AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr

LIENS

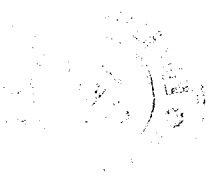
Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4
Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10
http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php
http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm

Université de Nancy I

Département de Mathématiques

THESE DE DOCTORAT

DE L'UNIVERSITE DE NANCY I



en Mathématiques

présentée par

Bruno BLIND

ANALYSE DE FOURIER SUR UNE ALGEBRE DE JORDAN

soutenue le 7 Février 1991 devant le Jury

Pierre EYMARD **Président**
Daniel BARLET
Jean-Louis CLERC
Jacques FARAUT
Hubert RUBENTHALER

A mon Père

A Marraine

A Annette
pour ce temps que je t'ai pris

C'est dans le décor de la terre
Que se passent naissance et saisons voyages et mort
La bien-aimée et la catin et les animaux et la lune
Les arbres méditants la sauvagerie folle et la musique à mort,
C'est entre le ciel la mer bleue et la terre
Et sur l'étroite profondeur du crime de la terre
Que nous errons perdons nos amours et voyons périr nos espoirs
Que nous chantons les désirs de la terre .

(Pierre Jean Jouve , Inventions)

Monsieur Jacques Faraut a bien voulu diriger ce travail . Tout au long de ces années il m'a fait bénéficier avec générosité de son temps et de ses idées ; je tiens à lui exprimer ma profonde gratitude.

Monsieur Pierre Eymard m'a fait l'honneur d'être Président de mon Jury , je l'en remercie vivement.

Je remercie Messieurs Jean-Louis Clerc et Hubert Rubenthaler d'avoir accepté d'être rapporteurs de ma thèse et d'être membres du Jury.

Mes remerciements vont également à Monsieur Daniel Barlet qui a bien voulu faire partie du Jury.

Je tiens à exprimer ma reconnaissance aux membres de l'équipe d'Analyse Harmonique "Nancy-Strasbourg" pour leur chaleureux accueil. J'ai en particulier bénéficié de fructueuses discussions avec Nicole Bopp et Hubert Rubenthaler et du soutien constant de Jean-Louis Clerc.

De nombreuses personnes du Département de Mathématiques m'ont manifesté d'une manière ou d'une autre leur soutien , que toutes soient assurées de ma reconnaissance .

Enfin je tiens à remercier Mesdames Christelle Defosse , Marie Thérèse Driquert et Martine Justin de leur aide pour la frappe de ce texte.

SOMMAIRE

Introduction p 1

Première Partie:

Analyse harmonique sur un hyperboloïde p 5

Deuxième et Troisième Parties

Introduction: Rappels sur les algèbres de Jordan simples euclidiennes p 29

Deuxième partie:
Distributions zêta sur une algèbre de Jordan p 42
I. La décomposition de Gauss dans une algèbre de Jordan simple euclidienne p 43
II.Applications aux intégrales zêta p 53

Troisième partie:
Analyse de Fourier sur une algèbre de Jordan p 63
I. Le cas du cône Ω p 64
II. Les distributions $Z_i(.,s)$ p 72
III. Une généralisation de la transformation de Hankel p 82
Appendice:Les fonctions de Meijer p 92

Bibliographie p 96

INTRODUCTION

Notre travail est divisé en trois parties.
La première partie est la reproduction d'un article paru au "Bulletin des Sciences Mathématiques".Les distributions de type positif sur O(n,1) biinvariantes par $O(1)\times O(n-1,1)$ (ce sont les distributions de type positif sur l'hyperboloïde X d'équation $x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 - x_{n+1}^2 = 1$) admettent une représentation intégrale suivant des distributions de type positif biinvariantes et extrémales .En nous servant des idées de P.Bonnet ,nous donnons le type de croissance des mesures qui interviennent dans cette représentation intégrale.D'autre part nous caractérisons les"transformées de Fourier" des fonctions C^∞ à support compact (la transformée de Fourier étant celle qui décompose la représentation régulière de O(n,1) dans $L^2(X)$).

Les deuxième et troisième parties se situent dans le cadre des algèbres de Jordan simples et euclidiennes .
Une telle algèbre V sera forme réelle d'un espace préhomogène sous l'action de différents groupes . D'une part sous l'action de G, la composante neutre du groupe de structure de V,les orbites étant les ensembles $\Omega_j = \{$ x dans V / signature de x = (r-j,j)$\}$ qui sont des espaces symétriques du type étudié par Oshima et Sekiguchi dans **[Os.-Se.]** (comme nous le montrons dans l'introduction) . D'autre part – c'est l'objet du premier chapitre de la seconde partie – sous l'action du groupe triangulaire T = AN associé à un système complet d'idempotents de l'algèbre V. Cela résulte d'un lemme dû à I.Satake , qui est l'analogue dans V de la décomposition de Gauss d'une matrice définie positive , et que nous redémontrons par les techniques de **[Fa1.]** .Les orbites Ω_ε de V sous cette action sont paramétrées par l'ensemble $\mathcal{E} = \{\varepsilon = (\varepsilon_1,....,\varepsilon_r)$ avec $\varepsilon_i = \pm 1\}$, les ensembles $\mathcal{E}_j = \{\varepsilon$ / card$\{k$ / $\varepsilon_k = 1\} = r-j\}$ réalisant une décomposition d'Iwasawa de l'espace symétrique Ω_j .
L'espace préhomogène (V,T) est du type étudié par F.Sato dans **[Sat.]**, les intégrales zêta Ψ_ε qui y sont attachées (ainsi que celles associées au dual de (V,T)) vérifient alors une relation fonctionnelle : $\Psi_\varepsilon^*(\hat{f},\sigma-n/r) = \sum_\eta u_{\varepsilon\eta}(\sigma)\Psi_\eta(f,-\sigma)$ (où f est dans l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(V)$).
Dans notre situation, les coefficients $u_{\varepsilon\eta}(\sigma)$ peuvent être calculés explicitement (c'est ce que nous faisons dans le deuxième chapitre).C'est une conséquence immédiate d'un calcul effectué dans **[Sa.-Fa.]** pour une fonction f à support dans $V \setminus S$ où S est le lieu singulier de l'espace préhomogène (V , T).

Les intégrales Ψ_ε peuvent être vues comme des vecteurs distribution de certaines représentations séries principales du groupe G .Modifions alors (suivant une idée qui remonte à E.M.Stein dans [**St.**]) la transformation de Fourier de telle manière qu'elle devienne une isométrie de $L^2(V, \frac{dx}{|detx|^{n/r}})$ et qu'elle commute à l'action de G.La matrice des coefficients de la relation fonctionnelle ainsi changée possède alors des propriétés interessantes , en particulier c'est une matrice unitaire sur la série MAN-Principale .

Soit π la représentation régulière de G dans $L^2(V, \frac{dx}{|detx|^{n/r}})$; à la décomposition de Plancherel de π correspond une décomposition de la transformation de Fourier modifiée ; il serait interessant d'étudier les rapports éventuels de cette décomposition avec la matrice des coefficients évoquée plus haut.

Notre troisième partie se place dans le cadre de l'espace préhomogène (G , V) . L'orbite Ω_0 a la propriété d'être un cône ; l'utilisation de la transformation de Laplace permet l'étude de la distribution zêta $Z_0(f,s) = \int_{\Omega_0} f(x)|detx|^{s-n/r}dx$; on peut ainsi calculer les pôles et la transformation de Fourier de $Z_0(.,s)$ .Nous rappelons ces résultats dûs à J.Faraut dans le premier chapitre .En particulier il se trouve que les pôles de $Z_0(.,s)$ sont exactement ceux de la fonction gamma du cône Ω_0 .

Nous considérons également dans le premier chapitre la transformée de Laplace F(z) (où z est dans le tube $\Omega + iV$) de la mesure $\delta(detx-1)\chi_\Omega(x)$ portée par l'ensemble des éléments de Ω de déterminant 1. Cette transformée de Laplace s'exprime à l'aide d'une fonction de Meijer (nous donnons en appendice certains faits relatifs aux fonctions de Meijer), nous le montrons simplement à l'aide de la transformation de Mellin . De plus F(z) vérifie une formule du produit, qui pour certaines algèbres V, redonne la formule du produit de la fonction de Mac Donald $K_{\frac{n-2}{2}}$.

Dans le deuxième chapitre nous donnons les pôles (ainsi que leur multiplicité) des distributions $Z_j(f,s) = \int_{\Omega_j} f(x)|detx|^{s-n/r}dx$.Il s'avère qu'une méthode dûe à A.Chaabouni se généralise ici parfaitement ; sans rentrer dans le détail des résultats, disons que les pôles sont exactement ceux de la fonction gamma du cône Ω_0 sauf dans les cas où V est l'algèbre des matrices (r×r) symétriques à coefficients réels avec r pair, et où V est l'algèbre $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{n-1}$avec n impair, cas où pour certaines valeurs de j il y a une "perte de la multiplicité" pour les pôles entiers négatifs.

La connaissance des pôles nous permet alors (via la transformation de Mellin) de donner l'image des applications moyennes M^j (où $M^jf(t) = \int f(x)\delta((detx-t)\chi_{\Omega_j}(x))$; nous suivons ici de près les idées de H.Rubenthaler et H.M.Maire (voir **[Ru.]**,**[Ma.]**).
Déterminer la transformée de Fourier d'une fonction invariante sous l'action d'un groupe de Lie ou qui se transforme suivant une représentation irréductible de dimension finie du groupe est un problème classique, résolu par exemple par les formules de Hankel et de Bochner-Hecke concernant les transformées de Fourier d'une fonction radiale et d'un produit d'une fonction radiale par un polynôme harmonique homogène . Dans **[Str.]** R.S.Strichartz généralise ces formules au cas de fonctions du type $f(x) = F(|Q(x)|^{1/2})$ où Q(x) est la forme quadratique $x_1^2 + ..+x_p^2 -x_{p+1}^2 -..- x_n^2$, le noyau de la transformation de Hankel généralisé qu'il obtient s'exprimant à l'aide des fonctions J, K et Y de Bessel.Dans le chapitre 3 nous abordons ce problème pour des fonctions du type $f(x) =F(|detx|)$; dans le cas où l'algèbre V est l'algèbre des matrices hermitiennes r×r avec r impair , la transformée de Fourier de f est du même type $\widetilde{F}(|dety|)$.Nous mettons en évidence pour la transformation $F \rightarrow \widetilde{F}$ un espace fonctionnel sur lequel elle opère comme involution et nous établissons une formule de Plancherel.On utilise pour cela la transformation de Mellin.Nous terminons par un analogue des relations de Bochner-Hecke.

PREMIERE PARTIE

ANALYSE HARMONIQUE SUR UN HYPERBOLOIDE

Bull. Sc. math., 2e série,
109, 1985, p. 407-429

ANALYSE SUR UN HYPERBOLOÏDE

PAR

BRUNO BLIND (*)

[Fac. Sc. et Techn. Monastir, Tunisie]

RÉSUMÉ. — On démontre un théorème du type Bochner-Schwartz pour certaines distributions de type positif sur l'hyperboloïde $O(n, 1)/O(1) \times O(n-1, 1)$ en utilisant les vecteurs distributions de certaines représentations. On établit également sur cet espace un théorème du type Paley-Wiener.

ABSTRACT. — Harmonic analysis on a hyperboloid.

We prove a Bochner-Schwartz's type Theorem for some distribution of positive type on the $O(n, 1)/O(1) \times O(n-1, 1)$ hyperboloïd using the distribution vectors of some representations. We also give for this space a Paley-Wiener's type Theorem.

Introduction

Dans [5], J. FARAUT obtient une représentation intégrale des distributions de type positif sur $U(p, q; \mathbb{F})$ ($\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ou $\mathbb{H}$) biinvariantes par $U(1, \mathbb{F}) \times U(p-1, q; \mathbb{F})$, suivant les distributions de type positif, biinvariantes et extrémales qu'il détermine. Une telle décomposition existe dans une situation plus générale (*voir* L. SCHWARTZ [12] et K. et L. MAURIN [8]), elle généralise le théorème de Bochner-Schwartz sur les distributions de type positif sur $\mathbb{R}^n$ (*cf.* [13]). Une question naturelle est de connaître le type de croissance des diverses mesures intervenant dans la représentation. Pour $p = 1$ la réponse découle des résultats de H. BARKER [2].

(*) Texte présenté par J. FARAUT, reçu le 6 mai 1985.
Classification matières AMS (MOS) 1980 : 43.
Vedettes matières : Théorème de Bochner-Schwartz. Théorème de Paley-Wiener.
Bruno BLIND, Faculté des Sciences et Techniques, TN-5019 Monastir Tunisie).

BULLETIN DES SCIENCES MATHÉMATIQUES — 0007-4497/85/04/407 23/$ 4.30
© Gauthier-Villars

Dans la première partie de cet article nous établissons des résultats analogues à ceux de [2] dans le cas $p \geqslant 2$, $q=1$ et $\mathbb{F}=\mathbb{R}$; nous nous servons essentiellement des idées de P. BONNET [3].

Dans une seconde partie nous donnons un théorème de Paley-Wiener. Ce sont les méthodes classiques (*cf.* GANGOLLI [6]) qui s'appliquent ici.

Notations

Dans cet article, G désignera le groupe $O(n, 1)$ $(n \geqslant 2)$, groupe des transformations conservant la forme :

$$[x, y]=x_1 y_1+\ldots+x_n y_n-x_{n+1} y_{n+1}, \qquad x \text{ et } y \text{ dans } \mathbb{R}^{n+1},$$

H est $O(1) \times O(n-1, 1)$ et K est $O(n) \times O(1)$.

On pose :

$$\rho=\frac{n-1}{2}.$$

L'espace homogène $X=G/H$ est muni d'une mesure G-invariante dx; on aura, par un choix convenable des mesures de Haar dg de G et dh de H :

$$\int_G f(g)\, dg=\int_X f^0(x)\, dx,$$

où :

$$\int_H f(gh)\, dh=f^0(gx^0), \qquad x^0=eH.$$

Soit $\Xi=T/\sim$, où T est le cône $\{x \in \mathbb{R}^{n+1}/[x, x]=0,\ x \neq 0\}$, et $\sim$ la relation : $x \sim y \Leftrightarrow x=\pm y$.

On note ξ^0 le point de Ξ défini par $(1, 0, \ldots, 0, 1)$.

Soit $B=\{k\xi^0,\ k \in K\}$; B est identifié à la sphère de $\mathbb{R}^n$, on appelera db la mesure sur B, invariante par K et de masse 1.

Tout point x de X peut s'écrire : $x=ka_t x^0$, avec $k \in K$ et $t \geqslant 0$, où :

$$a_t=\begin{pmatrix} \operatorname{ch} t & 0 & \operatorname{sh} t \\ 0 & I & 0 \\ \operatorname{sh} t & 0 & \operatorname{ch} t \end{pmatrix},$$

où I est la matrice identité de $\mathbb{R}^{n-1}$.

Soit $A=\{a_t/t\in\mathbb{R}\}$; le point $ka_t x^0$ ne dépend que de la classe kM_0 où $M_0=M\cap K$, M étant le centralisateur de A dans H.

Pour $s\in\mathbb{C}$, on définit les espaces $\mathscr{E}_s(\Xi)$ (*cf.* [5]) :

$$\mathscr{E}_s(\Xi)=\{f\in C^\infty(\Xi)/\forall g\in G,\ \forall t\in\mathbb{R},\ f(ga_t\xi^0)=e^{(s-\rho)t}f(g.\xi^0)\}.$$

Soit π_s la représentation de G dans $\mathscr{E}_s(\Xi)$ définie par :

$$\pi_s(g)f(\xi)=f(g^{-1}\xi),$$

A_s désignera l'opérateur d'entrelacement défini dans [5] (§ 6).

Enfin on pose :

$$\gamma(s)=\frac{\Gamma((s-\rho+n)/2)}{\Gamma((-s-\rho+n)/2)}.$$

1. Préliminaires

Soient $\mathscr{G}$ l'algèbre de Lie de G, $\mathscr{U}$ l'algèbre enveloppante de la complexifiée de $\mathscr{G}$. Pour une base $X_1,\ldots,X_r$ de $\mathscr{G}$, on pose :

$$\Delta=1-\textstyle\sum_{i=1}^r X_i^2\in\mathscr{U}.$$

Si $(\pi,\mathscr{H})$ est une représentation unitaire continue de G on notera $\mathscr{H}^\infty$ l'espace des vecteurs C^∞ et $\mathscr{H}^k$ $(k\in\mathbb{N})$ l'espace des vecteurs C^k. $\mathscr{H}^\infty$ est muni de la topologie habituelle (*cf.* CARTIER [4]), $\mathscr{H}^{-\infty}$ sera l'anti-dual de $\mathscr{H}^\infty$.

Notons Λ_π l'opérateur autoadjoint $\Delta_\pi^{1/2}$ où Δ_π est la fermeture de l'opérateur essentiellement autoadjoint $d\pi(\Delta)$. A l'aide de Λ_π^k on muni $\mathscr{H}^k$ d'une structure d'espace de Hilbert isométrique à $\mathscr{H}$ (*cf.* GOODMAN [7]), $\mathscr{H}^{-k}$ désigne l'anti-dual de $\mathscr{H}^k$.

LA MÉTHODE DE P. BONNET

Soit T une distribution sur G, biinvariante par H et de type positif. A T correspond une représentation unitaire continue π de G dans $\mathscr{H}$, sous-espace hilbertien de $\mathscr{D}'(X)$ (*cf.* [5]). De plus, il existe un élément de $\mathscr{H}^{-\infty}$, H-invariant, u tel que :

$$T(\varphi)=u(\pi_{-\infty}(\varphi)u),\qquad \varphi\in\mathscr{D}(G) \tag{1}$$

(u définit le « point distribution canonique » de π, au sens de SCHWARTZ [12]) où $\pi_{-\infty}$ est l'action de G sur $\mathscr{H}^{-\infty}$, déduite de π :

$$[\pi_{-\infty}(g)\,u](f)=u(\pi(g^{-1})(f)), \qquad g\in G, \quad f\in\mathscr{H}^{\infty}$$

et :

$$[\pi_{-\infty}(\theta)\,u](f)=u(\pi(\theta^*)\,f), \qquad \theta\in\mathscr{D}(G),$$

avec $\theta^*=\bar{\theta}$.

Comme $\mathscr{H}^{-\infty}=\bigcup_{k\in\mathbb{N}}\mathscr{H}^{-k}$, il existe j tel que u appartienne à $\mathscr{H}^{-j}$.

D'autre part, la représentation π peut être décomposée en représentations irréductibles (*cf.* [8], [12], [5]) :

$$(\pi,\ \mathscr{H})=\int_{\Lambda}^{\oplus}(\rho_\alpha,\ \mathscr{H}_\alpha)\,d\sigma(\alpha), \tag{2}$$

où l'on peut supposer que $\mathscr{H}_\alpha$ est un sous-espace hilbertien invariant de $\mathscr{D}'(X)$.

De plus (G, H) est un couple de Gelfand généralisé (*cf.* E. THOMAS [15], théorème E, exemple (b)), les représentations ρ_α et ρ_β sont non équivalentes pour $\alpha\neq\beta$.

On aura ([3], corollaire 1.4, *voir* aussi [9], corollaire CI) :

$$u=\int_{\Lambda}^{\oplus}u_\alpha\,d\sigma(\alpha), \qquad u_\alpha\in\mathscr{H}_\alpha^{-j} \text{ presque partout.}$$

On aura donc une condition sur la mesure σ :

$$\int_{\Lambda}\|u_\alpha\|^2_{\mathscr{H}_\alpha^{-j}}\,d\sigma(\alpha)<+\infty. \tag{3}$$

C'est cette condition que nous exploiterons.

Remarquons que pour presque tout α, u_α est H-invariant. En effet on a :

$$\forall h\in H, \quad \pi_{-\infty}(h)\,u=u,$$

donc $\forall h\in H$, $(\rho_\alpha)_{-\infty}(h)\,u_\alpha=u_\alpha$ presque partout.

Soit alors A une partie dénombrable dense de H; il existe Ω, sous-ensemble de Λ, σ-négligeable, tel que :

$$\forall h\in A, \quad \forall\alpha\in\Lambda\setminus\Omega, \qquad (\rho_\alpha)_{-\infty}(h)\,u_\alpha=u_\alpha.$$

La conclusion en découlera, à cause de la continuité des applications :

$$g \to (\rho_\alpha)_{-\infty}(g)\, u_\alpha(f), \qquad f \in \mathscr{H}^\infty.$$

Remarque. — Supposons qu'il existe $j \in \mathbb{N}$ et des $u_\alpha \in \mathscr{H}_\alpha^{-j}$, H invariants tels que :

$$\int_\Lambda \| u_\alpha \|^2_{\mathscr{H}_\alpha^{-j}} d\sigma(\alpha) < +\infty,$$

alors ([3], corollaire 1.4) l'élément :

$$u = \int_\Lambda^\oplus u_\alpha \, d\sigma(\alpha),$$

appartient à $\mathscr{H}^{-j}$ et sera H invariant; d'après la formule (1) il définira une distribution sur G biinvariante par H et de type positif.

La condition (3) est donc caractéristique de telles distributions.

2. Le théorème de Bochner-Schwartz

RAPPELS SUR LA DÉCOMPOSITION (2)

D'après [5] on peut prendre ici :

$$\Lambda = i\mathbb{R}^+ \cup]0, \rho] \cup \{ -2\nu - \rho - 1 / \nu \in \mathbb{N} \}.$$

La mesure σ se décomposant en σ_1, mesure de Radon positive sur $\mathbb{R}^+$, σ_2 mesure de Radon positive sur $[0, \rho]$, et affectant les points $-2\nu - \rho - 1$ du poids a_ν (où a_ν est un nombre positif).

Donnons pour $\alpha = i\nu$ et $\alpha = -(2\nu + \rho + 1)$, la description de $(\rho_\alpha, \mathscr{H}_\alpha)$ (*cf.* [5], p. 416 et suivantes).

$\alpha = i\nu$

$$\mathscr{H}_{i\nu} = \left\{ f : \Xi \to \mathbb{C} / \forall t \in \mathbb{R},\ f(g a_t \xi^0) = e^{(i\nu - \rho)t} f(g\xi^0) \right.$$

$$\left. \text{et} \int_B |f(b)|^2 db < +\infty \right\},$$

le produit scalaire étant celui de $L(B)$; $\rho_{i\nu}$ sera l'extension à $\mathscr{H}_{i\nu}$ de la représentation $\pi_{i\nu}$ définie dans les notations.

Le point distribution canonique de $(\rho_{i\nu}, \mathscr{H}_{i\nu})$ sera défini par :

$$v_{i\nu} : \quad \varphi \mapsto \frac{1}{\Gamma(i\nu+1-\rho)/\quad 2} \int_B |[x^0, b]|^{i\nu-\rho} \bar{\varphi}(b)\, db,$$

$\varphi \in C^\infty(B)$, l'expression étant définie par prolongement analytique.

Par la formule (1), $v_{i\nu}$ nous donnera la distribution sphérique $\zeta_{i\nu}$ (*cf.* [5] pour la définition des ζ_s).

$\alpha = -(2\nu+\rho+1)\,(\nu \in \mathbb{N})$

On considère $\mathscr{J}_\alpha$, l'adhérence dans $C^\infty(B)$ de $\mathscr{J}_\alpha = \sum_{l \geq 2\nu+2} \mathscr{Y}_l$ où $\mathscr{Y}_l$ sont les harmoniques sphériques de degré l. On munit $\mathscr{J}_\alpha$ du produit scalaire :

$$\langle f, g \rangle_\alpha = (-1)^{\nu+1} \lim_{s \to -\alpha} \gamma(-s) \int_B (A_s f)(b)\, \bar{g}(b)\, db,$$

$\mathscr{H}_\alpha$ sera le complété de $\mathscr{J}_\alpha$ pour ce produit scalaire et ρ_α l'extension de π_α à $\mathscr{H}_\alpha$.

Le point distribution canonique de $(\rho_\alpha, \mathscr{H}_\alpha)$ est défini par :

$$v_\alpha : \quad \varphi \mapsto \frac{1}{\Gamma(-\alpha+1-\rho)/\quad 2} \int_B |[x^0, b]|^{-\alpha-\rho} \bar{\varphi}(b)\, db, \quad \varphi \in \mathscr{J}_\alpha$$

en appliquant la formule (1), v_α donne la distribution sphérique $(-1)^{\nu+1}\zeta_{2\nu+\rho+1}$.

Remarque. — (1) Soit $(e_1^l, \ldots, e^l d_l)$ une base de $\mathscr{Y}_l$ orthonormée pour le produit scalaire induit par $L^2(B)$.

Si :

$$f = \sum_{l \geq 2\nu+2} \left(\sum_i a_i^l e_i^l\right) \qquad \text{et} \qquad g = \sum_{l \geq 2\nu+2} \left(\sum_i b_i^l e_i^l\right)$$

$(f, g \in C^\infty(B))$, en utilisant la relation :

$$A_s(e_i^l) = \alpha(s)\, e_i^l,$$

où :

$$\alpha_l(s) = \frac{\prod_{j=1}^{l} (\rho+j-1-s)}{\prod_{j=1}^{l} (\rho+j-1+s)}$$

(*cf.* [5], théorème 6.3) et en calculant $\lim_{s \to 2\nu+\rho+1} \gamma(-s)\alpha_l(s)$ on trouve pour $\alpha = -(2\nu+\rho+1)$:

$$\langle f, g \rangle_\alpha = 2\Gamma(2\nu+2)\frac{\Gamma(2+2+1)}{\Gamma(\nu+1)\Gamma(\nu+\rho+1)}\cdot$$

$$\times \sum_{l \geq 2+2} \frac{\Gamma(l-2\nu+1)}{\Gamma(2\nu+2\rho+1+l)} \left(\sum_i a_i \bar{b}_i^l\right).$$

(2) Ces calculs nous montrent que l'injection de $\bar{\mathcal{J}}_\alpha$ (muni de la topologie induite par $C^\infty(B)$) dans $\mathcal{H}_\alpha$ est continue.

(3) On peut voir aussi que les éléments de $\mathcal{H}_\alpha^\infty$ sont des fonctions de classe C^∞ ($\alpha = i\nu$, $\alpha = -(2\rho+\nu+1)$).

LE THÉORÈME

D'après [5], le sous-espace de $(\mathcal{H}_\alpha)^{-\infty}$ constitué par les vecteurs distributions H-invariants est de dimension 1.

Donc pour presque tout α :

$$u_\alpha = c_\alpha v_\alpha \qquad (c_\alpha \in \mathbb{C}).$$

Montrons que $|c_\alpha| = 1$ presque partout.

Appelons K (respectivement K_α) le noyau reproduisant associé au sous-espace hilbertien $\mathcal{H}$ (respectivement $\mathcal{H}_\alpha$), à la décomposition (2) correspond celle de K (*cf.* [15]) :

$$K = \int_\Lambda K_\alpha \, d\sigma(\alpha).$$

Identifiant, par le théorème des noyaux de Schwartz, les noyaux reproduisants à des distributions sur $\mathcal{D}(G \times G)$, on aura alors :

$$K(\varphi \otimes \theta) = \int_\Lambda K_\alpha(\varphi \otimes \theta)\, d\sigma(\alpha), \qquad \varphi \text{ et } \theta \text{ dans } \mathcal{D}(G).$$

Mais :

$$K(\varphi \otimes \bar{\theta}) = \langle \pi_{-\infty}(\varphi)u, \pi_{-\infty}(\theta)u \rangle$$

et :

$$\pi_{-\infty}(\theta)u = \int_\Lambda c_\alpha \cdot ((\rho_\alpha)_{-\infty}(\theta))\, u_\alpha \, d\sigma(\alpha),$$

d'où :

$$K(\varphi \otimes \theta) = \int_{\Lambda} |c_\alpha|^2 K_\alpha(\varphi \otimes \theta)\, d\sigma(\alpha).$$

On conclut par identification.

Soit alors :

$$p_j(\alpha) = \| v_\alpha \|^2_{(\mathscr{H}_\alpha)^{-j}}.$$

(3) entraîne :

$$\int_0^{\infty} p_j(i\nu)\, d\sigma_1(\nu) < +\infty, \tag{4}$$

$$\int_0^{1/2} p_j(s)\, d\sigma_2(s) < +\infty, \tag{4'}$$

$$\sum_{\nu \geqslant 0} a_\nu p_j(-2\nu - \rho - 1) < +\infty. \tag{5}$$

Notons Λ_α l'opérateur $(\Delta_{\rho_\alpha})^{1/2}$ considéré dans les préliminaires; on aura pour un certain élément B_α de $\mathscr{H}^j_\alpha$:

$$p_j(\alpha) = \| \Lambda^j_\alpha B_\alpha \|^2_{\mathscr{H}_\alpha}.$$

Faisons les calculs pour $n \geqslant 3$ (les changements pour $n=2$ sont mineurs) on a (*cf.* [5], appendice *B*) au sens des distributions :

$$v_\alpha(f) = \sum_{l \text{ pair}} c_l \beta_l(s)\, \omega_l(\bar{f}),$$

avec :

$$s = \alpha \quad \text{si} \quad \alpha = i\nu,$$

$$s = -\alpha \quad \text{si} \quad \alpha = -2\nu - \rho - 1,$$

où ω_l est le l-ième polynôme de Gegenbauer d'indice $(n-2)/2$ et avec :

$$\omega_l(\bar{f}) = \int_B \bar{f}(b)\, \omega(b)\, db,$$

$$\beta_l(s) = \frac{(s-\rho)(s-\rho-2)\ldots(s-\rho-l+2)}{\Gamma(\alpha-\rho+l+n)/2)} \cdot 2^{-l/2},$$

$$c_l = \frac{2^{n-2}\pi^{(n-3)/2}}{\Gamma(n-2)} \times \Gamma^2\left(\frac{n-2}{2}\right) \cdot \left(l + \frac{n+2}{2}\right).$$

Reprenons maintenant notre opérateur Δ, par un choix convenable de la base $X_1, \ldots, X_r$ on peut poser :

$$\Delta = 1 - (\Omega - 2\omega),$$

où Ω est le Casimir de G et où ω est le Casimir de K (pour la restriction de la forme de Killing de $\mathfrak{g}$ à l'algèbre de Lie k de K).

On a (*cf.* [5], proposition 5.2) :

$$d\rho_\alpha(\Omega) f = \frac{1}{2(n-1)}(\alpha^2 - \rho^2) f, \qquad f \in \mathscr{H}_\alpha \cap C^\infty(B).$$

D'autre part :

PROPOSITION. — *Pour* $f \in \mathscr{H}_\alpha \cap C^\infty(B)$.
On a :

$$d\rho_\alpha(\omega) f = -\frac{1}{2(n-1)} \Delta_B f,$$

où Δ_B *est le laplacien de* B *et pour* $\alpha = i\nu$ *ou* $-(2\nu + \rho + 1)$.

Preuve. — On sait (*cf.* WARNER [16], 2.3.3, exemple 2) que ω appartient au centre de l'algèbre enveloppante de k. De plus la restriction de ρ_α à K se réduit à l'action habituelle de K. En utilisant pour $\alpha \neq i\nu$ la remarque 2 du paragraphe 2, on aura dans tous les cas :

$$d\rho_\alpha(\omega) f = c\,\Delta_B f, \qquad f \in \mathscr{H}_\alpha \cap C^\infty(B),$$

c étant une constante.

On détermine la constante c en comparant la métrique habituelle de B (identifié à la sphère de $\mathbb{R}^n$) et elle induite par la restriction à k de la frome de Killing de $\mathfrak{g}$. On trouve :

$$c = -\frac{1}{2(n-1)}.$$

De la remarque 1 du paragraphe 2 on déduit alors :

$$p_j(-(2\nu + \rho + 1)) = \sum_{l \text{ pair}, l \geq 2\nu+2} c_l \left| \beta_l(2\nu + \rho + 1) \right|^2 \delta_l(\nu) A_l(\nu),$$

avec :

$$\delta_l(\nu)=\frac{1}{2}\,\frac{\Gamma(2\nu+2\rho+1+l).\Gamma(\nu+1)\,\Gamma(\nu+\rho+1)}{\Gamma(l-2\nu+1).\Gamma(2\nu+2)\,\Gamma(2\nu+2\rho+1)},$$

$$A_l(\nu)=\left(1-\frac{(2\nu+\rho+1)^2-\rho^2}{2(n-1)}+\frac{2l(l+n-2)}{2(n-1)}\right)^{-l}.$$

Après simplifications :

$$c_l\,|\beta_l(2\nu+\rho+1)|^2 = K_1\cdot\left(\frac{\Gamma(\nu+(3/2))\,\Gamma((l/2)-\nu-(1/2))}{\Gamma(\nu+(l/2)+[(n+1/2)])}\right)^2 \times\frac{\Gamma(n-2+l)}{l!}\cdot\left(l+\frac{n-2}{2}\right),$$

où K_1 est un coefficient non nul ne dépendant que de n.

Cela nous donne pour le terme $c_l\,|\beta_l(2\nu+\rho+1)|^2\,\delta_l(\nu)$:

$$K_2\cdot\left(l+\frac{n-2}{2}\right).(2\nu+2\rho+1).\frac{\Gamma(\nu+(3/2))}{\Gamma(\nu+\rho+(3/2))} \times\frac{\Gamma(n-2+l)}{\Gamma(l+1)}\,\frac{\Gamma((l/2)-\nu-(1/2))}{\Gamma((l/2)-\nu)}\,\frac{\Gamma(\nu+(l/2)+(n/2))}{\Gamma(\nu+(l/2)+(n/2)+(1/2))},$$

où K_2 est comme K_1 et où l'on s'est servi de l'identité :

$$\frac{\Gamma(s)}{\Gamma(2s)}=\sqrt{\pi}\,\frac{2^{1-2s}}{\Gamma(s+(1/2))}.$$

En utilisant :

$$\frac{\Gamma(s+a)}{\Gamma(s)}\sim e^{a\log s},\qquad |s|\to+\infty,$$
$$|\arg s|\leqslant\pi-\delta,\qquad \delta>0,$$

(où a est fixe et log la détermination principale du logarithme).

La condition (5) sera équivalente à :

$$\sum_{\nu\geqslant 0}a_\nu(2\nu+2\rho+1)\left(\nu+\rho+\frac{3}{2}\right)^{-\rho}E(\nu)<+\infty,$$

où :

$$E(\nu)=\sum_{l\geq 2\nu+2,\, l \text{ pair}}\left(\nu+\frac{l}{2}+\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\right)^{-1/2}\left(\frac{l}{2}-\nu\right)^{-1/2} l^{n-2} A_l(\nu),$$

ce qui se réduit à :

$$\sum_{\nu\geq 0} a_\nu (1+\nu)^{1-\rho} \sum_{l\geq 2\nu+2,\, l \text{ pair}} (l^2-4\nu^2)^{-1,2}\, l^{n-2}\,(l^2-2\nu^2)^{-j} < +\infty.$$

Mais :

$$\sum_{l\geq 2\nu+2,\, l \text{ pair}} (l^2-4\nu^2)^{-1,2}\,(l^2-2\nu^2)^{-j} l^{n-2} \geq (4\nu+4)^{-1/2}\,(2\nu^2+4\nu+4)^{-j}(2\nu+2)^{n-2}$$

et :

$$\sum_{l\geq 2\nu+2} (l^2-4\nu^2)^{-1/2}\,(l^2-2\nu^2)^{-j} l^{n-2} \leq 2^j \times \left(\sum_{l\geq 2\nu+2}\frac{l^{2(n-2)}}{l^{4j}}\right)^{1/2}\cdot\left(\sum_{l\geq 2\nu+2}\frac{1}{l^2-4\nu^2}\right)^{1/2}.$$

La comparaison des séries avec des intégrales nous donne alors :

$$\exists j\in\mathbb{N},$$
$$\sum_{\nu\geq 0} a_\nu p_j(-2\nu-\rho-1) < +\infty \quad\Leftrightarrow\quad \exists N\in\mathbb{N},$$
$$\sum_{\nu\geq 0}\frac{a_\nu}{(1+\nu)^N} < +\infty.$$

Un calcul tout à fait analogue pour la condition (4) nous donne :

$$\exists j\in\mathbb{N},$$
$$\int_0^\infty p_j(i\nu)\,d\nu_1(\nu) < +\infty \quad\Leftrightarrow\quad \exists N\in\mathbb{N},$$
$$\int_0^\infty \frac{d\sigma_1(\nu)}{(1+\nu)^N\left|\Gamma((\rho+i\nu)/2)\right|^2} < +\infty.$$

Enfin, faisant des estimations analogues pour les $p_j(s)$ ($s\in[0,\rho]$) on voit que la condition (4′) est automatiquement vérifiée pour un j convenable.

Nous pouvons donc énoncer le théorème :

THÉORÈME A. — *Les distributions T sur G qui sont de type positif et biinvariantes par H sont caractérisées par la décomposition :*

$$T(\varphi)=\int_0^{\infty}\zeta_{i\nu}(\varphi)\,d\sigma_1(\nu)+\int_0^{1/2}\zeta_s(\varphi)\,d\sigma_2(\nu)$$
$$+\sum_{\nu\geq 0}a_\nu(-1)^{\nu+1}\zeta_{2\nu+\rho+1)}(\varphi);\qquad \varphi\in\mathscr{Q}(X),$$

avec :

- $a_\nu\geq 0$ *et* $\sum_{\nu\geq 0}a_\nu(1+\nu)^N<+\infty$, *pour un certain* N_1 *de* $\mathbb{N}$;
- σ_1 *mesure de Radon positive sur* $]0,\ +\infty[$ *telle que* $\exists N_2\in\mathbb{N}$:

$$\int_0^{\infty}\frac{d\sigma_1(\nu)}{(1+\nu)^{N2}\left|\Gamma((\rho+i\nu)/2)\right|^2}<+\infty;$$

- σ_2 *mesure de Radon positive sur* $[0,\ \rho]$.

3. La transformée de Fourier sur X

Dans [5] (*voir* aussi [14], [11]) on définit la transformée de Fourier d'une fonction φ de $\mathscr{Q}(X)$ par :

$$\hat{\varphi}(\xi,\ s)=\frac{1}{\Gamma((s-\rho+1)/2)}\int_X\left|[x,\ \xi]\right|^{s-\rho}\varphi(x)\,dx,$$
$$(\xi,\ s)\in\Xi\times\mathbb{C}.$$

L'expression étant définie par prolongement analytique sur $\mathbb{C}$.

On a (*cf.* [5]) :

$$(\mathscr{P})\qquad\begin{aligned}&\forall s\in\mathbb{C},\qquad \xi\to\hat{\varphi}(\xi,\ s)\text{ appartient à }\mathscr{E}_s(\Xi);\\ &A_s(\hat{\varphi}(.,\ -s))=\gamma(s)\,\hat{\varphi}(.,\ s),\qquad s+\rho\notin\mathbb{Z},\\ &\widehat{\tau_g\varphi}(.,\ s)=\pi_s(g)\,(\hat{\varphi}(.,\ s))\\ &(\tau_g\varphi(x)=\varphi(g^{-1}.x),\ g\in G).\end{aligned}$$

De plus on a :

$$\widehat{\Box\varphi}(.,\ s)=(s^2-\rho^2)\,\hat{\varphi}(.,\ s),$$

où $\Box$ est le pseudo-laplacien sur X (*cf.* [5], p. 377).

Pour cette transformation de Fourier, on a une formule de Plancherel ([15], [11], [5], *voir* aussi la bibliographie de [5]) :

$$L^2(X) = \int_\Lambda^\oplus \mathscr{H}_\alpha \, d\sigma(\alpha), \tag{6}$$

la mesure σ étant portée par $i\mathbb{R}^+ \cup \{-(\rho+2\nu+1)/\rho+2\nu+1>0\}$ la « partie continue » étant :

$$d\sigma_1(\nu) = \frac{d\nu}{|c(i\nu)|^2} \quad \frac{K}{2\pi} \qquad \text{où} \quad K = \frac{4\pi^{\rho+1}}{\Gamma(1/2)\Gamma(n/2)}$$

et le point $\rho+2\nu+1$ étant affecté du poids :

$$a_\nu = K.(-1)^{\nu+1} \operatorname{Res}\left(\frac{1}{c(s)c(-s)}, \rho+2\nu+1\right)$$

(*voir* [5], p. 409 pour la fonction $c(s)$).

Cela correspond à la décomposition de la représentation de G dans $L^2(X)$:

$$\pi(g) f(x) = f(g^{-1}.x),$$

la distribution biinvariante par H, de type positif, associée est :

$$\varphi \mapsto \int_H \varphi(h)\, dh.$$

Par le théorème de régularité elliptique (*cf.* aussi [10]), $L^2(X)^\infty \subset C^\infty(X)$ (l'inclusion étant continue). D'après [1], proposition 2.2 il en résulte que le vecteur distribution correspondant est défini par :

$$u : \quad L^2(X)^\infty \to \mathbb{C},$$
$$f \mapsto \bar{f}(x^0)$$

Remarque. — Dans (6), l'isométrie est la transformée de Fourier : pour $\varphi \in \mathscr{D}(X)$, on a :

$$\varphi_\alpha = \hat{\varphi}(.,\alpha), \qquad \alpha = i\nu \quad \text{ou} \quad -(2\nu+\rho+1).$$

FORMULE D'INVERSION

PROPOSITION. — *Soit* $f \in L^2(X)^\chi$, *alors* :

$$\check{f}(x) = \int_\Lambda^\oplus c_\alpha v_\alpha (\rho_\alpha(g^{-1}) f_\alpha)\, d\sigma(\alpha), \qquad \text{où} \quad g.x^0 = x,$$

où :

$$c_{i\nu} = 1 \qquad \text{et} \qquad c_{-(\rho+2\nu-1)} = (-1)^{\nu+1}.$$

Preuve. — Il suffit d'établir la formule pour $x = x^0$.

On a (*cf.* § 2) :

$$u = \int_\Lambda^\oplus c_\alpha v_\alpha\, d\sigma(\alpha); \qquad |c_\alpha| = 1 \text{ presque partout.}$$

Soit $\theta \in \mathcal{Q}(G)$, on a :

$$\pi_{-\chi}(\theta)\, u = \int_\Lambda^\oplus c_\alpha [(\rho_\alpha)_{-\chi}(\theta)]\, v_\alpha\, d\sigma(\alpha).$$

Mais vue la forme de u donnée plus haut :

$$\pi_{-\chi}(\theta)\, u = \theta^0$$

où :

$$\theta^0(x) = \int_H \theta(g.h)\, dh \qquad (x = gx^0)$$

et d'autre part :

$$[(\rho_{i\nu})_{-\infty}(\theta)]\, v_{i\nu} = (\theta^0)\,\hat{}\,(.,\, i\nu),$$
$$[(\rho_\alpha)_{-\infty}(\theta)]\, v_\alpha = (-1)^{\nu+1} (\theta^0)\,\hat{}\,(.,\, \alpha)$$

si $\alpha = -(2\nu+\rho+1)$.

On en déduit la proposition en identifiant les composantes des deux membres.

PROPRIÉTÉ DE CROISSANCE

PROPOSITION. — *Soit* φ *un élément de* $\mathscr{D}(X)$, *il existe alors un réel positif* A, *tel que* $\forall \varepsilon > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists c(\varepsilon, N)$ *tel que :*

$$(\mathscr{C}) \qquad \forall s \in \mathbb{C}_\varepsilon^+, \quad |\hat{\varphi}(b, \sigma + i\tau)| \leqslant \frac{c(\varepsilon, N)\, A^\sigma}{(1+\sigma^2+\tau^2)^N \left|\Gamma\left((\sigma+1-\rho+i\tau)/2\right)\right|}, \quad \forall b \in B,$$

où :

$$\mathbb{C}_\varepsilon^+ = \{\sigma + i\tau \in \mathbb{C} / \sigma \geqslant 0, \; |\sigma + i\tau - \rho + l| \geqslant \varepsilon, \; l = 1, 2, 3, \ldots\}.$$

Remarque. — Cette propriété de croissance n'est pas la meilleure que l'on puisse obtenir.

Preuve. — C'est évident pour $\operatorname{Re} s \geqslant \rho$ en utilisant la relation :

$$\widehat{\Box \varphi}(b, s) = (s^2 - \rho^2)\, \hat{\varphi}(b, s).$$

D'autre part :

$$\int_X |[x, b]|^{s-\rho} \varphi(x) = \int_X |[x, \xi^0]|^{s-\rho} (\tau_{k^{-1}} \varphi)(x)\, dx$$

(avec $k\xi^0 = b$, $k \in K$).

Il existera un compact L tel que :

$$\forall k \in K, \quad \operatorname{Supp}(\tau_k \varphi) \subset L.$$

On peut donc supposer que $b = \xi^0$.

On a :

$$\int_X |[x, \xi^0]|^{s-\rho} \varphi(x)\, dx = \int_X ([x, \xi^0]_+)^{s-\rho} \varphi(x)\, dx + \int_X ([x, \xi^0]_-)^{s-\rho} \varphi(x)\, dx,$$

avec $A_+ = A$ si $A \geqslant 0$, 0 sinon et $A_- = -A$ si $A \leqslant 0$, 0 sinon.

Considérons la première intégrale, en utilisant un recouvrement fini convenable du compact L, on se ramène à l'étude de l'intégrale :

$$\int_U ([x, \xi^0]_+)^{s-\rho} \varphi(x)\, dx,$$

où dans U, il existe un changement de coordonnées $y_1, \ldots, y_n$ contenant $[x, \xi^0]_-$, à jacobien positif; l'intégrale se ramènera donc à :

$$\int_0^c y^{s-\rho} \psi(y)\, dy \qquad \text{où} \quad \psi \text{ est } C^\infty,$$

d'où la propriété de croissance en utilisant les propriétés classiques de la transformation de Mellin. On procède d'une manière analogue pour la deuxième intégrale.

•

LES INTÉGRALES D'EISENTEIN

Indexons par $p \in \mathbb{N}$ les représentations unitaires irréductibles de classe 1 du couple $(SO(n), SO(n-1))$, pour $n=2$, on prendra le couple $\left(O(2), \left\{\mathrm{Id}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right\}\right)$, et soit ω^p la fonction sphérique associée.

Posons pour $\mathrm{Re}\, s \geqslant \rho$:

$$\varphi^p(x, s) = \frac{1}{\Gamma\left(\dfrac{s-\rho+1}{2}\right)} \int_B P_s(x, b)\, \omega^p(b)\, db, \qquad x \in X.$$

Cette expression possède un prolongement analytique sur $\mathbb{C}$ et vérifie l'équation (*cf.* [11], Lemme 5 par exemple) :

$$\square\, \varphi^p(x, s) = (s^2 - \rho^2)\, \varphi^p(x, s). \tag{7}$$

On vérifie d'autre part que :

$$\varphi^p(k a_t x^0, s) = \omega^p(k \,.\, \xi^0)\, \varphi^p(a_t x^0, s).$$

Posons alors $\varphi^p(t, s) = \varphi^p(a_t x^0, s)$; utilisant (7) et écrivant $\square$ dans le système (k, t) (*cf.* [5], p. 403), on trouve que $\varphi^p(t, s)$ vérifie :

$$\frac{d^2 f}{dt^2} + (n-1)\,\mathrm{th}\, t \frac{df}{dt} + p(p+n-2)\frac{f}{\mathrm{ch}^2 t} = (s^2 - \rho^2)\, f. \tag{8}$$

On peut appliquer à l'équation (8) la méthode classique de GANGOLLI [6] on aura :

$$\varphi^p(t, s) = a(p, s)\,\Phi^p(t, s) + b(p, s)\,\Phi^p(t, -s), \qquad s \notin \mathbb{Z}, \tag{9}$$

où $\Phi^p(t, s)$ est, pour $s \in \mathbb{N}^*$, une solution de (8) sur $]0, +\infty[$; elle s'écrit :

$$\Phi^p(t, s) = e^{(s-\rho)t} \sum_{\mu=0}^{\infty} T_\mu(s)\, e^{-\mu t}.$$

La série convergeant uniformément dans tout domaine $[\tau, +\infty[\times F_\varepsilon$ où τ est >0 et :

$$F_\varepsilon = \{ z \in \mathbb{C} / \forall k \in \mathbb{N}^* \mid s-k \mid \geqslant \varepsilon \}.$$

Il résulte du théorème 7.4 de [5] et des calculs effectués dans [5], p. 404 et 405 que :

$$\varphi^p(t, -s) = \gamma(s)\,\alpha_p(-s)\,\varphi^p(t, s),$$

où la fonction $\alpha_p(s)$ a été définie dans la remarque 1 du paragraphe 2.

En utilisant la convergence dominée, on a pour $\operatorname{Re} s > \rho$:

$$\lim_{t \to +\infty} e^{(\rho - s)t}\, \varphi^p(t, s) = c(s)\,\alpha_p(s)$$

(*cf.* [5], p. 409).

On déduit alors de tout ceci :

$$a(p, s) = c(s)\,\alpha_p(s) \qquad \text{et} \qquad b(p, s) = \gamma(-s)\,c(-s).$$

Remarque. — De (9) on déduit que $s \to \Phi^p(t, s)$ possède en les points de $\mathbb{N}^*$ des pôles d'ordre inférieur ou égal à un entier m ne dépendant pas de t. Soit $r \in \mathbb{N}^*$, on aura facilement, des propriétés de $(t, s) \to \Phi^p(t, s)$:

$$\Phi^p(t, s) = \frac{a_m(t)}{(s-r)^m} + \ldots + \frac{a_1(t)}{(s-r)} + v(t, s),$$

où les $a_i(t)$ sont C^∞ et où les différentes dérivées de v par rapport à t sont holomorphes en s.

Soit alors un t_0 tel que $a_m(t_0) \neq 0$, on aura d'après l'équation (8) :

$$\frac{L\,a_m(t_0)}{(s-r)^m} = (s^2 - \rho^2)\,\frac{a_m(t_0)}{(s-r)^m}.$$

On en déduit que $s \to \Phi^p(t, s)$ admet un prolongement holomorphe en tout point $r \in \mathbb{N}^*$, $r \neq \rho$.

4. Un théorème de Paley-Wiener

Soit $(\psi(.,\alpha))$ un élément de $\int_\Lambda^\oplus \mathscr{H}_\alpha d\sigma(\alpha)$, nous avons le théorème :

THÉORÈME B. — *Supposons que :*

$- \ (\psi(.,\alpha)) \in \int_\Lambda^\oplus (\mathscr{H}_\alpha)^\infty d\sigma(\alpha).$

$- \ \alpha \to \psi(b, \alpha)$ *se prolonge en une fonction entière sur* $\mathbb{C}$ *qui vérifie les trois conditions* $(\mathscr{P})$ *et la propriété de croissance* $(\mathscr{C})$.

Alors il existe φ, *élément de* $\mathscr{Q}(X)$, *tel que :*

$$\hat{\varphi}(.,s) = \psi(.,s)$$

Preuve. — D'après [9], théorème C, il existera un élément f de $L^2(X)^\infty$ tel que :

$$(\hat{f}(.,\alpha)) = (\psi(.,\alpha)).$$

Cette fonction f est de classe C^∞ (puisque $L^2(X)^\infty \subset C^\infty(X)$).

Il suffit de montrer que le support de f est compact, pour cela on montre que $f(a_t x^0) = 0$ pour $t > \log A$ (où A est la constante qui intervient dans la condition de croissance $(\mathscr{C})$). Le théorème en découlera en considérant l'action du sous-groupe K.

D'après un théorème de [16] (théorème 4.4.2.1) on a :

$$f = \sum d(\delta) f_\delta \quad \text{dans} \quad L^2(X)^\infty,$$

où la somme est étendue sur les classes d'équivalence des représentations unitaires irreductibles de dimension finie de $SO(n)$ ($O(2)$ pour $n=2$), et où $d(\delta)$ est la dimension de δ avec :

$$f_\delta(x) = \int \overline{\xi_\delta(k)} f(k^{-1}.x)\, dk$$

(l'intégrale étant prise sur $SO(n)$ ($O(2)$ pour $n=2$)) où $\xi_\delta(k)$ est le caractère de δ.

Faisant $x = a_t x^0$, il viendra alors :

$$f(a_t x^0) = \sum_{p \geq 0} d(p) f_p(a_t x^0),$$

avec :

$$f_p(a_t x^0) = \int f(k^{-1}.x)\, \omega^p(k \xi^0)\, dk,$$

ω^p étant défini comme le paragraphe 3.

On va montrer que $f_p(a_t x^0) = 0$ pour $t > \log A$.

Pour des raisons de commodité, introduisons pour la suite les notations suivantes :

$$\beta_\nu = 2\nu + \rho + 1, \qquad d_\nu = \operatorname{Res}\left(\frac{1}{c(s)\, c(-s)}, \beta_\nu\right).$$

De l'égalité :

$$\hat{f}_p(.,\, s) = \int (\tau_k f\hat{)}(.,\, s)\, \omega^p(k \xi^0)\, dk$$

et de :

$$\frac{1}{\Gamma(s-\rho+1)\, 2} \int_B |[x^0,\, b]|^{s-\rho} \hat{f}_p(a_t b,\, -s)\, db = \varphi^p(t,\, s)\, \psi^p(-s),$$

où :

$$\psi^p(s) = \int_B \psi(b,\, s)\, \omega^p(b)\, db$$

et en utilisant la formule d'inversion il résulte que :

$$f_p(a_t x^0) = K \int_0^\infty \psi^p(-i\nu)\, \varphi^p(t,\, i\nu)\, \frac{d\nu}{|c(i\nu)|^2} + K \sum_{\nu \beta_\nu \geq 0} d_\nu\, \psi^p(\beta_\nu)\, \varphi^p(t,\, -\beta_\nu).$$

D'après la relation (9) on a :

$$\varphi^p(t,\, i\nu)\, \psi^p(-i\nu) = \psi^p(-i\nu)\, [c(i\nu)\, \alpha_p(i\nu)\, \Phi^p(t,\, i\nu) + \gamma(-i\nu)\, c(-i\nu)\, \Phi^p(t,\, -i\nu)].$$

Or on déduit de la deuxième des propriétés ($\mathscr{P}$) que :

$$\psi^p(i\nu)\,\alpha_p(-i\nu)=\psi^p(-i\nu)\,\gamma(-i\nu),$$

d'où :

$$\int_0^{\infty}\frac{d\nu}{|c(i\nu)|^2}\varphi^p(t,\,i\nu)\,\psi^p(-i\nu)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\nu}{c(i\nu)}\Phi^p(t,\,-i\nu)\,\psi^p(-i\nu)\,\gamma(-i\nu).$$

Pour la « partie discrète », on emploie la relation (9) et (*cf.* [5], p. 405) :

$$p\geqslant 2\nu+2 \quad\Rightarrow\quad \psi^p(-\beta_\nu)=0,$$

d'autre part on remarque que :

$$p\geqslant 2\nu+2 \quad\Rightarrow\quad \alpha_p(\beta_\nu)=0,$$

d'où :

$$\sum_{\beta_\nu\geqslant 0} d_\nu\,\psi^p(\beta_\nu)\,\varphi^p(t,\,-\beta_\nu)=\sum_{\beta_\nu\geqslant 0} d_\nu\,[\psi^p(s)\,\gamma(s)\,c(s)\,\Phi^p(t,\,s)]_{s=-\beta_\nu}.$$

On applique maintenant la méthode classique : on intègre la fonction méromorphe :

$$\frac{1}{c(s)}\Phi^p(t,\,-s)\,\gamma(-1)\,\psi^p(-s),$$

le long d'un contour que l'on déforme en suite. On aura :

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\nu}{c(R+i\nu)}\Phi^p(t,\,-R-i\nu)\,\gamma(-R-i\nu)\,\psi^p(-R-i\nu)$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\nu}{c(i\nu)}\Phi^p(t,\,i\nu)\,\gamma(-i\nu)\,\psi^p(-i\nu)$$

$$+\sum\Phi^p(t,\,\lambda_k)\,\psi^p(-\lambda_k)\,\mathrm{Res}\left(\frac{\gamma(-s)}{c(s)},\,\lambda_k\right),$$

la somme étant étendue aux pôles de $\gamma(-s)/c(s)$ situés dans notre domaine $0<\mathrm{Re}\,s<R$. Pour obtenir cette dernière formule on s'est servi des inégalités :

$$|\Phi^p(t,\,-\sigma-i\tau)|\leqslant C_1\,e^{-(\sigma+\rho)t},$$

$$|\psi^p(\sigma+i\tau)|\leqslant C_2\frac{(1+\sigma^2+\tau^2)^{-N}A^\sigma}{|\Gamma((\sigma+1-\rho+i\tau)/2)|},$$

$$\frac{1}{|c(\sigma+i\tau)|}\leqslant C_3\left|\Gamma\left(\frac{\sigma-\rho+n+i\tau}{2}\right)\right|(1+\sigma^2+\tau^2)^\rho.$$

Si l'on utilise maintenant la formule ([5], p. 427) :

$$c(s)\,c(-s) = -\frac{\Gamma(n/2)^2}{\pi}\cdot 2^{2\rho}\frac{\cos\pi((\rho+s)/2)\cos\pi((\rho-s)/2)}{\Gamma((\rho+s)/2)\,\Gamma\left(\left(\frac{\rho-s}{2}\right)\right)s\sin\pi s},$$

on trouve après considération des pôles de $c(s)c(-s)$ et de $\gamma(-s)/c(s)$ que nous avons :

$$f_p(a_t x^0) = 2\pi K\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\lambda}{c(R+i\lambda)}\Phi^p(t,-R-\lambda)\,\psi^p(R+i\lambda)\,\alpha_p(R+i\lambda),$$

d'où en employant les mêmes inégalités que précédemment :

$$\forall R,\quad |f_p(a_t x^0)| \leqslant C(N)\,e^{-Rt}e^{-\rho t}A^R\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\lambda}{(1+R^2+\lambda^2)^{N-\rho}}.$$

Ce qui entraîne $f_p(a_t x^0)=0$ pour $t>\log A$.

Cela achève la démonstration.

Remarque. — On peut donner des précisions concernant la première hypothèse dans le théorème *B*.

Si $f\in L^2(X)^\chi$, alors, pour tout n entier, on a :

$$\pi(\Omega^n)\,f\in L^2(X)^\chi,$$

d'où ([9], théorème *C*) :

$$(\rho_\alpha(\Omega^n)\,f_\alpha)\in\int_\Lambda^\oplus \mathscr{H}_\alpha\,d\sigma(\alpha)$$

avec $f_\alpha\in(\mathscr{H}_\alpha)^\chi$ presque partout; cela donne :

$$((\alpha^2-\rho^2)^n\,f_\alpha)\in\int_\Lambda^\oplus \mathscr{H}_\alpha\,d\sigma(\alpha).$$

De même, en considérant $\pi(\omega^n)\,f$ on obtient :

$$(\Delta_B^n\,f_\alpha)\in\int_\Lambda^\oplus \mathscr{H}_\alpha\,d\sigma(\alpha).$$

Réciproquement si :

$$\forall n,\quad \forall m,\qquad (\alpha^2-\rho^2)^n\,\Delta_B^m\,f_\alpha\in\int_\Lambda^\oplus \mathscr{H}_\alpha\,d\sigma(\alpha),$$

avec :

$$f_2 \in (\mathscr{H}_2)^\infty.$$

Alors :

$$(f_2) \in L^2(X)^\infty.$$

En effet la condition entraînera :

$$\forall m, \quad (f_2) \in \mathrm{Dom}\,(\overline{\pi(\Delta)}^m), \qquad \Delta = 1 - (\Omega - 2\omega).$$

le résultat découlera alors du théorème de Nelson (*cf.* [16], *théorème* 4.4.4.5).

BIBLIOGRAPHIE

[1] AARNES (J. F.). – Distributions of positive type and representations of Lie groups, *Math. Annalen*, t. 240, 1979, p. 141-156.

[2] BARKER (W. H.). – The spherical Bochner theorem on semi-simple Lie groups, *J. of functional Analysis*, t. 20, 1975, p. 179-207.

[3] BONNET (P.). – Transformation de Fourier des distributions de type positif sur un groupe de Lie unimodulaire, *J. of functional Analysis*, t. 55, 1984, p. 220-246.

[4] CARTIER (P.). – Vecteurs différentiables dans les représentations unitaires des groupes de Lie, *Séminaire Bourbaki* 1974/1975, exposé n° 454, p. 20-34. – Berlin, Heidelberg, New York, Springer-Verlag, 1976 (*Lectures Notes in Mathematics*, 514).

[5] FARAUT (J.). – Distributions sphériques sur les espaces hyperboliques, *J. Math. pures et appl.*, t. 58, 1979, p. 369-444.

[6] GANGOLLI (R.). – On the Plancherel formula and the Paley-Wiener theorem for spherical functions on semisimple Lie groups, *Annals of Math.* Series 2, t. 93, 1971, p. 150-165.

[7] GOODMAN (R.). – Elliptic and subelliptic estimates for operators in an enveloping algebra, *Duke math. J.*, t. 47, 1980, p. 819-833.

[8] MAURIN (K.) et MAURIN (L.). – Universelle umhüllende Algebra einer lokal kompakten Gruppe und ihre selbstadjungierte Darstellungen. Anwendungen, *Studia Math.*, Warszawa, t. 24, 1964, p. 227-243.

[9] PENNEY (R.). – Abstract Plancherel theorems and a Frobenius reciprocity theorem, *J. of functional Analysis*, t. 18, 1975, p. 177-190.

[10] POULSEN (N. S.). – On C^∞-vectors and intertwining bilinear forms for representations of Lie groups, *J. of functional Analysis*, t. 9, 1972, p. 87-120.

[11] ROSSMANN (W.). – Analysis on real hyperbolic spaces, *J. of functional Analysis*, t. 30, 1978, p. 448-477.

[12] SCHWARTZ (L.). – Sous-espaces hilbertiens et noyaux associés; applications aux représentations des groupes de Lie, *Deuxième colloque sur l'analyse fonctionnelle*, CBRM (Liège, 1964), p. 153-163. — Louvain, Librairie universitaire; Paris, Gauthier-Villars, 1964.

[13] SCHWARTZ (L.). – *Théorie des distributions*, Paris, Hermann, 1978.

[14] STRICHARTZ (R. S.). – Harmonic analysis on hyperboloids, *J. of functionnal Analysis*, t. 12, 1973, p. 341-383.

[15] THOMAS (E.). – The theorem of Bochner-Schwartz-Godement for generalised Gelfand pairs, *Functional analysis, Surveys and recent results*, III. — Amsterdam, New York, Oxford, North-Holland publishing Company, 1984 (North-Holland, *Mathematics Studies*, 90).

[16] WARNER (G.). – *Harmonic analysis on semi-simple Lie groups*, I. — Berlin, Heidelberg, New York, Springer-Verlag, 1972 (*Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*, 188).

DEUXIEME ET TROISIEME PARTIES

INTRODUCTION : RAPPELS SUR LES ALGEBRES DE JORDAN SIMPLES EUCLIDIENNES

A. Les Algèbres de Jordan

Soit V une algèbre de Jordan sur le corps $\mathbb{F}$ ($\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), simple, de dimension n, d'élément unité e.Pour x et y dans V, on définit les endomorphismes de V :

$$L(x)y = xy \; ; \qquad P(x) = 2L^2(x)-L(x^2) \; ; \qquad x\square y = L(xy) + [L(x),L(y)].$$

On note det x la norme réduite sur V, c'est un polynôme homogène, irréductible, de degré r. L'entier r est le rang de l'algèbre V.

Un idempotent s ($s^2 = s$) est dit primitif s'il est non nul et n'est pas somme de deux idempotents non nuls. Un système d'idempotents primitifs $\{e_1,...,e_p\}$ est dit système d'idempotents orthogonaux complet si l'on a :

$$e = \sum_{i=1}^{p} e_i \qquad\qquad e_ie_j = \delta_{ij}e_i.$$

On aura alors p = r. De tels systèmes existent.Tout élément x de V peut s'écrire sous la forme : $x = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i e_i \qquad (\lambda_i \in \mathbb{F})$

où $\{e_1,...,e_r\}$ est un système orthogonal complet (dépendant de x). Les nombres λ_i sont appelés les valeurs propres de x et l'on a : $\det x = \prod_{i=1}^{r} \lambda_i$.

Un élément x de V est dit inversible si P(x) est inversible et l'on posera dans ce cas $x^{-1}=P(x)^{-1}x$; on a : $x\,x^{-1} = e$ .Rappelons que x est inversible si et seulement s'il existe y dans $\mathbb{F}[x]$ (l'algèbre engendrée par x) tel que xy = e ou, si et seulement si,det $x \neq 0$.

On munira V de la forme bilinéaire (non dégénérée) : $\langle x,y\rangle = \frac{r}{n} \operatorname{tr} L(xy)$.

Le groupe de structure Str(V) de V est défini par :

$$\mathrm{Str}(V) = \{g \in GL(V) / \forall x \in V, P(gx) = gP(x)g^*\}$$

(où g* désigne l'adjoint de g par rapport à <,>).

On définit aussi $\mathrm{Aut}(V) = \{g \in GL(V) / g(xy) = g(x)g(y) ; x,y \in V\} \subset \mathrm{Str}(V)$

Le groupe Str(V) est algébrique ,réductif, d'algèbre de Lie

$$\mathfrak{g} = \{x\square y , \text{ x et y dans } V\}_{\mathbb{F}}$$

(On désigne par $E_{\mathbb{F}}$ le sous-espace engendré par E)

On note G (resp. K) la composante neutre de Str(V) (resp. de Aut V).

Si x est un élément inversible de V et si g appartient à Str(V), gx est aussi inversible et:

$$(gx)^{-1} = (g^*)^{-1}(x^{-1})$$

D'autre part, pour x dans V et g dans G: $\det(g.x) = (\det g)^{r/n} \det x$.

Soit c un idempotent, les valeurs propres possibles de L(c) sont $1, \frac{1}{2}, 0$ et on a la décomposition de Peirce associée à c :

$$V = V_1 \oplus V_{1/2} \oplus V_0 \qquad (x = x_1+x_{1/2}+x_0)$$

où $V_\lambda = \{x \in V / L(c)x = \lambda x\}$.(Lorsque le contexte l'exige, on notera l'espace V_λ, $V_\lambda(c)$).

Les espaces V_1 et V_0 sont des sous-algèbres simples (d'unités c et e-c) (voir [**Br.- Kœ.**]); de plus:

$$V_0 V_1 = 0$$

$$V_{1/2} V_{1/2} \subset V_0 + V_1$$

$$V_i V_{1/2} \subset V_{1/2} \qquad (i = 0,1)$$

(cf. [**Fa1.**])

L'algèbre V_1 opère sur $V_{1/2}$ par la représentation

$$\rho : x \rightarrow 2L(x)|_{V_{1/2}} \qquad x \in V_1$$

cette représentation est unitale (cf.[**Sa1.**]) c'est à dire que l'on a :

$$\rho(c) = Id|_{V_{1/2}} \qquad \rho(xy) = 1/2(\rho(x)\rho(y) + \rho(y)\rho(x))$$

Nous dirons qu'un élément x de V est inversible par rapport à l'idempotent c si $P(c)x = x_1$ est inversible dans l'algèbre V_1

Si c est primitif on a : $V_1 = \mathbb{R}c$

On a le lemme (cf.[**Fa1.**])

Lemme 1 : Soient c un idempotent de V, z un élément de $V_{1/2}$ et $x = x_1+x_{1/2}+x_0$ un élément de V on aura :

$$(\exp 2z\square c)(x) = y_1 + y_{1/2} + y_0$$

avec: $y_1 = x_1$; $y_{1/2} = 2L(z)x_1 + x_{1/2}$

$$y_0 = 2L(e-c)L(z)^2x_1 + 2L(e-c)L(z)x_{1/2} + x_0$$

Un lemme fondamental pour la deuxième partie est:

Lemme2 : Soit $x = x_1+x_{1/2}+x_0$ un élément de V inversible par rapport à l'idempotent c, il existe un élément z de $V_{1/2}$ et un élément x'_0 de V_0 uniques tels que: $x=(\exp 2z\square c)(x_1 + x'_0)$

Si de plus x est inversible dans V, x'_0 le sera dans V_0 .

Par le lemme 1, il nous suffit de résoudre le système :

$$2zx_1 = x_{1/2}$$

$$x'_0 + 2(e - c)(z(zx_1)) = x_0$$

La première équation s'écrit: $\rho(x_1) = x_{1/2}$

Soit alors u l'inverse de x_1 dans V_1 on a : $Id|_{V_{1/2}} = \rho(ux_1) = \rho(u)\rho(x_1)$ (car $u \in \mathbb{F}[x_1]$ qui est associative (cf. **[Fa1.]**) et donc $z = 2ux_{1/2}$

La deuxième équation nous donne x'_0.

Si maintenant x est inversible dans V, $x_1+x'_0$ le sera aussi puisque $\exp 2z \square c$ est un élément de Str(V), mais comme $\mathbb{F}[x_1+x'_0] = \mathbb{F}[x_1] + \mathbb{F}[x'_0]$ et que x_1 est inversible dans V_1, x'_0 le sera dans V_0. □

Fixons maintenant un système orthogonal complet et posons :

$$V_{ii} = V_1(e_i) = \mathbb{F}e_i \qquad V_{ij} = V_{\frac{1}{2}}(e_i) \cap V_{\frac{1}{2}}(e_j) \qquad i \neq j.$$

On a alors la décomposition de Peirce associée au système :

$$V = \bigoplus_{1 \leq i \leq j \leq r} V_{ij} \qquad x = \sum_{i \leq j} x_{ij}$$

les espaces V_{ij} $(i \neq j)$ ont la même dimension d (indépendante du système) et on a donc : $n = r + \frac{d}{2} r(r-1)$.

Cette décomposition est orthogonale pour la forme bilinéaire <,> ; de plus :

$V_{ij} V_{k\ell} = \{0\}$ si $\{i,j\} \cap \{k,\ell\} = \varnothing$

$V_{ij} V_{jk} \subset V_{ik}$ $\qquad i \neq k$

$V_{ij} V_{ij} \subset V_{ii} + V_{jj}$

(avec $xy = \frac{1}{2} \langle x,y \rangle (e_i+e_j)$; x,y dans V_{ij})

Supposons maintenant (et nous ferons cette hypothèse dans toute la suite de ce travail)que V soit une algèbre réelle euclidienne (la forme < , > est définie positive,ou ce qui revient au même $a^2 + b^2 = 0 \Rightarrow a = b = 0$).Alors l'application $\theta : X \to -{}^tX$ est une involution de Cartan de $\mathfrak{g}$, le sous-espace $\mathfrak{a} = \{L(e_i) / 1 \leq i \leq r\}_{\mathbb{R}}$ est une sous-algèbre de Cartan de la paire symétrique $(\mathfrak{g}, \mathfrak{K})$ où $\mathfrak{K} = \{X \in \mathfrak{g} / \theta(X) = X\} = \{[L(x),L(y)] / x,y \in V\}_{\mathbb{R}}$ est l'algèbre de Lie de K;les racines restreintes de $(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ sont les formes linéaires $1/2(\gamma_j - \gamma_i)$, $i \neq j$,où $\{\gamma_i\}$ est la base duale de $\{L(e_i)\}$,et le sous-espace radiciel correspondant à $1/2(\gamma_j - \gamma_i)$ est $V_{ij} \square e_i$ (cf.**[Sa1.]**,**[A.]**)

Si un élément inversible x de V possède p valeurs propres positives et q négatives on dira que la signature de x est (p,q) (p+q = r).

Les orbites ouvertes de V sous l'action du groupe G sont :

$$\Omega_i = \{x \text{ inversible / signature de } x = (r-i,i)\}$$

$\Omega_0 = \Omega$ est la composante connexe contenant e de l'ensemble des éléments inversibles de V et

$$\Omega = Ge \qquad K = \{g \in G / ge = e\}$$

Ω est un espace riemannien symétrique et si dx désigne la mesure euclidienne associée au produit scalaire < , > , $d^\times x = \frac{dx}{(\det x)^{n/r}}$ est une mesure G-invariante sur Ω.

Exemples:

1) $V = Sym(r,\mathbb{R})$ les matrices (r,r) symétriques réelles avec $x.y = \frac{1}{2}(xy + yx)$.

Dans ce cas le déterminant est le déterminant usuel, et donc un élément x de V sera inversible pour la multiplication de Jordan s'il est inversible au sens usuel , les inverses coincideront ; on peut prendre comme système complet orthogonal le système $\{e_1,...,e_r\}$ avec

$$e_k = (\alpha_{ij}) \text{ où } \alpha_{ij} = 0 \text{ si } (i,j) \neq (k,k)$$
$$\alpha_{kk} = 1.$$

Ici $d = 1$ et $V_{ij} = \mathbb{R}a_{ij}$ avec $a_{ij} = (\alpha_{kr})$ où $\alpha_{kr} = 0$ si $\{k,r\} \neq \{i,j\}$ et $\alpha_{kr} = 1$ sinon .

Le produit $< , >$ est donné par $<x,y> = tr\ x.y = tr\ xy$.

Le groupe $GL(\mathbb{R}^r)$ opère sur V par :

$$x \rightarrow g\, x^t\, g$$

et l'on a (cf.[**Sa1.**]) $G \cong GL^+(\mathbb{R}^r)$ si r impair

$G \cong GL^+(\mathbb{R}^r)/_{\{\pm Id\}}$ si r pair.

De manière analogue $Herm\ (r,\mathbb{C})$, $Herm\ (r,\mathbb{H})$ sont des exemples d'algèbres de Jordan simples euclidiennes (d = 2 et 4 respectivement).

2) $V = \mathbb{R}\times E$ où E est un espace euclidien de produit scalaire $(.,.)_E$, de dimension n-1 ; le produit de Jordan sera : $(\lambda,u)(\lambda,v) = (\lambda\mu+(u,v)_E, \lambda v+\mu u)$

ici $\det(\lambda,u) = \lambda^2 - \|u\|_E^2 \quad (r = 2)$

et $G \cong \mathbb{R}^{*+} \times SO_0(1,n-1)$.

B - L'équation fonctionnelle des distributions zêta

On désigne par $\mathcal{S}(V)$ l'espace de Schwartz de V, les intégrales

$$Z_j(f,s) = \int_{\Omega_j} |\det x|^s f(x)\, d^\times x \qquad Re\, s > \frac{n}{r}$$

définissent des distributions tempérées. Ces distributions admettent un prolongement méromorphe sur $\mathbb{C}$, en effet de l'identité de Bernstein :

$$(\det \partial)|\det x|^s = (-1)^j b(s)|\det x|^{s-1} \qquad x \in \Omega_j$$

avec $b(s) = s\left(s+\frac{d}{2}\right) \ldots \left(s+(r-1)\frac{d}{2}\right)$ l'on déduit, par intégration par parties, pour Re s assez grand:

$$Z_j((\det \partial)f,s) = (-1)^{r-j} b\left(s-\frac{n}{r}\right) Z_j(f,s-1).$$

(On définit l'opérateur $\det \partial$ par : $\det \partial\, e^{<\,,y>} = \det y\, e^{<.,y>}$)

Ce qui permet de prolonger en s.

Le théorème suivant (cf.[Sa.-Fa.])est un cas particulier d'un résultat plus général dû à Sato et Shintani ([Sa.-Sh.]).

Théorème 1 : La transformée de Fourier de Z_j est donnée par :

$$Z_j(\hat{f},s) = \Gamma_\Omega(s)e^{-\frac{i\pi}{2}rs}\sum_{k=0}^{r} u_{jk}(s)Z_k(f,-s+\frac{n}{r})$$

où les fonctions $u_{jk}(s)$ sont des polynômes en $e^{i\pi s}$ et où

$$\Gamma_\Omega(s) = (2\pi)^{\frac{n-r}{2}}\prod_{j=0}^{r-1}\Gamma\left(s-j\frac{d}{2}\right)$$

est la fonction gamma du cône.

On a posé ici $\hat{f}(\xi) = \int_V e^{-i<x,\xi>} f(x)dx$ (f dans $\mathcal{S}(V)$).

Les fonctions $u_{jk}(s)$ sont explicitement connues.Posons

$$P_k(z) = \prod_{p=1}^{k}(1+(-1)^{d(k-p)}z) \qquad (P_0 = 1)$$

on aura:

Proposition 1 : Pour tout nombre complexe λ:

$$\sum_{j=0}^{r}\lambda^j u_{jk}(s) = P_{r-k}\left(e^{-i\frac{\pi}{2}d(r-1)}\lambda q\right)q^k P_k\left(e^{i\frac{\pi}{2}d(r-1)}\lambda q^{-1}\right) \quad \text{avec} \quad q = e^{i\pi s}.$$

On va tirer de la proposition 1 quelques conséquences utiles pour les chapitres 2 et 3 de la troisième partie.

a)<u>Supposons d=2 et r impair ou d ≡ 0 [4]</u>

Alors $\exp(-i\pi/2d(r-1)) = \exp(i\pi/2d(r-1)) = 1$ et $P_k(z) = (1+z)^k$

Il vient pour tout nombre complexe λ :

$$\sum_{j=0}^{r}\lambda^j u_{jk}(s) = (1+\lambda\, e^{i\pi s})^{r-k}e^{i\pi ks}(1+\lambda\, e^{-i\pi s})^k \qquad (*)$$

d'où en faisant λ =1 et -1 :

$$\sum_{j=0}^{r} u_{jk}(s) = (1+e^{i\pi s})^r = 2^r e^{i\pi rs/2}(\cos\pi s/2)^r \text{ et } \sum_{j=0}^{r}(-1)^j u_{jk}(s) = (-1)^{r-k}(e^{i\pi s}-1)^r$$

D'autre part,si dans la relation (*) nous faisons s = n avec n dans $\mathbb{Z}$,il vient:

$$\sum_{j=0}^{r} \lambda^j u_{jk}(n) = e^{i\pi kn}(1+\lambda e^{i\pi n})^r \quad \text{d'où} \quad u_{jk}(n) = e^{i\pi kn} e^{i\pi jn} C_r^j$$

b)Supposons d = 2 et r pair

Alors $\exp(-i\pi/2d(r-1)) = \exp(i\pi/2d(r-1)) = -1$ et $P_k(z) = (1+z)^k$

et

$$\sum_{j=0}^{r} \lambda^j u_{jk}(s) = (1-\lambda\, e^{i\pi s})^{r-k} e^{i\pi ks}(1-\lambda\, e^{-i\pi s})^k$$

d'où :

$$\sum_{j=0}^{r} u_{jk}(s) = (-1)^k(1-e^{i\pi s})^r \qquad \text{et} \qquad \sum_{j=0}^{r} (-1)^j u_{jk}(s) = (1+e^{i\pi s})^r$$

De même que pour le cas a), on trouve (n dans $\mathbb{Z}$) :

$$u_{jk}(n) = (-1)^j(-1)^{n(k+j)} C_r^j$$

c)Supposons d = 1 et r pair

Alors $\exp(-i\pi/2d(r-1)) = -\exp(i\pi/2d(r-1))$; d'autre part :

$P_k(z) = (1-z^2)^{k/2}$ si k est pair et $P_k(z) = (1-z^2)^{(k-1)/2}(1+z)$ si k est impair

α) Si k est pair

$$\sum_{j=0}^{r} \lambda^j u_{jk}(s) = (1+\lambda^2 e^{i2\pi s})^{(r-k)/2} e^{i\pi ks}(1+\lambda^2 e^{-i2\pi s})^{k/2}$$

Il n'est pas difficile de constater que dans ce cas :

$u_{jk}(s) = 0$ pour tout j impair

$u_{2jk}(n) = C_{r/2}^j$ (n est dans $\mathbb{Z}$)

β) Si k est impair

$$\sum_{j=0}^{r} \lambda^j u_{jk}(s) =$$

$$(1+\lambda^2 e^{i2\pi s})^{(r-k-1)/2} e^{i\pi ks}(1+\lambda^2 e^{-i2\pi s})^{(k-1)/2}\,(1+\lambda\, e^{i\pi s} e^{-i\pi(r-1)/2})(1-\lambda e^{-i\pi s} e^{-i\pi(r-1)/2})$$

Là encore : $u_{jk}(n) = 0$ pour tous j impair (n dans $\mathbb{Z}$)

$$u_{2jk}(n) = (-1)^{kn} C_{r/2}^j$$

Nous voyons donc que dans le cas c) ,pour tous les j impairs, tous les k et tous les entiers n on a $u_{ij}(n) = 0$; on se servira de ce fait dans la proposition 1 du chapitre 3 de la troisième partie .

d)Supposons d =1 et r impair

Ici par contre on trouve que tous les coefficients $u_{jk}(n)$ sont non nuls.

C - La sous-algèbre V'

Réécrivons la décomposition de Peirce associée au système orthogonal complet $\{e_1,...,e_r\}$:

$$V = \bigoplus_{1\le i\le j\le r} V_{ij}.$$

Il n'est pas difficile de voir que

$$V' = \bigoplus_{2\le i\le j\le r} V_{ij} = V_0(e_1)$$

et

$$\bigoplus_{2\le j\le r} V_{1j} = V_{\frac{1}{2}}(e_1).$$

Il en résulte, d'après les rappels du paragraphe A, que V' est une sous-algèbre simple euclidienne, de rang r-1, d'unité $e_2+...+e_r$.

Considérons l'application Φ :

$$\Phi : \mathbb{R}\times V_{\frac{1}{2}}(e_1)\times V' \to V$$

$$(u,z,v) \to \exp(2z\square\, e_1)(ue_1+v)$$

C'est une application C^∞ d'après les formules données par le lemme 1.

Proposition 2 : Posons $W = \{x \in V / x_{11} \neq 0\}$.
Alors Φ réalise une bijection de $\mathbb{R}^* \times V_{\frac{1}{2}}(e_1)\times V'$ sur W qui est un C^∞ difféomorphisme.

L'application $\exp(2z\square\, e_1)$ est un élément de G, de déterminant 1, d'où :

$$\det \Phi(u,z,v) = \det(ue_1+v) = u \det' v$$

(si A est un objet de l'algèbre V, A'désignera l'objet correspondant de l'algèbre V').

D'autre part si $x = ue_1+z+v$ est dans W avec z dans $V_{\frac{1}{2}}(e_1)$ et v dans V' on aura par le lemme 1 :

$$\Phi\left(u, \frac{z}{u}, v - \frac{1}{u}(z.z)\right) = x$$

d'où la proposition 2.

Les éléments de G respectent la signature d'un élément x de V, on en déduit :

$$\Phi(\mathbb{R}^{*+}\times V_{\frac{1}{2}}(e_1)\times\Omega'_0) = \Omega_0 \cap W$$
$$\Phi(\mathbb{R}^{*-}\times V_{\frac{1}{2}}(e_1)\times\Omega'_{r-1}) = \Omega_r \cap W$$

$$\Phi(\mathbb{R}^{*+}\times V_{\frac{1}{2}}(e_1)\times\Omega'_i) \cup \Phi(\mathbb{R}^{*-}\times V_{\frac{1}{2}}(e_1)\times\Omega'_{i-1}) = \Omega_i \cap W \quad (0 < i < r)$$

(où si A est un objet de l'algèbre V, A' désignera l'objet correspondant de l'algèbre V'). □

Exemples

1) Si $V = Sym(r,\mathbb{R})$, alors $V' = Sym(r-1,\mathbb{R})$ de même pour les $Herm(r,\mathbb{F})$ ($\mathbb{F} = \mathbb{C}$ ou $\mathbb{H}$).

2) Si $V = \mathbb{R}\times E$, alors $V' = \mathbb{R}$.

3) Si V est l'algèbre exceptionnelle on voit par la structure de $V' = V_{22} \oplus V_{33} \oplus V_{23}$ que $V' \cong \mathbb{R}\times\mathbb{R}^9$.

On constate que pour $r > 2$, $d' = d$.

D.-Une identité de Bernstein généralisée

Reprenons la décomposition de Peirce associée au système orthogonal complet $\{e_1,...,e_r\}$:

$$V = \bigoplus_{1\le i\le j\le r} V_{ij}.$$

On a $V(e_1+.....+e_k,1) = V_k = \bigoplus_{1\le i\le j\le k} V_{ij}$.

c'est une sous-algèbre de V,nous noterons det_k son déterminant. Enfin on posera $\Delta_k(x) = det_k(P_k(x)$ où $P_k = P(e_1+.....+e_k)$.($\Delta_r(x) = detx$)

Pour un polynôme P sur V,on définira l'opérateur $P(\partial)$ par :

$$P(\partial)e^{<.,y>} = P(y)e^{<.,y>})$$

Pour un r-uplet de nombres entiers positifs $\mathbf{m} = (m_1,....m_r)$ avec $m_1\ge m_2...\ge m_r \ge 0$, on posera

$$\Delta_{\mathbf{m}}(\partial) = \Delta_1^{m_1-m_2}(\partial)\ ...\Delta_{r-1}^{m_r-m_{r-1}}(\partial)\Delta_r^{m_r}(\partial)$$

et pour $\mathbf{s} = (s_1,...,s_r)$ (s_i dans $\mathbb{C}$)

$$\Delta_{\mathbf{s}}(x) = \Delta_1^{s_1-s_2}(x)\ ...\Delta_{r-1}^{s_r-s_{r-1}}(x)\Delta_r^{s_r}(x) \quad (x\in\Omega)$$

Soit π l'action naturelle de G, on notera $\mathcal{P}_{\mathbf{m}}$ l'espace vectoriel engendré par $\{\pi(g)\ \Delta_{\mathbf{m}}(x) / g\in G\}$; on sait que (cf.**[Ko.]**) que π est irréductible dans $\mathcal{P}_{\mathbf{m}}$.

Proposition 3 : Pour tout p de $\mathcal{P}_{\mathbf{m}}$ on a :

$$\int_\Omega e^{-<x,y>}p(x)(detx)^s d^\times x = \Gamma_\Omega(\mathbf{m}+\mathbf{s})(dety)^{-s}p(y^{-1})$$

où y est dans Ω et Res >n/r-1 et avec $\Gamma_\Omega(\mathbf{m}+\mathbf{s}) = (2\pi)^{\frac{n-r}{2}}\prod_{i=1}^{r}\Gamma\left(s - m_i - (i-1)\frac{d}{2}\right)$

D'après [**Fa1.**], on a pour Re $s_i > (i-1)d/2$ et y dans Ω :

$$\int_\Omega e^{-<x,y>}\Delta_{\mathbf{s}}(x)(detx)^s\ d^x x = \Gamma_\Omega(\mathbf{s})\Delta_{\mathbf{s}}(y^{-1}) \quad \text{où} \quad \Gamma_\Omega(\mathbf{s}) = (2\pi)^{\frac{n-r}{2}} \prod_{i=1}^{r} \Gamma\left(s_i - (i-1)\frac{d}{2}\right)$$

d'où pour g dans G:

$$\int_\Omega e^{-<x,y>}\Delta_{\mathbf{s}}(gx)(detx)^s\ d^x x = \Gamma_\Omega(\mathbf{s})\Delta_{\mathbf{s}}(g(y^{-1}))$$

prenons maintenant $\mathbf{s} = s+\mathbf{m}$ avec s dans $\mathbb{C}$ et Res > n/r -1 , on aura:

$$\Delta_{\mathbf{s}}(g(y^{-1})) = \Delta_{\mathbf{m}}(g(y^{-1}))(\det(g(y^{-1})))^s = \Delta_{\mathbf{m}}(g(y^{-1}))(detg)^{sr/n}(dety)^{-s}$$

d'où la proposition pour $p(x) = \Delta_{\mathbf{m}}(gx)$ et donc la proposition pour tout p(x) par linéarité.

□

Corollaire 1: Soit p un élément de $\mathcal{P}_{\mathbf{m}}$, alors:

$p(\partial)(detx)^s = \beta_{\mathbf{m}}(s)\ (detx)^s\ p(x^{-1})$ **où x est dans Ω et s dans $\mathbb{C}$ et avec:**

$$\beta_{\mathbf{m}}(s) = (-1)^{|\mathbf{m}|}\ \frac{\Gamma_\Omega(\mathbf{m}-s)}{\Gamma_\Omega(-\mathbf{s})} = (-1)^{|\mathbf{m}|} \prod_{i=1}^{r}\prod_{k=0}^{m_i-1}\left(k - s - (i-1)\frac{d}{2}\right)$$

$(|\mathbf{m}| = m_1+\ldots+m_r)$

En effet,pour $Re(s+n/r) < 0$: $(detx)^s = \dfrac{1}{\Gamma_\Omega(-s)} \displaystyle\int_\Omega e^{-<x,y>}(dety)^s\ d^x y$

et donc:

$$p(\partial)(detx)^s = \frac{1}{\Gamma_\Omega(-s)} \int_\Omega (p(\partial)e^{-<x,y>})(dety)^s\ d^x y$$

$$= \frac{(-1)^{|m|}}{\Gamma_\Omega(-s)} \int_\Omega e^{-<x,y>}p(y)(dety)^s\ d^x y$$

on prolonge ensuite en s.

□

E. Relation des orbites Ω_i avec les espaces d'Oshima -Sekiguchi

On reprend l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G, on sait (cf.[**Sa1.**]) que $\mathfrak{g}$ est réductive et que:

$$\mathfrak{g} = \mathbb{R}L(e) \oplus [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$$

où $\mathfrak{g}^S = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ est une algèbre de Lie semi-simple.

Au niveau global : $G = \mathbb{R}^{*+} \times G^S$ avec $G^S = \{g \in G / detg = 1\}$

G^S est connexe,semi-simple de centre réduit à l'identité,d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}^S$.L'involution $X \to -{}^tX$ est une involution de Cartan provenant de l'involution de G: $g \to (g^*)^{-1} = \theta(g)$

On a les décompositions de Cartan de $\mathfrak{g}$ et de $\mathfrak{g}^S$:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{K} \oplus \mathfrak{P} \qquad\qquad \mathfrak{g}^S = \mathfrak{K} \oplus \mathfrak{P}^S$$

où : $\mathfrak{K} = \{X \in \mathfrak{g} / \theta(X) = X\} = \{[L(x),L(y)] / x,y \in V\}\mathbb{R}$

$\mathcal{P} = \{L(x) / x \text{ dans } V\}$; $\mathcal{P}^S = \mathcal{P} \cap \mathcal{G}^S$

Soit f_j l'élément de V défini par $f_j = e_1 + ...+e_j - e_{j+1} - .....- e_r \quad (0 \leq j \leq r)$

On pose $H_j = \{g \in G / gf_j = f_j\} = \{g \in G^S / gf_j = f_j\}$

On sait que les orbites ouvertes de V sous l'action de G sont les ensembles $\Omega_j = Gf_j \cong G/H_j$

On a $G/H_j \cong \mathbb{R}^{*+} \times G^S/H_j$

On se propose de montrer que les espaces G^S/H_j sont des espaces d'Oshima-Sekiguchi (cf.[**Os.-Se.**])

Posons $\theta_j : G \to G$

$$g \to P(f_j)\theta(g)P(f_j)$$

comme $f_j^2 = e$ on sait (cf. [**Fal.**]) que $P(f_j) \in K$, donc $\theta\theta_j = \theta_j\theta$

D'autre part $P(f_j)^{-1} = P(f_j^{-1}) = P(f_j)$

donc θ_j est une involution de G.

Proposition 4 : $H_j \subset G^{\theta_j} = \{ g \in G / \theta_j(g) = g \}$

En effet si $gf_j = f_j$ on aura $P(f_j)\theta(g)P(f_j) = gP(f_j)g^*$ car g appartient au groupe Str(V); d'où $\theta_j(g) = g$

Réciproquement si $P(f_j)\theta(g)P(f_j) = g$ on aura $P(g^{-1}f_j) = P(f_j)$

on sait alors (voir [**Br.-Kœ.**] page 145,corollaire de la proposition 2.6) que: $g^{-1}f_j = \pm f_j$

d'où $g^{-1}f_j = gf_j = f_j$ sauf si r pair et j = r/2 □

Remarque:Si $g \in H_j$ on aura $(g^*)^{-1}(f_j) = (g(f_j))^{-1} = f_j$ et donc H_j est stable par *

Soit $\mathcal{A}^S = \{ \sum_{k=1}^{r} \lambda_i L(e_i) / \lambda_i \in \mathbb{R}, \sum \lambda_i = 0 \} \subset \mathcal{P}^S$

$\mathcal{A}^S$ est un sous-espace de Cartan de $\mathcal{P}$ et les racines de $(\mathcal{G}^S, \mathcal{A}^S)$ sont:

$$\Sigma = \{ 1/2(\gamma_j - \gamma_i) = \alpha_{ji}, i \neq j \}$$

($\{\gamma_i\}$ est la base duale de $\{L(e_i)\}$),et le sous-espace radiciel correspondant à $1/2(\gamma_j - \gamma_i)$ est $V_{ij} \square e_i$)

on prend $\Sigma^+ = \{ \alpha_{ji} / i < j \}$

Définition :(Oshima-Sekiguchi)

Une signature de racines est une application ε de Σ dans $\{-1, 1\}$ telle que:

$$\varepsilon(\alpha) = \varepsilon(-\alpha) \quad \text{pour toute racine } \alpha$$

$$\varepsilon(\alpha + \beta) = \varepsilon(\alpha)\varepsilon(\beta) \quad \text{si } \alpha + \beta \in \Sigma$$

Pour chaque signature de racines, Oshima-Sekiguchi définissent une involution θ_ε de $\mathcal{G}^S$ par

$\theta_\varepsilon(X) = \theta(X)$ si X est dans $\mathfrak{a}^s + \mathfrak{M}$

(où $\mathfrak{M}$ est le centralisateur de $\mathfrak{a}^s$ dans $\mathfrak{K}$)

$\theta_\varepsilon(X) = \varepsilon(\alpha)\theta_\varepsilon(X)$ pour toute racine α et tout X de $\mathfrak{g}^\alpha$

(où $\mathfrak{g}^\alpha$ est le sous-espace radiciel correspondant à α)

Lemme 3: Soit ε_j l'application de Σ dans {-1 , 1} telle que

$$\varepsilon_j(\alpha_{kl}) = -1 \quad \text{si j est compris entre k et l}$$
$$\varepsilon_j(\alpha_{kl}) = 1 \quad \text{si k et l} \leq 1 \text{ ou si k et l} > 1$$

alors ε_j est une signature de racines .

C'est une simple vérification. □

Soit θ_{ε_j} l'involution associée par Oshima-Sekiguchi à la signature de racines ε_j

Proposition 5 : $\theta_{\varepsilon_j} = \theta_j$

• On a $P(f_j)e_k = e_k$ pour tout k = 1,....,r

cela entraine que $P(f_j) \in M$ centralisateur de $\mathfrak{a}^s$ dans K,et donc:

$$Ad(P(f_j))X = P(f_j)XP(f_j) = X \text{ si } X \in \mathfrak{a}^s$$

d'où: $\theta_j(X) = \theta(X) = \theta_{\varepsilon_j}(X)$ si $X \in \mathfrak{a}^s$

• On sait que : $\mathfrak{M} = \{ X \in \mathfrak{K} / X(e_k) = 0 \text{ pour tout } k = 1,....,r\}$

comme $X \in \mathfrak{M}$ est une dérivation, $X(xe_k) = X(x)e_k$ et par conséquent X laisse stable les espaces V_{kl}(k < l) de la décomposition de Peirce.

D'autre part:

$$P(f_j)(e_k) = e_k\ ,\ P(f_j)(x_{kl}) = -x_{kl} \text{ si } k \leq j < l\ ,\ P(f_j)(x_{kl}) = x_{kl} \text{ sinon}$$

et donc $X\,P(f_j) = P(f_j)X$

d'où: $\theta_j(X) = \theta(X) = \theta_{\varepsilon_j}(X)$ si $X \in \mathfrak{M}$

• Soit maintenant X dans $V_{lk} \square e_l$ $X = x_{lk} \square e_l$ (l < k) on aura:

$P(f_j)(x_{lk} \square e_l)P(f_j) = (P(f_j)x_{kl}) \square e_l$ puisque $P(f_j)(e_l) = e_l$

et puisque $P(f_j)(x_{kl}) = -x_{kl}$ si $l \leq i \leq k$ et $P(f_j)(x_{kl}) = x_{kl}$ sinon,on en déduit:

$$\theta_j(X) = \varepsilon_j(\alpha_{kl})\theta(X) = \theta_{\varepsilon_j}(X)$$

d'où la proposition 2 . □

On a (cf.**[Os.-Se]**) $\mathfrak{g}^s = \mathfrak{K}_j \oplus \mathfrak{P}_j^s$ avec

$$\mathfrak{K}_j = \{X \in \mathfrak{g}^s / \theta_j(X) = X\}\ ,\ \mathfrak{P}_j^s = \{X \in \mathfrak{g}^s / \theta_j(X) = -X\}$$

Lemme 4 : $H_j = (H_j \cap K)\exp(\mathfrak{P}^s \cap \mathfrak{K}_j)$

Par la décomposition de Cartan de G^S on a pour g dans H_j : $g = u\exp X$
H_j étant stable par la transposition * , on aura : $gg^* = \exp 2X \in H_j$
et $\exp 2mX$ appartiendra à H_j pour tout m de $\mathbb{N}$.
Soient alors $P_1,.....,P_k$ les polynômes (à cœfficients réels) qui sont équations du groupe algébrique $\{ g \in Str(V) / gf_j = f_j \}$;les éléments $\exp 2Xm$ annuleront les pôlynomes P_l mais alors il est classique (voir par exemple **[Wa.]** Lemme 3.2 7) que pour tout t exptX annulera les polynômes P_l et par conséquent exptX est un élément de Hj pour tout t , d'où le lemme.

□

Corollaire 2 :Soit $(H_j)_0$ la composante connexe de H_j contenant l'identité, on a: $(H_j)_0 = ((H_j)_0 \cap K)\exp(\mathcal{P}^S \cap \mathcal{K}_j)$

Remarque: Le corollaire 1 n'est rien d'autre que la décomposition de Cartan du groupe réductif $(H_j)_0$ (l'involution de Cartan est $\theta\theta_j$)

Proposition 6 : $H_j = (H_j)_0 M$

Il suffit, d'après les résultats précédents, de montrer que $((H_j)_0 \cap K)M = H_j \cap K$
Soit donc g un élément de $H_j \cap K$ et considérons $Ad(g^{-1})\mathcal{A}^S = \mathcal{A}^1$; comme g appartient à Hj et à K, on a :

$$Ad(g^{-1})\circ\theta = \theta\circ Ad(g^{-1})$$
$$Ad(g^{-1})\circ\theta_j = \theta_j \circ Ad(g^{-1})$$

et par conséquent $\mathcal{A}^1$ est un sous-espace de Cartan de $\mathcal{P}_j^S \cap \mathcal{P}^S$.

Soient alors $H_1 \in \mathcal{A}^S$ (resp.$H_2 \in \mathcal{A}^1$) tel que pour toute racine α de $(\mathcal{G}^S , \mathcal{A}^S)$(resp.de $(\mathcal{G}^S , \mathcal{A}^1)$)on ait $\alpha(H_1) \neq 0$) (resp.$\alpha(H_2) \neq 0$).Il est alors classique que

$\mathcal{A}^S = \{X \in \mathcal{P}_j^S \cap \mathcal{P}^S / [X,H_1] = 0\}$ (resp. $\mathcal{A}^1 = \{X \in \mathcal{P}_j^S \cap \mathcal{P}^S / [X,H_2] = 0\}$)

(voir par exemple **[Wa.]** Lemme 7.5.4.)
Soit B la forme de Killing de $\mathcal{G}^S$,considérons l'application

$$\phi : (H_j)_0 \cap K \to \mathbb{R}$$
$$k \to B(Ad(k)H_2,H_1)$$

$(H_j)_0 \cap K$ étant compact il y existe un élément k_0 tel que :

$$\phi(k) \geq \phi(k_0) \text{ pour tout k de } (H_j)_0 \cap K$$

mais alors on aura pour tout réel t et tout Z de $\mathcal{K}_j \cap \mathcal{K}$: $\phi((\exp tZ)k_0) \geq \phi(k_0)$

et donc $\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \phi((\exp tZ)k_0) = 0$

c'est à dire que pour tout Z de $\mathcal{K}_j \cap \mathcal{K}$:

$$B([Z,Ad(k_0)H_2],H_1) = B(Z,[Ad(k_0)H_2,H_1]) = 0$$

comme$[Ad(k_0)H_2,H_1]$ est dans $\mathcal{K}_j \cap \mathcal{K}$ on en déduit : $[Ad(k_0)H_2,H_1] = 0$
Mais alors H_2 est un élément de $Ad((k_0)^{-1})\mathcal{A}^S$ qui est un sous-espace de Cartan de $\mathcal{P}_j^S \cap \mathcal{P}^S$

donc : $Ad((k_0)^{-1})\mathfrak{a}^s = \mathfrak{a}^1$

d'où: $Ad(g^{-1})\mathfrak{a}^s = Ad((k_0)^{-1})\mathfrak{a}^s$

et par conséquent $g(k_0)^{-1}$ est dans M. □

Cette proposition exprime que H_j est le groupe que Oshima et Sekiguchi construisent à partir de la signature de racines ε_j.

Donnons pour terminer le groupe de Weyl:

Proposition 7:Le groupe de Weyl M*/M s'identifie à l'ensemble des permutations de {1,...,r}

Un élément m de M est caractérisé par la propriété suivante :

$Ad(m)X = X$ pour tout X de $\mathfrak{a}$

cela est équivalent à $mL(e_i) = L(e_i)m$ $\quad i = 1,....,i = r$

ou $m(e_ix) = m(e_i)m(x) = e_im(x)$ pour tout x de V

c'est à dire $m(e_i) = e_i$ $\quad i = 1,....,i = r$

Donc $M = \{ m \in K / \forall\ i = 1,...,r \quad m(e_i) = e_i \}$

Remarquons que pour tout j $(0 \leq j \leq r)$ $M \subset H_j$

Soit maintenant m un élément de M* normalisateur de $\mathfrak{a}$ dans K, il sera caractérisé par la propriété: $m(e_i) = \sum_{k=1}^{r} \mu_k^i L(e_k)$ avec μ_k^i dans $\mathbb{R}$

se servant alors des relations m(e) = e et $(m(e_i))^2 = m((e_i)^2) = m(e_i)$ il n'est pas difficile de se convaincre que $m(e_i)$ appartient à $\{m(e_r),..,m(e_r)\}$, ce qui entraine la proposition. □

Remarque: La décomposition (voir **[Sa.-Fa.]**) $\Omega_j = \bigcup_{\varepsilon \in \mathcal{E}_j} AN(\varepsilon_1 e_1 + ... + \varepsilon_r e_r)$

où $\varepsilon = (\varepsilon_1,....,\varepsilon_r)$ avec $\varepsilon_1 = \pm 1$ et $\mathcal{E}_j = \{\varepsilon / \text{card}\{k / \varepsilon_k = 1\} = r\text{-}j\}$

est alors la proposition 1.10 de **[Os.-Se.]** ("décomposition d'Iwasawa par rapport à H_j ").

DEUXIEME PARTIE

DISTRIBUTIONS ZETA SUR UNE ALGEBRE DE JORDAN

I.- LA DECOMPOSITION DE GAUSS DANS UNE ALGEBRE DE JORDAN SIMPLE EUCLIDIENNE

A.- La décomposition de Gauss.

Soit V une algèbre de Jordan réelle, simple et euclidienne. On fixe un système d'idempotents, complet et orthogonal $\{e_1, ..., e_r\}$. La décomposition de Peirce associée s'écrira :

$$V = \bigoplus_{1 \leq i \leq j \leq r} V_{ij}$$

$$x = \sum_{i \leq j} x_{ij}$$

et on a :

- $V_{ij}V_{jk} \subset V_{ik} \quad i \neq k$
- $V_{ij}V_{kl} = \{0\}$ si $\{i,j\} \cap \{k,l\} = \emptyset$
- $V_{ij}V_{ij} \in V_{ii} + V_{jj}$

$$\left(xy = \frac{1}{2} < x, y > (e_i + e_j); x, y \in V_{ij}\right)$$

Soit $V^{\mathbb{C}}$ la complexification de V (en tant qu'espace vectoriel), on prolonge le produit de Jordan par bilinéarité sur $V^{\mathbb{C}}$, il n'est pas difficile de voir qu'avec ce produit $V^{\mathbb{C}}$ devient une algèbre de Jordan. De plus la forme bilinéaire $< \ , \ >$ se prolonge en une forme bilinéaire non dégénérée sur $V^{\mathbb{C}}$.

Lemme 1 : *$V^{\mathbb{C}}$ est simple.*

En effet soit I un idéal de $V^{\mathbb{C}}$, alors $I \cap V$ est un idéal de V ; si $I \cap V = V$ alors $I = V^{\mathbb{C}}$; si $I \cap V = \{0\}$, soit $a + ib$ un élément de I alors $(a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2$qui est un élément de $I \cap V$ d'où comme V est formellement réelle : $a = b = 0$.
Le groupe $Str(V^{\mathbb{C}})$ est un complexifié de $Str(V)$ au sens où son algèbre de Lie est la complexifiée de l'algèbre de Lie de $Str(V)$.

Le système $\{e_1, ..., e_r\}$ sera un système complet orthogonal de $V^{\mathbb{C}}$ et la décomposition de Peirce s'écrira :

$$V^{\mathbb{C}} = \bigoplus_{1 \leq i \leq j \leq r} V_{ij}^{\mathbb{C}}$$

les $V_{ij}^{\mathbb{C}}$ auront les mêmes propriétés que les V_{ij}.

Théorème 1 : *Soit z un élément de $V^{\mathbb{C}}$, inversible par rapport à tous les $e_1 + ... + e_i \quad (1 \leq i \leq r)$. Il existe des nombres complexes uniques $a_1, ..., a_r$ non nuls et des éléments $z^{(j)}$ de*

$$\bigoplus_{k=j+1}^{r} V_{jk}^{\mathbb{C}}, \quad (1 \leq j \leq r-1)$$

tels que :

$$x = \tau(z^{(1)})...\tau(z^{(r-1)})(\sum_{k=1}^{r} a_k e_k)$$

$$avec : \tau(z^{(j)}) = exp 2z^{(j)} \square e_j$$

La démonstration de l'existence se fait par récurrence sur le rang r de l'algèbre $V^{\mathbb{C}}$. Pour $r = 1$ l'assertion est évidente.

L'élément z est inversible par rapport à $e = e_1 + ... + e_r$ et par rapport à e_1 ; appliquons alors le lemme 2 de l'introduction avec $c = e_1$ on aura :

$$z = \tau(z^{(1)})(z_1 + z_0')$$

où :

$$z = z_1 + z_{1/2} + z_0 \in V^{\mathbb{C}}(e_1, 1) \oplus V^{\mathbb{C}}(e_1, 1/2) \oplus V^{\mathbb{C}}(e_1, 0)$$
$$z_0' \in V^{\mathbb{C}}(e_1, 0) \qquad z_0' \text{ inversible dans } V^{\mathbb{C}}(e_1, 0)$$
$$z^{(1)} \in V^{\mathbb{C}}(e_1, 1/2)$$

On a : $z_1 = a_1 e_1$ avec $a_1 \in \mathbb{C}^*$ car z_1 est inversible dans $V^{\mathbb{C}}(e_1, 1)$. Se servant de la décomposition de Peirce :

$$V^{\mathbb{C}} = \bigoplus_{1 \leq i \leq j \leq r} V_{ij}^{\mathbb{C}}$$

il n'est pas difficile de se persuader des égalités :

$$V^{\mathbb{C}}(e_1,0) = \bigoplus_{2\leq i\leq j\leq r} V_{ij}^{\mathbb{C}}$$
$$V^{\mathbb{C}}(e_1,\frac{1}{2}) = \bigoplus_{2\leq j\leq r} V_{1j}^{\mathbb{C}}$$

La sous-algèbre $V^{\mathbb{C}}(e_1,0)$ est une sous-algèbre simple de rang $r-1$, d'unité $e_2+...+e_r$ de système complet orthogonal $\{e_2,...,e_r\}$ et dont la décomposition de Peirce est

$$\bigoplus_{2\leq i\leq j\leq r} V_{ij}^{\mathbb{C}}$$

par l'hypothèse de récurrence on peut donc écrire :

$$z_0' = \tau(z^{(2)})...\tau(z^{(r-1)})(\sum_{k=2}^{r} a_k e_k) \text{ avec } z^{(j)} \in \bigoplus_{k=j+1}^{r} V_{jk}^{\mathbb{C}} \quad (2\leq j\leq r-1) \quad a_k\in\mathbb{C}^*.$$

D'autre part :

$$\forall j \;\; r\geq j\geq 2 \qquad e_1 \in V(e_j,0)$$

d'où (Lemme 1de l'introduction), $\tau(z^{(j)})(e_1) = e_1$ et donc

$$z = \tau(z^{(1)})...\tau(z^{(r-1)})(\sum_{k=1}^{r} a_k e_k)$$

Pour l'unicité, on procède également par récurrence sur le rang r. Il suffit de remarquer que :

$$\tau(z^{(1)})...\tau(z^{(r-1)})(\sum_{k=1}^{r} a_k e_k) = \tau(z^{(1)})(a_1e_1+z') \quad \text{avec} \;\; z'\in V(e_1,0).$$

Mais par le lemme 2, z' est unique.

Remarque : D'après la démonstration du théorème, il est clair que l'on a :

$$z\in V \quad \Longrightarrow \quad a_k\in\mathbb{R}^* \quad \text{et} \quad z^{(j)} \in \bigoplus_{k=j+1}^{r} V_{jk}.$$

Le résultat suivant se démontre d'une manière analogue.

Théorème 1' : *Soit z dans $V^{\mathbb{C}}$, inversible par rapport à tous les $e_i + ... + e_r$ $(1 \leq i \leq r)$.*

Il existe alors d'une manière unique des nombres complexes non nuls $b_1, ..., b_r$ et des éléments $z_{(j)}$ de $\bigoplus_{k=1}^{r-1} V_{kj}^{\mathbb{C}}$ $(j = 2, ..., r)$ tels que :

$$z = \tau(z_{(r)})...\tau(z_{(2)})(\sum_{k=1}^{r} b_k e_k)$$

où $\tau(z_{(j)}) = exp(2z_{(j)} \square e_j)$.

La proposition suivante se démontre de la même manière que la proposition V.3.5. de [**Fa1.**]

Proposition 1 : *Pour $a = \sum_{k=1}^{r} a_i e_i$, $a_i \in \mathbb{C}^*$ et $z^{(j)} = \sum_{k=j+1}^{r} z_{jk}$ $z_{jk} \in V_{jk}$ on a :*

$$P(a)\tau(z^{(j)}) = \tau(\widetilde{z}^{(j)})P(a)$$

où

$$\widetilde{z}^{(j)} = \sum_{k=j+1}^{r} \widetilde{z}_{jk} \ avec \ \widetilde{z}_{jk} = \frac{a_k}{a_j} z_{jk}$$

Revenons au groupe de structure de V ; son algèbre de Lie s'écrit (cf[**Sa1.**])

$$\mathcal{G} = \{x \square y / x, y \in V\}_{\mathbb{R}}$$

V étant supposée euclidienne, l'application $\theta : X \mapsto -{}^t X$ est une involution de Cartan de $\mathcal{G}$. Posons :

$$\mathcal{A} = \{L(e_i)/1 \leq i \leq r\}_{\mathbb{R}}$$
$$\mathcal{K} = \{X \in \mathcal{G}/\theta(X) = X\} = \{[L(x), L(y)]/x, y \in V\}_{\mathbb{R}}$$

Alors $\mathcal{A}$ est une sous-algèbre de Cartan de la paire symétrique $(\mathcal{G}, \mathcal{K})$; les racines restreintes de $(\mathcal{G}, \mathcal{A})$ sont les formes linéaires $\frac{1}{2}(\gamma_j - \gamma_i) i \neq j$, où $\{\gamma_i\}$ est la base duale de

$\{L(e_i)\}$, et le sous-espace radiciel correspondant à $\frac{1}{2}(\gamma_j - \gamma_i)$ est $V_{ij} \sqcup e_i$ (voir[**Sa1.**] et [**A.**] pour tout ceci).

$\mathcal{N} = \bigoplus_{i<j} V_{ij} \sqcup e_i$ est une sous-algèbre de Lie nipoltente de $\mathcal{G}$. On note A et N les sous-groupes analytiques de $Str(V)$ correspondant aux algèbres de Lie $\mathcal{A}$ et $\mathcal{N}$. Pour $Str(V^{\mathbb{C}})$ et $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}$ on notera les objets analogues $A_{\mathbb{C}}, N_{\mathbb{C}}$ etc...

La proposition 1 exprime que le groupe $A_{\mathbb{C}}$ (resp. A) normalise $N_{\mathbb{C}}$ (resp. N), le produit $A_{\mathbb{C}}N_{\mathbb{C}}$ (resp. AN) est donc un sous-groupe de $Str(V^{\mathbb{C}})$ (resp. $Str(V)$).

On notera $\det_k$ le déterminant de la sous-algèbre $V^{\mathbb{C}}(e_1 + ... + e_k, 1)$ et on pose pour x dans $V^{\mathbb{C}}$:

$$\Delta_k(x) = \det_k\Big(P_k(x)\Big)$$

où $P_k(x) = P(e_1 + ... + e_k)(x) \quad (1 \leq k \leq r)$

De même $\det_k^*$ désignera le déterminant de la sous-algèbre $V^{\mathbb{C}}(e_{r-k+1} + ... + e_r, 1)$ $(1 \leq k \leq r)$ et pour x dans $V^{\mathbb{C}}$ on pose :

$$\Delta_k^*(x) = \det_k^*\Big(P_k^*(x)\Big)$$

avec $P_k^*(x) = P(e_{r-k+1} + ... + e_r)(x)$.

Proposition 2 : *Pour n dans $N_{\mathbb{C}}$, λ_i dans $\mathbb{C}$ et n dans $V^{\mathbb{C}}$, on a :*

$$\Delta_k\Big(exp\Big(\sum_{i=1}^{r} \lambda_i L(e_i)\Big)nx\Big) = exp\Big(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i\Big)\Delta_k(x).$$

Montrons d'abord que pour n dans $N_{\mathbb{C}}$ et x dans $V^{\mathbb{C}}$ on a :

$$\Delta_k(nx) = \Delta_k(x).$$

Vu la définition de $N_{\mathbb{C}}$ on peut prendre

$$n = exp(2z_{ij} \square e_i) \qquad z_{ij} \in V_{ij} \quad i < j.$$

Soit $\varepsilon > 0$, par la proposition 1 :

$$P(e_1 + ... + e_k + \varepsilon e_{k+1} + ... + \varepsilon e_r) exp(2z_{ij} \square e_i)$$
$$= exp(2\widetilde{z}_{ij} \sqcup e_i) P(e_1 + ... + e_k + \varepsilon e_{k+1} + ... + \varepsilon e_r)$$

En faisant tendre ε vers 0, on trouve :

$$P(e_1 + ... + e_k) exp(2z_{ij} \sqcup e_i) \begin{cases} = exp(2z_{ij} \square e_i) P(e_i + ... + e_k) \\ \quad \text{si } i \text{ et } j \leq k \\ \text{ou si } \quad i \text{ et } j \geq k+1 \\ = P(e_1 + ... + e_k) \text{ si } i \leq k < j \end{cases}$$

• Si i et $j \geq k+1, P(e_1 + ... + e_k)x \in V^{\mathbb{C}}(e_1 + ... + e_k, 1)$ et
$V^{\mathbb{C}}(e_1 + ... + e_k, 1) \subset V^{\mathbb{C}}(e_i, 0)\Big(P(e_1 + ... + e_r)L(e_i) = 0$ car $e_1 + ... + e_r$ et e_i sont des idempotents orthogonaux$\Big)$ d'où

$$exp(2z_{ij} \square e_i) P(e_1 + ... + e_k)x = P(e_1 + ... + e_k)x.$$

• Si i et $j \leq k, exp(2z_{ij} \square e_i)$ est dans le groupe $N_{\mathbb{C}}$ de la sous-algèbre $V^{\mathbb{C}}(e_1 + ... + e_k, 1)$ donc a un déterminant 1. Dans tous les cas : $\Delta_k\big(exp(2z_{ij} \square e_i)x\big) = \Delta_k(x)$.
• Comme $A_{\mathbb{C}}$ normalise $N_{\mathbb{C}}$ il nous suffit donc de montrer la formule pour $x = \sum_{k=1}^{r} a_k e_k$ ce qui n'est pas difficile car

$$exp\Big(\sum_{i=1}^{r} \lambda_i L(e_i)\Big)\Big(\sum_{k=1}^{r} a_k e_k\Big) = \sum_{k=1}^{r} e^{\lambda_k} a_k e_k.$$

Cela entraine la proposition pour x inversible par rapport à tous les $e_1 + ... + e_i$ et donc pour x quelconque.

Remarque : Cette proposition entraine entre autre que si $z \in V^{\mathbb{C}}$ admet une décomposition comme dans le théorème 1, alors

$$\Delta_k z = \prod_{i=1}^{i=k} a_i \neq 0$$

et donc z sera inversible par rapport à chaque $e_1 + ... + e_k \quad (1 \leq k \leq r)$.

B.- L'espace préhomogène $(A_{\mathbb{C}} N_{\mathbb{C}}, V^{\mathbb{C}})$

On va traduire les résultats trouvés concernant les algèbres de Jordan en terme d'espace préhomogène.

Notons ρ l'action naturelle de $A_{\mathbb{C}} N_{\mathbb{C}}$ sur $V^{\mathbb{C}}$: $\rho(g)x = g(x)$
et soit :

$$S_{\mathbb{C}} = \left\{ x \in V^{\mathbb{C}} / \prod_{k=1}^{r} \Delta_k(x) = 0 \right\}$$

Proposition 3 : *On a :*

$$A_{\mathbb{C}} N_{\mathbb{C}} = \Big\{ g \in Str(V^{\mathbb{C}}) / \textit{pour tout } x \textit{ de } V^{\mathbb{C}} \textit{ on a :}$$
$$(gx_{ij})_{kl} = 0 \qquad \textit{si } (k,l) < (i,j)$$
$$(gx_{ij})ij = \lambda_{ij} x_{ij} \qquad \lambda_{ij} \neq 0 \Big\}$$

(où $x = \sum_{i,j} x_{ij}$ est la décomposition de Peirce de x et où l'on a mis l'ordre lexicographique sur les couples (i,j)) .

• Soit T le sous-groupe de $Str(V^{\mathbb{C}})$ introduit dans la proposition, les éléments de T sont représentés dans une base adaptée à la décomposition de Peirce $\bigoplus_{i \leq j} V_{i,j}$, par une matrice triangulaire inférieure (avec éléments diagonaux $\neq 0$).

• Il n'est pas difficile, mais un peu fastidieux de vérifier que $A_{\mathbb{C}}$ et $N_{\mathbb{C}}$ sont inclus dans T. Soit g dans T, posons $g(e) = n_0 a_0(e)$ (en effet si u est dans $V^{\mathbb{C}} \setminus S_{\mathbb{C}}$ il sera inversible par rapport aux $e_1 + ... + e_i \quad (1 \leq i \leq r)$ et le théorème 1 s'applique).
Soit $t = (n_0 a_0)^{-1} g$.
t étant dans le groupe de structure on a :

$$t\{x,y,z\} = \{tx, {}^t t^{-1} y, tz\} \qquad x,y,z \text{ dans } V^{\mathbb{C}}$$

où $\{x,y,z\} = (xy)z + x(yz) - y(xz)$.
Faisons $x = z = e$, il vient :

$${}^t t^{-1} y = ty \quad \text{c'est-à-dire :} \quad {}^t t^{-1} = t$$

On en déduit que la matrice de t dans une base adaptée à la décomposition de Peirce est diagonale, d'où $t \in A^{\mathbb{C}}$ Et donc $A^{\mathbb{C}} N^{\mathbb{C}}$ est algébrique.

Théorème 2 : *L'espace* $(\rho, A^{\mathbb{C}} N^{\mathbb{C}}, V^{\mathbb{C}})$ *est un espace préhomogène régulier de lieu singulier* $S^{\mathbb{C}}$ *; les invariants fondamentaux sont les polynômes* Δ_k .

Le théorème 1 nous donne la transitivité sur $V^{\mathbb{C}} \setminus S^{\mathbb{C}}$ la proposition 2 le fait que $V^{\mathbb{C}} \setminus S^{\mathbb{C}}$ soit une orbite.
$\det x = \Delta_r(x)$ est un invariant à hessien non nul. Enfin comme les Δ_k sont irréductibles et que

$$S^{\mathbb{C}} = \left\{ x \in V^{\mathbb{C}} / \prod_{k=1}^{r} \Delta_k(x) = 0 \right\}$$

ce sont les seuls invariants fondamentaux. Nous nous trouvons donc dans le cadre des espaces préhomogènes étudiés par F.Sato dans **[Sat.]**

Remarque : Par la proposition 2, le caractère de l'invariant relatif Δ_k est :

$$\chi_k(a) = exp \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \quad \text{si} \quad a = exp \sum_{i=1}^{r} \lambda_i L(e_i)$$

Soit :

$$S = \left\{ x \in V / \prod_{k=1}^{r} \Delta_k(x) = 0 \right\} = S^{\mathbb{C}} \cap V.$$

En utilisant la remarque suivant le théorème 1, on montre la :

Proposition 4 : *Soit* $\varepsilon = (\varepsilon_1, ..., \varepsilon_r)$, $(\varepsilon_i = \pm 1)$*; posons*

$$\Omega_\varepsilon = \left\{ x \in V \setminus S / sgn \Delta_k(z) = \prod_{i=1}^{k} \varepsilon_i \right\}.$$

Sous l'action du groupe AN*, les orbites de* $V \setminus S$ *sont les ensembles* Ω_ε *. On a :*

$$\Omega_\varepsilon = AN(\varepsilon_1 e_1 + ... + \varepsilon_r e_r)$$

• Comme

$\Delta_k(\varepsilon_1 e_1 + ... + \varepsilon_r e_r) = \prod_{i=1}^{k} \varepsilon_i$, on aura par la proposition 2 : $AN(\varepsilon_1 e_1 + ... + \varepsilon_e e_r) \subset \Omega_\varepsilon$

• Si x est dans Ω_ε on aura $x = \tau(z^{(1)})...\tau(z^{(r-1)}\Big(\sum_{k=1}^{r} a_k e_k\Big)$ avec $a_k \in \mathbb{R}^*$ Il suffit alors d'écrire : $\sum_{k=1}^{r} a_k e_k$ sous la forme $\sum_{k=1}^{r} a'_k \varepsilon_k e_k$ avec $a'_k > 0$ et de remarquer que :

$$\sum_{k=1}^{r} a'_k \varepsilon_k e_k = exp\Big(\sum_{k=1}^{r} log(a'_k) L(ek)\Big)\Big(\sum_{k=1}^{r} \varepsilon_k e_k\Big)$$

Remarque : Pour $\varepsilon = (1, ..., 1)$ on a $\Omega_\varepsilon = \Omega$ le cône de l'algèbre V .

Soit maintenant ρ^* l'action de $A_{\mathbb{C}} N_{\mathbb{C}}$ sur $V^{\mathbb{C}}$: $\rho^*(g)x = ({}^t g)^{-1} x$.

En utilisant le théorème 1' et un analogue de la proposition 2, on montre alors, d'une manière identique, que l'espace $(\rho^*, A_{\mathbb{C}} N_{\mathbb{C}}, V^{\mathbb{C}})$ est préhomogène régulier de lieu singulier $S^*_{\mathbb{C}} = \{x \in V^{\mathbb{C}} / \prod_{k=1}^{r} \Delta_k^*(x) = 0\}$,les invariants fondamentaux étant les polynômes Δ_k^*. L'espace préhomogène $(\rho^*, A_{\mathbb{C}} \ N_{\mathbb{C}}, V^{\mathbb{C}})$ s'identifie au dual de $(\rho, A_{\mathbb{C}} N_{\mathbb{C}}, V^{\mathbb{C}})$.

Les orbites de $V \setminus S^*(S^* = S^*_{\mathbb{C}} \cap V)$ sous cette action de $A_{\mathbb{C}} N_{\mathbb{C}}$ sont les ouverts :

$$\Omega^*_\varepsilon = \Big\{x \in V \setminus S^* / sign \Delta_k^*(x) = \prod_{i=r-k+1}^{r} \varepsilon_i\Big\} = \rho^*(AN)\Big(\sum_{i=1}^{r} \varepsilon_i e_i\Big)$$

(où $\varepsilon = (\varepsilon_1, ..., \varepsilon_r)$, $\varepsilon_i = \pm 1$).

Remarque : Soit z dans Ω_ε, il s'écrira :

$$z = n\Big(\sum_{k=1}^{r} a_k \varepsilon_k e_k\Big) \qquad a_k > 0$$

D'où

$$z^{-1} = {}^t n^{-1}\Big(\sum_{k=1}^{r} \frac{1}{a_k} \varepsilon_k e_k\Big) \in \rho^*(AN)\Big(\sum_{k=1}^{r} \varepsilon_k e_k\Big)$$

(en effet $\Big(g(y)\Big)^{-1} = {}^t\, g^{-1}(y^{-1})$) et donc :

$$\Delta_k(z) = \Delta_r(z)\Delta^*_{r-k}(z^{-1}) \quad (1 \leq k < r)$$

$$\big(\Delta_r(z) = \det z\big)$$

L'application $z \longmapsto z^{-1}$ échange Ω_ε et Ω^*_ε .

II.- APPLICATIONS AUX INTEGRALES ZETA

A- Les intégrales zêta.

Introduisons une notation : pour $\sigma = (\sigma_1, ..., \sigma_r)(\sigma_i$ dans $\mathbb{C})$, et x dans V on pose :

$$\Delta_\sigma(x) = |\Delta_1(x)|^{\sigma_1 - \sigma_2} ... |\Delta_{r-1}(x)|^{\sigma_{r-1} - \sigma_r} |\Delta_r(x)|^{\sigma_r}$$
$$\Delta^*_\sigma(x) = |\Delta^*_r(x)|^{\sigma_1} |\Delta^*_{r-1}(x)|^{\sigma_2 - \sigma_1} ... |\Delta^*_1(x)|^{\sigma_r - \sigma_{r-1}}$$

Pour f dans $\mathcal{S}(V)$ et pour $\sigma = (\sigma_1, ..., \sigma_r)$ avec $\mathcal{R}e\sigma_1 \geq ... \geq \mathcal{R}e\sigma_r \geq 0$ posons :

$$\Psi_\varepsilon(f;\sigma) = \int_{\Omega_\varepsilon} f(x)\Delta_\sigma(x)dx.$$

Cette intégrale va définir une distribution tempérée, holomorphe dans le domaine $\left\{\sigma \in \mathbb{C}^r / \mathcal{R}e\sigma_1 > ... > \mathcal{R}e\sigma_r > 0\right\}$:
De même pour $\sigma = (\sigma_1, ..., \sigma_r)$ avec $\mathcal{R}e\sigma_r \geq ... \geq \mathcal{R}e\sigma_1 \geq 0$

$$\Psi^*_\varepsilon(f;\sigma) = \int_{\Omega^*_\varepsilon} f(x)\Delta^*_\sigma(x)dx.$$

(Ici dx désigne la mesure euclidienne associée au produit scalaire $< \ , \ >$).
Ces intégrales admettent des prolongements méromorphes à $\mathbb{C}^r$ et définissent des distributions tempérées (cf[**Sat.**]).
Les valeurs $\sigma_1, ..., \sigma_r$ singulières sont situées dans une réunion dénombrable d'hyperplans ayant des équations à coefficients réels.
La fonction gamma du cône Ω est :

$$\Gamma_\Omega(\sigma) = \int_\Omega e^{-<x,e>} \Delta_{\sigma - n/r}(x)dx = (2\pi)^{\frac{n-r}{2}} \prod_{j=1}^{r} \Gamma\left(\sigma_j - \frac{d}{2}(j-1)\right)$$

$(\mathcal{R}e\sigma_1 \geq ... \mathcal{R}e\sigma_r \geq n/r)$.

Pour f dans $\mathcal{S}(V)$ la transformée de Fourier $\hat{f}$ est :

$$\hat{f}(\xi) = \int_V e^{-i<x,\xi>} f(x)dx$$

(on note $\sigma - n/r$ le r-uplet $(\sigma_1 - n/r, ..., \sigma_r - n/r)$).

Proposition 1 : *On a les relations*

$$\Psi^*_\varepsilon(\hat{f}, \sigma - \frac{n}{r}) = \Gamma_\Omega(\widetilde{\sigma}) \sum_{\eta \in \mathcal{E}} v_{\varepsilon\eta}(\sigma) \Psi_\eta(f, -\sigma)$$

et

$$\Psi_\varepsilon(\hat{f}, \sigma - \frac{n}{r}) = \Gamma_\Omega(\sigma) \sum_{\eta \in \mathcal{E}} w_{\varepsilon\eta}(\sigma) \Psi^*_\eta(f, -\sigma)$$

avec $\widetilde{\sigma} = (\sigma_r, \sigma_{r-1}, ..., \sigma_1), \mathcal{E} = \{\varepsilon = (\varepsilon_1, ..., \varepsilon_r), \varepsilon_i = \pm 1\}$ *et :*

$$v_{\varepsilon\eta}(\sigma) = exp - \frac{i\pi}{2}\Big(\sum_{k=1}^{r} \varepsilon_k \eta_k \sigma_k + \frac{d}{2} \sum_{k=1}^{r-1} \eta_k \Big(\sum_{j=k+1}^{r} \varepsilon_j - (r-k)\varepsilon_k \Big)\Big)$$

$$w_{\varepsilon\eta}(\sigma) = exp - \frac{i\pi}{2}\Big(\sum_{k=1}^{r} \varepsilon_k \eta_k \sigma_k + \frac{d}{2} \sum_{k=1}^{r-1} \varepsilon_k \Big(\sum_{j=k+1}^{r} \eta_j - (k-1)\eta_k \Big)\Big)$$

- La matrice (r,r) notée U dans **[Sat.]** page 450, (31) sera ici

$$\begin{bmatrix} & & 1 & -1 \\ & \iddots & 0 & -1 \\ 1 & \iddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

cela découle des valeurs des caractères de Δ_k et Δ^*_k :

$$\chi_k(a) = exp \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \quad ; \quad \chi^*_k(a) = exp - \sum_{i=r-k+1}^{r} \lambda_i$$

(si $a = exp \sum \lambda_i L(e_i)$).
et le r-uplet noté λ dans**[Sat.]** page 456, relation (5-4) sera $(0, ..., 0, \frac{n}{r})$ puisque

$$det\Big(\rho\Big(exp \sum_{i=1}^{r} \lambda_i L(e_i)\Big)\Big) = exp \frac{n}{r} (\sum_{i=1}^{r} \lambda_i).$$

D'où la relation fonctionnelle a priori.
Les valeurs explicites des coefficients résultent alors de la relation (21) de[**Sa.-Fa.**].

Remarque 1 : Nous avons fait nos calculs dans un système complet orthogonal $\{e_1, ..., e_r\}$, si maintenant nous prenons comme système $\{e_r, ..., e_1\}$ il n'est pas difficile de constater que le polynôme Δ_k (resp Δ_k^*) construit avec ce nouveau système est le polynôme Δ_k^* (resp. Δ_k) du système $\{e_1, ..., e_r\}$ et que l'orbite Ω_ε (resp. Ω_ε^*) est l'ancienne orbite $\Omega_{\widetilde{\varepsilon}}^*$ (resp. $\Omega_{\widetilde{\varepsilon}}$) avec $\widetilde{\varepsilon} = (\varepsilon_r, ..., \varepsilon_1)$, ce qui permet de "passer" d'une relation fonctionnelle à l'autre, on retrouve

$$v_{\widetilde{\varepsilon}\eta}(\widetilde{\sigma}) = w_{\varepsilon\eta}(\sigma).$$

Remarque 2 : Dans notre situation, nous pouvons calculer les polynômes de Bernstein que F. Sato définit dans[**Sat.**]. Partons en effet de la relation :

$$\int_\Omega e^{-<x,y>} \Delta_\sigma(x)(detx)^{-n/r} dx = \Gamma_\Omega(\sigma)\Delta_\sigma(y^{-1})$$

(où y est dans Ω et $\mathcal{R}e\sigma_1 \geq \mathcal{R}e\sigma_2 \geq ... \geq \mathcal{R}e\sigma_r \geq \frac{n}{r}$ voir [**Fa1.**]).
Remarquons que par les relations

$$\Delta_k(x) = \Delta_r(x)\Delta_{r-k}^*(x^{-1}) \qquad (1 \leq k < r)$$

nous avons

$$\Delta_\sigma(y^{-1}) = \Delta_{-\sigma}^*(y)$$

Posons $\Delta_{\mathbf{m}}(\partial) = \Delta_1^{m_1-m_2}(\partial)...\Delta_r^{m_r}(\partial)$ pour $\mathbf{m} = (m_1, ..., m_r)$ m_i dans $\mathbb{N}$ avec $m_1 \geq m_2 \geq ... \geq m_r \geq 0$ il vient (pour σ convenable)

$$\Gamma_\Omega(\sigma)\Delta_{\mathbf{m}}(\partial)\Delta_{-\sigma}^*(y) = \int_\Omega e^{-<x,y>} \Delta_{\mathbf{m}}(-x)\Delta_\sigma(x)(detx)^{-n/r} dx.$$

D'où finalement par prolongement analytique :

$$\Delta_{\mathbf{m}}(\partial)\Delta_\sigma^*(y) = (-1)^{|\mathbf{m}|}\frac{\Gamma(\mathbf{m}-\sigma)}{\Gamma_\Omega(-\sigma)}\Delta_{\sigma-\mathbf{m}}^*(y)$$

(y dans $\Omega, \sigma \in \mathbb{C}^r$).
Utilisant la remarque 1, on aura aussi :

$$\int_\Omega e^{-<x,y>}\Delta_\sigma^*(x)(detx)^{-n/r}dx = \Gamma_\Omega(\widetilde{\sigma})\Delta_\sigma^*(y^{-1})$$

(y dans Ω, σ convenable)

En faisant le même raisonnement, on trouve, pour :

$$\Delta_{\mathbf{m}}^*(\partial) = \Delta_r^{*m_1}(\partial)\Delta_{r-1}^{*m_2-m_1}(\partial)...\Delta_1^{*m_r-m_{r-1}}(\partial)$$

$$(\mathbf{m} = (m_1, ..., m_r),\ m_r \geq m_{r-1} \geq ... \geq m_1 \geq 0\ ;\ m_i \in \mathbb{N})$$

$$\Delta_{\mathbf{m}}^*(\partial)\Delta_\sigma(y) = (-1)^{|\mathbf{m}|}\frac{\Gamma_\Omega(\widetilde{\mathbf{m}} - \widetilde{\sigma})}{\Gamma_\Omega(-\widetilde{\sigma})}\Delta_{\sigma-\mathbf{m}}^*(y)$$

(y dans $\Omega, \sigma \in \mathbb{C}^r$)

Remarque 3 : La connaissance des polynômes de Berstein permet, grâce à la relation (21) de[**Sa.-Fa.**] , de redémontrer l'équation fonctionnelle des $\Psi_\varepsilon(f, \sigma)$. Cette démonstration est due à N. Bopp et H. Rubenthaler (voir[**Bo.-Ru.**]), le principe m'a été aimablement communiqué par H. Rubenthaler.
Posons :

$$T(f, \sigma) = \Psi_\varepsilon(\hat{f}, \sigma - \frac{n}{r}) - \Gamma_\Omega(\sigma)\sum_{\eta\in\mathcal{E}} w_{\varepsilon\eta}(\sigma)\Psi_\eta^*(f, -\sigma).$$

Par la relation (21) de [**Sa.-Fa.**], cette distribution est portée par

$$S^* = \left\{x \in V / \prod_{k=1}^r \Delta_k^*(x) = 0\right\}$$

(pour les valeurs de σ où elle existe).

On va exhiber un ouvert $\mathcal{U}$ de $\mathbb{C}^r$ où cette distribution a un ordre borné par un entier M (uniformément pour $\sigma \in \mathcal{U}$). Un lemme de Shintani (voir [**Sh.**]) affirme alors que pour tout entier $N > M$:

$$(\prod_{k=1}^r \Delta_k^*(x))^N T(f, \sigma) = 0 \qquad \forall\sigma \in \mathcal{U}, \forall f \in \mathcal{S}(V).$$

Cela entrainera par les identités de Bernstein que $T(f,.) = 0$ dans un ouvert de $\mathbb{C}^r$ et donc $T(f,.) = 0$ partout.

On commence par remarquer que $\Psi_\varepsilon(\hat{f}, \sigma - \frac{n}{r})$ est d'ordre uniformément borné pour σ dans l'ouvert :

$$L = \left\{ \sigma \in \mathbb{C}^r / \mathcal{R}e\sigma_1 > ... > \mathcal{R}e\sigma_r > \frac{n}{r} \right\}$$

car pour σ dans L la distribution $\Psi_\varepsilon(., \sigma - \frac{n}{r})$ est une mesure. En employant le remarque 2, on obtient avec $\mathbf{m} = (rk, (r-1)k, ..., k) \quad (k \in \mathbb{N})$

$$\Psi^*_\eta(f, -\sigma) = b(\sigma)\Psi^*_\eta\Big(P(\partial)f, -\sigma + \mathbf{m}\Big)$$

avec $P(\partial) = \Delta_{\mathbf{m}}(\partial)$ et où $b(\sigma)$ est une fraction rationnelle (dépendant de k), les points singuliers de $b(\sigma)$ étant réels. On peut donc trouver un ouvert $\mathcal{U}$ borné de L ($\mathcal{U}$ évite les points singuliers de $b(\sigma)$ et $\Gamma_\Omega(\sigma)$) où $T(., \sigma)$ a un ordre borné par M (uniformément en σ dans $\mathcal{U}$). Donc, pour $N > M$:

$$T\Big(\big(\prod_{k=1}^{r} \Delta^*_k(x) \big)^N f, \sigma \Big) = 0 \quad \forall \sigma \in \mathcal{U}, \forall f \in \mathcal{S}(V)$$

c'est-à-dire :

$$\Psi_\varepsilon\Big(\big(\prod_{k=1}^{r} \Delta^*_k(x)^N f \big)^\wedge, \sigma - \frac{n}{r} \Big) = \Gamma_\Omega(\sigma) \sum_{\eta \in \mathcal{E}} w_{\varepsilon\eta}(\sigma) \Psi_\eta(\prod_{k=1}^{r} \Delta^*_k(x)^N f, -\sigma).$$

D'où en utilisant les identités de Bernstein :

$$\Psi_\varepsilon(\hat{f}, \sigma - \frac{n}{r} - \mathbf{M}) = \sum_{\eta \in \xi} c_{\varepsilon\eta}(\sigma) \Psi_\eta(f, -\sigma + \mathbf{M})$$

(où $\mathbf{M} = (rN, (r-1)N, ..., N)$. Mais pour f à support dans $V \setminus S^*$, on a $T(f, \sigma) = 0$ d'où

$$c_{\varepsilon\eta}(\sigma) = \Gamma_\Omega(\sigma - \mathbf{M}) w_{\varepsilon\eta}(\sigma - \mathbf{M})$$

Donc pour σ dans $\mathcal{U}$ et pour f dans $\mathcal{S}(V)$:

$$T(f, \sigma - \mathbf{M}) = 0$$

d'où la conclusion.

Remarquons enfin que la relation

$$\Delta_\sigma(x^{-1}) = \Delta^*_{-\sigma}(x)$$

permet de définir les distributions Ψ_ε (et Ψ^*_ε) sur l'espace des fonctions

$$\overset{\vee}{\mathcal{S}} = \left\{ g / g(x) = f(x^{-1}), \quad x \text{ inversible et } f \in \mathcal{S}(V) \right\}.$$

En effet pour $\mathcal{R}e\sigma_r \geq ... \geq \mathcal{R}e\sigma_1 \geq \frac{n}{r}$ l'intégrale

$$\Psi^*_\varepsilon(f, \sigma - \frac{n}{r}) = \int_{\Omega^*_\varepsilon} f(x)\Delta^*_\sigma(x) d^\times x$$

est absolument convergente, d'où (la mesure $d^\times x$ est invariante par l'application $x \longmapsto x^{-1}$)

$$\Psi^*_\varepsilon(f, \sigma - \frac{n}{r}) = \int_{\Omega_\varepsilon} f(x^{-1})\Delta_{-\sigma}(x) d^\times x$$

$$\mathcal{R}e\sigma_r \geq ...\mathcal{R}e\sigma_1 \geq \frac{n}{r}.$$

On peut donc prolonger les intégrales de droite et poser :

$$\Psi_\varepsilon(\check{f}, -\sigma) = \Psi^*_\varepsilon(f, \sigma - \frac{2n}{r})$$

(où $\check{f}(x) = f(x^{-1})$).

Notons que l'on peut prolonger $\check{f}$ à V tout entier en posant $\check{f}(x) = 0$ si x non inversible, on obtient ainsi une fonction C^∞ sur V, mais $\check{f}$ ne sera pasdans $\mathcal{S}(V)$.

B - Une application

Notons G la composante connexe de $Str(V)$ contenant l'identité et f_j l'élément de V défini par :

$$f_j = e_1 + \cdots + e_{r-j} - e_{r-j+1} - \cdots - e_r \quad (0 \leq j \leq r \text{ avec } f_r = -e)$$

Les orbites ouvertes de V sous l'action de G sont les ouverts $\Omega_j = Gf_j = G/H_j$ où :

$$H_j = \{g \in G / gf_j = f_j\}$$

En particulier $\Omega_0 = \Omega$ est le cône de V et $H_0 = K$ est un sous-groupe compact maximal de G, d'algèbre de Lie $\mathcal{K}$. Pour $0 < j < r$, Ω_j est un espace symétrique pseudo-riemannien.
Rappelons que les racines restreintes de $(\mathcal{G}, \mathcal{A})$ sont les formes linéaires $\frac{1}{2}(\gamma_j - \gamma_i)$ $(i \neq j)$, où $\{\gamma_i\}$ est la base duale de $L(e_i)$; au paragraphe B du chapitre I nous avons pris comme racines positives les $\frac{1}{2}(\gamma_j - \gamma_i)$ avec $i < j$, leur demi-somme est alors :

$$\frac{d}{4}\sum_{i=1}^{r}(2i + 1 - r)\gamma_i.$$

Soit M le centralisateur de $\mathcal{A}$ dans K, pour λ dans $\mathbb{C}^r$ nous posons :

$$E_\lambda(G) = \left\{f \ \ C^\infty \ \text{ sur } \ G/f(gman) = a^{i\lambda-\rho}f(g) \text{ avec } man \in MAN\right\}$$

où $\rho = (\rho_1, ..., \rho_r) \quad \rho_j = \frac{d}{2}(2j - 1 - r)$ et

$$a^\nu = exp(\sum_{k=1}^{r} \nu_k \frac{t_k}{2}) \quad \text{si} \quad a = exp(\sum_{k=1}^{r} t_k L(e_k))$$

G agit sur $E_\lambda(G)$ par : $\pi_\lambda(g)f(x) = f(g^{-1}x)$, on sait que si λ est dans $\mathbb{R}^r, \pi_\lambda$ sera unitarisable : c'est la série principale de classe 1 de G, associée à MAN.
Suivant alors G. Olafsson (cf **[Ol.]**) on définit les noyaux de Poisson pour
$\sigma(\lambda) = 1/2(-i\lambda + \rho)$

$$P_\lambda^\varepsilon(g) = \begin{cases} \Delta_{\sigma(\lambda)}(g^{-1}f_j) & \text{si} \quad g^{-1}f_j \in \Omega_\varepsilon \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

(j est la signature de $\varepsilon = (\varepsilon_1 ... \varepsilon_r)$: $\sum_{k=1}^{r} \varepsilon_k = r - 2j$) .
Par la proposition 2 du chapitre 1, il vient :

$$P_\lambda^\varepsilon(gan) = a^{i\lambda-\rho}P_\lambda^\varepsilon(g).$$

D'autre part si m est dans M , il centralise $\mathcal{A}$ et donc pour tout i :

$$mL(e_i) = L(e_i)m$$

par suite : $\forall\ i, i \leq i \leq r \quad m(e_i) = e_i$. Donc

$$P^{\varepsilon}_{\lambda}(gman) = a^{i\lambda-\rho}P^{\varepsilon}_{\lambda}(g).$$

Suivant toujours G. Olafsson, on introduit les transformées de Fourier partielles associées aux espaces G/H_j :

$$\mathcal{F}^{\varepsilon}_{\lambda}f(x) = \int_{G/H_j} f(yH_j)P^{\varepsilon}_{\lambda}(y^{-1}x)d\overline{y}$$

x étant dans G et f dans $\mathcal{D}(G/H_j)$.
Par un choix convenable de la mesure $d\overline{y}$:

$$\mathcal{F}^{\varepsilon}_{\lambda}f(x) = \Psi_{\varepsilon}(\varphi_x, \sigma(\lambda) - \frac{n}{r})$$

où $\varphi_x(v) = f(xv) \quad (v \in \Omega_j; x \in G)$.
Pour f dans $\mathcal{D}(G/H_j)$, la fonction $\mathcal{F}^{\varepsilon}_{\lambda}f$ sera un élément de $E_{\lambda}(G)$ et d'après la formule précédente on peut étendre $\mathcal{F}^{\varepsilon}_{\lambda}$ aux fonctions qui sont restrictions à Ω_j d'un élément de l'espace $\mathcal{S}(V)$.
Introduisons maintenant la transformation de Fourier euclidienne modifiée (comme E. Stein dans **[St.]**) :

$$\overset{*}{f}(y) = |\Delta_r(y)|^{-n/2r} \int_{\vee} e^{-i<x,y^{-1}>} f(x)|\Delta_r(x)|^{-n/2r} \frac{dx}{(2\pi)^{n/2}}$$

$$(\text{c'est un élément de } \quad \overset{\vee}{\mathcal{S}}(V)).$$

Par la formule $(g(y))^{-1} = {}^t g^{-1}(y^{-1}) \quad (g \text{ dans } G)$ on voit que la transformation ainsi modifiée commute à l'action de G. De plus, par construction c'est une isométrie de $L^2(V, d^{\times}x)$.
On peut étendre $\mathcal{F}^{\varepsilon}_{\lambda}$ aux fonctions $\overset{*}{f}$ (par la dernière remarque du paragraphe A).

Théorème 1: *Pour f dans $\mathcal{S}(V)$*

$$\mathcal{F}_\lambda^\varepsilon(\overset{*}{f}) = \sum_{\eta\in\mathcal{E}} a_{\varepsilon\eta}(\lambda)\mathcal{F}_\lambda^\eta(f)$$

avec :

$$a_{\varepsilon\eta}(\lambda) = (2\pi)^{-r/2}\Big(\prod_{j=1}^{r}\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{i}{2}\lambda_j)\Big)v_{\varepsilon\eta}\big(-\sigma(\lambda)+\frac{n}{2r}\big).$$

La matrice $A(\lambda) = \big(a_{\varepsilon\eta}(\lambda)\big)$ vérifie

$$^t\overline{A(\lambda)} = A(\overline{\lambda})^{-1}.$$

En particulier si $\lambda \in \mathbb{R}^r$, $A(\lambda)$ est une matrice unitaire.

On a :

$$\overset{*}{f}(y) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}(dety)^{-n/2r}(f.|\Delta_r|^{-n/2r})^\wedge(y^{-1})$$

La transformation $f \longmapsto \overset{*}{f}$ commute à l'action de G, il suffira d'établir la relation pour $x = e$. Il vient :

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_\lambda^\varepsilon\ \overset{*}{f}(e) &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\Psi_\varepsilon^*\Big((f.|\Delta_r|^{-n/2r})^\wedge, -\sigma+\frac{n}{2r}-\frac{n}{r}\Big)\\ &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\Gamma_\Omega(-\widetilde{\sigma}+\frac{n}{2r})\sum_{\eta\in\mathcal{E}} v_{\varepsilon\eta}(-\sigma+\frac{n}{2r})\Psi_\eta(f,\sigma-\frac{n}{r})\end{aligned}$$

avec :

$$\Gamma_\Omega(-\widetilde{\sigma}+\frac{n}{2r}) = (2\pi)^{\frac{n-r}{2}}\prod_{j=1}^{r}\Gamma(\frac{i}{2}\lambda_j+\frac{1}{2}).$$

(On a écrit σ (resp. $\widetilde{\sigma}$) pour $\sigma(\lambda)$ (resp. $\widetilde{\sigma(\lambda)}$).

Pour la propriété de la matrice, on considère l'inverse de la transformation $f \longmapsto \overset{*}{f}$c'est :

$$f \longmapsto |dety|^{n/2r}(\overset{\vee}{f}\,|\Delta_r|^{-n/2r})^\wedge(-y).$$

La transformée de Fourier $\mathcal{F}_\lambda^\varepsilon$ de cette fonction nous donne alors (en $x = e$) :

$$\begin{aligned}
&(2\pi)^{-n/2}\Psi_\varepsilon\Big(\Big((|\Delta_r|^{n/2r}f)^\vee\Big)^\wedge(-y)\ ,\ \sigma - \frac{n}{r} + \frac{n}{2r}\Big)\\
&= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\Psi_{-\varepsilon}\Big(\Big((|\Delta_r|^{n/2r}f)^\vee\Big)^\wedge(y)\ ,\ \sigma + \frac{n}{2r} - \frac{n}{r}\Big)\\
&= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\Gamma_\Omega(\sigma + \frac{n}{2r})\sum_{\eta\in\mathcal{E}} w_{\varepsilon\eta}(\sigma + \frac{n}{2r})\Psi_\eta^*(f^\vee, -\sigma - \frac{n}{r})
\end{aligned}$$

Mais

$$\begin{aligned}
\Psi_\eta^*(\hat{f}, -\sigma - \frac{n}{r}) &= \Psi_\eta(f, \sigma + \frac{n}{r} - \frac{2n}{r})\\
&= \mathcal{F}_\lambda^\eta(f)
\end{aligned}$$

d'où $\Big(A(\lambda)\Big)^{-1} = \Big(b_{\varepsilon\eta}(\lambda)\Big)$ avec

$$b_{\varepsilon\eta}(\lambda) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\Gamma_\Omega(\sigma + \frac{n}{2r})w_{-\varepsilon\eta}(\sigma + \frac{n}{2r}).$$

Il vient :

$$\Gamma_\Omega(\sigma + \frac{n}{2r}) = (2\pi)^{\frac{n-r}{2}}\prod_{j=1}^{r}\Gamma(-\frac{i}{2}\lambda_j + \frac{1}{2}).$$

D'autre part, d'après la remarque 1 du paragraphe A :

$$w_{-\varepsilon\eta}\Big(\sigma(\lambda) + \frac{n}{2r}\Big) = v_{-\widetilde{\varepsilon\eta}}\Big(\widetilde{\sigma(\lambda)} + \frac{n}{2r}\Big).$$

On vérifie alors par le calcul :

$$\overline{v_{-\widetilde{\varepsilon\eta}}\Big(\widetilde{\sigma(\lambda)} + \frac{n}{2r}\Big)} = v_{\eta\varepsilon}\Big(-\sigma(\overline{\lambda}) + \frac{n}{2r}\Big)$$

Remarque : On a voulu présenter ici notre résultat concernant la matrice $A(\lambda)$ dans le cadre des transformées de Fourier partielles de G. Olafsson. Signalons que nous aurions pu interpréter notre résultat en termes de vecteurs distributions Hj invariants de la représentation π_λ, il faudrait alors plutôt se placer dans le cadre des travaux de E.P. Van den Ban.

TROISIEME PARTIE

ANALYSE DE FOURIER SUR UNE ALGEBRE DE JORDAN

I - LE CAS DU CONE Ω

On sait que (G,V) est une forme réelle d'un espace préhomogène au sens de Sato-Shintani. Une spécificité de notre situation est l'existence d'une orbite Ω qui soit un cône convexe auto-dual, propre.

On voudrait présenter quelques conséquences de ce fait.Nous ferons largement usage de la transformation de Laplace.

A - Les distributions $Z_0(.,s)$

Les résultats de ce paragraphe sont dûs à J.Faraut.

On considère pour f dans $\mathcal{S}(V)$ et s dans $\mathbb{C}$,(avec Re $s \geq \frac{n}{r}$) l'intégrale

$$Z_0(f,s) = \int_\Omega f(x)(\det x)^s \, d^\times x$$

il est clair que cela nous définit une distribution tempérée, de plus, la relation (valable pour Re s assez grand)

$$Z_0(\det(\partial)f,s) = (-1)^r Z_0(f,s-1).b\left(s-\frac{n}{r}\right)$$

nous permet de prolonger cette distribution d'une manière méromorphe sur $\mathbb{C}$ tout entier, cette relation nous montre en outre qu'en un point s_0 où le prolongement existe, la distribution $Z_0(.,s_0)$ est tempérée.

Théorème 1 : La fonction $s \to \frac{1}{\Gamma_\Omega(s)} Z_0(.,s)$est une application holomorphe à valeurs dans $\mathcal{S}'(V)$ qui ne s'annule jamais.

D'après la relation précédente, si s_0 est un pôle de $Z_0(.,s)$,son ordre de multiplicité est borné par le nombre de progressions $\{jd/2-i/i \in \mathbb{N}\}$ auxquelles s_0 appartient, c'est-à-dire par l'ordre de multiplicité du pôle s_0 pour la fonction $\Gamma_\Omega(s)$.

De plus la même relation nous montre que les coefficients du développement en série de Laurent de $Z_0(f,s)$ au voisinage d'un pôle définissent des éléments de $\mathcal{S}'(V)$ (voir [**Ra.**]).

Calculons la transformée de Laplace de $Z_0(.,s)$.

Pour tout ξ de Ω, $e^{-<x,\xi>}Z_0(.,s)$ est une distribution tempérée, méromorphe en s. On peut donc, suivant L. Schwartz définir la transformée de Laplace $\mathcal{L}(Z_0(.,s))(\xi+i\eta)$de $Z_0(.,s)$.C'est un élément de $\mathcal{S}'_\eta(V)$.

Les deux membres de l'égalité [**Fa1.**] : $\int_\Omega e^{-<x,z>}(\det x)^s d^\times x = \Gamma_\Omega(s)(\det z)^{-s}$

(Re $s > \frac{n}{r} - 1$, z dans Ω)

sont définies et holomorphes en z dans $\Omega+iV$ (det z ne s'annule pas dans le tube $iV+\Omega$) et donc $\mathcal{L}(Z_0(.,s))(z) = \Gamma_\Omega(s)(\det z)^{-s}$

pour Re $s > \frac{n}{r} - 1$ (on prend la détermination de $(\det z)^{-s}$ qui coïncide avec $(\det \xi)^{-s}$ lorsque $z = \xi \in \Omega$) .Cette relation se prolonge en s et on aura :

$$\mathcal{L}\left(\frac{1}{\Gamma_\Omega(s)} Z_0(.,s)\right) = (\det z)^{-s}$$

La distribution $(\det(\xi+i\eta))^{-s}$ de $\mathcal{S}'_\eta(V)$ n'étant jamais nulle,le théorème découlera de l'injectivité de la transformation de Laplace (voir **[Sch.]**).

□

Corollaire1:Les pôles de l'application $s \to Z_0(.,s)$ sont exactement ceux de la fonction gamma du cône $\Gamma_\Omega(s)$.

Remarques :Soit $\sum_{h=1}^{k(s_0)} \frac{B^h(.,s_0)}{(s-s_0)^h}$ la partie singulière du développement de Laurent de $Z_0(.,s)$ au voisinage du pôle s_0 d'ordre de multiplicité $k(s_0)$.Le calcul de la transformée de Laplace nous montre que

$$B^{k(0)}(.,0) = c\delta \qquad (c \text{ est une constante non nulle })$$

où δ est la masse de Dirac à l'origine.

C'est un résultat bien connu dans le cas $r = 2$ (cf **[G.-Ch.]**) ou encore dans le cas $V = Herm(r,\mathbb{C})$ (cf **[Ch.]**).

Par l'identité de Bernstein, on déduit : $B^{k(-q)}(.,-q) = c(q)(\det \partial)^q \delta$ ($q \in \mathbb{N}$, $c(q) \neq 0$)

On voit également que :

$$\mathcal{L}(B^1(.,(r-1)\tfrac{d}{2}))(z) = K(\det z)^{-(r-1)\frac{d}{2}} \text{ avec } K = \left(\frac{d}{2}\right)^{r-1}.(r-1)!$$

On pourra comparer ces résultats avec ceux de M.Lassalle **[La.]**.

Terminons ce paragraphe en calculant la transformée de Fourier de $Z_0(.,s)$.

Proposition 2 : On a $\hat{Z_0}(f,s) = \Gamma_\Omega(s)e^{-i\pi rs/2}\sum_{k=0}^{r} e^{i\pi ks} Z_k(f, -s+\frac{n}{r})$

On considère la transformée de Fourier comme valeur au bord de la transformée de Laplace. Pour un élément f dans $\mathcal{S}_\eta(V)$:

$$<\mathcal{L}(Z_0(.,s))(\xi+i\eta), f> = Z_0(e^{<x,\xi>}\hat{f}, s)$$

$$= \Gamma_\Omega(s) \int_V (\det(\xi+i\eta))^{-s} f(\eta)d\eta$$

mais $\lim_{\substack{\xi\to 0 \\ \xi\in\Omega}} Z_0(\det(\xi+i\eta))^{-s} = e^{\frac{-i\pi}{2}rs}\, e^{i\pi sk}\, |\det\eta|^{-s}$

d'où l'égalité pour Re $s < 0$ et la proposition s'en déduit par prolongement. □

B - L'application moyenne

Rappelons (cf **[Ru.]**) que pour φ dans $\mathcal{D}(\Omega)$ on définit la fonction $M\varphi(t)$ intégrable sur $[0, +\infty[$ pour la mesure $\frac{dt}{t}$ par la relation :

$$\int_\Omega \psi(\det x)\varphi(x)d^\times x = \int_0^\infty \psi(t)M\varphi(t)\frac{dt}{t}$$

pour toute fonction $\psi(t)$ localement intégrable sur $[0,+\infty[$ pour la mesure $\frac{dt}{t}$.

En fait (cf **[Ru.]**) pour tout $t > 0$, $\varphi \to M\varphi(t)$ est une mesure tempérée sur V,et pour φ dans $\mathcal{S}(V)$ la fonction $M\varphi(t)$ va être dans $C^\infty(]0,+\infty[)$ et à décroissance rapide à l'infini ainsi que toutes ses dérivées; elle présente une singularité à l'origine.

D'autre part pour Re $s > \frac{n}{r}$: $\qquad Z_0(f,s) = \mathfrak{M}(Mf)(s)$

où $\mathfrak{M}F(s)$ désigne la transformée de Mellin de F :

$$\mathfrak{M}F(s) = \int_0^{+\infty} F(t)t^{s-1}dt$$

Pour x fixé dans $\mathbb{R}$ on a : $\qquad \forall N \in \mathbb{N} \quad \lim_{|y|\to+\infty} y^N Z_0(f,x+iy) = 0$

(cela résulte de l'application répétée de l'identité de Bernstein.)

La formule de Mellin inverse nous donne alors :

$$Mf(t) = \frac{1}{2i\pi}\int_{Res=a} t^{-s}Z_0(f,s)dt \qquad a > \frac{n}{r} - 1.$$

Proposition 3 :La fonction Mf admet en 0 un développement asymptotique dans l'échelle des fonctions:

$$t^{-j\frac{d}{2}+i}\ (\text{Log } t)^{k-1} \quad \text{où } i,j \in \mathbb{N} \ ;\ 0\le j\le r-1 \text{ et } \quad 1\le k\le k(j\tfrac{d}{2} - i).$$

(On rappelle que k(q) désigne l'ordre du pôle q pour Γ_Ω)

En effet le théorème des résidus nous donne pour $a' < a$

$$Mf(t) = \frac{1}{2i\pi}\int_{Res=a'} t^{-s}Z_0(f,s)dt + \sum_{a'<p_i\leq(r-1)\frac{d}{2}} Res(t^{-s}Z_0(f,s),p_i)$$

p_i étant un pôle de multiplicité $k(p_i)$ pour la distribution $Z_0(f,s)$,le résidu de la fonction $t^{-s}Z_0(f,s)$ sera une combinaison linéaire d'éléments du type $t^{-p_i}(\log t)^m$ avec $0\leq m\leq k(p_i)-1$; d'autre part,quand t tend vers 0:

$$\int_{Res=a'} t^{-s}Z_0(f,s)dt = O(t^{-a'})$$ □

Grâce aux résultats de **[Ru.]** on peut préciser l'image de $\mathcal{S}(V)$ par l'application moyenne, nous le ferons plus généralement au chapitre suivant.

C.La transformée de Laplace de $\delta(\det x -1)\chi_\Omega(x)$

Posons : $\Omega^1 = \{x \in \Omega / \det x = 1\}$ $G_1 = \{g \in G / \det g = 1\}$.

On a : $\Omega \cong]0,+\infty[\times\Omega^1$

$x \rightarrow ((\det x),u)$ $x = (\det x)^{1/r} u$

Ω^1 étant homogène sous l'action de G_1, et la mesure $d^\times x$ étant G-invariante, on en déduit l'existence d'une mesure σ sur Ω^1, G_1-invariante, telle que pour f intégrable par rapport à $d^\times x$:

$$\int_\Omega f(x)d^\times x = \int_0^{+\infty}\frac{dt}{t}\left[\int_{\Omega^1} f(t^{1/r}u)d\sigma(u)\right]$$

(f intégrable par rapport à $d^\times x$).

La fonction Mf(t) s'exprimera alors de la façon suivante :

$$Mf(t) = \int_{\Omega^{(1)}} f(t^{1/r}u)d\sigma(u).$$

Considérons la transformée de Laplace de la mesure σ:

$$F(z) = \int_{\Omega^1} e^{-<x,z>}d\sigma(x) \qquad z \in \Omega+iV.$$

C'est une fonction holomorphe dans $\Omega+iV$.

Proposition 4 :La fonction F admet la représentation intégrale :

$$\mathbf{F(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_{Res=a}\Gamma_\Omega(s)(\det z)^{-s}ds}$$

($z \in \Omega+iV$ $a > (r-1)\frac{d}{2}$)

Rappelons la formule

$$\int_\Omega e^{-<x,z>}(\det x)^s \, d^x x = \Gamma_\Omega(s)(\det z)^{-s} \quad (\mathrm{Res} > \frac{n}{r} - 1).$$

(où l'on prend pour $(\det z)^{-s}$ la détermination coïncidant avec $(\det \xi)^{-s}$ lorsque $z = \xi \in \Omega$).
Par la formule d'intégration précédente on obtient :

$$\int_0^\infty t^s \frac{dt}{t} \left[\int_{\Omega^1} e^{-t^{1/r}<u,z>} d\sigma(u) \right] = \Gamma_\Omega(s)(\det z)^{-s}.$$

Pour la fonction Γ usuelle on a l'estimation :

$$|\Gamma(x+iy)| \sim |y|^{x-1/2} e^{|y|\pi/2} (2\pi)^{1/2} \qquad |y| \to +\infty$$

d'où pour la fonction Γ_Ω :

$$|\Gamma_\Omega(x+iy)| \sim |y|^{rx-r/2} e^{r|y|\pi/2} (2\pi)^{n/2} \qquad |y| \to +\infty$$

D'autre part pour la détermination choisie on a: $-\frac{\pi r}{2} < \arg(\det z) < \frac{\pi r}{2}$.
On peut donc inverser la transformée de Mellin, d'où la proposition. □

Introduisons alors la fonction G définie par :

$$G(w) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathrm{Re}\, s = a} w^{-s} \Gamma_\Omega(s) ds \qquad a > (r-1)\frac{d}{2}$$

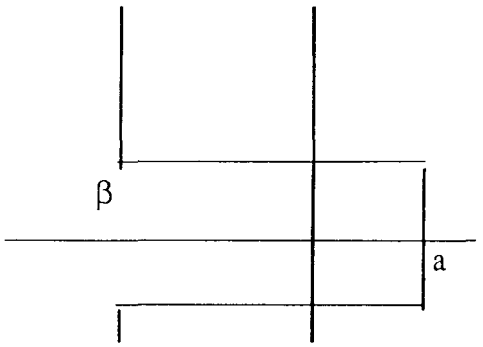
d'après les estimations faites plus haut sur la fonction Γ_Ω, G sera définie et holomorphe sur le revêtement universel de $\mathbb{C}^*$ pour $-r\frac{\pi}{2} < \arg w < r\frac{\pi}{2}$.

Proposition 5 :La fonction G se prolonge en une fonction continue sur $-r\frac{\pi}{2} \le \arg w \le r\frac{\pi}{2}$.

En effet, en utilisant le théorème de Cauchy et les estimations précédentes, on a pour $-r\frac{\pi}{2} < \arg w < r\frac{\pi}{2}$:

$$G(w) = \frac{1}{2i\pi} \int_{L_{a\beta}} w^{-s} \Gamma_\Omega(s) ds$$

où $L_{a\beta}$ est le chemin :



Pour β tel que $r\beta - \frac{n}{2} < -1$, $w^{-s}\Gamma_\Omega(s)$ sera intégrable sur $L_{a\beta}$ avec $\arg|w| \leq r\,\pi/2$

d'où la possibilité de prolonger □

Remarque : La fonction G est un cas particulier de fonctions étudiées par C.S. Meijer [**Me.**] dans la notation standard : $G(w) = (2\pi)^{\frac{n-r}{2}}\, G^{r0}_{0r}(w\,|0,-\frac{d}{2},..,-(r-1)\frac{d}{2})$

Proposition 6 : Pour y dans Ω_k :

$$\lim_{\substack{\xi\to 0\\ \xi\in\Omega}} F(\xi+iy) = G\left(|\det y|e^{i\pi(r/2-k)}\right).$$

En effet, dans la représentation intégrale de $F(\xi+iy)$ on déforme, comme pour la proposition précédente, la droite Re s = a en le chemin $L_{\alpha\beta}$ et on utilise alors une limite déjà vue dans la proposition 2. □

Une formule du produit

La fonction $z \to F(z)$ (z dans Ω) vérifie la formule du produit:

Proposition 7 : Pour a et b dans $\mathbb{R}^{*+}$:

$$\int_{\Omega^1} F(b^{1/r}x + a^{1/r}e)d\sigma(x) = F(b^{1/r}e)F(a^{1/r}e)$$

En effet:

$$F(b^{1/r}x + a^{1/r}e) = \int_{\Omega^1} e^{-<u,b^{1/r}x + a^{1/r}e>} d\sigma(x)$$

d'où:

$$\int_{\Omega^1} F(b^{1/r}x + a^{1/r}e)d\sigma(x) = \int_{\Omega^1} e^{-<u,\,a^{1/r}e>}\left[\int_{\Omega^1} e^{-<u,b^{1/r}x>} d\sigma(x)\right]d\sigma(u)$$

Mais à cause de la G_1 invariance de la mesure σ,on aura:

$$\int_{\Omega^1} e^{-<u,b^{1/r}x>} d\sigma(x) = \int_{\Omega^1} e^{-<e,b^{1/r}x>} d\sigma(x) = F(b^{1/r}e)$$

d'où la proposition. □

Remarque:Considérons l'ensemble de fonctions:

$$\mathcal{A} = \{f(x) = F(detx)\chi_\Omega(x) \ / \ F \text{ continue sur } \mathbb{R} \}$$

cet ensemble, muni du produit de convolution: $f * g(x) = \int_{\Omega \cap (x-\Omega)} f(x-y)g(y)dy$

est une algèbre commutative ; en effet l'intégrale est bien défine car $\Omega \cap (x-\Omega)$ est un ensemble borné (cf.[**Fa1.**]),de plus $f * g(x)$ ne dépendra que du déterminant de x.

$e^{-<,z>}$ définira un caractère de l'algèbre $\mathcal{A}$ comme le montre la formule

$$\mathcal{L}(f * g)(z) = \mathcal{L}f(z)\,\mathcal{L}g(z)$$

Au niveau des fonctions F le produit de convolution s'écrira:

$$F \Diamond G(t) = \int_{\Omega \cap (t^{1/r}e-\Omega)} F(dety)G(det(t^{1/r}e - y))dy$$

et $\int_{\Omega^1} e^{-<u,t^{1/r}e>} d\sigma(u)$ définira alors un caractère sur l'algèbre des fonctions F.

Notons que l'on peut également considérer les fonctions $f(x) = F(detx)\chi_\Omega(x)$ comme des fonctions sur P, G_1 biinvariantes , à support dans Ω,où P est le produit semi-direct $V \ltimes G_1$:

$$(x,g)(y,g') = (x + g(y),gg')$$

et l'on peut alors voir la fonction F(z) comme une fonction sphérique de la paire (G_1,P).

Exemple:

Placons nous dans le cas de l'algèbre $V = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{(n-1)}$ on aura alors r = 2 et

$$F(t^{1/r}e) = \int_{\Omega^1} e^{-<x,t^{1/r}e>} d\sigma(x) = (2\pi)^{\frac{n-2}{2}} G^{20}_{02}(t \mid 0,-(n-2)/2)$$

$$= (2\pi)^{\frac{n-2}{2}} \, 2\, t^{\frac{n-2}{4}} K_{\frac{n-2}{2}}(2t^{1/2}) \qquad \text{(voir l'appendice)}$$

où K_ν désigne la fonction de Mac Donald :

si ν n'est pas entier : $K_\nu(z) = \frac{\pi}{2} \frac{I_{-\nu}(z) - I_\nu(z)}{\sin\nu\pi}$ avec $I_\nu(z) = e^{-i\nu\pi/2} J_\nu(e^{i\pi/2}z)$

(où J_ν est la fonction de Bessel)

et $K_n(z) = \lim_{\nu \to n} K_\nu(z)$ (n dans $\mathbb{N}$)

Si l'on pose pour $u \in \Omega^1$ $u = k(e^{t_1}e_1 + e^{-t_1}e_2)$ avec k dans K et t_1 réel positif, la mesure σ s'exprimera de la manière suivante (cf.**[Fa1.]**) $d\sigma(u) = c(sht_1)^{n-2}dkdt_1$

où c est une constante non nulle que l'on peut par exemple calculer de la représentation intégrale de la fonction de Mac-Donald

$$2(\frac{2\pi}{r})^{\frac{n-2}{2}} K_{\frac{n-2}{2}}(r) = \omega_{n-1} \int_0^{+\infty} e^{-rcht} sht dt \qquad \text{avec } \omega_{n-1} = 2\frac{\pi^{(n-1)/2}}{\Gamma((n-1)/2)} \qquad \text{(cf.[Fa2.])}$$

La proposition 7 nous redonne alors la formule du produit pour la fonction $K_{\frac{n-2}{2}}(r)$ (cf.**[Fa2.]**)

$$\omega_{n-1} \int_0^{+\infty} (r^2 + \rho^2 + 2r\rho cht)^{-\frac{n-2}{2}} K_{\frac{n-2}{2}}(r^2 + \rho^2 + 2r\rho cht)^{1/2} dt = 4(\frac{2\pi}{r})^{\frac{n-2}{2}} (\frac{2\pi}{\rho})^{\frac{n-2}{2}} K_{\frac{n-2}{2}}(r) K_{\frac{n-2}{2}}(\rho)$$

II .LES DISTRIBUTIONS $Z_i(.,s)$

A - Pôles des distributions $Z_i(.,s)$

Nous avons vu,au chapitre précédent que les pôles de $Z_0(.,s)$ sont exactement ceux de la fonction $\Gamma_\Omega(s)$. Pour les distributions $Z_i(.,s)$,i quelconque,ce résultat n'est plus valable comme le montre déjà l'exemple de l'algèbre $V = \mathbb{R}\times\mathbb{R}^{n-1}$.En effet,dans ce cas,nous avons:

$$\det(x_1,\ldots,x_n) = x_1^2 - x_2^2 -\ldots- x_n^2$$

et d'après les résultats classiques de I.M. Guelfand et G.E. Chilov :

a) n pair

Les pôles des distributions $Z_i(.,s)$ sont exactement ceux de la fonction $\Gamma_\Omega(s)$.

(ici $\Gamma_\Omega(s) = (2\pi)^{\frac{n-2}{2}}\Gamma(s)\Gamma(s-\frac{n-2}{2})$

b) n impair

Les pôles des distributions $Z_0(.,s)$ et $Z_2(.,s)$ sont exactement ceux de la fonction $\Gamma_\Omega(s)$ mais la distribution $Z_1(.,s)$ n'a comme pôles que les points $\{\frac{n-2}{2} - k / k\in \mathbb{N}\}$

Remarquons néanmoins que, comme dans le chapitre 2, les fonctions $s \to \frac{1}{\Gamma_\Omega(s)} Z_i(.,s)$ sont entières.

Précisons les notations. Soit q un pôle de $\Gamma_\Omega(s)$, d'ordre de multiplicité k(q) ; son ordre de multiplicité pour $Z_i(.,s)$ sera noté $o_i(q)$ et on écrira la partie singulière du développement de Laurent de $Z_i(.,s)$ au voisinage de q sous la forme :

$$\sum_{h=1}^{o_i(q)} \frac{B_i^h(.,q)}{(s-q)^h}$$

Pour ne pas alourdir les énoncés,nous séparerons les cas d pair et d impair.Rappelons que le cas d impair correspond à $V = Sym(r,\mathbb{R})$ (d = 1 alors) ou $V = \mathbb{R}\times\mathbb{R}^{n-1}$ avec n impair .

Proposition 1:Pour d pair les pôles des distributions $Z_i(.,s)$sont des entiers et pour tout pôle q négatif et tout i :

$$o_i(q) = k(q) = r.$$

Proposition 1':Pour d impair, il y a deux séries de pôles : les pôles demi-entiers et les pôles entiers.

Pour tout pôle demi-entier q, négatif et tout i :

$$o_i(q) = k(q).$$

Pour tout pôle entier q, négatif et tout i pair:

$$o_i(q) = k(q).$$

Pour tout pôle entier q, négatif et tout i impair:

$$o_i(q) = k(q) \quad \text{si} \quad r \quad \text{impair}$$
$$o_i(q) < k(q) \quad \text{si} \quad r \quad \text{pair.}$$

La relation fonctionnelle $Z_i(\hat{f},s) = \Gamma_\Omega(s)e^{-i\pi rs/2} \sum_{k=0}^{r} u_{ik}(s)Z_k\left(f, \frac{n}{r} - s\right)$

donne en s = q(où q est un pôle négatif de $\Gamma_\Omega(s)$):

$$B_i^{k(q)}(\hat{f},q) = c(q)e^{-i\pi rq/2}\sum_{k=0}^{r} u_{ik}(q) \int_{\Omega_k} f(x)|\det x|^{-q}\, dx.$$

Pour que $B_i^{k(q)}(.,q) \neq 0$ il suffira qu'un des $u_{ik}(q)$ soit non nul.Les propositions 1 et 1' résultent alors des calculs effectués après la proposition 1 du chapitre d'introduction. □

Remarque : Poussant les calculs on peut alors montrer que dans le cas d'un pôle entier négatif q avec $o_i(q) = k(q)$ on a : $B_i^{k(q)}(.,q) = c(\det \partial)^{-q}\delta$ avec $c \neq 0$ (où δ est la masse de Dirac à l'origine).

Pour poursuivre l'étude des pôles des $Z_i(.,s)$, on fera, suivant la méthode de [**Ch.**] une démonstration par récurrence sur le rang r de l'algèbre et on utilisera les résultats du paragraphe C du chapitre d'introduction.On peut supposer $r > 2$ (les cas $r = 2$ et 1 étant connus) donc dans le passage à l'algèbre V' de rang r-1, la dimension d reste fixe. Il n'est pas difficile de trouver le jacobien de Φ et on aura pour f dans $\mathcal{S}(V)$ et $\mathrm{Re}\, s > \frac{n}{r}$:

$$Z_i(f,s) = \int_{\Omega'_i}\left[\int_0^{+\infty}\int_{V_{\frac{1}{2}}(e_1)} f\circ\Phi(u,z,v)|u|^{s-n/r+d(r-1)}\,du\,dz\right]dv +$$

$$\int_{\Omega'_{i-1}}\left[\int_0^{+\infty}\int_{V_{\frac{1}{2}}(e_1)} f\circ\Phi(-u,z,v)|u|^{s-n/r+d(r-1)}\,du\,dz\right]dv$$

(0 < i < r ; pour i = 0, r il faut remplacer convenablement le membre de droite).

Pour f à support dans $W = \{x \in V / x_{11} \neq 0\}$ on aura alors le lemme crucial.

Lemme 1: Pour f à support dans W, les fonctions

$$G^{\varepsilon} : (v,s) \to \int_0^{+\infty} \int_{V_{\frac{1}{2}}(e_1)} f\circ\Phi(\varepsilon u,z,v)|u|^{s-n/r+d(r-1)} du\, dz \quad (\varepsilon = \pm 1)$$

sont analytiques en $s \in \mathbb{C}$ et en tant que fonctions de v sont dans $\mathcal{S}(V')$
De plus pour tout m de $\mathbb{N}$:

$$\frac{d^m}{ds^m} G^{\varepsilon}(v,s) \in \mathcal{S}'(V).$$

Le support de f étant dans W, on remarque que pour tout N de $\mathbb{N}$ et tout $P(\partial)$, opérateur de dérivation en les (x_{ij}) la fonction $\frac{1}{x_{11}^N} P(\partial)f((x_{ij}))$ sera C^∞ et par suite dans $\mathcal{S}(V)$.

Comme $\Phi(u,z,v) = ue_1+uz+v+\frac{1}{2}u(z.z)$ et que f est à décroissance rapide en les (x_{ij}), il n'est pas difficile de se convaincre que pour tout N et N' de $\mathbb{N}$, on a :

$$|f\circ\Phi(u,z,v)| \leq \frac{K(N,N')\, u^N}{((1+u^2)(1+u^2\|z\|^2)^N(1+\|v\|^2))^{N'}}.$$

On aura une inégalité du même type pour les fonctions $\frac{\partial^{n_1+|n_2|+|n_3|}}{\partial u^{n_1}\partial z^{|n_2|}\partial v^{|n_3|}} f\circ\Phi(u,z,v)$

(où n_1 est dans $\mathbb{N}$, n_2 dans $\mathbb{N}^{(r-1)d}$ et n_3 dans $\mathbb{N}^{n'}$).
Il en résulte que $f\circ\Phi(\varepsilon u,z,v)$ - ainsi que toutes ses dérivées - sont intégrables par rapport à $u^{-N}du\,dz$ et que le résultat est à décroissance rapide en v.
(Rappelons que si A est un objet relatif à l'algèbre V,A' désignera l'objet correspondant à l'algèbre V') □

Du lemme 1 il résultera alors que :

$$Z_i(f,s) = Z_i'\left(G^+(v,s),\ s-\frac{d}{2}\right) + Z_{i-1}'\left(G^-(v,s),\ s-\frac{d}{2}\right)$$

on prolonge ensuite cette relation en $s \in \mathbb{C}$.
Soit q un pôle pour Z_i'; $q+\frac{d}{2}$ sera alors un pôle éventuel pour Z_i.

Proposition 2 :Supposons d pair.
Pour tout i, les pôles de $Z_i(.,s)$ sont exactement ceux de $\Gamma_\Omega(s)$. De plus pour tout pôle q, tout $1 \leq h \leq k(q)$ et tout i :

$$B_i^h(.,q) \neq 0.$$

Soit q un pôle de Z_i', on écrit les parties singulières du développement de Laurent au voisinage de $q+\frac{d}{2}$. Pour la partie singulière du membre de droite, on pose :

$$I(\lambda,\mu) = Z_i'(G^+(v,\lambda),\mu - \frac{d}{2}) + Z_{i-1}'(G^-(v,\lambda),\mu - \frac{d}{2})$$

on écrit le développement de Taylor de $G^+(v,\lambda)$ au voisinage de $q+\frac{d}{2}$ puis le développement de Laurent de $Z_i'(.,\mu - \frac{d}{2})$ au voisinage de $q+\frac{d}{2}$, puis dans $I(\lambda,\mu)$ on égalise λ à μ, on en déduit la partie singulière du membre de droite. Après calculs nous obtenons :

$$B_i^h(f,q+\frac{d}{2}) = \sum_{k=h}^{o_i'(q)} \frac{1}{(k-h)!}\left[B_i'^k(G^{+(k-h)}(v,q+\frac{d}{2}),q)\right]$$

$$+ \sum_{k=h}^{o_{i-1}'(q)} \frac{1}{(k-h)!}\left[B_{i-1}'^k(G^{-(k-h)}(v,q+\frac{d}{2}),q)\right]$$

où l'on a posé

$$G^{\pm(k-h)}(v,q+\frac{d}{2}) = \frac{d^{k-h}}{ds^{k-h}} G^{\pm}(v,s)\Big|_{s=q+\frac{d}{2}}$$

par l'hypothèse de récurrence : $o_i'(q) = o_{i-1}'(q) = k'(q)$.

L'image réciproque par Φ de la restriction à W de la distribution $B_i^h(.,q+\frac{d}{2})$ est donc :

$$\sum_{k=h}^{k(q)} \frac{1}{(k-h)!}\ B_i'^k(.,q) \otimes u_+^{q+\frac{d}{2}(r-1)-1}\mathrm{Log}^{k-h}u_+) \otimes 1_Z$$

$$\sum_{k=h}^{k(q)} \frac{1}{(k-h)!}\ B_{i-1}'^k(.,q) \otimes u_-^{q+\frac{d}{2}(r-1)-1}\mathrm{Log}^{k-h}u_- \otimes 1_Z$$

Les deux termes qui composent cette somme sont à support disjoints, d'autre part pour i fixé les distributions $(B_i'^k(.,q))_{k\le k(q)}$ sont non nulles par récurrence et donc (cf.[**Ru**]) linéairement indépendantes.

• Soit $-\frac{d}{2} < q \le (r-2)\frac{d}{2}$, alors $0 < q+\frac{d}{2} \le (r-1)\frac{d}{2}$ et un examen des fonctions gamma de V et de V' montre que

$$k'(q) = k(q+\frac{d}{2}).$$

• Pour $q \le -\frac{d}{2}$ on aura $q+\frac{d}{2} \le 0$ et alors

$$r-1 = k'(q) = k(q+\frac{d}{2}) - 1.$$

Ce qui montre la proposition. □

Proposition 2' : Supposons d = 1.
Pour tout pôle q de $\Gamma_\Omega(s)$ et tout i, on a

$$k(q) = o_i(q)$$

sauf si r est pair, q entier négatif, i impair et dans ce cas $o_i(q) = k(q)-1$.
Pour tout pôle q de $\Gamma_\Omega(s)$ on a :

$$B_i^h(.,q) \neq 0 \qquad \forall\, 1 \leq h \leq o_i(q) \text{ et} \forall\ 0 \leq i \leq r.$$

La démonstration est identique seule la fin est plus délicate.
Si $-\frac{d}{2} < q \leq (r-2)\frac{d}{2}$ alors $0 < q+\frac{d}{2} \leq (r-1)\frac{d}{2}$ et on remarque à nouveau que $k'(q) = k(q+\frac{d}{2})$ et donc pour tout $h \leq k(q+\frac{d}{2})$: $B_i^h(.,q+\frac{d}{2}) \neq 0$.

Si r est pair
→ Si $q+\frac{d}{2}$ est demi-entier ≤ 0 alors par la proposition 1': $\frac{r}{2} = k(q+\frac{d}{2}) = o_i(q+\frac{d}{2})$ et par récurrence $o_i'(q) = k'(q) = \frac{r-1+1}{2} = \frac{r}{2}$ d'où $\forall h \leq \frac{r}{2}$, $B_i^h(.,q+\frac{d}{2}) \neq 0$.

→ Si $q+\frac{d}{2}$ est entier ≤ 0, on a encore $\frac{r}{2} = k(q+\frac{d}{2})$ et par récurrence $o_i'(q) = k'(q) = \frac{r-2}{2} = \frac{r}{2} - 1$

d'où $\forall h \leq \frac{r}{2} - 1$, $B_i^h(.,q+\frac{d}{2}) \neq 0$.

Si r est impair
On fait un raisonnement analogue. □

B - L'application moyenne

Comme dans le cas du cône Ω, on définit une application moyenne $f \to M^j f(t)$ qui, pour f dans $\mathcal{S}(V)$ est telle que :

$$\int_{\Omega_j} \psi(|\det x|) f(x) d^\times x = \int_0^{+\infty} \psi(t) M^j f(t) \frac{dt}{t}$$

pour toute fonction ψ localement intégrable par rapport à la mesure $\frac{dt}{t}$.
La fonction $t \to M^j f(t)$ et toutes ses dérivées sont à décroisance rapide à l'infini; elle présente une singularité à l'origine. La relation :

$$Z_j(f,s) = \mathfrak{M}_t(M^j f)(s)$$

nous permet de préciser cette singularité.

L'espace $\mathcal{H}$

On suit ici la présentation de H.Maire.

On note $(p_i)_i$ les pôles de $\Gamma_\Omega(s)$ rangés par ordre décroissant (si d est pair les p_i sont des entiers et si d est impair ce sont des entiers et des demi-entiers)on rappelle que l'ordre de multiplicité de p_i pour $\Gamma_\Omega(s)$ est noté $k(p_i)$.

On désignera par $\mathcal{H}$ l'ensemble des fonctions f, C^∞ sur $]0, +\infty[$,à valeurs dans $\mathbb{C}$,ayant les propriétés suivantes:

-)f et toutes ses dérivées sont à décroissance rapide à l'infini.

-)en 0, f admet un développement asymptotique dans l'échelle des fonctions:

$$\chi_{i,k}(t) = t^{-p_i}(\log t)^{k-1} \quad 1 \le k \le k(p_i)$$

on suppose en outre que ce développement est dérivable terme à terme,à tout ordre.

Pour f dans $\mathcal{H}$, soit $\sum_i \sum_{k=1}^{o(p_i)} a_{i,k}(f)\ \chi_{i,k}$ son développement en 0 ; on notera pour tout h de $\mathbb{N}$:

$$A_h(f) = \sum_{\substack{-p_i \le h \\ 1 \le k \le k(p_i)}} a_{i,k}(f)\ \chi_{i,k}(t)\rho(t)$$

où $\rho(t)$ est un élément de $\mathcal{S}(R)$ fixé une fois pour toute et égale à 1dans un voisinage de 0.

On munit $A_h$de la topologie définie par les semi-normes :

$$f \to |a_{i,k}(f)|$$

$$f \to p_{m,k}(f) = \sup_{\substack{n \le m; \\ t \in]0,\infty[}} \sup_{0 \le p \le h} |t^n (d/dt)^p (f - A_h)|$$

On a alors la proposition classique

Proposition 3: Avec cette topologie,$\mathcal{H}$ est un espace de Fréchet-Montel.

La transformation de Mellin

Tout élément f de $\mathcal{H}$ admet une transformée de Mellin :

$$\mathcal{M}f(s) = \int_0^{+\infty} f(t)t^{s-1}dt \qquad \mathrm{Res} > (r-1)d/2$$

La fonction $\mathcal{M}f(s)$ est analytique dans Res > (r-1)d/2 et admet un prolongement méromorphe à $\mathbb{C}$ tout entier.Les pôles seront les nombres p_i,de multiplicité $k(p_i)$;en effet il suffit d'utiliser le développement en 0 et de calculer les intégrales

$$\int_0^1 t^s\ \chi_{i,k}(t)\ dt = (-1)^{k-1}\frac{(k-1)!}{(s-p_i)^s}$$

De plus td/dt opère sur $\mathcal{H}$ et $\mathcal{M}(tdf/dt)(s) = -s\,\mathcal{M}f(s)$

On en déduit facilement: $\forall N \in \mathbb{N} \quad \lim_{|y|\to+\infty} y^N \mathcal{M}f(x+iy) = 0$

et ceci uniformément pour x dans un compact de $]\,(r-1)d/2\,,\ +\infty\,[$

Soit $\mathcal{M}\,\mathcal{H}$ l'espace des fonctions méromorphes sur $\mathbb{C}$,les pôles étant les nombres p_i de multiplicité $k(p_i)$ et possédant l'estimation précédente;alors $\mathcal{M}$ réalise une bijection entre $\mathcal{H}$ et $\mathcal{M}\,\mathcal{H}$ cela résulte de la formule d'inversion de Mellin et du théorème des résidus.

Pour F dans $\mathcal{M}\,\mathcal{H}$,dont la partie singulière en p_i est

$$\sum_{k\le k(p_i)} b_{i,k}(F)(s-p_i)^{-k}$$

on posera pour h dans $\mathbb{N}$:

$$B_h(F) = \sum_{\substack{k\le k(p_i)\\ -p_i\le h}} \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!} b_{i,k}(F)\,\mathcal{M}(\chi_{i,k}(t)\rho(t))$$

Munissons alors $\mathcal{M}\,\mathcal{H}$ de la topologie définie par les semi-normes:

$$f \to |b_{i,k}(F)|$$

$$f \to N_{n,h,K}(F) = \sup_{\substack{p\le n;\ y\in\mathbb{R}\\ x\in K}} |y^p(F-B_hF)(x+iy)| \quad (K \text{ est un compact de }]-h\ ,+\infty[)$$

Nous avons alors tout fait pour que la proposition suivante soit vraie:

Proposition 4 : $\mathcal{M}$ réalise un isomorphisme d'espace vectoriel topologique entre $\mathcal{H}$ et $\mathcal{M}\,\mathcal{H}$.

Remarque: En fait pour un élément f de $\mathcal{H}$,nous avons l'estimation:

$\lim_{|y|\to+\infty} y^N \mathcal{M}f(x+iy) = 0$ uniformément pour x dans un compact de $\mathbb{R}$

Il suffit de remarquer que pour Res assez grand:

$$\mathcal{M}(b(-td/dt\ -n/r)(\tfrac{1}{t}f(t)))(s) = b(s-n/r)\,\mathcal{M}f(s-1)$$

De la relation $b(s-n/r)\ \Gamma_\Omega(s-1) = \Gamma_\Omega(s)$ on voit alors que les pôles de $b(s-n/r)\,\mathcal{M}f(s-1)$ sont ceux de $\Gamma_\Omega(s)$

ce qui entraine que : $Q(f) = b(-td/dt\ -n/r)(\tfrac{1}{t}f(t)) \in \mathcal{H}$

D'où le résultat annoncé par application répétée de l'opérateur Q.

Comme dans **[Ma.]** on peut définir pour deux éléments f et g de $\mathcal{H}$ le produit de convolution:

$$fvg(t) = \int_0^{+\infty} f(t/\tau)g(\tau)d\tau/\tau$$

et l'on aura $M(fvg)(s) = Mf(s)\ Mg(s)$ (En général $fvg \notin \mathcal{H}$)

Lemme 2 a) <u>Supposons d pair</u>

Pour tout k, $1\le k \le r$, il existe une application linéaire continue ρ_k de $\mathcal{H}$ dans

$\mathcal{S}(\mathbb{R})$telle que pour f dans $\mathcal{H}$ la fonction:

$$f(t) - \sum_{k=1}^{r} t^{-(r-1)d/2}(\log t)^{k-1}\, \rho_k(f)(t)$$

soit C^∞ plate en 0.

b)Supposons d impair et r pair

Pour tout k, $1 \leq k \leq r/2$, il existera deux applications linéaires continues $\rho_{0,k}$ et $\rho_{1,k}$ de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ telles que pour f dans $\mathcal{H}$ la fonction:

$$f(t) - \sum_{k=1}^{r/2} t^{-(r-2)d/2}(\log t)^{k-1}\, \rho_{0,k}(f)(t) - \sum_{k=1}^{r/2} t^{-(r-1)d/2}(\log t)^{k-1}\, \rho_{1,k}(f)(t)$$

soit C^∞ plate en 0.

c) Un résultat analogue pour d impair et r impair est vrai.

Donnons l'idée de la démonstration dans le cas a).Par le lemme (1.3) de [Ma],il existe une fonction f_0 C^∞,à support dans [0,1] , telle que pour tout f de $\mathcal{H}$ on ait $fvf_0 \in \mathcal{H}$ et avec :

$a_{i,1}(fvf_0) = a_{i,r}(f)$

$a_{i,k}(fvf_0) = 0$ pour $k > 1$ et tout i.

c'est à dire que $t^{(r-1)d/2}\, fvf_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}_+)$.D'où l'application ρ_r ; on continue alors en réitérant le procédé à $f - t^{-(r-1)d/2}(\mathrm{Log}t)^{r-1}\rho_r(f)$. □

Remarque:

Ce lemme signifie que tout f de $\mathcal{H}$ s'écrit sous la forme (dans le cas d pair)

$\sum_{k=1}^{r} t^{-(r-1)d/2}(\log t)^{k-1}\, \psi_k(t)$ les fonctions $\psi_k(t)$ dépendant d'une manière continue de f.

Théorème 1: L'application M^j de $\mathcal{S}(V)$ dans $\mathcal{H}$ est continue.

La construction de $\mathcal{H}$ et la relation $Z_j(f,s) = \mathcal{M}(M^j f)(s)$ entrainent que l'image de $\mathcal{S}(V)$ est dans $\mathcal{H}$.

Pour la continuité , on se ramène , par la proposition 4, à l'application $f \to Z_j(f,s)$

Les coefficients $B_j^h(.,q)$ étant dans dans $\mathcal{S}'(V)$ l'application $f \to |b_{i,k}(Z_j(f,s))|$ sera continue.

Pour les normes $N_{n,h,K}$ on peut , par l'identité de Bernstein se ramener au cas où K est un compact de $](r-1)d/2 , +\infty[$, cas où Z_j est défine par une intégrale convergente .Par application du principe du maximum à $Z_j(f,s) - B_h(Z_j(f,s))$ sur $\{ s=x+iy / x \in K, |y| \leq 1 \}$ on se ramène à $Z_j(f,s)$ mais dans ce cas on a :

$$|Z_j(f,s)| \leq \int_{\Omega_j^1} |f(x)||\det x|^{\alpha(k)}\, dx + \int_{\Omega_j^2} |f(x)||\det x|^{\beta(k)}\, dx \leq KN(f)$$

où $\Omega_j^1 = \Omega_j \cap |detx| \leq 1$, $\Omega_j^2 = \Omega_j \cap |detx| \geq 1$ et N(f) est une semi-norme de $\mathcal{S}$ (V).

□

Remarque :

Le résultat général de surjectivité de **[Ru.]** nous donne alors l'image $M^j(\mathcal{S}(V))$, on a

a) Si d pair ou d impair et r impair:

$M^j(\mathcal{S}(V)) = \mathcal{H}$

b)Même résultat pour le cas d impair, r pair et j pair.

c) Si d impair ,r pair et j impair:

$M^j(\mathcal{S}(V)) = \{f \in \mathcal{H} / a_{k(p_i)}(f) = 0$ pour tous les i de$\mathbb{N}$ et les $p_i \in -\mathbb{N}\}$

c'est un sous espace fermé de $\mathcal{H}$

Section continue de M^j

Lemme 3 :Appelons $\mathcal{H}_0$ le sous-espace de $\mathcal{H}$ constitué des éléments C^∞ plats en 0.Il existe alors une application s linéaire continue de $\mathcal{H}_0$ dans $\mathcal{S}(V)$ telle que

$$M^j(s(f)) = f \quad \text{pour tout f de } \mathcal{H}_0$$

Ce n'est rien d'autre que le lemme 3.7 de **[Ru.]**,il suffit de remarquer que l'inégalité de la fin de sa démonstration donne la continuité. □

Théorème 2 Posons $\mathcal{H}^j = M^j(\mathcal{S}(V))$, il existe alors une section continue s:

$$s : \mathcal{H}^j \to \mathcal{S}(V)$$

Supposons par exemple d pair; d'après le lemme 2:

$$f \to f - \sum_{k=1}^{r} t^{-(r-1)d/2}(\log t)^{k-1}\rho_k(t) = U(f)$$

est continue de$\mathcal{H}^j$ dans $\mathcal{H}_0$;et d'après le lemme 3: $M^j(\sigma(U(f)) = U(f)$

Il suffit alors de remarquer que,d'après le résultat de surjectivité de **[Ru.]**,si f est dans $\mathcal{H}^j$ alors $\sum_{k=1}^{r} t^{-(r-1)d/2}(\log t)^{k-1}\rho_k(t)$ y appartiendra également. □

Les distributions de la forme $F(|detx|)\ \chi_{\Omega_j}(x)$

Dans $\mathcal{S}'(V)$ muni de la topologie forte,on considère l'espace $\mathcal{S}'^j$,adhérence de l'ensemble:

$\{F(|detx|) / F$ continue, bornée sur $[0, +\infty[\}$

Considérons l'application $\tilde{M}^j : \mathcal{D}(V) \rightarrow \mathcal{H}^j$ identique à M^j, il n'est pas difficile de voir que: ${}^t\tilde{M}^j(\mathcal{H}^{j\prime}) = {}^tM^j(\mathcal{H}')$. On notera cet espace ${}^tM^j(\mathcal{H}^{j\prime})$par abus de notation .Le théorème 2 implique immédiatement que ${}^tM^j(\mathcal{H}^{j\prime})$ est fermé dans $\mathcal{D}'(V)$(muni de la topologie forte).
Soit alors F continue et bornée sur $[0, +\infty[$,F définira un élément de $\mathcal{H}^{j\prime}$ par la formule:

$$< F, f > = \int_0^{+\infty} F(t)f(t)t^{n/r-1}dt$$

La relation $\int_{\Omega_j} F(|detx|)\phi(x)\,dx = \int_0^{+\infty} F(t)t^{n/r-1}[M^j\phi(t)]dt$

nous dit alors que ${}^tM^jF = F(|detx|)\chi_{\Omega_j}(x)$;l'espace ${}^tM^j(\mathcal{H}^{j\prime})$ étant fermé on en déduit que :

$$\mathcal{D}'^j \subset {}^tM^j(\mathcal{H}^{j\prime})$$

Proposition 5 : On a $\mathcal{D}'^j = {}^tM^j(\mathcal{H}^{j\prime})$

Il suffit de remarquer que l'ensemble des fonctions continues bornées sur $[0, +\infty[$ est dense dans $\mathcal{H}'$,ceci résultant de la réflexivité de l'espace $\mathcal{H}'$. □

III . UNE GENERALISATION DE LA TRANSFORMATION DE HANKEL

Introduction

Soit $f(x) = F(\|x\|)$ une fonction intégrable et radiale sur $\mathbb{R}^n$, un résultat classique affirme que la transformée de Fourier de f(x) est de la même forme : $\hat{f}(\xi) = \tilde{F}(\|\xi\|)$; la transformation de Hankel $F \rightarrow \tilde{F}$ faisant apparaître un noyau qui est essentiellement la fonction de Bessel $J_{\frac{(n-2)}{2}}$.

R.S.Strichartz considère dans **[Str.]** des fonctions de la forme $f(x) = F(|Q(x)|^{1/2})$ où Q(x) est la forme quadratique $x_1^2 + ..+x_p^2 - x_{p+1}^2 - ... - x_n^2$ et obtient un résultat similaire, le noyau de la transformation s'exprimant à l'aide des fonctions J, K et Y de Bessel.

On voudrait présenter ici une tentative de généralisation dans le cadre des algèbres de Jordan simples et euclidiennes en considérant des fonctions du type f(x) = F(|detx|) ; on ne traitera qu'un cas particulier.

Sauf mention du contraire,nous prendrons ici d = 2 et r impair ou $d \equiv 0$ [4]

A.Les distributions $|detx|^{s-n/r}$et $sign(detx)|detx|^{s-n/r}$

Posons $\Psi_0(f,s) = \int_V f(x)|detx|^s \, d^x x$ et $\Psi_1(f,s) = \int_V sign(detx)|detx|^s \, d^x x$

Pour Res >n/r et f dans $\mathcal{S}(V)$,ces intégrales convergent et définissent des distributions tempérées.Les distributions $\Psi_i(.,s)$ (i = 0,1) se prolongent d'une manière méromorphe sur $\mathbb{C}$ et l'on a:

$$\Psi_0(f,s) = \sum_{j=0}^{r} Z_j(f,s) \qquad \text{et} \qquad \Psi_1(f,s) = \sum_{j=0}^{r} Z_j(f,s)(-1)^j$$

A partir de l'équation fonctionnelle des Z_j on déduit les transformées de Fourier des distributions $\Psi_i(.,s)$.Il vient (voir les calculs qui suivent la proposition 1 de l'introduction)

$$\Psi_0(\hat{f},s) = 2^r \Gamma_\Omega(s)(\cos\pi s/2)^r \Psi_0(f,-s+n/r)$$
$$\Psi_1(\hat{f},s) = (-i)^r 2^r \Gamma_\Omega(s)(\sin\pi s/2)^r \Psi_1(f,-s+n/r)$$

Remarque: Pour d = 2 et r pair il y a un phénomène "d'échange" on trouve

$$\Psi_0(\hat{f},s) = (2i)^r \Gamma_\Omega(s)(\sin\pi s/2)^r \Psi_1(f,-s+n/r)$$
$$\Psi_1(\hat{f},s) = 2^r \Gamma_\Omega(s)(\cos\pi s/2)^r \Psi_0(f,-s+n/r)$$

Les pôles éventuels de la distribution $\Psi_i(.,s)$ sont ceux de $\Gamma_\Omega(s)$; de la forme des transformées de Fourier,il vient alors:

a)Pour $\Psi_0(.,s)$ les seuls pôles possibles sont les entiers pairs $\leq (r-1)d/2$, les entiers pairs négatifs étant pôles effectifs d'ordre de multiplicité r.

b)Pour $\Psi_1(.,s)$ il faut remplacer pair par impair dans l'énoncé précedent.

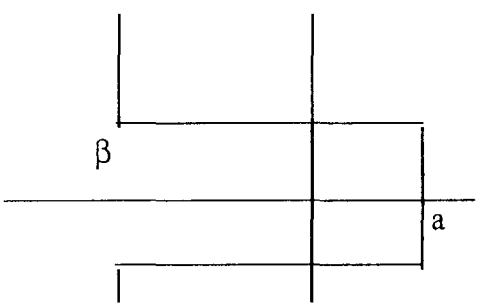
Les fonctions moyennes

Posons $M_0f(t) = \sum_{j=1}^{r} M^jf(t)$ et $M_1f(t) = \sum_{j=1}^{r} (-1)^j M^jf(t)$ (f est dans $\mathcal{S}(V)$)

Les fonctions $\Psi_i(f,x+iy)$ sont à décroissance rapide en y quand y tend vers l'infini,il résulte alors de la transformée de Mellin inverse:

$$\hat{M_0f}(t) = \frac{2^r}{2i\pi} \int_{Res\,=\,a} t^{-s}\Gamma_\Omega(s)(\cos\pi s/2)^r \Psi_0(f,-s+n/r)ds$$

où a > (r-1)d/2 , remarquons que comme dans la démonstration de la proposition 5 du chapitre II,on peut remplacer Res = a par $L_{a\beta}$, où $L_{a\beta}$ est le chemin:



où β est tel que $r\beta - \frac{n}{2} < -1$

Prenons f dans V\S ($S = \{x \in V / \det x = 0\}$) , alors: $\Psi o(f,-s+n/r) = \int_V f(x)|\det x|^{-s}dx$

et on peut employer le théorème de Fubini,il vient :

$$\hat{M_0f}(t) = \int_V f(x)K_0(t\,|\det x|)dx$$

avec $$K_0(t) = \frac{2^r}{2i\pi} \int_{L_{a\beta}} t^{-s}\Gamma_\Omega(s)(\cos\pi s/2)^r ds$$

Le noyau $K_0(t)$ est une combinaison linéaire des fonctions G de Meijer évoquées au chapitre 2. On trouve de même

$$M_1\hat{f}(t) = \int_V f(x)\text{sign}(\det x)K_1(t\,|\det x|)dx$$

avec $$K_1(t) = \frac{(-2i)^r}{2i\pi} \int_{L_{a\beta}} t^{-s}\Gamma_\Omega(s)(\sin\pi s/2)^r ds$$

Remarque: De ces représentations intégrales, on peut déduire le comportement de $K_0(t)$ (resp. $K_1(t)$) en 0; en effet du théorème des résidus il résulte :

$$K_0(t) = 2^r (\text{Resi}(\Gamma_\Omega(s), r-1))(\cos\pi(r-1)/2)^r t^{-(r-1)} + \frac{2^r}{2i\pi} \int_{L_{a'\beta}} t^{-s}\Gamma_\Omega(s)(\cos\pi s/2)^r ds$$

où $r-2 < a' < r-1$ et donc $K_0(t) \sim 2^r (\text{Resi}(\Gamma_\Omega(s), r-1))(\cos\pi(r-1)/2)^r t^{-(r-1)}$ (quand t tend vers l'infini).

De même pour $K_1(t)$.

Le comportement à l'infini des noyaux $K_i(t)$ résulte du comportement des fonctions de Meijer (voir l'appendice) il vient par exemple :

$$K_0(t) \sim (2\pi)^{\frac{n-r}{2}} 2\, t^{\frac{1-n}{2r}} \cos(rt^{1/r} + \frac{\pi(1-n)}{2}) \quad (t \to +\infty)$$

Proposition 1. Les noyaux K_i satisfont au système

$$\mathbf{b(td/dt)K_0(t) = i^r t K_1(t)}$$
$$\mathbf{b(td/dt)K_1(t) = i^r t K_0(t)}$$

En effet,en prenant β convenable: $b(td/dt)K_0(t) = \frac{2^r}{2i\pi} \int_{L_{a\beta}} b(-s)t^{-s}\Gamma_\Omega(s)(\cos\pi s/2)^r ds$

mais: $b(-s) = (-1)^r b(1 + s - n/r)$ et $b(1 + s - n/r)\Gamma_\Omega(s) = \Gamma_\Omega(s + 1)$

d'où: $$b(td/dt)\,K_0(t) = \frac{2^r}{2i\pi} \int_{L_{a\beta}} t^{-s}\Gamma_\Omega(s + 1)(\cos\pi s/2)^r ds$$

$$= \frac{2^r}{2i\pi} \int_{L_{a\beta}} t^{-(s+1)}\Gamma_\Omega(s+1)(\sin\pi(s+1)/2)^r ds$$

$$= i^r t\, K_1(t)$$

De même pour $K_1(t)$. □

B. La transformation de Hankel généralisée

Soit F un élément de $\mathcal{S}([0 , +\infty[ )$,on se propose d'étudier la transformée de Fourier de la distribution $f(x) = F(|\det x|)$.

On a pour ϕ dans $\mathcal{S}(V)$: $< f, \hat{\phi} > = \int_V F(|detx|)\, \hat{\phi}(x)dx$

$$= \int_0^{+\infty} F(t)t^{n/r-1}M_0\hat{\phi}(t)dt$$

$$= \frac{2^r}{2i\pi} \int_0^{+\infty} F(t)t^{n/r-1}[\int_{Res=a} t^{-s}\Gamma_\Omega(s)(\cos\pi s/2)^r\Psi_0(f,-s+n/r)ds]dt$$

Proposition 2 : La restriction à V \ S de la distribution $\hat{f}$ est définie par la fonction $\tilde{F}(|detx|)$ où :

$$\tilde{F}(u) = \int_0^{+\infty} F(t)t^{n/r-1}K_0(tu)dt$$

En effet pour ϕ à support dans V \ S on peut utiliser le théorème de Fubini et procéder comme pour $M_0\hat{\phi}(t)$ d'où la proposition. □

De même on peut chercher la transformée de Fourier de la distribution g(x) = G(detx) où G est dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$; la restriction à V \ S de la distribution $\hat{g}$ sera définie par la fonction $\tilde{G}$(detx) avec

$$\tilde{G}(u) = \int_0^{+\infty} G(t)t^{n/r-1}K^+(tu)dt + \int_0^{+\infty} G(-t)t^{n/r-1}K^-(tu)dt \qquad \text{si } u > 0$$

$$\tilde{G}(u) = \int_0^{+\infty} G(t)t^{n/r-1}K^-(-tu)dt + \int_0^{+\infty} G(-t)t^{n/r-1}K^+(-tu)dt \qquad \text{si } u < 0$$

où
$$K^+(u) = 1/2(K_0(u) + K_1(u))$$
$$K^-(u) = 1/2(K_0(u) - K_1(u))$$

Remarque:Pour d = 2 et r pair, on constate que la distribution F(|detx|)^ est définie sur V \ S par une fonction $\tilde{F}$(detx) , $\tilde{F}$ étant impaire (cela est dû au phénomène d'échange).

Exemple: Soit r = 2 et d ≡ 0 [4] c'est à dire prenons pour V l'algèbre $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{(d+1)}$

Alors d = n-2 et $\Gamma_\Omega(s) = (2\pi)^{\frac{n-2}{2}}\,\Gamma(s)\Gamma(s-\frac{n-2}{2})$

Le déterminant sera une forme quadratique de signature (1,n-1) et on retrouve certains résultats de R.S.Strichartz (cf.[**Str.**]) ; en effet ici:

$$K^+(u) = \frac{1}{i\pi} \int_{L_{a\beta}} t^{-s}\Gamma_\Omega(s)\cos\pi s\, ds$$

$$K^-(u) = \frac{1}{i\pi} \int_{L_{a\beta}} t^{-s}\Gamma_\Omega(s)\, ds$$

$$= 2(2\pi)^{\frac{n-2}{2}} G^{20}_{02}(u \mid 0,-(n-2)/2) \quad \text{(voir l'appendice)}$$

On connait explicitement la fonction $G^{20}_{02}(u \mid \alpha, \beta)$:

$$G^{20}_{02}(u \mid \alpha,\beta) = 2\, u^{\frac{\alpha+\beta}{2}} K_{\alpha-\beta}(2u^{1/2})$$

où K_ν désigne la fonction de Mac Donald :

si ν n'est pas entier : $K_\nu(z) = \frac{\pi}{2}\frac{I_{-\nu}(z) - I_\nu(z)}{\sin\nu\pi}$ avec $I_\nu(z) = e^{-i\nu\pi/2}J_\nu(e^{i\pi/2}z)$

(où J_ν est la fonction de Bessel)

et $$K_n(z) = \lim_{\nu\to n} K_\nu(z) \qquad (n \text{ dans } \mathbb{N})$$

On trouve alors:

$$K^-(u) = 4(2\pi)^{\frac{n-2}{2}}\, u^{-\frac{(n-2)}{4}} K_{\frac{(n-2)}{2}}(2u^{1/2})$$

$$K^+(u) = -(2\pi)^{n}\, u^{-\frac{(n-2)}{4}} Y_{\frac{(n-2)}{2}}(2u^{1/2})$$

où $Y_\nu(z)$ désigne la fonction de Bessel de seconde espèce:

$$Y_\nu(z) = \frac{J_\nu(z)\cos\pi\nu - J_{-\nu}(z)}{\sin\nu\pi} \quad \text{si } \nu \text{ n'est pas entier}$$

$$Y_n(z) = \lim_{\nu\to n} Y_\nu(z) \qquad (n \text{ dans } \mathbb{Z})$$

C. Le cas V = Herm(r×r, ℂ) , r impair

On se propose, dans ce paragraphe, d'étudier plus en détail la transformation de Hankel généralisée $F \to \tilde{F}$ dans le cas d = 2 et r impair, c'est à dire le cas où V = Herm(r×r, ℂ) avec r impair .D'après les résultats du paragraphe A:

$$\Psi_o(\hat{f},s) = 2^r\Gamma_\Omega(s)(\cos\pi s/2)^r\Psi_o(f,-s+r)$$

nous allons énoncer ce résultat différemment en mettant le facteur $\gamma(x) = 2^r\Gamma_\Omega(s)(\cos\pi s/2)^r$ sous une autre forme.

Des formules: $\cos\pi s/2 = \frac{\pi}{\Gamma(\frac{s+1}{2})\Gamma(\frac{1-s}{2})}$ et $\Gamma(s) = (s-1)(s-2)....(s-j)\Gamma(s-j)$

il vient:

$$\gamma(s) = (2\pi)^{\frac{n+r}{2}} \left(\frac{\Gamma(s)}{\Gamma(\frac{s+1}{2})}\right)^r \frac{1}{(\Gamma(\frac{1-s}{2}))^r} \left(\prod_{j=1}^{r-1}(s-j)^{r-j}\right)^{-1}$$

utilisons ensuite la formule de duplication de la fonction gamma:

$$\Gamma(s) = \frac{2^{s-1}}{\pi^{1/2}} \Gamma(\frac{s}{2})\Gamma(\frac{s+1}{2})$$

on aura:

$$\gamma(s) = (2\pi)^{\frac{n}{2}} 2^{rs-\frac{r}{2}} \left(\frac{\Gamma(\frac{s}{2})}{\Gamma(\frac{1-s}{2})}\right)^r \left(\prod_{j=1}^{r-1}(s-j)^{r-j}\right)^{-1}$$

enfin remarquons $\Gamma(\frac{1-s}{2})(s-1) = -2\Gamma(\frac{3-s}{2})$

$\Gamma(\frac{3-s}{2})(s-3) = -2\Gamma(\frac{5-s}{2})$ etc .....

d'où finalement:

$$\gamma(s) = (-1)^{\frac{r-1}{2}} (2\pi)^{\frac{n}{2}} 2^{rs-\frac{r}{2}} 2^{\frac{-r(r-1)}{2}} \left(\frac{\Gamma(\frac{s}{2})}{\Gamma(\frac{r-s}{2})}\right)^r \frac{\prod_{p=0}^{\frac{r-3}{2}}(s-2p-1)^{2p+1}}{\prod_{p=1}^{\frac{r-1}{2}}(s-2p)^{r-2p}}$$

posons alors $g(s) = 2^{rs/2} \dfrac{\Gamma(\frac{s}{2})^r}{\prod_{p=1}^{\frac{r-1}{2}}(s-2p)^{r-2p}} = 2^{rs/2} \dfrac{\Gamma(\frac{s}{2})^r}{P(s)}$

où $P(s) = \prod_{p=1}^{\frac{r-1}{2}}(s-2p)^{r-2p}$

on constate que $\gamma(s) = (2\pi)^{n/2} \dfrac{g(s)}{g(r-s)}$

Compte tenu des résultats du paragraphe A,nous pouvons énoncer:

Proposition 3 : Posons $\Theta_s = \dfrac{|\mathbf{detx}|^{s-r}}{\mathbf{g(s)}}$

La fonction $s \to \Theta_s$ est une fonction entière, de plus on a

$$(\Theta_s)^\wedge = (2\pi)^{n/2}\Theta_{r-s}$$

En effet les pôles de $|detx|^{s-r}$sont les nombres pairs $\leq r-1$, de multiplicité bornée par r, donc,vu la forme de la fonction g(s), Θ_s sera entière. □

On remarquera la complète analogie de ce résultat avec la formule (12') page 170 de **[G.-Ch.]** concernant la transformée de Fourier de la fonction $|x|^s$.

Revenons à la transformation $F \rightarrow \widetilde{F}(u)$

On a pour F dans $\mathcal{S}([0, +\infty[)$:

$$\widetilde{F}(u) = \int_0^{+\infty} F(t)t^{r-1}K_0(tu)dt$$

Partant de la représentation intégrale du noyau K_0 et utilisant le théorème de Fubini,il vient pour a compris entre r-1 et r:

$$\widetilde{F}(u) = \frac{2^r}{2i\pi} \int_{L_{a\beta}} t^{-s}\mathcal{M}F(-s+r)\Gamma_\Omega(s)(\cos\pi s/2)^r ds$$

dans cette représentation intégrale,on peut déformer le chemin $L_{a\beta}$ en la droite Res = a (utiliser le théorème de Cauchy et la décroissance rapide à l'infini de la fonction $y \rightarrow \mathcal{M}F(x+iy)$).

Le comportement asymptotique de $\widetilde{F}$ en 0 est donné par les pôles pairs $\leq$ r-1 de la fonction $s \rightarrow \Gamma_\Omega(s)$: on procéde comme plus haut pour le noyau K_0 on trouve:

$$\widetilde{F}(t) \sim 2^r(\mathrm{Resi}(\Gamma_\Omega(s), r-1))(\cos\pi(r-1)/2)^r \mathcal{M}F(1)t^{-(r-1)} \qquad (t \rightarrow 0)$$

De même le comportement $\widetilde{F}$ à l'infini est donné par les pôles pairs $\geq$ r+1 de la fonction $s \rightarrow \mathcal{M}F(-s+r)$ en effet par le théorème des résidus:

$$\widetilde{F}(t) = 2^r\Gamma_\Omega(r+1)(\cos\pi(r+1)/2)^r \mathrm{Resi}(\mathcal{M}F(s),-1)t^{-(r+1)} + \frac{2^r}{2i\pi}\int_{\mathrm{Res}=a'} t^{-s}\Gamma_\Omega(s)\mathcal{M}F(-s+r)(\cos\pi s/2)^r ds \qquad (r+1 < a' < r+3)$$

d'où $\widetilde{F}(t) = O(t^{-(r+1)})$ quand t tend vers l'infini.

Il résulte de ces comportements que la fonction $t \rightarrow \widetilde{F}(t)$ admet pour r-1 <Res < r une transformée de Mellin $\mathcal{M}\widetilde{F}(s)$ avec:

$$\mathcal{M}\widetilde{F}(s) = 2^r\Gamma_\Omega(s)(\cos\pi s/2)^r \mathcal{M}F(-s+r)$$

la relation entre $\mathcal{M}\widetilde{F}$ et $\mathcal{M}F$ devient alors:

$$\mathcal{M}\widetilde{F}(s)\, g(r-s) = (2\pi)^{n/2}\, \mathcal{M}F(r-s)\, g(s)$$

Considérons maintenant l'espace fonctionnel suivant:

$\mathcal{M}$ = { F C^∞ sur]0 , $+\infty$ [/ $F(t) = \sum_{k=0}^{r-1} (Logt)^k F_k(t)$ où les fonctions F_k sont des éléments pairs de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$; et avec $\int_0^{+\infty} t^{2p}(Logt)^k F(t)dt = 0$ pour $0 \le p \le (r-3)/2$ et $0 \le k \le 2p$}

Soit F dans $\mathcal{M}$ la transformée de Mellin de F, $\mathfrak{M}F$ présentera des pôles éventuels en les entiers négatifs pairs ,ces pôles étant d'ordre au plus r; de plus pour $0 \le p \le (r-3)/2$ on aura:

$\mathfrak{M}F(2p+1) = 0$ avec ordre de multiplicité au moins égal à 2p+1

D'autre part la fonction $y \to \mathfrak{M}F(x + iy)$ sera à décroissance rapide à l'infini uniformément en x, pour x dans un compact de]0 , $+\infty$ [.Enfin on voit par la transformée de Mellin inverse que ces propriétés caractérisent les éléments de $\mathcal{M}$.

Théorème 1 : La transformation de Hankel opère sur l'espace $\mathcal{M}$ et l'on a:

$$\tilde{\tilde{F}}(t) = (2\pi)^{n/2} F(t) \qquad (F \in \mathcal{M})$$

Soit F dans $\mathcal{M}$ d'après le comportement du noyau K_0 en 0 et en l'infini donné au paragraphe A, $\tilde{F}$ est bien défini par l'intégrale:

$$\tilde{F}(u) = \int_0^{+\infty} F(t)t^{r-1}K_0(tu)dt$$

De même, les calculs effectués plus haut pour F dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ sont encore valable et nous montre que: $\mathfrak{M}\tilde{F}(s)\, g(r-s) = (2\pi)^{n/2}\mathfrak{M}F(r-s)\, g(s)$

ou bien comme $g(s) = 2^{rs/2} \dfrac{\Gamma(\frac{s}{2})^r}{P(s)}$:

$$\frac{\mathfrak{M}\tilde{F}(s)}{\Gamma(\frac{s}{2})^r} = (2\pi)^{n/2} \frac{\mathfrak{M}F(r-s)}{\Gamma(\frac{r-s}{2})^r P(s)} P(r-s)\, 2^{rs}$$

les propriétés de la fonction F entraînent que $s \to \dfrac{\mathfrak{M}F(r-s)}{\Gamma(\frac{r-s}{2})^r P(s)}$ est une fonction entière de s, et

donc les pôles éventuels de $\mathfrak{M}\tilde{F}(s)$ sont les nombres négatifs pairs et sont d'ordre au plus r, de plus , des estimations des fonctions $y \to \Gamma(x + iy)$ et $y \to \mathfrak{M}F(x + iy)$ on déduit que la fonction $y \to \mathfrak{M}\tilde{F}(x + iy)$ est à décroissance rapide à l'infini ,uniformément en x, pour x dans un compact de]0 , $+\infty$ [.De plus $\mathfrak{M}\tilde{F}(2p+1) = 0$ avec ordre de multiplicité au moins égal à 2p+1

pour $0 \leq p \leq (r-3)/2$ donc $\widetilde{F}$ est bien dans $\mathcal{M}$.

La formule d'inversion du théorème est alors évidente à vérifier sur les transformées de Mellin.

□

Théorème 2: (Formule de Plancherel)

On a pour F dans $\mathcal{M}$

$$\int_0^{+\infty} |\widetilde{F}(t)|^2 \, t^{r-1} dt = (2\pi)^n \int_0^{+\infty} |F(t)|^2 \, t^{r-1} dt$$

Ecrivons la relation $\mathfrak{M}\widetilde{F}(s) = (2\pi)^{n/2} \mathfrak{M}F(r-s) \frac{g(s)}{g(-s+r)}$ pour $s = r/2 + iy$ il vient:

$$\mathfrak{M}\widetilde{F}(r/2 + iy) = (2\pi)^{n/2} \mathfrak{M}F(r/2 - iy) \frac{g(r/2 + iy)}{g(r/2 - iy)}$$

A cause de la forme de la fonction g il n'est pas difficile de voir que le module de $\frac{g(r/2 + iy)}{g(r/2 - iy)}$ est égal à 1 .

Par conséquent : $|\mathfrak{M}\widetilde{F}(r/2 + iy)|^2 = (2\pi)^n \, |\mathfrak{M}F(r/2 - iy)|^2$

D'où le théorème par la formule de Plancherel classique. □

Remarques:

a) Soit f un élément pair de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, considérons la fonction $g(x) = \prod_{p=0}^{\frac{r-3}{2}} (-xd/dx-2p-1)^{2p+1} f(x)$ on a $\mathfrak{M}g(2p+1) = 0$ avec ordre de multiplicité au moins égal à 2p+1 et donc g appartient à $\mathcal{M}$.

b) Des résultats analogues restent valables pour $d \equiv 0$ [4].

C. Relations de Bochner-Hecke généralisées.

La relation fonctionelle généralisée

Posons $Z_j(f,s,p) = \int_{\Omega_j} p(x) f(x) |\det x|^s \, d^x x$

où $Re s > n/r$, $p \in \mathcal{P}_m$ et f est un élément de $\mathcal{S}(V)$

Ces intégrales définissent des distributions tempérées qui se prolongent d'une manière méromorphe sur $\mathbb{C}$.Remarquons d'autre part que l'identité de Bernstein généralisée:

$$p(\partial)(\det x)^s = \beta_m(s) \, (\det x)^s \, p(x^{-1}) \quad \text{où x est dans } \Omega$$

entraine pour x dans Ω_j,

$$p(\partial)|detx|^s = \beta_m(s)\,|detx|^s\,p(x^{-1})$$

on peut donc définir les distributions $Z_j(f,s,\overset{\vee}{p})$ d'une manière méromorphe pour s dans $\mathbb{C}$,f dans $\mathcal{S}(V)$ et avec $\overset{\vee}{p}(x) = p(x^{-1})$.

Proposition 3: La transformée de Fourier de $Z_j(f,s,\overset{\vee}{p})$ est donnée par:

$$Z_j(\hat{f},s,p) = (-i)^{|m|}\,\Gamma_\Omega(m+s)e^{-\frac{i\pi}{2}rs}\sum_{k=0}^{r} u_{jk}(s)Z_k(f,-s+\frac{n}{r},\overset{\vee}{p})$$

$$\text{avec } \Gamma_\Omega(m+s) = (2\pi)^{\frac{n-r}{2}}\prod_{i=1}^{r}\Gamma\left(s - m_i - (i-1)\frac{d}{2}\right)$$

On a : $\hat{f}(x)p(x) = (-i)^{|m|}(p(\partial)f)^\wedge$

d'autre part de : $p(\partial)|detx|^s = \beta_m(s)\,|detx|^s\,p(x^{-1})$ on tire :

$$Z_k(p(\partial)f,-s+n/r) = (-1)^{|m|}\beta_m(-s)Z_k(f,-s+\frac{n}{r},\overset{\vee}{p})$$

mais $\beta_m(-s)\Gamma_\Omega(s) = (-1)^{|m|}\,\Gamma_\Omega(m+s)$

d'où la proposition. □

Les relations de Bochner-Hecke généralisées

Soit maintenant $f(x) = F(|detx|)p(x)$ avec p dans $\mathcal{P}_m$ et F dans $\mathcal{S}([0\ ,+\infty[\ )$.Nous nous proposons de trouver $\hat{f}$.

Définissons $$\Psi_0(\phi,s,p) = \int_V \phi(x)p(x)|detx|^s\,d^x x$$

La proposition 3 nous donne

$$\Psi_0(\hat{\phi},s,p) = (-i)^{|m|}2^r\,\Gamma_\Omega(m+s)(\cos\pi s/2)^r\Psi_0(\phi,-s+n/r,p)$$

Proposition 4 La restriction à V \ S de la distribution $(F(|detx|)p(x))^\wedge$ est définie par la fonction $\tilde{F}_m(|detx|)\overset{\vee}{p}(x)$ où

$$\tilde{F}_m(u) = \int_0^{+\infty} F(t)t^{n/r-1}K_m(tu)dt$$

avec $$K_m(u) = (-i)^{|m|}\frac{2^r}{2i\pi}\int_{L_{a\beta}} u^{-s}\Gamma_\Omega(m+s)(\cos\pi s/2)^r ds$$

On répète la démonstration déjà faite pour la transformation de Hankel.Il faut bien sûr ici

$$r\beta - n/2 + \sum_{i=1}^{r} m_i < -1$$ □

APPENDICE : LES FONCTIONS DE MEIJER

Notations: Soient $0 \le m \le q$, $0 \le n \le p$ quatre éléments de $\mathbb{N}$.On pose :

$\mathbf{a} = (a_1,...,a_p)$, $\mathbf{b} = (b_1,...,b_q)$ et :

$$\chi(s) = \frac{\prod_{j=1}^{m} \Gamma(b_j - s)}{\prod_{j=m+1}^{q} \Gamma(1-b_j+s)} \; \frac{\prod_{j=1}^{n} \Gamma(1-a_j+s)}{\prod_{j=n+1}^{p} \Gamma(a_j-s)}$$

où s, b_j ($0 \le j \le q$), a_j ($0 \le j \le p$) sont dans $\mathbb{C}$.On supposera toujours que :

$$a_j - b_h \neq 1,2,3,..... \quad (1 \le j \le n \; ; 1 \le h \le m).$$

Cela entraine qu'aucun pôle de $\prod_{j=1}^{m} \Gamma(b_j-s)$ n'est pôle de $\prod_{j=1}^{n} \Gamma(1-a_j+s)$.

A. Définition et premières propriétés

Définition:

S.Meijer définit les fonctions G :

$$G_{pq}^{mn}(z \mid \begin{matrix}\mathbf{a}\\ \mathbf{b}\end{matrix}) = \frac{1}{2i\pi} \int_C \chi(s) z^s ds \qquad z \neq 0$$

(on suppose que z est un élément de $\tilde{\mathbb{C}}$, revêtement universel de $\mathbb{C}^*$)

C est un des chemins suivants:

a) C est le chemin joignant $\sigma - i\infty$ à $\sigma + i\infty$ ($\sigma \in \mathbb{R}$) qui laisse les pôles de $\prod_{j=1}^{m} \Gamma(b_j-s)$ à sa droite et les pôles de $\prod_{j=1}^{n} \Gamma(1-a_j+s)$ à sa gauche .On prendra ce chemin si $m+n-(p+q)/2 = \delta > 0$ et $\arg z < \delta\pi$: l'intégrale convergera alors absolument ; si $\arg z = \delta\pi$ avec $\delta \ge 0$ l'intégrale convergera encore absolument si $p = q$ et $\mathrm{Re}(\nu) = \mathrm{Re}(\sum_{j=1}^{q} b_j - \sum_{j=1}^{p} a_j) < -1$;ou bien quand $p \neq q$ et si l'on choisit σ tel que $(q-p)\sigma > \mathrm{Re}(\nu) + 1 - (q-p)/2$

b)C est un chemin reliant $+\infty - i\tau$ à $+\infty + i\tau$ ($\tau > 0$) et entourant les pôles de $\prod_{j=1}^{m} \Gamma(b_j-s)$ et non les pôles de $\prod_{j=1}^{n} \Gamma(1-a_j+s)$ .Il y aura intégrabilité si :

- $q = p$ et $|z| < 1$, $z \neq 0$
- $q > p$ et $z \neq 0$

c) C est un chemin reliant $-\infty - i\tau$ à $-\infty + i\tau$ ($\tau > 0$) et entourant les pôles de $\prod_{j=1}^{n} \Gamma(1-a_j-s)$ et non les pôles de $\prod_{j=1}^{m} \Gamma(b_j-s)$ .Il y aura intégrabilité si :

- $q = p$ et $|z| > 1$, $z \neq 0$

• $q < p$ et $z \neq 0$

S'il y a plusieurs choix possibles, la fonction G ne dépendra pas du chemin C.

Donnons des indications dans un cas paticulier.

Prenons $\chi(s) = \prod_{j=1}^{m} \Gamma(b_j - s) \qquad m \geq 1$

De l'estimation : $|\Gamma(x+iy)| \sim |y|^{x-1/2} e^{|y|\pi/2} (2\pi)^{1/2} \qquad |y| \to +\infty$

Il résulte que l'on peut prendre pour C un chemin du type a) pour $z \neq 0$ $|\arg z| < m\pi/2$.On obtient une fonction G défini pour $|\arg z| < m\pi/2$.

Utilisons la relation $\Gamma(1-z)\Gamma(z) = \frac{\pi}{\sin\pi z}$ il viendra

$$\chi(s) = \frac{1}{\prod_{j=1}^{m} \Gamma(1-b_j+s)} \frac{\pi^m}{\prod_{j=1}^{m} \sin\pi(b_j-s)}$$

prenons pour C un chemin du type b) avec, si x est grand, $s = x \pm i\tau \qquad (\tau > \underset{j=1,..,m}{\text{Max}} |\text{Im} b_j|)$

De l'estimation : $\Gamma(z) \sim z^{z-1/2} e^{-z} (2\pi)^{1/2} \qquad |\arg z| \leq \pi - \delta \qquad (\delta > 0)$

et de l'inégalité $|\sin z| \geq \frac{1}{2}|e^{\text{Im}z} - e^{-\text{Im}z}|$

$\chi(s)\, z^s$ sera intégrable sur le contour C et donc on obtient une fonction G pour $z \neq 0$.

Considérons maintenant un arc de cercle Γ: $s = R\, e^{i\theta}$ situé dans $\text{Re}s \geq 0$ et reliant deux points des contours envisagés (on prend R assez grand),en utilisant les estimations précédentes on trouve pour s sur Γ pour R tendant vers l'infini:

$$\frac{1}{\prod_{j=1}^{m} \Gamma(1-b_j+s)} = O\left(e^{mR(\theta\cos\theta - \theta\sin\theta)} R^{-\sum_{j=1}^{m}(1/2-b_j)}\right)$$

et

$$\frac{1}{\prod_{j=1}^{m} \sin\pi(b_j-s)} = O\left(e^{-m\pi R|\sin\theta|}\right)$$

Il en résulte que pour R tendant vers l'infini, l'intégrale $\int_{\Gamma} \chi(s)\, z^s\, ds$ tend vers 0 ; à partir de là

on peut montrer que pour $|\arg z| < m\pi/2$ les deux fonctions G coïncident.

Exemples:

a) $G_{01}^{10}(z\,|_b) = z^a e^{-z}$

b) $G_{02}^{10}(z\,|_{(\alpha,\beta)}) = z^{\frac{\alpha+\beta}{2}} J_{\alpha-\beta}(2z^{1/2})$

et $G_{02}^{20}(z\,|_{(\alpha,\beta)}) = z^{\frac{\alpha+\beta}{2}} K_{\alpha-\beta}(2z^{1/2})$

où J_ν et K_ν désignent les fonctions de Bessel et de Mac-Donald classiques (voir au chapitre I la définition de la fonction de Mac-Donald.)

c)De nombreuses fonctions spéciales peuvent s'exprimer à l'aide des fonctions G de Meijer (voir les tables de **[Lu.]** , **[Mat.-Sa.]**)

d)Si l'on se place dans le cas b) avec la condition supplémentaire $b_j - b_h \notin \mathbb{Z}$ pour $1 \leq j \leq m$; $1 \leq h \leq m$; $j \neq h$ on peut calculer explicitement la fonction G par le théorème des résidus à l'aide des fonctions ${}_pF_{q-1}$.

Propriétés:

La fonction G est une fonction analytique en z (où z appartient à $\mathbb{C}$, 0 étant en général un point de branchement).

De nombreuses propriétés élémentaires de la fonction G se déduisent de la définition et des propriétés de la fonction Γ (voir la bibliographie).Signalons la propriété importante:

$$G_{pq}^{mn}(z \mid \begin{matrix}\mathbf{a}\\ \mathbf{b}\end{matrix}) = G_{qp}^{nm}(1/z \mid \begin{matrix}\mathbf{1-a}\\ \mathbf{1-b}\end{matrix}) \qquad \text{où } \arg 1/z = -\arg z \text{ et } \mathbf{1-a} = (1-a_1,\ldots,1-a_p)$$

elle permet de se ramener au cas $p \leq q$.

B. Transformée de Mellin.

Sous certaines hypothèses, on peut calculer la transformée de Mellin de la fonction G et montrer que :

$$\mathcal{M}\, G_{pq}^{mn}(z|\begin{matrix}\mathbf{a}\\ \mathbf{b}\end{matrix}) = \chi(-s)$$

(voir **[Lu.]** qui énumère sept cas de validité de la formule précédente).

Condidérons le cas où $\chi(s) = \prod_{j=1}^{m} \Gamma(b_j - s)$ $\quad m \geq 1$

Alors: $$\mathcal{M}\, G_{0q}^{m0}(\eta y \mid_{\mathbf{b}}) = \eta^s \chi(-s) \quad (\text{où } |\arg\eta| < \delta\pi \text{ et } \mathrm{Res} > - \inf_{j=1,\ldots,m} |\mathrm{Im} b_j|$$

En effet pour $|\arg z| < \delta\pi$ on peut prendre comme contour C la droite Res = a avec a quelconque tel que $a < \inf_{j=1,\ldots,m} |\mathrm{Im} b_j|$ mais alors pour tout N entier on aura quand y tend vers l'infini:

$$G_{0m}^{m0}(\eta y \mid_{\mathbf{b}}) = O(y^{-N}) \qquad (\eta \text{ étant fixé avec } |\arg\eta| < \delta\pi)$$

D'autre part en 0 le comportement de la fonction $y \to G_{0m}^{m0}(\eta y \mid_{\mathbf{b}})$ est donné par le premier pôle de $\chi(s)$, d'où la formule annoncée.

L.Luke , M.Mathai et K.Saxena étudient sous les hypothèses adéquates, les intégrales

$$\int_0^{+\infty} G_{pq}^{m\,n}(\eta x \mid \begin{matrix}\mathbf{a}\\ \mathbf{b}\end{matrix})\, G_{p'q'}^{m'n'}(\omega x \mid \begin{matrix}\mathbf{a'}\\ \mathbf{b'}\end{matrix}) dx$$

ainsi que les transformées de Laplace, Hankel de la fonction G.

Des transformations intégrales incluant la fonction G ont été également étudiées (voir par exemples les articles de R.Narain et C.Fox cités dans la bibliographie de[**Lu.**] et [**Mat.-Sa.**]).

C. Comportement asymptotique

E.W. Barnes a étudié le développement asymptotique quand |z| tend vers l'infini des fonctions $G^{q0}_{pq}(z \mid \begin{matrix}\mathbf{a}\\ \mathbf{b}\end{matrix})$ et $G^{q1}_{pq}(z \mid \begin{matrix}\mathbf{a}\\ \mathbf{b}\end{matrix})$ (q > p) et S.Meijer en déduit le comportement des fonctions

$G^{mn}_{pq}(z \mid \begin{matrix}\mathbf{a}\\ \mathbf{b}\end{matrix})$ (voir [**Lu.**] et [**Mat.-Sa.**] , voir également [**Bra.**]pour une autre méthode s'appliquant à des classes plus générales de fonctions).

Donnons un cas particulier des résultats de E.W.Barnes :

$$G^{m0}_{0m}(z \mid_{\mathbf{b}}) \sim \frac{(2\pi)^{\frac{m-1}{2}}}{m^{\frac{1}{2}}} e^{-mz^{1/m}} z^{\frac{1}{m}((1-m)/2 - \sum_{j=1}^{q} b_j)} \qquad (|z| \to +\infty)$$

($m \geq 2$, $|\arg z| < (q+1)\pi$)

On peut noter la décroissance exponentielle pour $|\arg z| < m\pi/2$.

D. Equations différentielles.

La fonction $G^{mn}_{pq}(z \mid \begin{matrix}\mathbf{a}\\ \mathbf{b}\end{matrix})$ satisfait l'équation différentielle :

$$(-1)^{p-m-n} z \prod_{j=1}^{p} (zd/dz - a_j + 1)y - \prod_{j=1}^{q} (zd/dz - b_j)y = 0$$

La démonstration en est formelle, le principe est dû à E.W.Barnes .

Dans le cas où p < q les seules singularités de l'équation sont 0 (singularité régulière) et l'infini (singularité irrégulière).Au voisinage de l'infini,S.Meijer détermine un système fondamental de solutions dans des secteurs adéquats: ce sont des fonctions $G^{q0}_{pq}(z)$ et $G^{q1}_{pq}(z)$ il développe alors la fonction $G^{mn}_{pq}(z|\begin{matrix}\mathbf{a}\\ \mathbf{b}\end{matrix})$ suivant ce système et en déduit en particulier son comportement asymptotique quand $|z| \to +\infty$.(voir [**Me.**] , [**Lu.**]).

BIBLIOGRAPHIE

[A.] A.Ash,D.Mumphord,M.Rapaport et Y.Tai: Smooth compactifications of locally symmetric varieties
(Mat. Sci. Press. 1975)

[Bo.-Ru] N.Bopp,H.Rubenthaler: Fonction zêta associée à la série principale sphérique de certains espaces symétriques
(C.R.A.S. 310 , Série I 1990 , p. 505 - 508)

[Bra.] B.L.J.Braaksma: Asymptotic expansions and analytic continuationsfor a class of Barnes integrals
(Compo. Math. vol.15 p; 239-341)

[Br.-Kœ.] H.Braun,M.Kœcher: Jordan Algebren
(Berlin,Springer 1966)

Fa1.] J.Faraut: Algèbres de Jordan et cônes symétriques
(Cimpa - Université de Poitiers 1988)

[Fa2.] J.Faraut: Analyse harmonique et fonctions spéciales
(Ecole d'été d'Analyse harmonique - Université de Tunis 1984)

[G.-Ch.] I.M.Guelfand,G.E.Chilov: Les Distributions I
(Dunod,Paris 1962)

[Ch.] A.Chaabouni: Thèse
(Université de Tunis 1986)

[Ko.] A.Korány: Complex Analysis and Symmetric Domains
(Cimpa - Université de Poitiers 1988)

[La.] M.Lassalle: Algèbre de Jordan et ensemble de Wallach
(Inv.Math. 1987, vol.89)

[Lu.] Y.L.Luke: The special functions and their approximations Vol.1
(Aca. Press, 1969)

[Ma.] H.M.Maire:Sur les distributions images réciproques par une fonction analytique
(Comm. Math. Helvetici 39 (51) p.395 -410)

[Mat.-Sa.] A.M.Mathai, R.K.Saxena: Generalized Hypergeometric Functions with applications in Statistics and Physical Sciences
(Lectures Notes in Math. n °348 1973)

[Me.] C.S.Meijer: On the G function I - VIII.
(Indag. Math. 8, 1946)

[Ol.] G.G.Olafsson:Fourier and Poisson transformation associated to a semi-simple symmetric space
(Inv. Math. 90 , 3 , 1987)

[Os.-Se.] T.Oshima,J.Sekiguchi: Eigenspaces of Invariant Differential Operators on an Affine Symmetric Space

(Inv. Math. 57, 1980)

[Ra.] M.Raïs: Solutions élémentaires des opérateurs différentiels bi-invariants sur un groupe de Lie nilpotent
(CRAS t 273 , 1971)

[Ru.] H.Rubenthaler: La surjectivité de l'application moyenne pour les espaces préhomogènes
(Jour. Func. Ana. 60, 1985 p. 80 - 94)

[Sa1.] I.Satake: Algebraic structures of symmetric domains
(Iwanami - Shoten and Priceton Univ. Press 1980)

[Sa2.] I.Satake: A formula in simple Jordan algebras
(Tôhoku Ma. Jour. 36 , 1984 p. 611- 622)

[Sa.-Fa.] I.Satake , J.Faraut: The functional equation of zeta distributions associated with formally real Jordan algebras
(Tôhoku Ma. Jour. 36 , 1984 p. 469 - 482)

[Sat.] F.Sato: Zeta functions in several variables associated with prehomogeneous spaces I : Functional equations
(Tôhoku Ma. Jour. 34 , 1982)

[Sa.-Sh.] M.Sato, T.Shintani: On zeta function associated with prehomogeneous vector spaces
(Ann.of Math. 100 , 1974)

[Sh.] T.Shintani: On Dirichlet series whose coefficients are class numbers of integral binary cubic forms
(Jour. Math. Soc. Japan. 24 , 1972)

[Sch.] L.Schwartz: Théorie des distributions
(Hermann , Paris 1978)

[St.] E.M.Stein: Analysis in matrix spaces and some new representations of SL(n,$\mathbb{C}$)
(Annals of Math. ,86 , 1967)

[Str.] R.S.Strichartz: Fourier transforms and non compact Rotation groups
(Ind. Univ. Mat. Jour. vol 24 , n° 6 1974)

[Wa.] N.R.Wallach: Harmonic Analysis on Homogeneous Spaces
(Dekker , New York , 1973)

NOM DE L'ETUDIANT : BLIND BRUNO

NATURE DE LA THESE : DOCTORAT DE L'UNIVERSITE DE NANCY I EN MATHEMATIQUES

VU, APPROUVE ET PERMIS D'IMPRIMER

NANCY, le 18 JAN. 1991

LE PRESIDENT DE L'UNIVERSITE DE NANCY I

UNIVERSITE DE NANCY I

LE PRESIDENT

M. BOULANGE

Résumé: Dans la première partie on établit, pour l' hyperboloïde d'équation $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 - x_{n+1}^2 = 1$ un théorème de Bochner-Schwartz pour certaines distributions de type positif et un théorème du type Paley Wiener pour les fonctions indéfiniment dérivables et à support compact .
Dans la deuxième partie on étudie les intégrales zêta à plusieurs variables complexes, associées à une algèbre de Jordan simple et euclidienne V.On montre que les coefficients de la relation fonctionnelle qui les lie donnent lieu, pour certaines valeurs des variables complexes, à une matrice unitaire .
On s'interesse dans la troisième partie aux pôles des distributions zêta à une variable complexe, associée à V. D'autre part, pour certaines algèbres V, la transformée de Fourier des distributions du type F(|detx|) est de la même forme $\widetilde{F}$ (|detx|);la transformation qui à F associe $\widetilde{F}$ ayant des propriétés analogues à la transformation de Hankel classique.

Mots clefs: Algèbres de Jordan ;Fonctions moyennes ; Distributions zêta ; Théorème de Bochner-Schwartz Théorème de Paley-Wiener ; Transformation de Hankel ; Transformation de Mellin ; Vecteur distribution d'une représentation .