT, *Sur un système d'équations aux dérivées partielles*, C.R. Acad. Sc. Paris 104 (1887), 1361-1363.
- [Gri] P.A. GRIFFITHS, *Variations on a theorem of Abel*, Invent. Math. 35 (1976), 321-390.
- [Gro] T.H. GRONWALL, *Sur les équations entre trois variables représentables par des nomogrammes à points alignés*, Journ. de Liouville 8 (1912), 59-102.

- [H] A. HÉNAUT, *D-modules et géométrie des tissus de \mathbb{C}^2* , Math. Scand. 66 (1990), 161-172.
- [L] R. LIOUVILLE, *Sur les invariants de certaines équations différentielles*, Journ. Ec. Polytechnique 59ème cahier (1889).
- [P] P. PAINLEVÉ, *Sur les équations linéaires simultanées aux dérivées partielles*, C.R. Acad. Sc. Paris 104 (1887), 1497-1501.
- [T] A. TRESSE, *Sur les invariants différentiels des groupes continus de transformations*, Acta Math. 18 (1894), 1-88.



DÉTERMINATION DES TISSUS DE RANG MAXIMAL DE \mathbb{C}^2 QUI SONT LINÉARISABLES

§0. Introduction

Un d -tissu \mathcal{W} de $(\mathbb{C}^2, 0)$ est défini par d feuilletages ($d \geq 2$) de courbes analytiques complexes lisses de $(\mathbb{C}^2, 0)$ en position générale ; on s'intéresse à l'étude géométrique de telles configurations, c'est-à-dire à un isomorphisme local $\phi : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, \phi(0))$ près (cf. le livre classique de Blaschke et Bol [B-B], et l'article de Chern [C]).

On rappelle que si $\{F_i(x, y) = \text{cste}\}$ sont les d feuilles de \mathcal{W} , le rang de \mathcal{W} , noté $\text{rg } \mathcal{W}$ est la dimension du \mathbb{C} -espace vectoriel \mathcal{A} des relations abéliennes de \mathcal{W} où

$$\mathcal{A} = \{(g_i(F_i))_{1 \leq i \leq d} ; g_i \in \mathbb{C}\{t\} \text{ et } \sum_{i=1}^d g_i(F_i) dF_i = 0\} ;$$

on sait que $\text{rg } \mathcal{W}$ ne dépend pas du choix des F_i et que l'on a les inégalités suivantes :

$$0 \leq \text{rg } \mathcal{W} \leq \frac{1}{2} (d-1)(d-2).$$

Un d -tissu est *linéaire* si ses d feuilles sont des (morceaux de) droites de \mathbb{C}^2 , non nécessairement parallèles ; par exemple, le d -tissu de $(\mathbb{P}^2, 0)$ constitué par les tangentes issues d'un point générique à une courbe algébrique C de \mathbb{P}^2 de classe d est linéaire. Si le d -tissu \mathcal{W} est linéaire, l'existence d'une relation abélienne $\sum_{i=1}^d g_i(F_i) dF_i = 0$ avec $g_i(F_i) \neq 0$ pour $1 \leq i \leq d$ permet, grâce au théorème de Lie-Darboux-Griffiths (cf. [G], p. 367), de montrer que \mathcal{W} est associé, par dualité, à une courbe algébrique de \mathbb{P}^2 dont le degré est d ; dans ce cas, le théorème d'Abel entraîne que le rang de \mathcal{W} est maximal (i.e. $\text{rg } \mathcal{W} = \frac{1}{2}(d-1)(d-2)$) (en ce qui concerne les propriétés des tissus linéaires de $(\mathbb{C}^2, 0)$, cf. l'appendice ci-dessous).

On dit qu'un d -tissu \mathcal{W} est *linéarisable* s'il existe un isomorphisme local $\phi : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, \phi(0))$ qui transforme \mathcal{W} en un d -tissu linéaire. On sait depuis l'exemple de Bol (cf. remarque 1) qu'il existe des d -tissus de $(\mathbb{C}^2, 0)$ dont le rang est maximal et qui ne sont pas linéarisables.

Dans ce qui suit, on se propose de répondre à la question suivante de Chern (cf. [C], p.6) : *déterminer les d -tissus de rang maximal de $(\mathbb{C}^2, 0)$ qui sont linéarisables*. Plus précisément,

on va caractériser ces derniers et décrire (pour $d \geq 4$) toutes les linéarisations possibles. Les résultats obtenus ci-dessous complètent et prolongent l'étude de cas particuliers faite dans le chapitre 3 du livre de Blaschke et Bol cité plus haut.

Si l'on désigne par $P_W = \sum_{k=0}^{d-1} P_k b^k \in \mathbb{C}\{x, y\}[b]$ le polynôme associé à un d -tissu \mathcal{W} de $(\mathbb{C}^2, 0)$ introduit dans [Hé] (cf. §1. ci-dessous) (les d feuilles de \mathcal{W} vérifient l'équation différentielle du second ordre $y'' = P_W(x, y; y')$), on a le résultat suivant :

*Soit \mathcal{W} un d -tissu de $(\mathbb{C}^2, 0)$ dont le rang est maximal,
alors \mathcal{W} est linéarisable si et seulement si $\deg P_W \leq 3$.*

La démonstration de ce résultat pour $d \geq 4$ (cf. §3) utilise fondamentalement les propriétés géométriques de l'espace des relations abéliennes de \mathcal{W} rappelées dans le §1 et complétées dans les §§2 et 3, et donne une description géométrique des linéarisations possibles de \mathcal{W} .

Pour la commodité du lecteur, on a regroupé dans un appendice les résultats essentiels (et leurs démonstrations) concernant la géométrie des tissus linéaires de $(\mathbb{C}^2, 0)$.

§1. Rappels et introduction des notations

Soit \mathcal{W} un d -tissu de $(\mathbb{C}^2, 0)$; les d feuilles de \mathcal{W} sont les courbes de niveau $\{F_i = \text{cste}\}$ d'éléments $F_i \in \mathbb{C}\{x, y\}$ en position générale (i.e. $dF_i \wedge dF_j(0) \neq 0$ pour $1 \leq i < j \leq d$). On peut supposer, quitte à faire un changement linéaire de coordonnées, que les feuilles de \mathcal{W} sont les courbes intégrales des d champs de vecteurs suivants :

$$X_i = \partial_x + b_i \partial_y \quad \text{pour } 1 \leq i \leq d$$

où $b_i \in \mathbb{C}\{x, y\}$ avec $b_i(0) \neq b_j(0)$ pour $1 \leq i < j \leq d$.

On dit que \mathcal{W} est linéarisable s'il existe un isomorphisme local $\phi : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, \phi(0))$ qui transforme \mathcal{W} en un d -tissu linéaire (i.e. un d -tissu dont les feuilles sont des (morceaux de) droites de \mathbb{C}^2 , non nécessairement parallèles).

A. Polynôme associé à \mathcal{W} (cf. [Hé])

D'après l'hypothèse de position générale, il existe un unique élément $P_W = \sum_{k=0}^{d-1} P_k b^k$ de $\mathbb{C}\{x, y\}[b]$, appelé le polynôme associé à \mathcal{W} , tel que l'on ait :

$$\deg P_W \leq d-1 \text{ et } P_W(x, y; b_i) = X_i(b_i) \text{ pour } 1 \leq i \leq d.$$

Les d feuilles de \mathcal{W} sont les graphes d'éléments $y_i \in \mathbb{C}\{x\}$ qui vérifient l'équation différentielle du second ordre :

$$y'' = P_W(x, y; y'),$$

et l'on a le résultat suivant :

Théorème 1. \mathcal{W} est linéarisable si et seulement si, $\deg P_{\mathcal{W}} \leq 3$ et (P_0, P_1, P_2, P_3) vérifie le système différentiel non linéaire suivant :

$$(*) \quad \begin{cases} \partial_x^2(P_2) - 2\partial_x\partial_y(P_1) + 3\partial_y^2(P_0) + 6P_0\partial_x(P_3) - 3P_2\partial_y(P_0) \\ \quad - 3P_0\partial_y(P_2) + 3P_3\partial_x(P_0) + 2P_1\partial_y(P_1) - P_1\partial_x(P_2) = 0 \\ 3\partial_x^2(P_3) - 2\partial_x\partial_y(P_2) + \partial_y^2(P_1) - 6P_3\partial_y(P_0) + 3P_1\partial_x(P_3) \\ \quad + 3P_3\partial_x(P_1) - 3P_0\partial_y(P_3) - 2P_2\partial_x(P_2) + P_2\partial_y(P_1) = 0 \end{cases}$$

Remarque 1. On désigne par \mathcal{B} le 5-tissu de Bol de \mathbb{C}^2 ; ce 5-tissu de rang maximal (cf. [Bo]) est constitué par 4 pincesaux de droites de \mathbb{C}^2 dont les sommets sont en position générale et de l'unique famille des coniques passant par ces sommets. Le 5-tissu \mathcal{B} n'est pas linéarisable ; ce résultat connu est une conséquence immédiate de ce qui précède puisque $\deg P_{\mathcal{B}} = 4$.

B. Géométrie de l'espace des relations abéliennes (cf. [C-G])

Soit \mathcal{W} un d -tissu de $(\mathbb{C}^2, 0)$ avec $d \geq 4$ et dont le rang $r = \text{rg } \mathcal{W} = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{A}$ est maximal (i.e. $r = \frac{1}{2}(d-1)(d-2)$) où

$$\mathcal{A} = \{(g_i(F_i))_{1 \leq i \leq d} ; g_i \in \mathbb{C}\{t\} \text{ et } \sum_{i=1}^d g_i(F_i)dF_i = 0\}.$$

Soit $(\gamma_i^j(F_i))_{\substack{1 \leq i \leq d \\ 1 \leq j \leq r}}$ une base de \mathcal{A} ; puisque le rang \mathcal{W} est maximal on peut définir, d'après une idée de Poincaré (cf. [P]), d germes d'applications de rang 1

$$Z_i : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{P}^{r-1}, Z_i(0))$$

en posant

$$Z_i = [\gamma_i^1(F_i), \gamma_i^2(F_i), \dots, \gamma_i^r(F_i)].$$

Les d points Z_i ne dépendent que du tissu \mathcal{W} et non du choix des F_i , et un changement de base pour \mathcal{A} se traduit sur les Z_i par un automorphisme linéaire de \mathbb{P}^{r-1} .

Chaque Z_i définit un germe de courbe analytique complexe lisse $(C_i, Z_i(0))$ dans \mathbb{P}^{r-1} et l'on désigne par $Z'_i(x, y)$ un point (distinct de $Z_i(x, y)$) de la tangente à C_i en $Z_i(x, y)$.

Par construction on a $\sum_{i=1}^d Z_i dF_i = 0$ et puisque le rang \mathcal{W} est maximal, l'hypothèse de position générale permet de montrer que les d points $Z_i(x, y)$ engendrent un sous-espace linéaire $\mathbb{P}^{d-3}(x, y)$ de \mathbb{P}^{r-1} de dimension $d-3$. De plus, par dérivation de la relation $\sum_{i=1}^d Z_i dF_i = 0$ on obtient que les $2d$ points $Z_i(x, y)$ et $Z'_i(x, y)$ engendrent un sous-espace linéaire $\mathbb{P}^{2d-6}(x, y)$ de \mathbb{P}^{r-1} de dimension $2d-6$. Ce que l'on résume par

$$\begin{aligned} \{Z_i(x, y)\} &= \mathbb{P}^{d-3}(x, y) \\ \{Z_i(x, y); Z'_i(x, y)\} &= \mathbb{P}^{2d-6}(x, y). \end{aligned}$$

Les d points $Z_i(x, y)$ sont en position générale dans $\mathbb{P}^{d-3}(x, y)$ (i.e. $(d-2)$ points quelconques pris parmi les $Z_i(x, y)$ ne sont pas dans un hyperplan de $\mathbb{P}^{d-3}(x, y)$), il existe donc une unique courbe rationnelle normale de $\mathbb{P}^{d-3}(x, y)$, notée $E(x, y)$, qui passe par les $Z_i(x, y)$ pour $1 \leq i \leq d$. Pour (x, y) fixé, et à un automorphisme linéaire près de $\mathbb{P}^{d-3}(x, y)$, la courbe algébrique $E(x, y)$ admet la paramétrisation suivante :

$$b \rightsquigarrow [1, b, b^2, \dots, b^{d-3}].$$

Chaque courbe $E(x, y)$ de $\mathbb{P}^{d-3}(x, y)$ est donc lisse, irréductible, non dégénérée si $d \geq 5$ (i.e. $E(x, y)$ n'est pas contenue dans un hyperplan de $\mathbb{P}^{d-3}(x, y)$) et de degré minimal, à savoir $d-3$.

§2. Application de Darboux-Blaschke pour les tissus de $(\mathbb{C}^2, 0)$ dont le rang est maximal

Soit \mathcal{W} un d -tissu de $(\mathbb{C}^2, 0)$ avec $d \geq 4$ et dont le rang $r = \text{rg } \mathcal{W}$ est maximal ($r = \frac{1}{2}(d-1)(d-2)$).

En s'inspirant de Darboux (cf. [D]) et Blaschke (cf. [B]), on pose avec les notations du §1 :

$$E(x, y; b) = \Pi(x, y; b) \cdot \sum_{i=1}^d \frac{\partial_y(F_i)}{b - b_i} Z_i$$

où

$$\Pi(x, y; b) = \prod_{i=1}^d (b - b_i) = b^d + \sigma_1 b^{d-1} + \sigma_2 b^{d-2} + \dots + \sigma_d.$$

Grâce à la relation $\sum_{i=1}^d Z_i dF_i = 0$ et puisque l'on peut supposer que $\{Z_3(x, y), Z_4(x, y), \dots, Z_d(x, y)\} = \mathbb{P}^{d-3}(x, y)$, l'expression E définit une application

$$E : (\mathbb{C}^2, 0) \times \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^{r-1}$$

appelée *application de Darboux-Blaschke de \mathcal{W}* , qui représente la famille $\bigcup_{(x,y) \in (\mathbb{C}^2, 0)} E(x, y)$ de \mathbb{P}^{r-1} des courbes rationnelles normales $E(x, y) \subset \mathbb{P}^{d-3}(x, y)$ au voisinage de $E(0) = E(0, 0)$.

En effet, on a

$$\begin{aligned}
E(x, y; b) &= \Pi. \left\{ \frac{1}{b} \sum_{i=1}^d \partial_y(F_i)Z_i + \frac{1}{b^2} \sum_{i=1}^d b_i \partial_y(F_i)Z_i + \frac{1}{b^3} \sum_{i=1}^d b_i^2 \partial_y(F_i)Z_i + \dots \right\} \\
&= b^{d-1} \left(\sum_{i=1}^d \partial_y(F_i)Z_i \right) + b^{d-2} \left(\sum_{i=1}^d b_i \partial_y(F_i)Z_i + \sigma_1 \sum_{i=1}^d \partial_y(F_i)Z_i \right) \\
&+ b^{d-3} \left(\sum_{i=1}^d b_i^2 \partial_y(F_i)Z_i + \sigma_1 \sum_{i=1}^d b_i \partial_y(F_i)Z_i + \sigma_2 \sum_{i=1}^d \partial_y(F_i)Z_i \right) + \dots \\
&= b^{d-3} \left(\sum_{i=1}^d b_i^2 \partial_y(F_i)Z_i \right) + b^{d-4} \left(\sum_{i=1}^d b_i^3 \partial_y(F_i)Z_i + \sigma_1 \sum_{i=1}^d b_i^2 \partial_y(F_i)Z_i \right) \\
&+ b^{d-5} \left(\sum_{i=1}^d b_i^4 \partial_y(F_i)Z_i + \sigma_1 \sum_{i=1}^d b_i^3 \partial_y(F_i)Z_i + \sigma_2 \sum_{i=1}^d b_i^2 \partial_y(F_i)Z_i \right) \\
&+ \dots \\
&+ \sum_{i=1}^d b_i^{d-1} \partial_y(F_i)Z_i + \sigma_1 \sum_{i=1}^d b_i^{d-2} \partial_y(F_i)Z_i + \dots + \sigma_{d-3} \sum_{i=1}^d b_i^2 \partial_y(F_i)Z_i
\end{aligned}$$

puisque la relation $\sum_{i=1}^d Z_i dF_i = 0$ entraîne

$$(A) \quad \sum_{i=1}^d \partial_y(F_i)Z_i = 0 = \sum_{i=1}^d b_i \partial_y(F_i)Z_i$$

(on a $X_i(F_i) = 0$ pour $1 \leq i \leq d$ où $X_i = \partial_x + b_i \partial_y$). Ce qui montre que E est polynômiale en b de degré $d - 3$ et à coefficients dans $\mathbb{C}\{x, y\}$; de plus, on a

$$E(x, y; \infty) = \sum_{i=1}^d b_i^2 \partial_y(F_i)Z_i \text{ et } E(x, y; b_i) = Z_i(x, y) \text{ pour } 1 \leq i \leq d.$$

Ainsi, à (x, y) fixé, l'application $b \rightsquigarrow E(x, y; b)$ paramétrise la courbe rationnelle normale $E(x, y) \subset \mathbb{P}^{d-3}(x, y)$.

*Le sous-espace linéaire $\{E, \partial_b(E), \partial_y(E)\}$ de \mathbb{P}^{r-1} est de dimension 2 ;
en particulier $\text{rg}_{(x,y;b)} E \geq 2$.*

En effet, chaque courbe $E(x, y)$ est lisse et si $\partial_y(E) \in \{E, \partial_b(E)\}$ alors

$$\begin{aligned}
&b^{d-3} \left(\sum_{i=1}^d b_i^2 \partial_y(F_i)^2 Z_i' \right) + b^{d-4} \left(\sum_{i=1}^d b_i^3 \partial_y(F_i)^2 Z_i' + \sigma_1 \sum_{i=1}^d b_i^2 \partial_y(F_i)^2 Z_i' \right) \\
&+ \dots + \sigma_{d-3} \sum_{i=1}^d b_i^2 \partial_y(F_i)^2 Z_i' = 0 \quad \text{modulo } \{Z_i\}
\end{aligned}$$

ce qui est absurde puisque l'on peut supposer que

$$\{Z_3(x, y), \dots, Z_d(x, y); Z'_4(x, y), \dots, Z'_d(x, y)\} = \mathbb{P}^{2d-6}(x, y),$$

d'où le résultat.

Lemme. Si $P_W = \sum_{k=0}^{d-1} P_k b^k$ est le polynôme associé à W , alors l'application de Darboux-Blaschke E de W vérifie la relation suivante :

$$\begin{aligned} & \partial_x \left(\frac{E}{\Pi} \right) + b \partial_y \left(\frac{E}{\Pi} \right) + \partial_b \left\{ [P_0 + P_1 b + P_2 b^2 + P_3 b^3] \cdot \frac{E}{\Pi} \right\} \\ &= P_4 \cdot \sum_{i=1}^d \frac{b_i^4 \partial_y(F_i)}{(b - b_i)^2} Z_i + \dots + P_{d-1} \cdot \sum_{i=1}^d \frac{b_i^{d-1} \partial_y(F_i)}{(b - b_i)^2} Z_i. \end{aligned}$$

En particulier, on a $\deg P_W \leq 3$ si et seulement si, $rg_{(x,y;b)} E$ est constant et égal à 2.

Démonstration. D'après (A), on a

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=1}^d \partial_y(F_i) Z_i = \sum_{i=1}^d \frac{(b - b_i) \partial_y(F_i)}{b - b_i} Z_i \\ &= b \sum_{i=1}^d \frac{\partial_y(F_i)}{b - b_i} Z_i - \sum_{i=1}^d \frac{b_i \partial_y(F_i)}{b - b_i} Z_i \\ &= b \frac{E}{\Pi} + \sum_{i=1}^d \frac{\partial_x(F_i)}{b - b_i} Z_i \end{aligned}$$

puisque $X_i(F_i) = 0$ pour $1 \leq i \leq d$ où $X_i = \partial_x + b_i \partial_y$. Par définition on a

$$\begin{aligned} \partial_x \left(\frac{E}{\Pi} \right) &= \partial_x \left(\sum_{i=1}^d \frac{\partial_y(F_i)}{b - b_i} Z_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^d \frac{\partial_x \partial_y(F_i)}{b - b_i} Z_i + \sum_{i=1}^d \frac{\partial_x(F_i) \partial_y(F_i)}{b - b_i} Z'_i + \sum_{i=1}^d \frac{\partial_x(b_i) \partial_y(F_i)}{(b - b_i)^2} Z_i \end{aligned}$$

et d'après ce qui précède

$$\begin{aligned} \partial_y \left(b \frac{E}{\Pi} \right) &= -\partial_y \left(\sum_{i=1}^d \frac{\partial_x(F_i)}{b - b_i} Z_i \right) \\ &= -\sum_{i=1}^d \frac{\partial_x \partial_y(F_i)}{b - b_i} Z_i - \sum_{i=1}^d \frac{\partial_x(F_i) \partial_y(F_i)}{b - b_i} Z'_i - \sum_{i=1}^d \frac{\partial_y(b_i) \partial_y(F_i)}{(b - b_i)^2} Z_i. \end{aligned}$$

Ce qui montre que l'on a

$$\begin{aligned} \partial_x \left(\frac{E}{\Pi} \right) + b \partial_y \left(\frac{E}{\Pi} \right) &= \sum_{i=1}^d \frac{X_i(b_i) \partial_y(F_i)}{(b-b_i)^2} Z_i \\ &= P_0 \cdot \sum_{i=1}^d \frac{\partial_y(F_i)}{(b-b_i)^2} Z_i + P_1 \cdot \sum_{i=1}^d \frac{b_i \partial_y(F_i)}{(b-b_i)^2} Z_i + \cdots + P_{d-1} \cdot \sum_{i=1}^d \frac{b_i^{d-1} \partial_y(F_i)}{(b-b_i)^2} Z_i \end{aligned}$$

par définition de P_W ($P_W(x, y; b_i) = X_i(b_i)$ pour $1 \leq i \leq d$).

D'après (A), on a

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^d \frac{\partial_y(F_i)}{b-b_i} Z_i &= \frac{E}{\Pi}, \\ \sum_{i=1}^d \frac{b_i \partial_y(F_i)}{b-b_i} Z_i &= \sum_{i=1}^d \frac{(-(b-b_i) + b) \partial_y(F_i)}{b-b_i} Z_i = b \cdot \frac{E}{\Pi}, \\ \sum_{i=1}^d \frac{b_i^2 \partial_y(F_i)}{b-b_i} Z_i &= \sum_{i=1}^d \frac{(-b_i(b-b_i) + bb_i) \partial_y(F_i)}{b-b_i} Z_i = b^2 \cdot \frac{E}{\Pi} \text{ et} \\ \sum_{i=1}^d \frac{b_i^3 \partial_y(F_i)}{b-b_i} Z_i &= \sum_{i=1}^d \frac{(-b_i^2(b-b_i) + bb_i^2) \partial_y(F_i)}{b-b_i} Z_i \\ &= - \sum_{i=1}^d b_i^2 \partial_y(F_i) Z_i + b^3 \cdot \frac{E}{\Pi}. \end{aligned}$$

Ce qui montre que l'on a

$$\begin{aligned} P_0 \cdot \sum_{i=1}^d \frac{\partial_y(F_i)}{(b-b_i)^2} Z_i + \cdots + P_3 \cdot \sum_{i=1}^d \frac{b_i^3 \partial_y(F_i)}{(b-b_i)^2} Z_i \\ = -\partial_b \left\{ [P_0 + P_1 b + P_2 b^2 + P_3 b^3] \cdot \frac{E}{\Pi} \right\}, \end{aligned}$$

d'où la relation du lemme d'après ce qui précède. Enfin, si $\deg \mathcal{P}_W \leq 3$, alors d'après la relation précédente $\partial_x(E) \in \{E, \partial_b(E), \partial_y(E)\}$ d'où $rg E = 2$. Inversement, si $rg E = 2$ alors $\partial_x(E) \in \{E, \partial_b(E), \partial_y(E)\}$ et la relation précédente montre que l'on peut supposer que l'on a

$$P_4 \cdot \sum_{i=3}^d \frac{b_i^4 \partial_y(F_i)}{(b-b_i)^2} Z_i + \cdots + P_{d-1} \cdot \sum_{i=3}^d \frac{b_i^{d-1} \partial_y(F_i)}{(b-b_i)^2} Z_i = 0.$$

D'après l'hypothèse de position générale et via un déterminant de Vandermonde, on a nécessairement $P_4 = P_5 = \cdots = P_{d-1} = 0$ d'où le résultat. \square

Corollaire. On suppose que $\deg P_{\mathcal{W}} \leq 3$, alors par tout point $E(x_0, y_0; b_0)$ de $E(x_0, y_0)$ passe exactement une famille à 1-paramètre d'éléments de $\bigcup_{(x,y) \in (\mathbb{C}^2, 0)} E(x, y)$, et chaque membre de cette famille différent de $E(x_0, y_0)$ ne rencontre $E(x_0, y_0)$ qu'au point $E(x_0, y_0; b_0)$.

Démonstration. Soient $(E_j)_{1 \leq j \leq r}$ les composantes de E , on peut supposer que l'on a $E_1(x_0, y_0; b_0) \neq 0$ et localement $E = \left[1, \frac{E_2}{E_1}, \dots, \frac{E_r}{E_1}\right]$. D'après la relation du lemme précédent et puisque $P_{\mathcal{W}} = P_0 + P_1 b + P_2 b^2 + P_3 b^3$, chaque $\frac{E_j}{E_1}$ vérifie l'équation aux dérivées partielles du premier ordre suivante :

$$\partial_x(z) + b\partial_y(z) + P_{\mathcal{W}}\partial_b(z) = 0.$$

Ainsi, $E^{-1}(E(x_0, y_0; b_0))$ est la courbe caractéristique de l'équation ci-dessus qui passe par $(x_0, y_0; b_0)$, c'est-à-dire la solution du système différentiel

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{b} = \frac{db}{P_{\mathcal{W}}}$$

qui passe par $(x_0, y_0; b_0)$. Autrement dit, $E^{-1}(E(x_0, y_0; b_0))$ est la courbe $x \rightsquigarrow (x, y(x); y'(x))$ où $y(x)$ est l'unique solution de l'équation différentielle du second ordre $y''(x) = P_{\mathcal{W}}(x, y(x); y'(x))$ telle que $y(x_0) = y_0$ et $y'(x_0) = b_0$. Ce qui montre que la famille à 1-paramètre cherchée est

$$b \rightsquigarrow E(x, y(x); b)$$

(chaque membre de cette famille passe par $E(x_0, y_0; b_0)$ en $b = y'(x)$). De plus si $E(x_0, y_0; \beta_0) = E(x_1, y(x_1); \beta_1)$ pour $(x_0, y_0) \neq (x_1, y(x_1))$ suffisamment voisins, alors $\beta_0 = b_0$ et $\beta_1 = y'(x_1)$ puisqu'il existe une unique solution de $y'' = P_{\mathcal{W}}(x, y; y')$ qui passe par (x_0, y_0) et $(x_1, y(x_1))$, à savoir $y(x)$. \square

§3. Détermination des tissus de rang maximal de $(\mathbb{C}^2, 0)$ qui sont linéarisables

Soit \mathcal{W} un d -tissu de $(\mathbb{C}^2, 0)$ avec $d \geq 2$ et dont le rang est *maximal* (i.e. $\text{rg } \mathcal{W} = \frac{1}{2}(d-1)(d-2) = r$). Si $d = 2$ (resp. 3) alors il est bien connu que \mathcal{W} est linéarisable, et même *parallélisable* puisqu'il existe un isomorphisme local $\phi : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, \phi(0))$ qui transforme \mathcal{W} en un tissu linéaire dont les feuilles sont $\xi = \text{cste}$, $\eta = \text{cste}$ (resp. $\xi = \text{cste}$, $\eta = \text{cste}$ et $\xi + \eta = \text{cste}$) puisque dans ce cas l'on a une relation abélienne non triviale :

$$g_1(F_1)dF_1 + g_2(F_2)dF_2 + g_3(F_3)dF_3 = 0 = d(\tilde{g}_1(F_1) + \tilde{g}_2(F_2) + \tilde{g}_3(F_3)) .$$

On suppose désormais que l'on a $d \geq 4$.

On rappelle qu'une surface de Veronese de \mathbb{P}^{r-1} est une surface algébrique V de \mathbb{P}^{r-1} paramétrée, à un automorphisme linéaire près de \mathbb{P}^{r-1} , par

$$(b, t) \rightsquigarrow [1; b, t; b^2, bt, t^2; \dots, t^{d-3}];$$

autrement dit, V est déterminée par la donnée d'une base du \mathbb{C} -espace vectoriel des polynômes homogènes de degré $d-3$ de $\mathbb{C}[z_0, z_1, z_2]$. Une surface de Veronese de $\mathbb{P}^{r-1} = \mathbb{P}^{\frac{1}{2}d(d-3)}$ est lisse, irréductible, non dégénérée pour $d \geq 5$ (i.e. non contenue dans un hyperplan de \mathbb{P}^{r-1}) et de degré $(d-3)^2$; pour $d = 5$, c'est "la" surface usuelle de Veronese de \mathbb{P}^5 qui de plus dans ce cas (et seulement dans ce dernier) est non dégénérée et de degré minimal, à savoir 4.

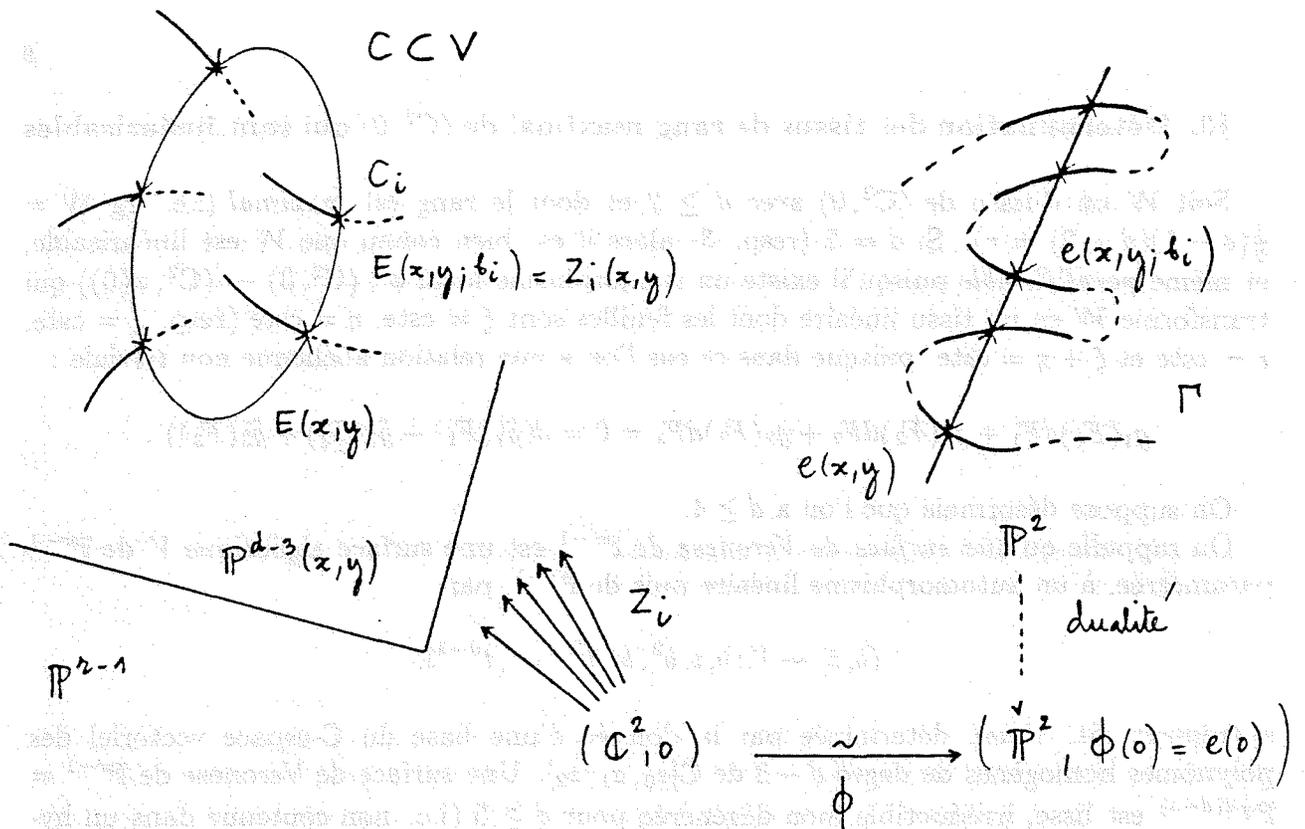
Théorème 2. Soit \mathcal{W} un d -tissu de $(\mathbb{C}^2, 0)$ avec $d \geq 4$, de polynôme associé $P_{\mathcal{W}}$ et dont le rang r est maximal (i.e. $r = \frac{1}{2}(d-1)(d-2)$), alors les conditions suivantes sont équivalentes :

- i) \mathcal{W} est linéarisable ;
- ii) la famille $\bigcup_{(x,y) \in (\mathbb{C}^2, 0)} E(x, y)$ est contenue dans une surface de Veronese V de \mathbb{P}^{r-1} ;
- iii) $\text{deg} P_{\mathcal{W}} \leq 3$.

Démonstration. i) \Rightarrow iii). C'est une conséquence du théorème 1. iii) \Rightarrow i). Quitte à modifier l'ordre des composantes E_j de l'application de Darboux-Blaschke E de \mathcal{W} , on peut supposer d'après le lemme précédent que l'application

$$e = [E_1, E_2, E_3] : (\mathbb{C}^2, 0) \times \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^2$$

vérifie $\text{rg } e = 2$; de plus, d'après le corollaire qui précède et le théorème de Bezout dans \mathbb{P}^2 , chaque courbe algébrique $e(x, y)$ de \mathbb{P}^2 (i.e. paramétrée par $b \rightsquigarrow e(x, y; b)$) est une droite ($e(x_0, y_0)$ et $e(x, y(x))$ ont exactement un point commun pour $(x_0, y_0) \neq (x, y(x))$). Par dualité, on obtient $\phi : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{P}^2, \phi(0))$ en posant $\phi(x, y) = e(x, y)$, et par construction ϕ linéarise \mathcal{W} ; en effet $\phi(\{F_i(x, y) = \text{cste}\})$ est la droite de \mathbb{P}^2 qui correspond à $e(x, y; b_i(x, y))$ et l'hypothèse de position générale montre que ϕ est un isomorphisme local :



ii) \Rightarrow i). Soit $v : \mathbb{P}^2 \rightarrow v(\mathbb{P}^2) = V \subset \mathbb{P}^{r-1}$ le plongement de la surface de Veronese $V \supset \bigcup_{(x,y) \in (\mathbb{C}^2, 0)} E(x,y)$, alors $v^{-1}(E(x,y))$ est une droite de \mathbb{P}^2 puisque

$$d-3 = \deg[v(v^{-1}(E(x,y)))] = (d-3) \cdot \deg[v^{-1}(E(x,y))]$$

et l'on conclut comme dans iii) \Rightarrow i) en posant $\phi(x,y) = v^{-1}(E(x,y)) \in \mathbb{P}^2$. i) \Rightarrow ii). On peut supposer que \mathcal{W} est linéaire, c'est-à-dire $F_i = y - x \cdot b_i$ où $X_i(b_i) = 0$ pour $1 \leq i \leq d$ (cf. [Hé], §2), et l'on obtient d germes d'applications de rang 1

$$U_i : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{P}^2, U_i(0))$$

en posant $U_i(x,y) = [1, b_i(x,y), F_i(x,y)]$. Puisque \mathcal{W} est de rang maximal, il existe une relation abélienne d'algébrisation $\sum_{i=1}^d g_i(F_i) dF_i = 0$ où $g_i(F_i) \neq 0$ pour $1 \leq i \leq d$; grâce au théorème de Lie-Darboux-Griffiths (cf. [G], p. 367 et appendice §4) il existe une courbe algébrique réduite $\Gamma = \{f(s,t) = 0\}$ de \mathbb{P}^2 de degré d (non nécessairement irréductible et éventuellement singulière) contenant les d germes de courbes analytiques lisses de \mathbb{P}^2 définis par les U_i . Autrement dit, on a $\mathcal{W} = \mathcal{L}_\Gamma$ où \mathcal{L}_Γ est le d -tissu linéaire de \mathbb{P}^2 associé, par dualité, à la courbe algébrique $\Gamma \subset \mathbb{P}^2$. Si ω_Γ est le faisceau dualisant de Γ , alors $H^0(\Gamma, \omega_\Gamma)$ est engendré sur \mathbb{C} par

$$\frac{s^i t^j}{\partial_i(f)(s,t)} ds \text{ où } 0 \leq i+j \leq d-3.$$

Or d'après le théorème d'Abel (cf. appendice §3), $H^0(\Gamma, \omega_\Gamma)$ est \mathbb{C} -isomorphe à l'espace vectoriel \mathcal{A} des relations abéliennes de \mathcal{W} , ce qui montre que (dans ce cas) l'on peut supposer que l'on a

$$Z_i(x, y) = [1; b_i, y - x.b_i; b_i^2, (y - x.b_i)b_i, (y - x.b_i)^2; \dots, (y - x.b_i)^{d-3}]$$

pour $1 \leq i \leq d$. D'où le résultat, puisque dans ce cas on obtient

$$E(x, y; b) = [1; b, y - x.b; b^2, (y - x.b)b, (y - x.b)^2; \dots, (y - x.b)^{d-3}]. \quad \square$$

Remarque 2. Au cours de la démonstration du théorème 2, on a obtenu la description suivante d'un d -tissu \mathcal{W} de $(\mathbb{C}^2, 0)$ de rang maximal et linéarisable ($d \geq 4$), via l'espace vectoriel \mathcal{A} de ses relations abéliennes : la linéarisation ϕ définie par e est *unique*, à un automorphisme linéaire de \mathbb{P}^2 près (cf. [Hé]) et ϕ transforme \mathcal{W} en le d -tissu linéaire \mathcal{L}_Γ de \mathbb{P}^2 associé, par dualité, à une courbe algébrique réduite Γ de \mathbb{P}^2 de degré d . La description de la courbe $\Gamma \subset \mathbb{P}^2$ est la suivante : chaque germe de courbe C_i défini par Z_i est contenu dans une courbe algébrique $C = v(\Gamma)$ de \mathbb{P}^{r-1} tracée sur la surface de Veronese $V \supset \bigcup_{(x,y) \in (\mathbb{C}^2, 0)} E(x, y)$ où $v : \mathbb{P}^2 \rightarrow v(\mathbb{P}^2) = V \subset \mathbb{P}^{r-1}$ est le plongement définissant V .

La courbe algébrique C de \mathbb{P}^{r-1} contenant les C_i est non nécessairement irréductible, éventuellement singulière, non dégénérée (i.e. non contenue dans un hyperplan de \mathbb{P}^{r-1} : le rang de \mathcal{W} est maximal !) et de degré $d(d-3)$.

Remarque 3. On notera, d'après ce qui précède, que les relations abéliennes d'un d -tissu \mathcal{W} de $(\mathbb{C}^2, 0)$ dont le rang est maximal permettent de "résoudre géométriquement" le système différentiel non linéaire (*) du théorème 1.

Remarque 4. Pour $d = 4$, la condition iii) du théorème 2 est toujours vérifiée et le résultat (resp. la démonstration) iii) \Rightarrow i) du théorème 2 est celui (resp. celle) classique de Poincaré :

Tout 4-tissu \mathcal{W} de $(\mathbb{C}^2, 0)$ dont le rang est maximal est linéarisable

(dans ce cas, $(x, y) \rightsquigarrow \phi(x, y) = e(x, y) = \mathbb{P}^1(x, y) \in \mathbb{P}^2$ est l'application de Poincaré de \mathcal{W} (cf. par exemple [C-G]))

APPENDICE

Dans cet appendice on a regroupé quelques résultats classiques sur la géométrie des courbes algébriques de \mathbb{P}^2 et détaillé les démonstrations des théorèmes de base concernant la géométrie des tissus linéaires de $(\mathbb{C}^2, 0)$.

On reconnaîtra l'influence de l'article "Variations on a theorem of Abel" de Griffiths [G], ainsi que la démonstration de Darboux du théorème de Lie concernant les surfaces de translation (cf. [D]).

§1. Rappels sur la géométrie des courbes algébriques de \mathbb{P}^2 (cf. [B-P-V], [G-H], [H])

Soit $C = \{f(s, t) = 0\}$ une courbe algébrique *réduite* de \mathbb{P}^2 , non nécessairement irréductible et éventuellement singulière dont le degré est $d = \deg f$. Puisque C est réduite, le lieu singulier $\text{Sing}(C) = \{f = f_s = f_t = 0\}$ où $f_s = \frac{\partial f}{\partial s}$ et $f_t = \frac{\partial f}{\partial t}$ est constitué d'un nombre fini de points de C .

On désigne par $n: \tilde{C} \rightarrow C$ la normalisation de C ; \tilde{C} est une variété projective lisse non nécessairement connexe: si $\tilde{C} = \bigcup_{i=1}^k \tilde{C}_i$ est la décomposition (finie) de \tilde{C} en composantes connexes, alors $C = \bigcup_{i=1}^k n(\tilde{C}_i)$ est la décomposition de C en composantes irréductibles $C_i = n(\tilde{C}_i)$; de plus, $n|_{\tilde{C}_i}: \tilde{C}_i \rightarrow C_i$ est la normalisation de C_i .

On note $\chi(C) = \dim_{\mathbb{C}} H^0(C, \mathcal{O}_C) - \dim_{\mathbb{C}} H^1(C, \mathcal{O}_C)$ la caractéristique d'Euler-Poincaré de C , et $p_a(C) = 1 - \chi(C)$ le genre arithmétique de C .

Si P_C est le polynôme de Hilbert de C (i.e. associé à $\mathbb{C}[z_0, z_1, z_2]/F(z_0, z_1, z_2)$ où $f(s, t) = F(1, s, t)$), alors $P_C(\nu) = d\nu + \chi(C)$. Or

$$\begin{aligned} P_C(\nu) &= \binom{\nu+2}{2} - \binom{\nu+2-d}{2} \\ &= d\nu + 1 - \frac{1}{2}(d-1)(d-2) \end{aligned}$$

ce qui montre que l'on a

$$p_a(C) = \frac{1}{2}(d-1)(d-2).$$

D'après l'additivité de χ , la normalisation de C donne $p_a(C) = p_a(\tilde{C}) + \sum_{p \in \text{Sing}(C)} \delta_p$ d'où la formule suivante :

$$\frac{1}{2}(d-1)(d-2) = \sum_{i=1}^k g_i + 1 - k + \sum_{p \in \text{Sing}(C)} \delta_p$$

où $g_i = \dim_{\mathbb{C}} H^1(\tilde{C}_i, \mathcal{O}_{\tilde{C}_i}) = p_a(\tilde{C}_i)$ est le genre géométrique de C_i (i.e. le genre arithmétique de la normalisation de C_i).

On rappelle que

$$2 \delta_p = \mu(C_i, p) + r_p - 1$$

où $\mu(C_i, p)$ est le nombre de Milnor de la singularité (isolée) p de C_i , et r_p est le nombre de branches locales en p de la courbe C_i .

Soit ω_C le faisceau dualisant de C ; les sections locales de ω_C sont de la forme

$$r \frac{ds}{f_t} = -r \frac{dt}{f_s} \text{ où } r \in \mathcal{O}_C .$$

Si C est lisse, $\omega_C = \Omega_C^1$. La dualité de Serre et la connexité de C impliquent :

$$\begin{aligned} \dim_{\mathbb{C}} H^0(C, \omega_C) &= \dim_{\mathbb{C}} H^1(C, \mathcal{O}_C) \\ &= p_a(C) = \frac{1}{2}(d-1)(d-2). \end{aligned}$$

Soit $\Omega_{\mathbb{P}^2}^2(C)$ le faisceau des 2-formes méromorphes sur \mathbb{P}^2 à pôles simples le long de C ; les sections locales de $\Omega_{\mathbb{P}^2}^2(C)$ sont de la forme $r \frac{ds \wedge dt}{f}$ où $r \in \mathcal{O}_C$. Le résidu de Poincaré sur C , noté Res_C , donne la suite exacte sur \mathbb{P}^2 :

$$0 \rightarrow \Omega_{\mathbb{P}^2}^2 \rightarrow \Omega_{\mathbb{P}^2}^2(C) \rightarrow \omega_C \rightarrow 0$$

où l'on rappelle que $\text{Res}_C(r \frac{ds \wedge dt}{f}) = r \frac{ds}{f_t} = -r \frac{dt}{f_s}$ sur C .

Puisque l'on a

$$\dim_{\mathbb{C}} H^i(\mathbb{P}^2, \Omega_{\mathbb{P}^2}^2) = \dim_{\mathbb{C}} H^{2-i}(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} ,$$

la suite exacte précédente induit un isomorphisme :

$$H^0(\mathbb{P}^2, \Omega_{\mathbb{P}^2}^2(C)) \xrightarrow{\sim} H^0(C, \omega_C).$$

Toute fonction méromorphe sur \mathbb{P}^2 est rationnelle ; ainsi tout élément de $H^0(\mathbb{P}^2, \Omega_{\mathbb{P}^2}^2(C))$ s'écrit localement $r(s, t) \frac{ds \wedge dt}{f(s, t)}$ où $r \in \mathbb{C}[s, t]$ avec la condition qu'il n'y ait pas de pôles à l'infini. Si $s = \frac{1}{s'}$ et $t = \frac{t'}{s'}$ alors $f(s, t) = \frac{\tilde{f}(s', t')}{(s')^d}$, et l'on a

$$\frac{r(s, t) ds \wedge dt}{f(s, t)} = - \frac{\tilde{r}(s', t') ds' \wedge dt'}{(s')^{\deg r - d + 3} \tilde{f}(s', t')}.$$

On doit donc avoir $\deg r - d + 3 \leq 0$; or

$$\dim_{\mathbb{C}} \{r \in \mathbb{C}[s, t] ; \deg r \leq d - 3\} = \binom{2 + d - 3}{d - 3}$$

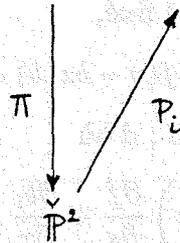
ce qui permet de retrouver l'égalité :

$$\dim_{\mathbb{C}} H^0(C, \omega_C) = \frac{1}{2}(d - 1)(d - 2).$$

§2. Théorème d'Abel : version différentielle de Griffiths (cf. [G])

Une droite générale $H \in \check{\mathbb{P}}^2$ coupe transversalement C en d points lisses distincts, et l'on a une correspondance d'incidence

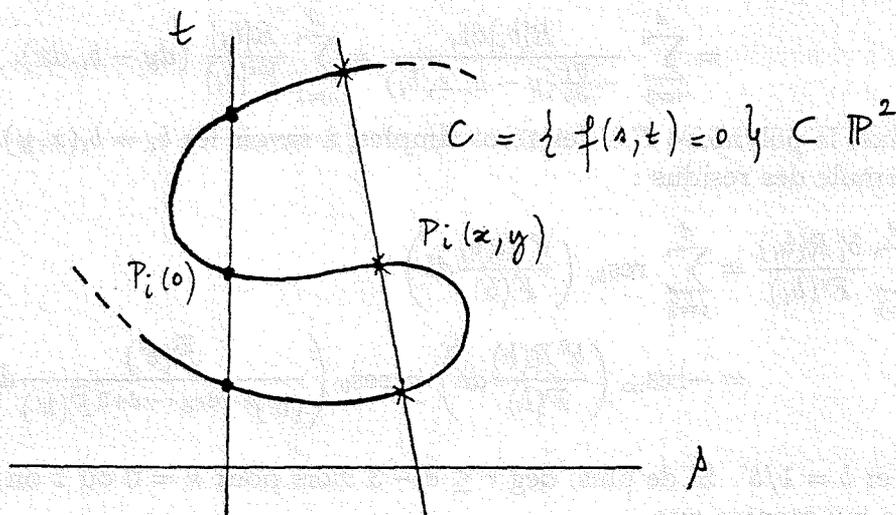
$$\{(H, c) \in \check{\mathbb{P}}^2 \times C; c \in H\} = I \subset \check{\mathbb{P}}^2 \times C;$$



la première projection induit un morphisme $\pi : I \rightarrow \check{\mathbb{P}}^2$ génériquement fini, de branches locales

$$P_i(x, y) = (y - b_i(x, y)) \cdot x, \quad b_i(x, y)$$

où $(x, y = tx + s)$ sont des coordonnées locales sur $\check{\mathbb{P}}^2$.



$$\{s = 0\} = H_{[0,0,1]} \quad H_{[-y,x,1]} = \{[1, s, t]; -y + tx + s = 0\}$$

Pour toute 1-forme rationnelle ω sur C , il existe une 1-forme rationnelle $\text{Trace}(\omega)$ sur $\check{\mathbb{P}}^2$ définie par $\text{Trace}(\omega) = \sum_{i=1}^d P_i^*(\omega)$. Si localement sur C , on a $\omega = r \frac{ds}{ft} = -r \frac{dt}{fs}$ avec $r \in \mathbb{C}[s, t]$ alors

$$\text{Trace}(\omega) = \sum_{i=1}^d \frac{R[b_i(x, y)]}{F'[b_i(x, y)]} (dy - b_i(x, y)dx)$$

localement sur $\check{\mathbb{P}}^2$ où pour (x, y) fixé,

$$F(b) = f(y - bx, b) \text{ et } R(b) = r(y - bx, b).$$

En effet, on a $f(y - b_i \cdot x, b_i) = 0$; d'où

$$\begin{cases} \left(-b_i - \frac{\partial b_i}{\partial x} \cdot x \right) \frac{\partial f}{\partial s} + \frac{\partial b_i}{\partial x} \cdot \frac{\partial f}{\partial t} = 0 = F'(b_i) \cdot \frac{\partial b_i}{\partial x} - b_i \cdot \frac{\partial f}{\partial s} \\ \left(1 - \frac{\partial b_i}{\partial y} \cdot x \right) \frac{\partial f}{\partial s} + \frac{\partial b_i}{\partial y} \cdot \frac{\partial f}{\partial t} = 0 = F'(b_i) \cdot \frac{\partial b_i}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial s} \end{cases}$$

puisque $F'(b) = -x \frac{\partial f}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial t}$. Par suite :

$$F'(b_i)db_i = F'(b_i) \left(\frac{\partial b_i}{\partial x} dx + \frac{\partial b_i}{\partial y} dy \right) = -\frac{\partial f}{\partial s} (dy - b_i \cdot dx).$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \text{Trace}(\omega) &= \sum_{i=1}^d P_i^* \left[-\frac{\frac{\partial f}{\partial s}(s, t)}{r(s, t)} dt \right] \\ &= \sum_{i=1}^d \frac{R[b_i]db_i}{-\frac{\partial f}{\partial s}(y - b_i \cdot x, b_i)} = \sum_{i=1}^d \frac{R[b_i]}{F'[b_i]} (dy - b_i \cdot dx). \end{aligned}$$

Pour (x, y) fixé, le polynôme F à des zéros simples, à savoir les $b_i = b_i(x, y)$ et pour $k \geq 0$ d'après la formule des résidus :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^d \frac{b_i^k R(b_i)}{F'(b_i)} &= \sum_{i=1}^d \text{res}_{b_i} \left(\frac{b^k R(b)}{F(b)} db \right) \\ &= -\text{res}_{\infty} \left(\frac{b^k R(b)}{F(b)} db \right) = \text{res}_0 \left(\frac{\tilde{R}(b')}{(b')^{k+\text{deg } r - d + 2} \tilde{F}(b')} db' \right) \end{aligned}$$

où $\tilde{F}(0) \neq 0$ et $b = 1/b'$. Si de plus, $\text{deg } r \leq d - 3$ alors pour $k = 0$ où 1 on a $k + \text{deg } r - d + 2 \leq 0$; ce qui montre que

$$\sum_{i=1}^d \frac{R(b_i)}{F'(b_i)} = \sum_{i=1}^d \frac{b_i R(b_i)}{F'(b_i)} = 0.$$

Ainsi, d'après l'écriture locale du morphisme Trace , on obtient le résultat suivant :

Théorème 1. Pour tout $\omega \in H^0(C, \omega_C)$,

$$\text{Trace}(\omega) = \sum_{i=1}^d P_i^*(\omega) = 0.$$

§3. Tissu linéaire associé à une courbe algébrique de \mathbb{P}^2

Soit $C = \{f(s, t) = 0\}$ une courbe réduite de \mathbb{P}^2 , de degré $d = \deg f$. Avec les notations qui précèdent, toute droite $H_{[-y, x, 1]} = \{[1, s, t] ; -y + tx + s = 0\}$ voisine de $H_{[0, 0, 1]}$ dans $\check{\mathbb{P}}^2$ coupe C en d points lisses distincts $P_i(x, y) = (y - b_i(x, y).x, b_i(x, y))$.

Par dualité on obtient un d -tissu linéaire \mathcal{L}_C de $(\mathbb{C}^2, 0) = (\check{\mathbb{P}}^2, H_{[0, 0, 1]})$ où l'on regarde \mathbb{C}^2 dans $\check{\mathbb{P}}^2$ via le plongement $(x, y) \rightsquigarrow [-y, x, 1]$; les d feuilles de \mathcal{L}_C passant par (x_0, y_0) sont les droites distinctes $\{-y + b_i(x_0, y_0)x + y_0 - b_i(x_0, y_0)x_0 = 0\}$. On appelle \mathcal{L}_C "le" tissu linéaire associé à la courbe algébrique C de \mathbb{P}^2 .

Si l'une des composantes irréductibles de C est une droite projective D_i , alors la i -ième famille des feuilles de \mathcal{L}_C est le pinceau de droites passant par \check{D}_i où \check{D}_i est le point $\check{\mathbb{P}}^2$ qui correspond par dualité à la droite D_i de \mathbb{P}^2 . Si aucune composante irréductible de C est une droite projective, alors les d feuilles de \mathcal{L}_C passant par (x_0, y_0) sont les d tangentes à la courbe duale $\check{C} \subset \check{\mathbb{P}}^2$ de C qui passent par (x_0, y_0) : on rappelle que \check{C} est l'adhérence de l'image du morphisme $C - \text{Sing}(C) \rightarrow \check{\mathbb{P}}^2$ défini par $c \rightsquigarrow T(C, c)$ où $T(C, c)$ est la tangente à la courbe C au point c ; de plus, la classe de C (i.e. le degré \check{d} de la courbe duale \check{C} de $\check{\mathbb{P}}^2$) est donnée par (cf. [T]) :

$$\check{d} = d(d-1) - \sum_{p \in \text{Sing}(C)} \{\mu(C, p) + m(C, p) - 1\}$$

où $\mu(C, p)$ (resp. $m(C, p)$) est le nombre de Milnor (resp. la multiplicité) de la singularité (isolée) p de C .

Par transversalité, on a des isomorphismes $n_i : (\mathbb{C}, 0) \xrightarrow{\sim} (C, P_i(0))$ où $n_i(s) = [1, s, \xi_i(s)]$, et l'on a $P_i = n_i \circ a_i$ avec $a_i(x, y) = y - b_i(x, y).x$, soit $b_i = \xi(a_i)$; en particulier le d -tissu linéaire \mathcal{L}_C est défini par les $\{a_i = \text{cste}\}$, et les champs de vecteurs associés à \mathcal{L}_C sont $X_i = \partial_x + b_i \partial_y$.

Soit $\omega \in H^0(C, \omega_C)$; localement sur $(C, P_i(0))$ on a $n_i^*(\omega) = g_i(s)ds$ où $g_i \in \mathbb{C}\{s\}$; d'après le théorème d'Abel (cf. §2) on obtient :

$$\begin{aligned} \text{Trace}(\omega) &= \sum_{i=1}^d P_i^*(\omega) = \sum_{i=1}^d a_i^*(g_i(s)ds) \\ &= \sum_{i=1}^d g_i(a_i)da_i = 0. \end{aligned}$$

On a ainsi construit une application \mathbb{C} -linéaire

$$\theta : H^0(C, \omega_C) \rightarrow \mathcal{A}$$

définie par $\theta(\omega) = (g_i(a_i))_i$; où \mathcal{A} est le \mathbb{C} -espace vectoriel des relations abéliennes du d -tissu linéaire \mathcal{L}_C de $(\mathbb{C}^2, 0) = (\mathbb{P}^2, H_{[0,0,1]})$.

On va montrer que θ est un isomorphisme. Soit $(g_i(a_i))_i \in \mathcal{A}$, il suffit d'après ce qui précède et le lemme d'extension de Griffiths (cf. [G], p. 385) de construire au voisinage de $H_{[0,0,1]}$ dans \mathbb{P}^2 une 2-forme $\Omega = \frac{r(s,t)}{f(s,t)} ds \wedge dt$ dont le résidu de Poincaré $\text{Res}_C(\Omega) = \omega$ vérifie localement sur $(C, P_i(0))$ l'égalité $n_i^*(\omega) = g_i(s)ds$; soit encore

$$r(a_i, b_i) = g_i(a_i) \cdot f_t(a_i, b_i)$$

au voisinage de $0 \in \mathbb{C}^2$.

Le vecteur $DP_i \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial_y(a_i) \\ \partial_y(b_i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-x\partial_y(b_i) \\ \partial_y(b_i) \end{bmatrix}$ est non nul pour (x, y) de $0 \in \mathbb{C}^2$, et est tangent à C en $P_i(x, y)$; d'où

$$(1 - x\partial_y(b_i))f_s(a_i, b_i) + \partial_y(b_i)f_t(a_i, b_i) = 0.$$

Ce qui montre que si à (x, y) fixé, on pose $F(b) = f(y - bx, b)$ alors on a :

$$\begin{aligned} F'(b_i)\partial_y(a_i) &= (-x f_s(a_i, b_i) + f_t(a_i, b_i))(1 - x\partial_y(b_i)) \\ &= f_t(a_i, b_i). \end{aligned}$$

D'après la formule d'interpolation de Lagrange, la fonction

$$h(b, x, y) = f(y - bx, b) \cdot \sum \frac{g_i(a_i)\partial_y(a_i)}{b - b_i(x, y)}$$

vérifie pour (x, y) fixé :

$$\begin{aligned} h(b_i, x, y) &= g_i(a_i)\partial_y(a_i)F'(b_i) \\ &= g_i(a_i) \cdot f_t(a_i, b_i). \end{aligned}$$

Lemme. On suppose que l'on a $\sum_{i=1}^d g_i(a_i)da_i = 0$, alors la fonction

$$\lambda(b, x, y) = \sum_{i=1}^d \frac{g_i(a_i)\partial_y(a_i)}{b - b_i(x, y)}$$

vérifie $\partial_x(\lambda) + b\partial_y(\lambda) = 0$.

Démonstration. D'après l'hypothèse $\sum_{i=1}^d g_i(a_i)\partial_y(a_i) = 0$, ce qui montre que l'on a

$$b \sum_{i=1}^d \frac{g_i(a_i)\partial_y(a_i)}{b-b_i} - \sum_{i=1}^d \frac{b_i g_i(a_i)\partial_y(a_i)}{b-b_i} = \sum_{i=1}^d \frac{(b-b_i)g_i(a_i)\partial_y(a_i)}{b-b_i} = 0$$

d'où $b\partial_y(\lambda) = \partial_y \left(\sum_{i=1}^d \frac{b_i g_i(a_i)\partial_y(a_i)}{b-b_i} \right)$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \partial_x(\lambda) + b\partial_y(\lambda) &= \sum_{i=1}^d \frac{\partial_x[g_i(a_i)\partial_y(a_i)] + \partial_y[b_i g_i(a_i)\partial_y(a_i)]}{b-b_i} \\ &\quad + \sum_{i=1}^d \frac{g_i(a_i)\partial_y(a_i)\partial_x(b_i) + b_i g_i(a_i)\partial_y(a_i)\partial_y(b_i)}{(b-b_i)^2} = 0 \end{aligned}$$

puisque $X_i(a_i) = X_i(b_i) = 0$ où $X_i = \partial_x + b_i\partial_y$. Ce qui donne le résultat. \square

D'après le lemme ci-dessus, la fonction $\lambda(t, x, tx + s)$ ne dépend pas de x , ce qui montre que la fonction

$$\begin{aligned} r(s, t) &= f(s, t) \cdot \lambda(t, x, tx + s) \\ &= h(t, x, tx + s) \end{aligned}$$

est holomorphe au voisinage de $H_{[0,0,1]}$ dans \mathbb{P}^2 . Or

$$\begin{aligned} r(a_i, b_i) &= h(b_i, x, b_i \cdot x + a_i) \\ &= h(b_i, x, y) = g_i(a_i) \cdot f_t(a_i, b_i) \end{aligned}$$

ce qui prouve que θ est un isomorphisme. En particulier, d'après ce qui précède on a le résultat suivant :

Théorème 2. Soit C une courbe algébrique réduite de \mathbb{P}^2 dont le degré est d . Alors le rang du d -tissu linéaire \mathcal{L}_C associé à C est maximal et égal au genre arithmétique de la courbe C , ou encore

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{A} = \dim_{\mathbb{C}} H^0(C, \omega_C) = p_a(C) = \frac{1}{2}(d-1)(d-2).$$

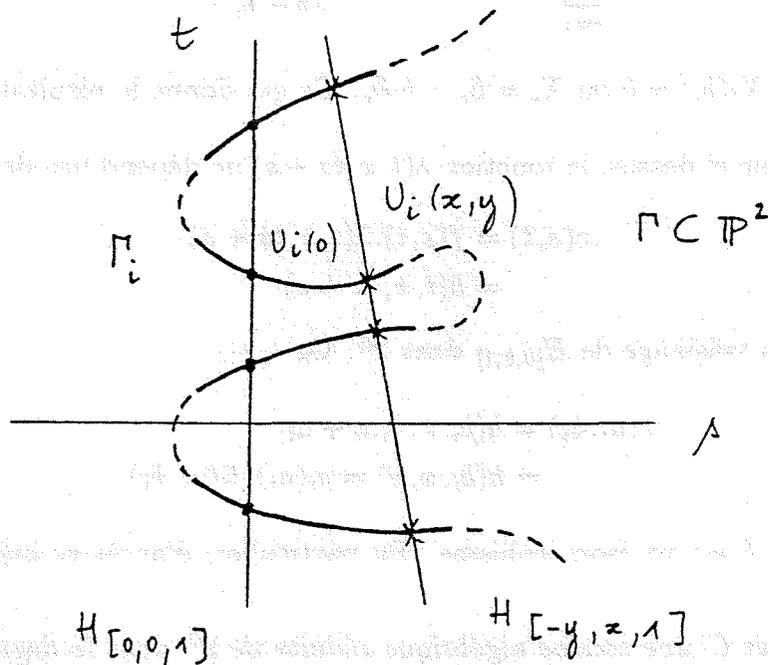
§4 Algébrisation des tissus linéaires de $(\mathbb{C}^2, 0)$

Soit \mathcal{L} un d -tissu linéaire de $(\mathbb{C}^2, 0)$. Quitte à faire un changement linéaire de coordonnées, on peut supposer que les champs de vecteurs associés à \mathcal{L} sont $X_i = \partial_x + b_i \cdot \partial_y$ avec $X_i(b_i) = 0$ (cf. [Hé], §2).

Les feuilles du d -tissu \mathcal{L} sont définies par $\{a_i = \text{cste}\}$ où $a_i(x, y) = y - b_i(x, y) \cdot x$ puisque $X_i(b_i) = 0$; de plus, on a $b_i = \xi_i(a_i)$ avec $\xi_i \in \mathbb{C}\{s\}$.

On pose $U_i(x, y) = [1, a_i(x, y), \xi_i[a_i(x, y)]]$, alors les U_i définissent d germes de courbes analytiques lisses $(\Gamma_i, U_i(0))$ dans \mathbb{P}^2 qui sont transverses à la droite $H_{[0,0,1]} \in \check{\mathbb{P}}^2$ en d points distincts $U_i(0) = [1, 0, b_i(0)]$; de plus, pour (x, y) voisin de $0 \in \mathbb{C}^2$, c'est-à-dire pour $H_{[-y,x,1]} = \{[1, s, t]; -y + tx + s = 0\}$ voisin de $H_{[0,0,1]}$ dans $\check{\mathbb{P}}^2$, on a :

$$U_i(x, y) \in H_{[-y,x,1]} \text{ pour tout } 1 \leq i \leq d.$$



Par transversalité, on a des isomorphismes $n_i : (\mathbb{C}, 0) \xrightarrow{\sim} (\Gamma_i, U_i(0))$ où $n_i(s) = [1, s, \xi_i(s)]$ et des applications $P_i : (H_{[0,0,1]}, \check{\mathbb{P}}^2) \rightarrow (\Gamma_i, U_i(0))$ où $P_i(H) = H \cdot \Gamma_i = U_i(x, y) = n_i \circ a_i(x, y)$ avec $H = H_{[-y,x,1]}$.

Théorème 3. (Lie, Darboux, ..., Griffiths) On suppose qu'il existe une relation abélienne du d -tissu linéaire \mathcal{L} de la forme $\sum_{i=1}^d g_i(a_i) da_i = 0$ avec $g_i(a_i) \neq 0$ pour tout $1 \leq i \leq d$. Alors il existe une courbe algébrique réduite Γ de \mathbb{P}^2 , non nécessairement irréductible et éventuellement singulière dont le degré est d et qui contient les germes $(\Gamma_i, U_i(0))$, et un

élément $\omega \in H^0(\Gamma, \omega_\Gamma)$ tel que localement sur $(\Gamma_i, U_i(0))$ on ait $n_i^*(\omega) = g_i(s)ds$. En particulier \mathcal{L} est le d -tissu linéaire associé à la courbe Γ de \mathbb{P}^2 (i.e. $\mathcal{L} = \mathcal{L}_\Gamma$).

Démonstration. D'après le lemme d'extension de Griffiths (cf. [G], p. 385) et ce qui précède, il suffit de construire une 2-forme méromorphe Ω au voisinage de $H_{[0,0,1]}$ dans \mathbb{P}^2 dont la variété polaire est $\sum_{i=1}^d \Gamma_i$ et telle que $n_i^*[\text{Res}_{\Gamma_i}(\Omega)] = g_i(s)ds$ sur $(\Gamma_i, U_i(0))$. En effet, l'extension $\tilde{\Omega}$ de Ω s'écrit alors localement $\tilde{\Omega} = \frac{r(s,t)}{f(s,t)} ds \wedge dt$ avec r et f dans $\mathbb{C}[s,t]$, $\deg r \leq d-3$ où $d = \deg f$.

Soit $\lambda(b, x, y) = \sum_{i=1}^d \frac{g_i(a_i) \partial_y(a_i)}{b - b_i(x, y)}$, d'après le lemme du §3 la fonction $\lambda(t, x, tx + s)$ ne dépend pas de x . La 2-forme $\Omega = \lambda(t, x, tx + s) ds \wedge dt$ est méromorphe au voisinage de $H_{[0,0,1]}$ dans \mathbb{P}^2 de variété polaire $\sum_{i=1}^d \Gamma_i$ puisque pour tout $1 \leq i \leq d$ on a $g_i(a_i) \neq 0$ et $a_i(x, y) = y - b_i(x, y).x$, soit $b_i(x, y) = b_i(x, b_i.x + a_i)$. De plus, on a $n_i^*[\text{Res}_{\Gamma_i}(\Omega)] = g_i(s)ds$ sur $(\Gamma_i, U_i(0))$ puisque

$$\begin{aligned} a_i(x, tx + s) &= tx + s - b_i(x, tx + s).x \\ &= s \quad \text{sur } (\Gamma_i, U_i(0)), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \partial_t[t - b_i(x, tx + s)] &= 1 - x \cdot \partial_y(b_i)(x, tx + s) \\ &= \partial_y(a_i)(x, tx + s). \end{aligned}$$

Ce qui démontre le théorème. \square

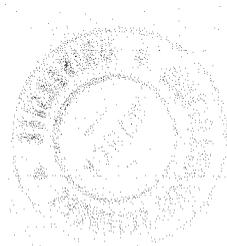
BIBLIOGRAPHIE

- [B] W. BLASCHKE, *Über die Tangenten einer ebenen Kurve fünfter Klasse*, Abh. Hamburg 9 (1933), 313-317.
- [B-B] W. BLASCHKE und G. BOL, *Geometrie der Gewebe*, Springer, Berlin, 1938.
- [Bo] G. BOL, *Über ein bemerkenswertes Fünfgewebe in der Ebene*, Abh. Hamburg 11 (1936), 387-393.
- [B-P-V] W. BARTH, C. PETERS and A. VAN DE VEN, *Compact complex surfaces*, Springer, 1984.
- [C] S.S. CHERN, *Web geometry*, Bull. Amer. Math. Soc. 6 (1982), 1-8.
- [C-G] S.S. CHERN and P.A. GRIFFITHS, *Abel's theorem and webs*, Jahresberichte der deut. Math. Ver. 80 (1978), 13-110.
- [D] G. DARBOUX, *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, Livre I, 2ème édition Paris, 1914.
- [G] P.A. GRIFFITHS, *Variations on a theorem of Abel*, Invent. Math. 35 (1976), 321-390.
- [G-H] P.A. GRIFFITHS and J. HARRIS, *Principles of algebraic geometry*, John Wiley & Sons, 1978.
- [H] R. HARTSHORNE, *Algebraic geometry*, Springer, 1977.
- [Hé] A. HÉNAUT, *Sur la linéarisation des tissus de \mathbb{C}^2* , Prépublication, Université Bordeaux I (1991).
- [P] H. POINCARÉ, *Sur les surfaces de translation et les fonctions abéliennes*, Bull. Soc. Math. France 29, (1901), 61-86.
- [T] B. TEISSIER, *Résolution simultanée I, II* in Sémin. sur les singularités des surfaces, Lect. Notes Math. 777, Springer, 1980.

Alain HÉNAUT
Centre de Recherche en Mathématiques de Bordeaux
Université Bordeaux I
C.N.R.S. U.A. 226
U.F.R. de Mathématiques
351, cours de la Libération
33405 Talence Cedex (FRANCE)



ALAN WINDOUT
Centre de Recherche en Médecine de l'Environnement
Université de Montréal
C.P. 6128
Montréal, Québec H3T 3J7
Canada



UNIVERSITE DE NANCY I

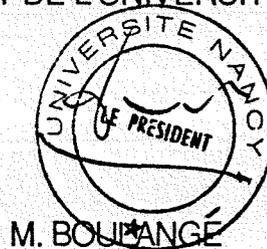
NOM DE L'ETUDIANT : Monsieur HENAUT Alain

NATURE DE LA THESE : DOCTORAT D'ETAT ES SCIENCES MATHÉMATIQUES

VU, APPROUVE ET PERMIS D'IMPRIMER

NANCY, le - 3 JUIN 1992 n° 281

LE PRESIDENT DE L'UNIVERSITE DE NANCY I



M. BOUJANGÉ

THE HISTORY OF THE UNITED STATES

The history of the United States is a story of growth and change. From the first settlers to the present day, the nation has evolved through various stages of development. The early years were marked by exploration and settlement, followed by a period of rapid expansion and industrialization. The American Revolution and the Civil War were pivotal moments in the nation's history, shaping its identity and values. The 20th century brought significant social and political changes, including the rise of the New Deal and the Civil Rights Movement. Today, the United States continues to face new challenges and opportunities in a globalized world.

THE HISTORY OF THE UNITED STATES

Résumé.

Ce mémoire comporte deux parties indépendantes.

La première partie est consacrée à la description des cycles exceptionnels d'éclatements usuels de la géométrie analytique complexe locale : cône tangent de Zariski, éclatement d'un idéal (z_1, \dots, z_n) -primaire de $\mathbb{C}\{z_1, \dots, z_n\}$ et éclatement de Nash d'une hypersurface à singularité isolée.

La seconde partie est consacrée à l'étude de la géométrie des tissus de \mathbb{C}^2 . On caractérise les tissus hexagonaux. On donne une condition nécessaire et suffisante de linéarisation d'un tissu de rang quelconque. On utilise les relations abéliennes pour déterminer les tissus de rang maximal qui sont linéarisables.

Mots-clés.

Eclatements - Cycle exceptionnel - Multiplicité - Eclatement de Nash

Tissus - Relations abéliennes - Tissus hexagonaux - Tissus linéarisables