AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4
Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10
http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php
http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm

236000 0581

05INPL047N

(T) 2005 MOYEN, R.

Institut National
Polytechnique de Lorraine

École Nationale Supérieure de Géologie

École doctorale RP2E

# PARAMÉTRISATION 3D DE L'ESPACE EN GÉOLOGIE SÉDIMENTAIRE : LE MODÈLE GEOCHRON

## THÈSE

présentée et soutenue publiquement le 9 juin 2005

pour l'obtention du

**Doctorat de l'Institut National Polytechnique de Lorraine**

**Spécialité Géosciences**

par

Rémi MOYEN

Service Commun de la Documentation
INPL
Nancy-Brabois

**Composition du jury**

| | |
|---|---|
| *Rapporteurs :* | Jean-Paul CHILÈS<br>André JOURNEL |
| *Examinateurs :* | Guillaume CAUMON<br>Isabelle MORETTI<br>Helmut SCHAEBEN |
| *Invités :* | Jean BORGOMANO<br>Jean-Claude DULAC |
| *Directeur :* | Jean-Laurent MALLET |

**Centre de Recherches Pétrographiques et Géochimiques**
Laboratoire d'Infographie et d'Analyse de Données
Rue du Doyen Marcel Roubault - 54500 Vandœuvre

Mis en page avec la classe thloria.

# Remerciements

Mes remerciements vont en premier lieu à Jean-Laurent Mallet, qui a su non seulement me donner envie de me plonger dans cette thèse, mais qui m'a aussi guidé pendant presque quatre années. Je remercie particulièrement Jean-Paul Chilès de l'École des Mines de Paris et André Journel, professeur à l'Université de Stanford, d'avoir accepté d'être rapporteurs de ce manuscrit. Merci encore à Guillaume Caumon de l'École de Géologie de Nancy, ancien camarade de thèse, à Isabelle Moretti de l'Institut Français du Pétrole, à Helmut Schaeben, professeur à l'Université de Freiberg, à Jean Borgomano, professeur à l'Université de Provence, ainsi qu'à Jean-Claude Dulac, président de la compagnie Earth Decision Sciences, d'avoir accepté d'être présents dans mon jury.

Il y a plusieurs personnes que je ne veux pas oublier, pour l'aide qu'ils ont pu m'apporter au cours de ce travail. D'abord Christian, dont les conseils et commentaires m'ont été fort utiles durant la rédaction de ce manuscrit et Françoise (*des milliers de pains pour son Ka*), qui a accompli l'ingrate tâche de relecture, ainsi qu'Anlor et Bruno. Merci aussi à Mme Cugurno, toujours disponible pour s'occuper avec efficacité et bonne humeur de nos tracas administratifs. Tous les thésards du labo ont contribué, que ce soit par leurs reflexions, leur relecture, leur aide ou leurs bavardages, à rendre ces années agréables et, je l'espère, productives. Merci donc, aux anciens déjà partis ou déjà revenus, Guillaume, Sophie, Jean-Charles, Laurent & Laurent, François, Dave, aux moins anciens, Manu, Bruno, Pimu, Lætitia, Bernardo, Tobias et la Castagne, et aux nouveaux, Anlor, Sarah, Luc et Pierre.

Enfin, je n'oublie pas tous les autres, en dehors du labo, qui m'ont donné des idées, des bières ou des moments de détente. Mes frères, Jean-Yves, dont j'ai presque compris la thèse, et Jean-François, qui sait me rappeler, même depuis l'autre bout du monde, qu'un géologue s'intéresse à des vrais cailloux. Les passionnés d'ATPUB et de `frbb` (Aymerix notre Chef, Gwen le bricoleur fou, Captain à la connaissance et au verbe sans limite...) ainsi que tous les brasseurs de Londres à Berlin, en passant par Bruxelles et la France. Les rôlistes aussi, sans lesquels je me serais couché plus tôt bien souvent, les joueurs d'EU, qui m'ont permis de connaître les détails des révoltes sibériennes du XVI$^{\text{ème}}$ siècle et d'autres événements historiques aussi importants. Et mes parents bien sûr, qui, même si ils prétendent ne pas comprendre ce que je fais, savent toujours poser les bonnes questions et sont toujours disponibles !

# Table des matières

**Introduction** **1**

**Chapitre 1 Modélisation volumique du sous-sol** **3**

1.1 Modélisation des propriétés pétrophysiques . . . . . 3

1.1.1 Représentations continues . . . . . 3

1.1.2 Représentations discrètes . . . . . 4

1.1.3 Les différents types de maillages volumiques . . . . . 4

1.1.4 Modélisation des failles . . . . . 8

1.2 Construction de maillages et paramétrisation 3D . . . . . 11

1.2.1 Construction de volumes tétraédrisés . . . . . 11

1.2.2 Construction d'une grille stratigraphique . . . . . 13

1.2.3 Paramétrisation d'un volume tétraédrisé . . . . . 19

**Chapitre 2 Le modèle GeoChron** **23**

2.1 Principe général du modèle . . . . . 23

2.1.1 Les coordonnées paramétriques . . . . . 24

2.1.2 Géométrie différentielle des coordonnées paramétriques . . . . . 31

2.2 Aspects sédimentologiques de l'espace paramétrique . . . . . 35

2.2.1 Vitesse de sédimentation instantanée . . . . . 36

2.2.2 Correspondance avec les diagrammes de Wheeler . . . . . 38

2.3 Comment construire une paramétrisation GeoChron ? . . . . . 40

2.3.1 Contraintes génériques . . . . . 40

2.3.2 Les différents styles de déformation . . . . . 41

2.3.3 Déformation par flexure simple d'une plaque homogène (*pure bending*) 44
2.3.4 Glissement banc sur banc (*flexural slip*) . . . . . 45

**Chapitre 3 Construction d'une paramétrisation 3D GeoChron 49**
3.1 Principe général de construction . . . . . 49
3.1.1 Calcul du *temps* . . . . . 50
3.1.2 Calcul global de $(u, v)$ . . . . . 54
3.1.3 Le choix d'un support . . . . . 57
3.2 Approche locale : les lignes Iso-Paléo-Géographiques . . . . . 60
3.2.1 Principe de la méthode . . . . . 60
3.2.2 Mise en place de l'algorithme et implémentation . . . . . 66
3.2.3 Édition d'une paramétrisation GeoChron existante . . . . . 70
3.3 Approche globale par contraintes . . . . . 74
3.3.1 La contrainte d'orthogonalité . . . . . 74
3.3.2 Le *conformal mapping* étendu . . . . . 76
3.3.3 Résultats . . . . . 78

**Chapitre 4 Modélisation géométrique des rejets 85**
4.1 Calcul du vecteur rejet . . . . . 86
4.1.1 Estimation du rejet sur un horizon . . . . . 86
4.1.2 Estimation du rejet par surfaces d'isovaleur . . . . . 91
4.1.3 Estimation du rejet par surfaces de faille . . . . . 96
4.2 Le rejet comme contrainte DSI . . . . . 104
4.2.1 Continuités $C_0$ et $C_1$ . . . . . 104
4.2.2 Expression de la continuité d'ordre 0 . . . . . 105
4.2.3 Expression de la continuité d'ordre 1 . . . . . 105
4.3 Utilisation du rejet dans le calcul d'une paramétrisation 3D . . . . . 108
4.3.1 Exemple synthétique . . . . . 108
4.3.2 Exemple réel . . . . . 112
4.3.3 Mise à jour des rejets dans l'espace paramétrique . . . . . 114

**Chapitre 5 Applications du modèle GeoChron** **121**

5.1 Modélisation de propriété . . . . . 121

5.1.1 Géostatistiques dans l'espace paramétrique . . . . . 121

5.1.2 Visualisation dans l'espace géologique . . . . . 124

5.1.3 Modélisation des systèmes sédimentaires . . . . . 126

5.1.4 Changements d'échelle (*upscaling*) . . . . . 131

5.2 Utilisation du tenseur de déformation . . . . . 134

5.2.1 De la paramétrisation au tenseur de déformation . . . . . 134

5.2.2 Déformation de structures géologiques . . . . . 138

5.2.3 Intérêts et limitations de l'approche . . . . . 142

5.3 Mise en cohérence de données sismiques . . . . . 145

5.3.1 Dépliage d'un cube d'attributs sismiques . . . . . 145

5.3.2 Visualisation des données sismiques dans l'espace paramétrique . . 147

**Conclusion** **153**

**Annexe A Principe de l'interpolateur DSI** **157**

**Annexe B Interpolation de propriétés sur des tétraèdres** **161**

**Références bibliographiques** **169**

# Table des figures


1.1 Représentations schématiques de la structure d'un maillage à deux dimensions 6
1.2 Grille semi-structurée construite par extrusion et grille hybride adaptée aux failles . . . 7
1.3 Exemples de différents types de maillages . . . 9
1.4 Zone endommagée autour d'une faille . . . 10
1.5 Graphe d'incidence entre éléments radiaux d'un modèle surfacique . . . 12
1.6 Modèle surfacique et modèle topologique (*Soft Frame Model*) correspondant 14
1.7 Longueur d'une couche mesurée entre deux puits dans une grille régulière et dans un grille irrégulière adaptée à la stratigraphie . . . 15
1.8 Grille structurée irrégulière (*grille stratigraphique*) . . . 15
1.9 Principe général d'extrusion d'une grille volumique . . . 17
1.10 Adaptation d'un champ de fibres à deux failles . . . 18
1.11 Vue en coupe d'une grille stratigraphique coupée par deux failles et induisant une erreur dans le calcul des distances . . . 19
1.12 Relations entre espace géologique et espace paramétrique . . . 20
1.13 Principe général de construction d'une grille paramétrique . . . 21

2.1 Schéma de principe de l'espace GeoChron . . . 24
2.2 Variation latérale de faciès au sein d'une même couche . . . 26
2.3 L'espace paramétrique $\overline{G}$ vu comme un empilement continu d'images de l'espace de dépôt . . . 27
2.4 Coupe verticale illustrant la correspondance entre $G$ et $\overline{G}$, en présence de zones d'érosion . . . 29
2.5 Lignes de paramétrisation $u$, $v$ et $t$ dans l'espace géologique . . . 30
2.6 Repère paramétrique $(\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_t)$ de l'espace géologique . . . 32
2.7 Un livre plié vu comme un analogue à la déformation d'une couche géologique 36
2.8 Diagramme de *time stratigraphy* ou de Wheeler . . . 39
2.9 Intégration d'un horizon de référence et d'une ligne IPG dans la construction d'un modèle GeoChron . . . 42
2.10 Déformation d'une couche par flexure simple (*pure bending*) . . . 42

2.11 Définition de la fibre neutre dans une couche en *pure bending* . . . . . 43
2.12 Déformation d'une couche par glissement banc sur banc (*flexural slip*) . . . 44

3.1 Exemples de construction de la composante $t$ de la paramétrisation . . . . 52
3.2 Influence des valeurs initiales $t_i$ sur le calcul du *temps* . . . . . 53
3.3 Paramétrisation 2D par *conformal mapping* de surfaces triangulées . . . . . 56
3.4 Paramétrisation GeoChron calculée sur une grille structurée régulière . . . 57
3.5 Visualisation d'une simulation de propriété pétrophysique sur une grille structurée régulière de l'espace géologique . . . . . 58
3.6 Modèle surfacique englobé dans un maillage structuré régulier et dans un maillage non structuré . . . . . 59
3.7 Notations utilisées dans le cadre de la méthode tracé de particules de Pollock 63
3.8 Champ de fibres extraites depuis un horizon de référence . . . . . 65
3.9 Principe de tracé des fibres au travers d'une faille . . . . . 66
3.10 Fibre intersectant une faille et décalée suivant le vecteur rejet . . . . . 67
3.11 Contrôle de la densité du champ de fibres par réinitialisation de l'extraction sur chaque horizon . . . . . 70
3.12 Paramétrisation GeoChron calculée à partir d'un champ de fibres . . . . . 70
3.13 Ligne IPG extraite dans un volume paramétrisé depuis un horizon donné . 72
3.14 Modèle initial de l'anticlinal de Split Mountain, Utah (données IFP) . . . . 79
3.15 Calcul du paramètre $t$ sur le modèle de Split Moutain, Utah . . . . . 79
3.16 Paramétrisation de l'horizon de référence du modèle de Split Mountain, Utah 80
3.17 Paramétrisation $(u, v)$ obtenue par la contrainte d'orthogonalité 3D . . . . 80
3.18 Paramétrisation $(u, v)$ obtenue par la contrainte de *conformal mapping* étendu 81
3.19 Paramétrisation du modèle de Split Mountain par la méthode des fibres . . 82
3.20 Comparaison en coupe entre les deux contraintes de paramétrisation globale 83

4.1 Modélisation d'un vecteur rejet par deux ou trois composantes . . . . . 86
4.2 Modèle macro-topologique d'une surface triangulée . . . . . 87
4.3 Installation de rejets sur une surface, le long d'une faille coupant le bord du domaine d'étude . . . . . 89
4.4 Vue en coupe de l'association de deux lèvres de faille par des rejets . . . . 90
4.5 Tétraèdre traversé par une surface d'isovaleur d'une propriété . . . . . 92
4.6 Extraction d'une surface d'isovaleur . . . . . 92
4.7 Surface d'isovaleur $H_t$ extraite depuis un volume tétraédrisé et sur laquelle des extrémités de bordure ont été installées automatiquement . . . . . 94
4.8 Calcul des rejets sur une surface d'isovaleur . . . . . 95
4.9 Ensemble de vecteurs rejet générés automatiquement à différentes valeurs de *temps* . . . . . 96

4.10 L'association automatique des bords logiques peut parfois conduire à des incohérences sur les bords du modèle . . . . . 97
4.11 Vue en coupe de deux lèvres de faille . . . . . 98
4.12 Exemple d'un modèle surfacique représentant un réseau de failles et vecteurs rejet calculés en 3D . . . . . 103
4.13 Notations utilisées pour décrire un vecteur rejet . . . . . 104
4.14 Deux tétraèdres de part et d'autre d'une faille, reliés par un vecteur rejet . 107
4.15 Visualisation d'un volume tétraédrisé dans l'espace paramétrique . . . . . 109
4.16 Modèle synthétique illustrant l'influence des rejets dans le calcul de la paramétrisation . . . . . 109
4.17 Le modèle synthétique dans l'espace paramétrique $(u, v, t)$ après interpolation de $u$ et de $v$ . . . . . 111
4.18 Influence du poids de la contrainte de continuité sur la paramétrisation . . 113
4.19 Désignation manuelle d'un rejet dans l'espace paramétrique . . . . . 114
4.20 Vue en coupe d'une faille en Y . . . . . 117
4.21 Glissement de blocs en extension autour de deux failles en Y . . . . . 117
4.22 Section horizontale (vue en plan) dans l'espace paramétrique, illustrant l'édition des rejets . . . . . 118

5.1 Transfert de données de l'espace géologique vers l'espace paramétrique . . . 123
5.2 Modèle de propriété pétrophysique dans l'espace paramétrique . . . . . 124
5.3 Carte de distance aux failles dans l'espace géologique et dans l'espace paramétrique . . . . . 125
5.4 Méthode globale de représentation des propriétés pétrophysiques dans l'espace géologique . . . . . 126
5.5 Modèle de propriété pétrophysique peint sur un volume tétraédrisé . . . . . 127
5.6 Correspondance entre l'espace géologique et l'espace de Wheeler . . . . . 128
5.7 Correspondance entre l'espace géologique, l'espace paramétrique $\overline{G}$ et l'espace de Wheeler . . . . . 129
5.8 *Upscaling* d'une propriété pétrophysique . . . . . 132
5.9 Exemple d'*upscaling* d'une propriété sur une grille polyédrique . . . . . 133
5.10 Modèle surfacique initial, échelle verticale doublée (données Chevron) . . . 139
5.11 Modèle volumique avec une paramétrisation GeoChron . . . . . 139
5.12 Dilatation $\theta$ sur le modèle précédent . . . . . 140
5.13 Comparaison de la dilatation $\theta$ et de la courbure moyenne . . . . . 141
5.14 Influence de la position de l'horizon de référence de la paramétrisation sur le tenseur de déformation . . . . . 142
5.15 Vue en coupe de la paramétrisation orthogonale et de la paramétrisation *conformal mapping* . . . . . 143

5.16 Exemples de méthodes de dépliage d'un cube sismique . . . . . 146
5.17 Cube sismique visualisé dans l'espace géologique et dans l'espace paramétrique . . . . . 147
5.18 Visualisation de l'amplitude sismique correspondant à une couche géologique particulière . . . . . 148
5.19 Intégration de failles supplémentaires grâce à l'interprétation sismique dans l'espace paramétrique . . . . . 149

# Introduction

Dans le cadre de l'étude du sous-sol, la connaissance des propriétés pétrophysiques, telles la porosité ou la perméabilité des terrains, est indispensable. Ces propriétés permettent de mieux estimer la répartition des ressources, mais aussi de prévoir les écoulements de fluides lors de la mise en production de réservoirs pétroliers ou gaziers, par exemple.

Pour caractériser ces réservoirs de nombreux outils ont été développés, qui visent au final à mieux estimer les quantités de gaz ou de pétrole récupérables, à partir d'informations éparses sur le volume étudié : campagnes de prospection sismique, couvrant tout le domaine d'étude mais de faible résolution (de l'ordre de la dizaine de mètres) ; puits de prospection qui ne donnent qu'une vue très restreinte mais à une résolution très élevée (de l'ordre du décimètre) ; connaissances géologiques diverses (contexte structural ou sédimentologique, stratigraphie séquentielle, etc.) sur la région étudiée ou des analogues.

Ces outils forment une chaîne dont l'aspect général dans l'exploration pétrolière est le suivant :

- Dans un premier temps, les données brutes sont prétraitées (filtrage et *stacking* des cubes sismiques, migration de la sismique en profondeur ou des puits en temps, etc.) de manière à construire des jeux de données qui reflètent la géométrie du sous-sol et qui soient exploitables par des géologues.
- Puis un *modèle surfacique* est construit à partir des données traitées, soit par pointé d'horizons sur un cube sismique, soit par repérage de points particuliers le long des puits. Ces données sont intégrées dans un ensemble de surfaces représentant les horizons majeurs du modèle et les failles.
- Ce modèle surfacique sert de base à la construction d'un *modèle volumique*, construit de manière à respecter les discontinuités introduites par les failles et les horizons du modèle surfacique. Le modèle volumique permet d'affecter des valeurs de propriétés aux différents points du volume.
- Les *modèles de propriété* sont alors construits en remplissant le modèle volumique et en prenant en compte les informations sur les propriétés (principalement les données de puits mais aussi des informations secondaires venant de la sismique). On utilise ici le plus fréquemment des algorithmes géostatistiques d'estimation ou de simulation.
- La connaissance des propriétés pétrophysiques permet d'une part d'estimer les réserves disponibles et d'autre part de simuler les écoulements dans le réservoir. Ces *simulations d'écoulement* donnent ainsi des renseignements sur les localisations possibles de puits de production ou d'injection.

- L'ensemble de toutes ces informations, ainsi que l'intégration de données économiques, permettent de décider du schéma d'exploitation du réservoir.

Chacune de ces étapes implique un certain nombre d'hypothèses simplificatrices pour réduire la complexité de la réalité géologique. De plus ces étapes sont fortement liées, les hypothèses de chacune influant sur les suivantes.

En pratique, ces étapes sont réalisées informatiquement sur un certain nombre de logiciels, spécialiés dans une ou plusieurs parties. C'est dans ce contexte que s'inscrit en particulier le géomodeleur GOCAD, développé initialement en C puis en C++ au sein du Laboratoire d'Informatique et d'Analyse des Données de l'École de Géologie de Nancy et financé par le Consortium GOCAD. Ce logiciel permet l'intégration, dans un environnement de visualisation 3D, des différentes étapes depuis la construction du modèle surfacique jusqu'à l'entrée dans les simulateurs d'écoulements. La possibilité de se baser sur tous les outils existant dans le logiciel, tout en développant des outils supplémentaires, est un avantage certain, du point de vue de l'implémentation informatique mais aussi du point de vue de la logique des opérations.

Cette thèse s'intéresse plus particulièrement à deux étapes de la chaîne présentée plus haut, la construction du modèle volumique et du modèle de propriété. En effet, nous verrons dans le premier chapitre que le modèle volumique implique la construction d'un maillage et que de multiples techniques existent pour construire ces maillages, suivant les contraintes à respecter. La plus utilisée, celle des grilles curvilinéaires ou grilles stratigraphiques, est bien adaptée aux algorithmes géostatistiques de modélisation de propriété, mais n'est pas toujours facile à utiliser dans des contextes fortement faillés, et induit de plus des erreurs en essayant de respecter à la fois les horizons et les failles.

Pour remédier à ces erreurs, nous utilisons un nouveau modèle, appelé *modèle GeoChron*, dans lequel la géométrie des failles, celle des horizons (représentée par la paramétrisation du domaine d'étude) et le modèle de propriété sont séparés. Ce modèle est détaillé d'un point de vue théorique dans le chapitre 2, alors que le chapitre 3 présente deux méthodes pratiques de construction d'un tel modèle.

Une des plus grosses difficultés de la modélisation du sous-sol vient de l'intégration des failles, qui font apparaître à la fois des discontinuités dans les terrains et des continuités par le biais du vecteur rejet. Le chapitre 4 présente une voie, basée sur le modèle GeoChron, pour mieux calculer géométriquement ces rejets et les intégrer dans le modèle.

Enfin, le chapitre 5 complète le modèle GeoChron en détaillant l'intégration du modèle de propriété avec le modèle volumique. Ce chapitre indique aussi d'autres applications possibles de ce modèle, en particulier dans le cadre de l'étude des déformations et de l'intégration directe des données provenant du cube sismique.

# Chapitre 1

# Modélisation volumique du sous-sol

## 1.1 Modélisation des propriétés pétrophysiques

L'analyse et la modélisation des propriétés du sous-sol est une étape clé dans l'étude d'un réservoir d'hydrocarbures souterrain. En effet, pour estimer au mieux les réserves disponibles ainsi que pour modéliser la mise en production, il est nécessaire de connaître le plus précisément possible les caractéristiques du milieu. Suivant les méthodes utilisées au cours de l'étude, ces propriétés peuvent être de nature très variable : géophysique (vitesse de propagation des ondes sismiques $V_p$ et $V_s$, résistivité électrique...), pétrophysique (perméabilité, porosité...), géologique (nature des faciès, fracturation...) etc.

D'un point de vue mathématique, une propriété peut être considérée comme une fonction $\varphi$ variant sur un domaine d'étude $\mathcal{D}$ plongée dans l'espace géométrique 3D. Il existe deux grandes familles de représentations possibles, chacune permettant de calculer la valeur de la propriété en tout point de $\mathcal{D}$ :

- les représentations continues, où la propriété est modélisée comme une fonction mathématique ;
- les représentations discrètes, où la propriété est échantillonnée aux nœuds d'un maillage puis interpolée localement à l'intérieur des mailles.

### 1.1.1 Représentations continues

Dans les représentations continues, $\varphi$ est modélisée par une expression mathématique valable sur tout le domaine, de la forme $\varphi(x, y, z) = f(x, y, z)$, où $f$ est une fonction analytique donnée. Pour connaître la valeur de $\varphi$ en un point quelconque, il suffit d'évaluer la fonction $f$ en ce point. Il est aussi possible de calculer des intégrales sur une aire ou un volume ou des variations entre deux points. Cette méthode a donc l'avantage de la légèreté et de la simplicité. Cependant, il est rare que des propriétés géologiques soient correctement représentables par des fonctions mathématiques simples et, dans les cas complexes, il est impossible de trouver une telle fonction.

De plus, les représentations continues sont mal adaptées à la modélisation de discontinuités d'origine géologique, telles que les failles ou les surfaces d'érosion. Il est pour cela

nécessaire d'utiliser des formulations par domaine, c'est-à-dire avec une fonction $f_i$ pour chaque sous-bloc distinct $\mathcal{D}_i$ du domaine initial. Dans le cas où les discontinuités disparaissent ou apparaissent à l'intérieur d'un bloc, il est encore plus difficile de trouver une formulation mathématique.

Cette représentation est donc limitée à certaines propriétés qui peuvent être approchées par des équations simples (généralement des modèles linéaires ou polynomiaux), comme les vitesses de propagation des ondes sismiques, pour lesquelles les avantages en terme de calculs (comme dans le cas du tracé de rayons, voir [Velten, 1998]) dépassent les inconvénients en terme de précision. Cependant, dès que la propriété à modéliser n'est pas très fortement continue, ce type de représentation n'est plus utilisable.

### 1.1.2 Représentations discrètes

Lorsqu'une résolution plus fine est nécessaire sur une propriété $\varphi$, on utilise généralement un modèle discret, dans lequel la fonction à évaluer est échantillonnée en un certain nombre d'éléments du domaine d'étude. Les éléments d'échantillonnage peuvent être de nature très variée suivant les problèmes (points, segments, surfaces ou volumes – cubes, hexaèdres, polyèdres quelconques...). L'évaluation de la valeur de $\varphi(x, y, z)$ se fait de deux manières différentes :

- si le point $(x, y, z)$ est dans un élément d'échantillonnage de $\varphi$, la valeur est donnée directement ;
- sinon, la valeur de $\varphi(x, y, z)$ est estimée en utilisant les valeurs aux éléments d'échantillonnage les plus proches. Cette estimation, tout comme la détermination du voisinage à prendre en compte, peut se faire de multiples façons.

Ces représentations discrètes sont plus adaptées à la modélisation de propriété du sous-sol, car elles permettent de reproduire une finesse de variations quelconque et aussi complexe que nécessaire. Cependant, les algorithmes de modélisation doivent être adaptés par une phase de discrétisation : les lois physiques qui régissent le milieu (lois de la mécanique, des écoulements, processus de sédimentation...) doivent être reformulées sur chaque élément et sur chaque transition entre éléments.

### 1.1.3 Les différents types de maillages volumiques

La discrétisation du domaine d'étude amène à la nécessité d'un maillage, c'est-à-dire d'un schéma topologique reliant entre eux les éléments d'échantillonnage. Ce maillage permet de définir aisément les voisinages de chaque élément en indiquant les liaisons entre éléments. Il existe plusieurs grandes catégories de maillage suivant leur organisation.

On peut distinguer deux grands critères de classification des maillages volumiques :

- la topologie qui indique comment les nœuds sont reliés entre eux ;
- et la géométrie qui indique où sont situés les nœuds dans l'espace 3D.

### Macro- et micro-topologie

On distingue deux niveaux de représentation topologique des objets, la macro-topologie, au niveau global, et la micro-topologie, plus locale.

La micro-topologie indique, au niveau de chaque nœud du maillage, comment sont conservées les informations de voisinage (connections entre nœuds ou éléments de dimension topologique plus élevée) ainsi que leur lien avec une géométrie. Comme les maillages considérés sont importants (plusieurs milliers voire millions de cellules) l'accès à ces informations doit être le plus efficace possible.

Plusieurs modèles de micro-topologie ont été proposés pour représenter des maillages. Le plus simple est le modèle de Weiler (voir [Weiler, 1986], [Weiler, 1984]) qui conserve des *demi-éléments* représentant, par exemple, une arête orientée (partant d'un nœud et joignant un autre). Un triangle, par exemple, sera représenté par trois nœuds, six demi-arêtes (*half edge*) appariées deux à deux et deux demi-triangles représentant les deux faces orientées. Le géomodeleur GOCAD est basé sur cette représentation topologique, qui est relativement facile à implémenter et à appréhender, et c'est celle que nous utiliserons quand des notions topologiques seront nécessaires.

Un autre modèle est celui des *cartes généralisées* (G-Maps, ou Generalized Maps) introduit par Lienhardt ([Lienhardt, 1994]) et développé par B. Lévy dans le cadre de GOCAD ([Lévy, 1999]). L'élément de base de ce modèle est le *brin* (*dart* en anglais), qui représente un chemin dans le graphe d'incidence du maillage (voir paragraphe 1.2.1 et figure 1.5), c'est-à-dire simultanément un nœud, une arête, une surface et un volume (dans un espace à trois dimensions). Cette représentation est plus souple pour modéliser des maillages complexes, mais plus difficile à appréhender.

À l'opposé, la macro-topologie ne se préoccuppe plus des éléments de base du maillage, mais plutôt des relations entre les régions. Dans le cadre géologique ces relations indiqueront, par exemple, qu'un bloc donné doit être en contact avec un autre bloc le long d'une surface de faille ou encore qu'une faille doit découper un horizon ou que certaines cellules de part et d'autre d'une faille correspondent aux mêmes terrains. Le paragraphe 1.2.1 présentera le modèle macro-topologique que nous avons utilisé dans ce travail.

### Classification des maillages

Le critère géométrique permet de faire la distinction entre les maillages *réguliers* et les maillages *irréguliers*. Dans le cas des premiers, les nœuds sont tous positionnés suivant une fonction mathématique simple et la connaissance de cette fonction, ainsi que de quelques points de repère (généralement une origine) suffit à reconstruire la totalité des points. Dans les maillages irréguliers, les nœuds ne sont pas situés de manière prévisible et les coordonnées de chaque point doivent être stockées séparément.

Il est aussi possible de construire des maillages semi-réguliers, qui seront soit réguliers dans certaines zones de l'espace et irréguliers dans d'autres, soit réguliers dans certaines dimensions uniquement (par exemple, un modèle numérique terrestre (MNT), fréquemment utilisé pour représenter la topographie de la surface de la Terre, est régulier suivant les coordonnées d'espace X et Y et irrégulier verticalement).

Le critère topologique distingue les maillages *structurés* des maillages *non-structurés*. Dans les maillages structurés, les connexions entre nœuds obéissent à une règle prévisible, et il est possible de prévoir les connexions de n'importe quel nœud à ses voisins en se reportant à sa position dans le schéma topologique de référence (voir figure 1.1). À l'inverse, les maillages non-structurés ne présentent aucun motif repétitif et toutes les relations entre nœuds doivent être stockées explicitement.

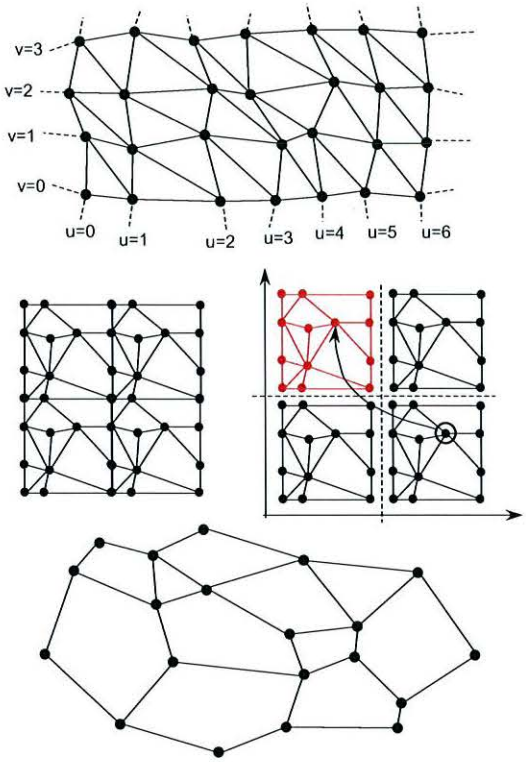



FIG. 1.1 : *Représentations schématiques de la structure d'un maillage à deux dimensions. En haut, un maillage structuré irrégulier, à base de triangles : le nœud d'indice* $(u, v)$ *a pour voisins (définis suivant le schéma topologique de base) les nœuds d'indices* $(u-1, v)$, $(u-1, v+1)$, $(u, v+1)$, $(u+1, v)$, $(u+1, v-1)$ *et* $(u, v-1)$. *Au milieu, un maillage semi-structuré, formé par répétition du schéma topologique de base de droite. En bas, un maillage non-structuré polygonal ([Lepage, 2003], p. 14).*

On définit aussi des maillages *semi-structurés* (voir [Sampl, 2000], [Thompson et Soni, 1999]) et des maillages *hybrides* ([Flandrin *et al.*, 2004], [Balaven *et al.*, 2002], [Verma, 1996] [1]) qui, de manière similaire à la géométrie, combinent des caractéristiques structurées et des caractéristiques non-structurées, soit suivant des axes différents, soit dans différentes régions du volume :

- Les maillages semi-structurés sont formés par extrusion régulière depuis une surface dont le maillage peut être non-structuré. On obtient alors des piles structurées de plans non-structurés (voir figure 1.2). Si la surface de référence est maillée de manière

[1] Il existe une grande variété de maillages intermédiaires possibles suivant les applications et la nomenclature n'est pas toujours homogène.

structurée par des quadrilatères, on obtient alors des *grilles stratigraphiques*, qui seront décrites en détail plus loin.

- Les maillages hybrides (figure 1.2) sont formés à partir d'un maillage structuré, en modifiant le maillage de manière non-structurée pour mieux s'adapter à des contextes particuliers (le plus fréquemment, pour avoir des cellules orthogonales aux failles ou radiales autour de puits [Lepage, 2003]). Les maillages issus des *Local Grid Refinement* (ou « grilles tartan ») (voir par exemple [Heinemann et Heinemann, 2003]) peuvent entrer dans cette catégorie.

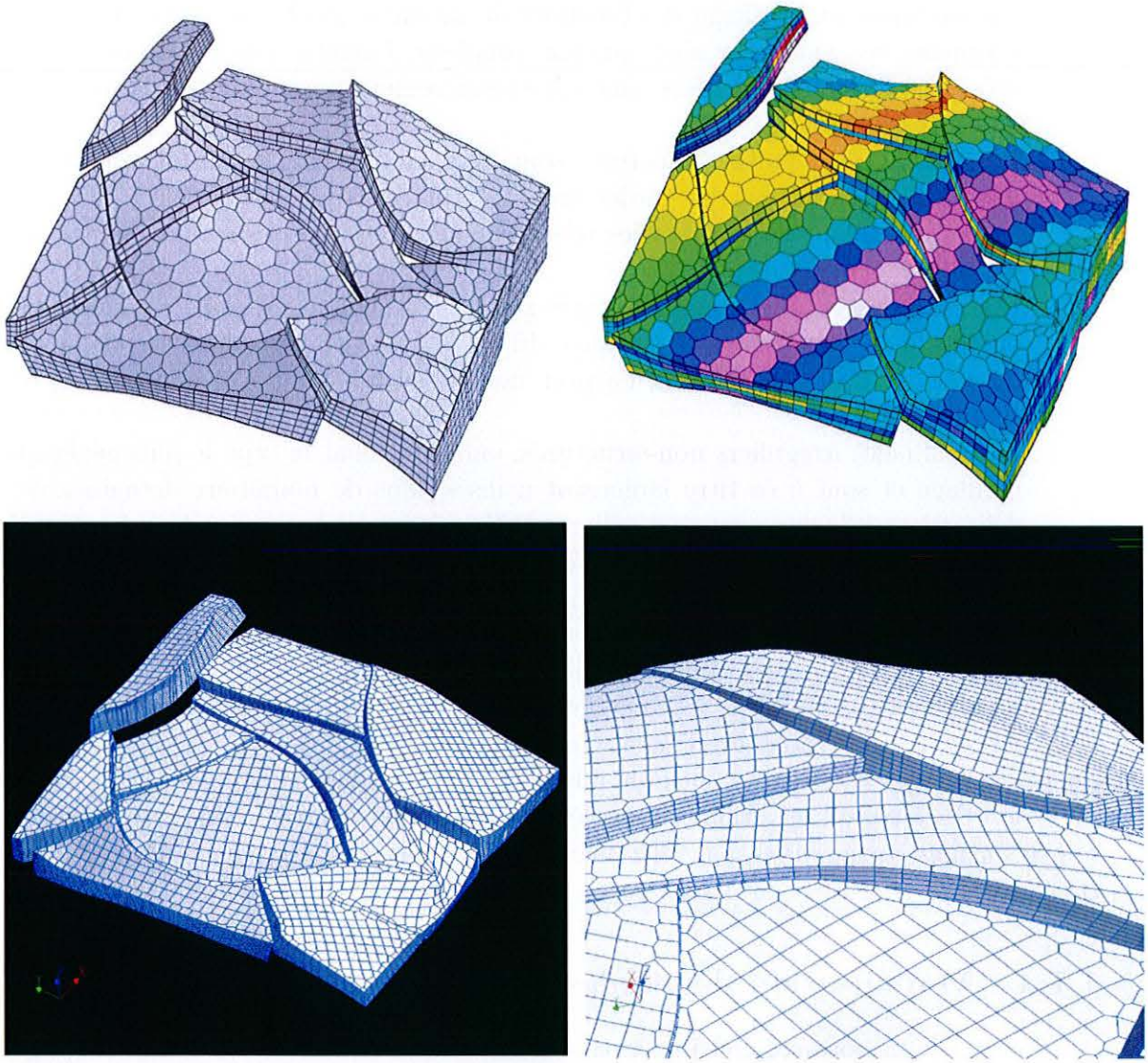


FIG. 1.2 : *En haut, grille semi-structurée construite par extrusion régulière depuis une surface polygonale (à droite, la grille a été peinte avec une propriété définie dans chaque cellule). En bas, grille hybride, structurée au milieu des blocs et non-structurée au voisinage des failles ([Lepage, 2003], p. 187).*

Ces deux critères (géométrie et topologie) peuvent se combiner pour donner naissance à quatre grands types de maillages volumiques, illustrés dans la figure 1.3 :

- Les maillages réguliers structurés sont les plus simples à modéliser. Il s'agit par exemple des modèles de type « boîte à sucre » [2] dans lesquels des cellules cubiques ou parallélépipédiques sont empilées suivant trois axes. Ces maillages ont l'avantage de la légèreté du stockage et des calculs, car ils peuvent être définis par très peu de paramètres (l'origine géométrique, les axes et le nombre de cellules sur chaque axe, qui suffisent à reconstituer la forme de la maille primordiale). Ils sont bien adaptés, par exemple, au stockage des résultats de mesures géophysiques ou sismiques. En revanche, ces maillages n'ont aucune souplesse lorsqu'il s'agit d'accommoder des objets de forme complexe et sont donc relativement peu adaptés à la modélisation d'objets géologiques.
- Les maillages irréguliers structurés sont fréquemment utilisés en modélisation géologique. Ils permettent de garder une structure sous-jacente simple et légère, tout en accommodant des géométries relativement complexes. Ils seront décrits plus en détail dans la partie suivante.
- Les maillages réguliers non-structurés sont relativement peu utilisés. Généralement, on considère que le gain de stockage dû à la régularité ne compense pas la rigidité de ce type de maillages, car l'aspect non-structuré n'apporte que peu de liberté supplémentaire.
- Les maillages irréguliers non-structurés, enfin, forment le type le plus générique de maillage et sont à ce titre largement utilisés dans de nombreux domaines de modélisation géologique, en particulier en mécanique des roches et dans les problèmes d'éléments finis (voir par exemple [Zienkiewicz, 1977]). Ils ont l'avantage de pouvoir s'adapter à n'importe quelle forme, géologique ou non, ce qui les rend intéressants pour les modèles de géométrie très complexe. Il est cependant nécessaire de stocker explicitement tous les nœuds et toutes les connexions, ce qui alourdit rapidement les structures. C'est sur ces maillages que le choix des modèles micro- et macro-topologiques prend toute leur importance.

Les maillages structurés dont la maille de base est un hexaèdre, c'est-à-dire les grilles de type « Voxet » ou les grilles issues de la déformation de grilles « Voxet », sont aussi appelés *grilles cartésiennes*, par référence au repère cartésien sur lequel leur topologie est basée.

### 1.1.4 Modélisation des failles

Un modèle du sous-sol doit impérativement prendre en compte les failles. Cependant, ce sont des objets complexes qui peuvent être abordés sous plusieurs angles.

#### Des discontinuités géométriques

À grande échelle, les failles se présentent d'abord comme des discontinuités dans les couches géologiques ([Ramsay, 1967]) qui délimitent des blocs distincts. Cette approche est

[2] Dans le géomodeleur GOCAD, on parle de *Voxet*.

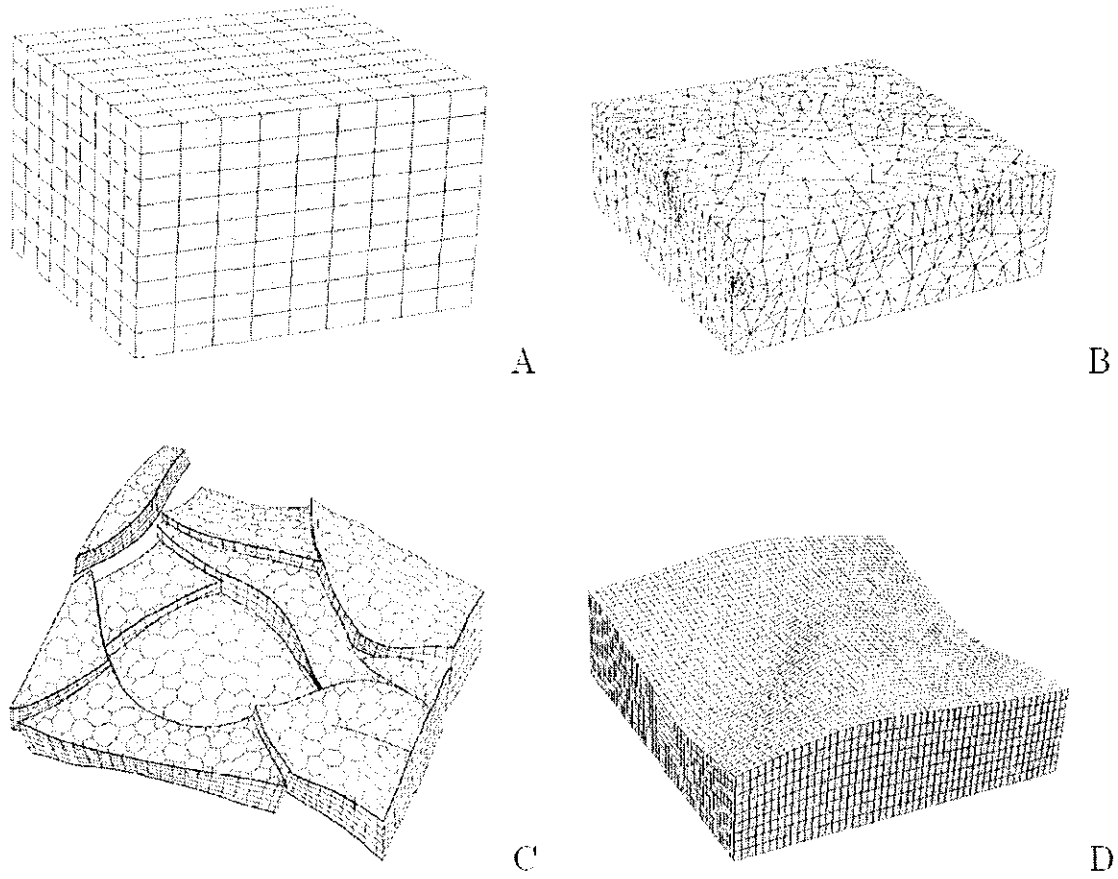



FIG. 1.3 : *Exemples de différents types de maillages. A : maillage régulier structuré (« boîte à sucre ») ; B : maillage non structuré irrégulier à base de tétraèdres ; C : maillage semi-structuré (formé par empilement structuré de couches non-structurées) irrégulier ; D : maillage structuré irrégulier, à base d'hexaèdres (« grille stratigraphique ») ([Souche, 2005], p. 29).*

souvent privilégiée dans les géomodeleurs, en particulier lors de la construction de modèles surfaciques ([Dubrule *et al.*, 1997]), c'est-à-dire dans un modèle où seules les interfaces (horizons, failles...) du domaine d'étude sont représentées par des surfaces, généralement triangulées. Les failles sont alors représentées comme des surfaces sans épaisseur.

Ce type de représentation est utilisé par exemple par différents codes de restauration ou de dépliage des couches (voir par exemple [Samson, 1996], [Massot, 2002], [Rouby, 1994], ou encore [Muron *et al.*, 2005b] pour des travaux en cours) qui visent à reconstituer la géométrie des terrains avant déformation et/ou rupture, et qui supposent que les éléments de part et d'autre des failles sont déformés, puis décalés, le long des plans de faille.

On considère alors que, mis à part le déplacement estimé par le rejet ou les déformations des couches visibles dans la géométrie des horizons, les failles n'ont pas affecté les terrains alentours. Cette *hypothèse de continuité* permet de définir facilement un certain nombre de paramètres relatifs à la faille ou de relations entre surfaces de faille ou entre failles

et horizons. La plupart des algorithmes géométriques utilisent cette approche et c'est celle qui a été privilégiée dans cette thèse. Les failles sont modélisées par des surfaces triangulées ([Mallet, 1997]) qui séparent des blocs en contact.

Lors de leur dépôt, les propriétés pétrophysiques des terrains sédimentaires sont généralement fortement continues. De ce fait, une fois le mouvement des failles et la déformation des couches corrigés, les propriétés seront modélisées continûment. Il faut cependant garder à l'esprit que les processus de rupture, de décalage et de déformation liés à la faille peuvent modifier cette continuité.

Certaines propriétés peuvent être définies spécifiquement sur cette surface de faille, comme la perméabilité ou la transmissivité de la faille ([Manzocchi *et al.*, 1999]). Ces propriétés sont indispensables pour quantifier les écoulements de fluides le long ou au travers de la faille, celle-ci pouvant agir comme un drain ou au contraire comme une barrière aux écoulements. Ces propriétés sont souvent, en réalité, la conséquence d'une zone d'influence de la faille au delà de la surface qui la modélise.

### Le volume de faille

Une faille n'est en réalité pas un plan de cassure net et bien localisé, mais plutôt une juxtaposition d'un grand nombre de ruptures de plus petite amplitude, avec une direction dominante. Si l'échelle d'étude est suffisamment fine, une faille doit donc aussi être considérée comme un volume, et non plus comme un plan (voir figure 1.4). Plus on s'éloigne du centre de la faille, plus la densité de fracturation devient faible.

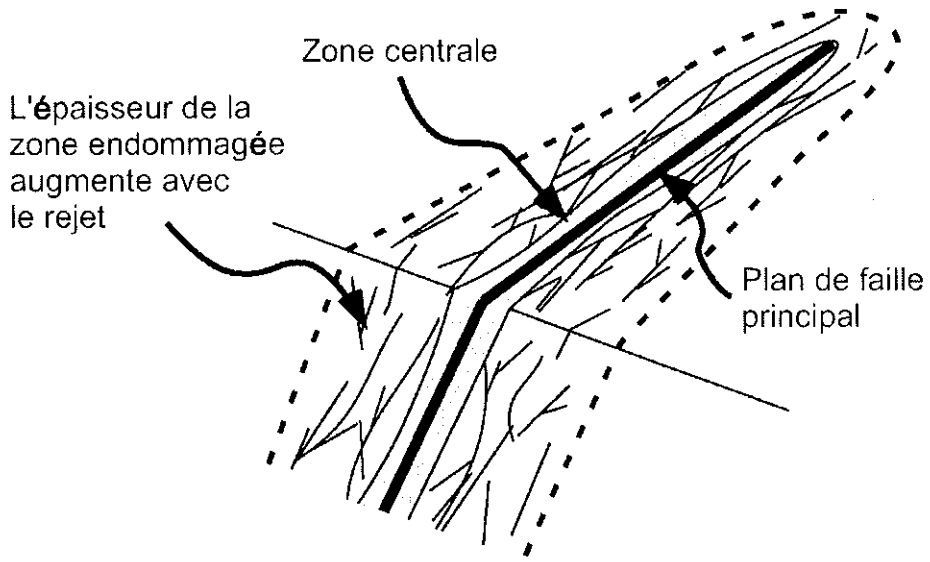



FIG. 1.4 : *Zone endommagée autour d'une faille. Assimiler la faille uniquement à son plan principal est ici très réducteur ([Souche, 2005], p. 108, d'après [Shipton et Cowie, 2003]).*

Bien qu'informatiquement plus complexe, cette approche est bien plus réaliste et permet de prendre en compte tous les effets des failles sur les terrains et non pas les seuls

effets géométriques. En effet, les propriétés pétrophysiques du milieu, en particulier la perméabilité et la porosité, sont en général très affectées par la fracturation ou par des conséquences de la fracturation, ou encore par le déplacement des blocs de part et d'autre de la faille.

Ainsi, lorsque les fractures servent de drain, la perméabilité de la zone de faille est augmentée. L'effet inverse peut aussi être observé, si les fractures sont bouchées par des colmatages. La zone de faille devient alors moins perméable. Lorsque l'échelle de modélisation est plus grossière, ces propriétés sont figurées simplement sur la surface qui représente la faille mais il ne s'agit que d'une approximation.

De plus, la déformation engendrée par le mouvement global de la faille altère aussi les propriétés des roches, indépendamment de la fracturation. La porosité et la perméabilité des terrains n'est donc pas seulement fonction des terrains déposés (et des éventuelles modifications sédimentaires subies ensuites, diagénèse ou altération) mais aussi des déformations et des cassures qui ont affecté ces terrains.

En toute rigueur, l'hypothèse de continuité indiquée ci-dessus est donc fausse et on ne peut pas s'affranchir des failles uniquement en restaurant les déformations géométriques qu'elles ont engendrées. En pratique cependant, on acceptera souvent cette hypothèse car, même si les terrains sont affectés par la déformation, il n'en reste pas moins qu'une forte continuité héritée des sédiments est présente. On pourra y ajouter en surimpression des effets localisés au niveau des failles (voir paragraphe 5.1.1).

Dans cette thèse, on considérera donc les failles comme étant essentiellement des surfaces sans épaisseur, qui ont uniquement décalé géométriquement – ou déformé – les terrains, sans avoir affecté les propriétés pétrophysiques, qui sont héritées du contexte sédimentaire seulement (dépôt et diagénèse).

## 1.2 Construction de maillages et paramétrisation 3D

### 1.2.1 Construction de volumes tétraédrisés

Une large partie de notre travail s'appuie sur les volumes tétraédrisés et cette partie présente quelques notions utilisées pour modéliser ces volumes. Le problème initial consiste à construire un tel volume depuis un ensemble de surfaces géologiques (failles et horizons) mis en cohérence. Pour cela, un modèle topologique est défini pour représenter les éléments (sommets, arêtes et faces) formant les bords de ces volumes. Le modèle présenté ici a été développé par François Lepage ([Lepage, 2003]) à partir des travaux de Joël Conraud ([Conraud, 1997]). Il permet ensuite de créer des maillages tétraédriques de très bonne qualité, en termes de limites géométriques comme de forme des tétraèdres.

Ce modèle topologique, appelé *Soft Frame Model*, est plus riche et surtout plus complexe que le modèle dont nous aurons besoin en réalité, en particulier lors de la modélisation des rejets, car il répond à des problèmes plus vastes. Cependant, de par sa rigueur, il peut servir de base pour extraire un modèle simplifié. De plus, le *Soft Frame Model* a été entièrement programmé dans le géomodeleur GOCAD, ce qui nous a permis de réutiliser le code correspondant très aisément.

### Le *Soft Frame Model*

Dans ce modèle, l'espace géologique 3D est divisé en *macro-cellules* de dimension topologique 3 (des volumes) dont les frontières sont des macro-cellules de dimension topologique 2 (des surfaces). Ces surfaces sont à leur tour limitées par des lignes, c'est-à-dire des éléments topologiques de dimension 1, elles-mêmes délimitées par des nœuds, de dimension topologique 0. Ainsi, chaque macro-cellule de dimension topologique $p$ est délimitée par un ensemble de macro-cellules de dimension $p-1$.

On parle de macro-cellule par opposition à la micro-topologie, où sont définies comme micro-cellules les simplexes de dimensions topologiques $p$ ($0 \leq p \leq 3$) : points, segments, triangles et tétraèdres. Les macro-cellules sont composées d'un ensemble de micro-cellules reliées entre elles : par exemple, une surface est un ensemble de triangles. Ces macro-cellules sont appelées *éléments radiaux* (nœud radial, ligne radiale ou surface radiale).

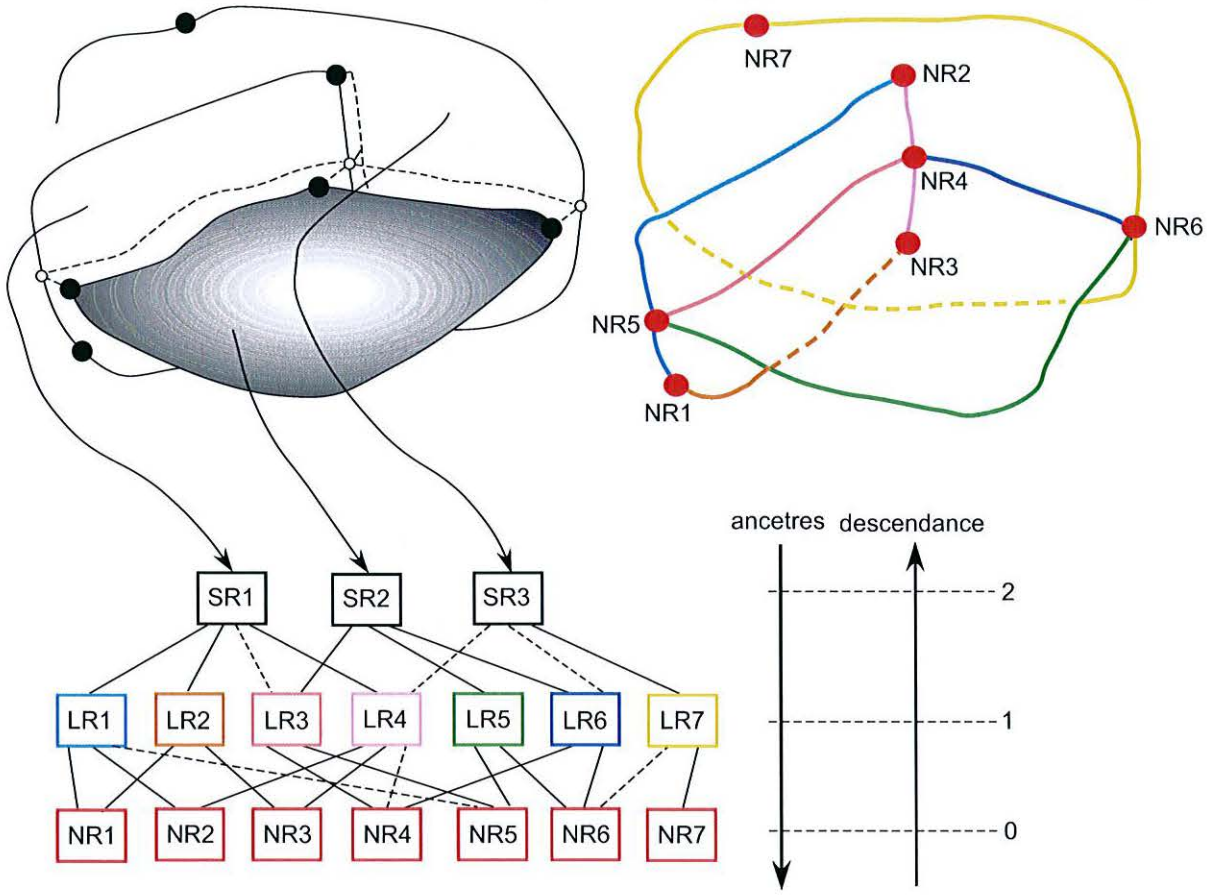



FIG. 1.5 : *Graphe d'incidence entre éléments radiaux d'un modèle surfacique. En haut, le modèle initial avec ses différents éléments radiaux (à droite). En bas, le graphe d'incidence correspondant (SR = surface radiale, LR = ligne radiale, NR = nœud radial) ([Lepage, 2003], p. 53).*

Cette organisation hiérarchique permet de construire un *graphe d'incidence* (voir figure 1.5) qui indique, pour un modèle donné, les relations entre éléments de différentes dimensions. De plus ce graphe permet de représenter des relations dites d'*incidence floue*

(en pointillés sur la figure) : il s'agit des informations géologiques connues, mais qui ne sont pas forcément respectées par la géométrie initiale des interfaces. Ainsi, sur la figure 1.5, la géométrie des deux failles n'est pas forcément en parfaite cohérence, à cause de la complexité des processus de modélisation, mais la connaissance géologique permet d'assurer que la faille de gauche doit venir se coller à la faille du fond. Cette relation apparaît dans le graphe d'incidence du modèle.

L'ensemble des macro-cellules, ainsi que leurs relations d'incidence, floues ou non, forment ce qui est appelé *Soft Frame Model*.

La structure hiérarchique garantit la validité topologique du modèle et la validité géométrique est, quant à elle, assurée par l'intégration des informations géologiques sous forme d'incidences floues entre les éléments topologiques. À condition de disposer des outils nécessaires pour construire des maillages quelconques de dimension $p$ ($0 \leq p \leq 3$), contraints sur leurs bords, ce modèle topologique permet donc une représentation cohérente à la fois des géométries et des relations entre objets du modèle.

#### Maillage d'un *Soft Frame Model*

Il est à noter que cette contrainte sur la création des maillages a des conséquences sur les tailles ou les formes, des différentes mailles. Par exemple, si une ligne radiale est maillée avec de petits segments, alors les surfaces radiales incidentes à cette ligne auront (au moins au voisinage de la ligne) de petits triangles. Inversement, si de petits triangles sont nécessaires sur une surface (par exemple pour mailler un horizon au voisinage de l'intersection de deux failles), alors les lignes radiales incidentes à cette surface seront formées de petits segments.

De plus, chaque intersection entre éléments de dimension $p$ étant représentée par un et un seul élément de dimension $p-1$, la cohérence des maillages de part et d'autre des éléments radiaux est automatiquement assurée. Cela signifie, en particulier, que les tétraèdres de part et d'autre d'une faille ont une face identique, même s'ils sont topologiquement disjoints (voir figure 1.6).

En revanche, l'unicité de l'élément radial de dimension $p-1$ implique aussi que les contacts géométriques entre les macro-cellules soient recalculés, afin que les deux (ou plus) maillages mis en cause soient en parfaite cohérence. La géométrie du *Soft Frame Model* et des maillages associés n'est donc pas exactement celle des données initiales mais celle qui permet au mieux d'intégrer toutes les données. Toutefois, comme la cohérence topologique est assurée indépendamment de ces approximations, le résultat est très satisfaisant, même sur des modèles complexes (voir [Lepage, 2003] pour plus de détails).

### 1.2.2 Construction d'une grille stratigraphique

En règle générale, les algorithmes de modélisation de propriété reposent sur une notion de voisinage (exprimée par le variogramme, par exemple, en géostatistiques). Comme les terrains sédimentaires se forment couche par couche, pour donner des résultats réalistes, ce voisinage doit être calculé en suivant les couches géologiques, de telle sorte qu'un point

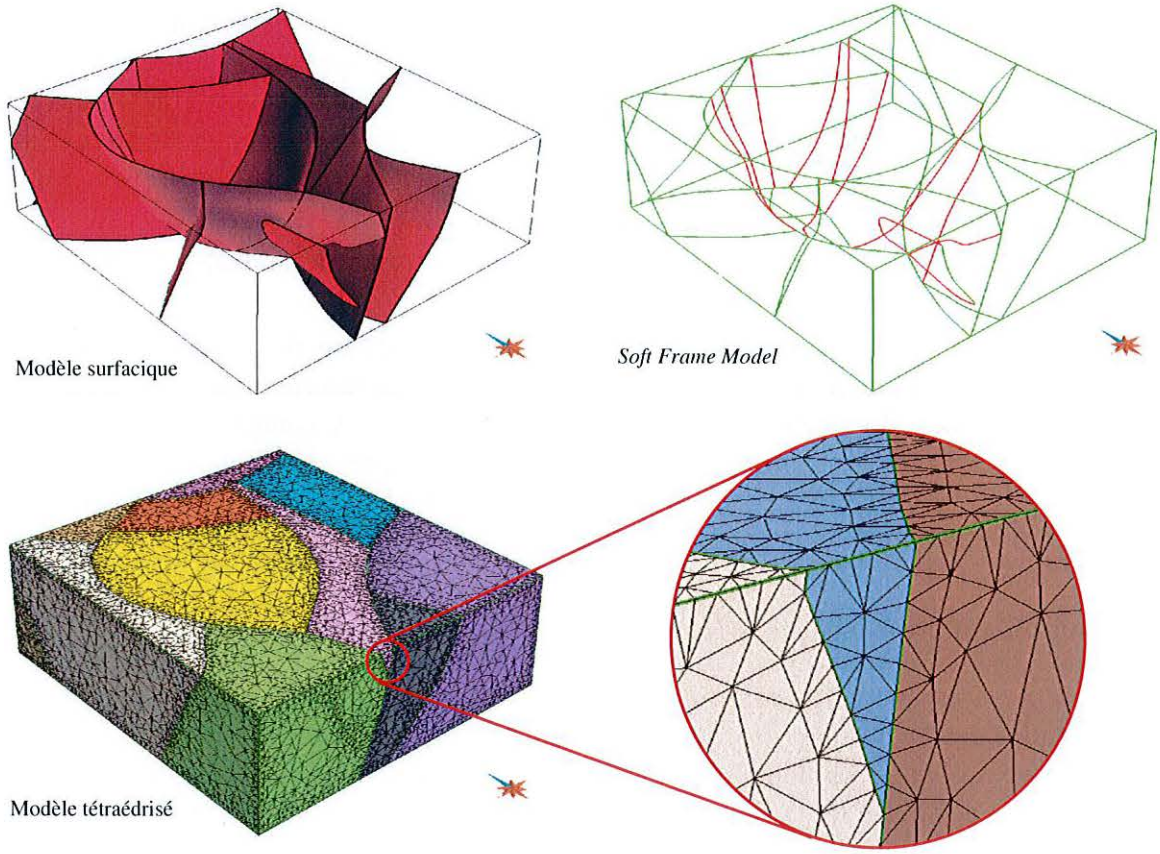



FIG. 1.6 : *Modèle surfacique (en haut à gauche) et modèle topologique* (Soft Frame Model) *correspondant (en haut à droite). Les lignes rouges figurent des arêtes radiales internes, c'est-à-dire des intersections entre failles. En bas, maillage tétraédrisé issu de ce modèle topologique. La loupe de droite met en évidence l'adéquation du maillage aux failles.*

donné soit estimé (ou simulé) en fonction des points qui se sont déposés dans la même couche géologique (figure 1.7).

De plus, à l'heure actuelle, la grande majorité des algorithmes géostatistiques nécessitent un maillage structuré, avec des cellules hexaédriques ([Journel et Huijbregts, 2004], [Chilès et Delfiner, 1999]) [3]. En conséquence, les maillages utilisés sont des maillages structurés, irréguliers de façon à suivre la géologie du modèle.

Enfin, ces maillages doivent respecter les failles, à la fois pour permettre des modélisations de propriété qui tiennent compte de la continuité initiale des terrains, avant la rupture, et pour faciliter l'intégration de caractéristiques particulières de failles (drainage,

[3] On peut toutefois noter que le principe mathématique, tel qu'il est décrit par exemple dans [Srivastava et Isaaks, 1990] ou [Goovaerts, 1997], ne l'impose pas systématiquement et certaines approches récentes s'appliquent sur des maillages non-structurés ([Deutsch *et al.*, 2002]).

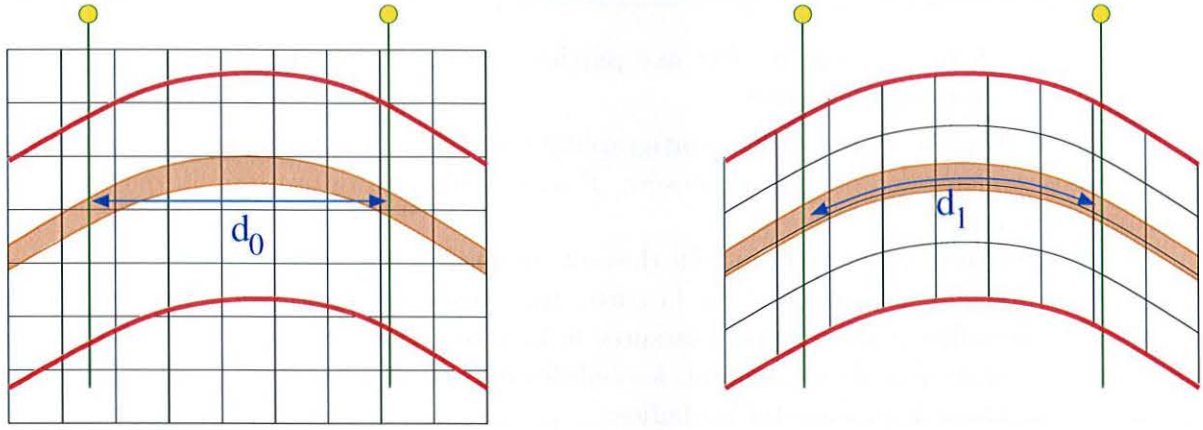



FIG. 1.7 : *Longueur d'une couche (en marron) mesurée entre deux puits (en vert) dans une grille régulière (à gauche) et dans un grille irrégulière (à droite) adaptée à la stratigraphie définie par les horizons majeurs rouges. Les deux distances $d_0$ et $d_1$ sont calculées en suivant les maillages, mais $d_1$ est géologiquement plus réaliste pour modéliser des relations au sein de la couche.*

fracturation...) en particulier dans les modèles d'écoulement. La figure 1.8 montre une telle grille, dite *grille stratigraphique*.

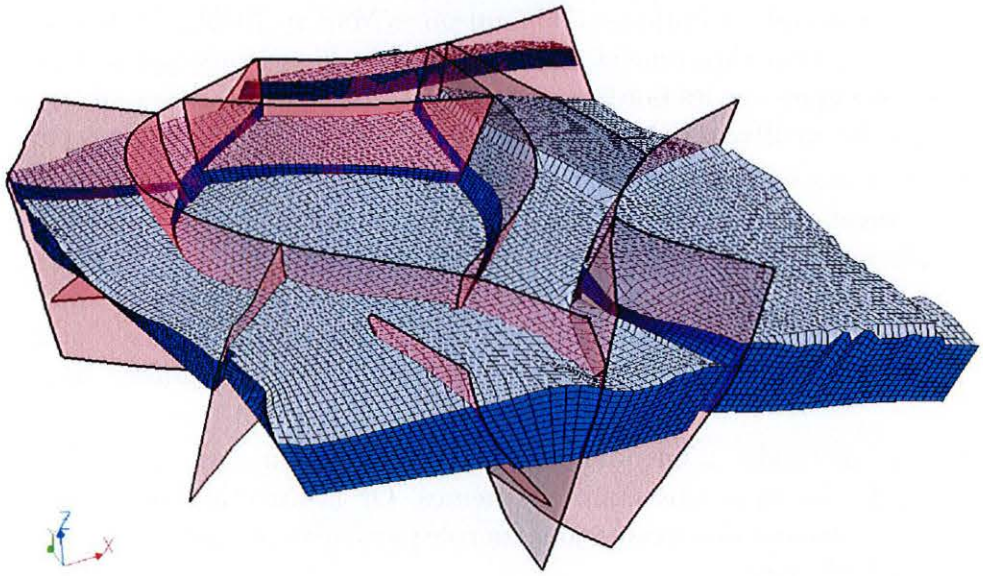


FIG. 1.8 : *Grille structurée irrégulière* (grille stratigraphique). *Noter la distorsion des cellules hexaédriques pour s'adapter aux horizons à la base et au toit, ainsi que les décalages induits par les failles (surfaces roses).*

Chaque nœud de la grille peut être défini par ses trois coordonnées $(u, v, w)$ le long des axes curvilinéaires de la grille. Par convention, l'axe perpendiculaire aux horizons (et

donc sub-vertical) est l'axe $W$. Cet axe particulier doit suivre au mieux la stratigraphie du milieu sédimentaire modélisé.

La construction d'une grille stratigraphique est donc un problème complexe et de nombreuses méthodes ont été proposées. Il s'agit toujours de remplir le maximum des critères suivants :

- Les horizons majeurs du modèle doivent apparaître comme des plans de coordonnée curvilinéaire $w$ constante. De la sorte, une distance mesurée à $w$ constant pourra être assimilée à une distance mesurée le long des couches.
- Sur chaque plan de $w$ constant, les cellules doivent être les plus régulières possibles.
- Le maillage doit respecter les failles.
- Les faces des cellules doivent être orthogonales entre elles et aux failles, afin de faciliter les calculs d'écoulements (voir par exemple [Heinemann et Heinemann, 2003]).

### Les méthodes algébriques

Les outils mathématiques pour parvenir à ces résultats sont nombreux, car la plupart des domaines de modélisation, qu'il s'agisse d'objets naturels ou non (aéronautique, mécanique...) reposent sur des maillages et ne seront pas détaillés ici. On pourra se reporter à [Thompson *et al.*, 1999] pour une discussion théorique complète ou à [Heinemann et Heinemann, 2003] dans le cadre des propriétés du sous-sol et des écoulements de fluides.

Mentionnons simplement pour mémoire l'interpolation transfinie[4] (ou génération algébrique) et les méthodes elliptiques ([Thompson et Mastin, 1985], [Thompson *et al.*, 1999]) qui visent à construire directement une grille en trois dimensions contrainte à respecter des interfaces spécifiques sur les bords. Ces méthodes sont bien adaptées aux objets artificiels dans lesquels les maillages doivent suivre une répartition mathématique particulière.

Cependant ces méthodes nécessitent de délimiter le volume d'étude par un parallélépipède rectangle, ce qui n'est pas toujours possible dans le cas des modèles géologiques, par exemple lorsque le domaine est limité par des failles. De plus, la répartition interne du maillage suit des règles mathématiques précises, qui ne sont souvent pas adaptées aux structures géologiques. On peut envisager de mailler chaque bloc de faille séparément mais il n'est pas possible de prendre en compte les failles se terminant dans un bloc, par exemple.

Enfin, ces méthodes n'introduisent aucune distinction entre les trois axes $U$, $V$ et $W$ de la grille, les équations étant les mêmes. Or la direction $W$, correspondant à la direction d'empilement des strates, joue un rôle particulier, ce que les contraintes énoncées précédemment illustrent.

### Construction de grilles par extrusion

Afin de remédier aux inconvénients précédents, diverses techniques ont été mises au point. Les premiers travaux dans le domaine de la géologie pétrolière sont assez anciens ([Hirasaki et Dell, 1970], [Leventhal *et al.*, 1985]). La méthode la plus avancée actuellement

[4] *Transfinite Interpolation* ou TFI.

repose sur l'*extrusion* d'une grille tridimensionnelle depuis une grille bidimensionnelle. On pourra se reporter à [Souche, 2005] pour des détails sur cette méthode, ou à [Galera *et al.*, 2003] pour une discussion sur les problèmes posés par des horizons fortement plissés.

Dans un premier temps, un horizon particulier est choisi et modélisé en prenant en compte les discontinuités introduites par les failles. Cet horizon est maillé en deux dimensions, puis des lignes pseudo-verticales ou parallèles aux failles sont extraites depuis cet horizon. Enfin, la grille définie sur la surface est exportée dans le volume le long de ces lignes, appellées *fibres*, qui représentent donc l'axe curvilinéaire vertical de la grille (figure 1.9).

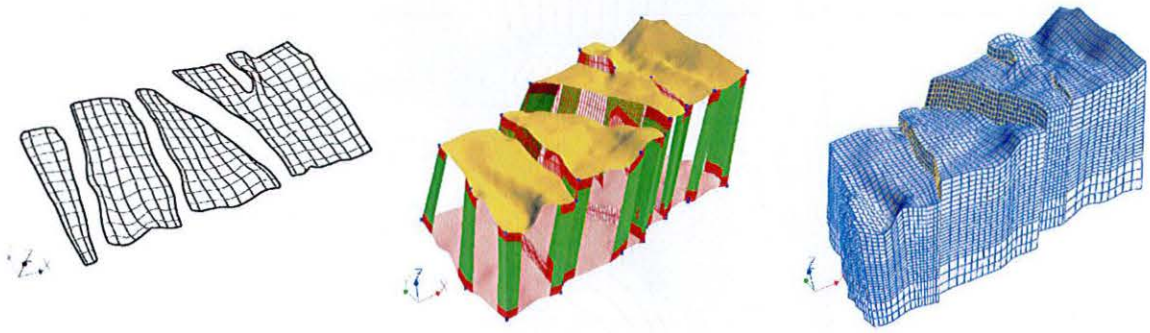


FIG. 1.9 : *Principe général d'extrusion d'une grille volumique depuis une surface. À gauche, surface initiale avec un maillage 2D ; au milieu, construction des lignes d'extrusion ou « piliers » ; à droite, la grille finale (la résolution n'est pas forcément homogène le long des piliers) ([Souche, 2005], p. 54).*

Cette méthode est complexe et chaque étape a donné lieu à de nombreux travaux. La construction d'une surface respectant les failles et plus globalement un certain nombre de points ou de lignes de contraintes, est un problème bien plus vaste que le simple cadre de la construction de grilles tridimensionnelles (voir [Duvinage, 2000]).

Le maillage bidimensionnel des surfaces fait appel à des techniques de géométrie différentielle, ainsi qu'à des *paramétrisations 2D*. On essaye de faire apparaître, dans cette grille surfacique, des caractéristiques de la grille finale :

- les axes curvilinéaires de la grille doivent, autant que possible, être en tout point orthogonaux entre eux ;
- pour faciliter la construction, on essaye souvent d'aligner ces axes sur certaines limites de la surface, bien que ce ne soit pas obligatoire ;
- enfin, l'aire des cellules doit être la plus uniforme possible.

Des méthodes de paramétrisation seront utilisées et détaillées plus loin dans ce travail, dans le cadre des volumes. Parmi les méthodes les plus récentes, on peut citer *Least Square Conformal Mapping* ou LSCM ([Lévy *et al.*, 2002]), qui servira de base à une approche volumique dans notre travail (paragraphe 3.3.2) ou encore *Angle Based Flattening* ou ABF ([Sheffer et De Sturler, 2001]).

L'étape la plus complexe est la construction des fibres depuis l'horizon initial. On peut simplement choisir d'utiliser des lignes verticales ou de direction arbitraire, mais constante. Il est souvent plus adapté d'utiliser des directions curvilinéaires. Afin de reproduire sur

chaque plan la topologie de la grille surfacique et d'avoir une grille la plus proche possible de la géométrie des failles, on cherche à ce que les fibres suivent les failles (voir figure 1.10). De récents travaux ([Souche, 2005]) ont permis d'améliorer cette étape. Enfin, un style sédimentaire (*onlap, toplap*, etc.) peut être imposé par un échantillonnage variable le long de ces fibres.

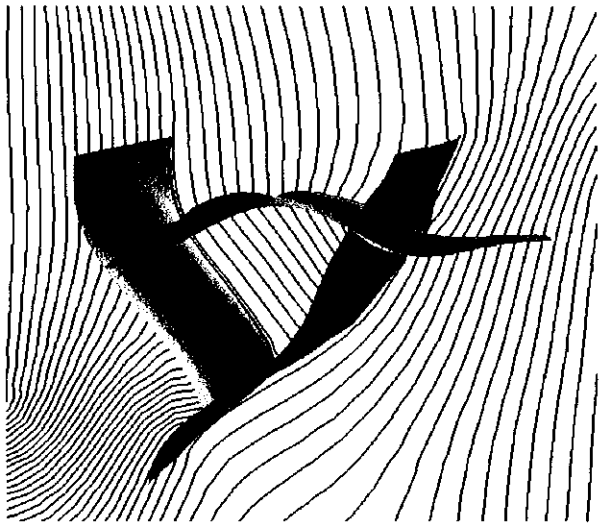


FIG. 1.10 : *Adaptation d'un champ de fibres à deux failles. Les fibres sont, autant que possible, parallèles aux failles. Dans le bloc central, il est nécessaire d'adapter différemment les fibres ([Souche, 2005], p. 55).*

### Limitations des grilles stratigraphiques

La méthode d'extrusion est bien adaptée aux problèmes géologiques et permet de construire des grilles réalistes, respectant les contraintes géométriques énoncées initialement. Cependant, plusieurs problèmes restent.

Tout d'abord, plus le réseau de failles devient complexe, plus l'extrusion pose de problèmes :

- Il n'est pas toujours possible d'obtenir un maillage 2D satisfaisant sur un horizon. Bien que les algorithmes de paramétrisation garantissent l'obtention d'un résultat, celui-ci est parfois localement très éloigné de la solution idéale.
- La construction des fibres devient difficile lorsque les failles s'intersectent. Lorsque la ligne d'intersection est plus ou moins verticale, on peut adapter la méthode pour suivre cette ligne. En revanche, lorsque la ligne d'intersection est sub-horizontale, cela devient plus difficile. Une solution proposée ([Souche, 2005]) consiste à diviser le volume en plusieurs sous-volumes dans lequel des fibres sont extrudées séparément.

En conséquence, lorsqu'on a affaire, par exemple, à des réservoirs très fortement faillés, il n'est pas toujours possible de construire une grille stratigraphique réaliste.

D'autre part, plus fondamentalement, les contraintes utilisées lors de la construction de la grille ne sont pas conciliables avec les contraintes des algorithmes de modélisation

de propriété qui utilisent les voisinages. Ces algorithmes, comme le krigeage, calculent des distances entre points afin d'établir leur degré de corrélation. Cette distance est mesurée en nombre de cellules de la grille stratigraphique. Or la grille est construite en imposant que les colonnes de cellules soient alignées avec les failles, lesquelles se sont formées indépendamment des variations de propriétés pétrophysiques.

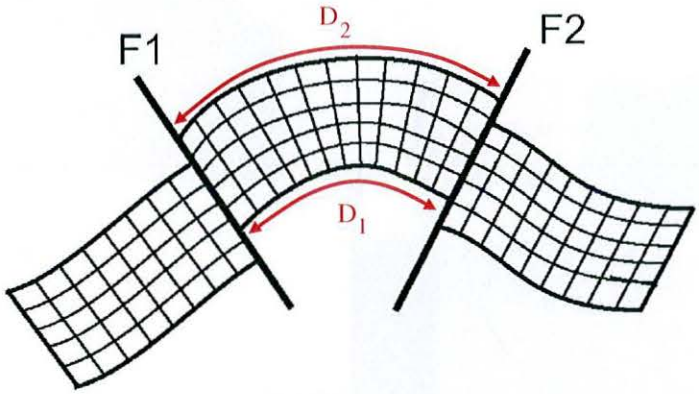



FIG. 1.11 : *Vue en coupe d'une grille stratigraphique coupée par deux failles et induisant une erreur dans le calcul des distances. Les longueurs réelles $d_1$ et $d_2$ sont différentes, mais sont représentées dans la grille par le même nombre de cellules : elles sont donc considérées comme identiques si une modélisation de propriété est faite suivant cette grille.*

La figure 1.11 illustre ce problème. La distance mesurée en nombre de cellules en tout point du bloc central est la même, bien que la distance réelle varie fortement. En conséquence, lorsque des calculs géostatistiques seront effectués dans cette grille, non seulement le résultat sera faux, mais en plus ce résultat dépendra de la forme de la grille elle-même.

Ces grilles sont actuellement les plus utilisées, car ce sont jusqu'à présent les seules structures permettant d'avoir des cellules hexaédriques respectant un aspect géologique. Nous allons voir qu'il est cependant possible de dissocier ces deux aspects.

### 1.2.3 Paramétrisation d'un volume tétraédrisé

Les méthodes de construction des grilles stratigraphiques vues précédemment peuvent s'intégrer dans le cadre plus général des fonctions de paramétrisation. On appelle fonction de paramétrisation une fonction $\mathbf{U}$, qui, à tout point $(x, y, z)$ du domaine d'étude $\mathcal{D}$ inclus dans l'espace géologique 3D, associe un point $(u, v, w)$ dans un autre espace à trois dimensions, appelé *espace paramétrique* :

$$\forall\ P(x, y, z) \in \mathcal{D}, \qquad \mathbf{U} : (x, y, z) \longmapsto \mathbf{U}(x, y, z) = (u, v, w)$$

Inversement, pour les points de l'espace paramétrique qui sont l'image par $\mathbf{U}$ d'un point de l'espace géologique, on peut définir une fonction $\mathbf{X} = \mathbf{U}^{-1}$ telle que $\mathbf{X}(\mathbf{U}(x, y, z) = (x, y, z)$.

L'espace paramétrique peut être adapté à différentes contraintes mais, en règle générale, il tend à représenter au mieux les couches au moment de leur formation, de telle sorte que la modélisation de propriété par couche puisse se faire suivant des plans horizontaux (voir figure 1.12).

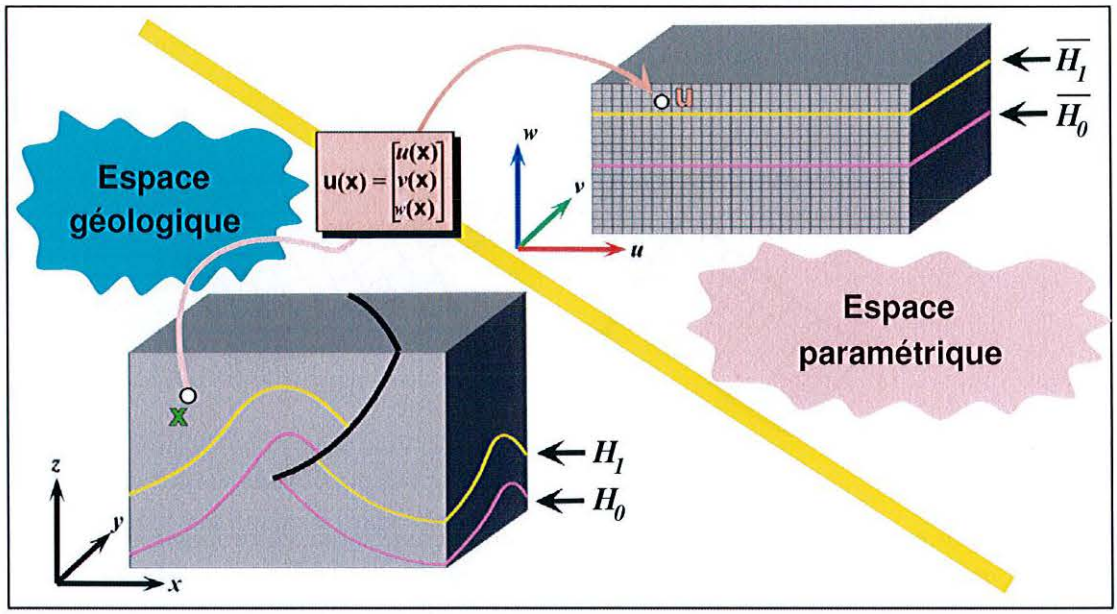



FIG. 1.12 : *Relations entre espace géologique et espace paramétrique. La fonction de paramétrisation* $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ *permet de passer de l'espace géologique réel* $(x, y, z)$ *à un espace paramétrique* $(u, v, w)$*. Cet espace est généralement construit de telle sorte que les images des horizons majeurs* $H_0$ *et* $H_1$ *du modèle soient des plans horizontaux* $\overline{H_0}$ *et* $\overline{H_1}$ *et il est habituellement couvert d'une grille régulière. Tout calcul effectué sur un plan horizontal de l'espace paramétrique est donc effectué en suivant la stratigraphie entre les deux horizons (d'après [Mallet, 2004]).*

Lors de la construction d'une grille stratigraphique, les différentes méthodes existantes sont conceptuellement équivalentes au processus suivant (figure 1.13) :

- une fonction de paramétrisation est construite dans l'espace géologique, en tenant compte, suivant les méthodes, des failles, des horizons, des styles sédimentaires... ;
- un maillage structuré régulier (en général les cellules sont des parallélépipèdes rectangles) est défini sur l'espace paramétrique. Pour chaque nœud de la grille, sa position dans l'espace géologique est calculée, suivant l'inverse de la fonction de paramétrisation ;
- la grille stratigraphique finale est construite en appliquant le schéma topologique défini sur la grille régulière aux points ainsi calculés ;
- lorsque des modélisations de propriété sont effectuées sur la grille, en suivant les rangées de cellules, tout se passe comme si la modélisation était effectuée dans l'espace paramétrique.

En pratique, les méthodes de construction évoquées précédemment sont très différentes et la plupart du temps cachent totalement l'existence de l'espace paramétrique. Cependant, cette schématisation permet de mieux comprendre les limitations de ces grilles.

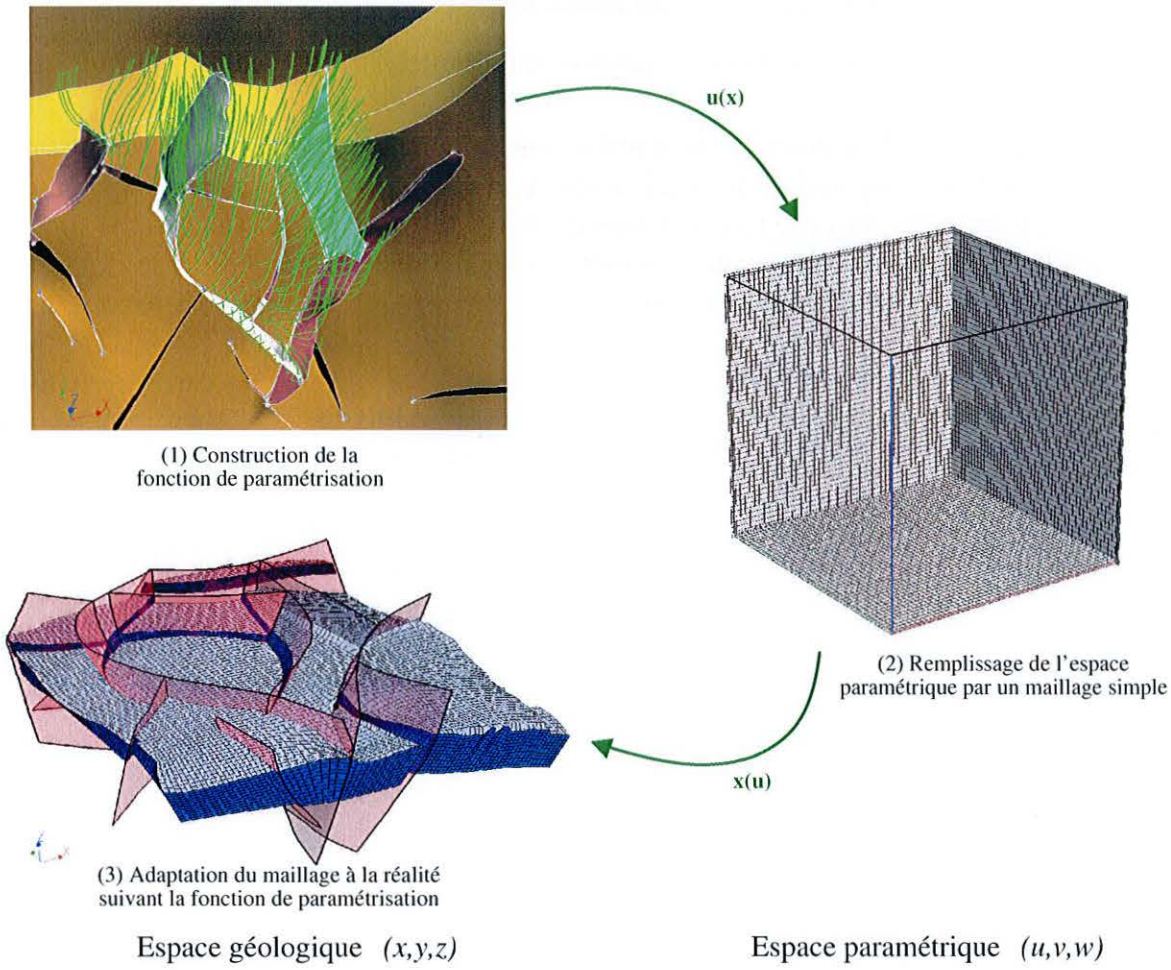



FIG. 1.13 : *Principe général de construction d'une grille paramétrique. (1) Construction d'une fonction de paramétrisation* $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ *dans l'espace géologique : les lignes vertes représentent des lignes de coordonnée* $W$*, qui suivent les failles. (2) Construction d'un maillage régulier simple dans l'espace paramétrique. (3) Grâce à la fonction de paramétrisation ou à son inverse* $\mathbf{x}(\mathbf{u})$*, la grille paramétrique est déformée sur l'espace géologique.*

En effet, il apparaît maintenant que la faiblesse de ces maillages volumiques vient principalement de la juxtaposition, sur un seul objet, de trois concepts différents :

- la modélisation de la géométrie du réseau de failles et des discontinuités du sous-sol ;
- la paramétrisation, c'est-à-dire le lien entre la géométrie des couches observées actuellement et leur géométrie au moment du dépôt ;
- le modèle de propriété en lui-même, à une précision adaptée à l'échelle des données disponibles (généralement des données de puits, donc très fines).

Dans les grilles stratigraphiques, les modèles sont imprécis parce que les impératifs de géométrie (adaptation des cellules aux failles), de paramétrisation (adaptation des cellules aux horizons) et de modélisation des propriété (taille des cellules) sont contradictoires.

Dans le reste de ce travail, nous présenterons une méthode alternative, le modèle GeoChron, dans lequel ces trois concepts sont dissociés. Il devient alors possible d'adapter au

mieux chaque objet aux contraintes propres qu'il doit respecter, en limitant les approximations et erreurs.

Pour modéliser la géométrie, nous utiliserons principalement un maillage non structuré composé de tétraèdres, qui est le plus à même de respecter des réseaux de failles complexes. La paramétrisation sera calculée aux nœuds de ces tétraèdres, et finalement le modèle de propriété sera calculé dans une grille structurée régulière fine, pour garder la compatibilité avec les différents algorithmes existant.

# Chapitre 2

# Le modèle GeoChron

Nous avons vu dans le chapitre précédent que la modélisation des propriétés du sous-sol imposait l'utilisation d'un maillage tridimensionnel et que les algorithmes géostatistiques s'appliquent principalement sur des maillages structurés. Ce maillage est construit en définissant une paramétrisation 3D de l'espace, puis en échantillonnant la fonction de paramétrisation afin de construire la grille.

Cependant, les grilles structurées déformées pour s'adapter à la géologie induisent des biais dans les calculs, principalement à cause de leur adaptation aux failles. Au final, il apparaît que les maillages utilisés pour la modélisation des propriétés regroupent trois concepts différents :

- la géométrie du réseau de failles (et éventuellement d'horizons) ;
- la paramétrisation 3D qui doit suivre les continuités sédimentaires ;
- et le modèle de propriété en lui-même, bâti dans l'espace paramétrique.

Dans ce chapitre, nous allons présenter le modèle GeoChron, qui permet de dissocier ces trois concepts et d'aboutir ainsi à un modèle qui respecte au mieux chacune des contraintes, sans les approximations des grilles stratigraphiques structurées. La description de ce modèle fournie ici a été publiée récemment par J.-L. Mallet ([Mallet, 2004]) et nous ne faisons ici que reprendre, et compléter sur certains points, cette description. Le travail principal de cette thèse se situe plus particulièrement dans l'exploration des diverses possibilités d'implémentation de ce modèle et dans la construction des vecteurs rejet le long des failles (chapitres 3 et 4).

## 2.1 Principe général du modèle

La notion d'un espace paramétrique correspondant aux sédiments au moment de leur dépôt a été introduite en 1958 par Wheeler ([Wheeler, 1958]) dans le cadre de la *time stratigraphy* [1]. Son idée initiale était que les unités stratigraphiques peuvent se décrire dans un espace défini par « deux dimensions d'espace latérales et une dimension verticale temporelle » (*« two lateral space dimensions and a vertical time dimension »* ).

[1] Plusieurs notions de stratigraphie portant des noms similaires en anglais et figurant dans peu de textes en français, nous préférons garder les termes anglais, qui risquent moins de prêter à confusion.

Le modèle *Geo-Chronological* ou GeoChron, qui constitue le cœur théorique de cette thèse, est basé sur une formulation mathématique de ce concept.

### 2.1.1 Les coordonnées paramétriques

Considérons un volume $G$ dans l'espace géologique, tel qu'il est observable actuellement (figure 2.1). Ce volume peut être découpé par un ensemble de failles ou de discontinuités sédimentaires, qui divisent $G$ en un ensemble fini de *blocs de faille*. Nous appellerons *espace géologique*, ou $G$-Space [2] l'espace euclidien à trois dimensions qui englobe $G$. Tout point $\mathbf{x} \in G$ peut être caractérisé par ses coordonnées $(x, y, z)$ telles que :

$$\mathbf{x} = x.\mathbf{X} + y.\mathbf{Y} + z.\mathbf{Z}$$

où $(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z})$ désigne un repère orthonormé direct de l'espace géologique. On notera aussi, plus simplement, par $\mathbf{x}$ le vecteur colonne contenant les coordonnées du point $\mathbf{x}$ :

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

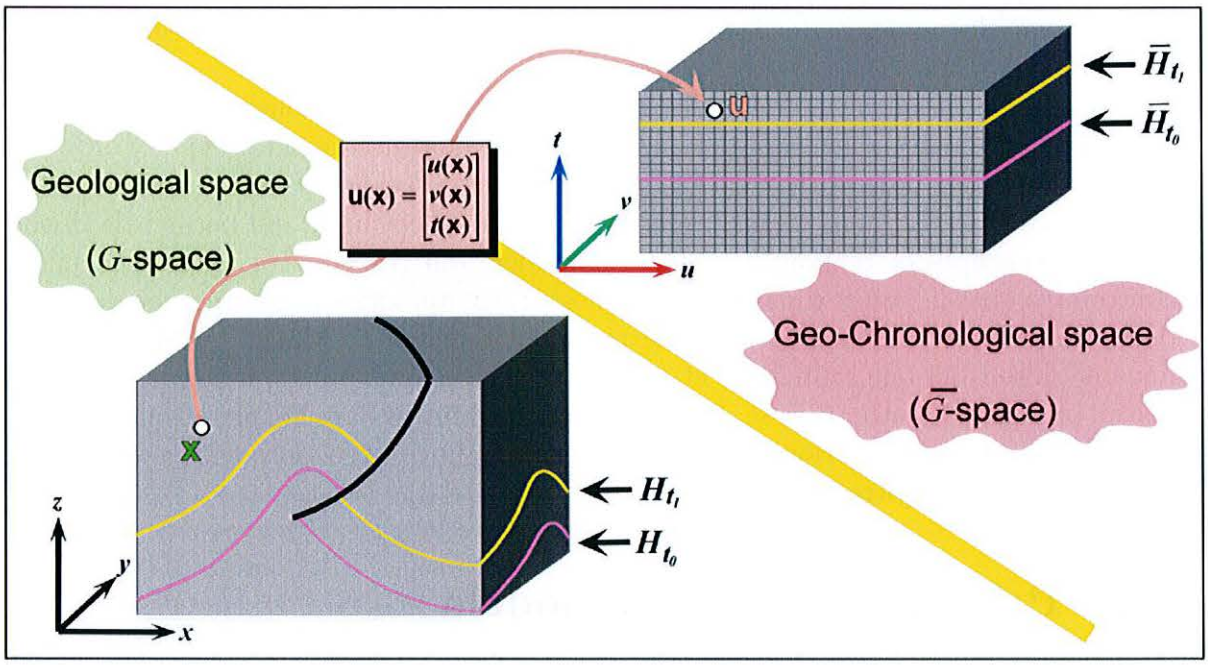



FIG. 2.1 : *Schéma de principe de l'espace GeoChron. En bas, un modèle géologique $G$, avec des horizons $H_{t_0}$ et $H_{t_1}$ plissé et faillés. En haut, les images de ces horizons dans l'espace paramétrique $\overline{G}$ sont des surfaces planes non faillées ([Mallet, 2004]).*

[2] Pour *Geological Space*.

### Les *temps* géologiques

On suppose que les terrains contenus dans le domaine d'étude $G$ se sont formés de la manière suivante :

- Au temps géologique $t$, les sédiments, quelle que soit leur origine ou leur nature, se sont déposés sur tout ou partie d'un plan $\overline{H_t}$, représentant la surface de la Terre ou le fond des océans. La notation $\overline{H_t}$ est utilisée pour signifier que cet horizon est un plan horizontal.
- Suite à des événements tectoniques postérieurs à $t$, le plan horizontal $\overline{H_t}$ est progressivement, en une ou plusieurs étapes, transformé en une surface $H_t$ telle qu'elle est observable actuellement dans le sous-sol. Cet horizon peut être plissé et/ou faillé, suivant son histoire géologique. Cette définition implique que tout horizon s'est formé de manière isochrone.

Étant donné un jeu de données initiales (cube d'attributs sismiques ou autres mesures géophysiques, puits, observations de surface...) il est possible de construire un modèle d'un ensemble fini de surfaces $\{H_{t_0}, H_{t_1}, \cdots, H_{t_n}\}$ classées par ordre chronologique :

$$t_0 < t_1 < \cdots < t_n$$

Par convention, on définit $t$ comme croissant des horizons les plus anciens vers les horizons les plus jeunes, de manière à ce que l'axe des temps soit généralement dans le même sens que l'axe **Z** de $G$. En conséquence, ce *temps* est l'opposé de l'âge géologique des terrains :

$$t_i < t_j \iff H_{t_i} \text{ est plus ancien que } H_{t_j}$$

D'autre part, en géophysique il est souvent d'usage de modéliser l'axe vertical de l'espace des mesures actuel par un temps : il s'agit dans ce cas du temps nécessaire aux mesures pour parcourir le chemin de l'émetteur (par exemple, un vibrateur) jusqu'au point du volume, puis à nouveau jusqu'au récepteur (par exemple, un géophone)[3].

Le paramètre *temps* de la paramétrisation GeoChron est totalement indépendant de cette notation, puisqu'il s'agit dans un cas de l'opposé de l'âge des terrains et dans l'autre d'une manière de représenter la position géométrique des terrains dans le sous-sol. Le modèle GeoChron s'applique donc indépendamment de la nature de l'axe vertical du modèle, distance ou temps de mesure. Pour éviter toute confusion, nous n'utiliserons que la notation **Z** pour désigner l'axe vertical de l'espace géologique et le paramètre temporel du modèle GeoChron sera toujours noté *temps* ou $t$.

Enfin, deux remarques peuvent être faites concernant les hypothèses fondamentales sous-tendant les principes de formation des terrains évoqués plus haut :

- On suppose initialement que toutes les particules d'un même âge géologique se sont déposées sur un plan horizontal. Cette hypothèse est fausse dans certains cas, par exemple lorsqu'on considère des dépôts sur des marges continentales, dont la pente peut être assez forte, ou encore dans le cadre de tectoniques syn-sédimentaires (plis par propagation, *rollovers*, etc.) Cependant, l'hypothèse principale de la modélisation de propriété est que, dans l'espace où a lieu la modélisation, des particules sur

[3]En sismique, on parle aussi de *Two Way Time*, ou TWT.

un même plan horizontal sont plus fortement corrélées à faible distance que des particules sur des plans différents. Dans le cas de paléo-géographies non planes, cette hypothèse est vraie pour des particules qui se sont formées dans le même intervalle de temps, donc qui sont le long d'un même paléo-horizon $\overline{H_t}$, et non pas pour des particules sur un même plan horizontal. D'autre part, on verra qu'il existe des facteurs permettant de prendre en compte l'épaisseur réelle et donc la géométrie des dépôts, dans le modèle (paragraphe 2.2.1). Par conséquent, le modèle GeoChron peut être utilisé même si les géométries réelles de dépôt ne sont pas horizontales.

- L'autre hypothèse du modèle est que les horizons observés actuellement dans le sous-sol sont bien des surfaces isochrones. À l'échelle régionale, cette hypothèse est vraie (c'est une des définitions des couches géologiques, voir [Cojan et Renard, 1997]) mais à une échelle plus fine, comme celle d'un réservoir, elle ne l'est plus forcément. En effet, les réflecteurs majeurs apparaissant lors d'une prospection sismique reflètent des changements dans les faciès – ou le contenu liquide – du sous-sol, qui peuvent varier au sein d'une même couche (figure 2.2). Il importe donc d'être attentif à la nature des horizons utilisés pour construire un modèle GeoChron, qui doivent impérativement être des surfaces isochrones.

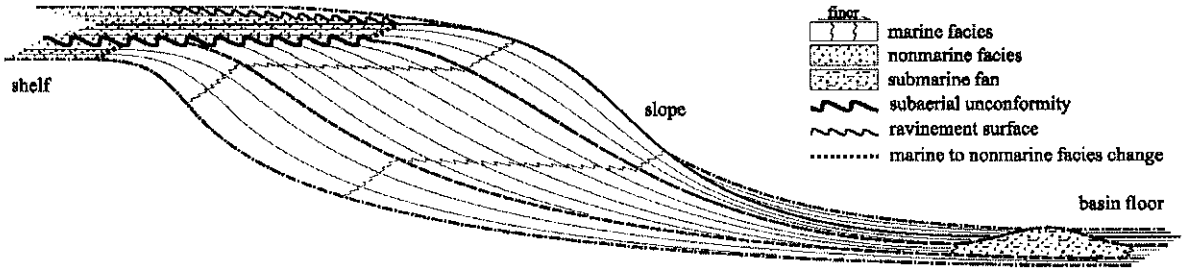



FIG. 2.2 : *Variation latérale de faciès au sein d'une même couche le long d'une marge de bassin. Pendant la même durée, différents faciès (en nuances de gris) se sont déposés suivant la distalité, entre deux limites de séquences majeures. Les limites de faciès sont ici très différentes des surfaces isochrones (les limites de séquence). Noter aussi que l'épaisseur déposée varie fortement suivant les endroits au sein d'une même séquence ([Catuneanu* et al., *1998]).*

Enfin, on peut remarquer que le modèle n'impose rien d'autre que la relation d'ordre sur les $\{t_i\}$. Si les âges géologiques des couches sont connus, ils peuvent être utilisés, mais si ce n'est pas le cas, n'importe quelles valeurs, même arbitraires, peuvent être affectées à chaque horizon, sans que cela n'altère la qualité théorique du modèle. Le paragraphe 3.1.1 discute de contraintes numériques lors de l'implémentation informatique.

### Les coordonnées paléo-géographiques

À chaque instant $t$, c'est-à-dire le long de chaque surface $\overline{H_t}$, nous cherchons à construire une carte du sous-sol permettant de modéliser la distribution des particules dans le volume d'étude. Pour cela, deux hypothèses sont faites :

- D'une part, on suppose que les propriétés pétrophysiques actuelles d'une particule de sédiments sont uniquement fonction de leur position au moment du dépôt, dans leur environnement sédimentaire. Cela suppose d'une part que les événements tectoniques (plissement et rupture) n'affectent pas les propriétés pétrophysiques, ce dont nous avons déjà discuté dans le premier chapitre (paragraphe 1.1.4), et d'autre part que les phénomènes de diagénèse sont négligeables ou ont affecté la zone d'étude avant toute déformation. Dans le cas contraire, le modèle de propriété final devra être corrigé de ces influences (voir paragraphe 5.1).
- D'autre part, dans le cas d'érosions, on considère que toute particule déposée à un *temps* $t - \Delta t$, puis érodée, transportée et redéposée à un *temps* $t$ est une nouvelle particule. De plus, cette particule laisse un « vide » dans l'image paramétrique de l'horizon $\overline{H_{t-\Delta t}}$ dont elle est issue.

Ces hypothèses impliquent qu'il est important, pour obtenir un modèle de propriété cohérent, de reconstruire précisément non seulement la position verticale de chaque point sur la pile de paléo-horizons, mais aussi sa position horizontale sur un paléo-horizon.

Une analogie de ce modèle est figurée par la figure 2.3 : on suppose qu'un satellite a pu rester géostationnaire au-dessus de la zone modélisée (indépendamment de tout déplacement à plus grande échelle du domaine d'étude) et qu'un appareil photo embarqué a pris une succession d'images à des intervalles de temps très courts $\delta t$ et a empilé ces images les unes au-dessus des autres. On attache un repère orthonormé direct $(\mathbf{U}, \mathbf{V}, \mathbf{T})$ à cet empilement, $\mathbf{T}$ étant perpendiculaire à la surface de la Terre.

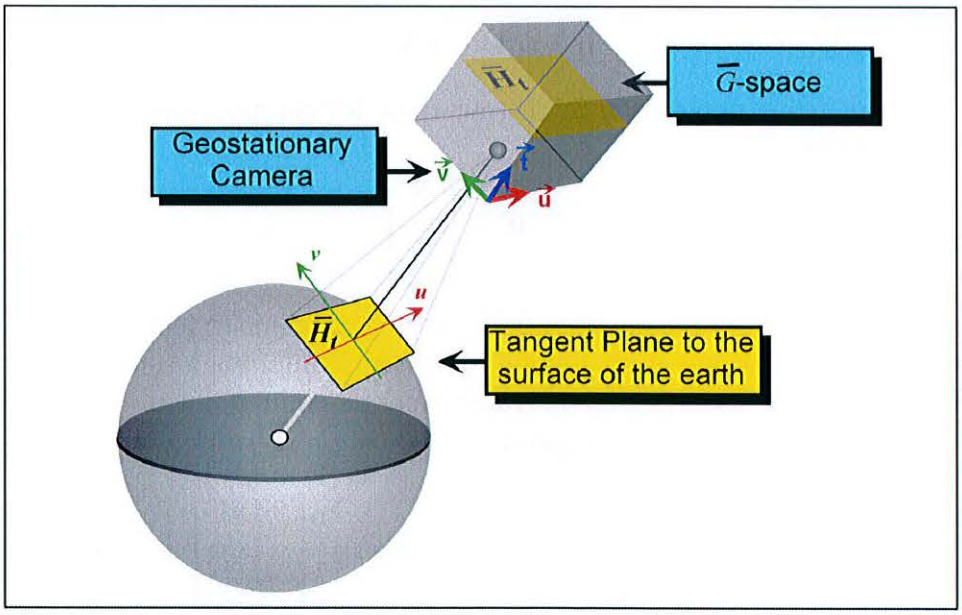



FIG. 2.3 : *L'espace paramétrique $\overline{G}$ vu comme un empilement continu d'images de l'espace de dépôt, prises depuis un satellite géostationnaire au-dessus de la zone étudiée, au cours du temps ([Mallet, 2004]).*

Chaque plan $\overline{H_t}$ est donc orthogonal à $\mathbf{T}$ et parallèle aux vecteurs $\mathbf{U}$ et $\mathbf{V}$, qui peuvent donc être utilisés comme un repère de $\overline{H_t}$. Par conséquent, étant donné une origine quel-

conque $\mathbf{p}_0$, tout point $\mathbf{p} \in \overline{H_t}$ peut être caractérisé par ses coordonnées $(u, v)$ :

$$\mathbf{p} \in \overline{H_t} \iff \exists\, (u, v) \in \mathbb{R}^2 \ : \ \mathbf{p} = \mathbf{p}_0 + u.\mathbf{U} + v.\mathbf{V}$$

Comme les coordonnées $(u, v)$ d'un point sur un paléo-horizon $\overline{H_t}$ permettent de localiser de manière unique n'importe quel point, quel que soit $t$, ces coordonnées sont appelées *coordonnées paléo-géographiques.*

### L'espace paramétrique $\overline{G}$

On peut imaginer d'empiler de manière continue les images des paléo-horizons $\{\overline{H_{t_0}}, \overline{H_{t_1}}, \cdots\}$ au cours du temps géologique dans une « boîte » dont les axes sont définis par les trois vecteurs $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$ et $\mathbf{T}$, en respectant les règles suivantes :

1. chaque image $\overline{H_t}$ est orthogonale au vecteur $\mathbf{T}$ et coupe l'axe des *temps* géologiques à l'abscisse $t$ ;
2. les coordonnées paléo-géographiques $(u, v)$ attachées à chaque paléo-horizon $\overline{H_t}$ sont parallèles à $\mathbf{U}$ et $\mathbf{V}$.

L'espace paramétrique ainsi défini autour du repère $(\mathbf{U}, \mathbf{V}, \mathbf{T})$ est appelé *espace géo-chronologique* ou $\overline{G}$*-Space*[1]. Dans cet espace, la position de n'importe quelle particule de sédiment déposée au temps $t$ et aux coordonnées paléo-géographiques $(u, v)$, notée $\mathbf{u}$, s'écrit comme :

$$\mathbf{u} = u.\mathbf{U} + v.\mathbf{V} + t.\mathbf{T}$$

Par la suite, nous noterons $\mathbf{u}$ le vecteur dont les composantes sont les coordonnées $(u, v, t)$ de ce point :

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ t \end{bmatrix}$$

L'association entre les particules $\mathbf{x}$ de l'espace géologique et leurs coordonnées $(u, v, t)$ dans l'espace paramétrique étant unique, on peut définir, pour tout point $\mathbf{x} \in G$, trois fonctions $u(\mathbf{x})$, $v(\mathbf{x})$ et $t(\mathbf{x})$ (figure 2.1) transformant $\mathbf{x}$ en un point $\mathbf{u} = (u(\mathbf{x}), v(\mathbf{x}), t(\mathbf{x})) \in \overline{G}$. On définit alors une *fonction de paramétrisation*, ou $\overline{G}$*-paramétrisation* $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ :

$$\forall\, \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in G \quad \overset{\mathbf{u}}{\longmapsto} \quad \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} u(\mathbf{x}) \\ v(\mathbf{x}) \\ t(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \in \overline{G}$$

Remarquons qu'il existe une infinité de fonctions de paramétrisation possibles, chacune pouvant être déduite des autres par un changement d'échelle du *temps* géologique (puisque les valeurs de celui-ci sont arbitraires) et/ou une combinaison de rotation et de translation des coordonnées paléo-géographiques. Ainsi, étant donné une paramétrisation

[1] Pour *Geo-Chronological Space.*

initiale $\mathbf{u}(\mathbf{x})$, on obtient une autre paramétrisation $\mathbf{u}'(\mathbf{x})$ :

$$\mathbf{u}'(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} u'(\mathbf{x}) \\ v'(\mathbf{x}) \\ t'(\mathbf{x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u(\mathbf{x}) \\ v(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \\ F(t(\mathbf{x})) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta_u \\ \Delta_v \\ \Delta_t \end{bmatrix}$$

où $F(t)$ est une fonction monotone croissante quelconque, $\alpha$ un angle de rotation et $\Delta_u$, $\Delta_v$ et $\Delta_t$ trois constantes de translation.

Il est à noter que la fonction de paramétrisation n'est pas une bijection, mais uniquement une injection (figure 2.4) :

- tout point de $G$ a une image par $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ dans $\overline{G}$ ;
- mais, à cause des érosions ou des lacunes de sédimentation, certains points de $\overline{G}$ n'ont pas d'antécédent dans $G$.

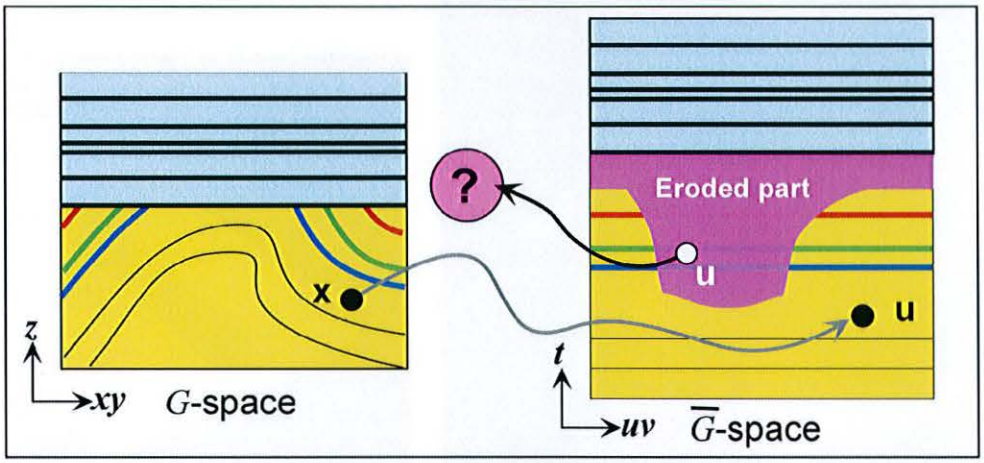



FIG. 2.4 : *Coupe verticale illustrant la correspondance entre $G$ et $\overline{G}$, en présence de zones d'érosion. Certains points de l'espace paramétrique n'ont pas de correspondance dans l'espace géologique initial ([Mallet, 2004]).*

Pour faciliter les formulations mathématiques, on définit un sous-espace $\overline{G_0}$ de $\overline{G}$, appelé *domaine paramétrique*, comme l'ensemble des points de $\overline{G}$ qui ont un antécédent dans $G$ :

$$\mathbf{u}^\star \in \overline{G_0} \iff \exists\, \mathbf{x}^\star \in G \ : \ \mathbf{u}(\mathbf{x}^\star) = \mathbf{u}^\star \in \overline{G}$$

Par conséquent, la fonction de paramétrisation $\mathbf{u}(\mathbf{x}^\star)$ est une bijection de $G$ vers $\overline{G_0}$. En termes géologiques, $\overline{G_0}$ correspond aux points de l'espace paramétrique de dépôt qui ont été préservés jusqu'au temps présent. Si on se réfère aux notions définies par Wheeler [Wheeler, 1958], le domaine paramétrique $\overline{G_0}$ correspond à la notion d'*holostrome*[5].

La fonction de paramétrisation étant une bijection, il est alors possible de définir sa fonction inverse $\mathbf{x}(\mathbf{u})$, pour tout point $\mathbf{u} \in \overline{G_0}$ :

$$\mathbf{u}^\star \in \overline{G_0} \quad \overset{\mathbf{x}}{\longmapsto} \quad \mathbf{x}(\mathbf{u}^\star) \in G \ : \ \mathbf{u}(\mathbf{x}(\mathbf{u}^\star)) = \mathbf{u}^\star$$

[5]Du grec *holo*, totalité, et *strom*, couche.

La fonction $\mathbf{x}(\mathbf{u})$ est appellée *représentation paramétrique* de l'espace géologique $G$ associé à la fonction de paramétrisation $\mathbf{u}(\mathbf{x})$. On notera parfois $\mathbf{x}(\mathbf{u})$ comme une fonction des trois composantes $(u, v, t)$ de $\mathbf{u}$, sous la forme $\mathbf{x}(u, v, t)$.

Enfin, remarquons un certain nombre de correspondances entre des valeurs particulières de la fonction de paramétrisation et des contextes géologiques (figure 2.5) :

- si $t$ est fixe pendant que $(u, v)$ varient, alors le point $\mathbf{x}(u, v, t)$ se déplace sur l'horizon $H_t$ ;
- si $(v, t)$ (respectivement $(u, t)$) sont fixes pendant que $u$ (resp. $v$) varie, alors le point $\mathbf{x}(u, v, t)$ se déplace le long d'une courbe appellée *ligne-u* (resp. *ligne-v*), appartenant à $H_t$ ;
- enfin, si $(u, v)$ sont fixes pendant que $t$ varie, alors $\mathbf{x}(u, v, t)$ se déplace le long d'une courbe appellée *ligne-t* qui coupe la pile d'horizons.

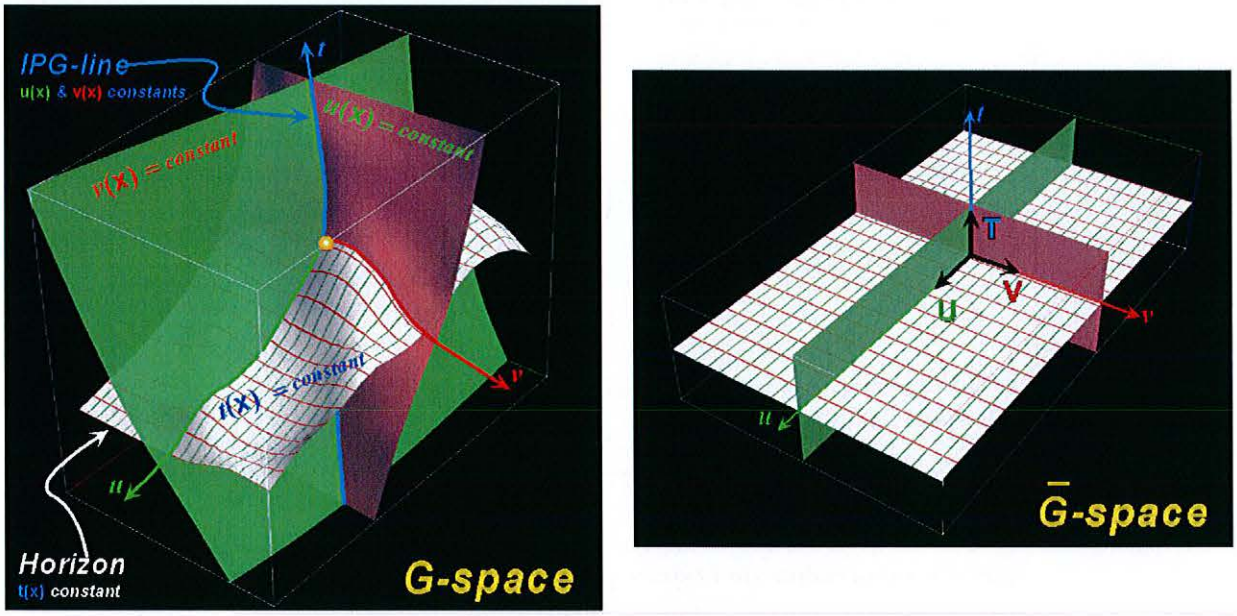



FIG. 2.5 : *Lignes de paramétrisation $u$, $v$ et $t$ dans l'espace géologique. L'intersection dans l'espace géologique (à gauche) de trois surfaces d'isovaleurs de $u(\mathbf{x})$ (en rouge), $v(\mathbf{x})$ (en vert) et $t(\mathbf{x})$ (en blanc, les lignes rouges et vertes figurant les traces de surfaces d'isovaleurs de $u$ et de $v$) définit des lignes particulières appelées* lignes-$u$, lignes-$v$ *et* lignes-$t$ *ou* lignes iso-paléo-géographiques. *Dans l'espace paramétrique (à droite), ces surfaces sont planes et ces lignes sont droites, et s'intersectent à angle droit.*

Les lignes-$t$ sont particulièrement intéressantes : en effet, leurs images dans l'espace paramétrique sont des lignes verticales et elles représentent des particules qui se sont déposées aux mêmes coordonnées paléo-géographiques $(u, v)$ au cours du temps. En conséquence, par la suite, ces lignes seront appellées *lignes iso-paléo-géographiques*, ou *lignes IPG*. Nous verrons qu'elles jouent un grand rôle dans la construction et la modification d'une paramétrisation (paragraphe 3.2).

### 2.1.2 Géométrie différentielle des coordonnées paramétriques

Nous allons maintenant donner quelques caractéristiques mathématiques associées à des repères particuliers des espaces géologiques et paramétriques. Les relations que nous allons établir permettront de déduire diverses contraintes utilisables lors de la construction d'une paramétrisation (chapitre suivant) ou lors de son utilisation dans certains contextes, en particulier l'étude du tenseur de déformation (paragraphe 5.2).

Les caractérisations que nous allons développer se basent essentiellement sur les principes de géométrie différentielle. On pourra se reporter à [Mallet, 2002], par exemple, pour de plus amples détails sur les formules.

#### Repère paramétrique

La figure 2.6 indique comment, en chaque point $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v, t)$ de l'espace géologique $G$, la représentation paramétrique $\mathbf{x}(u, v, t)$ génère un système de coordonnées curvilinéaires le long d'une ligne-$u$, d'une ligne-$v$ et d'une ligne-$t$, suivant trois vecteurs notés $\mathbf{x}_u$, $\mathbf{x}_v$ et $\mathbf{x}_t$. Ces vecteurs sont définis comme les dérivées partielles de $\mathbf{x}(\mathbf{u})$ à $u$, $v$ ou $t$ constant :

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_u(\mathbf{x}) &= \left.\frac{\partial \mathbf{x}(u, v(\mathbf{x}), t(\mathbf{x}))}{\partial u}\right|_{u=u(\mathbf{x})} \\ \mathbf{x}_v(\mathbf{x}) &= \left.\frac{\partial \mathbf{x}(u(\mathbf{x}), v, t(\mathbf{x}))}{\partial v}\right|_{v=v(\mathbf{x})} \\ \mathbf{x}_t(\mathbf{x}) &= \left.\frac{\partial \mathbf{x}(u(\mathbf{x}), v(\mathbf{x}), t)}{\partial t}\right|_{t=t(\mathbf{x})} \end{aligned} \tag{2.1}$$

Ces vecteurs définissent un repère particulier qui sera appelé *repère paramétrique* (ou *G-frame* en anglais).

Nous allons maintenant montrer comment les gradients des fonctions $u(\mathbf{x})$, $v(\mathbf{x})$ et $t(\mathbf{x})$ permettent de calculer ces vecteurs en tout point de l'espace géologique. Pour cela, considérons, par exemple, le vecteur $\mathbf{x}_t(\mathbf{x})$ en un point $\mathbf{x} \in G$ et appellons $(u^\star, v^\star)$ les valeurs de $u(\mathbf{x})$ et $v(\mathbf{x})$ en ce point. La ligne-$t$ passant par $\mathbf{x}$ et son vecteur tangent $\mathbf{x}_t(\mathbf{x})$ sont parallèles à l'intersection des plans tangents en $\mathbf{x}$ aux surfaces d'isovaleurs $u^\star$ de $u(\mathbf{x})$ et $v^\star$ de $v(\mathbf{x})$.

Ces deux plans tangents aux surfaces d'isovaleurs ont pour vecteur normal, respectivement, $\mathbf{grad}\ u(\mathbf{x})$ et $\mathbf{grad}\ v(\mathbf{x})$. Le vecteur $\mathbf{x}_t(\mathbf{x})$ est donc colinéaire au produit vectoriel de ces deux gradients :

$$\mathbf{x}_t(\mathbf{x}) = \varepsilon . \|\mathbf{x}_t(\mathbf{x})\| . \frac{\mathbf{grad}\ u(\mathbf{x}) \times \mathbf{grad}\ v(\mathbf{x})}{\|\mathbf{grad}\ u(\mathbf{x}) \times \mathbf{grad}\ v(\mathbf{x})\|}$$

avec $\varepsilon = \pm 1$, suivant l'orientation de la ligne-$t$.

La norme $\|\mathbf{x}_t(\mathbf{x})\|$ peut être déduite des coordonnées curvilinéaires le long de la ligne-$t$. En effet, par définition, si on note $s$ l'abscisse curvilinéaire le long de cette ligne, on a :

$$\|\mathbf{x}_t(\mathbf{x})\| = \left|\frac{ds}{dt}\right|$$

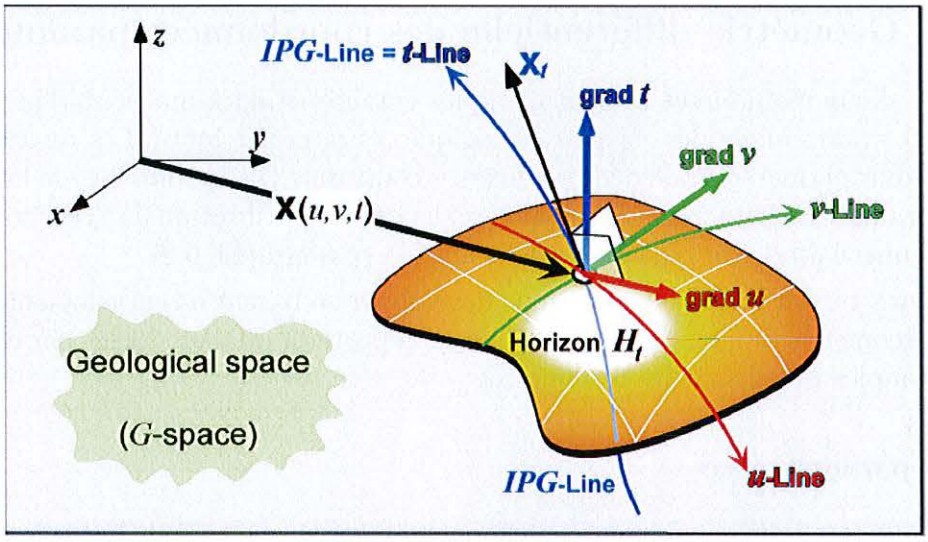



FIG. 2.6 : *Repère paramétrique* $(\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_t)$ *de l'espace géologique. Les vecteurs* $\mathbf{x}_u$ *et* $\mathbf{x}_v$ *sont tangents à l'horizon* $H_t$ *au point* $\mathbf{x}$ *et chacun des trois vecteurs est tangent à la ligne d'isovaleur correspondante ([Mallet, 2004]).*

Considérons un vecteur unitaire $\mathbf{d}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}_t(\mathbf{x})/\|\mathbf{x}_t(\mathbf{x})\|$, tangent à la ligne-$t$ en $\mathbf{x}$. Un résultat classique de géométrie différentielle (voir [Mallet, 2002]) nous indique que la dérivée de $t$ le long de la ligne est telle que :

$$\frac{dt}{ds} = \mathbf{d}(\mathbf{x}).\mathbf{grad}\ t(\mathbf{x})$$

En remplaçant $\mathbf{d}(\mathbf{x})$ par son expression en fonction des gradients de $u(\mathbf{x})$ et de $v(\mathbf{x})$, on obtient :

$$\frac{dt}{ds} = \varepsilon.\frac{\mathbf{grad}\ u(\mathbf{x}) \times \mathbf{grad}\ v(\mathbf{x})}{\|\mathbf{grad}\ u(\mathbf{x}) \times \mathbf{grad}\ v(\mathbf{x})\|}.\mathbf{grad}\ t(\mathbf{x})$$

Par conséquent, en inversant cette relation, on obtient les expressions suivantes de la norme $\|\mathbf{x}_t(\mathbf{x})\|$ (la norme étant positive, le coefficient $\varepsilon$ disparaît), puis de $\mathbf{x}_t(\mathbf{x})$ :

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}_t(\mathbf{x})\| &= \left|\frac{ds}{dt}\right| = \frac{\|\mathbf{grad}\ u(\mathbf{x}) \times \mathbf{grad}\ v(\mathbf{x})\|}{(\mathbf{grad}\ u(\mathbf{x}) \times \mathbf{grad}\ v(\mathbf{x})).\mathbf{grad}\ t(\mathbf{x})} \\ \mathbf{x}_t(\mathbf{x}) &= \varepsilon.\frac{\mathbf{grad}\ u(\mathbf{x}) \times \mathbf{grad}\ v(\mathbf{x})}{(\mathbf{grad}\ u(\mathbf{x}) \times \mathbf{grad}\ v(\mathbf{x})).\mathbf{grad}\ t(\mathbf{x})} \end{aligned}$$

En pratique, on choisira toujours $\mathbf{x}_t(\mathbf{x})$ orienté dans la même direction que $\mathbf{grad}\ t(\mathbf{x})$, ce qui revient à dire que $\varepsilon$ doit être choisi de telle sorte que :

$$\mathbf{x}_t(\mathbf{x}).\mathbf{grad}\ t(\mathbf{x}) > 0$$

soit $\varepsilon = +1$.

Par permutation circulaire des $(u, v, t)$, on obtient de manière similaire les expressions de $\mathbf{x}_u(\mathbf{x})$ et $\mathbf{x}_v(\mathbf{x})$ :

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_u(\mathbf{x}) &= \frac{\mathbf{grad}\ v(\mathbf{x}) \times \mathbf{grad}\ t(\mathbf{x})}{(\mathbf{grad}\ u(\mathbf{x}) \times \mathbf{grad}\ v(\mathbf{x})).\mathbf{grad}\ t(\mathbf{x})} \\
\mathbf{x}_v(\mathbf{x}) &= \frac{\mathbf{grad}\ t(\mathbf{x}) \times \mathbf{grad}\ u(\mathbf{x})}{(\mathbf{grad}\ u(\mathbf{x}) \times \mathbf{grad}\ v(\mathbf{x})).\mathbf{grad}\ t(\mathbf{x})} \\
\mathbf{x}_t(\mathbf{x}) &= \frac{\mathbf{grad}\ u(\mathbf{x}) \times \mathbf{grad}\ v(\mathbf{x})}{(\mathbf{grad}\ u(\mathbf{x}) \times \mathbf{grad}\ v(\mathbf{x})).\mathbf{grad}\ t(\mathbf{x})}
\end{aligned} \tag{2.2}$$

On utilisera par la suite le *tenseur métrique* $g(\mathbf{x})$, classiquement défini ([Sédov, 1975], [Mallet, 2002]) comme le produit des vecteurs $(\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_t)$ :

$$g(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \|\mathbf{x}_u\|^2 & \mathbf{x}_u.\mathbf{x}_v & \mathbf{x}_u.\mathbf{x}_t \\ \mathbf{x}_v.\mathbf{x}_u & \|\mathbf{x}_v\|^2 & \mathbf{x}_v.\mathbf{x}_t \\ \mathbf{x}_t.\mathbf{x}_u & \mathbf{x}_t.\mathbf{x}_v & \|\mathbf{x}_t\|^2 \end{bmatrix} \tag{2.3}$$

Ce tenseur métrique est caractéristique (voir [Sédov, 1975], [Sokolnikoff, 1964]) des propriétés métriques de l'espace défini par ces vecteurs, comme les longueurs, les aires, les volumes, les angles, etc. Il sert en particulier à estimer le tenseur de déformation (paragraphe 5.2).

Si on se réfère aux notations de géométrie différentielle (voir par exemple à ce sujet [Sédov, 1975], p. 61), on observe que $(\mathbf{grad}\ u, \mathbf{grad}\ v, \mathbf{grad}\ t)$ est le repère *contravariant* associé au repère *covariant* $(\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_t)$. Or les vecteurs de base covariants $\mathbf{v}_i$ correspondant aux vecteurs de base contravariants $\mathbf{v}^j$ par l'intermédiaire du tenseur métrique $g$, on en déduit l'expression inverse :

$$\mathbf{v}^j = g^{ij}.\mathbf{v}_i \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathbf{v}_i = g^{-1}_{ij}.\mathbf{v}^j$$

Le tenseur métrique $g$ exprimant la transformation du repère covariant en un repère contravariant, étant formé par les produits des vecteurs du repère covariant $(\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_t)$, son inverse $g^{-1}$, exprimant la transformation du repère contravariant en un repère covariant, est formé par le produit des vecteurs du repère contravariant $(\mathbf{grad}\ u, \mathbf{grad}\ v, \mathbf{grad}\ t)$ :

$$g^{-1}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \|\mathbf{grad}\ u\|^2 & \mathbf{grad}\ u.\mathbf{grad}\ v & \mathbf{grad}\ u.\mathbf{grad}\ t \\ \mathbf{grad}\ v.\mathbf{grad}\ u & \|\mathbf{grad}\ v\|^2 & \mathbf{grad}\ v.\mathbf{grad}\ t \\ \mathbf{grad}\ t.\mathbf{grad}\ u & \mathbf{grad}\ t.\mathbf{grad}\ v & \|\mathbf{grad}\ t\|^2 \end{bmatrix} \tag{2.4}$$

De plus, le déterminant de $g^{-1}(\mathbf{x})$ peut aussi s'exprimer en fonction de ces gradients :

$$\det g^{-1}(\mathbf{x}) = \big((\mathbf{grad}\ u \times \mathbf{grad}\ v).\mathbf{grad}\ t\big)^2$$

Enfin, pour éviter toute confusion, nous insistons sur le fait que ni le repère $(\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_t)$, ni le repère $(\mathbf{grad}\ u, \mathbf{grad}\ v, \mathbf{grad}\ t)$, ne sont orthogonaux. De plus, seules les relations de l'équation 2.3 relient aisément ces deux repères.

### Vecteur normal unitaire $\mathbf{N}(\mathbf{x})$

On désigne par $\mathbf{N}(\mathbf{x})$ le vecteur normal à l'horizon $H_t$, au point $\mathbf{x}$. Ce vecteur est, par définition, parallèle au vecteur $\mathbf{grad}\ t(\mathbf{x})$ et, si on décide qu'il pointe vers les terrains les plus jeunes, s'exprime comme :

$$\mathbf{N}(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{grad}\ t(\mathbf{x})}{\|\mathbf{grad}\ t(\mathbf{x})\|}$$

Comme l'illustre la figure 2.6 et comme indiqué par l'équation 2.3, les vecteurs $\mathbf{x}_u(\mathbf{x})$ et $\mathbf{x}_v(\mathbf{x})$ sont tangents à l'horizon $H_t$ et sont donc orthogonaux à $\mathbf{N}(\mathbf{x})$. $\mathbf{N}(\mathbf{x})$ peut alors s'écrire aussi comme :

$$\mathbf{N}(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}_u(\mathbf{x}) \times \mathbf{x}_v(\mathbf{x})}{\|\mathbf{x}_u(\mathbf{x}) \times \mathbf{x}_v(\mathbf{x})\|}$$

Cette seconde définition peut toutefois résulter en une orientation de $\mathbf{N}(\mathbf{x})$ différente de celle de la première. Pour éviter cela, nous prendrons les fonctions $u(\mathbf{x})$ et $v(\mathbf{x})$ telles que :

$$\big(\mathbf{x}_u(\mathbf{x}) \times \mathbf{x}_v(\mathbf{x})\big).\mathbf{grad}\ t(\mathbf{x}) > 0\ , \quad \forall \mathbf{x} \in G$$

Cette relation peut se transformer, en revenant aux définitions de $\mathbf{x}_u(\mathbf{x})$ et $\mathbf{x}_v(\mathbf{x})$, et en notant que $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = -((\mathbf{a} \times \mathbf{c}).\mathbf{b}).\mathbf{b}$ :

$$\begin{aligned}
& \big(\mathbf{x}_u(\mathbf{x}) \times \mathbf{x}_v(\mathbf{x})\big).\mathbf{grad}\ t(\mathbf{x}) && > 0 \\
\Longleftrightarrow\ & \Big(\tfrac{\mathbf{grad}\ v \times \mathbf{grad}\ t}{(\mathbf{grad}\ u \times \mathbf{grad}\ v).\mathbf{grad}\ t} \times \tfrac{\mathbf{grad}\ t \times \mathbf{grad}\ u}{(\mathbf{grad}\ u \times \mathbf{grad}\ v).\mathbf{grad}\ t}\Big).\mathbf{grad}\ t && > 0 \\
\Longleftrightarrow\ & \Big[-\Big(\big(\tfrac{\mathbf{grad}\ v \times \mathbf{grad}\ u}{((\mathbf{grad}\ u \times \mathbf{grad}\ v).\mathbf{grad}\ t)^2}\big).\mathbf{grad}\ t\Big).\mathbf{grad}\ t\Big].\mathbf{grad}\ t && > 0 \\
\Longleftrightarrow\ & \tfrac{\mathbf{grad}\ t}{(\mathbf{grad}\ u \times \mathbf{grad}\ v).\mathbf{grad}\ t}.\mathbf{grad}\ t && > 0 \\
\Longleftrightarrow\ & \tfrac{\|\mathbf{grad}\ t\|^2}{(\mathbf{grad}\ u \times \mathbf{grad}\ v).\mathbf{grad}\ t} && > 0 \\
\Longleftrightarrow\ & (\mathbf{grad}\ u \times \mathbf{grad}\ v).\mathbf{grad}\ t && > 0
\end{aligned}$$

(car $\|\mathbf{grad}\ t\|^2$ est forcément positif).

On peut noter qu'honorer cette condition implique que le repère formé par les vecteurs $(\mathbf{grad}\ u, \mathbf{grad}\ v, \mathbf{grad}\ t)$ est direct. Par la suite, on considérera que cette condition est toujours vérifiée.

### Image du repère $(\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_t)$ dans l'espace paramétrique $\overline{G}$

D'après la définition 2.2 et d'après la définition de la dérivée d'une fonction en un point, le vecteur $\mathbf{x}_u(\mathbf{x})$ s'exprime comme :

$$\mathbf{x}_u(\mathbf{x}) = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\mathbf{x}\big(u(\mathbf{x}) + \Delta u, v(\mathbf{x}), t(\mathbf{x})\big) - \mathbf{x}\big(u(\mathbf{x}), v(\mathbf{x}), t(\mathbf{x})\big)}{\Delta u}$$

Par conséquent, l'image de $\mathbf{x}_u(\mathbf{x})$ dans l'espace paramétrique $\overline{G}$ est un vecteur $\overline{\mathbf{x}_u(\mathbf{x})}$ tel que :

$$\begin{aligned}\overline{\mathbf{x}_u(\mathbf{x})} &= \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\begin{bmatrix} u(\mathbf{x}) + \Delta u \\ v(\mathbf{x}) \\ t(\mathbf{x}) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u(\mathbf{x}) \\ v(\mathbf{x}) \\ t(\mathbf{x}) \end{bmatrix}}{\Delta u} \\ &= \lim_{\Delta u \to 0} \frac{1}{\Delta u}. \begin{bmatrix} \Delta u \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{U}\end{aligned}$$

En d'autres termes, l'image dans l'espace paramétrique $\overline{G}$ du vecteur $\mathbf{x}_u(\mathbf{x})$ est, quel que soit $\mathbf{x}$, le vecteur unitaire $\mathbf{U}$ de la base de $\overline{G}$. Par le même raisonnement, on obtient les images de $\mathbf{x}_v(\mathbf{x})$ et de $\mathbf{x}_t(\mathbf{x})$ :

$$\forall \mathbf{x} \in G \ : \ \left| \begin{array}{l} \overline{\mathbf{x}_u(\mathbf{x})} = \mathbf{U} \\ \overline{\mathbf{x}_v(\mathbf{x})} = \mathbf{V} \\ \overline{\mathbf{x}_t(\mathbf{x})} = \mathbf{T} \end{array} \right. \tag{2.5}$$

Le repère $(\mathbf{U}, \mathbf{V}, \mathbf{T})$ est donc l'image dans l'espace paramétrique $\overline{G}$ du repère $(\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_t)$ de l'espace $G$.

On peut en déduire la transformation d'un vecteur élémentaire $d\mathbf{W}(\mathbf{x})$ de l'espace géologique dans l'espace $\overline{G}$ :

$$\begin{aligned} d\mathbf{W}(\mathbf{x}) &= du.\mathbf{x}_u(\mathbf{x}) + dv.\mathbf{x}_v(\mathbf{x}) + dt.\mathbf{x}_t(\mathbf{x}) \\ \iff \quad \overline{d\mathbf{W}(\mathbf{x})} &= du.\mathbf{U} + dv.\mathbf{V} + dt.\mathbf{T} \end{aligned}$$

les coefficients $(du, dv, dt)$ s'exprimant comme :

$$\begin{bmatrix} du \\ dv \\ dt \end{bmatrix} = g^{-1}(\mathbf{x}). \begin{bmatrix} d\mathbf{W}(\mathbf{x}).\mathbf{x}_u(\mathbf{x}) \\ d\mathbf{W}(\mathbf{x}).\mathbf{x}_v(\mathbf{x}) \\ d\mathbf{W}(\mathbf{x}).\mathbf{x}_t(\mathbf{x}) \end{bmatrix}$$

## 2.2 Aspects sédimentologiques de l'espace paramétrique

Le paragraphe précédente établissait des correspondances entre des points ou des vecteurs de l'espace géologique et leurs images dans l'espace paramétrique. Nous allons maintenant nous intéresser à la formulation mathématique de notions plus directement géologiques.

### 2.2.1 Vitesse de sédimentation instantanée

Comme l'axe vertical de l'espace paramétrique $\overline{G}$ est un *temps*, il est logique d'observer la correspondance entre ce *temps* et les épaisseurs visibles aujourd'hui, suivant l'axe **Z** de l'espace géologique. Pour cela, nous utiliserons la notion de *vitesse de sédimentation instantanée.*

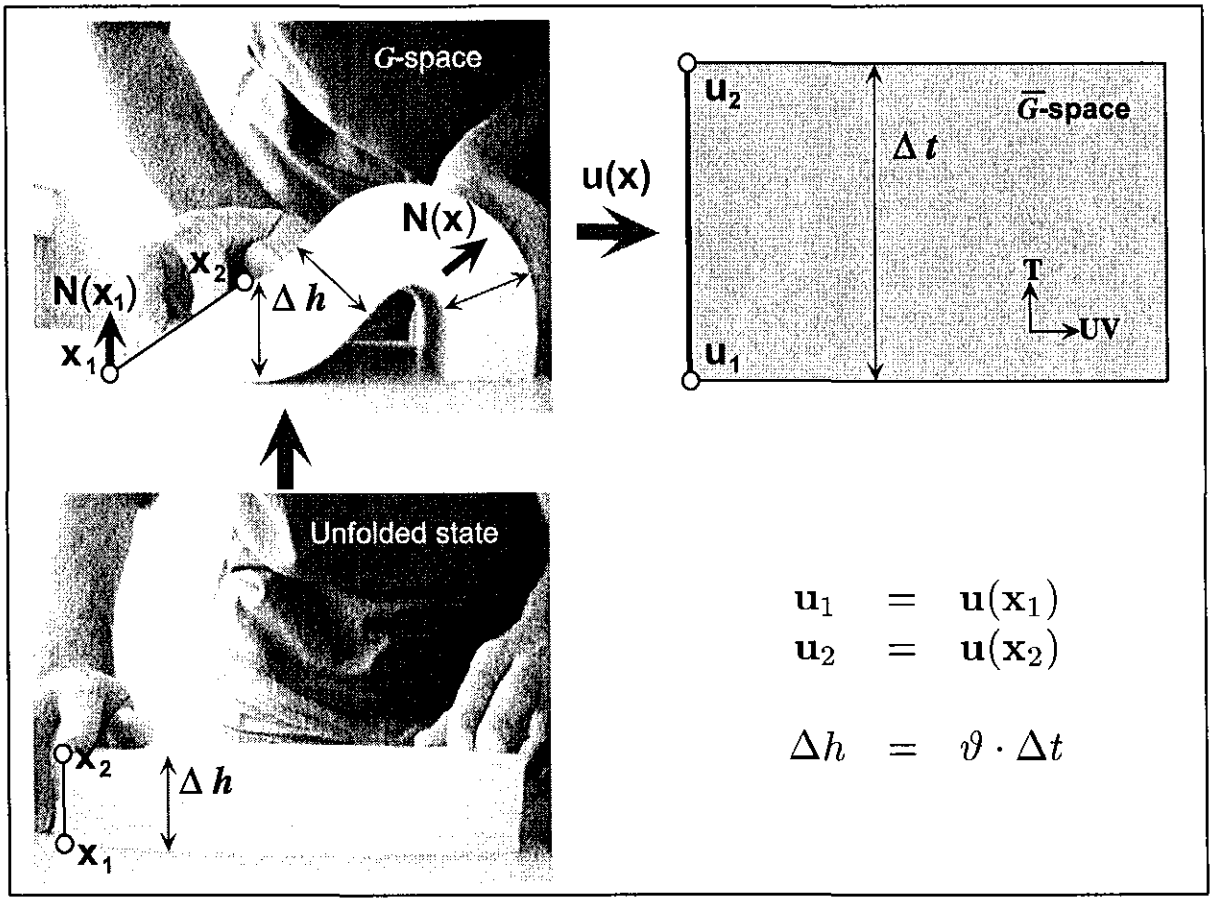



FIG. 2.7 : *Un livre plié vu comme un analogue à la déformation d'une couche géologique, permettant d'établir la correspondance entre une couche réelle (en haut à gauche) et l'intervalle de* temps *correspondant dans l'espace paramétrique (en haut à droite). Le style de déformation est ici du* flexural slip *(voir plus loin), qui met en évidence la différence entre l'épaisseur réelle $\Delta h$ de la couche, constante quel que soit l'état, et la longueur suivant une ligne-t reliant $\mathbf{x}_1$ et $\mathbf{x}_2$. Ces deux longueurs sont les mêmes dans l'état déplié (en bas à gauche) ([Mallet, 2004]).*

La figure 2.7 présente un livre plissé, comme un analogue d'une couche géologique d'épaisseur initiale constante $\Delta h$ déformée. On notera $H_{t-\Delta t}$ le mur de cette couche et $H_t$ son toit. On suppose qu'il n'y a pas eu de compaction, ni d'autre transformation que cette déformation.

Que la couche soit déformée ou non, son épaisseur $\Delta h$ est la longueur d'un segment orthogonal à $H_{t-\Delta t}$ et à $H_t$. Cette épaisseur est égale à la somme de l'épaisseur de chacune des couches élémentaires (c'est-à-dire des pages du livre, dans l'exemple de la figure 2.7).

Par conséquent, si on suppose qu'il n'y a pas eu d'autres déformations que du *flexural slip*, c'est-à-dire que les couches élémentaires ont pu librement glisser les unes sur les autres, l'épaisseur d'une couche est un invariant au cours de l'histoire géologique, quel que soit le système de coordonnées paramétriques $(u, v, t)$.

D'autre part, le gradient du *temps* géologique au point $\mathbf{x} \in H_t$ est un vecteur de l'espace géologique tel que :

$$\mathbf{grad}\ t(\mathbf{x}) \simeq \frac{\Delta t}{\Delta h}.\mathbf{N}(\mathbf{x})$$

où $\mathbf{N}(\mathbf{x})$ est le vecteur normal défini dans le paragraphe précédent.

Nous proposons de définir une *vitesse de sédimentation instantanée* $\vartheta(\mathbf{x})$ ou encore *taux de sédimentation instantané*, comme :

$$\vartheta(\mathbf{x}) \simeq \frac{\Delta h}{\Delta t}$$

Plus globalement, si $\Delta t \to 0$ (ou $\Delta h \to 0$), la vitesse de sédimentation instantanée devient :

$$\vartheta(\mathbf{x}) = \frac{1}{\|\mathbf{grad}\ t(\mathbf{x})\|}$$

Inversement, le gradient de $t(\mathbf{x})$ s'exprime :

$$\mathbf{grad}\ t(\mathbf{x}) = \frac{1}{\vartheta(\mathbf{x})}.\mathbf{N}(\mathbf{x})$$

La fonction ainsi définie n'est cependant qu'une vitesse de sédimentation « apparente », dans le sens où elle n'est vraie que si, d'une part, il n'y a pas eu de compaction au cours de l'histoire géologique des terrains et d'autre part les *temps* affectés à chaque horizon correspondent aux vrais âges géologiques.

Si on considère que la compaction a agi sur les terrains en transformant une colonne de sédiments d'épaisseur initiale $\Delta H(\mathbf{x})$ en une colonne d'épaisseur $\Delta h(\mathbf{x})$ observée aujourd'hui, selon un coefficient de compaction $\phi(\mathbf{x})$ :

$$\Delta h(\mathbf{x}) = (1 - \phi(\mathbf{x})).\Delta H(\mathbf{x})\ , \quad \text{avec} : 0 \leq \phi(\mathbf{x}) < 1$$

alors la vitesse de sédimentation instantanée peut être remplacée par une *vitesse de sédimentation décompactée instantanée* $\vartheta_\phi(\mathbf{x})$ :

$$\vartheta_\phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{1 - \phi(\mathbf{x})}.\vartheta(\mathbf{x})$$

Le coefficient de compaction $\phi(\mathbf{x})$ n'est généralement pas constant sur le volume étudié, ses valeurs dépendant de la nature des sédiments au point $\mathbf{x}$, ainsi que de leur parcours au cours du temps.

**Conversion âge-épaisseur**

La vitesse de sédimentation instantanée permet de mettre en correspondance une épaisseur réelle $\Delta h(\mathrm{x})$ observée actuellement au point x avec un intervalle de temps $\Delta t$ pendant lequel elle s'est formée :

$$\Delta h(\mathrm{x}) = \vartheta(\mathrm{x}).\Delta t$$

ou encore, en prenant en compte la compaction $\phi(\mathrm{x})$, une épaisseur décompactée $\Delta h_\phi(\mathrm{x})$ :

$$\Delta h_\phi(\mathrm{x}) = \vartheta_\phi(\mathrm{x}).\Delta t$$

Inversement, tout corps sédimentaire observé dans l'espace paramétrique peut être relié à une épaisseur réelle :

$$\Delta t = \frac{\Delta h_\phi(\mathrm{x})}{\vartheta_\phi(\mathrm{x})}$$

Cependant, il faut remarquer que l'intervalle de *temps* ainsi défini ne correspond pas strictement au temps mis par l'objet considéré pour se former, mais plutôt à l'intervalle de temps entre la formation de la base de l'objet et la formation de la base de l'objet juste au-dessus, en intégrant les éventuelles étapes de non dépot.

### 2.2.2 Correspondance avec les diagrammes de Wheeler

Le modèle GeoChron a été inspiré par les concepts de *time stratigraphy* introduits par Wheeler ([Wheeler, 1958]) et peut être vu comme une formulation mathématique de ces concepts. Ainsi, la figure 2.8 présente un exemple de diagramme stratigraphique que l'on peut comparer avec celui de la figure 2.4 qui a servi à présenter le modèle GeoChron.

Le modèle GeoChron pourra donc servir comme outil pour d'autres applications, qu'il s'agisse simplement de vérifier l'interprétation sédimentologique qui a été faite ou de calculer des modèles stratigraphiques basés sur les environnements de dépôt et les principes de la stratigraphie séquentielle ([Vail *et al.*, 1977] ou encore [Catuneanu, 2002] pour une synthèse récente).

Cependant, en pratique, cette correspondance est fortement limitée. En effet, nous verrons (paragraphe 2.3.1 et 3.1.1) que le paramètre *temps* est construit par interpolation continue entre des valeurs de $t$ fixées sur des horizons particuliers. En conséquence, il sera nécessaire d'adapter le modèle pour que la similitude avec les diagrammes de stratigraphie soit complète. Cet aspect sera développé dans le chapitre 5 (paragraphe 5.1.3).

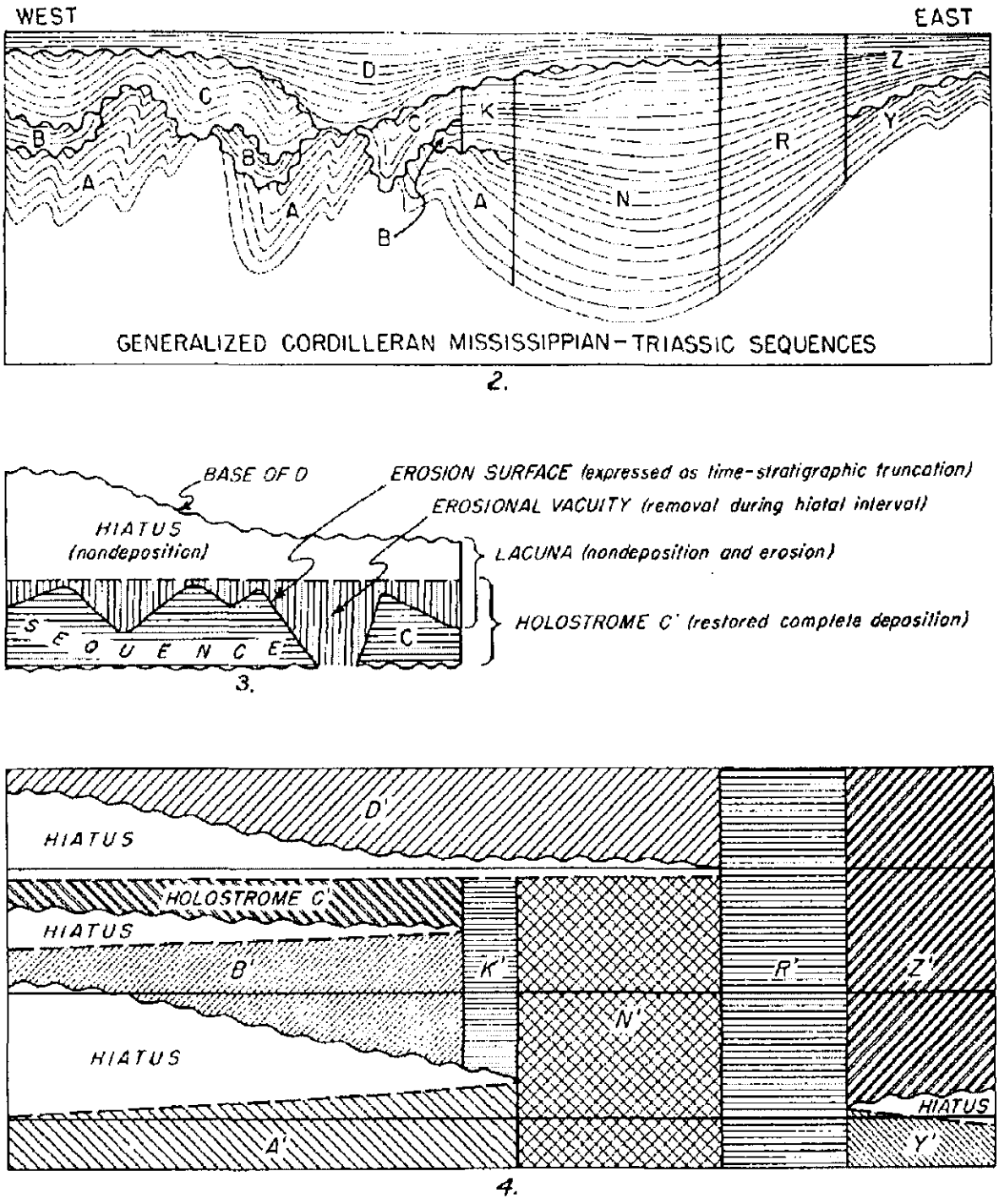



FIG. 2.8 : *Diagramme de* time stratigraphy *ou de Wheeler ([Wheeler, 1958]). En haut, coupe simplifiée entre le Pacifique et les Montagnes Rocheuses, au 40ème parallèle, montrant les principales séquences et inconformités (base du Mississippien supérieur et limite Trias-Jurassique). Au milieu, diagramme de* time stratigraphy *de la formation C, illustrant les principales composantes d'un diagramme de Wheeler. En bas, diagramme de Wheeler complet correspondant à la coupe, l'axe vertical du diagramme correspond à l'âge de dépôt des terrains et les différentes surfaces remarquables sont représentées sous forme de lignes horizontales, à temps constant. Noter la présence de zones de non dépôt (hiatus).*

## 2.3 Comment construire une paramétrisation GeoChron ?

Nous avons présenté jusqu'à maintenant les bases mathématiques et géologiques du modèle GeoChron, une paramétrisation 3D de l'espace géologique. Nous n'avons cependant donné aucune indication sur la manière dont une telle paramétrisation peut être construite en pratique.

Ce paragraphe fournit quelques indices sur la construction, issus directement des mathématiques sous-jacentes. Les indications développées ici sont plus génériques que les méthodes détaillées dans le chapitre suivant : si d'autres méthodes de construction, totalement différentes de celles que nous proposerons, peuvent être envisagées, elles devront toutefois respecter les contraintes et principes qui sont présentés ici.

Dans un premier temps, quelques contraintes globales sur la paramétrisation sont détaillées, puis nous évoquons les problèmes liés au style de déformation subi par le volume d'étude, ainsi que la manière d'intégrer ce style dans le calcul d'une paramétrisation, sous forme de contraintes mathématiques.

Le chapitre suivant est entièrement consacré au problème de l'implémentation numérique de ces différentes contraintes et détaille comment obtenir réellement en pratique une paramétrisation GeoChron.

### 2.3.1 Contraintes génériques

#### Paramétrisation aux nœuds d'un maillage

Construire une paramétrisation GeoChron revient à calculer, en tout point $\mathbf{x} \in G$ de l'espace géologique, trois fonctions scalaires $u(\mathbf{x})$, $v(\mathbf{x})$ et $t(\mathbf{x})$. Ces fonctions peuvent être vues comme des « propriétés » du milieu au même titre que les propriétés pétrophysiques ou autres.

Cette définition ne donne aucune indication sur la nature du support utilisé pour les calculs, et on pourrait envisager de construire une telle paramétrisation sur un modèle continu. En pratique, nous avons vu dans le premier chapitre que les propriétés géologiques étaient généralement modélisées aux nœuds d'un maillage discret.

Dans ce cas, construire une paramétrisation revient à calculer la valeur des trois fonctions $u(\mathbf{x})$, $v(\mathbf{x})$ et $t(\mathbf{x})$ à chacun des nœuds du maillage. La valeur de ces fonctions en un point qui n'est pas un nœud du maillage mais qui est plongé dans une des cellules, peut alors être obtenu par interpolation des valeurs aux sommets.

Le maillage choisi peut être indifféremment régulier ou non, structuré ou non. Dans le chapitre suivant (paragraphe 3.1.3), le choix du maillage le mieux adapté, dans notre contexte, à la construction d'un modèle GeoChron sera discuté.

### Contrainte intrinsèque de continuité

Le modèle mathématique présenté dans ce chapitre suppose que les composantes $u(\mathbf{x})$, $v(\mathbf{x})$ et $t(\mathbf{x})$ de $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ sont dérivables en tout point et donc sont aussi continues. Cette continuité doit donc apparaître dans la construction du modèle.

Cette continuité est toutefois obligatoirement interrompue au niveau des failles et des surfaces d'inconformité puisque, par définition, les terrains de part et d'autre ne se sont pas déposés au même moment, ni au même endroit (dans le cas des failles).

En conséquence, les méthodes de construction devront intégrer une contrainte assurant que les fonctions $u(\mathbf{x})$, $v(\mathbf{x})$ et $t(\mathbf{x})$ sont continues par morceaux et que leurs dérivées sont aussi continues. La question de la continuité au travers des failles, suivant le vecteur rejet, sera évoquée dans le chapitre 4.

### Contraintes intrinsèques sur des lignes et surfaces particulières

Nous avons défini un certain nombre de surfaces et de lignes particulières dans le cadre d'une paramétrisation GeoChron. On distingue spécialement les horizons $H_t$, c'est-à-dire des surfaces d'isovaleur de $t$, et les lignes-$t$ ou lignes IPG, le long desquelles $(u, v)$ restent constants et seul $t$ varie. Ces objets peuvent servir à définir des contraintes utilisables en terme de construction.

Ainsi, le long d'une ligne IPG $L$, les relations suivantes ou *contraintes intrinsèques IPG* doivent être respectées :

$$\forall \mathbf{x} \in L \ : \ \left| \begin{array}{rcl} u(\mathbf{x}) & = & u^L \\ v(\mathbf{x}) & = & v^L \\ t(\mathbf{x}) & = & t(\mathbf{x}|L) \end{array} \right.$$

Dans cette relation, $(u^L, v^L)$ est une paire de valeurs constantes le long de $L$ et $t(\mathbf{x}|L)$ est une fonction qui interpole les valeurs du *temps* observé aux horizons $\{H_{t_0}, H_{t_1}, \cdots, H_{t_n}\}$ que la ligne intersecte (figure 2.9).

De manière similaire, un horizon $H_t$ correspond à un ensemble de particules sédimentaires déposées au même instant $t$ et, par définition, la fonction $u(\mathbf{x})$ doit avoir une valeur constante $t$ en tout point de $H_t$ et doit donc respecter la *contrainte intrinsèque d'horizon* suivante :

$$\forall \mathbf{x} \in H_{t_i} \ : \ t(\mathbf{x}) = t_i$$

## 2.3.2 Les différents styles de déformation

En géologie structurale, on distingue deux principaux types de déformation des couches (voir [Pomerol *et al.*, 2002], [Hills, 1963], [Ramsay, 1967]) : la flexure simple d'une plaque épaisse non-stratifiée ou *pure bending* (figure 2.10), et le glissement banc sur banc ou *flexural slip*[6] (figure 2.12). Ces styles de déformation engendrent des méthodes de restau-

[6]Les termes anglais étant plus courants, ils seront généralement préférés aux termes français.

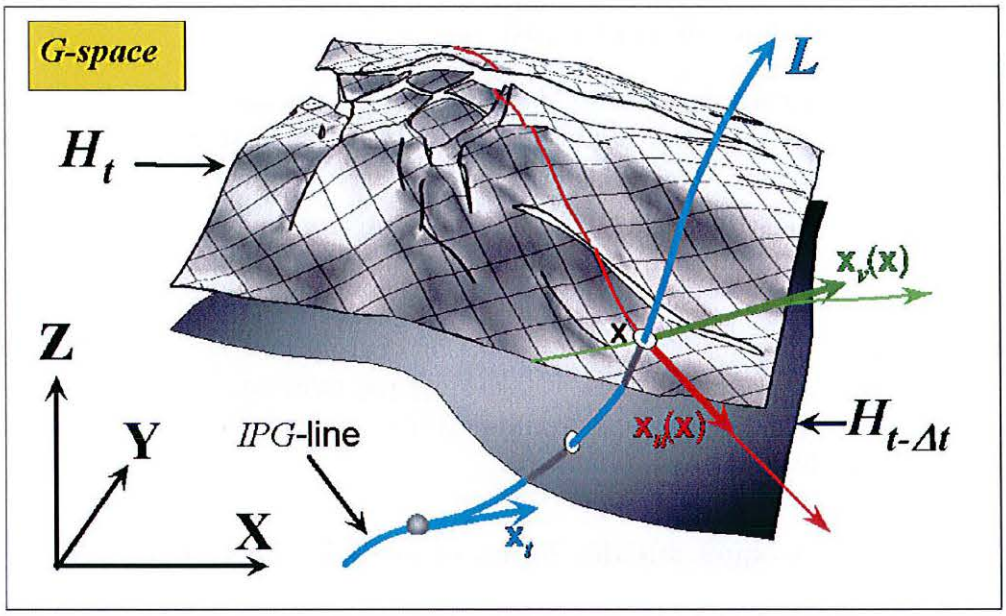



FIG. 2.9 : *Intégration d'un horizon de référence et d'une ligne IPG dans la construction d'un modèle GeoChron. Quelle que soit la méthode de construction, les valeurs de $t$ doivent être constantes sur chaque horizon et les valeurs de $(u, v)$ doivent être constantes le long d'une ligne IPG ([Mallet, 2004]).*

ration surfaciques ou volumiques différentes (voir [Rouby *et al.*, 2000], [Moretti et Larrère, 1989]).

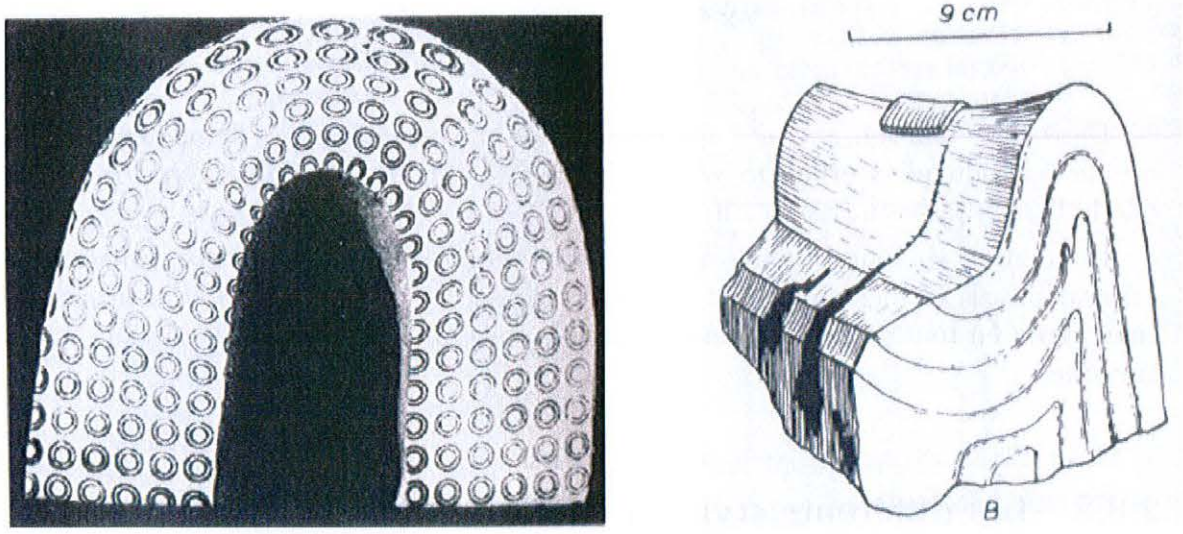



FIG. 2.10 : *Déformation d'une couche par flexure simple* (pure bending) *d'une plaque homogène. À gauche, coupe dans un analogue d'un pli, illustrant la différence de déformation suivant la position dans le pli. À droite, vue en trois dimensions d'un pli réel. Noter la forme en « selle de cheval » le long de l'axe du pli ([Hills, 1963], pp. 86 et 222).*

Dans le premier cas, les couches géologiques sont considérées comme des plaques épaisses homogènes, non stratifiées. Les terrains se déforment en se comprimant dans l'intrados du pli et en se dilatant dans l'extrados. Au milieu se trouve une surface virtuelle dite *surface neutre* ou *fibre neutre* (dans les problèmes en deux dimensions), le long de laquelle n'a lieu aucun changement de volume (figure 2.11). La position de cette surface neutre est conditionnée, dans le modèle GeoChron, par le choix d'un horizon de référence (paragraphe 3.1.2). Dans un modèle mécanique, cette surface dépend de la répartition des contraintes et de la nature du matériau formant la plaque, et elle influe aussi sur le tenseur de déformation et ses conséquences (par exemple, comme les longueurs ne changent pas sur cette surface neutre, il n'y a pas de fracturation à cet endroit). Ce problème sera discuté dans le paragraphe 5.2.3.

Géologiquement, plusieurs mécanismes peuvent accommoder, et donc révéler, ce type de déformation : nombreuses petites failles ou petits plis secondaires générés par la forte compression dans l'intrados du pli, fracturation ou apparition de fentes de tensions dans l'extrados, recristallisation dans l'intrados et l'extrados ou encore compression et dilatation sans rupture des matériaux.

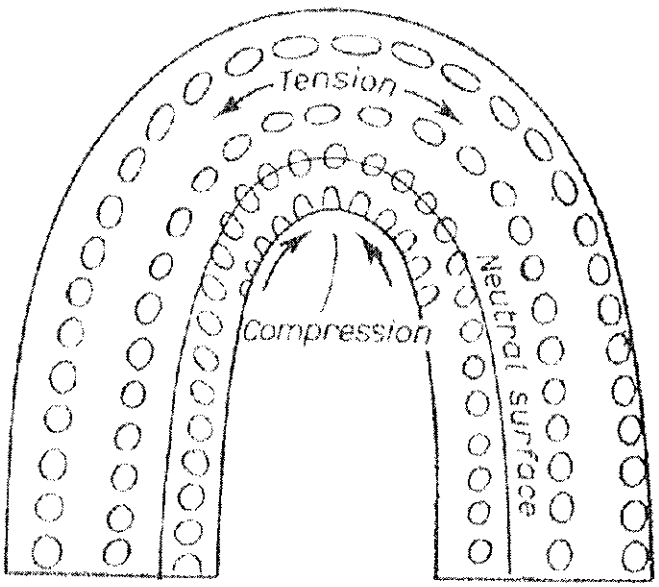



FIG. 2.11 : *Définition de la fibre neutre dans une couche en* pure bending. *Un volume élémentaire (figuré par les cercles) situé sur cette fibre ou surface en 3D, n'est pas déformé. Les volumes au-dessus sont dilatés, ceux en dessous sont comprimés ([Hills, 1963], p. 220).*

Dans un deuxième cas, on considère non plus une plaque homogène unique mais plutôt un empilement de couches fines de mêmes caractéristiques lithologiques. Lors de la déformation, ces couches vont pouvoir glisser les unes sur les autres, pour accommoder la déformation sans changer de longueur. Ce type de déformation se produit par exemple lorsqu'il existe une succession de couches rigides, donc qui ne peuvent que difficilement se dilater ou se comprimer, de faible épaisseur, avec des joints bien marqués entre couches,

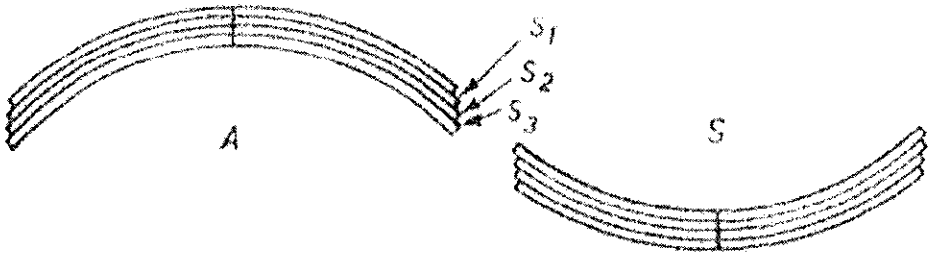



FIG. 2.12 : *Déformation d'une couche par glissement banc sur banc (*flexural slip*), dans un anticlinal (A) et dans un synclinal voisin (S). Chaque sous-couche $S_1$, $S_2$, $S_3$... garde sa longueur d'origine après déformation ([Hills, 1963], p. 222).*

comme les séries calcaires à bancs fins, ou encore quand on considère une couche épaisse mais très déformable, comme du sel ou des marnes.

La déformation par *flexural slip* se manifeste principalement au niveau des contacts entre bancs par des crochons ou des stries de glissement perpendiculaires à l'axe du pli. Au sein des couches, on peut voir apparaître des fractures internes sigmoïdales, souvent remplies de recristallisations.

Comme l'illustre la figure 2.7, le style de déformation influe sur la forme des lignes IPG, et donc sur les caractéristiques de la paramétrisation GeoChron. De plus, la complexité des facteurs qui contrôlent le type de déformation (caractéristiques des roches déformées, mode d'empilement des différentes couches, pression lithostatique globale, contraintes appliquées, etc.) rend très difficile la caractérisation à priori de la déformation.

La paramétrisation GeoChron doit donc être à même de prendre en compte les différents styles, mais il doit aussi être possible de modifier une paramétrisation initiale, soit globalement soit localement, pour prendre en compte des informations secondaires sur le style de déformation (voir paragraphe 3.2.3).

Les paragraphes suivants donnent quelques pistes sur l'intégration de ces styles dans la paramétrisation, elles seront développées dans le chapitre suivant. On ne considérera dans un premier temps que les deux cas extrêmes.

### 2.3.3 Déformation par flexure simple d'une plaque homogène (*pure bending*)

Dans le cas de la flexure simple d'une plaque, le cisaillement en tout point est minimal et les cercles de la figure 2.11 sont transformés en ellipses par dilatation parallèlement aux horizons. Par conséquent, un repère élémentaire orthonormé $(\mathbf{U}(\mathbf{x}), \mathbf{V}(\mathbf{x}), \mathbf{T}(\mathbf{x}))$ attaché à un point $\mathbf{x}$ quelconque de la plaque non déformée se transforme en un repère $(\mathbf{x}_u(\mathbf{x}), \mathbf{x}_v(\mathbf{x}), \mathbf{x}_t(\mathbf{x}))$ orthogonal (mais plus normé).

Pour simuler ce type de déformation, il faut donc que les vecteurs $\mathbf{x}_u(\mathbf{x})$, $\mathbf{x}_v(\mathbf{x})$ et $\mathbf{x}_t(\mathbf{x})$ soient orthogonaux deux à deux. On a vu (équation 2.3) que ces vecteurs étaient orthogonaux aux vecteurs gradients de $u(\mathbf{x})$, $v(\mathbf{x})$ et $t(\mathbf{x})$.

On peut donc formuler une contrainte de *pure bending* comme suit :

$$\forall \mathbf{x} \in G \; : \; \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{x}_u(\mathbf{x}) \perp \mathbf{x}_v(\mathbf{x}) \\ \mathbf{x}_u(\mathbf{x}) \perp \mathbf{x}_t(\mathbf{x}) \\ \mathbf{x}_v(\mathbf{x}) \perp \mathbf{x}_t(\mathbf{x}) \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{grad}\ u \perp \mathbf{grad}\ v \\ \mathbf{grad}\ u \perp \mathbf{grad}\ t \\ \mathbf{grad}\ v \perp \mathbf{grad}\ t \end{array} \right. \tag{2.6}$$

Notons aussi que dans ce type de déformation, les lignes IPG restent parallèles aux lignes tangentes aux horizons, comme l'illustrent les figures 2.7 et 2.10. La première des deux méthodes proposées dans le chapitre suivant se base sur cette constatation.

### 2.3.4 Glissement banc sur banc (*flexural slip*)

Dans le cadre du *flexural slip*, la contrainte est cette fois-ci que chaque horizon, autant que possible, ne change pas de longueur. Cela signifie que la longueur des vecteurs élémentaires $\mathbf{x}_u(\mathbf{x})$ et $\mathbf{x}_v(\mathbf{x})$ ne doit pas changer et qu'ils doivent être autant que possible orthogonaux, sur un horizon $H_\tau$ donné :

$$\forall \mathbf{x} \in H_\tau \; : \; \left\{ \begin{array}{c} \|\mathbf{x}_u(\mathbf{x})\| = \|\mathbf{x}_v(\mathbf{x})\| = 1 \\ \mathbf{x}_u(\mathbf{x}).\mathbf{x}_v(\mathbf{x}) = 0 \end{array} \right. \tag{2.7}$$

Cette contrainte est similaire aux contraintes de paramétrisation 2D de type *paramétrisation isométrique*[7] (voir par exemple [Samson, 1996] ou [Mallet, 2002]), elles-mêmes proches du *conformal mapping* (voir [Lévy *et al.*, 2002] et paragraphe 3.1.2). Cette contrainte, exprimée sur un horizon donné, peut se généraliser à tout le volume d'étude.

Considérons les projections $\mathbf{grad}_H\ u(\mathbf{x})$ et $\mathbf{grad}_H\ v(\mathbf{x})$ des gradients $\mathbf{grad}\ u(\mathbf{x})$ et $\mathbf{grad}\ v(\mathbf{x})$ sur un horizon $H_\tau$, définies comme la différence du gradient de $u(\mathbf{x})$ (respectivement $v(\mathbf{x})$) et de la composante normale, suivant $\mathbf{N}(\mathbf{x})$, de $u(\mathbf{x})$ (resp. $v(\mathbf{x})$) :

$$\forall \mathbf{x} \in H_\tau \; : \; \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{grad}_H\ u(\mathbf{x}) = \mathbf{grad}\ u(\mathbf{x}) - \big(\mathbf{grad}\ u(\mathbf{x}).\mathbf{N}(\mathbf{x})\big).\mathbf{N}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{grad}_H\ v(\mathbf{x}) = \mathbf{grad}\ v(\mathbf{x}) - \big(\mathbf{grad}\ v(\mathbf{x}).\mathbf{N}(\mathbf{x})\big).\mathbf{N}(\mathbf{x}) \end{array} \right.$$

En utilisant la relation :

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}).(\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{a}.\mathbf{c}).(\mathbf{b}.\mathbf{d}) - (\mathbf{b}.\mathbf{c}).(\mathbf{a}.\mathbf{d})$$

les relations de la contrainte précédente s'expriment alors comme :

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}_u(\mathbf{x})\|^2 &= \left( \frac{\mathbf{grad}\ v(\mathbf{x}) \times \mathbf{grad}\ t(\mathbf{x})}{(\mathbf{grad}\ u(\mathbf{x}) \times \mathbf{grad}\ v(\mathbf{x})).\mathbf{grad}\ t(\mathbf{x})} \right)^2 \\ &= \frac{1}{\mathbf{D}(\mathbf{x})}.\big(\mathbf{grad}\ v(\mathbf{x}) \times N(\mathbf{x})\big)^2 \\ &= \frac{1}{\mathbf{D}(\mathbf{x})}.\big(\|\mathbf{grad}\ v(\mathbf{x})\|^2.\|\mathbf{N}(\mathbf{x})\|^2 - (\mathbf{grad}\ v(\mathbf{x}).\mathbf{N}(\mathbf{x}))^2\big) \end{aligned}$$

[7] On parle de paramétrisation isométrique à cause de la contrainte d'égalité des normes à 1.

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\mathbf{D(x)}}.\big(\|\mathbf{grad}\ v(\mathbf{x})\|^2 - 2.(\mathbf{grad}\ v(\mathbf{x}).\mathbf{N(x)}).(\mathbf{grad}\ v(\mathbf{x}).\mathbf{N(x)}) + \\
&\qquad\qquad (\mathbf{grad}\ v(\mathbf{x}).\mathbf{N(x)})^2\big) \\
&= \frac{1}{\mathbf{D(x)}}.\big(\|\mathbf{grad}\ v(\mathbf{x}) - (\mathbf{grad}\ v(\mathbf{x}).\mathbf{N(x)}).\mathbf{N(x)}\|\big)^2 \\
&= \frac{1}{\mathbf{D(x)}}.\|\mathbf{grad}_H\ v(\mathbf{x})\|^2
\end{aligned}$$

où $\mathbf{D(x)}$ désigne le carré du produit mixte des gradients de $u$, $v$ et du vecteur normal $\mathbf{N(x)}$ :

$$\mathbf{D(x)} = \Big\|\big(\mathbf{grad}\ u(\mathbf{x}) \times \mathbf{grad}\ v(\mathbf{x})\big).\mathbf{N(x)}\Big\|^2$$

De la même manière, on obtient $\mathbf{x}_v(\mathbf{x})$ en fonction de $\mathbf{grad}_H\ u(\mathbf{x})$.

D'autre part, on peut vérifier que le produit scalaire de ces deux projections donne :

$$\begin{aligned}
\mathbf{grad}_H\ u(\mathbf{x}).\mathbf{grad}_H\ v(\mathbf{x}) &= \mathbf{grad}\ u(\mathbf{x}).\mathbf{grad}\ v(\mathbf{x}) \\
&\quad -\big(\mathbf{grad}\ u(\mathbf{x}).\mathbf{N(x)}\big).\big(\mathbf{grad}\ v(\mathbf{x}).\mathbf{N(x)}\big)
\end{aligned}$$

et donc que le produit de $\mathbf{x}_u(\mathbf{x})$ et $\mathbf{x}_v(\mathbf{x})$ est équivalent à :

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_u(\mathbf{x}).\mathbf{x}_v(\mathbf{x}) &= \frac{\mathbf{grad}\ v(\mathbf{x}) \times \mathbf{grad}\ t(\mathbf{x})}{(\mathbf{grad}\ u(\mathbf{x}) \times \mathbf{grad}\ v(\mathbf{x})).\mathbf{grad}\ t(\mathbf{x})}.\frac{\mathbf{grad}\ t(\mathbf{x}) \times \mathbf{grad}\ u(\mathbf{x})}{(\mathbf{grad}\ u(\mathbf{x}) \times \mathbf{grad}\ v(\mathbf{x})).\mathbf{grad}\ t(\mathbf{x})} \\
&= \frac{1}{\mathbf{D(x)}}.\big((\mathbf{grad}\ v(\mathbf{x}) \times \mathbf{N(x)}).(\mathbf{N(x)} \times \mathbf{grad}\ u(\mathbf{x}))\big) \\
&= \frac{1}{\mathbf{D(x)}}.\big((\mathbf{grad}\ v(\mathbf{x}).\mathbf{N(x)}).(\mathbf{N(x)}.\mathbf{grad}\ u(\mathbf{x})) - \|\mathbf{N(x)}\|^2.(\mathbf{grad}\ u(\mathbf{x}).\ \\
&\qquad\qquad \mathbf{grad}\ v(\mathbf{x}))\big) \\
&= \frac{-1}{\mathbf{D(x)}}.\big(\mathbf{grad}\ u(\mathbf{x}).\mathbf{grad}\ v(\mathbf{x}) - (\mathbf{grad}\ u(\mathbf{x}).\mathbf{N(x)}).(\mathbf{N(x)}.\mathbf{grad}\ v(\mathbf{x}))\big) \\
&= \frac{-1}{\mathbf{D(x)}}.\mathbf{grad}_H\ u(\mathbf{x}).\mathbf{grad}_H\ v(\mathbf{x})
\end{aligned}$$

Par conséquent, si la compaction $\phi(\mathbf{x})$, ainsi que la dilation volumique $\theta(\mathbf{x})$ (voir paragraphe 5.2), sont nulles, les contraintes de *flexural slip* de l'équation 2.7 sont équivalentes aux contraintes suivantes :

$$\forall \mathbf{x} \in G\ :\ \begin{cases} \|\mathbf{grad}_H\ u(\mathbf{x})\| = \|\mathbf{grad}_H\ v(\mathbf{x})\| = 1 \\ \mathbf{grad}_H\ u(\mathbf{x}).\mathbf{grad}_H\ v(\mathbf{x}) = 0 \end{cases}$$

On peut remarquer que ces contraintes spécifient implicitement la forme des lignes IPG et qu'il serait donc contradictoire de les utiliser en même temps que la contrainte intrinsèque IPG définie plus haut.

L'implémentation de ces contraintes est détaillée dans le chapitre suivant.

## Conclusion

La paramétrisation GeoChron présentée dans cette partie a pour but de calculer une correspondance entre l'espace géologique observé actuellement et un espace paramétrique représentant l'espace de dépôt des sédiments. Cette correspondance, au travers de la fonction de paramétrisation, permet de représenter les terrains sédimentaires de manière cohérente avec leur position et leurs relations au moment de leur dépôt.

Dans la limite fixée par les hypothèses sur la géométrie des couches au moment de leur dépôt et l'identification des limites majeures pointées avec des horizons isochrones, ce modèle permet de formuler dans un contexte mathématique robuste les connaissances géologiques sur le domaine d'étude.

De plus, nous avons vu qu'il est possible d'exprimer sous forme mathématique la connaissance des différents styles de déformation géologique qui ont affecté les terrains au cours de leur histoire. Le modèle GeoChron permet donc de faire la transition entre des connaissances géologiques abstraites et une implémentation informatique, par l'intermédiaire de relations mathématiques.

Cependant, au-delà des quelques indications fournies dans la dernière partie, l'implémentation pratique d'un modèle GeoChron n'est pas triviale et plusieurs problèmes se posent. Dans un premier temps, nous avons vu dans le chapitre 1 qu'il était important de choisir un support adapté au calcul. Ensuite se pose la question du choix des algorithmes numériques, de leur robustesse ainsi que de leur implémentation.

Un grand nombre d'implémentations différentes sont envisageables, suivant les contraintes particulières de chaque contexte. Le chapitre suivant propose deux méthodes de construction d'une paramétrisation GeoChron basées sur les formules décrites dans ce chapitre. Ces méthodes sont privilégiées par leur généralité, leur similarité avec les formules mathématiques du modèle, ainsi que leur complémentarité.

# Chapitre 3

# Construction d'une paramétrisation 3D GeoChron

Dans le chapitre précédent, nous avons présenté les grandes lignes du modèle GeoChron, basé sur une paramétrisation 3D de l'espace géologique. Nous avons établi un certain nombre de relations et de propriétés mathématiques de ce modèle.

Nous allons maintenant montrer comment une telle paramétrisation peut être construite en pratique sur un maillage donné. Le paragraphe 3.1 présente quelques principes généraux concernant en particulier la construction du paramètre $t$. Nous montrerons aussi que les maillages tétraédriques sont, d'un point de vue informatique et numérique, les plus adaptés à notre problème. Les parties 3.2 et 3.3 traiteront de deux approches différentes, l'une locale et l'autre globale, permettant d'aboutir à une fonction de paramétrisation $(u, v, t)$ conforme à un modèle GeoChron.

## 3.1 Principe général de construction

Dans un premier temps, nous allons présenter les grandes lignes qui guident nos méthodes de construction. Nous avons vu dans le chapitre précédent que, conceptuellement, toutes les dimensions de l'espace paramétrique GeoChron ne jouaient pas le même rôle. Il semble donc naturel de modéliser séparément $u$ et $v$, les coordonnées paléo-géographiques, et $t$, le temps géologique.

On peut remarquer qu'il existe plusieurs relations sur les coordonnées paramétriques. Le *temps* est contraint par la relation d'ordre entre les horizons et par ses relations avec $u$ et $v$, alors que les coordonnées paléo-géographiques ne sont contraintes qu'entre elles et par leurs relations avec $t$. En conséquence, il apparaît que $t$ peut être modélisé en premier, sans connaître $u$ et $v$, alors que le contraire n'est pas possible.

Nous avons donc décidé, dans un premier temps, de construire le *temps* $t$, puis de construire les coordonnées paléo-géographiques en s'appuyant sur $t$. Il est important de noter que, de ce fait, durant le calcul de $u$ et de $v$, $t$ sera toujours considéré comme une donnée fixe, qui ne variera plus jamais. Cela signifie que si des corrections doivent

être apportées sur le *temps* calculé par les méthodes suivantes, ces corrections doivent s'appliquer avant tout calcul de $u$ ou de $v$.

La méthode de construction de $t$ est assez simple et s'appuie principalement sur le fait que $t$ est constant le long de chaque horizon du modèle. En ce qui concerne les coordonnées paléo-géographiques, le problème est plus complexe et nous proposons deux approches : une locale, qui construit un ensemble de lignes iso-paléo-géographiques, et une globale, par le biais de contraintes entre $u$, $v$ et $t$. Ces deux méthodes permettent de prendre en compte des informations sur le style de déformation qu'ont subi les terrains.

#### L'interpolateur DSI

Dans tout ce chapitre, les modèles de propriété sont construits en utilisant le moteur d'interpolation DSI, pour *Discrete Smooth Interpolation*, qui a déjà été évoqué à plusieurs reprises. Cette méthode a été introduite par J.-L. Mallet ([Mallet, 1992], [Mallet, 2002]), et permet l'interpolation d'une fonction scalaire ou vectorielle sur les nœuds d'un maillage discret, tout en respectant un ensemble de contraintes.

DSI vise à minimiser un critère de *rugosité généralisée*, défini à partir de la rugosité locale du maillage, c'est-à-dire la dérivée seconde de la propriété, et d'un ensemble de contraintes linéaires. Dans notre cas, seules les contraintes souples, c'est-à-dire qui doivent être respectées au sens des moindres carrés, seront utilisées.

Ces contraintes sont toutes de la forme :

$$A_c^t.\varphi \simeq b_c$$

où $\varphi$ est un vecteur composé des valeurs de la propriété aux différents nœuds du maillage, la matrice $A_c^t$ et le scalaire $b_c$ étant des coefficients caractéristiques de la contrainte $c$.

Le principe général de DSI est expliqué dans l'annexe A et l'annexe B définit un formalisme concernant les propriétés définies aux nœuds de tétraèdres. Le cadre théorique décrit dans ces annexes sera largement utilisé dans ce chapitre, pour définir un certain nombre de contraintes DSI. Le lecteur est cependant invité à se reporter à [Mallet, 2002] pour la théorie complète de l'interpolateur, à [Mallet, 2003] pour la définition de contraintes aux sommets de tétraèdres, ou encore à [Cognot, 1996] et [Muron *et al.*, 2005a] pour des détails d'implémentation.

### 3.1.1 Calcul du *temps*

Le paramètre *temps* est le premier à être modélisé. Nous avons vu dans le chapitre précédent qu'il doit respecter les contraintes suivantes :

- chaque horizon géologique $H_t$ doit apparaître comme une surface d'isovaleur de $t$ ;
- les valeurs de $t$ associées aux horizons doivent respecter la relation d'ordre définie par l'âge géologique des terrains ;
- le *temps* doit être le plus régulier possible et en particulier doit évoluer continûment entre les différents horizons.

### Principe du calcul

Ces deux objectifs s'expriment facilement sous forme de contraintes DSI. Le respect des horizons initiaux est représenté par les contraintes de type *points de contrôle* (paragraphe B.2.1) et la régularité globale de la propriété correspond à la contrainte de *gradient constant* (annexe B, paragraphe B.3.2).

En pratique, l'algorithme suivant est appliqué :

1. pour chaque horizon initial, un *temps* géologique $t$ est choisi ;
2. des points de contrôle sont installés, en chaque nœud de cet horizon, avec la valeur de contrôle $t$ ;
3. une contrainte globale de gradient constant est installée et joue le rôle de « rugosité » suivant la terminologie de la méthode DSI (voir annexe A, paragraphe A.2.1) ;
4. l'interpolation DSI permet de calculer la solution, c'est-à-dire la valeur de $t$ à tous les nœuds du volume.

Bien qu'exprimée sous forme d'une contrainte DSI, la contrainte de gradient constant représente bien une rugosité dans le cadre de DSI, car elle permet aux valeurs en un nœud d'influer sur les valeurs aux nœuds voisins. Cette relation a été démontrée théoriquement par R. Cognot (communication personnelle). De plus, elle a l'avantage de prendre en compte la géométrie des cellules autour d'un nœud.

La figure 3.1 illustre, sur un jeu de données non-faillées (fourni par Chevron), puis sur un autre jeu de données faillées (fourni par Total), le calcul du *temps* dans des volumes tétraédrisés.

### Origine des données

Plusieurs remarques peuvent être faites sur cet algorithme. D'abord, au niveau des données utilisées en entrée, l'algorithme ne mentionne que des horizons. Dans le cas le plus simple, on dispose en effet d'un modèle structural déjà construit dans lequel plusieurs surfaces triangulées, couvrant une grande partie du domaine d'étude et correspondant à des horizons majeurs, existent.

On peut aussi travailler depuis des données plus en amont, au stade de l'interprétation sismique. Dans ce cas, il est rare de disposer d'horizons complets, ceux-ci étant généralement construits à partir des données plus ou moins denses fournies par la sismique. Il est important de noter que cela ne pose aucun problème au niveau de la construction du paramètre *temps* : à partir du moment où on peut affecter une valeur initiale de $t$ à chaque fragment d'horizon, en affectant la même valeur aux différents fragments du même horizon, l'interpolation donnera des résultats cohérents. Ceci permet d'utiliser des données très précoces, issues par exemple d'extraction automatique d'horizons (voir par exemple [Labrunye, 2004]).

Enfin, si on se situe à l'inverse, plus en aval par rapport au modèle structural, c'est-à-dire que l'on a déjà commencé à intégrer des données sédimentologiques dans le modèle, ces données peuvent fournir des indications sur le *temps*. Ainsi, des corrélations effectuées entre puits voisins peuvent être considérées comme des isovaleurs de $t$. Le modèle Neptune

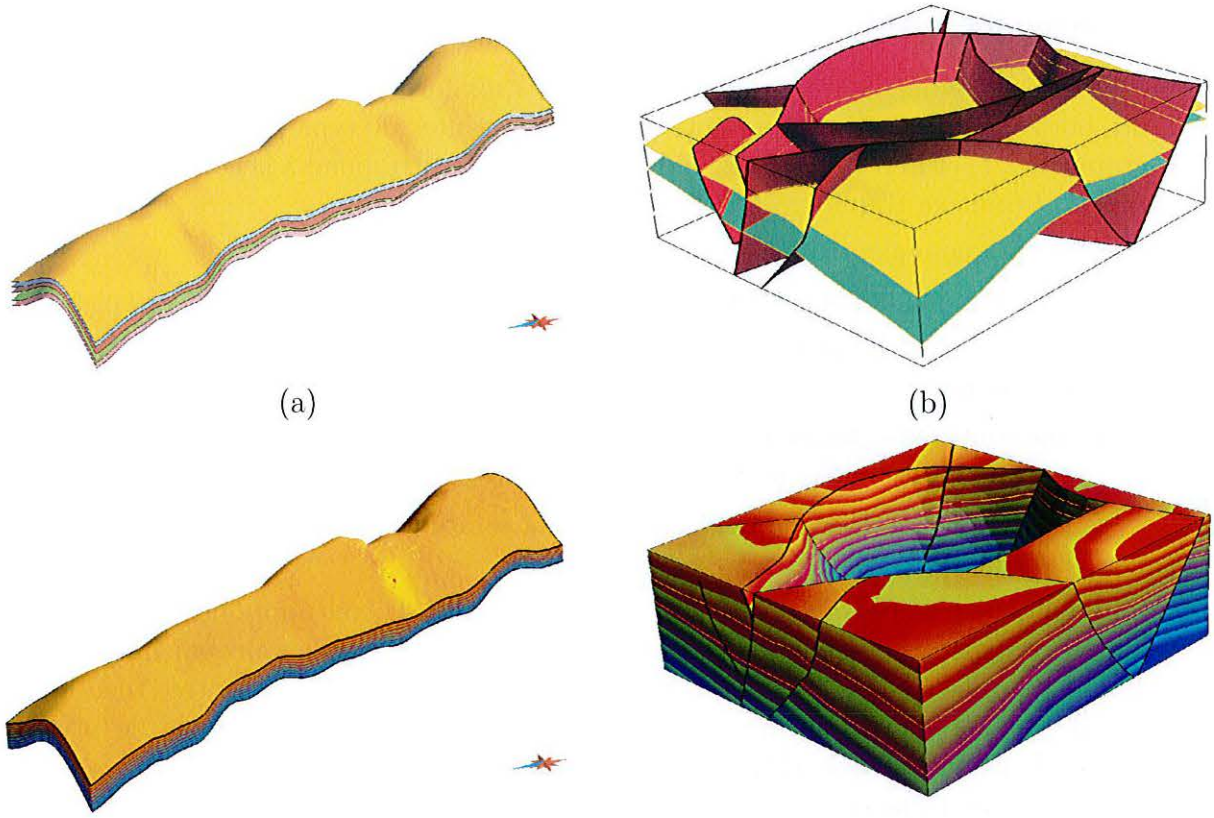



FIG. 3.1 : *Exemples de construction de la composante t de la paramétrisation. En haut, le modèle surfacique, en bas, le* temps *calculé sur un volume tétraédrisé. (a) : exemple non faillé (données Chevron). (b) : modèle faillé (données Total).*

(voir [Massonnat, 1999] pour une présentation théorique ou [Leflon et Massonnat, 2004] pour plus de détails) définit de telles corrélations et on peut intégrer les données résultantes sous forme de points de contrôle supplémentaires le long des puits. L'interpolation finale n'en sera que plus précise.

### Choix des valeurs initiales de $t$

Le principal problème de cet algorithme réside dans le choix des valeurs de $t$. En effet, la seule contrainte initiale sur ce paramètre est l'ordre que doivent respecter les valeurs sur des horizons d'âge géologique différent :

$$t_0 < t_1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \{H_{t_0} \text{ est plus âgé que } H_{t_1}\}$$

La solution idéale consisterait à choisir des valeurs de $t$ correspondant aux âges réels des terrains, mesurés depuis une référence arbitraire plus vieille que le plus vieux terrain inclus dans le modèle. De la sorte, on obtiendrait un espace paramétrique le plus identique possible à chaque couche au moment de sa formation. Malheureusement, il est très rare de connaître avec précision l'âge des différents terrains, en particulier dans les modèles de réservoirs, où l'échelle verticale est très petite.

Quelques tests simples montrent que toutes les valeurs ne sont pas réalistes. Ainsi, la figure 3.2 illustre un cas extrême, où des valeurs de $t$ mal choisies génèrent des aberrations. Dans cet exemple, le volume d'étude est un cube, dans lequel trois horizons parallèles et équidistants $H_0$, $H_1$ et $H_2$ sont définis. La succession des valeurs de $t$ ne respecte pas ces intervalles, l'écart $\Delta t_0 = t_1 - t_0$ entre les valeurs des deux premiers horizons étant bien plus faible que l'écart $\Delta t_1 = t_2 - t_1$ entre les valeurs des deux horizons suivants :

$$\left.\begin{array}{rcl} t_0 & = & 1 \\ t_1 & = & 2 \\ t_2 & = & 11 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} \Delta t_0 & = & 1 \\ \Delta t_1 & = & 9 \end{array}\right.$$

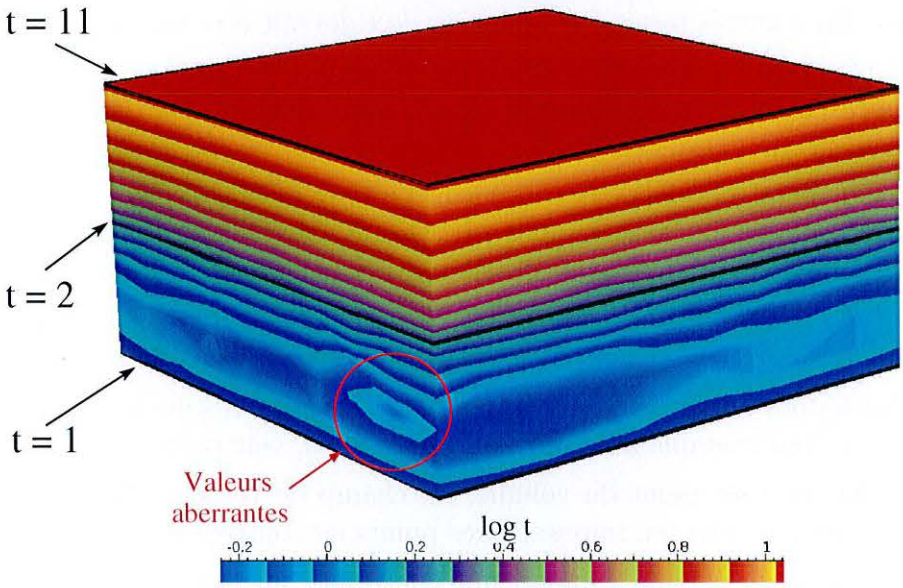



FIG. 3.2 : *Influence des valeurs initiales $t_i$ sur le calcul du* temps. *Des valeurs de $t$ constantes ($t_0 = 1$, $t_1 = 2$ et $t_2 = 11$) ont été affectées sur trois horizons parallèles, $H_0$, $H_1$ et $H_2$, puis le* temps *a été interpolé dans le volume. Le* temps, *représenté ici en échelle logarithmique pour mieux mettre en évidence les variations, est erroné entre $H_0$ et $H_1$, car il n'est pas toujours croissant (en particulier dans le cercle rouge). Cette erreur est engendrée par le trop grand écart entre $\Delta t_0$ et $\Delta t_1$ pour des couples d'horizons séparés de la même distance $\Delta h$.*

Le *temps* est bien interpolé entre les deux horizons supérieurs, mais entre les deux horizons inférieurs, l'exigence de continuité de la dérivée imposée par la contrainte de gradient constant provoque des valeurs inférieures à $t_0$ entre $H_0$ et $H_1$.

Cet exemple caricatural met en évidence le fait que le choix des valeurs de $t$ n'est pas anodin. Une autre approche du problème initial permet de proposer quelques pistes. En effet, l'interpolation de $t$ dans le volume peut être considérée comme similaire à un problème de diffusion : chaque horizon est analogue à une plaque le long de laquelle une température constante $t_i$ est imposée, la valeur de $t$ dans le volume correspondant à la position d'équilibre du système.

Cela nous a amené à considérer les techniques d'éléments finis pour résoudre ce problème. Des tests ont été effectués avec un code d'éléments finis développé au sein du laboratoire ([Voillemont, 2001]). Il est cependant difficile, avec ces méthodes, d'imposer la continuité du gradient de $t$ au travers des « plaques » : la solution est donc continue entre chaque paire d'horizons, mais le gradient n'est pas continu au niveau des horizons.

Cette vision du problème permet toutefois d'imaginer une contrainte supplémentaire. En effet, dans les problèmes de mécanique des fluides, on considère souvent le *laplacien* d'une fonction, dont la valeur sur un élément de volume est nulle sauf si cet élément contient une source ou un puits, c'est-à-dire une apparition ou disparition de la quantité considérée (voir par exemple [Lavau, 2004]). Dans notre cas, la continuité que nous voulons obtenir dans le volume traduit le fait qu'il ne devrait y avoir ni sources ni puits, en dehors des horizons. En d'autres termes, le laplacien de $t$ devrait être nul sur chaque tétraèdre.

Cependant, la formulation mathématique de cette contrainte est très lourde, car elle fait intervenir tous les tétraèdres partageant au moins un nœud avec le tétraèdre considéré, et son implémentation était très lente et n'était pas stable numériquement.

Le problème peut toutefois être contourné, en cherchant non pas à imposer une valeur donnée à priori sur chaque horizon, mais en essayant simplement d'obtenir une répartition des valeurs de $t$ la plus harmonieuse possible, en fixant la valeur du gradient de $t$. Ainsi, on aboutit à la méthode alternative suivante :

1. Le long d'un horizon de référence, fixer $t = t_0$, par le biais de points de contrôle ;
2. sur chacun des autres horizons, imposer $t =$ constante, sans fixer la valeur de cette constante (par exemple avec une *contrainte delta*, voir paragraphe B.2.2) ;
3. interpoler, en tout point du volume, un champ de vecteurs $\mathbf{N}(\mathbf{x})$ contraint à être normal aux horizons (en imposant des points de contrôle sur les horizons) ;
4. en tout point du volume, imposer une contrainte sur la norme du gradient de $t$, de type $\|\mathbf{grad}\ t\|.\mathbf{N} =$ constante, en fixant arbitrairement la valeur de cette constante (voir paragraphe B.3.1 pour la contrainte DSI correspondante) ;
5. enfin, imposer une contrainte sur la continuité du gradient, en remplacement de la rugosité standard de DSI.

### 3.1.2 Calcul global de $(u, v)$

Une fois la composante $t$ de la paramétrisation calculée, nous allons construire $u$ et $v$, c'est-à-dire les coordonnées paléo-géographiques.

Quelle que soit la méthode choisie, il est nécessaire de connaître un ensemble de valeurs de référence : de même que pour le *temps* une valeur $t_0$ était choisie arbitrairement (les autres valeurs pouvant être déduites de cette première valeur), il faut ici définir des valeurs initiales de $(u, v)$.

Ces valeurs initiales peuvent aussi être vues comme des « points de calage » des propriétés. Comme toutes les contraintes (continuité du gradient, mais aussi orthogonalité des gradients, etc.) s'appliquent sur les gradients de $u$, $v$ et $t$, seules les variations de ces

fonctions sont fixées et pas leurs valeurs. Pour les fixer, il faut fournir des valeurs exactes en au moins un point.

Dans le cas des coordonnées paléo-géographiques, nous fixons des valeurs initiales le long d'un horizon, appellé *horizon de référence*. Par la suite, le calcul dans le volume peut se faire de plusieurs manières. Nous en proposons deux dans ce chapitre, la première (paragraphe 3.2) se base sur les lignes iso-paléo-géographiques, la deuxième (paragraphe 3.3) sur des contraintes DSI globales. Dans le paragraphe qui suit, nous discutons uniquement du choix de l'horizon de référence et de sa paramétrisation.

### Choix d'un horizon de référence

Le choix de cet horizon de référence n'est pas neutre. D'un point de vue numérique, il est important que cet horizon couvre au mieux la plupart des blocs de faille du domaine. En effet, alors que la continuité des propriétés au sein d'un bloc est fortement garantie par la contrainte de gradient constant, la continuité au travers des failles est plus complexe à imposer. Le chapitre suivant propose une méthode de modélisation des rejets permettant d'ajouter cette continuité mais, même si les rejets sont connus, la convergence est bien plus longue et moins stable en l'absence de points de donnée dans un bloc.

Il est à noter que l'horizon de référence n'est pas obligatoirement un horizon initial du modèle surfacique. En effet, à partir du moment où le *temps* est modélisé, n'importe quelle surface d'isovaleur de $t$ correspond à un horizon, au sens « un ensemble de points formés au même moment ». En conséquence, on peut sélectionner une surface d'isovaleur de $t$ qui couvre tout le domaine, si aucun horizon initial n'est satisfaisant.

D'autre part, nous verrons que dans le cadre de l'étude des déformations (paragraphe 5.2), l'horizon de référence définit la *fibre neutre* du modèle et sa position a donc une influence sur le tenseur de déformation calculé au final.

D'un point de vue algorithmique, toutes les méthodes présentées ici sont indépendantes du choix de l'horizon de référence.

### Paramétrisation d'un horizon de référence

Afin de fixer les valeurs initiales de $u$ et $v$, on utilise une paramétrisation 2D de l'horizon de référence. Le problème est alors similaire à celui de la paramétrisation initiale d'une surface dans le cadre de la construction des grilles stratigraphiques par extrusion (paragraphe 1.2.2). Pour cela, plusieurs méthodes sont disponibles et nous avons utilisé la méthode LSCM (*Least Square Conformal Mapping*), présentée par B. Lévy ([Lévy *et al.*, 2002]). La paramétrisation ainsi obtenue respecte les deux contraintes suivantes :

1. les lignes de coordonnées (c'est-à-dire les lignes d'isovaleur de $u$ et de $v$) sont perpendiculaires en tout point de la surface ;
2. les « cellules » formées par des lignes de coordonnées équidistantes sont de taille similaire.

Ces deux contraintes peuvent se formuler de manière plus mathématique :

1. $\mathbf{grad}\ u \perp \mathbf{grad}\ v$
2. $\|\mathbf{grad}\ u\| = \|\mathbf{grad}\ v\|$

Le paragraphe 3.3.2 montre comment ces deux relations simples peuvent être exprimées sous forme de contraintes DSI. Cette paramétrisation est donc facile à calculer, sur une surface, avec l'interpolateur DSI (il est uniquement nécessaire de fixer la valeur de la paramétrisation en un point, pour les raisons évoquées plus haut à propos du calcul volumique) et donne de très bons résultats (figure 3.3).

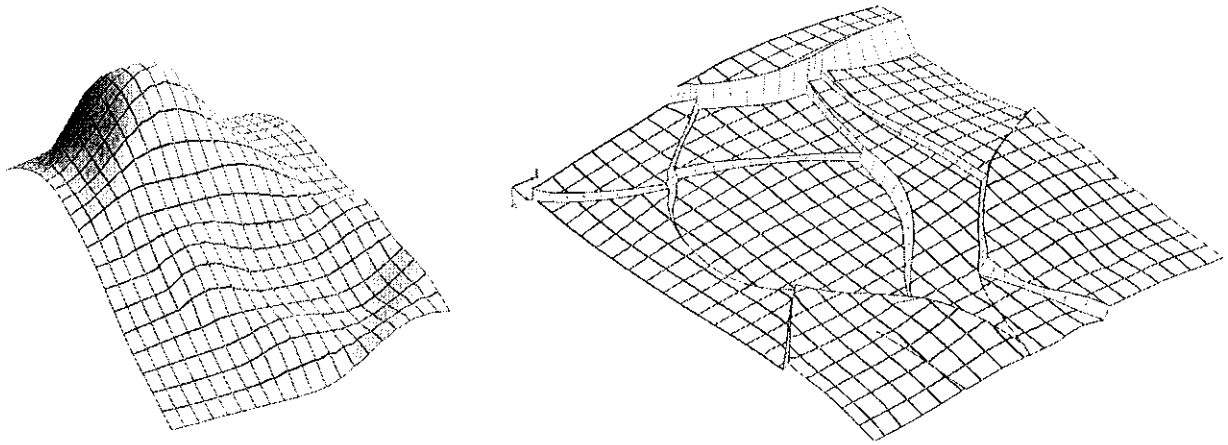


FIG. 3.3 : *Paramétrisation 2D par* conformal mapping *de surfaces triangulées. La paramétrisation est figurée par les lignes d'isovaleurs de $u$ (en rouge) et de $v$ (en vert). À gauche, exemple d'une surface fortement plissée, noter les distorsions des lignes dans les zones non dépliables et de forte courbure. À droite, exemple d'une surface faillée, la paramétrisation est mise en cohérence entre les différents blocs grâce aux liens vectoriels (traits oranges, voir chapitre 4 pour plus de détails).*

Il est à noter qu'une contrainte supplémentaire peut être ajoutée sur la paramétrisation, afin d'assurer que les cellules définies par des lignes de coordonnées équidistantes sont non seulement de taille constante, mais sont en plus de taille unitaire. En d'autre termes :

$$\|\mathbf{grad}\ u\| = 1 \qquad \text{et} \qquad \|\mathbf{grad}\ v\| = 1$$

Dans ce cas, la paramétrisation obtenue est dite *isométrique* (voir [Samson, 1996] et [Mallet, 2002] ou [Massot, 2002] pour des applications dans le domaine du dépliage surfacique). Cette contrainte est cependant plus difficile à imposer sous forme de contrainte DSI.

J.-L. Mallet a montré récemment ([Mallet, 2005]) que la paramétrisation isométrique est telle que la déformation nécessaire pour passer de la surface réelle à son image dans l'espace paramétrique est minimale. Comme on considère en général que le chemin de moindre effort est privilégié dans les processus naturels, cette paramétrisation peut donc être considérée comme un bon indicateur pour le dépliage d'une surface.

### 3.1.3 Le choix d'un support

Nous avons vu dans le premier chapitre que la construction d'une paramétrisation et ultérieurement son utilisation dans le cadre de la modélisation des propriétés pétrophysiques étaient théoriquement indépendantes du maillage choisi pour porter cette paramétrisation. De plus, le modèle théorique présenté au chapitre 2 est lui aussi indépendant du type de maillage.

En pratique cependant, les caractéristiques des différents maillages ne sont pas neutres, et dans un premier temps différents essais dans des cas simplifiés ont été réalisés afin de déterminer quel type de maillage serait le plus adapté.

#### Les grilles structurées

L'idée initiale a été d'utiliser les maillages les plus faciles à construire, c'est-à-dire des grilles structurées régulières, de type « Voxet ».

Ces grilles ont l'avantage d'être extrêmement faciles à construire, quel que soit le modèle initial. Il s'agit aussi du type de maillage le plus léger en mémoire, puisque la géométrie tout comme les voisinages de chaque nœud sont reconstruits à partir des coordonnées de l'origine et des trois axes. De plus, la résolution du maillage est très facile à adapter à la taille de n'importe quel objet. Basé sur des algorithmes bien rodés de discrétisation de lignes (comme l'algorithme de Bresenham, voir par exemple [Thobie, 1994]) les premiers essais avec ces grilles, sur des cas simples, ont donné de bons résultats (figure 3.4).

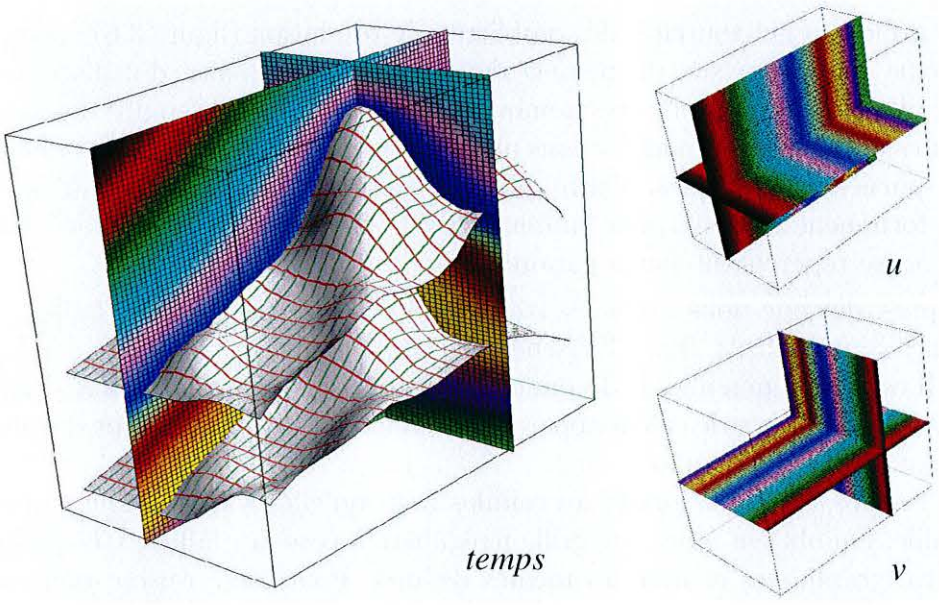



FIG. 3.4 : *Paramétrisation GeoChron calculée sur une grille structurée régulière (« Voxet »). À gauche, les deux horizons initiaux, peints avec des lignes d'isovaleur de $u$ et $v$ ainsi que le paramètre $t$ dans le volume; à droite, les composantes $u$ et $v$ dans le volume. L'horizon du bas a été utilisé comme horizon de référence pour $(u, v)$.*

La figure 3.5 illustre les résultats d'un modèle de propriété calculé dans une telle grille (voir paragraphe 5.1 pour les détails de la méthode utilisée).

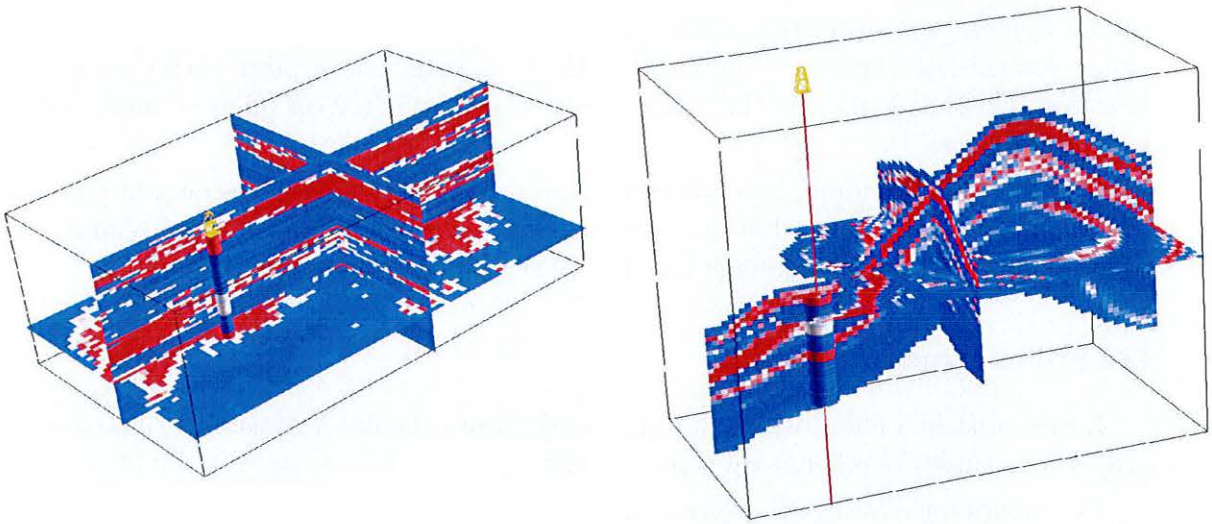


FIG. 3.5 : *Visualisation d'une simulation de propriété pétrophysique sur une grille structurée régulière de l'espace géologique. À gauche, une propriété a été simulée à partir des données de puits, dans l'espace paramétrique. À droite, cette propriété est peinte sur le modèle géologique, en respectant la paramétrisation (voir paragraphe 5.1 pour la méthode de transfert).*

Ces grilles posent toutefois des problèmes de résolution (figure 3.6) : si on veut obtenir une bonne résolution sur un modèle donné, il est nécessaire d'utiliser des cellules de petite taille, qui seront donc très nombreuses. En outre, la différence d'échelle suivant les différentes directions du modèle (dans un modèle de réservoir, l'extension horizontale peut être de plusieurs kilomètres, contre quelques mètres verticalement) amène à utiliser des cellules fortement aplaties, pour limiter le nombre de cellules horizontales. Ces distorsions de cellules se répercutent sur la paramétrisation calculée.

De plus, dès que nous avons essayé de modéliser des réseaux de failles, de nombreux problèmes sont apparus, dûs à l'absence de représentation particulière des failles dans ces grilles. Il est certes possible de déconnecter les nœuds de part et d'autre d'une faille, mais de nombreux artefacts de calcul apparaissent alors. Une solution serait d'utiliser une grille hybride au niveau des failles :

- Il est possible de déformer les cellules pour qu'elles soient plaquées aux surfaces de faille. On obtient alors une grille irrégulière à côté des failles, très proche des grilles stratigraphiques et avec les mêmes défauts. Pour cette raison, nous avons éliminé cette solution.
- Il est aussi possible d'envisager de diviser les cellules découpées par les failles en plusieurs cellules polyédriques, de telle sorte que la faille apparaisse dans la grille comme un ensemble de nœuds découplés et qu'aucune cellule ne soit traversée par une faille. La grille obtenue est un maillage partiellement non-structuré.

La deuxième solution semblait la plus prometteuse, mais ce type de maillage n'étant pas implémenté dans le géomodeleur GOCAD, il nous a paru plus simple d'utiliser dans

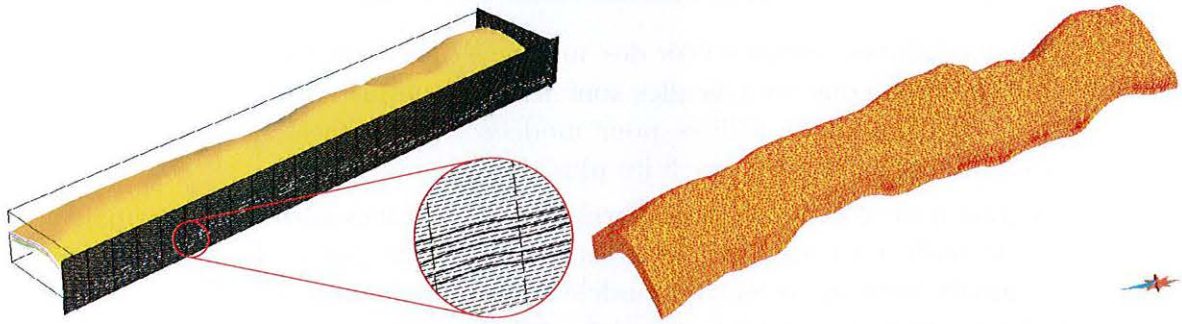


FIG. 3.6 : *Modèle surfacique englobé dans un maillage structuré régulier (un « Voxet », à gauche) et dans un maillage tétraédrisé non structuré (à droite). Pour garder un faible nombre de cellules au total (ici, de l'ordre de 10 000), les cellules de la grille régulière sont d'amplitudes très différentes verticalement et horizontalement, comme le montre le détail du cercle rouge, ce qui induit des erreurs de calcul. Un modèle aussi fin dans toutes les directions aurait de l'ordre du million de cellules. En comparaison, le modèle tétraédrisé permet d'obtenir la même résolution, en se limitant au strict volume d'intérêt, avec environ 12 000 tétraèdres (données Chevron).*

tout le volume un maillage non-structuré, qui n'a pas les problèmes de résolution d'une grille régulière.

Au final, il apparaît donc que, lorsqu'on utilise des grilles structurées, la correction des différentes erreurs ou imperfections amène progressivement à se rapprocher soit d'une grille stratigraphique, sans pour autant corriger ses défauts, soit d'un maillage non-structuré, qui est le plus à même de respecter les contraintes géométriques du modèle.

On pourra toutefois noter que l'utilisation de grilles stratigraphiques n'est pas totalement à exclure. En effet, dans le cas où une telle grille a déjà été construite pour d'autres raisons (par exemple lorsqu'une étude précédente est reprise), on peut l'utiliser comme support pour construire une paramétrisation GeoChron. En allant plus loin, on peut même utiliser la paramétrisation implicite $(i, j, k)$ de ces grilles comme valeurs initiales de la paramétrisation GeoChron. Il est alors possible d'obtenir très rapidement un premier modèle GeoChron, qui se contentera de corriger les erreurs de la grille au voisinage des failles.

Si le point de départ de l'étude est un modèle surfacique et non pas une grille déjà construite, il est cependant préférable de construire directement un maillage volumique qui respecte parfaitement les interfaces, plutôt que de passer par une grille structurée imparfaite.

### Les maillages non-structurés

L'utilisation de maillages non-structurés répond au mieux à l'objectif initial que nous nous étions fixé, à savoir séparer sur trois objets différents d'une part la géométrie du réseau de failles, d'autre part la paramétrisation stratigraphique et enfin le modèle de propriété.

En effet, étant libéré de toute contrainte sur les relations entre cellules, il est possible d'adapter le maillage à n'importe quelle géométrie discrète, aussi fine soit-elle.

Nous nous sommes orientés vers des maillages non-structurés irréguliers formés de tétraèdres. De même que les triangles sont les plus simples des éléments de dimension topologique 2 et sont donc utilisés pour modéliser les surfaces, les tétraèdres sont les éléments de dimension topologique 3 les plus simples.

La création d'un volume tétraédrisé respectant certaines surfaces (principalement les failles) est un problème complexe, que nous ne détaillerons pas ici. Le travail de F. Lepage ([Lepage, 2003]), dont un aspect (le modèle macro-topologique *Soft Frame Model*) a été présenté dans la première partie (paragraphe 1.2.1), contient aussi un code que nous avons réutilisé, permettant la génération d'un volume tétraédrisé sous contraintes.

Enfin, la visualisation de ces maillages est plus complexe que celle des maillages structurés. En effet, sur une grille structurée, il est facile de représenter, par exemple, tous les points situés sur une section d'isovaleur de $i$, $j$ ou $k$ (les coordonnées de la paramétrisation implicite). On obtient alors une image de la répartition de n'importe quelle propriété au cœur du domaine d'étude, le long de surfaces géologiquement significatives. Comme il n'existe pas de paramétrisation implicite dans les maillages non-structurés, cette approche n'est pas possible. Nous avons donc utilisé des outils de visualisation en cours de développement par T. Frank ([Frank, 2004], [Frank, 2005]), spécifiquement adaptés à ces volumes et au modèle GeoChron.

Par la suite, lorsque nous parlerons de la paramétrisation GeoChron, nous considérerons uniquement les maillages tétraédriques construits et explorés grâce à ces outils.

## 3.2 Approche locale : les lignes Iso-Paléo-Géographiques

La première méthode de construction d'une paramétrisation GeoChron que nous avons implémentée se base sur les lignes Iso-Paléo-Géographiques ou lignes IPG, qui ont été introduites dans le chapitre précédent (paragraphe 2.1.1 et figure 2.5). Après une présentation du principe de la méthode, quelques indications sur l'implémentation informatique et ses difficultés seront données. Enfin, nous montrerons l'intérêt des lignes IPG dans le cadre de l'édition d'une paramétrisation GeoChron.

### 3.2.1 Principe de la méthode

Nous avons vu que les lignes IPG se définissent comme des lignes le long desquelles les coordonnées paléo-géographiques $(u, v)$ sont constantes et seul $t$ varie. L'image de ces lignes dans l'espace paramétrique $\overline{G}$ est donc une ligne verticale.

Si on arrive à modéliser ces lignes, en tout point du domaine, alors il suffit de connaître les valeurs de $(u, v)$ en un point de chaque ligne, pour avoir des valeurs dans tout le domaine. Ainsi, si les coordonnées paléo-géographiques $(u, v)$ sont connues sur un horizon suffisamment étendu, des valeurs de $u$ et $v$ pourront être propagées en un grand nombre de points du volume. Ensuite, une interpolation en utilisant ces valeurs comme points de contrôle permettra d'obtenir une solution globale.

En résumé, la méthode se présente ainsi :

1. choisir un horizon de référence, qui couvre au mieux le domaine d'étude (en particulier cet horizon devrait être présent dans chaque bloc de faille) ;
2. construire une paramétrisation 2D $(u, v)$ sur cet horizon, en utilisant par exemple le *conformal mapping* décrit plus haut ;
3. construire dans le volume un champ de lignes IPG qui croisent l'horizon ;
4. affecter en tout point de chaque ligne IPG les valeurs de $u$ et $v$ au point d'intersection de cette ligne avec l'horizon ;
5. utiliser l'ensemble des valeurs affectées sur les lignes IPG comme points de contrôle DSI ;
6. interpoler la solution finale en tout point du domaine d'étude.

La principale difficulté de cet algorithme réside dans le troisième point, la construction du champ de lignes IPG.

### Approximation des lignes IPG

À priori, la géométrie de chaque ligne IPG est inconnue. Cependant, on peut remarquer que ces lignes semblent en général être perpendiculaires aux différents horizons $H_t$ qu'elles croisent. Nous avons vu dans le paragraphe 2.3.2 que cela n'était pas vrai tout le temps, en particulier lorsque le style de déformation incluait du *flexural slip*.

Cependant, la figure 2.7 illustre un cas extrême, où la déformation est très importante et uniquement accommodée par un glissement banc sur banc. De plus, un des côtés du volume étant fixé, toute la déformation s'est concentrée sur l'autre côté. Dans les cas réels, les différents effets ont une influence bien plus faible et, en première approximation, on peut négliger ce glissement.

Il est toutefois important de conserver cette hypothèse en mémoire, car elle n'est pas forcément valide dans tous les cas. Nous proposons donc aussi quelques pistes qui permettront d'altérer le champ de lignes créées, de telle sorte qu'une composante de *flexural slip* soit ajoutée.

Par la suite, nous désignerons les lignes tracées suivant cette hypothèse comme des *fibres*, pour les différencier des véritables lignes IPG. Cette dénomination met aussi en évidence le parallèle faisable entre ces lignes et les fibres utilisées dans la construction des grilles régulières (paragraphe 1.2.2).

Les fibres que nous allons suivre sont donc perpendiculaires, en tout point du volume, à l'horizon passant par ce point. Or cet horizon est défini comme une surface d'isovaleur du paramètre $t$, déjà calculé. En conséquence, les fibres doivent, en tout point, être colinéaires au vecteur $\mathbf{grad}\ t$.

Le problème de la construction d'un champ de fibres se ramène donc au problème du suivi de lignes dans un champ de vecteurs.

### Tracé de lignes dans un champ de vecteurs par la méthode semi-analytique de Pollock

Ce problème est assez courant en physique, puisque le *temps* peut être considéré comme un potentiel et les fibres comme des lignes de courant de ce potentiel. Dans le domaine géologique, cela concerne par exemple le suivi de lignes de courant ou *streamlines*, dans un champ de pression (un état des lieux sur la simulation par lignes de courant se trouve dans [Thiele, 2001] et on pourra se reporter à [Voillemont, 2001] pour un exemple d'utilisation).

Plusieurs méthodes numériques existent pour résoudre ce problème. Dans le cadre des *streamlines*, une des plus utilisées est la méthode de Pollock ([Pollock, 1988]). Elle consiste à considérer que, dans une cellule cubique, le champ de vitesse en tout point peut se décomposer indépendamment en fonction des vitesses aux deux faces opposées, sur les trois axes (figure 3.7). Ainsi, le vecteur vitesse $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$ au point $(x, y, z)$ à l'instant $\tau_1$ peut s'exprimer comme :

$$\begin{aligned} v_x(\tau_1) &= A_x.(x - x_1) + v_{x_1} \\ v_y(\tau_1) &= A_y.(y - y_1) + v_{y_1} \\ v_z(\tau_1) &= A_z.(z - z_1) + v_{z_1} \end{aligned}$$

où $x_1$, $y_1$ et $z_1$ représentent les coordonnées des faces de la cellule et $A_x$, $A_y$ et $A_z$ les gradients de vitesse entre les faces :

$$\begin{aligned} A_x &= \frac{v_{x_2} - v_{x_1}}{\Delta x} \\ A_y &= \frac{v_{y_2} - v_{y_1}}{\Delta y} \\ A_z &= \frac{v_{z_2} - v_{z_1}}{\Delta z} \end{aligned}$$

En utilisant une méthode d'intégration directe pour calculer le mouvement d'une particule entre les temps $\tau_1$ et $\tau_2$, Pollock a montré que la position d'une particule au temps $\tau_2$ est :

$$\begin{aligned} x(\tau_2) &= x_1 + \frac{v_x(\tau_1).e^{A_x.(\tau_2 - \tau_1)} - v_{x_1}}{A_x} \\ y(\tau_2) &= y_1 + \frac{v_y(\tau_1).e^{A_y.(\tau_2 - \tau_1)} - v_{y_1}}{A_y} \\ z(\tau_2) &= z_1 + \frac{v_z(\tau_1).e^{A_z.(\tau_2 - \tau_1)} - v_{z_1}}{A_z} \end{aligned}$$

En choisissant un pas de temps donné $\Delta\tau = \tau_2 - \tau_1$, on peut donc construire la trajectoire d'une particule donnée. Dans les problèmes d'écoulements, les vitesses sur les différentes faces sont calculées à partir de la loi de Darcy (seule $v_{x_1}$ est donnée ici, les

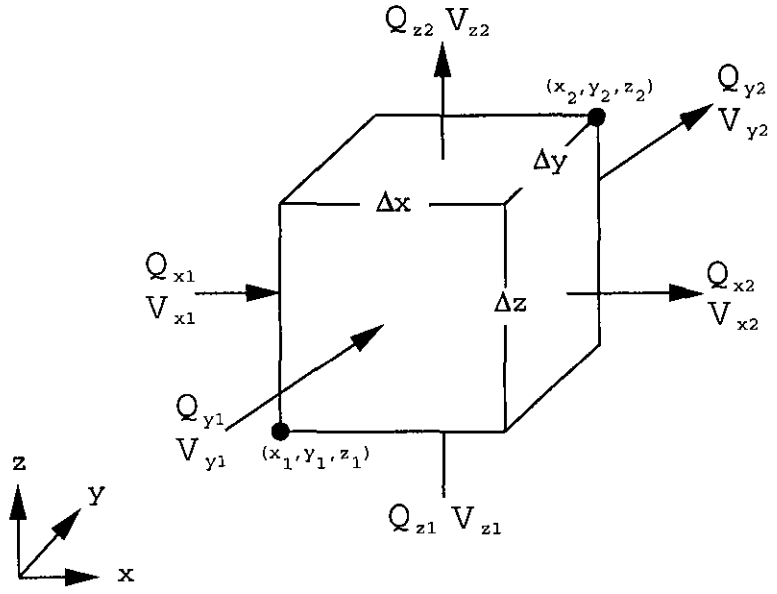



FIG. 3.7 : *Notations utilisées dans le cadre de la méthode de tracé de particules de Pollock. Les $Q_{x_1}\ldots$ se réfèrent au débit au travers des faces ([Voillemont, 2001], p. 36).*

autres ont des expressions similaires) en utilisant une porosité $\phi$ ainsi que le débit $Q_{x_1}$ (voir figure 3.7 pour les notations) :

$$v_{x_1} = \frac{Q_{x_1}}{\phi.\Delta y.\Delta z}$$

Dans le cas qui nous intéresse, c'est-à-dire le suivi du gradient du *temps*, on peut considérer que le vecteur **grad** $t$ représente directement le vecteur vitesse. On a donc directement, en faisant la moyenne sur les faces considérées, les valeurs de $v_{x_1} = \mathbf{grad}\ t(x_1)$, $v_{x_2} = \mathbf{grad}\ t(x_2)$, $v_{y_1} = \mathbf{grad}\ t(y_1)\ldots$ et donc les expressions des coefficients $A_i$.

Cette méthode est numériquement très stable, mais elle fonctionne principalement sur des grilles régulières structurées, comme l'illustre la figure 3.7. Des extensions ([Prévost *et al.*, 2001]) ont permis de l'adapter à des grilles non régulières, de type grilles stratigraphiques, en utilisant la paramétrisation de ces grilles, et même sur des grilles non structurées, à base de tétraèdres. Cependant, nous avons préféré des méthodes numériques plus simples et plus adaptées à ce type de support.

### Tracé de lignes de courant par la méthode numérique de Runge-Kutta

Plusieurs méthodes numériques permettent de reconstituer la trajectoire d'une particule dans un champ de vitesse défini aux nœuds d'un maillage quelconque. La plus simple est la méthode dite d'Euler, où le point suivant $\mathbf{x}(\alpha+1)$ d'une ligne de courant est déterminé à partir du vecteur vitesse $\mathbf{v}(\alpha)$ au point précédent $\mathbf{x}(\alpha)$ et d'un pas d'échantillonnage $dl$ :

$$\mathbf{x}(\alpha+1) = \mathbf{x}(\alpha) + \frac{\mathbf{v}(\alpha)}{\|\mathbf{v}(\alpha)\|}.dl$$

Le pas d'échantillonnage $dl$ peut être constant, pour avoir des points équidistants, ou variable, par exemple en se basant sur un pas de temps constant $d\tau$ et en calculant le pas d'échantillonnage $dl$ en fonction de la vitesse en chaque point : $dl = \|\mathbf{v}(\alpha)\|.d\tau$. On obtient alors des points espacés régulièrement dans le temps. Dans notre cas, la notion de temps n'a pas de sens et nous utiliserons des pas d'espace constants.

Cette méthode est très simple et très rapide, mais elle est peu stable numériquement, en particulier lorsque le champ de vitesse (ou, dans notre cas, le champ de **grad** $t$) varie très fortement localement. En effet, comme l'estimation de la trajectoire ne se fait qu'au point de départ, les résultats ne tiennent pas compte de l'évolution du champ de vitesse entre deux points successifs.

On préfère donc utiliser la méthode de Runge-Kutta (voir par exemple [Enright *et al.*, 1994] ou [Press *et al.*, 1992] pour des détails sur l'implémentation numérique) qui peut être vue comme un perfectionnement de la méthode d'Euler par itérations (figure 3.8).

Si on considère deux points successifs le long de la fibre $\mathbf{x}(s)$ et $\mathbf{x}(s+h)$, la forme d'Euler indique :

$$\mathbf{x}(s+h) = \mathbf{x}(s) + h.\mathbf{T}(\mathbf{x})$$

où $\mathbf{T}(\mathbf{x})$ représente la dérivée au point $\mathbf{x}$, c'est-à-dire le vecteur tangent à la fibre en $\mathbf{x}$ :

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}) = \frac{d\mathbf{x}}{ds}$$

La forme classiquement utilisée, à l'ordre quatre, de la méthode de Runge-Kutta passe par une suite d'estimations de la dérivée à des points médians dans l'intervalle considéré. Cette estimation s'écrit :

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_1(\mathbf{x},h) &= h.\mathbf{T}(\mathbf{x}) \\
\mathbf{K}_2(\mathbf{x},h) &= h.\mathbf{T}(\mathbf{x}+1/2.\mathbf{K}_1(\mathbf{x},h)) \\
\mathbf{K}_3(\mathbf{x},h) &= h.\mathbf{T}(\mathbf{x}+1/2.\mathbf{K}_2(\mathbf{x},h)) \\
\mathbf{K}_4(\mathbf{x},h) &= h.\mathbf{T}(\mathbf{x}+\mathbf{K}_3(\mathbf{x},h)) \\
\mathbf{x}(s+h) &= \mathbf{x}(s) + 1/6\Big(\mathbf{K}_1(\mathbf{x},h) + 2.\mathbf{K}_2(\mathbf{x},h) + 2.\mathbf{K}_3(\mathbf{x},h) + 6.\mathbf{K}_4(\mathbf{x},h)\Big)
\end{aligned}$$

Comme cette méthode prend en compte les valeurs intermédiaires du champ de vitesses pour déterminer le point suivant, elle est nettement plus stable que la méthode d'Euler, en particulier lorsque l'orientation du champ de vitesse varie rapidement. En contre-partie, elle est plus lente, car elle nécessite de calculer les dérivées intermédiaires. Cependant, nous ne construirons qu'un nombre limité de fibres et le gain de stabilité est tel que cette méthode est de très loin préférable à la méthode d'Euler.

La méthode de Runge-Kutta fournit un échantillonnage à pas d'espace constant le long des fibres. Nous avons donc uniquement à déterminer ce pas d'échantillonnage. Comme les points des fibres servent ensuite de points de contrôle dans une interpolation DSI, il faut essayer d'avoir au moins un point de contrôle par tétraèdre traversé, pour contraindre au mieux l'interpolation. En revanche, bien qu'il ne soit pas utile d'avoir plus d'un point par tétraèdre, car cela ralentit inutilement l'interpolation, cela n'est pas très gênant, en

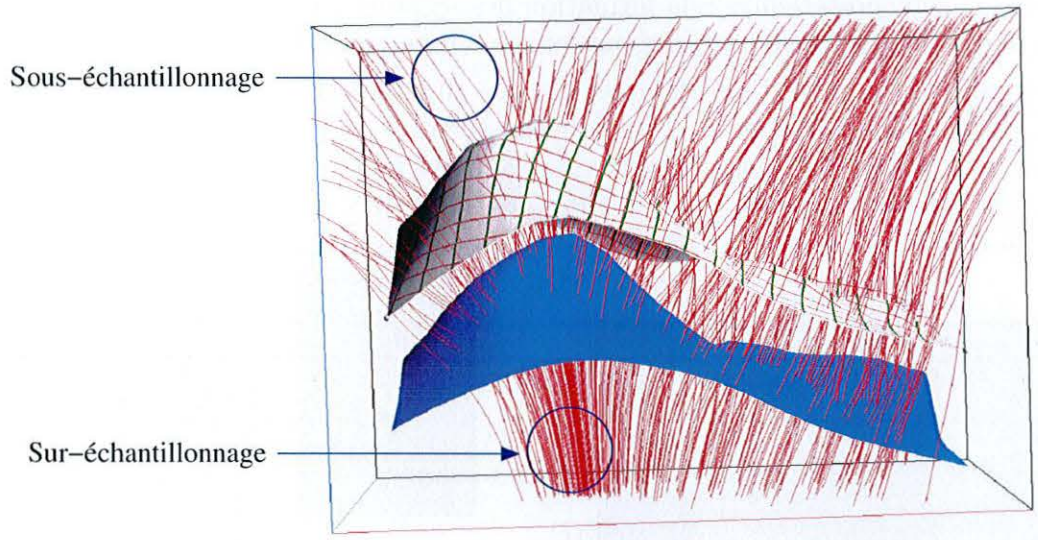



FIG. 3.8 : *Champ de fibres extraites depuis un horizon de référence par la méthode de Runge-Kutta. Une paramétrisation par* conformal mapping *(représentée par les lignes d'iso-valeur de $u$ et $v$ rouges et vertes) est calculée sur l'horizon de référence (en haut) et sera propagée dans le volume le long des fibres. La densité des fibres est très variable suivant la position dans le volume et dépend de la courbure de l'horizon de référence.*

particulier lorsque ces points sont cohérents, ce qui est le cas ici. En conséquence, on choisira comme distance d'échantillonnage $h$ une distance telle qu'on trouve au moins un point par tétraèdre.

Dans un maillage tétraédrique, les tétraèdres peuvent avoir des tailles très différentes suivant les endroits, il n'est donc pas possible de calculer rapidement une longueur $h$ qui soit satisfaisante en tout point du volume. On peut cependant considérer qu'en prenant une distance $h$ de l'ordre de 1% de l'extension verticale totale du modèle, on aura un résultat satisfaisant, car il est rare que les modèles aient plus de quelques dizaines de tétraèdres d'épaisseur. En pratique, l'utilisateur peut définir le nombre approximatif de points souhaités le long de la fibre, et le pas $h$ en est déduit à partir de l'extension verticale totale du modèle.

### Le problème des failles

La méthode de construction de fibres en suivant le gradient de $t$ est très similaire aux méthodes d'extrusion de fibres utilisées dans la construction des grilles stratigraphiques (paragraphe 1.2.2 et [Souche, 2005]). Cependant, nous avons à traiter ici un problème supplémentaire, concernant les failles.

En effet, les fibres utilisées pour construire des grilles structurées ne croisent jamais les failles, par définition, puisque les empilements de cellules s'appuient dessus. À l'inverse, dans notre cas, la paramétrisation GeoChron n'est pas construite à partir des failles,

puisque celles-ci sont postérieures à la formation des terrains qu'elles affectent. En conséquence les lignes IPG, et donc les fibres qui les modélisent, peuvent croiser les failles.

Si on considère une ligne IPG coupant une faille (figure 3.9) :

- dans l'espace paramétrique $\overline{G}$, cette ligne est verticale et la faille n'existe pas encore (on peut toutefois représenter la trace future de la faille) ;
- dans l'espace géologique $G$, la faille a décalé les terrains et la ligne IPG est maintenant discontinue, les deux extrémités étant décalées suivant le vecteur rejet.

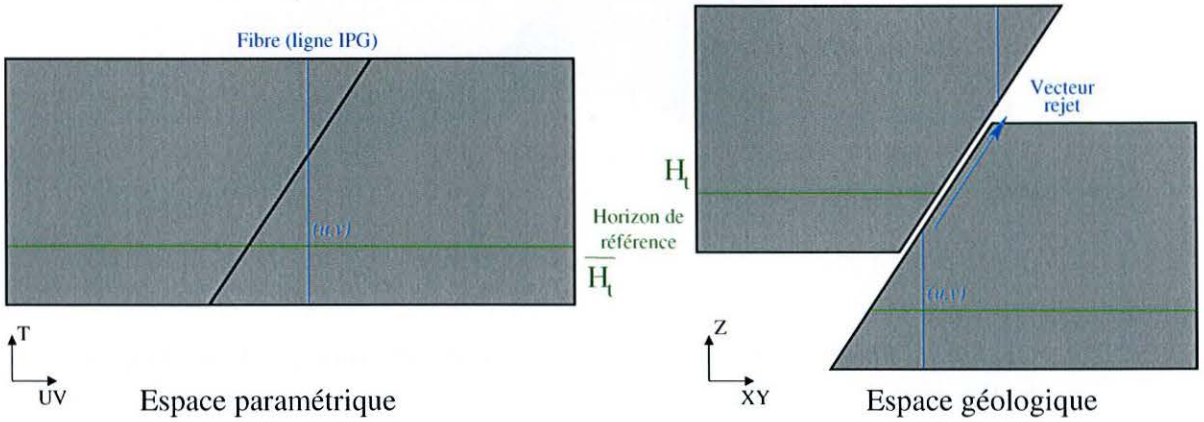



FIG. 3.9 : *Principe de tracé des fibres au travers d'une faille. À gauche, une fibre (en bleu) extraite en un point $(u, v)$ sur l'horizon de référence $H_t$ ($\overline{H_t}$ dans l'espace paramétrique, en vert) apparaît dans l'espace paramétrique comme une ligne verticale, car c'est une ligne IPG. Son image dans l'espace géologique (à droite) est quant à elle décalée suivant le rejet de la faille.*

Il est donc nécessaire, pour suivre une ligne IPG ou une fibre au travers d'une faille (figure 3.10), de connaître le rejet de cette faille. Plusieurs méthodes existent. Dans un premier temps, nous avons utilisé une méthode développée par L. Souche ([Souche, 2005]) qui se base sur la géométrie de la trace des horizons sur les failles. Dans un deuxième temps, nous avons développé une méthode plus générale et plus exacte, qui fera l'objet du prochain chapitre. Cette méthode se base sur le paramètre *temps* et permet de calculer géométriquement un vecteur rejet en tout point d'une faille.

### 3.2.2 Mise en place de l'algorithme et implémentation

En résumant les étapes décrites précédemment, on obtient l'algorithme d'extraction de failles suivant :

1. Modéliser le *temps*, en utilisant par exemple la méthode décrite dans le paragraphe 3.1.1 (ou toute autre méthode).
2. Calculer, sur chaque tétraèdre, le vecteur gradient du *temps* **grad** $t$. Comme ce vecteur sera utilisé de nombreuses fois, il est plus efficace de le calculer une seule fois au début et de le stocker en mémoire.
3. Choisir un horizon de référence (soit un horizon du modèle surfacique initial, soit une surface d'isovaleur de $t$) de telle sorte qu'il couvre au mieux le domaine d'étude.

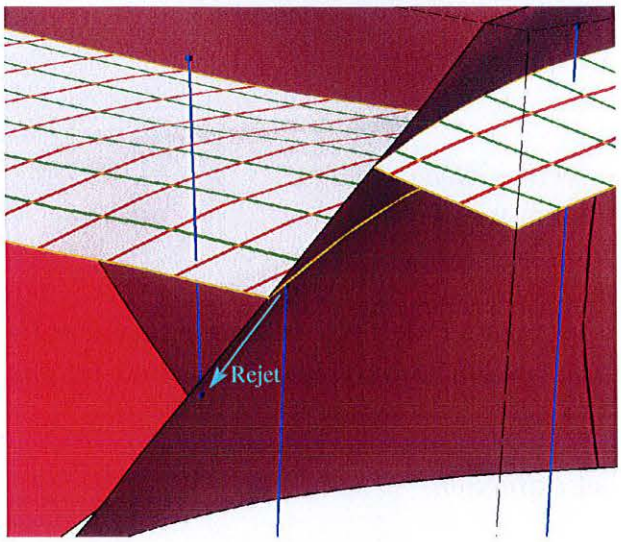



FIG. 3.10 : *Fibre intersectant une faille et décalée suivant le vecteur rejet. Les fibres bleues sont extraites depuis l'horizon de référence sur lequel une paramétrisation initiale a été définie (lignes rouges et vertes). À droite, une autre fibre, non affectée par les failles.*

4. Construire une paramétrisation 2D $(u^\star, v^\star)$ sur cet horizon, par exemple par la méthode de *conformal mapping* décrite plus haut.
5. Choisir un ensemble de points d'extraction des fibres sur cet horizon, ainsi qu'un pas d'échantillonnage $h$.
6. Pour chaque point d'extraction $P_i$ de coordonnées paramétriques sur la surface $(u_i^\star, v_i^\star)$, construire la fibre correspondante en utilisant la méthode de Runge-Kutta en suivant le champ de **grad** $t$. Affecter la valeur $(u_i^\star, v_i^\star)$ à tous les points de la fibre.
7. Utiliser toutes les valeurs de $(u^\star, v^\star)$ définies sur les fibres pour interpoler la solution finale $(u, v)$ sur tous les nœuds.

### Découpage des fibres par les failles

Dans le cas où le volume est faillé, les fibres doivent prendre en compte ces failles, grâce au vecteur rejet. En pratique, l'algorithme suivant est utilisé :

1: $\mathcal{D} \leftarrow$ domaine d'étude tétraédrisé
2: $h \leftarrow$ pas d'échantillonnage des fibres
3: $\{\mathcal{F}_k\} \leftarrow$ ensemble des surfaces de faille du modèle
4: $P_0 \leftarrow$ point de départ de la fibre sur l'horizon de référence
5: $\mathcal{L}(P_0) \leftarrow$ fibre extraite depuis le point $P_0$
6:
7: Label *extraction*
8: **tant que** $P_i \in \mathcal{D}$ **faire**
9: //. `runge_kutta(`$P$`,`$h$`)` est une fonction permettant de calculer
10: //. le successeur de $P$, le long d'une fibre, à un pas de $h$.
11: $P_{i+1} \leftarrow$ `runge_kutta(`$P_i$`,`$h$`)`

12: Ajouter $P_{i+1}$ à la fin de $\mathcal{L}(P_0)$
13: **fin tant que**
14:
15: //. Vérifier l'intersection avec des failles
16: **si** $\mathcal{L}(P_0) \cap \{\mathcal{F}_k\} \neq \emptyset$ **alors**
17: $P_+ \leftarrow \mathcal{L}(P_0) \cap \{\mathcal{F}_k\}$
18: Insérer $P_+$ dans $\mathcal{L}(P_0)$
19: Supprimer tous les points $P$ de $\mathcal{L}(P_0)$ tels que `distance(`$P_0$`,`$P$`)>distance(`$P_0$`,`$P_+$`)`
20: //. `rejet(`$P$`)` est une fonction calculant le vecteur rejet en un point.
21: $P_- \leftarrow$ `rejet(`$P_+$`)`
22: $P_0 \leftarrow P_-$
23: Revenir au label *extraction*
24: **fin si**

Cet algorithme revient à extraire la totalité d'une fibre comme si il n'y avait pas de failles, puis à découper les morceaux au-delà des failles, calculer le point de sortie des fibres grâce au vecteur rejet, puis reconstruire la fibre depuis ce point de sortie.

On notera que de grandes parties de chaque fibre sont calculées inutilement. Cependant, cette solution est bien plus facile à implémenter, et le code résultant à maintenir, pour une perte de temps peu sensible, car le tracé d'une fibre est quasiment instantané : sur un volume de l'ordre de 100 000 tétraèdres avec une dizaine de failles, le tracé d'un millier de fibres prend moins de 5 secondes sur un Pentium III 1,2 GHz.

Enfin, cet algorithme n'extrait les fibres que dans une direction, en suivant la direction de **grad** $t$. De ce fait, les fibres ne sont calculées que d'un côté de l'horizon de référence. Pour avoir la totalité de la fibre, il suffit de refaire le même calcul en considérant cette fois $-$**grad** $t$.

### Contrôle de la densité des fibres

Pour que les fibres contraignent correctement le volume, il est important qu'elles couvrent la totalité du domaine. À l'inverse, il ne sert à rien d'avoir plusieurs fibres cohérentes qui contraignent le même tétraèdre. Nous avons vu comment la densité de points le long d'une fibre peut être ajustée, mais il est aussi possible de contrôler la densité de fibres dans le volume de deux manières différentes.

Le plus simple est de contrôler la densité des points d'extraction. Les fibres sont extraites depuis un ensemble de points sur l'horizon de référence et cet ensemble peut être adapté au volume. C'est particulièrement utile lorsque la résolution du maillage de l'horizon est très différente de la résolution du volume tétraédrisé (par exemple, si l'horizon a été extrait automatiquement depuis un cube sismique, sa résolution est celle du cube sismique, qui est bien plus fin que les tétraèdres).

Pour cela, un algorithme de rééchantillonnage a été implémenté, avec l'aide de R. Cognot. Cet algorithme détermine une densité optimale de fibres sur la surface en fonction du maillage volumique. Il est à noter que dans les premiers essais avec un maillage structuré régulier, ce rééchantillonnage était simple, puisque la résolution est constante. Sur des

maillages non-structurés, nous avons choisi d'imposer une résolution constante, fonction de la taille moyenne des tétraèdres.

Mais ce rééchantillonnage ne résoud pas tous les problèmes et certains tétraèdres du volume ne sont pas pour autant traversés par des fibres (voir figure 3.8). On peut distinguer deux cas :

- Si l'horizon de référence est fortement plissé, les fibres partant des convexités seront très divergentes et, lorsqu'on s'éloigne beaucoup de l'horizon, ne traverseront pas tous les tétraèdres. Ce problème peut être résolu en augmentant la densité de points d'échantillonnage sur la surface, mais d'une part il est difficile de prédire la densité qui sera nécessaire et d'autre part la densité sur l'horizon devient parfois trop importante, et des erreurs numériques empêchent de contrôler correctement la trajectoire des fibres.
  D'autre part, il existe des points tels que les fibres les traversant ne croisent pas l'horizon de référence. Pour ces tétraèdres, il n'est pas possible de jouer uniquement sur la densité d'échantillonnage sur l'horizon de référence.

Nous proposons donc un algorithme par étapes, mis au point avec R. Cognot, qui permet de contourner ces deux problèmes. Il s'agit principalement de construire les fibres jusqu'à un horizon intermédiaire, sur lequel la paramétrisation $(u, v)$ est propagée, avant d'extraire un nouvel ensemble de fibres :

1. Un horizon de référence $H_0$ est sélectionné, avec une paramétrisation $(u_0, v_0)$.
2. Un ensemble d'horizons intermédiaires $\{H_i\}$ est selectionné. Ces horizons peuvent être soit des horizons déjà connus, soit des surfaces d'isovaleur de $t$ harmonieusement réparties dans le volume.
3. Une résolution initiale est choisie sur $H_0$, en fonction de la taille des tétraèdres alentour.
4. Un ensemble de fibres est extrait depuis $H_0$. Chaque fibre est interrompue lorsqu'elle croise un horizon intermédiaire. La paramétrisation $(u_0, v_0)$ est propagée le long de ces fibres.
5. Des points de contrôle avec les valeurs $(u_0, v_0)$ sont installés sur l'horizon $H_i$ et sont utilisés pour contraindre le calcul d'une nouvelle paramétrisation 2D $(u_i, v_i)$ sur $H_i$.
6. Le processus d'extraction est recommencé depuis l'étape 3, à partir de l'horizon $H_i$.

Comme le montre la figure 3.11, le champ de fibres ainsi obtenu est bien plus régulier et couvre mieux le volume, la paramétrisation résultante est donc plus stable (figure 3.12). De plus, il n'est plus nécessaire d'avoir une très forte concentration de fibres sur l'horizon de référence, puisque les fibres sont rééchantillonnées sur chaque horizon intermédiaire.

Enfin il est possible, à posteriori, de repérer les tétraèdres qui ne sont traversés par aucune fibre et d'en extraire une. Si elle croise un horizon (l'horizon de référence ou un horizon intermédiaire), alors des valeurs de $(u, v)$ peuvent y être affectées. Même si elle ne croise pas d'horizon, une contrainte de type *contrainte delta* (voir annexe B, paragraphe B.2.2), avec $\Delta = 0$, peut être utilisée entre les différents points de la fibre, pour imposer que $(u, v)$ soient constants le long de la fibre.

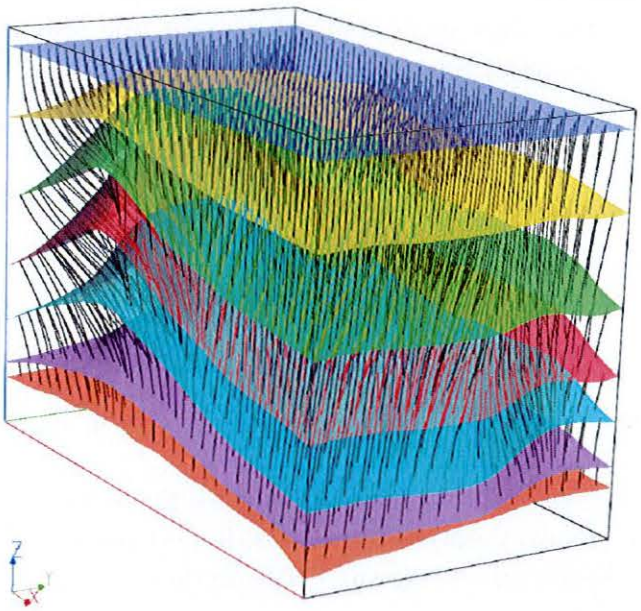


FIG. 3.11 : *Contrôle de la densité du champ de fibres par réinitialisation de l'extraction sur chaque horizon. Depuis l'horizon de référence porteur de la paramétrisation 2D (en rouge, au milieu), des fibres sont extraites dans chaque direction jusqu'à l'horizon suivant. La paramétrisation $(u, v)$ est alors interpolée sur cet horizon, avant d'en extraire un nouveau champ de fibres. Le volume est ainsi couvert par une densité de fibres constante (comparer avec la figure 3.8).*

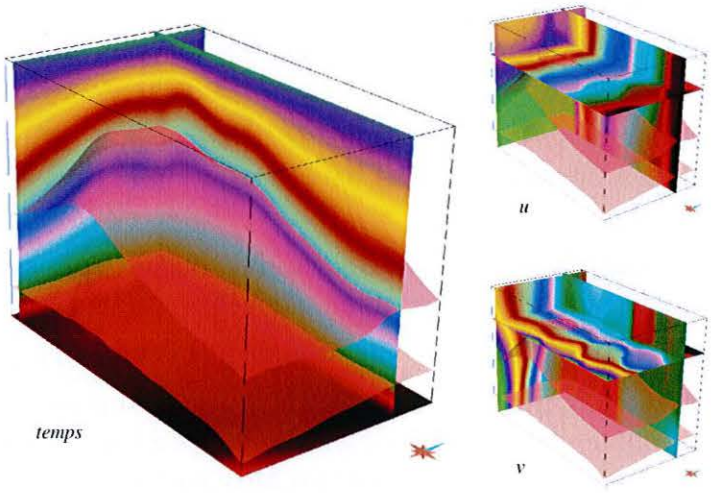



FIG. 3.12 : *Paramétrisation GeoChron calculée à partir d'un champ de fibres, sur le jeu de données de la figure 3.11.*

### 3.2.3 Édition d'une paramétrisation GeoChron existante

Le concept de lignes iso-paléo-géographiques trouve d'autres applications, en dehors du cadre strict de la construction d'une paramétrisation GeoChron. En effet, à tout mo-

ment, ces lignes forment un outil de visualisation de la paramétrisation, et permettent de regrouper, sur un objet facile à observer, des informations à la fois sur $u$ et sur $v$, qui sont difficiles à visualiser simultanément.

### Construction d'une ligne IPG

Les méthodes présentées précédemment permettent de construire des fibres, basées sur le vecteur **grad** $t$, en supposant que ce vecteur n'est pas trop différent des lignes IPG, ce qui n'est vrai que dans certains contextes de déformation.

Une fois une paramétrisation construite, il est possible de remonter à la définition initiale de ces lignes, afin de construire les lignes réelles, et non plus des approximations : les lignes IPG sont définies comme des lignes le long desquelles $(u, v)$ reste constant, et seul $t$ varie. On peut donc, dans un volume paramétrisé, suivre ces lignes. Pour cela, nous proposons l'algorithme suivant :

1. Un point initial $P_0$ est sélectionné (par exemple, désigné par l'utilisateur). Soient $(u_0, v_0)$ les coordonnées paléo-géographiques de ce point, et $\mathcal{T}$ le tétraèdre le contenant.
2. À partir des valeurs de $(u, v)$ aux nœuds de $\mathcal{T}$, on détermine par quelle face la ligne IPG $\mathcal{L}$ va sortir.
3. Le point de sortie exact de $\mathcal{L}$ dans cette face est déterminé en utilisant les valeurs de $(u, v)$ à ses sommets.
4. L'algorithme est répété depuis l'étape 2 dans le tétraèdre voisin.
5. Si, à un moment, une des faces est sur une faille, alors le point de sortie et le tétraèdre voisin sont déterminés en utilisant le vecteur rejet.

L'étape la plus complexe est la troisième (le calcul des rejets sera détaillé dans le chapitre suivant). Il s'agit de retrouver les coordonnées $\mathbf{x}(\alpha) = (x, y, z)$ d'un point $\alpha$ pour lequel on connait $(u, v)$, définies par ailleurs aux sommets $\alpha_1$, $\alpha_2$ et $\alpha_3$ d'un triangle.

Soient $\omega_1$ et $\omega_2$ les coordonnées barycentriques de $\alpha$ dans le triangle ([Mallet, 2002]) :

$$\mathbf{x}(\alpha) = (1 - \omega_1 - \omega_2).\mathbf{x}(\alpha_0) + \omega_1.\mathbf{x}(\alpha_1) + \omega_2.\mathbf{x}(\alpha_2)$$

De même, les valeurs $u$ et $v$ en $\alpha$ s'expriment en fonction de $\omega_1$ et $\omega_2$ :

$$\begin{aligned} u(\alpha) &= (1 - \omega_1 - \omega_2).u(\alpha_0) + \omega_1.u(\alpha_1) + \omega_2.u(\alpha_2) \\ v(\alpha) &= (1 - \omega_1 - \omega_2).v(\alpha_0) + \omega_1.v(\alpha_1) + \omega_2.v(\alpha_2) \end{aligned}$$

Soit :

$$\begin{aligned} u(\alpha) - u(\alpha_0) &= \omega_1.\big(u(\alpha_1) - u(\alpha_0)\big) + \omega_2.\big(u(\alpha_2) - u(\alpha_0)\big) \\ v(\alpha) - v(\alpha_0) &= \omega_1.\big(v(\alpha_1) - v(\alpha_0)\big) + \omega_2.\big(v(\alpha_2) - v(\alpha_0)\big) \end{aligned}$$

Trouver les coordonnées barycentriques $(\omega_1, \omega_2)$ de $\alpha$ dans le triangle revient donc à résoudre le système linéaire $2 \times 2$ suivant :

$$\begin{bmatrix} u(\alpha_1) - u(\alpha_0) & u(\alpha_2) - u(\alpha_0) \\ v(\alpha_1) - v(\alpha_0) & v(\alpha_2) - v(\alpha_0) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u(\alpha) - u(\alpha_0) \\ v(\alpha) - v(\alpha_0) \end{bmatrix}$$

Ce processus est relativement couteux puisque le système ci-dessus doit être résolu pour chaque tétraèdre traversé par chaque ligne IPG extraite mais, en pratique, cet algorithme est utilisé le plus souvent pour visualiser un très petit nombre de lignes IPG particulières (figure 3.13), et le calcul est alors instantané, car chaque ligne ne recoupe que peu de tétraèdres.

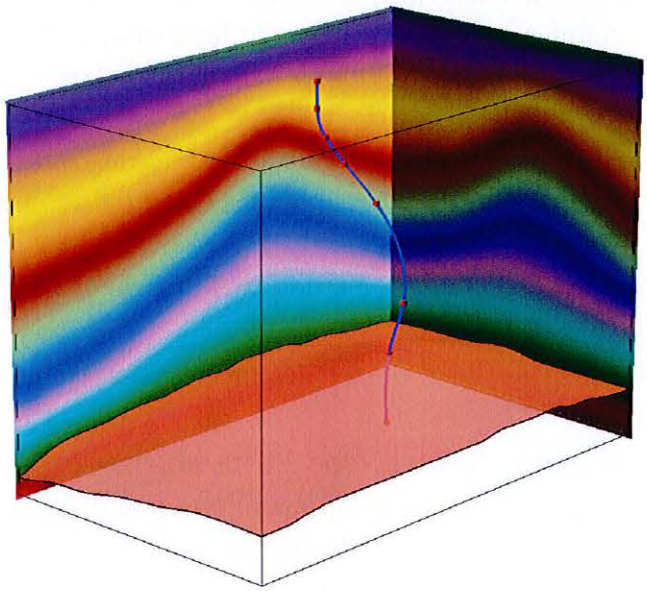


FIG. 3.13 : *Ligne IPG (en bleu) extraite dans un volume paramétrisé depuis un horizon donné. Le paramètre* temps *est affiché sur le volume correspondant au modèle de la figure 3.11. Les points rouges le long de la ligne IPG représentent les intersections avec les horizons qui ont servi à construire le modèle, dont un seul est représenté ici (en transparence).*

### Modification de la forme d'une ligne IPG

Les lignes IPG ne sont pas limitées à la visualisation de la paramétrisation, elles peuvent aussi être utilisées pour éditer une paramétrisation pré-existante, par exemple pour mieux s'adapter à un contexte local.

Ainsi, on peut imaginer qu'une fois extraite avec la méthode décrite ci-dessus, une ligne IPG peut être modifiée, avec des outils interactifs comme ceux présents dans le géomodeleur GOCAD (voir par exemple [Caumon, 2003] où de tels outils, appliqués à des surfaces, sont décrits). Un utilisateur pourrait de la sorte forcer une ligne à passer par un point donné, pour respecter des données connues par ailleurs, ou pour introduire un style de déformation particulier dans une zone du modèle.

Une fois une ou plusieurs lignes éditées de la sorte, une nouvelle interpolation de $(u, v)$ est nécessaire[1], afin de produire une nouvelle paramétrisation GeoChron qui prenne en compte ces modifications. Comme ces lignes éditées sont probablement conflictuelles avec les lignes voisines existantes, il est nécessaire de définir un voisinage autour de ces lignes, dans lequel toutes les autres contraintes existantes sur la paramétrisation sont désactivées, ou affaiblies.

Enfin, il est à noter que cette édition peut avoir lieu quelle que soit la méthode qui a été utilisée pour construire la paramétrisation GeoChron, que ce soit la méthode locale décrite ici, la méthode globale de la partie suivante, ou toute autre méthode envisageable.

Il est aussi possible d'envisager d'altérer globalement la totalité de la paramétrisation. Si on considère les lignes IPG comme caractéristiques de la paramétrisation, on peut par exemple appliquer à chacune de ces lignes une inclinaison, définie par deux angles $\alpha$ et $\beta$ (azimut et pendage) par rapport à un horizon de référence.

### Conservation de la paramétrisation indépendamment de tout maillage

Les lignes IPG peuvent aussi servir à conserver une paramétrisation, quelle que soit la manière dont elle a été calculée, indépendamment de tout maillage. Ainsi, il devient possible de modifier la grille, tout en conservant la même paramétrisation, c'est-à-dire la même correspondance entre un point de l'espace géologique et de l'espace de dépôt.

En particulier, dans le cadre des simulations d'écoulements, les méthodes de résolution numérique des équations de mécanique des fluides sont grandement facilitées si les interfaces entre cellules sont orthogonales aux directions d'écoulement. En conséquence, les maillages sur lesquels ces simulations sont calculées sont fortement dépendants de la nature des écoulements ([Heinemann et Heinemann, 2003]).

Durant l'exploitation d'un réservoir, les différents paramètres (différences de pression, saturation en huile, etc.) qui régissent les écoulements varient au cours du temps, et les directions d'écoulement aussi. Certains auteurs ont donc proposé de faire varier la géométrie des grilles d'écoulement au cours du temps ([Mlacnik *et al.*, 2004]).

Cependant, si une paramétrisation GeoChron est bâtie sur une grille d'écoulement, afin de faire correspondre au mieux celle-ci avec le modèle pétrophysique, il est nécessaire de conserver la paramétrisation lorsque la géométrie de la grille est modifiée.

Pour cela, on peut procéder comme suit :

1. Sur la grille initiale, construire une paramétrisation GeoChron, en utilisant n'importe quelle méthode.
2. Lorsqu'il est nécessaire de modifier la grille, construire un ensemble de lignes IPG, à une résolution cohérente avec celle de la grille. En tout point de ces lignes, on conserve les valeurs de $(u, v, t)$.
3. Reconstruire la grille en tenant compte des nouveaux paramètres d'écoulement (voir [Mlacnik *et al.*, 2004]).

[1] Cette modification peut aussi être faite sur les fibres construites depuis le champ du gradient de $t$, et donc avant toute interpolation de $(u, v)$.

4. Utiliser les lignes IPG pour réinterpoler $(u, v, t)$ aux nœuds de la nouvelle grille.

Aussi longtemps que la géométrie du modèle initial, c'est-à-dire des failles et des horizons, ne change pas, il est donc possible d'utiliser les lignes IPG pour mémoriser une paramétrisation GeoChron indépendamment de tout maillage. Cette paramétrisation peut être à tout moment reproduite sur n'importe quel maillage cohérent avec le modèle géométrique initial.

## 3.3 Approche globale par contraintes

Dans la première approche, on considérait un ensemble de lignes, assimilées à des lignes iso-paléo-géographiques. Cette méthode est en quelque sorte un échantillonnage du domaine d'étude par les lignes, suivi d'une interpolation globale. Chaque ligne étant calculée indépendamment de ses voisines, la méthode en elle-même n'impose pas de cohérence globale, celle-ci vient uniquement du champ de *temps* sous-jacent.

Dans un deuxième temps, nous avons donc cherché une méthode alternative, qui permettrait de calculer les composantes $(u, v)$ de la paramétrisation GeoChron en une seule fois, en assurant une cohérence globale. Pour cela, nous nous sommes basés sur les formules initiales du modèle, et nous avons cherché des contraintes DSI susceptibles d'exprimer au mieux les relations globales entre les différentes composantes de la paramétrisation. Ces relations sont complexes, et dépendent fortement du style de déformation, et nous avons envisagé deux approches différentes.

On rappelle que, comme dans le cadre de la construction par le biais des fibres, le paramètre *temps* est d'abord calculé, puis il est considéré comme fixé pour le calcule de $(u, v)$. Par conséquent, dans les équations suivantes, on considère $t(\mathbf{x})$, ou le vecteur $\mathbf{grad}\ t(\mathbf{x})$, comme fixes et connus.

### 3.3.1 La contrainte d'orthogonalité

Le paragraphe 2.3.3 indique que, dans le cas d'une déformation par flexure simple d'une plaque mince, la déformation est telle que les trois vecteurs gradients de $u(\mathbf{x})$, $v(\mathbf{x})$ et $t(\mathbf{x})$ sont orthogonaux deux à deux.

Par conséquent, si on est capable, en tout point du volume, d'imposer cette relation entre les valeurs de $u(\mathbf{x})$, $v(\mathbf{x})$ et $t(\mathbf{x})$, la paramétrisation résultante modélisera une déformation continue du domaine, de type *pure bending.*

La contrainte à respecter, appelée *contrainte d'orthogonalité 3D*, est la suivante :

$$\left| \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{grad}\ u \perp \mathbf{grad}\ v \\ \mathbf{grad}\ v \perp \mathbf{grad}\ t \\ \mathbf{grad}\ t \perp \mathbf{grad}\ u \end{array} \right. \\ \|\mathbf{grad}\ u\| = \|\mathbf{grad}\ v\| \end{array} \right. \tag{3.1}$$

Voyons maintenant comment cette contrainte peut s'exprimer dans le formalisme des contraintes acceptables par l'interpolateur DSI. Cette contrainte a été établie en collaboration avec J.-L. Mallet.

### Contrainte DSI

Considérons un tétraèdre $T(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, sur lequel une propriété $t$ est connue aux sommets, et deux propriétés $u$ et $v$ sont à interpoler. On définit le vecteur $\mathbf{N}$, de norme 1, comme :

$$\mathbf{N} = \frac{\mathbf{grad}\ t}{\|\mathbf{grad}\ t\|}$$

Dans un premier temps, on peut remarquer que :

$$\mathbf{grad}\ v = \mathbf{N} \times \mathbf{grad}\ u \iff \begin{cases} \mathbf{grad}\ v \perp \mathbf{grad}\ u \\ \mathbf{grad}\ v \perp \mathbf{grad}\ t \\ \|\mathbf{grad}\ u\| = \|\mathbf{grad}\ v\| \end{cases}$$

D'autre part, on a aussi :

$$\mathbf{grad}\ u.\mathbf{N} = 0 \iff \mathbf{grad}\ u \perp \mathbf{grad}\ t$$

En combinant les deux équations précédentes, on obtient deux équations linéaires qui permettent de définir toutes les relations cherchées :

$$\begin{cases} \mathbf{grad}\ v = \mathbf{N} \times \mathbf{grad}\ u \\ \mathbf{grad}\ u.\mathbf{N} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \mathbf{grad}\ u \perp \mathbf{grad}\ v \\ \mathbf{grad}\ v \perp \mathbf{grad}\ t \\ \mathbf{grad}\ t \perp \mathbf{grad}\ u \\ \|\mathbf{grad}\ u\| = \|\mathbf{grad}\ v\| \end{cases}$$

D'après l'équation B.4 (annexe B), et la définition des coefficients $\mathbf{D}(\alpha_i)$ (équation B.3), on peut écrire le produit vectoriel de $\mathbf{N}$ par $\mathbf{grad}\ u$ en fonction des $\mathbf{D}(\alpha_i)$ et $u(\alpha_i)$ :

$$\mathbf{N} \times \mathbf{grad}\ u = \sum_{i=0}^{3} \underbrace{\mathbf{N} \times \mathbf{D}(\alpha_i)}_{\mathbf{R}(\alpha_i)}.u(\alpha_i)$$

La première équation de cette contrainte peut donc se reformuler ainsi :

$$\begin{aligned} \mathbf{grad}\ v = \mathbf{N} \times \mathbf{grad}\ u &\iff \sum_{i=0}^{3} \mathbf{D}(\alpha_i).v(\alpha_i) = \sum_{i=0}^{3} \mathbf{R}(\alpha_i).u(\alpha_i) \\ &\iff \sum_{i=0}^{3} \mathbf{R}(\alpha_i).u(\alpha_i) - \sum_{i=0}^{3} \mathbf{D}(\alpha_i).v(\alpha_i) = 0 \end{aligned}$$

D'autre part, la deuxième équation de cette contrainte s'exprime (d'après la définition de $D(\alpha_i|\mathbf{N})$ de l'équation B.4, annexe B) :

$$\mathbf{grad}\ u.\mathbf{N} = 0 \iff \sum_{i=0}^{3} D(\alpha_i|\mathbf{N}).u(\alpha_i) = 0$$

On obtient alors les quatre contraintes DSI $c_x(T,\mathbf{N})$, $c_y(T,\mathbf{N})$, $c_z(T,\mathbf{N})$ et $c_N(T,\mathbf{N})$ suivantes :

$$c_x : \left| \begin{array}{rcll} A^u_{c_x}(\alpha) & = & \mathbf{R}_x(\alpha) & \text{si } \alpha \in \{\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\} \\ A^v_{c_x}(\alpha) & = & -\mathbf{D}_x(\alpha) & \text{si } \alpha \in \{\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\} \\ A^u_{c_x}(\alpha) & = & 0 & \text{sinon} \\ A^v_{c_x}(\alpha) & = & 0 & \text{sinon} \\ b_{c_x} & = & 0 & \end{array} \right.$$

$$c_y : \left| \begin{array}{rcll} A^u_{c_y}(\alpha) & = & \mathbf{R}_y(\alpha) & \text{si } \alpha \in \{\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\} \\ A^v_{c_y}(\alpha) & = & -\mathbf{D}_y(\alpha) & \text{si } \alpha \in \{\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\} \\ A^u_{c_y}(\alpha) & = & 0 & \text{sinon} \\ A^v_{c_y}(\alpha) & = & 0 & \text{sinon} \\ b_{c_y} & = & 0 & \end{array} \right.$$

$$c_z : \left| \begin{array}{rcll} A^u_{c_z}(\alpha) & = & \mathbf{R}_z(\alpha) & \text{si } \alpha \in \{\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\} \\ A^v_{c_z}(\alpha) & = & -\mathbf{D}_z(\alpha) & \text{si } \alpha \in \{\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\} \\ A^u_{c_z}(\alpha) & = & 0 & \text{sinon} \\ A^v_{c_z}(\alpha) & = & 0 & \text{sinon} \\ b_{c_z} & = & 0 & \end{array} \right.$$

$$c_N : \left| \begin{array}{rcll} A^u_{c_N}(\alpha) & = & D(\alpha|\mathbf{N}) & \text{si } \alpha \in \{\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\} \\ A^u_{c_N}(\alpha) & = & 0 & \text{sinon} \\ b_{c_N} & = & 0 & \end{array} \right.$$

Il est à noter que ces deux contraintes agissent simultanément sur $u$ et sur $v$, d'où les coefficients $A^u$ et $A^v$, qui se réfèrent respectivement à $u$ et $v$.

### 3.3.2 Le *conformal mapping* étendu

L'approche précédente reproduit une déformation continue, de type *pure bending*. Nous avons cependant vu qu'il existait un autre style de déformation, le *flexural slip* ou glissement banc sur banc. De plus, nous avons vu dans le paragraphe 2.3.4 que ce type de déformation pouvait être formulé dans le volume.

Pour cela, il faut que la projection de la paramétrisation GeoChron sur chaque horizon, c'est-à-dire sur chaque surface d'isovaleur du *temps*, forme une paramétrisation de type *conformal mapping 2D* de $H_t$. Nous avons en effet indiqué, au paragraphe 3.1.2, que cette paramétrisation est celle qui minimise les déformations nécessaires pour transformer la surface en un plan. Comme on admet généralement que la solution la plus proche de la réalité pour déformer un objet naturel de son état initial à son état actuel est celle qui minimise les déformations, la paramétrisation par *conformal mapping* est donc appropriée.

En termes mathématiques, si on note $\mathbf{grad}_H\ u$ et $\mathbf{grad}_H\ v$ les projections de $\mathbf{grad}\ u$ et $\mathbf{grad}\ v$ sur un horizon quelconque $H$, on cherche donc à avoir :

$$\left| \begin{array}{l} \mathbf{grad}_H\ u \perp \mathbf{grad}_H\ v \\ \|\mathbf{grad}_H\ u\| = \|\mathbf{grad}_H\ v\| \end{array} \right. \tag{3.2}$$

la première relation pouvant aussi se formuler comme $\mathbf{grad}_H\ u.\mathbf{grad}_H\ v = 0$.

Par analogie avec la paramétrisation des surfaces, nous appelons cette contrainte volumique *conformal mapping étendu*[2].

### Contrainte DSI

Nous allons maintenant exprimer la relation ci-dessus sous forme d'une contrainte DSI dans un tétraèdre $T(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, dépendante des valeurs de $u$ et de $v$ uniquement. Cette contrainte a été établie par J.-L. Mallet.

Dans un premier temps, décomposons $\mathbf{grad}_H\ u$ et $\mathbf{grad}_H\ v$ en fonctions linéaires de $\mathbf{grad}\ u$ et $\mathbf{grad}\ v$. Pour cela, on peut choisir une paire quelconque de vecteurs unitaires $\mathbf{U}$ et $\mathbf{V}$ orthogonaux, et tangents à l'horizon $H$ dans $T$. Les vecteurs $\mathbf{grad}_H\ u$ et $\mathbf{grad}_H\ v$ se décomposent alors :

$$\left| \begin{array}{l} \mathbf{grad}_H\ u = (\mathbf{grad}\ u.\mathbf{U}).\mathbf{U} + (\mathbf{grad}\ u.\mathbf{V}).\mathbf{V} \\ \mathbf{grad}_H\ v = (\mathbf{grad}\ v.\mathbf{U}).\mathbf{U} + (\mathbf{grad}\ v.\mathbf{V}).\mathbf{V} \end{array} \right.$$

Les vecteurs $\mathbf{U}$ et $\mathbf{V}$ peuvent être calculés, par exemple, à partir d'un vecteur unitaire $\mathbf{N}$ normal à l'horizon $H$ :

$$\mathbf{N} = \frac{\mathbf{grad}\ t}{\|\mathbf{grad}\ t\|} = \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{bmatrix} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} \mathbf{U} = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} \text{ avec : } \left\{ \begin{array}{rcl} i \in \{1,2,3\} & & \\ U_i & = & 0 \\ U_{(i+1)mod3} & = & a\ ,\ a \in \mathbb{R} \\ U_{(i+2)mod3} & = & -\frac{N_{(i+1)mod3}}{N_{(i+2)mod3}}.U_{(i+1)mod3} \end{array} \right. \\ \\ \mathbf{V} = \mathbf{N} \times \mathbf{U} \end{array} \right.$$

Les équations 3.2 peuvent alors se formuler :

$$\left| \begin{array}{l} \mathbf{grad}_H\ u.\mathbf{grad}_H\ v = 0 \\ \|\mathbf{grad}_H\ u\| = \|\mathbf{grad}_H\ v\| \end{array} \right. \iff \left| \begin{array}{l} \mathbf{grad}\ u.\mathbf{U} = \mathbf{grad}\ v.\mathbf{V} \\ \mathbf{grad}\ u.\mathbf{V} = -\mathbf{grad}\ v.\mathbf{U} \end{array} \right.$$

Ces relations peuvent à leur tour être transformées de façon à faire apparaître les valeurs de $u$ et $v$ aux nœuds du tétraèdre $T$ :

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{3} D(\alpha_i|\mathbf{U}).u(\alpha_i) - D(\alpha_i|\mathbf{V}).v(\alpha_i) &= 0 \\ \sum_{i=0}^{3} D(\alpha_i|\mathbf{V}).u(\alpha_i) + D(\alpha_i|\mathbf{U}).v(\alpha_i) &= 0 \end{aligned}$$

[2]Notons toutefois qu'il ne s'agit pas d'une paramétrisation conforme en trois dimensions, donc d'un *conformal mapping 3D*, mais plutôt de l'extension en trois dimensions d'une paramétrisation conforme en deux dimensions.

ou encore, sous la forme de deux contraintes DSI $c(T, \mathbf{U}, \mathbf{V})$ et $\overline{c}((T, \mathbf{U}, \mathbf{V})$ :

$$
c : \left| \begin{array}{lcll} A_c^u(\alpha) & = & D(\alpha|\mathbf{U}) & \text{si } \alpha \in \{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\} \\ A_c^v(\alpha) & = & -D(\alpha|\mathbf{V}) & \text{si } \alpha \in \{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\} \\ A_c^u(\alpha) & = & 0 & \text{sinon} \\ A_c^v(\alpha) & = & 0 & \text{sinon} \\ b_c & = & 0 & \end{array} \right.
$$

$$
\overline{c} : \left| \begin{array}{lcll} A_{\overline{c}}^u(\alpha) & = & D(\alpha|\mathbf{V}) & \text{si } \alpha \in \{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\} \\ A_{\overline{c}}^v(\alpha) & = & D(\alpha|\mathbf{U}) & \text{si } \alpha \in \{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\} \\ A_{\overline{c}}^u(\alpha) & = & 0 & \text{sinon} \\ A_{\overline{c}}^v(\alpha) & = & 0 & \text{sinon} \\ b_{\overline{c}} & = & 0 & \end{array} \right.
$$

Comme pour l'orthogonalité 3D, ces deux contraintes agissent simultanément sur $u$ et sur $v$, d'où les coefficients $A^u$ et $A^v$.

### 3.3.3 Résultats

Nous présentons ici quelques résultats de l'utilisation des deux contraintes d'orthogonalité 3D, et de *conformal mapping* étendu. Le jeu de données choisi pour illustrer ces contraintes est géologiquement simple, puisqu'il s'agit d'un anticlinal (données fournies par l'Institut Français du Pétrole, dans le cadre du projet CARFRAC) présenté sur la figure 3.14. L'anticlinal de Split Moutain est situé dans le Dinosaur National Monument, Utah. Il s'intègre dans le cadre d'un épisode compressif dans la région de la Cordillière, daté aux environs de la fin du Mésozoïque et du début du Tertiaire. L'anticlinal de Split Mountain lui-même s'est formé à l'occasion du soulèvement des Eastern Unita Mountains, à l'Éocène, et se compose principalement d'un axe est-ouest, avec vers l'est un axe secondaire vers le nord. Il a été particulièrement étudié en tant qu'analogue de terrain à des réservoirs fortement affectés par la fracturation (voir [Silliphant *et al.*, 2002], [Wilkins et Gross, 2002], [Guiton, 2001]).

L'intérêt d'un tel jeu de données simple est qu'il est plus facile de vérifier la cohérence des résultats. Toutefois, les chapitres suivants présenteront d'autres exemples plus complexes, et en particulier intégrant des failles (chapitre 4).

La procédure suivante a été utilisée pour calculer le modèle GeoChron sur ces données :

1. À partir des surfaces initiales, un volume tétraédrisé les englobant a été construit, ainsi que le modèle topologique associé (figure 3.14).
2. À chaque horizon du modèle initial a été affecté une valeur de *temps* choisie arbitrairement (figure 3.15).
3. Le paramètre *temps* a été interpolé dans le volume par DSI, en utilisant des contraintes de type *point de contrôle* (voir annexe B.2.1) pour tous les nœuds des surfaces, ainsi qu'une contrainte de *gradient constant* (voir annexe B, paragraphe B.3.2) dans le volume (figure 3.15).

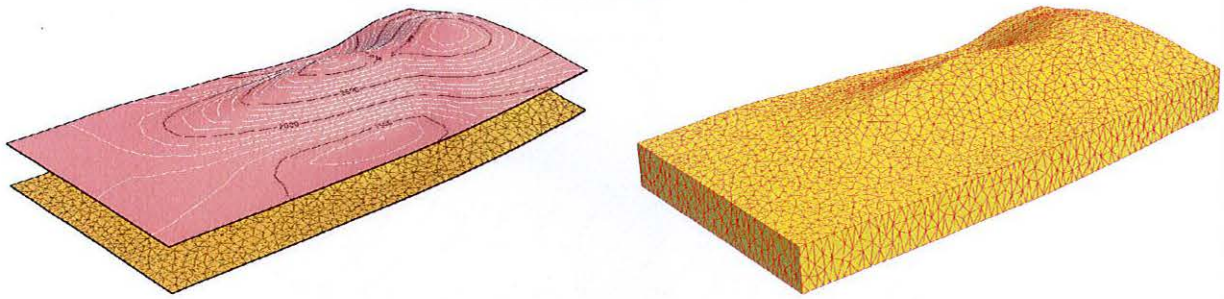


FIG. 3.14 : *Modèle initial de l'anticlinal de Split Mountain, Utah (données IFP), exagération verticale ×2. À gauche, les deux horizons triangulés reconstitués à partir des données de terrain, avec des courbes de niveau sur l'horizon supérieur et le maillage sur l'horizon inférieur. À droite, le volume tétraédrisé correspondant.*

4. Un des horizons, celui du milieu, a été choisi comme horizon de référence, et une paramétrisation par *conformal mapping* a été calculée dessus (figure 3.16).
5. Enfin, $u(\mathbf{x})$ et $v(\mathbf{x})$ ont été interpolés par DSI dans le volume, avec les contraintes suivantes :
   - des points de contrôle sont installés le long de l'horizon de référence ;
   - une contrainte de gradient constant assure la continuité de la solution ;
   - pour reproduire un style de déformation donné, la contrainte correspondante (orthogonalité 3D ou *conformal mapping* étendu) est ajoutée.

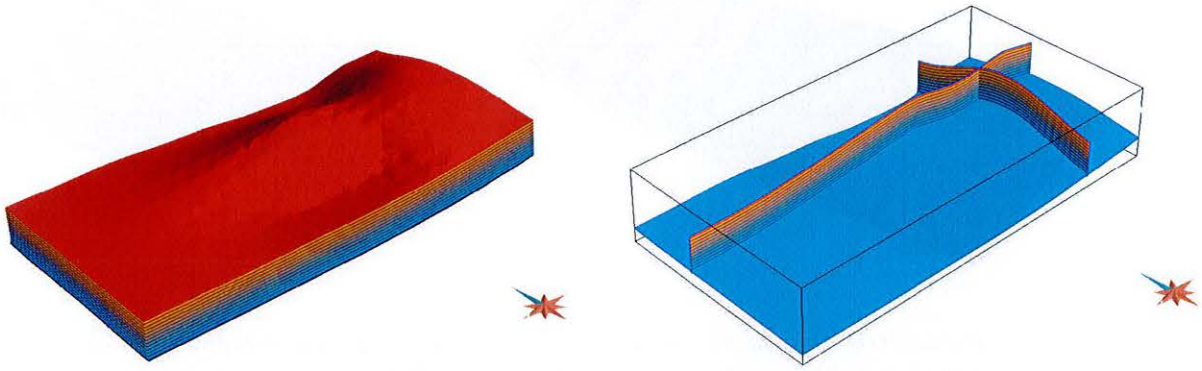


FIG. 3.15 : *Calcul du paramètre t sur le modèle de Split Moutain, Utah (exagération verticale ×2. Un* temps *constant a été affecté à chacun des horizons de la figure 3.14. À gauche, le volume tétraédrisé peint avec le* temps, *à droite, deux coupes verticales dans le modèle et une surface d'isovaleur de t mettant en évidence la courbure du modèle.*

Notons que, numériquement, les deux contraintes nécessitent d'interpoler simultanément $u(\mathbf{x})$ et $v(\mathbf{x})$, c'est-à-dire deux propriétés différentes. Cependant, comme expliqué dans l'annexe A, l'interpolateur DSI est parfaitement adapté à des propriétés vectorielles à plusieurs champs. En pratique, on utilisera donc une propriété vectorielle à deux champs, le premier représentant $u$ et le second $v$. Tous les résultats présentés dans cette section, et par la suite, représentent toutefois séparément $u$ et $v$.

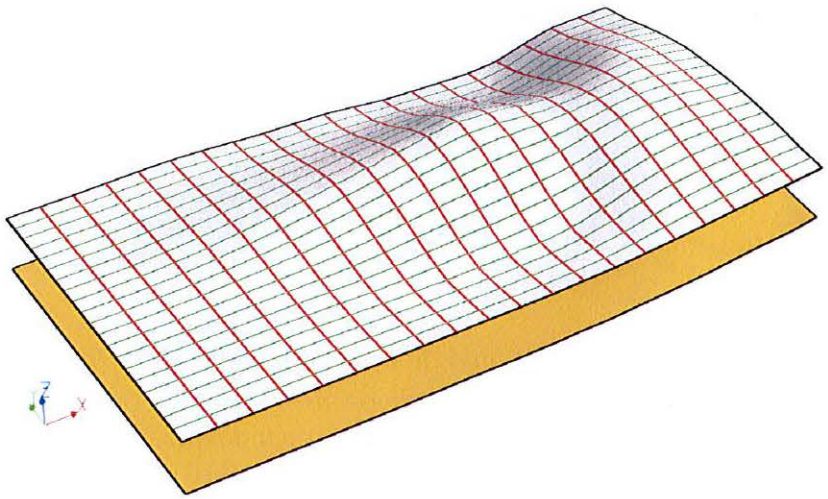


FIG. 3.16 : *Paramétrisation de l'horizon de référence du modèle de Split Mountain, Utah. Les lignes rouges et vertes figurent des isovaleurs de $u$ et $v$ (exagération verticale $\times 2$).*

Les figures 3.17 et 3.18 présentent les résultats des contraintes d'orthogonalité 3D, et de *conformal mapping* étendu. Ces résultats semblent cohérents avec les données, et ne montrent pas d'erreur majeure.

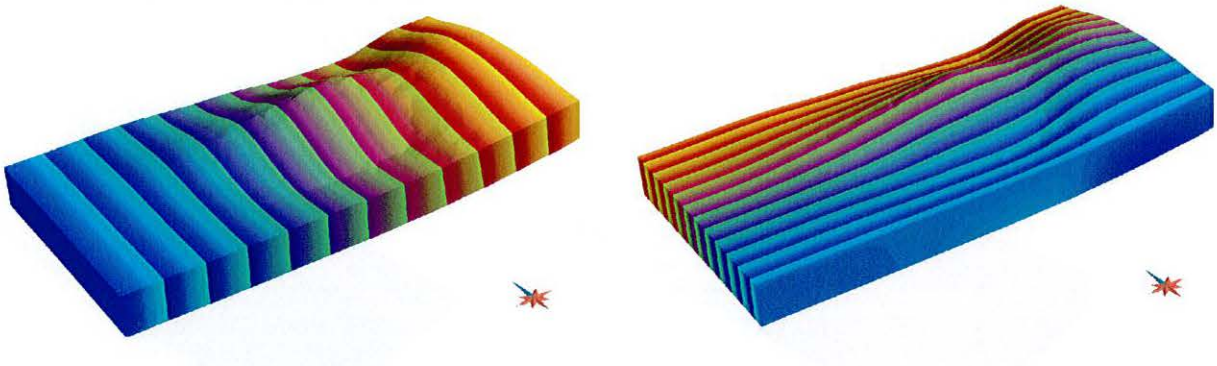


FIG. 3.17 : *Paramétrisation $(u, v)$ obtenue par la contrainte d'orthogonalité 3D (à gauche, $u(\mathbf{x})$, à droite $v(\mathbf{x})$), exagération verticale $\times 2$. Les lignes de couleur représentent des lignes d'isovaleurs. Ces lignes sont équidistantes sur l'horizon de référence (figure 3.16).*

Si on compare avec les résultats obtenus par la première méthode, utilisant un champ de fibres (figure 3.19), la paramétrisation obtenue est très similaire à celle obtenue par la contrainte d'orthogonalité. En effet, l'hypothèse de base du tracé de fibre est que les lignes IPG sont orthogonales en tout point aux horizons, ce qui correspond à l'hypothèse d'une déformation de type *pure bending*.

De plus, la figure 3.20 montre une section particulière du volume, perpendiculairement à l'axe du pli. On y voit clairement la différence entre les deux styles de déformations : les lignes de couleur figurent des surfaces d'isovaleur de $u$ ou de $v$, elles permettent donc de mesurer des distances le long des surfaces, en sachant qu'avant déformation, l'écart entre chaque paire de ligne était le même partout.

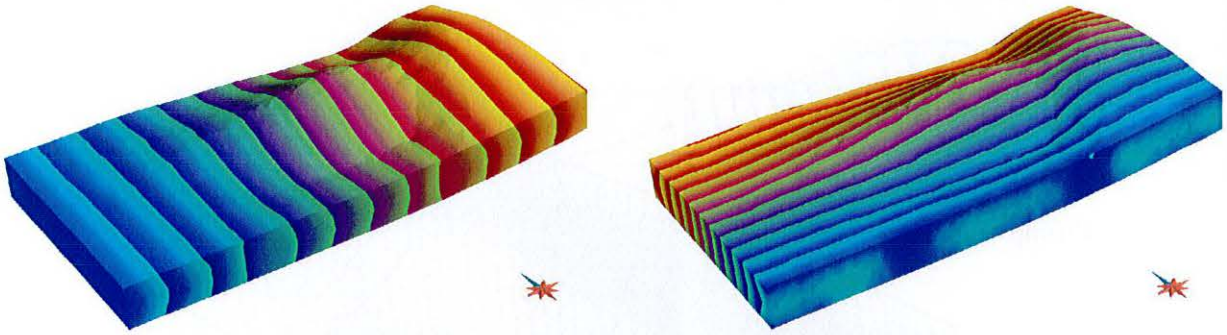


FIG. 3.18 : *Paramétrisation $(u, v)$ obtenue par la contrainte de* conformal mapping *étendu (à gauche, $u(\mathbf{x})$, à droite $v(\mathbf{x})$), exagération verticale $\times 2$. Les lignes de couleur représentent des lignes d'isovaleurs. Ces lignes sont équidistantes sur l'horizon de référence (figure 3.16).*

Dans le cas d'une déformation par *pure bending*, la distance varie suivant la position verticale de l'horizon dans le volume. À l'inverse, dans le cas du *flexural slip*, les distances le long de chaque horizon restent à peu près constantes, ce qui est conforme aux caractéristiques de la déformation.

Notons toutefois qu'un certain nombre d'artefacts apparaissent dans le cadre de la paramétrisation par *conformal mapping* étendu (figure 3.18, sur le flanc sud pour le paramètre $v$, ou encore figure 3.20, sur la flanc nord de la section). Ces instabilités peuvent être provoquées par des effets de bord : la contrainte de gradient constant appliquée sur les tétraèdres du bord du volume peut engendrer des déséquilibres. Plus globalement, la contrainte de *conformal mapping* étendu est numériquement plus instable, car elle met en jeu un plus grand nombre d'opérations numériques (produits scalaires et vectoriels), et elle se base sur les vecteurs $\mathbf{U}$ et $\mathbf{V}$, dont le calcul peut être instable (en particulier si $\mathbf{grad}\ t = 0$).

## Conclusions et perspectives

Dans ce chapitre, nous avons présenté plusieurs méthodes permettant de construire concrètement une paramétrisation GeoChron, en respectant et en utilisant les définitions théoriques du chapitre précédent. Ces méthodes se décomposent en deux grandes familles, les méthodes locales et les méthodes globales.

Nous avons vu que l'efficacité de ces méthodes ne dépendait pas uniquement de la rigueur des formules mathématiques sur lesquelles elles reposent, mais aussi des différents choix faits lors de l'implémentation. Nous avons ainsi étudié l'influence des différents maillages possibles, avant de choisir les maillages non structurés tétraédriques. Nous avons aussi mis en place des algorithmes de densification ou de ré-échantillonnage, dans le cadre des fibres, qui permettent d'obtenir un résultat exploitable dans la plupart des cas.

Il est aussi à noter que ce chapitre ne prétend nullement être exhaustif sur les méthodes de construction d'une paramétrisation GeoChron. Bien d'autres solutions sont envisageables, soit en utilisant d'autres outils numériques, soit encore pour répondre à

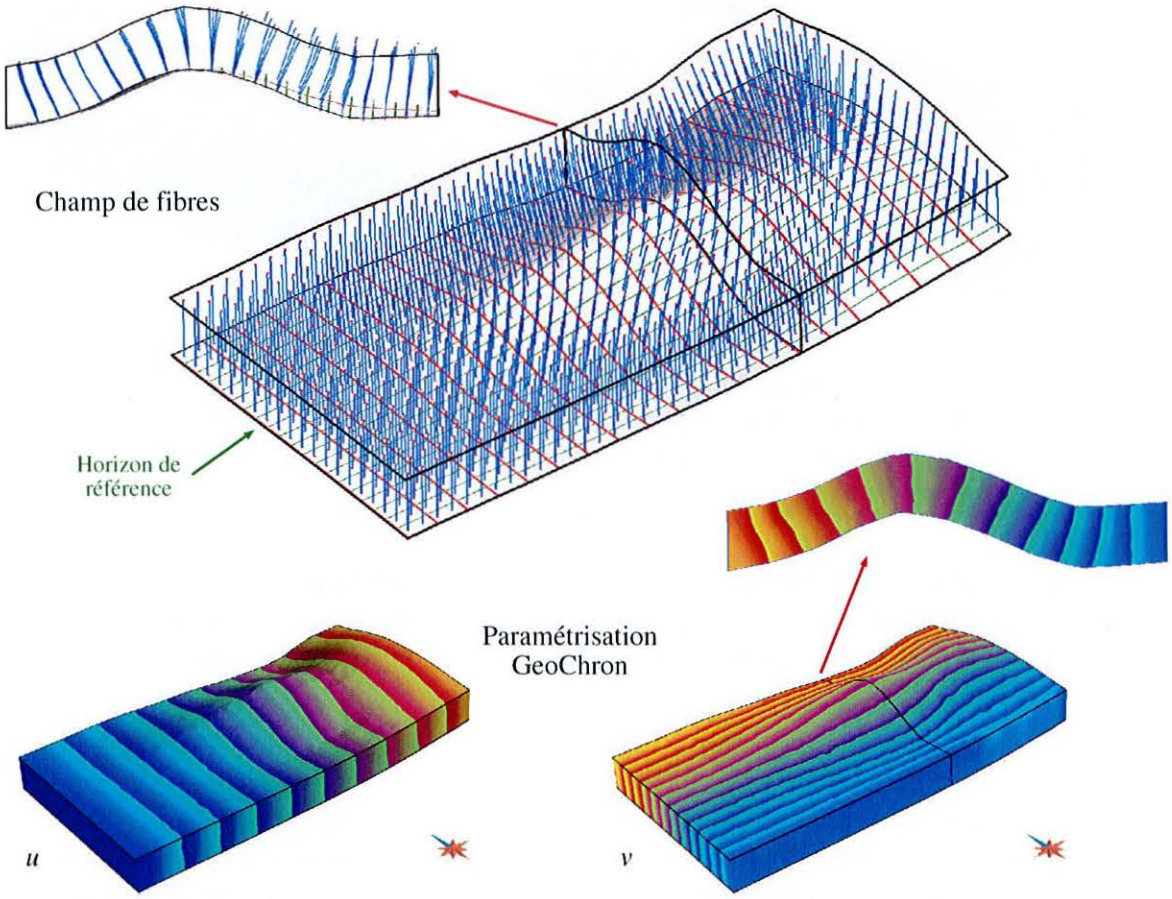



FIG. 3.19 : *Paramétrisation du modèle de Split Mountain par la méthode des fibres (exagération verticale ×2). En haut, champ de fibres extraites depuis l'horizon de référence. La coupe montre la courbure des fibres au centre du pli. En bas, paramétrisation GeoChron correspondante (seuls $(u, v)$ sont représentés, $t$ étant calculé indépendamment de la méthode de construction). La coupe dans la paramétrisation indique un style en* pure bending *(voir figure 3.20).*

des problèmes plus spécifiques que ceux abordés ici (par exemple, pour aligner les coordonnées paléo-géographiques $(u, v)$ sur des directions sédimentologiques ou structurales particulières, etc.).

L'approche locale nous a permis de construire des approximations des lignes IPG, dans un contexte de déformation en *pure bending* uniquement. Bien que limitée à ce contexte, cette approche est intéressante, car elle permet d'introduire l'objet « lignes IPG », qui peut ensuite être utilisé pour affiner localement la paramétrisation. De plus, la plupart des opérations de cette méthode s'implémentent avec des outils classiques de modélisation numérique. Enfin, cette méthode permet d'obtenir rapidement une solution initiale valide dans la plupart des cas.

L'autre approche, plus globale, consiste à déterminer des contraintes DSI valables en tout point du domaine, en accord avec le style de déformation du volume. Cette méthode

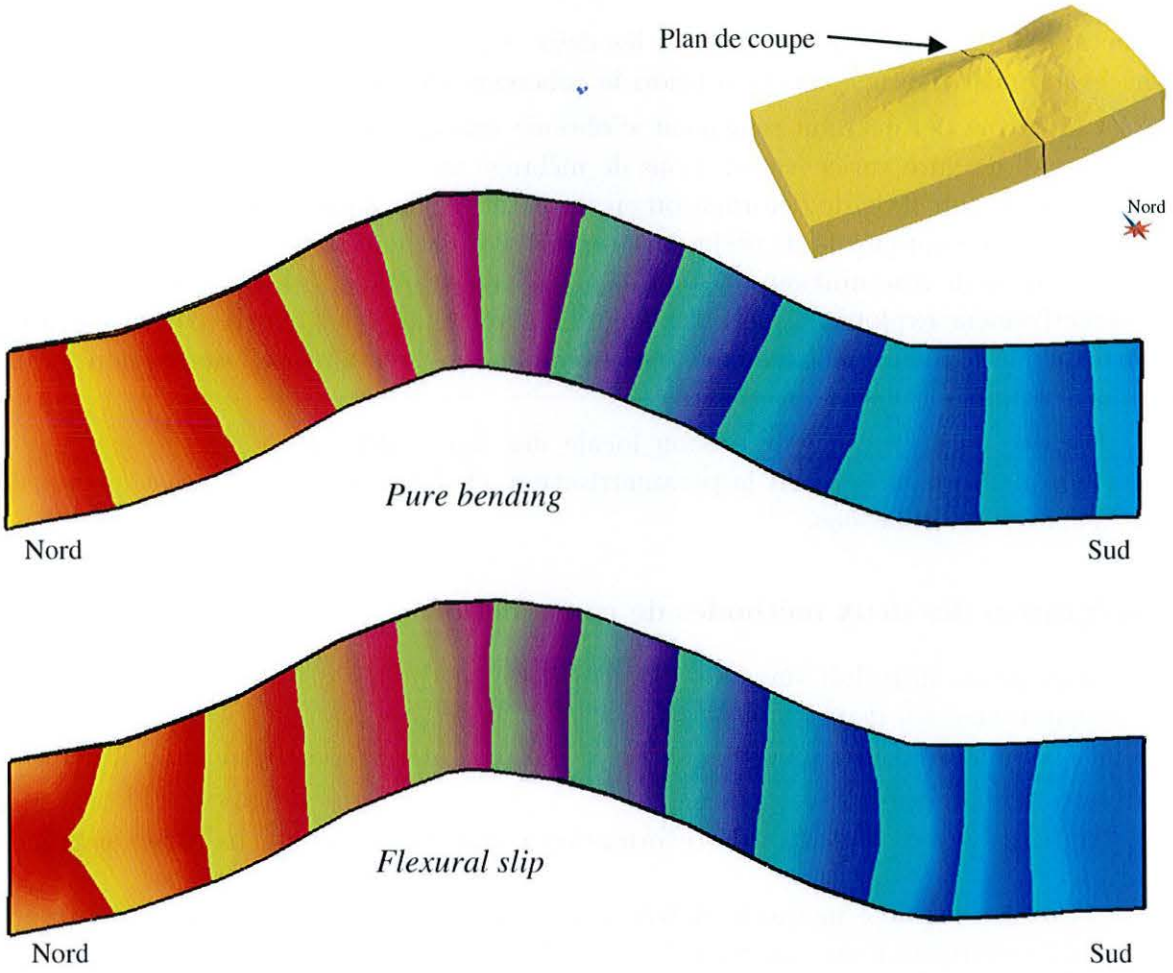



FIG. 3.20 : *Comparaison en coupe (exagération verticale ×2) entre les deux contraintes de paramétrisation globale. En haut, la paramétrisation obtenue par orthogonalité 3D, en bas par* conformal mapping *étendu. Les lignes sont similaires à celles observées suivant les styles de déformation (figures 2.10 et 2.12).*

est donc plus souple, mais elle nécessite d'être capable à priori de déterminer le style de déformation dominant dans les terrains étudiés.

### Styles de déformation intermédiaires

Quelle que soit la méthode utilisée, seuls les deux styles de déformation extrêmes opposés sont modélisés. Or, dans la nature, il est rare que les problèmes soient aussi simples. Dans certains cas, ces approximations sont valables, mais la plupart du temps, la réalité se situe entre les deux.

Il est toutefois possible d'affiner une paramétrisation GeoChron existante, afin de prendre en compte des styles de déformation intermédiaires. Pour cela, nous suggérons de calculer une paramétrisation correspondant à chaque extrême, et d'utiliser des coeffi-

cients de pondération pour combiner les deux. Une phase d'homogénéisation est ensuite nécessaire, car rien ne garantit à priori la cohérence des deux paramétrisations.

Cette voie permet non seulement d'obtenir une infinité de solutions intermédiaires, mais aussi de faire varier les fonctions de mélange au sein du domaine, permettant ainsi de privilégier un style de déformation en un point, et un autre ailleurs. De plus, certains critères géomécaniques issus de la paramétrisation, comme le tenseur de déformation ou les directions de fracturation, peuvent être calculés en temps réel. L'utilisateur peut alors interactivement explorer l'espace des fonctions de mélange jusqu'à trouver la solution qui corresponde le mieux aux données (par exemple des directions de fracturation mesurées dans des puits ou observées en surface).

D'autre part, les outils d'édition locale des lignes IPG décrits précédemment permettent d'affiner encore plus la paramétrisation, et d'intégrer des informations plus précises sur les déformations.

### Intégration des deux méthodes de construction

Nous avons introduit dans ce chapitre deux méthodes distinctes. Cependant, elles reposent toutes les deux sur les mêmes bases théoriques, et ont un certain nombre de points communs. Il est donc tout à fait possible d'utiliser partiellement les deux voies dans un même processus.

Ainsi, dans des contextes de déformation complexe, on peut envisager le processus suivant :

- En utilisant une méthode globale correspondant au style dominant, une première paramétrisation est construite.
- Parallèlement, quelques fibres sont construites, en des points particuliers du domaine. Ces fibres permettent, en particulier, d'assurer la cohérence de la paramétrisation au travers des failles. En effet, le vecteur rejet tel qu'il sera détaillé dans le chapitre suivant n'est pas toujours suffisant pour assurer une bonne propagation des valeurs. Quelques fibres permettent alors de mieux contraindre l'interpolation.
- Optionnellement, des lignes IPG peuvent être extraites depuis la paramétrisation initiale. Ces lignes peuvent ensuite être modifiées par l'utilisateur, si besoin est, pour mieux s'ajuster aux données.
- Enfin, la paramétrisation est ré-interpolée dans le volume, en prenant en compte non seulement les contraintes globales, mais aussi les fibres extraites précédemment, et les lignes IPG modifiées.

Enfin, la plupart des exemples présentés ici ne montrent que des domaines non-faillés. Nous avons évoqué la question de l'intégration des failles dans la construction des fibres, mais sans détailler la méthode de calcul des vecteurs rejet utilisée. Le chapitre suivant est consacré à ce problème, et présente une méthode de calcul des rejets, basée sur le paramètre *temps*, ainsi que son intégration, aussi bien dans le cadre du calcul d'une paramétrisation GeoChron que plus généralement.

# Chapitre 4

# Modélisation géométrique des rejets

Lorsqu'on considère un système géologique faillé, plusieurs aspects peuvent être envisagés. Nous avons vu comment la géométrie des failles pouvait être prise en compte dans la génération d'un maillage, mais il est souvent aussi indispensable de considérer le rejet des failles.

En altérant la géométrie des horizons de part et d'autre de la faille, le rejet a aussi une influence sur les propriétés pétrophysiques du milieu environnant. En effet, les propriétés de deux points voisins avant la rupture sont fortement corrélées et cette corrélation se retrouve après la rupture, en suivant le vecteur rejet.

Il est donc important, lorsqu'on cherche à modéliser des propriétés du sous-sol héritées de leur conditions de dépôt, de prendre en compte le rejet des failles. La modélisation par grille régulière faillée et déformée implique une connaissance à priori des rejets, lors de la construction de la grille : ceux-ci sont intégrés par les discontinuités de la grille.

Dans le cadre du modèle GeoChron, la connaissance des vecteurs rejet est indispensable à la construction d'un modèle cohérent et les résultats présentés dans ce chapitre sont donc cruciaux pour l'implémentation du modèle.

En géologie structurale, et dans les géomodeleurs 3D, le rejet est habituellement quantifié par un vecteur ([Pomerol *et al.*, 2002]) situé dans le plan de faille et qui indique un couple de points de part et d'autre de la faille, initialement en vis à vis. On peut décomposer ce rejet en trois dimensions en deux termes[1](figure 4.1), situés dans le plan de la faille :

- une composante normale ou inverse (suivant le sens de mouvement de la faille) qui exprime le déplacement vertical ;
- et une composante décrochante, qui exprime le déplacement horizontal.

On notera aussi que le rejet peut varier le long d'une faille et changer soit d'intensité, soit de direction. Ainsi, par exemple, le rejet sera nul aux bords d'une faille et pourra être maximum à son centre.

[1]Ou parfois (par exemple en coupe) en trois termes, deux exprimant les composantes verticales et horizontales de la projection du vecteur rejet dans le plan de coupe, et une indiquant le déplacement perpendiculairement au plan de coupe.

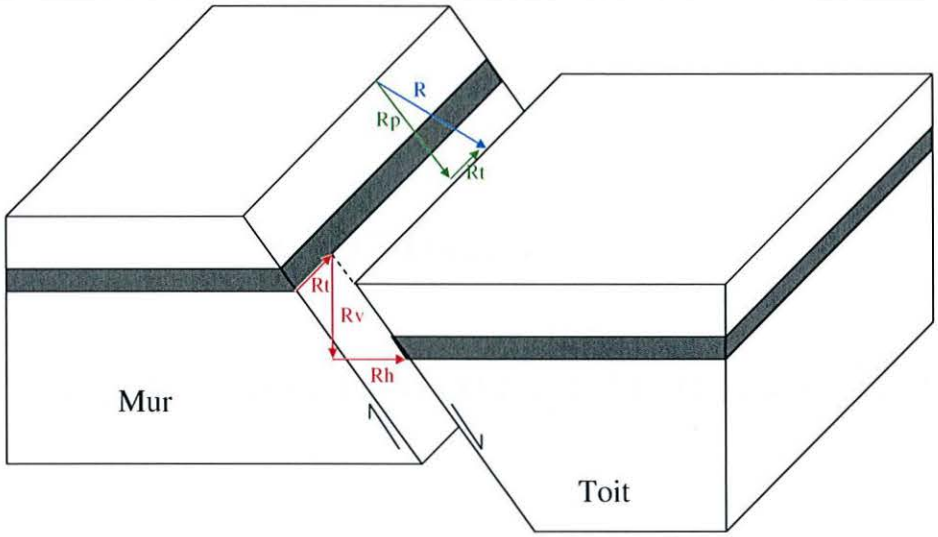



FIG. 4.1 : *Modélisation d'un vecteur rejet (en bleu), à l'aide de deux composantes $R_p$ et $R_t$ (en vert) ou de trois composantes $R_t$, $R_v$ et $R_h$ (en rouge).*

Modéliser le rejet d'une faille signifie donc pouvoir donner, en un échantillonnage suffisant de la faille, le vecteur rejet. D'un point de vue numérique, il est aussi nécessaire de fournir des équations permettant de prendre en compte ce vecteur dans les calculs, par exemple en tant que contrainte DSI.

## 4.1 Calcul du vecteur rejet

Nous cherchons à estimer le rejet en trois dimensions dans un volume. Dans un premier temps, nous allons voir comment il peut être calculé, en deux dimensions, sur un horizon géologique, puis nous montrerons pourquoi cette technique ne peut pas être étendue correctement en trois dimensions. Nous proposerons alors deux méthodes successives permettant de calculer le rejet en trois dimensions.

### 4.1.1 Estimation du rejet sur un horizon

Dans cette partie, nous considérerons un horizon géologique $H$, découpé par une ou plusieurs failles et représenté par une surface triangulée. Le problème est de rejoindre les lèvres de faille de manière géologiquement cohérente, par un ensemble de vecteurs rejet. Ce problème a déjà été traité, en particulier dans le géomodeleur GOCAD (voir [Mallet, 2002]). Pour plus de détails, on pourra ici se reporter aux travaux de R. Cognot ([Cognot, 1996]).

La méthode se divise en deux grandes étapes : dans un premier temps, la détermination des bords de triangles composant les lèvres de faille, puis la création des rejets eux-mêmes.

### Détermination des lèvres de faille

Pour détecter les lèvres de faille, ainsi que leurs limites, on définit un modèle macro-topologique sur les surfaces triangulées. Ce modèle va distinguer des éléments de différentes dimensions topologiques (figure 4.2) :

- les éléments de dimension 2 sont les morceaux de surface connexes appelés *faces* ;
- les éléments de dimension 1 sont les bordures de la surface, aussi appelés *bords logiques*, c'est-à-dire les extrémités des éléments de dimension 2 ;
- enfin, les éléments de dimension 0 sont les extrémités des éléments de dimension 1, c'est-à-dire les nœuds terminant les bordures, appelés *extrémités de bordure*.

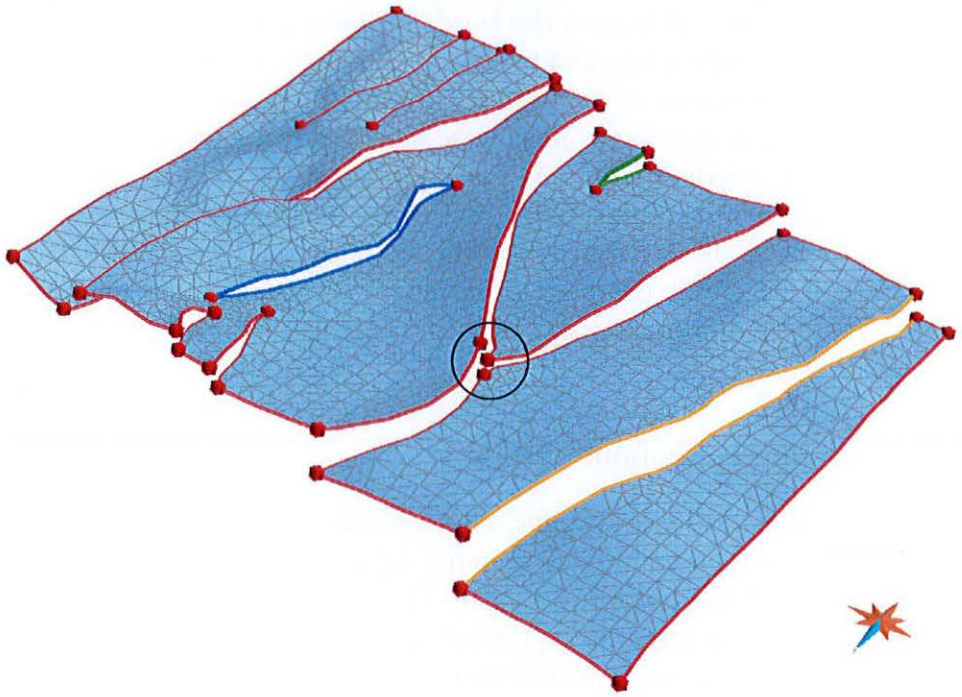


FIG. 4.2 : *Modèle macro-topologique d'une surface triangulée. Les extrémités de bordure sont figurées par les boules rouges, les bords logiques par les traits de couleur. En bleu, deux bords logiques correspondant à une faille entièrement incluse dans le domaine d'étude, qui partagent les mêmes extrémités. En vert, une faille touchant une limite du domaine d'étude, avec deux extrémités sur cette limite. En orange, une faille touchant deux limites du domaine d'étude. Le cercle noir indique un endroit où il est nécessaire d'ajouter des extrémités de bordure au milieu des traces de failles, afin d'assurer la cohérence des bords logiques de part et d'autre de la faille.*

Un horizon peut donc être composé de plusieurs faces, elles-mêmes délimitées par plusieurs bords logiques, chaque bord logique étant terminé par deux extrémités de bordure, et chaque extrémité de bordure connecte deux bords logiques[2].

[2]Chaque composante connexe des surfaces triangulées considérées est toujours *manifold*, c'est-à-dire homothétique à un disque du plan, donc il ne peut pas exister de branchement de trois bords logiques au même nœud.

Par la suite, les bords logiques seront associés deux à deux pour construire les vecteurs rejet, il est donc nécessaire que les extrémités de bordure soient cohérentes des deux côtés de la faille. Cela peut obliger à représenter une lèvre de faille par plusieurs bords logiques, comme dans l'exemple présenté dans le cercle noir sur la figure 4.2, où deux bords logiques sont nécessaires pour la lèvre de faille en haut à gauche, car l'autre lèvre est divisée par la jonction des deux failles.

D'autre part, certaines failles ne coupent pas entièrement l'horizon en deux faces distinctes. Dans ce cas, une extrémité de bordure est placée à la terminaison de la faille et les deux bords logiques qui en partent, un de chaque côté de la faille, forment les deux lèvres de faille. La figure 4.2 détaille les différents cas possibles.

Il apparaît donc que la définition des bords logiques se fait en réalité par le placement des extrémités de bordure. Cependant, il n'existe pas de solution automatique systématique pour placer correctement toutes les extrémités de bordure. La méthode utilisée généralement consiste à observer l'angle entre deux segments successifs du bord de l'horizon : si cet angle est supérieur à un seuil, par exemple 30 ou 40 degrés, alors une extrémité de bordure est placée en ce point. Cela permet de détecter la plupart des extrémités de bordure nécessaires, mais pas toutes (sur la figure 4.2, les extrémités supplémentaires dans le cercle noir ne seront pas placées automatiquement) et peut en ajouter certaines inutiles sur l'extérieur du domaine d'étude. Un contrôle manuel par l'utilisateur est donc indispensable.

### Association des lèvres de faille

Une fois les lèvres de faille définies, elles doivent être associées deux à deux. Pour cela, on considère que l'ensemble des vecteurs rejet définit une transformation continue qui permet de passer d'une bordure à l'autre. Étant donné deux lignes $\mathcal{L}$ et $\mathcal{L}'$ entre deux paires d'extrémités de bordures $(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1)$ et $(\mathbf{x}'_0, \mathbf{x}'_1)$, deux fonctions de paramétrisation 1D $u(\mathbf{x})$ et $u'(\mathbf{x}')$ de $\mathcal{L}$ et $\mathcal{L}'$ peuvent être définies ainsi :

$$\left| \begin{array}{rcll} u(\mathbf{x}) & = & \frac{s(\mathbf{x}_0,\mathbf{x})}{s(\mathbf{x}_0,\mathbf{x}_1)} & \forall \mathbf{x} \in \mathcal{L} \\ u'(\mathbf{x}') & = & \frac{s(\mathbf{x}'_0,\mathbf{x}')}{s(\mathbf{x}'_0,\mathbf{x}'_1)} & \forall \mathbf{x}' \in \mathcal{L}' \end{array} \right.$$

où $s(\mathbf{x}_\alpha, \mathbf{x})$ est la distance curvilinéaire entre $\mathbf{x}_\alpha$ et $\mathbf{x}$.

Comme les déformations géologiques peuvent engendrer des lèvres de faille de longueurs très différentes, on ne peut pas utiliser directement la distance curvilinéaire. Cette paramétrisation assure que $\mathbf{x}_0$ et $\mathbf{x}'_0$ seront bien reliés par un vecteur rejet, de même que $\mathbf{x}_1$ et $\mathbf{x}'_1$. Cependant, si la trace de la faille est limitée non pas par sa terminaison géologique, mais par le bord du modèle, les distances mesurées le long de chaque lèvre de faille ne sont pas forcément cohérentes (voir figure 4.3), car le bord du modèle est déterminé indépendamment de la géologie. Dans ce cas, l'erreur commise sera moins importante en utilisant la distance curvilinéaire depuis l'extrémité de bordure interne, que la paramétrisation détaillée ci-dessus. Le modèle topologique des surfaces décrit précédemment ne permet pas de distinguer ce type de situations, mais nous verrons par la suite que grâce à un modèle topologique 3D, cette information peut être obtenue.

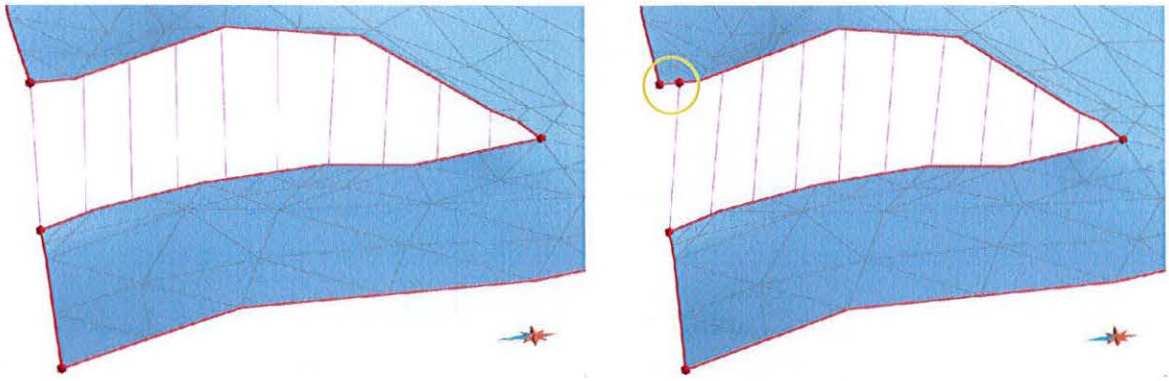


FIG. 4.3 : *Installation de rejets sur une surface, le long d'une faille coupant le bord du domaine d'étude. À gauche, les lèvres de faille sont associées suivant leur paramétrisation 1D, les rejets sont erronés car les deux extrémités de bordure de gauche correspondent au bord du modèle et n'ont aucune réalité géologique. À droite, les lèvres sont associées suivant la distance curvilinéaire depuis l'extrémité de bordure interne, les rejets ne vont plus jusqu'au bord du modèle mais sont corrects.*

Ensuite, comme le montre la figure 4.3, un ensemble $\mathcal{V}(\mathcal{L}, \mathcal{L}') = \{\mathcal{V}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'), (\mathbf{x}, \mathbf{x}') \in \mathcal{L} \times \mathcal{L}'\}$ de rejets est construit entre $\mathcal{L}$ and $\mathcal{L}'$, avec une densité donnée $d$ qui indique le nombre de rejets installés le long des lignes :

$$\mathcal{V}(\mathcal{L}, \mathcal{L}') \quad \Longleftrightarrow \quad \left\{ \mathcal{V}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \; ; \; \left| \begin{array}{rcll} \mathbf{x} & = & u^{-1}(k/d) & \\ \mathbf{x}' & = & u'^{-1}(k/d) & \end{array} \right. \quad \forall \; k \in [0, d] \right\}$$

Les rejets sont généralement utilisés pour contraindre l'interpolation de propriétés sur la surface faillée, or les propriétés sont elles-mêmes définies uniquement aux nœuds des triangles qui forment l'horizon. Il est donc inutile d'avoir plus d'un rejet par segment formant les bordures et on choisit généralement le paramètre $d$ égal au maximum du nombre de triangles formant $\mathcal{L}$ ou $\mathcal{L}'$.

Cette méthode est très efficace, mais est encore difficile à automatiser, car aucun critère absolu ne permet d'associer deux à deux les bords logiques à relier : certains couples sont sur des faces différentes, d'autres sur une même face, la distance entre les couples peut être relativement grande ou encore leur géométrie peut être très différente. Des critères géométriques permettent de deviner la plupart des associations, mais un contrôle manuel par l'utilisateur reste encore indispensable.

Enfin, l'association des bordures par simple mise en correspondance de points ayant les mêmes coordonnées paramétriques de part et d'autre est une simplification abusive et incorrecte. En effet, la figure 4.4 donne un exemple dans lequel, les lèvres de faille ayant des longueurs et des géométries très différentes, les rejets peuvent croiser plusieurs fois les horizons, ce qui est bien évidemment inexact. Sur cet exemple, il est clair que les rejets devraient être calculés non pas en fonction de la paramétrisation de chaque lèvre de faille, mais en fonction de la géométrie des deux lèvres, de telle sorte que les rejets s'adaptent parfaitement aux deux lèvres.

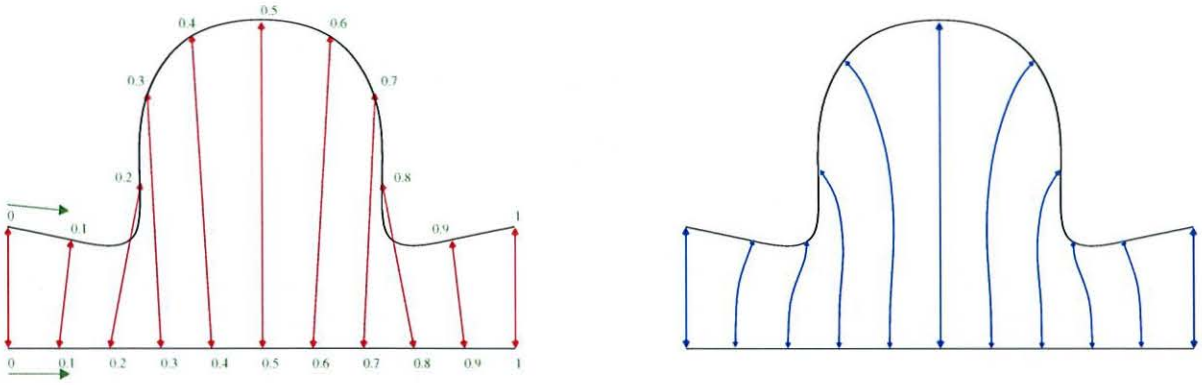



FIG. 4.4 : *Vue en coupe de l'association de deux lèvres de faille par des rejets. À gauche, en reliant par un segment des points désignés par les mêmes coordonnées paramétriques (en vert), certains vecteurs rejet peuvent croiser les horizons. À droite, une solution plus réaliste où les rejets sont tracés en suivant les courbures des deux lèvres.*

### Généralisation en trois dimensions

La méthode que nous venons de décrire pourrait-elle être adaptée à la construction des vecteurs rejet non plus sur un horizon, mais directement dans un volume ? Deux objections peuvent être faites.

Si on considère un volume $V$ et non plus un horizon, il s'agit alors de relier non plus deux points situés sur deux lignes (les lèvres de faille), mais deux points situés sur deux surfaces (les plans de faille). On chercherait donc, dans un premier temps, à définir les plans de faille jumeaux, puis dans un deuxième temps, à paramétriser ces plans de faille pour associer deux à deux les points de mêmes coordonnées paramétriques.

La définition des plans de faille jumeaux nécessite la connaissance d'un modèle macro-topologique des volumes, qui définirait des volumes, des faces en formant les bords, des lignes délimitant ces faces et enfin des nœuds terminant ces lignes. La principale difficulté ici est la construction de ce modèle topologique : dans le cadre des horizons, il suffisait de placer les extrémités de bordure. Ici, il faudrait pouvoir placer les extrémités de bordure, mais aussi les lignes les joignant. De plus, une extrémité de bordure peut tout à fait validement joindre plus de deux lignes. Ce modèle est donc plus complexe à construire, et ne peut pas être réalisé manuellement par un utilisateur. Une automatisation est donc indispensable.

Ensuite, la paramétrisation 2D des plans de faille est plus complexe que la paramétrisation 1D des lèvres de faille, pour plusieurs raisons :

- D'abord, une ligne ayant deux extrémités bien définies, une paramétrisation peut très simplement être définie en suivant cette ligne. En deux dimensions, le plan de faille n'est pas obligatoirement délimité par deux paires de bords logiques, il peut en avoir plus, ou moins, et la définition d'une paramétrisation n'est plus alors aussi simple et systématique. De ce fait, il n'est généralement pas possible de mettre en place une correspondance bijective entre les deux paramétrisations plaquées sur les plans de faille jumeaux.

- D'autre part, la paramétrisation 1D des lignes doit respecter une seule contrainte, très simple (l'une des extrémités aura pour valeur 0, et l'autre 1). Pour les plans de faille, les contraintes sont plus complexes, puisqu'il faut s'assurer que les traces des failles, donc des lignes, auront bien les mêmes coordonnées paramétriques sur toute leur longueur, de part et d'autre de la faille. Cela peut être fait en imposant à l'une des composantes de la paramétrisation 2D d'être constante le long de ces lignes, mais cela peut alors être en conflit avec d'autres contraintes.

Enfin, la densité des liens n'est pas aisée à contrôler, puisqu'un échantillonnage régulier le long des deux coordonnées paramétriques ne correspondra pas forcément au maillage triangulé des plans de faille.

Pour toutes ces raisons, il semble difficile d'adapter directement aux volumes la méthode utilisée sur les horizons issue des travaux de R. Cognot ([Cognot, 1996]). Dans les parties suivantes, nous proposons deux méthodes alternatives, qui permettent de contourner ces problèmes et de calculer des vecteurs rejet directement et automatiquement en trois dimensions.

### 4.1.2 Estimation du rejet par surfaces d'isovaleur

Dans le cadre de la paramétrisation GeoChron, le vecteur rejet relie deux particules qui se sont déposées au même instant géologique. Ceci signifie que ces deux points ont la même valeur de *temps*. Nous avons donc essayé de modéliser le vecteur rejet sur une succession de surfaces d'isovaleurs du paramètre *temps*, supposé déjà connu.

Le problème se décompose alors en trois étapes successives :

1. construire, pour une valeur $t_i$ donnée, la surface d'isovaleur *temps*$= t_i$ ;
2. sur cette surface, estimer le vecteur rejet en tout point des traces des failles ;
3. reporter ces rejets dans le volume initial.

#### Extraction de surfaces d'isovaleur

La première étape est relativement aisée et correspond à des algorithmes bien connus (voir par exemple [Lorensen et Cline, 1987]). Chaque tétraèdre traversé par la surface d'isovaleur génère un ou deux triangles, sachant qu'un tétraèdre est traversé par la surface si au moins un de ses sommets porte une valeur de *temps* supérieure à $t_i$ et un autre une valeur inférieure à $t_i$. La figure 4.5 illustre ce principe de construction.

L'inconvénient majeur de cette méthode est qu'elle génère des triangles dont la forme dépend uniquement de la forme des tétraèdres et de la position de la surface dans les tétraèdres. De ce fait, la beauté des triangles[3] est généralement assez faible (voir figure 4.6). Si cette surface n'est utilisée qu'à des fins de visualisation du modèle, ceci n'est pas gênant car la surface ne fait que représenter les variations réelles de la propriété. En

[3]La beauté d'un triangle ou d'un tétraèdre est définissable de différentes manières ([Chipot, 1991], [George et Borouchaki, 1997], [Labbé *et al.*, 1999]) en fonction des rayons $r$ et $R$ des cercles inscrits et circonscrits au triangle, ainsi que des longueurs $l$ et $L$ de sa plus courte et de sa plus longue arête (par exemple, les rapports $R/l$ ou $L/r$ ou $r/R$) ou des angles aux sommets.

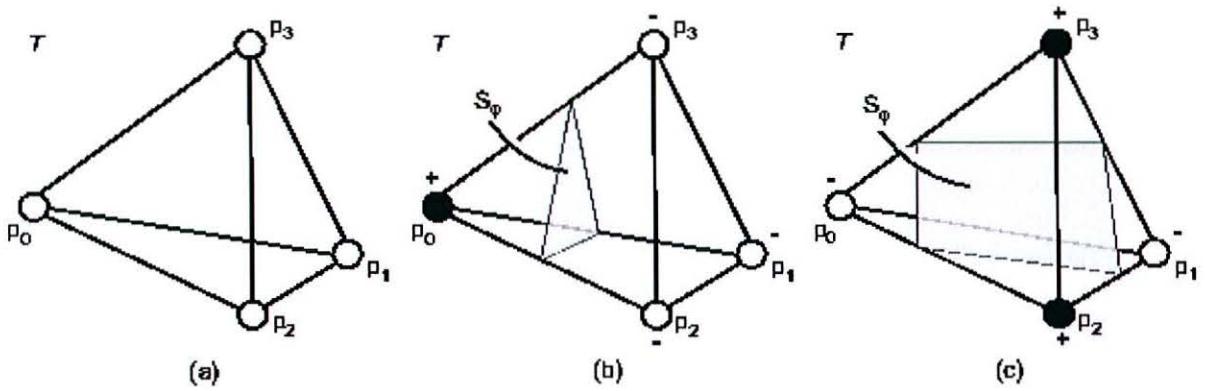



FIG. 4.5 : *Tétraèdre $T$ traversé par une surface d'isovaleur $S_{\varphi_0}$ d'une propriété $\varphi$ définie aux nœuds de ce tétraèdre ([Frank, 2004]). (a) Les valeurs de $\varphi$ aux nœuds de $T$ sont soit toutes supérieures à $\varphi_0$, soit inférieures, $\{S_\varphi \cap T\} = \emptyset$. (b) Un des nœuds a une valeur de $\varphi$ supérieure à $\varphi_0$, les trois autres ont des valeurs inférieures (ou le contraire), $\{S_\varphi \cap T\}$ est composé d'un seul triangle. (c) Deux nœuds ont des valeurs supérieures à $\varphi_0$, deux ont des valeurs inférieures, $\{S_\varphi \cap T\}$ contient deux triangles.*

revanche, si la surface est destinée à être utilisée dans des calculs plus complexes, cette faible beauté peut rendre certains algorithmes instables. Dans notre cas cela n'aura pas d'influence mais cette question doit être gardée à l'esprit.

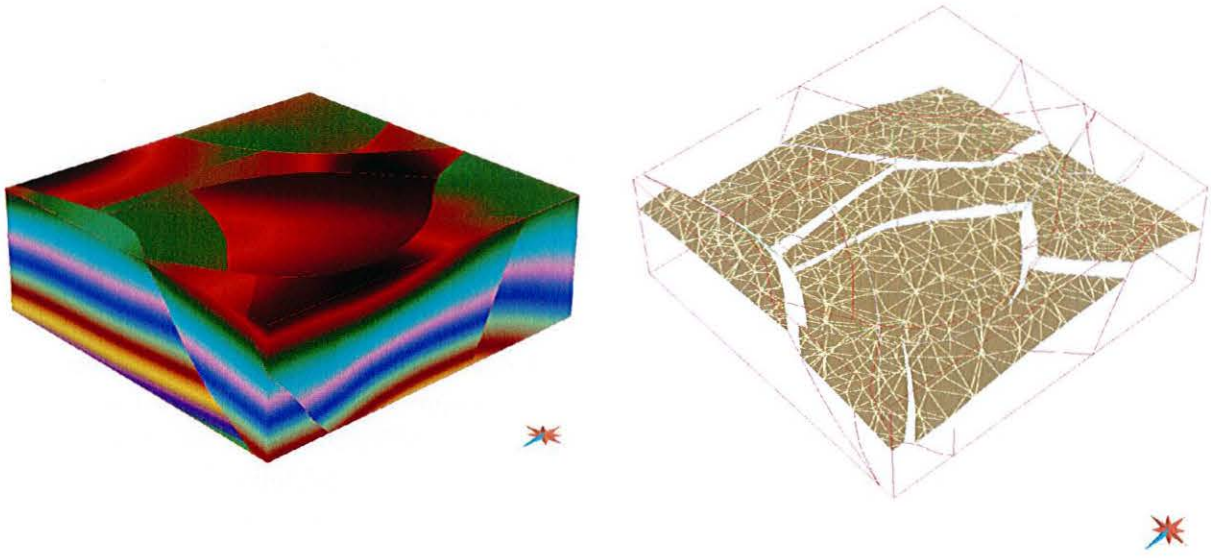


FIG. 4.6 : *Extraction d'une surface d'isovaleur. À gauche, volume tétraédrisé peint avec la propriété* temps *définie aux nœuds ; à droite, surface d'isovaleur triangulée extraite de ce volume (les lignes rouges figurent les lignes radiales du* Soft Frame Model *c'est-à-dire les traces des failles dans le modèle).*

Cette méthode a été adaptée à notre contexte, en particulier en conservant en mémoire, sur chaque triangle, le tétraèdre depuis lequel il a été extrait. Ceci permet de faciliter

grandement la troisième étape de la méthode, qui consiste à reporter les vecteurs rejet des bords des surfaces d'isovaleur vers les faces de tétraèdres correspondants.

### Estimation du vecteur rejet sur un horizon

Dans un deuxième temps, il s'agit de construire les vecteurs rejet sur l'horizon $H_{t_i}$ défini par cette surface d'isovaleur. Ce problème a déjà été traité dans le paragraphe précédent et la méthode peut être appliquée ici.

Cependant, nous avions vu qu'un modèle topologique des surfaces triangulées était indispensable et que ce modèle ne pouvait pas être entièrement construit automatiquement. Bien que ce ne soit pas trop gênant pour un seul horizon, ceci est inacceptable dans le cas d'un nombre quelconque d'horizons, qui seraient extraits automatiquement à partir de la propriété *temps*. Il est donc indispensable de trouver une solution pour automatiser la construction du modèle topologique.

Dans le cas présent nous disposons d'un modèle topologique du volume tétraédrisé, le *Soft Frame Model* décrit au paragraphe 1.2.1. Ce modèle topologique définit les faces, arêtes et sommets du volume ainsi que les relations entre ces éléments. Il est alors possible, lors de l'extraction de la surface d'isovaleur correspondant à un horizon, d'obtenir les informations nécessaires à la construction du modèle topologique sur cette surface :

1. Sous forme de pré-traitement, chaque arête du *Soft Frame Model* est identifiée par un indice unique $\omega_i$. Ceci permettra de retrouver comment associer les bords logiques de part et d'autre d'une faille sur l'horizon extrait.
2. Lors de l'extraction de l'horizon dans un tétraèdre ayant une arête sur l'une des arêtes du modèle topologique, il se peut que l'un des sommets du ou des triangles extraits se situe sur cette arête. Dans ce cas, une extrémité de bordure sera ajoutée sur la surface, sur ce nœud. L'indice $\omega_i$ de l'arête du *Soft Frame Model* est stocké sur cette extrémité de bordure (voir figure 4.7).
3. Similairement, chaque triangle de la surface extraite stocke l'adresse du tétraèdre à partir duquel il a été construit, ce qui permettra ensuite de reporter les rejets de l'horizon vers le volume.
4. Sur la surface extraite, si deux bords logiques sont définis par le même couple d'indices $(\omega_i, \omega_j)$ alors ces deux bords doivent être reliés par une série de rejets.

Lorsque deux bords logiques à relier commencent à l'intérieur de la surface et se terminent sur la limite du domaine d'étude, une étape supplémentaire est ajoutée afin de prendre en compte non pas la distance paramétrique le long de chaque bord, mais plutôt la distance réelle. Comme l'illustre la figure 4.3, cela est réalisé en ajoutant une extrémité de bordure fictive sur le bord logique le plus long à un point correspondant à la longueur du bord logique le plus court.

Enfin la troisième étape, la copie des rejets ainsi construits vers le volume, est assez aisée puisqu'il s'agit simplement de reporter les points construits sur des surfaces dans des tétraèdres. Comme indiqué précédemment, chaque triangle de la surface sait de quel tétraèdre il a été extrait. Pour chaque rejet, il suffit donc de repérer les deux triangles de part et d'autre du vecteur puis de remonter aux tétraèdres.

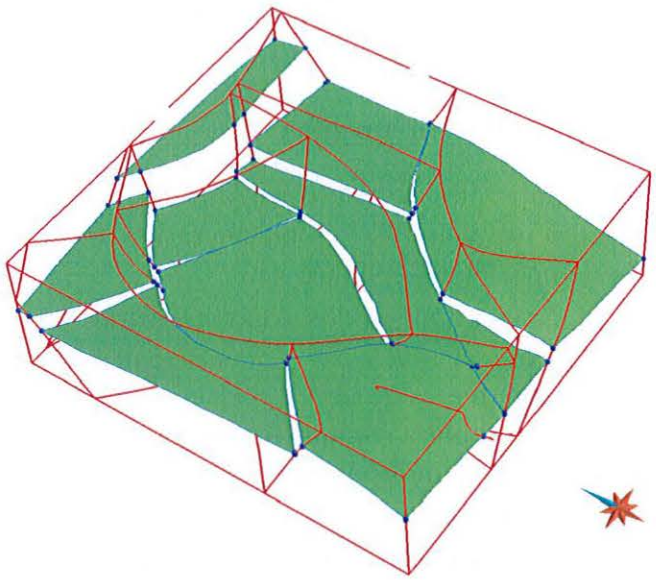


FIG. 4.7 : *Surface d'isovaleur extraite depuis un volume tétraédrisé et sur laquelle des extrémités de bordure (boules bleues) ont été installées automatiquement. Toutes les extrémités de bordure sont situées sur des arêtes du modèle (en rouge) et les extrémités situées sur la même arête sont associées.*

### Résultats et limitations de la méthode

La figure 4.8 montre un exemple de résultat de cette méthode. Les rejets calculés sont cohérents et sont bien échantillonnés tout le long de la surface. En répétant ce calcul pour plusieurs valeurs de $t_i$, on obtient ainsi des rejets couvrant la totalité des surfaces de faille (voir figure 4.9).

Cependant, plusieurs remarques peuvent être faites :

1. D'abord, il est nécessaire de spécifier les différentes valeurs de $t_i$ à partir desquels des surfaces d'isovaleurs puis des rejets doivent être extraits. Une supervision de la méthode par l'utilisateur est donc indispensable pour assurer une densité de vecteurs rejet satisfaisante. Il serait toutefois possible de perfectionner cette étape en calculant la densité des vecteurs rejet le long des failles, perpendiculairement au *temps*, et de calculer ainsi automatiquement un ensemble de valeurs de $t_i$ permettant d'obtenir une densité voulue.
2. De plus, l'automatisation du processus d'association des bordures de la surface provoque parfois la création de rejets totalement incohérents, lorsque la surface d'isovaleur est coupée par les bords du modèle (voir figure 4.10). Il n'est pas toujours possible de repérer aisément et à priori tout ces schémas et une étape de vérification est nécessaire pour effacer manuellement ces rejets défectueux.
3. D'autre part, nous avons vu qu'il est nécessaire d'avoir un modèle topologique complet et cohérent sur le volume tétraédrisé afin d'être en mesure de positionner automatiquement les extrémités de bordure et d'associer les paires de bordures. Un tel modèle est complexe à bâtir et a été décrit plus en détail dans le paragraphe 1.2.1.

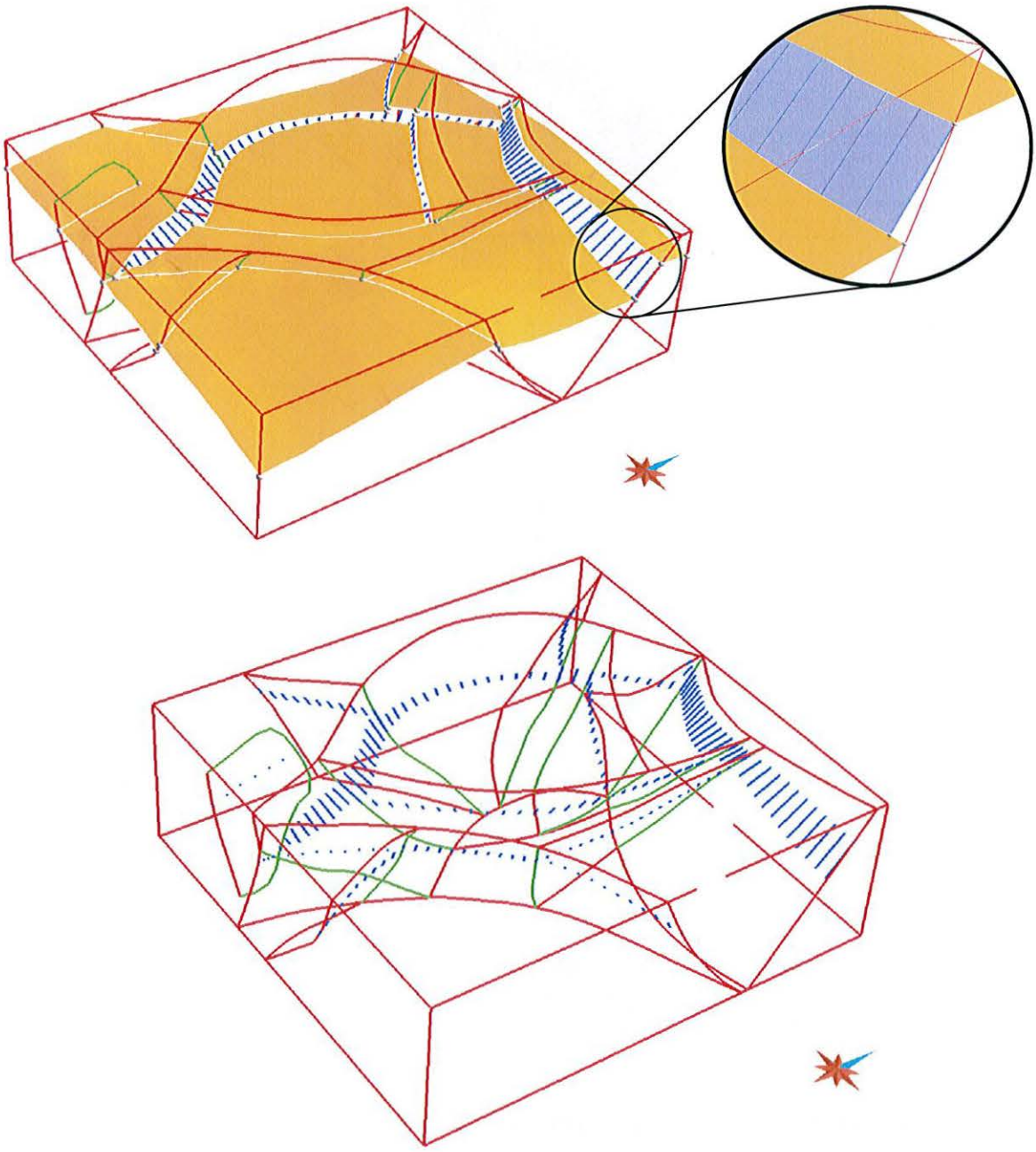


FIG. 4.8 : *En haut, calcul des rejets sur une surface d'isovaleur et, en bas, copie de ces rejets dans le volume tétraédrisé. Noter que, pour les lèvres de faille qui touchent le bord du modèle (dans le cercle, par exemple), l'appariement s'est fait suivant la distance curvilinéaire le long de la lèvre et non pas suivant la paramétrisation 1D des deux lèvres.*

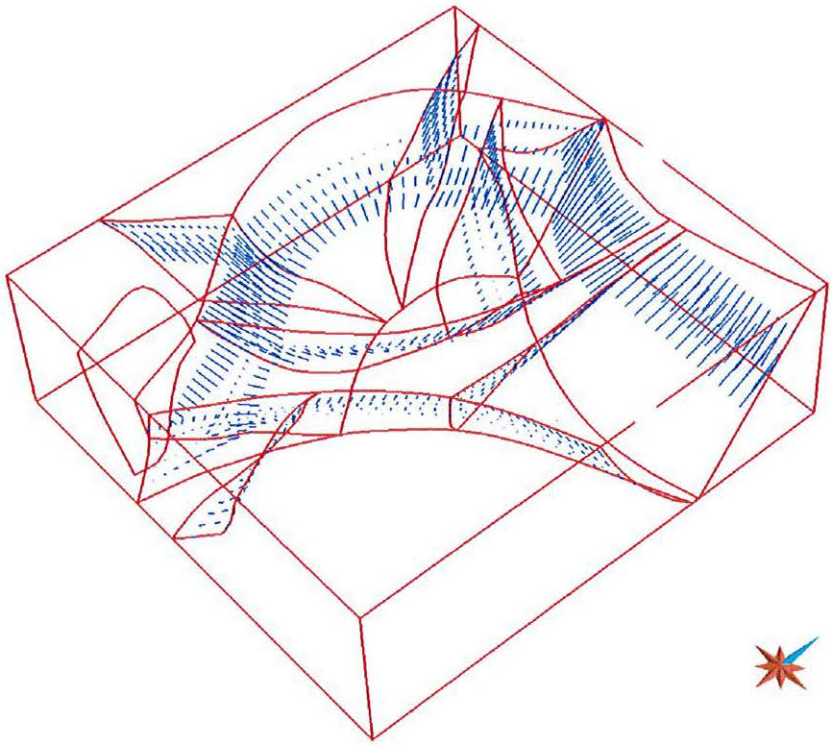


FIG. 4.9 : *Ensemble de vecteurs rejet générés automatiquement à différentes valeurs de* temps *dans un volume tétraédrisé. Le calcul par surface d'isovaleur de t génère des vecteurs rejet situés dans des plans particuliers et non pas répartis de manière homogène sur les surfaces de faille.*

4. Enfin, nous avons vu que les rejets calculés à partir d'une paramétrisation 1D des lignes de faille étaient faux et pouvaient mener à des incohérences (figure 4.4). Dans le cas d'un horizon, il était impossible de résoudre ce problème. Cependant, dans notre cas, nous disposons maintenant d'informations supplémentaires qui vont permettre de le résoudre correctement.

Ces différentes raisons et en particulier le dernier problème, qui est un problème théorique et non pas simplement d'implémentation, nous ont mené à chercher une autre méthode pour calculer les rejets.

### 4.1.3 Estimation du rejet par surfaces de faille

Le principe général de la méthode précédente, par surfaces d'isovaleurs, n'est pas remis en cause par les objections soulevées à propos de la construction des rejets sur une surface. Nous proposons donc d'adapter simplement cet algorithme de construction pour résoudre le problème.

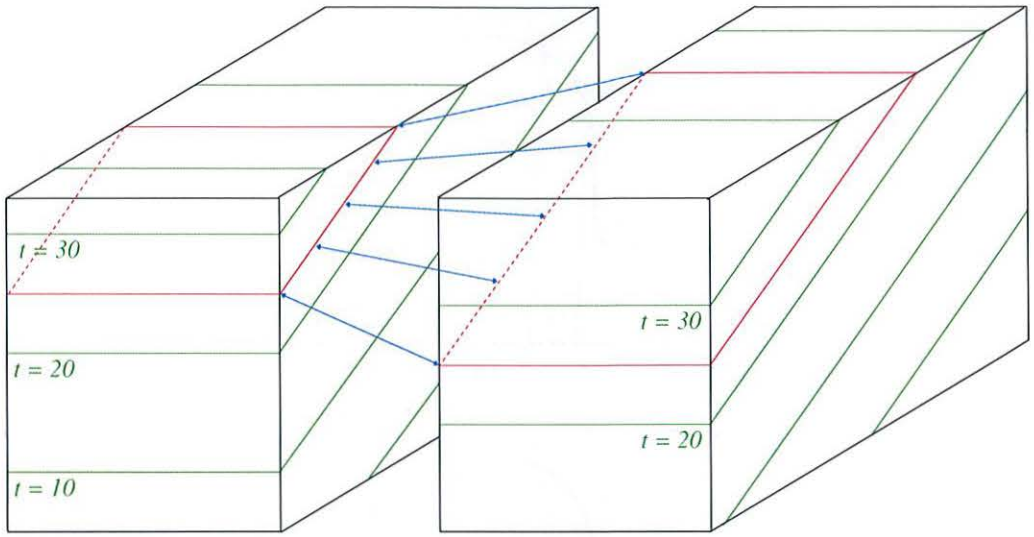



FIG. 4.10 : *L'association automatique des bords logiques peut parfois conduire à des incohérences sur les bords du modèle. Ici, les deux bords de la surface d'isovaleur rouge* $t = 25$ *ont des longueurs très différentes à cause de leur intersection avec les limites du modèle mais ils coupent les mêmes arêtes du volume : ils sont donc abusivement associés.*

### Une meilleure estimation du rejet : la normale aux horizons

La figure 4.4 illustre d'une part une situation où la paramétrisation 1D de chaque lèvre de faille amène à des résultats incorrects et d'autre part la solution attendue qui se doit de posséder les caractéristiques suivantes :

- les extrémités des lèvres de faille sont reliées entre elles ;
- les vecteurs rejet ne se croisent jamais ;
- la variation entre deux vecteurs rejet voisins est la plus faible possible (en d'autres termes, le champ des vecteurs rejet est les plus lisse possible).

On peut observer que, dans le cas d'une paramétrisation 1D des lèvres de faille, les vecteurs rejet sont en règle générale colinéaires au vecteur normal aux lèvres en leur point de départ (voir figure 4.11-(a)). Nous proposons de généraliser ce principe et de calculer les rejets en suivant systématiquement le vecteur normal aux lèvres de faille.

Il est important de noter que dans le cas général les deux lèvres de faille ne sont pas parallèles. On ne peut donc pas se contenter de calculer le vecteur normal sur une des lèvres et de suivre sa direction jusqu'à rencontrer l'autre lèvre. Toutefois, il est possible de calculer, en tout point entre les deux lèvres, un champ de vecteurs qui soit simultanément en accord avec les normales aux deux lèvres de faille (figure 4.11-(b)). Les vecteurs rejet sont ensuite calculés en suivant, depuis un point de départ sur l'une des lèvres, le champ de vecteurs jusqu'à l'autre lèvre, par des méthodes similaires à celles utilisées pour le suivi de lignes de courant.

Il est à noter que, dans un modèle en 3D, le vecteur normal à une ligne n'est pas défini. En revanche, nous pouvons utiliser le vecteur normal à l'horizon. Celui-ci n'est pas

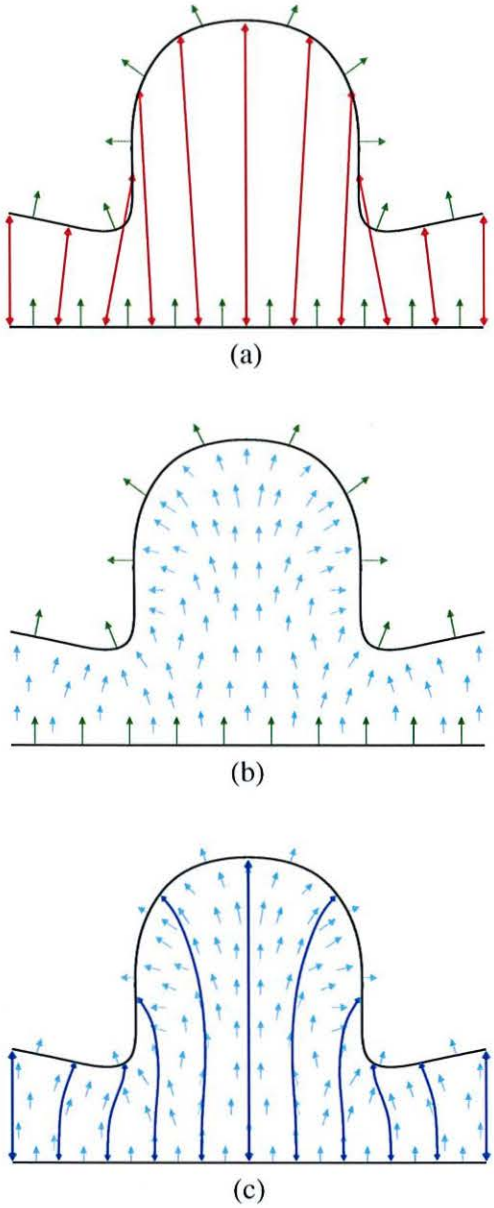



FIG. 4.11 : *Vue en coupe de deux lèvres de faille. (a) Les rejets calculés en utilisant la paramétrisation 1D des lèvres de faille peuvent croiser les horizons. (b) Champ de vecteurs interpolé entre les deux lèvres à partir de la normale à ces lèvres en tout point. (c) Trajectoire des rejets extraits en suivant le champ de vecteurs.*

dans le plan de la faille mais il peut être projeté sur la faille en tout point. Dans ce cas la projection du gradient est égale au gradient calculé dans le triangle situé sur le plan de faille, il est donc très facile à calculer.

Enfin, il existe plusieurs méthodes pour suivre un champ de vecteurs. Dans le chapitre précédent, nous avons utilisé la méthode de Runge-Kutta pour tracer les fibres. Cette méthode n'est pas d'usage facile ici car, dans ce cas, le champ de vecteurs n'est défini que sur la surface de faille et non pas en tout point du volume. La méthode pourrait être

perfectionnée en projetant à chaque étape le vecteur élémentaire obtenu sur la surface mais cela serait extrêmement coûteux.

Nous avons préféré utiliser une méthode de projection simplifiée qui considère d'une part que la longueur des rejets est généralement courte par rapport à la taille moyenne des triangles de la surface de faille et d'autre part que le champ de vecteurs interpolé entre les normales aux lèvres de faille est lisse. Dans un premier temps, la propriété *temps* est copiée depuis le volume vers les surfaces de faille, en gardant en tout point deux valeurs correspondant aux deux côtés de la faille :

**pour tout** faille $\mathcal{F}$ du modèle **faire**
  //. Initialiser les valeurs de $t$ sur les deux faces $\mathcal{F}^+$ et $\mathcal{F}^-$ de $\mathcal{F}$.
  **pour tout** nœud $\alpha \in \mathcal{F}$ **faire**
    $\alpha^+ \leftarrow$ nœud du volume tétraédrisé situé au même endroit que $\alpha$, du côté $\mathcal{F}^+$
    $\alpha^- \leftarrow$ nœud du volume tétraédrisé situé au même endroit que $\alpha$, du côté $\mathcal{F}^-$
    $t_{\mathcal{F}^+}(\alpha) \leftarrow t(\alpha^+)$
    $t_{\mathcal{F}^-}(\alpha) \leftarrow t(\alpha^-)$
  **fin pour**
**fin pour**

Ensuite, les vecteurs rejet sont extraits le long des failles, en suivant la direction indiquée par le gradient du *temps*. Le sens de l'extraction est déterminé par les valeurs relatives de *temps* au point initial. L'agorithme est le suivant :

**pour tout** faille $\mathcal{F}$ du modèle **faire**
  //. Construire les vecteurs rejet en suivant le gradient de $t$.
  **pour tout** point $P_0$ de $\mathcal{F}$ **faire**
    //. On note $\diamond \in \{+, -\}$ la face depuis laquelle on extrait le rejet, et $\diamond^{-1}$ la face
    //. vers laquelle est extrait le rejet, avec $\diamond^{-1} = -$ si $\diamond = +$, $+$ si $\diamond = -$.
    $t_0 \leftarrow t_{\mathcal{F}^\diamond}(P_0)$ ; $t_i \leftarrow t_{\mathcal{F}^{\diamond^{-1}}}(P_0)$
    $\mathcal{T} \leftarrow$ triangle de $\mathcal{F}$ contenant $P_0$
    $\mathbf{grad}t_{\mathcal{F}^\diamond}(\mathcal{T}) \leftarrow$ gradient de $t_{\mathcal{F}^\diamond}$ dans $\mathcal{T}$

    //. *direction* indique si le rejet doit être calculé en suivant
    //. la direction du gradient ou la direction opposée.
    **si** $t_0 > t_i$ **alors**
      *direction* $\leftarrow 1$
    **sinon**
      *direction* $\leftarrow -1$
    **fin si**

    $P_i \leftarrow P_0$ ; $\mathcal{T}_i \leftarrow \mathcal{T}$
    //. À chaque étape, suivre le vecteur gradient jusqu'à sortir du triangle.
    **tant que** $t_i \times$ *direction* $< t_0 \times$ *direction* **faire**
      //. Mémorisation de l'état précédent.
      $P_{i-1} \leftarrow P_i$ ; $t_{i-1} \leftarrow t_i$

      $\mathcal{D} \leftarrow$ demi-droite d'origine $P_i$ et de vecteur directeur $\mathbf{grad}t_{\mathcal{F}^\diamond}(\mathcal{T}) \times$ *direction*

25: **pour tout** arête $E_k$ de $\mathcal{T}_i$ **faire**
26: **si** $\mathcal{D} \cap E_k \neq \{\emptyset\}$ **alors**
27: $P_i \leftarrow \mathcal{D} \cap E_k$
28: **fin si**
29: **fin pour**
30:
31: $t_i \leftarrow t_{\mathcal{F}^{\diamond -1}}(P_i)$
32: $\mathcal{T}_i \leftarrow$ triangle de $\mathcal{F}$ partageant $E_k$ avec $\mathcal{T}_i$
33: $\mathbf{grad}t_{\mathcal{F}^\diamond}(\mathcal{T}_i) \leftarrow$ gradient de $t_{\mathcal{F}^\diamond}$ dans $\mathcal{T}_i$
34: **fin tant que**
35:
36: //. Si le point d'intersection est trop loin, alors on interpole
37: //. linéairement le long du dernier vecteur pour trouver le point correct.
38: **si** $t_i \times \mathit{direction} < t_0 \times \mathit{direction}$ **alors**
39: $P_1 \leftarrow P_i - \frac{t_i - t_0}{t_i - t_{i-1}} \times \mathbf{grad}\vec{t}_{\mathcal{F}^\diamond}(\mathcal{T}_i) \times \mathit{direction}$
40: **sinon**
41: $P_1 \leftarrow P_i$
42: **fin si**
43:
44: créer un vecteur rejet entre $P_0$ sur la face $\mathcal{F}^\diamond$ et $P_1$ sur la face $\mathcal{F}^{\diamond^{-1}}$
45: **fin pour**
46: **fin pour**

Quelques cas particuliers viennent en réalité compliquer l'implémentation de cet algorithme, en particulier dans le cas où $P_0$ (ou l'un des $P_i$) est situé exactement sur un sommet d'un triangle, ce qui arrive systématiquement dès lors que les rejets seront calculés depuis les sommets des triangles (voir paragraphe suivant).

D'autre part, l'efficacité de l'algorithme repose malheureusement sur un grand nombre de prédicats géométriques (en particulier d'intersection de segments), qui sont une source fréquente d'erreurs numériques dues à la précision des calculs effectués par les ordinateurs. Il existe des méthodes permettant de s'affranchir de ces problèmes (voir par exemple [Shewchuk, 1996] ou [Huang, 1990] et [Euler, 1999] pour des utilisations dans le cadre de GOCAD) mais qui sont d'usage relativement lourd dans ce contexte et qui n'ont pas été utilisées.

Nous avons au final choisi une approche très conservatrice en éliminant les rejets dès lors que les prédicats géométriques n'étaient pas parfaitement validés. Cette approche implique qu'une proportion non négligeable de calculs (au maximum 30 et 50 %, suivant les modèles) échoue mais elle garantit qu'aucun rejet ainsi calculé n'est faux. Ce taux pourrait très facilement être augmenté en améliorant les comparaisons géométriques. Des tests préliminaires montrent qu'un taux de rejet maximum est aisément atteint.

Enfin, il peut sembler simplificateur de ne garder que le premier et le dernier point du vecteur rejet alors que l'algorithme permet de calculer les points intermédiaires. Cependant, il faut garder à l'esprit le fait que ces rejets sont en général de faible amplitude par rapport à la taille du maillage des surfaces de faille. Nous avons vérifié expérimenta-

lement qu'il est assez rare qu'un vecteur rejet traverse plus de deux triangles de la faille. L'approximation à deux points n'est donc pas gênante dans ce contexte.

Toutefois, on peut imaginer avoir un maillage plus fin sur les surfaces de faille et d'extraire non pas simplement les extrémités du vecteur rejet mais aussi les points intermédiaires, obtenant ainsi une « courbe » rejet plutôt qu'un vecteur. Cette courbe, décrivant le déplacement avec plus de précision qu'un simple vecteur, pourrait ensuite être utilisée dans des modèles mécaniques de dépliage (voir [Muron *et al.*, 2005b]) par exemple.

### Optimisation de la densité des rejets

La méthode par surfaces d'isovaleur imposait d'extraire chaque surface pour être ensuite en mesure de paramétriser chaque lèvre de faille afin d'associer les points de part et d'autre. Cela signifie que pour obtenir le vecteur rejet en un point donné, il était indispensable de construire toute la surface d'isovaleur correspondante et tous les rejets le long de la faille considérée, pour n'en garder qu'un seul. Avec cette seconde approche, cependant, chaque rejet est calculé indépendamment des autres rejets le long de la même faille. Il est donc possible d'obtenir très rapidement le rejet en un point donné quelconque sans avoir à construire la surface d'isovaleur.

De ce fait, il devient possible de résoudre aisément les problèmes de densité des rejets que la première méthode rencontrait. En effet, nous pouvons maintenant construire le rejet en n'importe quel point indépendamment des autres points de même valeur de *temps*. Il suffit pour cela de déterminer un échantillonnage quelconque des surfaces de faille et de construire des rejets à partir de chaque point de cet échantillonnage.

Nous pouvons ainsi obtenir une densité de rejets optimale par rapport au maillage. En effet, chaque rejet servant par la suite à imposer une contrainte DSI sur un tétraèdre (voir paragraphe 4.2), il serait intéressant d'avoir un rejet par tétraèdre pour contraindre au mieux le modèle. Inversement, il est inutile[4] de construire plus d'un rejet par tétraèdre. La densité optimale est donc d'un rejet par face de tétraèdre sur une faille.

La solution la plus simple consiste donc à extraire un rejet depuis le centre de chaque face de tétraèdre située sur une faille. En réalité, ceci va générer plus d'un rejet par face car chaque face sera le point de départ d'un rejet mais pourra aussi être le point d'arrivée d'un autre rejet commencé de l'autre côté de la faille.

Cette solution n'est cependant pas parfaite car les bords des surfaces de faille sont alors mal contraints puisqu'ils correspondent à des arêtes de tétraèdres et non pas à des faces. Une solution alternative consiste alors à choisir comme points de départ non pas les centres des faces mais plutôt les sommets des tétraèdres. En conséquence, les bords de faille sont aussi bien contraints que possible mais chaque rejet, étant sur un sommet, influencera lors de l'interpolation tous ses tétraèdres voisins.

Notons toutefois qu'il est facile de renormaliser les contraintes pour compenser un suréchantillonnage des rejets alors qu'il est impossible de compenser numériquement un sous-

[4]Et même nuisible, car cela correspondrait à affecter un poids plus élevé sur les deux tétraèdres reliés que sur les autres tétraèdres.

échantillonnage sur les bords des failles. Le sur-échantillonnage engendré par la deuxième solution est donc nettement préférable et c'est finalement la solution que nous préconisons. Le résultat est visible sur la figure 4.12.

On peut cependant perfectionner ce calcul en choisissant un échantillonnage hybride combinant les avantages des deux approches mentionnées ci-dessus :

- sur les bords des failles, des rejets sont calculés depuis chaque sommet de tétraèdre afin d'assurer un maximum de contraintes ;
- ailleurs, des rejets sont calculés uniquement depuis les centres des faces pour, autant que possible, éviter la phase de renormalisation des contraintes.

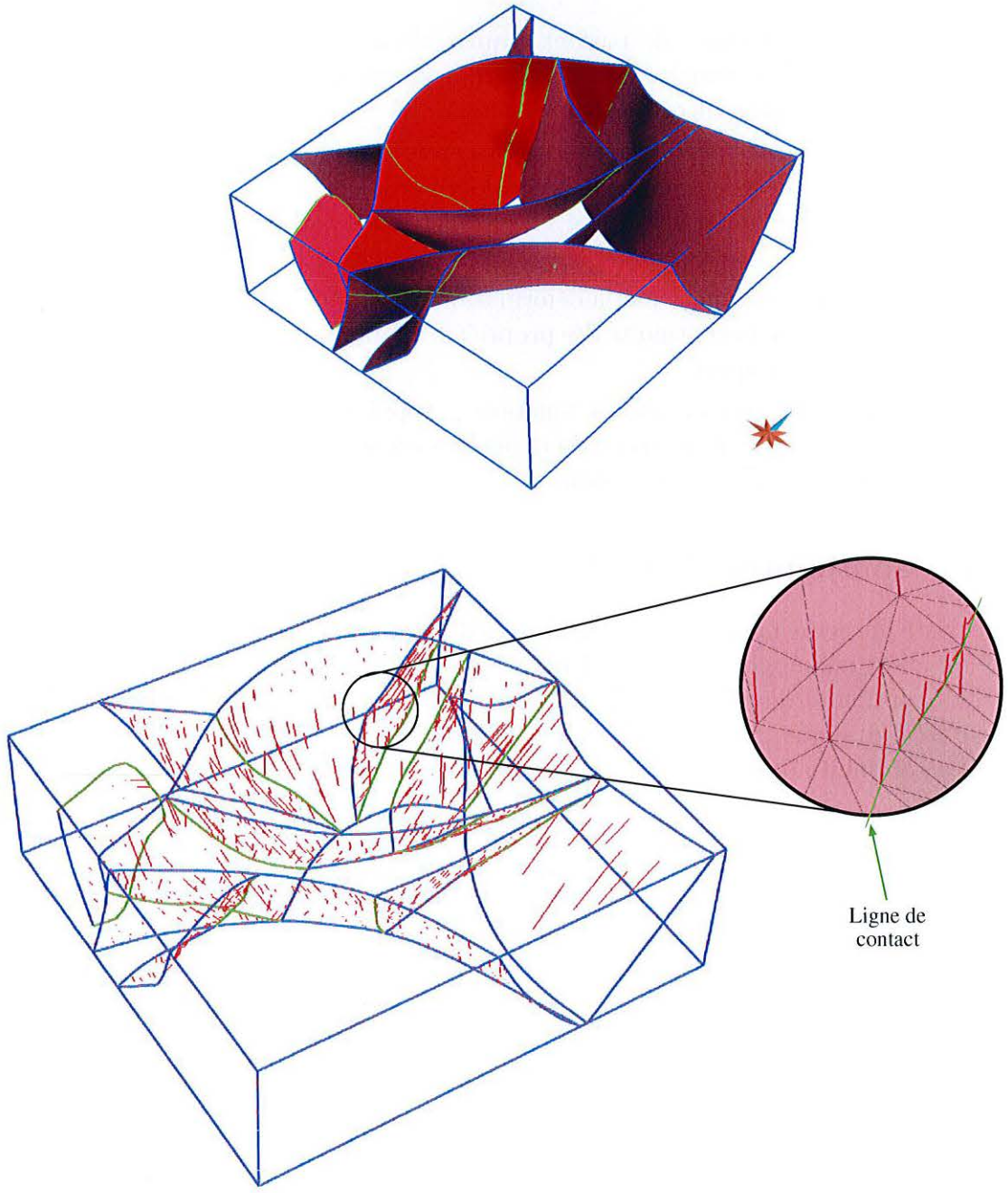



FIG. 4.12 : *Exemple d'un modèle surfacique représentant un réseau de failles avec le* Soft Frame Model *associé (en haut) et vecteurs rejet calculés en 3D (en bas). Le détail permet de vérifier la présence d'un vecteur rejet à chaque nœud de la surface de faille. Le long de la ligne de contact entre failles (en vert), plusieurs rejets sont calculés sur chaque partie de faille touchant cette ligne. Les rejets sont ici indépendants de tout horizon.*

## 4.2 Le rejet comme contrainte DSI

Le vecteur rejet indique, de part et d'autre d'une faille, deux points qui étaient à la même position géométrique avant la déformation cassante. Il sert donc à exprimer la continuité des propriétés entre ces deux points.

Dans la suite de cette partie, nous nous placerons dans le contexte d'un volume tétraédrisé comme décrit précédemment. Nous considérerons deux points $x^\diamond$ et $x^\star$ respectivement situés sur les bords de deux tétraèdres $T^\diamond$ et $T^\star$ et reliés par un vecteur rejet.

On rappelle (voir paragraphe 1.1.4) qu'on se place dans le cas de propriétés qui n'ont pas été affectées indirectement par la déformation ou la fracturation induite par les failles. On considère donc que la continuité des propriétés au moment du dépôt n'a pas été altérée par les épisodes tectoniques.

Il s'agit donc d'exprimer que la fonction $\varphi$ représentant la propriété géologique à interpoler était continue au moment du dépôt des terrains, c'est-à-dire au moment où les deux tétraèdres $T^\diamond$ et $T^\star$ étaient voisins.

### 4.2.1 Continuités $C_0$ et $C_1$

Il existe plusieurs manières mathématiques d'indiquer la continuité en un point $x$ d'une fonction $\varphi$ sur un support $\Omega$ (figure 4.13) :

- La continuité d'ordre 0, notée $C_0$, impose que la fonction elle-même soit continue c'est-à-dire que $\varphi(x-\alpha) = \varphi(x+\alpha)$ quand $\alpha \to 0$.
- La continuité d'ordre 1 $C_1$ impose que la dérivée de la fonction soit continue donc que :

$$\frac{\partial\varphi(x-\alpha)}{\partial x} = \frac{\partial\varphi(x+\alpha)}{\partial x}$$

  quand $\alpha \to 0$.
- De manière similaire, on peut définir une continuité $C_n$ d'ordre quelconque $n$ en considérant la dérivée $n$-ième de $\varphi$.

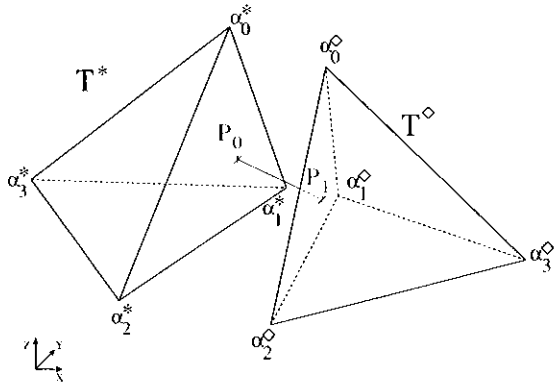



FIG. 4.13 : *Notations utilisées pour décrire un vecteur rejet reliant deux points $P_0$ et $P_1$ situés dans deux tétraèdres $T^\star$ et $T^\diamond$ de part et d'autre d'une faille.*

Quels ordres de continuité sont nécessaires pour modéliser des propriétés géologiques de part et d'autre d'un vecteur rejet ? Il est évident que deux points infiniments proches verront la formation des mêmes terrains et que la continuité $C_0$ est indispensable. À l'opposé, il est inutile d'imposer des continuités d'ordre trop élevé car elles n'auront que trop peu d'influence sur la propriété elle-même : l'ordre 2 n'influe plus que sur la courbure locale de la fonction et n'a donc que peu d'intérêt.

En ce qui concerne la continuité d'ordre 1, il est plus difficile de répondre à priori. Son influence est encore forte (elle évite les « dents de scie » dans le profil de la fonction) et sa présence est indispensable dans le cas de propriétés pétrophysiques car le dépôt se fait de manière continue. L'implémentation numérique des continuités $C_0$ et $C_1$ se faisant séparément, nous avons laissé la possibilité d'utiliser ou non l'ordre 1 suivant les cas. Nous verrons cependant que cet ordre est généralement nécessaire.

### 4.2.2 Expression de la continuité d'ordre 0

Les deux contraintes de continuité $C_0$ et $C_1$ sont des extensions en trois dimensions des contraintes décrites par J.-L. Mallet ([Mallet, 2002]). Respecter la continuité $C_0$ signifie dans notre cas respecter l'équation suivante :

$$\varphi(x^\diamond, y^\diamond, z^\diamond) = \varphi(x^\star, y^\star, z^\star)$$

Ou encore :

$$\varphi(x^\diamond, y^\diamond, z^\diamond) - \varphi(x^\star, y^\star, z^\star) = 0$$

ce qui est équivalent à une « contrainte delta » (voir annexe B, paragraphe B.2.2) avec $\Delta = 0$.

Si $\{b_0^\diamond, b_1^\diamond, b_2^\diamond, b_3^\diamond\}$ et $\{b_0^\star, b_1^\star, b_2^\star, b_3^\star\}$ représentent les coordonnées barycentriques de, respectivement, $x^\diamond$ dans $T^\diamond$ et $x^\star$ dans $T^\star$, la continuité d'ordre 0 correspond à la contrainte DSI $c(T^\diamond, T^\star)$ suivante :

$$c : \left| \begin{array}{rcll} A_c(\alpha) & = & b_i^\diamond & \text{si } \alpha \in \{\alpha_0^\diamond, \alpha_1^\diamond, \alpha_2^\diamond, \alpha_3^\diamond\} \\ A_c(\alpha) & = & b_i^\star & \text{si } \alpha \in \{\alpha_0^\star, \alpha_1^\star, \alpha_2^\star, \alpha_3^\star\} \\ A_c(\alpha) & = & 0 & \text{sinon} \\ b_c & = & 0 & \end{array} \right.$$

Appliquée dans le cadre des rejets, cette contrainte impose donc simplement que les deux points $x^\diamond$ et $x^\star$ aient la même valeur de propriété.

### 4.2.3 Expression de la continuité d'ordre 1

La continuité d'ordre 1 impose que le gradient $\mathbf{grad}\ \varphi$ de la propriété soit continu entre deux points voisins. Dans le cadre d'une propriété définie aux nœuds de deux tétraèdres voisins $T^\diamond$ et $T^\star$, le gradient étant constant sur chaque tétraèdre, cela revient à imposer que le gradient soit égal dans $T^\diamond$ et $T^\star$ au travers de leur face commune :

$$\mathbf{grad}^\diamond\ \varphi = \mathbf{grad}^\star\ \varphi$$

L'annexe B (paragraphe B.3.2) montre comment formuler cette relation comme une contrainte DSI.

Dans le cadre des vecteurs rejet, la continuité d'ordre 1 est plus compliquée à mettre en place car il ne s'agit plus comme précédemment de tétraèdres situés à la même position géométrique. En effet, les deux tétraèdres entre lesquels s'exerce la contrainte étaient initialement à des positions voisines mais, du fait du rejet, sont maintenant à des positions différentes. Si l'on désigne par $F^\diamond = F(\alpha_1^\diamond, \alpha_2^\diamond, \alpha_3^\diamond)$ et $F^\star = F(\alpha_1^\star, \alpha_2^\star, \alpha_3^\star)$ les faces de $T^\diamond$ et de $T^\star$ situées sur le plan de faille, on peut considérer que le gradient de $\varphi$ était continu à l'instant du dépôt au travers de $F^\diamond$ et de $F^\star$ mais ne l'est plus actuellement.

Il est cependant possible de remettre virtuellement ces deux tétraèdres dans leur position de dépôt et d'exprimer ensuite une contrainte sur les gradients dans cette position. Pour cela, J.-L. Mallet a proposé (communication personnelle) de décomposer le vecteur **grad** $\varphi$ suivant trois vecteurs identifiables de part et d'autre de la faille (voir figure 4.14) :

1. les vecteurs $\mathbf{N}_F^\diamond$ et $\mathbf{N}_F^\star$, vecteurs unitaires orthogonaux aux faces $F^\diamond$ et $F^\star$ et orientés vers l'intérieur des tétraèdres ;
2. les vecteurs $\mathbf{N}_H^\diamond$ et $\mathbf{N}_H^\star$, vecteurs unitaires orthogonaux aux horizons traversant les tétraèdres et orientés vers les terrains les plus jeunes ;
3. les vecteurs $\mathbf{N}^\diamond$ et $\mathbf{N}^\star$ définis par :

$$\mathbf{N}^\diamond = \frac{\mathbf{N}_F^\diamond \times \mathbf{N}_H^\diamond}{||\mathbf{N}_F^\diamond \times \mathbf{N}_H^\diamond||} \quad ; \quad \mathbf{N}^\star = \frac{\mathbf{N}_F^\star \times \mathbf{N}_H^\star}{||\mathbf{N}_F^\star \times \mathbf{N}_H^\star||}$$

Les vecteurs $\mathbf{N}_H^\diamond$ et $\mathbf{N}_H^\star$ sont aisés à calculer dès que la propriété *temps* utilisée pour créer le modèle GeoChron est connue :

$$\mathbf{N}_H = \frac{\mathbf{grad}\ t}{||\mathbf{grad}\ t||}$$

Au moment du dépôt, les relations suivantes sont considérées comme vraies :

$$\left| \begin{array}{rcl} \mathbf{N}_F^\diamond & = & -\mathbf{N}_F^\star \\ \mathbf{N}_H^\diamond & = & \mathbf{N}_H^\star \\ \mathbf{N}^\diamond & = & -\mathbf{N}^\star \end{array} \right.$$

Si le vecteur **grad** $\varphi$ est continu entre $T^\diamond$ et $T^\star$ au moment du dépôt alors ce vecteur doit aussi vérifier ces relations :

$$\left| \begin{array}{rcl} \mathbf{grad}^\diamond\varphi.\mathbf{N}_F^\diamond & = & -\mathbf{grad}^\star\varphi.\mathbf{N}_F^\star \\ \mathbf{grad}^\diamond\varphi.\mathbf{N}_H^\diamond & = & \mathbf{grad}^\star\varphi.\mathbf{N}_H^\star \\ \mathbf{grad}^\diamond\varphi.\mathbf{N}^\diamond & = & -\mathbf{grad}^\star\varphi.\mathbf{N}^\star \end{array} \right.$$

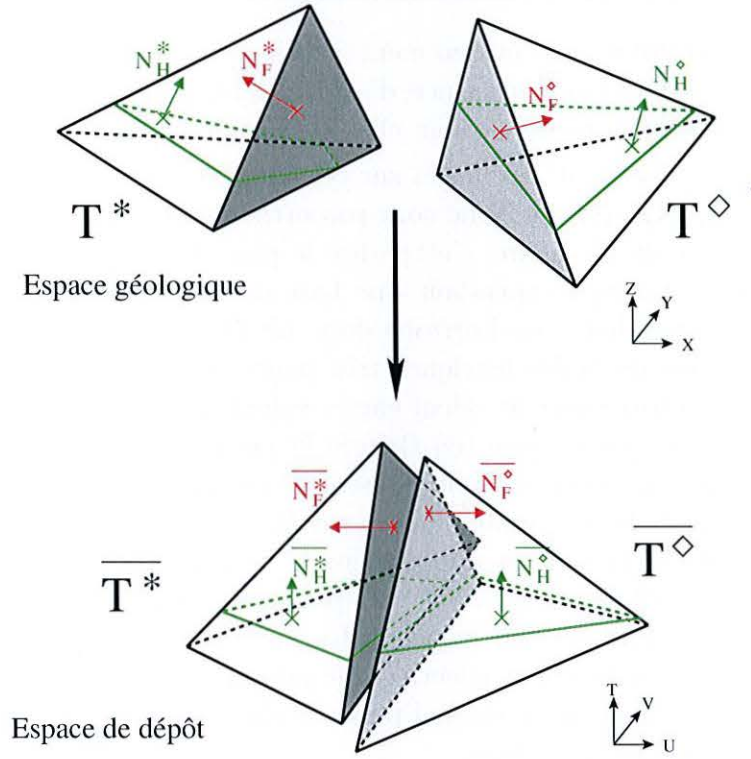



FIG. 4.14 : *Deux tétraèdres de part et d'autre d'une faille, reliés par un vecteur rejet, à leur position géologique actuelle (en haut) et dans leur position au moment du dépôt (en bas). Les surfaces d'isovaleur du* temps *(en vert) sont alors toutes les deux horizontales et les faces communes (en grisé) sont en contact.*

Ces trois dernières relations sont facilement transformables en trois contraintes DSI $c_F(T^\diamond, T^\star)$, $c_H(T^\diamond, T^\star)$ et $c(T^\diamond, T^\star)$, en utilisant le formalisme défini précédemment :

$$c_F \;:\; \left|\begin{array}{rcll} A_{c_F}(\alpha) & = & D(\alpha|\mathbf{N}^\diamond_F) & \text{si } \alpha \in \{\alpha^\diamond_0, \alpha^\diamond_1, \alpha^\diamond_2, \alpha^\diamond_3\} \\ A_{c_F}(\alpha) & = & D(\alpha|\mathbf{N}^\star_F) & \text{si } \alpha \in \{\alpha^\star_0, \alpha^\star_1, \alpha^\star_2, \alpha^\star_3\} \\ A_{c_F}(\alpha) & = & 0 & \text{sinon} \\ b_{c_F} & = & 0 & \end{array}\right.$$

$$c_H \;:\; \left|\begin{array}{rcll} A_{c_H}(\alpha) & = & D(\alpha|\mathbf{N}^\diamond_H) & \text{si } \alpha \in \{\alpha^\diamond_0, \alpha^\diamond_1, \alpha^\diamond_2, \alpha^\diamond_3\} \\ A_{c_H}(\alpha) & = & D(\alpha|\mathbf{N}^\star_H) & \text{si } \alpha \in \{\alpha^\star_0, \alpha^\star_1, \alpha^\star_2, \alpha^\star_3\} \\ A_{c_H}(\alpha) & = & 0 & \text{sinon} \\ b_{c_H} & = & 0 & \end{array}\right.$$

$$c \;:\; \left|\begin{array}{rcll} A_c(\alpha) & = & D(\alpha|\mathbf{N}^\diamond) & \text{si } \alpha \in \{\alpha^\diamond_0, \alpha^\diamond_1, \alpha^\diamond_2, \alpha^\diamond_3\} \\ A_c(\alpha) & = & D(\alpha|\mathbf{N}^\star) & \text{si } \alpha \in \{\alpha^\star_0, \alpha^\star_1, \alpha^\star_2, \alpha^\star_3\} \\ A_c(\alpha) & = & 0 & \text{sinon} \\ b_c & = & 0 & \end{array}\right.$$

Ces trois contraintes sont évidemment à utiliser avec le même poids. En pratique, comme l'utilisateur n'a pas conscience d'avoir affaire à trois contraintes et qu'elles expriment similairement la même notion, elles sont toujours groupées.

Deux remarques peuvent être faites sur ces équations :

- Les vecteurs $\mathbf{N}_F$, $\mathbf{N}_H$ et $\mathbf{N}$ ne sont pas orthogonaux (excepté dans le cas particulier où la face du tétraèdre, c'est-à-dire le plan de faille local, est orthogonale aux horizons). Ils forment cependant une base de l'espace sauf dans le cas où le plan de faille est parallèle aux horizons donc où $\mathbf{N}_F = \pm\mathbf{N}_H$. Ce cas ne peut arriver qu'en présence de failles listriques très poussées et n'affectera que quelques liens, mais faussera fortement le calcul car la valeur de $\mathbf{N}$ sera alors déterminée par les approximations numériques (en théorie $\mathbf{N}$ est indéfini puisque $||\mathbf{N}_F \times \mathbf{N}_H|| = 0$). Dans l'implémentation, un simple test basé sur l'angle entre les vecteurs permet de ne pas installer de contrainte dans ce cas-là.
- La continuité d'ordre 1 est imposée sur le vecteur **grad** $\varphi$ donc sur les valeurs de $\varphi$ au huit nœuds de $T^\diamond$ et de $T^\star$. Cependant, cette contrainte spécifie seulement que le vecteur gradient doit respecter les équations de part et d'autre de la faille et n'impose rien sur la valeur effective que prendra ce gradient. La continuité d'ordre 0 ne fixant la valeur qu'en un seul point de chaque tétraèdre, elle n'apporte pas plus d'informations sur ces valeurs.

## 4.3 Utilisation du rejet dans le calcul d'une paramétrisation 3D

Dans cette partie, nous allons illustrer à partir d'un exemple simple l'influence des contraintes liées au vecteur rejet dans le calcul d'une paramétrisation 3D. Nous utiliserons dans un premier temps un jeu de données synthétiques pour estimer l'influence relative des différentes contraintes puis nous montrerons un exemple sur un jeu de données réel.

Comme les problèmes liés à des vecteurs rejet mal placés ou absents se manifestent sur la paramétrisation mais pas sur le maillage réel, nous utiliserons fréquemment une visualisation des modèles dans l'espace paramétrique (figure 4.15) : chaque nœud $\alpha(x, y, z)$ du volume tétraédrisé est représenté par un nœud $\alpha'(u, v, t)$ de l'espace paramétrique tel que $u = u(\alpha)$, $v = v(\alpha)$ et $t = t(\alpha)$.

### 4.3.1 Exemple synthétique

Pour les premiers tests, nous utiliserons un jeu de données simple illustré sur la figure 4.16 : il s'agit de deux cubes d'arête de longueur unitaire séparés par un espace de longueur $0,5$. Ces deux cubes $\mathcal{C}_0$ et $\mathcal{C}_1$ sont reliés entre eux par une série de liens. Nous allons chercher à calculer une paramétrisation 3D $(u, v, t)$ de l'espace géologique $(x, y, z)$, contrainte par deux surfaces à la base et l'ensemble de liens. Par simplicité, nous fixons les valeurs initiales

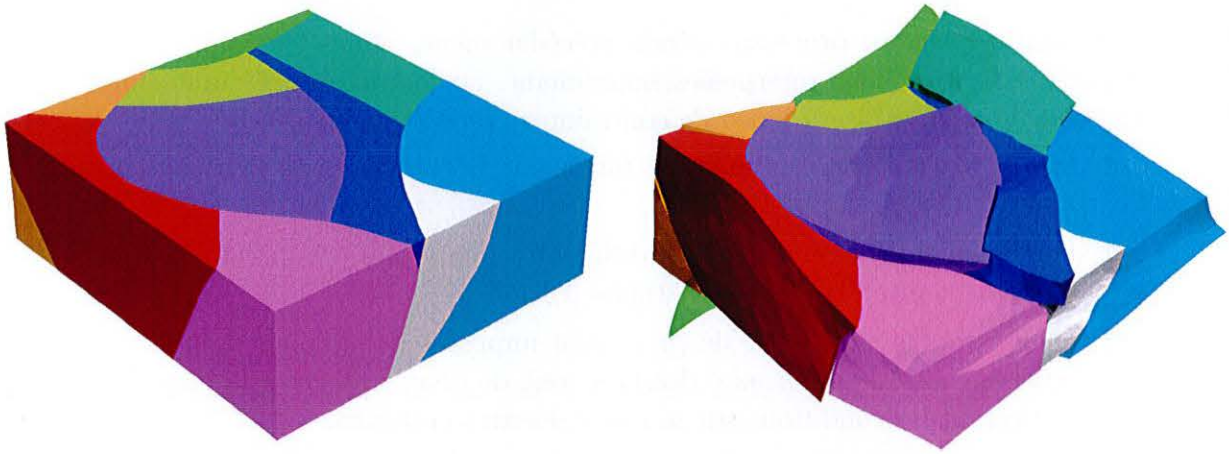


FIG. 4.15 : *Visualisation d'un volume tétraédrisé dans l'espace paramétrique. À gauche, le volume dans l'espace géologique, à droite, le même volume déplacé dans l'espace paramétrique (chaque couleur indique un bloc de faille). Ici, comme aucun vecteur rejet n'a encore été appliqué, les blocs se recouvrent ou laissent des vides dans l'espace paramétrique.*

de $(u, v, t)$ sur d'après la géométrie :

$$\forall \alpha \in \mathcal{C}_0 \cup \mathcal{C}_1 \ : \ \left| \begin{array}{rcl} u(\alpha) & = & x(\alpha) \\ v(\alpha) & = & y(\alpha) \\ t(\alpha) & = & z(\alpha) \end{array} \right.$$

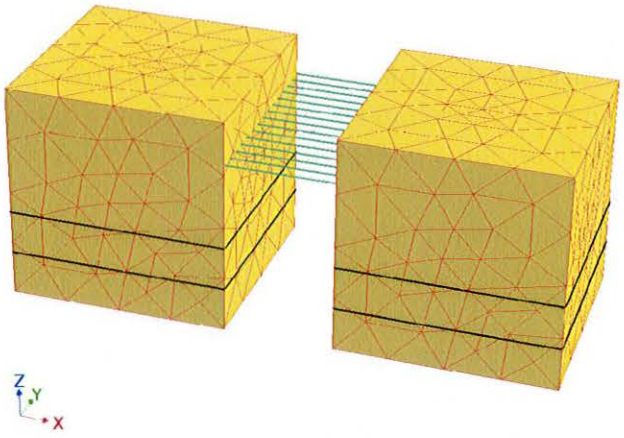



FIG. 4.16 : *Modèle synthétique illustrant l'influence des rejets dans le calcul de la paramétrisation. Les deux cubes sont reliés par une série de vecteurs rejet (en vert). On impose des points de contrôle sur $u$ et $v$ sur la totalité des deux surfaces indiquées en noir. La paramétrisation initiale est telle que $u = x$, $v = y$ et $t = z$.*

Conformément au processus décrit précédemment, seules les composantes $(u, v)$ de la paramétrisation sont interpolées maintenant, la composante $t$ étant supposée fixée. À chaque fois, on utilisera le jeu de contraintes précédemment décrites :

1. la cohérence entre les nœuds est forcée par la contrainte de gradient constant (voir annexe B, paragraphe B.3.2) ;
2. l'orthogonalité des gradients des différentes composantes est assurée par la contrainte d'orthogonalité 3D (voir paragraphe 3.3.1) ;
3. quelques valeurs initiales de $(u, v)$ sont imposées par le biais de points de contrôle (voir annexe B, paragraphe B.2.1) le long de deux surfaces à la base du modèle, en respectant les conditions sur $u$, $v$ et $t$ décrites ci-dessus.

Les liens vectoriels figurant les rejets sont ensuite ajoutés en tant que contraintes sur l'interpolation des composantes $(u, v)$ de la paramétrisation.

Cet exemple n'est évidemment pas géologique, mais il a l'avantage de mettre en évidence les différents facteurs qui jouent lors de l'interpolation d'une paramétrisation 3D.

La figure 4.17 présente les résultats de ces tests dans lesquels différents scénarios de contraintes sont envisagés :

- dans un premier temps, l'interpolation de $(u, v)$ est faite sans imposer de liens vectoriels (figure 4.17-(a)) ;
- ensuite, on impose uniquement la continuité d'ordre 0 au niveau des liens (figure 4.17-(b)) ;
- puis la continuité d'ordre 0 est maintenue et la continuité d'ordre 1 est ajoutée (figure 4.17-(c)) ;
- enfin, les deux scénarios précédents sont répétés en augmentant progressivement le poids relatif de la contrainte de continuité par rapport aux autres contraintes (figure 4.17-(d)).

Pour faciliter la visualisation, les objets sont tous représentés après avoir été déplacés dans l'espace paramétrique $(u, v, t)$. Comme les $(u, v, t)$ initiaux étaient similaires à la géométrie $(x, y, z)$, on peut considérer que l'interpolation a été faite directement sur la géométrie de l'objet.

Les résultats montrent bien d'une part l'influence de cette contrainte sur l'interpolation : les deux cubes initiaux sont déformés dans l'espace paramétrique pour tenter de réduire au maximum l'écart les reliant. Le modèle n'est pas modifié vers le bas car les nombreux points de contrainte (les surfaces noires sur la figure 4.16) empêchent cette partie de se déformer. Seul le haut du modèle, loin des points de contrainte et sous l'influence de la contrainte de continuité, est modifié.

D'autre part, le rôle de la continuité d'ordre 1 apparaît ici clairement. Avec uniquement la continuité d'ordre 0, les points de part et d'autre des liens sont bien rapprochés mais aucune cohérence n'est imposée sur les faces de tétraèdres de part et d'autre du lien. En conséquence, la paramétrisation est lisse sur chaque bloc mais ne l'est pas en changeant de bloc et rien n'empêche les tétraèdres de se chevaucher en haut du modèle. La continuité d'ordre 1 évite cet effet en imposant un contact régulier entre les faces des tétraèdres en vis à vis.

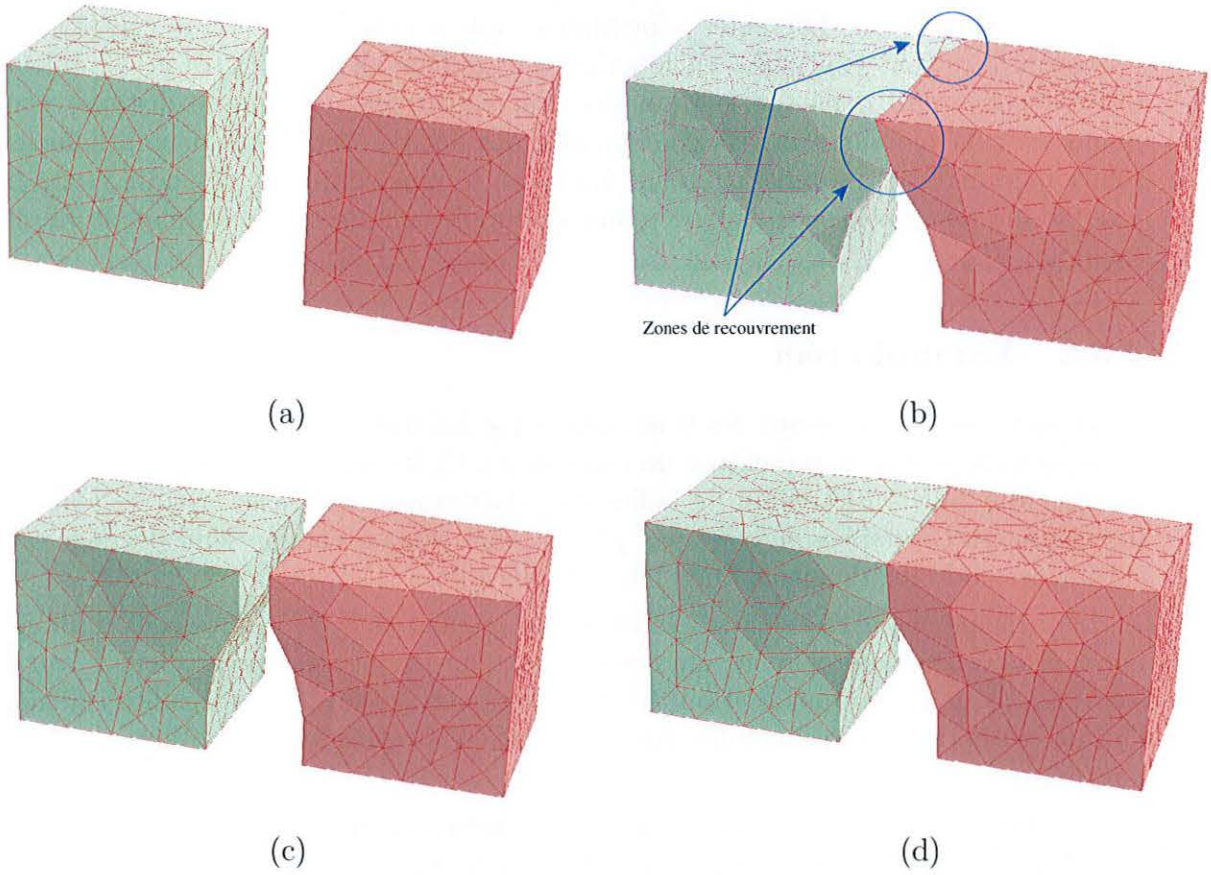



FIG. 4.17 : *Le modèle synthétique dans l'espace paramétrique $(u, v, t)$ après interpolation de $u$ et de $v$. (a) Sans aucune contrainte liée aux rejets; (b) la contrainte de continuité $C_0$ est ajoutée, noter le recouvrement entre les deux blocs; (c) avec la contrainte de continuité $C_1$, les tétraèdres de part et d'autre prennent la même orientation; (d) lorsqu'on augmente le poids de la contrainte de continuité, on obtient une correspondance parfaite.*

De plus, on peut noter ici l'influence du poids des contraintes : avec un faible poids, les liens ne sont pas parfaitement vérifiés. Dans cet exemple, un poids de plusieurs ordres de grandeur plus élevé est nécessaire afin d'intégrer correctement les liens. Ce poids élevé est nécessaire à cause de l'importance de l'écart entre les blocs et si les blocs sont initialement plus proches, un poids plus faible est suffisant.

Ceci met en évidence la difficulté liée au calibrage du poids relatif des contraintes mises en œuvre dans l'interpolation. Il n'existe ici pas de rapport pré-défini qui soit valable pour tous les scénarios possibles et c'est l'utilisateur qui devra, en fonction de la qualité des résultats, estimer s'il est nécessaire d'adapter le poids des contraintes. Cela implique que l'utilisateur soit conscient du rôle de chacune des contraintes et soit capable d'estimer quelle contrainte sera le mieux à même d'améliorer le modèle.

Enfin, nous observons que la partie supérieure du volume est dilatée et a une largeur plus importante que celle imposée par les points de contrôle. Ceci est une conséquence de la formulation des différentes contraintes : mis à part les points de contrôle, toutes les contraintes sont exprimées en fonction du gradient des propriétés et n'influent pas directement sur la valeur de la propriété. Par conséquent, lorsque la distance avec les points de contrôle augmente, la combinaison des autres contraintes peut privilégier des solutions différentes de celle attendue. La façon la plus simple de résoudre ce problème serait d'imposer quelques points de contrôle supplémentaires, par le biais de fibres par exemple.

### 4.3.2 Exemple réel

Dans un deuxième temps, les liens induits par les rejets ont été testés sur des jeux de données réels dont nous présentons un exemple ici. Ce jeu de données présente un exemple de réservoir faillé où le réseau de failles est relativement complexe, avec de nombreuses intersections. Les failles ne sont pas planes, leur azimut comme leur pendage variant suivant les endroits, de même que l'intensité du rejet.

Le principe des tests est assez similaire au premier cas. Nous disposons d'un certain nombre d'horizons de référence qui servent dans un premier temps à calculer la composante *temps* de la paramétrisation 3D. Une paramétrisation 2D est ensuite calculée sur l'un de ces horizons choisi comme horizon de référence puis les composantes $u$ et $v$ sont interpolées :

1. D'abord, on installe les contraintes précédemment décrites (points de contrôle sur l'horizon de référence, gradient constant, orthogonalité des gradients). Une première interpolation est effectuée.
2. Ensuite, on ajoute la contrainte de continuité imposée par les rejets et une nouvelle interpolation est faite. Comme nous avons vu l'intérêt de la continuité d'ordre 1, celle-ci est systématiquement activée.
3. Enfin, divers essais ont été faits en jouant sur le poids de la contrainte de continuité par rapport aux autres contraintes pour essayer d'estimer son influence.

La figure 4.12 montre le modèle initial ainsi que les vecteurs rejet calculés. La figure 4.18 montre le volume tétraédrisé dans l'espace paramétrique sans les rejets puis avec. La visualisation dans l'espace paramétrique permet de mieux appréhender les variations de paramétrisation.

La figure illustre aussi l'influence du poids de la contrainte de continuité par rapport aux autres contraintes. Dans cet exemple, un poids élevé provoque une contraction du modèle dont les coordonnées paramétriques couvrent une plus faible plage de valeurs. On retrouve ici l'influence du fait que les contraintes imposées, pour la plupart, influent principalement sur le gradient et non pas sur les valeurs elles-mêmes. Cet exemple semble plaider pour un poids relativement faible de la contrainte de continuité (entre 1 et 10 ici), afin de s'assurer du respect des autres contraintes qui conditionnent la beauté du modèle.

Au final, cet exemple démontre à la fois la force et la faiblesse de l'intégration des rejets dans le calcul d'une paramétrisation. Il est incontestable qu'ils permettent d'obtenir

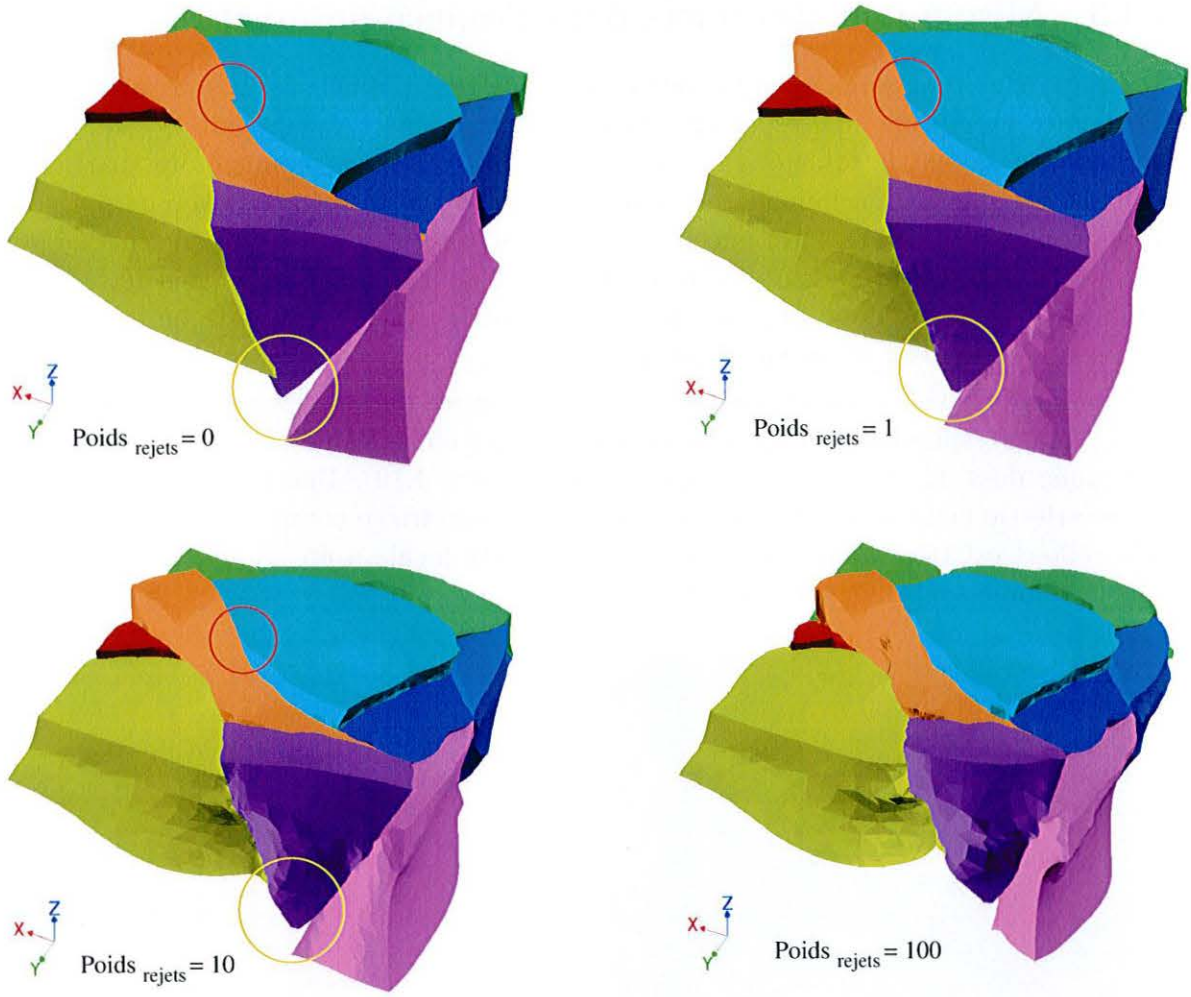



FIG. 4.18 : *Influence du poids de la contrainte de continuité sur la paramétrisation (volumes affichés dans l'espace paramétrique). En haut à gauche, aucune contrainte de continuité n'est imposée. Les blocs ne sont pas en cohérence, certains se recouvrent (cercle rouge) et d'autres sont trop écartés (cercle jaune). En haut à droite, la contrainte de continuité est utilisée avec un poids égal à celui des autres contraintes. Dans le cercle jaune, les blocs sont presque en cohérence mais le recouvrement du cercle rouge est toujours présent. En bas à gauche, avec un poids relatif de* 10, *le recouvrement du cercle rouge est corrigé mais des effets de contraction du modèle commencent à apparaître. Enfin, en bas à droite, avec un poids relatif de* 100, *les contacts sont tous respectés mais le modèle est abusivement contracté autour des failles.*

un modèle plus réaliste avec moins de trous ou de zones de recouvrement dans l'espace paramétrique et qu'ils agissent de manière géologiquement cohérente. Mais ils ont une influence qui est contradictoire avec celle des autres contraintes qui assurent un modèle le plus régulier possible et, de ce fait, doivent être utilisées avec prudence et avec un poids approprié qui ne peut pas être déterminé à priori.

### 4.3.3 Mise à jour des rejets dans l'espace paramétrique

Enfin, nous proposons une méthodologie permettant d'améliorer une paramétrisation 3D donnée en éditant manuellement quelques rejets dans l'espace paramétrique. Cette méthode repose sur le principe que, mis à part des contextes sédimentaires particuliers (voir paragraphe 2.2.2), l'image du solide tétraédrisé initial dans l'espace paramétrique GeoChron ne devrait présenter aucun vide ni recouvrement, c'est-à-dire que chaque point de l'espace paramétrique devrait être inclus dans l'image d'un et d'un seul tétraèdre du volume. Nous allons donc observer le volume dans l'espace paramétrique et tenter de compenser localement les erreurs observées.

L'utilisateur désigne deux points $\overline{P_0}$ et $\overline{P_1}$ de l'espace paramétrique qu'il estime devoir mettre en correspondance et un vecteur rejet est créé entre les points $P_0$ et $P_1$ de l'espace géologique dont $\overline{P_0}$ et $\overline{P_1}$ sont les images (voir figure 4.19). Une ré-interpolation de la paramétrisation en $u$ et $v$ est alors nécessaire pour prendre en compte ces nouveaux rejets mais celle-ci est très rapide car seule une contrainte locale a été ajoutée, les propriétés dans le volume sont donc très peu modifiées.

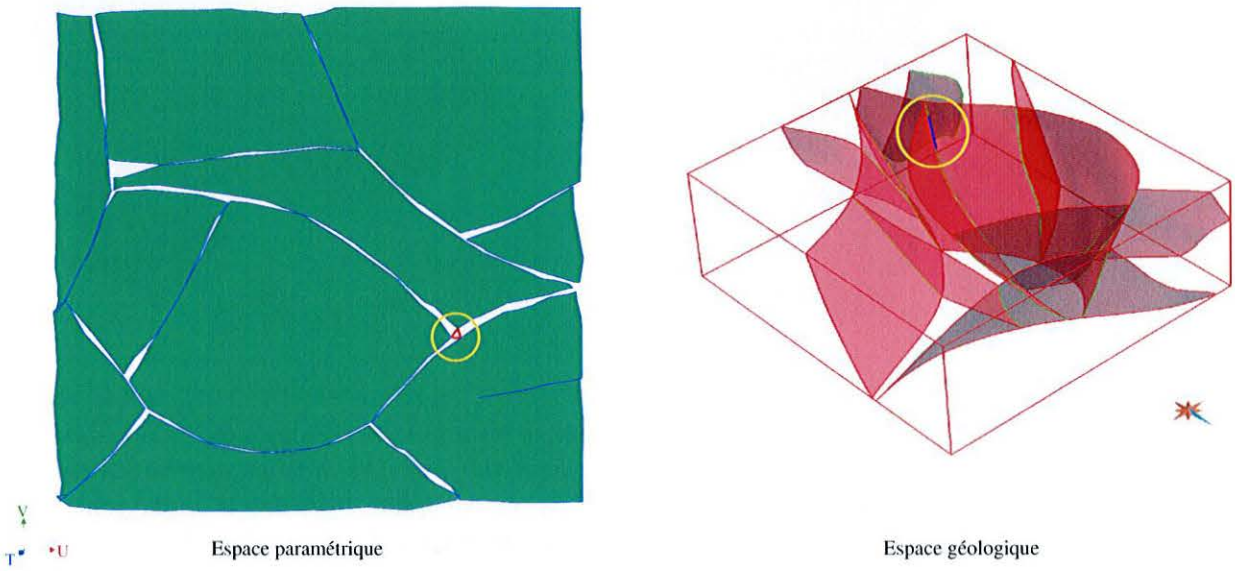



FIG. 4.19 : *Désignation manuelle d'un rejet dans l'espace paramétrique. À gauche, vue en plan d'une section du volume tétraédrisé dans l'espace paramétrique. Trois rejets (traits rouges) sont ajoutés. À droite, ces rejets sont automatiquement reportés dans l'espace géologique. Comme ils sont situés à la jonction de deux failles, les trois rejets sont confondus et sont sur la ligne d'intersection de ces deux failles.*

#### Localisation des zones à éditer

La première difficulté consiste à désigner les zones dans lesquelles une édition des rejets est nécessaire. Pour cela, une image du solide initial est créée dans l'espace paramétrique (figure 4.15). La correspondance entre chaque tétraèdre « paramétrique » et chaque tétra-

èdre initial est stockée en mémoire. Cette correspondance permettra ensuite, lorsque deux point de l'espace paramétrique auront été désignés, de retrouver les points correspondants dans l'espace géologique.

Plusieurs méthodes sont envisageables pour localiser les zones dans lesquelles une édition manuelle sera nécessaire. La plus simple consiste à visualiser le volume en entier ou par des coupes (verticales ou horizontales). Les zones à corriger apparaissent comme des vides ou des recouvrements. Cette méthode est lente et repose entièrement sur l'observateur.

En ce qui concerne les recouvrements, ils peuvent être visualisés de manière plus générale : si on recouvre l'espace paramétrique d'une grille régulière fine, on peut ensuite peindre le volume recouvert par chaque tétraèdre sur cette grille. Si une cellule est peinte plus d'une fois alors elle est dans une zone de recouvrement. Il est ensuite aisé de visualiser, dans la totalité de la grille, l'ensemble des cellules peintes plus d'une fois. Il ne s'agit là que d'une solution approchée car une étape de discrétisation de tétraèdres, dont la précision dépend de la finesse de la grille régulière, est nécessaire mais elle permet de localiser rapidement les principales difficultés.

Les vides entre tétraèdres sont plus problématiques. Ils peuvent être détectés de la même manière que précédemment mais ils peuvent indiquer plusieurs choses : certains sont des artefacts de calculs dûs à l'absence de vecteurs rejet (ou à des rejets imprécis) et doivent être corrigés, d'autres sont dûs au contexte sédimentologique et en particulier à des érosions ou des zones de non-dépôt. Nous n'avons pas trouvé de critère générique permettant de trancher entre ces cas. On peut toutefois supposer que les lacunes sédimentaires généreront des vides de forte extension horizontale et, relativement à cette extension, de faible épaisseur alors qu'à l'inverse, les erreurs de paramétrisation, apparaissant autour des failles qui sont le plus souvent verticales ou sub-verticales, auront une extension verticale plus importante que leur extension horizontale.

Dans tous les cas, une fois les zones nécessitant des corrections repérées, il est nécessaire de passer à une visualisation par sections sur lesquelles l'utilisateur va indiquer les points qui doivent être reliés.

### Désignation des points à relier

Deux problèmes sont à considérer lors de la désignation par l'utilisateur des points à relier par un vecteur rejet :

- d'une part, une interface convenable doit être fournie afin de permettre de visualiser l'intérieur du volume ;
- d'autre part, seuls des rejets géologiquement cohérents et compatibles avec les méthodes de calcul doivent être possibles à créer.

En ce qui concerne le premier point, nous nous sommes inspiré des outils de visualisation utilisés pour les grilles stratigraphiques. Dans ces grilles, on affiche généralement des sections le long d'une isovaleur de $i$, $j$ ou $k$, c'est-à-dire toutes les cellules qui sont sur un même plan dans l'espace paramétrique associé. Nous avons donc utilisé les outils développés par T. Frank (voir [Frank, 2004]) permettant de visualiser des sections internes de volumes tétraédrisés selon des plans quelconques parallèles soit aux axes $X$, $Y$, $Z$ de

l'espace soit aux axes curvilinéaires $U$, $V$, $T$ de la paramétrisation (on obtient alors des surfaces d'isovaleurs similaires à celles utilisées précédemment pour construire les rejets).

Ces outils ont été adaptés afin d'autoriser la sélection de points. En effet, pour optimiser la vitesse d'affichage, ils sont implémentés uniquement dans la couche graphique du géomodeleur et il n'était pas prévu initialement de remonter aux données sous-jacentes.

Ensuite, nous avons développé un outil permettant de désigner deux points de façon agréable pour l'utilisateur. Par exemple, lorsque deux triangles de la section se recouvrent, il est impossible de choisir dans lequel des deux un point indiqué à la souris se situera. Notre outil permet de sélectionner un point initial loin de la zone de recouvrement puis de faire glisser ce point jusqu'à la position voulue en n'autorisant que les déplacements entre triangles connectés de la section. De la sorte, il est possible d'atteindre aisément n'importe quel point.

On peut imaginer de relier automatiquement les tétraèdres se recouvrant, en ajoutant par exemple un rejet entre le milieu de la zone de recouvrement de chaque côté de la faille. Cependant, cette solution est trop approximative, rien ne garantissant que deux tétraèdres se recouvrant doivent être associés ensemble : si un rejet latéral existe, le rejet ne lie pas deux tétraèdres exactement en vis-à-vis.

En ce qui concerne le deuxième point, rappelons que seuls $u$ et $v$ seront ré-interpolés par la suite, le paramètre $t$ est considéré comme déjà correct. Les rejets doivent donc obligatoirement, pour être géologiquement valides, relier deux points ayant la même valeur de *temps* c'est-à-dire situés dans la même coupe horizontale dans l'image paramétrique du modèle.

Selon une habitude en vigueur chez les géologues, il semblerait naturel d'observer le modèle le long de coupes verticales mais, dans le cas présent, cela ne permet pas une vraie compréhension en 3D du modèle. Ainsi, la figure 4.20 illustre une situation où, si la paramétrisation est considérée uniquement dans le plan de coupe, c'est-à-dire si on considère qu'un plan de coupe est aussi un plan d'isovaleur de $u$ ou de $v$, l'espace paramétrique résultant comportera des vides. Dans cet exemple, il y a en réalité un glissement du bloc central perpendiculairement au plan de coupe comme l'illustre la figure 4.21. Une édition des rejets dans un plan vertical dans l'espace paramétrique ne permet donc pas de visualiser, ni de corriger, ce problème.

Il faut donc impérativement considérer les déplacements des blocs en trois dimensions. La méthode pourrait être prolongée en corrélant semi-automatiquement non plus simplement des points indiqués sur une coupe à *temps* constant mais les lignes définies par les intersections de failles (sur la figure 4.21, il faudrait corréler les trois lignes de contact des blocs dans leur ensemble et non pas point par point sur une coupe verticale).

### Résultats et limitations

La figure 4.22 illustre le résultat de cette édition. Dans une section horizontale de l'espace paramétrique, trois rejets ont été ajoutés afin d'assurer la cohérence des trois blocs de faille au niveau de la jonction. Les images suivantes montrent la même section

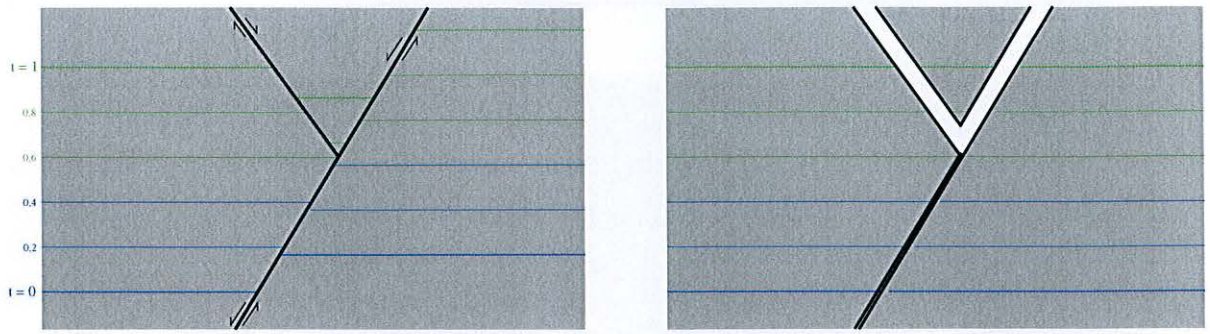



FIG. 4.20 : *Vue en coupe d'une faille en Y. À gauche, dans l'espace géologique, les traits de couleur figurent des isovaleurs du* temps *c'est-à-dire des horizons. À droite, la même coupe vue dans l'espace paramétrique en supposant que l'on est dans un plan d'isovaleur de u ou de v. L'apparition de vides indique que cette hypothèse est fausse. Une explication possible, en trois dimensions, est fournie dans la figure 4.21.*

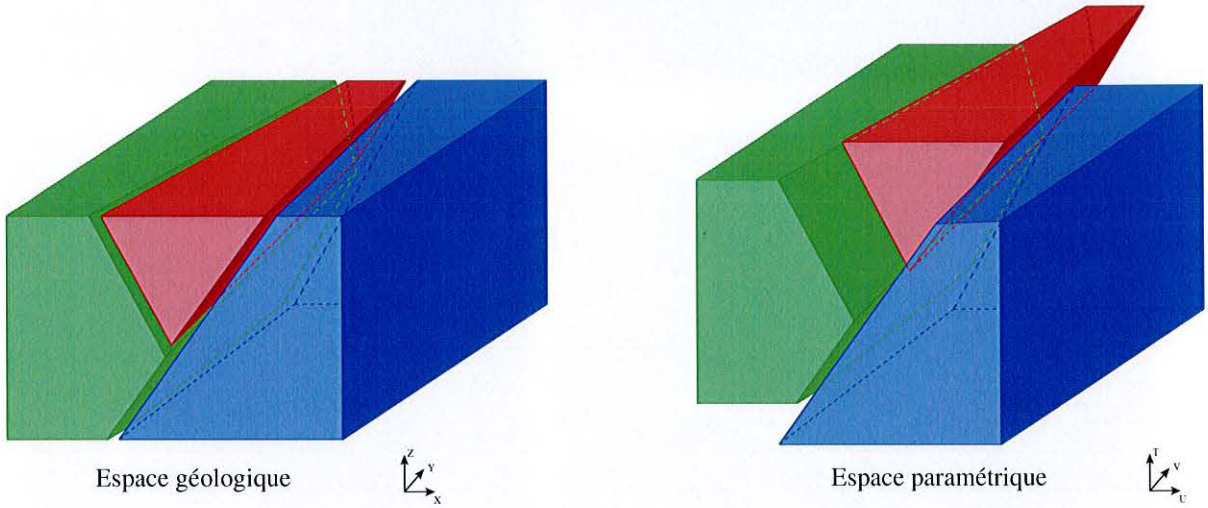



FIG. 4.21 : *Glissement de blocs en extension autour de deux failles en Y. À gauche, modèle géologique actuel (les blocs ont été légèrement écartés pour faciliter la visualisation). À droite, dans l'espace paramétrique, les blocs sont situés dans leur position lors de leur formation. Les blocs ont ici glissé en trois dimensions, on ne peut donc pas se contenter d'observer les déplacements dans un plan de coupe vertical.*

après ré-interpolation de $u$ et $v$, en prenant en compte ces nouveaux rejets, avec des poids relatifs de plus en plus élevés.

L'importance du choix du poids relatif apparaît ici nettement. Un poids égal à celui des autres contraintes est trop faible pour corriger entièrement le problème initial car ces quelques rejets, qui apportent une information obligatoirement contradictoire avec les autres contraintes, doivent avoir une influence supérieure à celle de toutes les autres. Mais un poids relatif de 100 (ou plus élevé) provoque des déformations irréalistes car ces rejets ne contraignent qu'un seul point du modèle (et trois tétraèdres). Encore plus qu'avec les

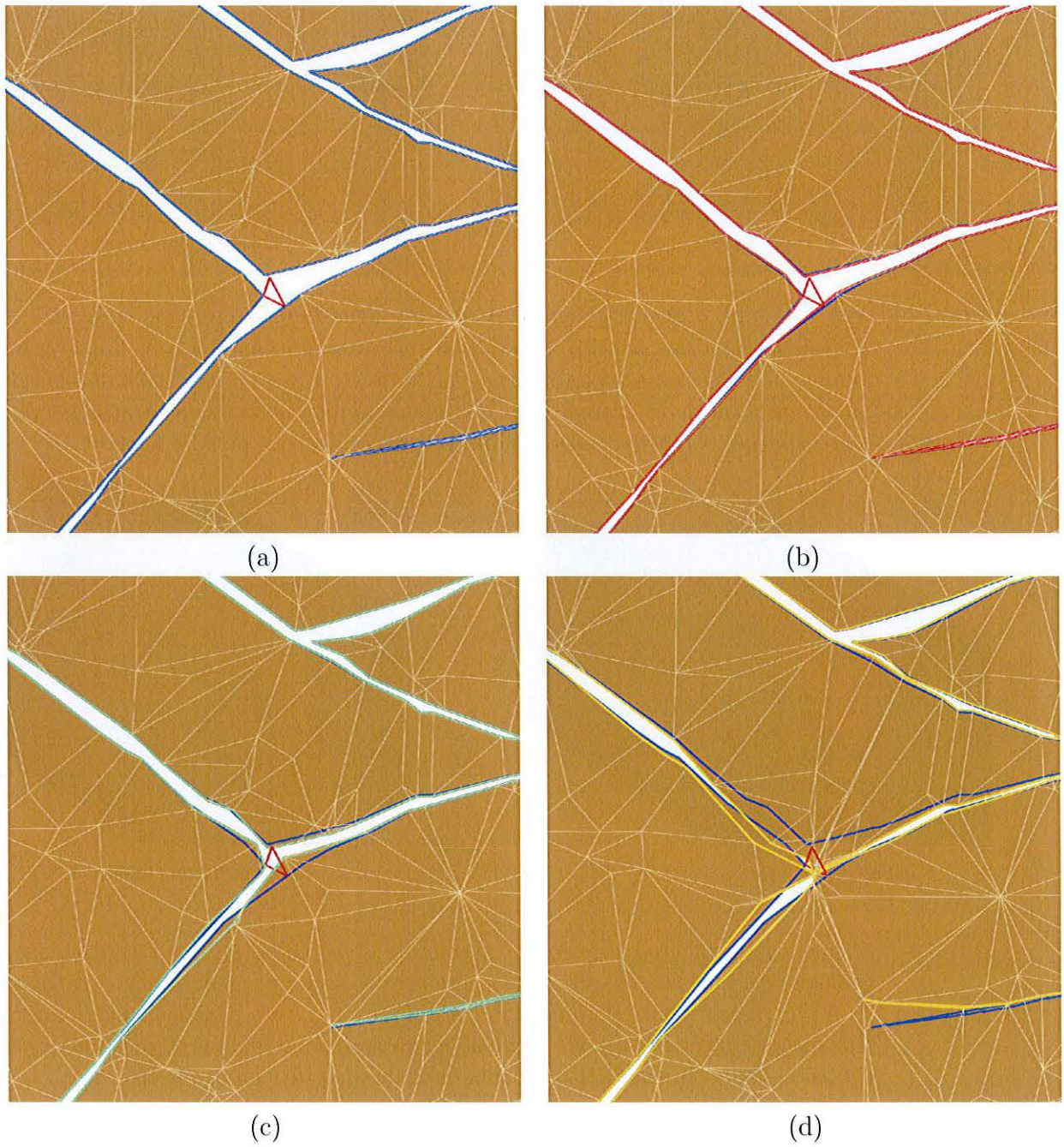



FIG. 4.22 : *Section horizontale (vue en plan) dans l'espace paramétrique. (a) Section initiale. Des rejets (en rouge) sont ajoutés manuellement. Les bords de la section initiale (en bleu) sont toujours laissés pour comparaison. (b) Réinterpolation de $u$ et de $v$ en affectant le même poids à la contrainte de continuité liée aux nouveaux rejets qu'aux autres contraintes. Les bords de la nouvelle section sont en rouge. (c) Réinterpolation de $u$ et de $v$ avec un poids relatif de 10, les bords sont en vert. (d) Réinterpolation de $u$ et de $v$ avec un poids relatif de 100, les bords sont en jaune.*

rejets calculés automatiquement, il est important d'être attentif au poids des contraintes utilisées ici.

On peut remarquer que si des rejets ont été créés automatiquement dans le voisinage de la zone où de nouveaux rejets sont ajoutés alors ces deux types de rejets seront très probablement contradictoires. Nous proposons donc de supprimer, lors de la ré-interpolation de $u$ et de $v$, les rejets automatiques situés dans un certain rayon autour des rejets ajoutés manuellement.

# Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté plusieurs approches permettant de modéliser les rejets le long des failles. La méthode proposée au final permet de calculer un ensemble de vecteurs rejet directement en trois dimensions sur un réseau de failles complexes. Cette méthode se décompose en deux étapes, la première, qui permet de traiter la grande majorité des situations (failles normales ou inverses, intersections de failles suivant des lignes verticales...), est entièrement automatique.

La deuxième étape, l'édition des vecteurs rejet, est facilitée par une interface spécifique qui permet de corriger rapidement les problèmes liés aux intersections de failles complexes (en particulier les failles en Y dont la ligne d'intersection est horizontale).

Seule les failles sub-horizontales (par exemple la base des failles listriques) provoque des instabilités numériques dans la contrainte DSI de continuité. Il est possible d'adapter les formules utilisées pour tenir compte de ce cas particulier.

L'algorithme d'extraction des rejets est relativement rapide[5] : sur le jeu de données réel utilisé ici, moins d'une minute est nécessaire pour calculer les rejets sur un volume tétraédrisé comportant environ 15 000 tétraèdres. L'étape la plus coûteuse en temps est en réalité le calcul préalable du modèle topologique qui prend une à deux minutes sur cet exemple.

L'interpolation d'une (ou de plusieurs, dans le cas d'une paramétrisation) propriété n'est pas sensiblement ralentie par les contraintes supplémentaires de continuité. Quelques secondes sont nécessaires lors de l'installation initiale des contraintes, l'interpolation en elle-même prenant moins d'une minute (les chiffres exacts dépendent de la distance entre la solution initiale et la solution finale : ainsi, lors de l'ajout manuel de rejets, la solution initiale étant très proche de la solution finale, l'interpolation ne prend que quelques secondes).

Enfin, notre algorithme est entièrement géométrique ce qui signifie que seule la géométrie des failles et des horizons (au travers du paramètre *temps*) est utilisée pour calculer les rejets. En conséquence, seule les composantes non transverses du rejet seront capturées ce qui peut être gênant dans certains contextes structuraux comme des régions fortement affectées par des failles transverses.

Plusieurs améliorations sont envisageables pour accroître l'efficacité des différentes composantes de la méthode. D'abord, une augmentation de la précision des algorithmes

[5]L'ordinateur utilisé pour les calculs est un Intel Xeon 2.4 GHz.

géométriques permettra d'augmenter le taux de rejets calculés. Ensuite, l'édition des rejets pourrait être faite semi-automatiquement en associant des lignes de faille en trois dimensions. Cela permettrait de traiter parfaitement tous les schémas d'intersection de failles sans nécessiter d'intervention de l'utilisateur. De même, un outil de contrôle de qualité qui permettrait de détecter directement les zones sur lesquelles l'attention de l'utilisateur doit se focaliser pour les corrections accélérerait le processus d'édition. De plus, les critères de qualité que cet outil nécessitera pourront être utilisés pour calibrer automatiquement le poids relatif des différentes contraintes utilisées lors des interpolations.

Bien que nous ayons essentiellement présenté l'utilisation des vecteurs rejet dans le cadre du calcul d'une paramétrisation 3D, ils sont utilisables beaucoup plus largement dans toute application mettant en cause des volumes tétraédrisés faillés. Ainsi par exemple, dans le cadre de la migration temps-profondeur de données sismiques, il est nécessaire de connaître en tout point du volume la vitesse des ondes sismiques. Cette vitesse dépend de la nature des terrains, elle est donc affectée par les failles. De plus, c'est une fonction très lisse qui varie peu au sein d'une même couche. Dans ce contexte, les vecteurs rejet calculés ici peuvent être utilisés pour interpoler cette vitesse dans tout le volume. D'autres applications sont aussi possibles, par exemple dans le cadre de la restauration 3D d'horizons (voir [Muron *et al.*, 2004]) ou encore pour améliorer les algorithmes de pointé automatique d'horizons dans un cube sismique.

# Chapitre 5

# Applications du modèle GeoChron

La principale application du modèle GeoChron, qui a initialement motivé son developement, concerne la modélisation des propriétés pétrophysiques dans les réservoirs faillés. En effet, nous avons vu dans le premier chapitre que les grilles structurées utilisées en règle générale pour les modélisations de propriété engendraient des erreurs que la paramétrisation GeoChron permettrait de corriger.

Le modèle GeoChron repose sur la décomposition de la modélisation de propriété pétrophysique en trois étapes, en utilisant trois objets différents :

- la géométrie des blocs de failles est représentée par un maillage tétraédrisé ;
- une paramétrisation 3D permet d'adapter le modèle à la géométrie des horizons ;
- enfin, les propriétés sont modélisées dans un espace paramétrique aussi proche que possible de l'espace de dépôt des sédiments.

Les deux premières étapes ont été traitées dans les chapitres 1 à 4 et ce chapitre montre comment les propriétés pétrophysiques peuvent être modélisées finement dans l'espace paramétrique $\overline{G}$ et utilisées dans l'espace géologique réel. De plus, d'autres applications, dans le domaine de l'étude des déformations et de l'intégration du cube d'attributs sismiques, seront présentées ici. Elles mettent en évidence les performances du modèle GeoChron et l'amplitude de ses champs d'application possibles.

## 5.1 Modélisation de propriété

### 5.1.1 Géostatistiques dans l'espace paramétrique

Par définition de l'espace paramétrique, celui-ci représente tous les terrains sédimentaires formés au même instant sur un plan horizontal. En conséquence, dans cet espace, mesurer une distance le long des couches géologiques, comme le nécessitent les algorithmes géostatistiques, revient à mesurer une distance horizontale. Il devient donc possible d'utiliser une simple grille régulière structurée pour couvrir l'espace paramétrique.

Étant donné la simplicité et le faible coût mémoire d'une telle grille, de type « Voxet », il est possible d'utiliser une grille bien plus fine qu'avec une grille stratigraphique irrégulière dans laquelle il est nécessaire de stocker explicitement toute la géométrie. Cette

finesse supplémentaire est aussi en accord avec les échelles des différentes données géologiques : la géométrie des failles et des horizons vient essentiellement de données sismiques dont la résolution est bien plus faible que les données de puits qui sont les données de base utilisées dans la modélisation de propriété.

### Intégration des données géologiques

Cependant, effectuer la modélisation de propriété sur une grille régulière fine dans l'espace paramétrique impose d'être capable d'exprimer toutes les données utilisables dans les géostatistiques dans cet espace. Ces données sont de deux grands types : les points où la propriété est connue (aux puits) et les tendances ou relations globales (comme par exemple les masques utilisés par les géostatistiques multi-points) qui n'apparaissent pas directement dans les données mais qui sont connues par ailleurs du géologue.

Dans le cas des points de données, il est aisé de les faire figurer dans l'espace paramétrique grâce à la fonction de paramétrisation, d'après l'algorithme suivant :

1: $\mathbf{u}(\mathbf{x}) \leftarrow$ fonction de paramétrisation du domaine d'étude définie aux nœuds des tétraèdres
2:
3: **pour tout** point de donnée $P(\mathbf{x})$ d'une propriété $\varphi$ **faire**
4: $\quad \mathcal{T}(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \leftarrow$ tétraèdre contenant $P$
5: $\quad (a, b, c) \leftarrow$ coordonnées barycentriques de $P$ dans $\mathcal{T}$
6: $\quad \mathbf{u}(P) \leftarrow$ coordonnées paramétriques de $P$ calculées à partir de $\mathbf{u}(\alpha_0)$, $\mathbf{u}(\alpha_1)$, $\mathbf{u}(\alpha_2)$, $\mathbf{u}(\alpha_3)$, et $a$, $b$ et $c$
7: $\quad //$. $P'$ est l'image de $P$ dans l'espace paramétrique
8: $\quad P' \leftarrow \mathbf{u}(P)$
9:
10: $\quad \varphi(P') \leftarrow \varphi(P)$
11: **fin pour**

De plus, si des points de données sont reliés par une relation particulière (comme par exemple des points successifs le long d'un puits), cette relation peut aussi être transposée dans l'espace paramétrique. De la sorte, toutes les données dures peuvent être facilement prises en compte. La figure 5.1 illustre cette méthode sur des données de puits.

Le cas des données floues, de tendances d'évolutions par exemple, est différent. En effet, il ne s'agit pas de mesures effectuées dans l'espace géologique mais plus de connaissances secondaires déduites du contexte sédimentaire (environnement de dépôt, contexte régional...). Ces informations sont normalement directement reliées au milieu lors du dépôt et non pas au milieu tel qu'il est actuellement après déformation. Le processus logique consiste donc à intégrer ces informations directement dans l'espace paramétrique. Ainsi, un variogramme construit à partir des données de puits devra être calculé et modélisé directement dans l'espace paramétrique.

Il faut cependant être conscient des différences d'échelles entre les espaces $G$ et $\overline{G}$ c'est-à-dire du fait que l'axe vertical de l'espace paramétrique est un *temps* et non pas une distance. Le concept de vitesse de sédimentation instantanée (voir paragraphe 2.2.1)

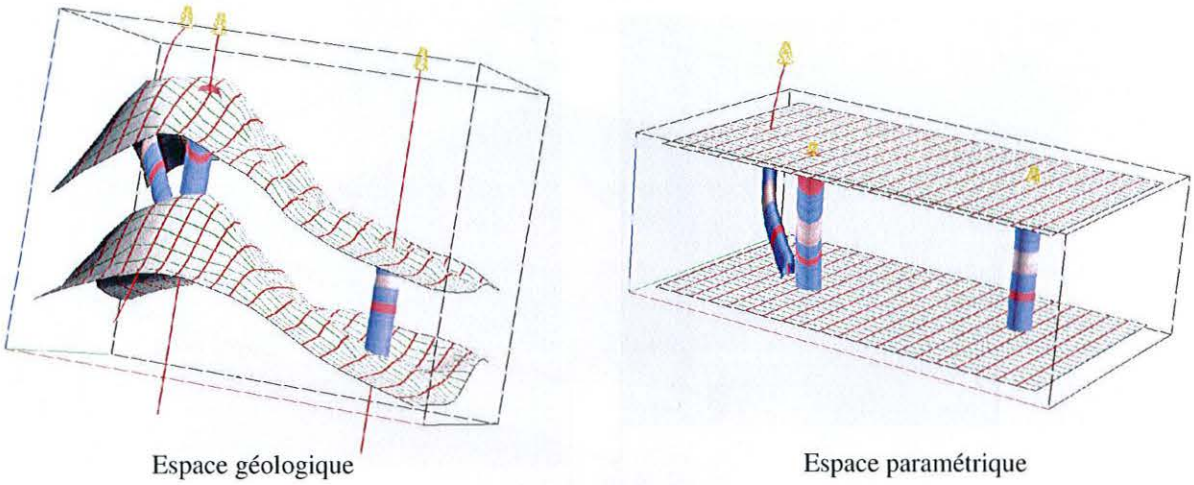



FIG. 5.1 : *Transfert de données de l'espace géologique vers l'espace paramétrique. À gauche, trois puits traversant un modèle GeoChron défini dans le volume. Les deux horizons portent la trace du système de coordonnées paléo-géographiques* $(u, v)$*. À droite, les mêmes puits visualisés dans l'espace* $\overline{G}$ *où les horizons sont mis à plat.*

permet de contourner cette difficulté en donnant une image en longueur réelle d'une distance verticale (en *temps*) de l'espace paramétrique, dans les cas où cela est nécessaire.

Une fois toutes les données transférées dans l'espace paramétrique, il est possible d'utiliser toutes les méthodes géostatistiques existantes (qu'il s'agisse de méthodes classiques « deux points » ([Deutsch et Journel, 1998]) ou de méthodes multipoints ([Strebelle, 2002]) ou encore booléennes ([Caers, 2001], [Arpat et Caers, 2004]) sur une grille régulière fine en se rappelant que, du fait de la nature « dépliée » de l'espace paramétrique, la modélisation peut être effectuée dans des plans horizontaux. On obtient alors un modèle de propriété (estimé ou simulé) sur tout l'espace paramétrique (figure 5.2). Ce modèle va ensuite être reporté dans l'espace géologique initial (paragraphe 5.1.2).

### Prise en compte de l'influence des failles

À chaque fois que nous avons évoqué la continuité des propriétés au travers des failles, nous avons considéré que, en dehors de la déformation géométrique des terrains, les failles n'affectaient pas les propriétés pétrophysiques, ce qui est simplificateur.

Il est cependant possible de prendre en compte ces effets de manière simple. En effet, des travaux récents ([Ledez, 2003] poursuivis par T. Frank [Frank, 2005]) permettent de calculer très rapidement des *cartes de distance* à des objets sur des grilles régulières. Par exemple, la figure 5.3 montre une carte de la distance aux failles d'un modèle. Grâce à la fonction de paramétrisation, cette carte de distance peut être peinte sur l'espace paramétrique (figure 5.3, à droite).

Un algorithme de modélisation de propriété peut alors utiliser cette carte de distance afin d'altérer le modèle de propriété dans un certain voisinage autour des failles. Cela permet donc de prendre en compte des effets plus complexes des failles sur les propriétés.

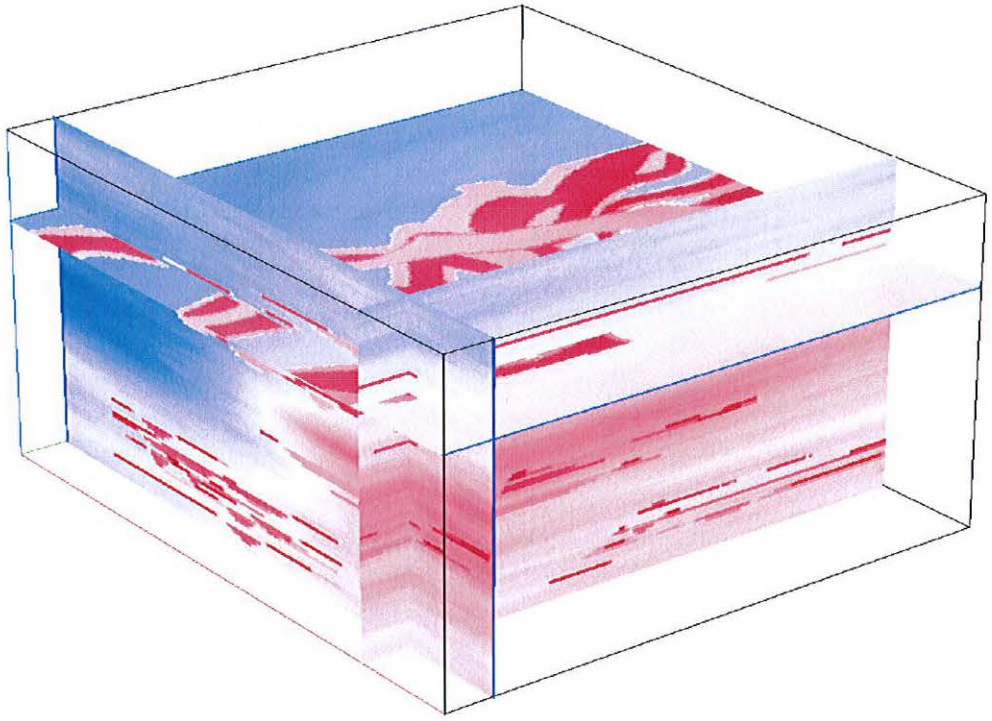


FIG. 5.2 : *Modèle de propriété pétrophysique dans l'espace paramétrique. Ici, une simulation booléenne de chenaux a été effectuée dans différents plans puis les objets ont été remplis par des simulations gaussiennes séquentielles avec des plages de valeurs différentes suivant les faciès. Ce modèle sera ensuite reporté dans l'espace géologique réel en suivant la paramétrisation (voir figure 5.4).*

### 5.1.2 Visualisation dans l'espace géologique

Une fois un modèle de propriété calculé dans l'espace paramétrique, il est nécessaire de visualiser celui-ci dans l'espace géologique initial. Si la fonction de paramétrisation inverse $\mathbf{x}(\mathbf{u})$ a été calculée, on peut utiliser le même algorithme que pour transférer les données de l'espace géologique vers l'espace paramétrique. Nous avons cependant vu que la fonction de paramétrisation inverse n'est pas toujours calculable facilement à cause des lacunes sédimentaires ou des érosions.

En réalité, toutes les zones de l'espace paramétrique ne nous intéressent pas à cette étape : si un point de l'espace paramétrique n'a pas d'image dans l'espace géologique alors ce point ne sera jamais représenté dans l'espace géologique. Plutôt que de calculer la fonction de paramétrisation inverse, il est donc plus simple d'utiliser à nouveau la fonction de paramétrisation $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ pour ne récupérer que les valeurs de propriété réellement utiles en adaptant l'algorithme précédent qui devient alors :

1: **pour tout** Point $P$ de l'espace géologique où $\varphi$ veut être connu **faire**
2: $\quad\mathcal{T}(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \leftarrow$ tétraèdre contenant $P$
3: $\quad(a, b, c) \leftarrow$ coordonnées barycentriques de $P$ dans $\mathcal{T}$

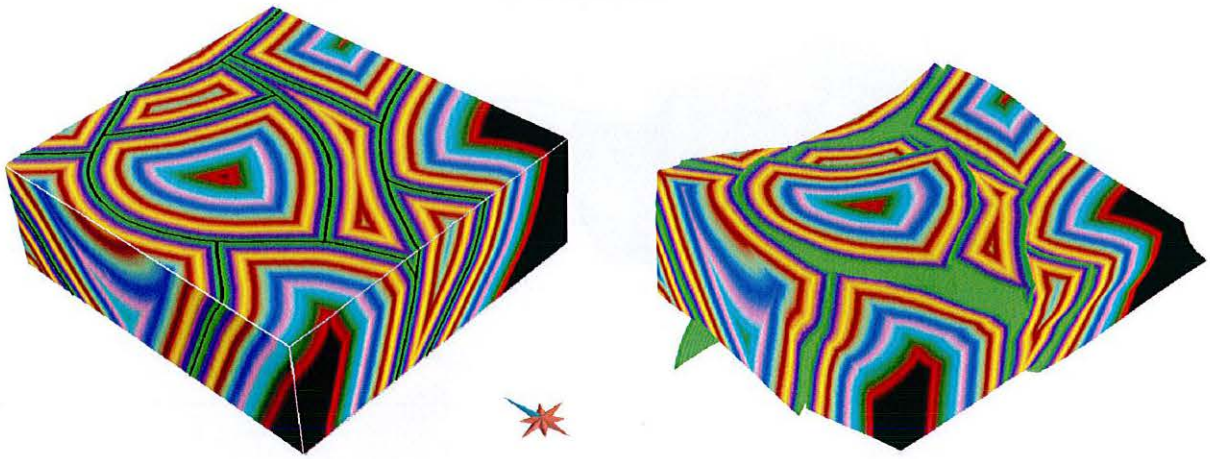


FIG. 5.3 : *Carte de distance aux failles dans l'espace géologique (à gauche) correspondant au réseau de failles de la figure 1.6 et dans l'espace paramétrique (à droite). Une altération du cube de propriété pétrophysique de la figure 5.2 en fonction de cette carte de distance permet de prendre en compte l'influence des volumes de faille (d'après les travaux de T. Frank [Frank, 2005]).*

4: $\mathbf{u}(P) \leftarrow$ coordonnées paramétriques de $P$ calculées à partir de $\mathbf{u}(\alpha_0)$, $\mathbf{u}(\alpha_1)$, $\mathbf{u}(\alpha_2)$, $\mathbf{u}(\alpha_3)$, et $a$, $b$ et $c$
5:
6: //. $P'$ est l'image de $P$ dans l'espace paramétrique
7: $P' \leftarrow \mathbf{u}(P)$
8:
9: $\varphi(P) \leftarrow \varphi(P')$
10: **fin pour**

La figure 5.4 synthétise ce processus, depuis des données plongées dans l'espace géologique jusqu'au modèle de propriété final.

En pratique, cette étape de visualisation de la propriété par le biais des coordonnées paramétriques est similaire à la technique de plaquage de texture[1] 3D, très utilisée dans les problèmes de visualisation complexes ([Möller et Haines, 1999]). Ainsi, cette technique est utilisée dans les logiciels de CAO ou de création de dessins animés pour rendre de façon réaliste des objets dont la géométrie est simple (tables, murs...) mais qui possèdent un degré de détail élevé. Dans le cadre géologique, cette technique est aussi utilisée, par exemple pour stocker des propriétés sur les failles ([Souche, 2005]).

L'utilisation de ces algorithmes de plaquage de texture dans le cadre de la paramétrisation GeoChron a nécessité des adaptations et l'implémentation de ces fonctions, ainsi que de nombreuses fonctions de visualisation avancées utilisées au cours de ce travail, a été réalisée par T. Frank ([Frank, 2004]).

Comme le montre la figure 5.5, le modèle de propriété ainsi obtenu est bien plus fin que le maillage tétraédrisé initial et permet donc d'obtenir un modèle aussi précis que celui

[1] Ou *texture mapping*.

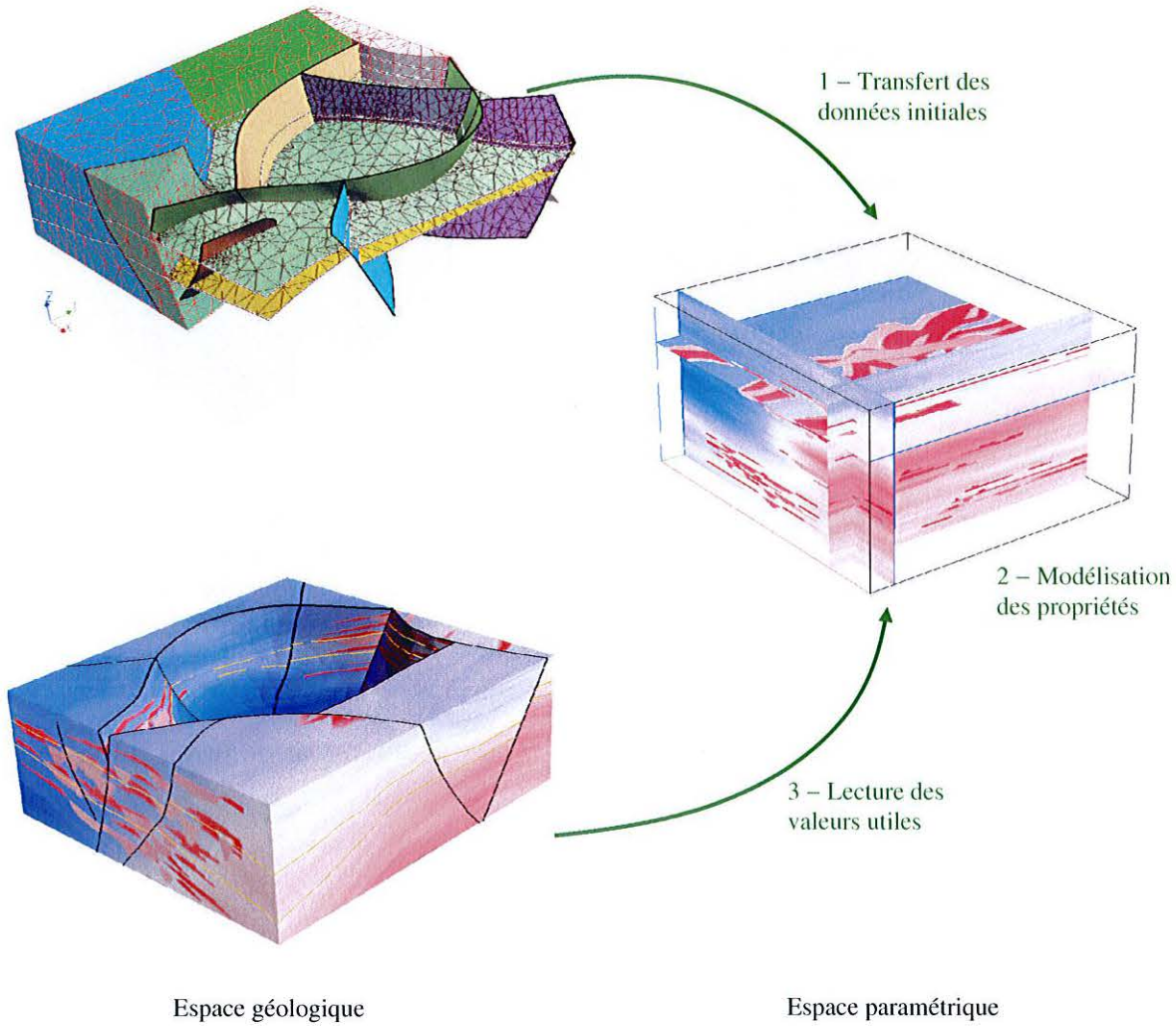



FIG. 5.4 : *Méthode globale de représentation des propriétés pétrophysiques dans l'espace géologique. Partant d'un modèle GeoChron dans l'espace géologique (en haut à gauche), les données sont transférées dans l'espace paramétrique où la propriété est modélisée (à droite) puis l'espace géologique est rempli en allant lire les valeurs dans l'espace paramétrique (en bas à gauche).*

qu'on obtiendrait avec une grille irrégulière, sans en avoir les inconvénients au niveau des failles.

### 5.1.3 Modélisation des systèmes sédimentaires

Dans le deuxième chapitre (voir paragraphe 2.2.2), nous avons vu que l'espace paramétrique GeoChron était similaire à l'espace de Wheeler utilisé en stratigraphie : dans cet espace en effet, l'axe vertical représente les âges de dépôt des terrains, tout comme le *temps* du modèle GeoChron.

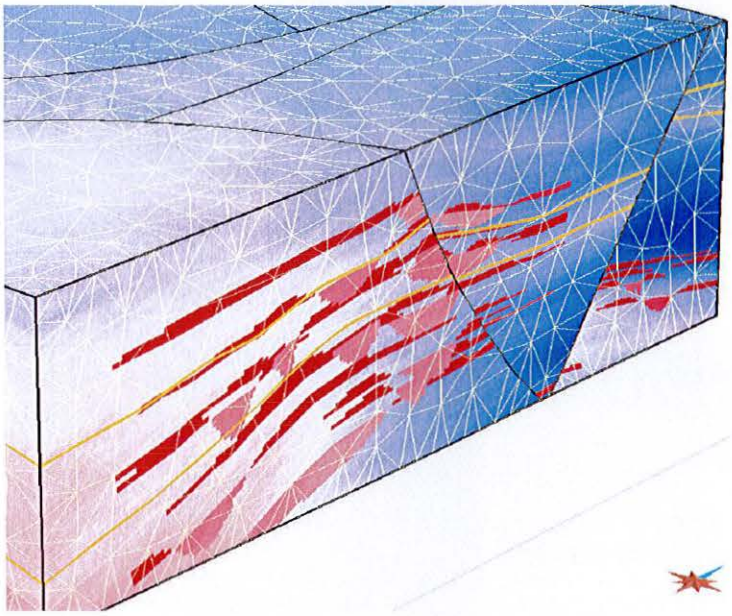


FIG. 5.5 : *Modèle de propriété pétrophysique peint sur un volume tétraédrisé. Le maillage tétraédrisé (en blanc) a une résolution nettement plus grossière que celle du modèle de propriété. De plus, les structures sédimentaires, plates dans l'espace paramétrique (figure 5.2), suivent maintenant la géométrie des horizons (en orange) et sont affectés par les failles.*

En pratique, ces deux modèles ne sont pas identiques, par la manière dont le modèle GeoChron est construit. En effet, nous avons vu que ce modèle supposait une interpolation continue du paramètre *temps* entre les différents horizons $H_t$ (voir paragraphe 3.1.1) : l'image paramétrique d'un domaine donné ne peut donc pas contenir de lacunes entre deux horizons initiaux $H_{t_i}$ et $H_{t_j}$. Notons tout de même qu'un résultat similaire à celui de la figure 2.4 peut être obtenu en construisant le paramètre *temps* en deux fois et en utilisant deux valeurs $t_i$ et $t_{i'}$ différentes (une pour la partie au-dessous de la discontinuité, et une autre au-dessus).

Cette modification ne peut toutefois pas être utilisée dans le cadre de la modélisation fine des séquences stratigraphiques. Dans ce cadre, pour obtenir un diagramme similaire à celui de la figure 5.6, il faudrait introduire de nombreuses surfaces de discontinuité qui ne sont généralement pas encore localisées lorsque seules les limites de séquences majeures sont connues. Les lacunes ne peuvent apparaître dans le modèle GeoChron qu'à la faveur de surfaces d'érosion ou de non déposition clairement identifiées comme telles.

Cependant, il est possible de faire correspondre à l'espace paramétrique $\overline{G}$ un autre espace $W$ qui est réellement identique à l'espace chronostratigraphique de Wheeler (figure 5.7). La transformation passant de l'un à l'autre permet de passer des *temps stratigraphiques* correspondants à des durées réelles, dans l'espace de Wheeler, aux *temps apparents* utilisés dans l'espace paramétrique $\overline{G}$.

Le principe de cette transformation supplémentaire est de considérer que l'espace paramétrique $\overline{G}$, même si il n'est pas identique à l'espace de Wheeler $W$, permet de s'affranchir

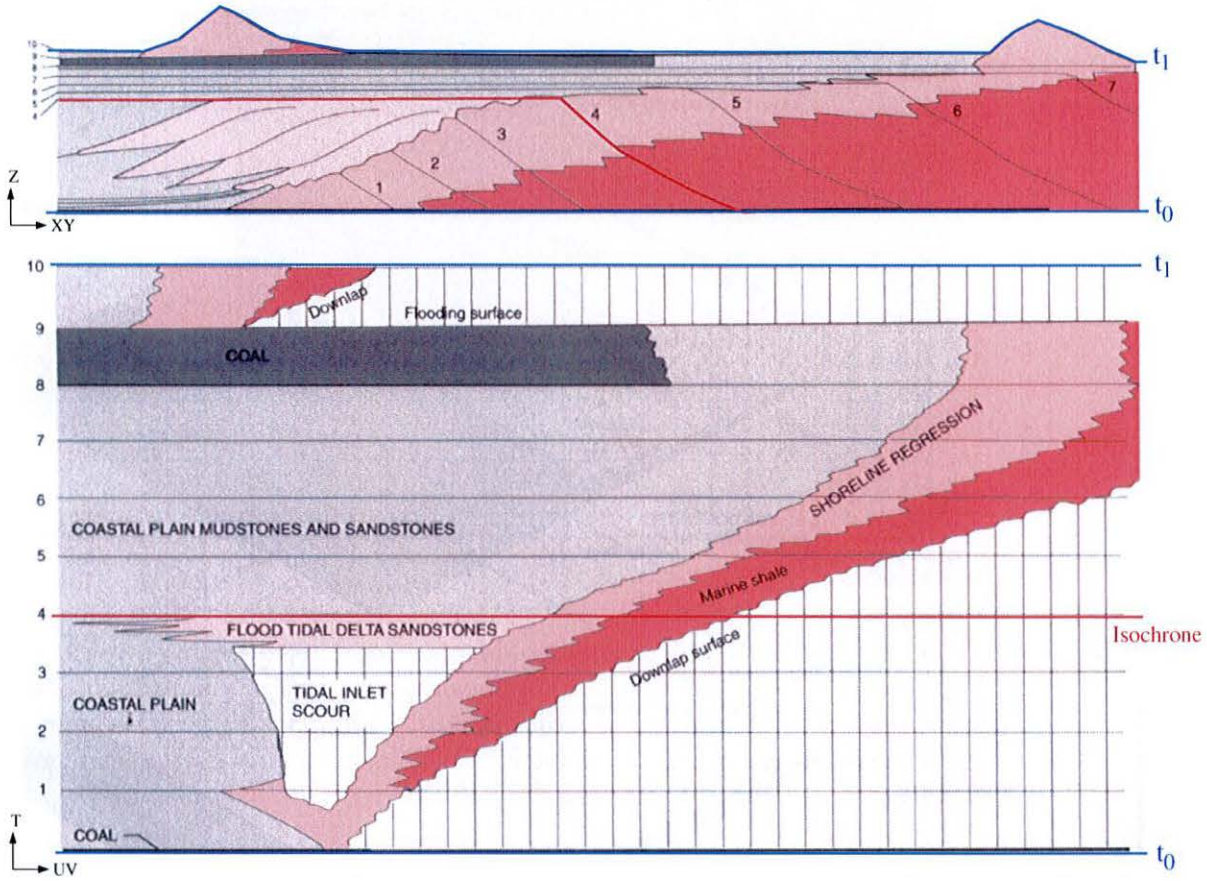



FIG. 5.6 : *Correspondance entre l'espace géologique et l'espace de Wheeler. En haut, modèle lithostratigraphique de plaine côtière, en bas, le même modèle présenté dans l'espace chronostratigraphique de Wheeler (d'après [Emery et Myers, 1996]). Dans l'espace de Wheeler, les deux limites de séquences majeures (en bleu) sont horizontales de même que toute isochrone intermédiaire (en rouge). Noter l'importance des zones de non dépôt ou d'érosion au cœur des séquences.*

des déformations structurales que les terrains ont pu subir après leur dépôt. Par conséquent, l'image des limites de séquences majeures utilisées comme horizons initiaux $H_t$ pour construire $\overline{G}$ est la même dans $\overline{G}$ et dans $W$. De plus, les coordonnées d'espace $(u, v)$ du modèle GeoChron sont identiques aux coordonnées d'espace des diagrammes stratigraphiques et seul l'axe vertical est affecté en passant de l'un à l'autre, le *temps apparent* de $\overline{G}$ devenant un *temps stratigraphique* réel dans $W$.

Si des algorithmes génétiques de modélisation de séquences stratigraphiques sont disponibles, ils peuvent être utilisés entre deux limites de séquences telles que définies par le modèle GeoChron. Ce modèle permet de connaître, pour chaque séquence d'ordre inférieur, sa durée mais aussi l'épaisseur déposée correspondante (cette épaisseur peut ensuite avoir été érodée). Il devient donc possible de construire un véritable espace de Wheeler entre deux limites de séquences majeures. Cet espace peut ensuite être retransformé en l'espace paramétrique $\overline{G}$, par une simple intégration verticale, d'après le principe expliqué ci-dessous.

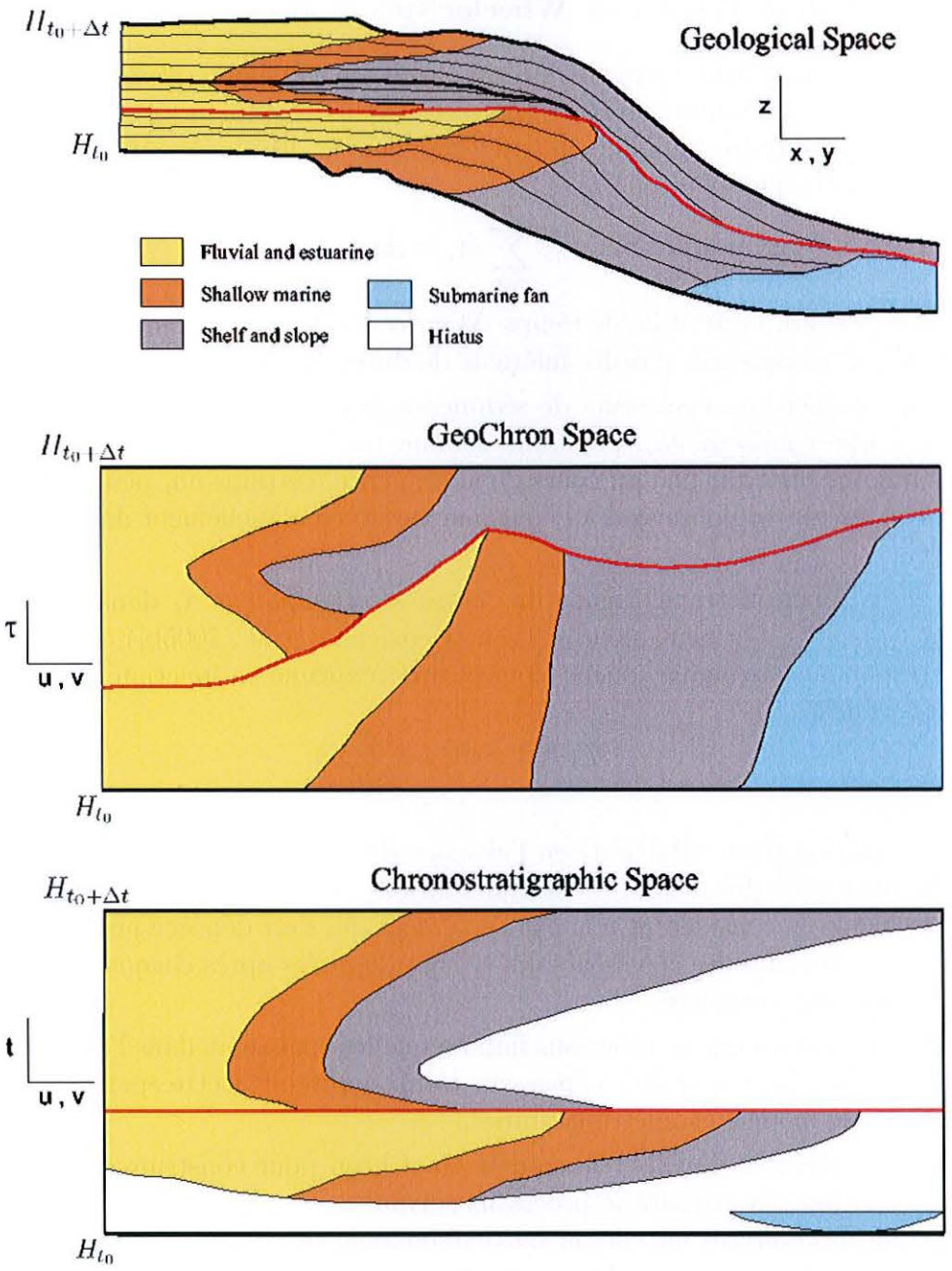



FIG. 5.7 : *Correspondance entre l'espace géologique (en haut), l'espace paramétrique $\overline{G}$ (au milieu) et l'espace de Wheeler (en bas) construits à partir des deux surfaces limitant une séquence majeure. L'isochrone intermédiaire (en rouge) est transformée en une ligne horizontale dans l'espace de Wheeler, mais pas dans l'espace paramétrique. Noter la présence de vides dans l'espace de Wheeler qui sont absents dans l'espace paramétrique. On vérifie aussi ici l'importance de choisir des surfaces isochrones et non pas des limites de faciès pour construire la paramétrisation GeoChron ([Kedzierski et al., 2005b]).*

### Transformation de l'espace de Wheeler vers l'espace GeoChron

Considérons une ligne verticale de l'espace paramétrique, c'est-à-dire une ligne IPG, entre deux limites de séquences $H_t$ et $H_{t+\Delta t}$. Cette ligne coupe $p+1$ couches appartenant à des séquences d'ordre inférieur qui correspondent à des durées $\delta t_0$, $\delta t_1$, ..., $\delta t_p$ dans l'espace paramétrique telles que :

$$\sum_{i=0}^{p} \delta t_i = \Delta t$$

En d'autres termes, l'intervalle de temps $\Delta t$ entre les deux limites de séquences majeures est occupé par $p$ séquences d'ordre inférieur de durée $\delta t_i$ chacune.

Si l'on considère les épaisseurs de sédiments déposés durant cette durée $\Delta t$, chaque séquence a une épaisseur $\delta h_i$, pour une somme totale de $\Delta h$. Notons que, du fait des érosions qui ont pu avoir lieu au cours de la séquence, certains $\delta h_i$ peuvent être négatifs. De la sorte, $\Delta h$ est toujours égal à l'épaisseur observée actuellement dans $G$ le long de la ligne IPG.

Soit $\mathcal{T}$ la fonction transformant un *temps stratigraphique* $\tau_i$ dans $W$ en un *temps apparent* $t_i$ dans $\overline{G}$. On peut montrer (voir [Kedzierski *et al.*, 2005b]) que le *temps apparent* correspondant à chaque couche élémentaire s'exprime en fonction des épaisseurs des différentes couches :

$$\mathcal{T}(\delta\tau_i) = \delta t_i = \frac{\Delta t}{\Delta h}.\delta h_i \tag{5.1}$$

Cette équation n'est valable qu'en l'absence d'érosion au cours de la séquence (mais éventuellement avec des lacunes de sédimentation). En cas d'érosion, le *temps apparent* peut être calculé en considérant non pas l'épaisseur qui s'est déposée jusqu'au point considéré mais le maximum des épaisseurs qui se sont déposées après chaque épisode d'érosion au-dessus du point considéré.

Enfin, remarquons que ce processus impose que les épaisseurs dans l'espace de Wheeler soient construites en accord avec l'épaisseur totale à obtenir. Cette épaisseur totale est en effet fixée par le modèle géométrique initial.

Il est donc possible d'utiliser le modèle GeoChron pour construire un modèle stratigraphique cohérent en utilisant le processus suivant :

- Partant des données initiales et particulièrement des limites de séquences majeures, une paramétrisation GeoChron est construite. Cette paramétrisation permet, dans l'espace $\overline{G}$, de s'affranchir des effets structuraux des failles ou des plis.
- L'image des limites de séquences majeures étant la même dans l'espace paramétrique $\overline{G}$ et dans l'espace stratigraphique de Wheeler, un modèle stratigraphique peut être construit entre ces limites dans l'espace de Wheeler.
- Une fois le modèle construit, il peut être transformé pour correspondre à nouveau à l'espace paramétrique $\overline{G}$, en utilisant l'équation 5.1 ci-dessus. Cette équation permet, sur chaque ligne verticale de la grille qui couvre l'espace paramétrique, de calculer la position des limites de séquences d'ordre inférieur.
- Enfin, comme expliqué dans le paragraphe 5.1, un modèle dans l'espace paramétrique peut être transformé en un modèle correspondant dans l'espace géologique réel.

Ce processus permet donc de construire en deux étapes un modèle stratigraphique cohérent avec les données, en passant par des espaces dans lesquels les données sont plus faciles à appréhender. Des premiers travaux dans cette direction ont été initiés récemment par P. Kedzierski ([Kedzierski *et al.*, 2005b]) en se basant sur un algorithme de remplissage mis au point en collaboration avec A. Le Solleuz (voir [Kedzierski *et al.*, 2005a]).

Notons toutefois que ces modèles reposent sur l'hypothèse très forte que les horizons utilisés pour construire le modèle GeoChron sont bien des isochrones et non pas des limites de faciès lithologiques ou sismiques. Il faut donc être particulièrement prudent dans le choix des données d'entrée.

### 5.1.4 Changements d'échelle (*upscaling*)

Un problème récurrent dans le cadre de la modélisation des réservoirs concerne les différentes échelles de représentation et les transferts entre ces différentes échelles. En effet, la complexité des calculs et la puissance des ordinateurs impose d'utiliser pour les simulations d'écoulement des grilles plus grossières que celles utilisées pour la modélisation de propriété, il est donc indispensable de disposer de méthodes pour passer d'une échelle à l'autre[2]. De plus, pour des propriétés pétrophysiques complexes, en particulier la perméabilité, ce changement d'échelle doit se faire en intégrant les valeurs autour de la cellule concernée et pas uniquement celles à l'intérieur de cette cellule, ce qui complique encore le processus.

De nombreux auteurs se sont penchés sur cette question (voir par exemple [Prevost *et al.*, 2004], [Renard et de Marsily, 1997], [Chilès et Delfiner, 1999], [Tureyen *et al.*, 2004] entre autres) et nous ne proposons pas ici de solution nouvelle à ce problème. Cependant, le modèle GeoChron se présentant différemment des modèles habituels, il est intéressant de regarder comment la mise à l'échelle peut être envisagée dans le cadre de ce modèle.

Le processus de changement d'échelle avec le modèle GeoChron se situe dans le contexte suivant :

- Une propriété pétrophysique quelconque (habituellement la perméabilité) est connue dans chaque cellule d'une grille structurée régulière fine couvrant l'espace paramétrique $\overline{G}$. Cette propriété peut être un tenseur d'ordre 3 si on considère par exemple les anisotropies de perméabilité.
- Une grille formée de cellules polyédriques quelconques et adaptée par exemple aux contraintes des simulations d'écoulement couvre l'espace géologique.
- Le changement d'échelle doit permettre d'obtenir une valeur unique de la propriété dans chaque macro-cellule de la grille d'écoulement.

Rappelons que la fonction de paramétrisation $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ n'est échantillonnée qu'aux nœuds du maillage sur lequel elle est construite. Par conséquent, les gradients de $u(\mathbf{x})$, $v(\mathbf{x})$ et $t(\mathbf{x})$ sont constants dans chaque cellule de ce maillage, de même que les fonctions $\mathbf{x}_u(\mathbf{x})$, $\mathbf{x}_v(\mathbf{x})$ et $\mathbf{x}_t(\mathbf{x})$ qui sont calculées grâce à ces gradients (équation 2.3).

On suppose que les cellules de la grille d'écoulement sont de tailles suffisamment proches de celles du maillage utilisé pour construire la paramétrisation GeoChron. De

[2] On parle en anglais d'*upscaling*.

la sorte, les fonctions $\mathbf{x}_u(\mathbf{x})$, $\mathbf{x}_v(\mathbf{x})$ et $\mathbf{x}_t(\mathbf{x})$ seront considérées comme constantes dans chaque cellule.

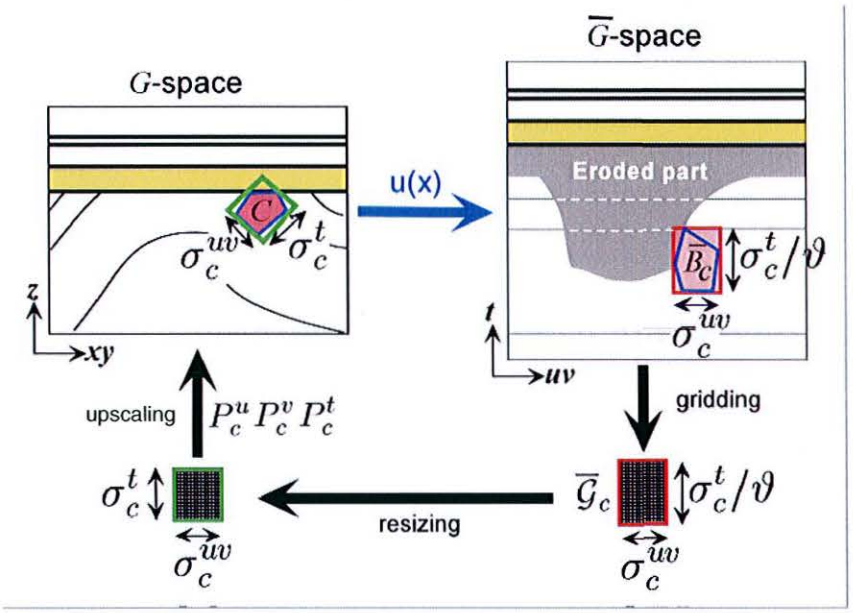



FIG. 5.8 : Upscaling *d'une propriété pétrophysique de la grille fine dans l'espace paramétrique vers une grille grossière de l'espace géologique. La cellule $C$ de l'espace géologique, centrée sur le point $\mathbf{x}^c$, est associée avec la boîte $\overline{B_c}$ de l'espace paramétrique, centrée sur le point $\mathbf{u}(\mathbf{x}^c)$. La boîte $\overline{B_c}$ peut recouvrir des zones érodées ou faillées sans introduire d'artefacts dans le calcul. Commentaire complet dans le texte ([Mallet, 2004]).*

La procédure de mise à l'échelle proposée par J.-L. Mallet dans le cadre du modèle GeoChron ([Mallet, 2004]) pour calculer une valeur équivalente de la fonction $\varphi$ dans la macro-cellule $C$ est la suivante (figure 5.8) :

1. Déterminer le centre de gravité $\mathbf{x}^c$ de la cellule $C$ ainsi que son image $\mathbf{u}^c = \mathbf{u}(\mathbf{x}^c)$ dans l'espace paramétrique $\overline{G}$.
2. Déterminer les tailles $\sigma_u^c$, $\sigma_v^c$ et $\sigma_t^c$ de $C$ suivant les trois directions parallèles à $\mathbf{x}_u(\mathbf{x}^c)$, $\mathbf{x}_v(\mathbf{x}^c)$ et $\mathbf{x}_t(\mathbf{x}^c)$.
3. Dans l'espace paramétrique, construire une boîte parallélépipèdique $\overline{B_c}$ centrée sur $\mathbf{u}^c$, parallèle aux trois axes $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$, $\mathbf{T}$ de $\overline{G}$ et de dimensions $\Delta_u^c$, $\Delta_v^c$ et $\Delta_t^c$ telles que :
   - $\Delta_u^c = \sigma_u^c$ est la dimension suivant la direction $\mathbf{U}$ ;
   - $\Delta_v^c = \sigma_v^c$ est la dimension suivant la direction $\mathbf{V}$ ;
   - $\Delta_t^c = \sigma_t^c / \|\boldsymbol{\vartheta}_\phi(\mathbf{x}^c)\|$ est la dimension suivant la direction $\mathbf{T}$.
4. La cellule $\overline{B_c}$ recouvre un certain nombre de cellules de la grille structurée régulière fine $\overline{\mathcal{G}}$ dans laquelle la propriété pétrophysique $\varphi$ a été modélisée.
5. Transformer la partie $\overline{\mathcal{G}_c}$ de $\overline{\mathcal{G}}$ contenue dans $\overline{B_c}$ en une grille fine $\mathcal{G}_c$ de l'espace géologique possédant le même nombre de cellules, d'après les règles suivantes :
   - les axes de $\mathcal{G}_c$ sont parallèles aux trois vecteurs $\mathbf{x}_u(\mathbf{x}^c)$, $\mathbf{x}_v(\mathbf{x}^c)$ et $\mathbf{x}_t(\mathbf{x}^c)$ ;

- l'extension latérale de $\mathcal{G}_c$ est $\sigma_u^c$, $\sigma_v^c$ et $\sigma_t^c$, suivant les trois axes $\mathbf{x}_u(\mathbf{x}^c)$, $\mathbf{x}_v(\mathbf{x}^c)$ et $\mathbf{x}_t(\mathbf{x}^c)$ ;
- chaque cellule de $\mathcal{G}_c$ contient la valeur $\varphi(\mathbf{u})$ de la cellule de $\overline{\mathcal{G}_c}$ correspondante.

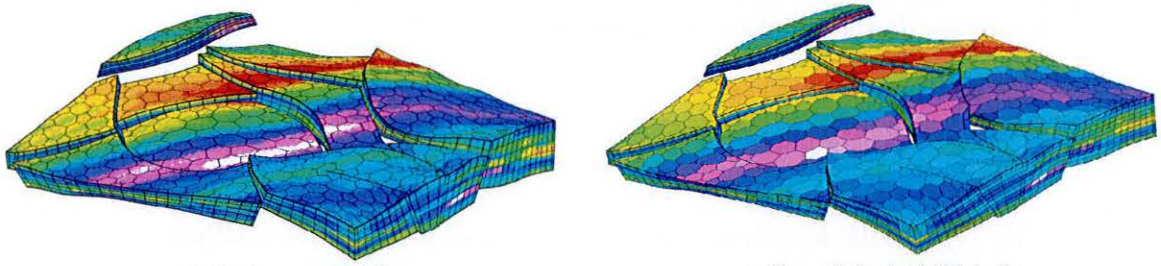
6. Appliquer n'importe quelle méthode de changement d'échelle, statique ou dynamique, sur la grille fine $\mathcal{G}_c$ pour obtenir une valeur équivalente $\overline{\varphi_C}$ de la propriété sur la cellule $C$.

La transformation de l'étape 3 se justifie car, d'une part les vecteurs $\mathbf{x}_u(\mathbf{x}^c)$, $\mathbf{x}_v(\mathbf{x}^c)$ et $\mathbf{x}_t(\mathbf{x}^c)$ ont pour image dans l'espace paramétrique les vecteurs $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$ et $\mathbf{T}$ (voir paragraphe 2.1.2) et d'autre part, les axes horizontaux $\mathbf{U}$ et $\mathbf{V}$ de l'espace paramétrique représentent les coordonnées paléo-géographiques et sont donc à la même échelle que les axes de l'espace géologique, alors que l'axe $\mathbf{T}$, quant à lui, est un temps et doit être corrigé par la vitesse de sédimentation instantanée pour obtenir la longueur correspondante suivant les axes d'espace.

Notons aussi que, si la grille fine $\overline{\mathcal{G}_c}$ est obligatoirement orthogonale car $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$ et $\mathbf{T}$ forment un repère orthogonal, cela n'est pas le cas de la grille fine $\mathcal{G}_c$ dont les axes sont alignés sur $\mathbf{x}_u(\mathbf{x}^c)$, $\mathbf{x}_v(\mathbf{x}^c)$ et $\mathbf{x}_t(\mathbf{x}^c)$ qui ne sont en général pas orthogonaux.

Enfin, si la méthode de mise à l'échelle choisie implique de considérer non seulement les cellules de la grille fine contenues dans $C$ mais aussi celles alentour, il suffit de choisir des tailles $\sigma_u^c$, $\sigma_v^c$ et $\sigma_t^c$ en accord.

L'utilisation d'une grille fine représentant l'espace de dépôt, y compris les zones qui ne sont plus observables maintenant, présente aussi un avantage. En effet, comme l'illustre la figure 5.8, si une cellule se situe au bord d'une discontinuité, les valeurs de propriété utilisées pour calculer la valeur équivalente seront toutes prélevées dans des régions géologiquement compatibles avec la cellule, fournissant ainsi un résultat à priori plus cohérent.



Grille de propriété fine peinte sur une grille grossière

Propriété mise à l'échelle sur la grille grossière

FIG. 5.9 : *Exemple d'*upscaling *d'une propriété sur une grille polyédrique. À gauche, une simulation stochastique de propriété réalisée sur une grille fine dans l'espace paramétrique est peinte sur une grille polyédrique adaptée aux écoulements, dans l'espace géologique. À droite, la propriété a été mise à l'échelle (par une simple moyenne arithmétique) de la grille grossière (d'après [Grosse, 2002]).*

## 5.2 Utilisation du tenseur de déformation

Le modèle GeoChron peut être utilisé pour approcher le tenseur de déformation des terrains de la zone d'étude. En effet, l'espace paramétrique peut être considéré, dans certains cas simples, comme une image des couches avant leur déformation et leur rupture éventuelle.

Nous présentons ici des résultats demontrés par J.-L. Mallet ([Mallet, 2004]) sur l'estimation du tenseur de déformation total à partir de la paramétrisation GeoChron, puis nous illustrerons cette méthode avec quelques exemples simples. La méthode présentée ici est une méthode géométrique qui considère uniquement la transformation mathématique permettant de passer d'un état initial non plissé à l'état actuel plissé sans prendre en compte directement les paramètres géomécaniques des roches.

### 5.2.1 De la paramétrisation au tenseur de déformation

#### Restauration d'une couche fine

À l'instant $t$, l'horizon $H_t$ en cours de formation était un plan $\overline{H_t}$ dans l'espace géologique. Son voisin $H_{t-\Delta t}$, situé légèrement en dessous, avait alors potentiellement déjà été transformé en un horizon plissé $\widetilde{H_{t-\Delta t}}$. De plus, on considère qu'à cet instant la sédimentation s'est faite suivant un axe vertical $\mathbf{T}$ parallèle à l'axe des *temps*.

On peut donc restaurer la couche $\{H_t, H_{t-\Delta t}\}$ telle qu'elle est observée actuellement en une couche $\{\overline{H_t}, \widetilde{H_{t-\Delta t}}\}$ telle qu'elle était à l'instant $t$ avec la méthode suivante :

- on choisit le plan horizontal $\overline{H_t}$ représentant l'image de $H_t$ ;
- l'horizon $\widetilde{H_{t-\Delta t}}$ est construit à partir de l'horizon $\overline{H_t}$ et de l'épaisseur déduite grâce à la vitesse de sédimentation instantanée :

$$\forall \mathbf{u} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ t \end{bmatrix} \in \overline{H_t} \longmapsto \widetilde{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ t - \vartheta_\phi.\Delta t \end{bmatrix} \in \widetilde{H_{t-\Delta t}}$$

où $\mathcal{V}_\phi$ représente la vitesse de sédimentation instantanée (définie au paragraphe 2.2.1) au point $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{u})$.

La transformation ainsi définie est appelée *restauration* (voir [Massot, 2002], [Mallet, 2002]) et notée $R$ :

$$\{H_t, H_{t-\Delta t}\} \overset{R}{\longmapsto} \{\overline{H_t}, \widetilde{H_{t-\Delta t}}\}$$

De plus, cette transformation est continue et, pour des variations infinitésimales $\Delta u$, $\Delta v$ et $\Delta t$ autour d'un point $\mathbf{x}(u, v, t)$ de l'espace géologique $G$, elle peut être approximée linéairement, c'est-à-dire que :

$$\text{si } R(\mathbf{x}(u,v,t)) = \begin{bmatrix} u \\ v \\ t \end{bmatrix} \text{ alors } R(\mathbf{x}(u+\Delta u, v+\Delta v, t-\Delta t)) = \begin{bmatrix} u+\Delta u \\ v+\Delta v \\ t - \vartheta_\phi.\Delta t \end{bmatrix}$$

Afin de déterminer les équations régissant cette restauration, nous allons calculer les images $R(\mathbf{x}_u(\mathbf{x}))$, $R(\mathbf{x}_v(\mathbf{x}))$ et $R(\mathbf{x}_t(\mathbf{x}))$ des trois vecteurs $\mathbf{x}_u(\mathbf{x})$, $\mathbf{x}_v(\mathbf{x})$ et $\mathbf{x}_t(\mathbf{x})$ caractéristiques de la paramétrisation (voir paragraphe 2.1.2). Ces trois vecteurs s'expriment en fonction de la paramétrisation $\mathbf{x}(u,v,t)$ d'un point $\mathbf{x}$ de l'espace géologique $G$ :

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_u(\mathbf{x}) &= \left.\frac{\partial \mathbf{x}(u, v(\mathbf{x}), t(\mathbf{x}))}{\partial u}\right|_{u=u(\mathbf{x})} \\
\mathbf{x}_v(\mathbf{x}) &= \left.\frac{\partial \mathbf{x}(u(\mathbf{x}), v, t(\mathbf{x}))}{\partial v}\right|_{v=v(\mathbf{x})} \\
\mathbf{x}_t(\mathbf{x}) &= \left.\frac{\partial \mathbf{x}(u(\mathbf{x}), v(\mathbf{x}), t)}{\partial t}\right|_{t=t(\mathbf{x})}
\end{aligned}$$

Considérons par exemple le vecteur $\mathbf{x}_t(\mathbf{x})$. Il peut aussi s'exprimer comme :

$$\mathbf{x}_t(\mathbf{x}) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{x}(u(\mathbf{x}), v(\mathbf{x}), t(\mathbf{x})) - \mathbf{x}(u(\mathbf{x}), v(\mathbf{x}), t(\mathbf{x}) - \Delta t)}{\Delta t}$$

L'expression linéaire de $R$ ci-dessus permet d'obtenir :

$$\begin{aligned}
R(\mathbf{x}_t(\mathbf{x})) &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\begin{bmatrix} u(\mathbf{x}) \\ v(\mathbf{x}) \\ t(\mathbf{x}) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u(\mathbf{x}) \\ v(\mathbf{x}) \\ t(\mathbf{x}) - \vartheta_\phi.\Delta t \end{bmatrix}}{\Delta t} \\
&= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vartheta_\phi.\Delta t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vartheta_\phi \end{bmatrix} \\
&= \|\vartheta_\phi(\mathbf{x})\|.\mathbf{T}
\end{aligned}$$

De manière similaire pour $\mathbf{x}_u$ et $\mathbf{x}_v$ on obtient :

$$\begin{aligned}
R(\mathbf{x}_u(\mathbf{x})) &= \mathbf{U} \\
R(\mathbf{x}_v(\mathbf{x})) &= \mathbf{V} \\
R(\mathbf{x}_t(\mathbf{x})) &= \|\vartheta_\phi(\mathbf{x})\|.\mathbf{T}
\end{aligned}$$

ou encore, en d'autres termes :

- l'image du vecteur $\mathbf{x}_u(\mathbf{x})$ au moment du dépôt est le vecteur $\mathbf{U}$ ;
- l'image du vecteur $\mathbf{x}_v(\mathbf{x})$ au moment du dépôt est le vecteur $\mathbf{V}$ ;
- l'image du vecteur $\mathbf{x}_t(\mathbf{x})$ au moment du dépôt est le vecteur $\widetilde{\mathbf{T}(\mathbf{x})} = \|\vartheta_\phi(\mathbf{x})\|.\mathbf{T}$.

### Le tenseur métrique

Il apparaît donc que les images au moment du dépôt des vecteurs $\mathbf{x}_u$, $\mathbf{x}_v$, et $\mathbf{x}_t$ par la restauration $R$ sont les vecteurs $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$ et $\widetilde{\mathbf{T}(\mathbf{x})}$.

Dans le paragraphe 2.1.2, nous avons vu que le tenseur métrique $g(\mathbf{x})$ associé à un repère $(\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_t)$ se définissait comme (équation 2.3) :

$$g(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \|\mathbf{x}_u\|^2 & \mathbf{x}_u.\mathbf{x}_v & \mathbf{x}_u.\mathbf{x}_t \\ \mathbf{x}_v.\mathbf{x}_u & \|\mathbf{x}_v\|^2 & \mathbf{x}_v.\mathbf{x}_t \\ \mathbf{x}_t.\mathbf{x}_u & \mathbf{x}_t.\mathbf{x}_v & \|\mathbf{x}_t\|^2 \end{bmatrix}$$

De la même manière, on peut calculer le tenseur métrique $g_0(\mathbf{x})$ associé au repère $(\mathbf{U}, \mathbf{V}, \widetilde{\mathbf{T}(\mathbf{x})})$, qui se simplifie car $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$ et $\mathbf{T}$ forment un base orthonormée de $\overline{G}$ :

$$\begin{aligned} g_0(\mathbf{x}) &= \begin{bmatrix} \|\mathbf{U}\|^2 & \mathbf{U}.\mathbf{V} & \mathbf{U}.\widetilde{\mathbf{T}(\mathbf{x})} \\ \mathbf{V}.\mathbf{U} & \|\mathbf{V}\|^2 & \mathbf{V}.\widetilde{\mathbf{T}(\mathbf{x})} \\ \widetilde{\mathbf{T}(\mathbf{x})}.\mathbf{U} & \widetilde{\mathbf{T}(\mathbf{x})}.\mathbf{V} & \|\widetilde{\mathbf{T}(\mathbf{x})}\|^2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & |\vartheta_\phi(\mathbf{x})|^2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

### Le tenseur de déformation

Il existe plusieurs manières de définir le tenseur de déformation d'un objet, à partir des vecteurs de déplacement par exemple. Nous utiliserons ici une définition basée sur les tenseurs métriques (voir [Mallet, 2002] ou [Sédov, 1975] pour différentes définitions possibles).

Le tenseur de déformation $\varepsilon(\mathbf{x})$ (ou $E$) ou *tenseur de Green-Lagrange*, caractérisant les déformations de l'espace géologique $G$ au voisinage d'un point $\mathbf{x}$ entre le temps de formation et le temps présent, est défini comme la moitié de la différence entre deux tenseurs métriques associés à des repères correspondants :

$$\varepsilon(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}.(g(\mathbf{x}) - g_0(\mathbf{x}))$$

Le tenseur de Green-Lagrange est relatif aux coordonnées d'espace et il est parfois intéressant d'utiliser le même tenseur mais relatif aux coordonnées matérielles. On parle alors du tenseur eulérien $S$ qui se définit dans notre cas comme :

$$S(\mathbf{x}) = g^{-1}(\mathbf{x}).\varepsilon(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}(I - g^{-1}(\mathbf{x}).g_0(\mathbf{x}))$$

D'autre part, le tenseur eulérien possède un avantage en terme de calcul. En effet, on a vu (équation 2.4) que l'inverse $g^{-1}$ de $g$ pouvait très facilement se calculer en fonction des gradients de $u$, $v$ et $t$, alors que le tenseur $g$ lui-même s'exprime en fonction des $\mathbf{x}_u$, $\mathbf{x}_v$ et $\mathbf{x}_t$ qui sont des fonctions plus complexes (deux produits vectoriels et un produit scalaire pour chaque terme) des gradients.

### Invariants du tenseur de déformation

D'après la définition de $\varepsilon(\mathbf{X})$, le tenseur de déformation dépend fortement du système de coordonnées $(u, v, t)$ à partir duquel $(\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_t)$ puis $g$ et $g_0$ sont calculés. Cependant, il existe un certain nombre d'*invariants* ([Mallet, 2002]) de ce tenseur, c'est-à-dire des scalaires qui ne changent pas si l'échelle du *temps* est changée ou si les coordonnées paléogéographiques $u$ et $v$ subissent une translation ou une rotation.

En outre, le tenseur de déformation est une donnée complexe (une matrice $3 \times 3$) difficile à interpréter et à visualiser telle quelle. Les invariants de ce tenseur permettent de simplifier l'utilisation des déformations.

Par exemple, on peut observer un petit élément de volume $dV$ autour d'un point $\mathbf{x}$ et son image $dV_0$ à l'instant de son dépôt. Le *coefficient de dilatation cubique* $\theta$ se définit comme :

$$\theta(\mathbf{x}) = \frac{dV - dV_0}{dV_0}$$

On montre ([Mallet, 2002], par exemple) que ce coefficient se calcule à partir des tenseurs métriques :

$$\theta(\mathbf{x}) = \sqrt{\frac{\det\, g(\mathbf{x})}{\det\, g_0(\mathbf{x})}} - 1 = \sqrt{\frac{\det\, g_0^{-1}(\mathbf{x})}{\det\, g^{-1}(\mathbf{x})}} - 1$$

Or on a vu que, d'une part :

$$\det\, g^{-1}(\mathbf{x}) = ((\mathbf{grad}\ u(\mathbf{x}) \times \mathbf{grad}\ v(\mathbf{x})).\mathbf{grad}\ t(\mathbf{x}))$$

et d'autre part :

$$\vartheta_\phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{1-\phi(\mathbf{x})}\vartheta(\mathbf{x}) = \frac{1}{(1-\phi(\mathbf{x})).\|\mathbf{grad}\ t(\mathbf{x})\|}$$

De plus, le déterminant de $g_0^{-1}(\mathbf{x})$ est facile à calculer car $g_0$ est un tenseur diagonal :

$$\begin{aligned} \det\, g_0^{-1}(\mathbf{x}) &= \frac{1}{|\vartheta_\phi(\mathbf{x})|^2} \\ &= (1-\phi(\mathbf{x}))^2.\|\mathbf{grad}\ t(\mathbf{x})\|^2 \end{aligned}$$

On en déduit donc l'expression de $\theta(\mathbf{x})$ :

$$\begin{aligned} \theta(\mathbf{x}) &= \sqrt{\frac{\det\, g_0^{-1}(\mathbf{x})}{\det\, g^{-1}(\mathbf{x})}} - 1 \\ &= \sqrt{\frac{(1-\phi(\mathbf{x}))^2.\|\mathbf{grad}\ t(\mathbf{x})\|^2}{((\mathbf{grad}\ u(\mathbf{x}) \times \mathbf{grad}\ v(\mathbf{x})).\mathbf{grad}\ t(\mathbf{x}))^2}} - 1 \\ &= \frac{1-\phi(\mathbf{x})}{|(\mathbf{grad}\ u(\mathbf{x}) \times \mathbf{grad}\ v(\mathbf{x})).\mathbf{N}(\mathbf{x})|} - 1 \end{aligned}$$

Cette expression montre clairement l'invariance de $\theta$ par rapport à une translation ou rotation de $u$ et de $v$ (les gradients restant les mêmes) ou encore par rapport à un changement d'échelle de $t$ (N étant un vecteur normalisé, il ne dépend pas de la norme de **grad** $t$).

#### Valeurs propres et vecteurs propres de $\varepsilon$

En règle générale, on utilise aussi les *directions principales de déformation* qui correspondent aux trois valeurs propres $\lambda_1$, $\lambda_2$ et $\lambda_3$ associées aux trois vecteurs propres $V_1$, $V_2$ et $V_3$ de $\varepsilon$. Notons au passage qu'on peut montrer que ces trois vecteurs propres sont orthogonaux entre eux.

### 5.2.2 Déformation de structures géologiques

Les équations précédentes sont illustrées ici sur un jeu de données simple pour permettre une comparaison aisée avec les prévisions théoriques. Cela écarte donc, dans un premier temps, les modèles faillés ainsi que les modèles présentant clairement une tectonique multi-phase ou multi-axes, comme par exemple l'anticlinal de Split Mountain (Utah) utilisé dans le chapitre 3 (en particulier vers l'est).

#### Exemple d'un anticlinal

Dans cette partie, nous utilisons donc un jeu de données très simple qui nous a été fourni par Chevron. Il s'agit d'une structure globalement anticlinale avec quelques variations latérales (voir figure 5.10). Nous disposons initialement d'un ensemble de cinq horizons qui représentent des limites de couches au sein de l'anticlinal. On peut ici considérer que les surfaces, planes à l'origine, ont subi une déformation simple pour atteindre leur géométrie actuelle.

Dans un premier temps, un modèle GeoChron a été construit à partir de ces surfaces. Pour cela, une valeur de *temps* a été affectée à chaque horizon, permettant l'interpolation globale dans un maillage tétraédrique couvrant le volume. Comme les horizons sont ici régulièrement espacés, nous avons fixé un intervalle de *temps* constant entre deux horizons successifs. Puis une paramétrisation 2D a été calculée sur un horizon au milieu. Cette paramétrisation a été propagée dans le volume, grâce aux contraintes DSI d'orthogonalité 3D. La figure 5.11 présente le modèle GeoChron correspondant.

Ensuite, le tenseur de déformation $\varepsilon(\mathrm{x})$ a été calculé en tout point du volume tétraédrisé. En réalité, comme ce tenseur dépend des gradients des coordonnées paramétriques $u$, $v$, $t$ qui sont elles-mêmes définies aux nœuds des tétraèdres et constantes sur chaque tétraèdre, $\varepsilon$ est constant sur chaque tétraèdre. Nous avons donc calculé une valeur au centre de gravité de chaque tétraèdre. Comme il est difficile de représenter ou de contrôler un tenseur, ou même ses vecteurs et valeurs propres, nous avons choisi comme paramètre caractéristique la dilatation $\theta(\mathrm{x})$. Les résultats sont présentés sur la figure 5.12.

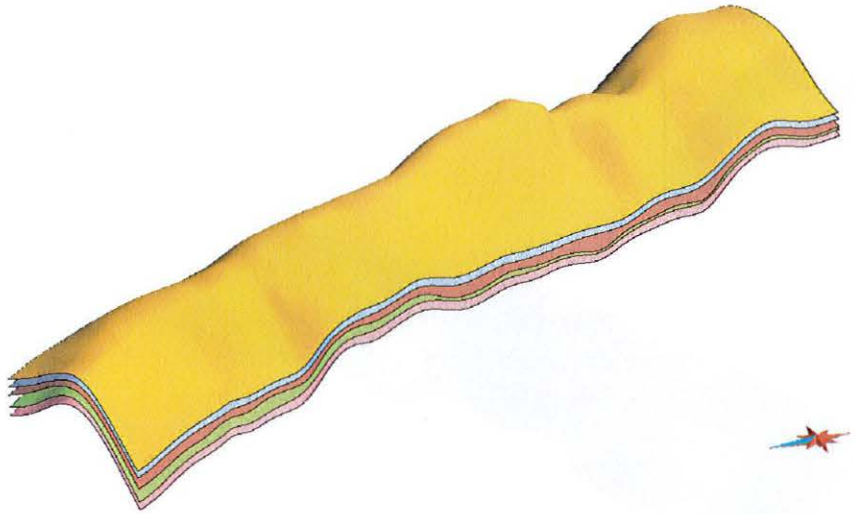


FIG. 5.10 : *Modèle surfacique initial, échelle verticale doublée (données Chevron).*

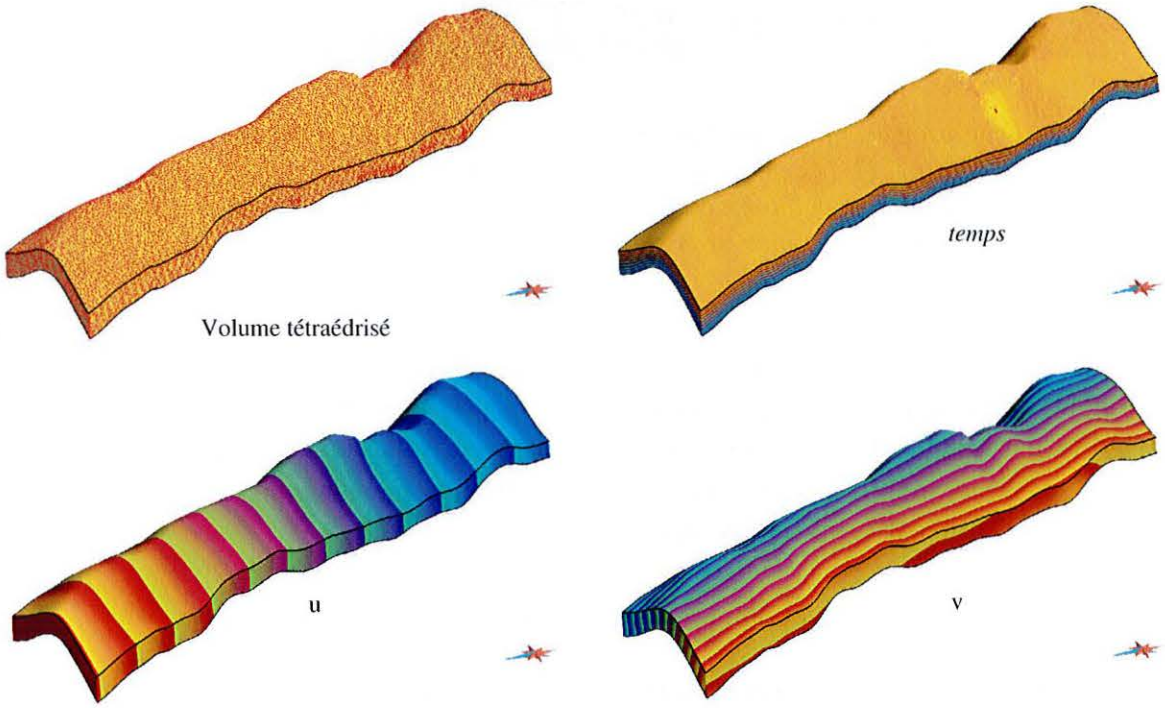



FIG. 5.11 : *Modèle volumique tétraédrisé (en haut à gauche, avec le maillage) avec une paramétrisation GeoChron (en haut à droite, composante t, en bas composantes u et v de la paramétrisation), exagération verticale ×2.*

Ces images montrent une bonne correspondance avec les déformations théoriques attendues : le long de l'axe de l'anticlinal, il y a eu dilatation au sommet et contraction à la base. Les flancs, quant à eux, n'ont été que peu affectés par la déformation et gardent des valeurs de dilatation proches de 0.

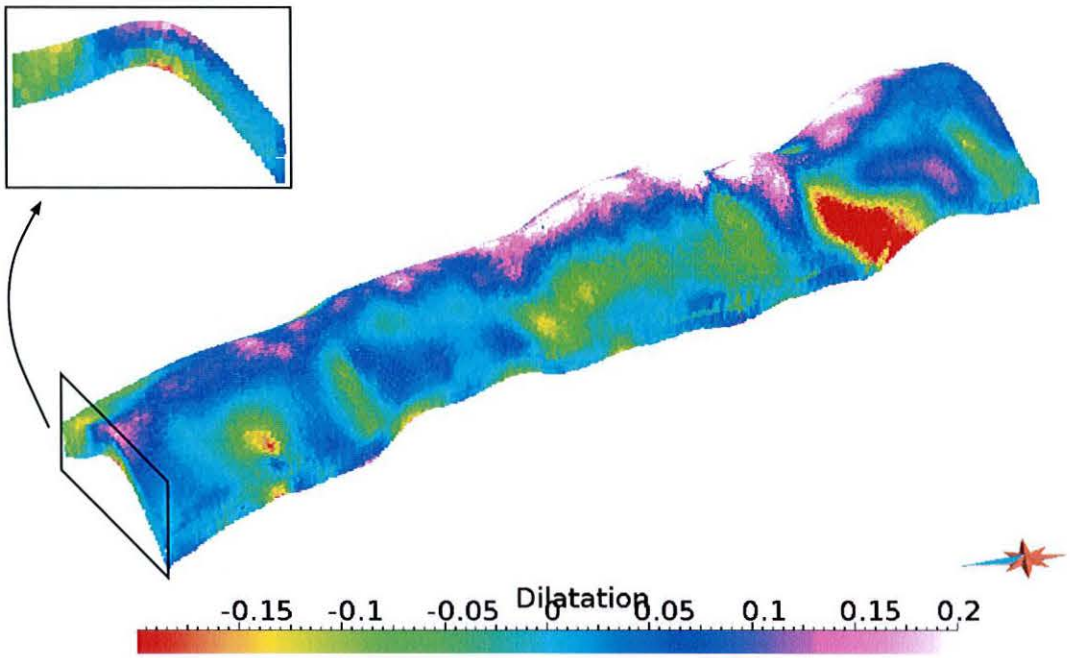



FIG. 5.12 : *Dilatation $\theta$ sur le modèle précédent, calculée à partir de la paramétrisation de la figure 5.11 (exagération verticale ×2). Les valeurs sont constantes sur chaque tétraèdre et sont représentées comme un point au centre de celui-ci. Le détail de la section de gauche met en évidence la dilatation plus élevée au sommet de la couche qu'à la base.*

Il est intéressant de comparer la dilatation avec la courbure mesurée sur l'horizon du sommet, par exemple. La figure 5.13 montre que des résultats très similaires sont observés, ce qui est en accord avec le modèle théorique de *pure bending* (voir paragraphe 2.3.3).

Cet exemple simple montre que le tenseur de déformation ainsi calculé depuis une paramétrisation GeoChron semble valide.

### Le choix de l'horizon de référence et du style de déformation

Dans le processus précédent, on peut toutefois remarquer que la dilatation (figure 5.12) est positive au sommet du volume et négative à la base. En conséquence, il existe au milieu du volume des points de dilatation nulle. On observe que ces points correspondent à l'horizon qui a été choisi lors de la paramétrisation comme horizon de référence portant une paramétrisation 2D.

La paramétrisation 2D avait été calculée de telle sorte qu'elle minimise les déformations sur l'horizon. Les points correspondants étant utilisés comme contraintes DSI, cette paramétrisation se retrouve dans le volume. En conséquence, le long de cet horizon, la dilatation volumique reste minimale donc égale à 0. Cet horizon est alors le plus proche possible de la fibre neutre (voir paragraphe 2.3.2, [Hills, 1963]).

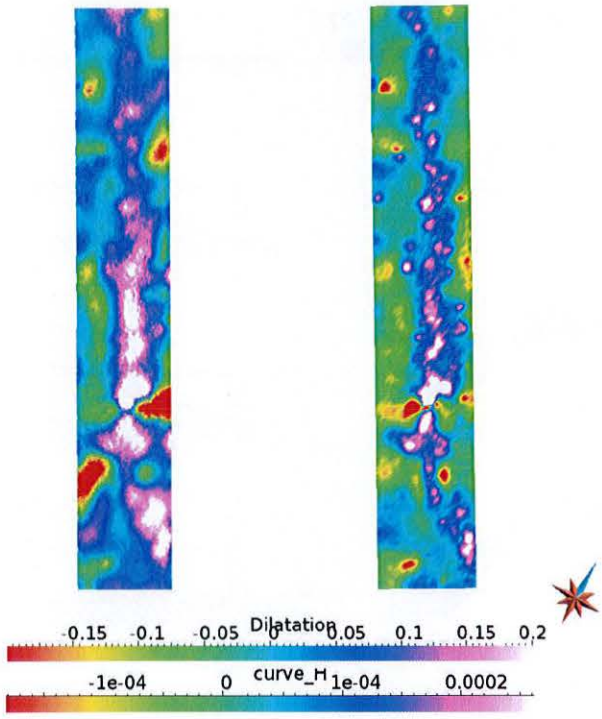



FIG. 5.13 : *Comparaison de la dilatation $\theta$ et de la courbure moyenne. À gauche, vue en carte de la dilatation sur le volume, à droite, vue en carte de la courbure gaussienne moyenne sur l'horizon supérieur du modèle. La similarité entre les deux images correspond bien au modèle théorique de déformation en* pure bending.

Le choix de l'horizon de référence n'est donc pas neutre puisqu'il conditionne la position de la surface le long de laquelle la déformation sera minimale. Dans l'exemple présenté ici, si cet horizon est choisi plus bas ou plus haut (figure 5.14), les valeurs de dilatation ne sont plus les mêmes bien que la répartition des valeurs reste similaire (la dilatation va en grandissant de la base vers le sommet du volume).

De plus, nous avons choisi de construire la paramétrisation GeoChron en utilisant la contrainte DSI d'orthogonalité 3D (voir paragraphe 3.3.1). Cette contrainte impose que tout le volume se soit déformé en un seul bloc, sans glissements internes. Si on choisit, à l'inverse, de modéliser une déformation par *flexural slip* en utilisant la contrainte DSI de *conformal mapping* étendu (voir paragraphe 3.3.2) qui impose que la projection de la paramétrisation sur chaque horizon soit une paramétrisation 2D de cet horizon, on obtient des résultats différents (figure 5.15 ou encore figure 3.20 sur un autre jeu de données).

En effet, cette contrainte impose cette fois-ci un style de déformation différent, où le glissement banc sur banc est autorisé. En conséquence, une partie de la déformation est absorbée par ce glissement. La dilatation reste la même mais les autres invariants sont différents. En particulier, la somme des sous-déterminants du tenseur de déformation est plus importante, ce qui reflète le cisaillement qui influe majoritairement sur les termes non-diagonaux du tenseur.

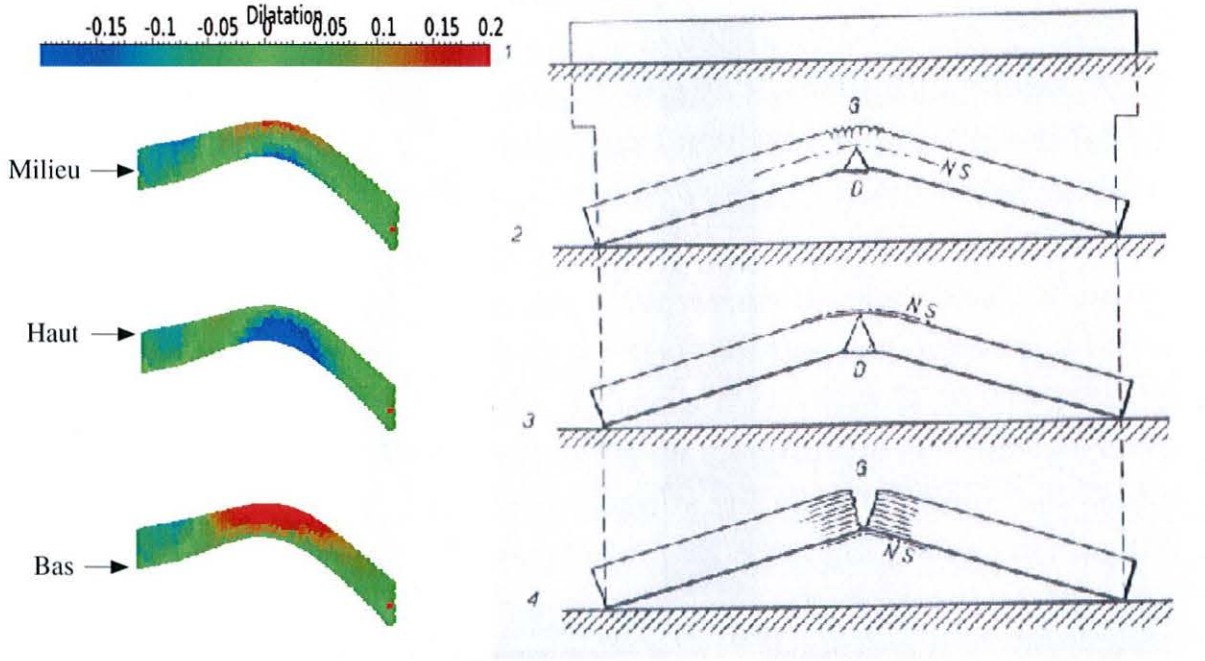



FIG. 5.14 : *Influence de la position de l'horizon de référence de la paramétrisation sur le tenseur de déformation. À gauche, la dilatation vue sur une coupe dans le modèle précédent (exagération verticale ×2), l'horizon de référence étant positionné au milieu, en haut ou en bas. À droite, modèle théorique d'une poutre en* pure bending *suivant la position de la surface neutre (NS) : on observe bien, dans les deux cas, une dilatation (en rouge ou marquée G) au dessus de la surface neutre et une compression (en bleu ou marquée D) en dessous (schéma d'après [Hills, 1963], p. 221).*

Cet exemple simple montre bien que la paramétrisation GeoChron, même si elle permet d'obtenir une image du tenseur de déformation, est fortement limitée lorsqu'il s'agit d'utiliser ce tenseur car il reflète pour beaucoup les données et paramètres d'entrée, et en particulier le style de déformation, qui ont été fournies lors du calcul de la paramétrisation.

### 5.2.3 Intérêts et limitations de l'approche

#### Modélisation des réservoirs fracturés

De nombreux réservoirs pétroliers sont fortement fracturés (voir [Nelson, 2001]) et les fractures jouent un grand rôle dans les écoulements de fluide (voir [Antonellini et Aydin, 1994]), soit en tant que drain soit, au contraire, en tant que zones scellées. La fracturation des terrains est contrôlée par les contraintes subies par le réservoir. Cependant, les fractures sont des objets de petite taille et qui ne sont généralement pas visibles sur les données disponibles : ce sont des objets subsismiques et leur prévision à partir d'observations sur les puits nécessite des informations secondaires sur leur répartition dans le

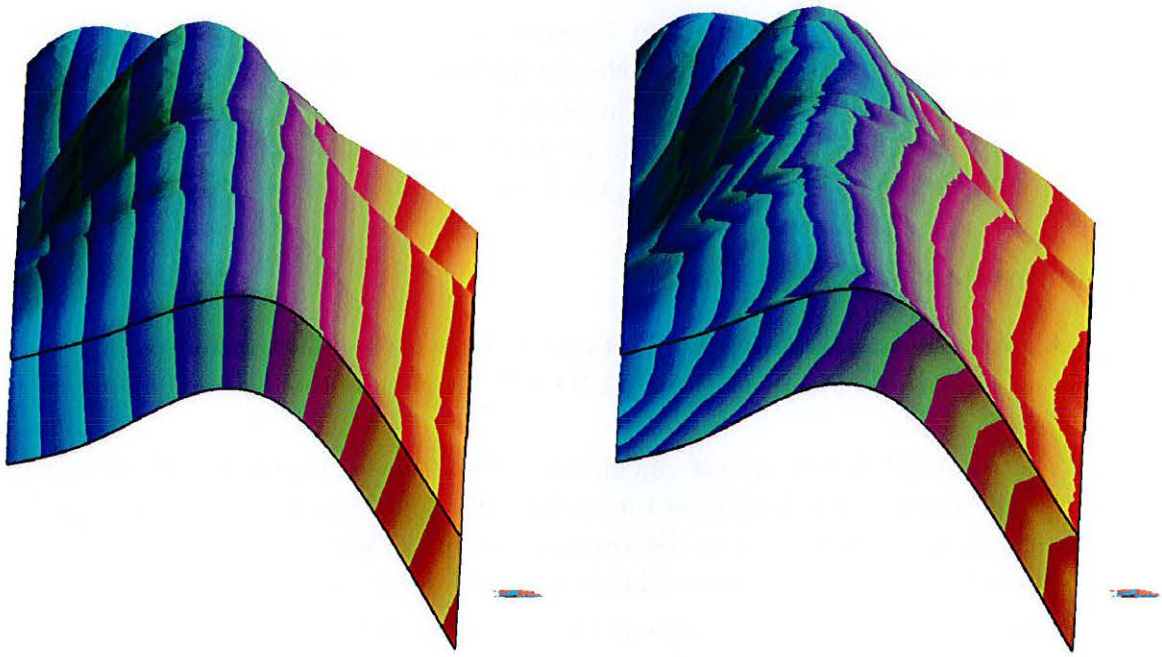


FIG. 5.15 : *Vue en coupe de la composante v de la paramétrisation orthogonale (à gauche) et de la paramétrisation* conformal mapping *(à droite). Dans le premier cas, il s'agit de* pure bending *sans cisaillement interne (modèle « plaque mince »), les lignes d'isovaleurs de v convergent vers l'axe du pli. Dans le deuxième cas, le* flexural slip *introduit du cisaillement interne (modèle « plaque épaisse ») et tend à conserver constante la longueur des intervalles entre lignes d'isovaleurs de v le long des horizons.*

volume. Dans cette optique, les approches les plus courantes se basent sur le calcul d'un tenseur des contraintes que l'on essaye de relier à la formation des fractures.

Il existe un lien entre tenseur des contraintes et tenseur de déformation, mais ce lien est complexe. Dans les cas simples, on peut utiliser des lois de comportement comme la loi de Hooke ([Sédov, 1975]) qui relie les contraintes aux déformations par l'intermédiaire de paramètres caractéristiques de la roche comme les coefficients de Lamé ou le coefficient de Poisson et le module d'Young.

L. Macé a proposé récemment ([Macé *et al.*, 2004b], [Macé *et al.*, 2004a]) une méthode permettant de prendre en compte des incertitudes sur cette loi ainsi que sur les paramètres de la roche. Il devient alors possible de calculer depuis le tenseur de déformation la probabilité de fracturation en chaque point du volume. On peut ensuite, par exemple, simuler un réseau de fractures depuis cette probabilité pour observer son influence sur les écoulements de fluides.

Il devient alors possible grâce au modèle GeoChron de reconstituer des modèles de propriété complexes qui prennent en compte tous les facteurs jouant sur les propriétés :

- le contexte sédimentaire et stratigraphique à l'échelle réservoir est intégré par le biais des méthodes géostatistiques dans l'espace paramétrique (figure 5.2) ;

l'influence de la déformation à petite échelle, c'est-à-dire de la fracturation, est approchée au travers des modèles de fractures, lesquels sont basés sur le tenseur de déformation calculé par la paramétrisation ;
- enfin, les effet des failles sur les propriétés peuvent être pris en compte par l'intermédiaire de cartes de distance aux failles.

### Limites de validité

L'approche proposée permet d'estimer le tenseur de déformation en tout point d'un volume à partir d'une paramétrisation 3D. Elle a cependant des limites d'application assez strictes.

Tout d'abord, le tenseur est calculé entre l'état actuel du modèle et un état initial où toutes les couches sont dépliées et toutes les failles ont disparu. Cela signifie que le tenseur qui est calculé correspond à la déformation la plus simple pour passer de cet état initial à l'état actuel, sans tenir compte du chemin réellement suivi par les terrains.

En conséquence, le tenseur obtenu est un tenseur *total* au sens où seule la déformation globale entre l'état initial et l'état actuel est prise en compte. Il est donc impossible de tenir compte du chemin suivi par les terrains. Par exemple, lorsqu'un pli compressif se forme, même si au final les flancs sont plats (mais inclinés), il est rare qu'ils le soient restés durant toute la déformation et ils sont fréquemment fracturés (voir par exemple [Silliphant *et al.*, 2002] ou [Wilkins et Gross, 2002] pour une étude de la fracturation sur les flancs de l'anticlinal de Split Mountain (Utah) utilisé dans le chapitre 3). Cette déformation n'est pas appréhendée dans le modèle GeoChron.

De plus, nous calculons simultanément, en tout point du volume, le tenseur total de déformation. Or dans certains contextes, en particulier en présence de plissements ou de ruptures synsédimentaires, il est utile de modéliser les déformations couche par couche en dépliant successivement les différentes couches (voir par exemple [Rouby *et al.*, 2000] ou [Massot, 2002]) ce qui est impossible. Il n'est pas non plus possible de modéliser des déformations à plusieurs phases.

D'autre part, nous avons vu que le tenseur de déformation prenait en compte le style de déformation qui avait été désigné par le biais des contraintes DSI utilisées. Il est évidemment possible d'éditer localement ou globalement la paramétrisation GeoChron (comme décrit dans le paragraphe 3.2.3) afin de prendre en compte des styles plus variés (des combinaisons entre les deux extrêmes ou des styles différents suivant les endroits) mais il n'en reste pas moins que le tenseur de déformation final est très dépendant des choix initiaux.

Le tenseur dépend aussi du choix de l'horizon de référence qui a été utilisé pour construire la paramétrisation et qui conditionne la position de la surface neutre dans le volume, or peu d'éléments géologiques permettent d'établir la position de cette surface. De plus, cette surface peut se déplacer au cours du temps et n'être pas la même pour toutes les couches.

Enfin, la correspondance entre un tenseur de déformation et un tenseur des contraintes, ou plus encore une répartition de fractures, est complexe et nous n'avons donné ici qu'une

piste possible (voir [Guiton, 2001] par exemple pour des travaux sur les relations entre fracturation, contraintes et déformations).

Malgré ces limites, il est intéressant de noter que le calcul du tenseur de déformation depuis l'espace paramétrique est uniquement une conséquence du cadre mathématique. Obtenir ce tenseur ne nécessite presque aucun calcul supplémentaire, une fois la paramétrisation calculée, et ne prend que quelques secondes. Bien que limité, cet outil permet donc au géologue d'avoir une première idée sur les caractéristiques du tenseur de déformation qui peut ensuite être complétée par des méthodes plus complexes si la situation ou les besoins l'exigent.

## 5.3 Mise en cohérence de données sismiques

Les applications que nous avons présentées précédemment se basaient sur un modèle GeoChron déjà construit et considéré comme valide. Nous présentons ici une méthode utilisant des données initiales, par exemple issues de la sismique, permettant à la fois une meilleure compréhension de ces données et la construction, par un processus itératif, d'un modèle GeoChron plus exact.

La connaissance simultanée d'un modèle GeoChron, c'est-à-dire de coordonnées paramétriques $(u, v, t)$ en tout point d'un volume, et d'un cube d'attributs permet d'envisager de déplier ce cube : de même que la représentation des horizons dans l'espace paramétrique figure un dépliage de ces horizons et qu'il est possible de calculer le tenseur des déformations correspondant à ce dépliage, la représentation du cube d'attributs dans l'espace paramétrique est un dépliage volumique des données sismiques.

### 5.3.1 Dépliage d'un cube d'attributs sismiques

Pouvoir observer les données d'un cube sismique dans un espace déplié présente plusieurs avantages en terme d'interprétation principalement. En effet, si les réflecteurs sont horizontaux, ils sont plus faciles à caractériser. De plus les failles apparaissent dans les cubes sismiques comme des zones de fort bruit et supprimer leur effet géométrique permet de mieux suivre les réflecteurs de part et d'autre. Plus globalement, l'intérêt est d'effectuer des manipulations simples sur les données à un stade très précoce de la chaîne d'étude.

Plusieurs auteurs se sont intéressés au problème du dépliage d'un cube sismique. On peut distinguer plusieurs approches, suivant le but recherché :

- Certains travaux comme par exemple ceux de Rutten [Rutten, 2004] sont très proches du dépliage surfacique ou volumique ([Massot, 2002], [Rouby *et al.*, 1993]). Dans ce contexte, il s'agit de déplier un horizon principal en déformant le reste des terrains pour accommoder ce dépliage. L'approche est très cinématique et a les mêmes objectifs que les dépliages volumiques sans toutefois passer par une étape de construction d'un modèle surfacique ou volumique.
- D'autres approches visent à faciliter le pointé d'objets (horizons, chenaux...) sur la sismique en supprimant dans un premier temps tous les effets structuraux ou encore à associer facilement chaque échantillon sismique à une couche géologique. Ainsi,

Lomask ([Lomask, 2003], figure 5.16 à gauche) utilise une transformée de Fourier sur les pendages des réflecteurs pour obtenir un dépliage global du cube. Stark ([Stark, 2004], figure 5.16 à droite) définit un *Relative Geologic Time* similaire au paramètre *temps* du modèle GeoChron pour calculer l'âge de chaque échantillon sismique, à des fins de visualisation essentiellement.

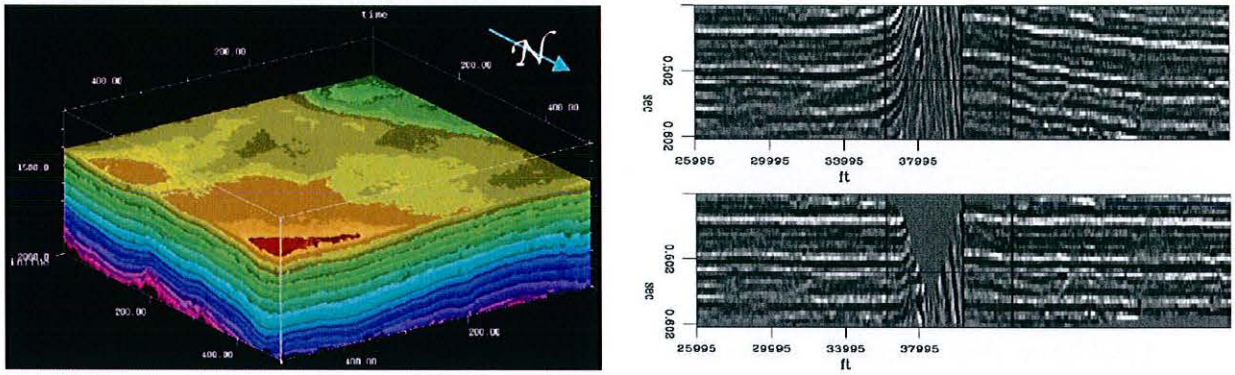



FIG. 5.16 : *Exemples de méthodes de dépliage d'un cube sismique. À gauche, calcul du* Relative Geologic Time *[Stark, 2004] similaire au* temps *du modèle GeoChron. À droite, dépliage d'une section (en haut, la section initiale, en bas, la section dépliée) par transformée de Fourier sur les pendages [Lomask, 2003].*

Cette dernière approche est comparable à la nôtre, mais elle est cependant fondamentalement plus limitée. D'une part, c'est une méthode strictement unidimensionnelle verticale alors que, non seulement le *temps* intègre des variations latérales, mais le modèle GeoChron prend aussi en compte explicitement des coordonnées paléo-géographiques $(u, v)$. En particulier, le caractère unidimensionnel (dans la direction verticale) ne permet pas de prendre en compte correctement les failles non verticales et plus particulièrement les failles inverses. Par conséquent, cette méthode est adaptée au pointé de structures, par exemple, mais ne permet pas d'études quantitatives plus complexes car les axes du cube ainsi déplié n'ont pas de cohérence globale.

D'autre part, ces méthodes se basent uniquement sur le cube sismique et calculent ce pseudo-temps à partir de critères géométriques sur les réflecteurs ou de critères sur l'évolution de la phase dans le volume. Dans les deux cas, tous les réflecteurs sont pris en compte, qu'il s'agisse d'horizons géologiques ou de limites stratigraphiques non-isochrones. Cela implique que le modèle obtenu ne peut pas être affiné par ajout ou suppression d'horizons et qu'il peut prendre en compte des données de manière incohérente. Ces modèles sont aussi incapables de prendre en compte des données autres que le cube sismique lui-même, comme des horizons ou des puits.

Finalement, ces méthodes ont pour principal avantage de ne pas nécessiter la construction d'un modèle géométrique à partir du cube sismique et peuvent donc être utilisées dans une phase très précoce du traitement. En contrepartie, elles manquent de souplesse et donnent un résultat relativement fruste. La méthode que nous proposons ici, bien que plus lourde car elle ne peut être appliquée qu'après la construction d'un modèle GeoChron initial, permet d'obtenir des résultats plus étendus.

### 5.3.2 Visualisation des données sismiques dans l'espace paramétrique

Si on suppose qu'un modèle GeoChron a été construit sur un volume couvert par un cube d'amplitude sismique, alors en tout point du domaine initial on connaît simultanément la paramétrisation GeoChron $(u, v, t)$ (interpolée entre les nœuds de la grille) et une valeur d'un attribut géophysique. Il est alors possible de représenter la propriété géophysique dans l'espace paramétrique avec la méthode suivante[3] :

1. Le maillage tétraédrique est d'abord répliqué dans l'espace paramétrique en déplaçant chaque nœud à ses coordonnées paramétriques.
2. Comme dans le cadre de l'édition locale des vecteurs rejet (voir paragraphe 4.3.3), chaque nœud du nouveau maillage conserve ses coordonnées initiales dans l'espace géologique.
3. L'attribut géophysique est ensuite affiché sur ce maillage grâce aux méthodes de plaquage de texture, en utilisant les coordonnées géologiques de chaque nœud comme coordonnées de texture (figure 5.17).

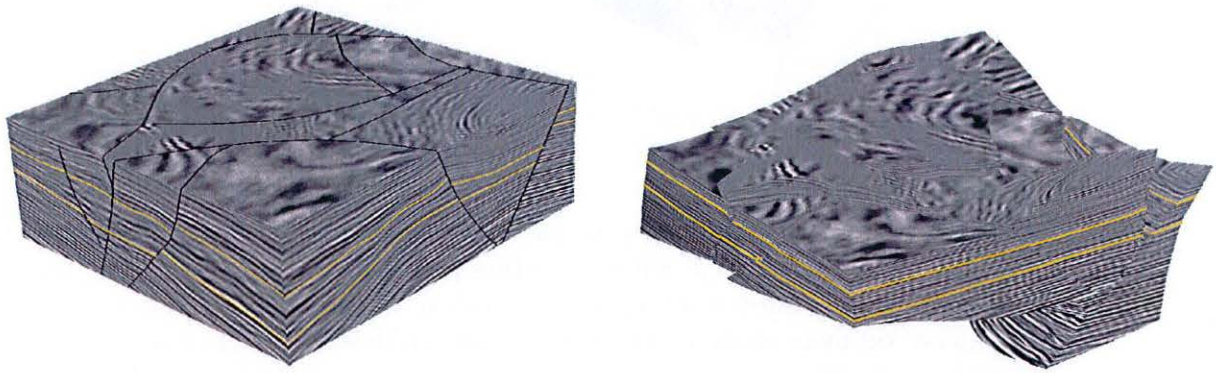


FIG. 5.17 : *Cube d'amplitude sismique synthétique visualisé dans l'espace géologique (à gauche) et dans l'espace paramétrique (à droite). Les réflecteurs majeurs (par exemple les deux horizons jaunes) sont mis à plat.*

Contrairement aux techniques précédemment décrites, la totalité du volume est déplié en une seule fois et le dépliage ne s'effectue pas uniquement verticalement (suivant $t$) mais aussi horizontalement (suivant $(u, v)$).

En conséquence, il devient possible de combiner les objectifs des différentes méthodes :
- les calculs volumiques liés au tenseur de déformation, présentés précédemment, peuvent être appliqués (par exemple pour comparer un attribut sismique indicateur de la fracturation avec le tenseur de déformation ou de contrainte) ;
- les différents horizons sont normalement mis à plat et leur pointé automatique est facilité de même que l'étude des structures sédimentaires intermédiaires ;

[3]La méthode est décrite dans le cas des maillages tétraédriques mais peut s'adapter à n'importe quel type de maillage.

- la visualisation des données sismiques associées à une couche ou un horizon du modèle est aisée (figure 5.18).

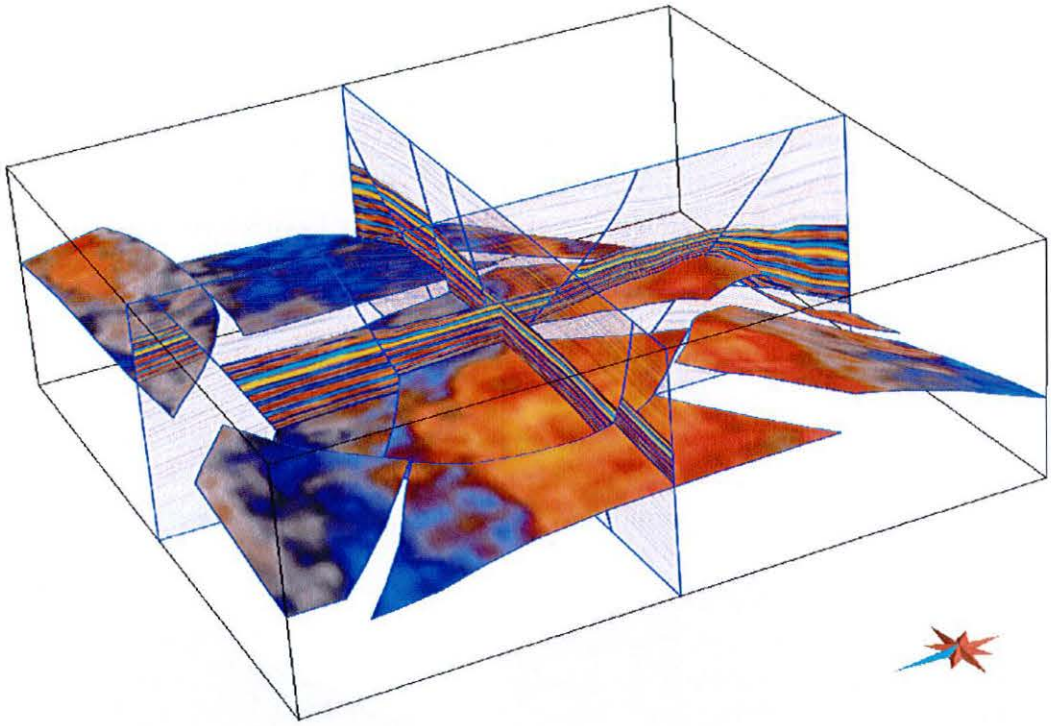


FIG. 5.18 : *Visualisation de l'amplitude sismique correspondant à une couche géologique particulière. L'existence de la paramétrisation permet de définir une couche géologique dans l'espace $\overline{G}$ entre deux surfaces d'isovaleur du paramètre $t$. Un masque de transparence est alors appliqué à tous les terrains en dehors de cette couche qui apparaît clairement dans l'espace géologique (d'après les travaux de T. Frank, [Frank, 2005]).*

À ces applications, l'existence du modèle GeoChron indépendamment du cube sismique et donc la possiblité de modifier ce modèle, ouvre la voie à des fonctionnalités de mise à jour du modèle :

- Des réflecteurs qui dans un premier temps n'avaient pas été utilisés pour construire le *temps* géologique, peuvent à posteriori y être inclus.
- Les zones faillées, fortement bruitées dans un cube sismique, apparaissent plus clairement dans le modèle déplié.
- Les failles majeures qui n'auraient pas été pointées dans un premier temps affectent clairement le cube sismique dans l'espace paramétrique (figure 5.19).

### Discussion sur la méthode

Il s'agit toutefois d'être prudent dans l'usage de cet outil. Du fait de la transformation qui est faite sur les données, cela n'a pas de sens de considérer des attributs géophysiques qui reflètent la géométrie au voisinage d'un point. En particulier, dans le cadre de la sismique, des attributs structuraux tels que la mesure du pendage des couches ne sont pas

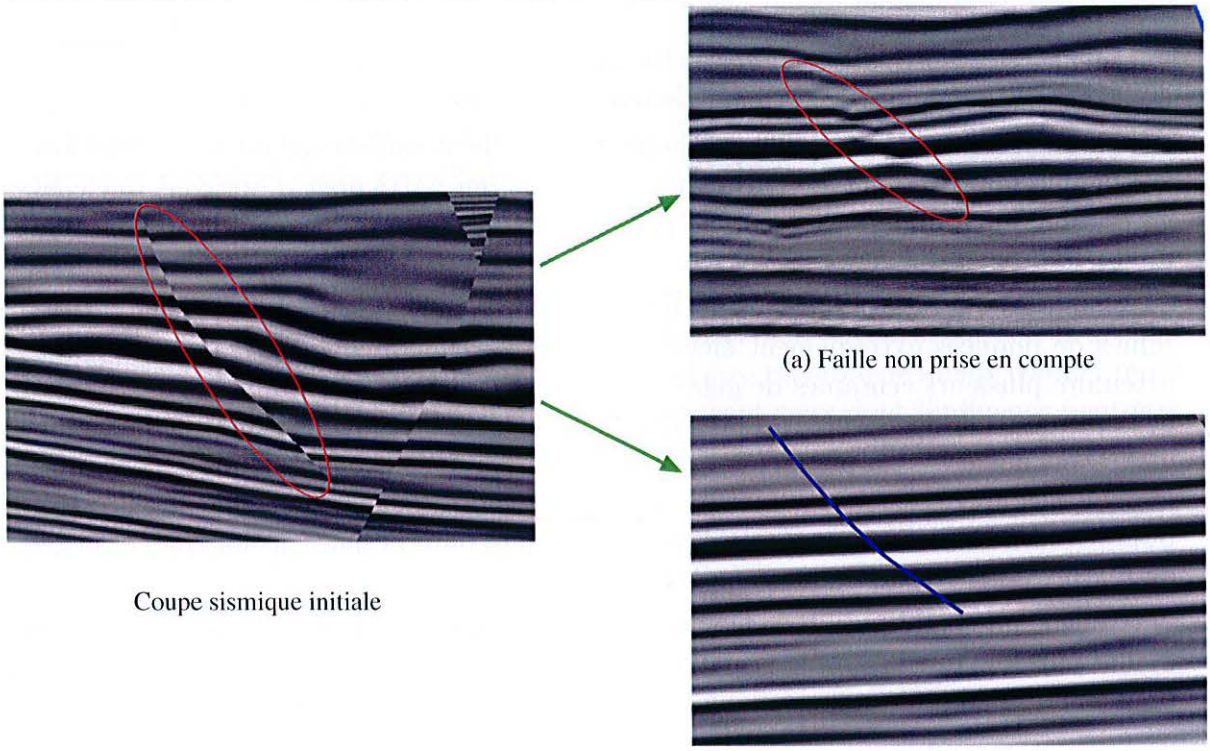



FIG. 5.19 : *Intégration de failles supplémentaires grâce à l'interprétation sismique dans l'espace paramétrique. À gauche, coupe dans un cube sismique d'amplitude synthétique. À droite, image du cube sismique dans l'espace paramétrique : en (a), la paramétrisation a été calculée sans prendre en compte la faille dans l'ellipse rouge, cette faille apparaît comme une discontinuité et les réflecteurs avoisinants ne sont pas plats ; en (b), la paramétrisation prend en compte la faille (pointée en bleu), les réflecteurs sont plats et continus de part et d'autre de la faille.*

utilisables car la relation entre les axes de l'espace géologique réel et les axes de l'espace paramétrique n'est pas triviale.

En revanche, les attributs qui caractérisent uniquement un point ou un volume élémentaire autour de ce point, comme l'impédance ou l'amplitude et la phase intantanée ([Labrunye, 2004], [Taner *et al.*, 1979] ou [Brown, 1987]), généralement considérés comme des indicateurs en relation avec la présence de gaz ou de pétrole[4] ou encore des attributs caractéristiques de la fracturation en un point, sont utilisables avec cette méthode.

D'autre part, dans le cadre de l'étude des structures sédimentaires, il s'agit de garder à l'esprit que le modèle GeoChron, s'il est similaire à un diagramme de Wheeler, n'est pas strictement équivalent à cause de l'absence de vides (voir paragraphe 5.1.3). En consé-

[4]Ils mettent en évidence en particulier les *bright spots* (anomalie de l'amplitude sismique provoquée par les hydrocarbures), les *dim spots* (atténuation du signal souvent due à la présence d'hydrocarbures) ou les *flat spots* (forte reflection horizontale due à l'interface eau-hydrocarbures).

# Conclusion

Le problème de la construction d'un maillage volumique en accord à la fois avec le réseau de failles et la stratigraphie n'est pas résolu de manière satisfaisante par les grilles stratigraphiques curvilinéaires. Le modèle GeoChron et son implémentation proposée dans ce travail permet en revanche d'atteindre une meilleure adéquation du modèle volumique et du modèle de propriété par la dissociation nette des trois concepts principaux que portent les grilles stratigraphiques :

- la géométrie du volume d'étude, représentée par les failles et les discontinuités majeures, est modélisée par un maillage non-structuré à base de tétraèdres ;
- la géométrie des horizons et le contexte sédimentaire sont modélisés au travers de la fonction de paramétrisation $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ ;
- enfin, le modèle de propriété est construit dans l'espace paramétrique qui est similaire à l'espace de dépôt et donc bien adapté aux hypothèses des algorithmes géostatistiques ou autres.

Ainsi, le modèle GeoChron permet d'obtenir des modèles de propriété à priori plus corrects que les grilles curvilinéaires, tout en utilisant les mêmes données de base et les mêmes méthodes de modélisation de propriété. Ce modèle peut donc être envisagé comme une alternative à ces grilles, améliorant la qualité des résultats.

De plus, le cadre mathématique théorique du modèle GeoChron ainsi que sa proximité avec l'espace de dépôt des sédiments (ou espace de Wheeler) nous ont permis de mettre en évidence d'autres caractéristiques intéressantes. Au-delà de la modélisation de propriété en elle-même, ce modèle peut en effet servir de base à des modèles stratigraphiques plus complexes. De plus, nous avons montré comment, sous certaines hypothèses, les équations de paramétrisation permettent d'obtenir une estimation du tenseur de déformation qui a affecté le volume. Il devient alors possible, en combinant un modèle de propriété purement stratigraphique avec l'influence des failles et des fractures, par le biais de la déformation, d'obtenir un modèle complet et réaliste.

D'autre part, les méthodes de construction que nous avons proposées ont plusieurs avantages. En plus de leur valeur intrinsèque et de leur adaptation à des contextes différents, les deux méthodes, locale et globale, peuvent en effet être regroupées pour permettre la construction d'une paramétrisation qui prend en compte au mieux les informations structurales, locales ou globales, sur le style de déformation des terrains.

Ces méthodes, et en particulier l'utilisation du paramètre *temps* de la paramétrisation, nous ont aussi permis de proposer un algorithme géométrique de construction des vecteurs rejet. Cet algorithme est véritablement 3D et il permet d'obtenir des vecteurs rejet

cohérents avec le réseau de failles et les horizons, en tout point du volume. Il constitue un élément central dans la construction d'un modèle GeoChron et il est à ce titre très important dans notre travail.

Comme nous l'avons montré, le modèle GeoChron permet l'intégration des différentes étapes de la modélisation du sous-sol (modèle volumique et modèle de propriété mais avec des liens en amont par le biais de la sismique, comme en aval par le biais des modèles d'écoulement). Par conséquent, ce modèle semble être un pas supplémentaire dans la direction du *Shared Earth Model* c'est-à-dire de l'intégration de toutes les connaissances qui concernent un réservoir dans un seul concept commun.

Cependant, le modèle GeoChron tel qu'il est présenté dans ce travail n'est encore qu'une ouverture et de nombreuses pistes restent encore à développer, sans compter le perfectionnement des méthodes proposées ici. En particulier, les mécanismes de construction d'une paramétrisation avec un style de déformation intermédiaire ne sont pour l'instant que des amorces qui restent à prospecter. D'une manière similaire, des améliorations peuvent encore être apportées au calcul des vecteurs rejet.

Plus généralement, trois axes de développement semblent particulièrement prometteurs et sont actuellement explorés dans la continuation de cette thèse :

- Dans le cadre de la modélisation des propriétés, le modèle GeoChron ouvre la porte à une modélisation plus fine et plus exacte des environnements de dépôt, par exemple par modélisation directe des processus sédimentaires et des séquences stratigraphiques ou encore par reconstruction des environnements de dépôt et de caractéristiques de ceux-ci, comme l'espace d'accommodation.
- En aval du modèle GeoChron, nous ne nous sommes peu ou pas du tout préoccuppé des modèles d'écoulement au cours de ce travail. Cependant, plusieurs pistes semblent intéressantes, aussi bien dans le domaine de la construction rapide et précise de grilles d'écoulement en accord avec la géométrie du modèle et ses caractéristiques fluides que dans le domaine de la mise à jour de ces grilles au cours des simulations.
- Enfin, nous avons évoqué à plusieurs reprises des possibilités de mise à jour interactive rapide du modèle GeoChron lors de l'intégration de données supplémentaires ou de la réinterprétation de données existantes. Qu'il s'agisse de modifier la fonction de paramétrisation (le *temps* seul ou les trois composantes) ou encore le maillage lui-même, plusieurs voies sont à l'étude et permettraient certainement d'atteindre une meilleure intégration de la chaîne d'étude au sein d'un seul objet, le modèle GeoChron.

En parallèle de ces développements, il est à noter que l'utilisation simultanée d'un maillage non-structuré et d'un modèle de propriété structuré régulier, reliés par une fonction de paramétrisation, met en évidence le besoin de développer un domaine à cheval sur la géologie et sur l'informatique concernant les méthodes de visualisation en trois dimensions du modèle géométrique et du modèle de propriété ainsi que de n'importe quelles autres données.

Par ailleurs, le modèle n'a actuellement été testé que sur quelques jeux de données, représentatifs d'une grande variété de contextes géologiques mais forcément limités. Il

sera donc nécessaire de poursuivre les tests afin de prouver concrètement l'efficacité de ce modèle et en particulier son intégration avec les autres étapes de la chaîne de modélisation.

Enfin, même si nous proposons ici des méthodes de construction et des applications qui sont très proches des équations théoriques, nous ne prétendons nullement que ce soient les seules méthodes et applications possibles. Le modèle GeoChron et tout spécialement son idée de base, la séparation de la géométrie, la paramétrisation et le modèle de propriété, est certainement utilisable suivant d'autres méthodes et dans d'autres buts que ceux exposés ici.

# Annexe A

# Principe de l'interpolateur DSI

Le géomodeleur GOCAD, dans le cadre duquel ces travaux ont été développés, propose un moteur d'interpolation puissant, appelé *Discrete Smooth Interpolation* ou *DSI*. Cet outil présente de nombreux avantages et a été utilisé à plusieurs reprises dans cette thèse. Nous présentons ici le principe de cet interpolateur. Pour plus de détails sur DSI, le lecteur est invité à se reporter à [Mallet, 1997] et [Mallet, 1992] ou encore [Mallet, 2002] qui détaillent plus largement la théorie ou encore [Cognot, 1996] pour des indications sur une implémentation de DSI.

## A.1 Principe général

La méthode DSI permet l'interpolation d'une fonction scalaire ou vectorielle $\varphi$ sur un ensemble $\Omega$ de $m$ nœuds $\alpha$ reliés par une fonction de voisinage $N$ définissant un maillage discret, tout en respectant un ensemble $C$ de contraintes $c$. On appelle *modèle* $\mathcal{M}(\Omega, N, \varphi, C)$ le cadre dans lequel s'exerce l'interpolateur DSI.

La fonction (ou propriété) $\varphi$ à interpoler pouvant être scalaire ou vectorielle de dimension $n$, on écrira :

$$\forall \alpha \in \Omega \longmapsto \varphi(\alpha) = \begin{bmatrix} \varphi^1(\alpha) \\ \vdots \\ \varphi^\nu(\alpha) \\ \vdots \\ \varphi^n(\alpha) \end{bmatrix}$$

Un vecteur $\varphi$, contenant $m.n$ éléments, est défini en regroupant les valeurs de la fonction en tous les nœuds, pour tous les champs :

$$\varphi = \begin{bmatrix} \varphi^1 \\ \vdots \\ \varphi^\nu \\ \vdots \\ \varphi^n \end{bmatrix} \qquad \text{avec } \varphi^\nu = \begin{bmatrix} \varphi^\nu(\alpha_1) \\ \vdots \\ \varphi^\nu(\alpha_i) \\ \vdots \\ \varphi^\nu(\alpha_m) \end{bmatrix}$$

L'interpolateur vise à minimiser simultanément :
- la rugosité de la propriété $\varphi$ interpolée ;
- et le degré global de violation d'un ensemble de contraintes $C$.

Nous allons maintenant détailler chacun de ces termes.

## A.2 Contraintes et rugosité

### A.2.1 La rugosité locale

La rugosité est définie grâce à la connaissance des liaisons entre nœuds, donnée par la fonction $N$, application de $\Omega$ vers $\Omega$ :

$$\forall \beta \in \Omega,\ \beta \in N(\alpha) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \beta \text{ est à moins de } s \text{ nœuds de } \alpha$$

En d'autres termes, $N(\alpha)$ contient les $s$ « auréoles » de nœuds autour de $\alpha$. Dans la plupart des cas, $s = 1$, c'est-à-dire que seuls les nœuds directement reliés à $\alpha$ sont pris en compte dans le voisinage de $\alpha$.

Le critère de rugosité locale $R(\varphi|\alpha)$ est alors défini ainsi pour une propriété scalaire[1] :

$$R(\varphi|\alpha) = \left[ \sum_{\beta \in N(\alpha)} v(\alpha,\beta).\varphi(\beta) \right]^2$$

où $v(\alpha,\beta)$ est une fonction de pondération des différents voisins de $\alpha$. En règle générale, on utilise $v(\alpha,\beta) = 1, \forall \beta \in N(\alpha)$ et $v(\alpha,\alpha) = -\text{Card } N(\alpha)$, ce qui entraîne une interpolation isotrope de $\varphi$. On peut cependant noter que si les distances entre les nœuds sont très variables, cette pondération peut provoquer des biais car un nœud $\beta_1$ loin de $\alpha$ influera autant sur la valeur de $\varphi(\alpha)$ qu'un nœud $\beta_2$ proche de $\alpha$. Nous avons proposé une contrainte spécifique permettant de contourner ce défaut (paragraphe B.3.2).

L'ensemble des rugosités locales $R(\varphi|\alpha)$ est utilisé pour définir une rugosité globale $R(\varphi)$ grâce à une fonction de raideur (*stiffness*) $\mu(\alpha)$ :

$$R(\varphi) = \sum_{\alpha \in \Omega} \mu(\alpha).R(\varphi|\alpha)$$

### A.2.2 Les contraintes DSI

L'interpolateur DSI peut prendre en compte un grand nombre de contraintes très différentes, du moment qu'elles peuvent s'exprimer sous la forme linéaire suivante :

$$\{c \in C^{\bowtie} \text{ est respectée } \} \iff \sum_{\alpha \in \Omega} \sum_{\nu=1}^{n} A_c^{\nu}(\alpha).\varphi^{\nu}(\alpha) \bowtie b_c$$

[1] Pour une propriété vectorielle, la rugosité locale est définie comme la somme des rugosités associées à chaque composante de la propriété.

où $\bowtie$ représente l'un des trois opérateurs suivants :

$$\bowtie \in \{\simeq, =, >\}$$

Comme expliqué dans [Mallet, 2002] et comme nous le verrons par la suite, cette formulation laisse place à une grande variété de contraintes. On distingue deux grandes familles de contraintes, les contraintes *dures* et les contraintes *souples* (*hard* et *soft constraints*) : les premières doivent être absolument respectées ($\bowtie \in \{=, >\}$), les deuxièmes seront respectées au sens des moindres carrés ($\bowtie = \simeq$). Dans ce travail, les contraintes souples $C^{\simeq}$ seront les seules utilisées et nous ne considérerons plus que celles-ci à partir de maintenant.

L'équation précédente est reformulée sous forme matricielle en introduisant une matrice colonne $A_c$ de dimension $m.n$ et en utilisant le vecteur $\varphi$ défini plus haut :

$$\{c \in C^{\simeq} \text{ est respectée } \} \iff A_c^t.\varphi \simeq b_c$$

Les contraintes sont généralement normalisées de telle sorte que la somme sur $\nu$ et sur $\alpha$ des coefficients de $A_c^{\nu}(\alpha)$ soit égale à 1.

On peut alors définir pour chaque contrainte $c$ le degré de violation $\rho(\varphi|c)$ :

$$\rho(\varphi|c) = |A_c^t.\varphi - b_c|^2$$

et, de manière similaire à la rugosité globale définie par la somme des rugosités locales, un degré de violation global des contraintes est défini grâce à une série de poids $\varpi_c$ correspondant à un facteur de confiance en chaque contrainte $c$ :

$$\rho(\varphi) = \sum_{c \in C^{\simeq}} \varpi_c.\rho(\varphi|c)$$

### A.2.3 Rugosité généralisée

Afin de minimiser simultanément la rugosité locale et le degré de violation de l'ensemble des contraintes, une *rugosité généralisée globale* $R^{\star}(\varphi)$ est définie :

$$R^{\star}(\varphi) = R(\varphi) + (\phi.\varpi).\rho(\varphi)$$

où $\phi$ est un facteur d'ajustement (*fitting factor*) permettant d'influencer les contributions relatives de la rugosité et des contraintes. Si $\phi$ est supérieur à 1 alors il est plus important de respecter les contraintes que de minimiser la rugosité de la solution. À l'inverse, si $\phi$ est inférieur à 1, on cherche en priorité à obtenir une solution lisse plus qu'à respecter les contraintes souples. $\varpi$ est un facteur d'équilibrage (*balancing factor*) entre $R(\varphi)$ et $\rho(\varphi)$ (voir [Mallet, 2002] pour le calcul de $\varpi$).

L'algorithme DSI vise alors à minimiser cette rugosité généralisée c'est-à-dire à résoudre le système $\partial R^{\star}(\varphi)/\partial\varphi = 0$.

## A.3 Résolution numérique

Plusieurs méthodes ont été proposées pour résoudre l'équation précédente. La première méthode consiste en une résolution directe du système linéaire. Elle a été proposée dès 1992 ([Mallet, 1992]) mais a été laissée de côté dans un premier temps, essentiellement pour des raisons de puissance de calcul.

Le géomodeleur GOCAD, jusqu'aux versions les plus récentes, s'appuie donc sur une deuxième méthode qui consiste en une formulation locale de l'équation DSI en chaque nœud associée à un algorithme itératif permettant d'obtenir une solution approchée du problème. Cette méthode est décrite en détail par exemple dans [Mallet, 2002].

Récemment, grâce à de nouveaux travaux ainsi qu'à une augmentation significative de la puissance de calcul des ordinateurs, une nouvelle version de l'algorithme matriciel global a été proposée par Muron et Mallet ([Muron *et al.*, 2005a]), s'affranchissant ainsi de la formulation locale. Certaines méthodes classiques d'accélération de la convergence comme le gradient conjugué (décrit par exemple par [Cognot, 1996] dans le cadre de DSI) permettent d'obtenir plus rapidement une solution du problème, que ce soit avec la formulation locale ou avec la formulation matricielle.

Dans le cadre de ce travail, la formulation matricielle a été préférée car elle a deux avantages principaux sur la formulation locale :

- Du point de vue du développement de nouvelles contraintes, les formules mathématiques qui sont réellement implémentées sont identiques à la formulation générique des contraintes (de type $A_c^t.\varphi = b_c$) alors que la formulation locale nécessite une réécriture des contraintes sous une forme légèrement différente. La programmation et la vérification du code produit sont très fortement simplifiées.
- Du point de vue de l'utilisation, cette implémentation est plus rapide. Elle est cependant difficile à utiliser pour des contraintes dynamiques, c'est-à-dire qui n'affectent pas toujours le même élément géométrique, ce qui restreint fortement son utilisation pour l'interpolation de la géométrie d'un objet. Comme dans ce travail nous ne chercherons qu'à interpoler des propriétés, cette limitation n'est pas gênante.

L'annexe B donne plus de détails sur la formulation de contraintes DSI s'appliquant sur un ou plusieurs tétraèdres et présente une galerie de contraintes simples qui ont été implémentées au cours de cette thèse.

# Annexe B

# Interpolation de propriétés sur des tétraèdres

Cette annexe présente le formalisme utilisé pour construire des contraintes DSI relatives à des propriétés définies aux nœuds de tétraèdres. Quelques outils numériques de calcul permettant de traiter toutes les géométries de tétraèdres sont aussi donnés.

Ce formalisme est utilisé dans le cadre de l'interpolateur DSI (décrit dans l'annexe A) et les contraintes DSI correspondantes sont principalement utilisées dans la construction du modèle GeoChron (chapitre 3). Le cadre de définitions ainsi que les contraintes fournies ici ont été formulées par J.-L. Mallet ([Mallet, 2003]).

## B.1 Fonction linéaire définie sur un tétraèdre

Considérons un tétraèdre $T = T(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ dont les nœuds $\{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ sont plongés dans un espace géométrique euclidien à trois dimensions $(x, y, z)$. On suppose qu'une propriété quelconque $\varphi(x, y, z)$ est définie aux sommets de ce tétraèdre et a pour valeurs $\{\varphi(\alpha_0), \varphi(\alpha_1), \varphi(\alpha_2), \varphi(\alpha_3)\}$. Entre ces valeurs, la propriété est supposée varier linéairement à l'intérieur de $T$.

En conséquence, pour tout point $p(x, y, z)$ situé à l'intérieur de $T$, la propriété $\varphi(x, y, z)$ peut être représentée comme une fonction linéaire dont les coefficients $\{a_0, a_1, a_2, a_3\}$ dépendent de $\{\varphi(\alpha_0), \varphi(\alpha_1), \varphi(\alpha_2), \varphi(\alpha_3)\}$ et de la géométrie de $T$ :

$$\forall (x, y, z) \in T \quad \varphi(x, y, z) = [1, x, y, z]. \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$$

Notons par $(x_i, y_i, z_i)$ les coordonnées du nœud $\alpha_i$ de $T$. Les coefficients $\{a_0, a_1, a_2, a_3\}$ sont alors la solution du système linéaire suivant :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & x_0 & y_0 & z_0 \\ 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \end{bmatrix}}_{M} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi(\alpha_0) \\ \varphi(\alpha_1) \\ \varphi(\alpha_2) \\ \varphi(\alpha_3) \end{bmatrix} \tag{B.1}$$

Il est alors possible d'exprimer $\varphi(x, y, z)$ comme une combinaison linéaire des valeurs $\{\varphi(\alpha_0), \varphi(\alpha_1), \varphi(\alpha_2), \varphi(\alpha_3)\}$ :

$$\forall (x, y, z) \in T \quad \varphi(x, y, z) = \underbrace{[1, x, y, z].M^{-1}}_{[b_0, b_1, b_2, b_3]} \cdot \begin{bmatrix} \varphi(\alpha_0) \\ \varphi(\alpha_1) \\ \varphi(\alpha_2) \\ \varphi(\alpha_3) \end{bmatrix} \tag{B.2}$$

Les coefficients $\{b_0, b_1, b_2, b_3\}$ ainsi définis sont les coordonnées barycentriques du point $(x, y, z)$ par rapport aux nœuds $\{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ du tétraèdre $T$. De plus, les dérivées de $\varphi$ par rapport à $x$, $y$ et $z$ sont constantes dans $T$.

Si on note $D_x(\alpha_i)$, $D_y(\alpha_i)$ et $D_z(\alpha_i)$ les coefficients définis par :

$$\begin{bmatrix} D_x(\alpha_0) & D_x(\alpha_1) & D_x(\alpha_2) & D_x(\alpha_3) \\ D_y(\alpha_0) & D_y(\alpha_1) & D_y(\alpha_2) & D_y(\alpha_3) \\ D_z(\alpha_0) & D_z(\alpha_1) & D_z(\alpha_2) & D_z(\alpha_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} .M^{-1}$$

alors les dérivées de $\varphi$ s'expriment comme des combinaisons linéaires de $\varphi(\alpha_0)$, $\varphi(\alpha_1)$, $\varphi(\alpha_2)$ et $\varphi(\alpha_3)$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= \sum_{i=0}^{3} D_x(\alpha_i).\varphi(\alpha_i) \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= \sum_{i=0}^{3} D_y(\alpha_i).\varphi(\alpha_i) \\ \frac{\partial \varphi}{\partial z} &= \sum_{i=0}^{3} D_z(\alpha_i).\varphi(\alpha_i) \end{aligned}$$

Si on désigne par $m$ la matrice carrée suivante :

$$m = \begin{bmatrix} (x_1 - x_0) & (x_2 - x_0) & (x_3 - x_0) \\ (y_1 - y_0) & (y_2 - y_0) & (y_3 - y_0) \\ (z_1 - z_0) & (z_2 - z_0) & (z_3 - z_0) \end{bmatrix}$$

alors il est aisé de vérifier que les coefficients $D_x(\alpha_i)$, $D_y(\alpha_i)$ et $D_z(\alpha_i)$ peuvent être calculés par l'équation :

$$\begin{bmatrix} D_x(\alpha_0) & D_x(\alpha_1) & D_x(\alpha_2) & D_x(\alpha_3) \\ D_y(\alpha_0) & D_y(\alpha_1) & D_y(\alpha_2) & D_y(\alpha_3) \\ D_z(\alpha_0) & D_z(\alpha_1) & D_z(\alpha_2) & D_z(\alpha_3) \end{bmatrix} = m^{-1}. \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dans la suite du texte, pour plus de clarté, nous utiliserons les vecteurs $\mathbf{D}(\alpha_i)$ définis comme :

$$\mathbf{D}(\alpha_i) = \begin{bmatrix} D_x(\alpha_i) \\ D_y(\alpha_i) \\ D_z(\alpha_i) \end{bmatrix} \qquad \forall i \in \{0,1,2,3\}$$

Avec cette notation, on obtient :

$$[\mathbf{D}(\alpha_0), \mathbf{D}(\alpha_1), \mathbf{D}(\alpha_2), \mathbf{D}(\alpha_3)] = m^{-1}. \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Le gradient de $\varphi$ dans $T$ s'exprime alors ainsi :

$$\mathbf{grad}\ \varphi = \begin{bmatrix} \partial\varphi/\partial x \\ \partial\varphi/\partial y \\ \partial\varphi/\partial z \end{bmatrix} = \sum_{i=0}^{3} \mathbf{D}(\alpha_i).\varphi(\alpha_i) \tag{B.3}$$

Il est fréquemment utile d'exprimer le produit scalaire entre le gradient de $\varphi$ et un vecteur donné $\mathbf{W}$. Nous introduisons donc la notation suivante qui simplifiera les équations correspondantes :

$$\begin{array}{c} \mathbf{grad}\ \varphi.\mathbf{W} = \sum_{i=0}^{3} D(\alpha_i|\mathbf{W}).\varphi(\alpha_i) \\ \text{avec : } D(\alpha_i|\mathbf{W}) = \mathbf{D}(\alpha_i).\mathbf{W}, \forall i \in \{0,1,2,3\} \end{array} \tag{B.4}$$

### B.1.1 Comment calculer précisément $M^{-1}$ ?

Le paragraphe précédent fournit les bases mathématiques nécessaires au calcul des différentes contraintes DSI. Cependant, deux problèmes numériques peuvent apparaître lors de la résolution des systèmes linéaires et de l'inversion des matrices.

Si l'origine du système de coordonnées $(x, y, z)$ est très éloignée de la position du tétraèdre $T$ alors les coordonnées $(x_i, y_i, z_i)$ de ses nœuds sont numériquement très proches, seuls les derniers chiffres différant. Les lignes de la matrice $M$ deviennent alors presque identiques et le calcul numérique de l'inverse $M^{-1}$ devient très instable. Pour éviter cette première source d'instabilités, nous proposons de translater l'origine du système de coordonnées au voisinage de $T$, par exemple sur le nœud $\alpha_0$. En d'autres termes, la transformation suivante est appliquée en tout point de l'espace :

$$\begin{aligned} x &\leftarrow x - x_0 \\ y &\leftarrow y - y_0 \\ z &\leftarrow z - z_0 \end{aligned}$$

La matrice $m$ devient alors :

$$m = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{bmatrix}$$

Si on note par $\mathbf{J}$ et $\mathbf{0}$ les deux matrices suivantes :

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \text{et} \qquad \mathbf{0} = [\, 0\ 0\ 0 \,]$$

alors il est facile de vérifier que $M$ s'exprime en fonction de $m$, et $M^{-1}$ en fonction de $m^{-1}$ :

$$M = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{J} & m \end{bmatrix} \qquad \text{et} \qquad M^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ (-m^{-1}.\mathbf{J}) & m^{-1} \end{bmatrix}$$

Il devient alors possible de calculer l'inverse de $M$ qui est une matrice carrée $4 \times 4$ en calculant plus simplement l'inverse de $m$ qui est une matrice $3 \times 3$.

### B.1.2 Cas particulier où $T$ est dégénéré

Le deuxième problème numérique apparaît lorsque le tétraèdre considéré est dégénéré, c'est-à-dire que sa forme est très éloignée du tétraèdre équilatéral (voir [Lepage, 2003]). On peut en effet observer que le volume $|T|$ d'un tétraèdre est égal à un sixième du déterminant de la matrice $m$ associée :

$$det(M) = det(m) = 6.|T|$$

En conséquence, si $T$ est dégénéré et que son volume est nul alors les matrices $M$ et $m$ ne sont pas inversibles et la plupart des équations présentées précédemment sont indéfinies. De même, numériquement, si le tétraèdre est presque dégénéré, de fortes instabilités numériques apparaissent (l'inverse de la matrice variant très fortement pour de faibles variations de la géométrie).

On peut choisir, en utilisant les inverses généralisées (voir par exemple [Bellman, 1960] et [Luenberger, 1969]), une matrice particulière notée $m^\dagger$, dite *pseudo-inverse* de $m$, telle que :

$$m^\dagger = \lim_{\varepsilon \to 0} (m^t.m + \varepsilon.\mathbf{I})^{-1}.m^t$$

où $\mathbf{I}$ est la matrice unité $3 \times 3$, et $\varepsilon$ un réel strictement positif.

On vérifie également que, si $m$ est inversible, alors, à la limite, quand $\varepsilon$ est égal à 0, $m^\dagger = m^{-1}$. Si $m$ n'est pas inversible, on peut utiliser cette équation avec une valeur de $\varepsilon$ suffisamment petite pour obtenir une bonne approximation de $m^\dagger$. En pratique, après quelques tests, il semble qu'on puisse choisir :

$$\varepsilon \simeq \frac{trace(m^t.m)}{10000}$$

Ces équations peuvent être utilisées dans tous les cas pour calculer une pseudo-inverse $M^\dagger$ de $M$. En pratique, lorsque la valeur de $M^{-1}$ sera nécessaire, un test sera effectué sur le tétraèdre correspondant pour vérifier s'il est dégénéré, c'est-à-dire si le rapport entre l'arête la plus courte et l'arête la plus longue du tétraèdre est inférieur à un seuil donné ou si le rapport du volume du tétraèdre sur le déterminant de la matrice $m$ associée est supérieur à un seuil fixé.

Si le tétraèdre est considéré comme dégénéré, alors la pseudo-inverse $M^\dagger$ est utilisée, sinon on utilise normalement l'inverse $M^{-1}$. La pseudo-inverse n'est pas utilisée systématiquement car du fait que l'on ne prend pas $\varepsilon = 0$ mais seulement une valeur approchée, on introduit un très léger biais. On limite donc l'usage de $M^\dagger$ aux seuls cas où c'est indispensable.

## B.2 Contraintes DSI sur une propriété

Après avoir posé les bases des interpolations de propriétés sur un tétraèdre, nous allons passer en revue les contraintes DSI souples les plus utilisées dans ce travail. On peut distinguer deux grandes familles de contraintes : celles qui agissent directement sur les valeurs de la propriété aux nœuds d'un tétraèdre et celles qui agissent sur le gradient de la propriété (et donc aussi sur les valeurs de la propriété elle-même mais indirectement). La première famille contient deux contraintes, les points de contrôle et la contrainte delta.

### B.2.1 Les points de contrôle

Cette contrainte est la plus simple. On cherche à imposer qu'une propriété $\varphi$ prenne une valeur fixée $\phi$ en un point $p^\star = (x^\star, y^\star, z^\star)$ contenu dans un tétraèdre $T(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$. D'après l'équation B.2, on veut donc obtenir :

$$\underbrace{[1, x^\star, y^\star, z^\star].M^{-1}}_{[b_0,b_1,b_2,b_3]} \cdot \begin{bmatrix} \varphi(\alpha_0) \\ \varphi(\alpha_1) \\ \varphi(\alpha_2) \\ \varphi(\alpha_3) \end{bmatrix} = \phi$$

Cette équation nous donne la contrainte DSI $c(T, p^\star)$ suivante :

$$c : \left| \begin{array}{rcll} A_c(\alpha) & = & b_i & \text{si } \alpha \in \{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\} \\ A_c(\alpha) & = & 0 & \text{sinon} \\ b_c & = & 0 & \end{array} \right.$$

### B.2.2 La contrainte delta

Dans certains cas, l'écart de valeurs d'une propriété $\varphi$ entre deux points est connu et il serait souhaitable d'intégrer cette connaissance dans une interpolation DSI. Ces deux points peuvent être géométriquement voisins tout comme ils peuvent être distants l'un

de l'autre. Cette contrainte est utilisée par exemple dans le cadre de l'intégration de connaissances sur le vecteur rejet dans une interpolation (voir chapitre 4).

Soit deux tétraèdres $T^\diamond = T(\alpha_0^\diamond, \alpha_1^\diamond, \alpha_2^\diamond, \alpha_3^\diamond)$ et $T^\star = T^\star(\alpha_0^\star, \alpha_1^\star, \alpha_2^\star, \alpha_3^\star)$ qui contiennent deux points $(x^\diamond, y^\diamond, z^\diamond)$ et $(x^\star, y^\star, z^\star)$ respectivement. On souhaiterait que l'écart entre les valeurs de $\varphi$ entre ces deux points soit égal à une certaine constante $\Delta$[1] :

$$\varphi(x^\diamond, y^\diamond, z^\diamond) - \varphi(x^\star, y^\star, z^\star) = \Delta$$

Notons $M^\diamond$ et $M^\star$ les deux matrices définies par l'équation B.1 sur les tétraèdres $T^\diamond$ et $T^\star$. L'équation précédente devient alors :

$$\underbrace{[1, x^\diamond, y^\diamond, z^\diamond].M^\diamond - 1}_{[b_0^\diamond, b_1^\diamond, b_2^\diamond, b_3^\diamond]} \cdot \begin{bmatrix} \varphi(\alpha_0^\diamond) \\ \varphi(\alpha_1^\diamond) \\ \varphi(\alpha_2^\diamond) \\ \varphi(\alpha_3^\diamond) \end{bmatrix} - \underbrace{[1, x^\star, y^\star, z^\star].M^\star - 1}_{[b_0^\star, b_1^\star, b_2^\star, b_3^\star]} \cdot \begin{bmatrix} \varphi(\alpha_0^\star) \\ \varphi(\alpha_1^\star) \\ \varphi(\alpha_2^\star) \\ \varphi(\alpha_3^\star) \end{bmatrix} = \Delta$$

Ou encore :

$$\sum_{i=0}^{3} (b_i^\diamond . \varphi(\alpha_i^\diamond) - b_i^\star . \varphi(\alpha_i^\star)) = \Delta$$

Cette dernière équation correspond à la contrainte DSI $c(T^\diamond, T^\star, \Delta)$ appelée *contrainte delta* :

$$c : \left| \begin{array}{rcll} A_c(\alpha) & = & b_i^\diamond & \text{si } \alpha \in \{\alpha_0^\diamond, \alpha_1^\diamond, \alpha_2^\diamond, \alpha_3^\diamond\} \\ A_c(\alpha) & = & b_i^\star & \text{si } \alpha \in \{\alpha_0^\star, \alpha_1^\star, \alpha_2^\star, \alpha_3^\star\} \\ A_c(\alpha) & = & 0 & \text{sinon} \\ b_c & = & \Delta & \end{array} \right.$$

## B.3 Contraintes DSI sur le gradient d'une propriété

Les contraintes précédentes s'intéressaient uniquement à la valeur de la propriété $\varphi$ elle-même. Or, les chapitre 2 à 4 utilisent de nombreuses équations qui font intervenir le gradient de $\varphi$. Nous allons donc détailler quelques contraintes sur le gradient.

### B.3.1 Projection du gradient

Il est parfois utile d'imposer la norme du gradient (généralement égale à 1) sans spécifier son orientation. Cependant, la formulation de la norme d'un vecteur $\mathbf{u} = [u_x \; u_y \; u_z]$ :

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2}$$

est fonction du carré des composantes du vecteur et ne peut donc pas être transformée facilement en contrainte DSI (une linéarisation par la formule de Taylor est possible mais elle nécessite de négliger certains termes et elle est numériquement coûteuse).

[1]En pratique, le plus fréquemment, $\Delta$ est égal à 0 mais cette contrainte est valable pour n'importe quelle valeur.

Toutefois, il est possible d'exprimer que la *projection* d'un vecteur, par exemple le gradient d'une propriété $\varphi$, sur un axe donné défini par un vecteur unité $\mathbf{W}$ doit avoir une certaine longueur $l_W$ :

$$\mathbf{grad}\ \varphi.\mathbf{W} = l_W$$

En utilisant l'équation B.4, on obtient :

$$\sum_{i=0}^{3} D(\alpha_i|\mathbf{W}).\varphi(\alpha_i) = l_W$$

qui se transforme aisément en la contrainte DSI $c = c(T, \mathbf{W})$ sur le tétraèdre $T$ :

$$c : \left| \begin{array}{rcll} A_c(\alpha) & = & D(\alpha|\mathbf{W}) & \text{si } \alpha \in \{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\} \\ A_c(\alpha) & = & 0 & \text{sinon} \\ b_c & = & l_W & \end{array} \right.$$

Remarque : si $\mathbf{W}$ n'est pas unitaire, il est plus rapide d'utiliser $l'_W = l_W/\|\mathbf{W}\|$ qui ne demande qu'une division plutôt que de renormaliser $\mathbf{W}$, ce qui nécessite trois divisions (une pour chaque composante de $\mathbf{W}$).

### B.3.2 Gradient constant entre deux tétraèdres

Il existe plusieurs manières avec l'interpolateur DSI pour s'assurer qu'une propriété $\varphi$ donnée est la plus continue et lisse possible sur le support d'interpolation. En général, on utilise pour cela la rugosité (voir paragraphe A.2.1). Comme la pondération usuellement choisie est isotrope et donc indépendante de la géométrie des simplexes, elle engendre un biais dès lors que les tétraèdres (ou les triangles en deux dimensions) ne sont pas parfaitement équilatéraux.

Une autre manière de spécifier une continuité maximale de la propriété est d'imposer que le gradient de cette propriété soit égal sur deux tétraèdres voisins. Comme le calcul du gradient prend en compte la géométrie des tétraèdres, cette contrainte est indépendante de la forme du support.

Considérons deux tétraèdres $T^\diamond = T(\alpha_0^\diamond, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ et $T^\star = T^\star(\alpha_0^\star, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ adjacents qui partagent la face $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$. Soit $\mathbf{N}$ un vecteur non nul orthogonal à $\mathcal{F}$ et $\mathbf{F}$ un vecteur inclus dans $\mathcal{F}$. L'objectif est de contraindre une propriété $\varphi$ à avoir le même gradient sur $T^\diamond$ et $T^\star$, soit :

$$\mathbf{grad}^\diamond\ \varphi = \mathbf{grad}^\star\ \varphi$$

où $\mathbf{grad}^\diamond$ (respectivement $\mathbf{grad}^\star$) désigne le gradient de $\varphi$ sur $T^\diamond$ (respectivement $T^\star$).

Si l'on décompose les deux gradients suivant $\mathbf{N}$ et $\mathbf{F}$, on obtient :

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{grad}^\diamond\ \varphi & = & \mathbf{N}.\mathrm{grad}_N^\diamond\ \varphi + \mathbf{F}.\mathrm{grad}_F^\diamond\ \varphi \\ \mathbf{grad}^\star\ \varphi & = & \mathbf{N}.\mathrm{grad}_N^\star\ \varphi + \mathbf{F}.\mathrm{grad}_F^\star\ \varphi \end{array}$$

Or la projection du gradient d'une propriété sur une face d'un tétraèdre est égale au gradient de cette propriété calculé dans cette face uniquement. La face $\mathcal{F}$ étant commune à $T^\diamond$ et $T^\star$, le gradient de $\varphi$ dans $\mathcal{F}$ est le même des deux côtés :

$$\text{grad}_F^\diamond\ \varphi = \text{grad}_F^\star\ \varphi$$

Donc :

$$\mathbf{grad}^\diamond\ \varphi = \mathbf{grad}^\star\ \varphi \iff \mathbf{N}.\text{grad}_N^\diamond\ \varphi = \mathbf{N}.\text{grad}_N^\star\ \varphi$$

En utilisant la notation définie en B.4 :

$$\begin{array}{rcll} D^\diamond(\alpha|\mathbf{N}) & = & D^\diamond(\alpha).\mathbf{N} & \forall \alpha \in \{\alpha_0^\diamond, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\} \\ D^\star(\alpha|\mathbf{N}) & = & D^\star(\alpha).\mathbf{N} & \forall \alpha \in \{\alpha_0^\star, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\} \end{array}$$

L'égalité des gradients peut donc se formuler ainsi :

$$D^\diamond(\alpha_0^\diamond|\mathbf{N}).\varphi(\alpha_0^\diamond) + \sum_{i=0}^{3} D^\diamond(\alpha_i|\mathbf{N}).\varphi(\alpha_i) = D^\star(\alpha_0^\star|\mathbf{N}).\varphi(\alpha_0^\star) + \sum_{i=0}^{3} D^\star(\alpha_i|\mathbf{N}).\varphi(\alpha_i)$$

ce qui est équivalent à la contrainte $c(T^\diamond, T^\star)$ suivante :

$$c\ : \left| \begin{array}{rcll} A_c(\alpha) & = & D^\diamond(\alpha|\mathbf{N}) & \text{si } \alpha = \alpha_0^\diamond \\ A_c(\alpha) & = & D^\star(\alpha|\mathbf{N}) & \text{si } \alpha = \alpha_0^\star \\ A_c(\alpha) & = & D^\diamond(\alpha|\mathbf{N}) - D^\star(\alpha|\mathbf{N}) & \text{si } \alpha \in \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\} \\ A_c(\alpha) & = & 0 & \text{sinon} \\ b_c & = & 0 & \end{array} \right.$$

# Références bibliographiques


ANTONELLINI, A. et AYDIN, A. *Effect of faulting on fluid flow in porous sandstones : petrophysical properties.* The American Association of Petroleum Geologists Bulletin, 1994, vol. 78, pp. 181–201.

ARPAT, B. et CAERS, J. *Reservoir Characterization Using Multiple-Scale Geological Patterns.* In Proceedings of the 9th European Conference on the Mathematics of Oil Recovery. Cannes, France, 2004.

BALAVEN, S., BENNIS, C., BOISSONNAT, J.-D. et YVINEC, M. *Conforming Orthogonal Meshes.* In Proceedings of the 11th International Meshing Roundtable. Sandia National Laboratories, Williamsburg, VA, 2002. pp. 219–230.

BELLMAN, R. E. *Introduction to Matrix Analysis.* McGraw Hill, New York, 1960.

BROWN, A. R. *The value of seismic amplitude.* The Leading Edge, 1987, vol. 6 (10), pp. 30–33.

CAERS, J. *Geostatistical reservoir modeling using statistical pattern recognition.* Journal of Petroleum Science and Engineering, 2001, vol. 29 (3), pp. 177–188.

CATUNEANU, O. *Sequence stratigraphy of clastic systems : concepts, merits, and pitfalls.* Journal of African Earth Sciences, 2002, vol. 35, pp. 1–43.

CATUNEANU, O., WILLIS, A. J. et MIALL, A. D. *Temporal significance of sequence boundaries.* Sedimentary Geology, 1998, vol. 121, pp. 157–178.

CAUMON, G. *Représentation, visualisation et modification de modèles volumiques pour les géosciences.* Th. Doct. Institut National Polytechnique de Lorraine. Nancy, France, 2003.

CHILÈS, J.-P. et DELFINER, P. *Geostatistics — Modeling spatial uncertainties.* Wiley-Interscience, New York, 1999.

CHIPOT, Y. *Génération et modification de surfaces triangulées.* Th. Doct. Institut National Polytechnique de Lorraine. Nancy, France, 1991.

COGNOT, R. *La méthode D.S.I. : optimisation, implémentation et applications.* Th. Doct. Institut National Polytechnique de Lorraine. Nancy, France, 1996.

COJAN, I. et RENARD, M. *Sédimentologie.* Masson, Paris, 1997.

CONRAUD, J. *Génération de Maillages de Simplexes pour la Modélisation d'Objets Naturels.* Th. Doct. Institut National Polytechnique de Lorraine. Nancy, France, 1997.

DEUTSCH, C.V. et JOURNEL, A.G. *GSLIB : Geostatistical Software Library and User's Guide (second edition).* Oxford University Press, New York, 1998.

DEUTSCH, C. V., TRAN, T. T. et PYRCZ, M. J. *Geostatistical Assignment of Reservoir Properties on Unstructured Grids.* In Proceedings of the Annual Technical Conference, paper 77427. SPE, Houston, 2002.

DUBRULE, O., BASIRE, C., BOMBARDE, S., SAMSON, P. et SEGONDS, D. *Reservoir Geology Using 3-D Modelling Tools.* In SEG Proceedings, 1997.

DUVINAGE, I. *Création et mise en cohérence de modèles structuraux à partir d'horizons extraits de données sismiques tri-dimensionelles.* Th. Doct. Institut National Polytechnique de Lorraine. Nancy, France, 2000.

EMERY, D. et MYERS, K. J. *Sequence Stratigraphy.* Blackwell Science, 1996.

ENRIGHT, W. H., HIGHAM, D. J., OWREN, B. et SHARP, P. W. *A Survey of the Explicit Runge-Kutta Method.* n° 94-291, 1994. http ://citeseer.ist.psu.edu/enright95survey.html.

EULER, N. *Modélisation volumique, contrainte et libertés.* Th. Doct. Institut National Polytechnique de Lorraine. Nancy, France, 1999.

FLANDRIN, N., BOROUCHAKI, H. et BENNIS, C. *3D Hybrid Mesh Generation for Reservoir Flow Simulation.* In Proceedings of the 13th International Meshing Roundtable. Sandia National Laboratories, Williamsburg, VA, 2004. pp. 133–144.

FRANK, T. *Exploring the tetrahedral decomposition of the subsurface.* In Proceedings of the 24th GOCAD meeting, Nancy, 2004.

FRANK, T. *Advanced Rendering and Geological Co-Visualization of Tetrahedral Meshes.* In Proceedings of the 25th GOCAD meeting, Nancy, 2005.

GALERA, C., BENNIS, C., MORETTI, I. et MALLET, J.-L. *Construction of coherent 3D geological blocks.* Computers and Geosciences, 2003, vol. 29, pp. 971–984.

GEORGE, P.-L. et BOROUCHAKI, H. *Triangulation de Delaunay et maillage : Applications aux Éléments finis.* Éditions Hermès, Paris, 1997.

GOOVAERTS, P. *Geostatistics for natural ressources evaluation.* Oxford University Press, New York, 1997.

GROSSE, O. *Remise en cohérence d'un modèle géologique 3D.* Th. Doct. Institut National Polytechnique de Lorraine. Nancy, France, 2002.

GUITON, M. *Contribution de la fracturation diffuse à la déformation d'ensemble durant le plissement de roches sédimentaires.* Th. Doct. École Polytechnique. Paris, France, 2001.

HEINEMANN, Z. E. et HEINEMANN, G. *Lecture notes : Gridding techniques for reservoir simulation.* In Proceedings of the 7th International Forum on Reservoir Simulation, 2003.

HILLS, E. S. *Elements of structural geology.* John Wiley & Sons, New York, 1963.

HIRASAKI, G. J. et DELL, P. M. *Representation of Reservoir Geometry for Numerical Simulation.* Society of Petroleum Engineers Journal, 1970, vol. 10, pp. 393–404.

HUANG, Y. *Modélisation et Manipulation des Surfaces Triangulées.* Th. Doct. Institut National Polytechnique de Lorraine. Nancy, France, 1990.

JOURNEL, A. G. et HUIJBREGTS, C J. *Mining Geostatistics.* Blackburn Press, 2004.

KEDZIERSKI, P., LE SOLLEUZ, A., MALLET, J.-L. et ROYER, J.-J. *Sedimentological and Stratigraphic Modeling Combining Membership Functions and Sequence Stratigraphy Principles.* In Proceedings of the 25th GOCAD meeting, Nancy, 2005.

KEDZIERSKI, P., ROYER, J.-J. et MALLET, J.-L. *Building a 3D Wheeler Diagram for Stratigraphic Modeling.* In Proceedings of the 25th GOCAD meeting, Nancy, 2005.

LABBÉ, P., DOMPIERRE, J., GUIBAULT, F. et CAMARERO, R. *On element shape measures for mesh optimization.* In Proceedings of the 2nd Symposium on Trends in Unstructured Mesh Generation, during the 5th US National Congress on Computational Mechanics, 1999.

LABRUNYE, E. *Extraction automatique d'information géologique à partir d'images sismiques tridimensionnelles.* Th. Doct. Institut National Polytechnique de Lorraine. Nancy, France, 2004.

LAVAU, G. *Analyse vectorielle : gradient, rotationnel et divergence.* École des Mines d'Alès, France, 2004. http ://www.ema.fr/CMGD/MMS/Cours/optapp/opvect.pdf.

LEDEZ, D. *Modélisation d'objets naturels par formulation implicite.* Th. Doct. Institut National Polytechnique de Lorraine. Nancy, France, 2003.

LEFLON, B. et MASSONNAT, G. *Neptune Project – Modelling and Simulation of Carbonate Environments.* In Proceedings of the 9th European Conference on the Mathematics of Oil Recovery. Cannes, France, 2004.

LEPAGE, F. *Génération de maillages tridimensionnels pour la simulation des phénomènes physiques en géosciences.* Th. Doct. Institut National Polytechnique de Lorraine. Nancy, France, 2003.

LEVENTHAL, S. H., KLEIN, M. H. et CULHAM, W. E. *Curvilinear Coordinate Systems for Reservoir Simulation.* Society of Petroleum Engineers Journal, 1985, vol. 25, pp. 893–900.

LÉVY, B. *Topologie algorithmique : Combinatoire et plongement.* Th. Doct. Institut National Polytechnique de Lorraine. Nancy, France, 1999.

LÉVY, B., PETITJEAN, S., RAY, N. et MAILLOT, J. *Least square conformal maps for automated texture atlas generation.* In SIGGRAPH 2002, 2002.

LIENHARDT, P. *N-Dimensional Generalized Combinatorial Maps and Cellular Quasi-Manifolds.* Journal on Computational Geometry and Applications, 1994, vol. 4, pp. 275–324.

LOMASK, J. *Flattening 3-D seismic cubes without picking.* In Proceedings of the 73rd Annual International Meeting. Society of Exploration Geophysicists, 2003.

LORENSEN, W. E. et CLINE, H. E. *Marching cubes : a high resolution 3d surface construction algorithm.* In Proceedings of the 14th annual conference on Computer graphics and interactive techniques. ACM Press, 1987. pp. 163–169.

LUENBERGER, D. G. *Optimization by vector space methods.* John Wiley, New York, 1969.

MACÉ, L., SOUCHE, L. et MALLET, J.-L. *3D Fracture Characterization based on Geomechanics and Geologic Data Uncertainties.* In Proceedings of the 9th European Conference on the Mathematics of Oil Recovery. Cannes, France, 2004.

MACÉ, L., SOUCHE, L. et MALLET, J.-L. *3D Fracture Network Modeling Integrating Geomechanical and Geological Data.* In AAPG International Conference and Exhibition. Cancun, Mexico, 2004.

MALLET, J.L. *Geomodeling.* Oxford University Press, New York, 2002.

MALLET, J.-L. *Discrete Smooth Interpolation in geometric modeling.* Computer-Aided Design Journal, 1992, vol. 24.

MALLET, J.-L. *Discrete modelling for natural objects.* Mathematical Geology, 1997, vol. 29, N.2.

MALLET, J.-L. *Constraining a piecewise linear function defined on a 3D complex (Applications to 3D restoration).* In Proceedings of the 23th GOCAD meeting, Nancy, 2003.

MALLET, J.-L. *Space-Time Mathematical Framework for Sedimentary Geology.* Mathematical Geology, 2004, vol. 36, N.1.

MALLET, J.-L. *A Unified Model for Reservoir Characterization.* In Proceedings of the 25th GOCAD meeting, Nancy, 2005.

MANZOCCHI, P. N. T., WALSH, J. J. et YIELDING, G. *Fault transmissibility multipliers for flow simulation models.* Petroleum Geoscience, 1999, vol. 5, pp. 53–63.

MASSONNAT, G. *Breaking of a paradigm : geology can provide 3D complex probability fields for stochastic facies modelling.* In SPE Annual Technical Conference and Exhibition, 1999.

MASSOT, J. *Implémentation de méthodes de dépliage 3d.* Th. Doct. Institut National Polytechnique de Lorraine. Nancy, France, 2002.

MLACNIK, M., DURLOFSKY, L. J. et HEINEMANN, Z. E. *Dynamic flow-based PEBI grids for reservoir simulation.* In Proceedings of the Annual Technical Conference (SPE 22889), paper 90009. SPE, 2004.

MÖLLER, T. et HAINES, E. *Real-Time Rendering.* A K Peters, Ltd., 1999.

MORETTI, I. et LARRÈRE, M. *LOCACE : Computer-Aided Construction of Balanced Geological Cross-Section.* Geobyte, 1989, pp. 16–24.

MURON, P., MALLET, J.-L. et HOVADIK, J. *An Efficient and Extensible Interpolation Framework Based on the Matrix Formulation of the Discrete Smooth Interpolation.* In Proceedings of the 25th GOCAD meeting, Nancy, 2005.

MURON, P., MALLET, J.-L. et MEDWEDEFF, D. A. *3D Sequential Structural Restoration : Geometry and Kinematics.* In 2005 AAPG Annual Convention. Calgary, Canada, 2005.

MURON, P., MALLET, J.-L. et ROYER, J.-J. *3D balanced unfolding and rock properties.* In Proceedings of the 24th GOCAD meeting, Nancy, 2004.

NELSON, R. A. *Geologic Analysis of Naturally Fractured Reservoirs.* Butterworth-Heinemann, 2001.

POLLOCK, D.W. *Semianalytical Computation of Path Lines for Finite-Difference Models.* Ground Water, 1988, vol. 26(6), pp. 743–750.

POMEROL, C., LAGABRIELLE, Y. et RENARD, M. *Éléments de géologie.* Dunod, Paris, 2002.

PRESS, H., TEUKOLSKY, S.A., VETTERLING, W.T. et FLANNERLY, B.P. *Numerical recipies.* Cambridge University Press, Cambridge, 1992.

PRÉVOST, M., EDWARDS, M.G. et BLUNT, M.J. *Streamline Tracing on Curvilinear Structured and Unstructured Grids.* In Proceedings of the 2001 SPE Reservoir Simulation Symposium (paper 66347). Houston, TX, 2001.

PREVOST, M., LEPAGE, F., DURLOFSKY, L.J. et MALLET, J.-L. *Unstructured 3D gridding and upscaling for coarse modeling of geometrically complex reservoirs.* In Proceedings of the 9th European Conference on the Mathematics of Oil Recovery. Cannes, France, 2004.

RAMSAY, J. G. *Folding and fracturing of rocks.* McGraw-Hill, 1967.

RENARD, P. et DE MARSILY, G. *Calculating equivalent permeability : A review.* Advances in Water Resources, 1997, vol. 20 (5–6), pp. 253–278.

ROUBY, D. *Restauration en carte des domaines faillés en extension : méthode et applications.* Th. Doct. Université de Rennes I. Rennes, France, 1994.

ROUBY, D., COBBOLD, P. R., SZATMARI, P., DEMERCIAN, S., COELHO, D. et R., Ricci. *Least squares palinspastic restoration of regions of normal faulting. Application to the Campos Basin (Brazil).* Tectonophysics, 1993, vol. 28 (221), pp. 439–452.

ROUBY, D., XIAO, H. et SUPPE, J. *3D restoration of complexly folded aud faulted surfaces using multiple unfolding mechanism.* AAPG Bulletin, 2000, vol. 84 (6), pp. 805–829.

RUTTEN, K. W. *Validating Seismic Correlations by Unfaulting and Multi-horizon Flattening.* In 66th EAGE annual meeting. Paris, France, 2004.

SAMPL, P. *Semi-structured mesh generation based on medial axis.* In Proceedings of the 9th International Meshing Roundtable. Sandia National Laboratories, Williamsburg, VA, 2000. pp. 21–32.

SAMSON, P. *Equilibrage de structures géologiques 3D dans le cadre du projet gOcad.* Th. Doct. Institut National Polytechnique de Lorraine. Nancy, France, 1996.

SÉDOV, L. *Mécanique des milieux continus, tome 1.* Éditions Mir, Moscou, 1975.

SHEFFER, A. et DE STURLER, E. *Parameterization of faceted surfaces for meshing using angle-based flattening.* Engineering with computers, 2001, vol. 17, pp. 326–337.

SHEWCHUK, J. R. *Adaptative precision floating-point arithmetic and fast robust geometric predicates.* School of Computer Science, Carnegie Mellon University, 1996.

SHIPTON, Z. et COWIE, P. *A conceptual model for the origin of fault damage zone structures in high porosity sandstone.* Journal of Structural Geology, 2003, vol. 25 (3), pp. 333–344.

SILLIPHANT, L. J., ENGELDER, T. et GROSS, M. R. *The state of stress in the limb of the Split Mountain anticline, Utah : constraints placed by transected joints.* Journal of Structural Geology, 2002, vol. 24, pp. 155–172.

SOKOLNIKOFF, I. S. *Tensor analysis : Theory and applications to geometry and mechanics of continua.* Wiley, New York, 1964.

SOUCHE, L. *Méthodes numériques pour la représentation des failles et des structures géologiques faillées.* Th. Doct. Institut National Polytechnique de Lorraine. Nancy, France, 2005.

SRIVASTAVA, R. M. et ISAAKS, E. H. *Applied Geostatistics.* Oxford University Press, 1990.

STARK, T. J. *Relative geologic time (age) volumes — Relating every seismic sample to a geologically reasonable horizon.* The Leading Edge, 2004, vol. 23 (9), pp. 928–932.

STREBELLE, S. *Conditional simulation of complex geological structures using multi-point statistics.* Mathematical Geology, 2002, vol. 34 (1), pp. 1–21.

TANER, M. T., KOEHLER, F. et SHERIFF, R. E. *Complex seismic trace analysis.* Geophysics, 1979, vol. 44 (6), pp. 1041–1063.

TERTOIS, A.-L. *Real-time edition of faults in a tetrahedralized volume.* In Proceedings of the 25th GOCAD meeting, Nancy, 2005.

THIELE, M. R. *Streamline Simulation.* In 6th International Forum on Reservoir Simulation. Schloss Fuschl, Austria, 2001.

THOBIE, S.A. *Colour interpolation applied to synthetical animation.* In 4th. International Conference, Pacific Graphics'94/CADDM'94, Bejing, China, 1994.

THOMPSON, D. S. et SONI, B. K. *Generation of Quad and Hex Dominant Semistructured Meshes Using an Advancing Layer Scheme.* In Proceedings of the 8th International Meshing Roundtable. Sandia National Laboratories, Williamsburg, VA, 1999.

THOMPSON, J. F., SENI, B. K. et WEATHERILL, N. P. *Handbook of grid generation.* CRC Press, 1999.

THOMPSON, Z. W. J. et MASTIN, C. *Numerical grid generation.* Elsevier, 1985.

TUREYEN, O. I., KARACALI, O. et CAERS, J. *A Parallel, Multiscale Approach to Reservoir Modeling.* In Proceedings of the 9th European Conference on the Mathematics of Oil Recovery. Cannes, France, 2004.

VAIL, P. R., MITCHUM, R. M. et THOMPSON, S. *Seismic stratigraphy and global changes of sea level, Part 3 : Relative changes of sea level from coastal onlap.* Seismic Stratigraphy - Applications to Hydrocarbon Exploration. C.E. Payton (ed.), 1977, vol. 26, pp. 63–81.

VELTEN, W. *Effective Seismic Modeling in 3D Earth Models.* Th. Doct. Institut National Polytechnique de Lorraine. Nancy, France, 1998.

VERMA, S. *Flexible Grids for Reservoir Simulation.* Th. Doct. Stanford University. Stanford, California, USA, 1996.

VOILLEMONT, J.-C. *Caractérisation par micro-sismicité induite des milieux poreux fracturés. Modélisations par la méthode des lignes de courant d'un site géothermique HDR (Sultz-sous-Forêts, France).* Th. Doct. Institut National Polytechnique de Lorraine. Nancy, France, 2001.

WEILER, K. *Topology as a Framework for solid Modeling.* In Proceedings of Graphics Interface, 1984. pp. 53–56.

WEILER, K. *The Radial Edge Structure : A Topological Representation for Non-Manifold Geometric Boundary Modeling.* In Proceedings of the IFIG WG 5.2, 1986.

WHEELER, H. E. *Time-stratigraphy.* Bulletin of the American Association of Petroleum Geologist, 1958, vol. 42, N.5, pp. 1047–1063.

WILKINS, S. J. et GROSS, M. R. *Normal fault growth in layered rocks at Split Mountain, Utah : influence of mechanical stratigraphy on dip linkage, fault restriction and fault scaling.* Journal of Structural Geology, 2002, vol. 24, pp. 1413–1429.

ZIENKIEWICZ, O. C. *The finite element method.* McGraw-Hill, 3rd edition, 1977.

INSTITUT NATIONAL
POLYTECHNIQUE
DE LORRAINE

AUTORISATION DE SOUTENANCE DE THESE
DU DOCTORAT DE L'INSTITUT NATIONAL
POLYTECHNIQUE DE LORRAINE

o0o

VU LES RAPPORTS ETABLIS PAR :
**Monsieur André JOURNEL, Professeur, Université de Stanford, USA**

**Monsieur Jean-Paul CHILÈS, Professeur, Centre de géostatistiques de l'Ecole des Mines de Paris, Fontainebleau**

Le Président de l'Institut National Polytechnique de Lorraine, autorise :

**Monsieur MOYEN Rémi**

NANCY BRABOIS
2, AVENUE DE LA
FORET-DE-HAYE
BOITE POSTALE 3
F - 54501
VANDŒUVRE CEDEX

à soutenir devant un jury de l'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE LORRAINE, une thèse intitulée :

**"Paramétrisation 3D de l'espace en géologie sédimentaire : le modèle GeoChron"**

en vue de l'obtention du titre de :

DOCTEUR DE L'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE LORRAINE

Spécialité : « **Géosciences** »

Fait à Vandoeuvre, le 24 mai 2005
Le Président de l'I.N.P.L.
L. SCHUFFENECKER

TEL. 33/03.83.59.59.59
FAX. 33/03.83.59.59.55

# Résumé

## Paramétrisation 3D de l'espace en géologie sédimentaire : le modèle GeoChron

La modélisation des réservoirs pétroliers passe par une étape de construction d'une grille volumique généralement adaptée aux failles et aux horizons du domaine, sur laquelle les modèles de propriétés pétrophysiques sont calculés. On utilise pour cela des *grilles curvilinéaires stratigraphiques* formées de cellules hexaédriques dont les indices $(i, j, k)$ constituent un échantillonnage d'une fonction paramétrique 3D $(u, v, t)$ où $(u, v)$ correspondent aux coordonnées « paléo-géographiques » tangentielles aux horizons et $(t)$, considéré comme un analogue de l'âge géologique des terrains, est approximativement orthogonal aux horizons.

Ces grilles sont bien adaptées aux algorithmes géostatistiques de modélisation de propriétés mais leur régularité topologique entraîne des erreurs ou des approximations dans les domaines fortement faillés ou plissés. Le modèle GeoChron corrige ces défauts en séparant clairement la géométrie du domaine d'étude (représentée par un maillage tétraédrisé non structuré), la correspondance entre cette géométrie et la géométrie des couches au moment de leur formation (grâce à une fonction de paramétrisation 3D $(u, v, t)$) et le modèle de propriété (calculé dans une grille régulière fine).

Après avoir exposé le cadre mathématique de ce modèle qui met en valeur les similarités avec les diagrammes de *time stratigraphy* (ou de Wheeler) utilisés en sédimentologie, nous indiquons deux méthodes pratiques de construction d'une telle paramétrisation, implémentées dans le cadre du géomodeleur GOCAD. Puis nous montrons comment la composante $(t)$ de la fonction de paramétrisation peut être utilisée pour calculer automatiquement en tout point d'une surface de faille une estimation géométrique du vecteur rejet. Enfin, nous présentons plusieurs applications possibles concernant la modélisation des propriétés pétrophysiques, l'estimation des déformations ou encore l'intégration des données sismiques.

# Abstract

## 3D parameterisation of the geological space in sedimentary geology : the GeoChron model

Reservoir modelling requires building a volumic mesh usually adapted to faults and horizons of the domain, on which petrophysical property models are computed. The common practice consists in using *stratigraphic curvilinear grids* formed of hexahedral cells whose indexes $(i, j, k)$ constitute a sampling of a 3D parametric function $(u, v, t)$ where $(u, v)$ correspond to the "paleo-geographic" coordinates tangent to the horizons and $(t)$, viewed as an analog to the geological age of the terrains, is approximately orthogonal to the horizons.

These grids are suited to the property-modelling geostatistical algorithms but their topological regularity induces errors or approximations in complex fault networks or folded environments. The GeoChron model corrects these drawbacks by clearly segragating the geometry of the domain of study (modelled by an unstructured tetrahedralised mesh), the link between this geometry and the geometry of the layers at the time of deposition (thanks to a 3D parametric function $(u, v, t)$) and the property model (computed in a regular fine-scaled grid).

After exposing the mathematical framework of this model which emphasises the similarity with time stratigraphic (or Wheeler) diagrams used in sedimentology, we show two practical ways of building such a parameterisation and their implementation in the GOCAD geomodelling software. Then we show how the $(t)$ component of the parametric function can be used to automatically compute a geometric estimate of the throw vector in any point of a fault surface. Finally, we present some applications concerning petrophysical property modelling, deformation estimation or seismic data integration.


---


**Centre de Recherches Pétrographiques et Géochimiques**
Laboratoire d'Infographie et d'Analyse de Données
Rue du Doyen Marcel Roubault - 54500 Vandœuvre