



AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

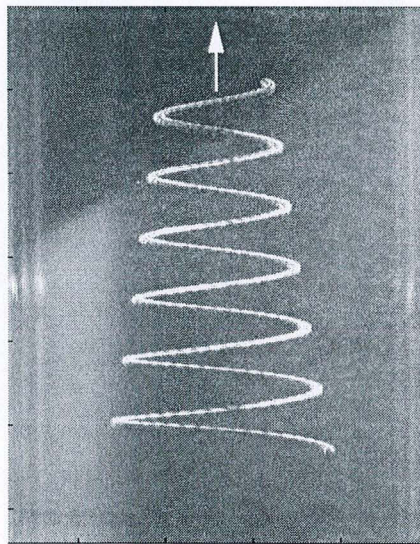
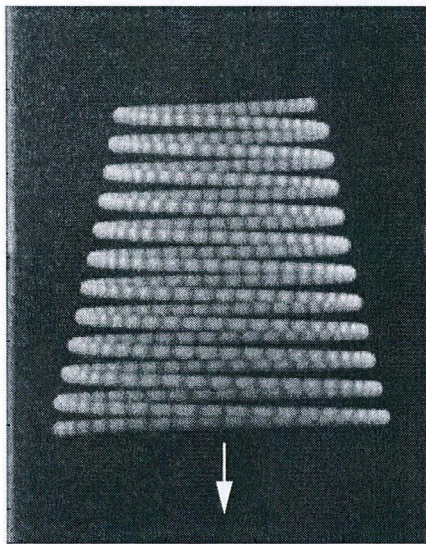
http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

(M) 2005 CANDELIER, F.

THÈSE PRÉSENTÉE EN VUE DE L'OBTENTION DU TITRE DE DOCTEUR INPL
SPÉCIALITÉ : MÉCANIQUE ET ÉNERGÉTIQUE.

"ÉTUDE DU MOUVEMENT LIBRE D'UNE PARTICULE DANS
UN FLUIDE EN ROTATION SOLIDE À FAIBLES NOMBRES DE
REYNOLDS : MISE EN ÉVIDENCE DES FORCES
D'HISTOIRE ET D'INERTIE"



Service Commun de la Documentation
INPL
Nancy-Brabois

PAR FABIEN CANDELIER

SOUTENUE PUBLIQUEMENT LE 04 JUILLET 2005 DEVANT LA COMMISSION D'EXAMEN :

J.R. ANGILELLA	MCF	ENSEM – INPL (NANCY)	...	CO-DIRECTEUR DE THÈSE
R. GATIGNOL	PR	UNIVERSITÉ PARIS VI	...	PRÉSIDENTE
E.J. HINCH	PR	CAMBRIDGE UNIVERSITY	...	RAPPORTEUR
J. MAGNAUDET	DR CNRS	IMFT (TOULOUSE)	...	RAPPORTEUR
B. OESTERLÉ	PR	UNIVERSITÉ H. POINCARÉ (NANCY)	...	EXAMINATEUR
M. SOUHAR	PR	ENSEM – INPL (NANCY)	...	DIRECTEUR DE THÈSE

J.P. BRANCHER	PR	ENSEM – INPL (NANCY)	...	INVITÉ
---------------	----	----------------------	-----	--------

Pour reprendre une célèbre boutade : "Il n'est pas toujours facile d'être le mari de la femme d'un chercheur !" Pour sa patience et ses encouragements dans les moments de doutes, je voudrais dédier ce mémoire à Caroline et à notre petit qui viendra prochainement pour notre plus grand bonheur...

Avant-Propos

Cette thèse a été effectuée au sein du **L**aboratoire d'**É**nergétique et de **M**écanique **T**héorique et **A**ppiquée (LEMTA), sous la direction du professeur M. Souhar et la co-direction de Jean-Régis Angilella. Ce travail a été financé par une allocation de recherche du ministère de l'éducation nationale et de l'enseignement supérieur et de la recherche.

Remerciements

En tout premier lieu, je remercie le professeur M. Souhar pour m'avoir accueilli au LEMTA et pour m'avoir confié un sujet aussi riche et intéressant. Ces trois années de thèse passées sous sa direction resteront pour moi une première expérience de recherche extrêmement positive.

Aussi, je tiens à remercier chaleureusement Jean-Régis Angilella. Tout d'abord, je dois dire que dans mon parcours universitaire, j'ai eu la chance de le rencontrer en DEA, et il fait sans conteste parti des enseignants qui ont nourri mon envie de faire de la recherche... Par la suite, en évoluant à ses côtés, il m'a tant appris, en physique comme en mathématiques... sans parler de l'anglais ! Enfin, j'ai été très sensible à l'amitié qu'il m'a témoignée.

Je voudrais ensuite remercier Madame R. Gatignol, professeur à l'université de Paris VI, qui a eu la gentillesse de bien vouloir présider mon jury de thèse, Monsieur E. J. Hinch, professeur à l'université de Cambridge et Monsieur J. Magnaudet, directeur de recherche à l'IMFT, pour avoir accepté de rapporter cette thèse et de m'avoir fait part de leurs critiques vives, mais constructives et profondément justes. Enfin, je remercie Monsieur B. Oesterlé, professeur à l'ESSTIN et Monsieur J.-P. Brancher, professeur à l'ENSEM, d'avoir accepté de faire parti de mon jury de thèse.

Je remercie bien entendu l'ensemble des techniciens, ingénieurs et secrétaires du laboratoire, en particulier Jean-Pierre Boutroux, Daniel Lallement, Bruno Chenu, Frank Demeurie, Alain Delconte, Ludovic Buhler, Bernard Antoine, Catherine Denis et Dalidah Simonigh, pour leurs collaborations et pour leurs sympathies.

Enfin, et pour terminer, je remercie bien entendu l'ensemble des doctorants (ou ex-doctorants) pour les moments agréables et teintés de bonne humeur, que nous avons passés ensemble, en particulier Michel, pour sa solidarité lors des lendemains – Ô combien trop nombreux – de défaite de notre équipe favorite ! Fabien et Christel pour leurs patiences (lorsque je commence à leur parler de mes activités de recherches !) et sans oublier tous les autres, notamment Mustapha, Julien M., Ali, Julien R., Sepher, Didier C., Assad...

Fabien Candelier

Table des matières

Nomenclature	v
Introduction générale	1
1 Étude et analyse bibliographique	5
Partie 1 : inclusion solide	5
1.1 Introduction et position du problème	5
1.1.1 Equations générales	6
1.1.2 Présentation de la méthode des singularités	9
1.1.3 Hypothèses simplificatrices	10
1.2 Les écoulements rampants stationnaires	13
1.2.1 Mouvement permanent de la sphère dans un fluide au repos	13
1.2.2 Généralisation pour $\vec{V}_f^0(\vec{X})$ quelconque	15
1.2.3 La correction de Faxén	16
1.2.4 Les solutions singulières en écoulement de Stokes	17
1.2.5 Limitation des écoulements rampants stationnaires	18
1.3 Les écoulements rampants instationnaires	18
1.3.1 Mouvement instationnaire de la sphère dans un fluide au repos	18
1.3.2 Illustration de l'écoulement induit par une sphère admettant une accélération impulsionnelle dans un fluide au repos	19
1.3.3 Généralisation pour $\vec{V}_f^0(\vec{X}, t)$ quelconque	21
1.3.4 Insuffisance de la théorie des écoulement rampants	23
1.4 Effets des termes convectifs (problèmes stationnaires)	23
1.4.1 Écoulement uniforme	26
1.4.2 Écoulement simplement cisailé	26
1.4.3 Écoulement en rotation solide	28
1.5 Effets des termes convectifs (problèmes instationnaires)	30
1.5.1 Effets d'inertie sur l'expression de la force de masse ajoutée	30
1.5.2 Effets d'inertie instationnaires dans les écoulements uniformes	31
1.5.3 Effets d'inertie basés sur le nombre de Reynolds de cisaillement	33
1.6 Effets de paroi en écoulement de Stokes	33
1.6.1 Effets de paroi en conduite cylindrique	34
Partie 2 : inclusion fluide	37
1.7 Introduction et position du problème	37
1.7.1 Equations générales	38
1.7.2 Hypothèses simplificatrices	40
1.8 Écoulements rampants stationnaires	42
1.8.1 Mouvement permanent d'une inclusion fluide sphérique dans un fluide au repos	43
1.8.2 Généralisation pour $\vec{V}_f^0(\vec{X})$ quelconque	46
1.9 Écoulements rampants instationnaires	46
1.9.1 Mouvement instationnaire d'une inclusion fluide sphérique dans un fluide au repos	47
1.9.2 Généralisation pour les écoulements $\vec{V}_f^0(\vec{X}, t)$ linéaires	48

1.10	Effets des termes convectifs	49
1.10.1	Généralisation du calculs des effets d'inertie en écoulements stationnaires	50
1.11	Effets des parois sur une inclusion fluide	50
1.12	Conclusion	50
2	Présentation du dispositif expérimental	51
2.1	Introduction	51
2.2	Description générale et principe de mesure	51
2.3	Description de la visualisation	52
2.4	Propriétés physiques des fluides et particules impliqués	57
2.4.1	Huile de silicone	57
2.4.2	Les particules solides	58
2.4.3	Les bulles	58
2.4.4	Les gouttes	59
2.5	Le générateur de bulles	59
2.6	Trajectoires typiques des particules et inclusions fluides	59
2.7	Discussion sur les effets de paroi	61
2.8	Conclusion	63
3	Mouvement d'une particule solide	65
3.1	Introduction et position du problème	65
3.2	Mouvement de la particule en écoulements rampants stationnaires	68
3.3	Effets d'inertie et d'instationnarité sur le mouvement de la particule	71
3.3.1	Le premier sous problème (stationnaire)	71
3.3.2	Le second sous problème (instationnaire)	75
3.3.3	Equation de mouvement de la particule	78
3.4	La vitesse terminale de la particule	78
3.4.1	Calculs théoriques	78
3.4.2	Comparaison avec l'expérience	80
3.5	Vitesse de la particule dans le plan horizontal	84
3.5.1	Calculs théoriques	84
3.5.2	Expressions analytiques des différentes forces dans le plan horizontal	86
3.5.3	Calcul analytique des taux de migration et de rotation de la particule	89
3.5.4	Comparaison avec l'expérience.	94
3.6	Discussion	97
3.6.1	A propos de la différence des accélérations du fluide	97
3.6.2	A propos du noyau de la force d'histoire	98
3.7	Conclusion	99
4	Mouvement d'une inclusion fluide	101
4.1	Introduction et position du problème	101
4.2	Mouvement de la particule en écoulements rampants stationnaires	104
4.3	Effets d'inertie et d'instationnarité sur le mouvement de l'inclusion	107
4.3.1	Premier sous problème (stationnaire)	107
4.3.2	Second sous problème (instationnaire)	107
4.3.3	Equation de mouvement généralisée	108
4.4	Vitesse terminale d'une inclusion fluide	108
4.5	Vitesse de l'inclusion dans le plan horizontal	112
4.5.1	Calculs théoriques	112
4.5.2	Calcul analytique des taux de migrations et de rotations généralisés pour les particules solides et pour les inclusions fluides telles que $\lambda \rightarrow \infty$	114
4.5.3	Comparaison avec l'expérience	115
4.6	Taux de migration et de rotation d'une goutte de viscosité quelconque	118
4.6.1	Calcul des effets d'instationnarité à l'aide de la méthode des développements asymptotiques raccordés.	119
4.7	Conclusions	122

5	Effets d'instationnarité et effets de l'accélération de Coriolis	123
5.1	Introduction	123
5.2	Analyse de l'étude de Herron <i>et al.</i> (1975)	124
5.3	Analyse de l'étude de Gotoh (1990)	128
5.4	Illustration aux travers de l'exemple de la centrifugeuse horizontale	129
5.4.1	Discussion sur la position d'équilibre de l'inclusion	130
5.4.2	Discussion sur le mouvement de la particule avant d'atteindre sa position d'équilibre	131
5.5	Conclusion	132
6	Expression temporelle de la force de portance de Saffman (1965)	133
6.1	Introduction	133
6.2	Analyse de l'étude réalisée par Asmolov et McLaughlin	133
6.2.1	La force de portance au premier ordre	136
6.2.2	Calcul de la force de portance à l'ordre suivant	138
6.3	Test de la force de portance instationnaire	140
6.4	Recherche d'une expression plus compacte pour le noyau	141
6.5	Conclusion	142
	Conclusion générale	143
	Annexes	149
A		149
A.1	Solution de Lamb	149
A.1.1	Exemple d'application de la solution de Lamb	152
A.1.2	Proposition d'une généralisation simple du calcul de la solution de Lamb pour une goutte	153
A.2	La correction de Faxén	156
A.3	La solution de Boussinesq BBO	156
A.4	Solution de Bentwich et Miloh (1978)	158
A.5	Précisions à propos de la solution de Maxey et Riley (1983)	159
A.6	Méthode des développements asymptotiques raccordés	160
A.7	Force induite obtenue par Lovalenti et Brady (1993)	163
A.8	Description de la méthode des réflexions	163
B		165
B.1	Calculs des déformations optiques et illustration	165
B.2	Calibration du banc de déplacement	168
C		169
C.1	Simplification de la solution (3.5.11)	169
C.2	Description de la méthode numérique	170
D		173
D.1	Généralisation de la méthode de calcul des racines $\mathcal{X}_1$ et $\mathcal{X}_2$	173
D.2	Calcul de l'intégrale I	175
E		177
E.1	Calcul du champ de vitesse correspondant à notre étude	177
E.1.1	Visualisation de l'écoulement induit solution des équation de Stokes instationnaires	179
E.2	Calculs des composantes M_{11} et M_{12}	182
E.2.1	Le problème extérieur	182
	Références	187
	Publication dans <i>J. Fluid Mech.</i>	191

Nomenclature

Nombres sans dimension les plus couramment utilisés

$Re = \frac{a V_g}{\nu_f}$: nombre de Reynolds de particule

$Re_D = \frac{2 a V_g}{\nu_f}$: nombre de Reynolds de particule basé sur le diamètre de l'inclusion

$\eta = \frac{a^2 V_f^0}{\nu_f L}$: nombre de Reynolds de cisaillement

$Eo = \frac{|\rho_f - \rho'_f| g a^2}{\sigma}$: nombre d'Eötvös

$Fr = \frac{R \omega^2}{g}$: pseudo nombre de Froude

$Ta = \frac{a^2 \omega}{\nu_f}$: nombre de Reynolds de cisaillement dans le cas de la rotation solide ($Ta = \eta$)

$\mathcal{R}_\mu = \frac{3 + 2\lambda}{1 + \lambda}$: coefficient introduit pour alléger les écritures (il est fonction du rapport des viscosités)

$S = \frac{a^2 \omega}{9 \nu_f}$: pseudo nombre de Stokes

$\alpha = \frac{2 Ta}{Re^2}$: paramètre de Childress (1964)

$\gamma = \frac{m_p}{m_f}$: rapport des densités

$\lambda = \frac{\mu_f}{\mu'_f}$: rapport des viscosités dynamiques entre le fluide à l'extérieur et à l'intérieur de l'inclusion

λ_r : taux de migration radiale de la particule

λ_i : taux de rotation de la particule

Lettres romaines

a : rayon de la particule

a_i ($i = 1..8$) : constantes (chapitre 6)

$\overline{\overline{A}}$ ou A_{ij} : tenseur d'un écoulement linéaire

$\vec{A}$: potentiel vecteur (chapitre 1, annexe A.3). Vecteur défini par Lovalenti et Brady (1993) (annexe A.7)

b_2 : constante (chapitre 1 partie 2)

b_i ($i = 1..8$) : constantes (chapitre 6)

$\mathcal{B}(\alpha)$: fonction calculée par Childress (1964) (chapitre 1, 3 et 4)

C_m, C_{2k+1} : constantes (chapitre 6)

$\mathcal{C}(\vec{x}_s)$: ensemble de vecteurs décrivant le lieu d'une surface (chapitre 1 et annexe A.8)

d : distance d'une particule fluide par rapport à la particule

d_{Re} : longueur d'Oseen

d_η : longueur de cisaillement (longueur d'Ekman dans le cas de la rotation solide)

D_m, D_{2k+1} : constantes (chapitre 6)

$\mathcal{D}$: domaine fluide (chapitre 1)

e : épaisseur du cylindre (chapitre 2)

$\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$: vecteurs de la base cartésienne

$\vec{e}_R, \vec{e}_\Theta$: vecteurs de la base cylindrique

$\vec{e}_{R_p}, \vec{e}_{\Theta_p}$: vecteurs de la base cylindrique pointant sur la particule

$\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\phi$: vecteurs de la base sphérique

$\vec{F} = \vec{F}^0 + \vec{F}^1$: force exercée par le fluide sur la particule

$\vec{F}^0$: force exercée par l'écoulement non perturbé sur la particule

$\vec{F}^1$: force exercée par l'écoulement induit sur la particule

$\vec{F}_d$ et $\mathcal{F}_d$: force de traînée et force complexe associée (chapitre 3)

$\vec{F}_h$ et $\mathcal{F}_h$: force d'histoire et force complexe associée (chapitre 3)

$\vec{F}_{ma}$ et $\mathcal{F}_{ma}$: force de masse ajoutée et force complexe associée (chapitre 3)

$\vec{F}_p$ et $\mathcal{F}_p$: gradient de pression de l'écoulement non perturbé et force complexe associée (chapitre 3)

$\mathcal{F}(\)$ et $\mathcal{F}^{-1}(\)$: transformée et transformée inverse de Fourier (chapitre 6)

$\vec{g}$: accélération de la pesanteur

$\overline{\overline{G}}$ ou G_{ij} : tenseur de Green (chapitre 1 et annexe A.6)

G : coefficient de cisaillement dans l'étude de Asmolov et McLaughlin (1999) (chapitre 6)

$\vec{h}$: densité volumique d'effort (chapitre 1)

$H(t)$: fonction d'Heaviside

i : nombre imaginaire ($i^2 = -1$)

$\Im(\)$: partie imaginaire d'un nombre complexe

I : valeur d'une intégrale (chapitre 4)

$\overline{\overline{I}}$: tenseur identité

k : entier naturel (chapitre 6)

$K(t)$: noyau de la force d'histoire

$K_l(t)$: noyau de la force de portance instationnaire (chapitre 6)

l : dimension de la zone de test (chapitre 2)

L : longueur caractéristique de l'écoulement non perturbé (chapitre 1)

L et L' : dimension du dispositif expérimental (chapitre 2)

$\mathcal{L}(\)$: transformée de Laplace (chapitre 3 et 4)

m : entier naturel (chapitre 6)

m_p : masse de la particule

m_f : masse de fluide qui occuperait le volume de la particule

$\overline{\overline{M}}$ ou M_{ij} : tenseur de mobilité (chapitre 1)

$\overline{\overline{M}}^G, \overline{\overline{M}}^H$: tenseur de mobilité de Gotoh (1990) et d'Herron *et al.* (1975) (chapitre 1 et 5)

n : entier naturel (sauf au chapitre 6 où $n \in \mathbb{R}^+$)

$\vec{n}$: normale extérieure à la surface de la particule

o : centre du référentiel du laboratoire

p : centre de masse de la particule. Variable de Laplace (chapitre 3)

$P = P^0 + P^1$: pression de l'écoulement

P^0 : pression de l'écoulement non perturbé

P^1 : pression de l'écoulement induit

$P_4(\mathcal{X}), P_5(\mathcal{X})$ et $P_n(\mathcal{X})$: polynôme de degré 4, 5 et n .

$\mathcal{P}_n$: harmonique sphérique de la solution de Lamb (chapitre 1 et annexe A.1)

$r = |\vec{x}|$: première coordonnée sphérique

R : rayon du cylindre (chapitre 2, 3 et 4)

$\mathbb{R}$: ensemble des nombres réels

$\mathbb{R}^+$: ensemble des nombres réels positifs (chapitre 6)

- $\Re()$: partie réelle d'un nombre complexe
- R_p : distance de la particule au centre du cylindre
- $\mathcal{R}_o$: référentiel du laboratoire (centré en o)
- $\mathcal{R}_p$: référentiel de Koenig (centré en p)
- $\mathcal{R}_o^r$: référentiel en rotation (centré en o)
- $\mathcal{R}_p^r$: référentiel en rotation (centré en p)
- $\mathcal{S}_p$: surface de la particule
- t : temps (parfois le temps est normalisé)
- $\vec{U}, \vec{U}_\omega$: écoulements uniformes (chapitre 1, 4 et 6)
- $\mathcal{U}(t) = \dot{Z}(t)$: dérivée de la position complexe de la particule
- $\vec{V}_f(\vec{X}, t) = \vec{V}_f^0 + \vec{V}_f^1$: vitesse de l'écoulement dans $\mathcal{R}_o$
- $\vec{V}_f^0$: vitesse de l'écoulement non perturbé dans $\mathcal{R}_o$
- $\vec{V}_f^1$: vitesse de l'écoulement induit dans $\mathcal{R}_o$
- $\vec{V}_g(t)$: vitesse de glissement dans $\mathcal{R}_o$
- V_H : valeur de la vitesse horizontale de la particule
- $\vec{V}_p(t)$: vitesse de la particule dans $\mathcal{R}_o$
- $\mathcal{V}_p$: volume de la particule
- $\vec{V}_p^r(t)$: vitesse de la particule dans $\mathcal{R}_o^r$
- V_T : valeur de la vitesse terminale de la particule
- $\vec{w}_f(\vec{x}, t) = \vec{w}_f^0 + \vec{w}_f^1$: vitesse de l'écoulement dans $\mathcal{R}_p$
- $\vec{w}_f^0$: vitesse de l'écoulement non perturbé dans $\mathcal{R}_p$
- $\vec{w}_f^1$: vitesse de l'écoulement induit dans $\mathcal{R}_p$
- $\vec{w}_f^r(\vec{x}, t)$: vitesse de l'écoulement relatif dans $\mathcal{R}_p^r$
- $\vec{w}_f^{r0}$: vitesse de l'écoulement non perturbé relatif dans $\mathcal{R}_p^r$
- $\vec{w}_f^{r1}$: vitesse de l'écoulement induit relatif dans $\mathcal{R}_p^r$
- $\vec{x}$: position d'une particule fluide dans $\mathcal{R}_p$
- $\vec{X}$: position d'une particule fluide dans $\mathcal{R}_o$

$\vec{X}_p$: position de la particule dans $\mathcal{R}_o$

X_p : coordonnée cartésienne suivant $\vec{e}_1$ de la particule dans $\mathcal{R}_o$

$\mathcal{X} = \sqrt{p}$: racine carré de la variable de Laplace (chapitre 3 et 4)

Y_p : coordonnée cartésienne suivant $\vec{e}_2$ de la particule dans $\mathcal{R}_o$

$Z = X_p + i Y_p$: position complexe de la particule dans le plan horizontal (chapitre 3 et 4)

Z_p : coordonnée cartésienne suivant $\vec{e}_2$ de la particule dans $\mathcal{R}_o$

Lettres grecques

α : Paramètre de Childress (1964). Valeur d'un angle (chapitre 3)

α_n : constante (chapitre 6)

δ : longueur de pénétration de l'écoulement (chapitre 1, 3, 4 et 5)

$\delta(\vec{x})$: distribution de Dirac

ϵ : petit nombre égal soit à Re soit à $\sqrt{\eta}$ (annexe A.6)

ε : paramètre de Mc Laughlin (1991)

θ : deuxième coordonnée sphérique

Θ : deuxième coordonnée cylindrique

Θ_p : deuxième coordonnée de la particule dans la base cylindrique

$\dot{\Theta}_p$: vitesse angulaire de la particule (parfois cette grandeur est normalisée par ω)

μ_f : viscosité dynamique du fluide porteur

μ'_f : viscosité dynamique du fluide qui compose l'inclusion

ν_f : viscosité cinématique du fluide porteur

ν'_f : viscosité cinématique du fluide qui compose l'inclusion

ρ_f : densité du fluide porteur

ρ'_f : densité du fluide qui compose l'inclusion

σ : coefficient de tension superficielle

τ : temps (parfois normalisé)

ϕ : troisième coordonnée sphérique

Φ_n : harmonique sphérique de la solution de Lamb (chapitre 1 et annexe A.1)

χ_n : harmonique sphérique de la solution de Lamb (chapitre 1 et annexe A.1)

ψ : fonction de courant

ω : fréquence d'oscillation (chapitre 1)

ω : vitesse angulaire du cylindre (chapitre 3, 4 et 5)

Ω : fréquence d'oscillation normalisée par le coefficient de cisaillement G (chapitre 6)

$\vec{\Omega}_p$: vecteur de rotation propre de la particule

Indices

- Généralement, les grandeurs primées sont relatives au fluide qui compose l'inclusion

f : fluide

p : particule

Opérateurs mathématiques

- Par défaut, les vecteurs sont écrits en colonne

- Définitions des opérateurs utilisés :

$$\vec{\nabla} = \vec{e}_1 \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_2 \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_3 \frac{\partial}{\partial z}$$

$$\overline{\nabla} \vec{V} = \begin{pmatrix} \frac{\partial V_1}{\partial x} & \frac{\partial V_1}{\partial y} & \frac{\partial V_1}{\partial z} \\ \frac{\partial V_2}{\partial x} & \frac{\partial V_2}{\partial y} & \frac{\partial V_2}{\partial z} \\ \frac{\partial V_3}{\partial x} & \frac{\partial V_3}{\partial y} & \frac{\partial V_3}{\partial z} \end{pmatrix}$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$\vec{\Delta} \vec{V} = (\Delta V_1) \vec{e}_1 + (\Delta V_2) \vec{e}_2 + (\Delta V_3) \vec{e}_3$$

$$\frac{D \vec{V}_f}{Dt} = \frac{\partial \vec{V}_f}{\partial t} + (\vec{V}_f \cdot \vec{\nabla}) \vec{V}_f$$

$$\frac{d \vec{V}_f}{dt} = \frac{\partial \vec{V}_f}{\partial t} + (\vec{V}_p \cdot \vec{\nabla}) \vec{V}_f$$

$\wedge$: produit vectoriel

$\otimes$: produit tensoriel (exemple : $(\vec{A} \otimes \vec{B})_{ij} = A_i B_j$ pour $i, j = \{1, 2, 3\}$)

Introduction générale



L'histoire raconte qu'au troisième siècle avant Jésus Christ, un homme complètement nu a été aperçu dévalant la grande rue de Syracuse en s'écriant à tue tête "Eurêka"! C'est Archimède (285–211 av. J-C) qui vient de découvrir qu'un corps plongé dans un fluide au repos est soumis à une force d'intensité égale et de sens contraire au poids du fluide déplacé... C'est la fameuse poussée d'Archimède. Ce dernier était décidément bien en avance sur son temps et il faudra attendre des siècles et l'approfondissement des connaissances en mécanique des fluides avant de voir évoluer la recherche dans ce domaine!

En effet, pour pouvoir calculer les efforts exercés par un fluide en mouvement sur un corps quelconque, il est nécessaire de connaître, à chaque instant, à la fois le champ de pression et le champ de vitesse de l'écoulement autour de l'objet. Or ces deux grandeurs sont liées par des relations connues sous le nom d'équations de Navier-Stokes et dont la détermination date... de 1821! Nous comprenons alors pourquoi il aura fallu attendre autant de temps avant de pouvoir élargir l'étude d'Archimède aux cas des fluides en mouvement.

Toutefois, il se trouve que ces célèbres équations de Navier-Stokes sont d'une assez grande complexité pour n'admettre de solutions analytiques que dans de très rares situations. De ce fait, dans la grande majorité des problèmes rencontrés en mécanique des fluides, pour parvenir à calculer les efforts exercés par un fluide sur un corps, ces équations doivent être résolues numériquement. Il faut dire qu'à l'heure actuelle, le développement intense des méthodes de calculs numériques couplé à une augmentation continue, pour ne pas dire exponentielle, de la puissance des ordinateurs, fait que cet aspect "résolution numérique" des équations de Navier-Stokes devient de moins en moins problématique... Dans ce contexte, il devient même légitime, de la part des industriels concernés par des problèmes liés à la mécanique des fluides, de s'interroger sur le bien fondé de la recherche de solutions analytiques des équations de Navier-Stokes. En effet, bien souvent, celles-ci ne peuvent être obtenues que dans un cadre restreint de la physique, satisfaisant à différentes hypothèses plus ou moins contraignantes, et conduisant dans de nombreux cas à des résultats moins précis que ceux que procurerait une étude numérique...

En revanche, pour tenter de comprendre aux mieux les mécanismes physiques impliqués dans la détermination de la force qu'exerce un fluide sur un objet, la recherche de solutions analytiques, aussi approchées soient-elles, reste de la plus grande importance. Si de plus, le problème qui nous intéresse concerne un corps libre de se déplacer dans un domaine fluide, et que sa trajectoire n'est ni triviale, ni connue à l'avance, mais au contraire, dictée par la résultante des efforts que le fluide exerce sur ce dernier, alors la difficulté de réaliser une étude numérique s'accroît considérablement. Ainsi, lorsque qu'un fluide est parsemé d'une multitude de petites particules en mouvement libre, les frontières du domaine fluide varient continuellement dans le temps et qui plus est, de manière complexe. Pour ces raisons, l'approche numérique est, pour l'heure, inadaptée aux besoins des industriels, ni même des chercheurs, concernés par les écoulements multiphasiques dits "à phase dispersée". Dans ce domaine de la mécanique des fluides, l'approche analytique reste encore le moyen le plus simple et le plus fiable pour tenter de prédire correctement les trajectoires que vont adopter de petites particules injectées dans un fluide en

1. Je remercie l'auteur de ce dessin dont je n'ai malheureusement pas trouvé le nom!

mouvement. Aussi, les écoulements multiphasiques sont impliqués dans une multitude de situations où la détermination des trajectoires des particules s'avère être d'une grande importance. C'est le cas bien entendu dans de très nombreux procédés industriels, tels que les séparateurs de phases, pour ne citer qu'un seul exemple... mais également dans des domaines moins attendus comme en médecine, pour prédire par exemple le transport d'aérosols dans les voies respiratoires, ou encore dans des domaines liés à l'écologie pour prévoir la dispersion de polluant solide dans l'atmosphère...

Dans ce document, et afin de pouvoir approfondir l'approche analytique, nous ne considérerons que des particules sphériques, isolées les unes des autres et électriquement neutres. Aussi, nous ne considérerons ici que des fluides newtoniens, isothermes, incompressibles et non conducteurs. En d'autres termes, il ne sera donc jamais question de mouvement de particule par thermophorèse ou encore sous l'effet d'un quelconque champ électrique. Par ailleurs, la seule force extérieure qui sera prise en compte sera la force de pesanteur. Comme hypothèse supplémentaire, et en dehors du chapitre 1, nous ne considérerons que des situations physiques où les effets visqueux sont grands comparativement aux effets d'inertie et où l'écoulement induit est faiblement instationnaire (respectivement, petits nombres de Reynolds et petits nombres de Stokes).

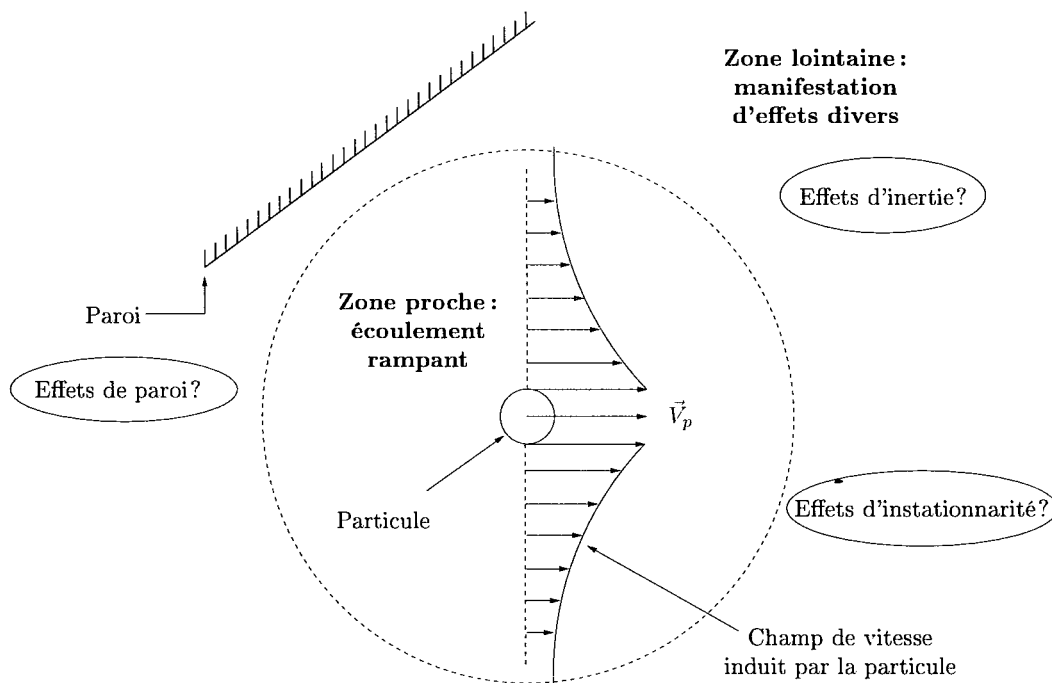


FIG. 1 – Schéma d'illustration de l'étude proposée dans ce document

Généralité sur les écoulements à petits nombres de Reynolds

Pour comprendre l'origine physique de la complexité liée à la détermination de l'expression de la force qui s'exerce sur une particule qui se déplace dans un fluide visqueux et dans le cadre des écoulements dits "à petits nombres de Reynolds", il faut préciser que dans une telle situation l'écoulement de perturbation généré par la particule occupe, une fois qu'il est établi, un volume important de l'espace. Plus précisément, et comme cela est illustré le schéma de la figure 1, nous verrons que la décroissance de ce champ de vitesse est proportionnelle au rapport a/r où a est le rayon de la particule et r la distance du point considéré par rapport au centre de masse de la particule. Or en règle générale, c'est principalement à cause de cette lente décroissance du champ de vitesse de l'écoulement de perturbation que survient la difficulté de calculer avec précision la force qui s'exerce sur la particule.

Dans la majorité des situations que nous allons décrire dans la suite de ce document, l'écoulement au voisinage de la particule sera correctement décrit par des équations de Navier-Stokes simplifiées (ou encore dégénérées) que nous appellerons équations de Stokes stationnaires (nous parlerons aussi d'écou-

lements rampants). Aussi, dans ce genre d'étude, ce modèle est fondamental car il permet de calculer l'ordre de grandeur principal de la force qui s'exerce sur la particule. Cependant, nous verrons que pour pouvoir estimer finement la force qui s'exerce sur la particule, il est nécessaire de s'intéresser également à l'écoulement "loin" de la particule. Or dans cette région de l'espace, celui-ci peut être affecté par divers effets, tels que des effets de transport par convection du fluide (appelés encore "effets d'inertie"), mais aussi des effets de paroi, ou encore, des effets d'instationnarité. Parfois même, ces effets se combinent entre eux... Bien entendu, cela accroît alors considérablement la difficulté de déterminer la force qui s'exerce sur la particule.

Dans ce travail de thèse, nous réalisons une étude théorique et expérimentale du mouvement d'une particule solide, ou d'une inclusion fluide, libre de se déplacer dans un écoulement simple, mais non uniforme, à savoir la **rotation solide**. L'objectif premier de ce travail est donc de tenter de mettre en évidence les divers effets décrits précédemment, susceptibles d'affecter notablement les trajectoires des particules. Mais plus généralement, ce travail a pour vocation de contribuer à améliorer notre compréhension des mécanismes physiques impliqués dans la détermination des efforts exercés par un fluide sur une inclusion dont le mouvement est quelconque. Aussi, ce travail s'inscrit dans la continuité de la thèse de M. Abbad (2003) qui ne traite que des écoulements uniformes.

Organisation du document

- Dans le premier chapitre de cette thèse, nous serons naturellement amenés à nous intéresser aux nombreux résultats fondamentaux, établis pour les particules solides (partie 1) et pour les inclusions fluides (partie 2), dans le cadre des hypothèses décrites précédemment. Les résultats seront présentés par ordre croissant de complexité physique des situations décrites, et seront analysés au travers de la décomposition de la vitesse en terme d'écoulement non perturbé et d'écoulement induit. Notons que la grande majorité des résultats qui seront présentés dans ce premier chapitre sont exploités dans les autres chapitres de cette thèse.
- Le chapitre 2 concernera exclusivement le dispositif expérimental mis en place pour générer un écoulement de rotation solide et pour mesurer les trajectoires adoptées par les particules. Nous en détaillerons le fonctionnement et présenterons les principes et les incertitudes de mesure.
- Le chapitre 3 sera consacré à l'étude de la sédimentation d'une particule solide dans un écoulement en rotation solide vertical. Nous verrons notamment que quelle que soit la vitesse de rotation du cylindre, le mouvement vertical et le mouvement horizontal de la particule sont découplés. Nous verrons ensuite que pour prédire correctement la vitesse terminale de l'inclusion, il est nécessaire de tenir compte des effets d'inertie agissant sur l'écoulement de fluide généré par la particule. Enfin, nous verrons que pour décrire le mouvement horizontal, il est nécessaire de tenir compte du fait que l'écoulement de fluide généré par la particule est régi par des équations instationnaires par rapport à un référentiel dont les axes sont fixes par rapports au référentiel du laboratoire.
- Le chapitre 4 sera une généralisation du chapitre 3 aux cas des inclusions fluides. Dans un premier temps, nous étudierons le mouvement d'une inclusion fluide dont le noyau de la force d'histoire est déterminé explicitement dans l'espace temporel. Dans un second temps, nous généraliserons l'étude précédente aux cas des inclusions fluides de viscosité quelconque, mais également, aux cas des inclusions contaminées par des surfactants.
- Le chapitre 5 sera consacré à une analyse plus approfondie du mouvement horizontal de la particule. En particulier, nous verrons que si les équations qui régissent l'écoulement généré par la particule sont instationnaires dans le référentiel du laboratoire, elles sont, en revanche, quasi-stationnaires dans un référentiel en rotation. De ce fait, nous analyserons la correspondance entre les effets de l'accélération de Coriolis sur le fluide, lorsque les équations sont écrites dans un référentiel tournant, et les effets d'instationnarité, lorsque les équations sont écrites dans un référentiel fixe.
- Enfin, dans le chapitre 6 nous aborderons brièvement un thème de recherche complémentaire à celui de la rotation solide, où nous nous intéresserons à l'expression de la force de portance qui s'exerce sur une particule solide dans un écoulement cisailé. En particulier, nous discuterons de l'expression temporelle de la force de portance dans le cadre des hypothèses de Saffman (1965).

En outre, pour ne pas trop alourdir la lecture du texte, la plupart des développements analytiques seront reportés dans différentes annexes. Ainsi, l'annexe A est relative au premier chapitre, l'annexe B au second et etc...

Chapitre 1

Étude et analyse bibliographique. Partie 1 : inclusion solide

Ce premier chapitre s'adresse plus particulièrement aux lecteurs non initiés, ou encore soucieux de faire le point en ce qui concerne les résultats théoriques relatifs au mouvement d'une particule à nombre de Reynolds nul ou faible. Compte tenu du nombre important de résultats, et dans un but pédagogique, ce chapitre s'avère donc être un peu long.

1.1 Introduction et position du problème

Ce premier chapitre est scindé en deux parties. Dans la première partie, nous commencerons par introduire la décomposition de la vitesse en terme d'écoulement non perturbé et d'écoulement induit dans les équations de Navier-Stokes, et nous verrons quelles sont les simplifications qui résultent du fait que les nombres de Reynolds sont supposés petits. Dans un deuxième temps, nous nous intéresserons aux principaux résultats de la littérature concernant la force qui s'exerce sur une particule solide dans le cadre de cette hypothèse. Comme nous l'avons déjà dit, les résultats seront abordés par ordre croissant de complexité physique des situations décrites. Dans la seconde partie, nous procéderons de la même manière mais pour les inclusions fluides. Notons que la majorité des résultats qui seront présentés dans ce premier chapitre seront soit utilisés directement dans les chapitres suivants, soit utiles à la compréhension des phénomènes physiques impliqués dans la détermination des efforts exercés par un fluide en mouvement sur une particule. Pour cette raison, et dans la mesure du possible, les résultats présentés seront aussi analysés.

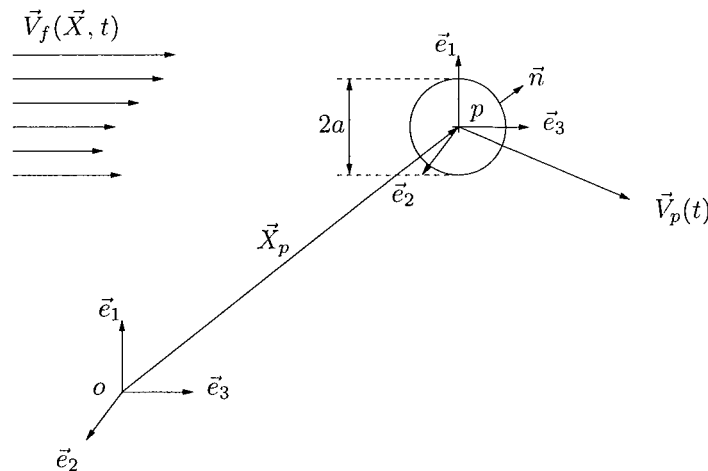


FIG. 1.1 – Schéma d'illustration de l'étude

Dans cette première partie, nous nous intéressons au mouvement d'une particule solide, sphérique, de rayon a , de densité ρ_p et dont le centre de masse est localisé par $\vec{X}_p(t)$ dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}_o: (o, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ (voir figure 1.1). Nous allons supposer que la particule se déplace à une certaine vitesse

$$\vec{V}_p(t) = \frac{d\vec{X}_p}{dt}$$

par rapport à ce même référentiel, et qu'elle admet éventuellement un mouvement de rotation propre associé alors à un vecteur de rotation instantané $\vec{\Omega}_p(t)$. Le fluide dans lequel la particule évolue est considéré newtonien, incompressible et homogène. Il a pour densité ρ_f , pour viscosité dynamique μ_f et admet un champ de vitesse *a priori* non uniforme $\vec{V}_f(\vec{X}, t)$. Dans la suite de ce document, et sauf précisions contraires, l'indice p sera relatif à la particule solide et l'indice f au fluide. Aussi, les vecteurs représentés en lettres capitales sont exprimés dans le référentiel $\mathcal{R}_o$.

1.1.1 Equations générales

Soit $\vec{F}$ la force que le fluide exerce sur la particule, et soit $\vec{g}$ l'accélération de la pesanteur. Selon le principe fondamental de la dynamique, l'équation de mouvement de la particule est donnée par :

$$m_p \frac{d\vec{V}_p}{dt} = \vec{F} + m_p \vec{g}.$$

La force que le fluide exerce sur une particule de surface $\mathcal{S}_p$ est donnée par la relation

$$\vec{F} = \int_{\mathcal{S}_p} \bar{\bar{\Sigma}} \cdot \vec{n} \, d\mathcal{S}_p,$$

où $\bar{\bar{\Sigma}}$ est le tenseur des contraintes et $\vec{n}$ la normale extérieure à la surface. Pour un fluide réel, ce tenseur des contraintes s'écrit :

$$\bar{\bar{\Sigma}} = -P \bar{\bar{I}} + \bar{\bar{T}},$$

où $\bar{\bar{I}}$ est le tenseur identité, et $\bar{\bar{T}}$ le tenseur des contraintes visqueuses. Ce dernier est lié à la cinématique du fluide autour de l'obstacle, par une loi de comportement. Dans notre étude, le fluide étant incompressible et newtonien, le tenseur des contraintes visqueuses s'écrit

$$\bar{\bar{T}} = \mu_f \left[\bar{\bar{\nabla}} \vec{V}_f + (\bar{\bar{\nabla}} \vec{V}_f)^T \right].$$

Pour déterminer l'expression de la force $\vec{F}$, il faut alors connaître l'expression du champ de vitesse de l'écoulement fluide ainsi que la répartition du champ de pression. Nous sommes donc amenés à écrire les équations qui régissent l'écoulement. Puisque le fluide est incompressible et homogène, nous avons :

$$\bar{\bar{\nabla}} \cdot \vec{V}_f = 0, \quad (1.1.1)$$

et de plus, $\vec{V}_f$ doit satisfaire les équations de Navier-Stokes :

$$\rho_f \frac{\partial \vec{V}_f}{\partial t} + \rho_f (\vec{V}_f \cdot \bar{\bar{\nabla}}) \vec{V}_f = \rho_f \vec{g} - \bar{\bar{\nabla}} P + \mu_f \bar{\bar{\Delta}} \vec{V}_f. \quad (1.1.2)$$

A ces deux dernières équations sont associées des conditions initiales et des conditions limites. Lorsque la particule considérée est solide, le fluide satisfait une condition d'adhérence sur la surface de la sphère. De plus, nous allons supposer que la taille de la particule est petite devant celle du domaine fluide dans lequel elle évolue, de sorte que loin de la sphère, l'écoulement retrouve la forme qu'il aurait en cas d'absence de cette dernière. Cet écoulement, appelé dans la suite écoulement "non perturbé", sera écrit $\vec{V}_f^0$. Dans ce contexte, les conditions limites et initiales s'écrivent donc

$$\vec{V}_f \rightarrow \vec{V}_f^0(\vec{X}, t) \quad \text{lorsque} \quad |\vec{X} - \vec{X}_p| \rightarrow \infty, \quad (1.1.3)$$

$$\vec{V}_f = \vec{V}_p(t) + \vec{\Omega}_p(t) \wedge (\vec{X} - \vec{X}_p) \quad \text{lorsque} \quad |\vec{X} - \vec{X}_p| = a, \quad (1.1.4)$$

$$\vec{V}_f \quad \text{donnée à } t = 0. \quad (1.1.5)$$

Dans ce genre d'étude, il est utile d'exprimer les équations dans un référentiel $\mathcal{R}_p : (p, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ en translation par rapport au référentiel du laboratoire, dont le centre coïncide avec celui de la particule. Notons que nous appellerons parfois ce dernier : "référentiel de Koenig". Dans la suite et sauf précisions contraires, les vecteurs représentés par des lettres minuscules seront exprimés dans ce référentiel. Pour obtenir l'expression des équations de Navier-Stokes dans $\mathcal{R}_p$, il faut alors procéder au changement de variables suivant

$$\vec{x} = \vec{X} - \vec{X}_p(t) \quad \text{et} \quad \vec{w}_f(\vec{x}, t) = \vec{V}_f(\vec{X}, t) - \vec{V}_p(t) .$$

Précisons tout de suite que puisque le mouvement du référentiel $\mathcal{R}_p$ par rapport à $\mathcal{R}_o$ n'est qu'une simple translation, les gradients restent, quant à eux, inchangés et nous aurons de plus (en notation indicielle)

$$\frac{\partial \vec{V}_f}{\partial X_i} = \frac{\partial \vec{w}_f}{\partial x_i} , \quad i = \{1, 2, 3\} .$$

Il s'ensuit que

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{w}_f = 0 , \quad (1.1.6)$$

et les équations de Navier-Stokes deviennent

$$\rho_f \frac{\partial \vec{w}_f}{\partial t} + \rho_f (\vec{w}_f \cdot \vec{\nabla}) \vec{w}_f = \rho_f \left(\vec{g} - \frac{d\vec{V}_p}{dt} \right) - \vec{\nabla} P + \mu_f \Delta \vec{w}_f , \quad (1.1.7)$$

où apparaît naturellement un terme d'accélération d'entraînement. En ce qui concerne les conditions limites et initiales, elles sont maintenant données par

$$\vec{w}_f \rightarrow \vec{w}_f^0(\vec{x}, t) = \vec{V}_f^0(\vec{X}, t) - \vec{V}_p(t) \quad \text{lorsque} \quad |\vec{x}| \rightarrow \infty \quad (1.1.8)$$

$$\vec{w}_f = \vec{\Omega}_p(t) \wedge \vec{x} \quad \text{lorsque} \quad |\vec{x}| = a , \quad (1.1.9)$$

$$\vec{w}_f \text{ donnée à } t = 0 . \quad (1.1.10)$$

A présent, et communément à ce qui est habituellement fait (voir par exemple Maxey et Riley, 1983), écrivons que la vitesse du fluide peut arbitrairement être décomposée de la manière suivante :

$$\vec{w}_f = \vec{w}_f^0 + \vec{w}_f^1 , \quad (1.1.11)$$

où $\vec{w}_f^0$ est vitesse de l'écoulement non perturbé et $\vec{w}_f^1$ l'écoulement induit par la particule. Puisque le tenseur des contraintes est lié linéairement à la vitesse, il s'écrit alors :

$$\vec{\Sigma} = \vec{\Sigma}^0 + \vec{\Sigma}^1 ,$$

et ainsi, l'expression de la force exercée sur la particule est donnée par

$$\vec{F} = \int_{S_p} \vec{\Sigma}^0 \cdot \vec{n} \, dS_p + \int_{S_p} \vec{\Sigma}^1 \cdot \vec{n} \, dS_p .$$

En vertu du théorème flux-divergence d'Ostrogradski, nous pouvons également écrire

$$\vec{F} = \int_{V_p} \vec{\nabla} \cdot \vec{\Sigma}^0 \, dV_p + \int_{S_p} \vec{\Sigma}^1 \cdot \vec{n} \, dS_p , \quad (1.1.12)$$

où V_p est alors le volume de la particule, et dans la suite, nous distinguerons explicitement ces deux intégrales en écrivant

$$\vec{F}^0 = \int_{V_p} \vec{\nabla} \cdot \vec{\Sigma}^0 \, dV_p , \quad \text{et} \quad \vec{F}^1 = \int_{S_p} \vec{\Sigma}^1 \cdot \vec{n} \, dS_p .$$

Nous appellerons $\vec{F}^0$: "la force exercée par l'écoulement non perturbé" sur la particule, et $\vec{F}^1$: "la force exercée par l'écoulement induit". Notons tout de suite que puisque par définition,

$$\vec{w}_f^0(\vec{x}, t) = \vec{V}_f^0(\vec{X}, t) - \vec{V}_p(t) ,$$

alors nous avons

$$\vec{w}_f^1(\vec{x}, t) = \vec{V}_f^1(\vec{X}, t)$$

et il s'ensuit que la détermination de $\vec{F}^1$ sera indépendante du référentiel choisi. En effet, comme nous allons le voir juste après, l'accélération d'entraînement liée au fait que le référentiel de Koenig n'est pas galiléen sera implicitement contenue dans $\vec{F}^0$.

Nous nous intéressons maintenant à la force exercée par l'écoulement non perturbé. Par définition, $\vec{V}_f^0(\vec{X}, t)$ satisfait les équations de Navier-Stokes et il s'ensuit que

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{w}_f^0 = 0, \quad (1.1.13)$$

et

$$\rho_f \left(\frac{\partial \vec{w}_f^0}{\partial t} + (\vec{w}_f^0 \cdot \vec{\nabla}) \vec{w}_f^0 \right) - \rho_f \left(\vec{g} - \frac{d\vec{V}_p}{dt} \right) = \vec{\nabla} \cdot \vec{\Sigma}^0. \quad (1.1.14)$$

De ce fait, il en ressort que :

$$\vec{F}^0 = \int_{\mathcal{V}_p} \rho_f \left(\frac{\partial \vec{w}_f^0}{\partial t} + (\vec{w}_f^0 \cdot \vec{\nabla}) \vec{w}_f^0 + \frac{d\vec{V}_p}{dt} \right) d\mathcal{V}_p - \int_{\mathcal{V}_p} \rho_f \vec{g} d\mathcal{V}_p,$$

ou encore, en réécrivant l'écoulement non perturbé dans $\mathcal{R}_0$,

$$\vec{F}^0 = \int_{\mathcal{V}_p} \rho_f \frac{D\vec{V}_f^0}{Dt} d\mathcal{V}_p - m_f \vec{g}. \quad (1.1.15)$$

En règle générale, le calcul analytique de $\vec{F}^0$ ne pose pas trop de problème dans la mesure où souvent, le champ de vitesse $\vec{V}_f^0$ est connu. Aussi, le deuxième terme de l'équation (1.1.15) correspond tout simplement à la poussée d'Archimède. Compte tenu de son expression analytique, il est d'usage de regrouper la poussée d'Archimède avec le poids de la particule, faisant apparaître une force colinéaire à l'accélération de la pesanteur, donnée par $(m_p - m_f) \vec{g}$ et appelée alors force de "flottabilité".

Pour l'instant, et sans avoir fait aucune hypothèse, nous voyons que l'équation de mouvement d'une particule peut s'écrire :

$$m_p \frac{d\vec{V}_p}{dt} = \int_{\mathcal{V}_p} \rho_f \frac{D\vec{V}_f^0}{Dt} d\mathcal{V}_p + (m_p - m_f) \vec{g} + \vec{F}^1,$$

mais il va de soi que dans cette approche, la difficulté majeure réside dans la détermination de la force induite $\vec{F}^1$, et par conséquent de $\vec{w}_f^1$. C'est pourquoi, nous allons maintenant écrire les équations qui régissent cet écoulement.

En introduisant la décomposition $\vec{w}_f = \vec{w}_f^0 + \vec{w}_f^1$ dans l'équation (1.1.7) et après simplification, du fait que l'écoulement non perturbé satisfait les équations de Navier-Stokes – voir les équations (1.1.13) et (1.1.14) – l'écoulement induit est régi par le système d'équations (S1) :

$$\begin{aligned} & \vec{\nabla} \cdot \vec{w}_f^1 = 0, \quad (1.1.16) \\ \text{et} & \\ (S1) \quad & \rho_f \frac{\partial \vec{w}_f^1}{\partial t} + \rho_f (\vec{w}_f^0 \cdot \vec{\nabla}) \vec{w}_f^1 + \rho_f (\vec{w}_f^1 \cdot \vec{\nabla}) \vec{w}_f^1 + \rho_f (\vec{w}_f^1 \cdot \vec{\nabla}) \vec{w}_f^0 = -\vec{\nabla} P^1 + \mu_f \vec{\Delta} \vec{w}_f^1. \quad (1.1.17) \\ & \text{Les conditions limites et initiales vérifiées par } \vec{w}_f^1 \text{ s'écrivent} \\ & \vec{w}_f^1 \rightarrow \vec{0} \text{ lorsque } |\vec{x}| \rightarrow \infty \quad (1.1.18) \\ & \vec{w}_f^1 = \vec{V}_p - \vec{V}_f^0 + \vec{\Omega}_p(t) \wedge \vec{x} \text{ lorsque } |\vec{x}| = a \quad (1.1.19) \\ & \vec{w}_f^1 \text{ donnée à } t = 0 \quad (1.1.20) \end{aligned}$$

Notons alors que pour obtenir avec *exactitude* l'expression de la force qui s'exerce sur la particule, il faut obtenir la solution du système (S1). Bien entendu, ce problème n'est pas *a priori* plus simple à résoudre que le problème avant la décomposition de la vitesse... Toutefois, cette approche permet d'une part, de mettre en évidence la force de l'écoulement non perturbé et d'autre part, d'introduire une condition d'amortissement à l'infini de l'écoulement induit, condition qui, nous allons le voir par la suite, s'avère fortement utile dans la résolution de nombreux problèmes.

1.1.2 Présentation de la méthode des singularités

Dans la section précédente, nous avons vu que pour obtenir l'expression exacte du champ de vitesse $\vec{w}_f^1$, il faut, en toute rigueur, résoudre le système d'équations (S1). D'ailleurs, dans un cas complètement général, seule la résolution de (S1) permet de connaître l'expression de la contrainte exercée par le fluide sur la particule. Mais il arrive parfois qu'en présence d'une particule dans le domaine fluide, le problème soit abordé différemment, ou plus précisément, selon une approche qui consiste à considérer la particule comme un élément ponctuel.

Notons que si le fluide exerce sur la particule une force et un couple, alors, selon le principe d'action et de réaction, la particule exerce, en retour sur le fluide, une force et un couple opposés. Or si la particule est supposée ponctuelle, nous allons voir que l'action exercée par la particule sur le fluide peut s'écrire sous la forme d'une série de forces et de couples associés à la distribution de Dirac. Pour cela, considérons une particule ponctuelle qui évolue dans un domaine fluide $\mathcal{D}$, de volume $\mathcal{V}$ et de frontière $\mathcal{S}$. Dans ce domaine, en plus des forces de volume et de surface, il convient de prendre en compte les efforts ponctuels exercés par la particule sur le fluide. En faisant alors un bilan de quantité de mouvement, et après utilisation du théorème flux-divergence d'Ostrogradski, il en ressort que

$$\int_{\mathcal{V}} \rho_f \frac{D\vec{V}_f}{Dt} d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}} \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{\overline{\overline{S}}} + \rho_f \vec{g} + \vec{h} \right) d\mathcal{V} \quad (1.1.21)$$

où $\vec{h}$ est alors une densité volumique d'efforts (N/m³) dus à la présence de la particule dans l'écoulement. Cette densité volumique d'efforts peut être définie (en nous inspirant de Saffman, 1965) par une somme infinie

$$\vec{h} = \vec{F}_1 \delta(\vec{X} - \vec{X}_p) + \vec{\overline{\overline{F}}}_2 \cdot \vec{\nabla} \delta(\vec{X} - \vec{X}_p) + \vec{\overline{\overline{\overline{F}}}}_3 : \vec{\nabla}^2 \delta(\vec{X} - \vec{X}_p) + \dots$$

où $\delta(\cdot)$ correspond alors à la distribution de Dirac. Pour simplifier les écritures, introduisons le vecteur $\vec{x} = \vec{X} - \vec{X}_p$, que nous avons déjà défini précédemment. Chaque composante F_i du développement de $\vec{h}$ est alors définie de manière unique, en exploitant les propriétés classiques de dérivation de la distribution de Dirac, à savoir

$$\int_{\mathcal{V}} \vec{h} d\mathcal{V} = \vec{F}_1, \quad \text{puis} \quad \int_{\mathcal{V}} \vec{h} \otimes \vec{x} d\mathcal{V} = -\vec{\overline{\overline{F}}}_2,$$

etc... Avec la relation au rang n :

$$\int_{\mathcal{V}} \vec{h} \otimes \underbrace{\vec{x} \otimes \dots \otimes \vec{x}}_{n \text{ fois}} d\mathcal{V} = (-1)^n \vec{\overline{\overline{\overline{\overline{F}}}}}_{n+1},$$

où la composante $\vec{\overline{\overline{\overline{\overline{F}}}}}_{n+1}$ est alors un tenseur d'ordre $n+1$. Ainsi, en se plaçant dans le référentiel $\mathcal{R}_p$ et en introduisant la décomposition de la vitesse $\vec{w}_f = \vec{w}_f^0 + \vec{w}_f^1$ dans l'équation (1.1.21), il apparaît que l'écoulement induit est également régi par cet autre système d'équations (S1)' :

$$\begin{aligned}
 & \vec{\nabla} \cdot \vec{w}_f^1 = 0, \quad (1.1.22) \\
 \text{et} \\
 & \rho_f \frac{\partial \vec{w}_f^1}{\partial t} + \rho_f (\vec{w}_f^0 \cdot \vec{\nabla}) \vec{w}_f^1 + \rho_f (\vec{w}_f^1 \cdot \vec{\nabla}) \vec{w}_f^1 + \rho_f (\vec{w}_f^1 \cdot \vec{\nabla}) \vec{w}_f^0 - \vec{\nabla} \cdot \vec{\bar{\Sigma}}^1 = \vec{h}. \quad (1.1.23) \\
 \text{(S1)', Avec} \\
 & \vec{w}_f^1 \rightarrow \vec{0} \text{ lorsque } |\vec{x}| \rightarrow \infty \quad (1.1.24) \\
 & \vec{w}_f^1 \text{ donnée à } t = 0, \quad (1.1.25) \\
 \text{et le terme source :} \\
 & \vec{h} = \vec{F}_1 \delta(\vec{x}) + \vec{\bar{F}}_2 \cdot \vec{\nabla} \delta(\vec{x}) + \vec{\bar{\bar{F}}}_3 : \vec{\nabla}^2 \delta(\vec{x}) + \dots \quad (1.1.26)
 \end{aligned}$$

Avant de poursuivre, nous pouvons faire plusieurs remarques concernant cette approche. Tout d'abord, et mis à part le fait que la particule ait été supposée ponctuelle, le système d'équations (S1)' est ici complètement général. De plus, cette approche sera bien sûr valable quelle que soit la nature de la particule, c'est à dire, qu'elle soit solide ou fluide. Cependant, nous voyons aussi que pour déterminer les composantes du développement du terme source $\vec{h}$, il faut *a priori* connaître l'expression de $\vec{w}_f^1$. Cette approche ne permet donc pas de résoudre un problème général, mais elle s'avère très utile lorsque justement les composantes des termes source sont supposées connues (en règle générale, parce qu'on se les donne), sans pour autant connaître l'expression de $\vec{w}_f^1$. Dans ce cas là, il est possible d'obtenir l'expression du champ de vitesse à l'aide du système (S1)' et cela, sans avoir à traiter la condition limite sur la sphère ce qui est souvent très pratique. Dans la suite, nous aurons régulièrement recours à ce genre d'approche.

1.1.3 Hypothèses simplificatrices

Pour l'instant, les deux systèmes d'équations de base de l'écoulement induit, à savoir (S1) et (S1)', sont généraux et valables quel que soit le régime d'écoulement. Mais l'inconvénient est que dans la plupart des problèmes considérés, ces deux systèmes sont trop complexes pour pouvoir être résolus analytiquement. De ce fait, il s'avère souvent nécessaire de faire certaines hypothèses simplificatrices qui permettent alors de négliger différents termes de l'équation (1.1.17) et (1.1.23). En contrepartie, les résultats obtenus sont alors inexacts dans l'absolu. C'est la raison pour laquelle la validité de l'expression de la force exercée par le fluide sur la particule dépendra du respect des conditions impliquées par ces hypothèses simplificatrices. Dans la suite, nous nous attacherons à décrire les différentes situations en termes d'écoulement non perturbé et d'écoulement induit. Ces différentes situations nous permettront de calculer analytiquement les valeurs de $\vec{F}^0$ et de $\vec{F}^1$ et donc, d'obtenir l'équation de mouvement de la particule.

A propos de l'écoulement non perturbé

Nous nous intéressons maintenant aux simplifications qu'il est d'usage de faire à propos de la force $\vec{F}^0$ donnée par :

$$\vec{F}^0 = \int_{V_p} \rho_f \frac{D\vec{V}_f^0}{Dt} dV_p - m_f \vec{g}.$$

La vitesse $\vec{V}_f^0$ étant supposée connue, la détermination de cette force peut se faire en calculant directement l'intégrale impliquée dans l'expression de cette force. Ainsi, il se trouve que pour la famille que constituent les écoulements non uniformes mais linéaires¹, c'est à dire de la forme

$$\vec{V}_f^0 = \vec{\bar{A}} \cdot \vec{X}$$

1. C'est le cas par exemple de la rotation solide, du cisaillement pur ou encore de l'écoulement au voisinage d'un point d'arrêt...

où $\bar{\bar{A}}$ est un tenseur dont les composantes dépendent éventuellement explicitement du temps, nous avons *exactement*

$$\int_{\mathcal{V}_p} \rho_f \frac{D\vec{V}_f^0}{Dt} d\mathcal{V}_p = m_f \frac{D\vec{V}_f^0}{Dt} \Big|_{\vec{X}_p}.$$

Précisons que pour cette famille d'écoulement, $\bar{\Delta}\vec{V}_f^0 = \vec{0}$, et donc seul le gradient de pression contribue à l'expression de la force de l'écoulement non perturbé.

Dans un cas plus général (voir Maxey et Riley, 1983), il est toujours possible d'écrire que dans le volume de la particule :

$$\vec{V}_f^0(\vec{X}) = \vec{V}_f^0(\vec{X}_p + \vec{x}) \quad \text{où} \quad |\vec{x}| \leq a.$$

Si de plus, l'écoulement non perturbé est tel que

$$|\bar{\bar{\nabla}}\vec{V}_f^0| = O\left(\frac{|\vec{V}_f^0(\vec{X}_p)|}{L}\right),$$

où L est alors l'échelle de longueur caractéristique de variation de l'écoulement non perturbé, et si $a \ll L$, alors dans le volume de la particule, l'écoulement non perturbé peut être exprimé sous une forme approchée (basée sur un développement de Taylor) :

$$\vec{V}_f^0(\vec{X}) = \vec{V}_f^0(\vec{X}_p) + \bar{\bar{\nabla}}\vec{V}_f^0 \Big|_{\vec{X}_p} \cdot \vec{x} + O\left(\frac{a^2}{L^2}\right).$$

A l'aide de ce développement, il est ensuite possible d'établir que

$$\int_{\mathcal{V}_p} \rho_f \frac{D\vec{V}_f^0}{Dt} d\mathcal{V}_p = m_f \frac{D\vec{V}_f^0}{Dt} \Big|_{\vec{X}_p} + O\left(\frac{a^3}{L^3}\right),$$

sachant que la contribution des termes en $O(a^3/L^3)$ est alors négligeable. Physiquement, le fait de considérer que $a \ll L$ revient tout simplement à dire que la particule perçoit l'écoulement non perturbé comme la superposition d'un écoulement uniforme et d'un écoulement linéaire donnés respectivement par le premier et le second terme du développement de Taylor. Aussi, en écrivant que la force $\vec{F}^0$ est donnée par

$$\vec{F}^0 \simeq m_f \frac{D\vec{V}_f^0}{Dt} - m_f \vec{g},$$

cela revient à considérer que le terme $m_f D\vec{V}_f^0/Dt$ ne provient que du gradient de pression de l'écoulement non perturbé. C'est la raison pour laquelle ce terme est souvent rencontré dans la littérature sous l'appellation de "gradient de pression de l'écoulement non perturbé".

A propos des équations qui régissent l'écoulement induit

A présent, nous allons voir les simplifications qui concernent l'écoulement induit. Pour cela, nous allons écrire l'ordre de grandeur des différents termes impliqués dans l'équation (1.1.17). Afin d'alléger les écritures dans cette section, nous écrirons

$$V_f^0 = |\vec{V}_f^0(\vec{X}_p, t)|$$

et nous introduirons la vitesse de glissement de la particule par rapport au fluide, c'est à dire

$$\vec{V}_g(t) = \vec{V}_f^0(\vec{X}_p, t) - \vec{V}_p(t)$$

et nous noterons

$$V_g = |\vec{V}_g|.$$



Notons que dans la littérature, la vitesse de glissement est très souvent définie comme la différence entre la vitesse de la particule et la vitesse du fluide. Ce choix est bien entendu arbitraire, et ici comme dans la suite de ce document, nous avons posé le contraire.

A présent, remarquons que si L est l'échelle de longueur caractéristique des variations de $\vec{V}_f^0$, elle l'est aussi pour l'écoulement non perturbé exprimé dans le référentiel de la particule, et nous avons :

$$|\vec{\nabla} \vec{w}_f^0| = O\left(\frac{V_f^0}{L}\right).$$

Au voisinage de la particule, c'est à dire en choisissant de prendre comme échelle caractéristique de longueur le rayon de la particule a , et du fait de la condition limite (1.1.19) vérifiée par l'écoulement induit sur la particule, il apparaît, si l'on néglige la vitesse de rotation propre de la particule, que

$$|\vec{\nabla} \vec{w}_f^1| = O\left(\frac{V_g}{a}\right), \quad \text{et} \quad |\vec{\Delta} \vec{w}_f^1| = O\left(\frac{V_g}{a^2}\right).$$

De ce fait, au voisinage de la particule, le rapport des différents termes convectifs du membre de gauche de l'équation (1.1.17) avec le terme visqueux du membre de droite nous amène à écrire que

$$\left| \frac{\rho_f (\vec{w}_f^0 \cdot \vec{\nabla}) \vec{w}_f^1}{\mu_f \vec{\Delta} \vec{w}_f^1} \right| \sim \left| \frac{\rho_f (\vec{w}_f^1 \cdot \vec{\nabla}) \vec{w}_f^1}{\mu_f \vec{\Delta} \vec{w}_f^1} \right| = O\left(\frac{V_g a}{\nu_f}\right),$$

et

$$\left| \frac{\rho_f (\vec{w}_f^1 \cdot \vec{\nabla}) \vec{w}_f^0}{\mu_f \vec{\Delta} \vec{w}_f^1} \right| = O\left(\frac{a^2 V_f^0}{\nu_f L}\right),$$

où $\nu_f = \mu_f / \rho_f$ est la viscosité cinématique du fluide. Il apparaît alors deux groupements sans dimension, que nous écrirons dans la suite

$$Re = \frac{V_g a}{\nu_f} \quad \text{et} \quad \eta = \frac{a^2 V_f^0}{\nu_f L}.$$

Le premier est le nombre de Reynolds de particule : il traduit le rapport des termes convectifs basés sur la vitesse de glissement de la particule sur les termes visqueux. Quant au second, il est rencontré dans la littérature sous différentes appellations. En fait, ce terme n'apparaît que parce le gradient de vitesse de l'écoulement non perturbé n'est pas nul. Ce nombre traduit donc le rapport des termes convectifs dus à la "non uniformité" de l'écoulement sur les termes visqueux. Pour cette raison, il est fréquemment rencontré sous l'appellation de nombre de Reynolds de cisaillement.



Dans la suite de ce document nous considérerons que le nombre de Reynolds de particule et le nombre de Reynolds de cisaillement sont tous les deux petits devant l'unité. Cela implique qu'au voisinage de la particule le mécanisme principal du transport de la vitesse induite sera la diffusion visqueuse.

Une première approche employée pour déterminer $\vec{w}_f^1$ consistera alors à dire que puisque l'écoulement induit doit tendre vers 0 loin de la particule, alors la majeure partie de sa dynamique doit être déterminée dans la région proche de la particule, précisément là où les termes convectifs sont négligeables. Autrement dit, même si loin de la particule les termes convectifs deviennent d'un ordre de grandeur comparable, voire supérieur à celui des termes visqueux, leur contribution sur la dynamique de l'écoulement induit ne pourra apporter que des modifications mineures à l'expression de la force exercée par le fluide sur la particule. Enfin, pour être complet, notons qu'au voisinage de la particule, l'ordre de grandeur du terme instationnaire de l'équation (1.1.17) est généralement estimé en fonction de l'instationnarité de la condition limite vérifiée par l'écoulement induit, c'est à dire en écrivant

$$\frac{\partial \vec{w}_f^1}{\partial t} = O\left(\frac{\partial}{\partial t} \left(\vec{V}_g(t) + \vec{\Omega}_p(t) \wedge \vec{x} \right)\right), \quad (1.1.27)$$

et comme nous le verrons dans la suite, ce terme ne sera pas systématiquement négligeable.

En s'appuyant sur l'ensemble des hypothèses qui viennent d'être énoncées, l'équation (1.1.17) de (S1) qui régit l'écoulement induit peut dans un premier temps se réduire à

$$\rho_f \frac{\partial \vec{w}_f^1}{\partial t} = -\vec{\nabla} P^1 + \mu_f \vec{\Delta} \vec{w}_f^1. \quad (1.1.28)$$

Les écoulements régis par l'équation (1.1.28) sont appelés "écoulements de Stokes" ou encore "écoulements rampants" et de nombreux ouvrages sont consacrés à leur étude, comme par exemple Kim et Karila (1991), ou également Happel et Brenner (1983)...

Dans la suite, nous détaillerons les principaux résultats obtenus dans le cadre de cette hypothèse et qui, il est important de le souligner, sont à la base de la grande majorité des modèles d'équations de mouvement utilisées à l'heure actuelle pour prédire les trajectoires de fines particules dans un écoulement. Ainsi, nous verrons premièrement quels sont les résultats obtenus dans le cadre des écoulements de Stokes stationnaires, puis instationnaires. Ensuite, nous nous intéresserons aux corrections éventuelles pouvant émaner des termes convectifs lorsque ceux ci ne sont plus négligeables (comparativement aux termes visqueux) loin de la particule. Enfin, nous terminerons cette première partie de l'analyse bibliographique consacrée aux particules solides en discutant aussi des effets que peuvent avoir d'autres paramètres tels que le confinement du domaine fluide (i.e. la proximité de paroi) sur la la force exercée par l'écoulement induit sur la particule.

1.2 Les écoulements rampants stationnaires

Lorsque les termes convectifs sont complètement négligés de l'équation (1.1.17), alors les seuls mécanismes physiques impliqués dans la détermination de la vitesse induite sont la diffusion visqueuse et les forces de pression. Si de plus, la particule a un mouvement propre tel que ni sa vitesse de glissement, ni sa vitesse de rotation propre ne changent dans le temps, alors les conditions limites (1.1.18) et (1.1.19) associées à l'équation (1.1.28) ne dépendent pas du temps, comme le suggère l'équation (1.1.27) et l'écoulement induit finit par adopter une forme stationnaire :

$$\frac{\partial \vec{w}_f^1}{\partial t} = 0, \quad (1.2.1)$$

et l'équation de mouvement de la vitesse induite se réduit à l'équation de Stokes stationnaire

$$-\vec{\nabla} P^1 + \mu_f \vec{\Delta} \vec{w}_f^1 = \vec{0}. \quad (1.2.2)$$

Dans cette section, nous sommes donc amenés à reprendre les principaux résultats obtenus dans le cadre de cette hypothèse.

1.2.1 Mouvement permanent de la sphère dans un fluide au repos

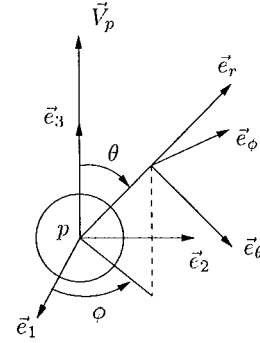
L'étude du mouvement permanent d'une sphère dans un fluide au repos est parfois appelé "second problème de Stokes (1845)"². Ce problème est rencontré par exemple lorsqu'une particule est relâchée dans un fluide en stagnation. Après un certain temps d'établissement, temps que nous détaillerons par la suite, la particule finit par atteindre une vitesse constante, appelée vitesse terminale ou encore vitesse de sédimentation. Cette vitesse correspond en fait à une situation d'équilibre dynamique où la force $\vec{F}^1$ subie par la particule compense la flottabilité. Dans cette situation d'équilibre, l'écoulement induit adopte donc une forme permanente – équation (1.2.1) – dont la détermination passe par la résolution du problème stationnaire des équations de Stokes – équation (1.2.2). Dans ce cas particulier, l'écoulement non perturbé est nul et les conditions limites données par les équations (1.1.18) et (1.1.19) ne font intervenir que la vitesse de la particule.

La résolution de ce problème est classique et le lecteur intéressé trouvera tous les détails de calculs dans de nombreux ouvrages comme par exemple Landau et Lifchitz (1989) ou encore Guyon, Hulin et Petit (2001), pour ne citer que ces deux là. De ce fait, nous ne nous étendrons pas trop sur le calcul à

2. Le premier problème de Stokes correspond à l'étude du mouvement d'une plaque dans un fluide au repos.

proprement parler de l'écoulement induit dans ce cas là, mais plutôt sur les hypothèses qui sont habituellement faites pour traiter un problème dans ce type de configuration. En effet, compte tenu de la géométrie de la sphère, dans ce problème, le mouvement du fluide généré par le déplacement de la particule doit être invariant par rotation autour de l'axe passant par l'origine de la sphère et dirigé suivant $\vec{V}_p$. En d'autres termes, dans la base sphérique $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\phi)$, avec $|\vec{x}| = r$, et θ l'angle de colatitude entre $(\vec{V}_p, \vec{e}_r)$ (voir figure 1.2) la solution recherchée doit être de la forme :

$$\vec{w}_f^1 = w_r^1(r, \theta) \vec{e}_r + w_\theta^1(r, \theta) \vec{e}_\theta ,$$



c'est à dire qu'elle ne doit pas dépendre de l'azimut ϕ , et de plus, elle doit être contenue dans un plan. En particulier, dans ce cas là, l'axisymétrie de l'écoulement est fortement utile pour résoudre ce problème car en s'appuyant sur le fait que $\vec{\nabla} \cdot \vec{w}_f^1 = 0$, il est alors toujours possible d'écrire que cette vitesse dérive d'un potentiel vecteur $\vec{A}$ tel que

$$\vec{w}_f^1 = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}(r, \theta) .$$

Or ici, le fait que $w_\phi^1 = 0$ impose que A_r et A_θ soient des constantes pures et qui plus est, nulles, du fait de la condition à l'infini du champ de vitesse induit. Autrement dit, seule la composante A_ϕ de $\vec{A}$ est non nulle. Cela simplifie considérablement le problème dans la mesure où la détermination de la solution de ce problème peut alors se rapporter à une simple équation scalaire de la forme

$$\Delta^2 A_\phi(r, \theta) = 0 ,$$

qui se résoud aisément, par exemple à l'aide de la méthode des séparations de variables. Il est ensuite possible d'obtenir l'expression de la vitesse, sachant que ses composantes sont liées à A_ϕ par les relations

$$w_r^1 = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (A_\phi \sin \theta) \quad \text{et} \quad w_\theta^1 = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\phi) .$$

En fait, dans la pratique, Stokes n'a pas directement travaillé avec A_ϕ mais plutôt, pour des raisons de simplicité de calculs, avec ce qu'il a introduit comme étant une fonction de courant $\psi(r, \theta) = r \sin \theta A_\phi$, ce qui est évidemment équivalent.

La résolution de ce problème conduit alors à la solution suivante :

$$w_r^1 = V_p \left(\frac{3a}{2r} - \frac{a^3}{2r^3} \right) \cos \theta , \quad (1.2.3)$$

$$w_\theta^1 = -V_p \left(\frac{3a}{4r} + \frac{a^3}{4r^3} \right) \sin \theta , \quad (1.2.4)$$

avec $r \geq a$ et $\theta \in [0, \pi]$. Il apparaît alors que la forme de la vitesse obtenue dans ce cas ne dépend pas explicitement des propriétés physiques du fluide. Mais nous allons voir que si la particule est libre de tout mouvement dans le fluide, alors V_p correspond à la vitesse terminale adoptée par la particule et dans laquelle les propriétés physiques du fluide apparaissent. Pour obtenir cette expression, il faut donc calculer la force exercée par le fluide sur la particule. Celle-ci peut être obtenue à partir du champ de vitesse solution des équations de Stokes, et elle est donnée par la sommes des deux intégrales :

$$\int_{S_p} -P^1 \vec{n} dS_p = -2\pi\mu_f a \vec{V}_p , \quad \text{et} \quad \int_{S_p} \vec{T}^1 \cdot \vec{n} dS_p = -4\pi\mu_f a \vec{V}_p ,$$

soit finalement,

$$\vec{F}^1 = -6\pi\mu_f a \vec{V}_p .$$

Cette force est bien entendu de sens contraire à la vitesse de la particule et connue sous le nom de "traînée de Stokes". En écrivant que lorsqu'une particule est relâchée dans un fluide au repos, $\vec{F}^1$ compense la flottabilité, la vitesse terminale d'une sphère dans un milieu fluide infini au repos est donnée par

$$\vec{V}_p = \frac{2(\rho_p - \rho_f) \vec{g} a^2}{9\mu_f} . \quad (1.2.5)$$

Notons que ce calcul, réalisé pour une particule qui se déplace dans un fluide au repos, s'étend facilement au cas d'une particule qui se déplace dans un écoulement permanent uniforme, y compris lorsque les vitesses $\vec{V}_f^0$ et $\vec{V}_p$ ne sont pas colinéaires. Dans ce cas là, la force exercée sur la particule s'écrit :

$$\vec{F}^1 = 6\pi\mu_f a \left(\vec{V}_f^0 - \vec{V}_p \right).$$

Avant de poursuivre, nous pouvons faire plusieurs remarques concernant la solution donnée par les équations (1.2.3) et (1.2.4). D'une part, cette solution analytique du champ de vitesse admet, dans chacune de ses composantes, un terme en a/r et un terme en a^3/r^3 . Or il est possible de montrer que seuls les termes en a/r contribuent au calcul de la force exercée par le fluide sur la particule. Par ailleurs, les termes en a^3/r^3 deviennent négligeables devant les termes en a/r aussitôt que r devient grand devant a . Ainsi, loin de la particule, le champ de vitesse du fluide qui est solution des équations de Stokes peut s'écrire, cette fois-ci dans la base cartésienne (nous verrons dans la suite pourquoi), sous la forme :

$$w_x^1 = V_p \left(\frac{3a}{4} \right) \left(\frac{zx}{r^3} \right) + O\left(\frac{a^3}{r^3} \right) \quad (1.2.6)$$

$$w_y^1 = V_p \left(\frac{3a}{4} \right) \left(\frac{zy}{r^3} \right) + O\left(\frac{a^3}{r^3} \right) \quad (1.2.7)$$

$$w_z^1 = V_p \left(\frac{3a}{4} \right) \left(\frac{1}{r} + \frac{z^2}{r^3} \right) + O\left(\frac{a^3}{r^3} \right). \quad (1.2.8)$$

Si les termes en $O(a^3/r^3)$ ne sont pas pris en compte, la solution approchée des équations de Stokes obtenue porte le nom de "Stokeslet" et contient la totalité des informations nécessaires aux calculs des efforts exercés par le fluide sur l'inclusion. Bien entendu, nous reviendrons plus tard sur cette solution.

1.2.2 Généralisation pour $\vec{V}_f^0(\vec{X})$ quelconque

Dans la pratique, la majorité des écoulements fluides prenant place dans un domaine limité par des parois ne sont pas uniformes³. Or puisque les vitesses $\vec{w}_f^1$ et $\vec{V}_f^0$ sont liées par la condition limite (1.1.19), si l'écoulement non perturbé n'est pas uniforme, alors la vitesse induite n'est plus, dans ce cas là, invariante par rotation autour de l'axe qui porte $\vec{V}_p$. Par conséquent, il n'est plus possible de calculer l'expression de $\vec{w}_f^1$ à l'aide d'une fonction de courant.

Malgré cela, Lamb (1945) a montré que tout champ de vitesse (disons $\vec{w}_f$) solution des équations de Stokes stationnaires pouvait, de manière complètement générale, s'écrire sous la forme d'une somme infinie de trois harmoniques sphériques⁴, $\mathcal{P}_n$, χ_n , Φ_n , à savoir :

$$\vec{w}_f = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \left[\vec{\nabla} \wedge (\vec{x} \chi_n) + \vec{\nabla} \Phi_n + \frac{n+3}{2\mu_f(n+1)(2n+3)} r^2 \vec{\nabla} \mathcal{P}_n - \frac{n}{\mu_f(n+1)(2n+3)} \vec{x} \mathcal{P}_n \right]. \quad (1.2.9)$$

A l'aide de cette solution générale, Brenner (voir Happel et Brenner, 1983) a établi une méthode de projection permettant de déterminer intégralement ces harmoniques sphériques à partir de la connaissance de la répartition de $\vec{w}_f$ sur la sphère de rayon a . Précisément, dans notre cas, l'écoulement induit recherché doit être solution des équations de Stokes stationnaires et de plus, sa répartition sur la sphère est donnée par la condition limite (1.1.19). De ce fait, quel que soit l'écoulement non perturbé, à condition que ce dernier puisse s'écrire dans une base d'harmoniques sphériques, il est possible de déterminer la solution de l'écoulement induit. Compte tenu de l'importance de ce résultat, tous les détails concernant la méthode de projection de Brenner sont donnés en annexe A.1. Cette méthode est très générale et bien entendu la solution du second problème de Stokes décrite dans la section précédente n'est qu'un cas particulier de la solution de Lamb. Aussi, notons que telle qu'elle est présentée ici, cette solution est valable aussi bien

3. C'est le cas par exemple d'un écoulement de Poiseuille, de Couette, d'une rotation solide etc...

4. ici, ces trois harmoniques sphériques ont chacune une dimension physique

pour $r \geq a$, que pour $r \leq a$, ce qui sera utile dans la seconde partie de ce chapitre, lorsque l'inclusion considérée sera une inclusion fluide dans laquelle prend place un écoulement.

À présent, à l'aide de la solution de Lamb, nous pouvons établir une propriété importante de l'écoulement induit lorsque l'écoulement non perturbé est quelconque. Pour cela, notons que si la région de l'espace est limitée à $r \geq a$ alors la solution générale se simplifie du fait de la condition de nullité du champ de vitesse induit à l'infini (voir annexe A.1) et peut s'écrire

$$\begin{aligned} \vec{w}_f^1 = \sum_{n=1}^{n=\infty} \left[\vec{\nabla} \wedge (r \vec{e}_r \chi_{-(n+1)}) + \vec{\nabla} \Phi_{-(n+1)} - \frac{(n-2)}{\mu_f 2n(2n-1)} r^2 \vec{\nabla} \mathcal{P}_{-(n+1)} \right. \\ \left. + \frac{(n+1)}{\mu_f n(2n-1)} \vec{x} \mathcal{P}_{-(n+1)} \right]. \end{aligned} \quad (1.2.10)$$

Dans cette dernière expression, il est possible de montrer que chaque harmonique sphérique de rang $-(n+1)$ (avec $n \geq 1$) contribue à la solution générale de Lamb en un terme qui à l'ordre dominant décroît en $(a/r)^n$. Autrement dit, un terme de la solution générale de Lamb associé à une harmonique de rang n_1 décroîtra plus rapidement, lorsque r augmente, qu'un terme associé à une harmonique de rang n_2 à condition que $n_1 > n_2$. Rappelons nous maintenant que si la taille de la particule est petite devant L , l'échelle de longueur caractéristique de variation de $\vec{V}_f^0$, alors, il est possible d'écrire que sur la sphère de rayon a , nous avons :

$$\vec{V}_f^0(\vec{X}) = \vec{V}_f^0(\vec{X}_p + a \vec{e}_r) = \vec{V}_f^0(\vec{X}_p) + \left. \vec{\nabla} \vec{V}_f^0 \right|_{\vec{X}_p} \cdot a \vec{e}_r + O\left(\frac{a^2}{L^2}\right).$$

Le premier terme de ce développement de Taylor, qui correspond alors à un écoulement uniforme, est associé à des harmoniques sphériques de rang 1, à savoir $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$, et les composantes de la solution de Lamb issues de ce premier terme décroîtront (à l'ordre dominant) en (a/r) ce qui bien sûr n'est pas surprenant (voir la solution du second problème de Stokes dans section précédente). En revanche, ce qui est intéressant, c'est qu'il est possible de montrer que le terme suivant du développement de Taylor est associé, à l'ordre dominant, à des harmoniques de rang 2, à savoir $(\cos^2 \theta, \sin^2 \theta, \sin \theta \cos \theta)$. De ce fait, les composantes de la solution de Lamb issues de ce second terme décroîtront (à l'ordre dominant) en $(a/r)^2$. Le terme suivant du développement de Taylor sera associé à des harmoniques sphériques de rang 3, etc... De cela, il en résulte une propriété fondamentale de l'écoulement induit, à savoir :



Propriété fondamentale : "Quelle que soit la forme de l'écoulement non perturbé, lorsque r tend vers l'infini, l'écoulement induit tend vers la solution Stokeslet donnée par les équations (1.2.6), (1.2.7) et (1.2.8), calculée à partir de l'écoulement uniforme donné par : $\vec{V}_p - \vec{V}_f^0(\vec{X}_p)$ ".

En pratique, la solution "Stokeslet" est fréquemment utilisée lorsqu'il est nécessaire d'exprimer l'écoulement induit loin de la particule et cela même lorsque l'écoulement non perturbé est non uniforme. À l'aide de la solution de Lamb, nous pouvons voir que cela est bien légitime.

1.2.3 La correction de Faxén

Jusqu'à présent, pour obtenir l'expression de la force exercée par l'écoulement induit sur la particule, les situations que nous avons détaillées impliquaient la détermination explicite, au préalable, du champ de vitesse correspondant à la solution du problème considéré. Néanmoins, il peut s'avérer fastidieux de déterminer analytiquement le champ de vitesse exact, surtout lorsque l'écoulement non perturbé possède une expression analytique complexe. Par exemple, pour déterminer la solution des équations de Stokes qui correspond au mouvement d'une particule dans un écoulement de Poiseuille, il faut plusieurs pages de calculs pour déterminer les harmoniques sphériques impliquées dans l'équation (1.2.9) (voir Happel et Brenner, 1983).

En fait si le milieu dans lequel la particule évolue est bien supposé infini, il est possible, quelle que soit la forme de l'écoulement non perturbé, d'obtenir une expression approchée de la force $\vec{F}^1$ sans avoir

à calculer explicitement le champ de vitesse induit autour de la particule. Cela peut se faire à l'aide du théorème de réciprocité (le théorème est décrit en annexe A.2) et cette force est donnée par :

$$\vec{F}^1 = -6\pi\mu_f a \left(\vec{V}_p - \vec{V}_f^0(\vec{X}_p) - \frac{a^2}{6} \vec{\Delta} \vec{V}_f^0 \Big|_{\vec{X}_p} \right) + O\left(\frac{a^3}{L^3}\right). \quad (1.2.11)$$

Le terme supplémentaire de traînée induit par la non uniformité de l'écoulement non perturbé, à savoir, $(a^2/6) \vec{\Delta} \vec{V}_f^0 \Big|_{\vec{X}_p}$ porte le nom de correction de Faxén (1922), ce dernier ayant été le premier à l'obtenir.

1.2.4 Les solutions singulières en écoulement de Stokes

Pour terminer cette section, nous allons nous intéresser à l'approche singulière dans le cadre des écoulements rampants stationnaires. Dans une telle situation, l'équation (1.1.23) du système d'équations (S1)' (page 10), se réduit donc à la simple expression

$$-\vec{\nabla} \cdot \vec{\Sigma}^1 = \vec{h},$$

où les composantes de $\vec{h}$ se calculent assez simplement,

$$\int_{\mathcal{V}} \left(\vec{\nabla} P^1 - \mu_f \vec{\Delta} \vec{w}_f^1 \right) d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}} \vec{h} d\mathcal{V} = \vec{F}_1,$$

puis

$$\int_{\mathcal{V}} \left(\vec{\nabla} P^1 - \mu_f \vec{\Delta} \vec{w}_f^1 \right) \otimes \vec{x} d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}} \left(\vec{F}_1 \delta(\vec{x}) + \vec{F}_2 \cdot \vec{\nabla} \delta(\vec{x}) + \dots \right) \otimes \vec{x} d\mathcal{V} = -\vec{F}_2,$$

etc... Or puisque les équations de Stokes sont linéaires, tout écoulement induit qui est solution d'un problème général sera la somme des écoulements induits par chacun des termes sources du développement de $\vec{h}$, calculés indépendamment les uns des autres. Certains ouvrages sont d'ailleurs consacrés entièrement à cette approche, voir par exemple Pozrikidis (1992), ou encore l'article de Chwang et Wu (1975). Notons simplement que la résolution des équations de Stokes associées à un terme source ponctuel peut s'obtenir analytiquement par exemple à l'aide des transformées de Fourier.

A présent, regardons ce qui se passe lorsque le cas traité correspond à une particule qui se déplace dans un fluide au repos. Dans cette situation, il est immédiat de montrer que le premier terme $\vec{F}_1$ est donné par

$$\vec{F}_1 = 6\pi\mu_f a \vec{V}_p,$$

ce qui correspond précisément à une force opposée à la traînée exercée par le fluide sur la particule. Ce résultat n'est pas surprenant car selon le principe d'action et de réaction, si le fluide exerce sur la particule une certaine force, alors en retour celle-ci exerce sur le fluide une force de même intensité, mais de sens contraire. Pour revenir au problème, notons que la partie de l'écoulement de la solution de Stokes associée à ce premier terme source est alors donnée par la résolution du problème

$$\vec{0} = -\vec{\nabla} P^1 + \mu_f \vec{\Delta} \vec{w}_f^1 + \vec{F}_1 \delta(\vec{x}). \quad (1.2.12)$$

Or cette équation peut être résolue, voir par exemple Kim et Karila (1991), et conduit à la solution

$$\vec{w}_f^1 = \frac{\vec{\overline{G}} \cdot \vec{F}_1}{8\pi\mu_f}, \quad (1.2.13)$$

où le tenseur $\vec{\overline{G}}$ (tenseur de Green associé à l'équation de Stokes) est alors donné par

$$G_{ij} = \frac{\delta_{ij}}{r} + \frac{x_i x_j}{r^3},$$

avec $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$ (symbole de Kronecker). Il est alors intéressant de remarquer que cette solution correspond précisément à la solution "Stokeslet" donnée par les équations (1.2.6), (1.2.7) et (1.2.8). Il apparaît ainsi que pour décrire l'écoulement loin de la particule, en écoulement rampant, il est suffisant

de ne connaître que le premier terme de $\vec{h}$. En quelque sorte, ce résultat exprime le fait que loin de la particule, l'écoulement fluide perçoit l'inclusion comme une force ponctuelle et d'intensité égale et opposée à la traînée de Stokes. Par ailleurs, nous avons également vu à l'aide de la solution de Lamb que quel que soit l'écoulement non perturbé, l'écoulement induit tend, lorsque r tend vers l'infini, vers un écoulement "Stokeslet". De ce fait, la propriété fondamentale de la section (1.2.2) peut maintenant être réécrite:



Propriété fondamentale : "Quelle que soit la forme de l'écoulement non perturbé, lorsque r tend vers l'infini, l'écoulement induit tend vers un écoulement "Stokeslet" donné par

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \vec{w}_f^1 = \frac{3a}{4} \vec{G} \cdot \left(\vec{V}_p - \vec{V}_f^0(\vec{X}_p) \right).$$

Ce résultat est largement utilisé dans les écoulements multiphasiques, et notamment dans la méthode des développements asymptotiques raccordés que nous verrons par la suite.

1.2.5 Limitation des écoulements rampants stationnaires

Pour terminer cette partie qui concerne les écoulements rampants stationnaires, notons que lorsque l'écoulement n'est pas uniforme, il est tout de même bien rare que l'écoulement induit se réduise à un simple problème stationnaire. En effet, bien souvent, la particule subit des accélérations, par exemple à cause du gradient de pression, traverse les lignes de courants de l'écoulement non perturbé, etc... Toutes ces raisons vont faire que la condition limite (1.1.19) vérifiée par l'écoulement induit, ne sera pas stationnaire et dans la suite, nous allons justement voir quels peuvent être les effets de cette instationnarité sur $\vec{F}^1$.

1.3 Les écoulements rampants instationnaires

Dans le but d'obtenir l'expression de la force qui s'exerce sur une particule dont le mouvement est arbitraire et qui se déplace dans un écoulement quelconque, il est nécessaire de résoudre l'équation (1.1.28) associée bien entendu aux conditions limites (1.1.18) et (1.1.19) ainsi qu'à la condition initiale (1.1.20). En général, le simple fait de prendre en compte le terme instationnaire dans les équations de Stokes en complexifie notablement la résolution et bien souvent, il n'est alors pas possible de calculer l'expression exacte du champ de vitesse. Malgré cela, dans certaines situations, il est tout de même possible de calculer l'expression exacte de la force qui s'applique sur la particule. C'est le cas par exemple lorsque l'écoulement non perturbé est un écoulement uniforme, ou encore si c'est un écoulement linéaire. De même que nous l'avons fait dans la section précédente, nous allons, en premier lieu, considérer le cas d'une particule qui se déplace dans un fluide au repos, mais cette fois donc, avec une vitesse qui dépend du temps. Ensuite, nous verrons que le résultat de cette étude peut se généraliser au cas d'une particule qui se déplace dans un fluide en mouvement uniforme ou linéaire. Enfin, lorsque l'écoulement non perturbé est vraiment quelconque, il est tout de même possible, par application du théorème de réciprocité, d'obtenir une forme approchée de l'expression de la force qui s'applique sur la particule, expression qui est alors l'analogue de la correction de Faxén obtenue en écoulement stationnaire.

1.3.1 Mouvement instationnaire de la sphère dans un fluide au repos

Le calcul de l'expression de la force que subit une particule qui se déplace avec une vitesse qui varie dans le temps dans un fluide au repos a été effectué pour la première fois par Boussinesq (1885). Dans la pratique, lorsque la vitesse $\vec{V}_p(t)$ de la particule est quelconque, il est difficile d'obtenir l'expression de l'écoulement induit. Toutefois, cette difficulté peut être contournée en s'appuyant sur le fait que les équations de Stokes sont linéaires. L'idée de base est alors de décomposer la vitesse de la particule en une somme continue dont chaque composante pourra être traitée comme un problème indépendant. En particulier, la vitesse de la sphère peut toujours s'écrire sous la forme d'une transformée de Fourier inverse, à savoir

$$\vec{V}_p(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{U}_\omega \exp(-i\omega t) d\omega \quad \text{où} \quad \vec{U}_\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \vec{V}_p(t) \exp(i\omega t) dt.$$

Ainsi, en imposant à l'écoulement induit de vérifier sur la particule, une condition limite qui correspond à une composante de la transformée de Fourier de la vitesse de la particule, c'est à dire,

$$\vec{w}_f^1 = \vec{U}_\omega \exp(-i\omega t) \quad \text{lorsque} \quad |\vec{x}| = a,$$

et en résolvant ce problème "élémentaire" (élémentaire parce que la solution obtenue dans ce cas là n'est qu'un élément de la solution recherchée, et non pas parce qu'elle est triviale!), la force obtenue correspond alors à une composante de la transformée de Fourier de la force qui s'exercerait sur une particule dont le mouvement est arbitraire. Par sommation, il est donc possible de retrouver la force exercée par le fluide dans le cas d'un mouvement quelconque de la particule. La résolution de ce problème est par exemple, très bien détaillée dans Landau et Lifchitz (1989) et reprise à la fin de ce document en annexe A.3. Dans ce cas particulier, la force "élémentaire" qui s'exerce sur la particule s'écrit :

$$\vec{F} = \vec{F}_\omega \exp(-i\omega t) = -6\pi\mu_f a \left(1 - \frac{ia^2\omega}{9\nu_f} + \left(\frac{a^2\omega}{\nu_f}\right)^{1/2} \frac{\sqrt{2}}{2} (1-i)\right) \vec{U}_\omega \exp(-i\omega t). \quad (1.3.1)$$

A l'aide de cette expression, il est ensuite possible de déterminer la force qui s'exerce sur la particule lorsque celle-ci se déplace avec une vitesse quelconque,

$$\vec{F}^1 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{F}_\omega \exp(-i\omega t) d\omega$$

et le calcul de cette intégrale conduit (voir annexe A.3) à l'expression suivante

$$\vec{F}^1 = -6\pi\mu_f a \vec{V}_p - \frac{1}{2}m_f \frac{d\vec{V}_p}{dt} - 6\rho_f a^2 \sqrt{\nu_f \pi} \int_{-\infty}^t \frac{d\vec{V}_p(\tau)}{d\tau} \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}}. \quad (1.3.2)$$

Le premier terme de (1.3.2) correspond alors à la traînée de Stokes, le second est appelé force de masse ajoutée, quant au troisième, c'est la fameuse "force d'histoire". L'équation de mouvement obtenue à partir de cette force est fréquemment rencontrée dans la littérature sous l'appellation "équation de **BBO**" (Basset, Boussinesq et Oseen) en hommage à leurs contributions respectives (en fait, historiquement, Basset (1888) a publié quelques années après son prédécesseur, Boussinesq (1885), le calcul de la force instationnaire subie par une particule). Aussi, la force d'histoire est souvent appelée à tort, terme de Basset.

Dans la suite et afin de décrire l'origine physique de chacune des composantes de $\vec{F}^1$, nous allons nous intéresser à une étude assez illustrative et qui correspond à la réponse du fluide à une accélération impulsionnelle de la particule.

1.3.2 Illustration de l'écoulement induit par une sphère admettant une accélération impulsionnelle dans un fluide au repos

L'étude que nous allons détailler dans cette section repose sur la solution analytique du problème correspondant à l'écoulement généré par une particule qui, à l'instant $t = 0_+$, se met brutalement en mouvement (avec une vitesse constante), dans un fluide initialement au repos (voir Bentwich et Miloh, 1978). Compte tenu de l'expression un peu complexe de la solution exacte, celle-ci est reportée en annexe A.4. Notons simplement que conformément à ce que nous aurions obtenu à l'aide de l'équation (1.3.2) en posant $\vec{V}_p = \vec{U} H(t)$ (où $H(t)$ correspond à la fonction d'Heaviside), la solution analytique de ce problème permet d'obtenir l'expression de la contrainte exercée par le fluide sur la particule dans ce cas là, celle-ci est donnée par

$$\vec{F}^1 = -6\pi\mu_f a \vec{U} H(t) - \frac{1}{2}m_f \vec{U} \delta(t) - 6\rho_f a^2 \sqrt{\nu_f \pi} \frac{\vec{U}}{\sqrt{t}}. \quad (1.3.3)$$

Le premier terme de la force induite correspond bien à la traînée de Stokes, et quant aux autres, nous allons maintenant détailler leurs origines physiques. Pour cela, intéressons nous au comportement du champ de vitesse induit par cette accélération impulsionnelle de la particule. Choisissons arbitrairement de nous placer en $\theta = \pi/2$ ($w_r^1 = 0$) et examinons l'évolution du profil de w_θ^1 (voir figure 1.3) pour un temps diffusif⁵ allant de 0.01 à l'infini.

5. En fait, le temps a été arbitrairement rendu sans dimension par a^2/ν_f ce qui correspond au temps qu'il faut pour que la vorticité induite par l'accélération de la particule diffuse sur une longueur équivalente à un rayon

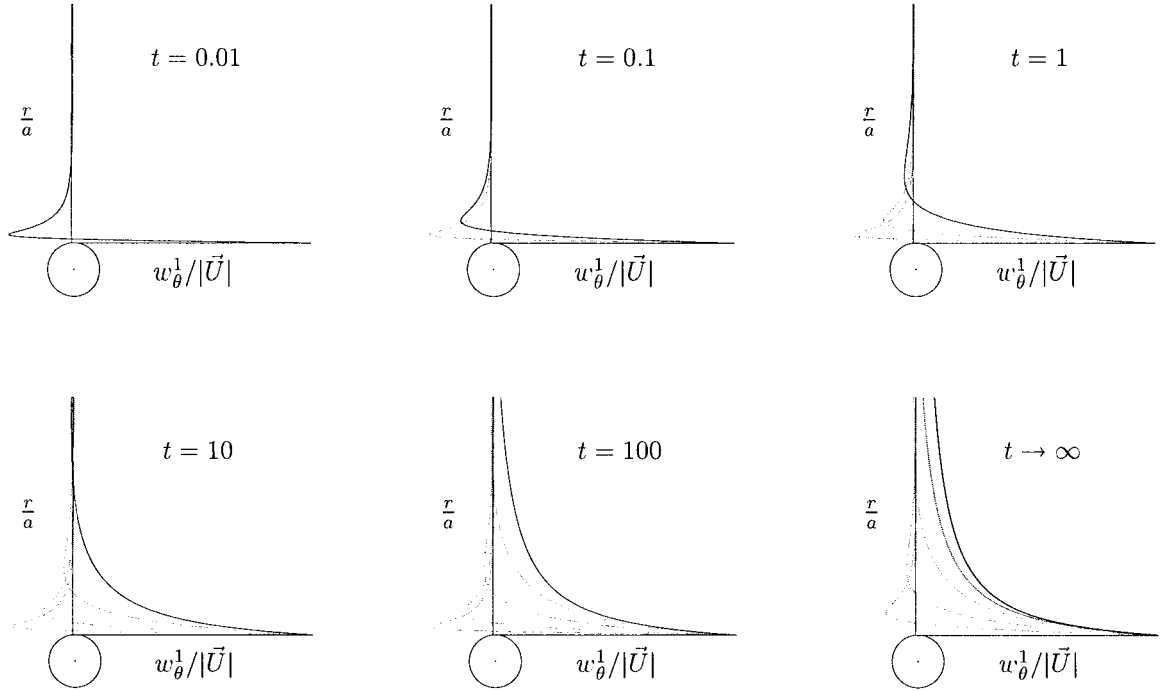


FIG. 1.3 – Evolution temporelle de la composante w_θ^1 de la vitesse pour $\theta = \pi/2$. Mise en évidence des phénomènes de diffusion (pour tous les graphes, le temps est réduit par a^2/ν_f).

A l'instant $t = 0_+$, la sphère, qui était initialement au repos, se met brutalement en mouvement. Pour pouvoir se déplacer, elle doit alors "chasser" le fluide qui se situe dans son voisinage immédiat. En d'autres termes, elle transmet son accélération au fluide environnant et selon le principe d'action et de réaction, elle subit en retour une force proportionnelle à la masse de fluide déplacée multipliée par l'accélération transmise au fluide. Cette force est appelée force de masse ajoutée, ou encore parfois force d'"habillage". Bien entendu, le volume (et par conséquent la masse) de fluide accéléré dépend de la géométrie du corps : pour une sphère, le coefficient de masse ajoutée vaut $1/2$.

La perturbation de l'écoulement lorsque le fluide est brutalement "chassé" par l'accélération de la particule est ici visible sur les premiers graphes (i.e. temps diffusifs courts, $t \lesssim 1$) de la figure 1.3 et correspond à la partie négative du profil de vitesse. Notons que la force de masse ajoutée est exclusivement une force de pression et l'expression de cette dernière est retrouvée à l'identique dans la théorie des écoulements de fluide parfait où tous les effets visqueux sont négligés. Enfin, notons que pendant de nombreuses années, et jusqu'à assez récemment, la communauté des hydrodynamiciens s'est interrogée sur la validité du coefficient $1/2$ de la force de masse ajoutée en dehors des hypothèses de Stokes et de fluide parfait (voir par exemple Odar et Hamilton, 1964). Aujourd'hui, il est admis au vu de nombreuses études qui ont été réalisées à ce sujet, que ce coefficient de masse ajoutée reste constant quel que soit le nombre de Reynolds de particule, du moins en écoulement uniforme et en dehors de tout confinement du domaine fluide dans lequel évolue la particule (voir par exemple Magnaudet *et al.*, 1995).

Pour comprendre ensuite l'origine physique de la force d'histoire – dernier terme de l'équation (1.3.3) – nous voyons que l'accélération brutale de la particule a généré, aux temps courts et au voisinage de la surface de la particule, un très fort gradient de vitesse, autrement dit, une très forte vorticité locale. Or la force de frottement subie par la particule est directement proportionnelle à la viscosité dynamique du fluide multipliée par la valeur de la vorticité évaluée à la surface de la sphère. Nous voyons qu'aux temps courts, l'intensité de cette force est très importante (voire infinie, compte tenu de la modélisation du déplacement de la particule). Après que cette accélération soudaine se soit produite, la vorticité, qui n'est alors plus entretenue, diffuse dans le domaine fluide, comme cela est illustré sur les graphes de la figure

1.3. Ce phénomène de diffusion implique alors une relaxation dans le temps de la valeur de la vorticité évaluée sur la sphère et ainsi, il est possible d'en déduire que la force subie par la particule doit être de la forme

$$|\vec{F}| \propto \mu_f \frac{\Delta w_f^1}{L(t)} \mathcal{S}_p ,$$

où $\mathcal{S}_p \propto a^2$ est la surface de la particule, $\Delta w_f^1/L(t)$ correspond à l'ordre de grandeur de la vorticité au voisinage de la sphère et la longueur $L(t)$ doit être proportionnelle à l'échelle de longueur où la vorticité a déjà diffusée à l'instant t . Le temps que met la vorticité pour diffuser sur l'échelle de longueur L étant donnée par

$$t = L^2/\nu_f \quad \text{alors,} \quad L(t) \propto \sqrt{\nu_f t} ,$$

et cette force doit donc être de la forme

$$\vec{F} \propto \mu_f a^2 \frac{\Delta w_f}{\sqrt{\nu_f t}} .$$

Ainsi, nous retrouvons bien une expression semblable au dernier terme de $\vec{F}^1$.

Forts de ces premières remarques, regardons maintenant ce qui se passe lorsque le mouvement de la particule est arbitraire. Pour cela, imaginons alors le cas d'une particule qui admet un changement de vitesse en escalier, c'est à dire avec un changement brusque à chaque intervalle de temps Δt , de sorte que

$$\vec{V}_p(t) = \sum_{k=1}^n (\vec{U}_k - \vec{U}_{k-1}) H(t - k\Delta t) .$$

La force qui s'applique sur la particule est alors donnée par

$$\vec{F}^1 = -6\pi\mu_f a \vec{V}_p - \frac{1}{2}m_f \sum_{k=1}^n \frac{(\vec{U}_k - \vec{U}_{k-1})}{\Delta t} \delta(t - k\Delta t) \Delta t - 6\rho_f a^2 \sqrt{\nu_f \pi} \sum_{k=1}^n \frac{(\vec{U}_k - \vec{U}_{k-1})}{\Delta t} \frac{\Delta t}{\sqrt{t - k\Delta t}} .$$

Le passage à la limite conduit alors, pour le second terme de l'expression précédente, à

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \frac{(\vec{U}_k - \vec{U}_{k-1})}{\Delta t} \delta(t - k\Delta t) \Delta t = \int_0^t \frac{d\vec{V}_p}{d\tau} \delta(t - \tau) d\tau = \frac{d\vec{V}_p}{dt}$$

et pour le dernier terme, à

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \frac{(\vec{U}_k - \vec{U}_{k-1})}{\Delta t} \frac{\Delta t}{\sqrt{t - k\Delta t}} = \int_0^t \frac{d\vec{V}_p}{d\tau} \frac{d\tau}{\sqrt{t - \tau}} ,$$

ce qui est bien entendu similaire à la force obtenue par Boussinesq et Basset (avec une vitesse supposée nulle pour $t < 0$).

1.3.3 Généralisation pour $\vec{V}_f^0(\vec{X}, t)$ quelconque

Dans cette section, nous allons tout d'abord nous intéresser au cas particulier où une particule se déplace dans un écoulement non uniforme mais linéaire. Ensuite, nous verrons que lorsque l'écoulement non perturbé est quelconque et parce qu'il n'existe pas d'équivalent à la solution stationnaire de Lamb, l'expression de la force induite ne peut pas être obtenue de manière exacte. Toutefois, nous verrons qu'à l'aide du théorème de réciprocité (exprimé dans l'espace de Laplace), il est quand même possible, dans un cas très général, d'obtenir une expression approchée $\vec{F}^1$.

Cas particulier des écoulements linéaires

Lorsque l'écoulement non perturbé est donnée par

$$\vec{V}_f^0 = \vec{A} \cdot \vec{X} ,$$

où $\overline{\overline{A}}$ est un tenseur du second ordre dont les composantes dépendent éventuellement du temps, alors sur la surface de la sphère (i.e. $r = a$), l'écoulement non perturbé peut s'écrire :

$$\vec{V}_f^0 = \overline{\overline{A}} \cdot \vec{X}_p(t) + \overline{\overline{A}} \cdot a \vec{e}_r.$$

Le premier terme n'est alors qu'une fonction du temps et par conséquent, seul le second terme est non uniforme⁶. Le problème étant linéaire, l'écoulement induit qui vérifie la condition limite (1.1.19) dans ce cas là peut être décomposé en une somme de deux vitesses $\vec{w}_f^{1a}$ et $\vec{w}_f^{1b}$ (associées respectivement aux deux champs de pression P^{1a} et P^{1b}), dont l'une vérifie, sur la sphère, la condition limite :

$$\vec{w}_f^{1a} = \vec{V}_p(t) - \vec{V}_f^0(\vec{X}_p)$$

et l'autre (en négligeant la rotation propre de la particule) :

$$\vec{w}_f^{1b} = \overline{\overline{A}} \cdot a \vec{e}_r.$$

Dans le cas où les composantes du tenseur $\overline{\overline{A}}$ sont constantes dans le temps, $\vec{w}_f^{1b}$ vérifie partout des conditions limites stationnaires. Les équations de Stokes instationnaires se réduisent alors à un problème stationnaire et pour obtenir l'expression de la force induite par cette vitesse sur la particule, il est possible soit de calculer la solution exacte de ce problème (avec la solution de Lamb), ou plus simplement, d'appliquer le théorème de réciprocité (voir annexe A.2). Si maintenant les composantes de $\overline{\overline{A}}$ dépendent explicitement du temps, il est également possible d'appliquer un théorème équivalent au théorème de réciprocité mais instationnaire (voir annexe A.5). Dans tous les cas, il se trouve qu'en écoulement de Stokes, et à cause des symétries vérifiées par $\vec{w}_f^{1b}$, par intégration sur toute la surface sphérique de l'inclusion, la contribution hydrodynamique de cet écoulement est nulle et cela, quelle que soit l'expression de $\overline{\overline{A}}$.

En ce qui concerne $\vec{w}_f^{1a}$, la condition limite sur la sphère n'est qu'une fonction explicite du temps et le problème est alors strictement équivalent au problème considéré par Boussinesq (1885). Le calcul de la force qui s'applique sur la particule conduit donc à

$$\vec{F}^{1a} = -6\pi\mu_f a \left(\vec{V}_p - \vec{V}_f^0 \right) - \frac{1}{2}m_f \frac{d}{dt} \left(\vec{V}_p - \vec{V}_f^0 \right) - 6\rho_f a^2 \sqrt{\nu_f \pi} \int_{-\infty}^t \frac{d}{d\tau} \left(\vec{V}_p - \vec{V}_f^0 \right) \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}}. \quad (1.3.4)$$

Finalement, lorsque l'écoulement non perturbé est linéaire, en plus du gradient de pression de l'écoulement non perturbé s'ajoute une force identique à celle donnée par l'équation (1.3.2) et calculée à partir de la vitesse de glissement de la particule.

Dans le cadre des écoulements rampants instationnaires, ce résultat n'est donc pas une approximation mais un résultat exact.

Cas d'un écoulement quelconque

Comparativement aux équations de Stokes stationnaires, dans le cadre des écoulements rampants instationnaires, la présence du terme $\partial \vec{w}_f^1 / \partial t$ dans les équations implique qu'il n'est plus possible de déterminer une forme générale du champ de vitesse solution de cette équation. Par conséquent, il n'existe pas d'approche permettant de déterminer *avec exactitude* la contrainte qui s'exerce sur la particule lorsque l'écoulement est quelconque. Néanmoins, par application du théorème de réciprocité (ou du moins sa forme équivalente dans l'espace de Laplace, voir annexe A.5) il est possible d'obtenir l'expression de la force induite prenant en compte les effets au premier ordre de la non uniformité de l'écoulement. Celle-ci a été obtenue par Maxey et Riley (1983), ainsi que par Gatignol (1983), et est donnée par

$$\begin{aligned} \vec{F}^1 = & -6\pi\mu_f a \left(\vec{V}_p - \vec{V}_f^0 - \frac{a^2}{6} \vec{\Delta} \vec{V}_f^0 \Big|_{\vec{x}_p} \right) - \frac{1}{2}m_f \frac{d}{dt} \left(\vec{V}_p - \vec{V}_f^0 - \frac{a^2}{10} \vec{\Delta} \vec{V}_f^0 \Big|_{\vec{x}_p} \right) \\ & - 6\rho_f a^2 \sqrt{\nu_f \pi} \int_0^t \frac{d}{d\tau} \left(\vec{V}_p - \vec{V}_f^0 - \frac{a^2}{6} \vec{\Delta} \vec{V}_f^0 \Big|_{\vec{x}_p} \right) \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} + O\left(\frac{a^3}{L^3}\right). \end{aligned} \quad (1.3.5)$$

6. il est non uniforme puisque que $\vec{e}_r = \vec{e}_r(\theta, \phi)$

Notons que cette expression constitue en fait une généralisation aux cas des écoulements instationnaires de la force obtenue par Faxén (1922) et donnée par l'équation (1.2.11).

Dans le cadre des écoulements rampants instationnaires, l'équation de mouvement impliquant la force $\vec{F}^1$ donnée par l'équation (1.3.5) est souvent rencontrée dans la littérature sous l'appellation : "équation de mouvement de Maxey et Riley (1983)". C'est cette équation qui est le plus souvent utilisée pour obtenir la trajectoire d'une sphère solide dans un cas complètement général. Aussi et toujours dans le cadre des hypothèses de Stokes, nous pouvons remarquer que le coefficient de masse ajoutée reste de $1/2$, y compris pour un écoulement non uniforme. Enfin, notons que l'expression de la force (1.3.5) n'est valable *a priori* que lorsque les nombres de Reynolds Re et η tendent tous les deux vers 0. En toute rigueur, ces deux nombres ne sont pas nuls et à cause de cela, l'expression de la dérivée temporelle de l'écoulement non perturbé intervenant dans la force de masse ajoutée est parfois remise en question dans la littérature. Nous reviendrons sur ce point dans le paragraphe 1.5.1 (page 30) consacré aux effets d'inertie.

1.3.4 Insuffisance de la théorie des écoulement rampants

Pour terminer cette partie consacrée aux écoulements rampants, plusieurs points doivent être soulignés. Tout d'abord, il est bien connu que l'hypothèse qui consiste à négliger l'ensemble des termes convectifs impliqués dans l'équation de mouvement de l'écoulement induit, est forte et en particulier, elle mène parfois à des paradoxes. Par exemple, la solution de Stokes autour d'un cylindre n'existe pas, ou encore la valeur de l'énergie cinétique du fluide calculée à partir du profil de vitesse de la solution des équations de Stokes stationnaires dans un domaine fluide infini est elle-même infinie ! Dans la pratique, les hypothèses faites dans le cadre des écoulements rampants sont parfois trop réductrices pour donner des résultats satisfaisants.

Prenons par exemple, le cas d'une particule qui est relâchée dans un écoulement cisaillé pur (i.e. un écoulement de Couette) avec une vitesse initiale parallèle aux lignes de courants. L'expérience montre (voir par exemple Segré et Silberberg, 1962) que la particule finit par traverser les lignes de courants, ce qui témoigne ainsi de l'existence d'une force transversale à l'écoulement, dite de portance (ou encore "lift" en anglais). Aussi, Bretherton (1962) a-t-il établi que cette migration ne pouvait être expliquée dans le cadre des écoulements rampants. En effet, dans cette situation, le gradient de pression de l'écoulement non perturbé est nul, et aucune force issue de l'équation de mouvement (1.3.4) ne peut expliquer ce phénomène. Intuitivement, un observateur avisé pense alors que puisque la vitesse "vue" par la particule est plus rapide d'un côté de la sphère, que de l'autre, le champ de vitesse de l'écoulement induit ne doit plus être parfaitement symétrique, et que cela entraîne notamment une redistribution du champ de pression et du champ de vorticité, d'où la migration transversale observée... En réalité, en imaginant cela, l'observateur est déjà en train de prendre en compte le transport convectif de la vitesse induite par l'écoulement non perturbé, or justement, ces termes sont complètement négligés dans les hypothèses de Stokes.

 galement, d'autres constatations expérimentales ne sont pas en très bon accord avec la solution de l'équation de BBO. Par exemple, lorsqu'une particule est relâchée dans un fluide au repos, le temps qu'elle met pour atteindre sa vitesse terminale est plus court que celui prédit par la théorie des écoulements de Stokes, et cela même lorsque le nombre de Reynolds est très petit devant l'unité. Nous verrons dans la suite que c'est aussi un effet des termes convectifs et que ces derniers accélèrent le processus de relaxation de la force d'histoire.

Forts de ces constats, nous savons que dans certaines situations physiques, les effets émanant du transport convectif de la vitesse loin de la particule doivent être pris en compte pour décrire correctement les trajectoires observées. Or, nous avons déjà vu combien le fait de rajouter un terme dans les équations de Stokes stationnaires compliquait la tâche pour obtenir l'expression de la force subie par la particule. Il va sans dire que pour prendre en compte les effets d'inertie, il n'existe pas de solution générale, mais seulement des solutions obtenues au cas par cas.

1.4 Effets des termes convectifs (problèmes stationnaires)

Dans toute cette partie, il sera supposé que la particule est suffisamment petite pour que l'écoulement non perturbé puisse être assimilé à la superposition d'un écoulement uniforme stationnaire et d'un

écoulement linéaire. Autrement dit, nous considérerons que

$$\vec{V}_f^0(\vec{X}) = \vec{U} + \vec{A} \cdot \vec{X}.$$

Sachant, par définition, que $\vec{X} = \vec{X}_p + \vec{x}$, nous pouvons écrire, dans le référentiel $\mathcal{R}_p$ lié à la particule :

$$\vec{w}_f^0(\vec{x}) = \vec{A} \cdot \vec{X}_p - \vec{V}_p + \vec{A} \cdot \vec{x} = \vec{V}_g(t) + \vec{A} \cdot \vec{x}. \quad (1.4.1)$$

Reprenons ensuite l'équation du champ de vitesse de l'écoulement induit (1.1.17), en supposant que le problème est stationnaire, mais en ne négligeant plus les termes convectifs. Celle-ci s'écrit alors

$$\rho_f (\vec{w}_f^0 \cdot \vec{\nabla}) \vec{w}_f^1 + \rho_f (\vec{w}_f^1 \cdot \vec{\nabla}) \vec{w}_f^1 + \rho_f (\vec{w}_f^1 \cdot \vec{\nabla}) \vec{w}_f^0 = -\vec{\nabla} P^1 + \mu_f \vec{\Delta} \vec{w}_f^1, \quad (1.4.2)$$

et en négligeant la rotation propre de la particule, les conditions limites s'écrivent

$$\vec{w}_f^1 \rightarrow \vec{0} \text{ lorsque } |\vec{x}| \rightarrow \infty, \quad (1.4.3)$$

$$\vec{w}_f^1(\vec{x}) = \vec{V}_p - \vec{V}_f^0(\vec{X}_p + \vec{x}) \text{ lorsque } |\vec{x}| = a. \quad (1.4.4)$$

Notons que bien que ce problème soit stationnaire, il est en règle générale encore trop complexe pour pouvoir être résolu analytiquement. Aussi, pour mémoire, nous avons toujours, au voisinage de la sphère, c'est à dire lorsque $r \simeq O(a)$,

$$\left| \frac{\rho_f (\vec{w}_f^0 \cdot \vec{\nabla}) \vec{w}_f^1}{\mu_f \vec{\Delta} \vec{w}_f^1} \right| \simeq \left| \frac{\rho_f (\vec{w}_f^1 \cdot \vec{\nabla}) \vec{w}_f^1}{\mu_f \vec{\Delta} \vec{w}_f^1} \right| = O\left(\frac{V_g a}{\nu_f}\right) = O(Re),$$

et

$$\left| \frac{\rho_f (\vec{w}_f^1 \cdot \vec{\nabla}) \vec{w}_f^0}{\mu_f \vec{\Delta} \vec{w}_f^1} \right| = O\left(\frac{a^2 V_f^0}{\nu_f L}\right) \text{ soit ici } O\left(\frac{a^2 |A_{ij}|}{\nu_f}\right) = O(\eta),$$

où $|A_{ij}|$ est l'ordre de grandeur des composantes du tenseur $\vec{A}$ et par hypothèse, ces deux nombres sont petits devant l'unité. De ce fait, et malgré la prise en compte des termes convectifs, nous voyons que la solution des équations de Stokes doit rester une bonne approximation de la solution exacte de l'équation (1.4.2). Ainsi, en utilisant par exemple le résultat donné par l'équation (1.2.13), il est possible d'écrire qu'à une distance r de la sphère, nous avons :

$$|\vec{w}_f^1| \simeq O\left(\frac{V_g a}{r}\right)$$

ce qui implique d'une part que

$$|\vec{\nabla} \vec{w}_f^1| \simeq O\left(\frac{V_g a}{r^2}\right),$$

et d'autre part que

$$|\vec{\Delta} \vec{w}_f^1| \simeq O\left(\frac{V_g a}{r^3}\right).$$

A présent, notons qu'en utilisant l'équation (1.4.1) pour exprimer l'écoulement non perturbé $\vec{w}_f^0$, l'équation (1.4.2) s'écrit

$$(\vec{V}_g \cdot \vec{\nabla}) \vec{w}_f^1 + \left((\vec{A} \cdot \vec{x}) \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{w}_f^1 + \vec{A} \cdot \vec{w}_f^1 + (\vec{w}_f^1 \cdot \vec{\nabla}) \vec{w}_f^1 = -\frac{1}{\rho_f} \vec{\nabla} P^1 + \nu_f \vec{\Delta} \vec{w}_f^1, \quad (1.4.5)$$

et à une certaine distance d de la particule, le rapport des termes visqueux par rapport au premier terme convectif du membre de gauche de l'équation (1.4.5) est alors donné par

$$\left| \frac{(\vec{V}_g \cdot \vec{\nabla}) \vec{w}_f^1}{\nu_f \vec{\Delta} \vec{w}_f^1} \right| = O\left(\frac{d V_g}{\nu_f}\right).$$

Ainsi, il apparaît que ces deux termes deviennent du même ordre de grandeur à une distance donnée par

$$d = \frac{a}{Re},$$

et de ce fait, à cette distance de la particule ces termes convectifs ne peuvent plus, en toute rigueur, être négligés devant les termes visqueux : c'est le fameux problème soulevé par Oseen (1910). Dans la suite, nous appellerons d_{Re} cette distance, et nous garderons en mémoire que

$$\frac{d_{\text{Re}}}{a} \gg 1.$$

En ce qui concerne les autres termes convectifs de l'équation (1.4.5) et toujours pour $|\vec{x}| \simeq O(d)$, nous avons

$$\left| \frac{(\vec{\bar{A}} \cdot \vec{x}) \cdot \vec{\nabla}}{\nu_f \vec{\Delta} w_f^1} \vec{w}_f^1 \right| \sim \left| \frac{\vec{\bar{A}} \cdot \vec{w}_f^1}{\nu_f \vec{\Delta} w_f^1} \right| = O\left(\frac{d^2 |A_{ij}|}{\nu_f}\right).$$

Ces deux termes convectifs deviennent donc du même ordre de grandeur que les termes visqueux à une certaine distance de la particule que nous appellerons d_η , et qui est donnée cette fois par

$$d_\eta = \frac{a}{\sqrt{\eta}}, \quad \text{et de même} \quad \frac{d_\eta}{a} \gg 1.$$

Enfin, en ce qui concerne les termes convectifs quadratiques, il apparaît que quelle que soit la distance à la particule,

$$\left| \frac{(\vec{w}_f^1 \cdot \vec{\nabla}) \vec{w}_f^1}{\nu_f \vec{\Delta} w_f^1} \right| = O\left(\frac{V_g a}{\nu_f}\right) = O(Re) \ll 1,$$

et par conséquent, les termes visqueux seront toujours supposés grands devant les termes convectifs quadratiques. Ces termes ne seront jamais pris en compte, et l'équation qui régit l'écoulement induit sera donc linéaire.

En résumé, dans le domaine fluide, trois zones peuvent être distinguées :

- la zone proche de la particule, $r \in [a, \min(d_{\text{Re}}, d_\eta)]$, où les termes convectifs sont négligeables,
- la zone intermédiaire, $r \in [\min(d_{\text{Re}}, d_\eta), \max(d_{\text{Re}}, d_\eta)]$, où les termes convectifs deviennent du même ordre de grandeur que les termes visqueux,
- puis la zone lointaine $r \gg \max(d_{\text{Re}}, d_\eta)$.

Étant donné que dans le voisinage de la particule, les termes convectifs sont petits devant les termes visqueux, le calcul des effets d'inertie peut se faire à l'aide de la méthode des développements asymptotiques raccordés. Dans la zone située au voisinage de la particule, la vitesse est alors écrite sous la forme de la solution obtenue dans le cadre des écoulements rampants plus une perturbation, et dans la zone lointaine, il est supposé que l'écoulement perçoit la particule comme une force ponctuelle (voir le système d'équations (S1'), page 10). Cette méthode est détaillée en annexe A.6. Initiée par Proudman et Pearson (1957), elle a été considérablement développée par Childress (1964) et Saffman (1968). Notons aussi que dans cette méthode des développements asymptotiques raccordés, le rapport

$$\left(\frac{d_{\text{Re}}}{d_\eta}\right), \quad \text{ou parfois} \quad \left(\frac{d_{\text{Re}}}{d_\eta}\right)^2,$$

apparaît explicitement et différentes simplifications peuvent alors être faites en fonction de sa valeur. En effet, lorsque

$$\left(\frac{d_{\text{Re}}}{d_\eta}\right)^2 \gg 1 \quad \text{c'est à dire,} \quad d_{\text{Re}} \gg d_\eta,$$

cela qui signifie que les effets d'inertie basés sur le cisaillement de l'écoulement se manifestent beaucoup plus près de la particule que les effets d'inertie basés sur le nombre de Reynolds, et de ce fait, ils seront prépondérants. Dans une telle situation, nous parlerons alors d'effets d'inertie de cisaillement pur. Inversement, lorsque

$$\left(\frac{d_{\text{Re}}}{d_\eta}\right)^2 \ll 1, \quad \text{alors} \quad d_{\text{Re}} \ll d_\eta,$$

et nous parlerons d'effets d'inertie de type Oseen.

1.4.1 Écoulement uniforme

Étude d'Oseen (1910)

Lorsque la particule se déplace dans un fluide au repos, cela revient, dans la méthode des développements asymptotiques raccordés décrite en annexe A.6, à poser

$$\vec{V}_f^0 = \vec{0}.$$

L'équation qui régit alors l'écoulement induit, et qui est construite avec le seul terme convectif non négligeable dans ce cas là est donnée par

$$(-\vec{V}_p \cdot \vec{\nabla}) \vec{w}_f^1 = -\frac{1}{\rho_f} \vec{\nabla} P^1 + \nu_f \vec{\Delta} \vec{w}_f^1,$$

et porte le nom d'équation d'Oseen (1910). Dans ce cas particulier, cette équation admet une solution analytique (voir par exemple Happel et Brenner, 1983) et la comparaison avec la solution des équations de Stokes stationnaires (1.2.3) et (1.2.4) montre que le terme $(-\vec{V}_p \cdot \vec{\nabla}) \vec{w}_f^1$ pris en compte dans l'équation d'Oseen est responsable de l'apparition d'un sillage en amont de la particule. L'existence de ce sillage implique d'ailleurs une perte de la symétrie par rapport au plan contenant le centre de la particule et qui est perpendiculaire à sa vitesse. De ce fait, la force de traînée subie par la particule est plus grande que celle obtenue en écoulement de Stokes et est alors donnée par

$$\vec{F}^1 = -6\pi\mu_f a \left(1 + \frac{3}{8} Re\right) \vec{V}_p.$$

Notons que le terme qui vient s'ajouter à la traînée de Stokes est appelé correction d'Oseen.⁷

Aussi, la validité de ce résultat a été vérifiée expérimentalement par Maxworthy (1965a) qui, à l'aide d'un dispositif expérimental fin, a montré que la correction d'Oseen donne de très bons résultats jusqu'à des valeurs de Re de l'ordre de 0.4. Notons aussi que ce résultat se généralise facilement au cas d'une particule qui se déplace dans un écoulement uniforme.

Pour affiner le résultat Oseen (1910), Proudman et Pearson (1957) sont parvenus à calculer les termes correctifs d'ordres supérieurs en exprimant la vitesse de perturbation de la solution de Stokes en une série de termes en puissance de Re . Ils ont obtenu alors

$$\vec{F}^1 = -6\pi\mu_f a \left(1 + \frac{3}{8} Re + \frac{9}{40} Re^2 \ln Re\right) \vec{V}_p.$$

Toujours selon les résultats de Maxworthy (1965a), cette relation est applicable pour des nombres de Reynolds de l'ordre de 0.65, mais paradoxalement, elle est moins précise que la correction d'Oseen simple lorsque le nombre de Reynolds est inférieur à 0.45, ce qui réduit notablement la plage d'utilisation de cette expression.

Enfin, signalons que pour estimer la traînée stationnaire subie par une particule pour des plus grands nombres de Reynolds, il devient nécessaire d'utiliser des corrélations empiriques du type par exemple de celle de Clift et Gauvin (1970) (voir dans Clift *et al.* 1978, ou encore dans la thèse de M. Abbad 2003).

1.4.2 Écoulement simplement cisailé

Étude de Saffman (1965)

Nous nous intéressons maintenant à la célèbre étude de Saffman (1965) (plus le *corrigendum* 1968). Pour tenter d'expliquer pourquoi une particule plongée dans un écoulement de Poiseuille a tendance à migrer vers le centre de la conduite, Saffman a réalisé une étude permettant de mettre en évidence le rôle des effets d'inertie. Aussi, pour simplifier le problème, il a considéré que la particule était plongée dans un écoulement simplement cisailé et dans son cas, la vitesse de l'écoulement non perturbé et la vitesse de la particule sont données (voir figure 1.4) par :

7. Le nombre de Reynolds qui apparaît dans cette force est basé sur le rayon de la particule et non sur le diamètre ! il arrive parfois, dans la littérature, qu'il y ait confusion.

$$\vec{V}_f^0 = A_{13} Z \vec{e}_1 \quad \text{et} \quad \vec{V}_p = V_p \vec{e}_1 ,$$

où Z est la coordonnée suivant $\vec{e}_3$ dans le référentiel $\mathcal{R}_0$, et A_{13} est le coefficient de cisaillement de l'écoulement non perturbé. Ainsi, dans cette étude,

$$\vec{w}_f^0 = (A_{13} z + V_g) \vec{e}_1$$

avec

$$V_g = A_{13} Z_p - V_p \quad \text{et} \quad z = Z - Z_p .$$

Par ailleurs, Saffman (1965) a également considéré que

$$d_\eta \ll d_{Re}, \quad \text{i.e.} \quad 1 \gg \left(\frac{a^2 A_{13}}{\nu_f} \right)^{1/2} \gg \left(\frac{a V_g}{\nu_f} \right) ,$$

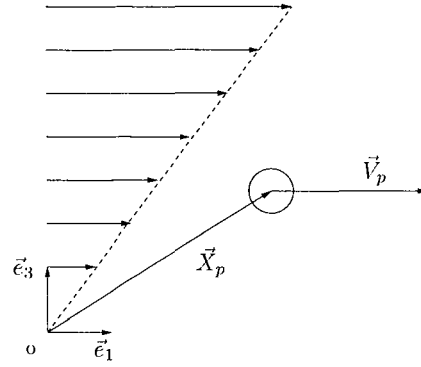


FIG. 1.4 – Configuration de l'étude de Saffman.

de sorte que les effets d'inertie obtenus sont donc (conformément aux définitions posées en début de section) des effets de cisaillement pur. Dans une telle configuration, nous avons déjà vu que si aucun terme convectif n'est pris en compte, la particule ne subit qu'une force colinéaire à l'écoulement non perturbé. Ici, et parce que les termes convectifs modifient l'écoulement induit lointain, ces derniers sont responsables du fait que la force transversale subie par la particule n'est pas nulle, et elle est donnée par

$$\vec{F}^1 \cdot \vec{e}_3 = 6.46 \mu_f a \left(\frac{a^2 A_{13}}{\nu_f} \right)^{1/2} V_g .$$

Étude de Harper et Chang (1968) et Miyazaki *et al.* (1995b)

Par la suite, l'étude de Saffman a été généralisée au cas d'une particule qui admet un mouvement quelconque, dans les trois directions de l'espace (en supposant toujours que $d_\eta \ll d_{Re}$). Tout d'abord, par Harper et Chang (1968), mais dont les résultats ont été remis en cause quelques années plus tard par Miyazaki *et al.* (1995b). Ces derniers ont obtenu les valeurs des composantes du tenseur de mobilité $\overline{\overline{M}}$ dans le cadre des écoulements cisailés, et en reprenant la configuration d'écoulement décrite précédemment, la force qui s'exerce sur la particule est donnée par

$$\vec{F}^1 = 6\pi\mu_f a \left(\overline{\overline{I}} + \left(\frac{a^2 A_{13}}{\nu_f} \right)^{1/2} \overline{\overline{M}} \right) \cdot \vec{V}_g$$

où $\overline{\overline{I}}$ est le tenseur identité et

$$\overline{\overline{M}} = \begin{pmatrix} 0.0743 & 0 & 0.944 \\ 0 & -0.577 & 0 \\ 0.343 & 0 & 0.327 \end{pmatrix} .$$

Notons que conformément au résultat de Saffman (1968), il apparaît bien que $6\pi \times 0.343 \simeq 6.46$.

A présent, nous pouvons faire une petite remarque à propos de ce résultat. En effet, si la vitesse de la particule suivant $\vec{e}_3$ est non nulle, alors Z_p varie au cours du temps et par conséquent $\vec{V}_g$ devient également une fonction du temps. Ainsi, et même si dans cette étude, les termes convectifs $(\vec{V}_g \cdot \vec{\nabla}) \vec{w}_f^1$ ne sont pas pris en compte, l'écoulement induit vérifie une condition limite instationnaire sur la particule. Il n'est donc pas, en toute rigueur, légitime de supprimer le terme $\partial \vec{w}_f^1 / \partial t$ dans les équations de Navier-Stokes linéarisées. En fait, l'étude de Saffman ne peut être généralisée rigoureusement que dans le cas d'un mouvement permanent, entièrement contenu dans le plan perpendiculaire au gradient de l'écoulement cisailé, ici $(o, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

Étude de McLaughlin (1991)

Toujours dans le cadre des écoulements cisailés, McLaughlin (1991) a généralisé l'étude de Saffman aux situations où les termes $(\vec{V}_g \cdot \vec{\nabla}) \vec{w}_f^1$ ne sont plus négligeables dans l'équation (1.4.5). Dans un tel cas,

la méthode des développements asymptotiques raccordés fait donc intervenir explicitement le rapport entre d_{Re} et d_η , à savoir ici $\varepsilon = (A_{13}\nu_f)^{1/2}/V_g$ et McLaughlin trouve alors que la force transversale qui s'exerce sur la particule est donnée par

$$\vec{F}^1 \cdot \vec{e}_3 = \frac{9}{\pi} \mu_f a V_g \left(\frac{a^2 A_{13}}{\nu_f} \right)^{1/2} J(\varepsilon)$$

où $J(\varepsilon)$ est une fonction calculée numériquement (voir le tableau 1.1). Bien entendu lorsque le rapport $\varepsilon = d_{Re}/d_\eta$ tends vers l'infini, alors $J(\varepsilon) \simeq 2.255$, ce qui implique que $9J(\varepsilon)/\pi \rightarrow 6.46$, ce qui est alors conforme au résultat de Saffman (1968).

ε	$J(\varepsilon)$	ε	$J(\varepsilon)$
0.025	-0.0000133	0.7	1.2554
0.05	-0.0002845	0.8	1.436
0.1	-0.004658	0.9	1.576
0.15	-0.01458	1.0	1.979
0.2	-0.01247	1.5	1.979
0.25	0.02782	2.0	2.094
0.3	0.1179	5.0	2.227
0.4	0.4076	10.0	2.247
0.5	0.7350	20.0	2.252
0.6	1.0236	∞	2.255

TAB. 1.1 – Différentes valeurs de $J(\varepsilon)$ - McLaughlin (1991)

1.4.3 Écoulement en rotation solide

Étude de Childress (1964)

La méthode des développements asymptotiques raccordés peut également être appliquée pour prévoir l'effet des termes convectifs sur le mouvement permanent d'une sphère dans un écoulement en rotation solide. Ainsi, Childress (1964) a étudié l'effet de la rotation sur la traînée qui s'exerce sur une sphère qui se déplace à vitesse constante, le long de l'axe de la rotation (voir figure 1.5). En coordonnées cartésiennes, la rotation solide autour de l'axe $(o, \vec{e}_3)$ s'écrit :

$$\vec{V}_f^0 = -\omega Y \vec{e}_1 + \omega X \vec{e}_2 \quad \text{et ici,} \quad \vec{V}_p = V_p \vec{e}_3.$$

Dans ce cas, le tenseur $\overline{\overline{A}}$ est en fait antisymétrique, et il est donné par

$$A_{12} = -A_{21} = -\omega.$$

Dans son étude, Childress a pris en compte tous les termes convectifs (sauf bien sûr, les termes quadratiques) et le nombre de Reynolds basé sur le cisaillement a été défini par ce dernier comme un nombre de Taylor. Ainsi, en posant

$$Re = \frac{a V_p}{\nu_f} \quad \text{et} \quad Ta = \frac{a^2 \omega}{\nu_f},$$

et de même que dans l'étude de McLaughlin, la méthode des développements asymptotiques raccordés fait intervenir un paramètre qui contient le rapport entre d_{Re} et d_η , à savoir :

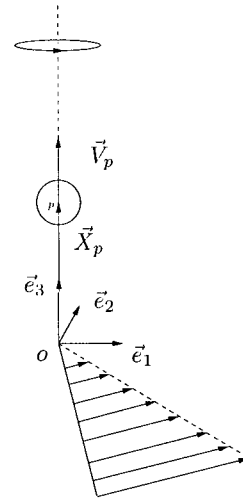


FIG. 1.5 – Étude de Childress (1964).

$$\alpha = \frac{2 \text{Ta}}{Re^2} = \frac{2 \omega \nu_f}{V_p^2} = 2 \left(\frac{d_{Re}}{d_\eta} \right)^2.$$

Dans ce document, nous aurons l'occasion de revenir longuement sur la résolution de ce problème et donc, notons simplement ici que celle-ci conduit à une expression de la force induite donnée par

$$\vec{F}^1 \cdot \vec{e}_3 = -6\pi\mu_f a \left(1 + Re \mathcal{B}(\alpha) \right) V_p,$$

et où

$$\mathcal{B}(\alpha) = \frac{3}{4} \int_0^1 \left((t^2 - 4i\alpha t)^{1/2} + (t^2 + 4i\alpha t)^{1/2} \right) (3t^2 - 1) dt.$$

Pour α compris entre 0 et 1, différentes valeurs de $\mathcal{B}(\alpha)$ sont reprises dans le tableau 1.2

α	$\mathcal{B}(\alpha)$	α	$\mathcal{B}(\alpha)$
0	3/8	0.40	0.379
0.05	0.367	0.45	0.386
0.10	0.359	0.50	0.395
0.15	0.356	0.60	0.411
0.20	0.356	0.70	0.429
0.25	0.360	0.80	0.445
0.30	0.365	1.00	0.479
0.35	0.371	--	--

TAB. 1.2 – Différentes valeurs de $\mathcal{B}(\alpha)$ pour $0 < \alpha < 1$

Précisons également que pour $\alpha > 1/4$, Childress a montré que $\mathcal{B}(\alpha)$ pouvait être exprimée sous la forme d'un développement en puissance de α donné par,

$$\mathcal{B}(\alpha) = \frac{2\sqrt{2}\alpha}{7} \left(1 + \frac{7}{40\alpha} + \frac{15}{1408\alpha^2} - \frac{49}{39936\alpha^3} + \dots \right),$$

et que nous utiliserons par la suite. Aussi, au vu de ce résultat, nous voyons que la fonction $\mathcal{B}(\alpha) \rightarrow (4/7)\text{Ta}^{1/2}/Re$ pour des valeurs de α grandes devant 1 (en fait, dès que α est de l'ordre de quelques unités) et en résumé, il apparaît que

$$\begin{cases} \mathcal{B}(\alpha) \rightarrow \frac{3}{8} & \text{si } \alpha \rightarrow 0 \text{ (Effets d'Oseen)} \\ \mathcal{B}(\alpha) \rightarrow \frac{4}{7} \frac{\text{Ta}^{1/2}}{Re} & \text{si } \alpha \rightarrow \infty \text{ (Effets de cisaillement pur).} \end{cases}$$

Notons pour finir que les résultats de Childress (1964) ont été vérifiés expérimentalement par Maxworthy (1965b) et par nous mêmes dans la suite de ce document.

Étude de Gotoh (1990)

Dans le cadre de l'hypothèse $d_\eta \ll d_{Re}$, c'est à dire lorsque les termes $(\vec{V}_g \cdot \vec{\nabla})\vec{w}_f^1$ peuvent être négligés dans les équations stationnaires de Navier-Stokes (1.4.5) qui rappelons le, ont été écrites dans le référentiel de Koenig, Gotoh (1990) a généralisé le résultat de Childress au cas d'une particule qui se déplace arbitrairement dans un écoulement en rotation solide (voir également Miyazaki *et al.*, 1995b). Dans cette situation, la force qui s'exerce sur la particule est alors donnée par :

$$\vec{F}^1 = 6\pi\mu_f a \left(\vec{I} + \left(\frac{a^2\omega}{\nu_f} \right)^{1/2} \overline{\overline{M}}^G \right) \cdot \vec{V}_g,$$

avec dans ce cas là :

$$\overline{\overline{M}}^G = \begin{pmatrix} (3\sqrt{2}/280)(19 + 9\sqrt{3}) & -(3\sqrt{2}/280)(19 - 9\sqrt{3}) & 0 \\ (3\sqrt{2}/280)(19 - 9\sqrt{3}) & (3\sqrt{2}/280)(19 + 9\sqrt{3}) & 0 \\ 0 & 0 & 4/7 \end{pmatrix}.$$

Notons que la composante M_{33}^G de ce tenseur de mobilité est alors bien conforme au résultat de Childress lorsque $\alpha \gg 1$. Aussi, insistons sur le fait que ce résultat n'est valable que si la particule admet une vitesse de glissement qui ne dépend pas du temps. En effet, si cette condition n'est pas satisfaite, nous pouvons faire la même remarque que celle qui a été faite précédemment, à savoir, qu'il n'est pas alors légitime de négliger le terme $\partial \bar{w}_f^1 / \partial t$ dans les équations de Navier-Stokes linéarisées. Cette remarque est importante et nous reviendrons sur ce point dans le chapitre 5.

Enfin, pour terminer cette partie consacrée à l'étude de Gotoh (1990), faisons une petite remarque. Conceptuellement, il est vrai que si la particule est suffisamment petite, on est tenté de dire que l'écoulement non perturbé vu par la sphère dans le cas de la rotation solide est semblable à l'écoulement vu par la particule dans un écoulement cisailé... Mais ce n'est pas le cas car les effets d'inertie dépendent de l'expression de l'écoulement loin de la particule, et c'est d'ailleurs ce qui apparaît lorsque la méthode des développements asymptotiques raccordés est appliquée. Or en invoquant l'écoulement loin de la particule, les différences entre un écoulement cisailé et un écoulement en rotation solide sont conséquentes et de ce fait, les forces induites par les termes convectifs sont elles aussi très différentes. Par exemple, imaginons le cas d'une particule maintenue fixe (i.e. $V_p = 0$) premièrement dans un écoulement en rotation solide et deuxièmement dans un écoulement cisailé, mais de sorte que $|\vec{V}_g|$ soit identique dans les deux cas. Supposons ensuite que le taux de cisaillement que nous avons écrit A_{13} soit égal au taux de rotation ω et comparons la force de portance subie par la particule dans les deux cas :

$$\frac{\text{Force transversale de Saffman}}{\text{Force transversale de Gotoh}} = \frac{0.343}{(3\sqrt{2}/280)(19 - 9\sqrt{3})} \simeq 6.63,$$

Ainsi, nous voyons que la force de portance subie par la particule dans un écoulement cisailé sera plus de 6 fois supérieure à celle obtenue dans le cas de la rotation solide ! La différence entre les deux situations est donc significative, et par ailleurs, rappelons que dans le cas de la rotation solide, la particule subit un gradient de pression de l'écoulement non perturbé, alors qu'il n'en est rien dans le cas d'un écoulement cisailé...

Étude d'Herron *et al.* (1975)

Herron *et al.* (1975) se sont également intéressés au problème qui correspond au mouvement quasi-stationnaire d'une particule solide qui se déplace dans un écoulement en rotation solide, et toujours lorsque $\alpha \gg 1$. Mais à la différence de ce qui a été fait dans l'étude de Gotoh (1990), où les équations de l'écoulement induit ont été écrites dans le référentiel de Koenig, Herron *et al.* (1975) ont choisi de mener leur étude dans un référentiel en rotation par rapport à $\mathcal{R}_0$ et dont la vitesse angulaire est égale à celle de l'écoulement. Dans le chapitre 5, nous détaillerons les équations de l'écoulement induit qu'ils ont ainsi considérées, mais ici, écrivons simplement que dans cette situation, Herron *et al.* (1975) ont obtenu le tenseur de mobilité suivant :

$$\overline{\overline{M}}^H = \begin{pmatrix} 5/7 & -3/5 & 0 \\ 3/5 & 5/7 & 0 \\ 0 & 0 & 4/7 \end{pmatrix}.$$

Cette différence avec le résultat de Gotoh (1990) peut sembler déconcertante au premier abord, mais celle-ci provient du fait qu'il n'est pas possible de supposer que l'écoulement induit soit décrit par des équations stationnaires dans les deux référentiels à la fois : les situations physiques analysées par Gotoh (1990) et par Herron *et al.* (1975) sont donc différentes. Ce point est intéressant et il a motivé une étude approfondie qui sera détaillée dans le chapitre 5 de cette thèse.

1.5 Effets des termes convectifs (problèmes instationnaires)

1.5.1 Effets d'inertie sur l'expression de la force de masse ajoutée

Avant de continuer à décrire les effets des termes convectifs sur l'écoulement induit lointain, revenons un instant sur l'expression de la force de masse ajoutée qui est obtenue dans le cadre des écoulements rampants instationnaires. Par exemple, lorsque l'écoulement non perturbé est linéaire, nous avons vu que la force de masse ajoutée est donnée par

$$-\frac{1}{2} m_f \frac{d}{dt} (\vec{V}_p - \vec{V}_f^0(\vec{X}_p))$$

comme le montre l'équation (1.3.4) (page 22). Or, cette expression, qui a été obtenue dans la limite où Re et η tendent vers 0, est parfois remise en question du fait des effets d'inertie. En effet, en s'intéressant aux forces exercées par un écoulement de fluide parfait irrotationnel mais non uniforme autour d'une sphère ($Re \gg 1$), Auton (1987) a établi que la force de masse ajoutée exercée par le fluide sur la particule était donnée par

$$-\frac{1}{2} m_f \left(\frac{d\vec{V}_p}{dt} - \frac{D\vec{V}_f^0}{Dt} \Big|_{\vec{X}_p} \right).$$

Aussi, ce résultat a été confirmé par l'étude numérique de Magnaudet *et al.* (1995) y compris dans le cadre des écoulements visqueux à faibles nombres de Reynolds. En pratique, la différence entre ces deux dérivées peut devenir significative lorsque le nombre de Reynolds devient grand. Mais, signalons que dans le cadre des écoulements rampants, cette différence est bien entendu minime et conduit à une force de masse ajoutée quasiment identique. Pour s'en convaincre, reprenons l'exemple correspondant à un écoulement non uniforme linéaire,

$$\vec{V}_f^0 = \bar{\bar{A}} \cdot \vec{X},$$

et supposons, dans un souci de simplicité, que les composantes de $\bar{\bar{A}}$ sont constantes dans le temps. La différence entre les deux types de dérivées impliquées dans la force de masse ajoutée d'Auton et de l'équation (1.3.4) est alors donnée par

$$\frac{1}{2} m_f \left(\frac{D\vec{V}_f^0}{Dt} \Big|_{\vec{X}_p} - \frac{d\vec{V}_f^0(\vec{X}_p)}{dt} \right) = \frac{1}{2} m_f \bar{\bar{A}} \cdot (\vec{V}_f^0(\vec{X}_p) - \vec{V}_p).$$

En considérant que $|A_{ij}|$ est l'ordre de grandeur des composantes de $\bar{\bar{A}}$ et en comparant l'expression de la différence entre ces accélérations par rapport à la traînée de Stokes, i.e. $6\pi\mu_f a(\vec{V}_f^0(\vec{X}_p) - \vec{V}_p)$, il apparaît que celle-ci est en $O(a^2|A_{ij}|/\nu_f)$ or ce terme correspond au nombre de Reynolds de cisaillement : par hypothèse, il est très petit devant 1.

1.5.2 Effets d'inertie instationnaires dans les écoulements uniformes

A présent, et dans la continuité de ce qui a été fait dans la partie 1.4, nous allons discuter des conséquences qui résultent du fait que les termes convectifs ne soient plus négligeables à une certaine distance de la particule, mais cette fois lorsque le problème est instationnaire. Pour cela, rappelons nous que dans le cadre des écoulements rampants, lorsque le mouvement de la particule est instationnaire, la particule subit une force dite d'histoire. En outre, nous avons aussi vu que cette force instationnaire relaxe en $1/\sqrt{t}$ et que cela est la conséquence du processus de diffusion de la vorticité dans le domaine fluide qui entoure la particule. Nous comprenons donc que lorsque cette vorticité aura diffusé jusqu'à une région de l'espace où les termes convectifs ne sont plus négligeables devant les termes visqueux, alors la diffusion visqueuse ne sera plus le seul mode de transport de la vorticité. Ce phénomène aura pour conséquence de modifier le temps de relaxation de cette force instationnaire. En d'autres termes, cela aura des conséquences sur l'expression du noyau de la force d'histoire qui, pour prendre en compte les effets d'inertie, ne pourra plus être exprimée simplement en $1/\sqrt{t}$. Dans cette section, nous allons donc nous intéresser aux principaux résultats obtenus dans une configuration instationnaire et avec prise en compte des termes convectifs, tout d'abord dans le cadre des écoulements uniformes, puis dans le cadre des écoulements cisailés.

Mouvement impulsional de la sphère

Initialement, l'étude de Bentwich et Miloh (1978) que nous avons déjà détaillée (voir annexe A.4) avait pour objectif de capturer les effets d'inertie sur la décroissance aux temps longs de la force d'histoire, à l'aide de la méthode des développements asymptotiques raccordés. Ils cherchaient donc une solution sous la forme

$$\psi = \psi^0(t) + Re \psi^1(t) + O(Re^2)$$

où le premier terme de ce développement correspond à la solution des équations de Stokes instationnaires... Cependant, le second terme qu'ils ont obtenu présentait quelques inconsistances physiques. C'est donc Sano (1981), qui en complétant leur étude, a pu obtenir l'expression de la force qui s'exerce sur une

particule dont le mouvement est impulsif, avec prise en compte des effets d'inertie. Mais avant de détailler ce résultat, faisons quelques commentaires.

Dans cet exemple, il est supposé qu'à l'instant $t = 0_+$, la particule se met brutalement en mouvement. Ainsi, tant que la vorticité générée à cet instant reste confinée au voisinage de la particule et n'a pas diffusé jusqu'à une certaine distance où le transport convectif de la vitesse devient significatif, alors la force instationnaire qui s'exerce sur la particule relaxe en $1/\sqrt{t}$ comme le prédit la solution obtenue en écoulement de Stokes et donnée par l'équation (1.3.2). Or dans le cadre des écoulements uniformes, la distance à laquelle les termes convectifs deviennent du même ordre de grandeur que les termes visqueux est donnée par $d_{Re} = a/Re$. Le temps que met la vorticité pour diffuser jusqu'à cette distance à la particule est alors donné par

$$T \propto \frac{d_{Re}^2}{\nu_f} = \frac{1}{Re^2} \left(\frac{a^2}{\nu_f} \right).$$

En terme de temps sans dimension,

$$t' = \frac{\nu_f}{a^2} t$$

il apparaît donc que dans cette étude, la force qui s'exerce sur la particule doit être correctement décrite par l'équation (1.3.2) tant que

$$Re^2 t' < 1.$$

Précisons maintenant que pendant ce laps de temps, la particule a parcouru une certaine distance (donnée par $V_p T$) et par conséquent, la vorticité générée au démarrage de la particule se trouve ensuite confinée son sillage amont. A ce stade, les termes convectifs commencent à jouer un rôle sur le processus de relaxation de la force subie par la particule. Aussi, le lecteur intéressé trouvera davantage de détails concernant cette étude phénoménologique dans une annexe de l'article de Lovalenti et Brady (1993a), réalisée par E.J. Hinch.

En ayant bien à l'esprit ce qui vient d'être écrit, intéressons nous maintenant à l'expression de la force instationnaire obtenue par Sano (1981). Celle-ci est donnée par

$$\begin{aligned} \vec{F}^1 = 6\pi\mu_f a \vec{V}_p \left\{ \underbrace{H(t') + \frac{1}{9}\delta(t') + \frac{1}{\sqrt{\pi t'}}}_{\text{Solution de Stokes}} + \underbrace{\frac{3}{8}Re \left[\left(1 + \frac{4}{Re^2 t'^2}\right) \text{erf}(Re\sqrt{t'}/2) \right]}_{(i)} \right. \\ \left. + \underbrace{\frac{2}{\sqrt{\pi t'} Re} \left(1 - \frac{2}{Re^2 t'}\right) \exp(-Re^2 t'/4) - \frac{8}{3\sqrt{\pi t'} Re}}_{(ii)} + \frac{9}{40} Re^2 \ln Re \right\}. \end{aligned} \quad (1.5.1)$$

Ce résultat est bien en accord avec le fait qu'aux temps courts, i.e. $t' = O(1)$, nous avons donc $Re^2 t' \ll 1$ et les termes (i) + (ii) tendent bien vers 0 conformément au fait que la force exercée par l'écoulement induit est correctement décrite par l'équation (1.3.2). Puis, aux temps longs, i.e. $t' \gg 1/Re^2$, il apparaît à cause du terme (i) et parce que la fonction $\text{erf}(Re\sqrt{t'}/2)$ tend vers 1, que la force décroît temporellement en $1/t'^2$. Ce résultat est très important car il montre que la force d'histoire classique de Boussinesq-Basset n'est plus valable aux temps longs. Cette décroissance en $1/t'^2$ au lieu de $1/\sqrt{t'}$ explique d'ailleurs pourquoi, lorsqu'une particule est relâchée dans un fluide au repos, elle atteint sa vitesse terminale après un laps de temps plus court que celui obtenu par résolution de l'équation de mouvement de la particule impliquant la force donnée par (1.3.2).

Remarquons cependant que ce résultat n'est *a priori* valable que pour une particule dont le mouvement est issu d'une accélération impulsif. Dans un tel cas, le mouvement de la particule n'est instationnaire qu'à $t = 0_+$. Si maintenant, la particule a un mouvement propre plus complexe que celui considéré par Sano (1981), alors contrairement au cas précédent, la particule va continuer à générer de la vorticité au cours du temps. Ainsi, tant que cette "nouvelle vorticité" (imaginons par exemple qu'elle a été générée à l'instant $\tau < t$) n'aura pas diffusé jusqu'à la région d'Oseen, sa contribution hydrodynamique relaxera en $1/\sqrt{t - \tau}$. Pour tenter de décrire correctement la force d'histoire qui s'exerce sur une particule dont le mouvement est arbitraire, il faut alors que son noyau se comporte comme celui de Boussinesq-Basset aux

temps courts, et qu'il admette une décroissance temporelle plus rapide aux temps longs. C'est dans cet esprit que Mei *et al.* (1992) ont élaboré, à partir de l'étude numérique d'un mouvement oscillant d'une particule solide, un noyau empirique donné par :

$$K(t - \tau) = \left[\left[\frac{\pi \nu_f}{a^2} (t - \tau) \right]^{1/4} + \left[\frac{\pi \nu_f^2}{16 a^4} \left(\frac{Re_D(\tau)}{0.75 + 0.105 Re_D(\tau)} \right)^3 (t - \tau)^2 \right]^{1/2} \right]^{-2}.$$

En effet, ce noyau tend bien vers l'expression de Boussinesq-Basset aux temps courts et admet une décroissance en $1/(t - \tau)^2$ aux temps longs. Précisons également que le noyau empirique de Mei *et al.* (1992) a été établi pour un nombre de Reynolds construit avec le diamètre de la particule et non le rayon, c'est à dire $Re_D = 2a|\vec{V}_g(t)|/\nu_f$.

Toujours dans le cadre des écoulements uniformes et à petits nombres de Reynolds, Lovalenti et Brady (1993a) ont pu, par application du théorème de réciprocité généralisé, calculer de manière très générale la force qui s'exerce sur une particule dont le mouvement est arbitraire, tout en prenant compte les effets des termes convectifs. Compte tenu de la complexité de l'expression de la force ainsi obtenue, celle-ci est reportée en annexe A.7, mais notons qu'à la différence du noyau de Mei *et al.* (1992), leur solution est analytique. A l'aide de cette expression, Lovalenti et Brady (1993a) ont obtenu deux résultats forts :

- Premièrement, ils ont montré que le comportement aux temps longs de la force d'histoire dépend de la nature du mouvement de la particule, *mais dans tous les cas*, la décroissance de la force d'histoire aux temps longs est plus rapide que celle prédite par la théorie des écoulements de Stokes.
- Deuxièmement, ils ont montré que l'expression de la force qui s'exerce sur la particule lorsque son mouvement est instationnaire ne correspond aucunement à la somme de l'équation BBO (1.3.2) et de la correction stationnaire d'Oseen.

1.5.3 Effets d'inertie basés sur le nombre de Reynolds de cisaillement

Nous nous intéressons maintenant aux effets instationnaires des termes convectifs basés sur le nombre de Reynolds de cisaillement. Précisons qu'à l'heure actuelle, la recherche concernant ces effets instationnaires est moins avancée que celle qui concerne les effets d'inertie lorsque l'écoulement est uniforme. Par exemple, il n'y pas d'équivalent aux travaux de Lovalenti et Brady (1993a) où de Mei *et al.* (1992). Toutefois et pour les mêmes raisons que celles exposées précédemment, lorsque le mouvement de la particule est instationnaire, le passé proche de la force d'histoire doit être en accord avec l'expression obtenue en écoulement de Stokes instationnaire. Aussi, il est clair que les termes convectifs basés sur la non uniformité de l'écoulement n'adoptent pas leurs formes stationnaires immédiatement et que de ce fait, si le mouvement de la particule est quelconque, l'expression de la force instationnaire qui s'exerce sur la particule ne doit pas être la somme des effets d'inertie obtenus en régime stationnaire plus la force d'histoire.

Par exemple, dans le cadre des écoulements cisailés, et dans le cas où les effets d'inertie de cisaillement dominent les effets d'inertie du type Oseen, i.e. $\sqrt{\eta} \gg Re$, Miyazaki *et al.* (1995b), puis par la suite Asmolov et McLaughlin (1999) ont chacun considéré le mouvement oscillant (donc instationnaire) d'une particule et ont obtenu une expression de la force de portance en fonction de la fréquence d'oscillation. De manière générale, les résultats qu'ils ont obtenus montrent que lorsque le mouvement de la particule est instationnaire, la force de portance est différente de celle obtenue en écoulement stationnaire. Dans le chapitre 6 et en thème de recherche complémentaire, nous aborderons ce point qui sort du cadre des écoulements en rotation solide et nous proposerons une expression approchée de la force de portance instationnaire calculée à partir des résultats d'Asmolov et McLaughlin (1999).

1.6 Effets de paroi en écoulement de Stokes

Dans la suite de ce travail, nous serons également confrontés à des effets de paroi sur la vitesse de sédimentation de nos particules. Pour cette raison, il est également important que nous nous intéressions aussi aux différentes approches analytiques permettant de calculer les corrections de traînées qui proviennent de ces effets.

Dans cette partie et afin de simplifier le problème, l'écoulement induit sera supposé régi par les équations de Stokes stationnaires (1.2.2). Dans ce cadre, nous avons vu que quel que soit l'écoulement

non perturbé, le champ de vitesse de l'écoulement induit, qui peut être entièrement déterminé à l'aide de la solution générale de Lamb, va décroître (à l'ordre dominant en a/r) si le milieu est infini. Cette décroissance du champ de vitesse est donc lente et la forme stationnaire de l'écoulement de perturbation s'étend donc dans un domaine fluide assez important, comparativement à la taille de la particule. Ainsi, il faut que le domaine fluide soit suffisamment grand pour que la condition limite (1.1.18) soit vérifiée. Bien souvent, ce n'est pas le cas, et en particulier lorsque le domaine est confiné entre des parois matérielles où le fluide doit vérifier sur ces surfaces une condition d'adhérence.

Soit $\vec{x}_s$ un vecteur définissant un point de la surface considérée par rapport au centre de la particule et posons

$$\mathcal{C}(\vec{x}_s)$$

l'ensemble des vecteurs $\vec{x}_s$ décrivant le lieu de la paroi par rapport à la particule. Dans ce contexte, la condition limite (1.1.18) devient alors

$$\vec{w}_f^1 \rightarrow 0 \quad \text{lorsque} \quad |\vec{x}| \rightarrow \infty \quad \text{ou bien} \quad \vec{w}_f^1 = \vec{0} \quad \text{si} \quad \vec{x} \in \mathcal{C}(\vec{x}_s), \quad (1.6.1)$$

et bien entendu, c'est cette seconde partie de (1.6.1) qui sera responsable d'une modification de l'écoulement induit et par conséquent, de l'expression de la force qui s'applique sur la particule.

Pour parvenir à obtenir l'expression de $\vec{F}^1$ dans ce cas là, il existe la méthode des "réflexions", qui est décrite en annexe A.8. Le principe de base de cette approche consiste à rechercher la solution du problème sous la forme d'une série

$$\vec{w}_f^1 = \vec{w}_0 + \vec{w}_1 + \vec{w}_2 + \dots$$

où $\vec{w}_0$ est la solution de Lamb en milieu infini. Comme ce premier terme ne vérifie pas la bonne condition limite sur la paroi, il faut imposer au second terme de compenser $\vec{w}_0$ à la paroi. Pour simplifier la détermination de ce nouveau terme, il est commode d'essayer de l'obtenir en faisant comme si la particule n'était pas là. A ce moment là, $\vec{w}_1$ compense $\vec{w}_0$ à la paroi, mais il ne vérifie pas la bonne condition limite sur la particule et il faut imposer à $\vec{w}_2$ de compenser $\vec{w}_1$ sur la particule et ainsi de suite. En procédant de cette manière, à chaque étape, la solution obtenue, si elle converge, converge vers la solution exacte du problème. Dans la pratique, seuls les premiers termes sont significatifs et permettent d'obtenir les effets de la paroi sur l'expression de la force qui s'applique sur la particule.

Dans la suite, nous allons détailler les résultats obtenus en conduite cylindrique puisque ces derniers nous seront utiles ultérieurement, mais le lecteur intéressé par les effets de paroi trouvera plusieurs autres exemples dans Happel et Brenner (1983).

1.6.1 Effets de paroi en conduite cylindrique

En appliquant cette méthode de réflexion au cas d'une particule qui se déplace à vitesse constante, parallèlement aux parois dans une conduite cylindrique de rayon R et de longueur infinie, Brenner (1964) a pu établir que la force exercée par le fluide sur la particule est donnée par

$$\vec{F}^1 = -6\pi\mu_f a \vec{V}_p \left(1 + f\left(\frac{R_p}{R}\right) \left(\frac{a}{R}\right) \right),$$

où R_p est la distance de la particule à l'axe de la conduite. Lorsque la particule est près de l'axe de la conduite, i.e. lorsque $R_p \ll R$, alors la fonction $f(R_p/R)$ peut être approchée par

$$f\left(\frac{R_p}{R}\right) = 2.104444 - 0.6977 \left(\frac{R_p}{R}\right)^2 + O\left(\frac{R_p}{R}\right)^4,$$

sinon, le tableau 1.3 reprend les valeurs de $f(R_p/R)$ pour différentes positions de la particule. Enfin, précisons que lorsque $R_p/R \rightarrow 1$, celles-ci sont données par

$$\lim_{R_p/R \rightarrow 1} f\left(\frac{R_p}{R}\right) = \frac{9}{16(1 - R_p/R)}.$$

Il est intéressant de remarquer que les effets de paroi sont quasiment constants dans toute la section. Ce point sera d'ailleurs vérifié expérimentalement dans la suite de ce travail.

R_p/R	$f(R_p/R)$	R_p/R	$f(R_p/R)$
0.0	2.10444	0.40	2.04401
0.01	2.10436	0.41	2.04407
0.03	2.10381	0.43	2.04530
0.05	2.10270	0.45	2.04825
0.10	2.09763	0.50	2.06566
0.20	2.07942	0.60	2.16965
0.30	2.05691	0.70	2.45963
0.35	2.04805	0.80	3.2316
0.37	2.04567	0.90	5.905
0.39	2.04426	—	—

TAB. 1.3 – Différentes valeurs de $f(R_p/R)$ pour $0 < r_p/R < 1$ – Happel et Brenner (1983)

Mais pour terminer cette partie, il convient de noter que les effets de paroi décrits dans cette section ont été obtenus dans le cadre de la théorie des écoulements rampants stationnaires. Or nous avons vu que lorsque la particule se déplace dans un fluide au repos, à la distance

$$d_{\text{Re}} = \frac{a}{Re}$$

les termes convectifs de l'équation de mouvement de la vitesse induite deviennent du même ordre de grandeurs que les termes visqueux (voir section 1.4). En toute rigueur donc, cette approche n'est rigoureusement valable que si

$$|\vec{x}_s| < d_{\text{Re}} \quad \text{soit en fait} \quad R - R_p \ll \frac{a}{Re}.$$

Aussi, le résultat obtenu par Brenner en conduite cylindrique repose sur l'hypothèse que ce problème est stationnaire. Pour cela, il faut donc que

$$\min(\mathcal{C}(\vec{x}_s))$$

soit bien indépendant du temps. Si maintenant, la particule évolue de telle sorte que sa distance à la paroi est fonction du temps, alors, en toute rigueur, il faudrait employer une approche similaire mais cette fois ci, dans le cadre de la théorie des écoulements rampants instationnaires, ce qui complique considérablement la tâche.

Étude et analyse bibliographique.

Partie 2 : inclusion fluide

1.7 Introduction et position du problème

Dans cette seconde partie du chapitre 1, nous nous intéressons maintenant aux inclusions fluides (voir figure 1.6). Compte tenu du nombre important de résultats obtenus pour ce types d'inclusions, cette partie pourrait être au moins de taille équivalente à celle consacrée aux particules solides. Cependant nous allons nous appuyer sur le fait qu'il existe une certaine analogie entre les résultats obtenus pour les inclusions fluides et les particules solides, ne serait-ce qu'à cause des méthodes analytiques employées.

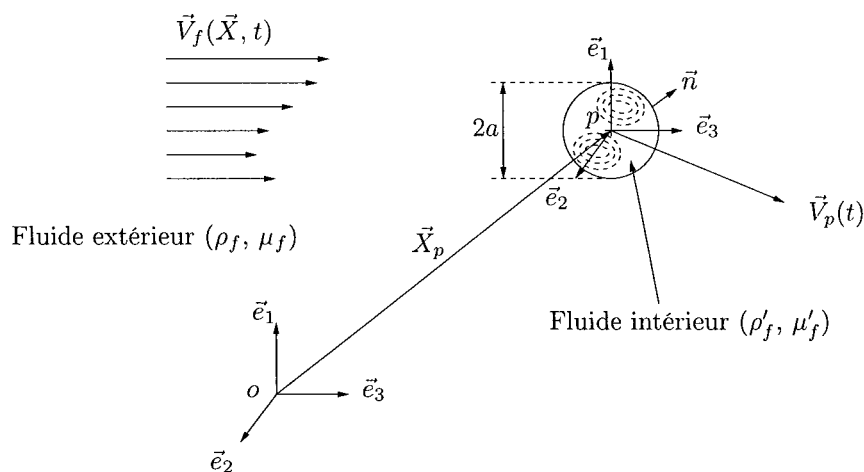


FIG. 1.6 – Schéma du problème

Pour pouvoir déterminer la trajectoire d'une inclusion fluide dans un écoulement, il sera toujours nécessaire de déterminer la force exercée par le fluide sur l'inclusion, c'est à dire,

$$\vec{F} = \int_{S_p} \bar{\bar{\Sigma}} \cdot \vec{n} \, dS_p,$$

où le tenseur des contraintes $\bar{\bar{\Sigma}}$ reste donné par

$$\bar{\bar{\Sigma}} = -P\bar{I} + \mu_f \left(\bar{\nabla} \vec{V}_f + (\bar{\nabla} \vec{V}_f)^T \right),$$

$\vec{n}$ étant la normale unitaire sortante de l'inclusion. Pour une inclusion fluide, le champ de vitesse $\vec{V}_f$ de l'écoulement externe est lié, du fait des conditions limites à l'interface de l'inclusion, à l'écoulement du fluide à l'intérieur de l'inclusion. Dans un premier temps, nous serons donc amenés à détailler les conditions limites qui sont généralement adoptées entre deux phases fluides non miscibles. Ensuite, et de même que nous l'avons fait pour les particules solides, nous introduirons, dans les équations qui régissent l'écoulement, la décomposition de la vitesse en terme d'écoulement non perturbé et d'écoulement induit, en vue de faire certaines simplifications.

Dans la suite, les grandeurs primées, à savoir $\vec{V}'_f$, P' , μ'_f , ρ'_f correspondent respectivement à la vitesse, la pression, la viscosité dynamique et la densité du fluide qui compose l'inclusion. Ce fluide sera par ailleurs supposé homogène, newtonien, incompressible et non miscible avec le fluide extérieur. Enfin, nous écrirons, dans un premier temps et pour être le plus général possible, que l'interface de l'inclusion se déplace avec une certaine vitesse $\vec{V}_{\text{interface}}$ dans le référentiel galiléen $\mathcal{R}_o$. A présent, nous allons nous intéresser aux équations qui régissent l'écoulement externe et l'écoulement interne à l'inclusion.

1.7.1 Equations générales

Du fait de l'incompressibilité des deux fluides en présence, nous avons bien entendu,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V}_f = \vec{\nabla} \cdot \vec{V}'_f = 0, \quad (1.7.1)$$

et par hypothèse, $\vec{V}_f$ et $\vec{V}'_f$ satisfont, respectivement dans leurs domaines, les équations de Navier-Stokes.

De même que nous l'avons fait pour une particule solide, nous allons supposer que loin de la particule, l'écoulement retrouve la forme qu'il aurait en cas d'absence de l'inclusion, c'est à dire :

$$\vec{V}_f \rightarrow \vec{V}_f^0(\vec{X}, t) \quad \text{lorsque} \quad |\vec{X} - \vec{X}_p| \rightarrow \infty, \quad (1.7.2)$$

où, rappelons le, $\vec{V}_f^0$ est l'écoulement non perturbé et $\vec{X}_p$ correspond au centre de masse de l'inclusion⁸. Ensuite, l'interface entre les deux fluides sera considérée comme n'ayant aucune épaisseur. Sachant que par hypothèse les deux fluides sont non miscibles, et en supposant qu'il n'y ait aucun transfert de masse, alors nous avons

$$(\vec{V}_f - \vec{V}_{\text{interface}}) \cdot \vec{n} = 0 \quad \text{ainsi que} \quad (\vec{V}'_f - \vec{V}_{\text{interface}}) \cdot \vec{n} = 0. \quad (1.7.3)$$

De plus, nous allons supposer que sur le lieu de l'interface, il y a continuité des vitesses tangentielles,

$$\vec{V}_f \wedge \vec{n} = \vec{V}'_f \wedge \vec{n}. \quad (1.7.4)$$

Précisons que les deux conditions limites (1.7.3) et (1.7.4) sont des conditions cinématiques. A celles-ci s'ajoutent des conditions dynamiques obtenues en faisant un bilan de quantité de mouvement sur le lieu de l'interface. Pour réaliser ce bilan, il convient de noter qu'en plus des contraintes que chacun des fluides exerce l'un sur l'autre, un terme supplémentaire rentre en compte, et qui traduit la force de "cohésion" interne entre les molécules qui composent chacun des deux fluides. L'intensité de cette force est donnée par un coefficient, que nous écrirons σ (appelé coefficient de tension superficielle) dont la valeur dépend des relations physico-chimiques qui existent entre les deux fluides impliqués. Puisque cette force est une force de cohésion, elle tend donc à minimiser la surface de l'interface et de ce fait, elle induit un saut de quantité de mouvement. Ainsi, le bilan des forces qui s'exercent sur le lieu de l'interface s'écrit

$$\vec{\Sigma} \cdot \vec{n} - \vec{\Sigma}' \cdot \vec{n} = \sigma \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{n} \right) \vec{n} + \vec{\nabla}_s \sigma, \quad (1.7.5)$$

où $\vec{\nabla}_s$ est un gradient "surfaique" construit à partir de deux coordonnées curvilignes qui décrivent la surface de l'interface, et des deux vecteurs tangents à cette surface qui en résultent. Pour l'instant donc, nous venons d'écrire des conditions limites très générales, mais dans la suite nous ferons certaines simplifications.

Tout d'abord, précisons que la valeur de la tension superficielle n'est susceptible de varier localement qu'à cause d'une différence locale de température ou en présence de surfactant dans le fluide. (Notons d'ailleurs que la variation spatiale de σ peut même être à l'origine d'un écoulement surfaique et on parle alors de l'effet "Marangoni".) Toutefois, dans le reste de ce document, nous poserons (sauf précisions contraire dans le chapitre 4 de cette thèse) :

$$\vec{\nabla}_s \sigma = \vec{0}.$$

Par conséquent, en calculant le produit vectoriel de l'équation (1.7.5) avec $\vec{n}$, il apparaît que

$$\mu_f \left[\left(\vec{\nabla} \vec{V}_f + (\vec{\nabla} \vec{V}_f)^T \right) \cdot \vec{n} \right] \wedge \vec{n} = \mu'_f \left[\left(\vec{\nabla} \vec{V}'_f + (\vec{\nabla} \vec{V}'_f)^T \right) \cdot \vec{n} \right] \wedge \vec{n}, \quad (1.7.6)$$

8. Dans un cas général, la vitesse donnée par $d\vec{X}_p/dt$ peut être différente de $\vec{V}_{\text{interface}}$ si par exemple l'inclusion se déforme

ce qui implique que si le gradient surfacique de tension superficielle est négligé, il y a continuité des contraintes tangentielles. Pour être complets en ce qui concerne les conditions limites, il faut maintenant que nous nous intéressions à la composante normale de l'équation (1.7.5). Mais avant cela, nous allons introduire dans nos équations, la décomposition de la vitesse en termes d'écoulement non perturbé et d'écoulement induit.

Décomposition de la vitesse

Étant donné que dans la suite, nous allons nous intéresser aux forces qui s'exercent sur l'inclusion lorsque celle-ci se déplace dans un écoulement non uniforme, il est commode d'introduire dans nos équations la même décomposition de la vitesse que nous avons introduite pour les particules solides. Toutefois, et uniquement dans un souci de simplicité, nous ne considérerons ici que les écoulements non uniformes linéaires, c'est à dire

$$\vec{V}_f^0 = \overline{\vec{A}} \cdot \vec{X},$$

où les composantes de $\overline{\vec{A}}$ ne dépendent pas du temps. Aussi, nous pouvons dès à présent faire deux remarques concernant l'écoulement décrit par $\vec{V}_f^0$, à savoir :

- Premièrement, que la force $\vec{F}^0$ exercée par cet écoulement non perturbé sur l'inclusion fluide sera la même que celle qui s'exerce sur une particule solide et celle-ci est donnée par l'équation (1.1.15), page 8.
- Deuxièmement, si le champ de vitesse $\vec{V}_f^0$ est, par hypothèse, solution des équations de Navier-Stokes à l'extérieur de la particule, il n'est pas, en revanche, solution des équations de Navier-Stokes à l'intérieur de l'inclusion et cela aura donc des conséquences dans la suite.

Dans le référentiel en translation $\mathcal{R}_p$ lié au centre de masse p de la particule, la décomposition de la vitesse s'écrit

$$\vec{w}_f = \vec{w}_f^0 + \vec{w}_f^1$$

pour l'écoulement externe, et nous écrivons

$$\vec{w}_f' = \vec{w}_f^0 + \vec{w}_f'^1$$

pour l'écoulement interne. En ce qui concerne l'écoulement externe, les simplifications qui résultent du fait que l'écoulement non perturbé soit solution des équations de Navier-Stokes, sont bien entendu, identiques à celles faites pour une particule solide (voir section 1.1.3). En revanche, en ce qui concerne l'écoulement interne et puisque nous ne considérons ici que les écoulements linéaires, nous avons :

$$\frac{\partial \vec{w}_f^0}{\partial t} + (\vec{w}_f^0 \cdot \vec{\nabla}) \vec{w}_f^0 - \left(\vec{g} - \frac{d\vec{V}_p}{dt} \right) = -\frac{1}{\rho_f} \vec{\nabla} P^0,$$

ce qui implique que nous aurons, après introduction de la décomposition de la vitesse interne dans les équations de Navier-Stokes :

$$\rho_f' \frac{\partial \vec{w}_f'^1}{\partial t} + \rho_f' (\vec{w}_f^0 \cdot \vec{\nabla}) \vec{w}_f'^1 + \rho_f' (\vec{w}_f'^1 \cdot \vec{\nabla}) \vec{w}_f'^1 + \rho_f' (\vec{w}_f'^1 \cdot \vec{\nabla}) \vec{w}_f^0 = -\vec{\nabla} \left(P' - \frac{\rho_f'}{\rho_f} P^0 \right) + \mu_f' \vec{\Delta} \vec{w}_f'^1. \quad (1.7.7)$$

Dans la suite et pour alléger les écritures, nous écrivons

$$P'^1 = P' - \frac{\rho_f'}{\rho_f} P^0,$$

et le système d'équations impliquées dans la résolution d'un problème qui traite d'une inclusion fluide sera donné par (S2) (voir page 40). Dans (S2), l'équation (1.7.14) correspond à la continuité (sur le lieu de l'interface) des contraintes tangentielles et l'équation (1.7.15) correspond alors à la composante normale de l'équation (1.7.5) qu'il nous restait à détailler. Notons que cette dernière équation est parfois appelée "équation de saut des contraintes normales".

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{w}_f^1 = 0 \quad \text{et} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{w}_f'^1 = 0. \quad (1.7.8)$$

- A l'extérieur de l'inclusion :

$$\rho_f \frac{\partial \vec{w}_f^1}{\partial t} + \rho_f (\vec{w}_f^0 \cdot \vec{\nabla}) \vec{w}_f^1 + \rho_f (\vec{w}_f^1 \cdot \vec{\nabla}) \vec{w}_f^1 + \rho_f (\vec{w}_f^1 \cdot \vec{\nabla}) \vec{w}_f^0 = -\vec{\nabla} P^1 + \mu_f \vec{\Delta} \vec{w}_f^1 \quad (1.7.9)$$

et

$$\vec{w}_f^1 \rightarrow \vec{0} \quad \text{lorsque} \quad |\vec{x}| \rightarrow \infty. \quad (1.7.10)$$

- A l'intérieur de l'inclusion :

$$(S2) \quad \rho_f' \frac{\partial \vec{w}_f'^1}{\partial t} + \rho_f' (\vec{w}_f^0 \cdot \vec{\nabla}) \vec{w}_f'^1 + \rho_f' (\vec{w}_f'^1 \cdot \vec{\nabla}) \vec{w}_f'^1 + \rho_f' (\vec{w}_f'^1 \cdot \vec{\nabla}) \vec{w}_f^0 = -\vec{\nabla} P'^1 + \mu_f' \vec{\Delta} \vec{w}_f'^1. \quad (1.7.11)$$

- Sur le lieu de l'interface (en supposant que $\vec{\nabla}_s \sigma = 0$) :

$$\vec{w}_f^1 \cdot \vec{n} = (\vec{V}_{\text{interface}} - \vec{V}_f^0) \cdot \vec{n} = \vec{w}_f'^1 \cdot \vec{n} \quad (1.7.12)$$

$$\vec{w}_f^1 \wedge \vec{n} = \vec{w}_f'^1 \wedge \vec{n} \quad (1.7.13)$$

$$\mu_f \left[\left(\vec{A} + \vec{A}^T + \vec{\nabla} \vec{w}_f^1 + (\vec{\nabla} \vec{w}_f^1)^T \right) \cdot \vec{n} \right] \wedge \vec{n} = \mu_f' \left[\left(\vec{A} + \vec{A}^T + \vec{\nabla} \vec{w}_f'^1 + (\vec{\nabla} \vec{w}_f'^1)^T \right) \cdot \vec{n} \right] \wedge \vec{n} \quad (1.7.14)$$

$$\begin{aligned} \sigma \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{n} \right) &= P'^1 - P^1 - P^0 \left(1 - \frac{\rho_f'}{\rho_f} \right) \\ &+ \mu_f \left[\left(\vec{A} + \vec{A}^T + \vec{\nabla} \vec{w}_f^1 + (\vec{\nabla} \vec{w}_f^1)^T \right) \cdot \vec{n} \right] \cdot \vec{n} \\ &- \mu_f' \left[\left(\vec{A} + \vec{A}^T + \vec{\nabla} \vec{w}_f'^1 + (\vec{\nabla} \vec{w}_f'^1)^T \right) \cdot \vec{n} \right] \cdot \vec{n} \end{aligned} \quad (1.7.15)$$

Pour terminer cette section consacrée à l'établissement des équations qui régissent l'écoulement induit, notons que pour une particule solide, nous avons également décrit un système d'équations (S1') (page 10) où la particule était considérée comme étant ponctuelle. Dans un tel cas, la nature de l'inclusion n'intervient pas et par conséquent, le système d'équations (S1') est aussi valable pour une inclusion fluide.

1.7.2 Hypothèses simplificatrices

Le système d'équations (S2) est en fait très général, mais il est très complexe et comme pour les particules solides, il doit être simplifié pour admettre des solutions analytiques. Nous allons donc maintenant décrire les simplifications qu'il est d'usage de faire dans le cadre des écoulement à petits nombres de Reynolds.

A propos de l'écoulement non perturbé

En ce qui concerne l'écoulement non perturbé, précisons simplement que les simplifications qui sont faites sont semblables à celles qu'il est possible de faire lorsque la particule est solide (voir section 1.1.3). Par ailleurs, notons que même si l'inclusion fluide n'est pas sphérique, le résultat

$$\int_{V_p} \rho_f \frac{D\vec{V}_f^0}{Dt} dV_p = m_f \frac{D\vec{V}_f^0}{Dt} \Big|_{\vec{X}_p}$$

reste toujours vrai, si l'écoulement non perturbé est linéaire, puisque $\vec{X}_p$ correspond par définition au centre de masse de l'inclusion.

A propos de l'écoulement induit

En ce qui concerne l'écoulement externe, les ordres de grandeur des différents termes convectifs de l'équation (1.7.9) sont identiques à ceux obtenus pour une particule solide (voir section 1.1.3). De ce fait, au voisinage de la particule, i.e. $|\vec{x}| \simeq O(a)$, le rapport de chacun des termes convectifs de l'équation (1.7.9) avec le terme visqueux fait apparaître les deux nombres sans dimension :

$$Re = \frac{a|\vec{V}_g|}{\nu_f} \quad \text{et} \quad \eta = \frac{a^2|A_{ij}|}{\nu_f}$$

que nous avons déjà définis dans la partie précédente (voir section 1.1.3). Rappelons que par hypothèse, ces deux nombres sont très petits devant l'unité et cela implique que les termes convectifs quadratiques pourront toujours être négligés.

En ce qui concerne l'écoulement qui prend place à l'intérieur de l'inclusion, nous avons

$$|\vec{\nabla} \vec{w}_f'^1| = O\left(\frac{V_g}{a}\right) \quad \text{et} \quad |\vec{\Delta} \vec{w}_f'^1| = O\left(\frac{V_g}{a^2}\right).$$

Ainsi, le rapport entre les termes convectifs et le terme visqueux de l'équation (1.7.11) fait apparaître deux nombres identiques à ceux obtenus pour l'écoulement externe, mais construits cette fois avec les propriétés physiques du fluide qui compose l'inclusion, à savoir

$$Re' = \frac{a|\vec{V}_g|}{\nu_f'} \quad \text{et} \quad \eta' = \frac{a^2|A_{ij}|}{\nu_f'}.$$

Dans la suite, nous supposerons aussi que ces deux nombres sont petits devant l'unité. De ce fait, nous considérerons donc qu'au voisinage de la particule et à l'intérieur de l'inclusion les écoulements fluides sont correctement décrits par les équations de fluide rampant, c'est à dire que l'équation (1.7.9) s'écrira

$$\rho_f \frac{\partial \vec{w}_f^1}{\partial t} = -\vec{\nabla} P^1 + \mu_f \vec{\Delta} \vec{w}_f^1, \quad (1.7.16)$$

et l'équation (1.7.11)

$$\rho_f' \frac{\partial \vec{w}_f'^1}{\partial t} = -\vec{\nabla} P'^1 + \mu_f' \vec{\Delta} \vec{w}_f'^1. \quad (1.7.17)$$

Enfin, notons en ce qui concerne l'écoulement externe, que comme pour les particules solides, loin de l'inclusion, hormis les termes quadratiques, les termes convectifs de l'équation (1.7.9) sont susceptibles de devenir du même ordre de grandeur que les termes visqueux. Ce point sera bien sûr abordé dans la suite de ce chapitre.

Hypothèse de sphéricité de l'inclusion fluide et implication

Lorsqu'une inclusion fluide est relâchée dans un autre fluide, celle-ci adopte une certaine forme. Sachant que pour un volume donné, la sphère correspond à la surface minimale, nous comprenons que la tension superficielle (qui rappelons le, tend à minimiser la surface de l'interface) va donc avoir tendance à faire adopter à l'inclusion fluide une forme sphérique. Si une particule est sphérique (disons de rayon a), alors dans la base sphérique décrite figure 1.2, nous avons $\vec{n} = \vec{e}_r$ et de ce fait, le membre de gauche de l'équation (1.7.15) s'écrit

$$\sigma \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{n} \right) \vec{n} = \frac{2\sigma}{a} \vec{n}.$$

Or, puisque la valeur de σ est constante, il faut, pour qu'il y ait compatibilité, que les contraintes normales qui s'appliquent de part et d'autre de l'interface et qui sont données par le membre de droite de l'équation (1.7.5) soient, elles aussi, uniformes. En règle générale, cette condition n'est pas vérifiée et l'hypothèse de sphéricité de l'inclusion n'est qu'une approximation.

À titre d'exemple, intéressons nous à la seule répartition du terme P^0 de l'équation (1.7.5). Dans le cadre de nos hypothèses, le terme P^0 correspond à la pression qui règne dans un écoulement non perturbé linéaire, et il est possible de montrer que sa forme générale est donnée par

$$P^0(\vec{X}) = -\frac{\rho_f}{2} \text{tr} \left[\left(\vec{\bar{A}}^2 \cdot \vec{X} \right) \otimes \vec{X} \right] + \rho_f \vec{g} \cdot \vec{X} + P_0, \quad (1.7.18)$$

où "tr[]" signifie la trace du tenseur, et P_0 est une constante.

Ainsi, nous voyons que dans un cas général, la répartition de ce terme n'est pas uniforme sur l'interface. Au contraire, en calculant le gradient de P^0 et sachant que sur l'interface, $\vec{X} = \vec{X}_p + a \vec{e}_r$, nous voyons apparaître trois ordres de grandeur de cette variation de pression de l'écoulement non perturbé, que nous écrirons ΔP_i^0 ($i=1,2,3$) autour de la particule, et qui sont donnés par

$$\Delta P_1^0 \simeq O(|\rho_f - \rho'_f| g a^2) , \quad \Delta P_2^0 \simeq O(|\rho_f - \rho'_f| A_{ij}^2 a^2) \quad \text{et} \quad \Delta P_3^0 \simeq O(|\rho_f - \rho'_f| A_{ij}^2 |\vec{X}_p| a) .$$

Ainsi, le rapport de chacun des termes de variation de pression ΔP_i^0 avec le terme de tension superficielle (membre de gauche de l'équation 1.7.5) fait apparaître un nombre sans dimension. Le premier de ces nombres,

$$Eo_1 = \frac{|\rho_f - \rho'_f| g a^2}{\sigma}$$

est appelé généralement nombre d'Eötvös⁹ (parfois appelé Bond). Par analogie, le second et le troisième nombre seront donc des pseudo nombres d'Eötvös que nous écrirons

$$Eo_2 = \frac{|\rho_f - \rho'_f| A_{ij}^2 a^3}{\sigma} \quad \text{et} \quad Eo_3 = \frac{|\rho_f - \rho'_f| A_{ij}^2 |\vec{X}_p| a^2}{\sigma} .$$

Ils traduisent respectivement le rapport entre les effets de variation de pression hydrostatique, du fait de la gravité et du fait de l'existence d'un gradient de pression, avec les effets capillaires. Notons qu'en général, dans les problèmes hydrostatiques faisant intervenir une inclusion fluide, par exemple une goutte de mercure posée sur un plan, il est admis que l'inclusion reste approximativement sphérique jusqu'à des nombres Eo critiques de l'ordre de l'unité (voir par exemple Guyon, Hulin et Petit, 2001).

En revanche, nous voyons bien que lorsque la particule est libre de tout mouvement au sein d'un fluide visqueux, le fait que ces trois nombres ne soient pas nuls implique alors, du fait de l'existence d'une variation de la pression autour de l'inclusion, que cette dernière se mette en mouvement. Or, la vitesse que va adopter la particule, aura également une influence sur la répartition des efforts normaux à l'interface de l'inclusion au travers des autres termes que P^0 dans le membre de droite de l'équation (1.7.5). Parfois même, ces effets pourront compenser la répartition non uniforme de la pression P^0 . Par exemple, nous verrons dans la suite au travers de l'étude réalisée par Hadamard (1911) et Rybczynski (1911), pourquoi à la seule condition que le nombre de Reynolds soit petit devant 1, le nombre Eo peut prendre n'importe quelle valeur sans pour autant que cela n'altère la sphéricité de l'interface de l'inclusion.

Dans un cas plus général donc, pour que la particule puisse être considérée comme étant sphérique, il faut que les effets capillaires (de tension de surface) soient grands devant tous les termes non constants du membre de droite de l'équation (1.7.15). En règle générale, cette condition est supposée vérifiée lorsque le nombre capillaire défini par

$$Ca = \frac{\mu_f |\vec{V}_f^0 - \vec{V}_p|}{\sigma} ,$$

est petit devant l'unité. Dans ce cas là, l'inclusion fluide est supposée quasi-sphérique et nous aurons (si r est le rayon de l'inclusion) une déformation donnée par

$$\frac{r(\theta, \phi)}{a} \simeq 1 + O(Ca) .$$

1.8 Écoulements rampants stationnaires

Dans cette section, qui est l'analogue de la section 1.2, nous allons nous intéresser aux différents résultats obtenus pour une inclusion sphérique fluide dans le cadre des écoulements rampants stationnaires.

9. Selon Clift *et. al*, Eötvös, qui est un nom hongrois se prononce (à l'anglaise) "Ertversh"

1.8.1 Mouvement permanent d'une inclusion fluide sphérique dans un fluide au repos

En exploitant l'axisymétrie du problème correspondant à la sédimentation d'une inclusion fluide dans un autre fluide au repos, Hadamard (1911) a généralisé la solution du second problème de Stokes aux cas des inclusions fluides (voir aussi Rybczynski, 1911). Pour cela, ce dernier a introduit deux fonctions de courant, l'une pour décrire l'écoulement externe et l'autre pour l'écoulement interne. Les deux champs de vitesses obtenus et exprimés dans la base sphérique ($\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\phi$) sont donnés par

$$w_r = V_p \left(\frac{a}{2r} \frac{3+2\lambda}{1+\lambda} - \frac{a^3}{2r^3} \frac{1}{1+\lambda} \right) \cos \theta, \quad (1.8.1)$$

$$w_\theta = -V_p \left(\frac{a}{4r} \frac{3+2\lambda}{1+\lambda} + \frac{a^3}{4r^3} \frac{1}{1+\lambda} \right) \sin \theta, \quad (1.8.2)$$

pour le champ de vitesse externe, et par

$$w'_r = V_p \left(\frac{2+3\lambda}{2(1+\lambda)} - \frac{r^2}{2a^2} \frac{\lambda}{1+\lambda} \right) \cos \theta, \quad (1.8.3)$$

$$w'_\theta = -V_p \left(\frac{2+3\lambda}{2(1+\lambda)} - \frac{r^2}{a^2} \frac{\lambda}{1+\lambda} \right) \sin \theta, \quad (1.8.4)$$

pour le champ de vitesse interne. Dans ces expressions λ est le rapport des viscosités dynamiques :

$$\lambda = \frac{\mu_f}{\mu'_f}. \quad (1.8.5)$$

Notons que dans l'annexe A.1, nous montrons comment retrouver simplement ce résultat à l'aide de la solution générale de Lamb (voir aussi Lamb, 1945).

Connaissant le champ de vitesse externe, il est maintenant possible de calculer la contrainte exercée par l'écoulement induit sur l'inclusion fluide. À l'aide des équations (1.8.1) et (1.8.2), il est possible de montrer que la contribution de la pression, dans ce cas là, est la suivante :

$$\int_{S_p} -P^1 \vec{n} dS_p = -2\pi\mu_f a \frac{\mathcal{R}_\mu}{3} \vec{V}_p,$$

où nous avons posé, pour en simplifier l'écriture,

$$\mathcal{R}_\mu = \frac{3+2\lambda}{1+\lambda}. \quad (1.8.6)$$

En ce qui concerne ensuite la détermination de la force visqueuse exercée par le fluide sur la particule, il est instructif de détailler le calcul, de la même manière que le font par exemple Clift *et al.* (1978). En effet, puisqu'ici nous avons $\vec{n} = \vec{e}_r$, alors

$$\vec{T} \cdot \vec{n} = \mu_f \left[\underbrace{2 \frac{\partial w_r}{\partial r} \vec{e}_r}_{(i)} + \underbrace{\left(r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{w_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial w_r}{\partial \theta} \right) \vec{e}_\theta}_{(ii)} \right].$$

À l'aide de cette relation, il est possible de montrer après intégration sur la surface de la particule que la contribution hydrodynamique de la composante normale de la contrainte visqueuse, i.e. (i), est donnée par

$$\vec{F}_1^1 = -\frac{8}{3}\pi\mu_f a \left(\frac{\lambda}{1+\lambda} \right) \vec{V}_p,$$

et la contribution de la composante tangentielle (ii) est donnée par

$$\vec{F}_2^1 = -4\pi\mu_f a \left(\frac{1}{1+\lambda} \right) \vec{V}_p.$$

Ainsi, nous voyons que la nature de la force visqueuse exercée par le fluide sur la particule diffère suivant que l'inclusion traitée est une particule solide ou une inclusion gazeuse. En effet, pour une particule solide ($\lambda \rightarrow 0$), la contrainte visqueuse provient exclusivement de la composante tangentielle de $\vec{T} \cdot \vec{n}$ alors que pour une particule gazeuse ($\lambda \rightarrow \infty$) elle provient exclusivement de la composante normale. En revanche, nous pouvons aussi constater que quel que soit le rapport des viscosités dynamiques entre le fluide qui constitue l'inclusion et le fluide extérieur, la contribution de la pression sera, quant-à elle, toujours égale à 1/3 de la force totale exercée par l'écoulement induit, puisqu'en regroupant les forces visqueuses et la force de pression, il apparaît que la force de traînée totale exercée par le fluide sur l'inclusion est donnée par

$$\vec{F}^1 = -2\pi\mu_f a \mathcal{R}_\mu \vec{V}_p. \quad (1.8.7)$$

En écrivant que dans le cas particulier où l'inclusion fluide n'est soumise qu'à l'effet de la pesanteur, cette force doit compenser la flottabilité, nous retrouvons le résultat classique concernant vitesse terminale d'une inclusion fluide (voir par exemple Clift *et al.*, 1978) et qui est donnée par

$$\vec{V}_p = \frac{2a^2(\rho'_f - \rho_f)\vec{g}}{3\mu_f \mathcal{R}_\mu}. \quad (1.8.8)$$

Notons que l'équation (1.8.8) est alors la généralisation de l'équation (1.2.5), page 14.

Diagramme de Grace et al (1978)

Un des points importants, en ce qui concerne l'étude d'Hadamard (1911), est que pour obtenir l'expression du champ de vitesse interne et externe d'une inclusion fluide qui se déplace à une certaine vitesse dans un fluide au repos, seule l'utilisation des conditions limites données par les équations (1.7.10), (1.7.12), (1.7.13) et (1.7.14) est nécessaire. Sachant que la détermination des champs de vitesses a été effectuée en supposant que l'inclusion était sphérique, alors les résultats obtenus doivent être, en toute rigueur, compatibles avec l'équation (1.7.15) (équation qui n'a pas encore été utilisée) et qui traduit la condition de saut à l'interface des contraintes normales.

Sachant que dans le cadre de cette étude, les pressions P^1 et P'^1 sont liées aux vitesses $\vec{w}_f^1$, $\vec{w}_f'^1$ par le biais des équations (1.7.16) et (1.7.17) (sans les termes instationnaires) alors, celles-ci peuvent être déterminées analytiquement après intégration des gradients de pression. Dans le cadre de cette étude et sur le lieu de l'interface, le calcul conduit à

$$P^0 = \rho_f \vec{g} \cdot (\vec{X}_p + a \vec{e}_r) + P_0,$$

$$-P^1 + 2\mu_f \left. \frac{\partial w_r}{\partial r} \right|_{r=a} = -\frac{3V_p \mu_f \cos \theta}{2a} \frac{1+2\lambda}{1+\lambda} + P_0^1,$$

et

$$-P'^1 + 2\mu'_f \left. \frac{\partial w'_r}{\partial r} \right|_{r=a} = \frac{3V_p \mu'_f \cos \theta}{a} \frac{\lambda}{1+\lambda} + P_0'^1,$$

où P_0 , P_0^1 et $P_0'^1$ sont des constantes d'intégrations spatiales (ces termes peuvent donc éventuellement dépendre du temps). Pour que ces résultats soient compatibles avec l'hypothèse de sphéricité de l'inclusion et comme le montre l'équation (1.7.15), il faut alors que

$$P_0'^1 - (P_0^1 + P_0) + (\rho'_f - \rho_f) \vec{g} \cdot (\vec{X}_p + a \vec{e}_r) - \frac{3V_p \mu'_f \cos \theta}{a} \frac{\lambda}{1+\lambda} - \frac{3V_p \mu_f \cos \theta}{2a} \frac{1+2\lambda}{1+\lambda} = \frac{2\sigma}{a},$$

ce qui implique que la valeur en tout point de l'interface de la contrainte normale à l'inclusion doit être égale à une constante (constante qui dépend éventuellement du temps). Dans cette dernière expression, les seuls termes susceptibles de ne pas être uniformes sont

$$(\rho'_f - \rho_f) \vec{g} \cdot a \vec{e}_r - \frac{3V_p \mu'_f \cos \theta}{a} \frac{\lambda}{1+\lambda} - \frac{3V_p \mu_f \cos \theta}{2a} \frac{1+2\lambda}{1+\lambda},$$

et dans un cas général, ils ne le sont pas. Cependant, dans le cas particulier où V_p correspond à la vitesse terminale donnée par (1.8.8), cette expression s'annule. Ainsi, si une particule est relâchée dans un fluide

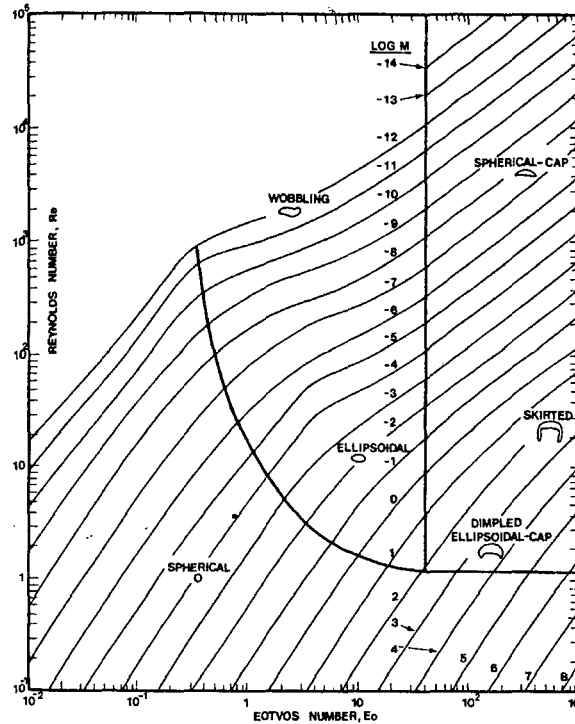


FIG. 1.7 – Carte des formes adoptées par une inclusion fluide relâchée dans un fluide visqueux au repos et qui se déplace sous la seule action de la force de flottabilité (Grace & al 1978).

au repos et à condition que le nombre de Reynolds soit suffisamment petit pour que les écoulements interne et externe puissent être supposés régis par les équations de Stokes stationnaires, alors la particule se meut à une vitesse telle que les contraintes normales issues de l'écoulement compensent la répartition non uniforme de la pression hydrostatique. Ainsi, dans cette situation, non seulement le mouvement de la particule n'altère pas sa sphéricité, mais au contraire, il y contribue (voir par exemple la discussion proposée dans Batchelor, 1967). De ce fait, quel que soit le nombre d'Eötvös, si le nombre de Reynolds est tel que $Re \ll 1$ et que l'écoulement non perturbé est uniforme, alors la particule adopte une forme sphérique, comme le montre d'ailleurs le diagramme de formes obtenu expérimentalement par Grace et al (1978).

A propos de ce diagramme, précisons que ce dernier a été réalisé à partir d'une série d'expériences impliquant 3 nombres sans dimension dont deux sont construits à partir du diamètre de l'inclusion et non à partir du rayon. Ces 3 nombres sont respectivement le nombre de Reynolds, le nombre d'Eötvös et le nombre de Morton :

$$Re_D = \frac{2a|\vec{V}_p|}{\nu_f}, \quad Eo_D = \frac{|\rho_f - \rho'_f|g(2a)^2}{\sigma}, \quad M = \frac{\mu_f^4 g |\rho_f - \rho'_f|}{\rho_f^2 \sigma^3}.$$

Notons aussi que comme l'inclusion fluide est soumise à la force de flottabilité, dans ce diagramme, ces trois nombres ne sont pas indépendants les uns des autres.

Pour terminer cette partie, nous pouvons à présent faire plusieurs remarques :

- Tout d'abord, même si cela semble évident, notons que du fait de la condition de glissement à l'interface, une inclusion fluide perturbe moins l'écoulement qu'une particule solide de même taille. Cela implique aussi que la force de traînée subie par une inclusion fluide est toujours inférieure ou égale à celle d'une sphère solide de même taille.
- Le résultat obtenu pour une particule qui se déplace dans un fluide au repos se généralise immédiatement au cas d'une particule qui se déplace avec une vitesse permanente dans un écoulement uniforme stationnaire.

- Enfin, et c'est certainement la remarque la plus importante des trois, précisons que loin de l'inclusion fluide, c'est à dire, lorsque les termes en a^3/r^3 de la solution d'Hadamard – équations (1.8.1) et (1.8.2) – deviennent négligeables devant les termes en a/r , nous retrouvons la solution singulière (1.2.13) (page 17) calculée avec une force ponctuelle $\vec{F}_1 \delta(\vec{x})$ qui est de même intensité, mais de sens opposée à la force de traînée (1.8.7) obtenue pour une inclusion fluide. En fait, nous pouvons donc voir que quelle que soit la nature de l'inclusion, en écoulement de Stokes, toute particule est perçue par l'écoulement lointain comme une force ponctuelle d'intensité égale et de sens opposé à la force de traînée exercée par le fluide sur la particule. Ce résultat sera exploité par la suite

1.8.2 Généralisation pour $\vec{V}_f^0(\vec{X})$ quelconque

Dans le cas particulier où la particule se déplace dans un écoulement non uniforme, mais de telle manière que ni sa propre vitesse, ni la vitesse de l'écoulement non perturbé vu par la particule ne change au cours du temps, alors l'écoulement interne et l'écoulement externe sont à nouveaux régis par les équations de Stokes stationnaires. Mais dans un cas général, le problème ne présente plus l'axisymétrie qui permet d'utiliser les fonctions de courants introduites par Hadamard (1911). Malgré cela, et puisque l'écoulement à l'extérieur de l'inclusion et l'écoulement à l'intérieur de l'inclusion sont tous deux solutions des équations de Stokes, ils peuvent donc s'écrire, indépendamment l'un de l'autre, à l'aide de la solution générale de Lamb. En annexe A.1 nous proposons donc de généraliser la méthode de projection de Brenner, initialement écrite pour les particules solides, aux cas des inclusions fluides. (Notons que dans son ouvrage, Lamb (1945) traite aussi les inclusions fluides, cependant ici, nous nous appuyons sur le fait que la vitesse de l'écoulement a aussi été décomposée à l'intérieur de la goutte.)

L'approche que nous proposons marche *a priori* pour n'importe quel type d'écoulement non perturbé linéaire, à condition que ce dernier puisse s'exprimer sur le lieu de l'interface sous la forme d'une série d'harmoniques sphériques. En effet, pour appliquer la méthode de projection de Brenner, il nous suffit de rajouter une condition supplémentaire à la condition limite (1.7.13) et qui est que le champ de vitesse solution du problème concernant l'inclusion fluide doit être compatible avec celui que nous aurions si la particule était solide et dont la rotation propre est telle qu'elle annule éventuellement le couple qu'elle subit à cause de l'écoulement. Autrement dit, la solution correspondant à une inclusion fluide doit être telle que

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \vec{w}_f^1 \wedge \vec{n} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \vec{w}_f'^1 \wedge \vec{n} = \left(-\vec{V}_f^0 + \vec{V}_p(t) + \vec{\Omega}_p \wedge a \vec{e}_r \right) \wedge \vec{n} \quad \text{lorsque} \quad |\vec{x}| = a.$$

Aussi, dans cette méthode, la résolution s'effectue indépendamment de l'équation de saut de la contrainte normale et c'est pourquoi en plus des hypothèses concernant les faibles valeurs des nombres de Reynolds, il est alors indispensable de supposer que le nombre capillaire Ca est petit devant l'unité afin de pouvoir justifier de la sphéricité de l'inclusion, car dans un cas général, si l'écoulement non perturbé est non uniforme, l'inclusion fluide n'est pas sphérique.

Sous réserve donc que l'approche proposée ici soit valable, et en écrivant, comme nous l'avons fait pour une particule solide, que sur l'interface l'écoulement non perturbé peut s'écrire

$$\vec{V}_f^0(\vec{X}_p + a \vec{e}_r) = \vec{V}_f^0(\vec{X}_p) + \vec{\nabla} \vec{V}_f^0 \Big|_{\vec{X}_p} \cdot (a \vec{e}_r) + O\left(\frac{a^2}{L^2}\right),$$

alors, à l'aide de la solution de Lamb, il est possible de montrer que la propriété fondamentale mise en évidence, page 18, pour une particule solide, reste valable pour une inclusion fluide. C'est à dire que quelle que soit la forme de l'écoulement non perturbé, lorsque r tend vers l'infini, l'écoulement induit tend vers la solution Stokeslet calculée avec une force ponctuelle correspondant à l'opposée de la force de traînée exercée par le fluide sur l'inclusion.

1.9 Écoulements rampants instationnaires

Dans cette section, qui est l'analogue de la section 1.3, nous allons maintenant nous intéresser à l'expression de la force qui s'exerce sur une inclusion fluide lorsque son mouvement, ou lorsque l'écoulement non perturbé vu par la particule est instationnaire. Nous allons donc détailler une étude équivalente à celle de Boussinesq (1885) mais qui concerne maintenant le mouvement arbitraire d'une inclusion fluide

dans un autre fluide au repos. Nous généraliserons ensuite ce résultat au cas d'une inclusion qui se déplace dans un fluide dont l'écoulement est non uniforme mais linéaire.

1.9.1 Mouvement instationnaire d'une inclusion fluide sphérique dans un fluide au repos

A notre connaissance Gorodtsov (1975) a été le premier à réaliser une étude complète concernant l'expression de la force instationnaire qui s'exerce sur une inclusion fluide dont le mouvement est arbitraire. Par la suite, d'autres auteurs tels que Yang et Leal (1991) ou encore Galindo et Gerbeth (1993) ont également travaillé sur ce problème et dans la littérature, l'expression de la force d'histoire obtenue pour une inclusion fluide leur est souvent attribuée. Quoi qu'il en soit donc, pour obtenir l'expression de la force instationnaire qui s'exerce sur une inclusion fluide, Gorodtsov (1975) a procédé de la même manière que l'ont fait dans leur ouvrage Landau et Lifchitz (1989) pour obtenir l'expression de la force qui s'exerce sur une inclusion solide (voir section 1.3). Ainsi, Gorodtsov (voir aussi Galindo et Gerbeth, 1993), a pu obtenir l'expression de la force élémentaire $\vec{F}$ qui s'exerce sur une inclusion fluide (supposée sphérique) qui se déplace dans un fluide au repos avec une certaine vitesse donnée par

$$\vec{V}_p = \vec{U}_\omega \exp(-i\omega t),$$

et celle-ci est donnée par

$$\vec{F} = \vec{F}_\omega \exp(-i\omega t) = -2\pi\mu_f a \left(\frac{\Lambda^2 a^2}{3} - (1 + \Lambda a) \frac{b_2}{a} \exp(-\Lambda a) \right) \vec{U}_\omega \exp(-i\omega t), \quad (1.9.1)$$

où

$$\Lambda = (1 - i) \sqrt{\frac{\rho_f \omega}{2\mu_f}},$$

et où le coefficient b_2 est un terme constant qui dépend des propriétés physiques des fluides externe et interne à l'inclusion.

Cette force correspond alors à une composante de la transformée de Fourier de la force qui s'exercerait sur inclusion fluide qui se déplace à une certaine vitesse arbitraire. Par intégration de la force élémentaire ainsi obtenue, et après quelques arrangements simples, Gorodtsov a donc été en mesure d'obtenir l'expression de la force instationnaire qui s'applique sur l'inclusion lorsque sa vitesse est quelconque. Cette force est alors donnée par

$$\vec{F}^1(t) = -2\pi\mu_f a \mathcal{R}_\mu \vec{V}_p(t) - \frac{1}{2} m_f \frac{d\vec{V}_p}{dt} - 2\pi\mu_f a \mathcal{R}_\mu \int_{-\infty}^t K(t - \tau) \frac{d\vec{V}_p(\tau)}{d\tau} d\tau, \quad (1.9.2)$$

où

$$K(t) = -\frac{\rho_f}{2\pi\mu_f} \int_{\mathbb{R}} \left(\left[\frac{1 + \Lambda a}{\Lambda^2 \mathcal{R}_\mu} \right] \frac{b_2}{a} \exp(-\Lambda a) + \frac{1}{\Lambda^2} \right) \exp(-i\omega t) d\omega,$$

et avec

$$\Lambda = (1 - i) \sqrt{\frac{\rho_f \omega}{2\mu_f}}.$$

Rappelons aussi que $\mathcal{R}_{\mu_f}$ est donné par la relation (1.8.6).

Dans un cas général, et à cause du terme $(b_2/a) \exp(-\Lambda a)$, il n'est pas possible d'obtenir l'expression temporelle du noyau de la force d'histoire qui s'exerce sur une inclusion fluide. Cependant, dans les situations qui correspondent à des rapports de viscosité extrêmes, ce terme se simplifie. Par exemple lorsque le rapport des viscosités est tel que $\lambda = \mu_f/\mu'_f \rightarrow 0$ (particule solide), il apparaît que

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{b_2}{a} \exp(-\Lambda a) \rightarrow -3$$

et puisque dans ce cas là, $\mathcal{R}_\mu \rightarrow 3$, la force d'histoire obtenue par Boussinesq (1885) et Basset (1888) pour une inclusion solide est bien retrouvée (voir équation 1.3.2). De même, pour une inclusion fluide telle que $\lambda \rightarrow \infty$, il apparaît que

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{b_2}{a} \exp(-\Lambda a) = -\frac{6}{3 + \Lambda a}, \quad (1.9.3)$$

et à l'aide de cette expression, sachant que dans cette situation $\mathcal{R}_\mu \rightarrow 2$, le noyau temporel de la force d'histoire de l'équation (1.9.2) peut être calculé. Ce dernier est alors donné par

$$K(t) = 2 \exp\left(\frac{9\nu_f t}{a^2}\right) \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{9\nu_f t}{a^2}}\right).$$

(Notons juste qu'habituellement dans la littérature, le coefficient qui apparaît devant ce noyau temporel $\exp(s)\operatorname{erfc}(\sqrt{s})$ est 4, mais ici, nous avons choisi de faire figurer le facteur $\mathcal{R}_\mu$ devant le terme d'histoire.)

Pour terminer cette partie, précisons que le premier et le second terme de l'équation (1.9.2) correspondent respectivement à la traînée visqueuse (qui a la même forme que celle obtenue en écoulement stationnaire par Hadamard, 1911) et à la force de masse ajoutée. Par ailleurs, nous remarquons au passage que le coefficient de masse ajoutée pour une inclusion fluide est encore de 1/2, ce qui n'est pas totalement surprenant puisque ce coefficient est lié à la géométrie de l'inclusion et que l'inclusion fluide est supposée parfaitement sphérique.

1.9.2 Généralisation pour les écoulements $\vec{V}_f^0(\vec{X}, t)$ linéaires

Dans le cas où l'écoulement non perturbé peut être écrit sous la forme d'un écoulement uniforme $\vec{U}(t)$ superposé à un écoulement linéaire, alors dans le référentiel lié à la particule, nous avons déjà vu que l'écoulement pouvait toujours s'écrire

$$\vec{w}_f^0 = \vec{V}_g(t) + \vec{\bar{A}} \cdot \vec{x}$$

avec

$$\vec{V}_g(t) = \vec{V}_f^0(\vec{X}_p) - \vec{V}_p(t) = \vec{U}(t) + \vec{\bar{A}} \cdot \vec{X}_p(t) - \vec{V}_p(t).$$

En écoulement de Stokes et du fait de la linéarité des équations, il est toujours possible de rechercher la solution de (S2) dans un tel cas, sous la forme

$$\vec{w}_f^1 = \vec{w}_f^{1a} + \vec{w}_f^{1b} \quad \text{et} \quad \vec{w}_f'^1 = \vec{w}_f'^{1a} + \vec{w}_f'^{1b}$$

à l'extérieur et à l'intérieur de l'inclusion, et en procédant de même pour les pressions. En effet, en imposant respectivement à chacun de ces écoulements de vérifier les équations de Stokes, et de vérifier à l'interface, c'est à dire lorsque $|\vec{x}| = a$, les conditions

$$\vec{w}_f^{1a} \cdot \vec{n} = -\vec{V}_g(t) \cdot \vec{n} = \vec{w}_f'^{1a} \cdot \vec{n},$$

$$\vec{w}_f^{1a} \wedge \vec{n} = \vec{w}_f'^{1a} \wedge \vec{n},$$

$$\mu_f \left[\vec{\bar{\nabla}} \vec{w}_f^{1a} + (\vec{\bar{\nabla}} \vec{w}_f^{1a})^T \right] \cdot \vec{n} = \mu_f' \left[\vec{\bar{\nabla}} \vec{w}_f'^{1a} + (\vec{\bar{\nabla}} \vec{w}_f'^{1a})^T \right] \cdot \vec{n} \wedge \vec{n},$$

pour l'écoulement (a), et

$$\vec{w}_f^{1b} \cdot \vec{n} = -(\vec{\bar{A}} \cdot \vec{x}) \cdot \vec{n} = \vec{w}_f'^{1b} \cdot \vec{n},$$

$$\vec{w}_f^{1b} \wedge \vec{n} = \vec{w}_f'^{1b} \wedge \vec{n},$$

$$\mu_f \left[(\vec{\bar{A}} + \vec{\bar{A}}^T + \vec{\bar{\nabla}} \vec{w}_f^{1b} + (\vec{\bar{\nabla}} \vec{w}_f^{1b})^T) \cdot \vec{n} \right] \wedge \vec{n} = \mu_f' \left[(\vec{\bar{A}} + \vec{\bar{A}}^T + \vec{\bar{\nabla}} \vec{w}_f'^{1b} + (\vec{\bar{\nabla}} \vec{w}_f'^{1b})^T) \cdot \vec{n} \right] \wedge \vec{n},$$

pour l'écoulement (b), alors en sommant respectivement les écoulements externe et interne à l'inclusion, nous retrouvons bien une solution de (S2). Notons, en ce qui concerne le fait que la solution que nous recherchons pour une inclusion fluide doit être compatible avec celle que nous aurions si la particule était solide, qu'il n'y a pas d'ambiguïté car seule la partie non uniforme de l'écoulement complet est susceptible d'exercer un couple sur une particule solide. De ce fait, la condition de compatibilité qui dans ce cas là est donnée par

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \vec{w}_f^1 \wedge \vec{n} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \vec{w}_f'^1 \wedge \vec{n} = \left(-\vec{V}_g(t) - \vec{\bar{A}} \cdot (a \vec{e}_r) + \vec{\Omega}_p \wedge a \vec{e}_r \right) \wedge \vec{n},$$

pourra s'écrire,

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \vec{w}_f^{1a} \wedge \vec{n} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \vec{w}_f'^{1a} \wedge \vec{n} = -\vec{V}_g(t) \wedge \vec{n},$$

et

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \vec{w}_f^{1b} \wedge \vec{n} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \vec{w}_f'^{1b} \wedge \vec{n} = \left(-\vec{\bar{A}} \cdot (a \vec{e}_r) + \vec{\Omega}_p \wedge a \vec{e}_r \right) \wedge \vec{n}.$$

Bien entendu, la force exercée par l'écoulement induit sera la somme des forces exercées sur l'inclusion par chacun des écoulements (a) et (b), c'est à dire

$$\vec{F}^1 = \vec{F}^{1a} + \vec{F}^{1b}.$$

Pour une particule solide et à l'aide d'une approche similaire, nous avons vu par exemple à l'aide du théorème de réciprocité, que la force $\vec{F}^{1b}$ était nulle. Pour une inclusion fluide, nous pouvons toujours dire que si les composantes du tenseur $\vec{\bar{A}}$ ne varient pas dans le temps, alors le problème lié à l'écoulement (b) se réduit à un problème stationnaire et sa solution peut être obtenue à l'aide de la solution générale de Lamb (voir annexe A.1). Toutefois, nous pouvons déjà prévoir, et cela sans faire aucun calcul que la contribution hydrodynamique de cet écoulement sur l'inclusion sera nulle. En effet parce que nous sommes en écoulement de Stokes, les symétries se conservent. Ainsi, et tenant compte de l'expression des conditions limites vérifiées par $\vec{w}_f^{1b}$ et $\vec{w}_f'^{1b}$ sur la sphère, et sachant que $\vec{\bar{A}} \cdot (-\vec{x}) = -\vec{\bar{A}} \cdot \vec{x}$, alors nous pouvons en déduire que la contrainte exercée par l'écoulement $\vec{w}_f^{1b}$ en un point de la goutte (disons $\vec{x}$) sera donc l'opposée de la contrainte exercée par le même écoulement au point diamétralement opposé $-\vec{x}$. Ainsi, nous pouvons dire que par intégration sur toute la surface et quelle que soit la valeur de $\vec{\bar{A}}$, nous aurons

$$\vec{F}^{1b} = \vec{0}.$$

En ce qui concerne l'écoulement (a), le problème correspond alors exactement à celui de Gorodtsov (1975) détaillé dans la section précédente et par conséquent la force exercée sur l'inclusion sera donnée par l'équation (1.9.2) où la vitesse $-\vec{V}_p(t)$ doit être simplement remplacée par $\vec{V}_g(t)$. En conclusion donc, dans le cadre des écoulements de Stokes, et en négligeant les déformations de l'interface de l'inclusion, l'expression de la force induite exercée un écoulement non uniforme mais linéaire sera donnée par

$$\vec{F}^{1a} = 2\pi\mu_f a \mathcal{R}_\mu \vec{V}_g(t) + \frac{1}{2} m_f \frac{d\vec{V}_g}{dt} + 2\pi\mu_f a \mathcal{R}_\mu \int_{-\infty}^t K(t-\tau) \frac{d\vec{V}_g(\tau)}{d\tau} d\tau.$$

Précisons tout de même que conformément à ce qui a été vu dans la section précédente, l'expression du noyau $K(t)$ du terme intégral n'est déterminé, dans l'espace temporel, que lorsque le rapport des viscosités λ tend vers 0, ou vers l'infini, ce qui correspond, en règle générale, à des inclusions solides ou gazeuses.

1.10 Effets des termes convectifs

Dans le cadre des écoulements à faibles nombres de Reynolds, l'écoulement à l'intérieur de l'inclusion fluide est, en règle générale, toujours supposé régi par les équations de Stokes. Aussi, en ce qui concerne l'écoulement externe, nous avons vu que quelle que soit la forme de l'écoulement non perturbé, loin de l'inclusion, l'écoulement induit tend vers une solution Stokeslet calculée avec une force ponctuelle qui correspond à une force d'intensité égale mais de sens opposé à la traînée visqueuse. Étant donné que cette solution a la même forme que celle obtenue pour une inclusion solide, i.e. elle décroît en a/r alors, loin de la particule, il existe une zone où les termes convectifs basés sur les nombres de Reynolds de particule et de cisaillement vont devenir du même ordre de grandeur que les termes visqueux, et cela, à des distances d_{Re} et d_η semblables à celles estimées pour une particule solide (voir section 1.4). De même que pour une particule solide, les effets de ces termes convectifs sur la force exercée par l'écoulement induit sur la particule peuvent être obtenus à l'aide de la méthode des développements asymptotiques raccordés décrite en annexe A.6. Mais au préalable, cette méthode doit être généralisée aux cas des inclusions fluides, et c'est ce qu'ont fait Legendre et Magnaudet (1998) (voir également Magnaudet, 2003).

1.10.1 Généralisation du calculs des effets d'inertie en écoulements stationnaires

Afin de pouvoir calculer les effets des termes convectifs sur la force de traînée subie par une inclusion fluide, Legendre et Magnaudet (1998) se sont appuyés sur les travaux de Saffman (1965) et (1968). En effet, ce dernier a montré que pour une particule solide, la force exercée par l'écoulement induit sur la particule pouvait s'écrire, en tenant compte des termes convectifs, sous la forme

$$\vec{F}^1 = 6\pi\mu_f a \left(\vec{I} + \epsilon \overline{\overline{M}} \right) \cdot \vec{V}_g$$

où le terme $\overline{\overline{M}}$ est un certain tenseur de mobilité dont les composantes peuvent être calculées en considérant que la particule perçoit un écoulement uniforme à l'infini (qui est alors donné par $\epsilon \overline{\overline{M}} \cdot \vec{V}_g$). Or il se trouve que dans la méthode des développements asymptotiques raccordés employée pour calculer les composantes de ce tenseur, la particule est traitée, dans le problème extérieur comme une force ponctuelle (voir annexe A.6). En outre, le problème considéré est linéaire et par conséquent, l'intensité de l'écoulement qui est perçu par la particule comme un écoulement uniforme à l'infini est directement proportionnelle à la valeur de la force ponctuelle exercée par l'inclusion sur le fluide. Pour une inclusion fluide, cette force ponctuelle est donnée par

$$2\pi\mu_f a \mathcal{R}_\mu \left(\vec{V}_p - \vec{V}_f^0 \right) \delta(\vec{x}), \quad \text{au lieu de} \quad 6\pi\mu_f a \left(\vec{V}_p - \vec{V}_f^0 \right) \delta(\vec{x}),$$

pour une particule solide. Par conséquent, l'écoulement perçu par l'inclusion fluide comme un écoulement uniforme à l'infini sera donné par

$$\frac{\mathcal{R}_\mu}{3} \epsilon \overline{\overline{M}} \cdot \vec{V}_g,$$

et la contribution de cet écoulement à l'expression de la force $\vec{F}^1$ sera ensuite donnée sous la forme d'une traînée d'Hadamard. Finalement, la force exercée par l'écoulement sur une inclusion fluide s'écrira :

$$\vec{F}^1 = 2\pi\mu_f a \mathcal{R}_\mu \left(\vec{I} + \frac{\mathcal{R}_\mu}{3} \epsilon \overline{\overline{M}} \right) \cdot \vec{V}_g.$$

Cette approche est en fait très générale il s'ensuit que l'ensemble des résultats exposés pour une particule solide dans la partie 1.4 peut être généralisé de cette manière aux cas des inclusions fluides.

1.11 Effets des parois sur une inclusion fluide

Dans la suite de ce document, nous serons également confrontés aux effets de paroi agissant sur la vitesse terminale de nos inclusions fluides. En fait, il est possible de montrer que si les parois sont suffisamment éloignées de la sphère, alors ses effets sur la force de traînée subie par l'inclusion fluide peuvent être généralisés aux cas des inclusions fluides de la même manière que se généralisent les effets d'inertie. En effet, si dans la méthode des réflexions (décrite en annexe A.8) le premier terme de la série, que nous avons écrit $\vec{w}_0$ et qui correspond à la solution des équations de Stokes en milieu infini, peut être écrit comme une Stokeslet, alors pour une inclusion fluide, le second terme de la série $\vec{w}_1$ sera proportionnel à celui obtenu pour une particule solide mais avec un facteur $\mathcal{R}_\mu/3$. Par conséquent, il exercera en retour sur la particule une force donnée sous la forme d'une traînée d'Hadamard, d'où une généralisation identique à celle proposée par Legendre et Magnaudet (1997) et décrite dans le paragraphe précédent. Nous reviendrons sur ce point dans le chapitre 4 de cette thèse.

1.12 Conclusion

Pour clore ce chapitre, précisons simplement que dans la suite de ce document, nous serons régulièrement amenés à utiliser les résultats que nous avons exposés ici. Notons également que dans l'annexe A, nous avons présenté diverses méthodes analytiques, souvent employées dans le cadre des écoulements à faibles nombres de Reynolds, telles que par exemple la solution de Lamb (1945), ou encore, la méthode des développements asymptotiques raccordés.

Chapitre 2

Présentation du dispositif expérimental

2.1 Introduction

Au cours du premier chapitre, nous avons analysé différents résultats théoriques concernant la détermination des contraintes hydrodynamiques exercées par un fluide en mouvement sur une particule solide ou fluide. En particulier, nous avons vu que lorsque l'écoulement induit par la particule est régi par des équations instationnaires, alors cette dernière subit, entre autre, une force dite "d'histoire" (voir les sections 1.3 et 1.9 du chapitre 1). Également, nous avons vu que lorsque l'écoulement induit est régi par des équations stationnaires, alors les termes convectifs des équations de Navier-Stokes (termes qui sont négligés en première approximation) sont responsables d'une modification de la forme de l'écoulement lointain et par conséquent, ils modifient l'expression de la force qui s'exerce sur la particule (voir sections 1.4 et 1.10).

Pour tenter de mettre en évidence expérimentalement ces différents effets, nous allons nous intéresser à un écoulement en particulier, à savoir, la rotation solide. Non seulement cet écoulement est simple à réaliser expérimentalement, mais en plus, il possède certaines propriétés fort intéressantes que nous allons exploiter pour mettre en évidence les différents résultats évoqués dans le chapitre 1 de cette thèse. A cet effet, nous avons conçu et réalisé un montage expérimental que nous allons maintenant décrire.

2.2 Description générale et principe de mesure

Afin de générer un écoulement de rotation solide, nous avons mis au point un dispositif expérimental constitué d'un cylindre qui peut être mis en rotation par le biais d'une courroie reliée à un moteur électrique. Le cylindre est composé de plexiglass, son rayon interne vaut $R = 40$ mm et il est d'épaisseur $e = 8$ mm (voir figures 2.1 et 2.2). Le moteur électrique utilisé (Multifix - type MC 1000 PEC) est capable de tourner jusqu'à 6500 tours par minute, ce qui est bien supérieur à nos besoins. (Notons que ce moteur est muni d'un réducteur de vitesse.) Dans le but d'assurer une rotation de qualité du cylindre autour de son axe, c'est à dire avec une vitesse de rotation constante et sans vibration, celui-ci est encastré entre deux plaques horizontales munies de roulements à billes.

Le dispositif est ensuite rempli d'huile de silicone. Pour compenser la déformation optique générée par la courbure des surfaces interne et externe du cylindre, ce dernier est placé dans une cuve rectangulaire fixe et remplie de la même huile de silicone (voir annexe B.1). Aussi, le cylindre est fermé hermétiquement par le bas, de sorte qu'il n'y ait bien aucune interaction entre son écoulement interne et l'écoulement à l'intérieur de la cuve rectangulaire. En ce qui concerne le haut du cylindre, l'huile admet une surface libre, mais puisque la viscosité de l'air est très faible comparativement à celle de l'huile, cela n'a quasiment pas d'incidence sur l'écoulement. Le fluide à l'intérieur du cylindre atteint donc rapidement une vitesse de rotation solide peu de temps après la mise en marche du moteur (dans la pratique ce temps de transition est de l'ordre de la seconde). Dans le référentiel du laboratoire $(o, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ avec $\vec{e}_3$ qui coïncide avec l'axe de la rotation, l'écoulement non perturbé s'écrit donc, en coordonnées cartésiennes :

$$\vec{V}_f^0 = \omega(-Y \vec{e}_1 + X \vec{e}_2) .$$

Les particules solides ainsi que les gouttes, qui sont toutes deux plus lourdes que l'huile de silicone, sont relâchées à la main depuis le haut du cylindre, alors que les bulles sont produites depuis le bas du cylindre. Notons que les bulles sont générées par un dispositif spécialement conçu pour, et qui sera détaillé dans la suite. Ces dernières sont relâchées depuis le point I_2 situé à 3 cm de l'axe de la rotation (voir figure 2.2)

Au cours de leurs chutes, ou de leurs ascensions, les inclusions sont filmées à l'aide d'une caméra rapide (dite CCD). Dans toutes les expériences la caméra fait face au plan (X, Z) du dispositif expérimental (voir figures 2.2 et 2.3). De ce fait, et compte tenu du comportement hélicoïdal des trajectoires, l'instant où les particules traversent le plan $Y = 0$ (dans le cylindre) correspond, sur les images délivrées par la caméra, à l'instant où la distance de la particule à l'axe de la conduite est localement maximum (voir figure 2.3). Le plan $Y = 0$ est alors calibré dans l'espace à l'aide d'une petite plaque mince millimétrée, insérée dans la conduite à chaque changement de position de la caméra. Par la même occasion, cela nous permet de nous assurer que la mise au point de la caméra est bien effectuée sur ce plan. En isolant ensuite au cours d'une expérience les images qui correspondent aux instants où la particule traverse le plan $Y = 0$, il est possible de mesurer sa position radiale R_p , ainsi que sa coordonnée axiale Z_p , et donc, d'obtenir l'enveloppe de la trajectoire.

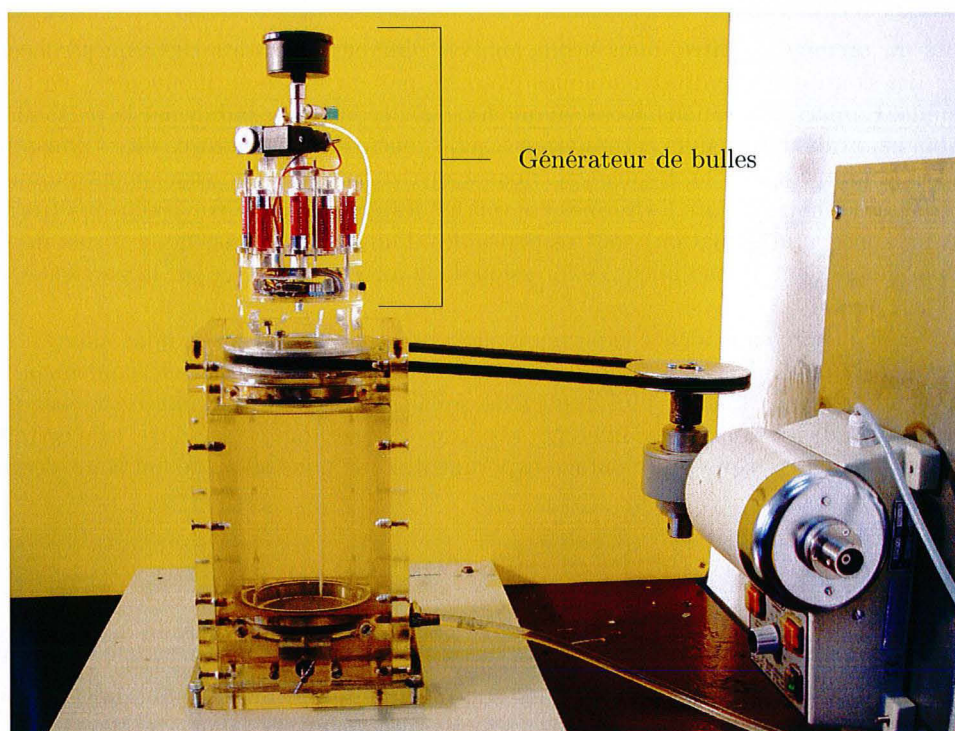


FIG. 2.1 – Vue d'ensemble du dispositif expérimental

2.3 Description de la visualisation

La caméra CCD utilisée dans cette expérience est une caméra de type JAI CV-M30, dont la fréquence d'acquisition peut atteindre 360 images par seconde. La caméra est reliée à un PC muni d'une carte d'acquisition de type IC-PCI-AM-FA de IMAGING TECHNOLOGY.

La caméra possède plusieurs modes de fonctionnement, mais seuls deux d'entre eux sont utilisés dans ces expériences en fonction de nos besoins (voir tableau 2.1). Dans chacun des cas, la caméra délivre des images dont la définition est de 640×240 pixels, avec un rapport d'aspect 1 : 2, c'est à dire qu'une unité de longueur dans le sens des 240 pixels correspond à deux unités de longueur dans le sens des 640 pixels. Notons tout de suite qu'à cause de ce rapport d'aspect, une particule sphérique aura une forme ellipsoïdale, ce qui n'est bien entendu qu'un artefact. Aussi, à chaque film, la caméra enregistre 800

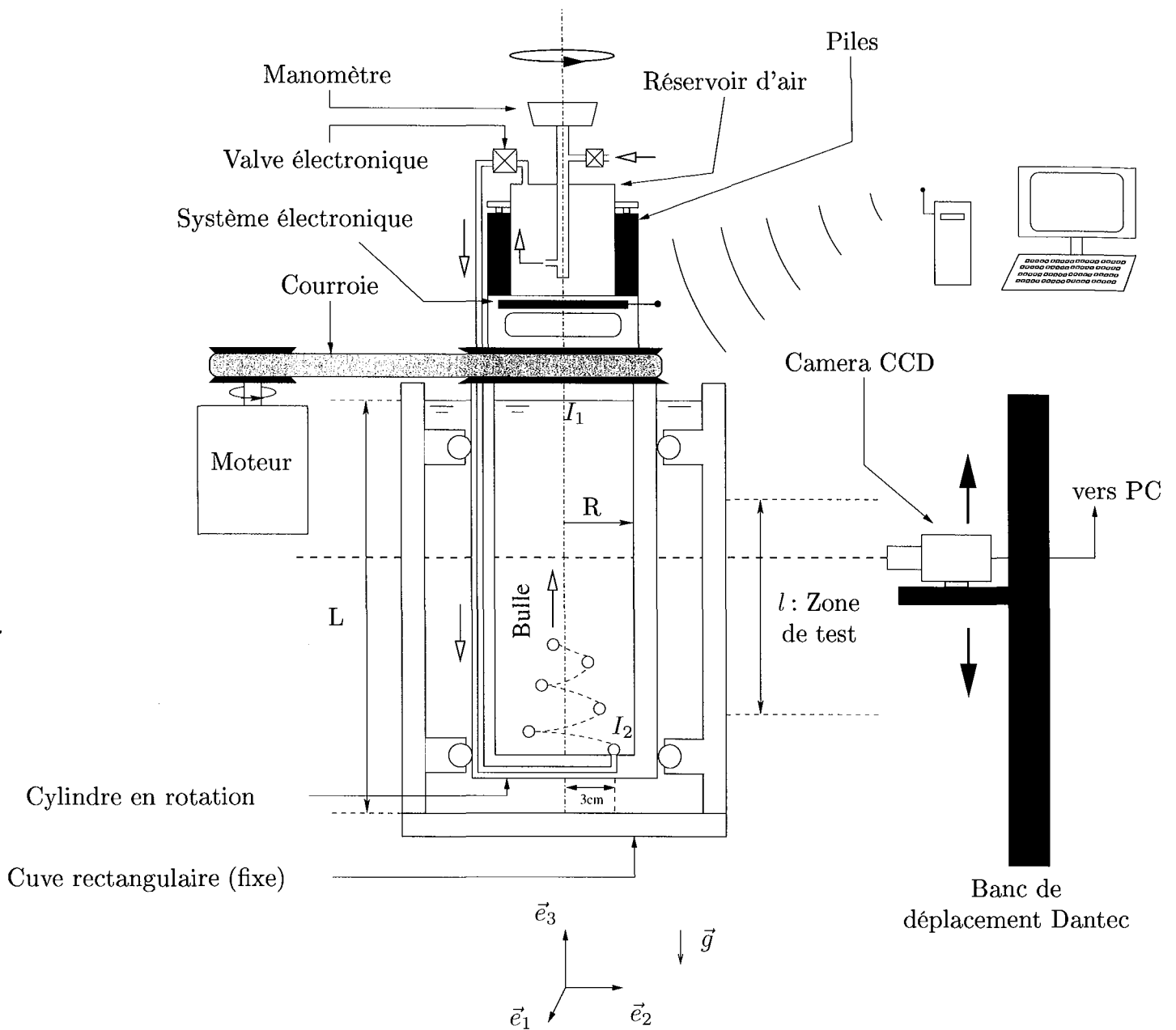
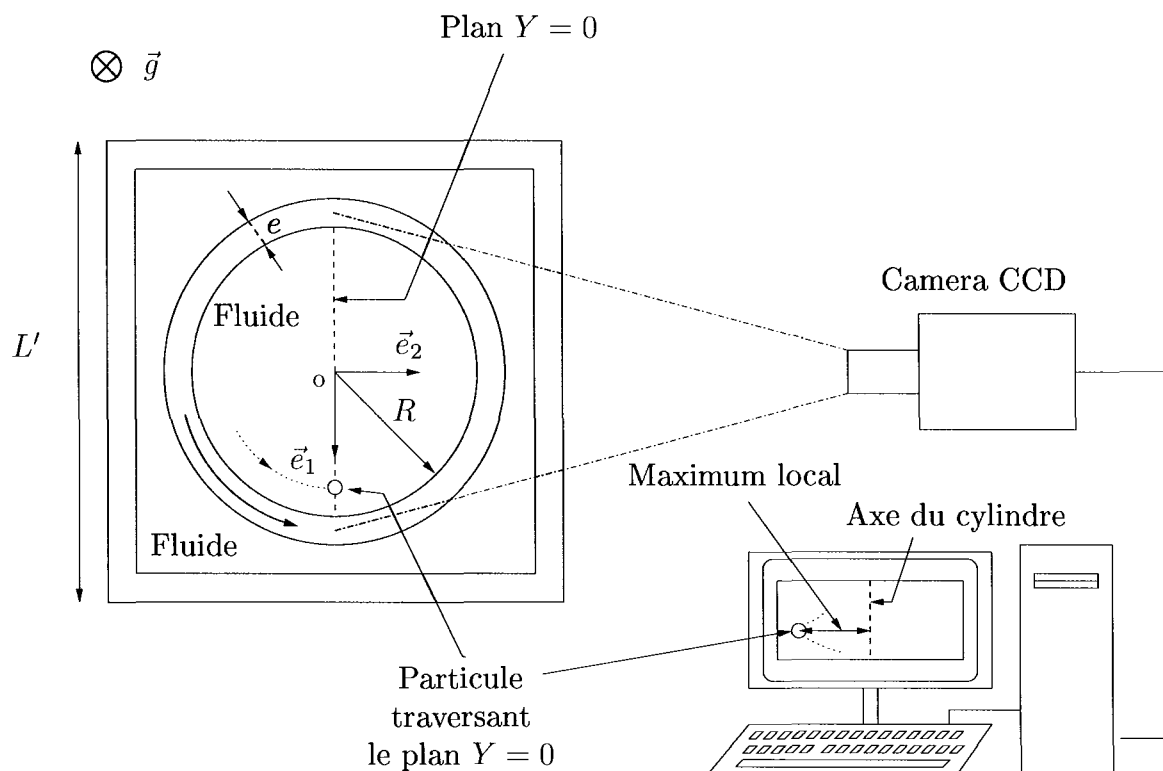


FIG. 2.2 – Schéma du dispositif expérimental. $L=25$ cm, $R=4$ cm et $l=15$ cm. Les particules solides et les gouttes d'eau sont relâchées depuis le point I_1 . Les bulles sont relâchées depuis le point I_2 (situé à 3 cm de l'axe de la rotation).

images, ce qui implique que la durée d'un enregistrement (nombre d'images/fréquence) varie en fonction du mode de fonctionnement choisi. Enfin, nous disposons pour la caméra de deux objectifs différents, l'un dont la focale est réglable et l'autre, qui permet de faire des "macro", autrement dit, d'obtenir un fort grossissement d'une certaine région spatiale.

Positionnement de la caméra

Lorsque les expériences concernent les inclusions fluides (i.e. les bulles et les gouttes), le rayon de la particule varie d'une expérience à l'autre et doit donc être mesuré à l'aide de la caméra. De ce fait, cette dernière doit être positionnée suffisamment près du dispositif expérimental pour que l'erreur de

FIG. 2.3 – Coupe du dispositif expérimental. $L'=16$ cm et $e=8$ mm

Mode	1	2
fréquence (Im/s)	60	120
définition (Pixels)	640×240	640×240
Rapport d'aspect	1:2	1:2
Temps d'enregistrement (s)	13.33	6.66

TAB. 2.1 – Modes de fonctionnement de la caméra CCD

détermination du rayon, erreur qui est commise à cause de la résolution spatiale de la caméra, soit acceptable. Cependant, la trajectoire de la particule se développe toujours dans un domaine spatial très grand comparativement à la taille de la particule. Nous sommes alors confrontés à un problème, à savoir, que si la résolution spatiale est augmentée, par conséquent, le domaine spatial couvert est, quant à lui, réduit et la trajectoire de la particule ne peut être obtenue globalement, ce qui n'est pas acceptable. Pour pallier ce problème, la caméra est positionnée sur un banc de déplacement (Dantec system) capable d'effectuer un mouvement de translation vertical avec une vitesse réglable et imposée avec précision. En réglant cette vitesse de sorte qu'elle coïncide (le plus possible!) avec la vitesse terminale de l'inclusion, alors, il est possible de la suivre sur de grandes distances, tout en la filmant d'assez près pour que la résolution spatiale de l'image soit suffisamment fine pour nous permettre de mesurer le rayon de la particule avec une incertitude raisonnable. Ainsi et suivant nos besoins, la caméra est placée suivant les différentes configurations décrites dans les paragraphes suivants.

Configuration 1 :

Dans la configuration 1 (voir figure 2.4), la caméra est munie de la lentille à focale réglable et positionnée suffisamment loin du dispositif expérimental pour avoir dans son champ, la totalité de la zone d'essai. La définition spatiale (i.e. la correspondance spatiale d'un pixel) est obtenue en filmant la plaque

millimétrée placée dans le plan $Y = 0$ (photographie du haut de la figure 2.4). Dans l'exemple donné ici, qui est bien sur très représentatif de l'ordre de grandeur de la résolution spatiale obtenue dans cette configuration, nous avons

$$\Delta Z = 0.158 \text{ mm/pixel, et } \Delta X = 0.33 \text{ mm/pixel.}$$

Cette configuration est principalement utilisée pour obtenir les trajectoires des particules solides dont le rayon n'est pas à déterminer. L'erreur commise sur la détermination de R_p est alors donnée par ΔX , et celle sur Z_p par ΔZ . Aussi, dans cette configuration, nous pouvons vérifier que grâce à la cuve rectangulaire, la déformation optique due à la circularité du cylindre est bien négligeable dans la quasi totalité du domaine, conformément aux calculs théoriques (voir annexe B.1). C'est ce qui est représenté sur le graphe de la figure 2.4.

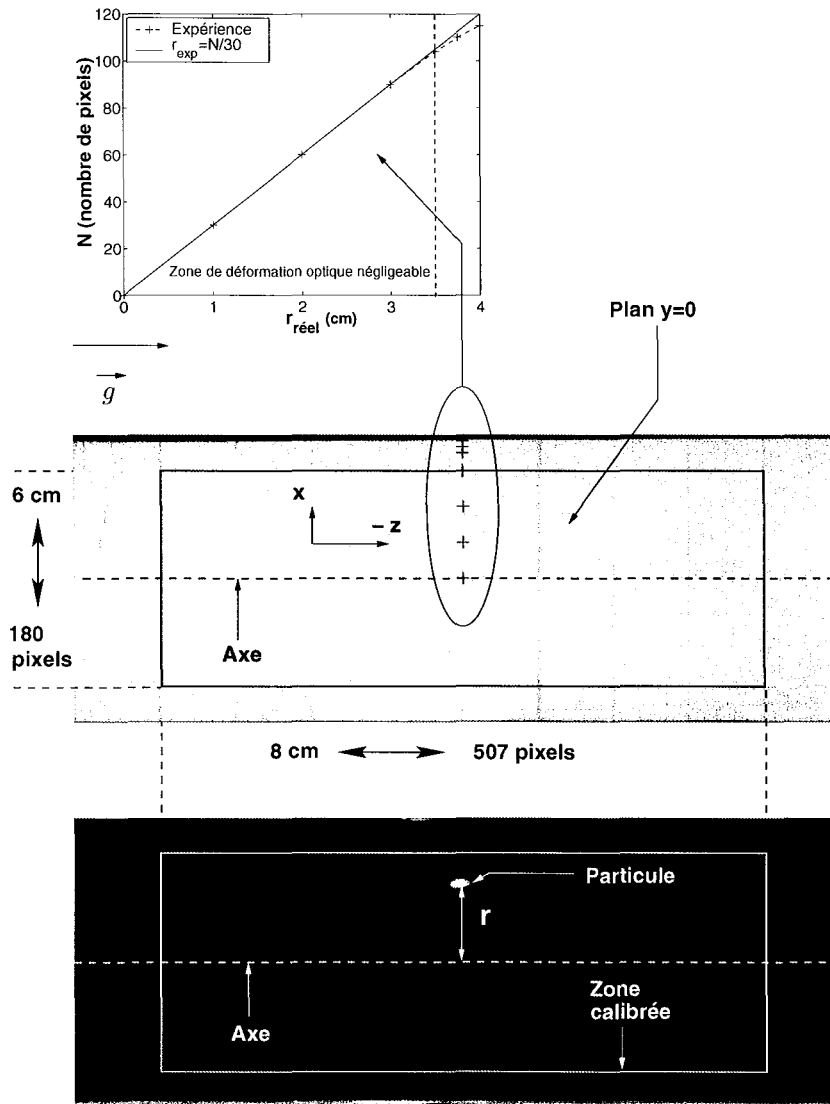


FIG. 2.4 – Configuration 1

Configuration 2 :

Dans la configuration 2 (voir figure 2.5), la caméra est toujours munie de la lentille à focale réglable, mais elle est cette fois placée plus près du cylindre. Sur l'exemple donné ici, la résolution spatiale obtenue

est alors

$$\Delta Z = 0.1 \text{ mm/pixel, et } \Delta X = 0.053 \text{ mm/pixel}.$$

Un point important à noter est que dans cette configuration, la caméra est positionnée sur le banc de déplacement. Elle se déplace donc verticalement dans le repère fixe du laboratoire avec une vitesse de translation constante, et les coordonnées de la particule sont alors obtenues dans un repère relatif. Cela ne change rien en ce qui concerne la détermination de la coordonnée radiale de la particule, par contre, dans cette configuration, nous mesurons une coordonnée suivant $\vec{e}_3$ relative, z . Dans le repère fixe du laboratoire, nous aurons alors $Z_p = V_{\text{banc}} t + z$ (où V_{banc} est la vitesse imposée au banc de déplacement). Afin de s'assurer de la bonne corrélation entre la vitesse imposée au banc et la vitesse de déplacement effective (i.e. mesurée expérimentalement avec la caméra), différents tests ont été réalisés et dont les résultats figurent en annexe B.2. L'écart entre la vitesse imposée au banc et la vitesse réelle mesurée est très faible et de ce fait, il sera négligé.

Notons que cette configuration est principalement utilisée lors des expériences réalisées avec les bulles. Sachant que le rayon de l'inclusion est mesuré avec une précision de l'ordre de 1 pixel (i.e. $\Delta a \simeq \Delta X$), l'erreur de mesure relative $\Delta a/a$ est suffisamment faible pour que nos expériences soient concluantes. Par exemple, sur la photographie du bas (figure 2.5), le diamètre de la bulle est de 3 mm et l'erreur relative est alors de 4 %.

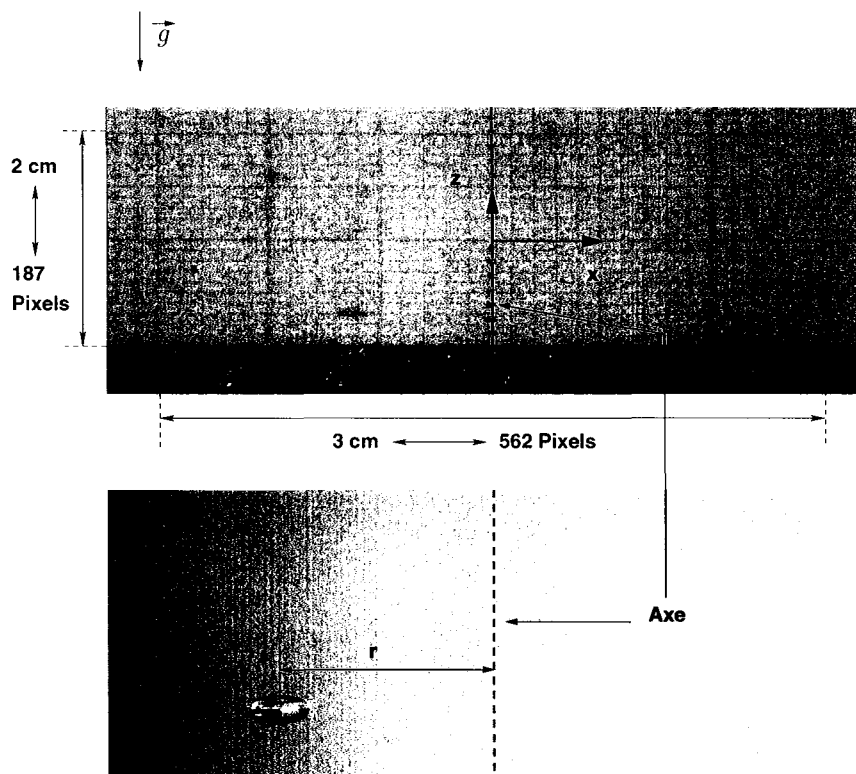


FIG. 2.5 – Configuration 2

Configuration 3 :

Dans la configuration 3 (voir figure 2.6), la caméra est munie de la lentille permettant de réaliser un fort grossissement spatial. Elle est donc disposée très près du cylindre et la résolution spatiale est très fine,

$$\Delta Z = 0.036 \text{ mm/pixel, et } \Delta X = 0.018 \text{ mm/pixel}.$$

Dans l'exemple donné ici et sur la photographie, le diamètre de la goutte est de 3 mm et son rayon, qui est encore mesuré avec une incertitude de l'ordre de 1 pixel, est alors obtenu avec une erreur relative de 1.2 %. Toutefois, notons que cette configuration ne permet pas d'obtenir de trajectoire et cela malgré le

banc de déplacement tant le domaine spatial recouvert est réduit. Dans la pratique cette configuration n'est employée que lors des expériences faites avec les gouttes. En effet, il se trouve que compte tenu de leurs faibles différences de densité avec l'huile, les gouttes ont une vitesse de sédimentation suffisamment faible pour pouvoir être récupérées dès leurs sorties de la zone d'essai et cela plusieurs fois au cours d'une même expérience. Ainsi, la configuration 3 peut être utilisée au début de l'expérience (afin de mesurer le rayon de la goutte avec précision) avant de disposer ensuite la caméra en configuration 2 ou 3 pour obtenir la trajectoire.

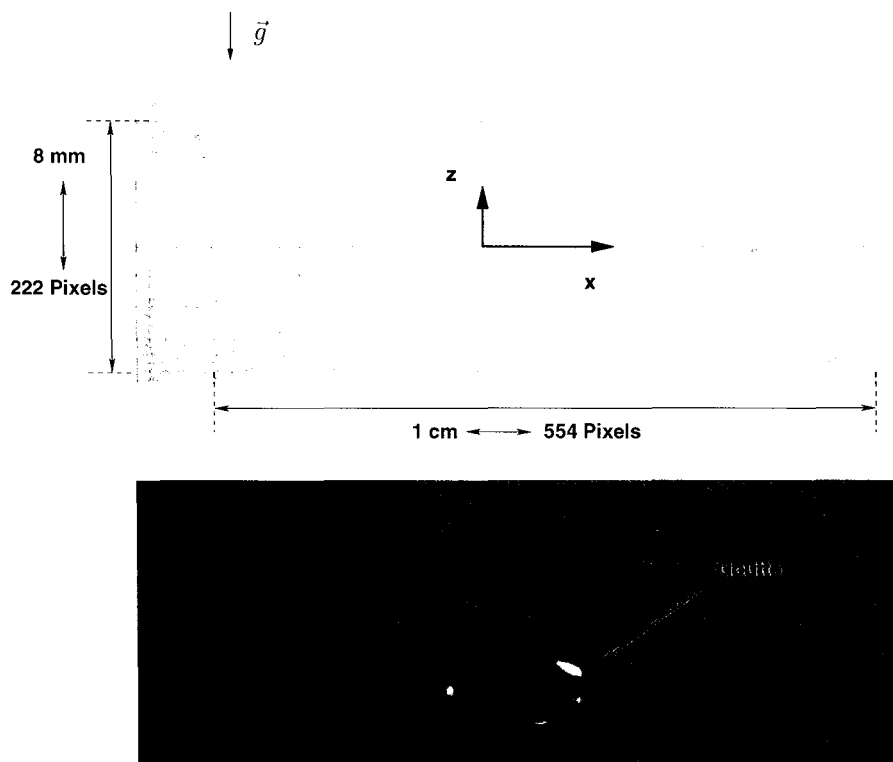


FIG. 2.6 – Configuration 3

2.4 Propriétés physiques des fluides et particules impliqués

2.4.1 Huile de silicone

L'huile de silicone est un fluide newtonien, translucide et très visqueux, qui présente certains avantages comparativement à la glycérine. Principalement, il n'est pas hydrophile et de ce fait, les conditions de stockage de ce fluide sont aisées puisque ses propriétés physiques ne s'altèrent pas (ou très peu) au cours du temps. Sa densité a été mesurée avec précision à l'aide d'un densimètre et pour différentes températures susceptibles d'être rencontrées dans la salle d'expérience (à savoir de 18 à 28°C... 28°C c'est beaucoup pour Nancy!). Celle-ci varie peu et vaut

$$\rho_f = 972 \text{ kg/m}^3.$$

Habituellement, la variation de la viscosité en fonction de la température est décrite par une fonction exponentielle (loi d'Eyrine). Toutefois dans cette étude et compte tenu de la faible plage de température, la variation de la viscosité en fonction de la température peut être exprimée simplement à l'aide de l'interpolation linéaire suivante,

$$\nu_f = (2.743 - 0.036 T(^{\circ}\text{C})) 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}, \quad (2.4.1)$$

calculée à partir de mesures expérimentales représentées sur le graphe de la figure 2.7.

La viscosité cinématique de l'huile de silicone a été mesurée plusieurs fois au cours de cette thèse, et toujours pour la même plage de température. Pour effectuer ces mesures, nous avons utilisé un viscosimètre à tube capillaire (Prolabo). Les résultats obtenus pour chacune de nos expériences sont d'une grande reproductibilité et sont représentés sur la figure 2.7. Dans cette expérience, l'erreur de détermination de la viscosité est très faible (inférieure à 1 %), et quant à la température, celle-ci est déterminée à plus ou moins 1/4 de degré Celsius. C'est donc à l'aide de ces points expérimentaux que nous avons calculé l'équation (2.4.1)

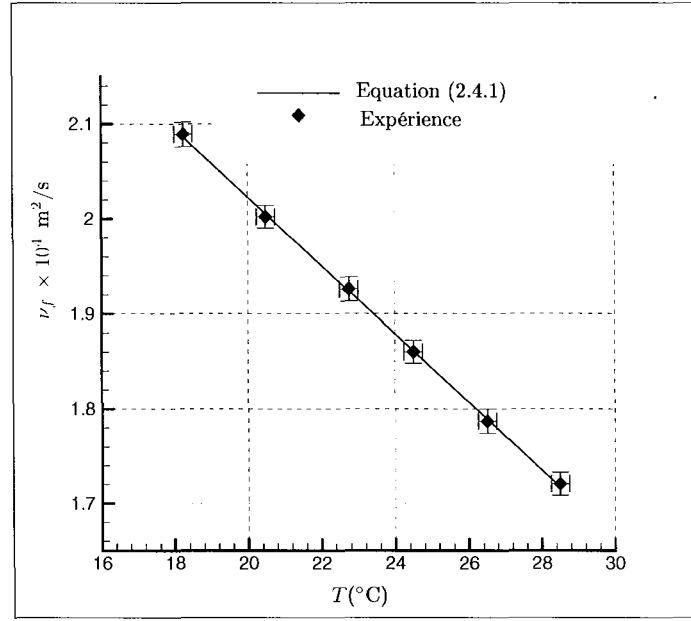


FIG. 2.7 – Évolution de la viscosité en fonction de la température.

2.4.2 Les particules solides

Les particules solides sont des petites sphères blanches en polyacétal, de rayon $a = 1.5$ mm, et de densité

$$\rho_p = 1410 \text{ kg/m}^3.$$

Le rapport des densités entre une particule solide et l'huile de silicone vaut

$$\gamma = \frac{\rho_p}{\rho_f} = 1.45.$$

Ces petites sphères, initialement conçues pour les roulements à billes, sont usinées avec une erreur de sphéricité Δa de l'ordre de 10 μm , soit une erreur relative inférieure à 0.7 %.

2.4.3 Les bulles

Les bulles sont tout simplement constituées d'air. Le générateur de bulles est réglé pour que leurs tailles caractéristiques soient semblables à celles des particules solides, c'est à dire de l'ordre du millimètre.

Les propriétés physiques de l'air, à 20 °C et à pression atmosphérique, sont :

$$\rho_{\text{air}} \simeq 1.225 \text{ kg/m}^3, \quad \mu_{\text{air}} \simeq 1.789 \cdot 10^{-5} \text{ Pa.s}, \quad \nu_{\text{air}} \simeq 1.46 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s},$$

et en pratique, nous supposons que

$$\gamma = \frac{\rho_{\text{air}}}{\rho_f} \ll 1, \quad \frac{\mu_{\text{air}}}{\mu_f} \quad \text{et} \quad \frac{\nu_{\text{air}}}{\nu_f} \ll 1.$$

Notons aussi que l'ordre de grandeur du coefficient de tension superficielle entre l'air et l'huile de silicone est

$$\sigma_{\text{air/huile}} \simeq 20 \cdot 10^{-3} \text{ N/m}.$$

Enfin, rappelons que contrairement aux particules solides, le rayon de la bulle doit être déterminé à chaque expérience, et cela peut se faire avec une précision de l'ordre de 4%.

2.4.4 Les gouttes

Les gouttes sont constituées d'eau purifiée. Leurs tailles caractéristiques sont également de l'ordre du millimètre. Les propriétés physiques de l'eau (à 20 °C) sont

$$\rho_{\text{eau}} \simeq 998.2 \text{ kg/m}^3, \quad \mu_{\text{eau}} \simeq 1.00 \cdot 10^{-3} \text{ Pa.s}, \quad \nu_{\text{eau}} \simeq 1.00 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s},$$

et ainsi, nous aurons :

$$\gamma = \frac{\rho_{\text{eau}}}{\rho_f} \simeq 1.027, \quad \frac{\mu_{\text{eau}}}{\mu_f} \quad \text{et} \quad \frac{\nu_{\text{eau}}}{\nu_f} \ll 1.$$

Notons que l'ordre de grandeur du coefficient de tension superficielle entre l'eau et l'huile de silicone peut être estimé à partir des valeurs des coefficients de tension superficielle entre l'eau et l'air et entre l'huile et l'air (voir par exemple Guyon, Hulin et Petit, 2001, page 54) :

$$\sigma_{\text{eau/huile}} \simeq \sigma_{\text{air/eau}} + \sigma_{\text{air/huile}} - \sqrt{\sigma_{\text{air/huile}} \sigma_{\text{air/eau}}} \simeq 50 \cdot 10^{-3} \text{ N/m}.$$

Aussi, et de même que pour les bulles, le rayon des gouttes doit être déterminé à chaque expérience. Cela se fait en positionnant la caméra dans la configuration 3 et avec une erreur relative de l'ordre de 1%.

2.5 Le générateur de bulles

Le générateur de bulles (voir figures 2.2 et 2.8) a été conçu et réalisé par B. Chenu. Il est solidaire du cylindre et tourne donc autour de son axe. (Notons que pour ne pas altérer la qualité de la rotation du cylindre, les masses ont été réparties de manière axisymétrique.) Il est constitué d'un petit réservoir cylindrique contenant de l'air, mis sous pression à l'aide d'une pompe manuelle. (La pression à l'intérieur de ce réservoir est contrôlée avec une précision de l'ordre de 0.01 bar.) Le réservoir est relié au bas du cylindre qui génère la rotation solide par un petit tube capillaire qui longe sa paroi extérieure. Afin de générer des bulles isolées, une électrovanne, commandée à distance, est placée sur le trajet de l'air. Celle-ci est reliée à un récepteur haute-fréquence et le tout est alimenté par 10 petites piles rechargeables (de 1.2 volt chacune), disposées régulièrement autour de l'injecteur.

Le déclenchement, ainsi que la durée d'ouverture de la vanne, sont pilotés à distance à l'aide d'un PC et réglés selon nos besoins. La carte électronique correspondante a été conçue et réalisée par A. Delconte. En jouant à la fois sur la pression dans le réservoir et sur la durée d'ouverture de la vanne, il est possible de générer des bulles dont la dispersion radiale autour de la valeur désirée est relativement faible. Cette faible dispersion implique que la vitesse terminale de la bulle peut être estimée, ce qui nous est fortement utile puisque la bulle est suivie au cours de son ascension par la caméra.

2.6 Trajectoires typiques des particules et inclusions fluides

Les deux photographies de la figure 2.9 montrent des trajectoires typiques obtenues par superposition des images délivrées par la caméra, pour une particule solide (a) et pour une bulle (b). Sur ces images, chaque position de la particule correspond à une image de la caméra et donc à un intervalle de temps constant. Il est ainsi possible, rien qu'à partir de ces deux photographies, de constater que le temps mit par la particule pour décrire un tour complet autour de l'axe du cylindre est constant (dans la pratique, nous trouvons que ce temps est quasiment confondu avec $2\pi/\omega$). A partir de ce simple constat, il est également possible d'en déduire que la vitesse verticale de la particule, c'est à dire,

$$\frac{d\vec{X}_p}{dt} \cdot \vec{e}_3$$

est constante et nous la noterons V_T (T comme "terminale") dans la suite. Par ailleurs, nous noterons aussi

$$V_H(t) = \left| \left(\vec{V}_f^0(\vec{X}_p) - \frac{d\vec{X}_p}{dt} \right) \cdot \vec{e}_1 + \left(\vec{V}_f^0(\vec{X}_p) - \frac{d\vec{X}_p}{dt} \right) \cdot \vec{e}_2 \right|,$$

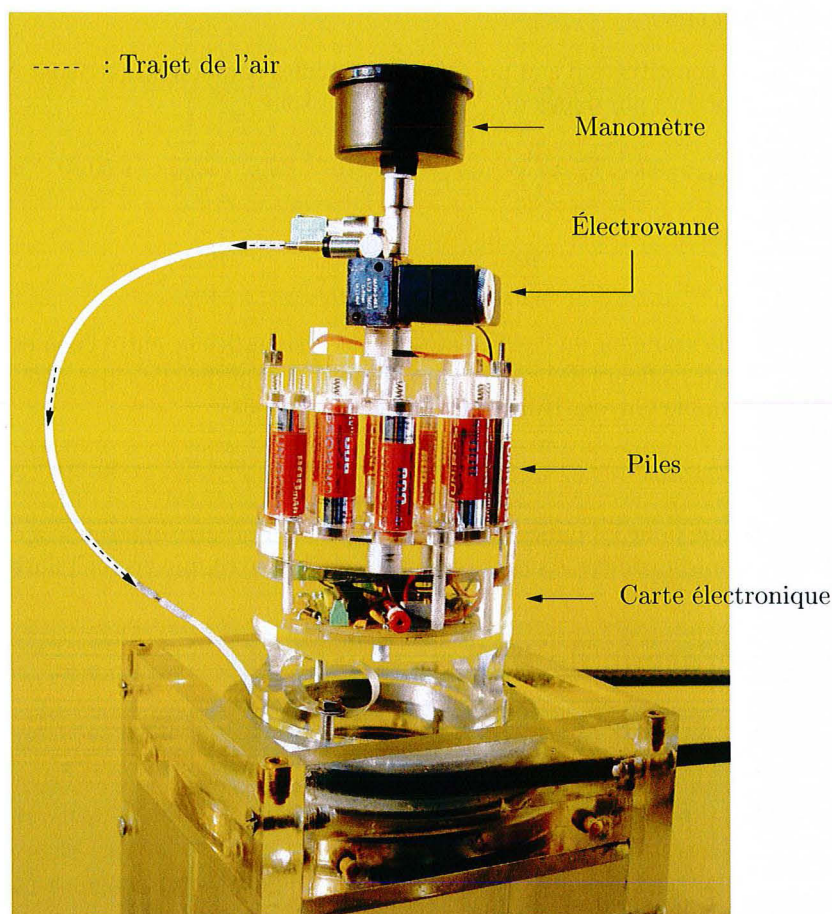


FIG. 2.8 – Photographie du générateur de bulles

la norme de la vitesse de glissement dans le plan horizontal. Précisons que contrairement à V_T , V_H dépend du temps. Avec ces deux vitesses, nous pouvons construire deux nombres de Reynolds (basés sur le rayon de la particule et non sur le diamètre) :

$$Re_T = \frac{V_T a}{\nu_f} \quad \text{et} \quad Re_H = \frac{V_H a}{\nu_f}.$$

Compte tenu des effets de paroi, ainsi que des effets d'inertie (qui seront examinés dans le chapitre suivant), la vitesse terminale de la particule dans ces expériences sera toujours inférieure à la vitesse terminale prédite par la théorie de Stokes (respectivement Hadamard) en milieu infini, à savoir :

$$V_T^{\text{Hadamard}} = \frac{2}{3\mathcal{R}_\mu} \frac{a^2 (\gamma - 1) g}{\nu_f} \quad \text{où} \quad \mathcal{R}_\mu = \frac{3 + 2\lambda}{1 + \lambda} \quad \text{et} \quad \lambda = \frac{\mu_f}{\mu'_f}.$$

Dans le cadre de nos expériences, nous aurons donc toujours

$$Re_T < \frac{2}{3\mathcal{R}_\mu} \frac{a^3 (\gamma - 1) g}{\nu_f^2}.$$

Aussi, et sachant que dans le cadre de cette étude, ω ne dépassera pas 25 rad/s, nous aurons, en ce qui concerne le nombre de Reynolds de cisaillement, une valeur toujours inférieure à

$$\eta = \frac{a^2 \omega}{\nu_f} < 0.40.$$

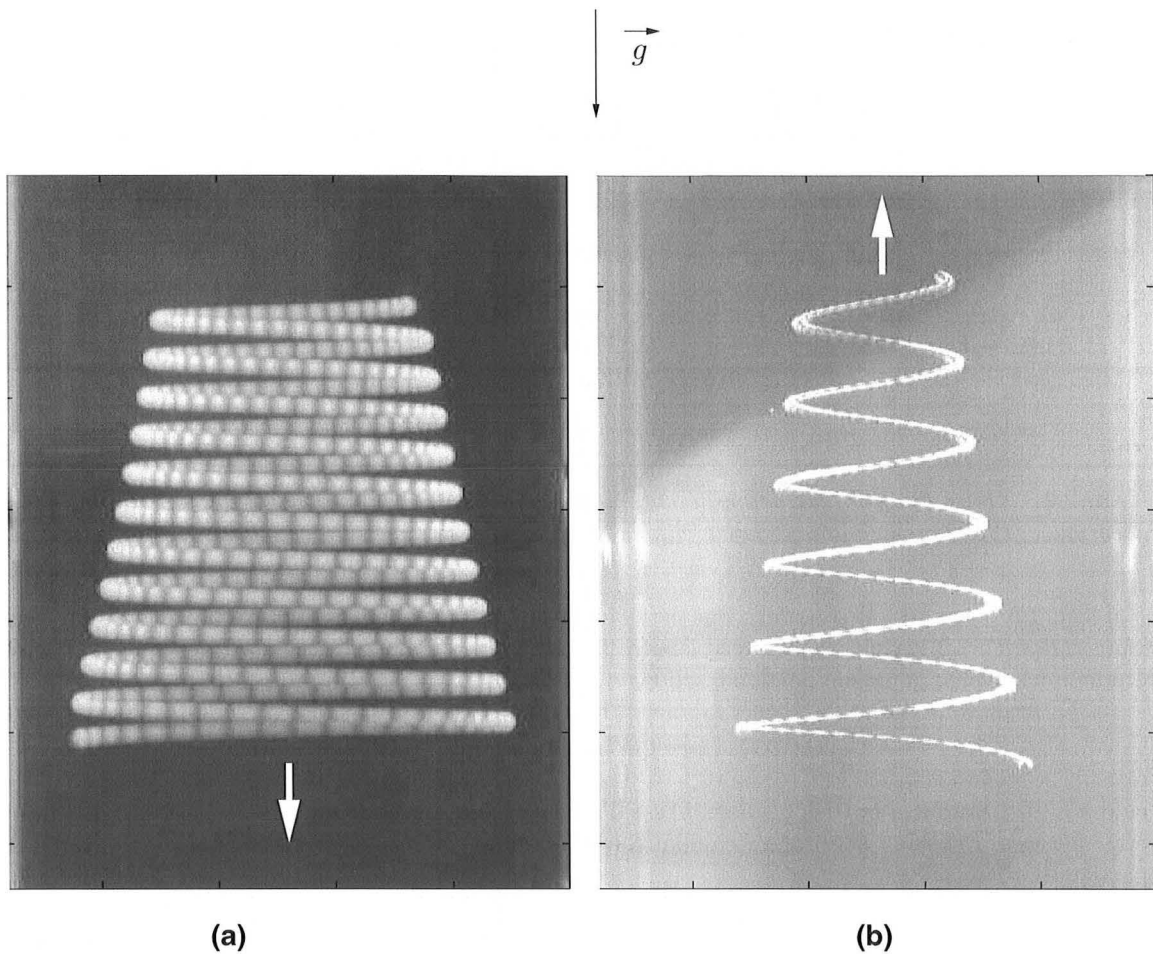


FIG. 2.9 – Exemple de trajectoires dans le plan (X, Z) obtenues par superposition des images pour une sphère solide (a) et pour une bulle (b). Pour la photographie (a) : $a = 1.5 \text{ mm}$, $\omega = 10 \text{ rad s}^{-1}$, $Re_T \simeq 0.065$, $Re_H \simeq 0.004$ et $S \simeq 0.012$. Pour la photographie (b) : $a \simeq 1.1 \text{ mm}$, $\omega = 7 \text{ rad s}^{-1}$, $Re_T \simeq 0.1$, $Re_H \simeq 0.004$, $S \simeq 0.005$. Dans les deux cas, Re_H est instationnaire et la valeur donnée ici correspond à la valeur maximale de la vitesse de migration radiale de la particule.

Notons que dans les chapitres suivants, nous serons également amenés à travailler avec un nombre sans dimension proportionnel à η que nous appellerons pseudo nombre de Stokes et qui sera défini par

$$S = \frac{\eta}{9}.$$

L'ensemble des nombres sans dimension qui seront utilisés dans l'analyse théorique, ainsi que leurs valeurs, sont récapitulés dans le tableau 2.2.

2.7 Discussion sur les effets de paroi

Dans la section 1.6.1 du chapitre 1, nous avons vu que la force de traînée qui s'exerce sur une particule qui sédimente parallèlement aux parois dans une conduite cylindrique est donnée, en hypothèse de Stokes, par

$$\vec{F}^1 = -6\pi\mu_f a \vec{V}_p \left(1 + \frac{a}{R} f\left(\frac{R_p}{R}\right) \right),$$

où R_p est la distance de la particule à l'axe du cylindre et R le rayon du cylindre. Aussi, $f(R_p/R)$ est une certaine fonction qui a été calculée par Brenner (1964) et qui est tabulée dans le premier chapitre

	$a(\text{mm})$	$S = \frac{a^2 \omega}{9 \nu_f}$	$Re_T = \frac{a V_T}{\nu_f}$	$Re_H = \frac{a V_H}{\nu_f}$	$\alpha = \frac{18 S}{Re_T^2}$
Sphères solides :	$a = 1.5$	$0.006 < S < 0.029$	$0.066 < Re_T < 0.082$	$0 < Re_H < 0.09$	$20 < \alpha < 113$
Inclusions gazeuses :	$1.1 < a < 1.82$	$0.005 < S < 0.043$	$0.23 < Re_T < 0.41$	$0 < Re_H < 0.34$	$6 < \alpha < 40$
Inclusions liquides :	$1.32 < a < 1.72$	$0.005 < S < 0.041$	$0.005 < Re_T < 0.008$	$0 < Re_H < 0.01$	$1.4 \cdot 10^3 < \alpha < 1.6 \cdot 10^4$

TAB. 2.2 – Ordre de grandeur des différents nombres sans dimension qui seront utilisés dans la partie théorique. (Précisons que la plus faible vitesse de rotation non nulle du cylindre est de 5 rad/s.)

(tableau 1.3, page 35). Il se trouve que cette fonction est quasiment constante dans toute la section et vaut $f(R_p/R) \simeq 2.1$, sauf au proche voisinage de paroi où la traînée augmente brutalement. Dans notre étude, nous avons, pour une particule solide : $a = 1.5$ mm et $R = 40$ mm, de sorte que

$$\frac{a}{R} = 0.0375, \quad \text{ce qui implique que} \quad \frac{a}{R} f\left(\frac{R_p}{R}\right) \simeq 8\%,$$

ce qui n'est pas tout à fait négligeable. C'est d'ailleurs la raison pour laquelle la viscosité de l'huile doit être mesurée avec un viscosimètre capillaire, plutôt qu'en mesurant la vitesse terminale d'une de nos particules.

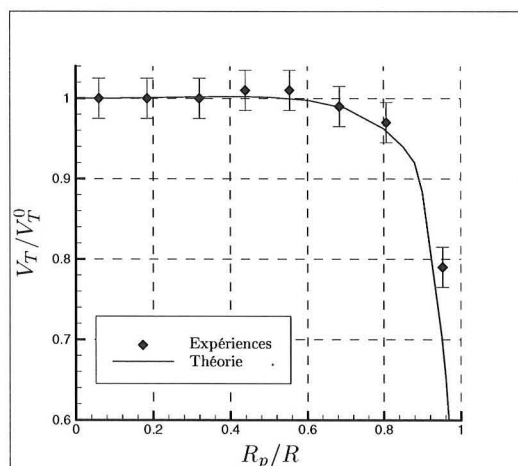


FIG. 2.10 – Vitesse terminale de la particule par rapport à la vitesse terminale obtenue au centre de la conduite. La courbe théorique est obtenue en écrivant que la vitesse est telle que la force $\vec{F}^1$ compense la flottabilité.

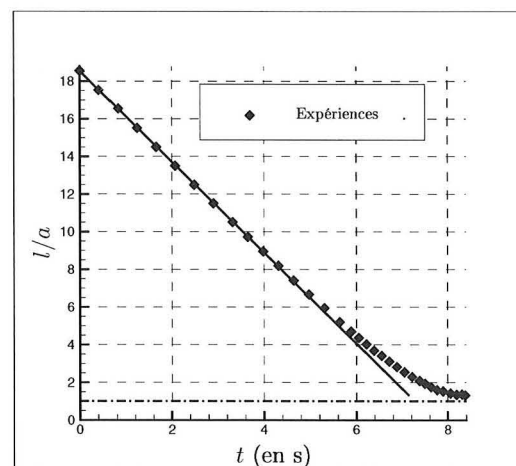


FIG. 2.11 – Evolution dans le temps de la distance l de la particule par rapport à une paroi plane. La pente de la droite montre que la vitesse de la particule est quasiment constante jusqu'à une valeur assez proche de la paroi ($\approx 3a$).

Aussi, dans cette étude, le fait que les effets de paroi soient quasiment constants dans toute la section de la conduite est important car de ce fait, ces derniers ne modifient pas la vitesse terminale de la particule lorsque celle-ci se déplace radialement dans la conduite. Pour nous assurer donc que ces effets de paroi sont vraiment constants, nous en avons fait l'expérience en relâchant une même particule solide à différents endroits de la conduite (lorsque le cylindre ne tourne pas). Les résultats obtenus sont donnés sur le graphe de la figure 2.10, où V_T^0 est la vitesse terminale mesurée au centre de la conduite et V_T est

la vitesse terminale mesurée à une certaine distance R_p de l'axe du cylindre. L'accord entre la théorie de Happel et Brenner (1983) et nos expériences est vraiment très bon, et notamment lorsque la particule est très près de la paroi.

Par la même occasion, nous nous sommes, en outre, intéressés à l'amortissement de la vitesse de la particule lorsque celle-ci tombe perpendiculairement à une paroi plane (voir figure 2.11). Sur ce graphe, la pente de la courbe nous donne donc la vitesse de la particule et nous voyons donc que celle-ci reste quasiment constante jusqu'à une distance d'à peu près $6a$ de la paroi. En s'inspirant de ce résultat et bien que dans le cas de la migration radiale, la paroi vers laquelle se dirige la particule soit incurvée, il est légitime de penser que les effets de paroi seront également constants, excepté au proche voisinage de la paroi. Pour cette raison, au cours des expériences nous nous sommes attachés à ne pas prendre en compte les mesures faites pour $R_p > 3$ cm (i.e. à moins de 1 cm de la paroi).

2.8 Conclusion

Les trajectoires obtenues pour des particules solides et des inclusions fluides à l'aide de ce dispositif expérimental seront dans la suite comparées aux trajectoires théoriques que nous nous proposons de calculer dans les chapitres suivants. Notons que ces dernières sont d'une grande reproductibilité, ce qui tend à augmenter la fiabilité des résultats expérimentaux.

Chapitre 3

Etude du mouvement d'une particule solide dans un fluide en rotation solide

Dans ce chapitre, ainsi que dans le suivant, nous nous proposons d'étudier l'écoulement de perturbation non pas dans un référentiel en rotation mais dans un référentiel dont les axes restent fixes par rapport au référentiel du laboratoire. Compte tenu de la forme de la trajectoire adoptée par la particule (voir photos 2.9, page 61) ce choix peut paraître paradoxal à bien des égards. En réalité, l'étude proposée dans les chapitres 3 et 4 de cette thèse a pour objectif de tester la validité de l'équation de mouvement de Boussinesq-Basset – faisant intervenir un terme d'histoire – et qui est très largement employée dans littérature, aussitôt que l'écoulement de perturbation est régi par des équations instationnaires et que les nombres de Reynolds sont faibles. Ainsi, nous verrons que l'utilisation d'une telle équation de mouvement implique de faire des simplifications qui ne sont pas toujours justifiées. Toutefois, le lecteur soucieux de connaître l'expression exacte de la force hydrodynamique qui s'exerce sur la particule peut se référer à l'article de Herron, Davis & Bretherton (1975) ou encore à l'article de Candelier, Angilella & Souhar (2005) rajouté en fin de document, ou passer directement au chapitre 5.

3.1 Introduction et position du problème

Dans le chapitre précédent, nous avons décrit un dispositif expérimental permettant de générer un écoulement de rotation solide. Dans ce chapitre, nous nous intéressons maintenant au mouvement d'une particule solide dans un tel écoulement, lorsque le nombre de Reynolds de particule et le nombre de Reynolds de cisaillement sont tous les deux petits devant 1. Avant toute chose, précisons que dans cette étude, nous serons amenés à travailler dans le référentiel du laboratoire $\mathcal{R}_o$, supposé galiléen, et dans le référentiel lié à la particule $\mathcal{R}_p$ que nous appellerons aussi, référentiel de Koenig. Par ailleurs, il nous sera parfois utile de travailler dans des bases autres que la base cartésienne (voir le schéma de la figure 3.1) telles que la base cylindrique $(\vec{e}_R, \vec{e}_\Theta, \vec{e}_3)$ et la base sphérique $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\phi)$.

Notons bien que dans cette étude nous allons nous intéresser au mouvement de la particule en supposant que celle-ci a déjà atteint sa vitesse terminale ascensionnelle (vitesse que nous avons écrite V_T) et que celle-ci ne dépend pas du temps. Enfin, précisons aussi que la vitesse de rotation imposée à l'écoulement fluide (ω) est indépendante du temps.

Le but de cette étude est donc de parvenir à calculer l'équation de mouvement de la particule solide, donnée par

$$m_p \frac{d\vec{V}_p}{dt} = \vec{F}^0 + \vec{F}^1 + m_p \vec{g}. \quad (3.1.1)$$

où $\vec{F}^0$ est la force exercée par l'écoulement non perturbé et $\vec{F}^1$ la force exercée par l'écoulement induit sur la particule. Le calcul de $\vec{F}^0$ est ici immédiat et puisque la rotation solide est un écoulement linéaire

- Position de la particule :

$$\vec{X}_p(t) = X_p(t) \vec{e}_1 + Y_p(t) \vec{e}_2 + Z_p(t) \vec{e}_3$$

ou

$$\vec{X}_p(t) = R_p(t) \vec{e}_{R_p} + Z_p(t) \vec{e}_3 .$$

- Vitesse de la particule :

$$\vec{V}_p(t) = \dot{X}_p(t) \vec{e}_1 + \dot{Y}_p(t) \vec{e}_2 + V_T \vec{e}_3$$

ou

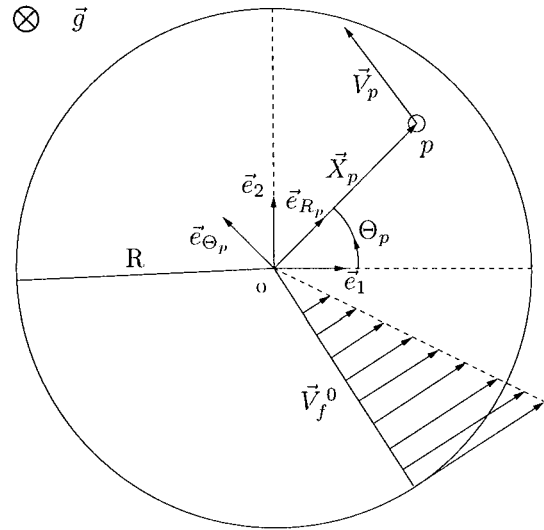
$$\vec{V}_p(t) = \dot{R}_p(t) \vec{e}_{R_p} + R_p(t) \dot{\Theta}_p(t) \vec{e}_{\Theta_p} + V_T \vec{e}_3 .$$

- Vitesse du fluide (écoulement non perturbé) :

$$\vec{V}_f^0(\vec{X}) = -\omega Y \vec{e}_1 + \omega X \vec{e}_2 = \vec{\bar{A}} \cdot \vec{X}$$

avec $A_{ij} = 0$ sauf $A_{12} = -A_{21} = -\omega$.

- Nous écrirons aussi $\vec{V}_f^0(\vec{X}) = R\omega \vec{e}_{\Theta}$.



$\mathcal{R}_0$	: $(o, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$	Référentiel du laboratoire.
$\mathcal{R}_p$	: $(p, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$	Référentiel de Koenig.

FIG. 3.1 – Schéma et notations de l'étude. Notons que $\vec{e}_3$ coïncide avec l'axe du cylindre

(voir le paragraphe 1.1.3, page 10 du chapitre 1) nous avons alors exactement

$$\vec{F}^0 = m_f \frac{D\vec{V}_f^0}{Dt} \Big|_{\vec{X}_p} - m_f \vec{g} = m_f \vec{\bar{A}}^2 \cdot \vec{X} - m_f \vec{g} = -m_f \omega^2 (X \vec{e}_1 + Y \vec{e}_2) - m_f \vec{g} .$$

Bien entendu, dans cette étude, la difficulté réside dans la détermination de $\vec{F}^1$. Dans un cas général, nous avons vu dans le chapitre 1, que l'écoulement induit est régi par le système d'équations (S1) (page 8) qui, dans le référentiel $\mathcal{R}_p$ lié à la particule, s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\nabla} \cdot \vec{w}_f^1 = 0 , \\ \rho_f \frac{\partial \vec{w}_f^1}{\partial t} + \rho_f (\vec{w}_f^0 \cdot \vec{\nabla}) \vec{w}_f^1 + \rho_f (\vec{w}_f^1 \cdot \vec{\nabla}) \vec{w}_f^1 + \rho_f (\vec{w}_f^1 \cdot \vec{\nabla}) \vec{w}_f^0 = -\vec{\nabla} P^1 + \mu_f \vec{\Delta} \vec{w}_f^1 , \\ \text{et les conditions limites et initiales vérifiées par } \vec{w}_f^1 \text{ sont :} \\ \vec{w}_f^1 \rightarrow \vec{0} \text{ lorsque } |\vec{x}| \rightarrow \infty , \\ \vec{w}_f^1 = \vec{\Omega}_p \wedge \vec{x} + \vec{V}_p(t) - \vec{V}_f^0 \text{ lorsque } |\vec{x}| = a , \\ \vec{w}_f^1 \text{ donnée à } t = 0 . \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (3.1.2) \\ (3.1.3) \\ (3.1.4) \\ (3.1.5) \\ (3.1.6) \end{array}$$

Nous pouvons dès à présent noter que parce que le nombre de Reynolds Re que nous avons défini comme étant

$$Re = \frac{a |\vec{V}_f^0(\vec{X}_p) - \vec{V}_p|}{\nu_f}$$

est supposé petit devant l'unité, alors les termes quadratiques $(\vec{w}_f^1 \cdot \vec{\nabla}) \vec{w}_f^1$ de l'équation (3.1.3) pourront être négligés dans toute cette étude (voir le paragraphe 1.4, page 23 du chapitre 1).

Par conséquent, dans la suite, nous considérerons que les équations qui régissent l'écoulement induit sont linéaires.

Ce point est important car la linéarité des équations qui régissent l'écoulement induit sera exploitée dans la suite.

Pour pouvoir estimer l'ordre de grandeur des autres termes de l'équation (3.1.3), nous allons à présent les exprimer dans le cas particulier de la rotation solide. Ainsi, sachant que

$$\vec{w}_f^0(\vec{x}, t) = \vec{V}_f^0(\vec{X}, t) - \vec{V}_p(t) = \overline{\overline{A}} \cdot \vec{X} - \vec{V}_p,$$

et puisque par définition,

$$\vec{X} = \vec{X}_p(t) + \vec{x},$$

nous avons alors

$$\vec{w}_f^0(\vec{x}, t) = \overline{\overline{A}} \cdot \vec{X}_p(t) + \overline{\overline{A}} \cdot \vec{x} - \vec{V}_p(t).$$

Ensuite, et afin de tirer parti du fait que nous avons supposé que la vitesse de la particule possède une composante stationnaire suivant $\vec{e}_3$, nous allons introduire l'opérateur de projection dans le plan horizontal $(o, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, défini par

$$\overline{\overline{P}}_H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

A l'aide de cet opérateur, nous pouvons écrire la vitesse de la particule de la manière suivante :

$$\vec{V}_p(t) = \overline{\overline{P}}_H \cdot \vec{V}_p(t) + V_T \vec{e}_3,$$

et sachant que l'écoulement non perturbé n'a pas de composante verticale, nous aurons également

$$\vec{V}_f^0 = \overline{\overline{P}}_H \cdot \vec{V}_f^0.$$

En introduisant dans nos équation la vitesse de glissement définie par

$$\vec{V}_g(t) = \vec{V}_f^0(\vec{X}_p(t)) - \vec{V}_p(t) = \overline{\overline{A}} \cdot \vec{X}_p(t) - \vec{V}_p(t),$$

l'écoulement non perturbé pourra aussi s'écrire

$$\vec{w}_f^0(\vec{x}, t) = \overline{\overline{P}}_H \cdot \vec{V}_g(t) + \overline{\overline{A}} \cdot \vec{x} - V_T \vec{e}_3.$$



Insistons sur le fait qu'ici, la vitesse de glissement a été définie comme la différence entre la vitesse du fluide et celle de la particule et non l'inverse, comme c'est très souvent le cas dans la littérature.

Finalement, dans cette étude, les équations (3.1.3) et (3.1.5) de (S1) peuvent être réécrites de la manière suivante :

$$\frac{\partial \vec{w}_f^1}{\partial t} + \left((\overline{\overline{P}}_H \cdot \vec{V}_g(t) - V_T \vec{e}_3) \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{w}_f^1 + \left((\overline{\overline{A}} \cdot \vec{x}) \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{w}_f^1 + \overline{\overline{A}} \cdot \vec{w}_f^1 = -\frac{1}{\rho_f} \vec{\nabla} P^1 + \nu_f \vec{\Delta} \vec{w}_f^1 \quad (3.1.7)$$

et

$$\vec{w}_f^1 = \underbrace{V_T \vec{e}_3 + \vec{\Omega}_p \wedge \vec{x} - \overline{\overline{A}} \cdot \vec{x}}_{(a)} - \underbrace{\overline{\overline{P}}_H \cdot \vec{V}_g(t)}_{(b)} \quad \text{lorsque } |\vec{x}| = a. \quad (3.1.8)$$

Sous cette forme, la condition limite (3.1.8) fait à présent intervenir deux groupements (a) et (b), dont l'un, à savoir (a), est purement stationnaire et l'autre, dépend explicitement du temps.

Proposition de décomposition de la vitesse $\vec{w}_f^1$

Maintenant, imaginons deux champs de vitesses :

$$\vec{w}_f^{1a} \quad \text{et} \quad \vec{w}_f^{1b},$$

tous deux solutions de l'équation (3.1.7) mais dont le premier ne vérifie que la partie (a) de la condition limite (3.1.8) et le second, la partie (b). Parce que les équations de l'écoulement induit considérées ici sont linéaires, la solution générale de notre problème sera donc donnée par la somme de ces deux solutions :

$$\vec{w}_f^1 = \vec{w}_f^{1a} + \vec{w}_f^{1b} \quad \text{et} \quad P^1 = P^{1a} + P^{1b}.$$

Par conséquent, la force exercée par l'écoulement induit sur la particule sera donnée par

$$\vec{F}^1 = \vec{F}^{1a} + \vec{F}^{1b},$$

et chacune de ces deux composantes pourra être déterminée à partir de la résolution de "sous problèmes" indépendants l'un de l'autre. En particulier, nous verrons dans la suite que le premier sous problème se réduira en fait à une étude stationnaire et le second, à une étude instationnaire.

Mais avant cela, il convient de noter que dans un cas général la complexité de l'équation (3.1.7) est telle que même lorsque qu'elle n'est associée qu'à une seule partie de la condition limite (3.1.8), en l'occurrence soit la partie (a) soit la partie (b), il n'est pas possible d'obtenir de solution analytique. Ainsi, pour parvenir à estimer malgré tout la force induite par chacun des écoulements solutions des deux sous problèmes, il sera nécessaire de faire certaines hypothèses simplificatrices supplémentaires. Or pour pouvoir faire ces hypothèses, il nous faut connaître *a priori* les ordres de grandeur des différents termes qui sont impliqués dans l'équation (3.1.7). C'est la raison pour laquelle nous allons tout d'abord réaliser une pré-étude qui consistera à résoudre le problème dans le cadre de la théorie des écoulements rampants stationnaires. Bien qu'inexacte dans l'absolu, cette résolution nous fournira des renseignements utiles pour la suite. Par ailleurs, celle-ci aura également l'intérêt d'introduire dans un cadre relativement simple un formalisme qui sera par la suite largement développé au cours de ce chapitre.

3.2 Mouvement de la particule dans le cadre de la théorie des écoulements rampants stationnaires

Dans le cas traité ici, le nombre de Reynolds Re , ainsi que le nombre de Reynolds de cisaillement η , qui dans le cadre de la rotation solide s'écrit

$$\eta = \frac{a^2 \omega}{\nu_f},$$

sont tous deux supposés petits devant l'unité. De ce fait, nous pouvons affirmer qu'au voisinage de la particule, i.e. lorsque $|\vec{x}| \simeq O(a)$, tous les termes convectifs de l'équation (3.1.7) sont faibles comparativement aux termes visqueux (voir la discussion de la section 1.4 du chapitre 1). Si maintenant, il est fait l'hypothèse que le temps caractéristique de variation de la partie (b) de la condition limite (3.1.8), disons τ , est très grand devant le temps caractéristique de la diffusion visqueuse au voisinage de la particule,

$$\tau \gg \frac{a^2}{\nu_f},$$

alors, le terme $\partial \vec{w}_f^1 / \partial t$ peut, en première approximation, être également négligé de l'équation (3.1.7) et l'écoulement induit est alors régi par les équations de Stokes stationnaires.

De plus, puisque dans le cas des écoulements en rotation solide $\vec{\bar{A}}$ est antisymétrique, nous avons

$$\vec{\bar{A}} \cdot \vec{x} = \omega \vec{e}_3 \wedge \vec{x},$$

et cela implique que les termes

$$\vec{\Omega}_p \wedge \vec{x} - \vec{\bar{A}} \cdot \vec{x} = (\Omega_p - \omega) \vec{e}_3 \wedge \vec{x}$$

qui apparaissent dans la partie (a) de la condition limite pourront être traités comme si la particule possédait une vitesse de rotation propre autour de $\vec{e}_3$ avec une vitesse angulaire supposée stationnaire et donnée par $(\Omega_p - \omega)$. Dans une telle situation, la solution analytique qui correspond à ce problème peut être obtenue par exemple à l'aide de la solution de Lamb (voir annexe A.1), mais cependant nous n'allons pas la détailler ici. Précisons simplement que dans le cadre de la théorie des écoulements rampants, la vitesse de rotation de la particule est sans effet sur la force exercée par l'écoulement induit sur la particule et par ailleurs, celle-ci est donnée par

$$\vec{F}^1 \simeq 6\pi\mu_f a \left(\vec{P}_H \cdot \vec{V}_g - V_T \vec{e}_3 \right).$$

En introduisant cette force dans l'équation de mouvement (3.1.1) nous pouvons obtenir la trajectoire de la particule. Précisons tout de suite que $\vec{F}^1$, calculée ici dans le cadre la théorie des écoulements rampants stationnaires, ne permettra pas de prédire de manière fine le mouvement de la particule solide dans notre écoulement en rotation solide. Néanmoins, dans le cadre des écoulements à faibles nombres de Reynolds, la traînée visqueuse est généralement la force de résistance qui contribue le plus à la dynamique de la particule. De ce fait, la résolution de l'équation de mouvement de la particule qui implique cette force $\vec{F}^1$ nous permettra d'estimer correctement les ordres de grandeur des vitesses verticale et horizontale de la particule.

Dans la suite, les différents termes de l'équation (3.1.1) vont être normalisés. Nous allons donc réduire les longueurs par R (le rayon du cylindre) et le temps par $1/\omega$. Pour ne pas trop alourdir les notations, les grandeurs exprimées par la suite n'auront pas de notation particulière, bien qu'elles soient sans dimension et pour cela, nous garderons bien à l'esprit que

$$\left\{ \begin{array}{lcl} t & \rightarrow & \omega t \\ X_p & \rightarrow & X_p/R \\ Y_p & \rightarrow & Y_p/R. \end{array} \right.$$

Dans cette pré-étude, le mouvement horizontal et le mouvement vertical sont complètement découplés et la vitesse terminale de la particule correspond tout simplement à la vitesse de sédimentation d'une particule dans un milieu infini, donnée alors par

$$V_T^{\text{Stokes}} = \frac{2}{9} \frac{a^2(1-\gamma)g}{\nu_f}. \quad (3.2.1)$$

En ce qui concerne maintenant le mouvement horizontal de la particule, nous obtenons, après projection suivant $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$ de l'équation de mouvement (3.1.1) :

$$\ddot{X}_p = -\frac{X_p}{\gamma} - \frac{1}{2S\gamma}(\dot{X}_p + Y_p) \quad (3.2.2)$$

$$\ddot{Y}_p = -\frac{Y_p}{\gamma} - \frac{1}{2S\gamma}(\dot{X}_p + Y_p) \quad (3.2.3)$$

où

$$\dot{X} = \frac{dX}{dt}, \quad \gamma = \frac{\rho_p}{\rho_f} \quad \text{et} \quad S = \frac{a^2\omega}{9\nu_f},$$

sachant que γ et S sont respectivement le rapport des densités, et un groupement sans dimension que nous appellerons pseudo nombre de Stokes. (Ce nombre est d'ailleurs proportionnel au nombre de Reynolds de cisaillement.)

La solution des équations (3.2.2) et (3.2.3) peut être obtenue facilement en calculant

$$(3.2.2) + i(3.2.3) \quad \text{avec} \quad i^2 = -1.$$

L'équation de mouvement de la particule dans le plan $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ est alors donnée sous la forme d'une équation différentielle ordinaire,

$$\ddot{Z}(t) + A_0 \dot{Z}(t) + B_0 Z(t) = 0,$$

où

$$\mathcal{Z} = X_p(t) + i Y_p(t) ,$$

et avec les termes constants

$$A_0 = \frac{1}{2\gamma S} \quad \text{et} \quad B_0 = \frac{2S - i}{2\gamma S} .$$

La résolution de cette équation différentielle est triviale et en supposant par exemple que la vitesse de glissement de la particule est initialement nulle, c'est à dire, en posant que

$$\mathcal{Z}(0) = Z_0 \quad \text{et} \quad \dot{\mathcal{Z}}(0) = \dot{Z}_0 = i Z_0 ,$$

alors nous obtenons

$$\mathcal{Z}(t) = Z_0 \frac{(q - i)}{q - p} \exp(pt) + Z_0 \frac{(p - i)}{p - q} \exp(qt) , \quad (3.2.4)$$

où

$$p = \frac{-A_0 + \sqrt{\Delta}}{2} ; \quad q = \frac{-A_0 - \sqrt{\Delta}}{2} \quad \text{et} \quad \Delta = A_0^2 - 4B_0 .$$

La partie réelle de (3.2.4) correspond alors à la valeur de la coordonnée $X_p(t)$ de la particule et sa partie imaginaire à $Y_p(t)$. Ainsi, connaissant $\mathcal{Z}(t)$, la détermination de la position dans le plan horizontal est univoque et nous aurons de plus $|\mathcal{Z}(t)| = R_p(t)$.

Expression simplifiée de $\mathcal{Z}(t)$

Afin de pouvoir analyser le résultat que nous venons d'obtenir, nous allons rechercher une expression simplifiée de l'équation (3.2.4). Pour cela, nous allons nous appuyer sur le fait que puisque le nombre de Reynolds de cisaillement ($\eta = a^2 \omega / \nu_f$) est, par hypothèse, petit devant l'unité, cela est d'autant plus vrai pour le nombre S puisque

$$S = \frac{\eta}{9} \ll 1 .$$

De ce fait, à partir de la solution (3.2.4) de cette pré-étude, il est possible, en faisant un développement limité des paramètres p et q en fonction de ce petit paramètre S , de montrer qu'après un laps de temps très court ($t \ll 1$), la solution tend vers

$$\mathcal{Z}(t) = Z_0 \exp(\lambda_r^0 t) \exp(i \lambda_i^0 t)$$

où

$$\lambda_r^0 = 2S(\gamma - 1) + O(S^3) \quad (3.2.5)$$

et où

$$\lambda_i^0 = 1 + O(S^2) . \quad (3.2.6)$$

Sachant que $R_p(t) = |\mathcal{Z}(t)| = Z_0 \exp(\lambda_r^0 t)$, nous voyons que

$$\lambda_r^0 = \frac{\dot{R}_p}{R_p} ,$$

ainsi que

$$\lambda_i^0 = \dot{\Theta}_p .$$

|| Par la suite, λ_r^0 sera appelé : "taux de migration radiale" et λ_i^0 : "taux de rotation".

Avant d'analyser ces résultats, précisons que dans la littérature, il existe plusieurs études similaires à celle-ci, réalisées notamment par Annamalai et Cole (1986), ou encore par Raju et Meiburg (1997).

Bien qu'élémentaire, cette pré-étude nous permet donc de voir que conformément aux constatations expérimentales (voir chapitre 2), la vitesse de rotation de la particule autour de l'axe du cylindre est quasiment confondue avec la vitesse de rotation du fluide. De ce fait, nous en déduisons que la vitesse de

glissement de la particule dans le plan horizontal est quasiment confondue avec la composante radiale de la vitesse de la particule :

$$\overline{\overline{P}}_H \cdot \vec{V}_g(t) \simeq -\dot{R}_p(t) \vec{e}_{R_p}.$$

De plus, nous voyons que la particule admet une vitesse de migration radiale qui évolue dans le temps suivant une fonction exponentielle, croissante si $\gamma > 1$ et décroissante dans le cas contraire. Par conséquent, nous en déduisons pour la suite que la vitesse de glissement de la particule dans le plan horizontal, réécrite sous une forme dimensionnelle, doit vérifier

$$\left| \overline{\overline{P}}_H \cdot \vec{V}_g(t) \right| \lesssim R_p(t) \omega \lambda_r^0 \simeq 2S|\gamma - 1| R_p(t) \omega.$$

Enfin, nous pouvons voir également que dans le cadre des écoulements rampants stationnaires, le rapport entre la vitesse de glissement de la particule dans le plan horizontal et la vitesse terminale est donnée par :

$$\frac{\left| \overline{\overline{P}}_H \cdot \vec{V}_g(t) \right|}{V_T^{\text{Stokes}}} \simeq \frac{R_p(t) \omega^2}{g} \leq \text{Fr} \quad (3.2.7)$$

où nous avons introduit le pseudo nombre de Froude

$$\text{Fr} = \frac{R \omega^2}{g}.$$

Compte tenu des paramètres de notre étude expérimentale, nous verrons que ce nombre de Froude varie entre 0 et quelques unités (2 ou 3).

|| Pour clore cette pré-étude, notons que les résultats obtenus ici seront utilisés dans la suite pour estimer l'ordre de grandeur des différents termes impliqués dans l'équation (3.1.7).

3.3 Mouvement de la particule avec prise en compte de l'inertie et de l'instationnarité de l'écoulement induit

3.3.1 Le premier sous problème (stationnaire)

Avant de rentrer dans le cœur de ce premier problème, faisons dès à présent une remarque qui permettra de mieux cerner les objectifs de cette partie de la résolution du problème général. Au vu des photographies de la figure 2.9 (chapitre 2), nous voyons que le mouvement horizontal et le mouvement vertical doivent être découplés puisqu'alors que la vitesse de la particule dans le plan horizontal change au cours du temps, sa vitesse terminale reste, quant-à elle, constante. Par ailleurs, ce découplage des vitesses apparaît explicitement dès que

$$\left(\frac{a^2 \omega}{\nu_f} \right)^{1/2} \gg \frac{a V_g}{\nu_f},$$

dans les résultats d'Herron *et al.* (1975) ou encore de Gotoh (1990) présentés dans la section 1.4 du chapitre 1, et que nous reverrons ultérieurement.

Le but de cette section est donc d'une part de comprendre pourquoi dans le cadre des écoulements en rotation solide et à faibles nombres de Reynolds, les vitesses verticale et horizontale de la particule sont découplées et d'autre part, de s'assurer que ce découplage entre les vitesses sera vérifié pour toutes les vitesses de rotation du cylindre impliquées dans nos expériences.

Simplification des équations

En regardant les différents termes de l'équation (3.1.7) et sachant que dans ce sous problème, cette équation n'est associée qu'à la partie (a) de la condition limite (3.1.8) et que celle-ci ne dépend pas du temps, nous pouvons remarquer que le seul terme qui est susceptible de générer de l'instationnarité est le terme convectif

$$\left(\overline{\overline{P}}_H \cdot \vec{V}_g(t) \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{w}_f^{1a}.$$

Si ce terme est négligeable alors, le terme instationnaire $\partial \vec{w}_f^{1a} / \partial t$ ne sera plus entretenu et pourra donc aussi être simplifié de notre équation.¹ Aussi, il s'avère que ce terme convectif, qui est basé sur la vitesse de glissement de la particule dans le plan horizontal, est aussi le seul qui soit susceptible d'introduire un couplage entre les vitesses horizontale et verticale de la particule.

Dans la suite, nous allons tenter de montrer que la contribution de ce terme dans les équations qui régissent l'écoulement induit est toujours négligeable devant celles des autres termes, y compris dans la région où les termes convectifs deviennent du même ordre de grandeur que les termes visqueux. Cela aura la double conséquence de montrer pourquoi la vitesse verticale de la particule est stationnaire et pourquoi celle-ci est découplée de la vitesse de glissement horizontale.

Pour parvenir à le montrer, il est utile dans ce problème de réduire les vitesses de l'équation (3.1.7) par V_T , les longueurs par a et le temps par a^2/ν_f (temps visqueux). Ainsi nous aurons, sous une forme sans dimension (mais toujours sans notation particulière) :

$$\frac{\partial \vec{w}_f^{1a}}{\partial t} + \underbrace{\left(\frac{a \vec{P}_H \cdot \vec{V}_g(t)}{\nu_f} - Re_T \vec{e}_3 \right) \cdot \vec{\nabla}}_{(i)} \vec{w}_f^{1a} + \underbrace{\left((\vec{\eta} \cdot \vec{x}) \cdot \vec{\nabla} \right)}_{(ii)} \vec{w}_f^{1a} + \underbrace{\vec{\eta} \cdot \vec{w}_f^{1a}}_{(iii)} = -\vec{\nabla} P^* + \underbrace{\vec{\Delta} \vec{w}_f^{1a}}_{(iv)} \quad (3.3.1)$$

où

$$P^* = \frac{a P^{1a}}{\mu_f V_T} \quad \text{et} \quad \eta_{12} = -\eta_{21} = -\frac{a^2 \omega}{\nu_f} \quad \text{et} \quad \eta_{11} = \eta_{22} = 0.$$

Ce faisant, nous voyons apparaître dans (i) les deux nombres de Reynolds de particule que nous avons défini au chapitre 2, à savoir

$$Re_T = \frac{a V_T}{\nu_f} \quad \text{et} \quad Re_H = \frac{a V_H}{\nu_f},$$

et dans les termes (ii) et (iii), nous voyons apparaître le nombre de Reynolds de cisaillement

$$\eta = \frac{a^2 \omega}{\nu_f}.$$

Intéressons nous maintenant au terme (i) de l'équation (3.3.1). Compte tenu du résultat (3.2.7) obtenu dans la pré-étude (section 3.2, théorie des écoulements rampants stationnaires), nous pouvons voir que pour les faibles vitesses de rotation (par exemple, pour $\omega < 2$ ou 3 rad/s), la vitesse de glissement est très petite devant la vitesse terminale. En effet, sur la figure 3.2 nous avons représenté l'évolution du rapport entre la vitesse horizontale et la vitesse terminale de la particule en fonction de ω , calculé dans la pré-étude et ce graphe nous confirme que pour des valeurs ω de l'ordre de quelques unités, nous pourrions écrire

$$(i) \simeq -Re_T (\vec{e}_3 \cdot \vec{\nabla}) \vec{w}_f^{1a}.$$

Cependant, toujours sur la figure 3.2, il apparaît que pour des vitesses de rotation du cylindre plus importantes, la vitesse de glissement de la particule dans le plan horizontal devient du même ordre de grandeur que la vitesse terminale. Par exemple, nous pouvons voir que lorsque la vitesse de rotation du cylindre est supérieur à 10 rad/s, nous avons

$$O(Re_H) \simeq O(Re_T).$$

Mais dans un deuxième temps, rappelons nous que le dernier paragraphe de la partie 1.4 du chapitre 1 (page 25), nous avons vu que la compétition qui peut exister entre les effets d'inertie du type Oseen (à cause du Reynolds de particule) et les effets d'inertie dus au cisaillement de l'écoulement, se traduit par la valeur du rapport $(d_{Re}/d_\eta)^2$ (voir aussi annexe A.6, page 162) où d_{Re} et d_η correspondent respectivement aux distances à la particule où les termes convectifs en Re et en η deviennent du même ordre de grandeur que les termes visqueux. Dans le cas de cette étude, ces distances sont données par

$$d_{Re} = O\left(\frac{a}{Re_T}\right) \simeq O\left(\frac{a}{Re_H}\right) \quad \text{et} \quad d_\eta = O\left(\frac{a}{\sqrt{\eta}}\right)$$

1. Bien sûr, cela n'est vrai que dans le cadre des écoulements à faibles nombres de Reynolds, où il n'y a pas de création d'instationnarité à cause des phénomènes d'instabilité!

or ici

$$\left(\frac{d_\eta}{d_{Re}}\right)^2 = O\left[\left(\frac{Re_T}{\sqrt{\eta}}\right)^2\right] = O\left[\left(\frac{2a^2(\gamma-1)g}{9\nu_f^{3/2}\sqrt{\omega}}\right)^2\right] = \frac{\text{Effets d'inertie du type Oseen}}{\text{Effets d'inertie de cisaillement}}.$$

Ce rapport est également représenté sur la figure 3.2 et montre que lorsque la vitesse de rotation du cylindre augmente, les effets d'inertie dus au cisaillement de l'écoulement deviennent rapidement très grands devant les effets d'inertie du type Oseen. Ainsi, nous pouvons en conclure que lorsque la vitesse de rotation du cylindre augmente, même si la vitesse de glissement de la particule dans le plan horizontal n'est plus négligeable comparativement à la vitesse terminale, celle-ci ne joue aucun rôle dans l'équation (3.3.1) car les termes convectifs prépondérants sont alors les termes (ii) et (iii).

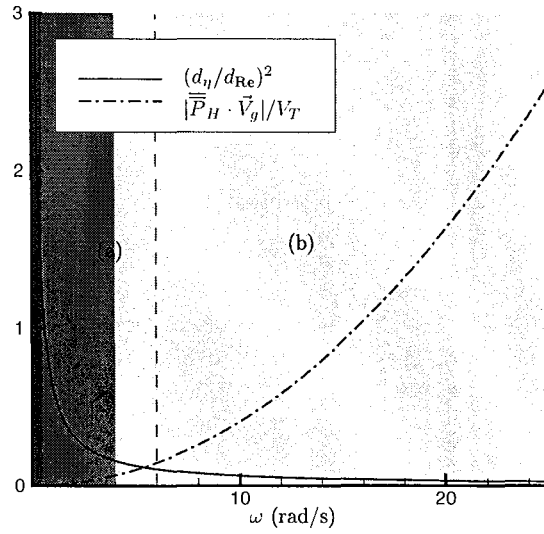


FIG. 3.2 – La région bleue correspond à la zone où $d_\eta \gg d_{Re}$ (effet d'Oseen pur). La région jaune, la zone où $d_\eta \ll d_{Re}$ (effet de cisaillement pur). Dans la zone (a), $V_T \gg |\vec{P}_H \cdot \vec{V}_g|$.

En conclusion, nous pouvons dire que lorsque la vitesse de rotation du cylindre augmente, il se produit, en quelque sorte, un relai entre les effets d'inertie émanant des termes

$$\left(\left(\vec{P}_H \cdot \vec{V}_g(t) - V_T \vec{e}_3\right) \cdot \vec{\nabla}\right) \vec{w}_f^{1a} \simeq -V_T (\vec{e}_3 \cdot \vec{\nabla}) \vec{w}_f^{1a} \quad \text{car} \quad V_T \gg |\vec{P}_H \cdot \vec{V}_g(t)|$$

et les effets d'inertie émanant des termes

$$\left(\left(\vec{A} \cdot \vec{x}\right) \cdot \vec{\nabla}\right) \vec{w}_f^{1a} \quad \text{et} \quad \vec{A} \cdot \vec{w}_f^{1a}$$

de l'équation (3.1.7), sans que jamais les termes instationnaires et responsables du couplage entre la vitesse terminale et la vitesse horizontale, i.e.

$$\left(\left(\vec{P}_H \cdot \vec{V}_g(t)\right) \cdot \vec{\nabla}\right) \vec{w}_f^{1a},$$

ne jouent un rôle important dans la dynamique de l'écoulement solution de ce sous problème. De ce fait, nous pouvons en déduire que quelle que soit la vitesse de rotation du cylindre, ce sous problème peut donc se ramener à un problème stationnaire, qui pourra dès lors être résolu à l'aide de la méthode des développements asymptotiques raccordés décrite en annexe (A.6).

Enfin, pour achever cette partie concernant les simplifications, notons que conformément aux constatations expérimentales, et conformément aux résultats obtenus dans la section 3.2 lors de la pré-étude, nous allons supposer que la particule tourne autour de l'axe du cylindre avec une vitesse angulaire $\dot{\Theta}_p$ très proche de celle du fluide. En effet, à l'aide de la pré-étude nous voyons que

$$\vec{\Omega}_p \wedge \vec{x} - \vec{A} \cdot \vec{x} = (\dot{\Theta}_p - \omega) \vec{e}_3 \wedge \vec{x} = O(S^2).$$

Dans la suite, nous négligerons donc ce terme qui apparaît dans la condition limite (3.1.5), tout en notant que théoriquement, s'il était pris en compte, cela n'aurait pas de conséquence à l'ordre de grandeur où nous travaillons sur la détermination de la force exercée par le fluide sur la particule.

Calcul de $\vec{F}^{1a}$

A l'aide des remarques précédentes, nous pouvons maintenant simplifier l'équation (3.1.7) qui devient

$$-V_T (\vec{e}_3 \cdot \vec{\nabla}) \vec{w}_f^{1a} + ((\vec{A} \cdot \vec{x}) \cdot \vec{\nabla}) \vec{w}_f^{1a} + \vec{A} \cdot \vec{w}_f^{1a} = -\frac{1}{\rho_f} \vec{\nabla} P^{1a} + \nu_f \vec{\Delta} \vec{w}_f^{1a}, \quad (3.3.2)$$

et qui est associée aux conditions limites

$$\vec{w}_f^{1a} \rightarrow \vec{0} \quad \text{lorsque} \quad |\vec{x}| \rightarrow \infty, \quad (3.3.3)$$

$$\vec{w}_f^{1a} = V_T \vec{e}_3 \quad \text{lorsque} \quad |\vec{x}| = a. \quad (3.3.4)$$

Notons alors que cette équation qui régit l'écoulement induit est alors *exactement* identique à celle qui serait obtenue si la particule se déplaçait avec une vitesse ascensionnelle constante le long de l'axe de symétrie d'un écoulement de rotation (voir figure 3.3) et avec une vitesse angulaire de rotation propre autour de l'axe $\vec{e}_3$ identique à celle du fluide.

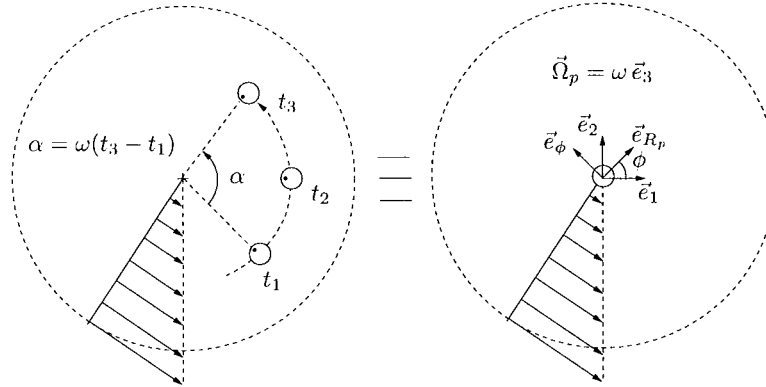


FIG. 3.3 – *Equivalence de l'écoulement non perturbé vu par la particule dans $\mathcal{R}_0$ (à gauche) et l'écoulement non perturbé à chaque instant dans le référentiel $\mathcal{R}_p$ qui coïncide avec le centre de la particule.*

Compte tenu de cette remarque, nous voyons alors que cette étude peut se ramener à une configuration semblable à celle de Childress (1964) qui, rappelons le, a étudié le mouvement d'une particule qui se déplace le long de l'axe d'un écoulement de rotation solide. En quelque sorte, dans notre étude, parce que les termes convectifs basés sur la vitesse de glissement horizontale de la particule sont négligés, tout se passe comme si l'écoulement se déplaçait avec la particule de sorte que celle-ci soit toujours située dans son axe de rotation. Compte tenu de la géométrie du problème, dans la base sphérique $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\phi)$, l'écoulement induit doit être indépendant de l'azimut ϕ . Autrement dit, nous devrions avoir

$$\vec{w}_f^{1a} = w_r^{1a}(r, \theta) \vec{e}_r + w_\theta^{1a}(r, \theta) \vec{e}_\theta + w_\phi^{1a}(r, \theta) \vec{e}_\phi,$$

où r et θ sont les coordonnées sphériques (respectivement le rayon et la colatitude). Or sachant que

$$(\vec{A} \cdot \vec{x}) \cdot \vec{\nabla} = \omega \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right) = \omega \frac{\partial}{\partial \phi},$$

et en utilisant le fait que les composantes w_r^{1a} , w_θ^{1a} et w_ϕ^{1a} de $\vec{w}_f^{1a}$ ne doivent pas dépendre de ϕ , nous avons

$$\left((\vec{A} \cdot \vec{x}) \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{w}_f^{1a} = -(\vec{w}_f^{1a} \cdot \vec{e}_2) \vec{e}_1 + (\vec{w}_f^{1a} \cdot \vec{e}_1) \vec{e}_2 = \vec{A} \cdot \vec{w}_f^{1a}.$$

Finalement, l'équation (3.3.2) est donc équivalente à

$$-V_T (\vec{e}_3 \cdot \vec{\nabla}) \vec{w}_f^{1a} + 2 \vec{A} \cdot \vec{w}_f^{1a} = -\frac{1}{\rho_f} \vec{\nabla} P^{1a} + \nu_f \vec{\Delta} \vec{w}_f^{1a}. \quad (3.3.5)$$

Cette équation est alors strictement équivalente à celle considérée par Childress (1964). Notons que dans son étude, Childress a considéré l'écoulement induit dans un référentiel tournant, alors que nous, nous travaillons dans le référentiel de Koenig. Cela peut donc *a priori* paraître paradoxal, mais en fait, il est simple de montrer que dans le cas de cette étude, l'écoulement induit n'est rien d'autre que l'écoulement relatif dans le référentiel tournant (écoulement considéré par Childress). En effet, en écrivant que

$$\vec{V}_f = \vec{V}_f^0 + \vec{V}_f^1 = \vec{V}_f^r + \omega \vec{e}_3 \wedge \vec{X},$$

où $\vec{V}_f^r$ est l'écoulement relatif, et sachant que

$$\vec{V}_f^0 = \omega \vec{e}_3 \wedge \vec{X} \quad \text{et que} \quad \vec{V}_f^1 = \vec{w}_f^1,$$

alors, nous avons

$$\vec{w}_f^1 = \vec{V}_f^r,$$

d'où le fait que nous retrouvons les mêmes équations.

Quoi qu'il en soit, nos résultats seront donc semblables aux siens et pour cette raison, le calcul de la force induite ne sera pas détaillé ici. Cette dernière est donnée par

$$\vec{F}^{1a} = -6\pi\mu_f a V_T \left(1 + Re_T \mathcal{B}(\alpha) \right) \vec{e}_3, \quad (3.3.6)$$

où

$$\alpha = 2 \frac{a^2 \omega / \nu_f}{Re_T^2} = 2 \left(\frac{d_{Re}}{d_\eta} \right)^2$$

et avec

$$\mathcal{B}(\alpha) = \frac{3}{4} \int_0^1 \left((t^2 - 4iat)^{1/2} + (t^2 + 4iat)^{1/2} \right) (3t^2 - 1) dt. \quad (3.3.7)$$

Rappelons que différentes valeurs de cette intégrale sont données dans le paragraphe 1.4.3 (page 28) du chapitre 1.

3.3.2 Le second sous problème (instationnaire)

Dans ce second sous problème, nous nous intéressons maintenant à la force exercée par l'écoulement solution de l'équation (3.1.7) associée à la partie instationnaire de la condition limite (3.1.8), à savoir la partie (b) :

$$\vec{w}_f^{1b} = -\vec{P}_H \cdot \vec{V}_g(t) \quad \text{lorsque} \quad |\vec{x}| = a.$$

A la différence de ce qui a été fait dans la section précédente, ce problème ne saurait se réduire à une étude stationnaire car maintenant, cette partie de la condition limite dépend explicitement du temps. En effet, dans le plan horizontal, la vitesse de glissement de la particule est instationnaire et de plus, c'est là une des originalités de ce problème, cette instationnarité de la condition limite perdure pendant toute l'expérience car elle est entretenue à la fois par la rotation et la migration de la particule. Pour s'en convaincre, rappelons nous qu'au cours de la pré-étude (section 3.2), nous avons vu que la vitesse de glissement dans le plan horizontal était approximativement donnée par la vitesse radiale de la particule :

$$-\vec{P}_H \cdot \vec{V}_g(t) = \dot{R}_p(t) \vec{e}_{R_p}(t),$$

et de plus, nous avons également vu que la vitesse radiale de la particule pouvait s'écrire (sous sa forme dimensionnelle)

$$\dot{R}_p \simeq |Z_0| R \omega \lambda_r^0 \exp(\lambda_r^0 \omega t),$$

où λ_r^0 , qui par contre est sans dimension, est donné par l'équation (3.2.5). Ainsi, nous nous apercevons que dans la base cartésienne $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ du référentiel de Koenig $\mathcal{R}_p$, nous sommes en présence de deux temps caractéristiques de variation de la condition limite :

- Le premier temps caractéristique correspond à l'augmentation de la valeur de la vitesse radiale $\dot{R}_p(t)$ (appelons τ_1 ce temps caractéristique).
- Le second vient du fait que le vecteur vitesse de glissement tourne autour de l'axe $\vec{e}_3$, comme cela est illustré sur la figure 3.4 (appelons τ_2 ce temps).

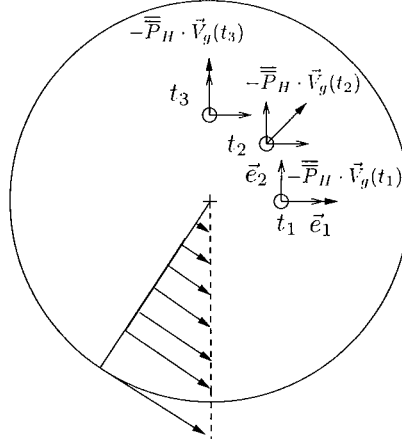


FIG. 3.4 – Variation dans le temps de la condition limite vérifiée par l'écoulement induit sur la particule.

A l'aide des résultats obtenus lors de la pré-étude, nous savons que sous leurs formes dimensionnelles,

$$\dot{\Theta}_p \approx \omega, \quad \text{et} \quad \ddot{R}_p \approx \dot{R}_p \omega \lambda_r^0.$$

Il apparaît alors que le temps caractéristique de variation de la vitesse radiale de la particule est

$$\tau_1 = \lambda_r^0 \omega,$$

alors que le temps caractéristique de rotation de la vitesse de glissement autour de l'axe $\vec{e}_3$ est

$$\tau_2 = \omega.$$

Notons que c'est bien sûr ce que nous retrouvons en calculant la dérivée temporelle de la vitesse de glissement :

$$\frac{d}{dt}(-\vec{P}_H \cdot \vec{V}_g) \simeq \dot{R}_p \dot{\Theta}_p \vec{e}_{\Theta_p} + \ddot{R}_p \vec{e}_{R_p},$$

sachant que dans $\mathcal{R}_p$, les vecteurs $\vec{e}_{R_p}$ et $\vec{e}_{\Theta_p}$ sont fonction du temps. Ainsi, dans notre étude, l'instationnarité de la condition limite vérifiée par l'écoulement induit sur la particule est principalement due au fait que la particule tourne autour de l'axe du cylindre, puisque nous avons

$$\frac{\tau_1}{\tau_2} = \lambda_r^0 = O(S) \ll 1.$$

Aussi, et c'est un point important, dans le référentiel $\mathcal{R}_p$, la condition instationnaire vérifiée par $\vec{w}_f^{1a}$ sur la particule peut s'écrire (en prenant soin de choisir convenablement l'origine des temps et en posant que $\dot{\Theta}_p = \omega$) :

$$\vec{w}_f^{1b} = -\vec{P}_H \cdot \vec{V}_g(t) \simeq \dot{R}_p(t) (\cos(\omega t) \vec{e}_1 + \sin(\omega t) \vec{e}_2) \quad \text{lorsque} \quad |\vec{x}| = a. \quad (3.3.8)$$

|| Nous voyons donc qu'il existe une réelle analogie entre l'écoulement induit correspondant à notre problème et les écoulements quasi-harmoniques.

Compte tenu de cela, dans l'équation (3.1.7) de l'écoulement induit, nous aurons donc

$$\frac{\partial \vec{w}_f^{1b}}{\partial t} = O(\omega \dot{R}_p) .$$

Pour être complets, il nous faut maintenant analyser l'ordre de grandeur des termes impliqués dans l'équation (3.1.7). Sachant qu'au voisinage de la sphère, nous avons

$$|\vec{w}_f^{1b}| = O(\dot{R}_p) ,$$

il s'ensuit que

$$\left| \frac{\partial \vec{w}_f^{1b} / \partial t}{\nu_f \vec{\Delta} \vec{w}_f^{1b}} \right| = O\left(\frac{a^2 \omega}{\nu_f}\right) = O(\eta) ,$$

et

$$\left| \frac{\vec{A} \cdot \vec{w}_f^{1b}}{\nu_f \vec{\Delta} \vec{w}_f^{1b}} \right| \sim \left| \frac{(\vec{A} \cdot \vec{x}) \cdot \vec{\nabla}}{\nu_f \vec{\Delta} \vec{w}_f^{1b}} \vec{w}_f^{1b} \right| = O\left(\frac{a^2 \omega}{\nu_f}\right) = O(\eta) .$$

De même,

$$\left| \frac{(\vec{P}_H \cdot \vec{V}_g) \cdot \vec{\nabla}}{\nu_f \vec{\Delta} \vec{w}_f^{1b}} \vec{w}_f^{1b} \right| = O\left(\frac{a V_g}{\nu_f}\right) = O(Re_H) \quad \text{et} \quad \left| \frac{(V_T \vec{e}_3 \cdot \vec{\nabla}) \vec{w}_f^{1b}}{\nu_f \vec{\Delta} \vec{w}_f^{1b}} \right| = O\left(\frac{a V_T}{\nu_f}\right) = O(Re_T) .$$

Dans ce qui suit, et puisque nous nous intéressons au mouvement horizontal de la particule, nous allons considérer que la vitesse de rotation du cylindre est suffisamment grande pour que les termes en $O(\eta)$ soient grands devant les termes en Re_H et Re_T . (Dans la section précédente, nous avons vu que cela est vrai dès que ω est de l'ordre de 2 ou 3 rad/s). Dès lors, les termes convectifs basés sur ces nombres de Reynolds de particules pourront être négligés dans l'équation (3.1.7).

|| Ainsi, nous voyons que dans cette étude, les termes convectifs basés sur le cisaillement de l'écoulement sont du même ordre de grandeur que terme instationnaire.

Malgré cela, et uniquement dans le but de tester l'équation de mouvement obtenue par Boussinesq-Basset et qui, rappelons-le, est très couramment utilisée dans la littérature, nous allons dans un premier temps, les négliger. Clairement, la force hydrodynamique qui en résultera ne sera donc qu'une approximation, sachant que si les termes convectifs sont conservés et que la dépendance temporelle de $\dot{R}_p(t)$ est négligée, alors nous retrouverions la force hydrodynamique obtenue par Herron *et al.* (1975) (voir page 30 du chapitre 1).

|| Notons que dans le chapitre 5, nous reviendrons sur l'expression de la force hydrodynamique qui s'exerce sur la particule, sans négliger les termes convectifs, et en identifiant explicitement la part du terme instationnaire et la part des termes convectifs sur la valeur des composantes du tenseur de mobilité obtenue par Herron *et al.* (1975).

Mais revenons maintenant à notre étude. Pour justifier l'hypothèse un peu forte qui consiste à négliger les termes convectifs, il est possible de s'appuyer sur la forme qu'adopte un écoulement solution des équations de Stokes instationnaires associées à une condition limite harmonique. En effet, dans une telle situation, il est bien connu (voir par exemple Landau et Lifchitz, 1989) que la longueur de pénétration δ d'un tel écoulement est donnée par

$$\delta = \left(\frac{2\nu_f}{\omega} \right)^{1/2} .$$

Dans notre étude, et à cause de la condition limite (3.3.8), nous pouvons donc supposer que l'écoulement sera quasiment intégralement contenu dans une sphère centrée sur la particule et de rayon δ .

Dans un deuxième temps, notons que la distance à laquelle les effets d'inertie basés sur le nombre de Reynolds de cisaillement ($\eta = a^2\omega/\nu_f$) deviennent du même ordre de grandeur que les termes visqueux est donnée par

$$d_\eta = \frac{a}{\sqrt{\eta}},$$

ce qui correspond précisément à l'ordre de grandeur de la longueur de pénétration δ . En d'autres termes, cela implique que l'écoulement lointain qui doit être perturbé par les effets d'inertie est négligeable. De ce fait, il peut être légitime de supposer que les termes convectifs de l'équation (3.1.7) jouent un rôle moins important que le terme instationnaire.

Notons, en guise de remarque, que dans l'annexe E.1 relative au chapitre 5, nous reviendrons sur la solution analytique des équations de Stokes instationnaires associée à une condition limite identique à celle donnée par l'équation (3.3.8) mais dans laquelle la dépendance temporelle de $\vec{R}_p$ sera éte négligée.

Dans la suite de cette étude, nous allons considérer que l'écoulement induit $\vec{w}_f^{1b}$ est régi simplement par les équations de Stokes instationnaires :

$$\frac{\partial \vec{w}_f^{1b}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_f} \vec{\nabla} P^{1b} + \nu_f \vec{\Delta} \vec{w}_f^{1b}.$$

Compte tenu du fait que la condition limite donnée par la partie (b) de l'équation (3.1.8) est uniforme, il n'est pas nécessaire de déterminer explicitement la solution de l'écoulement induit pour calculer la force qu'il exerce sur la particule. En effet, celle-ci peut être déterminée par exemple à l'aide des transformées de Fourier (voir section 1.3 du chapitre 1) ce qui conduit à l'expression

$$\vec{F}^{1b} = 6\pi\mu_f a \vec{P}_H \cdot \vec{V}_g(t) + \frac{1}{2} m_f \frac{d\vec{P}_H \cdot \vec{V}_g(t)}{dt} + 6\rho_f a^2 \sqrt{\nu_f \pi} \int_{-\infty}^t \frac{d\vec{P}_H \cdot \vec{V}_g(\tau)}{d\tau} \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}}. \quad (3.3.9)$$

3.3.3 Equation de mouvement de la particule

L'équation de mouvement de la particule dans notre écoulement sera donc donnée par

$$m_p \frac{d\vec{V}_p}{dt} = m_f \vec{A}^2 \cdot \vec{X}_p + (m_p - m_f) \vec{g} + \vec{F}^{1a} + \vec{F}^{1b} \quad (3.3.10)$$

où $\vec{F}^{1a}$ et $\vec{F}^{1b}$ sont données respectivement par les équations (3.3.6) et (3.3.9). Cette équation de mouvement que nous nous proposons d'intégrer dans la suite est récapitulée dans le tableau 3.1. Pour obtenir la trajectoire de la particule, nous allons projeter cette équation de mouvement suivant $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ et $\vec{e}_3$ et puisque le mouvement vertical et le mouvement horizontal de la particule sont complètement découplés, nous nous intéresserons donc séparément à la vitesse terminale de l'inclusion et à sa migration radiale.

3.4 La vitesse terminale de la particule

3.4.1 Calculs théoriques

Dans cette section, nous allons calculer la valeur de la vitesse terminale de la particule. Pour cela, écrivons que les seules composantes de l'équation de mouvement (3.3.10) suivant $\vec{e}_3$, sont données par $\vec{F}^{1a}$ et la force de flottabilité. Par ailleurs, la particule n'admet aucune accélération suivant $\vec{e}_3$ et donc nous avons

$$\vec{F}^{1a} \cdot \vec{e}_3 + (m_p - m_f) \vec{g} \cdot \vec{e}_3 = 0.$$

A titre de remarque préliminaire, notons que dans la section précédente, nous avons calculé théoriquement la valeur de la force $\vec{F}^{1a}$ exercée par l'écoulement induit sur la particule. Mais nous savons que la particule qui se déplace suivant $\vec{e}_3$ admet une vitesse constante et par conséquent, elle est dans une situation d'équilibre dynamique (dans la direction $\vec{e}_3$). Mais quelles que soient les conditions de l'expérience, la

$$\begin{aligned}
m_p \frac{d\vec{V}_p}{dt} &= m_f \bar{\bar{A}}^2 \cdot \vec{X}_p && \dots \text{ Gradient de pression} \\
&+ (m_p - m_f) \vec{g} && \dots \text{ Flottabilité} \\
&- 6\pi\mu_f a V_T \left(1 + Re_T \mathcal{B}(\alpha)\right) \vec{e}_3 && \dots \text{ Traînée de Childress} \\
&+ 6\pi\mu_f a \bar{\bar{P}}_H \cdot \vec{V}_g(t) && \dots \text{ Traînée horizontale} \\
&+ \frac{1}{2} m_f \frac{d\bar{\bar{P}}_H \cdot \vec{V}_g(t)}{dt} && \dots \text{ Masse ajoutée} \\
&+ 6\rho_f a^2 \sqrt{\nu_f \pi} \int_{-\infty}^t \frac{d\bar{\bar{P}}_H \cdot \vec{V}_g(\tau)}{d\tau} \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} && \dots \text{ Force d'histoire}
\end{aligned}$$

avec $Re_T = \frac{a V_T}{\nu_f}$, $A_{12} = -A_{21} = -\omega$ et $\alpha = 2 \frac{a^2 \omega / \nu_f}{Re_T^2}$,

sachant que

$$Re_T \mathcal{B}(\alpha) \rightarrow \frac{4}{7} \left(\frac{a^2 \omega}{\nu_f} \right)^{1/2} \quad \text{si } (\alpha \gg 1)$$

et

$$Re_T \mathcal{B}(\alpha) \rightarrow \frac{3 Re_T}{8} \quad \text{si } (\alpha \ll 1).$$

TAB. 3.1 – *Récapitulatif des résultats analytiques obtenus pour une particule solide.*

valeur de la force exercée par l'écoulement induit ne change pas puisqu'elle compense la force de flottabilité qui est une constante². En fait, la seule chose qui change en fonction des conditions d'expérimentations, c'est la valeur de la vitesse terminale de la particule qui correspond à cette situation d'équilibre dynamique.

Dans un cadre général donc, la valeur de la vitesse terminale de la particule est donnée par une équation du type

$$\left. \begin{array}{l} \text{Vitesse terminale} \\ \text{théorique} \end{array} \right\| \quad V_T = \frac{2 a^2 (1 - \gamma) g}{9 \left(1 + Re_T \mathcal{B}(\alpha)\right) \nu_f}, \quad (3.4.1)$$

où $\mathcal{B}(\alpha)$ est donnée par l'équation (3.3.7). Mais il faut noter que α est lui même fonction du nombre de Reynolds Re_T et par conséquent, de la vitesse terminale de la particule. Dans la pratique, la vitesse peut être obtenue l'aide de méthodes itératives (en règle générale, très peu d'itérations suffisent pour converger vers la solution). Mais dans le cadre de nos expériences, nous n'aurons pas recours à ce genre de résolution. En effet, nous avons vu, dans la section 1.4 du chapitre 1 qu'à condition que $\alpha > 1/4$, la fonction $\mathcal{B}(\alpha)$ peut être écrite sous la forme d'un développement en puissance de α

$$\mathcal{B}(\alpha) = \frac{2\sqrt{2}\alpha}{7} \left(1 + \frac{7}{40\alpha} + \frac{15}{1408\alpha^2} - \frac{49}{39936\alpha^3} + \dots \right).$$

2. Dans son papier, Maxworthy (1965b) avait déjà fait cette remarque.

Or dans le cadre de nos expériences, nous aurons

$$\frac{7}{40\alpha} \ll 1,$$

de sorte que

$$\mathcal{B}(\alpha) \simeq \frac{2\sqrt{2\alpha}}{7} \simeq \frac{4}{7Re_T} \left(\frac{a^2\omega}{\nu_f} \right)^{1/2} \simeq \frac{12}{7Re_T} S^{1/2}.$$

Pour s'en convaincre, rappelons nous que

$$\alpha = \frac{2\omega\nu_f}{V_T^2},$$

et en écrivant que $V_T \leq V_T^{\text{Stokes}}$ nous aurons toujours

$$\alpha \gtrsim \frac{2\omega\nu_f}{(V_T^{\text{Stokes}})^2}.$$

Compte tenu de cela, nous voyons que

$$\frac{7}{40\alpha} \lesssim \frac{7}{40} \frac{2a^4(\gamma-1)^2g^2}{81\nu_f^3\omega}$$

et comme la plus faible vitesse de rotation non nulle employée dans nos expérience est $\omega = 5$ rad/s, nous aurons

$$\frac{7}{40\alpha} \lesssim 0.01,$$

Ce point illustre d'ailleurs à nouveau le fait que dès que la vitesse de rotation est de l'ordre de quelques unités, les effets d'inertie basés sur le cisaillement de l'écoulement (i.e. η) dominent très rapidement les effets d'inertie basés sur le nombre de Reynolds de particule (Re_T). Dans notre étude, nous écrirons donc, en ne commettant que peu d'erreurs, que la vitesse terminale des particules solides est donnée par

$$\left. \begin{array}{l} \text{Vitesse terminale} \\ \text{théorique} \\ \text{pour } \alpha \gg 1 \end{array} \right\| \quad V_T = \frac{2a^2(1-\gamma)g}{9\nu_f(1+(12/7)S^{1/2})} = \frac{V_T^{\text{Stokes}}}{1+(12/7)S^{1/2}}. \quad (3.4.2)$$

3.4.2 Comparaison avec l'expérience

Afin de vérifier la validité de l'équation (3.4.2), nous avons effectué différentes expériences impliquant des vitesses de rotation du cylindre comprises entre 5 et 23 rad/s. Après avoir relâché une particule solide dans l'écoulement, nous nous intéressons à l'évolution temporelle de sa coordonnée axiale : $Z_p(t)$. A titre d'exemple, nous représentons sur la figure 3.5, des résultats expérimentaux caractéristiques de nos expériences. Il apparaît clairement que quelle que soit la vitesse de rotation, nous obtenons une droite et par conséquent, la vitesse de la particule est bien indépendante du temps, conformément aux hypothèses faites dans la partie précédente. Au passage, notons qu'il apparaît aussi explicitement que la valeur de la pente est bien affectée par la vitesse de rotation de la particule.

En mesurant les vitesses terminales de nos particules solides pour les différents nombres de Stokes impliqués dans nos expériences, et en calculant le rapport de ces dernières avec la vitesse terminale théorique de Stokes (en milieu infini), nous obtenons les valeurs (▲) représentées sur la figure 3.6. Pour comparaison, la courbe théorique donnée par l'équation (3.4.2) est également représentée sur ce graphe (ligne continue —). En plus de nos résultats expérimentaux, et étant donné que notre étude est équivalente à l'étude du mouvement d'une particule qui se déplace le long de l'axe de la rotation, il est légitime de comparer nos résultats expérimentaux à ceux de Maxworthy (1965b). Ce dernier a en effet validé les résultats théoriques de Childress (1964) en mettant au point un dispositif expérimental dans lequel il s'est intéressé à l'ascension³ de particules sphériques dans un écoulement en rotation solide qui se déplacent suivant l'axe de la rotation. A partir de ses résultats, et à l'aide d'une interpolation, nous obtenons les différentes valeurs de V_T/V_T^{Stokes} qui correspondent à ses expériences, mais calculées avec nos paramètres. Ce sont les points (■) sur la figure 3.6.

3. les particules utilisées par Maxworthy sont donc plus légères que le fluide

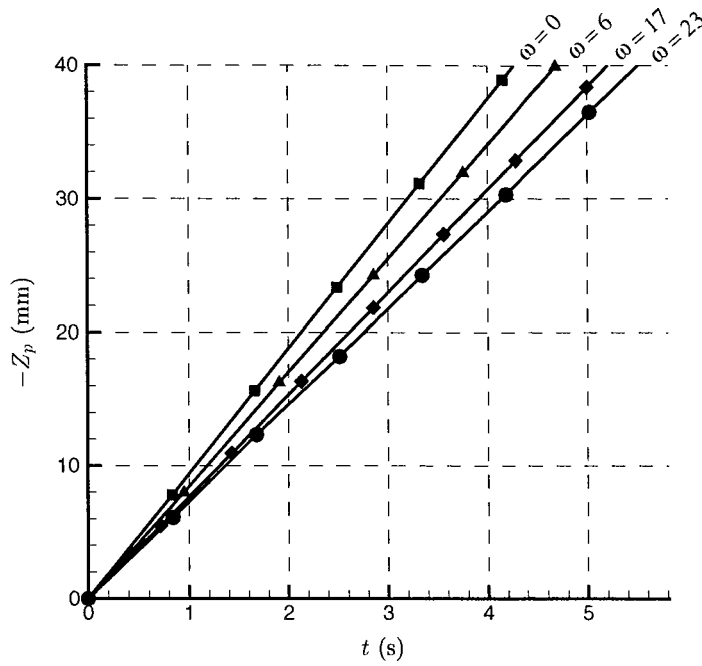


FIG. 3.5 – Coordonnées $Z_p(t)$ de la particule en fonction du temps, pour différentes vitesses de rotation ω (en rad/s) du cylindre. Les pentes des droites ainsi obtenues correspondent aux vitesses verticales de la particule qui restent constantes dans le temps et varient en fonction de la vitesse de rotation du cylindre.

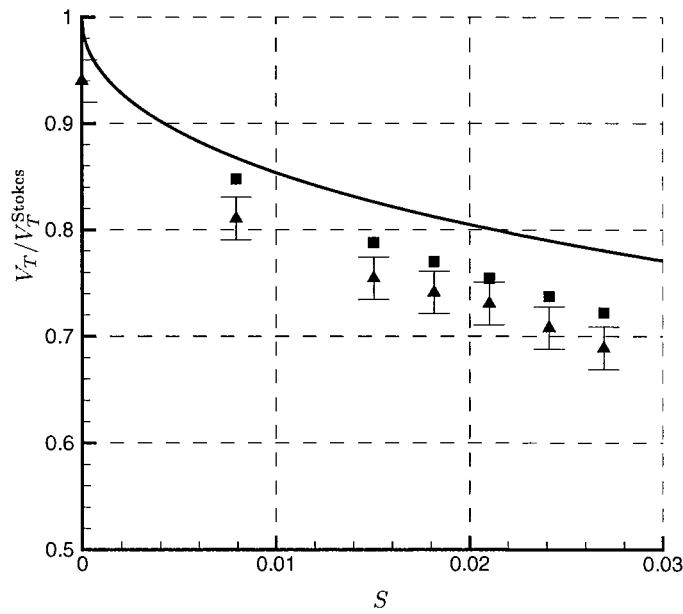


FIG. 3.6 – V_T/V_T^{Stokes} correspondant à l'équation (3.4.2) : —. V_T/V_T^{Stokes} correspondant à nos résultats expérimentaux : $\blacktriangle$. V_T/V_T^{Stokes} correspondant à une interpolation des résultats expérimentaux de Maxworthy (1965b) : $\blacksquare$.

Analyse des résultats

Tout d'abord, nous pouvons dire que nos points expérimentaux sont en bon accord avec ceux issus de l'interpolation des résultats de Maxworthy (1965b) puisque l'écart maximal entre nos valeurs et les siennes est au maximum de 5%. Aussi, la tendance générale de nos résultats traduit bien l'évolution de la décroissance de la vitesse en $1/(1 + S^{1/2})$ prédite par la théorie donnée par l'équation (3.4.2). Toutefois, nos résultats en sont tout de même assez éloignés. En effet, les différences maximales constatées entre nos points expérimentaux et la théorie sont de l'ordre de 10 %, ce qui n'est pas négligeable. Nous allons donc tenter d'expliquer cette différence.

Discussion sur les effets de paroi

Dans la section précédente, le problème que nous avons traité correspond au cas d'une particule qui évolue dans un milieu infini et nous n'avons pas du tout tenu compte de l'influence des parois. Or en écoulement de Stokes, nous avons vu dans la section 1.6, page 33 du chapitre 1, que ces dernières pouvaient modifier notablement la force exercée par le fluide sur la particule. Nous avons d'ailleurs détaillé les résultats de Brenner (voir Happel et Brenner, 1983) concernant les effets de paroi sur le mouvement stationnaire d'une particule qui évolue parallèlement aux murs dans une conduite cylindrique (sans rotation). Ce dernier a montré que la force qui s'applique alors sur la particule est quasiment constante dans toute la section et celle-ci est donnée par

$$\vec{F}^1 = -6\pi\mu_f a \vec{V}_p \left(1 + f\left(\frac{R_p}{R}\right)\left(\frac{a}{R}\right)\right),$$

avec $f(R_p/R) \approx 2.1$, presque partout dans la conduite sauf au proche voisinage de la paroi. Rappelons nous aussi que dans le cadre de notre expérience, nous avons $2.1(a/R) \approx 8\%$ ce qui n'est pas négligeable. Notons également que pour obtenir ce coefficient de 2.1, Brenner a supposé que l'écoulement induit était régi par les équations de Stokes. Bien que cette hypothèse puisse être remise en question à cause des éventuels effets d'inertie, nous retenons de nos expériences réalisées en cas d'absence de rotation du cylindre (voir figure 2.10, page 62 du chapitre 2) que conformément à la théorie de Brenner, la vitesse terminale est bien uniformément affectée par les effets de paroi dans une très grande partie de la section de la conduite.

Dans les situations où le cylindre tourne, les résultats expérimentaux de la figure 3.5 et de la figure 3.7 montrent aussi que la vitesse terminale de la particule reste indépendante de la position radiale de la particule dans la section. En effet, dans nos expériences, la particule se déplace dans le plan horizontal et cela sans affecter la vitesse terminale de l'inclusion. De ce fait, nous en déduisons que les effets de paroi doivent être uniformes dans une grande partie de la section y compris lorsque le cylindre est en rotation.

Aussi, étant donné que l'écart constaté entre nos points expérimentaux et la théorie semble être à peu près constant pour les différentes valeurs de S , nous pouvons légitimement penser que ces effets de paroi ne dépend pas, dans cette étude, de la vitesse de rotation ω ... Si de plus, nous supposons que dans nos expériences, les effets n'apparaissent que *via* un facteur multiplicateur, alors nous devrions avoir, par simplification au numérateur et au dénominateur :

$$\frac{V_T}{V_T^0} = \frac{1 + Re_T \mathcal{B}(0)}{1 + Re_T \mathcal{B}(\alpha)} = \frac{1 + (3/8) Re_T^0}{1 + (12/7) S^{1/2}}, \quad (3.4.3)$$

où V_T^0 et Re_T^0 correspondent respectivement à la vitesse terminale de l'inclusion mesurée en cas d'absence de rotation du cylindre, et au nombre de Reynolds construit avec cette valeur.

Sur la figure 3.8, nous comparons l'équation (3.4.3) avec les différentes valeurs expérimentales de V_T/V_T^0 (ces dernières sont représentées par les points $\diamond$). Ces résultats sont maintenant en très bon accord avec la théorie et cela semble donc confirmer le fait que précédemment, la différence constatée entre les résultats expérimentaux et la théorie valable en milieu infini s'explique par la présence de la paroi. Aussi, les points $\diamond$ tendent à montrer que les effets de paroi ne dépendent pas (ou faiblement) de la vitesse de rotation du fluide. De ce fait, ils peuvent donc être *a priori* estimés correctement à l'aide de la relation de Brenner, c'est à dire que dans cette étude, nous devrions avoir

$$V_T \simeq \frac{V_T^{\text{Stokes}}}{\left(1 + (12/7) S^{1/2}\right) \left(1 + 2.1 a/R\right)}.$$

Pour bien illustrer le fait que la vitesse terminale ne dépend pas de la position de la particule dans le plan horizontal, et sans vouloir empiéter sur la section d'après où nous traiterons plus en détail la migration radiale de la particule, nous avons représenté sur la figure 3.7 et à titre d'exemple, l'évolution de la coordonnée radiale de la particule qui correspond à l'expérience $\omega = 23$ (rad/s) de la figure 3.5. Si les effets de paroi n'étaient pas constants dans toute la section en cas de rotation, nous verrions alors apparaître une modification de la vitesse terminale de la particule lorsque celle-ci se rapproche de la paroi, or ce n'est pas le cas. Nous pouvons donc légitimement supposer que les effets de paroi restent constants presque partout dans toute la section et cela malgré le fait que l'écoulement autour de la particule soit en rotation.

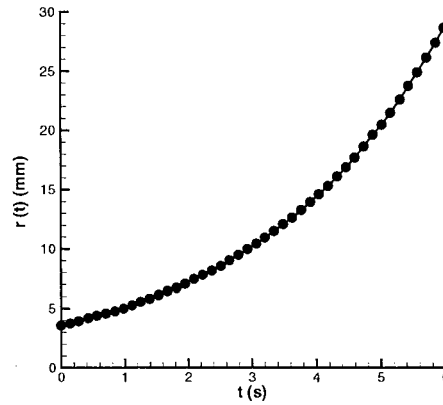


FIG. 3.7 – Evolution de la migration radiale de la particule correspondant à l'expérience $\omega = 23$ rad/s de la figure 3.5. La particule se déplace dans presque toute la section hormis la région de très proche paroi (pour mémoire, dans notre dispositif expérimental $R = 40$ mm).

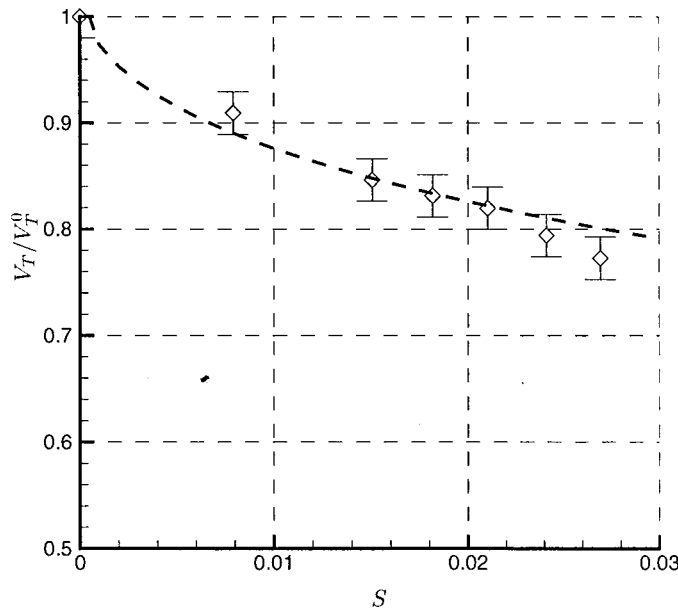


FIG. 3.8 – Théorie donnée par l'équation (3.4.3) : — —. V_T/V_T^0 correspondant à nos expériences : $\diamond$ (V_T^0 est la vitesse de la particule mesurée en cas d'absence de rotation au centre de la conduite.)

Quoi qu'il en soit, et pour terminer cette section, notons que pour prédire finement la vitesse terminale d'une particule dans un écoulement en rotation solide, la théorie des écoulements rampants qui ne prend pas en compte les effets d'inertie est insuffisante. Pour illustrer cela, remarquons que pour nos plus grandes

vitesses de rotation, i.e. pour $S \simeq 0.03$, nous constatons, en calculant le rapport

$$\frac{V_T - V_T^{\text{Stokes}}}{V_T^{\text{Stokes}}}, \quad \text{un écart de presque 30 \% !}$$

3.5 Vitesse de la particule dans le plan horizontal

3.5.1 Calculs théoriques

Dans cette section, nous nous proposons de résoudre l'équation de mouvement de la particule (3.3.10) projetée dans le plan horizontal. Mais avant cela, nous allons apporter à une légère modification à cette équation. En effet, dans la section 1.5 du chapitre 1, nous avons mené une petite discussion concernant l'expression de la force de masse ajoutée. En particulier, nous avons vu que selon l'étude réalisée par Auton (1987), l'expression de la force de masse ajoutée devrait être

$$\frac{m_f}{2} \left(\frac{D\vec{V}_f^0}{Dt} - \frac{d\vec{V}_p}{dt} \right) = \frac{m_f}{2} \left(\overline{\vec{A}}^2 \cdot \vec{X}_p - \frac{d^2 \vec{X}_p}{dt^2} \right),$$

plutôt que

$$\frac{m_f}{2} \frac{d}{dt} \left(\overline{\vec{P}}_H \cdot \vec{V}_g(t) \right) = \frac{m_f}{2} \left(\overline{\vec{A}} \cdot \frac{d\vec{X}_p}{dt} - \frac{d^2 \vec{X}_p}{dt^2} \right).$$

Ce résultat ayant été vérifié numériquement par Magnaudet *et al.* (1995) y compris pour les faibles nombres de Reynolds, nous avons donc choisi de prendre l'expression de la masse ajoutée d'Auton (1987), mais notons bien que la méthode de résolution proposée reste valable, que l'on choisisse l'une ou l'autre expression de la masse ajoutée. De plus, et cela n'est pas surprenant pour les écoulements de Stokes, les résultats obtenus avec l'une ou l'autre expression seront quasiment similaires (nous reviendrons sur ce point dans le cadre de la discussion proposée en fin de chapitre).

Aussi, nous nous devons de dire quelques mots à propos du choix de la condition initiale de l'équation de mouvement que nous allons résoudre. En effet, la force d'histoire est déterminée théoriquement pour τ compris entre $-\infty$ et t . Afin de simplifier la résolution de notre problème, nous allons supposer que pour $\tau \leq 0$, la vitesse de glissement de la particule est nulle. Comme nous allons le voir, cette hypothèse permet de réduire les bornes de l'intégrale de la force d'histoire, et ainsi, d'utiliser les transformées de Laplace pour intégrer l'équation de mouvement de la particule.

L'équation de mouvement (3.3.10) dans laquelle l'expression de la force de masse ajoutée a été modifiée est maintenant projetée suivant $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$. De même que nous l'avons fait dans la pré-étude (section 3.2), l'équation de mouvement dans le plan horizontal est donnée sous une forme sans dimension, les longueurs ayant été réduites par R (le rayon du cylindre) et le temps par $1/\omega$. Nous obtenons ainsi le système d'équations

$$\ddot{X}_p = -\frac{3}{2\gamma+1} X_p - \frac{\dot{X}_p + Y_p}{S(2\gamma+1)} + \frac{3}{\sqrt{S\pi}(2\gamma+1)} \int_0^t \frac{-\dot{Y}_p - \ddot{X}_p}{\sqrt{t-\tau}} d\tau, \quad (3.5.1)$$

$$\ddot{Y}_p = -\frac{3}{2\gamma+1} Y_p - \frac{\dot{Y}_p - X_p}{S(2\gamma+1)} + \frac{3}{\sqrt{S\pi}(2\gamma+1)} \int_0^t \frac{\dot{X}_p - \ddot{Y}_p}{\sqrt{t-\tau}} d\tau, \quad (3.5.2)$$

que nous allons résoudre.

Pour cela, en calculant l'équation (3.5.1) + i (3.5.2), avec $i^2 = -1$, nous obtenons une équation intégrodifférentielle donnée par

$$\ddot{Z} + A\dot{Z} + BZ + C \int_0^t \frac{-\ddot{Z}(\tau) + i\dot{Z}(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} d\tau = 0, \quad (3.5.3)$$

où, rappelons le,

$$Z = X_p + iY_p,$$

et avec

$$A = \frac{1}{S(2\gamma+1)} \quad B = \frac{3S-i}{S(2\gamma+1)}, \quad C = -\frac{3}{\sqrt{S\pi}(2\gamma+1)}.$$

Il se trouve que l'équation (3.5.3) peut être résolue analytiquement à l'aide des transformées de Laplace, mais à condition de procéder au changement de variable suivant :

$$\mathcal{U}(t) = \dot{\mathcal{Z}}(t) .$$

Il s'ensuit que

$$\ddot{\mathcal{Z}}(t) = \dot{\mathcal{U}}(t) , \quad \text{ainsi que} \quad \mathcal{Z}(t) = \int_0^t \mathcal{U}(\tau) d\tau + \mathcal{Z}_0 ,$$

et donc, l'équation (3.5.3) devient :

$$\dot{\mathcal{U}} + A\mathcal{U} + B \left[\int_0^t \mathcal{U}(\tau) d\tau + \mathcal{Z}_0 \right] + C \int_0^t \frac{-\dot{\mathcal{U}}(\tau) + i\mathcal{U}(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} d\tau = 0 . \quad (3.5.4)$$

Dans la suite, nous adopterons pour exprimer les transformées de Laplace la notation suivante :

$$\tilde{\mathcal{U}}(p) = \mathcal{L}(\mathcal{U}(t)) ,$$

et nous poserons que

$$\mathcal{U}(0) = \mathcal{U}_0 \quad (\text{sachant par hypothèse que } \mathcal{U}_0 = i\mathcal{Z}_0) .$$

Ainsi, nous aurons

$$\mathcal{L}(\dot{\mathcal{U}}(t)) = p\tilde{\mathcal{U}}(p) - \mathcal{U}_0 ,$$

$$\mathcal{L}\left(\int_0^t \mathcal{U}(\tau) d\tau + \mathcal{Z}_0\right) = \frac{1}{p}(\tilde{\mathcal{U}}(p) + \mathcal{Z}_0) ,$$

et

$$\mathcal{L}\left(\int_0^t \frac{-\dot{\mathcal{U}}(\tau) + i\mathcal{U}(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} d\tau\right) = \left((i-p)\tilde{\mathcal{U}}(p) + \mathcal{U}_0\right)\sqrt{\frac{\pi}{p}} ,$$

et la transformée de Laplace de l'équation (3.5.4) s'écrit donc :

$$\tilde{\mathcal{U}}(p)\left(p + A + \frac{B}{p} - C\sqrt{\pi}\sqrt{p} + iC\sqrt{\frac{\pi}{p}}\right) = \mathcal{U}_0\left(1 - C\sqrt{\frac{\pi}{p}}\right) - B\frac{\mathcal{Z}_0}{p} .$$

En posant, pour simplifier les écritures, $\mathcal{X} = \sqrt{p}$, il est possible de mettre $\tilde{\mathcal{U}}(p)$ sous la forme :

$$\tilde{\mathcal{U}}(p) = \frac{\mathcal{U}_0(\mathcal{X}^2 - C\sqrt{\pi}\mathcal{X}) - B\mathcal{Z}_0}{\mathcal{X}^4 - C\sqrt{\pi}\mathcal{X}^3 + A\mathcal{X}^2 + iC\sqrt{\pi}\mathcal{X} + B} , \quad (3.5.5)$$

faisant apparaître au dénominateur un polynôme d'ordre 4, admettant les racines $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \mathcal{X}_3$ et $\mathcal{X}_4$. Ces 4 racines se calculent analytiquement à l'aide de la méthode de Ferrari, de sorte que $\tilde{\mathcal{U}}(p)$ peut ensuite être décomposée en éléments simples et s'écrit alors formellement

$$\tilde{\mathcal{U}}(p) = \sum_{i=1}^{i=4} \frac{A_i}{\mathcal{X} - \mathcal{X}_i} = \sum_{i=1}^4 \frac{A_i}{\sqrt{p} - \mathcal{X}_i} , \quad (3.5.6)$$

avec

$$A_i = \frac{\mathcal{U}_0(\mathcal{X}_i^2 - C\sqrt{\pi}\mathcal{X}_i) - B\mathcal{Z}_0}{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{j=4} (\mathcal{X}_i - \mathcal{X}_j)} . \quad (3.5.7)$$

Avant de poursuivre les calculs, notons que parce que les $\mathcal{X}_i$ sont les racines d'un polynôme, elles admettent certaines propriétés qui ici sont données par

$$\sum_{i=1}^4 \mathcal{X}_i = C\sqrt{\pi} , \quad \sum_{i < j} \mathcal{X}_i \mathcal{X}_j = A \quad \text{et} \quad \prod_{i=1}^4 \mathcal{X}_i = B .$$

A l'aide de ces relations, il est ensuite possible de montrer que

$$\sum_{i=1}^{i=4} A_i = 0, \quad \sum_{i=1}^{i=4} \frac{A_i}{\mathcal{X}_i} = Z_0, \quad \sum_{i=1}^{i=4} A_i \mathcal{X}_i = \mathcal{U}_0 \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{i=4} A_i \mathcal{X}_i^2 = 0, \quad (3.5.8)$$

sachant que nous utiliserons ces résultats par la suite.

Maintenant que nous avons déterminé $\tilde{\mathcal{U}}(p)$, il nous faut revenir dans l'espace temporel et puisque

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{A_i}{\sqrt{s} - \mathcal{X}_i}\right) = A_i \left(\frac{1}{\sqrt{\pi t}} + \mathcal{X}_i \exp(\mathcal{X}_i^2 t) \operatorname{erfc}(-\mathcal{X}_i \sqrt{t}) \right),$$

nous avons alors

$$\mathcal{U}(t) = \sum_{i=1}^{i=4} \left(\frac{A_i}{\sqrt{\pi t}} + A_i \mathcal{X}_i \exp(\mathcal{X}_i^2 t) \operatorname{erfc}(-\mathcal{X}_i \sqrt{t}) \right). \quad (3.5.9)$$

Précisons que dans cette expression, le terme $A_i/\sqrt{\pi t}$, qui d'ailleurs présente une singularité en $t=0$, disparaît du fait de la première des relations données par l'équation (3.5.8). Ainsi, nous obtenons

$$\mathcal{U}(t) = \sum_{i=1}^{i=4} \left(A_i \mathcal{X}_i \exp(\mathcal{X}_i^2 t) \operatorname{erfc}(-\mathcal{X}_i \sqrt{t}) \right). \quad (3.5.10)$$

Afin d'obtenir ensuite la solution à notre problème exprimée en fonction de $\mathcal{Z}(t)$, nous devons calculer

$$\mathcal{Z}(t) = \int_0^t \mathcal{U}(\tau) d\tau + Z_0,$$

ce qui nous donne

$$\mathcal{Z}(t) = \sum_{i=1}^{i=4} \left(\frac{A_i}{\mathcal{X}_i} \exp(\mathcal{X}_i^2 t) \operatorname{erfc}(-\mathcal{X}_i \sqrt{t}) - \frac{A_i}{\mathcal{X}_i} \right) + Z_0,$$

et en utilisant la seconde relation de (3.5.8), l'expression de $\mathcal{Z}(t)$ se simplifie et cette dernière relation s'écrit

$$\text{Solution exacte} \quad \parallel \quad \mathcal{Z}(t) = \sum_{i=1}^{i=4} \frac{A_i}{\mathcal{X}_i} \exp(\mathcal{X}_i^2 t) \operatorname{erfc}(-\mathcal{X}_i \sqrt{t}). \quad (3.5.11)$$

Rappelons que cette solution permet de localiser à chaque instant et de manière univoque la position de la particule dans le plan horizontal. Dans la suite, nous verrons aussi qu'à l'aide de ce résultat, nous serons en mesure de pouvoir calculer analytiquement l'expression de chacune des forces qui contribuent à la dynamique de la particule dans le plan horizontal.

3.5.2 Expressions analytiques des différentes forces dans le plan horizontal

Afin de faciliter la résolution de l'équation de mouvement de la particule dans le plan horizontal, nous avons introduit la variable complexe $\mathcal{Z}(t) = X_p(t) + i Y_p(t)$. Nous allons voir que pour déterminer les expressions analytiques des différentes forces qui contribuent à la dynamique de la particule il est utile à nouveau d'utiliser cette variable complexe. Nous sommes donc amenés à définir une force complexe, sans dimension.

Pour cela, écrivons que si $\vec{F}$ est une force, alors sa force complexe associée s'écrit :

$$\mathcal{F} = \frac{\vec{F} \cdot \vec{e}_1 + i \vec{F} \cdot \vec{e}_2}{m_f R \omega^2}.$$

Ainsi, en déterminant l'expression de la force complexe associée à $\vec{F}$, il est possible de déterminer (à nouveau de manière univoque) l'expression de la force qui s'exerce sur la particule.

Pour la force d'histoire, nous avons

$$\vec{F}_h = 6\rho_f a^2 \sqrt{\nu_f \pi} \int_0^t \frac{d}{d\tau} \left(\vec{P}_H \cdot \vec{V}_g(\tau) \right) \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}},$$

et la force complexe associée s'écrit alors

$$\mathcal{F}_h = \frac{3}{2\sqrt{\pi S}} \int_0^t \frac{-\ddot{Z}(\tau) + i \dot{Z}(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} d\tau.$$

Pour calculer l'expression de $\mathcal{F}_h$, introduisons à nouveau la variable $\mathcal{U}(t) = \dot{Z}(t)$ et calculons la transformée de Laplace de cette intégrale. Nous obtenons alors l'expression

$$\tilde{\mathcal{F}}_h = \frac{3}{2\sqrt{S}} \left[\left(\frac{i}{\sqrt{p}} - \sqrt{p} \right) \tilde{\mathcal{U}}(p) + \frac{\mathcal{U}_0}{\sqrt{p}} \right],$$

qui peut alors se calculer à l'aide de la relation (3.5.6) et s'écrit

$$\tilde{\mathcal{F}}_h = \frac{3}{2\sqrt{S}} \left[\sum_{i=1}^4 \left(\frac{i A_i}{\sqrt{p}(\sqrt{p} - X_i)} - \frac{\sqrt{p} A_i}{\sqrt{p} - X_i} \right) + \frac{\mathcal{U}_0}{\sqrt{p}} \right].$$

Ce terme peut maintenant être décomposé en éléments simples et s'écrit finalement

$$\tilde{\mathcal{F}}_h = \frac{3}{2\sqrt{S}} \left[\sum_{i=1}^4 \left(\frac{i A_i}{X_i(\sqrt{p} - X_i)} - \frac{i A_i}{X_i \sqrt{p}} - A_i \left(1 + \frac{X_i}{\sqrt{p} - X_i} \right) \right) + \frac{\mathcal{U}_0}{\sqrt{p}} \right].$$

A l'aide des relations (3.5.8), cette expression se simplifie et il est possible de calculer sa transformée de Laplace inverse. L'expression temporelle de la force d'histoire complexe ainsi obtenue est

$$\mathcal{F}_h(t) = \frac{3}{2\sqrt{S}} \sum_{i=1}^4 \left(\frac{i A_i}{X_i} - A_i X_i \right) X_i \exp(X_i^2 t) \operatorname{erfc}(-X_i \sqrt{t}).$$

Pour les autres forces, à savoir, le gradient de pression (que nous écrirons $\vec{F}_p$), la force de masse ajoutée ($\vec{F}_{ma}$) et la traînée ($\vec{F}_d$), le calcul des forces complexes associées est simple et l'ensemble des résultats obtenus est donné dans le tableau 3.2.

Force temporelle	Force complexe associée
$\vec{F}_p = m_f \frac{D\vec{V}_f^0}{Dt} \Big _{\vec{X}_p}$	$\mathcal{F}_p = -Z(t)$
$\vec{F}_{ma} = m_f \frac{1}{2} \left(\frac{D\vec{V}_f^0}{Dt} \Big _{\vec{X}_p(t)} - \frac{d\vec{V}_p}{dt} \right)$	$\mathcal{F}_{ma} = -\frac{1}{2} \left(Z(t) + \dot{Z}(t) \right)$
$\vec{F}_d = 6\pi\nu_f \rho_f a \left(\vec{P}_H \cdot \vec{V}_g(t) \right)$	$\mathcal{F}_d = -\frac{1}{2S} \left(\dot{Z}(t) - i Z(t) \right)$
$\vec{F}_h = 6\rho_f a^2 \sqrt{\nu_f \pi} \int_0^t \frac{d}{d\tau} \left(\vec{P}_H \cdot \vec{V}_g(\tau) \right) \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}}$	$\mathcal{F}_h(t) = \frac{3}{2\sqrt{S}} \sum_{i=1}^4 \left(i - X_i^2 \right) A_i \exp(X_i^2 t) \operatorname{erfc}(-X_i \sqrt{t})$

TAB. 3.2 – Expressions des différentes forces et forces complexes associées qui s'exercent sur la particule. Dans la colonne de gauche, les forces sont dimensionnelles alors que dans celle de droite, elles sont normalisées.

Diagramme des forces

Afin d'illustrer les résultats précédents, regardons comment évoluent théoriquement ces différentes forces, par exemple lors d'une de nos expériences. Afin de bien comprendre quelles sont les influences respectives de chacune de ces forces sur le mouvement de la particule, et notamment leurs participations

au taux de migration et de rotation de la particule, il est intéressant d'exprimer ces forces dans la base cylindrique $(\vec{e}_{R_p}, \vec{e}_{\Theta_p})$. Pour cela, précisons que si $\mathcal{F}$ est une force complexe associée à une force temporelle $\vec{F}$, alors sa composante radiale est donnée par

$$\vec{F}^{1b} \cdot \vec{e}_{R_p} = \frac{1}{|Z|} \left(\Re(Z) \Re(\mathcal{F}) + \Im(Z) \Im(\mathcal{F}) \right),$$

et sa composante azimutale par

$$\vec{F}^{1b} \cdot \vec{e}_{\Theta_p} = \frac{1}{|Z|} \left(-\Im(Z) \Re(\mathcal{F}) + \Re(Z) \Im(\mathcal{F}) \right).$$

Sur les figures 3.9 et 3.10, nous pouvons alors comparer, dans une situation représentative de celles qui seront rencontrées dans la partie expérimentale, l'influence des différentes forces.

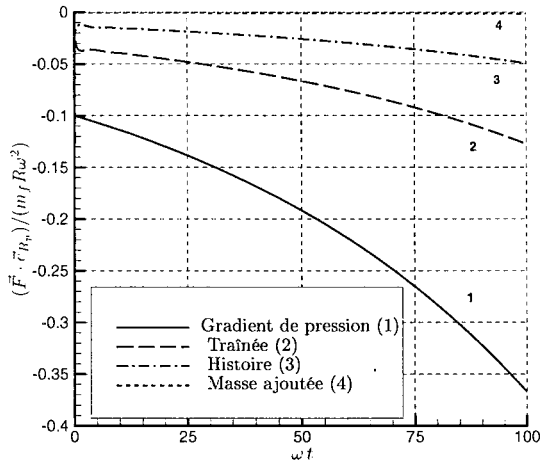


FIG. 3.9 – Projection des forces suivant $\vec{e}_{R_p}$, avec $Z_0 = 0.1$, $\gamma = 1.45$, $a = 0.0015$ m, $\nu_f = 0.0002$ m²/s et $\omega = 15$ rad/s, soit $S = 0.01875$,

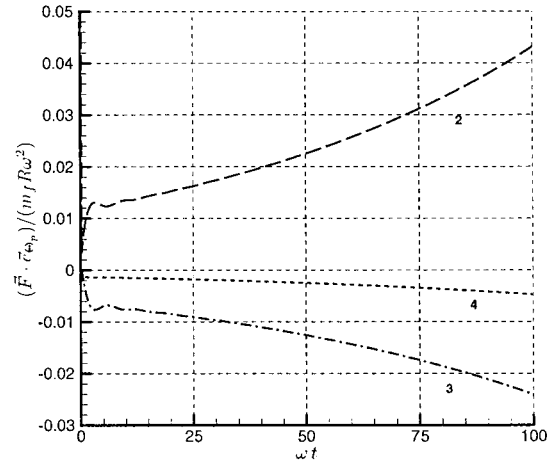


FIG. 3.10 – Projection des forces suivant $\vec{e}_{\Theta_p}$, avec $Z_0 = 0.1$, $\gamma = 1.45$, $a = 0.0015$ m, $\nu_f = 0.0002$ m²/s et $\omega = 15$ rad/s, soit $S = 0.01875$.

En tout premier lieu, nous allons nous intéresser au "moteur" du mouvement radial de la particule. En effet, sur les deux graphes 3.9 et 3.10, nous avons fait figurer à la fois le gradient de pression de l'écoulement non perturbé ($\vec{F}^0$) et les forces de l'écoulement induit ($\vec{F}^{1b}$). L'origine physique de ces forces est pourtant différente car les forces induites, contrairement au gradient de pression, n'apparaissent que si la vitesse de glissement de la particule n'est pas nulle. Ces forces sont alors des forces de résistance et celles-ci s'opposent au mouvement de la particule. Pour bien comprendre quel est le moteur de la migration, nous devons noter que parce que la particule possède un mouvement de rotation autour de l'axe de la conduite, elle subit, si l'on se place dans le repère en rotation qui tourne autour de l'axe $\vec{e}_3$ avec la même vitesse angulaire que la particule, une force centrifuge donnée par

$$\vec{F}_{\text{centrifuge}} = m_p R_p(t) \dot{\Theta}_p^2 \vec{e}_{R_p}.$$

Comme $\dot{\Theta}_p$ est très proche de ω nous écrirons

$$\vec{F}_{\text{centrifuge}} \approx m_p R_p(t) \omega^2 \vec{e}_{R_p}.$$

De par son expression, cette force centrifuge peut être regroupée avec le gradient de pression et nous avons

$$\frac{\vec{F}^0 + \vec{F}_{\text{centrifuge}}}{m_f R \omega^2} \approx (\gamma - 1) |Z| \vec{e}_{R_p}.$$

Il apparaît alors clairement que si la particule est plus lourde que le fluide, c'est à dire si $\gamma > 1$, alors la particule est expulsée du centre de la rotation et inversement, si $\gamma < 1$, la particule est capturée par la rotation. Ce sont ces deux forces, *et uniquement ces deux forces*, qui déterminent le sens de la migration radiale de la particule. Ensuite et parce que la particule migre, elle possède alors une vitesse de glissement non nulle, d'où l'existence de forces de résistances données justement par $\vec{F}^{1b}$.

Au vu des résultats représentés sur les figures 3.9 et 3.10, nous pouvons maintenant établir une hiérarchie quant à l'influence de ces forces sur le mouvement de la particule. La force de résistance la plus intense correspond à la traînée de Stokes, puis vient ensuite la force d'histoire, et enfin la force de masse ajoutée. Aussi, nous remarquons que pour une particule plus dense que le fluide, l'intensité de chacune de ces forces augmente dans le temps, ce qui se comprend aisément dans la mesure où plus la particule s'éloigne du centre de la rotation, plus la force responsable de sa migration augmente et par conséquent, plus sa vitesse de glissement augmente. Ce qui est intéressant dans cette étude, c'est que la force d'histoire ne disparaît jamais. La force d'histoire continue à jouer un rôle dans la dynamique de la particule et cela, y compris aux temps dit "longs", c'est à dire, après plusieurs rotations du cylindre.

En outre, il apparaît également que bien que toutes ces forces augmentent, leur rapport est constant. En effet, connaissant l'expression analytique de chacune des forces, il est possible de regarder, par exemple, comment évolue le rapport entre les composantes radiales de ces forces et le gradient de pression de l'écoulement non perturbé. Pour toutes les forces induites, nous obtenons alors des droites horizontales, droites qui témoignent du fait qu'au cours du temps, leurs influences relatives sur le mouvement de la particule ne changent pas et donc, après la traînée, la force d'histoire sera toujours la deuxième force dans la hiérarchie des forces de résistance.

En ce qui concerne le mouvement azimutal de la particule, nous voyons également qu'après la traînée de Stokes, c'est la force d'histoire qui contribue le plus à la dynamique de la particule. Malgré cela, nous constatons que ces forces sont d'un ordre de grandeur inférieur aux forces qui s'opposent à la migration radiale de la particule, ce qui s'explique aussi aisément dans la mesure où la vitesse de glissement azimutale est vraiment faible, comparativement à la vitesse de glissement radiale.

Pour analyser plus en détail la contribution de chacune de ces forces, il est utile de parvenir à exprimer le mouvement de la particule sous la forme

$$Z(t) \propto \exp(\lambda_r t) \exp(i \lambda_i t).$$

Mais pour pouvoir calculer une telle expression, et sachant que l'expression générale des racines $\mathcal{X}_i$ impliquées dans l'expression analytique de $Z(t)$ est extrêmement complexe, nous serons amenés, dans un premier temps, à rechercher une solution approchée de l'équation de mouvement de la particule. Précisons bien que puisque nous disposons malgré tout de la solution exacte, cette recherche de la solution approchée peut se faire sereinement, car les résultats obtenus pourront à tout moment, être comparés aux résultats délivrés par la solution exacte.

3.5.3 Calcul analytique des taux de migration et de rotation de la particule

Dans cette partie, nous allons nous intéresser au comportement de la solution analytique $Z(t)$. Dans la résolution de l'équation de mouvement de la particule, nous avons montré que la solution exacte de la particule (3.5.11) dépend des racines d'un certain polynôme de degré 4, donné par

$$P_4(\mathcal{X}) = \mathcal{X}^4 - C\sqrt{\pi} \mathcal{X}^3 + A \mathcal{X}^2 + iC\sqrt{\pi} \mathcal{X} + B, \quad (3.5.12)$$

où les coefficients A , B et C ne dépendent que de deux paramètres : γ et S . En particulier, la solution analytique exacte est donnée par une somme de fonctions de la forme $\exp(\mathcal{X}_i^2 t) \operatorname{erfc}(-\mathcal{X}_i \sqrt{t})$. Pour pouvoir faire une interprétation physique de la solution de l'équation de mouvement de la particule, nous devons donc nous intéresser à l'expression analytique des racines $\mathcal{X}_i$. Or bien que celles-ci soient déterminées analytiquement à l'aide de la méthode de Ferrari, la complexité de leurs expressions est telle⁴ que nous serons amenés dans cette section à en rechercher des expressions simplifiées.

Par ailleurs, il est possible de montrer que le comportement des fonctions $\exp(\mathcal{X}_i^2 t) \operatorname{erfc}(-\mathcal{X}_i \sqrt{t})$ dépend du lieu des racines $\mathcal{X}_i$ dans le plan complexe, et nous nous servirons aussi de cela pour simplifier

4. plusieurs pages de Maple pour chaque racine !

l'expression de la solution exacte de l'équation de mouvement de la particule. Mais avant cela, il nous sera fortement utile d'analyser le comportement de la solution analytique correspondant à une particule de même densité que le fluide environnant, i.e. lorsque $\gamma = 1$.

Cas d'une particule neutre

Le cas $\gamma = 1$ est un cas particulier qui correspond à une particule qui a la même densité que le fluide environnant. Dans la discussion concernant le "moteur" du mouvement radial de la particule, nous avons vu qu'une particule plus dense que le fluide ($\gamma > 1$) était expulsée de la rotation et qu'inversement, une particule moins dense que le fluide ($\gamma < 1$) était capturée par la rotation. Nécessairement, pour une particule qui possède exactement la même densité que le fluide, nous ne devrions pas observer de migration radiale et c'est ce que nous allons vérifier ici. Notons en fait qu'une telle particule correspond à un traceur et dans ce cas précis, les coefficients A , B et C valent

$$A = \frac{1}{3S}, \quad B = \frac{3S - i}{3S} \quad \text{et} \quad C = -\frac{1}{\sqrt{S}\pi}.$$

Nous écrirons $P_4^0(X)$ le polynôme qui correspond à un traceur et qui est alors donné par

$$P_4^0(X) = X^4 + \frac{1}{\sqrt{S}} X^3 + \frac{1}{3S} X^2 - \frac{i}{\sqrt{S}} X + 1 - \frac{i}{3S}.$$

Il se trouve alors que ce dernier admet deux racines évidentes, que nous écrirons

$$X_{1,2}^0 = \pm\sqrt{i},$$

situées sur la première bissectrice du plan complexe (appelée également "ligne de Stokes"). En fait, cette ligne découpe le plan complexe en différentes zones où le comportement de la fonction $\text{erf}(z)$, qui apparaît dans la solution de l'équation de mouvement de la particule, diffère (lorsque $|z| \rightarrow \infty$). Nous reviendrons sur ce point dans la suite. Pour l'instant, notons qu'à l'aide de ces deux premières racines, le polynôme P_4^0 peut être réécrit sous la forme

$$P_4^0(X) = (X^2 - i) \left(X^2 + \frac{1}{\sqrt{S}} X + \frac{1}{3S} + i \right),$$

d'où il est possible d'extraire les deux autres racines

$$X_{3,4}^0 = \frac{-1 \pm \sqrt{-1/3 - 4iS}}{2\sqrt{S}}.$$

A l'aide de ces expressions analytiques simples pour les 4 racines, les coefficients A_1 , A_2 , A_3 et A_4 peuvent être déterminés facilement à l'aide de la relation (3.5.7) et nous avons finalement

$$\frac{A_1}{X_1^0} = \frac{A_2}{X_2^0} = \frac{Z_0}{2} \quad \text{et} \quad \frac{A_3}{X_3^0} = \frac{A_4}{X_4^0} = 0.$$

La solution exacte dans ce cas là devient tout simplement

$$Z(t) = \frac{Z_0}{2} \exp(it) \left(\text{erfc}(\sqrt{i}t) + \text{erfc}(-\sqrt{i}t) \right)$$

or puisque $\text{erfc}(z) = 1 - \text{erf}(z)$ et que la fonction $\text{erf}(z)$ est impaire, nous avons finalement

$$Z(t) = Z_0 \exp(it).$$

Ce résultat est bien entendu conforme à la trajectoire attendue pour un traceur, c'est à dire, sans aucune migration radiale ni différence de vitesse de rotation. Dans la suite, nous utiliserons ces résultats obtenus pour une particule de même densité que le fluide afin de déterminer une expression simplifiée de la solution de l'équation du mouvement de la particule lorsque celle-ci est de densité quelconque.

Cas d'une particule de densité quelconque

Gardons bien à l'esprit que lorsque $\gamma = 1$, le polynôme P_4 admet 4 racines, que nous avons appelées $\mathcal{X}_i^0$, et ces dernières sont telles que

$$|\mathcal{X}_1^0| \simeq |\mathcal{X}_2^0| = O(1),$$

et

$$|\mathcal{X}_3^0| \simeq |\mathcal{X}_4^0| = O(S^{-1/2}).$$

Maintenant, nous allons nous intéresser au comportement de ces racines lorsque le rapport des densités γ varie, par exemple, entre 0 et 2. Étant donné que les racines de P_4 peuvent être obtenues analytiquement, observons sur la figure 3.11 leurs déplacements dans le plan complexe. Il apparaît que lorsque γ varie,

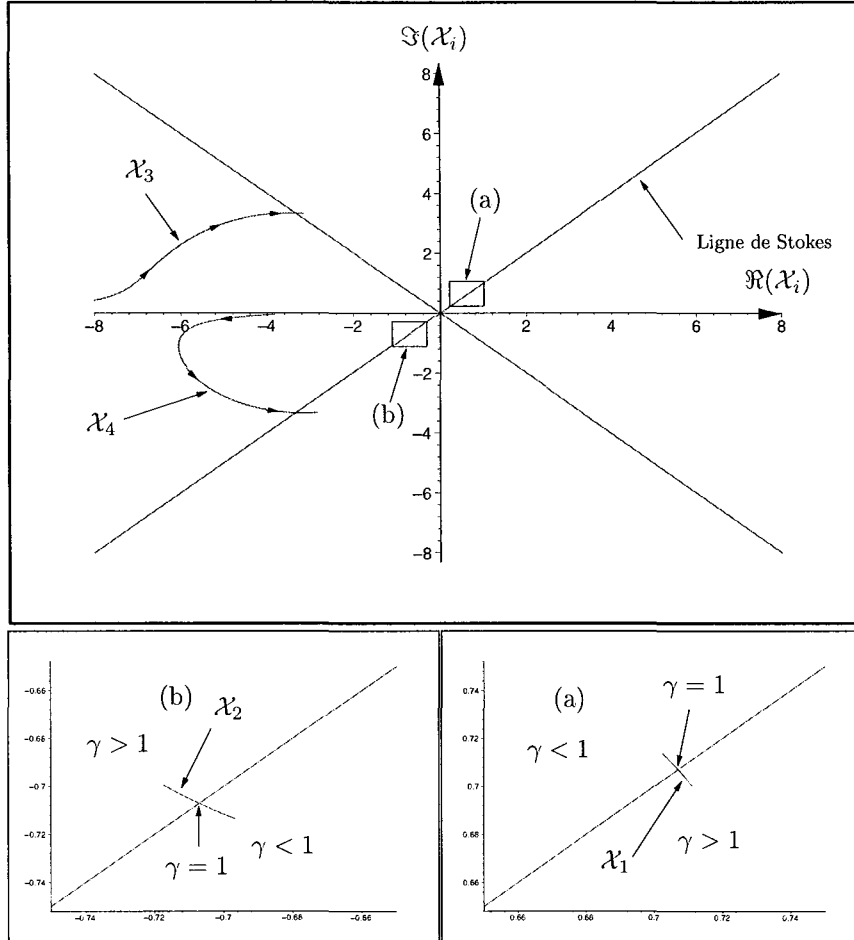


FIG. 3.11 – Lieux des racines de P_4 dans le plan complexe pour une valeur de $S = 0.01$. (a) et (b) sont les agrandissements des régions encadrées où se situent les racines $\mathcal{X}_1$ et $\mathcal{X}_2$

les racines $\mathcal{X}_3$ et $\mathcal{X}_4$ se déplacent amplement dans le plan complexe mais leurs modules restent toujours du même ordre de grandeur, à savoir en $O(1/\sqrt{S})$. En revanche, les racines $\mathcal{X}_1$ et $\mathcal{X}_2$ ne se déplacent que très peu autour de leurs valeurs respectives obtenues pour une particule neutre. Nous constatons également que la racine $\mathcal{X}_1$ donnée sur la figure 3.11-(a), traverse la ligne de Stokes de la gauche vers la droite lorsque γ passe d'une valeur inférieure à 1 à une valeur supérieure à 1 et inversement, sur la figure 3.11-(b), $\mathcal{X}_2$ traverse la ligne de Stokes de la droite vers la gauche.

En annexe C.1, nous montrons que lorsque $\gamma \neq 1$ les termes

$$\frac{A_3}{\mathcal{X}_3} \exp(\mathcal{X}_3^2 t) \operatorname{erfc}(-\mathcal{X}_3 \sqrt{t}) \quad \text{et} \quad \frac{A_4}{\mathcal{X}_4} \exp(\mathcal{X}_4^2 t) \operatorname{erfc}(-\mathcal{X}_4 \sqrt{t})$$

de la solution (3.5.11) sont négligeables comparativement aux deux autres, et que par conséquent, nous avons

$$\mathcal{Z}(t) \simeq \frac{A_1}{\mathcal{X}_1} \exp(\mathcal{X}_1^2 t) \operatorname{erfc}(-\mathcal{X}_1 \sqrt{t}) + \frac{A_2}{\mathcal{X}_2} \exp(\mathcal{X}_2^2 t) \operatorname{erfc}(-\mathcal{X}_2 \sqrt{t}).$$

Dans la publication Candelier, Angilella et Souhar (2004), nous avons montré qu'au temps long ($t \gg 1$) et à condition que $\gamma > 1$ le terme fonction de $\mathcal{X}_2$ finit par disparaître et de plus

$$\operatorname{erfc}(-\mathcal{X}_1 \sqrt{t}) \rightarrow 2 \quad \text{si} \quad (t \gg 1).$$

Par ailleurs, nous avons constaté que ce résultat, valable a priori aux temps longs était en fait valable même pour des temps courts ($t \simeq 1$). Dans la suite, nous allons montrer pourquoi le résultat de Candelier *et al.* (2004) est valable y compris aux temps courts et par la même occasion, nous verrons que ce résultat est valable aussi pour une particule de densité quelconque par rapport à 1.

Calculs approchés de $\mathcal{X}_1$ et $\mathcal{X}_2$

Premièrement, nous allons nous servir du fait que lorsque γ varie, les racines $\mathcal{X}_1$ et $\mathcal{X}_2$ évoluent très peu dans le plan complexe, comme le montre la figure 3.11, de sorte que nous pourrions écrire

$$\mathcal{X}_i = \mathcal{X}_i^0 + \delta \mathcal{X}_i \quad \text{avec} \quad |\delta \mathcal{X}_i| \ll 1 \quad \text{et} \quad i = \{1, 2\}.$$

Maintenant, pour parvenir à obtenir une expression simplifiée de ces deux racines lorsque $\gamma \neq 1$, introduisons le polynôme

$$Q_4(\mathcal{X}) = S(2\gamma + 1) P_4(\mathcal{X}).$$

Celui-ci admet bien entendu les mêmes racines que $P_4(\mathcal{X})$ sauf qu'il est linéaire en γ ce qui est utile pour la suite. Également, nous appellerons Q_4^0 ce polynôme qui correspond au cas $\gamma = 1$, qui admet alors $\mathcal{X}_i^0$ comme racine.

Afin de calculer ces racines lorsque $\gamma \neq 1$, posons

$$\gamma = 1 + \delta\gamma,$$

mais à la différence de la publication Candelier *et al.* (2004), $\delta\gamma$ est d'ordre de grandeur quelconque (mais pas trop grand quand même, sinon nous risquerions de sortir du cadre des hypothèses de Stokes!). Puisque le polynôme Q_4 est linéaire en γ , il apparaît alors que

$$Q_4(\mathcal{X}) = 2S\delta\gamma\mathcal{X}^4 + Q_4^0(\mathcal{X}),$$

et en utilisant le fait que les racines $\mathcal{X}_i$ ($i = 1, 2$) varient peu autour de leurs valeurs $\mathcal{X}_i^0$, nous pourrions écrire que

$$Q_4(\mathcal{X}_i) = 2S\delta\gamma\mathcal{X}_i^{04} + Q_4^0(\mathcal{X}_i^0) + \left. \frac{\partial Q_4(\mathcal{X})}{\partial \mathcal{X}} \right|_{\mathcal{X}_i^0} \delta \mathcal{X}_i + O(\delta \mathcal{X}_i^2).$$

Par définition, $Q_4(\mathcal{X}_i)$ et $Q_4^0(\mathcal{X}_i^0)$ sont nuls et finalement,

$$\delta \mathcal{X}_i = - \frac{2S\delta\gamma\mathcal{X}_i^{04}}{\left. \frac{\partial Q_4(\mathcal{X})}{\partial \mathcal{X}} \right|_{\mathcal{X}_i^0}} + O(\delta \mathcal{X}_i^2).$$

A l'aide de cette relation, nous obtenons alors, tous calculs faits

$$\mathcal{X}_1 = \sqrt{i} + \frac{S}{\sqrt{i}} \delta\gamma - 3S^{3/2} \delta\gamma + \frac{\sqrt{2}}{2} (3 + 3i) S^2 \delta\gamma + O(S^{5/2}) \quad (3.5.13)$$

$$\mathcal{X}_2 = -\sqrt{i} - \frac{S}{\sqrt{i}} \delta\gamma - 3S^{3/2} \delta\gamma - \frac{\sqrt{2}}{2} (3 + 3i) S^2 \delta\gamma + O(S^{5/2}). \quad (3.5.14)$$

Nous venons alors de terminer une première étape importante dans la recherche d'une solution approchée. Il nous reste maintenant à voir comment écrire les termes $A_1/\mathcal{X}_1$ et $A_2/\mathcal{X}_2$.

Calculs de $A_1/\mathcal{X}_1$ et $A_2/\mathcal{X}_2$

A l'aide des relations (3.5.13) et (3.5.14), nous pouvons écrire que

$$\mathcal{X}_1 + \mathcal{X}_2 = -6 S^{3/2} \delta\gamma + O(S^{5/2}). \quad (3.5.15)$$

En ajoutant cette relation à celles vérifiées par les racines du polynôme, données par (3.5.8), il est possible de montrer que

$$(\mathcal{X}_1 - \mathcal{X}_2)(\mathcal{X}_1 - \mathcal{X}_3)(\mathcal{X}_1 - \mathcal{X}_4) = \mathcal{X}_1^3 + (\mathcal{X}_1 \mathcal{X}_2 - \mathcal{X}_1^2) \left(C\sqrt{\pi} + 6 S^{3/2} \right) + \frac{B}{\mathcal{X}_2} - \mathcal{X}_1^2 \mathcal{X}_2 - \frac{B}{\mathcal{X}_1} + O(S^{5/2}), \quad (3.5.16)$$

ainsi que

$$(\mathcal{X}_2 - \mathcal{X}_1)(\mathcal{X}_2 - \mathcal{X}_3)(\mathcal{X}_2 - \mathcal{X}_4) = \mathcal{X}_2^3 + (\mathcal{X}_1 \mathcal{X}_2 - \mathcal{X}_2^2) \left(C\sqrt{\pi} + 6 S^{3/2} \right) + \frac{B}{\mathcal{X}_1} - \mathcal{X}_2^2 \mathcal{X}_1 - \frac{B}{\mathcal{X}_2} + O(S^{5/2}). \quad (3.5.17)$$

Avec ces deux relations, $A_1/\mathcal{X}_1$ et $A_2/\mathcal{X}_2$ peuvent être exprimés uniquement en fonction de $\mathcal{X}_1$ et $\mathcal{X}_2$. Tous calculs faits, nous obtenons que

$$\frac{A_1}{\mathcal{X}_1} = \frac{Z_0}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{4} (1-i)(\mathcal{U}_0 - iZ_0)\sqrt{S} + (\gamma - 4)(\mathcal{U}_0 - iZ_0)S + O(S^{3/2})$$

et

$$\frac{A_2}{\mathcal{X}_2} = \frac{Z_0}{2} - \frac{3\sqrt{2}}{4} (1-i)(\mathcal{U}_0 - iZ_0)\sqrt{S} + (\gamma - 4)(\mathcal{U}_0 - iZ_0)S + O(S^{3/2}).$$

Or par hypothèse, la vitesse de glissement initiale est nulle et par conséquent,

$$\frac{A_1}{\mathcal{X}_1} = \frac{Z_0}{2} + O(S^{3/2})$$

et

$$\frac{A_2}{\mathcal{X}_2} = \frac{Z_0}{2} + O(S^{3/2}).$$

Enfin, pour terminer, notons qu'à l'aide de la relation (3.5.15), il est possible d'établir, en faisant un développement limité autour de $\mathcal{X}_1\sqrt{t}$ et en utilisant comme précédemment le fait que la fonction $\text{erf}(z)$ est impaire, que

$$\exp(\mathcal{X}_1^2 t) \text{erfc}(-\mathcal{X}_1\sqrt{t}) + \exp(\mathcal{X}_2^2 t) \text{erfc}(-\mathcal{X}_2\sqrt{t}) = \exp(\mathcal{X}_1^2 t) \left(2 + O(S^{3/2} t) \right).$$

Compte tenu de l'ensemble de ces résultats, nous avons finalement

$$\text{Solution approchée} \quad \parallel \quad Z(t) = Z_0 \exp(\mathcal{X}_1^2 t). \quad (3.5.18)$$

Cette solution est donc valable pour γ inférieur ou supérieur à 1 mais aussi pour les temps courts ($t \simeq 1$). Dans la pratique, la racine $\mathcal{X}_1$ peut être déterminée soit analytiquement, en ne calculant alors que la première racine de P_4 , soit si la plage de temps utilisée le permet, c'est à dire tant que

$$S^{5/2} t \ll 1,$$

en utilisant la relation (3.5.13). Bien sûr, nous avons vérifié la validité de cette solution approchée en la comparant à la solution exacte (3.5.11) pour différentes valeurs de γ et pour différents nombres de Stokes S (avec S toujours petit devant 1) et l'accord entre ces deux solutions est quasiment parfait.

Rappelons que le but de cette section était de parvenir à écrire la solution (3.5.11) sous la forme

$$Z(t) = Z_0 \exp(\lambda_r t) \exp(i \lambda_i t),$$

c'est ce que nous avons fait en calculant la solution (3.5.18) où par conséquent

$$\lambda_r = \Re(\mathcal{X}_1^2) \quad \text{et} \quad \lambda_i = \Im(\mathcal{X}_1^2).$$

Finalement, nous obtenons

$$\begin{array}{l} \text{Taux de migration} \\ \text{et} \\ \text{Taux de rotation} \end{array} \left\| \begin{array}{l} \lambda_r = \frac{\dot{R}_p}{R_p} = \underbrace{2S(\gamma-1)}_{\text{Traînée}} - \underbrace{3\sqrt{2}(\gamma-1)S^{3/2}}_{\text{Effet d'histoire}} + O(S^2) \\ \lambda_i = \dot{\Theta}_p = 1 - \underbrace{3\sqrt{2}S^{3/2}(\gamma-1)}_{\text{Effet d'histoire}} + O(S^2). \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (3.5.19) \\ (3.5.20) \end{array}$$

Les premiers termes de λ_r et λ_i sont donc conformes à ceux que nous avons obtenus dans le cadre de la pré-étude au début de ce chapitre, à savoir λ_r^0 et λ_i^0 , donnés respectivement par les équations (3.2.5) et (3.2.6), et sont la contribution de la traînée de Stokes qui s'oppose au gradient de pression. Aussi, les termes en $O(S^{3/2})$ sont-ils la contribution de la force d'histoire. De ce fait, nous retrouvons bien la hiérarchie des forces constatée sur les figures (3.9) et (3.10). (Notons que dans la littérature, un résultat semblable au notre a été obtenu par Druzhinin et Ostrovsky (1994), sauf que ces derniers se sont appuyés non pas sur l'équation exacte de mouvement de la sphère mais sur une équation de mouvement approchée.)

Enfin, notons que l'erreur relative (théorique) commise sur le taux de migration radiale si la force d'histoire est négligée peut être estimée en calculant, par exemple,

$$\frac{\lambda_r - \lambda_r^0}{\lambda_r^0} = -\frac{3\sqrt{2}}{2} S^{1/2} + O(S).$$

Dans le cadre de cette étude, même si S est effectivement petit devant 1, typiquement $S = O(10^{-2})$, l'erreur relative peut être de plus de 20 % dans le cadre de nos expériences ce qui n'est vraiment pas négligeable. En revanche, en ce qui concerne le taux de rotation et parce que le terme dominant n'est pas en $O(S)$ mais en $O(1)$, l'erreur relative

$$\frac{\lambda_i - \lambda_i^0}{\lambda_i^0} = -3\sqrt{2}S^{3/2} + O(S^2)$$

est, quant-à elle, très petite devant 1 (moins de 1 %).

Dans la suite, nous allons comparer les résultats théoriques (3.5.19) et (3.5.20) aux résultats expérimentaux.

3.5.4 Comparaison avec l'expérience.

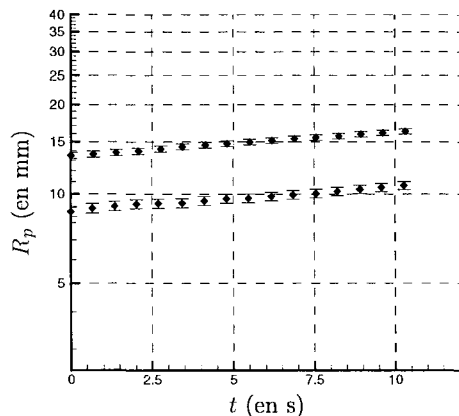
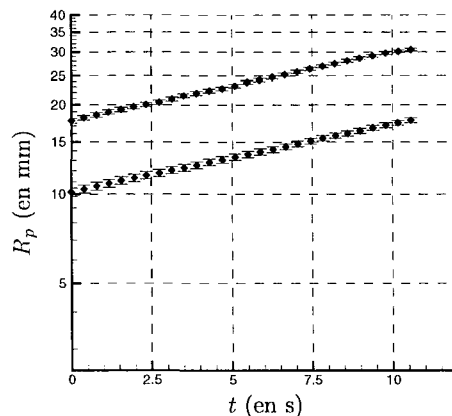
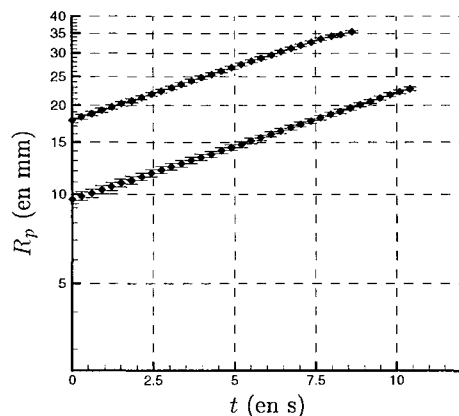
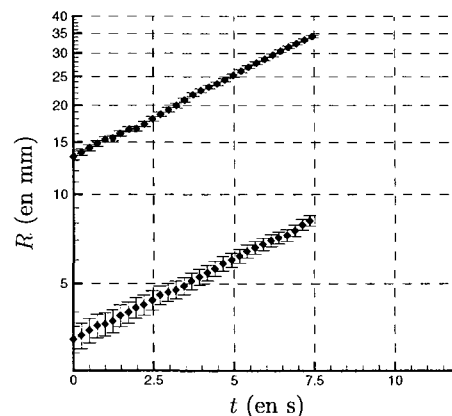
Afin de comparer les résultats théoriques et les résultats expérimentaux, nous avons à nouveau réalisé des expériences avec des vitesses de rotation variant de 0 à 23 rad/s. A chaque fois, l'évolution de la position radiale est mesurée au cours du temps. Sur la figure 3.7 de la section précédente, nous avons d'ailleurs déjà montré une évolution caractéristique de la coordonnée $R_p(t)$ de la particule pendant une expérience. Bien que ce genre de résultat "brut" puisse être comparé directement à la théorie, puisque nous avons, sous forme dimensionnelle,

$$R_p(t) = R|Z(t)|, \quad \text{où } R \text{ est le rayon de la conduite,}$$

il est toutefois plus intéressant de comparer les valeurs expérimentales obtenues pour le taux de migration. Ces informations sont en effets plus riches dans la mesure où par exemple, elles ne dépendent ni de la position initiale de la particule, ni du temps.

Pour obtenir les valeurs expérimentales de ces taux de migrations, il nous faut alors représenter l'évolution de la coordonnée radiale de la particule dans un graphe $1/2$ – logarithmique. En procédant de cette manière, nous obtenons donc, pour chaque expérience, une droite, ce qui témoigne ainsi de

l'évolution exponentielle de la position radiale de la particule dans le temps. La pente correspond alors à la valeur dimensionnelle de λ_r , que nous appellerons λ_r^{exp} . (Dans le cadre de nos expériences, la pente de la droite est obtenue à l'aide d'une méthode des moindres carrés.) Notons que dans nos investigations théoriques λ_r est une grandeur sans dimension et donc, pour comparer la valeur expérimentale du taux de migration mesurée à la valeur théorique, il faut donc diviser λ_r^{exp} par ω (la vitesse de rotation du cylindre).

FIG. 3.12 – $\omega = 4.58$ rad/sFIG. 3.13 – $\omega = 8.02$ rad/sFIG. 3.14 – $\omega = 10.23$ rad/sFIG. 3.15 – $\omega = 12.72$ rad/s

Pour nous assurer que la valeur de λ_r^{exp} ne dépend pas de la position initiale de la particule, nous avons donc effectué, pour différentes vitesses de rotations, plusieurs expériences en faisant varier la position initiale des particules. Les résultats obtenus sont d'une grande reproductibilité et pour ne pas alourdir les figures 3.12, 3.13, 3.14 et 3.15, seuls les résultats correspondant à 2 lâchés de particule par vitesse de rotation sont représentés. Il apparaît clairement que les droites obtenues sont parallèles et de ce fait, la position initiale de la particule ne modifie pas la valeur mesurée de λ_r^{exp} . Par conséquent, en faisant une moyenne sur l'ensemble des expériences réalisées pour une vitesse de rotation, nous obtenons une seule valeur expérimentale du taux de migration de la particule. Aussi, nous considérerons que l'erreur commise sur la détermination de cette valeur, correspond à la valeur maximale de l'écart à la valeur moyenne.

En procédant ainsi pour différentes vitesses de rotations du cylindre, nous obtenons *ce qui constitue le résultat principal de la partie expérimentale concernant le mouvement radial de la particule*, à savoir la figure 3.16.

Nous pouvons alors constater que l'accord entre les résultats expérimentaux et la théorie avec force

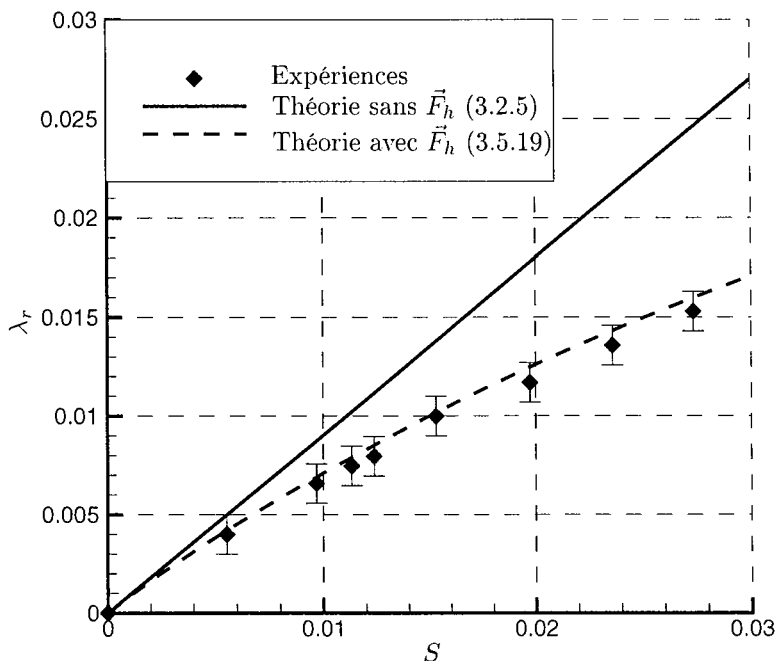


FIG. 3.16 – Comparaison des taux de migrations expérimentaux aux théories avec et sans force d'histoire. Chaque point expérimental correspond en fait à une série d'expériences réalisées avec une même vitesse de rotation du cylindre.

d'histoire est vraiment très bon. Il est clair que le taux de migration n'est donc pas simplement proportionnel à S (comme prédit par la théorie sans force d'histoire) mais qu'il est bien modifié par la présence d'un terme en $S^{3/2}$.

A priori, ce très bon accord entre nos résultats théoriques et expérimentaux est presque étonnant, puisque la théorie exposée dans la section précédente a été établie en milieu infini. Aussi, dans la section consacrée au mouvement vertical de la particule, nous avons vu que les effets de paroi jouaient un rôle significatif et pouvait impliquer une différence entre la vitesse terminale théorique et la vitesse terminale mesurée de l'ordre de quelques 10 %. Mais, souvenons nous que pour obtenir l'expression de la force induite horizontale qui s'exerce sur la particule, nous avons supposé que l'écoulement fluide était régi par des équations instationnaires associées à une condition limite sur la particule de type harmonique. Dans une telle situation, l'écoulement est différent de celui obtenu à l'aide des équations de Stokes stationnaires et en particulier, la lente décroissance en a/r du profil des vitesses n'est plus vérifiée (nous analyserons en détail ce profil des vitesses dans le chapitre 5). Au contraire même, nous verrons que l'écoulement instationnaire est quasiment intégralement contenu dans une sphère de rayon δ , avec

$$\frac{\delta}{a} = \left(\frac{2\nu_f}{a^2 \omega} \right)^{1/2}$$

où δ est la longueur de pénétration de l'écoulement induit. Dans nos expériences, la plus faible vitesse de rotation non nulle est de 5 rad/s, il s'ensuit que

$$\delta \simeq 6a$$

et donc, tant que la paroi est située à une distance de la particule grande devant δ , il est normal que la force induite ne soit quasiment pas influencée par cette dernière.

Enfin, pour terminer, nous devons tout de même préciser que dans ce chapitre, nous avons supposé

que l'écoulement induit horizontal était, dans cette expérience, régi par des équations de Stokes instationnaires, or nous avons vu qu'en réalité, cela n'est pas le cas. Pourtant, les résultats théorique obtenus sont en bon accord avec l'expérience. **Dans la suite, le chapitre 5 sera d'ailleurs principalement consacré à l'étude de ces effets d'inertie, en repère fixe et en repère tournant et c'est pourquoi nous n'en dirons pas davantage ici.**

3.6 Discussion

3.6.1 A propos de la différence des accélérations du fluide

Intéressons nous à la différence qu'il peut y avoir, dans le cadre de cette étude, entre les deux types d'accélérations du fluide rencontrées dans l'équation de mouvement de la particule, à savoir,

$$\left. \frac{D\vec{V}_f^0}{Dt} \right|_{\vec{X}_p} = \overline{\overline{A}}^2 \cdot \vec{X}_p \quad \text{et} \quad \frac{d\vec{V}_f^0(\vec{X}_p)}{dt} = \overline{\overline{A}} \cdot \frac{d\vec{X}_p}{dt}.$$

Compte tenu de la bonne concordance entre la théorie et les résultats expérimentaux, nous pouvons utiliser les résultats théoriques pour estimer, en fonction du temps, cette différence. Ainsi, par exemple, il est possible de montrer que

$$\frac{1}{R\omega^2} \left(\overline{\overline{A}}^2 \cdot \vec{X}_p - \overline{\overline{A}} \cdot \frac{d\vec{X}_p}{dt} \right) \cdot \vec{e}_{R_p} = |Z(t)|(\dot{\Theta}_p - 1) = O(S^{3/2})$$

ce qui implique que la composante radiale de la différence entre les deux accélérations est bien négligeable. Nous comprenons alors bien pourquoi les résultats obtenus avec l'une ou l'autre expression de la force de masse ajoutée sont quasiment similaires, mais comme déjà dit, ce résultat n'est pas surprenant dans le cadre des écoulements de Stokes.

D'un autre côté, il se trouve que la dérivée de la vitesse de l'écoulement non perturbé apparaît également dans l'expression de la force d'histoire. Nous pouvons alors nous demander si le fait de prendre l'une ou l'autre expression de l'accélération de l'écoulement modifie ou non les résultats? Toutefois, précisons tout de suite que si effectivement, en ce qui concerne l'expression de la force de masse ajoutée, la question du choix de l'accélération de la vitesse du fluide se pose au vu des résultats d'Auton (1987), il n'y a pas, en revanche, d'ambiguïté en ce qui concerne la force d'histoire. En effet, en nous inspirant d'une étude réalisée par Magnaudet *et al.* (1995), mais appliquée à la rotation solide, nous pouvons montrer ici que l'utilisation "naïve" de l'accélération

$$\left. \frac{D\vec{V}_f^0}{Dt} \right|_{\vec{X}_p} = \overline{\overline{A}}^2 \cdot \vec{X}_p \quad \text{au lieu de} \quad \frac{d\vec{V}_f^0(\vec{X}_p)}{dt} = \overline{\overline{A}} \cdot \frac{d\vec{X}_p}{dt}$$

dans l'expression de la force d'histoire peut conduire à des paradoxes. Par exemple, imaginons que la particule soit fixée arbitrairement quelque part dans l'écoulement, avec une position décentrée par rapport à l'axe de la rotation, de sorte que la coordonnée radiale R_p de la particule soit constante et non nulle. Nous avons alors

$$\left. \frac{D\vec{V}_f^0}{Dt} \right|_{\vec{X}_p} = -R_p \omega^2 \vec{e}_{R_p} \neq \vec{0}$$

et en calculant la force d'histoire avec cette expression nous obtenons un terme non nul, ce qui bien entendu n'a aucun sens physique. C'est une preuve suffisante pour se persuader que l'expression de l'accélération de l'écoulement non perturbé ne peut en aucun cas être la même que celle impliquée dans la force de masse ajoutée d'Auton. Malgré cela, regardons aussi ce qui se passe si à nouveau nous utilisons cette accélération pour obtenir l'équation de mouvement de la particule. Dans l'équation (3.5.3), seule l'expression du terme intégrodifférentiel change et devient

$$\int_0^t \frac{-\ddot{Z}(\tau) - Z(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} d\tau = 0 \quad \text{au lieu de} \quad \int_0^t \frac{-\ddot{Z}(\tau) + i\dot{Z}(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} d\tau = 0.$$

L'équation peut être intégrée analytiquement de la même manière que précédemment sauf que cette fois, le polynôme qui apparaît au dénominateur de la transformée de Laplace de $\tilde{U}$ – voir équation (3.5.5) – est

maintenant de degré 5. Cela est *a priori* un peu gênant dans la mesure où dans ce cas là, il n'existe aucune méthode qui permet de calculer analytiquement ses racines. Dans la pratique, il faut alors les obtenir numériquement mais néanmoins, il se trouve que dans ce cas aussi, le développement réalisé autour des racines évidentes obtenues lorsque $\gamma = 1$ est valable. Il est donc possible de montrer que dans ce cas là, nous avons à nouveau

$$|Z| \simeq Z_0 \exp(\lambda_r t)$$

mais avec cette fois

$$\lambda_r = 2(\gamma - 1)S - 6\sqrt{2}(\gamma - 1)S^{3/2} + O(S^2).$$

En conclusion, l'utilisation de la "mauvaise" accélération du fluide a un effet conséquent sur la valeur de la force d'histoire et notamment, son effet sur le taux de migration radiale de la particule est doublé. Autrement dit, même si la différence "instantanée" entre les deux types d'accélération de la particule est négligeable, cette différence, qui est intégrée dans la force d'histoire, peut avoir des conséquences significatives sur la prédiction des trajectoires.

3.6.2 A propos du noyau de la force d'histoire

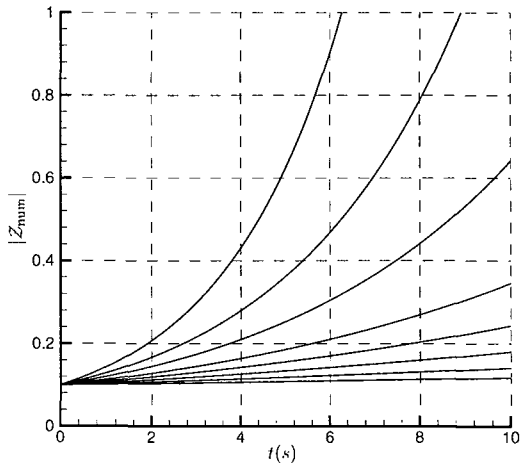


FIG. 3.17 – Résultats obtenus pour le calcul numérique de $Z(t)$ avec le noyau empirique de Mei et al. (1992). Trajectoires calculées pour $\omega = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 15, 18, 22\}$ (rad/s).

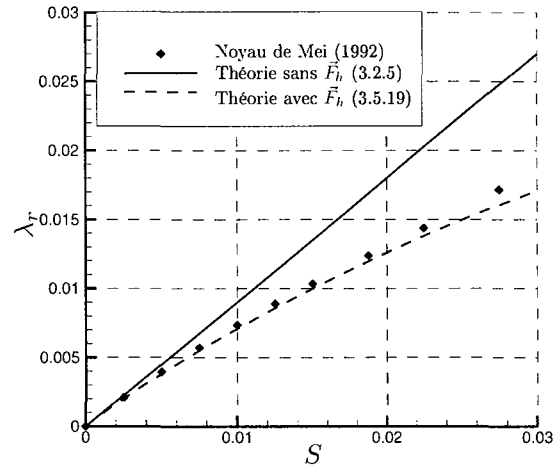


FIG. 3.18 – Comparaison entre les taux de migration avec et sans force d'histoire (noyau BBO) avec les taux de migrations obtenus numériquement (noyau de Mei et al. 1992)

Dans l'étude qui concerne le mouvement radial de la particule, nous avons supposé que tous les termes convectifs de l'équation qui régit l'écoulement induit pouvaient être négligés. En fait, nous avons vu dans la section 1.5 du chapitre 1, que le fait que les termes convectifs ne soient plus négligeables, comparativement aux termes visqueux, à une certaine distance de la particule modifiait le comportement aux "temps longs" de la force d'histoire. Pour tenter de capturer les effets des termes convectifs sur la décroissance aux temps longs de la force d'histoire, Mei et al. (1992) ont conçu un noyau empirique de la force d'histoire faisant intervenir le nombre de Reynolds de la particule. Par le biais d'une résolution numérique de l'équation de mouvement de la particule (la méthode numérique est décrite en annexe C.2), nous pouvons comparer les résultats théoriques obtenus avec le noyau classique de Boussinesq-Basset et ceux obtenus avec le noyau de Mei et al. (1992).

Dans le cadre de cette étude, il s'avère que les différences entre les résultats théoriques et les résultats numériques impliquant le noyau "temps longs" de Mei et al. (1992) sont relativement faibles. Cela n'est par *a priori* surprenant dans la mesure où le nombre de Reynolds de particule est très faible dans nos

expériences (inférieur à 0.1 pour nos particules solides) et dans ce cas, l'expression analytique du noyau de Mei *et al.* (1992) tend vers celle du noyau classique de Boussinesq-Basset.

Cependant dans notre étude, il est légitime de douter de la pertinence de l'utilisation d'un tel noyau. En effet, le noyau de Mei *et al.* (1992) a été conçu pour prendre en compte les effets d'inertie de type Oseen sur la décroissance de la force d'histoire. Dans notre étude, ces effets d'inertie sont négligeables comparativement aux effets d'inertie basés sur le nombre de Reynolds de cisaillement. Ce sont donc ces derniers qui éventuellement modifieraient le comportement aux temps longs de la force d'histoire dans nos expériences, et non ceux qui sont basés sur le nombre de Reynolds de particule. Nous reviendrons donc plus tard sur ce point.

3.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons obtenu, moyennant différentes hypothèses, l'équation de mouvement d'une particule solide dans un fluide en rotation. Nous avons vu que la vitesse terminale de la particule était affectée par des effets d'inertie et que malgré la migration radiale de la particule, les résultats de Childress (1964) pouvaient être appliqués. Par ailleurs, nous avons également vu que la vitesse terminale était affectée par des effets de paroi, et il semble que malgré la rotation du cylindre, ces effets peuvent être pris en compte à l'aide des résultats de Brenner (1964).

En ce qui concerne le mouvement horizontal de la particule, nous avons mis en évidence le rôle non négligeable de la force d'histoire, tout d'abord en calculant la solution exacte de l'équation de mouvement de la sphère, puis en recherchant une solution approchée. L'accord entre les taux de migration prédits théoriquement et ceux que nous avons mesurés à l'aide de notre dispositif expérimental est très bon, bien que les hypothèses qui ont été faites dans cette étude soient fortes.

Dans le chapitre qui suit, nous allons généraliser les résultats théoriques obtenus pour une particule solide aux cas des inclusions fluides.

Chapitre 4

Mouvement d'une inclusion fluide dans un fluide en rotation solide

4.1 Introduction et position du problème

Dans ce chapitre, nous nous proposons de généraliser aux cas des inclusions fluides les résultats obtenus pour une particule solide dans le chapitre précédent. Nous utiliserons donc autant que possible les mêmes notations que celles utilisées précédemment.

Aussi, nous écrirons que

- Les grandeurs primées, i.e. ρ'_f et μ'_f sont relatives au fluide qui compose l'inclusion.
- Nous poserons

$$\lambda = \frac{\mu_f}{\mu'_f},$$

le rapport des viscosités dynamiques et afin d'alléger les écritures, nous utiliserons également le terme

$$\mathcal{R}_\mu = \frac{3 + 2\lambda}{1 + \lambda}.$$

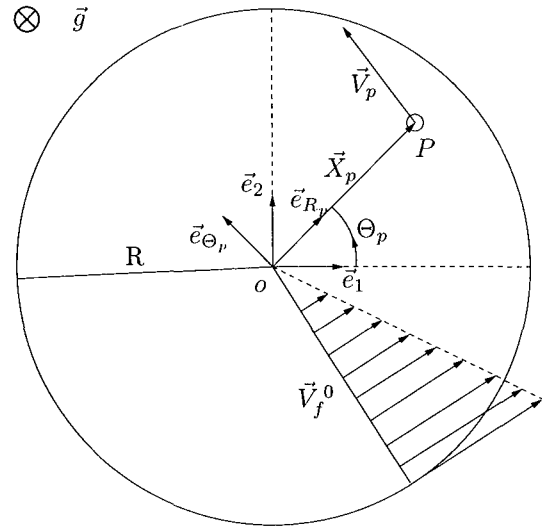


FIG. 4.1 – Schéma de l'étude

Dans la partie 2 du chapitre 1, nous avons vu que pour obtenir l'équation de mouvement d'une inclusion fluide dans un écoulement non uniforme, il était utile à nouveau d'introduire dans les équations de Navier-Stokes la décomposition de la vitesse en terme d'écoulement non perturbé et d'écoulement induit. Nous avons aussi vu que l'équation de mouvement d'une inclusion fluide est donnée sous une forme similaire à celle d'une particule solide et par conséquent, dans ce chapitre, nous chercherons à nouveau une équation de mouvement de l'inclusion du type

$$m_p \frac{d\vec{V}_p}{dt} = \vec{F}^0 + \vec{F}^1 + m_p \vec{g}, \quad (4.1.1)$$

où la force $\vec{F}^0$ est encore donnée par

$$\vec{F}^0 = m_f \overline{\overline{A}}^2 \cdot \vec{X}_p - m_f \vec{g},$$

et cela, quelle que soit la nature de l'inclusion.

En ce qui concerne la détermination de $\vec{F}^1$, il faut, en toute rigueur, résoudre le système d'équations (S2) (voir page 40 du chapitre 1) obtenu pour une inclusion fluide et qui régit l'écoulement induit interne et externe à la particule.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{w}_f^1 = 0 \quad \text{et} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{w}_f'^1 = 0, \quad (4.1.2)$$

- à l'extérieur de l'inclusion :

$$\rho_f \frac{\partial \vec{w}_f^1}{\partial t} + \rho_f (\vec{w}_f^0 \cdot \vec{\nabla}) \vec{w}_f^1 + \rho_f (\vec{w}_f^1 \cdot \vec{\nabla}) \vec{w}_f^1 + \rho_f (\vec{w}_f^1 \cdot \vec{\nabla}) \vec{w}_f^0 = -\vec{\nabla} P^1 + \mu_f \vec{\Delta} \vec{w}_f^1 \quad (4.1.3)$$

et

$$\vec{w}_f^1 \rightarrow \vec{0} \quad \text{lorsque} \quad |\vec{x}| \rightarrow \infty. \quad (4.1.4)$$

- A l'intérieur de l'inclusion :

$$\rho'_f \frac{\partial \vec{w}_f'^1}{\partial t} + \rho'_f (\vec{w}_f^0 \cdot \vec{\nabla}) \vec{w}_f'^1 + \rho'_f (\vec{w}_f'^1 \cdot \vec{\nabla}) \vec{w}_f'^1 + \rho'_f (\vec{w}_f'^1 \cdot \vec{\nabla}) \vec{w}_f^0 = -\vec{\nabla} P'^1 + \mu'_f \vec{\Delta} \vec{w}_f'^1. \quad (4.1.5)$$

- Sur le lieu de l'interface (en supposant que $\vec{\nabla}_s \sigma = 0$)

$$\vec{w}_f^1 \cdot \vec{n} = (\vec{V}_{\text{interface}} - \vec{V}_f^0) \cdot \vec{n} = \vec{w}_f'^1 \cdot \vec{n} \quad (4.1.6)$$

$$\vec{w}_f^1 \wedge \vec{n} = \vec{w}_f'^1 \wedge \vec{n} \quad (4.1.7)$$

$$\mu_f \left[\left(\vec{A} + \vec{A}^T + \vec{\nabla} \vec{w}_f^1 + (\vec{\nabla} \vec{w}_f^1)^T \right) \cdot \vec{n} \right] \wedge \vec{n} = \mu'_f \left[\left(\vec{A} + \vec{A}^T + \vec{\nabla} \vec{w}_f'^1 + (\vec{\nabla} \vec{w}_f'^1)^T \right) \cdot \vec{n} \right] \wedge \vec{n} \quad (4.1.8)$$

$$\begin{aligned} \sigma \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{n} \right) &= P'^1 - P^1 - P^0 \left(1 - \frac{\rho'_f}{\rho_f} \right) \\ &+ \mu_f \left[\left(\vec{A} + \vec{A}^T + \vec{\nabla} \vec{w}_f^1 + (\vec{\nabla} \vec{w}_f^1)^T \right) \cdot \vec{n} \right] \cdot \vec{n} \\ &- \mu'_f \left[\left(\vec{A} + \vec{A}^T + \vec{\nabla} \vec{w}_f'^1 + (\vec{\nabla} \vec{w}_f'^1)^T \right) \cdot \vec{n} \right] \cdot \vec{n} \end{aligned} \quad (4.1.9)$$

Bien entendu, lorsque le système d'équations (S2) est écrit sous sa forme générale, il est bien trop complexe pour pouvoir être résolu analytiquement et il nous faudra donc à nouveau faire des hypothèses simplificatrices. Pour la plupart d'entre elles, celles-ci seront semblables à celles que nous avons faites pour les particules solides (chapitre 3).

Mais avant cela, nous allons premièrement négliger les déformations de l'inclusion fluide. En ce qui concerne les déformations liées au mouvement vertical de l'inclusion, il nous suffira de dire qu'en première approximation, la vitesse terminale de l'inclusion est proche de la vitesse terminale d'Hadamard (1911) et Rybczynski (1911) et au quel cas, la sphéricité de l'inclusion ne dépend quasiment que du fait que le nombre de Reynolds de particule est, dans cette étude, petit devant l'unité (voir la discussion proposée page 44 du chapitre 1). En revanche, pour pouvoir négliger la déformation de l'interface liée au mouvement de l'inclusion dans le plan horizontal, il faut que dans nos expériences, le nombre capillaire

$$\text{Ca} = \frac{\mu_f |\vec{V}_g|}{\sigma},$$

soit petit devant 1. Nous reviendrons plus tard sur ce point mais pour l'instant, nous allons supposer que cette condition est bien satisfaite, et par conséquent l'équation (4.1.9) sera considérée dans la suite comme étant toujours vérifiée. Par ailleurs, le fait de supposer que l'inclusion est sphérique impliquera également que dans cette étude : $\vec{n} \simeq \vec{e}_r$, et dans l'équation (4.1.6), nous aurons

$$\vec{V}_{\text{interface}} = \vec{V}_p(t),$$

et cela va nous permettre de simplifier l'écriture des conditions limites de (S2). En introduisant l'écriture tensorielle déjà utilisée lors du chapitre précédent, la vitesse de l'écoulement non perturbé s'écrit, sur le

lieu de l'interface (i.e. quand $|\vec{x}| = a$):

$$\vec{V}_f^0 = \vec{\bar{A}} \cdot \vec{X}_p(t) + \vec{\bar{A}} \cdot (a \vec{e}_r),$$

et en remarquant que dans le cadre de la rotation solide,

$$\left(\vec{\bar{A}} \cdot (a \vec{e}_r) \right) \cdot \vec{e}_r = 0,$$

alors l'équation (4.1.6) de (S2) devient ici

$$\vec{w}_f^1 \cdot \vec{e}_r = \left(V_T \vec{e}_3 - \vec{\bar{P}}_H \cdot \vec{V}_g(t) \right) \cdot \vec{e}_r = \vec{w}_f'^1 \cdot \vec{e}_r.$$

Ensuite, rappelons nous que dans le cadre de la rotation solide, le tenseur $\vec{\bar{A}}$ est antisymétrique, et le fait que

$$\vec{\bar{A}} + \vec{\bar{A}}^T = 0$$

simplifie également la condition de continuité des contraintes tangentielles.

A présent, nous nous intéressons aux simplifications qui seront faites sur les équations qui régissent les écoulements à l'intérieur et à l'extérieur de l'inclusion. Tout d'abord, et comme nous l'avons fait pour les particule solides, nous allons écrire que puisque le nombre de Reynolds de particule est petit dans cette étude, nous pouvons négliger dans l'équation (4.1.3) les termes quadratiques: $(\vec{w}_f^1 \cdot \vec{\nabla}) \vec{w}_f^1$. Ensuite, nous allons négliger l'ensemble des termes convectifs présents à l'intérieur de l'inclusion, c'est à dire dans l'équation (4.1.5). En toute rigueur, pour pouvoir faire cette dernière hypothèse, il faut que les deux nombres

$$Re' = \frac{a V_g}{\nu_f'} \quad \text{et} \quad \eta' = \frac{a^2 \omega}{\nu_f'}$$

soient tous les deux petits devant l'unité. Dans nos expériences, cette condition ne sera pas toujours satisfaite¹, mais puisque l'intérieur de la goutte constitue un milieu confiné, nous supposons malgré tout que cela n'a pas trop de conséquence sur les résultats que nous obtiendrons.

Finalement donc, avec les hypothèses simplificatrices que nous venons de détailler, nous obtenons que dans le cadre de cette étude, le système d'équations (S2) est le suivant:

$$(S2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{\nabla} \cdot \vec{w}_f^1 = 0 \quad \text{et} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{w}_f'^1 = 0, \quad (4.1.10) \\ \bullet \text{ à l'extérieur de l'inclusion} \\ \frac{\partial \vec{w}_f^1}{\partial t} + \left((\vec{\bar{P}}_H \cdot \vec{V}_g(t) - V_T \vec{e}_3) \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{w}_f^1 + \left((\vec{\bar{A}} \cdot \vec{x}) \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{w}_f^1 + \vec{\bar{A}} \cdot \vec{w}_f^1 = -\frac{1}{\rho_f} \vec{\nabla} P^1 + \nu_f \vec{\Delta} \vec{w}_f^1 \quad (4.1.11) \\ \text{et} \\ \vec{w}_f^1 \rightarrow \vec{0} \quad \text{lorsque} \quad |\vec{x}| \rightarrow \infty. \quad (4.1.12) \\ \bullet \text{ A l'intérieur de l'inclusion} \\ \frac{\partial \vec{w}_f'^1}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_f'} \vec{\nabla} P'^1 + \nu_f' \vec{\Delta} \vec{w}_f'^1. \quad (4.1.13) \\ \bullet \text{ Sur le lieu de l'interface (i.e } |\vec{x}| = a) \\ \vec{w}_f^1 \cdot \vec{e}_r = \left(V_T \vec{e}_3 - \vec{\bar{P}}_H \cdot \vec{V}_g(t) \right) \cdot \vec{e}_r = \vec{w}_f'^1 \cdot \vec{e}_r \quad (4.1.14) \\ \vec{w}_f^1 \wedge \vec{n} = \vec{w}_f'^1 \wedge \vec{n} \quad (4.1.15) \\ \mu_f \left[\left(\vec{\nabla} \vec{w}_f^1 + (\vec{\nabla} \vec{w}_f^1)^T \right) \cdot \vec{n} \right] \wedge \vec{n} = \mu_f' \left[\left(\vec{\nabla} \vec{w}_f'^1 + (\vec{\nabla} \vec{w}_f'^1)^T \right) \cdot \vec{n} \right] \wedge \vec{n} \quad (4.1.16) \\ \text{Equation de saut de quantité de mouvement (4.1.9) supposée vérifiée.} \end{array} \right.$$

1. il arrivera parfois que Re' et η' soient d'ordre $O(1)$

Proposition de décomposition des vitesses $\vec{w}_f^1$ et $\vec{w}_f'^1$

Afin d'obtenir l'équation de mouvement d'une inclusion fluide, nous allons à nouveau décomposer cette étude en deux sous problèmes, l'un stationnaire et l'autre instationnaire, ce qu'il est à nouveau possible de faire puisque les équations considérées ici ont été linéarisées. Ainsi, nous allons rechercher la force exercée par l'écoulement induit sur la particule en décomposant la vitesse et la pression de l'écoulement à l'extérieur de l'inclusion :

$$\vec{w}_f^1 = \vec{w}_f^{1a} + \vec{w}_f^{1b} \quad \text{et} \quad P^1 = P^{1a} + P^{1b},$$

mais aussi à l'intérieur de l'inclusion :

$$\vec{w}_f'^1 = \vec{w}_f'^{1a} + \vec{w}_f'^{1b} \quad \text{et} \quad P'^1 = P'^{1a} + P'^{1b}.$$

Bien entendu, nous allons ensuite supposer que les champs de vitesses $\vec{w}_f^{1a}$ et $\vec{w}_f^{1b}$ vérifient tous deux la condition limite (4.1.12). De même, nous supposons que les champs de vitesses $\vec{w}_f'^{1a}$ et $\vec{w}_f'^{1b}$ sont tous deux solutions de l'équation (4.1.13), et en ce qui concerne les conditions à l'interface de l'inclusion, il nous reste à poser :

$$\text{Conditions limites (a)} \left\{ \begin{array}{l} \vec{w}_f^{1a} \cdot \vec{e}_r = V_T \vec{e}_3 \cdot \vec{e}_r = \vec{w}_f'^{1a} \cdot \vec{e}_r \\ \vec{w}_f^{1a} \wedge \vec{n} = \vec{w}_f'^{1a} \wedge \vec{n} \\ \mu_f \left[\left(\nabla \vec{w}_f^{1a} + (\nabla \vec{w}_f^{1a})^T \right) \cdot \vec{n} \right] \wedge \vec{n} = \mu_f' \left[\left(\nabla \vec{w}_f'^{1a} + (\nabla \vec{w}_f'^{1a})^T \right) \cdot \vec{n} \right] \wedge \vec{n}, \end{array} \right.$$

et

$$\text{Conditions limites (b)} \left\{ \begin{array}{l} \vec{w}_f^{1b} \cdot \vec{e}_r = - \left(\vec{P}_H \cdot \vec{V}_g(t) \right) \cdot \vec{e}_r = \vec{w}_f'^{1b} \cdot \vec{e}_r \\ \vec{w}_f^{1b} \wedge \vec{n} = \vec{w}_f'^{1b} \wedge \vec{n} \\ \mu_f \left[\left(\nabla \vec{w}_f^{1b} + (\nabla \vec{w}_f^{1b})^T \right) \cdot \vec{n} \right] \wedge \vec{n} = \mu_f' \left[\left(\nabla \vec{w}_f'^{1b} + (\nabla \vec{w}_f'^{1b})^T \right) \cdot \vec{n} \right] \wedge \vec{n}. \end{array} \right.$$

Ainsi, il apparaît que comme pour une particule solide, l'équation de mouvement d'une inclusion fluide pourra être obtenue après résolution de deux sous problèmes indépendants, l'un se rapportant à des conditions limites (a) purement stationnaires, et l'autre à des conditions limites (b) instationnaires.

4.2 Mouvement de l'inclusion dans le cadre de la théorie des écoulements rampants stationnaires

De même que nous l'avons fait pour une particule solide et dans le but de pouvoir estimer les ordres de grandeur des différents termes impliqués dans l'équation (4.1.11), il est intéressant de résoudre ce problème dans le cadre de la théorie des écoulements rampants stationnaires. Dans une telle situation, il est assez immédiat, de montrer que la force induite est donnée simplement par la traînée d'Hadamard (1911) et Rybczynski (1911), et nous aurons alors

$$\vec{F}^1 \simeq 2\pi\mu a \mathcal{R}_\mu \left(\vec{P}_H \cdot \vec{V}_g - V_T \vec{e}_3 \right).$$

La résolution de l'équation de mouvement de la particule (4.1.1) qui implique cette force induite, est encore une fois triviale et peut se faire en employant exactement le même formalisme que celui de la section 3.2 du chapitre 3. Nous obtenons alors que dans le cadre des écoulements rampants stationnaires, la vitesse terminale de l'inclusion fluide peut s'écrire

$$V_T^{\text{Hadamard}} = \frac{2a^2(1-\gamma)g}{3\nu_f \mathcal{R}_\mu},$$

et en ce qui concerne le mouvement de l'inclusion dans le plan horizontal, nous avons :

$$\mathcal{Z}(t) \simeq \mathcal{Z}_0 \exp(\lambda_r^0 t) \exp(i \lambda_i^0 t) ,$$

avec

$$\lambda_r^0 = \frac{6}{\mathcal{R}_\mu} S (\gamma - 1) + O(S^3) , \quad (4.2.1)$$

et

$$\lambda_i^0 = 1 + O(S^2) . \quad (4.2.2)$$

En particulier, pour une inclusion gazeuse, nous aurons $\gamma \simeq 0$ et $\mathcal{R}_\mu \simeq 2$, et par conséquent

$$V_T^{\text{Hadamard}} \simeq \frac{a^2 g}{3 \nu_f} ,$$

et

$$\lambda_r^0 \simeq -3 S + O(S^3) .$$

De plus, au regard de l'équation (4.2.2), il apparaît que quelle que soit la nature de l'inclusion (fluide ou solide), la vitesse de rotation $\dot{\Theta}_p$ d'une particule immergée dans un écoulement en rotation solide est quasiment confondue avec la vitesse de rotation du cylindre. De ce fait, nous pourrions à nouveau écrire, dans la suite de cette étude, que la vitesse de glissement de l'inclusion dans le plan horizontal est quasiment confondue avec sa vitesse radiale, de sorte que

$$\overline{\vec{P}}_H \cdot \vec{V}_g(t) \simeq -\dot{R}_p(t) \vec{e}_{R_p} .$$

A l'aide de ce résultat, nous pouvons voir que dans le cadre de nos expériences réalisées avec des bulles d'air, et puisque dans ce cas nous avons

$$\sigma_{\text{air/huile}} \approx 20 \cdot 10^{-3} \text{N/m}$$

et

$$\mu_f \approx 2 \cdot 10^{-1} \text{ Pa.s}$$

alors dans les plus mauvais des cas, nous aurons :

$$\max(\text{Ca}) = \max\left(\frac{\mu_f |\overline{\vec{P}}_H \cdot \vec{V}_g|}{\sigma_{\text{air/huile}}}\right) \lesssim 0.1 .$$

Compte tenu de cela, nous considérerons que les bulles impliquées dans nos expériences sont bien sphériques. Notons simplement, en ce qui concerne nos inclusions liquides, que le rapport des densités γ est dans ce cas là tellement proche de 1 que les vitesses radiales qui sont observées sont très petites comparativement à celles d'une inclusion gazeuse. En estimant l'ordre de grandeur du coefficient de tension superficielle entre l'eau et l'huile (voir page 59 du chapitre 2) il apparaît que pour nos inclusions liquides, le nombre capillaire Ca est toujours très petit devant l'unité.

Enfin, en calculant le rapport entre la vitesse horizontale et la vitesse terminale d'une inclusion fluide, nous retrouvons alors exactement le même résultat que celui que nous avons obtenu pour une particule solide, à savoir que

$$\frac{|\overline{\vec{P}}_H \cdot \vec{V}_g(t)|}{V_T^{\text{Hadamard}}} \simeq \frac{R_p(t) \omega^2}{g} \lesssim \text{Fr} ,$$

et cela quelle que soit la valeur de $\mathcal{R}_\mu$. En fait ce résultat n'est pas vraiment surprenant puisque $R_p(t) \omega^2$ et g sont respectivement les "moteurs" du mouvement radial et du mouvement vertical de l'inclusion. Aussi, nous voyons que l'ensemble des conclusions qui ont été faites lors de la pré-étude et qui concernaient une particule solide restent valables pour une inclusion fluide.

Discussion sur le mouvement du fluide à l'intérieur de l'inclusion

Pour une particule solide, nous avons écrit que l'écoulement lié à la rotation propre de la sphère pouvait être traité séparément du problème lié son mouvement de translation. Par ailleurs, nous avons aussi écrit que la rotation, si elle avait été prise en compte, aurait été sans conséquence sur l'expression de la force induite, du moins dans le cadre des écoulements rampants. Nous allons à présent, et juste pour information, nous intéresser à ce qu'il en est de la rotation lorsque la particule impliquée est une inclusion fluide. En fait, plus précisément, cela revient à nous intéresser à la partie de la solution des équations de Stokes stationnaires de ce problème qui vérifie la condition

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \vec{w}_f^1 \wedge \vec{e}_r = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \vec{w}_f'^1 \wedge \vec{e}_r = \left(-\vec{\bar{A}} \cdot (a \vec{e}_r) + \Omega_p \vec{e}_3 \wedge a \vec{e}_r \right) \wedge \vec{e}_r,$$

où Ω_p correspond alors à la vitesse de rotation propre qu'adopterait une particule solide dans cet écoulement afin d'annuler le couple qu'elle subit.

Appelons w_f^{1p} (respectivement $w_f'^{1p}$) cette *partie* de l'écoulement externe (respectivement interne). Pour pouvoir calculer cet écoulement, nous allons tout d'abord remarquer que dans la base sphérique, nous avons

$$-\vec{\bar{A}} \cdot (a \vec{e}_r) \wedge \vec{e}_r = -a \omega \sin \theta \vec{e}_\phi$$

et que par conséquent, la partie de la solution que l'on recherche doit vérifier, sur la particule,

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \vec{w}_f^{1p} \wedge \vec{e}_r = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \vec{w}_f'^{1p} \wedge \vec{e}_r = -a (\omega - \Omega_p) \sin \theta \vec{e}_\phi.$$

En appliquant la méthode de projection de Brenner généralisée aux cas des inclusions fluides (la méthode est décrite en annexe A.1) nous sommes donc amenés à écrire que l'écoulement induit généré par une inclusion fluide dont le rapport des viscosités λ est quelconque, doit être de la forme

$$\vec{w}_f^{1p} = A \sin \theta \vec{e}_\phi,$$

où la constante A , qui dépend éventuellement de λ , doit maintenant être déterminée. Dans ce cas là, il immédiat de montrer que seules les harmoniques surfaciques non nulles sont :

$$\chi_1 = \frac{r}{a} A \cos \theta \quad \text{et} \quad \chi_{-2} = \frac{a^2}{r^2} A \cos \theta$$

et par conséquent, les écoulements externes et internes qui en résultent sont :

$$\vec{w}_f^{1p} = \frac{a^2}{r^2} A \sin \theta \vec{e}_\phi,$$

et

$$\vec{w}_f'^{1p} = \frac{r}{a} A \sin \theta \vec{e}_\phi.$$

Or avec cette solution, il est alors possible de montrer que la seule valeur de A qui satisfasse la continuité des contraintes tangentielles est

$$A = 0,$$

ce qui signifie que dans notre étude, la condition de continuité des contraintes tangentielles à l'interface de l'inclusion fluide n'est vérifiée que si le fluide qui compose l'inclusion possède un mouvement de rotation solide propre tel que dans le référentiel de Koenig, nous avons :

$$\Omega_p \vec{e}_3 = \omega \vec{e}_3.$$

Enfin, notons simplement pour conclure que si nous avons traité le problème entier dans le cadre des écoulements rampants stationnaires, les conditions limites liées à l'écoulement uniforme

$$V_T \vec{e}_3 - \vec{\bar{P}}_H \cdot \vec{V}_g(t)$$

nous auraient conduit simplement à des cellules de recirculation à l'intérieur de l'inclusion (voir la solution d'Hadamard (1911) et Rybczynski (1911) donnée page 43 du chapitre 1) mais nous ne les détaillerons pas davantage ici.

4.3 Mouvement de l'inclusion avec prise en compte de l'inertie et de l'instationnarité de l'écoulement induit

Mis à part le fait que les conditions limites soient différentes pour une inclusion fluide et pour une inclusion solide, la démarche adoptée dans cette partie pour obtenir l'équation de mouvement d'une inclusion fluide dans un fluide en rotation solide est identique à celle d'une particule solide. Afin de ne pas alourdir inutilement cette section, nous ne reprendrons donc pas les calculs, mais de manière générale, nous nous référerons à ce qui a été fait dans le chapitre 3.

4.3.1 Premier sous problème (stationnaire)

A présent, nous nous intéressons à l'expression de la force exercée par la partie de l'écoulement externe qui vérifie les conditions limites stationnaires (a) de (S2) exposées page 104. Dans ce sous problème, les simplifications qui peuvent être apportées aux équations qui régissent l'écoulement externe sont identiques à celles que nous avons faites dans la section 3.3.1 (chapitre 3). De ce fait, en négligeant les termes

$$\frac{\partial \bar{w}_f^{1a}}{\partial t} \quad \text{et} \quad \left((\bar{\bar{P}}_H \cdot \bar{V}_g(t)) \cdot \bar{\nabla} \right) \bar{w}_f^{1a}$$

dans l'équation (4.1.11), cette étude pourra à nouveau se réduire à un problème qui sera considéré stationnaire.

Dans ce contexte, le calcul réalisé par Childress (1964) pour prendre en compte les effets d'inertie sur la force de traînée verticale exercée par le fluide sur une particule solide, peut se généraliser aux cas des inclusions fluides selon la remarque de Legendre et Magnaudet (1997) (voir également la partie 1.10, page 49 du chapitre 1). La force subie par l'inclusion fluide s'écrira alors :

$$\bar{F}^{1a} = -2\pi\mu_f a \mathcal{R}_\mu V_T \left(1 + \frac{\mathcal{R}_\mu}{3} Re_T \mathcal{B}(\alpha) \right) \bar{e}_3, \quad (4.3.1)$$

où la fonction $\mathcal{B}(\alpha)$ est donnée par l'équation (3.3.7) du chapitre 3 (voir aussi page 28 du chapitre 1 pour plus de détails).

4.3.2 Second sous problème (instationnaire)

Regardons maintenant les équations qui régissent l'écoulement à l'extérieur de l'inclusion, et qui vérifient les conditions limites instationnaires (b) de (S2) exposées page 104. Dans la pré-étude (section 4.2), nous avons vu que quelle que soit la nature de l'inclusion, la vitesse de glissement de la particule dans le plan horizontal est quasiment confondue avec sa vitesse radiale. En s'appuyant sur ce point, il est donc possible de montrer que la condition limite vérifiée par l'écoulement induit correspond à nouveau à une condition limite instationnaire de type harmonique dans le référentiel $\mathcal{R}_p$ dont les axes sont fixes par rapport à $\mathcal{R}_0$. Par la même raison que celle exposée dans le chapitre 3, c'est à dire, pour tester la validité de l'équation de mouvement de type BBO (Boussinesq-Basset-Oseen) nous allons négliger la contribution des termes convectifs. En d'autres termes, nous allons négliger les termes

$$\left((\bar{\bar{P}}_H \cdot \bar{V}_g(t) - V_T \bar{e}_3) \cdot \bar{\nabla} \right) \bar{w}_f^{1b}, \quad \left((\bar{\bar{A}} \cdot \bar{x}) \cdot \bar{\nabla} \right) \bar{w}_f^{1b} \quad \text{et} \quad \bar{\bar{A}} \cdot \bar{w}_f^{1b}$$

dans l'équation (4.1.11). Dans le cadre de cette étude, l'expression de la force induite qui s'exerce sur la particule sera donc donnée (voir section 1.9, page 46 du chapitre 1) par :

$$\left\| \bar{F}^{1b} = 2\pi\mu_f a \mathcal{R}_\mu \bar{\bar{P}}_H \cdot \bar{V}_g(t) + \frac{1}{2} m_f \frac{d\bar{\bar{P}}_H \cdot \bar{V}_g(t)}{dt} + 2\pi\mu_f a \mathcal{R}_\mu \int_{-\infty}^t K(t-\tau) \frac{d\bar{\bar{P}}_H \cdot \bar{V}_g(\tau)}{d\tau} d\tau \right.$$

Rappelons que dans $\bar{F}^{1b}$, l'expression temporelle du noyau $K(t)$ impliqué dans le terme intégral différentiel n'est déterminée que lorsque le rapport des viscosités dynamiques des fluides externe et interne à l'inclusion (i.e. λ) tend soit vers 0 (particule solide), soit vers l'infini (inclusion gazeuse ou liquide mais avec une très faible viscosité comparativement à celle du fluide externe).

Dans la suite, afin de mettre en évidence le rôle de ce terme intégrodifférentiel dans la dynamique de la particule, et aussi dans le but d'introduire une écriture unique pour traiter simultanément le cas d'une particule solide et d'une inclusion faiblement visqueuse, nous écrirons ce noyau sous la forme

$$K(t) = C_h \mathcal{K} \left(\frac{9\nu_f(t-\tau)}{a^2} \right) .$$

Ainsi, l'expression de la force qui s'applique sur la particule sera réécrite de la manière suivante :

$$\vec{F}^{1b} = \frac{1}{2} m_f \frac{d\vec{\bar{P}}_H \cdot \vec{V}_g(t)}{dt} + 2\pi\mu_f a \mathcal{R}_\mu \left(\vec{\bar{P}}_H \cdot \vec{V}_g(t) + C_h \int_0^t \frac{d\vec{\bar{P}}_H \cdot \vec{V}_g(\tau)}{d\tau} \mathcal{K} \left(\frac{9\nu_f(t-\tau)}{a^2} \right) d\tau \right) . \quad (4.3.2)$$

Pour une particule solide, nous poserons

$$C_h = \frac{3}{\sqrt{\pi}} \quad \text{et} \quad \mathcal{K} \left(\frac{9\nu_f t}{a^2} \right) = \frac{a}{\sqrt{9\nu_f t}} ,$$

et pour une inclusion fluide (telle que $\lambda \rightarrow \infty$) :

$$C_h = 2 \quad \text{et} \quad \mathcal{K} \left(\frac{9\nu_f t}{a^2} \right) = \exp \left(\frac{9\nu_f t}{a^2} \right) \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{9\nu_f t}{a^2}} \right) .$$

Dans la suite, nous considérerons (voir section 2.4 du chapitre 2) que la condition $\lambda \rightarrow \infty$ est vérifiée pour nos inclusions gazeuses ainsi que pour nos inclusions liquides.

4.3.3 Equation de mouvement généralisée

Dans le cadre de nos hypothèses, l'équation de mouvement, généralisée aux inclusions fluides, dans un écoulement en rotation solide sera donnée par

$$m_p \frac{d\vec{V}_p}{dt} = m_f \vec{\bar{A}}^2 \cdot \vec{X} + \vec{F}^{1a} + \vec{F}^{1b} + (m_p - m_f) \vec{g} , \quad (4.3.3)$$

où les forces $\vec{F}^{1a}$ et $\vec{F}^{1b}$ sont données respectivement par les équations et (4.3.1) et (4.3.2). L'équation de mouvement obtenue est récapitulée dans le tableau 4.1.

4.4 Vitesse terminale d'une inclusion fluide

Dans cette section, nous nous intéressons maintenant à la vitesse terminale de nos inclusions fluides. En projetant l'équation de mouvement de la particule (4.3.3) suivant $\vec{e}_3$, et sachant que dans cette direction, la particule n'admet aucune accélération, nous avons alors

$$\vec{F}^{1a} \cdot \vec{e}_3 + (m_p - m_f) \vec{g} \cdot \vec{e}_3 = 0 .$$

A nouveau, dans nos expériences, nous serons toujours dans une situation où le paramètre α , s'il n'est pas nul, est suffisamment grand pour que nous puissions écrire que

$$\mathcal{B}(\alpha) \simeq \frac{12 S^{1/2}}{7 Re_T} .$$

Ainsi, la vitesse terminale théorique de notre inclusion fluide est donnée par

$$\left. \begin{array}{l} \text{Vitesse terminale} \\ \text{théorique} \\ \text{pour } \alpha \gg 1 \end{array} \right\| \quad V_T = \frac{2 a^2 (1 - \gamma) g}{3 \nu_f \mathcal{R}_\mu \left(1 + (4/7) \mathcal{R}_\mu S^{1/2} \right)} = \frac{V_T^{\text{Hadamard}}}{1 + (4/7) \mathcal{R}_\mu S^{1/2}} , \quad (4.4.1)$$

sachant que cette relation n'est valable *a priori* que pour une particule évoluant dans un milieu infini. Nous allons maintenant confronter ce résultat théorique à nos expériences.

$$\begin{aligned}
m_p \frac{d\vec{V}_p}{dt} &= m_f \vec{\bar{A}}^2 \cdot \vec{X} && \dots \text{ Gradient de pression} \\
&+ (m_p - m_f) \vec{g} && \dots \text{ Flottabilité} \\
&- 2\pi\mu_f a \mathcal{R}_\mu V_T \left(1 + \frac{\mathcal{R}_\mu Re_T}{3} \mathcal{B}(\alpha)\right) \vec{e}_3 && \dots \text{ Traînée de Childress} \\
&&& \text{généralisée} \\
&+ 2\pi\mu_f a \mathcal{R}_\mu \vec{\bar{P}}_H \cdot \vec{V}_g(t) && \dots \text{ Traînée horizontale} \\
&+ \frac{1}{2} m_f \frac{d\vec{\bar{P}}_H \cdot \vec{V}_g(t)}{dt} && \dots \text{ Masse ajoutée} \\
&+ 2\pi\mu_f a \mathcal{R}_\mu C_h \int_{-\infty}^t \frac{d\vec{\bar{P}}_H \cdot \vec{V}_g(\tau)}{d\tau} \mathcal{K}\left(\frac{9\nu_f(t-\tau)}{a^2}\right) d\tau && \dots \text{ Force d'histoire}
\end{aligned}$$

- Inclusion solide : $C_h = \frac{3}{\sqrt{\pi}}$ et $\mathcal{K}(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$
 - Inclusion fluide : $C_h = 2$ et $\mathcal{K}(t) = \exp(t)\text{erfc}(\sqrt{t})$ si $\lambda \rightarrow \infty$
-

avec $Re_T = \frac{a V_T}{\nu_f}$, $A_{12} = -A_{21} = -\omega$ et $\alpha = 2 \frac{a^2 \omega / \nu_f}{Re_T^2}$.

Notons que

$$Re_T \mathcal{B}(\alpha) \rightarrow \frac{4}{7} \left(\frac{a^2 \omega}{\nu_f}\right)^{1/2} \quad \text{si } (\alpha \gg 1)$$

et

$$Re_T \mathcal{B}(\alpha) \rightarrow \frac{3 Re_T}{8} \quad \text{si } (\alpha \ll 1).$$

TAB. 4.1 – *Récapitulatif des résultats analytiques obtenus pour une inclusion fluide*

Résultats obtenus pour une inclusion gazeuse

Dans les expériences réalisées avec des inclusions gazeuses, il est important de préciser que contrairement aux particules solides, chaque expérience n'implique qu'une seule bulle. En effet, cette dernière est perdue lorsqu'elle sort de la zone de mesure. Aussi, et malgré le fait que nos bulles soient produites avec une faible dispersion radiale Δa , la sensibilité de la vitesse terminale à cette variation de rayon est telle qu'il nous est impossible d'établir un graphe semblable à celui de la figure 3.5 (page 81 du chapitre 3). En outre, pour les particules solides, nous nous étions intéressés à la grandeur V_T/V_T^{Stokes} , mais également à la grandeur V_T/V_T^0 où V_T^0 correspond à la vitesse terminale de la particule mesurée au centre de la conduite lorsque le cylindre ne tourne pas. Pour les bulles, et à cause de ce que nous avons écrit au début de ce paragraphe, seuls les points expérimentaux qui correspondent à $V_T/V_T^{\text{Hadamard}}$ peuvent être comparés à la théorie (4.4.1). (Précisons que pour une bulle, et dans l'équation (4.4.1), il faut poser $\mathcal{R}_\mu = 2$.)

Pour s'assurer du découplage entre la vitesse verticale de la bulle et sa vitesse radiale, les figures 4.2 et 4.3 montrent l'évolution temporelle des coordonnées axiale et radiale d'une bulle au cours d'une expérience représentative de l'ensemble de nos investigations expérimentales. Malgré la migration radiale de la bulle,

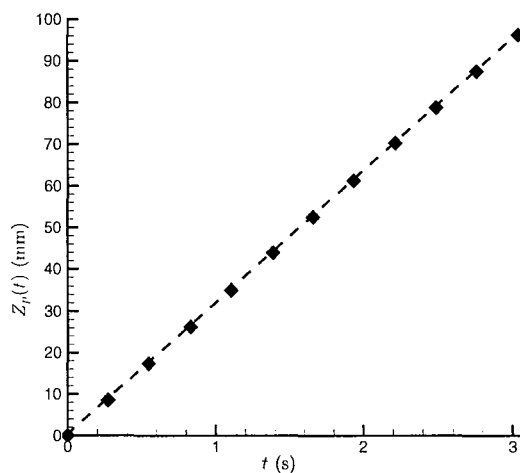


FIG. 4.2 - Evolution de la coordonnée axiale d'une bulle au cours d'une expérience caractéristique ($a = 1.4$ mm et $\omega = 22$ rad/s).

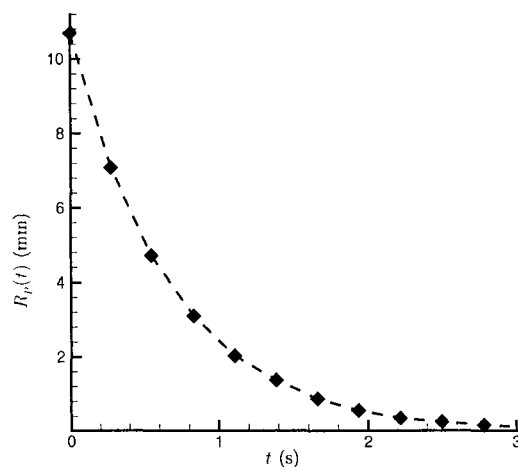


FIG. 4.3 - Evolution de la coordonnée radiale de la bulle au cours de la même expérience ($a = 1.4$ mm et $\omega = 22$ rad/s).

il apparaît bien que sa vitesse terminale ne change pas puisque nous obtenons, pour l'évolution de $Z_p(t)$ une droite. Ainsi, l'hypothèse qui a été faite à propos de la vitesse terminale au début de ce chapitre (à savoir que celle-ci était stationnaire) est bien vérifiée expérimentalement. (Rappelons au passage que c'est d'ailleurs en calculant la pente des droites ainsi obtenues pour $Z_p(t)$ que nous mesurons la vitesse terminale de nos bulles.)

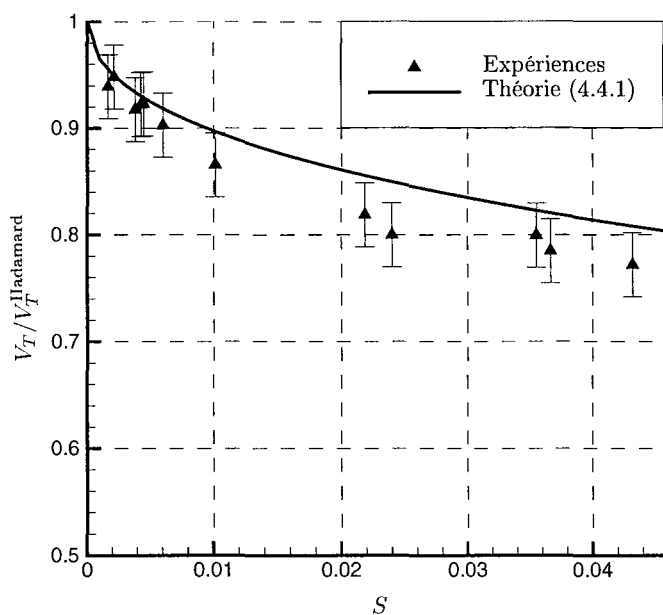


FIG. 4.4 - Évolution de la vitesse terminale d'une bulle en fonction du nombre S . Dans l'équation (4.4.1), nous avons posé $\mathcal{R}_\mu = 2$.

Sur la figure 4.4 nous nous intéressons maintenant à l'évolution de la vitesse terminale lorsque le nombre de Stokes S varie. En analysant ces résultats, nous pouvons faire le même constat que celui que nous avons fait pour les particules solides, à savoir tout d'abord, que la tendance générale de l'évolution de la vitesse terminale mesurée pour nos inclusions gazeuses lorsque S augmente correspond bien à la théorie puisque nous retrouvons bien une décroissance en $1/(1 + S^{1/2})$, mais nous constatons à nouveau que nos points expérimentaux sont en dessous de la courbe théorique.

Discussion sur les effets de paroi

La différence entre nos points expérimentaux et la courbe théorique est certainement un effet de paroi semblable à celui que nous avons constaté pour les particules solides. Toutefois, l'écart maximal constaté entre nos points expérimentaux et la théorie pour une inclusion gazeuse n'est que de 5 %, contre 10 % pour nos particules solides. Cela semble donc montrer que les effets de paroi sont légèrement plus faible pour une inclusion gazeuse que pour une particule solide. En fait, cette assertion peut même être démontrée, en cas d'absence de rotation et en dans le cadres des écoulements rampants stationnaires, en reprenant les calculs de Happel et Brenner (1983) et en les généralisant aux cas des inclusions fluides. Pour cela, il faut remarquer que pour pouvoir calculer l'influence des parois sur la vitesse terminale d'une particule solide qui sédimente dans une conduite cylindrique, Brenner a employé la méthode des "réflexions" (la méthode est détaillée en annexe A.8). Dans cette approche, il faut, à un moment, calculer la vitesse $\vec{w}_1$ qui annule à la paroi du cylindre, l'écoulement de Stokes $\vec{w}_0$ produit par la sphère solide. Étant donné que l'écoulement produit par une inclusion fluide est proportionnel en intensité à celui d'une particule solide (avec un facteur $\mathcal{R}_\mu/3$) aussitôt que les termes en a^3/r^3 de la solution de Stokes peuvent être négligés devant les termes en a/r , alors, le calcul de l'écoulement qui annule à la paroi l'écoulement produit par une inclusion fluide sera proportionnel à celui correspondant à une particule solide et avec le même facteur $\mathcal{R}_\mu/3$ (le problème est linéaire). Tous calculs faits, nous voyons que la force qui s'exerce alors sur une particule fluide qui sédimente parallèlement aux parois dans une conduite cylindrique est alors donnée par

$$\vec{F}^1 = 2\pi\mu_f a \mathcal{R}_\mu V_T \left(1 + \frac{\mathcal{R}_\mu}{3} \left(\frac{a}{R} \right) f \left(\frac{R_p}{R} \right) \right),$$

où R est le rayon de la conduite, R_p la distance de la particule à l'axe du cylindre, et $f(R_p/R)$ la fonction calculée par Brenner (1964), qui vaut $f(R_p/R) \approx 2.1$ dans pratiquement toute la section, sauf au proche voisinage des parois (pour plus de détails, voir la section 1.6.1, page 34 du chapitre 1). Ainsi, nous pouvons voir que parce que la méthode des réflexions employée par Brenner implique l'écoulement de Stokes lointain, le calcul des effets de paroi se généralise de la même manière aux inclusions fluides que se généralise le calcul des effets d'inertie (voir Legendre et Magnaudet, 1997). Après avoir fait cette remarque, et étant donné que la taille caractéristique de nos bulles est de l'ordre de $a \approx 1.5$ mm, nous avons, dans nos expériences,

$$\frac{\mathcal{R}_\mu}{3} \left(\frac{a}{R} \right) f \left(\frac{R_p}{R} \right) \approx 5\%,$$

ce qui suggère à nouveau que les effets de paroi sur la vitesse terminale de la bulle sont indépendants de la vitesse de rotation (nous avons déjà fait une telle remarque pour les particules solides).

Résultats obtenus pour une goutte d'eau

Afin de vérifier la validité de la théorie (4.4.1), nous avons également réalisé différentes expériences avec des inclusions composées d'eau. Précisons tout de suite que les résultats obtenus ne sont pas en très bonne adéquation avec la théorie, en tout cas en posant $\mathcal{R}_\mu = 2$. En fait, cela n'est pas tout à fait surprenant et en réalité, il est très probable que malgré toutes les précautions qui ont été prises, notre eau ait été contaminée. En règle générale, lorsque les gouttes ne sont pas "propres", leurs comportements changent, et il est même très courant dans la littérature de voir traiter des inclusions d'eau comme des particules solides (ou partiellement solides) (voir par exemple Harper 1973 ou encore Sadhal et Johnson 1983). Mais nos résultats expérimentaux ne sont pas non plus en parfaite adéquation avec la théorie solide, c'est à dire en posant $\mathcal{R}_\mu = 3$ dans l'équation (4.4.1) et il est donc très vraisemblable qu'à l'intérieur des inclusions, un écoulement prend tout de même place, malgré le fait que la condition de glissement à l'interface soit altérée. Dès lors, notre particule ne se comporte ni tout à fait comme une particule solide, ni

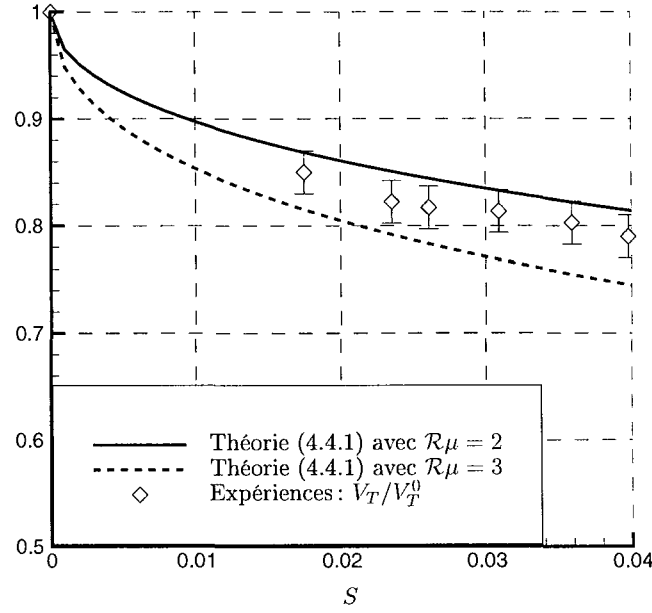


FIG. 4.5 – Illustration du fait que nos gouttes d'eau ne se comportent ni tout à fait comme des gouttes propres, ni tout à fait comme des inclusions solides

tout à fait comme une goutte propre. Pour tenter de mettre ce phénomène en évidence, nous avons choisi de ne représenter que les points expérimentaux qui correspondent à V_T/V_T^0 (V_T^0 est la vitesse terminale de la goutte mesurée en cas d'absence de rotation). En effet, en procédant ainsi et suite aux remarques que nous avons faites dans la section 3.4 (voir par exemple l'équation (3.4.3) du chapitre 3, sachant que pour une goutte Re_T est négligeable), nous devrions nous affranchir des effets de paroi. (Rappelons également que contrairement aux bulles, la vitesse de sédimentation d'une goutte est suffisamment lente pour que celle-ci puisse être récupérée après être sortie de d'où le fait que nous ayons accès à la grandeur V_T/V_T^0 .) Notons que sur la figure 4.5 les résultats représentés ne concernent qu'une seule inclusion fluide. Clairement, il apparaît que nos points expérimentaux sont situés exactement entre les deux théories. Notons que nous reviendrons plus tard sur ces expériences réalisées avec une goutte d'eau.

Enfin pour terminer remarquons simplement que malgré l'apparente contamination de nos gouttes, nous observons une fois encore que lorsque S augmente, la décroissance de la vitesse terminale prédite par la théorie (4.4.1) est bien qualitativement retrouvée.

4.5 Vitesse de l'inclusion dans le plan horizontal

4.5.1 Calculs théoriques

Dans cette section, nous nous proposons de résoudre l'équation de mouvement horizontal généralisée d'une particule dans un écoulement en rotation solide. Celle-ci est obtenue en projetant l'équation de mouvement (4.3.3) (voir aussi le tableau 4.1), dans le plan horizontal. En appliquant le même formalisme que celui employé dans la section 3.5 du chapitre 3, c'est à dire en introduisant la variable normalisée : $Z(t) = R_p(t) \exp(i \dot{\Theta}_p t)$, nous arrivons donc à l'équation

$$\ddot{Z} + A\dot{Z} + BZ + C \int_0^t \left(-\ddot{Z}(\tau) + i \dot{Z}(\tau) \right) \mathcal{K}((t-\tau)/S) d\tau = 0, \quad (4.5.1)$$

où dans ce cas là,

$$A = \frac{\mathcal{R}_\mu}{3S(2\gamma + 1)}, \quad B = \frac{3 - \mathcal{R}_\mu i / (3S)}{2\gamma + 1} \quad \text{et} \quad C = \frac{-\mathcal{R}_\mu C_h}{3S(2\gamma + 1)}, \quad (4.5.2)$$

et le coefficient C_h ainsi que l'expression de $\mathcal{K}(t)$ sont donnés dans le tableau 4.1. (Dans les calculs qui sont présentés ici, nous avons pris l'expression de la masse ajoutée d'Auton, 1987.)

Notons aussi que compte tenu de la borne inférieure du terme intégrodifférentiel, nous avons à nouveau supposé que la particule avait une vitesse de glissement initialement nulle : $\dot{Z}(0) = i Z_0$. Pour résoudre l'équation (4.5.1), nous allons à nouveau poser $\mathcal{U} = \dot{Z}$ et celle-ci devient :

$$\dot{\mathcal{U}} + A\mathcal{U} + B \left[\int_0^t \mathcal{U}(\tau) d\tau + Z_0 \right] + C \int_0^t \left(-\dot{\mathcal{U}}(\tau) + i\mathcal{U}(\tau) \right) \mathcal{K}((t - \tau)/S) d\tau = 0. \quad (4.5.3)$$

Cette équation peut être résolue à l'aide des transformées de Laplace et en utilisant les mêmes notations que dans la section 3.5 (chapitre 3) nous obtenons :

$$\tilde{\mathcal{U}} = \frac{\mathcal{U}_0 \mathcal{X}^2 (1 - C \tilde{\mathcal{K}}(\mathcal{X})) - B Z_0}{\underbrace{\mathcal{X}^4 + A \mathcal{X}^2 + B}_{P^1(\mathcal{X})} - \underbrace{C \tilde{\mathcal{K}}(\mathcal{X}) \mathcal{X}^2 (\mathcal{X}^2 - i)}_{P^2(\mathcal{X})}}.$$

Dans cette expression, $P^1(\mathcal{X})$ correspond alors au polynôme qui serait obtenu en cas d'absence de la force d'histoire et par conséquent, $P^2(\mathcal{X})$ correspond à la partie du polynôme induit par cette force.

Pour obtenir la solution analytique de cette équation de mouvement de la particule, $\tilde{\mathcal{U}}$ doit être décomposée en éléments simples il est donc nécessaire de calculer les racines du polynôme

$$P_n(\mathcal{X}) = P^1(\mathcal{X}) + P^2(\mathcal{X}).$$

Les calculs concernant une particules solides ayant été présentés en détails dans le chapitre précédent, nous allons à présent calculer la solution exacte de l'équation de mouvement lorsque le noyau de la force d'histoire correspond à celui d'une bulle ou d'une inclusion fluide telle que $\lambda \rightarrow \infty$. Compte tenu de l'expression temporelle du noyau de la force d'histoire impliqué dans l'équation de mouvement dans ce cas là (voir le tableau 4.1), nous avons

$$\mathcal{L}(\mathcal{K}(t/S)) = \frac{\sqrt{S}}{\mathcal{X}(\mathcal{X}\sqrt{S} + 1)},$$

et après quelques arrangements, nous obtenons

$$\tilde{\mathcal{U}} = \frac{\mathcal{U}_0 \sqrt{S} \mathcal{X}^3 + \mathcal{U}_0 \mathcal{X}^2 - (C\mathcal{U}_0 + B Z_0) \mathcal{X} \sqrt{S} - B Z_0}{(\mathcal{X}^4 + A \mathcal{X}^2 + B)(\mathcal{X}\sqrt{S} + 1) - C\sqrt{S} \mathcal{X}(\mathcal{X}^2 - i)}.$$

Cette expression peut donc se décomposer en éléments simples,

$$\tilde{\mathcal{U}} = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{A_i}{\mathcal{X} - \mathcal{X}_i} = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{A_i}{\sqrt{p} - \mathcal{X}_i}$$

avec dans ce cas là,

$$A_i = \frac{\left(\mathcal{U}_0 \sqrt{S} \mathcal{X}_i^3 + \mathcal{U}_0 \mathcal{X}_i^2 - (C\mathcal{U}_0 + B Z_0) \mathcal{X}_i \sqrt{S} - B Z_0 \right) / \sqrt{S}}{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{j=5} (\mathcal{X}_i - \mathcal{X}_j)}$$

où les $\mathcal{X}_i$ sont les racines du polynôme de degré 5 :

$$P_5(\mathcal{X}) = (\mathcal{X}^4 + A \mathcal{X}^2 + B)(\mathcal{X}\sqrt{S} + 1) - C\sqrt{S} \mathcal{X}(\mathcal{X}^2 - i).$$

Notons qu'il est possible d'établir, à nouveau à l'aide des propriétés vérifiées par les racines du polynôme, que dans cette étude nous avons encore une fois

$$\sum_{i=1}^{i=5} A_i = 0, \quad \sum_{i=1}^{i=5} \frac{A_i}{\mathcal{X}_i} = Z_0, \quad \sum_{i=1}^{i=5} A_i \mathcal{X}_i = \mathcal{U}_0 \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{i=5} A_i \mathcal{X}_i^2 = 0, \quad (4.5.4)$$

et nous voyons donc que nous pourrions faire les mêmes simplifications que celles qui ont été faites pour une particule solide. Finalement l'expression temporelle de $\mathcal{U}$ est donnée par

$$\mathcal{U}(t) = \sum_{i=1}^{i=5} A_i \mathcal{X}_i \exp(\mathcal{X}_i^2 t) \operatorname{erfc}(-\mathcal{X}_i \sqrt{t}),$$

ce qui implique que

$$\text{Solution exacte} \quad \left\| \quad \mathcal{Z}(t) = \sum_{i=1}^{i=5} \frac{A_i}{\mathcal{X}_i} \exp(\mathcal{X}_i^2 t) \operatorname{erfc}(-\mathcal{X}_i \sqrt{t}). \quad (4.5.5) \right.$$

Il apparaît que l'expression de la solution exacte de l'équation de mouvement d'une inclusion fluide dans le plan horizontal a une forme similaire à celle que nous avons obtenue pour une particule solide. Toutefois, il convient alors de noter que pour une inclusion fluide, le polynôme $P(\mathcal{X})$ est de degré 5, et dans la pratique il n'est pas possible de calculer analytiquement les racines d'un polynôme de degré supérieur à 4. Cependant, nous verrons dans la suite que comme pour une particule solide, seules deux racines contiennent la quasi totalité des informations nécessaires au calcul de la trajectoire de l'inclusion fluide et nous allons à nouveau être en mesure de les déterminer, de manière approchée, à l'aide d'une méthode similaire à celle que nous avons utilisée pour une particule solide.

4.5.2 Calcul analytique des taux de migrations et de rotations généralisés pour les particules solides et pour les inclusions fluides telles que $\lambda \rightarrow \infty$

Que ce soit pour une particule solide ou pour une inclusion fluide, nous avons vu que la solution de l'équation de mouvement de l'inclusion dépendait des racines du polynôme suivant

$$P(\mathcal{X}) = \underbrace{\mathcal{X}^4 + A\mathcal{X}^2 + B}_{P^1(\mathcal{X})} - \underbrace{C\tilde{K}(\mathcal{X})\mathcal{X}^2(\mathcal{X}^2 - i)}_{P^2(\mathcal{X})},$$

où la partie $P^1(\mathcal{X})$ correspond au polynôme qui serait obtenu si la force d'histoire n'était pas prise en compte. Or il est trivial de montrer que lorsque $\gamma = 1$, alors les coefficients A et B sont tels que $P^1(\mathcal{X})$ admet deux racines évidentes, à savoir

$$\mathcal{X}_{1,2} = \pm\sqrt{i}.$$

Compte tenu aussi de l'expression de $P^2(\mathcal{X})$, nous pouvons en déduire que :

Quelle que soit la nature de la particule, et donc, quelle que soit l'expression du noyau de la force d'histoire, le polynôme $P(\mathcal{X})$ admet les deux racines évidentes $\mathcal{X}_{1,2} = \pm\sqrt{i}$ lorsque $\gamma = 1$.

A l'aide de ce résultat, il est ensuite possible de montrer, en procédant de la même manière que dans la section 3.5.3 (chapitre 3), que lorsque γ varie, non seulement ces deux racines contiennent la quasi-totalité des informations nécessaires au calcul des trajectoires dans le plan horizontal, mais aussi que ces deux racines vont à nouveau se déplacer faiblement dans le plan complexe. En d'autres termes, quelle que soit la nature de l'inclusion, nous aurons

$$\left| \frac{\delta \mathcal{X}_i}{\mathcal{X}_i} \right| \ll 1 \quad \text{pour } i = \{1, 2\}.$$

En annexe D.1, nous proposons une méthode semblable à celle que nous avons employée pour une particule solide permettant d'obtenir une expression analytique approchée de ces deux racines. Tous calculs faits, nous trouvons à nouveau une solution approchée semblable à celle que nous avons obtenue pour une particule solide, c'est à dire

Solution approchée

$$Z(t) = Z_0 \exp(\mathcal{X}_1^2 t) = Z_0 \exp(\lambda_r t) \exp(i\lambda_i t), \quad (4.5.6)$$

avec maintenant,

**Taux de migration
et Taux de rotation
généralisés aux cas
 $\mathcal{R}_\mu = \{2, 3\}$**

$$\lambda_r = \frac{\dot{R}_p}{R_p} = \underbrace{\frac{6S(\gamma-1)}{\mathcal{R}_\mu}}_{\text{Traînée}} - \underbrace{3\sqrt{2}(\gamma-1)S^{3/2}}_{\text{Effet d'histoire}} + O(S^2) \quad (4.5.7)$$

$$\lambda_i = \dot{\Theta}_p = 1 - \underbrace{3\sqrt{2}S^{3/2}(\gamma-1)}_{\text{Effet d'histoire}} + O(S^2). \quad (4.5.8)$$

Faisons à présent quelques commentaires. Tout d'abord, il apparaît que le terme en $O(S)$ du taux de migration dépend explicitement de la nature de l'inclusion, puisque pour une particule solide, nous avons

$$\lambda_r = 2S(\gamma-1)\gamma + O(S^{3/2}),$$

alors que pour une inclusion fluide, nous avons

$$\lambda_r = 3S(\gamma-1)\gamma + O(S^{3/2}).$$

En fait, cela n'est pas surprenant puisque ce terme provient de la force de traînée et que celle-ci dépend de la nature de l'inclusion. (Par ailleurs, ces deux termes correspondent bien à ceux que nous avons obtenus dans le cadre de la théorie des écoulements rampants stationnaires.) En revanche, nous voyons que pour ce qui est du terme suivant, terme qui est en $O(S^{3/2})$ et qui provient de la force d'histoire, celui-ci a exactement la même valeur pour une particule solide et pour une particule fluide. Même si comparativement au premier terme, son effet relatif est alors plus faible pour une inclusion fluide que pour une particule solide, nous pouvons nous attendre à ce que la force d'histoire modifie de manière non négligeable la migration de nos inclusions fluides. C'est ce que nous nous proposons de vérifier expérimentalement dans la suite.

4.5.3 Comparaison avec l'expérience

Afin de nous assurer du comportement exponentiel de la migration des inclusions fluides (et principalement, de nos bulles) dans nos expériences, reprenons le graphe de la figure 4.3, mais traçons maintenant cette évolution radiale dans un graphe 1/2 – logarithmique :

Nous obtenons ainsi le graphe de la figure 4.6. Dans cet exemple qui, précisons le, est caractéristique de l'ensemble de nos expériences réalisées avec des bulles, nous obtenons bien une droite, dont la pente correspond alors à la valeur expérimentale de notre taux de migration. (Rappelons que dans les calculs théoriques, λ_r , qui est donné par l'équation (4.5.7), est sans dimension, et il faut donc diviser la valeur expérimentale ainsi obtenue par ω avant de faire la comparaison entre nos résultats expérimentaux et la théorie.)

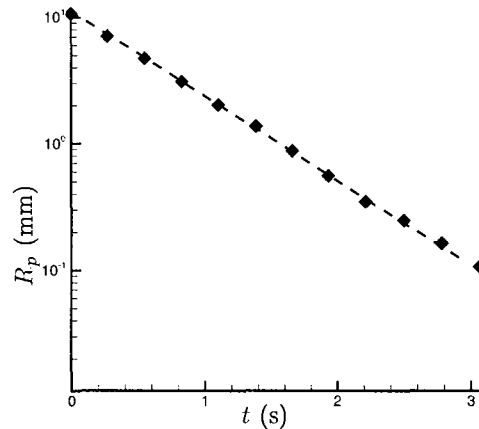


FIG. 4.6 – Evolution de $R_p(t)$ qui correspond à la figure 4.3, mais représentée dans un graphe 1/2-logarithmique ($a = 1.4$ mm et $\omega = 22$ rad/s).

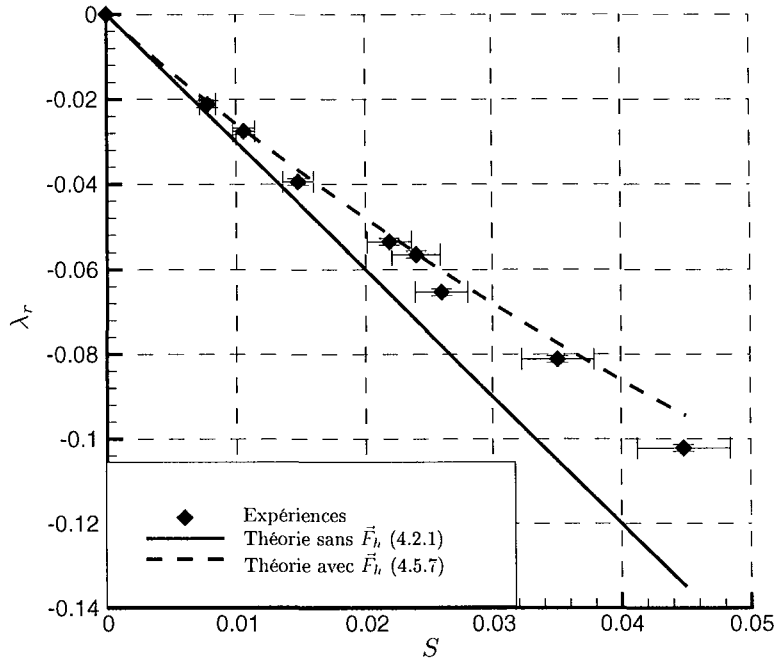


FIG. 4.7 – Comparaison des taux de migration expérimentaux aux théories avec et sans force d'histoire pour les bulles.

Résultats obtenus pour les bulles

En faisant varier à la fois la vitesse de rotation du cylindre et le rayon de nos bulles, nous obtenons les taux de migration représentés sur la figure 4.7. Avant d'analyser ces résultats, notons tout d'abord que contrairement aux particules solides, le rayon de nos bulles doit être déterminé à chaque expérience. Or nous avons vu (section 2.3, page 52 du chapitre 2) que ce rayon est déterminé avec une erreur relative de l'ordre de 4 %. Étant donné que le rayon de la particule apparaît au carré dans le nombre S , celui-ci est donc déterminé avec une précision de l'ordre de 8 %, ce qui explique la taille relativement importante de nos barres d'erreurs.

Pour pallier ce problème, nous avons donc réalisé des expériences avec des valeurs de S suffisamment importantes pour que malgré cette grande incertitude de mesure, nous puissions tout de même évaluer sans ambiguïté l'influence de la force d'histoire. Pour nos bulles, et comme c'était le cas pour nos particules solides, il apparaît clairement que la migration radiale de l'inclusion est affectée par un terme en $O(S^{3/2})$. À nouveau, nous obtenons de très bons résultats en prenant en compte la force d'histoire et en négligeant les termes convectifs dans les équations qui régissent l'écoulement externe à la particule.

Aussi, au cours des expériences faites avec des bulles, nous avons pu mettre en évidence un phénomène intéressant. En effet, en regardant le résultat (4.5.8), il apparaît que si la densité de l'inclusion est inférieure à celle du fluide (i.e. si $\gamma < 1$) alors la celle-ci doit avoir une vitesse de rotation légèrement supérieure à celle du fluide.

Pour une inclusion gazeuse où nous avons $\gamma \simeq 0$, nous avons pu vérifier, du moins qualitativement, que ce résultat est avéré.

En effet, en comparant après plusieurs tours du cylindre, la position d'une bulle par rapport à un même point du cylindre nous avons pu constater que la vitesse angulaire $\dot{\Theta}_p$ (exprimée sous sa forme dimensionnelle) était très légèrement supérieure à la vitesse de rotation du cylindre. Toutefois, précisons que dans

nos expériences, cette différence est infime puisque le terme en $O(S^{3/2})$ de l'équation (4.5.8) est vraiment très inférieur à 1.

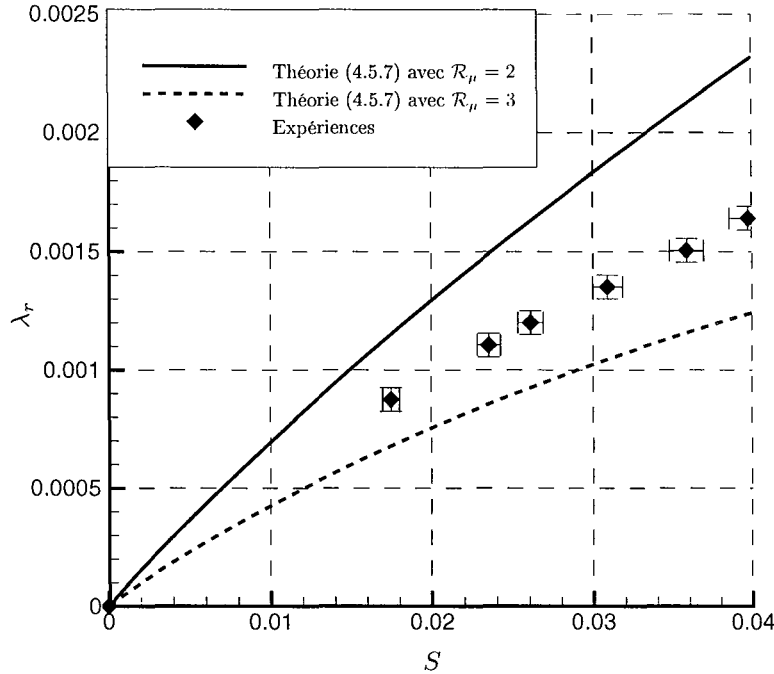


FIG. 4.8 – Comparaison des taux de migration expérimentaux aux théories (avec force d'histoire) solide et fluide pour une goutte d'eau.

Résultats obtenus pour une goutte d'eau

En ce qui concerne les résultats expérimentaux obtenus pour les gouttes d'eau, notons que l'incertitude de mesure du rayon des gouttes est nettement inférieure à celle d'une bulle d'air. (Dans la section 2.3 du chapitre 2 nous avons vu que Δa est de l'ordre de 1.2 %, ce qui implique que la valeur de S est déterminée avec une incertitude inférieure à 3 %). Précisons aussi que les résultats présentés sur la figure 4.8 ne concernent qu'une seule goutte et en particulier, nous avons choisi de représenter ici les résultats qui correspondent à la même goutte que celle utilisée pour obtenir le graphe de la figure 4.5. Il apparaît à nouveau que les gouttes d'eau que nous avons utilisées ne se comportent ni tout à fait comme des gouttes propres ($R_\mu = 2$), ni comme des particules solides ($R_\mu = 3$), ce qui était alors attendu, au vu des résultats présentés sur la figure 4.5.

Notons que si les conditions limites, vérifiées par les écoulements internes et externes, à l'interface de la goutte ne correspondent pas à celle d'une inclusion fluide "propre", alors le noyau de la force d'histoire que nous avons utilisé dans cette section pour calculer le taux de migration λ_r ne doit plus être valable, et cela malgré le fait que pour une goutte d'eau plongée dans de l'huile de silicone, le rapport des viscosités λ est très grand devant 1. Aussi, cela doit être la raison pour laquelle les résultats expérimentaux ne sont pas en bon accord avec les prédictions théoriques.

De plus, l'approche que nous avons utilisée pour calculer les taux de migration et de rotation de la particule, et qui consiste à résoudre l'équation de mouvement "exacte" de la particule obtenue dans le cadre des écoulements rampants instationnaires, présente donc des limites puisqu'elle ne permet pas de traiter des inclusions fluides de viscosité quelconque, ni bien sûr des gouttes contaminées... Dans la suite, nous allons donc voir une approche qui moyennant une simple hypothèse, permet de calculer analytiquement le taux de migration d'une goutte mais cette fois ci, de viscosité quelconque.

4.6 Calcul analytique du taux de migration et de rotation d'une goutte quelconque ou contaminée.

Afin de déterminer les taux de migration et de rotation d'une goutte de viscosité quelconque ou éventuellement contaminée, nous allons au préalable faire quelques commentaires concernant les résultats obtenus dans la section précédente. Tout d'abord, dans le chapitre 3 (section 3.5), nous avons vu que dans le problème qui nous intéresse, la vitesse de glissement de la particule pouvait être écrite, à condition de poser que $\dot{\Theta}_p = 1$, sous la forme

$$-\bar{\vec{P}}_H \cdot \vec{V}_g(t) = \dot{R}_p(t) \left(\cos \omega t \vec{e}_1 + \sin \omega t \vec{e}_2 \right). \quad (4.6.1)$$

Par ailleurs, nous avons également vu que le temps caractéristique de variation de $\dot{R}_p(t)$, à savoir $1/(\omega \lambda_r)$ est très grand devant $1/\omega$ (puisque $\lambda_r = O(S)$). Ainsi, il semble donc légitime de pouvoir négliger la dépendance temporelle de $\dot{R}_p(t)$ devant celles des composantes harmoniques de cette vitesse de glissement. Or si la dépendance temporelle de $\dot{R}_p(t)$ est négligée dans ce problème, la force qui va s'exercer sur l'inclusion, et qui traduit l'existence du terme instationnaire dans les équations de l'écoulement induit, ne sera plus donnée sous la forme d'un terme intégrodifférentiel puisque nous aurons fait apparaître dans la vitesse de glissement (4.6.1) qu'une combinaison linéaire de termes harmoniques n'impliquant qu'une seule fréquence d'oscillation. Ainsi, pour calculer l'expression de la force qui s'exerce sur une inclusion de viscosité quelconque, il est possible de s'appuyer sur la solution analytique du problème qui concerne une particule dont la vitesse de glissement est donnée par

$$-\vec{V}_g(t) = \vec{U}_\omega \exp(-i\omega t), \quad (4.6.2)$$

et qui est alors bien connue (voir par exemple Landau et Lifchitz (1989), ou l'annexe A.3 pour une particule solide, et voir Gorodtsov (1975) ou Galindo et Gerbeth (1993) pour les inclusions fluides). Ainsi, en notant $\vec{F}_\omega \exp(-i\omega t)$ la force qui s'exerce sur une particule qui admet une vitesse de glissement donnée par (4.6.2), la force qui s'exerce sur une particule admet une vitesse de glissement donnée par (4.6.1) sera la suivante :

$$\vec{F}^1 = \Re \left(|\vec{F}_\omega| \exp(-i\omega t) \right) \vec{e}_1 - \Im \left(|\vec{F}_\omega| \exp(-i\omega t) \right) \vec{e}_2, \quad \text{où} \quad \dot{R}_p = |\vec{U}_\omega|.$$

Tous calculs faits, et en nous appuyant d'une part sur l'équation (1.3.1) (page 19) du chapitre 1 et sur les travaux de Galindo et Gerbeth (1993), et d'autre part sur le fait que dans ce problème

$$\eta = \left(\frac{a^2 \omega}{\nu_f} \right) \ll \left(\frac{a^2 \omega}{\nu_f} \right)^{1/2} \ll 1,$$

nous pouvons montrer que l'expression de la force qui s'exerce sur une inclusion sphérique, solide ou fluide, qui admet la vitesse de glissement donnée par l'équation (4.6.1) peut s'écrire sous la forme unique :

$$\vec{F}^1 = 2\pi\mu_f a \mathcal{R}_\mu \left[\bar{\vec{I}} + \frac{\mathcal{R}_\mu}{3} \left(\frac{a^2 \omega}{\nu_f} \right)^{1/2} \begin{pmatrix} M_{11} & -M_{12} \\ M_{12} & M_{11} \end{pmatrix} \right] \left(\bar{\vec{P}}_H \cdot \vec{V}_g(t) \right) + O(\eta) \quad (4.6.3)$$

où

$$M_{11} = M_{12} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{et} \quad \mathcal{R}_\mu \in [2, 3].$$

Curieusement, nous nous apercevons alors que les termes en $O(\eta^{1/2})$ de cette force et qui sont des effets d'instationnarité, peuvent s'écrire sous une forme semblable à celle proposée par Legendre et Magnaudet (1997) pour généraliser le calcul des effets d'inertie... L'objectif de la section suivante, sera donc de montrer que cela n'est pas une simple coïncidence ! En effet, comme nous allons le voir, dans le cadre de notre étude le terme de correction de traînée qui s'exerce sur notre inclusion peut être obtenu à l'aide de la méthode des développements asymptotiques raccordés. C'est d'ailleurs à l'aide de ce résultat que nous pourrions calculer les taux de migration et de rotation d'une inclusion fluide contaminée.

Mais avant cela, précisons que si la force hydrodynamique (4.6.3) est introduite dans l'équation de mouvement de la particule (4.1.1) alors nous obtenons, en terme de Z , l'équation :

$$\ddot{Z} = -\frac{Z}{\gamma} + \frac{\mathcal{R}_\mu}{6S\gamma} \left(1 + \mathcal{R}_\mu M_{11} S^{1/2}\right) (iZ - \dot{Z}) - \frac{\mathcal{R}_\mu^2}{6S^{1/2}\gamma} M_{12} (Z + i\dot{Z}) \quad (4.6.4)$$

et cette dernière se résoud aisément. Après simplification de la solution, il apparaît que

$$\frac{\dot{R}_p}{R_p} = \lambda_r = \frac{6}{\mathcal{R}_\mu} S(\gamma - 1) - 6 M_{11} S^{3/2}(\gamma - 1) + O(M_{12} S^2) \quad (4.6.5)$$

et

$$\dot{\Theta}_p = \lambda_i = 1 - 6 M_{12} S^{3/2}(\gamma - 1) + O(S^2). \quad (4.6.6)$$

Compte tenu de la valeur de M_{11} et M_{12} les équations (4.5.7) et (4.5.8) sont bien retrouvées et cela nous confirme que la dépendance temporelle de $\dot{R}_p(t)$ peut bien être négligée pour calculer les taux de migration et de rotation d'une particule dans un écoulement de rotation solide, à l'ordre de grandeur qui nous intéresse.

Aussi, nous voyons maintenant que les taux de migration et de rotation (4.6.5) et (4.6.6) sont valables quel que soit le rapport entre les viscosité du fluide à l'intérieur et à l'extérieur de l'inclusion.

L'objectif de la section suivante est de généraliser ce résultat aux cas des inclusions contaminées.

4.6.1 Calcul des effets d'instationnarité à l'aide de la méthode des développements asymptotiques raccordés.

Pour parvenir à calculer la force hydrodynamique qui s'exerce sur une goutte contaminée qui admet une vitesse de glissement donnée par (4.6.1), nous allons, comme précédemment, commencer par considérer une inclusion qui admet la vitesse de glissement donnée par l'équation (4.6.2).

Puisque l'inclusion est supposée contaminée, il est donc impossible *a priori* de résoudre le problème exactement dans la mesure où les conditions limites vérifiées par l'écoulement induit ne sont pas déterminées. Toutefois, nous allons résoudre ce problème à l'aide de la méthode des développements asymptotiques raccordés. Mais avant cela, et parce que nous aurons besoin de cette hypothèse dans la suite, précisons que nous allons supposer que malgré la contamination de l'inclusion, son tenseur de mobilité reste sphérique.

Dans cette partie, nous supposons que l'écoulement induit est régi par les équations de Stokes instationnaires :

$$\rho_f \frac{\partial \vec{w}_f^1}{\partial t} = -\vec{\nabla} P^1 + \mu_f \vec{\Delta} \vec{w}_f^1. \quad (4.6.7)$$

Compte tenu de la condition limite imposée ici, nous avons au voisinage de la particule (i.e. $|\vec{x}| \simeq O(a)$) :

$$\left| \frac{\rho_f \partial \vec{w}_f^1 / \partial t}{\mu_f \vec{\Delta} \vec{w}_f^1} \right| = O\left(\frac{a^2 \omega}{\nu_f}\right) = O(\eta) \ll 1,$$

Cela suggère donc que près de l'inclusion, l'instationnarité liée à la condition limite harmonique est suffisamment faible pour qu'à chaque instant, l'écoulement induit s'adapte à la variation dans le temps de la condition limite, et soit alors donné, à l'ordre dominant, par la solution des équations de Stokes stationnaires.

En revanche, intéressons nous maintenant à l'instationnarité de l'écoulement induit, en un point situé à une distance d de l'inclusion. Puisque le temps τ que met la vorticité générée par l'inclusion, pour diffuser jusqu'à la distance d de la particule est donné par

$$\tau = \frac{d^2}{\nu_f},$$

alors si τ est grand devant le temps caractéristique de variation de la condition limite, il ne sera plus possible de supposer qu'en ce point, l'écoulement est quasi-stationnaire. Or il apparaît que τ est de l'ordre de $1/\omega$ si

$$d = \left(\frac{\nu_f}{\omega} \right)^{1/2} = O(\delta) .$$

Par conséquent, dans la région où $|\vec{x}| = O(\delta)$, l'écoulement induit est instationnaire. Aussi, nous savons qu'à cette distance, l'écoulement perçoit l'inclusion comme une force ponctuelle, qui a l'ordre dominant est d'intensité égale et de sens opposé à la traînée de Stokes que le fluide exerce sur la particule. Ainsi, dans la région lointaine, l'écoulement induit peut être considéré comme la solution de l'équation :

$$\rho_f \frac{\partial \vec{w}_f^1}{\partial t} = -\vec{\nabla} P^1 + \mu_f \vec{\Delta} \vec{w}_f^1 + \vec{F} \delta(r) . \quad (4.6.8)$$

En nous inspirant des travaux de Asmolov et McLaughlin (1999), nous allons poser que :

$$\vec{w}_f^1 = \vec{w}_\omega \exp(-i\omega t) , \quad P = P_\omega \exp(-i\omega t) , \quad \text{et} \quad \vec{F} = \vec{F}_\omega \exp(-i\omega t) .$$

Il s'ensuit que l'équation (4.6.8) devient alors

$$-i\omega \vec{w}_\omega = -\frac{1}{\rho_f} \vec{\nabla} P_\omega + \nu_f \vec{\Delta} \vec{w}_\omega + \frac{\vec{F}_\omega}{\rho_f} \delta(r) . \quad (4.6.9)$$

Puis, en introduisant ensuite dans cette équation les transformées de Fourier spatiales suivantes :

$$\mathcal{F}(\vec{w}_\omega) = \vec{w}_\omega = \frac{1}{8\pi^3} \int_{\mathbb{R}^3} \vec{w}_\omega \exp(-i\vec{k} \cdot \vec{x}) d^3\vec{x} ,$$

et

$$\mathcal{F}(P_\omega) = \tilde{P}_\omega = \frac{1}{8\pi^3} \int_{\mathbb{R}^3} P_\omega \exp(-i\vec{k} \cdot \vec{x}) d^3\vec{x} ,$$

l'équation (4.6.9) devient alors, en termes de $\vec{w}_\omega$ et de $\tilde{P}_\omega$,

$$-i\omega \vec{w}_\omega = -\frac{i\vec{k}}{\rho_f} \tilde{P}_\omega - k^2 \nu_f \vec{w}_\omega + \frac{\vec{F}_\omega}{8\pi^3 \rho_f} . \quad (4.6.10)$$

Dans un souci de simplicité, supposons maintenant que $\vec{F}_\omega$ soit colinéaire par exemple à $\vec{e}_1$ (i.e. $\vec{F}_\omega = F_\omega \vec{e}_1$). En utilisant le fait que $\vec{k} \cdot \vec{w}_\omega = 0$ (à cause de l'équation de continuité), $\tilde{P}_\omega$ peut être calculée et l'équation (4.6.10) devient :

$$\vec{w}_\omega \cdot \vec{e}_1 = -\frac{F_\omega}{8\pi^3 \rho_f} \left(\frac{k_1^2 - k^2}{k^2(\nu_f k^2 - i\omega)} \right) . \quad (4.6.11)$$

Écrivons ensuite que parce que l'inclusion est susceptible d'être contaminée, celle-ci exerce sur le fluide une force ponctuelle qui au premier ordre est donnée par

$$F_\omega = 2\pi\mu_f a \mathcal{R}_\mu^{\text{equiv}} U_\omega ,$$

où

$$\mathcal{R}_\mu^{\text{equiv}} = \mathcal{R}_\mu \quad \text{si l'inclusion n'est pas contaminée,}$$

et

$$\mathcal{R}_\mu^{\text{equiv}} \in [2 ; 3] \quad \text{dans le cas contraire.}$$

En menant un raisonnement similaire à celui de Legendre et Magnaudet (1997) (raisonnement qui s'appuie sur les travaux de Saffman, 1965) nous en déduisons que si l'inclusion exerce sur le fluide une force d'intensité $F_\omega = 2\pi\mu_f a \mathcal{R}_\mu^{\text{equiv}} U_\omega$, elle subit de la part de l'écoulement lointain, une force qui sera donnée par

$$2\pi\mu_f a \mathcal{R}_\mu^{\text{equiv}} \int_{\mathbb{R}^3} (\vec{w}_\omega - \vec{w}^s) \cdot \vec{e}_1 d^3\vec{k} ,$$

où $\vec{w}^s \cdot \vec{e}_1$ est alors simplement donnée par l'équation (4.6.11) en posant $\omega = 0$. Posons

$$I = \int_{\mathbb{R}^3} (\vec{w}_\omega - \vec{w}^s) \cdot \vec{e}_1 d^3 \vec{k}.$$

En annexe D.2 nous calculons cette intégrale et nous obtenons

$$I = \frac{\mathcal{R}_\mu^{\text{equiv}}}{3} \left(\frac{a^2 \omega}{\nu_f} \right)^{1/2} \frac{\sqrt{2}}{2} (1 - i) U_\omega. \quad (4.6.12)$$

Ce calcul, qui a été réalisé en supposant que $\vec{F}_\omega$ était dirigée suivant $\vec{e}_1$, peut bien sûr se généraliser dans les trois directions de l'espace, et nous obtenons alors que la force qui s'exerce sur une inclusion quelconque admettant la vitesse de glissement (4.6.2) est donnée par :

$$\vec{F}_\omega \exp(-i\omega t) = -2\pi\mu_f a \mathcal{R}_\mu^{\text{equiv}} \left(1 + \frac{\mathcal{R}_\mu^{\text{equiv}}}{3} \left(\frac{a^2 \omega}{\nu_f} \right)^{1/2} \frac{\sqrt{2}}{2} (1 - i) \right) \vec{U}_\omega \exp(-i\omega t). \quad (4.6.13)$$

Pour une particule solide, $\mathcal{R}_\mu^{\text{equiv}} = 3$ et en comparant alors l'équation (4.6.13) à l'équation (1.3.1), page 19, qui provient de la solution exacte du problème pour une particule solide, nous nous apercevons qu'il nous manque le terme en $O(a^2 \omega / \nu_f)$. Ce n'est d'ailleurs pas surprenant puisque le développement que nous avons fait ici ne prend en compte que des corrections de traînée en $O(\eta^{1/2})$. Notons par ailleurs que le terme en $O(a^2 \omega / \nu_f)$ de l'équation (1.3.1) est celui qui donne, lorsque l'on calcule la transformée de Fourier inverse de l'équation (1.3.1), la force de masse ajoutée, et dans notre problème celle-ci a une contribution négligeable.

Comme précédemment, et à condition que le tenseur de mobilité de l'inclusion soit sphérique, la solution (4.6.13) peut maintenant être utilisée pour calculer la force hydrodynamique qui s'exerce sur une goutte contaminée dans le cadre de la rotation solide, et celle-ci s'écrit :

$$\vec{F}^1 = 2\pi\mu_f a \mathcal{R}_\mu^{\text{equiv}} \left[\vec{I} + \frac{\mathcal{R}_\mu^{\text{equiv}}}{3} \left(\frac{a^2 \omega}{\nu_f} \right)^{1/2} \begin{pmatrix} M_{11} & -M_{12} \\ M_{12} & M_{11} \end{pmatrix} \right] \cdot (\vec{P}_H \cdot \vec{V}_g(t)) + O(\eta), \quad (4.6.14)$$

avec

$$M_{11} = M_{12} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$



Cette force hydrodynamique est alors générale et permet de prendre en compte les effets du terme instationnaire dans les équations de l'écoulement induit sur le mouvement de tous types d'inclusions fluides, de viscosité quelconque, voire contaminées (à condition toutefois de supposer que son tenseur de mobilité reste sphérique).

Avec l'expression (4.6.14), les taux de migration et de rotation sont obtenus simplement :

$$\left. \begin{array}{l} \text{Taux de migration} \\ \text{et taux de rotation} \\ \text{généralisés} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \lambda_r = \frac{\dot{R}_p}{R_p} = \underbrace{\frac{6S(\gamma-1)}{\mathcal{R}_\mu^{\text{equiv}}}}_{\text{Traînée}} - \underbrace{\frac{6M_{11}(\gamma-1)S^{3/2}}{\mathcal{R}_\mu^{\text{equiv}}}}_{\text{Effet instationnaire}} + O(S^2) \\ \lambda_i = \dot{\Theta}_p = 1 - \underbrace{\frac{6M_{12}S^{3/2}(\gamma-1)}{\mathcal{R}_\mu^{\text{equiv}}}}_{\text{Effet instationnaire}} + O(S^2). \end{array} \quad (4.6.15)$$

$$\lambda_i = \dot{\Theta}_p = 1 - \underbrace{\frac{6M_{12}S^{3/2}(\gamma-1)}{\mathcal{R}_\mu^{\text{equiv}}}}_{\text{Effet instationnaire}} + O(S^2). \quad (4.6.16)$$

Afin de vérifier la validité de ce résultat, nous allons supposer que le tenseur de mobilité de notre goutte contaminée est sphérique, et nous allons rechercher la valeur du coefficient $\mathcal{R}_\mu$ qui minimise la différence entre les points expérimentaux V_T/V_T^0 présentés sur la figure 4.5 et la théorie (4.4.1). Nous obtenons (voir la figure 4.9) :

$$\mathcal{R}_\mu^{\text{equiv}} \simeq 2.4.$$

Si maintenant, cette valeur est injectée dans l'équation (4.6.15) nous obtenons alors la figure 4.10. Les résultats expérimentaux sont maintenant en parfaite adéquation avec la théorie. Également, nous pouvons en déduire que même si nos inclusions sont contaminées, leurs taux de migration radiale peuvent être estimés correctement. Aussi, il apparaît dans nos résultats que la valeur nette du terme en $O(S^{3/2})$ de λ_r vaut toujours $3\sqrt{2}$, et cela quelle que soit la nature de l'inclusion. Nous aurons l'occasion de revenir plus longuement sur ce point dans le chapitre 5.

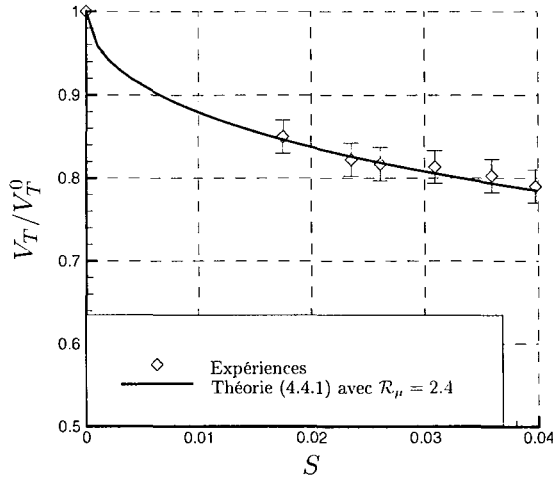


FIG. 4.9 – Calage de $\mathcal{R}_\mu^{\text{equiv}}$ avec la vitesse terminale de la goutte.

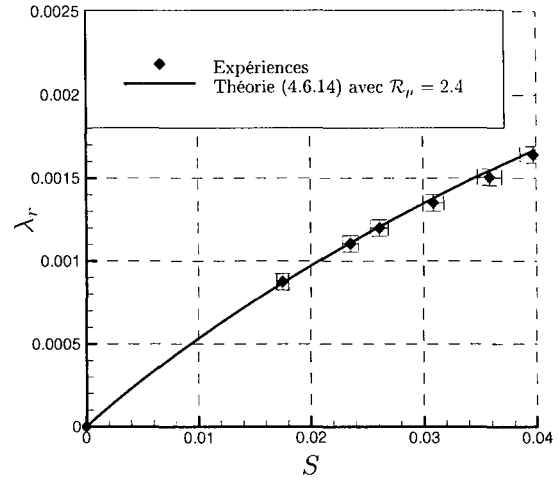


FIG. 4.10 – Taux de migration radiale après calage.

4.7 Conclusions

Dans ce chapitre, nous avons généralisé les résultats obtenus pour une particule solide aux cas des inclusions fluides. Tout d'abord, pour calculer la vitesse terminale d'une inclusion fluide, nous avons généralisé les résultats de Childress (1964) selon la remarque faite par Legendre et Magnaudet (1997). Il apparaît que la vitesse terminale de l'inclusion fluide est à nouveau assez bien décrite par la théorie, mais comme pour une particule, elle est affectée de manière non négligeable par des effets de paroi. Nous avons aussi vu que pour une inclusion fluide, ces effets de paroi pouvaient être estimés en généralisant l'approche de Brenner (1964). Après corrections, les résultats expérimentaux sont en accord avec la théorie.

En ce qui concerne la vitesse horizontale de l'inclusion, et pour les mêmes raisons que celles qui ont été exposées dans la partie 3.3.2 (page 75) du chapitre 3, nous avons négligé la contribution des termes convectifs dans les équations qui régissent l'écoulement induit externe à la particule.

- Dans un premier temps, nous avons résolu l'équation de mouvement exacte d'une inclusion fluide dont la viscosité est telle que $\lambda \rightarrow \infty$. À l'aide de ce résultat, nous avons obtenu les taux de migration et de rotation d'une bulle et d'une goutte d'eau non contaminée dans un écoulement en rotation solide.
- Dans un second temps, nous avons négligé la dépendance temporelle de $\dot{R}_p(t)$ devant celle des termes harmoniques présents dans la condition limite vérifiée par l'écoulement induit dans cette étude. Cette hypothèse nous a permis d'une part de généraliser le calcul des taux de migration et de rotation aux cas d'une inclusion de viscosité quelconque, mais plus généralement, aux cas des inclusions contaminées, à condition que leurs tenseurs de mobilité restent sphériques.

L'accord entre les taux de migrations prédits par la théorie et l'expérience est très bon.

Dans le chapitre suivant nous allons maintenant mesurer la contribution des termes convectifs, qui jusque là ont été négligés, sur le mouvement dans le plan horizontal de la particule.

Chapitre 5

Discussion sur la correspondance entre les effets d'instationnarité et les effets de l'accélération de Coriolis.

5.1 Introduction

Dans les chapitres précédents, nous avons calculé les taux de migration et de rotation d'une particule solide et d'une inclusion fluide, en supposant que l'écoulement induit par le mouvement horizontal de la sphère était principalement régi par des équations de Stokes instationnaires. Dans la littérature, il existe une approche différente de celle que nous avons présentée précédemment et qui consiste à calculer l'expression de la force qui s'exerce sur la particule lorsque les équations de l'écoulement induit sont écrites dans un référentiel en rotation. Dans ce chapitre, nous nous proposons d'étudier la correspondance qu'il peut y avoir entre les deux approches. Notons qu'ici, il ne sera question que du mouvement horizontal de la particule et par ailleurs, nous nous placerons dans une situation physique telle que la condition

$$\left(\frac{a^2 \omega}{\nu_f}\right)^{1/2} \gg \frac{a V_g}{\nu_f} \quad (5.1.1)$$

soit vérifiée.

Dans un premier temps, et au risque de nous répéter un petit peu, prenons tout de même le temps de faire un récapitulatif des hypothèses que nous avons faites dans les chapitres précédents et des résultats que nous avons obtenus, car ceux-ci nous seront utiles pour pouvoir mener à bien la comparaison entre les deux approches. Tout d'abord donc, et parce que la vitesse angulaire de la particule (i.e. $\dot{\Theta}_p$) est quasiment confondue avec celle du cylindre en rotation, nous avons vu que la vitesse de glissement d'une particule solide ou d'une inclusion fluide dans un écoulement en rotation solide correspond quasiment à sa vitesse radiale puisque quelle soit la nature de l'inclusion nous avons

$$\overline{\vec{P}}_H \cdot V_g(t) \simeq -\dot{R}_p \vec{e}_{R_p}(t), \quad \text{où, rappelons le,} \quad \vec{e}_{R_p} = \frac{\overline{\vec{P}}_H \cdot \vec{X}_p(t)}{R_p}.$$

Aussi, précisons bien que dans le référentiel de Koenig $\mathcal{R}_p$, le vecteur $\vec{e}_{R_p}(t)$ dépend du temps, car nous avons :

$$\vec{e}_{R_p} \simeq \cos \omega t \vec{e}_1 + \sin \omega t \vec{e}_2.$$

Enfin, notons que dans le cadre des hypothèses décrites par l'équation (5.1.1), l'écoulement externe est régi à l'ordre dominant par l'équation:

$$\frac{\partial \vec{w}_f^1}{\partial t} + \left((\overline{\vec{A}} \cdot \vec{x}) \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{w}_f^1 + \overline{\vec{A}} \cdot \vec{w}_f^1 = -\frac{1}{\rho_f} \vec{\nabla} P^1 + \nu_f \vec{\Delta} \vec{w}_f^1, \quad (5.1.2)$$

où tous les termes du membre de gauche sont du même ordre de grandeur, à savoir en $O(\eta)$ comparativement aux termes visqueux. Toutefois, jusqu'à présent, nous avons décidé de ne tenir compte dans

l'équation (5.1.2) que du terme instationnaire. Ce faisant, nous avons été en mesure de calculer les taux de migration et de rotation d'une particule solide, mais aussi d'une particule fluide faiblement visqueuse. Dans un premier temps, ces taux de migration et de rotation ont été obtenus en résolvant l'équation de mouvement "exacte" de l'inclusion. Dans un deuxième temps, nous avons également montré, à la fin du chapitre 4, que parce que le temps caractéristique de variation du terme $\vec{e}_{R_p}(t)$ (à savoir $1/\omega$) est petit devant le temps caractéristique de variation du terme $\dot{R}_p(t)$ (à savoir $1/(S\omega)$), la dépendance temporelle de ce dernier terme peut légitimement être négligée dans notre étude. Cette dernière hypothèse est importante car c'est elle qui nous a permis de calculer les taux de migration et de rotation généralisés (4.6.15) et (4.6.16) du chapitre 4, et elle sera faite à nouveau par la suite.

5.2 Analyse de l'étude de Herron *et al.* (1975)

Contrairement à ce que nous avons toujours fait jusqu'à présent dans les chapitres 3 et 4 où nous avons écrit les équations de l'écoulement induit dans un référentiel dont les axes sont fixes par rapport à $\mathcal{R}_0$, nous allons à présent écrire les équations de Navier-Stokes dans un référentiel que nous appellerons $\mathcal{R}_p^r(p, \vec{e}_1^r, \vec{e}_2^r, \vec{e}_3)$, toujours centré en p , mais qui admet également un mouvement de rotation autour de l'axe $\vec{e}_3$ (avec la vitesse angulaire ω). Dans ce référentiel, nous avons donc les relations de passage :

$$\vec{e}_1^r = \cos \omega t \vec{e}_1 + \sin \omega t \vec{e}_2$$

et

$$\vec{e}_2^r = -\sin \omega t \vec{e}_1 + \cos \omega t \vec{e}_2.$$

Dans un tel référentiel, et dans un cas général, les équations de Navier-Stokes s'écrivent :

$$\frac{\partial \vec{w}_f^r}{\partial t} + (\vec{w}_f^r \cdot \vec{\nabla}) \vec{w}_f^r = -\frac{1}{\rho_f} \vec{\nabla} P + \nu_f \vec{\Delta} \vec{w}_f^r + \left(\vec{g} - \frac{d\vec{V}_p^r(t)}{dt} \right) - 2\omega \vec{e}_3 \wedge \vec{w}_f^r - 2\omega \vec{e}_3 \wedge \vec{V}_p^r + \frac{1}{2} \vec{\nabla} (\omega \vec{e}_3 \wedge \vec{x})^2.$$

Or en introduisant dans cette équation la décomposition de la vitesse

$$\vec{w}_f^r = \vec{w}_f^{r0} + \vec{w}_f^{r1},$$

où $\vec{w}_f^{r0}$ est l'écoulement non perturbé relatif et sachant que par définition il est solution de cette équation, l'écoulement induit relatif est alors régi, après simplifications, par

$$\frac{\partial \vec{w}_f^{r1}}{\partial t} + (\vec{w}_f^{r0} \cdot \vec{\nabla}) \vec{w}_f^{r1} + (\vec{w}_f^{r1} \cdot \vec{\nabla}) \vec{w}_f^{r0} + (\vec{w}_f^{r1} \cdot \vec{\nabla}) \vec{w}_f^{r1} = -\frac{1}{\rho_f} \vec{\nabla} P^1 + \nu_f \vec{\Delta} \vec{w}_f^{r1} - 2\omega \vec{e}_3 \wedge \vec{w}_f^{r1}.$$

Dans le cas particulier maintenant où l'écoulement non perturbé est un écoulement de rotation solide dont la vitesse angulaire coïncide avec la vitesse de rotation du référentiel tournant, il apparaît alors que

$$\vec{w}_f^{r0} = -\vec{V}_p^r(t),$$

et finalement, l'équation du mouvement induit s'écrit simplement

$$\frac{\partial \vec{w}_f^{r1}}{\partial t} + (-\vec{V}_p^r(t) \cdot \vec{\nabla}) \vec{w}_f^{r1} + (\vec{w}_f^{r1} \cdot \vec{\nabla}) \vec{w}_f^{r1} + 2\omega \vec{e}_3 \wedge \vec{w}_f^{r1} = -\frac{1}{\rho_f} \vec{\nabla} P^1 + \nu_f \vec{\Delta} \vec{w}_f^{r1}. \quad (5.2.1)$$

De plus, dans l'étude qui correspond au mouvement libre d'une particule dans un écoulement en rotation solide, nous pouvons noter que la condition limite vérifiée par l'écoulement induit est donnée, par exemple pour une particule solide, par

$$\vec{w}_f^{r1} \simeq \dot{R}_p(t) \vec{e}_{R_p} \quad \text{lorsque} \quad |\vec{x}| = a,$$



sachant que dans le référentiel en rotation, le vecteur $\vec{e}_{R_p}$ est quasiment constant dans le temps puisque la vitesse angulaire de la particule est presque confondue avec la vitesse de rotation du cylindre.

Ainsi, il apparaît que la seule source d'instationnarité du problème lié au mouvement libre de la particule dans l'écoulement est donnée par $\dot{R}_p(t)$. Celle-ci est donc différente de celle que nous avons dans le référentiel dont les axes étaient fixes. En effet, si maintenant, nous réalisons une étude d'ordre de grandeur des différents termes du membre de gauche de l'équation (5.2.1) alors, nous obtenons, pour les termes convectifs :

$$\left| \frac{(\vec{V}_p \cdot \vec{\nabla}) \vec{w}_f^{r1}}{\nu_f \vec{\Delta} \vec{w}_f^{r1}} \right| \simeq \left| \frac{(\vec{w}_f^{r1} \cdot \vec{\nabla}) \vec{w}_f^{r1}}{\nu_f \vec{\Delta} \vec{w}_f^{r1}} \right| \simeq O\left(\frac{a V_g^r}{\nu_f}\right),$$

pour l'accélération de Coriolis sur le fluide :

$$\left| \frac{2\omega \vec{e}_3 \wedge \vec{w}_r^1}{\nu_f \vec{\Delta} \vec{w}_f^{r1}} \right| \simeq O\left(\frac{a^2 \omega}{\nu_f}\right),$$

et enfin, pour le terme instationnaire :

$$\left| \frac{\partial \vec{w}_f^{r1} / \partial t}{\nu_f \vec{\Delta} \vec{w}_f^{r1}} \right| \simeq O\left(\frac{a^2 \omega \lambda_r}{\nu_f}\right) = O(\eta S), \quad \text{puisque } \lambda_r = O(S).$$

En ne conservant donc que les termes qui sont en $O(\eta)$ dans l'équation (5.2.1), nous voyons que l'écoulement induit relatif est régi par l'équation

$$2\omega \vec{e}_3 \wedge \vec{w}_f^{r1} = -\frac{1}{\rho_f} \vec{\nabla} P^1 + \nu_f \vec{\Delta} \vec{w}_f^{r1}. \quad (5.2.2)$$

|| Pour parvenir à cette équation, seuls les termes en $O(Re)$ et en $O(\eta S)$ ont été négligés et par conséquent, les hypothèses qui sont faites ici sont plus faibles que celles qui ont été faites dans les chapitres précédents.

Dans ce contexte, la force induite qui s'exerce alors sur la particule a été obtenue par Herron *et al.* (1975) à l'aide de la méthode des développements asymptotiques raccordés. Bien que ces derniers n'aient considéré que le cas d'une particule solide, la force qu'ils ont obtenue peut être généralisée au cas d'une inclusion sphérique quelconque, toujours selon la remarque faite par Legendre et Magnaudet (1997), et celle-ci s'écrit dans le référentiel $\mathcal{R}_p^r$:

$$\vec{F}^{1r} = -2\pi\mu_f a \mathcal{R}_\mu \left[\vec{I} + \frac{\mathcal{R}_\mu}{3} \left(\frac{a^2 \omega}{\nu_f} \right)^{1/2} \begin{pmatrix} M_{11}^H & -M_{12}^H \\ M_{12}^H & M_{11}^H \end{pmatrix} \right] \vec{V}_p^r(t), \quad (5.2.3)$$

avec

$$M_{11}^H = \frac{5}{7} \quad \text{et} \quad M_{12}^H = \frac{3}{5}.$$

Notons qu'à l'aide de cette force, la trajectoire peut être calculée par exemple, en intégrant directement l'équation de mouvement de la particule dans le référentiel en rotation centré en o , et qui dans ce cas là est donnée par

$$m_p \frac{d\vec{V}_p^r}{dt} = \underbrace{(m_p - m_f) r \omega^2 \vec{e}_{R_p}}_{\vec{F}^0 + \vec{F}^{\text{centrifuge}}} - \underbrace{m_p 2\omega \vec{e}_3 \wedge \vec{V}_p^r}_{\text{Coriolis}} + \vec{F}^{1r}.$$

ou, et c'est ce que nous allons faire, en réécrivant l'expression de la force $\vec{F}^{1r}$ obtenue par Herron *et al.* (1975) dans le référentiel fixe du laboratoire. Pour cela, notons $\vec{\overline{P}}$ la matrice de passage entre les référentiels $\mathcal{R}_o$ et $\mathcal{R}_o^r$. Étant donné que le tenseur $\vec{\overline{M}}^H$ est antisymétrique, il est simple de montrer (voir par exemple Miyazaki, 1995a) que dans ce cas,

$$\vec{\overline{P}} \vec{\overline{M}}^H \vec{\overline{P}}^T = \vec{\overline{M}}^H,$$

et l'équation de mouvement écrite dans le référentiel $\mathcal{R}_o$ mais calculée à partir des résultats d'Herron *et al.* (1975) est donnée simplement par

$$m_p \frac{d\vec{V}_p}{dt} = \vec{F}^0 + 6\pi\mu_f a \left[\vec{I} + \left(\frac{a^2 \omega}{\nu_f} \right)^{1/2} \vec{\overline{M}}^H \right] \cdot \vec{V}_g(t). \quad (5.2.4)$$

Le tenseur de mobilité $\overline{\overline{M}}^H$ calculé dans le référentiel tournant en prenant en compte l'effet de l'accélération de Coriolis sur l'écoulement lointain peut donc être comparé directement au tenseur de mobilité $\overline{\overline{M}}$ obtenu en résolvant le problème instationnaire dans le référentiel non tournant, c'est à dire celui de l'équation (4.6.3) (page 118, chapitre 4). Compte tenu du fait que les simplifications qui ont été faites ne sont pas strictement identiques dans les deux référentiels, il est normal que les composantes des tenseur de mobilité $\overline{\overline{M}}^H$ et $\overline{\overline{M}}$ ne soient pas exactement les mêmes. Toutefois, l'écart entre $\overline{\overline{M}}^H$ et $\overline{\overline{M}}$ est faible, principalement en ce qui concerne les composantes diagonales puisque nous avons

$$M_{11}^H = 5/7 \simeq 0.714 \quad \text{et} \quad M_{11} = \sqrt{2}/2 \simeq 0.707, \quad \text{soit } 1 \% \text{ d'écart.}$$

En ce qui concerne les composantes non diagonales, l'écart est par contre un petit peu plus important puisque nous avons alors

$$M_{12}^H = 3/5 \simeq 0.6 \quad \text{et} \quad M_{12} = \sqrt{2}/2 \simeq 0.707 \quad \text{soit } 18 \% \text{ d'écart.}$$

Bien entendu, si la force induite qui implique le tenseur de mobilité $\overline{\overline{M}}^H$ est injectée dans l'équation de mouvement de la particule, le calcul des taux de migration et de rotation de la particule est identique à celui exposé dans la section 4.6, page 118 du chapitre 4 : il faut alors résoudre l'équation de mouvement (4.6.4) en prenant soin de remplacer M_{11} et M_{12} par M_{11}^H et M_{12}^H . Comme le montre l'équation (4.6.5), nous voyons que seules les composantes diagonales du tenseur de mobilité interviennent en $O(S^{3/2})$ dans le calcul du taux de migration λ_r et seules les composantes non diagonales interviennent dans le calcul de $\dot{\Theta}_p$ à l'ordre $O(S^{3/2})$.



Compte tenu d'une part de l'infime différence qui existe entre les composantes diagonales des tenseurs de mobilité $\overline{\overline{M}}^H$ et $\overline{\overline{M}}$, et puisque d'autre part les termes en $O(S^{3/2})$ sont de toute manière négligeables devant 1 dans l'expression de $\dot{\Theta}_p$, il nous est alors impossible de faire une distinction expérimentale entre les trajectoires prédites par la théorie Herron *et al.* (1975) et les trajectoires prédites par la théorie instationnaire.

Par exemple, sur les figures 5.1 et 5.2, les taux de migration radiale calculés à l'aide des deux tenseurs de mobilité sont représentés (notons qu'ils sont tous deux donnés par l'équation (4.6.5) en posant respectivement $M_{11} = \sqrt{2}/2$ et $M_{11}^H = 5/7$.)

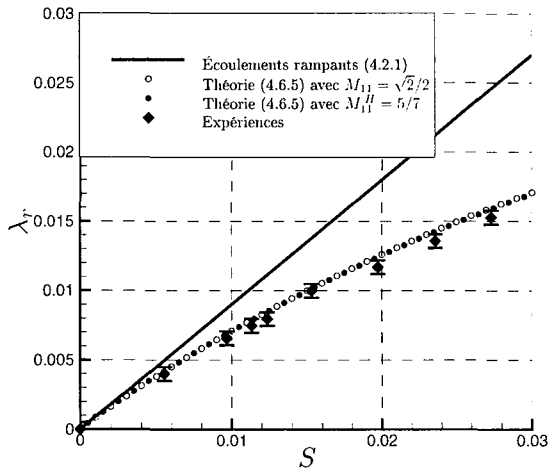


FIG. 5.1 – Comparaison des taux de migration obtenus pour une particule solide ($R_\mu = 3$).

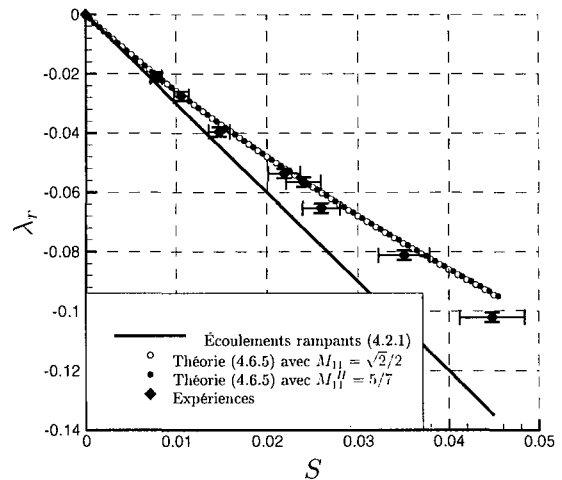


FIG. 5.2 – Comparaison des taux de migration obtenus pour une bulle ($R_\mu = 2$).

Ainsi, il semble donc, a priori, que dans notre étude, il y ait une réelle correspondance entre les effets de l'accélération de Coriolis sur l'écoulement induit dans le référentiel tournant $\mathcal{R}_p^r$ et l'effet du terme instationnaire sur l'écoulement induit lorsque les équations sont écrites dans le référentiel $\mathcal{R}_p$.

Pour mettre en évidence la différence entre les deux approches, il est intéressant de réécrire la force induite $\vec{F}^1$ donnée par l'équation (4.6.3) de la manière suivante

$$\vec{F}^1 = 2\pi\mu_f a \mathcal{R}_\mu \left(1 + \frac{\mathcal{R}_\mu}{3} \left(\frac{a^2 \omega}{\nu_f} \right)^{1/2} M_{11} \right) \vec{V}_g(t) + 2\pi\mu_f a \frac{\mathcal{R}_\mu^2}{3} \left(\frac{a^2 \omega}{\nu_f} \right)^{1/2} M_{12} \vec{e}_3 \wedge \vec{V}_g(t),$$

afin de faire apparaître explicitement le fait que la contribution des termes non diagonaux du tenseur de mobilité $\overline{\overline{M}}$ correspond à une force transversale à la vitesse de glissement. En comparant cette force à celle qui serait obtenue avec le tenseur de mobilité d'Herron *et al.* (1975), il semble donc que les termes convectifs qui ont été négligés dans le référentiel fixe n'apportent qu'une contribution sur cette force transversale puisque les valeurs de M_{11} et de M_{11}^H sont très proches. Pour tenter d'éclaircir ce point, nous effectuons donc le calcul de l'expression de la force hydrodynamique à partir de l'équation de mouvement de l'écoulement de perturbation (5.1.2) mais cette fois-ci, sans négliger les termes convectifs (voir annexe E.2). **De plus, et dans le but de mettre explicitement en évidence la contribution des termes instationnaires et convectifs, nous allons arbitrairement placer un coefficient α devant le terme instationnaire et β devant les termes convectifs. Ces coefficients (qui valent 1 en toute rigueur) font alors office de "traceurs" et tous calculs faits, nous obtenons :**

$$M_{11}(\alpha, \beta) = \frac{\sqrt{2}}{280} \left(\frac{(3\beta - \alpha)^3 \sqrt{|3\beta - \alpha|} + (\alpha + \beta)^{3/2} (\alpha^2 - 12\alpha\beta + 57\beta^2)}{\beta^3} \right) \quad (5.2.5)$$

et

$$M_{12}(\alpha, \beta) = \frac{\sqrt{2}}{280} \left(\frac{-|3\beta - \alpha|^{7/2} + (\alpha + \beta)^{3/2} (\alpha^2 - 12\alpha\beta + 57\beta^2)}{\beta^3} \right). \quad (5.2.6)$$

Bien entendu, nous pouvons alors vérifier que nous retrouvons les principaux résultats de la littérature (voir le tableau 5.1).

	Herron <i>et al.</i> : $\alpha = 1$ $\beta = 1$	BBO : $\alpha = 1$ $\beta = 0$	Gotoh : $\alpha = 0$ $\beta = 1$
$M_{11}(\alpha, \beta)$	5/7	$\sqrt{2}/2$	$3\sqrt{2}(19 + 9\sqrt{3})/280$
$M_{12}(\alpha, \beta)$	3/5	$\sqrt{2}/2$	$3\sqrt{2}(19 - 9\sqrt{3})/280$

TAB. 5.1 – Comparaison de la solution obtenue avec les principaux résultats de la littérature correspondant à l'étude de Herron *et al.* (1975), de Gotoh (1990) et l'étude du chapitre 4.

Clairement, ces résultats montrent que les effets instationnaires se mélangent de manière très complexe avec les effets d'inertie... Pour autant, la prise en compte des termes convectifs ne semble pas modifier de manière importante la valeur du coefficient M_{11} (voir la figure E.2, page 185). Ce résultat mérite de faire l'objet d'une analyse plus approfondie, et cela constitue une perspective à ce travail.

Dans la section suivante, nous nous proposons maintenant d'aborder une étude dans laquelle les résultats obtenus par Gotoh (1990) sont valides.

5.3 Analyse de l'étude de Gotoh (1990)

Pour illustrer l'étude réalisée par Gotoh (1990), reprenons l'équation de l'écoulement induit (5.1.2) qui rappelons-le, a été écrite dans un référentiel dont les axes sont fixes par rapport au référentiel du laboratoire. Dans les chapitres précédents, nous avons choisi de ne tenir compte dans cette équation, que du terme instationnaire et par conséquent, nous avons totalement négligé les termes convectifs. Pourtant, nous avons vu que ces termes convectifs sont du même ordre de grandeur que le terme instationnaire. Dans son étude, Gotoh (1990) a fait en quelque sorte, l'hypothèse inverse, c'est à dire qu'il a choisi de négliger le terme instationnaire de l'équation (5.1.2), mais de conserver les termes convectifs. En employant la méthode des développements asymptotiques raccordés, Gotoh est parvenu à calculer l'expression de la force qui s'exerce sur la particule dans ce cas là. Le tenseur de mobilité qu'il a obtenu, appelons le $\overline{M}^G$ peut être généralisé aux inclusions fluides et finalement, la force qui s'exerce sur une inclusion quelconque sera donnée sous une forme identique à celle de l'équation (4.6.3) (chapitre 4) en remplaçant M_{11} et M_{12} respectivement par :

$$M_{11}^G = \frac{3\sqrt{2}}{280}(19 + 9\sqrt{3}) \quad \text{et} \quad M_{12}^G = \frac{3\sqrt{2}}{280}(19 - 9\sqrt{3}). \quad (5.3.1)$$

De la même manière, en remplaçant M_{11} et M_{12} par M_{11}^G et M_{12}^G dans les équations (4.6.5) et (4.6.6), nous obtenons les taux de migration radiale et de rotation qui correspondent à la théorie de Gotoh. Dès lors, nous pouvons faire plusieurs remarques. En fait, si le terme en $O(S^{3/2})$ de l'équation (4.6.5) obtenu avec la théorie de Gotoh est comparé au terme en $O(S^{3/2})$ obtenu avec la théorie d'Herron *et al.* (1975), alors nous obtenons

$$\frac{3\sqrt{2}(19 + 9\sqrt{3})/280}{5/7} \simeq 0.73 \quad (27 \% \text{ d'écart})$$

ce qui implique qu'il y a une différence significative entre ces deux valeurs. D'autre part, sur la figure 5.3, nous voyons que le taux de migration calculé à l'aide de la théorie de Gotoh n'est pas en accord avec les expériences que nous avons réalisées, et en particulier, l'écart entre la théorie de Gotoh (1990) et l'expérience est supérieur à la taille des barres qui correspondent à nos incertitudes de mesure.

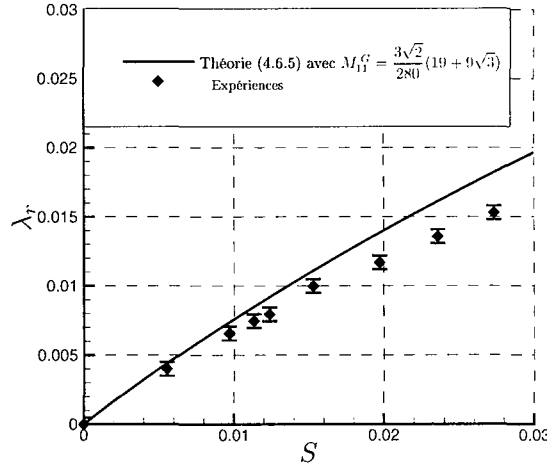


FIG. 5.3 – Comparaison du taux de migration radiale prédit par la théorie de Gotoh (1990) avec l'expérience, pour une particule solide ($R_\mu = 3$).

Aussi, en ce qui concerne la valeur de la composante M_{12}^G , non seulement l'écart entre la théorie d'Herron *et al.* (1975) et la théorie de Gotoh (1990) est important, puisque

$$\frac{3\sqrt{2}(19 - 9\sqrt{3})/280}{3/5} \simeq 0.08 \quad (92 \% \text{ d'écart}).$$

Mais quand bien même la théorie de Gotoh (1990) n'est pas en bon accord avec nos expériences, le tenseur de mobilité qu'il a obtenu n'en est pas faux pour autant. Simplement, lorsqu'une particule est libre de tout mouvement dans un écoulement en rotation solide, il n'est pas possible de négliger le terme instationnaire dans les équations qui régissent l'écoulement induit. Notons que la différence entre les tenseurs de mobilité calculés respectivement par Herron *et al.* (1975) et Gotoh (1990) a été analysée en détail par Miyazaki (1995a). Ce dernier a montré que chacun des deux tenseurs de mobilité est correct à condition que les équations qui régissent l'écoulement induit soient bien quasi-stationnaires dans le référentiel où ils ont été calculés. Le fait que ces deux tenseurs de mobilité ne soient pas identiques implique donc simplement qu'il n'existe pas de situation physique où l'écoulement induit par le mouvement horizontal de la particule est décrit simultanément par des équations quasi-stationnaires dans les deux repères à la fois. Aussi notre expérience en est-elle une parfaite illustration.

En réalité, la seule situation qui puisse être décrite par des équations stationnaires dans les deux référentiels à la fois correspond au problème de Childress (1964), c'est à dire, lorsque la particule se déplace à vitesse constante le long de l'axe de la rotation. Si dans cette section nous avons également considéré le mouvement vertical de la particule, nous aurions vu que les composantes M_{33}^G et M_{33}^H des tenseurs obtenus par Herron *et al.* (1975) et Gotoh (1990) coïncident (voir section 1.4.3, page 29 du chapitre 1).

Dans la section suivante, nous nous proposons de montrer une situation dans laquelle le tenseur de mobilité de Gotoh (1990) s'applique.

5.4 Illustration aux travers de l'exemple de la centrifugeuse horizontale

Cette étude concerne le mouvement d'une petite inclusion fluide dans un écoulement en rotation solide horizontal. Ainsi, contrairement à ce qui a été fait jusqu'à présent, l'axe de rotation est maintenant perpendiculaire à l'accélération de la pesanteur, comme le montre le schéma de la figure 5.4. De plus, et conformément aux hypothèses faites par Gotoh (1990), nous allons supposer que

$$\left(\frac{a^2 \omega}{\nu_f} \right)^{1/2} \gg \frac{a V_g}{\nu_f}.$$

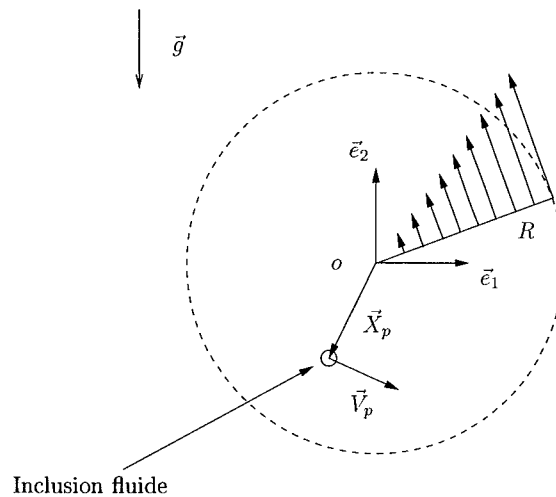


FIG. 5.4 – Schéma d'illustration de l'étude.

Dans une telle situation, la première constatation qu'il est possible de faire est que le mouvement de l'inclusion est complètement contenu dans le plan $(o, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$. Par ailleurs, à condition que la particule soit plus légère que le fluide environnant, il existe une position d'équilibre décentrée à laquelle nous allons maintenant nous intéresser.

5.4.1 Discussion sur la position d'équilibre de l'inclusion

Sans même résoudre l'équation de mouvement de la particule, la position d'équilibre de l'inclusion peut être obtenue en recherchant le lieu où la somme des forces qui s'exercent sur l'inclusion et qui possèdent une composante "stationnaire" s'annule. En passant, nous pouvons remarquer que si nous adoptons dans l'équation de mouvement de l'inclusion, l'expression de la force de masse ajoutée d'Auton (1987), alors cette dernière a une composante stationnaire non nulle (voir par exemple la discussion proposée page 97 du chapitre 3), alors que si nous choisissons l'expression obtenue par exemple dans l'équation BBO, alors elle n'en a pas ! En fait, précisons tout de suite que compte tenu des hypothèses que nous avons faites ici, cela n'a aucune conséquence car de toute façon, la contribution de la force de masse ajoutée sur la position d'équilibre de l'inclusion sera en $O(S^2)$ et de ce fait, elle est négligeable. Il en va de même pour le gradient de pression de l'écoulement non perturbé et finalement cette position d'équilibre pourra être obtenue en écrivant simplement que la force de traînée qui s'exerce sur l'inclusion compense la force de flottabilité. Or justement, c'est là qu'intervient le tenseur de mobilité de Gotoh. En effet, si l'inclusion a atteint une position d'équilibre, alors les équations qui régissent l'écoulement induit dégénèrent et deviennent stationnaires, dans le référentiel du laboratoire. Dans cette situation, les hypothèses faites par Gotoh sont vérifiées et les résultats qu'il a obtenus s'appliquent. Ainsi, nous pouvons écrire que lorsque la particule atteint cette position, nous avons d'une part $\vec{V}_p = 0$ et d'autre part

$$2\pi\mu_f a \mathcal{R}_\mu \left[\bar{I} + \frac{\mathcal{R}_\mu}{3} \left(\frac{a^2 \omega}{\nu_f} \right)^{1/2} \begin{pmatrix} M_{11}^G & -M_{12}^G \\ M_{12}^G & M_{11}^G \end{pmatrix} \right] \cdot \vec{V}_f(\vec{X}_p) + (m_p - m_f) \vec{g} = \vec{0} \quad (5.4.1)$$

où les composantes M_{11}^G et M_{12}^G sont données par l'équation (5.3.1).

Pour garder des notations homogènes par rapport aux chapitres précédents, nous allons normaliser, dans l'équation (5.4.1), les longueurs qui correspondent aux coordonnées de $\vec{X}_p$ par une certaine longueur arbitraire R , et les vitesses par $R\omega$. Ainsi, nous ferons apparaître les nombres sans dimension

$$S = \frac{a^2 \omega}{9 \nu_f} \quad \text{et} \quad \text{Fr} = \frac{R\omega}{g}.$$

que nous avons déjà défini. Notons que dans cette étude nous avons posé $\vec{g} = -g \vec{e}_2$ (voir figure 5.4) et la vitesse normalisée est donnée par

$$\vec{V}_f^0(\vec{X}_p) = (-Y_p \vec{e}_1 + X_p \vec{e}_2).$$

Compte tenu de cela, l'équation (5.4.1) peut être réécrite de la manière suivante :

$$\left[\bar{I} + \mathcal{R}_\mu S^{1/2} \begin{pmatrix} M_{11}^G & -M_{12}^G \\ M_{12}^G & M_{11}^G \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} -Y_p \\ X_p \end{pmatrix} = \frac{6 S (\gamma - 1)}{\mathcal{R}_\mu \text{Fr}} \vec{e}_2. \quad (5.4.2)$$

Pour résoudre cette équation, il est pratique d'introduire à nouveau la variable complexe $\mathcal{Z} = X_p + i Y_p$ dans l'équation (5.4.2) et finalement, celle-ci devient

$$\mathcal{Z} \left(i + \mathcal{R}_\mu S^{1/2} (M_{11}^G i - M_{12}^G) \right) = \frac{6 S (\gamma - 1) i}{\mathcal{R}_\mu \text{Fr}}. \quad (5.4.3)$$

Posons

$$\mathcal{Z}_{\text{eq}} = X_{\text{eq}} + i Y_{\text{eq}},$$

la solution de cette équation, qui dans ce cas s'obtient simplement :

Position d' équilibre de l'inclusion	$\left\ \right.$	$\begin{aligned} X_{\text{eq}} &= \frac{6 S (\gamma - 1)}{\mathcal{R}_\mu \text{Fr}} \left(1 - \underbrace{\mathcal{R}_\mu S^{1/2} M_{11}^G}_{\text{Effets d'inertie}} \right) + O(S^2), \\ Y_{\text{eq}} &= -\frac{6 S (\gamma - 1)}{\mathcal{R}_\mu \text{Fr}} \underbrace{\mathcal{R}_\mu S^{1/2} M_{12}^G}_{\text{Effets d'inertie}} + O(S^2). \end{aligned}$
---	-------------------	--

A présent, nous pouvons analyser les effets d'inertie induits par les termes convectifs sur la position d'équilibre de l'inclusion. Tout d'abord, nous pouvons voir que si nous développons les expressions de X_{eq} et de Y_{eq} , la contribution "nette" des effets d'inertie ne dépend pas de la nature de l'inclusion puisque les termes $\mathcal{R}_\mu$ se simplifient. Nous avons déjà fait une remarque similaire en ce qui concernait la contribution nette des effets du terme instationnaire sur les taux de migration et de rotation d'une inclusion fluide.

Ensuite, nous pouvons voir, en ce qui concerne l'abscisse de la position d'équilibre (i.e. X_{eq}), que les effets d'inertie ont tendance à rapprocher l'inclusion du centre de la rotation, puisque $M_{11}^G > 0$. Cela se comprend bien, puisque les effets d'inertie augmentent la traînée exercée par le fluide sur l'inclusion, et comme la force de flottabilité est quant à elle, constante alors l'équilibre est atteint pour une valeur de X_{eq} inférieure à celle qui serait obtenue sans prendre en compte les termes convectifs.

En ce qui concerne maintenant l'ordonnée de la position d'équilibre et puisque $M_{12}^G > 0$, nous voyons que $Y_{eq} > 0$. Cela s'explique donc du fait de l'existence d'une force transversale à la vitesse de glissement de l'inclusion. Aussi, l'inclusion est située *au dessus* du plan médian perpendiculaire à l'accélération de la pesanteur et passant par le centre de la rotation. Notons que ce résultat est alors contraire à celui obtenu par Coimbra et Kobayashi (2002) puisque ces derniers ont introduit dans leur équation de mouvement de la particule, la force de portance de Saffman qui est de signe opposé à la force de portance obtenue par Gotoh (1990). En outre, la force de portance qu'ils ont utilisée est près de 6 fois plus importante que celle prédite par Gotoh...

Pour terminer cette partie consacrée à la position d'équilibre, nous pouvons faire diverses remarques. La première est que la position d'équilibre est stable pour tout $\gamma < 1$, et instable si $\gamma > 1$, ce qui est évident puisque la particule est alors expulsée du centre de la rotation. Une autre remarque est que pour que le tenseur de mobilité de Gotoh s'applique, il faut par hypothèse que $(a^2 \omega / \nu_f)^{1/2} \gg a V_g / \nu_f$. Or lorsque la particule a atteint sa position d'équilibre, le nombre de Reynolds Re est donné à l'ordre de grandeur dominant par

$$Re = \frac{(R \omega X_{eq}) a}{\nu_f}$$

ce qui nous conduit à écrire que la position d'équilibre qui est obtenue ici est correctement estimée à condition que la relation

$$\left(\frac{a^2 \omega}{\nu_f} \right)^{1/2} \gg \frac{2 a^3 (\gamma - 1) g}{3 \mathcal{R}_\mu \nu_f^2}$$

soit vérifiée. Enfin notons que même à grand nombre de Reynolds, il existe une position d'équilibre (voir par exemple la thèse de Naciri, 1992).

5.4.2 Discussion sur le mouvement de la particule avant d'atteindre sa position d'équilibre

Dans la section précédente, nous nous sommes intéressés à la position d'équilibre de l'inclusion dans l'écoulement horizontal. Nous allons maintenant dire quelques mots sur la manière dont la particule se rapproche de cette position et nous allons voir que ce problème est en fait assez complexe. En effet, lorsque la particule atteint sa position d'équilibre, il n'y a aucune ambiguïté quant au fait que les équations qui régissent l'écoulement induit deviennent stationnaires, et donc sur le fait que le tenseur de mobilité de Gotoh (1990) s'applique. Au passage, et bien que cela soit évident, notons que lorsque la particule a atteint sa position d'équilibre dans le référentiel fixe du laboratoire, alors dans le référentiel qui tourne à la même vitesse que le fluide, la condition limite vérifiée par l'écoulement induit est bien instationnaire et le tenseur de mobilité obtenu par Herron *et al.* (1975) ne s'applique donc pas. Par contre, lorsqu'une inclusion est relâchée depuis un point situé à une certaine distance de sa position d'équilibre, alors le temps que met la particule pour rejoindre sa position d'équilibre est très grand, et pendant ce laps de temps, son mouvement est alors instationnaire dans les deux référentiels à la fois. En toute rigueur, la trajectoire de la particule pourrait être calculée numériquement à partir des résultats de Miyazaki (1995a), ou encore être estimée en calculant la solution exacte de l'équation de mouvement de la particule dans le cadre des écoulements rampants instationnaires... Précisons que la résolution de l'équation de mouvement de la particule avec force d'histoire peut se faire à l'aide des transformées de Laplace de la même manière que ce qui a été fait dans les chapitres précédents, mais nous ne le ferons pas ici.

Revenons plutôt sur l'étude réalisée par Coimbra et Kobayashi (2002) (écoulement en rotation solide horizontal mais avec une particule solide légère). Comme nous l'avons déjà fait remarquer, pour tenter de prendre en compte les effets d'inertie sur le mouvement de la particule, ces derniers ont introduit dans l'équation de mouvement de la sphère, une force de portance semblable à celle de Saffman (1965). Toutefois, parce que le problème est aussi instationnaire, ils ont également pris en compte un terme d'histoire de la force de portance... Ainsi, ils proposent donc une équation de mouvement de la particule, qui se veut très générale – à condition que la vorticité de l'écoulement non perturbé soit constante – et qui consiste à introduire, en plus de toutes les forces habituelles¹, l'expression suivante :

$$\vec{F}_l = -C_s \rho_f a^2 \left(\frac{\nu_f}{|\vec{\zeta}|} \right)^{1/2} \vec{\zeta} \wedge \left(\vec{V}_g(t) + \frac{a}{\sqrt{\nu_f} \pi} \int_0^t \frac{d\vec{V}_g(\tau)}{d\tau} \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} \right)$$

où $C_s = 6.46$ est la constante de Saffman (voir section 1.4.2, page 26 du chapitre 1) et où

$$\vec{\zeta} = \vec{\nabla} \wedge \vec{V}_f^0 \quad (\text{vorticité constante}).$$

  la fin de la partie 5.4.1, nous avons déjà noté que la force de portance de Saffman (1965), qui a été calculée dans le cadre des écoulements cisaillés, surestime assez nettement la force transversale qui s'exerce sur la particule si celle-ci est employée telle quelle dans le cadre de la rotation solide. Mais de plus, même dans le cadre des écoulements cisaillés, l'expression qui est proposée par Coimbra et Kobayashi (2002) présente certaines inconsistances physiques. En effet, imaginons par exemple une particule qui se meut parall l ment aux lignes de courant dans un écoulement de Couette et dont la vitesse de glissement est telle que $|\vec{V}_g(t)| \propto H(t)$ où $H(t)$ est la fonction d'Heaviside. Alors, la force de portance proposée par Coimbra et Kobayashi (2002)   $t = 0$ est initialement infinie, et relaxe ensuite vers la force stationnaire de Saffman (1965), tout en restant toujours supérieure à sa valeur. Cela est en contradiction par exemple avec les résultats numériques de Legendre et Magnaudet (1998) et de toute manière, physiquement, nous voyons bien que tant que la perturbation générée par la particule n'a pas diffusé dans tout le domaine fluide, la force de portance subie par la particule doit être inférieure à celle prédite par Saffman, et celle-ci doit mettre un certain temps avant d'atteindre sa valeur stationnaire. Ce dernier point a motivé une étude plus approfondie qui est présentée dans le chapitre 6 et qui est complémentaire à ce travail de thèse.

5.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons comparé les résultats obtenus par Herron *et al.* (1975)   ceux que nous avons obtenus précédemment, dans les chapitre 3 et 4, pour prédire la migration de la particule. Nous avons noté que l'approche d'Herron *et al.* pouvait être généralisée aux cas des inclusions fluides et permettait de calculer, avec plus de précision, la valeur de la force qui s'exerce sur la particule. La comparaison montre que les résultats obtenus indépendamment dans les deux référentiels sont très proches.

Dans un deuxième temps, nous avons discuté des résultats de Gotoh (1990) et nous avons montré que ces derniers ne pouvaient pas être appliqués pour prédire correctement la migration de la particule dans un écoulement en rotation solide, et cela à cause de l'instationnarité du problème (en quelque sorte, notre expérience est une illustration de l'étude de Miyazaki, 1995a).

Enfin, nous avons ensuite présenté une étude où les résultats de Gotoh (1990) pouvaient être appliqués et qui concerne la détermination de la position d'équilibre dans un écoulement en rotation solide horizontal.

1. gradient de pression de l'écoulement non perturbé, flottabilité, traînée, masse ajoutée et histoire

Chapitre 6

Thème de recherche complémentaire : Expression temporelle de la force de portance de Saffman (1965)

6.1 Introduction

Dans cette étude, nous nous proposons d'obtenir une expression temporelle de la force de portance de Saffman (1965) à partir de l'expression fréquentielle de la force proposée par Asmolov et McLaughlin dans leur étude intitulée "The inertial lift on an oscillating sphere in a linear shear flow" et publiée dans *Int. journal of multiphase flow* (1999). En effet, puisque le problème qu'ils ont traité est linéaire, les résultats qu'ils ont obtenus peuvent *a priori* être utilisés pour obtenir l'expression de la force de portance lorsque la particule se déplace avec une vitesse arbitraire. Mais compte tenu de la complexité analytique de l'expression fréquentielle de la force qu'ils ont obtenue, celle-ci ne permet pas d'obtenir une expression temporelle explicite. On peut cependant y parvenir moyennant quelques simplifications. C'est ce que nous proposons de faire dans ce chapitre. Dans un premier temps, nous sommes donc amenés à décrire l'étude qu'ils ont réalisée.

6.2 Analyse de l'étude réalisée par Asmolov et McLaughlin

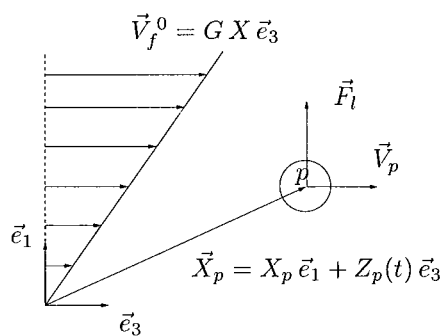


FIG. 6.1 – Configuration de l'étude de Asmolov et McLaughlin (1999)

Dans l'objectif de généraliser l'étude de Saffman (1965) au cas d'une sphère solide qui se déplace avec une vitesse qui dépend du temps, Asmolov et McLaughlin ont considéré un écoulement cisailé qui est représenté sur le schéma de la figure 6.1. Cet écoulement, lorsqu'il n'est pas perturbé, s'écrit, dans le référentiel du laboratoire $\mathcal{R}_o$ et avec les mêmes notations que celles employées dans le chapitre 1 :

$$\vec{V}_f^0 = G X \vec{e}_3 ,$$

où G est alors le taux de cisaillement de l'écoulement. La particule est bien entendu supposée sphérique (de rayon a), et elle est localisée dans $\mathcal{R}_o$ à l'aide du vecteur

$$\vec{X}_p(t) = X_p \vec{e}_1 + Z_p(t) \vec{e}_3.$$

Précisons que dans toute cette étude, la particule n'est susceptible de se déplacer que suivant l'axe $\vec{e}_3$ ce qui implique que X_p est une constante, et comme hypothèses supplémentaires, Asmolov et McLaughlin ont posé que

$$1 \gg \left(\frac{a^2 G}{\nu_f} \right)^{1/2} \gg \frac{a V_g}{\nu_f}. \quad (6.2.1)$$

De ce fait, nous pouvons d'ores et déjà noter que si la vitesse de la particule est stationnaire dans $\mathcal{R}_o$, c'est à dire si

$$\frac{d\vec{X}_p(t)}{dt} = \frac{dZ_p(t)}{dt} \vec{e}_3 = \vec{0},$$

alors cette étude devient strictement identique à celle considérée par Saffman (1965) (voir page 27 du chapitre 1). Dans l'étude d'Asmolov et McLaughlin, la particule se déplace avec une vitesse telle que

$$\vec{V}_g(t) = \vec{V}_f^0 \left(\vec{X}_p(t) \right) - \vec{V}_p(t) = -U_\omega \exp(-i\omega t) \vec{e}_3.$$

En reprenant le formalisme que nous avons utilisé tout au long de la thèse, c'est à dire en posant

$$\bar{\bar{A}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ G & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

l'équation de mouvement de l'écoulement induit, exprimé dans le référentiel de Koenig $\mathcal{R}_p$ lié à la particule dans ce problème s'écrit alors

$$\frac{\partial \vec{w}_f^1}{\partial t} + \left((\bar{\bar{A}} \cdot \vec{x}) \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{w}_f^1 + \bar{\bar{A}} \cdot \vec{w}_f^1 = -\frac{1}{\rho_f} \vec{\nabla} P^1 + \nu_f \vec{\Delta} \vec{w}_f^1, \quad (6.2.2)$$

et elle est alors associée à la condition limite

$$\vec{w}_f^1 = \bar{\bar{A}} \cdot \vec{x} + U_\omega \exp(-i\omega t) \vec{e}_3 \quad \text{lorsque} \quad |\vec{x}| = a.$$

Dans leur étude, les auteurs ont choisi de s'intéresser uniquement à la composante suivant $\vec{e}_1$ de la force exercée par l'écoulement sur la particule, et ils ont posé :

$$\vec{F}^1 \cdot \vec{e}_1 = F_\omega \exp(-i\omega t).$$

Ainsi, après avoir introduit, dans leurs équations, la pulsation normalisée

$$\Omega = \frac{\omega}{G},$$

les auteurs ont calculé l'expression de F_ω à l'aide de la méthode des développements asymptotiques raccordés. De ce fait, et d'ailleurs comme le souligne les auteurs eux-mêmes, il convient de faire la remarque suivante :

 **Compte tenu des hypothèses qu'il est nécessaire de faire pour pouvoir appliquer la méthode des développements asymptotiques raccordés, le calcul de F_ω n'est rigoureusement valable que si**

$$\Omega \ll \frac{\nu_f}{a^2 G}.$$

Tous calculs faits, les auteurs ont obtenu (équation (24) de leur papier, en posant $I(\Omega) = 2J(\Omega)$) :

$$F_\omega = \frac{9}{\pi} \rho_f a^2 (G \nu_f)^{1/2} U_\omega J(\Omega), \quad (6.2.3)$$

où la fonction $J(\Omega)$ est une fonction complexe telle que

$$J(\Omega) \rightarrow 2.254 + 3.894\Omega i \quad \text{lorsque } \Omega \ll 1, \quad (6.2.4)$$

et

$$J(\Omega) \rightarrow \frac{7\pi^2(1+i)}{60\sqrt{2\Omega}} \quad \text{lorsque } \Omega \gg 1 \quad \left(\text{sachant que } \Omega \ll \frac{\nu_f}{a^2 G} \right). \quad (6.2.5)$$

Notons que la valeur de $J(\Omega)$ lorsque $\Omega \rightarrow 0$ et qui est alors donnée par l'équation (6.2.4) est conforme au résultat de Saffman (1965). Hormis ces deux comportements asymptotiques établis analytiquement pour $J(\Omega)$, Asmolov et McLaughlin ont aussi calculé numériquement différentes valeurs de $J(\Omega)$ pour des valeurs intermédiaires de Ω . Ils ont alors exprimé $J(\Omega)$ sous la forme de deux fonctions d'interpolations

$$\mathcal{R}e(J(\Omega)) = \frac{a_0 + a_1 \Omega^1 + a_2 \Omega^2 + a_3 \Omega^3 + a_4 \Omega^{7/2}}{1 + a_5 \Omega + a_6 \Omega^2 + a_7 \Omega^3 + a_8 \Omega^4}, \quad (6.2.6)$$

et

$$\mathcal{I}m(J(\Omega)) = \frac{b_0 + b_1 \Omega^1 + b_2 \Omega^2 + b_3 \Omega^3 + b_4 \Omega^{7/2}}{1 + b_5 \Omega + b_6 \Omega^2 + b_7 \Omega^3 + b_8 \Omega^4}, \quad (6.2.7)$$

faisant intervenir en tout 18 coefficients (9 pour la partie réelle de $J(\Omega)$, et 8 pour sa partie imaginaire). Les valeurs de ces coefficients sont repris dans le tableau 6.1.

$\mathcal{R}(J(\Omega))$	$\mathcal{I}(J(\Omega))$
$a_0 = 2.254$	$b_0 = 0$
$a_1 = 4.528$	$b_1 = 3.378$
$a_2 = -2.378$	$b_2 = 1.391$
$a_3 = -0.648$	$b_3 = -0.575$
$a_4 = 2.079$	$b_4 = 1.139$
$a_5 = 2.009$	$b_5 = 0.523$
$a_6 = 4.048$	$b_6 = 5.199$
$a_7 = -3.545$	$b_7 = -1.396$
$a_8 = 2.554$	$b_8 = 1.399$

TAB. 6.1 – Valeurs des coefficients intervenant dans les deux fonctions d'interpolations de $J(\Omega)$ (voir dans Asmolov & McLaughlin 1999)

A présent, définissons les transformées et transformées inverses de Fourier suivantes

$$F_\omega = \int_{\mathbb{R}} F(t) \exp(i\omega t) dt \quad \text{et} \quad F(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} F_\omega \exp(-i\omega t) d\omega.$$

Puisque le problème considéré par Asmolov et McLaughlin est linéaire, si F_ω correspond à la force de portance qui s'exerce sur la particule lorsque cette dernière vérifie une condition limite harmonique, alors l'expression de la force de portance qui s'exerce sur la particule lorsque son mouvement est arbitraire sera donnée (voir par exemple Landau et Lifchitz, 1989) par

$$F = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} F_\omega \exp(-i\omega t) d\omega = \mathcal{F}^{-1}(F_\omega), \quad (6.2.8)$$

et en particulier dans ce problème F_ω est donnée par l'équation (6.2.3). Toutefois, pour pouvoir calculer l'expression de l'équation (6.2.8) il se présente deux problèmes, que nous allons maintenant détailler.

Le premier problème est que pour pouvoir calculer l'expression de la fonction $J(\Omega)$, et à cause de la méthode employée, les auteurs ont posé que $\Omega \ll \nu_f/(a^2 G)$. Dans ce problème, et comme le montre l'équation (6.2.1), il se trouve que :

$$\frac{a^2 G}{\nu_f} \gg 1$$

ce qui implique que la pulsation normalisée Ω peut être très grande devant l'unité, mais elle est, en toute rigueur, bornée. Aussi, lorsque $\Omega \gg 1$, les auteurs ont montré que $J(\Omega)$ était donnée par l'équation (6.2.5). Pour pouvoir calculer l'expression (6.2.8), nous sommes donc amenés à supposer que l'expression (6.2.5) reste valable pour tout $\Omega \gg 1$ et cela sans restriction. Ainsi, nous poserons

$$J(\Omega) \rightarrow \frac{7\pi^2(1+i)}{60\sqrt{2}\Omega} \quad \text{lorsque } \Omega \gg 1 \quad \text{et cela, quelle que soit } \Omega. \quad (6.2.9)$$

Notons que cette hypothèse ne sera pas sans conséquence par la suite. En effet, ne connaissant pas l'expression exacte de F_ω pour les très grandes fréquences d'oscillation, l'expression temporelle de la force de portance que nous obtenons lorsque la particule se déplace avec une vitesse arbitraire ne sera pas, en toute rigueur valable pour des temps de l'ordre de (a^2/ν_f) . Dans la suite, lorsque nous parlerons de temps courts, nous parlerons de temps petits devant $1/G$, mais tout de même grands devant (a^2/ν_f) .

Le second problème que nous rencontrons pour pouvoir calculer la transformée de Fourier inverse de F_ω est que compte tenu de leurs expressions analytiques, les fonctions d'interpolations (6.2) et (6.3) n'admettent pas, à notre connaissance, de transformée de Fourier inverse. Dans la suite, nous serons donc amenés à réécrire ces fonctions d'interpolations, mais sous une forme différente de sorte que celles-ci admettent non seulement une transformée de Fourier inverse analytique, mais aussi, réelle.

6.2.1 La force de portance au premier ordre

Comportement temporel attendu de la force de portance

En nous appuyant sur les hypothèses qui ont été décrites dans la section précédente, nous allons à présent tenter de mettre en évidence le comportement temporel asymptotique de la force de portance, c'est à dire aux temps courts et aux temps longs. Tout d'abord, en écrivant que l'expression temporelle de la force de portance aux temps courts doit correspondre à la transformée de Fourier inverse de F_ω quand $\Omega \gg 1$, et en utilisant la relation (6.2.9), alors nous avons

$$F_l(t) \sim A_1 \mathcal{F}^{-1}(U_\omega) * \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{1+i}{\sqrt{\omega}}\right) \quad \text{pour } t \rightarrow 0,$$

où le symbole $*$ correspond au produit de convolution (dans l'espace temporel) et où

$$A_1 = \frac{21\pi}{20} \left(\frac{\nu_f}{2}\right)^{1/2} \rho_f a^2 G.$$

(Notons que le coefficient A_1 a été introduit uniquement dans le but d'alléger les écritures.) Sachant que

$$\mathcal{F}^{-1}(U_\omega) = V_g(t),$$

et que

$$\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{1+i}{\sqrt{\omega}}\right) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}t},$$

(voir par exemple Landau et Lifchitz (1989) ou l'annexe A.3), nous avons finalement,

$$F_l(t) \sim A_1 \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{V_g(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} d\tau \quad \text{pour } t \rightarrow 0. \quad (6.2.10)$$

Ce résultat suggère donc que si l'expression de la force de portance instationnaire est de la forme

$$F_l(t) = A_1 \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^t K_l(t-\tau) V_g(\tau) d\tau \quad \forall t$$

alors, nous devrions avoir

$$K_l(t) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{t}} \quad \text{pour } t \rightarrow 0.$$

Notons que nous avons supposé que pour les instants $t < 0$ la vitesse de glissement était nulle (d'où la borne inférieure de l'intégrale temporelle).

Afin maintenant de mettre en évidence le comportement aux temps longs de la force de portance, supposons maintenant que la vitesse de glissement V_g devienne constante. La force de portance doit donc tendre vers sa valeur stationnaire, valeur qui n'est rien d'autre que la force de portance de Saffman (1965) (plus le *Corrigendum* 1968) c'est à dire que nous devrions avoir,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} A_1 \frac{\sqrt{2} V_g}{\sqrt{\pi}} \int_0^t K_l(t - \tau) d\tau = \frac{9}{\pi} \rho_f a^2 (G \nu_f)^{1/2} 2.254 V_g.$$

A nouveau, introduisons pour simplifier les écritures le coefficient

$$A_2 = \frac{9}{\pi} \rho_f a^2 (G \nu_f)^{1/2} 2.254,$$

et en résumé, l'expression du noyau temporel qui est recherché doit satisfaire les deux conditions suivantes :

$$\left\| \begin{array}{l} K_l(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \quad \text{lorsque } t \rightarrow 0 \\ \text{et} \\ \int_0^\infty K_l(\tau) d\tau = \frac{A_2 \sqrt{\pi}}{A_1 \sqrt{2}} = \text{constante.} \end{array} \right. \quad (6.2.11) \quad (6.2.12)$$

Il existe plusieurs expressions analytiques pour $K_l(t)$ qui satisfont ces deux conditions et notamment les fonctions du type

$$K_l(\tau) = \frac{f(\tau)}{\sqrt{\tau}} \quad (6.2.13)$$

à condition que $f(0) = 1$, et que $f(\tau)$ décroisse plus rapidement que $1/\sqrt{\tau}$. En particulier, les fonctions

$$K_l(\tau) = \frac{\exp(-\alpha_n \tau^n)}{\sqrt{\tau}} \quad \text{avec } n \in \mathbb{R}^+ / \{0\}$$

et où α_n est une constante, peuvent satisfaire les deux conditions (6.2.11) et (6.2.12). Compte tenu de (6.2.12), nous avons alors pour un n donné,

$$\alpha_n = \left(\frac{A_1 \sqrt{2} \Gamma(\frac{1}{2n})}{n A_2 \sqrt{\pi}} \right)^{2n}. \quad (6.2.14)$$

Pour des raisons de simplicité, nous allons maintenant nous intéresser naïvement, au cas $n = 1$, à savoir

$$K_l(\tau) = \frac{\exp(-\alpha_1 \tau)}{\sqrt{\tau}}.$$

Il est trivial de voir que cette expression satisfait bien la condition temps courts (6.2.11). De plus sachant que $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$, il apparaît alors, compte tenu de la valeur de A_1 et A_2 , que

$$\alpha_1 = 2 \left(\frac{A_1}{A_2} \right)^2 \approx \frac{G}{4} \quad (\text{en toute rigueur } \alpha_1 \approx 0.26096 G).$$

En première approximation, nous avons donc l'expression de la force de portance suivante :

$$\left\| \begin{array}{l} \text{La force de portance} \\ \text{au premier ordre} \\ \text{en posant } n = 1 \end{array} \right. \quad F_l(t) = \frac{A_2}{2} \left(\frac{G}{\pi} \right)^{1/2} \int_0^t \frac{e^{-G(t-\tau)/4}}{\sqrt{t-\tau}} V_g(\tau) d\tau. \quad (6.2.15)$$

Afin de tester la validité de cette expression, calculons maintenant sa transformée de Fourier. Nous obtenons alors, tous calculs faits,

$$\mathcal{F}(F_l(t)) = \frac{9}{\pi} \rho_f a^2 (G \nu_f)^{1/2} U_\omega \frac{2.254}{\sqrt{1 - 4 I \Omega}}.$$

Posons maintenant

$$J_0(\Omega) = \frac{2.254}{\sqrt{1 - 4 I \Omega}}$$

et comparons sur les figures 6.2 et 6.3 cette expression aux résultats obtenus par Asmolov et McLaughlin pour $J(\Omega)$, qui ici sont donnés par les équations (6.2.6) et (6.2.7).

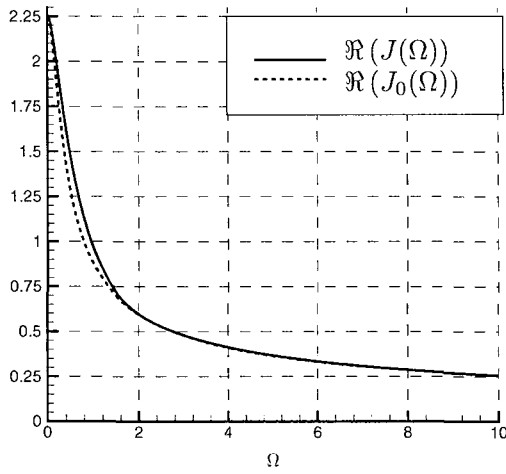


FIG. 6.2 – Comparaison entre $\Re(J(\Omega))$ et $\Re(J_0(\Omega))$ en fonction de Ω

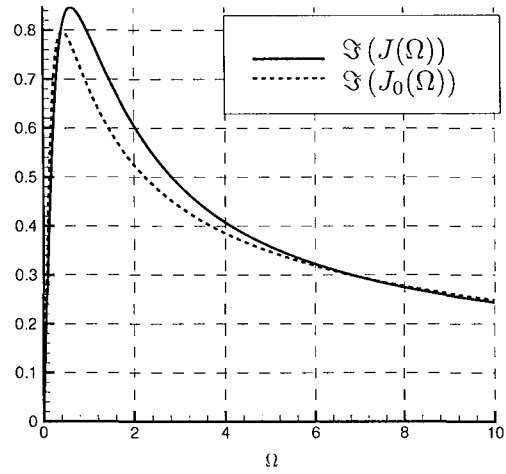


FIG. 6.3 – Comparaison entre $\Im(J(\Omega))$ et $\Im(J_0(\Omega))$ en fonction de Ω

Il apparaît clairement qu'avec cette seule expression de $J_0(\Omega)$, nous retrouvons une très grande partie de la fonction $J(\Omega)$. Précisons de plus que l'expression de $J_0(\Omega)$ est très simple, et pour l'obtenir, nous n'avons eu à caler qu'un seul coefficient (à savoir α_1).

6.2.2 Calcul de la force de portance à l'ordre suivant

Dans la partie précédente, nous avons obtenu une expression simple pour la force de portance, et qui plus est, cette expression satisfait bien les comportements requis pour cette force aux temps courts et aux temps longs. Aussi, l'expression $J_0(\Omega)$ est déjà assez proche des résultats obtenus par Asmolov et McLaughlin. Dans cette section, nous allons tenter de calculer une expression plus fine de la force de portance et pour cela, nous allons donc nous intéresser à l'expression

$$J(\Omega) - J_0(\Omega).$$

Notons que l'évolution de $\Re(J(\Omega) - J_0(\Omega))$ en fonction de Ω est représentée sur la figure 6.4, et celle de $\Im(J(\Omega) - J_0(\Omega))$, sur la figure 6.6.

Au vu de ces résultats, il apparaît alors que pour obtenir une expression approchée de la fonction $J(\Omega) - J_0(\Omega)$, il est possible d'utiliser des fonctions Gaussiennes de type

$$J_i = C_m i^m \left(\frac{\omega}{G} \right)^m \exp \left(-C_{m+1} \left(\frac{\omega}{G} \right)^2 \right),$$

qui admettent, non seulement une transformée de Fourier inverse analytique, mais une transformée inverse

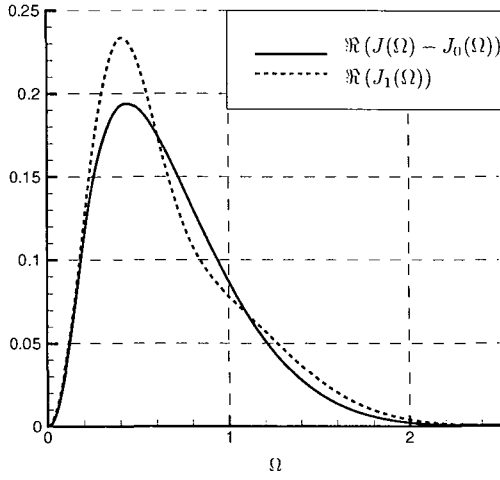


FIG. 6.4 – Comparaison entre $\Re(J(\Omega) - J_0(\Omega))$ et $\Re(J_1(\Omega))$ en fonction de Ω

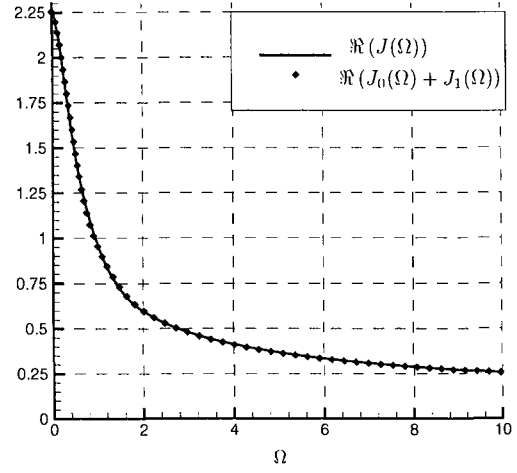


FIG. 6.5 – Comparaison entre $\Re(J(\Omega))$ et $\Re(J_0(\Omega) + J_1(\Omega))$ en fonction de Ω

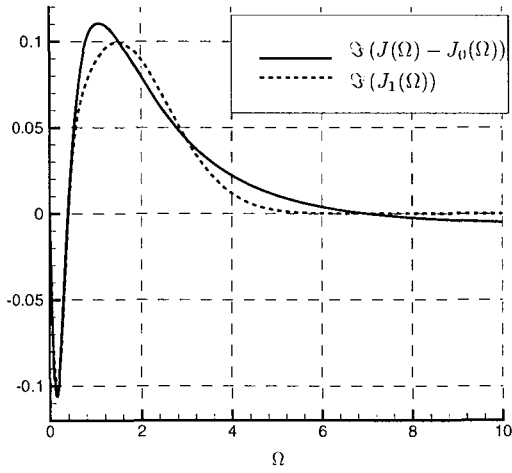


FIG. 6.6 – Comparaison entre $\Im(J(\Omega) - J_0(\Omega))$ et $\Im(J_1(\Omega))$ en fonction de Ω

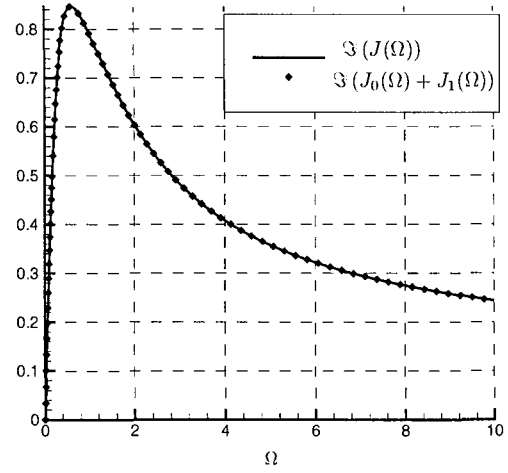


FIG. 6.7 – Comparaison entre $\Im(J(\Omega))$ et $\Im(J_0(\Omega) + J_1(\Omega))$ en fonction de Ω

réelle. Nous proposons donc d'approcher la fonction $J(\Omega) - J_0(\Omega)$ à l'aide d'une fonction du type

$$J_1(\Omega) = \sum_{k=0}^{k=m} \left[\underbrace{-C_{2k+1} \left(\frac{\omega^2}{G^2} \right) \exp \left(-C_{2k+2} \left(\frac{\omega^2}{G^2} \right) \right)}_{\text{Partie réelle pure}} - \underbrace{D_{2k+1} \left(\frac{i\omega}{G} \right) \exp \left(-D_{2k+2} \left(\frac{\omega^2}{G^2} \right) \right)}_{\text{Partie imaginaire pure}} \right]$$

sachant que

$$\mathcal{F}^{-1} \left[-C_{2k+1} \left(\frac{\omega^2}{G^2} \right) U_{\omega} \exp \left(-C_{2k+2} \left(\frac{\omega^2}{G^2} \right) \right) \right] = \frac{C_{2k+1}}{2G\sqrt{\pi C_{2k+2}}} \frac{d^2 V_g(t)}{dt^2} * \exp \left(-\frac{t^2 G^2}{4 C_{2k+2}} \right),$$

et que

$$\mathcal{F}^{-1} \left[-D_{2k+1} \frac{i\omega}{G} U_\omega \exp \left(-D_{2k+2} \left(\frac{\omega^2}{G^2} \right) \right) \right] = \frac{D_{2k+1}}{2\sqrt{\pi} D_{2k+2}} \frac{dV_g(t)}{dt} * \exp \left(-\frac{t^2 G^2}{4 D_{2k+2}} \right).$$

Ainsi, nous pourrions alors obtenir l'expression temporelle de la force de portance corrigée à un ordre supérieur, et celle-ci sera donnée par :

$$F_l(t) = \frac{A_2}{2.254} \left\{ \int_0^t \frac{2.254}{2} \left(\frac{G}{\pi} \right)^{1/2} \frac{\exp(-G(t-\tau)/4)}{\sqrt{t-\tau}} V_g(\tau) d\tau + \sum_{k=0}^{k=m} \left[\int_0^t \frac{C_{2k+1}}{2 G \sqrt{\pi} C_{2k+2}} \exp \left(\frac{-G^2(t-\tau)^2}{4 C_{2k+2}} \right) \frac{d^2 V_g(\tau)}{d\tau^2} d\tau + \int_0^t \frac{D_{k+1}}{2\sqrt{\pi} D_{2k+2}} \exp \left(\frac{-G^2(t-\tau)^2}{4 D_{2k+2}} \right) \frac{dV_g(\tau)}{d\tau} d\tau \right] \right\} \quad (6.2.16)$$

A titre d'illustration, nous avons posé $m = 1$ dans l'équation (6.2.16), c'est à dire $k = \{0; 1\}$ et nous avons calculé les coefficients C_{2k+1} , C_{2k+2} , D_{2k+1} et D_{2k+2} à l'aide d'une méthode de minimisation de la somme des différences. Les valeurs des coefficients ainsi obtenues sont reportées dans le tableau 6.2. Les figures 6.4 et 6.6 permettent de voir que l'approche qui consiste à décomposer $J_1(\Omega)$ en une somme de fonctions gaussiennes n'est pas trop mauvaise. En effet, nous voyons qu'à l'aide de cette approximation, en traçant $J_0(\Omega) + J_1(\Omega)$, $J(\Omega)$ est quasiment reconstituée dans son intégralité, comme le montre les figures 6.5 et 6.7. Dès lors, nous allons nous satisfaire de ces simples corrections d'ordre 1, sans aller chercher d'autres termes correctifs. Nous considérerons donc que la force de portance instationnaire sera bien décrite par l'équation (6.2.16) en posant $m = 1$.

$\Re(J(\Omega))$	$\Im(J(\Omega))$
$C_1 = -3.6256$	$D_1 = 1.0713$
$C_2 = 6.8644$	$D_2 = 14.145$
$C_3 = -0.3130$	$D_3 = -0.1102$
$C_4 = 1.4345$	$D_4 = 0.2256$

TAB. 6.2 – Valeurs des coefficients intervenant dans l'équation (6.2.16) et obtenus numériquement.

6.3 Test de la force de portance instationnaire

Dans cette section, nous allons maintenant tester l'expression obtenue pour la force de portance instationnaire. Pour cela, nous allons imposer à la vitesse de glissement de vérifier

$$V_g = V_g H(t),$$

où $H(t)$ est la fonction d'Heaviside. A l'aide de l'équation (6.2.16) nous obtenons

$$\begin{aligned} \frac{F_l(t)}{A_2 V_g} = & \operatorname{erf} \left(\frac{\sqrt{G} t}{2} \right) \\ & - \frac{C_1 G t}{2.254 C_2 4 \sqrt{\pi} C_2} \exp \left(-\frac{G^2 t^2}{4 C_2} \right) - \frac{C_3 G t}{2.254 C_4 4 \sqrt{\pi} C_4} \exp \left(-\frac{G^2 t^2}{4 C_4} \right) \\ & + \frac{D_1}{2\sqrt{\pi} D_2 2.254} \exp \left(-\frac{G^2 t^2}{4 D_2} \right) + \frac{D_3}{2\sqrt{\pi} D_4 2.254} \exp \left(-\frac{G^2 t^2}{4 D_4} \right). \end{aligned} \quad (6.3.1)$$

Pour mémoire, $A_2 V_g$ correspond à la valeur de la force de portance stationnaire de Saffman. Sur la figure 6.8, nous voyons donc comment évolue dans le temps la force de portance. Nous voyons que l'échelle de

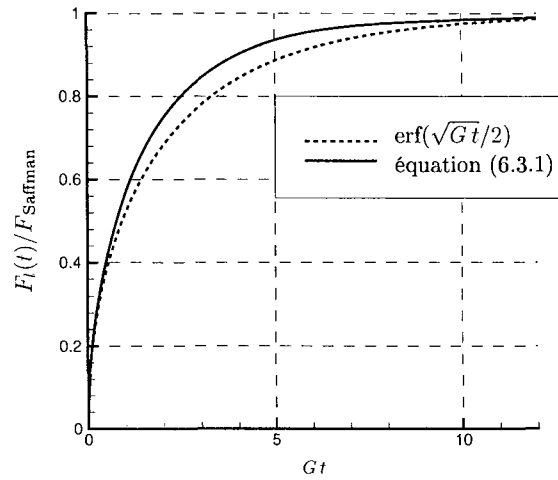


FIG. 6.8 – Evolution temporelle de la force de portance (normalisée par la valeur de la force de Saffman) correspondant à une accélération impulsionnelle de la particule.

temps caractéristique pour que la force de portance adopte sa forme stationnaire est proportionnelle à $1/G$, ce qui correspond au temps qu'il faut pour que la vorticité générée par la particule diffuse jusqu'à la région où les termes convectifs deviennent, dans les équations qui régissent l'écoulement induit, du même ordre de grandeur que les termes visqueux.

6.4 Recherche d'une expression plus compacte pour le noyau

Dans cette dernière partie, rappelons qu'à la fin de la partie 6.2.1, nous avons vu que tous les noyaux temporels donnés par l'équation (6.2.13) impliquant la constante α_n (6.2.14) pouvaient satisfaire les conditions imposées, aux temps courts et aux temps longs, à la force instationnaire de portance. Dans ce qui a été fait précédemment, et dans un souci de simplicité, nous avons posé $n = 1$, et nous avons constaté que les résultats obtenus étaient déjà assez proches de ceux de Asmolov et McLaughlin (1999). Toutefois, nous aurions pu choisir de prendre n'importe quelle autre valeur pour n . L'inconvénient est que dans ce cas là, bien que la transformée de Fourier du noyau $K_l(t)$ avec n quelconque existe, son expression analytique est très compliqu  e¹ et même avec un logiciel de calcul formel (par exemple Maple ou Mathematica) il est alors bien difficile de comparer le spectre ainsi obtenu à $J(\Omega)$ pour tout Ω , comme nous l'avons fait dans le cas $n = 1$. Dans la suite, nous nous proposons de tester tout de même ces autres noyaux mais cette fois-ci, dans l'espace temporel et à l'aide du résultat donné par l'équation (6.3.1).

Ainsi, reprenons l'expression

$$F_l = A_1 \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\exp(-\alpha_n (t - \tau)^n)}{\sqrt{t - \tau}} V_g(\tau) d\tau \quad (6.4.1)$$

et pla  sons nous à nouveau dans la même situation que dans le problème précédent (i.e. $V_g(t) = V_g H(t)$) de sorte que

$$\frac{F_l}{A_2 V_g} = \frac{A_1}{A_2} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\exp(-\alpha_n (t - \tau)^n)}{\sqrt{t - \tau}} d\tau. \quad (6.4.2)$$

En faisant varier n et en comparant l'équation (6.4.2)    l'équation (6.3.1), il se trouve que c'est pour $n = 3/2$, que nous obtenons les meilleurs résultats (voir la figure 6.9).

Une des perspectives de ce travail sera donc de faire une étude phénoménologique pour tenter de mettre en évidence les raisons physiques de cette relaxation en $\exp(-t^{3/2})$ du noyau de la force de

1. elle est donnée sous la forme d'une somme infinie impliquant la fonction $\Gamma(\cdot)$ d'Euler,

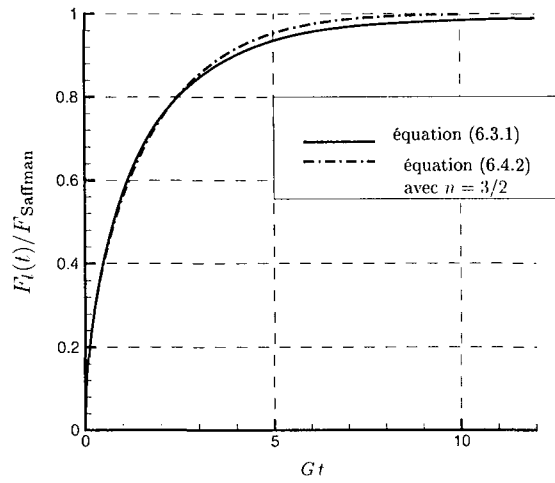


FIG. 6.9 – Comparaison de l'évolution temporelle de la force de portance calculée.

portance instationnaire, et pour cela, nous disposons de quelques pistes. En effet, sachant que $\alpha_{3/2}$ a la même dimension physique que $G^{3/2}$, puisque le groupement $\alpha_{3/2} t^{3/2}$ est, lui, sans dimension, nous pouvons toujours écrire que

$$\alpha_{3/2} t^{3/2} \propto \frac{G t \sqrt{\nu_f t}}{\sqrt{\nu_f / G}},$$

ce qui fait apparaître explicitement le rapport entre deux longueurs. Nous sommes familiers avec la longueur traduite par le dénominateur, puisqu'il s'agit de d_η , c'est à dire la distance à laquelle les effets de cisaillement deviennent du même ordre de grandeur que les termes visqueux dans les équations qui régissent l'écoulement induit. En ce qui concerne la longueur traduite par le numérateur, il s'agit justement d'une longueur caractéristique de diffusion d'une perturbation – d'où la partie en $\sqrt{\nu_f t}$ – advecté par un écoulement cisailé (voir Rhines et Young, 1983). Il semble donc assez naturel que le processus de relaxation de la force de portance instationnaire dépende du rapport de ces deux longueurs.

6.5 Conclusion

Au cours de cette étude, nous avons tenté d'obtenir une expression temporelle de la force de portance de Saffman qui s'exerce sur une particule solide qui évolue dans un écoulement cisailé. Moyennant certaines hypothèses, nous sommes parvenus à calculer cette expression qui est alors donnée par l'équation (6.2.16) et dont le spectre (dans l'espace fréquentiel de Fourier) correspond à celui calculé par Asmolov et McLaughlin (1999).

Dans un deuxième temps, nous avons analysé l'évolution de la force de portance qui correspond à une accélération impulsionnelle de la sphère. Celle-ci est donnée par l'équation (6.3.1) et nous avons utilisé ce résultat afin de déterminer une expression approchée mais plus compacte du noyau $K_l(t)$ de la force. Celui-ci est donné par l'équation (6.2.13) en posant $n = 3/2$ et où la constante $\alpha_{3/2}$ donnée par l'équation (6.2.14).

Conclusion générale

Récapitulatif des résultats obtenus

chapitre 1

Dans ce premier chapitre, nous avons passé en revue les principaux résultats de littératures concernant la force qui s'exerce sur une particule solide et une inclusion fluide qui se déplace dans un écoulement à faibles nombres de Reynolds. Aussi nous avons choisi de présenter ces résultats après avoir introduit, dans les équations de Navier-Stokes, la décomposition de la vitesse en terme d'écoulement non perturbé et d'écoulement induit. Pour les particules solides (partie 1) et ainsi que pour les inclusions fluides (partie 2), nous nous sommes tout d'abord intéressés aux solutions des équations de Stokes stationnaires, avant d'aborder les situations physiques plus complexes où nous avons montré quelle pouvait être la contribution de l'instationnarité, des effets d'inertie et des effets de paroi sur la dynamique de la particule. Notons que la partie 1 et la partie 2 du chapitre 1 ont été volontairement rédigées en respectant une certaine symétrie afin de mettre en évidence l'analogie qui existe entre les résultats obtenus pour une particule solide et une inclusion fluide.

chapitre 2

Dans le second chapitre, nous avons présenté le dispositif expérimental conçu pour générer un écoulement de rotation solide. Au cours de nos expériences les particules solides, les inclusions gazeuses (air) et les inclusions fluides (eau) sont filmées avec une caméra rapide. Nous avons présenté la procédure expérimentale employée pour mesurer, à partir des images délivrées par la caméra, l'enveloppe des trajectoires adoptées par nos particules. Par ailleurs, les expériences que nous avons réalisées sont d'une grande reproductibilité que ce soit pour les particules solides ou les inclusions fluides. A la fin du chapitre, nous avons fait un récapitulatif, dans le tableau 2.2, page 62, des nombres sans dimension impliqués dans les chapitres suivants.

chapitre 3

Dans ce chapitre, nous nous sommes intéressés au mouvement d'une particule solide dans un écoulement en rotation solide. Après avoir linéarisé les équations qui régissent l'écoulement induit dans le référentiel de Koenig, nous avons mis en évidence le fait que le mouvement horizontal et le mouvement vertical de la particule pouvait être traités séparément.

A propos de la vitesse terminale de la particule solide :

Nous avons montré que la force hydrodynamique qui s'exerce sur la particule est affectée notablement par les effets d'inertie. Aussi, nous avons vu que malgré la migration dans le plan horizontal de la particule les résultats de Childress (1964) concernant la force qui s'exerce sur la particule peuvent être appliqués.

La comparaison entre les vitesses terminales théoriques des sphères et l'expérience confirme le fait que la force verticale subie par la particule est affectée par des effets d'inertie puisqu'elle est fonction de la vitesse de rotation du cylindre. Cependant, nous avons constaté qu'elle est également affectée par les effets de paroi. Ces effets de paroi ont pu être estimés à l'aide des résultats de Brenner (1964) et d'ailleurs, nos résultats expérimentaux suggèrent que ces effets sont indépendant de la vitesse de rotation du cylindre.

A propos de la vitesse horizontale de la particule solide :

Parce que la condition limite vérifiée par l'écoulement induit sur la particule est instationnaire, et dans le but de tester la validité de l'équation de mouvement de Boussinesq-Basset, nous avons, dans un premier temps, négligé la contribution des termes convectifs sur l'expression de la force hydrodynamique horizontale qui s'exerce sur la particule. L'équation de mouvement retenue pour une particule solide est récapitulée dans le tableau 3.1 de la page 79.

Nous nous sommes ensuite attachés à calculer analytiquement la solution de cette équation de mouvement. Pour cela, nous avons fait usage des transformées de Laplace et la solution que nous avons obtenue est donnée par l'équation (3.5.11) de la page 86. De plus, à l'aide de ce même formalisme, nous avons été en mesure de calculer analytiquement l'évolution théorique au cours du temps de chacune des forces s'exerçant sur la particule lors de sa migration dans le plan horizontal. En particulier, cela nous a permis de mettre en évidence le rôle non négligeable de la force d'histoire sur la migration radiale de la particule.

Afin de pouvoir approfondir l'interprétation physique de l'étude du mouvement horizontal de la particule, nous avons ensuite calculé une expression approchée de la solution exacte de l'équation de mouvement de la particule. Pour obtenir cette solution approchée, nous avons réalisé une étude du déplacement dans le plan complexe des racines du polynôme $P_4(\mathcal{X})$ (voir page 89), racines qui sont impliquées dans la solution exacte de notre étude. La solution approchée est donnée par l'équation (3.5.18), page 93, et présente de nombreux avantages comparativement à la solution exacte (notamment, elle est indépendante des conditions initiales). En particulier elle nous permet d'accéder facilement aux taux de migration et de rotation de la particule solide, et ces derniers sont d'ailleurs donnés par les équations (3.5.19) et (3.5.20) de la page 94. Notons que dans ces deux dernières équations figure explicitement la contribution de la force d'histoire.

Malgré la hardiesse des hypothèses faites dans ce chapitre, nous constatons que les taux de migration prédits par notre étude avec force d'histoire sont en très bonne adéquation avec les résultats expérimentaux.

chapitre 4

Dans ce chapitre, nous nous sommes attachés à généraliser les résultats obtenus pour les particules solides, aux cas des inclusions fluides. L'équation de mouvement généralisée est récapitulée dans le tableau 4.1 de la page 109.

A propos de la vitesse terminale de l'inclusion fluide :

Pour obtenir la vitesse terminale d'une inclusion fluide, nous avons généralisé le calcul de Childress (1964) à l'aide des résultats obtenus par Legendre et Magnaudet (1997). Les résultats expérimentaux sont en bon accord avec la théorie mais nous avons pu remarquer à nouveau que la vitesse terminale de l'inclusion était affectée par la présence des parois. Nous avons remarqué que ces effets de paroi sont plus faibles pour une particule fluide que pour une particule solide, et parce que le calcul des effets de paroi réalisé pour une particule solide invoque l'écoulement induit lointain, nous avons vu que celui-ci pouvait être généralisé aux cas des inclusions fluides de la même manière que se généralise le calcul des effets d'inertie.

A propos de la vitesse horizontale d'une inclusion fluide ($\lambda \rightarrow \infty$) :

Pour une inclusion fluide, nous avons aussi déterminé la solution exacte de l'équation de mouvement horizontal avec force d'histoire et celle-ci est donnée par l'équation (4.5.5) de la page 114. Notons toutefois que parce que le noyau du terme intégrodifférentiel n'est déterminé explicitement, dans l'espace temporel, que si le rapport des viscosités λ est soit très grand, soit très petit devant l'unité, cette approche ne peut être employée que pour calculer les trajectoires d'une particule telle que $\mathcal{R}_\mu = 2$ ou $\mathcal{R}_\mu = 3$ (strictement). A partir de la solution exacte de l'équation de mouvement, nous avons également calculé une solution approchée – donnée par l'équation (4.5.6) – et qui nous a permis d'obtenir les taux de migration et de rotation (4.5.7) et (4.5.8) (voir page 115) d'une particule dont le noyau de la force d'histoire est connu explicitement.

Pour les bulles, nous avons pu voir que les taux de migration prédits par la théorie étaient en très bon accord avec l'expérience. En revanche, nous avons également vu que les résultats expérimentaux

qui concernaient les gouttes d'eau étaient plutôt éloignés de la théorie et nous en avons déduit que ces dernières avaient probablement été contaminées.

A propos de la vitesse horizontale d'une inclusion fluide (λ quelconque) :

Pour pouvoir calculer malgré tout, le taux de migration d'une inclusion fluide de viscosité quelconque, nous avons été amenés à faire une hypothèse supplémentaire et qui consiste à négliger la dépendance temporelle de l'évolution de la vitesse radiale de la particule. Cette hypothèse nous a alors permis de simplifier la nature de la source d'instationnarité dans cette étude, et de transformer ainsi la condition limite vérifiée par l'écoulement induit en une combinaison linéaire de termes simplement harmoniques. Compte tenu de la linéarité des équations de Stokes instationnaires, la force hydrodynamique qui s'exerce sur la particule dans ce cas là peut être déterminée à l'aide des résultats classiques obtenus par exemple par Boussinesq (1885) et Gorodtsov (1975) (voir aussi Galindo et Gerbeth, 1993). Cette hypothèse supplémentaire nous a donc permis dans un premier temps de généraliser le calcul des taux de migration et de rotation aux cas des gouttes de viscosité quelconque.

Pour calculer les taux de migration et de rotation d'une goutte contaminée, nous avons remarqué que dans le cadre de cette étude, l'effet du terme instationnaire sur la force hydrodynamique exercée par l'écoulement induit sur la particule pouvait être calculé à l'aide de la méthode des développements asymptotiques raccordés. De ce fait, nous avons été en mesure de déterminer les taux de migration et de rotation de n'importe quel type d'inclusion sphérique à condition d'une part, de supposer que son tenseur de mobilité est sphérique et d'autre part, d'avoir une information par exemple sur sa vitesse terminale en cas d'absence de rotation. Les taux de migration et de rotation généralisés sont donnés par les équations (4.6.15) et (4.6.16) de la page 121. Au passage, nous avons aussi pu voir que les équations de Stokes instationnaires constituent un cas test intéressant pour vérifier la généralisation de la méthode des développements asymptotiques raccordés proposée par Legendre et Magnaudet (1997) car dans cette situation, celle-ci peut être comparée à des résultats analytiques.

chapitre 5

Dans ce chapitre, nous avons comparé les résultats obtenus dans les chapitres 3 et 4 dans un référentiel dont les axes sont fixes par rapport au référentiel du laboratoire, à ceux obtenus par Herron *et al.* (1975) dans un référentiel en rotation. Dans les chapitres 3 et 4, où nous nous étions attachés à montrer l'importance du terme instationnaire dans les équations qui régissent l'écoulement induit, nous avons malgré tout fait certaines hypothèses relativement fortes, puisque nous avons complètement négligé la contribution des termes convectifs. Or il se trouve que dans le référentiel en rotation, les équations de l'écoulement induit relatif, d'une part, sont quasi-stationnaires et d'autre part, font apparaître l'accélération de Coriolis comme le seul terme susceptible d'affecter l'écoulement lointain et par conséquent, de modifier l'expression de la force qui s'exerce sur l'inclusion. Bien que les résultats d'Herron *et al.* (1975) aient été établis pour une particule solide, nous avons vu que ces derniers pouvaient être généralisés aux cas des inclusions fluides à l'aide de la remarque faite par Legendre et Magnaudet (1997).

Nous avons constaté que les résultats obtenus indépendamment dans les deux référentiels, selon l'approche d'Herron et al. (1975) et selon l'approche instationnaire, sont proches et de plus, nous avons mis en évidence le fait qu'il nous était impossible de parvenir à faire la différence expérimentalement.

Dans le but d'éclaircir ce point, nous avons calculé l'expression de la force hydrodynamique qui s'exerce sur la particule, en considérant les équations de l'écoulement de perturbation dans un référentiel non tournant, mais en ne négligeant plus cette fois, les termes convectifs. Malgré la très forte non linéarité des contributions respectives du terme instationnaire et des termes convectifs, nous avons pu voir que lorsque les termes convectifs sont pris en compte, l'expression de la force transversale qui s'applique sur la particule est alors nettement plus affectée que la force qui traduit l'augmentation de traînée.

En toute fin du chapitre 5, nous avons analysé l'étude réalisée par Gotoh (1990) et nous avons montré qu'à cause de l'instationnarité du problème, ses résultats ne pouvaient pas être utilisés pour prévoir correctement la migration d'une particule libre de tout mouvement dans un écoulement en rotation solide. En revanche, nous avons également décrit une situation physique où les hypothèses faites par Gotoh (1990) étaient bien vérifiées et qui concerne la position d'équilibre d'une particule dans un écoulement en rotation solide horizontal.

chapitre 6

Dans ce dernier chapitre, nous avons choisi d'aborder un thème de recherche complémentaire et qui concerne l'expression temporelle de la force de portance qui s'exerce sur une particule qui évolue dans un écoulement cisailé et dans le cadre des hypothèses de Saffman (1965). Pour réaliser cette étude, nous nous sommes fortement appuyés sur le travail réalisé par Asmolov et McLaughlin (1999). Ainsi, nous sommes parvenus à calculer une expression temporelle de la force de portance dont la transformée de Fourier correspond au spectre calculé par Asmolov et McLaughlin (1999).

Après avoir analysé l'évolution de la force de portance qui correspond à une accélération impulsienne de la sphère, nous nous sommes servis de ce résultat pour déterminer une expression plus compacte du noyau de la force de portance. Ce noyau est donné par l'équation (6.2.13) de la page 137, en posant $n = 3/2$ et où la constante $\alpha_{3/2}$ est donnée par l'équation (6.2.14).

Perspectives

Les perspectives de ce travail sont multiples et nous nous proposons, sans toutefois être exhaustif, d'en présenter quelques unes qui restent dans le cadre des écoulements à faibles nombres de Reynolds.

Influence de la force d'histoire sur la trajectoire d'une sphère au voisinage d'un point d'arrêt :

Le travail que nous avons réalisé dans le chapitre 3 de cette thèse, et qui consiste à résoudre l'équation de mouvement de la particule avec force d'histoire est assez général. En effet, le formalisme employé pour calculer la solution exacte de l'équation de mouvement d'une particule peut être utilisé dans plusieurs autres types d'écoulements linéaires et notamment, au voisinage d'un point d'arrêt, par exemple entre 4 cellules de recirculation d'un fluide (voir par exemple Wang *et al.*, 1992). Dans une telle situation, si l'équation de mouvement de la particule est établie dans le cadre de la théorie des écoulements rampants stationnaires, i.e. si la force qui s'exerce sur la particule n'est qu'une traînée visqueuse, alors Wang *et al.* (1992) ont montré que la particule ne peut pas traverser de séparatrice, et donc passer d'une cellule à une autre... En revanche, ils ont montré que si la force de masse ajoutée est prise en compte, alors cette fois, elle peut passer d'une cellule à une autre. Cependant, dans leur étude, Wang *et al.* (1992) n'ont pas tenu compte de la force d'histoire. Or il est possible de montrer (voir Angilella 2005, rapport interne au LEMTA) que non seulement la force d'histoire est aussi responsable du fait que la particule traverse la séparatrice, mais qui plus est, son influence sur la trajectoire est supérieure à celle de la force de masse ajoutée (à condition que les nombres de Reynolds soient petits). Ce point motive donc une étude approfondie qui constitue donc une première perspective naturelle à ce travail de thèse.

Tentative de généralisation de la méthode des développements asymptotiques raccordés pour une particule non sphérique :

Au cours de ce travail de thèse, nous avons eu plusieurs fois recours à la méthode des développements asymptotiques raccordés. Nous avons également vu que cette méthode pouvait être généralisée aux cas des inclusions fluides. *A priori*, puisque le problème est linéaire, il semble que la méthode puisse être généralisée à n'importe quelle type d'inclusion, qu'elle soit sphérique ou non, dans la mesure où pour calculer les effets d'inertie sur la force qui s'exerce sur un corps, ce dernier est supposé ponctuel (lorsque l'on s'intéresse à l'écoulement lointain). Imaginons un corps de dimension caractéristique a_{eq} ("eq" comme équivalent) et qui, dans le cadre des écoulements rampants stationnaires, subit une force donnée par

$$\vec{F}^1 = \mu_f a_{eq} \overline{\vec{A}} \cdot \vec{V}_g ,$$

s'il est immergé dans un fluide. Si la méthode des développements asymptotiques raccordés est appliquée pour calculer les effets d'inertie (voire aussi d'instationnarité) dans le cadre d'un écoulement linéaire, il faut supposer que le corps exerce sur le fluide une force ponctuelle donnée par

$$\vec{F} = -\mu_f a_{eq} \overline{\vec{A}} \cdot \vec{V}_g \delta(\vec{x}) .$$

De ce fait, l'écoulement lointain qui est perçu par l'objet comme un écoulement uniforme à l'infini sera donné par :

$$\frac{a_{\text{eq}}}{6\pi a} \epsilon \overline{\overline{M}} \overline{\overline{A}} \cdot \vec{V}_g ,$$

$\overline{\overline{M}}$ étant le tenseur de mobilité du aux effets d'inertie obtenu pour une sphère solide, et $\epsilon = Re$ ou $\sqrt{\eta}$, en fonction du problème traité (voir annexe A.6). Par conséquent, la force qui s'exercera sur le corps sera donnée par

$$\vec{F}^1 = \mu_f a_{\text{eq}} \overline{\overline{A}} \left(\overline{\overline{I}} + \frac{a_{\text{eq}}}{6\pi a} \epsilon \overline{\overline{M}} \overline{\overline{A}} \right) \cdot \vec{V}_g .$$

Par exemple, pour une inclusion fluide sphérique :

$$a_{\text{eq}} = a \quad \text{et} \quad \overline{\overline{A}} = 2\pi \mathcal{R}_\mu \overline{\overline{I}} ,$$

et le résultat de Legendre et Magnaudet (1997) et bien retrouvé. Une des perspectives est donc de tenter de voir si cette approche est avérée et si c'est le cas, de la tester sur des corps dont la forme est simple, comme par exemple un parallélépipède, ce qui se prête facilement à une étude numérique.

A propos de la force de portance instationnaire

Comme nous l'avons dit à la fin du chapitre 6, une des perspectives concernant l'expression de la force de portance instationnaire est de mener à bien une étude de la structure de l'écoulement afin d'expliquer la relaxation en $\exp(-t^{3/2})$ du noyau de la force que nous avons obtenue. Aussi, il serait intéressant de tester cette force dans des situations où l'instationnarité de l'étude est suffisamment importante pour que nous puissions voir des différences significatives entre les trajectoires prédites par cette force et celles prédites en utilisant la force stationnaire de Saffman (1965).

Annexe A (relative au chapitre 1)

A.1 Solution de Lamb

Avant de décrire la solution de Lamb, précisons qu'habituellement la solution la plus générale qui soit de l'équation

$$\Delta \Psi(\vec{x}) = 0 ,$$

peut s'écrire sous la forme d'une somme infinie d'harmoniques sphériques donnée par

$$\Psi = \sum_{l=0}^{l=\infty} \sum_{m=-l}^l C_{lm} \left(A_l r^l + B_l r^{-(l+1)} \right) P_l^m(\cos \theta) \exp(i m \phi) . \quad (\text{A.1.1})$$

où C_{lm} , A_l et B_l sont des constantes pures, $P_l^m(\cos \theta)$ étant les fonctions associées de Legendre définies, pour les m entiers, par

$$P_l^m(x) = (-1)^m (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_l(x) ,$$

et où les polynômes P_l (dit polynômes de Legendre) sont donnés par la relation

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} (x^2 - 1)^l .$$

En développant (A.1.1), nous avons alors

$$\Psi = \sum_{l=0}^{l=\infty} \sum_{m=-l}^l C_{lm} A_l r^l P_l^m(\cos \theta) \exp(i m \phi) + \sum_{l=0}^{l=\infty} \sum_{m=-l}^l C_{lm} B_l r^{-(l+1)} P_l^m(\cos \theta) \exp(i m \phi) ,$$

et si maintenant nous procédons à un changement de variable qui consiste à poser, dans le premier groupement : $l = n$, et dans le second : $l = -(n+1)$, alors il est possible de réécrire (A.1.1) sous la forme

$$\Psi = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} r^n H_n(\theta, \phi)$$

où H_n est alors une harmonique surfacique donnée par

$$\begin{cases} H_n = \sum_{m=-n}^{m=n} A_n C_{nm} P_n^m(\cos \theta) \exp(i m \phi) & \text{si } n \geq 0 \\ H_n = \sum_{m=-(n+1)}^{m=n+1} B_{-(n+1)} C_{-(n+1)m} P_{-(n+1)}^m(\cos \theta) \exp(i m \phi) & \text{si } n < 0 . \end{cases}$$

L'intérêt est que maintenant, chaque harmonique de rang n ne fait intervenir qu'une seule puissance de r et par conséquent, chaque harmonique de rang n admet la propriété

$$\frac{\partial \Psi_n}{\partial r} = \frac{n}{r} \Psi_n ,$$

ce qui bien entendu s'avérera utile par la suite.

Revenons maintenant à la solution de Lamb. En écoulement de Stokes, il est bien connu que la pression satisfait l'équation de Laplace

$$\Delta P = 0 ,$$

et cela suggère donc que celle-ci peut s'écrire sous la forme d'une série d'harmoniques sphériques

$$P = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \mathcal{P}_n .$$

Part ailleurs, notons que toute solution du problème homogène :

$$\vec{\Delta} \vec{w}_H = \vec{0} \quad \text{et} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{w}_H = 0 ,$$

sera aussi solution des équations de Stokes. Lamb (1945) a montré que la solution générale de ce problème homogène peut s'écrire sous la forme de deux autres séries d'harmoniques sphériques, χ_n et Φ_n de sorte que finalement, toute solution des équations de Stokes stationnaires, peut s'écrire sous la forme générale

$$\begin{aligned} \vec{w}_f(\vec{x}) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \left[\vec{\nabla} \wedge (\vec{x} \chi_n) + \vec{\nabla} \Phi_n + \frac{n+3}{2\mu_f(n+1)(2n+3)} r^2 \vec{\nabla} \mathcal{P}_n \right. \\ \left. - \frac{n}{\mu_f(n+1)(2n+3)} \vec{x} \mathcal{P}_n \right] . \end{aligned} \quad (\text{A.1.2})$$

Dans le cadre du formalisme que nous avons adopté dans cette thèse, c'est à dire lorsque la vitesse est exprimée en terme d'écoulement non perturbé et d'écoulement induit, alors en hypothèse de Stokes, l'écoulement induit $\vec{w}_f^1$ peut s'écrire de manière générale sous la forme de l'équation (A.1.2) avec, pour une particule solide, les conditions limites :

$$\vec{w}_f^1 \rightarrow \vec{0} \quad \text{lorsque} \quad |\vec{x}| \rightarrow \infty , \quad (\text{A.1.3})$$

$$\vec{w}_f^1 = \vec{V}_p - \vec{V}_f^0 + \vec{\Omega}_p \wedge \vec{x} \quad \text{lorsque} \quad |\vec{x}| = a . \quad (\text{A.1.4})$$

Ainsi, à l'aide de l'équation (A.1.4), la répartition de la vitesse sur la sphère de rayon a est complètement déterminée et c'est précisément grâce à cela qu'il sera possible de déterminer les composantes $\mathcal{P}_n$, χ_n et Φ_n de la solution générale de Lamb. A cette fin, nous allons maintenant détailler la méthode de projection proposée par Brenner (voir Happel et Brenner, 1983) pour déterminer ces harmoniques.

Afin de simplifier les calculs ultérieurs, nous allons écrire que

$$\vec{w}_f^1 \Big|_{r=a} = \vec{V}(\theta, \phi) ,$$

et nous allons également utiliser les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} w_r^1 \Big|_{r=a} &= \vec{e}_r \cdot \vec{V}(\theta, \phi) , \\ r \frac{\partial w_r^1}{\partial r} \Big|_{r=a} &= -r \vec{\nabla} \cdot \vec{V}(\theta, \phi) , \end{aligned}$$

et

$$r \vec{e}_r \cdot \vec{\nabla} \wedge \vec{w}^1 \Big|_{r=a} = r \vec{e}_r \cdot \vec{\nabla} \wedge \vec{V}(\theta, \phi) ,$$

qui se démontrent facilement. (Précisons simplement que pour obtenir la deuxième relation, il faut s'appuyer sur l'équation de continuité.) Ensuite en remarquant que lorsque $r = a$, une harmonique sphérique Ψ_n de rang n vérifie trivialement la relation

$$\Psi_n \Big|_{r=a} = \left(\frac{a}{r}\right)^n \Psi_n ,$$

il est alors possible de montrer que

$$\vec{e}_r \cdot \vec{V}(\theta, \phi) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \left[\frac{n a}{2\mu_f(2n+3)} \left(\frac{a}{r}\right)^n \mathcal{P}_n + \frac{n}{a} \left(\frac{a}{r}\right)^n \Phi_n \right] , \quad (\text{A.1.5})$$

$$-r \vec{\nabla} \cdot \vec{V}(\theta, \phi) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \left[\frac{n(n+1)a}{2\mu_f(2n+3)} \left(\frac{a}{r}\right)^n \mathcal{P}_n + \frac{n(n-1)}{a} \left(\frac{a}{r}\right)^n \Phi_n \right], \quad (\text{A.1.6})$$

et

$$-r \vec{\nabla} \cdot \vec{V}(\theta, \phi) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} n(n+1) \left(\frac{a}{r}\right)^n \chi_n. \quad (\text{A.1.7})$$

Notons bien que pour l'instant et telles qu'elles sont écrites ici, ces trois relations sont très générales. Dans la suite, il avérera utile de définir deux régions de l'espace, une première qui correspond à l'intérieur de la sphère ($r \leq a$) et l'autre à l'extérieur ($r \geq a$).

A l'intérieur de la sphère $r \leq a$

Puisque la vitesse doit être finie lorsque $r = 0$, cela implique que seules les harmoniques $\mathcal{P}_n$, χ_n et Φ_n de rang $n > 0$ doivent être non nulles. Le calcul des trois relations (A.1.5), (A.1.6) et (A.1.7) dans ce cas là nous conduit à écrire que

$$\vec{e}_r \cdot \vec{V}(\theta, \phi) = \sum_{n=1}^{n=\infty} X_n(\theta, \phi), \quad (\text{A.1.8})$$

$$-r \vec{\nabla} \cdot \vec{V}(\theta, \phi) = \sum_{n=1}^{n=\infty} Y_n(\theta, \phi), \quad (\text{A.1.9})$$

et

$$-r \vec{\nabla} \cdot \vec{V}(\theta, \phi) = \sum_{n=1}^{n=\infty} Z_n(\theta, \phi), \quad (\text{A.1.10})$$

où chaque harmonique surfacique X_n , Y_n et Z_n de rang n est fonction des polynômes P_n^m et peut alors être déterminée par identification. Tous calculs faits, il apparaît alors que

$$\mathcal{P}_n = \frac{\mu_f(2n+3)}{na} \left(\frac{r}{a}\right)^n [Y_n - (n-1)X_n],$$

$$\Phi_n = \frac{a}{2n} \left(\frac{r}{a}\right)^n [(n+1)X_n - Y_n],$$

et

$$\chi_n = \frac{1}{n(n+1)} \left(\frac{r}{a}\right)^n Z_n.$$

Autrement dit, à partir de ces relations, les composantes de la solution de Lamb à l'intérieur de la sphère sont complètement déterminées. Nous verrons par la suite que le calcul de l'écoulement à l'intérieur d'une sphère s'avère nécessaire lorsque cette dernière est une inclusion fluide.

à l'extérieur de la sphère $r \geq a$

Dans la région située à l'extérieur de la sphère, la condition d'amortissement à l'infini de la vitesse impose de ne considérer dans l'équation (A.1.2) que les harmoniques négatives ($n \leq 0$). Dans ce contexte, pour des raisons de simplicité de calcul, il est possible d'écrire la vitesse, en remplaçant n par $-(n+1)$, sous la forme

$$\begin{aligned} \vec{w}_f^1 = \sum_{n=1}^{n=\infty} \left[\vec{\nabla} \wedge (r \vec{e}_r \chi_{-(n+1)}) + \vec{\nabla} \Phi_{-(n+1)} - \frac{(n-2)}{\mu_f 2n(2n-1)} r^2 \vec{\nabla} \mathcal{P}_{-(n+1)} \right. \\ \left. + \frac{(n+1)}{\mu_f n(2n-1)} \vec{x} \mathcal{P}_{-(n+1)} \right], \end{aligned} \quad (\text{A.1.11})$$

l'intérêt étant qu'avec ce changement d'indice, les 3 relations (A.1.8), (A.1.9) et (A.1.10) restent identiques. A l'aide donc de ces 3 relations, il est ensuite possible de montrer que

$$\mathcal{P}_{-(n+1)} = \frac{\mu_f(2n-1)}{(n+1)a} \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} [(n+2)X_n + Y_n],$$

$$\Phi_{-(n+1)} = \frac{a}{2(n+1)} \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} [nX_n + Y_n]$$

et

$$\chi_{-(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)} \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} Z_n,$$

sachant à nouveau que les harmoniques surfaciques X_n , Y_n et Z_n sont des fonctions des polynômes P_n^m et peuvent être déterminées par identification.

Calcul de la contrainte

Connaissant l'expression générale du champ de vitesse extérieur à l'inclusion, il est possible de déterminer l'expression de la force exercée par l'écoulement induit sur l'inclusion par intégration du champ de contrainte sur la surface de la particule. En exploitant la propriété d'orthogonalité des polynômes de Legendre, Brenner a finalement montré que seule l'harmonique $\mathcal{P}_{-2}$ intervient dans le calcul de la force qui s'exerce sur la particule et cela sous une forme très simple :

$$\vec{F}^1 = -4\pi \vec{\nabla} (r^3 \mathcal{P}_{-2}).$$

A.1.1 Exemple d'application de la solution de Lamb

Imaginons une particule qui se déplace à la vitesse $\vec{V}_p = V_T \vec{e}_3$ dans un fluide en rotation solide et qui se situe à la distance R_p de l'axe, comme indiqué sur la figure A.1.

La rotation solide, dans le référentiel $\mathcal{R}_0$ s'écrit

$$\vec{V}_f^0 = \omega \left(-Y \vec{e}_1 + X \vec{e}_2 \right).$$

Sur la sphère, la vitesse induite doit vérifier la condition limite,

$$\vec{w}_f^1 = \vec{V}_p - \vec{V}_f^0(\vec{X}_p + a \vec{e}_r)$$

et autrement dit :

$$\vec{w}_f^1 \Big|_{r=a} = (V_T \cos \theta - R_p \omega \sin \phi \sin \theta) \vec{e}_r$$

$$- (V_T \sin \theta + R_p \omega \sin \phi \cos \theta) \vec{e}_\theta$$

$$- \omega (a \sin \theta + R_p \cos \phi) \vec{e}_\phi.$$

Connaissant la répartition de $\vec{w}_f^1$ sur la sphère, il est maintenant possible de calculer les valeurs des coefficients X_i , Y_i et Z_i . Pour cela, il faut alors calculer

$$\vec{e}_r \cdot \vec{w}_f^1 \Big|_{r=a} = V_T \cos \theta - R_p \omega \sin \phi \sin \theta,$$

$$r \frac{\partial w_r^1}{\partial r} \Big|_{r=a} = 0,$$

et

$$r \vec{e}_r \cdot \vec{\nabla} \wedge \vec{w}_f^1 \Big|_{r=a} = -2a\omega \cos \theta.$$

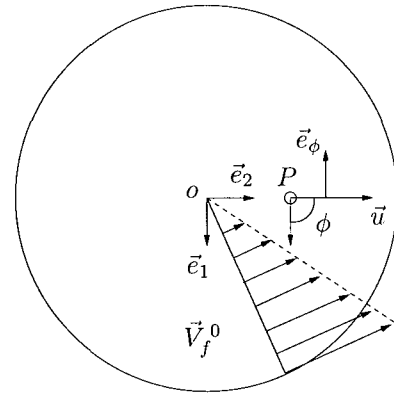
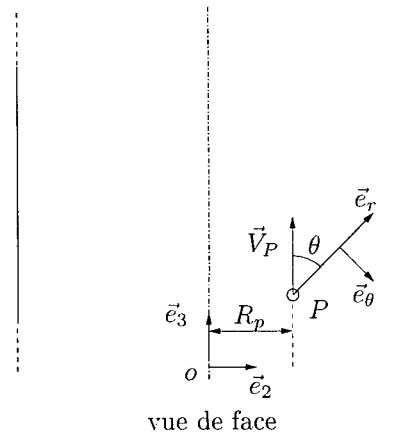


FIG. A.1 – Schéma de l'étude

Par identification, il apparaît que

$$X_1 = V_T P_1(\cos \theta) - R_p \omega \sin \phi P_1^1(\cos \theta) ,$$

$$Y_i = 0 ,$$

et

$$Z_1 = P_1(\cos \theta) .$$

Ainsi, il est maintenant possible de calculer les harmoniques :

$$\mathcal{P}_{-2} = \frac{3\mu_f a}{2r^2} \left(V_T \cos \theta - R_p \omega \sin \phi \sin \theta \right) ,$$

$$\Phi_{-2} = \frac{a^3}{4r^2} \left(V_T \cos \theta - R_p \omega \sin \phi \sin \theta \right) ,$$

et

$$\chi_{-2} = -\frac{\omega a^3}{r^2} \cos \theta .$$

La force subie par la particule est alors obtenue par application de la relation

$$\vec{F}^1 = -4\pi \vec{\nabla} (r^3 \mathcal{P}_2)$$

soit ici,

$$\vec{F}^1 = -6\pi \mu_f a (V_T \vec{e}_3 + R_p \omega \vec{e}_2) .$$

Quant à l'expression du champ de vitesse, nous avons alors :

$$\begin{aligned} \vec{w}_f = \vec{w}_f^0 + \vec{w}_f^1 = & \left(r\omega \sin \theta - \frac{a^3 \omega \sin \theta}{r^2} + \left(1 - \frac{3a}{4r} - \frac{a^3}{4r^3} \right) R_p \omega \cos(\phi) \right) \vec{e}_\phi \\ & + \left(\frac{3a}{2r} - \frac{a^3}{2r^3} \right) V_T \cos \theta \vec{e}_r - \left(\frac{3a}{4r} + \frac{a^3}{4r^3} \right) V_T \sin \theta \vec{e}_\theta \\ & + \left(1 - \frac{3a}{2r} + \frac{a^3}{2r^3} \right) R_p \omega \sin \phi \sin \theta \vec{e}_r + \left(1 - \frac{3a}{4r} - \frac{a^3}{4r^3} \right) R_p \omega \sin \phi \cos \theta \vec{e}_\theta . \end{aligned} \quad (\text{A.1.12})$$

A.1.2 Proposition d'une généralisation simple du calcul de la solution de Lamb pour une goutte

Dans la section précédente, nous avons vu comment, à partir de la connaissance de la répartition de vitesse sur une sphère de rayon a , il était possible de déterminer le champ de vitesse solution des équations de Stokes à l'intérieur ou à l'extérieur de la sphère. Pour une particule solide, la connaissance de la répartition de vitesse de l'écoulement induit sur la sphère est immédiate puisque celle-ci est entièrement déterminée par la condition limite d'adhérence du fluide sur la surface. En revanche, pour une goutte, cela n'est plus le cas. En effet, dans le cas d'une inclusion sphérique fluide (voir le système d'équations S2, page 40), seule la composante radiale de la vitesse induite est entièrement déterminée par la condition d'imperméabilité de l'interface, les autres composantes devant être déterminées à l'aide des conditions de continuité des contraintes tangentielles et du saut des contraintes normales.

Quoi qu'il en soit, nous allons maintenant voir une méthode qui permet d'obtenir assez simplement l'expression du champ de vitesse à l'extérieur et intérieur de l'inclusion et qui satisfait les conditions limites requises pour une inclusion fluide. Tout d'abord, notons que compte tenu des conditions limites à l'interface de l'inclusion, nous avons égalité des vitesses des écoulements induits interne et externe de l'inclusion, autrement dit

$$\vec{w}_f = \vec{w}_f' \quad \text{lorsque} \quad |\vec{x}| = a .$$

De plus, nous savons que

$$\vec{w}_f^1 \cdot \vec{e}_r = \vec{w}_f'^1 \cdot \vec{e}_r = -\vec{w}_f^0 \cdot \vec{e}_r ,$$

de sorte que dans la méthode de projection proposée par Brenner, la détermination des harmoniques surfaciques X_i est immédiate, à la seule condition que l'on puisse écrire la composante radiale de l'écoulement non perturbé dans la base des harmoniques sphériques. Pour déterminer les autres harmoniques

surfaciques, à savoir Y_i et Z_i , nous faisons la proposition suivante : étant donné que la solution recherchée pour une inclusion fluide doit être valable quel que soit le rapport des viscosités ($\lambda = \mu_f/\mu'_f$) entre les fluides externe et interne à l'inclusion, elle doit tendre vers la solution qui serait obtenue pour une particule solide libre de tout mouvement lorsque $\lambda \rightarrow 0$. Autrement dit, sur l'interface, nous devons toujours avoir

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \vec{w}_f^1 \wedge \vec{n} = \vec{w}_f'^1 \wedge \vec{n} = \left(-\vec{w}_f^0 + \vec{\Omega}_p \wedge (a \vec{e}_r) \right) \wedge \vec{n},$$

où $\vec{\Omega}_p(t)$ correspond alors à la vitesse de rotation qu'adopterait une particule solide pour annuler le couple qu'elle subie, du fait de la non uniformité de l'écoulement.

Ainsi, nous allons donc supposer que le nombre d'harmoniques surfaciques nécessaires pour écrire les deux composantes tangentielles de la vitesse induite pour une particule solide :

$$\vec{w}_f^1 \cdot \vec{e}_\theta = \sum_{n=1}^{n=\infty} \sum_{m=-n}^{m=n} A_{nm} P_n^m \exp(i m \phi),$$

et

$$\vec{w}_f^1 \cdot \vec{e}_\phi = \sum_{n=1}^{n=\infty} \sum_{m=-n}^{m=n} B_{nm} P_n^m \exp(i m \phi),$$

reste le même pour une inclusion fluide. (Insistons sur le fait que pour une particule solide, les harmoniques impliquées par les composantes tangentielles de l'écoulement induit sont parfaitement déterminées à l'aide de l'équation (A.1.4)). Pour une inclusion fluide donc, nous supposons que la vitesse s'écrit dans la même base d'harmoniques surfaciques, sauf que les coefficients A'_{nm} et B'_{nm} ne sont pas connus et dépendent *a priori* du rapport des viscosités λ :

$$\vec{w}_f^1 \cdot \vec{e}_\theta = \sum_{n=1}^{n=\infty} \sum_{m=-n}^{m=n} A'_{nm}(\lambda) P_n^m \exp(i m \phi)$$

et

$$\vec{w}_f^1 \cdot \vec{e}_\phi = \sum_{n=1}^{n=\infty} \sum_{m=-n}^{m=n} B'_{nm}(\lambda) P_n^m \exp(i m \phi),$$

avec de plus

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} A'_{nm}(\lambda) = A_{nm} \quad \text{et} \quad \lim_{\lambda \rightarrow 0} B'_{nm}(\lambda) = B_{nm}.$$

En se donnant donc la forme du champ de vitesse solution des équations de Stokes lorsque $r = a$, c'est à dire en se donnant la forme de $\vec{V}(\theta, \phi)$, alors les écoulements interne et externe à l'inclusion peuvent être obtenus (en fonction des inconnues) en appliquant la méthode de projection Brenner. La dernière étape sera ensuite de déterminer ces coefficients à l'aide des deux conditions de continuité des contraintes tangentielles et si besoin est, en utilisant la propriété d'orthogonalité des polynômes de Legendre (et ses fonctions associées).

Exemple simple d'application : la solution d'Hadamard (1911)

Pour illustrer la méthode décrite dans la section précédente, nous allons montrer comment calculer simplement la solution d'Hadamard (1911) obtenue pour une inclusion fluide qui se déplace avec une certaine vitesse que nous écrirons $V_p \vec{e}_3$ dans un fluide visqueux au repos.

En terme d'écoulement non perturbé, nous avons donc

$$\vec{w}_f^0 = -V_p \vec{e}_3,$$

et si la sphère était solide, nous aurions, du fait de l'adhérence,

$$\vec{w}_f^1 = V_p \cos \theta \vec{e}_r - V_p \sin \theta \vec{e}_\theta \quad \text{lorsque} \quad |\vec{x}| = a.$$

Pour une particule fluide, nous allons donc écrire que

$$\vec{w}_f^1 = \vec{w}_f'^1 = V_p \cos \theta \vec{e}_r + A(\lambda) V_p \sin \theta \vec{e}_\theta \quad \text{lorsque} \quad |\vec{x}| = a,$$

où $A(\lambda)$ reste à déterminer. A l'aide de cette répartition de vitesse sur la sphère, il est simple de montrer que

$$X_1 = V_p \cos \theta,$$

$$Y_1 = -2V_p (1 + A(\lambda)) \cos \theta,$$

et

$$Z_i = 0.$$

A partir de cette expression, nous obtenons, pour l'écoulement intérieur :

$$\mathcal{P}_1 = \frac{5\mu'_f r}{a^2} Y_1,$$

$$\Phi_1 = \frac{r}{2} (2X_1 - Y_1),$$

et pour l'écoulement extérieur :

$$\mathcal{P}_{-2} = \frac{\mu a}{2r^2} (3X_1 + Y_1),$$

$$\Phi_{-2} = \frac{a^3}{4r^2} (X_1 + Y_1).$$

Les écoulements externe et interne à l'inclusion peuvent être écrits en fonction de cette inconnue $A(\lambda)$ et nous obtenons alors, pour l'écoulement externe :

$$\vec{w}_f^1 \cdot \vec{e}_r = \left(\frac{1 - 2A(\lambda)}{2} \frac{a}{r} + \frac{1 + 2A(\lambda)}{2} \frac{a^3}{r^3} \right) V_p \cos \theta,$$

et

$$\vec{w}_f^1 \cdot \vec{e}_\theta = - \left(\frac{1 - 2A(\lambda)}{4} \frac{a}{r} - \frac{1 + 2A(\lambda)}{4} \frac{a^3}{r^3} \right) V_p \sin \theta,$$

et pour l'écoulement interne :

$$\vec{w}_f'^1 \cdot \vec{e}_r = \left((2 + A(\lambda)) - (1 + A(\lambda)) \frac{r^2}{a^2} \right) V_p \cos \theta,$$

et

$$\vec{w}_f'^1 \cdot \vec{e}_\theta = - \left((2 + A(\lambda)) - 2(1 + A(\lambda)) \frac{r^2}{a^2} \right) V_p \sin \theta.$$

La continuité de la contrainte tangentielle s'écrit ici

$$\lambda \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w_r^1}{\partial \theta} + \frac{\partial w_\theta^1}{\partial r} - \frac{w_\theta^1}{r} \right) = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w_r'^1}{\partial \theta} + \frac{\partial w_\theta'^1}{\partial r} - \frac{w_\theta'^1}{r} \right),$$

et la résolution de cette équation nous donne alors

$$A(\lambda) = -\frac{1}{2} \frac{\lambda + 2}{\lambda + 1}.$$

Bien entendu, en remplaçant $A(\lambda)$ par cette valeur dans les différentes composantes de la vitesse de l'écoulement à l'intérieur et à l'extérieur de la particule, nous retrouvons la solution d'Hadarmard (1911) (voir équations (1.8.1), (1.8.2), (1.8.3) et (1.8.4), page 43).

A.2 La correction de Fax en

Nous avons vu dans l'annexe pr ecedente que quel que soit l'écoulement non perturbé, il est possible, à l'aide de la solution générale de Lamb, de calculer la force qui s'exerce sur la particule, dans le cadre des hypothèses de Stokes stationnaires. Mais le développement dans la base des harmoniques sphériques peut parfois s'avérer fastidieux. Bien souvent, il est suffisant de déterminer une forme approchée de la contrainte exercée par l'écoulement induit sur la particule et pour cela, il existe une méthode qui permet d'obtenir très facilement une expression approchée – avec une précision de l'ordre de $O(a^3/L^3)$ – de $\vec{F}^1$. Cette méthode est fondée sur le théorème de réciprocité qui se formule de la manière suivante :

Soit $\vec{w}_a$ un champ de vitesse, solution du problème perturbé, c'est à dire, vérifiant une certaine condition limite sur la particule et une condition de nullité à l'infini, et soit $\vec{\Sigma}_a$ le tenseur des contraintes associé à ce champ de vitesse. Soit $\vec{w}_b$, (avec $\vec{\Sigma}_b$) une autre solution du problème perturbé, satisfaisant aussi à la condition de nullité à l'infini. Alors, il est possible de montrer que

$$\int_{S_p} \vec{w}_a \cdot (\vec{\Sigma}_b \cdot \vec{n}) dS_p = \int_{S_p} \vec{w}_b \cdot (\vec{\Sigma}_a \cdot \vec{n}) dS_p$$

où S_p est la surface de la particule. C'est le théorème de réciprocité.

Imposons maintenant à $\vec{w}_a$ de satisfaire $\vec{w}_a = \vec{e}_1$ sur la surface de la particule.  videmment, ce problème admet la solution donnée par les équations (1.2.3) et (1.2.4), page 14, et correspond à une particule qui se déplace avec une vitesse $\vec{V}_p = \vec{e}_1$ dans un fluide au repos.

Ensuite, en posant que $a \ll L$, il est possible d'écrire la vitesse de l'écoulement non perturbé sous la forme d'un développement de Taylor au voisinage de $\vec{X}_p$. Sous forme indicielle, et en adoptant la convention de sommation des indices répétés d'Einstein, ce développement s'écrit

$$V_f^0(\vec{X}_p + \vec{x})_i = \left(V_f^0 \Big|_{\vec{X}_p} \right)_i + \left(x_j \frac{\partial V_f^0}{\partial x_j} \Big|_{\vec{X}_p} \right)_i + \frac{1}{2} \left(x_j x_k \frac{\partial^2 V_f^0}{\partial x_j \partial x_k} \Big|_{\vec{X}_p} \right)_i + O(a^3/L^3).$$

En imposant à $\vec{w}_b$ de vérifier

$$(\vec{w}_b)_i = \left(\vec{V}_p - \vec{V}_f^0 \Big|_{\vec{X}_p} \right)_i - \left(x_j \frac{\partial V_f^0}{\partial x_j} \Big|_{\vec{X}_p} \right)_i + \frac{1}{2} \left(x_j x_k \frac{\partial^2 V_f^0}{\partial x_j \partial x_k} \Big|_{\vec{X}_p} \right)_i$$

et sachant que sur la surface de la particule,

$$x = a \cos(\phi) \sin(\theta), \quad y = a \sin(\phi) \sin(\theta) \quad \text{et} \quad z = a \cos \theta$$

il apparaît, tous calculs faits que

$$\vec{e}_1 \cdot \int_{S_p} (\vec{\Sigma}_b \cdot \vec{n}) dS_p = -6\pi\mu_f a \left(-V_f^0(\vec{X}_p) - \frac{a^2}{6} \Delta V_f^0 \Big|_{\vec{X}_p} \right) \vec{e}_1 + O(a^3/L^3).$$

En procédant de la même manière, mais avec $\vec{w}_a = \vec{e}_2$, puis $\vec{e}_3$ alors, finalement, la contrainte subie par une particule qui se déplace dans un écoulement non uniforme est donnée par :

$$\vec{F}^1 \simeq -6\pi\mu_f a \left(\vec{V}_p - \vec{V}_f^0(\vec{X}_p) - \frac{a^2}{6} \Delta \vec{V}_f^0 \Big|_{\vec{X}_p} \right) + O(a^3/L^3).$$

A.3 La solution de Boussinesq BBO

Dans cette annexe, nous détaillons la solution de Landau et Lifchitz (1989) du problème correspondant à une particule qui se déplace dans un fluide au repos avec une vitesse donnée par

$$\vec{V}_p = \vec{U}_\omega \exp(-i\omega t).$$

L'équation de continuité permet d'écrire que le champ de vitesse solution de ce problème dérive d'un potentiel vecteur

$$\vec{w}_f^1 = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}, \tag{A.3.1}$$

dont seule la composante A_ϕ est non nulle (pour les mêmes raisons que celles exposées dans la section 1.2.1, page 13). Pour obtenir la solution de ce problème, il convient de noter qu'en plus de sa dépendance en r , A_ϕ doit également dépendre de la condition limite imposée sur la sphère, c'est à dire, de $\vec{V}_p$. Puisque le gradient d'une fonction qui ne dépend que de r n'a de composante que suivant $\vec{e}_r$, et que $\vec{e}_r \wedge \vec{V}_p$ n'a bien de composante que suivant $\vec{e}_\phi$, il est donc envisageable de rechercher la solution de ce problème sous la forme :

$$\vec{A} = \vec{\nabla} f(r) \wedge \vec{V}_p.$$

Notons que puisque $\vec{V}_p$ est uniforme, il est possible de montrer que :

$$\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} f(r) \wedge \vec{V}_p) = \vec{\nabla} \wedge (f(r) \vec{V}_p).$$

En injectant la relation (A.3.1) dans les équations de Stokes instationnaires (1.1.28), page 12, puis en calculant le rotationnel de cette équation, il en ressort que

$$\frac{i\omega}{\nu_f} \Delta (\vec{\nabla} \wedge (f(r) \vec{U}_\omega)) + \Delta^2 (\vec{\nabla} \wedge (f(r) \vec{U}_\omega)) = \vec{0},$$

et puisque $\vec{U}_\omega$ est uniforme, nous aurons

$$\frac{i\omega}{\nu_f} \Delta f(r) + \Delta^2 f(r) = C_1,$$

où C_1 est une constante pure. Puisque la vitesse du fluide, doit tendre vers 0 lorsque $r \rightarrow \infty$, il en va de même pour le gradient de $f(r)$, puis pour ses dérivées d'ordre supérieur, ce qui implique que C_1 doit être nulle, et une première intégration nous conduit alors à

$$\Delta f(r) = C_2 \frac{\exp(ikr)}{r},$$

avec

$$k = \frac{1+i}{\delta} \quad \text{et} \quad \delta = \sqrt{\frac{2\nu_f}{\omega}}$$

(k ayant été choisi de sorte que la solution ne soit pas divergente). Après une deuxième intégration, il apparaît que

$$\frac{df}{dr} = C_3 \frac{\exp(ikr)}{r^2} \left(r - \frac{1}{ik} \right) + \frac{C_4}{r^2}.$$

Dans la mesure où l'expression de la vitesse ne fait intervenir que les dérivées première et seconde de $f(r)$, il n'est pas nécessaire de calculer explicitement la fonction $f(r)$ elle même. A l'aide des conditions limites en $r = a$ et en $r \rightarrow \infty$, les coefficients C_3 et C_4 peuvent être déterminés et s'écrivent

$$C_3 = -\frac{3a}{2ik} \exp(-ika) \quad \text{et} \quad C_4 = -\frac{a^3}{2} \left(1 - \frac{3}{ika} - \frac{3}{k^2 a^2} \right).$$

Connaissant $df(r)/dr$, le potentiel vecteur $\vec{A}$ peut être calculé et donc l'écoulement induit aussi. Il est alors possible de déterminer la force $\vec{F}_\omega$ donnée par l'équation (1.3.1), page 19, qui s'applique sur la sphère. Pour pouvoir ensuite calculer la force qui s'exerce sur la particule, dans le cas d'un mouvement quelconque il faut calculer l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{F}_\omega \exp(-i\omega t) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\pi \rho_f a^3 \vec{U}_\omega \exp(-i\omega t) \left(\frac{6\nu_f}{a^2} - \frac{2i\omega}{3} + \frac{3\sqrt{2\nu_f}}{a} (1-i)\sqrt{\omega} \right) \right) d\omega.$$

Or

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{U}_\omega \exp(-i\omega t) d\omega = \mathcal{F}^{-1}(\vec{U}_\omega) = \vec{V}_p(t),$$

et

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (-i\omega) \vec{U}_\omega \exp(-i\omega t) d\omega = \mathcal{F}^{-1} \left(\mathcal{F} \left(\frac{d\vec{V}_p}{dt} \right) \right) = \frac{d\vec{V}_p}{dt}.$$

Pour le troisième terme, nous avons

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (1-i)\sqrt{\omega} \vec{U}_{\omega} \exp(-i\omega t) d\omega = \mathcal{F}^{-1} \left(\mathcal{F} \left(\frac{d\vec{V}_p}{dt} \right) \frac{(1+i)}{\sqrt{\omega}} \right) = \frac{d\vec{V}_p}{dt} * \mathcal{F}^{-1} \left(\frac{1+i}{\sqrt{\omega}} \right),$$

où le symbole $*$ est le produit de convolution. Sachant que pour les $\omega < 0$, nous avons

$$\frac{1+i}{\sqrt{\omega}} = \frac{1-i}{\sqrt{|\omega|}} \quad \text{et} \quad \exp(-i\omega t) = \cos(|\omega|t) + i \sin(|\omega|t),$$

alors

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(1+i)}{\sqrt{\omega}} \exp(-i\omega t) d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos(\omega t) + \sin(\omega t)}{\sqrt{\omega}} d\omega = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi t}}.$$

Finalement donc, il en ressort que

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (1-i)\sqrt{\omega} \vec{U}_{\omega} \exp(-i\omega t) d\omega = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^t \frac{d\vec{V}_p(\tau)}{d\tau} \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} d\tau.$$

En utilisant ces résultats, la force exercée sur une particule lorsque celle-ci se déplace arbitrairement est donnée par l'équation (1.3.2), page 19.

A.4 Solution de Bentwich et Miloh (1978)

Pour obtenir la solution analytique correspondant à l'écoulement généré par le mouvement soudain de la particule, Bentwich et Miloh (1978) ont résolu, au préalable un problème réciproque, c'est à dire, correspondant à un écoulement qui à l'instant $t = 0$ se met brutalement et uniformément en mouvement, autour d'une sphère maintenue immobile. Ainsi, ils ont donc premièrement posé que

$$\vec{V}_f^0 = -\vec{U} H(t) \quad \text{où} \quad \begin{cases} H(t) = 1 \text{ si } t > 0 \\ H(t) = 0 \text{ sinon} \end{cases} \quad \text{et} \quad \vec{V}_p(t) = \vec{0}.$$

En s'appuyant sur l'axisymétrie de cette étude et à l'aide des transformées de Laplace, ils ont obtenu la fonction de courant instationnaire qui permet de décrire l'écoulement induit dans ce problème. Après avoir normalisé r par le rayon de la sphère a , les vitesses par $|\vec{U}|$ et le temps par a^2/ν_f , cette fonction de courant est donnée par

$$\Psi(r, \theta, t) = \sin^2 \theta \left\{ -\frac{r^2 H(t)}{2} + \frac{1}{2r} \left[H(t) + 6 \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}} + 3t \right] - \frac{3\sqrt{t}}{2} \left[\frac{2}{\sqrt{\pi}} \exp(-\eta^2) - 2\eta \operatorname{erfc}(\eta) \right] - \frac{3t}{2r} \left[(1 + 2\eta^2) \operatorname{erfc}(\eta) - \frac{2\eta}{\sqrt{\pi t}} \exp(-\eta^2) \right] \right\} \quad (\text{A.4.1})$$

et où

$$\eta = \frac{r-1}{2\sqrt{t}}.$$

Celle-ci permet donc d'obtenir le champ de vitesse de l'écoulement induit. A l'aide de cette solution, il est ensuite possible de déterminer le champ de vitesse du problème qui correspond à une accélération impulsienne d'une sphère dans un fluide au repos, c'est à dire,

$$\vec{V}_f^0 = \vec{0} \quad \text{et} \quad \vec{V}_p(t) = \vec{U} H(t) \quad \text{soit} \quad \frac{d\vec{V}_p}{dt} = \vec{U} \delta(t),$$

où $\delta(t)$ est la distribution de Dirac. En fait, conceptuellement, ces deux situations sont proches l'une de l'autre, toutefois, il faut cependant faire attention au fait que dans la mesure où il s'agit d'un problème instationnaire, dans le premier cas (fluide en mouvement et particule au repos), la force issue de l'écoulement non perturbé n'est pas nulle et sera donnée par $m_f \vec{U} \delta(t)$. Quoi qu'il en soit, la solution de ce problème peut être obtenue simplement à partir de la solution du problème précédent et s'écrit alors (sous forme réduite)

$$w_r^1 = \cos \theta H(t) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta}$$

et

$$w_\theta^1 = -\sin\theta H(t) - \frac{1}{r\sin\theta} \frac{\partial\Psi}{\partial r}.$$

A l'aide de ce champ de vitesse, il est possible de calculer l'expression de la force qui s'exerce sur la particule et celle-ci est donnée, sous sa forme dimensionnelle, par l'équation (1.3.3), page 19.

A.5 Précisions à propos de la solution de Maxey et Riley (1983)

Lorsque l'écoulement est régi par les équations de Stokes stationnaires, il est possible d'utiliser le théorème de réciprocité. Lorsque le problème considéré est instationnaire, alors il existe un théorème équivalent faisant intervenir la transformée de Laplace :

$$\mathcal{L}(f(t)) = \int_0^\infty e^{-pt} f(t) dt.$$

Celui-ci s'écrit : Soit $\vec{w}_a(\vec{x}, t)$ un champ de vitesse, solution du problème perturbé instationnaire vérifiant une certaine condition limite sur la particule et une condition de nullité à l'infini, et soit $\bar{\bar{\Sigma}}_a$ le tenseur des contraintes associé à ce champ de vitesse. Soit $\vec{w}_b(\vec{x}, t)$, (avec $\bar{\bar{\Sigma}}_b$) une autre solution du problème perturbé, satisfaisant aussi la condition de nullité à l'infini. Alors, il est possible de montrer que

$$\int_{S_p} \mathcal{L}(\vec{w}_a) \mathcal{L}(\bar{\bar{\Sigma}}_b \cdot \vec{n}) dS_p - \rho_f \int_V \vec{w}_a(\vec{x}, 0) \mathcal{L}(\vec{w}_b) dV = \int_{S_p} \mathcal{L}(\vec{w}_b) \mathcal{L}(\bar{\bar{\Sigma}}_a \cdot \vec{n}) dS_p - \rho_f \int_V \vec{w}_b(\vec{x}, 0) \mathcal{L}(\vec{w}_a) dV.$$

En imposant à $\vec{w}_a(\vec{x}, t)$ de vérifier sur la sphère

$$\vec{w}_a(\vec{x}, t) = \delta(t_+) \vec{e}_1$$

où $\delta(t_+)$ est la distribution de Dirac, autrement dit,

$$\mathcal{L}(\vec{w}_a) = \vec{e}_1 \quad \text{et} \quad \vec{w}_a(\vec{x}, 0) = \vec{0},$$

le problème qui se pose admet une solution analytique, obtenue par Burger. Notons que la référence proposée par Maxey et Riley quant à cette solution est difficile à obtenir, et le lecteur intéressé trouvera des éléments de cette solution dans Happel et Brenner (1983), page 84 (chapitre 3). En imposant ensuite à $\vec{w}_b$, de vérifier

$$(\vec{w}_b)_i = \left(\vec{V}_p - \vec{V}_f^0 \Big|_{\vec{x}_p} \right)_i - \left(x_j \frac{\partial V_f^0}{\partial x_j} \Big|_{\vec{x}_p} \right)_i + \frac{1}{2} \left(x_j x_k \frac{\partial^2 V_f^0}{\partial x_j \partial x_k} \Big|_{\vec{x}_p} \right)_i$$

avec

$$\vec{w}_b(\vec{x}, 0) = 0$$

Maxey et Riley (1983) parviennent à obtenir l'expression analytique du terme $\vec{e}_1 \cdot \int_{S_p} \mathcal{L}(\bar{\bar{\Sigma}}_b \cdot \vec{n}) dS_p$. En procédant ensuite de la même façon, avec $\vec{w}_a = \delta(t_+) \vec{e}_2$, puis avec $\vec{w}_a = \delta(t_+) \vec{e}_3$, ils obtiennent alors l'expression de

$$\int_{S_p} \mathcal{L}(\bar{\bar{\Sigma}}_b \cdot \vec{n}) dS_p,$$

et en calculant la transformée de Laplace inverse de ce terme, ils obtiennent l'équation (1.3.5), page 22.

A.6 Méthode des développements asymptotiques raccordés

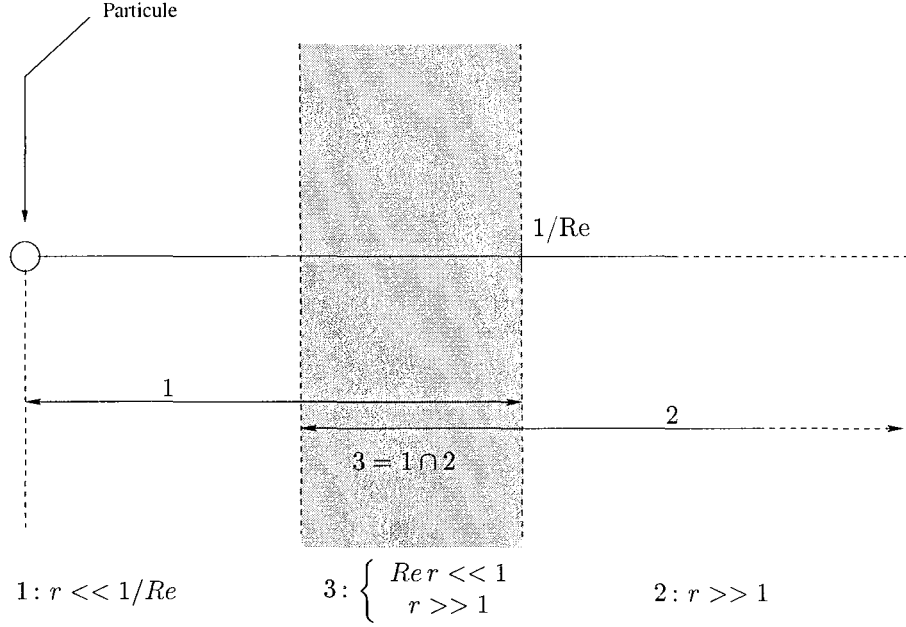


FIG. A.2 – Schéma d'illustration du problème.

La méthode des développements asymptotiques raccordés présentée ici ne s'applique que pour les écoulements qui peuvent s'écrire sous la forme de la superposition d'un écoulement non uniforme linéaire et d'un terme uniforme. Aussi, dans un souci de simplicité, nous supposons le problème stationnaire, bien que la méthode puisse être appliquée dans des situations instationnaires (voir par exemple le chapitre 4). Ainsi, l'équation de mouvement de la vitesse induite est donnée par l'équation (1.4.5) qui sera linéarisée (i.e. les termes convectifs quadratiques $(\vec{w}_f^1 \cdot \vec{\nabla})\vec{w}_f^1$ sont négligés). Il est alors utile de reformuler l'équation (1.4.5) en réduisant la vitesse induite par $|\vec{V}_g|$ et les longueurs par a , de sorte que l'équation de l'écoulement induit soit donnée par

$$Re \left(\frac{\vec{V}_g}{|\vec{V}_g|} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{w}_f^1 + \left((\vec{\eta} \cdot \vec{x}) \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{w}_f^1 + \vec{\eta} \cdot \vec{w}_f^1 = -\vec{\nabla} P^* + \vec{\Delta} \vec{w}_f^1, \quad (\text{A.6.1})$$

où

$$\vec{\eta} = \left(\frac{a^2}{\nu_f} \right) \vec{A} \quad \text{et} \quad P^* = \frac{a P^1}{\mu_f |\vec{V}_g|},$$

et avec

$$\vec{w}_f^1 \rightarrow \vec{0} \quad \text{lorsque} \quad |\vec{x}| \rightarrow \infty \quad (\text{A.6.2})$$

$$\vec{w}_f^1 = \frac{\vec{V}_p - \vec{V}_f^0}{|\vec{V}_g|} \quad \text{lorsque} \quad |\vec{x}| = 1. \quad (\text{A.6.3})$$

Notons bien que dans (A.6.1), les grandeurs $\vec{w}_f^1$, $\vec{x}$, $\vec{\nabla}$ et $\vec{\Delta}$ sont maintenant sans dimension, mais pour ne pas alourdir les écritures, ces termes sont écrits sans notations particulières. Également, le nombre de Reynolds, ainsi que les composantes du tenseur $\vec{\eta}$ sont, par définition, supposés petits devant un.

Pour mener à bien la méthode des développements asymptotiques raccordés, il faut distinguer différentes zones, (voir figure A.2). Nous avons donc une zone proche de la particule $r = O(1)$, appelée zone 1, une zone lointaine (i.e. $r \gg 1$), appelée zone 2 et enfin, la zone de raccordement que nous appellerons zone 3.

Dans la zone 1 privée de la zone 3 (i.e. $1/\{3\}$)

Les termes convectifs sont petits devant les termes de diffusion visqueuse. Dès lors, la solution du problème est supposée très proche de la solution des équations de Stokes,

$$-\vec{\nabla} P^* + \vec{\Delta} \vec{w}_f^1 = 0,$$

associées aux conditions limites (A.6.2 et A.6.3) et dont la solution peut être obtenue quel que soit l'écoulement non perturbé à l'aide de la solution de Lamb (voir annexe A.1). Nous appellerons $\vec{w}_0$ cette solution.

Ainsi, dans cette région, la solution sera écrite sous la forme de la solution des équations de Stokes, plus une perturbation,

$$\vec{w}_f^{1/\{3\}} = \vec{w}_0 + \epsilon \vec{w}_1, \quad \text{où } \epsilon \ll 1.$$

Notons que le choix de ϵ sera explicité ultérieurement. Aussi, rappelons que c'est précisément l'action de ce champ de vitesse de perturbation $\vec{w}_1$ sur la particule qu'il faut déterminer.

Dans la zone 2 privée de la zone 3 (i.e. $2/\{3\}$)

Loin de la particule, les termes convectifs du membre de gauche de l'équation (A.6.1) ne sont plus négligeables devant les termes visqueux. Aussi, l'écoulement lointain est bien entendu perturbé par la présence de la particule. Or loin de la particule, l'écoulement induit perçoit la particule comme une force ponctuelle. Dans le cadre des écoulements à faibles nombres de Reynolds, l'intensité de cette force ponctuelle est, au premier ordre, d'intensité égale à la traînée de Stokes mais de sens opposé :

$$\vec{F} = -6\pi\mu_f a \vec{V}_g(t) \delta(\vec{x}).$$

Ainsi, loin de la particule, l'écoulement induit $\vec{w}_f^1$ correspond à la solution de l'équation singulière :

$$Re \left(\frac{\vec{V}_g}{|\vec{V}_g|} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{w}_f^1 + \left((\vec{\eta} \cdot \vec{x}) \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{w}_f^1 + \vec{\eta} \cdot \vec{w}_f^1 = -\vec{\nabla} P^* + \vec{\Delta} \vec{w}_f^1 - \frac{6\pi \vec{V}_g(t)}{|\vec{V}_g|} \delta(\vec{x}). \quad (\text{A.6.4})$$

Nous écrivons $\vec{w}_{\text{ext}}$ la solution de l'équation (A.6.4) et nous écrivons

$$\vec{w}_f^{2/\{3\}} = \vec{w}_{\text{ext}}.$$

Dans la zone de raccordement

Dans la région 3, il faut raccorder les deux solutions précédentes, à savoir $\vec{w}_f^{1/\{3\}}$ et $\vec{w}_f^{2/\{3\}}$, et à cette fin, il faut tout d'abord "dilater" l'échelle spatiale du problème lointain par ϵ . Pour cela, il faut procéder, dans l'équation (A.6.4), au changement de variable suivant :

$$\underline{x} = \epsilon \vec{x}, \quad \vec{\nabla} = \epsilon \underline{\nabla}, \quad \vec{\Delta} = \epsilon^2 \underline{\Delta} \quad \text{et} \quad P' = \frac{P^*}{\epsilon}.$$

Dans la suite, les grandeurs soulignées correspondent à des vecteurs exprimés en fonction de variables "dilatées". Avec ces changements de variables, l'équation du problème lointain est maintenant donnée par :

$$\frac{Re}{\epsilon} \left(\frac{\vec{V}_g}{|\vec{V}_g|} \cdot \underline{\nabla} \right) \vec{w}_f^1 + \left((\underline{\vec{\alpha}} \cdot \underline{x}) \cdot \underline{\nabla} \right) \vec{w}_f^1 + \underline{\vec{\alpha}} \cdot \vec{w}_f^1 = -\underline{\nabla} P' + \underline{\Delta} \vec{w}_f^1 - \frac{6\pi \vec{V}_g}{|\vec{V}_g|} \delta(\underline{x}), \quad (\text{A.6.5})$$

où

$$\underline{\vec{\alpha}} = \frac{\vec{\eta}}{\epsilon^2}.$$

Dans cette situation, plusieurs cas de figure se présentent. En effet, nous voyons maintenant apparaître deux groupements, à savoir :

$$\frac{Re}{\epsilon} \quad \text{et} \quad \frac{\vec{\eta}}{\epsilon^2}$$

sachant que $\eta_{ij} = O(a^2 A_{ij}/\nu_f)$. De ce fait, pour que l'un de ces deux groupements soit d'ordre $O(1)$, il faut distinguer les deux cas :

- si $\left(\frac{a^2 A_{ij}}{\nu_f}\right)^{1/2} \gg Re$, alors il convient de poser $\epsilon = \left(\frac{a^2 A_{ij}}{\nu_f}\right)^{1/2}$
- si $\left(\frac{a^2 A_{ij}}{\nu_f}\right)^{1/2} \ll Re$, alors il convient de poser $\epsilon = Re$.

Dans ces conditions, l'équation (A.6.5) se simplifie en conséquence. Dans le dernier cas où les deux nombres de Reynolds sont du même ordre de grandeur, on peut choisir l'un ou l'autre de ces nombres pour ϵ : en règle générale, la plupart des auteurs qui sont confrontés à ce genre de problème choisissent de dilater l'échelle spatiale avec le nombre Re , comme par exemple dans Childress (1964).

|| C'est donc à ce stade qu'interviennent explicitement les rapports $\left(\frac{d_{Re}}{d_\eta}\right)$ ou $\left(\frac{d_{Re}}{d_\eta}\right)^2$ (en fonction du choix de ϵ)

A présent, pour pouvoir raccorder les deux solutions entre elles, c'est à dire, la solution du problème proche et la solution du problème lointain, il faut traduire le fait que ce qui se passe à l'infini pour la solution exprimée dans la zone 1 est perçue comme étant ce qui se passe au voisinage de 0 pour la solution de la zone 3 (après le changement de variable). En terme d'équation, cela s'écrit

$$\lim_{|\vec{x}| \rightarrow \infty} (\vec{w}_0(\vec{x}) + \epsilon \vec{w}_1(\vec{x})) = \epsilon \lim_{|\underline{x}| \rightarrow 0} \vec{w}_{\text{ext}}(\underline{x}).$$

Or nous avons vu au cours du chapitre 1 (propriété fondamentale, page 18) que quel que soit l'écoulement non perturbé, à l'infini $\vec{w}_0$ tend vers une Stokeslet, solution du problème

$$-\vec{\nabla} P^* + \vec{\Delta} \vec{w}_f^1 - 6\pi \frac{\vec{V}_g}{|\vec{V}_g|} \delta(\vec{x}) = \vec{0},$$

à savoir

$$\vec{w}_0(\vec{x}) = -\vec{\overline{G}}(\vec{x}) \cdot \frac{\vec{V}_g}{|\vec{V}_g|},$$

où

$$G_{ij} = \frac{3}{4} \left(\frac{\delta_{ij}}{|\vec{x}|} + \frac{x_i x_j}{|\vec{x}|^3} \right).$$

Notons que compte tenu de son expression, nous avons

$$\vec{\overline{G}}(\vec{x}) = \epsilon \vec{\overline{G}}(\underline{x}).$$

Cette partie du champ de vitesse doit donc forcément se raccorder avec une partie de $\vec{w}_{\text{ext}}(\underline{x})$. Par conséquent, la perturbation de la solution du problème intérieur doit donc se raccorder à ce qui reste, c'est à dire, après simplification des ϵ ,

$$\lim_{|\vec{x}| \rightarrow \infty} \vec{w}_1(\vec{x}) = \lim_{|\underline{x}| \rightarrow 0} \left(\vec{w}_{\text{ext}}(\underline{x}) - \vec{\overline{G}}(\underline{x}) \cdot \frac{(\vec{V}_p - \vec{V}_f^0(\vec{X}_p))}{|\vec{V}_g|} \right).$$

Pour terminer, Saffman (1965) a montré analytiquement que le membre de droite de cette égalité est donné à l'ordre dominant, par une constante (cette constante est fonction du rapport de $(d_\epsilon ta/d_{Re})$ et qui peut être écrite

$$\lim_{|\vec{x}| \rightarrow \infty} \vec{w}_1(\vec{x}) \simeq \vec{\overline{M}} \cdot \vec{V}_g.$$

Sachant que par définition, la composante de $\vec{w}_1$ doit être nulle sur la surface de la particule et qu'elle vérifie (à l'ordre dominant) une condition d'écoulement uniforme à l'infini, alors l'expression de la force issue de la vitesse $\epsilon \vec{w}_1$ pourra s'écrire sous la forme d'une traînée de Stokes. Finalement, la force qui s'exercera sur la particule pourra être donnée, en revenant à une expression dimensionnelle, sous la forme

$$\vec{F}^1 = 6\pi\mu_f a \left(\vec{\overline{I}} + \epsilon \vec{\overline{M}} \right) \cdot \vec{V}_g,$$

faisant apparaître un tenseur de mobilité que nous avons écrit ici $\overline{\overline{M}}$. Bien entendu, la difficulté majeure dans cette méthode de raccordement est la résolution du problème extérieur. En règle générale, il faut avoir recours aux transformées de Fourier. Aussi, il est important de noter que pour parvenir à calculer la force qui s'exerce sur la particule, il n'est pas nécessaire de connaître en tous points la solution du problème extérieur (heureusement!), mais seulement sa limite quand $|\underline{x}|$ tend vers 0, ce qui simplifie un peu le problème.

A.7 Force induite obtenue par Lovalenti et Brady (1993)

Notons tout d'abord que l'expression de la force induite obtenue par Lovalenti et Brady (1993a) n'est valable *a priori* que pour les écoulements uniformes, mais en revanche, le mouvement de la particule peut, lui, être quelconque. Dans l'expression que nous allons voir, les grandeurs sont sans dimension, les vitesses ayant été réduites par une certaine vitesse U_c (caractéristique de la vitesse de glissement), le temps par τ_c , les longueurs par a et la force induite par $\mu_f a U_c$. La force exercée par l'écoulement induit sur la particule est donnée par

$$\begin{aligned} \vec{F}^1 = & -6\pi \left(\vec{V}_p - \vec{V}_f \right) - \frac{2\pi}{3} ReSl \frac{d}{dt} \left(\vec{V}_p - \vec{V}_f \right) \\ & + \frac{3}{8} \left(\frac{ReSl}{\pi} \right)^{1/2} \left[\int_{-\infty}^t \left(\frac{2}{3} \vec{F}_s^{\parallel}(t) - \left\{ \frac{1}{|\vec{A}|^2} \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2|\vec{A}|} \operatorname{erf}(|\vec{A}|) - \exp(-|\vec{A}|^2) \right) \right\} \vec{F}_s^{\parallel}(s) \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{2}{3} \vec{F}_s^{\perp}(t) - \left\{ \exp(-|\vec{A}|^2) - \frac{1}{2|\vec{A}|^2} \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2|\vec{A}|} \operatorname{erf}(|\vec{A}|) - \exp(-|\vec{A}|^2) \right) \right\} \vec{F}_s^{\perp}(s) \right) \frac{2 ds}{(t-s)^{3/2}} \right] \end{aligned} \quad (A.7.1)$$

avec

$$Re = \frac{a U_c}{\nu_f} \quad \text{et} \quad Sl = \frac{a}{U_c \tau_c}$$

$$\vec{A} = \frac{Re}{2} \left(\frac{t-s}{ReSl} \right)^{1/2} \left(\frac{\vec{Y}_s(t) - \vec{Y}_s(s)}{t-s} \right)$$

et où

$$\vec{Y}_s(t) - \vec{Y}_s(s) = \int_s^t \left(\vec{V}_p(u) - \vec{V}_f^0(u) \right) du.$$

Également, nous avons

$$\vec{F}_s^{\parallel}(s) = \vec{P}(s) \otimes \vec{P}(s) \cdot \vec{F}_s(s)$$

et

$$\vec{F}_s^{\perp}(s) = \left(\vec{I} - \vec{P}(s) \otimes \vec{P}(s) \right) \cdot \vec{F}_s(s)$$

avec pour une inclusion sphérique

$$\vec{F}_s(s) = -6\pi \left(\vec{V}_p - \vec{V}_f^0 \right)$$

et où $\vec{P}(s)$ est le vecteur unitaire défini par

$$\vec{P}(s) = \frac{\vec{Y}_s(t) - \vec{Y}_s(s)}{|\vec{Y}_s(t) - \vec{Y}_s(s)|}.$$

Notons pour terminer qu'il existe un résultat équivalent pour les inclusions fluides, dans Lovalenti et Brady (1993b)

A.8 Description de la méthode des réflexions

La méthode des réflexions est une méthode originale qui encore une fois ne peut s'appliquer que parce que les équations de Stokes sont linéaires. Afin d'obtenir un écoulement qui vérifie bien la condition d'adhérence sur la paroi, c'est à dire la condition limite (1.6.1) de la page 34, rien n'empêche de rechercher

la solution exacte de ce problème sous la forme de la solution de Lamb (que nous écrirons $\vec{w}_0$), c'est à dire la solution si la plaque n'était pas là, plus une vitesse de perturbation. Ainsi, en posant

$$\vec{w}_f^1 = \vec{w}_0 + \vec{w}_a ,$$

il apparaît alors que cette vitesse $\vec{w}_a$ doit être solution des équations de Stokes et admettre, pour être conforme au problème initial, les conditions limites

$$\vec{w}_a = \vec{0} \quad \text{lorsque} \quad |\vec{x}| = a$$

et

$$\vec{w}_a(\vec{x}) = -\vec{w}_0(\vec{x}) \quad \text{lorsque} \quad \vec{x} \in \mathcal{C}(\vec{x}_s) .$$

A nouveau, cette vitesse $\vec{w}_a$ peut être écrite sous la forme d'un terme qui vérifie la bonne condition limite sur la paroi, mais qui est calculé comme si la particule n'était pas là, plus une autre perturbation, c'est à dire

$$\vec{w}_a = \vec{w}_1 + \vec{w}_b ,$$

avec

$$\vec{w}_1(\vec{x}) = -\vec{w}_0(\vec{x}) \quad \text{lorsque} \quad \vec{x}_s \in \mathcal{C}(\vec{x}_s) .$$

Par conséquent, $\vec{w}_1$ ne vérifie pas la bonne condition limite sur la surface de la particule, ce qui implique que $\vec{w}_b$ doit vérifier

$$\vec{w}_b = -\vec{w}_1 \quad \text{lorsque} \quad |\vec{x}| = a$$

et

$$\vec{w}_b(\vec{x}) = \vec{0} \quad \text{lorsque} \quad \vec{x} \in \mathcal{C}(\vec{x}_s) .$$

Encore une fois, cette vitesse peut être recherchée sous la forme d'un terme $\vec{w}_2$ qui vérifie la bonne condition sur la particule, mais calculée comme si la paroi n'était pas là, plus une perturbation, c'est à dire

$$\vec{w}_b = \vec{w}_2 + \vec{w}_c ,$$

et

$$\vec{w}_2 = -\vec{w}_1 \quad \text{lorsque} \quad |\vec{x}| = a .$$

Le terme $\vec{w}_c$ doit donc être tel que

$$\vec{w}_c = \vec{0} \quad \text{lorsque} \quad |\vec{x}| = a$$

et

$$\vec{w}_c(\vec{x}) = -\vec{w}_2(\vec{x}) \quad \text{lorsque} \quad \vec{x} \in \mathcal{C}(\vec{x}_s) .$$

A ce stade, la solution exacte du problème initial s'écrira

$$\vec{w}_f^1 = \vec{w}_0 + \vec{w}_1 + \vec{w}_2 + \vec{w}_c ,$$

et en procédant de la même manière pour déterminer $\vec{w}_c$ et indéfiniment, il apparaîtra que la solution du problème initial peut s'écrire sous la forme d'une somme infinie de termes. Toutefois, sans aller jusque là, remarquons qu'en omettant le terme $\vec{w}_c$, la solution vérifie la bonne condition limite sur la particule et bien qu'elle ne vérifie pas la bonne condition limite sur la paroi, l'écoulement obtenu sera déjà plus proche de la solution exacte que celle donnée par la solution de Lamb. En réalité, l'ordre de grandeur de la force induite par les termes successifs $\vec{w}_1 + \vec{w}_2$ est proportionnel au rapport entre la taille de la particule et sa distance à la paroi, i.e. en $O(a/|\min(\vec{x}_s)|)$. Poursuivre le développement en introduisant

des termes supplémentaires, $\vec{w}_3 + \vec{w}_4 + \dots$ permet alors de capturer des effets en $O(a^2/|\min(\vec{x}_s)|^2)$, etc...

Dans la pratique, la particule étant généralement supposée petite par rapport à sa distance à la paroi, il est souvent amplement suffisant de ne capturer que les corrections du premier ordre.

Annexe B (relative au chapitre 2)

B.1 Calculs des déformations optiques et illustration

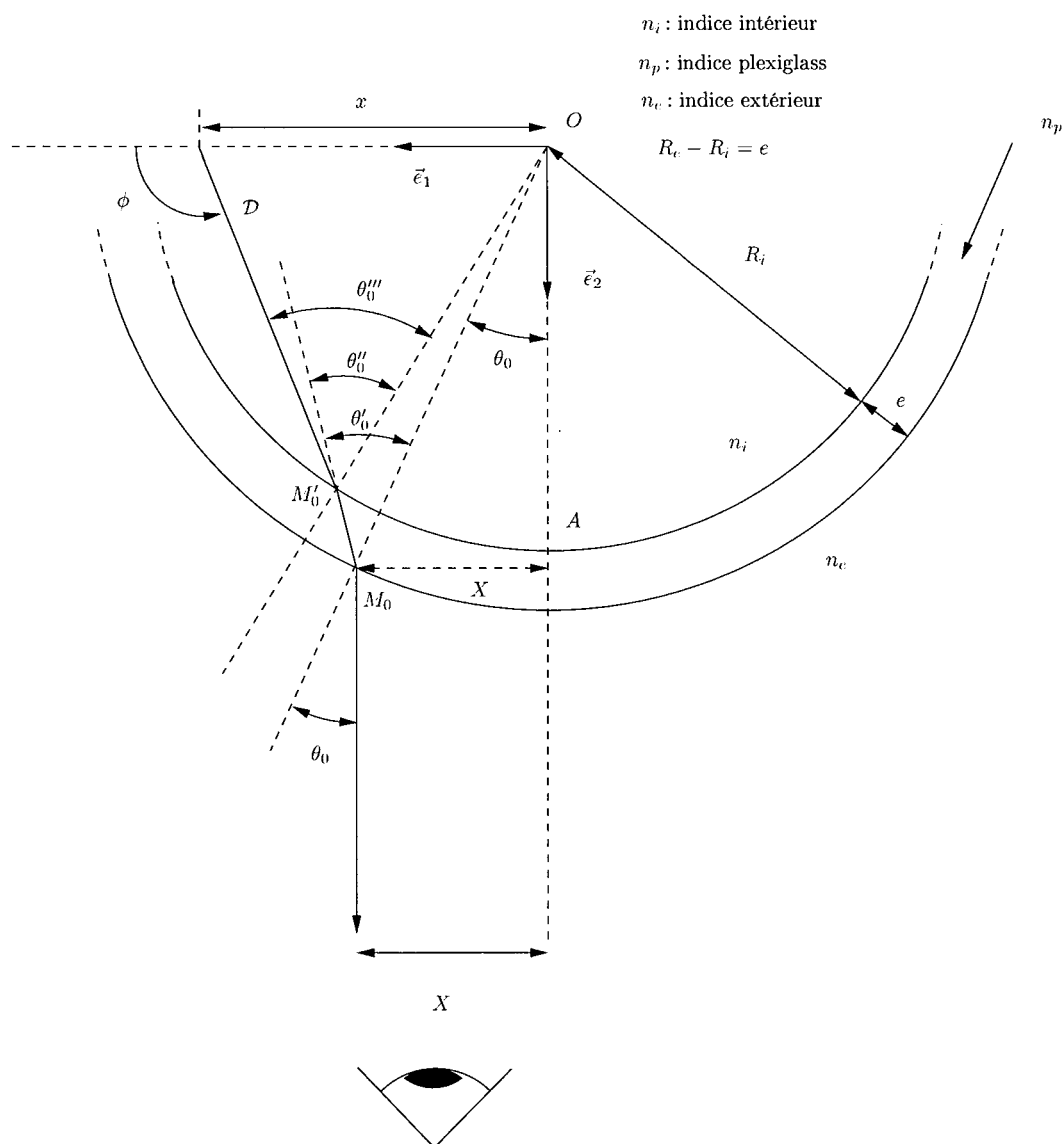


FIG. B.1 – Schéma d'un trajet optique de la bulle

Le but de cette annexe est d'établir le lien entre x (i.e. la distance vraie de la particule à l'axe de la conduite) et X la distance mesurée sur l'écran avec la caméra. Les calculs présentés ici ont été effectués par le Pr. Souhar (rapport interne au Lemta 2001). Tout d'abord, nous avons, sur le schéma B.1,

$$\sin \theta_0 = \frac{X}{R_e}. \quad (\text{B.1.1})$$

Par application de la loi de Snell-Descartes, il est possible d'écrire que

$$n_e \sin \theta_0 = n_p \sin \theta'_0 \Rightarrow \sin \theta'_0 = \frac{n_e}{n_p} \frac{X}{R_e}. \quad (\text{B.1.2})$$

Dans le triangle $OM_0M'_0$, il est également possible d'établir que

$$\frac{\sin \theta'_0}{R_i} = \frac{\sin(\pi - \theta''_0)}{R_e} = \frac{\sin \theta''_0}{R_e},$$

ce qui implique, à l'aide de (B.1.2), que

$$\sin \theta''_0 = \frac{n_e}{n_p} \frac{X}{R_i}. \quad (\text{B.1.3})$$

A nouveau, l'application de la loi de Descartes s'écrit

$$n_p \sin \theta''_0 = n_i \sin \theta'''_0$$

et avec (B.1.3),

$$\sin \theta'''_0 = \frac{n_e}{n_i} \frac{X}{R_i}. \quad (\text{B.1.4})$$

Au relations précédentes, peuvent être rajoutées les relations angulaires

$$\widehat{M_0OM'_0} = \theta'' - \theta'_0 \text{ ainsi que } \widehat{AOM'_0} = \theta_0 + \theta''_0 - \theta'_0,$$

de sorte qu'avec les relations (B.1.1), (B.1.2) et (B.1.3), il est finalement possible de montrer que

$$\widehat{AOM'_0} = \arcsin\left(\frac{X}{R_e}\right) + \arcsin\left(\frac{n_e}{n_p} \frac{X}{R_i}\right) - \arcsin\left(\frac{n_e}{n_p} \frac{X}{R_e}\right).$$

Enfin, notons que

$$\phi = \pi/2 - \widehat{AOM'_0} + \theta'''_0,$$

d'où

$$\phi = \pi/2 + \arcsin\left(\frac{n_e}{n_p} \frac{X}{R_e}\right) - \arcsin\left(\frac{n_e}{n_p} \frac{X}{R_i}\right) + \arcsin\left(\frac{n_e}{n_i} \frac{X}{R_i}\right) - \arcsin\left(\frac{X}{R_e}\right).$$

En posant $X^* = X/R_i$ et $e^* = e/R_i$ alors ϕ peut s'écrire

$$\phi = \pi/2 + \arcsin\left(\frac{n_e}{n_p} \frac{X^*}{1 + e^*}\right) - \arcsin\left(\frac{n_e}{n_p} X^*\right) + \arcsin\left(\frac{n_e}{n_i} X^*\right) - \arcsin\left(\frac{X^*}{1 + e^*}\right). \quad (\text{B.1.5})$$

Reste maintenant à obtenir l'équation de la droite $\mathcal{D}$, sachant que celle-ci est donnée par

$$y = \tan \phi x + b,$$

et qu'au point M'_0 , nous avons

$$y = R_i \cos \widehat{AOM'_0}, \quad x = R_i \sin \widehat{AOM'_0},$$

alors

$$y = R_i \cos(\widehat{AOM'_0}) + \tan \phi (x - R_i \sin(\widehat{AOM'_0})).$$

En conclusion, un point objet se situant à une distance X de l'axe de la conduite sur l'image de la caméra se situe quelque part sur la droite $\mathcal{D}$. Dans notre expérience, une plaque millimétrée est placée dans le plan $Y = 0$, de sorte que

$$\frac{x}{R_i} = -\frac{\cos(\widehat{AOM'_0})}{\tan \phi} + \sin \widehat{AOM'_0}.$$

et la déformation optique à l'écran de la caméra est négligeable dans une très grande partie de la conduite, comme cela est illustré dans l'exemple qui suit.

Illustration

Dans notre expérience, nous n'avons pas la valeur exacte de l'indice optique de l'huile de silicone. Néanmoins, afin d'illustrer l'intérêt de placer le cylindre dans une cuve rectangulaire fixe, plaçons nous dans le plan $Y = 0$, et remplaçons l'huile de silicone par de l'eau. Dans notre expérience, nous avons $R_i = 40$ mm et $e = 8$ mm, ce qui implique que $e^* = 0.2$. À présent, imaginons deux cas, le premier sans cuve et le second avec, de sorte que

- dans le 1^{er} cas, $n_i = 1.33$ (eau), $n_p = 1.51$ (plexiglass) et $n_e = 1.00$ (air),
- et dans le 2nd cas, $n_i = 1.33$ (eau), $n_p = 1.51$ (plexiglass) et $n_e = n_i = 1.33$ (eau).

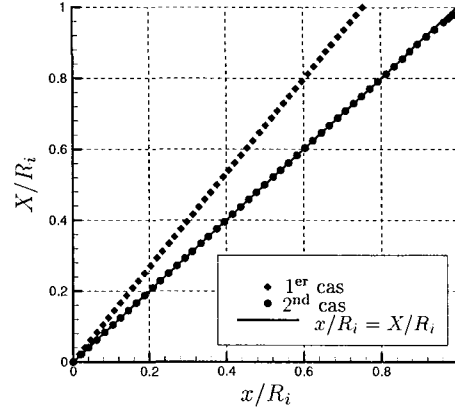


FIG. B.2 – Mise en évidence de l'intérêt de la cuve rectangulaire

Il apparaît alors clairement, sur la figure B.2 que dans le cas où l'indice de réfraction du milieu extérieur est égal à l'indice de réfraction du milieu intérieur, la déformation optique est négligeable dans une très grande partie de la conduite cylindrique.

Mise en évidence de l'intérêt de la cuve rectangulaire

En admettant que $n_e = n_i$, et en posant $n_e - n_p = \Delta n$, nous allons premièrement écrire que

$$n_e = n_p \left(1 + \frac{\Delta n}{n_p}\right) \quad \text{et supposer que} \quad \left|\frac{\Delta n}{n_p}\right| \ll 1.$$

Sachant ensuite que $e^* \ll 1$, cela implique que

$$\arcsin\left(\frac{X^*}{1+e^*}\right) = \arcsin(X^*) - \frac{X^*}{\sqrt{1-X^{*2}}} e + O(e^{*2}),$$

et il est alors possible de montrer que

$$\phi = \frac{\pi}{2} - \frac{X^*}{(1-X^{*2})^{3/2}} e^* \left(\frac{\Delta n}{n_p}\right) + o\left(e^{*2}(\Delta n/n_p)\right) + o\left(e^*(\Delta n/n_p)^2\right).$$

Autrement dit, lorsque $n_e = n_i$, le premier terme du développement de ϕ autour de $\pi/2$ est un terme d'ordre 2. Par conséquent, ce terme est négligeable sauf lorsque X^* devient très proche de 1. Expérimentalement, un résultat vraiment similaire est obtenu avec l'huile de silicone (voir figure 2.4), page 55.

B.2 Calibration du banc de déplacement

La calibration du banc de déplacement s'effectue en positionnant la caméra dans la configuration 2 (voir section 2.3, page 52). Pour mesurer la vitesse de déplacement, il est nécessaire de placer à l'intérieur du cylindre la plaque millimétrée et de suivre un point de la plaque. La vitesse de défilement du point se fait en mesurant la pente de la droite ainsi obtenue. Différentes vitesses de consigne sont imposées au banc de déplacement (en mm/s) et les vitesses obtenues avec la caméra sont en parfaite adéquation avec les vitesses imposées (dans le cas le plus défavorable, nous observons un écart de 0.53 %) comme le montre le tableau B.1.

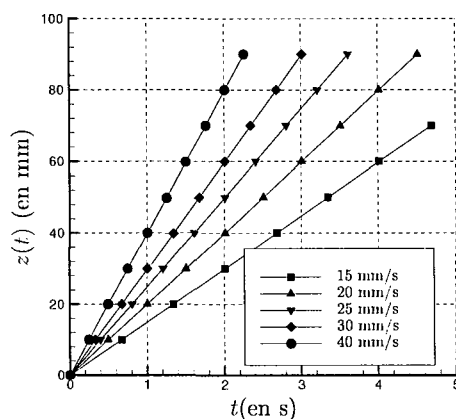


FIG. B.3 – Calibration du banc de déplacement

Vitesse imposée en mm/s	Vitesse mesurée en mm/s	Écart (%)
15	14.93	0.47
20	19.92	0.40
25	24.90	0.40
30	29.84	0.53
40	39.81	0.47

TAB. B.1 – Correspondance entre la vitesse imposée au banc de déplacement (en mm/s) et la vitesse mesurée expérimentalement avec la caméra

Annexe C (relative au chapitre 3)

C.1 Simplification de la solution (3.5.11)

Compte tenu de leurs positions dans le plan complexe, il est possible, voir par exemple Abramowitz et Stegun (1965), de montrer que pour des valeurs de

$$| -\mathcal{X}_3 \sqrt{t} | \simeq | -\mathcal{X}_4 \sqrt{t} |$$

grandes devant 1, les termes

$$\exp(\mathcal{X}_3^2 t) \operatorname{erfc}(-\mathcal{X}_3 \sqrt{t}) \quad \text{et} \quad \exp(\mathcal{X}_4^2 t) \operatorname{erfc}(-\mathcal{X}_4 \sqrt{t})$$

tendent respectivement vers

$$\frac{1}{-\mathcal{X}_3 \sqrt{\pi t}} \quad \text{et} \quad \frac{1}{-\mathcal{X}_4 \sqrt{\pi t}}.$$

Or nous savons que

$$| -\mathcal{X}_3 \sqrt{t} | \simeq | -\mathcal{X}_4 \sqrt{t} | \simeq O(S^{-1/2} \sqrt{t})$$

ce qui est rapidement grand devant 1 (typiquement pour $\sqrt{t}$ de l'ordre de l'unité). Ainsi, nous aurons

$$\frac{1}{-\mathcal{X}_3 \sqrt{\pi t}} \simeq \frac{1}{-\mathcal{X}_4 \sqrt{\pi t}} \simeq O(S^{1/2}/\sqrt{t}),$$

et donc

$$| \exp(\mathcal{X}_3^2 t) \operatorname{erfc}(-\mathcal{X}_3 \sqrt{t}) | \simeq | \exp(\mathcal{X}_4^2 t) \operatorname{erfc}(-\mathcal{X}_4 \sqrt{t}) | \simeq O(S^{1/2}/\sqrt{t}).$$

De plus, nous avons vu que dans le cas $\gamma = 1$, les termes

$$\frac{A_3}{\mathcal{X}_3} \quad \text{et} \quad \frac{A_4}{\mathcal{X}_4}$$

sont identiquement nuls. Sur la figure C.1, regardons l'évolution de ces deux termes dans le plan complexe lorsque γ varie de 0 à 2 (dans cet exemple, pour un nombre S fixé à 0.01).

Il apparaît alors que même pour des valeurs de γ différentes de 1, les valeurs de $|A_3/\mathcal{X}_3|$ et $|A_4/\mathcal{X}_4|$ sont toujours très petites devant 1. En conclusion, non seulement les fonctions $\exp(\mathcal{X}_3^2 t) \operatorname{erfc}(-\mathcal{X}_3 \sqrt{t})$ et $\exp(\mathcal{X}_4^2 t) \operatorname{erfc}(-\mathcal{X}_4 \sqrt{t})$ décroissent très vite dans le temps mais en plus elles sont multipliées, dans la solution (3.5.11), respectivement par les termes $A_3/\mathcal{X}_3$ et $A_4/\mathcal{X}_4$ qui sont très petits devant 1. Ces résultats nous amènent à dire que la contribution des termes

$$\frac{A_3}{\mathcal{X}_3} \exp(\mathcal{X}_3^2 t) \operatorname{erfc}(-\mathcal{X}_3 \sqrt{t}) \quad \text{et} \quad \frac{A_4}{\mathcal{X}_4} \exp(\mathcal{X}_4^2 t) \operatorname{erfc}(-\mathcal{X}_4 \sqrt{t})$$

est bien négligeable dans la solution (3.5.11).

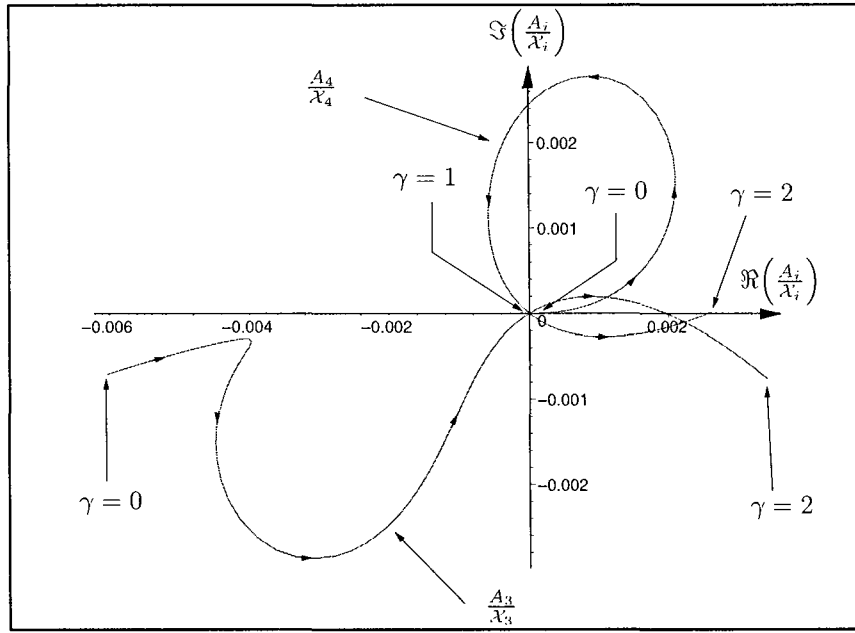


FIG. C.1 – Evolutions de A_3/X_3 et A_4/X_4 dans le plan complexe lorsque γ varie de 0 à 2 ($S=0.01$.)

C.2 Description de la méthode numérique

Afin de pouvoir comparer les résultats théoriques obtenus avec le noyau de Boussinesq-Basset à d'autres approches et notamment, avec le noyau de Mei *et al.* (1992), il nous est nécessaire de résoudre numériquement l'équation de mouvement de la particule. A cause du terme intégrodifférentiel, il nous a également semblé préférable d'employer la méthode d'Adams-Bashforth plutôt que l'algorithme de Runge-Kutta.

Soit le système différentiel suivant :

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = f(t, \mathbf{X}(t))$$

alors la méthode d'Adams-Bashforth nous conduit à écrire :

$$\mathbf{X}(t + 3\Delta t) \simeq \mathbf{X}(t + 2\Delta t) + \frac{\Delta t}{12} \left(5f(t, \mathbf{X}(t)) - 16f(t + \Delta t, \mathbf{X}(t + \Delta t)) + 23f(t + 2\Delta t, \mathbf{X}(t + 2\Delta t)) \right).$$

Rappelons que le système différentiel que nous souhaitons calculer est le suivant

$$\begin{aligned} \ddot{X}_p &= -\frac{3}{2\gamma+1} X_p - \frac{1}{S(2\gamma+1)} (\dot{X}_p + Y_p) + \frac{3}{\sqrt{S\pi}(2\gamma+1)} \int_0^t (-\dot{Y}_p - \ddot{X}_p) K(t-\tau) d\tau \\ \ddot{Y}_p &= -\frac{3}{2\gamma+1} Y_p - \frac{1}{S(2\gamma+1)} (\dot{Y}_p - X_p) + \frac{3}{\sqrt{S\pi}(2\gamma+1)} \int_0^t (\dot{X}_p - \ddot{Y}_p) K(t-\tau) d\tau, \end{aligned}$$

soit

$$\mathbf{X}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) = X_p(t) \\ x_2(t) = \dot{X}_p(t) \\ x_3(t) = Y_p(t) \\ x_4(t) = \dot{Y}_p(t) \end{pmatrix}.$$

Il apparaît que

$$\dot{X}(t) = \begin{pmatrix} x_2(t) \\ -\frac{3}{2\gamma+1} x_1(t) - \frac{1}{S(2\gamma+1)} (x_2(t) + x_3(t)) + \frac{3}{\sqrt{S\pi}(2\gamma+1)} Fh_x(t) \\ x_4(t) \\ -\frac{3}{2\gamma+1} x_3(t) - \frac{1}{S(2\gamma+1)} (x_4(t) - x_1(t)) + \frac{3}{\sqrt{S\pi}(2\gamma+1)} Fh_y(t) \end{pmatrix}$$

où les termes $Fh_x(t)$ et $Fh_y(t)$ sont détaillés par la suite. La méthode d'Adams-Bashforth nous impose initialement de connaître,

$$X(0), \quad X(\Delta t) \quad \text{et} \quad X(2\Delta t),$$

ces valeurs sont donc calculées à l'aide d'une méthode d'Euler simple. Revenons en maintenant aux termes $Fh_x(t)$ et $Fh_y(t)$. Ces derniers sont calculés en utilisant un schéma en $O(\Delta t^3)$ pour estimer les termes qui sont dérivés par rapport au temps,

$$\dot{U}(t) = \frac{1}{\Delta t} \left(-\frac{1}{6} U(t+2\Delta t) + U(t+\Delta t) - \frac{1}{2} U(t) - \frac{1}{3} U(t-\Delta t) \right),$$

ainsi, nous avons, pour chaque pas de temps et en adoptant la notation : $x^j = x(j\Delta t)$,

$$\begin{cases} Fh_x(t) \simeq \sum_{j=0}^{i-1} \left(-x_4^j - \frac{1}{\Delta t} \left[-\frac{x_2^{j+2}}{6} + x_2^{j+1} - \frac{x_2^j}{2} - \frac{x_2^{j-1}}{3} \right] \right) K^{i-j} \Delta t & (C.2.1) \\ Fh_y(t) \simeq \sum_{j=0}^{i-1} \left(x_2^j - \frac{1}{\Delta t} \left[-\frac{x_4^{j+2}}{6} + x_4^{j+1} - \frac{x_4^j}{2} - \frac{x_4^{j-1}}{3} \right] \right) K^{i-j} \Delta t & (C.2.2) \end{cases}$$

Bien entendu, avant d'utiliser le noyau de Mei *et al.* (1992), nous avons réalisé une étude numérique impliquant le noyau de Basset-Boussinesq (dont la solution analytique est déterminée) afin de nous assurer de la bonne convergence des résultats. Après avoir réalisé une étude de sensibilité au pas de temps, il apparaît que les résultats numériques convergent vers la valeur théorique et deviennent indépendants de la valeur du pas de temps pour : $\Delta t = 5 \cdot 10^{-4}$. Cela implique que les temps de calculs sont assez longs, surtout à cause des termes intégrodifférentiels.

Annexe D (relative au chapitre 4)

D.1 Généralisation de la méthode de calcul des racines $\mathcal{X}_1$ et $\mathcal{X}_2$

Afin de généraliser l'approche permettant d'obtenir les racines $\mathcal{X}_1$ et $\mathcal{X}_2$, nous allons utiliser le fait que dans les deux cas, la transformée de Laplace du noyau de la force d'histoire est algébrique (en terme de variable de Laplace p) et que de ce fait, dans les deux cas, il sera possible d'écrire que

$$\tilde{\mathcal{K}}(\mathcal{X})\mathcal{X}^2 = \frac{f(\mathcal{X}, S)}{g(\mathcal{X}, S)}.$$

Par exemple, pour une particule solide nous avons

$$\tilde{\mathcal{K}} = \frac{\sqrt{S\pi}}{X} \quad \text{et donc} \quad f(X, S) = \sqrt{S\pi} X \quad \text{et} \quad g(X, S) = 1,$$

et pour une inclusion gazeuse,

$$\tilde{\mathcal{K}} = \frac{\sqrt{S}}{\mathcal{X}^2 \sqrt{S} + \mathcal{X}} \quad \text{et donc} \quad f(X, S) = \sqrt{S} X \quad \text{et} \quad g(X, S) = X \sqrt{S} + 1.$$

Ensuite, nous allons remarquer qu'en multipliant le polynôme $P(\mathcal{X})$ par $g(\mathcal{X}, S) S(2\gamma + 1)$, nous obtenons un nouveau polynôme :

$$Q(\mathcal{X}) = g(\mathcal{X}, S) S(2\gamma + 1) P(\mathcal{X})$$

qui maintenant présente l'intérêt d'être linéaire en γ .

De même que ce qui a été fait dans le chapitre 3, écrivons $Q^0(\mathcal{X})$ le polynôme $Q(\mathcal{X})$ qui correspond au cas $\gamma = 1$ et $\mathcal{X}_i^0$ ses racines dans ce cas là. En posant à nouveau

$$\gamma = 1 + \delta\gamma$$

nous obtenons alors

$$Q(\mathcal{X}) = 2S \delta\gamma g(\mathcal{X}, S) \mathcal{X}^4 + Q^0(\mathcal{X}),$$

sachant que par définition, $Q^0(\mathcal{X})$ n'a aucune dépendance en γ .

En utilisant le fait que

$$\left| \frac{\delta \mathcal{X}_i}{\mathcal{X}_i} \right| \ll 1 \quad \text{pour} \quad i = \{1, 2\}$$

alors nous avons

$$Q(\mathcal{X}_i) = 2S \delta\gamma g(\mathcal{X}_i^0, S) \mathcal{X}_i^{04} + Q^0(\mathcal{X}_i^0) + \frac{\partial Q(\mathcal{X})}{\partial \mathcal{X}} \Big|_{\mathcal{X}_i^0} \delta \mathcal{X}_i + O(\delta \mathcal{X}^2).$$

Par définition, $Q(\mathcal{X}_i)$ et $Q^0(\mathcal{X}_i^0)$ sont nuls et finalement

$$\delta \mathcal{X}_i = - \frac{2S \delta\gamma g(\mathcal{X}_i^0, S) \mathcal{X}_i^{04}}{\frac{\partial Q(\mathcal{X})}{\partial \mathcal{X}} \Big|_{\mathcal{X}_i^0}} + O(\delta \mathcal{X}^2).$$

A l'aide de cette relation, nous obtenons, pour une particule solide, et tous calculs faits,

$$\mathcal{X}_1 = \sqrt{i} + \frac{3}{\mathcal{R}_\mu \sqrt{i}} S \delta\gamma - \frac{3\sqrt{\pi} C_h}{\mathcal{R}_\mu} S^{3/2} \delta\gamma + \frac{\sqrt{2}(3+3i)}{4\mathcal{R}_\mu^2} (2\mathcal{R}_\mu C_h^2 \pi - 36) S^2 \delta\gamma + O(S^{5/2}) \quad (\text{D.1.1})$$

et

$$\mathcal{X}_2 = -\sqrt{i} - \frac{3}{\mathcal{R}_\mu \sqrt{i}} S \delta\gamma - \frac{3\sqrt{\pi} C_h}{\mathcal{R}_\mu} S^{3/2} \delta\gamma - \frac{\sqrt{2}(3+3i)}{4\mathcal{R}_\mu^2} (2\mathcal{R}_\mu C_h^2 \pi - 36) S^2 \delta\gamma + O(S^{5/2}) \quad (\text{D.1.2})$$

ce qui bien sûr est identique aux résultats (3.5.13) et (3.5.14) du chapitre 3.

Pour une bulle, nous obtenons

$$\mathcal{X}_1 = \sqrt{i} + \frac{3}{\mathcal{R}_\mu \sqrt{i}} S \delta\gamma - \frac{3C_h}{\mathcal{R}_\mu} S^{3/2} \delta\gamma + \frac{\sqrt{2}(3+3i)}{4\mathcal{R}_\mu^2} (2\mathcal{R}_\mu C_h^2 + 2\mathcal{R}_\mu C_h - 36) S^2 \delta\gamma + O(S^{5/2}) \quad (\text{D.1.3})$$

et

$$\mathcal{X}_2 = -\sqrt{i} - \frac{3}{\mathcal{R}_\mu \sqrt{i}} S \delta\gamma - \frac{3C_h}{\mathcal{R}_\mu} S^{3/2} \delta\gamma - \frac{\sqrt{2}(3+3i)}{4\mathcal{R}_\mu^2} (2\mathcal{R}_\mu C_h^2 + 2\mathcal{R}_\mu C_h - 36) S^2 \delta\gamma + O(S^{5/2}). \quad (\text{D.1.4})$$

Quelque soit la nature de l'inclusion, nous voyons donc que les deux racines $\mathcal{X}_1$ et $\mathcal{X}_2$ sont quasiment opposées puisque nous avons alors

$$\mathcal{X}_1 + \mathcal{X}_2 = O(S^{3/2}).$$

En utilisant cette propriété, il est alors possible de montrer que notre solution exacte peut être approchée par

$$Z(t) = Z_0 \exp(\mathcal{X}_1^2 t).$$

Pour une particule solide, et en posant $\lambda_r = \Re(\mathcal{X}_1^2)$ et $\lambda_i = \Im(\mathcal{X}_1^2)$, nous obtenons

$$\lambda_r = \frac{6S}{\mathcal{R}_\mu} (\gamma - 1) + \frac{3\sqrt{2}\sqrt{\pi}C_h}{\mathcal{R}_\mu} S^{3/2} (\gamma - 1) + O(S^2)$$

et

$$\lambda_i = 1 + \frac{3\sqrt{2}\sqrt{\pi}C_h}{\mathcal{R}_\mu} S^{3/2} (\gamma - 1) + O(S^2)$$

et pour une bulle,

$$\lambda_r = \frac{6S}{\mathcal{R}_\mu} (\gamma - 1) + \frac{3\sqrt{2}C_h}{\mathcal{R}_\mu} S^{3/2} (\gamma - 1) + O(S^2)$$

et

$$\lambda_i = 1 + \frac{3\sqrt{2}C_h}{\mathcal{R}_\mu} S^{3/2} (\gamma - 1) + O(S^2).$$

A ce stade, il est intéressant de remarquer que pour une particule solide, nous avons

$$\frac{\sqrt{\pi} C_h}{\mathcal{R}_\mu} = 1$$

et de même, pour une bulle, nous avons

$$\frac{C_h}{\mathcal{R}_\mu} = 1,$$

D.2 Calcul de l'intégrale I

Dans cette annexe, nous calculons l'intégrale I donnée par

$$I = \int_{\mathbb{R}^3} (\vec{w}_\omega - \vec{w}^s) \cdot \vec{e}_1 \, d^3\vec{k}$$

et où $\vec{w}_\omega \cdot \vec{e}_1$ est donnée par (4.6.11), et $\vec{w}^s \cdot \vec{e}_1$ est donnée également par (4.6.11) mais en posant $\omega = 0$. Ainsi, nous avons

$$(\vec{w}_\omega - \vec{w}^s) \cdot \vec{e}_1 = -\frac{F_\omega}{8\pi^3\rho_f} \left\{ \frac{k_1^2 - k^2}{k^2(\nu_f k^2 - i\omega)} - \frac{1}{k^2\nu_f} \left(\frac{k_1^2}{k^2} - 1 \right) \right\}.$$

En introduisant la longueur

$$\delta = \left(\frac{2\nu_f}{\omega} \right)^{1/2},$$

nous pouvons écrire que

$$I = -\frac{F_\omega}{8\pi^3\nu_f\rho_f} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{k_1^2}{k^2} - 1 \right) \left(\frac{1}{k^2 - 2i/\delta^2} - \frac{1}{k^2} \right) dk_1 dk_2 dk_3.$$

En coordonnées sphériques, i.e. en posant $k_1 = k \sin\theta \cos\phi$ et $dk_1 dk_2 dk_3 = k^2 \sin\theta \, d\theta d\phi dk$, et après intégration suivant $\theta \in [0; \pi]$ et $\phi \in [0; 2\pi]$, nous obtenons :

$$I = \frac{F_\omega}{\pi^2\nu_f\rho_f} \frac{2i}{3} \int_0^\infty \frac{1}{k^2\delta^2 - 2i} dk.$$

Cette dernière intégrale se calcule par exemple à l'aide d'une décomposition en éléments simples de l'intégrande, et il apparaît que

$$I = \frac{F_\omega}{\pi\nu_f\rho_f} \frac{(i-1)}{6\delta}.$$

Enfin, puisque nous avons posé

$$F_\omega = 2\pi\mu_f a \mathcal{R}_\mu^{\text{equiv}} U_\omega$$

nous retrouvons l'équation (4.6.12) de la page 121.

Annexe E (relative au chapitre 5)

E.1 Calcul du champ de vitesse correspondant à notre étude

Dans cette annexe, nous nous proposons de calculer l'expression analytique des équations de Stokes instationnaires donnée par l'équation (1.1.28) de la page 12, et qui vérifie sur la particule, la condition limite

$$\vec{w}_f^1 = \dot{R}_p (\cos(\omega t) \vec{e}_1 + \sin(\omega t) \vec{e}_2) \quad \text{lorsque} \quad |\vec{x}| = a ,$$

et où le terme $\dot{R}_p$ est supposé constant. Dans un souci de simplicité, la solution qui sera obtenue sera représentée uniquement dans le plan $(o, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, comme le montre la figure E.1.

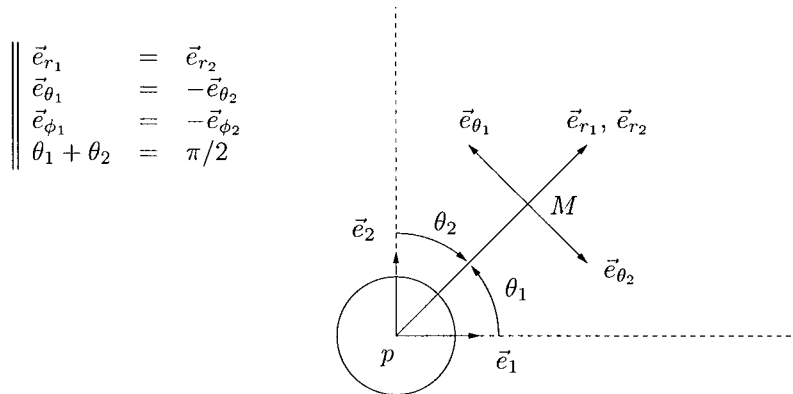


FIG. E.1 – Schéma d'illustration de l'étude

Pour obtenir la solution du problème considéré ici, nous allons nous appuyer sur la solution des équations de Stokes instationnaires correspondant au mouvement d'une particule solide qui vérifie la condition limite

$$\vec{w}_f = \vec{U}_\omega \exp(-i\omega t) \quad \text{lorsque} \quad |\vec{x}| = a .$$

Celle-ci a été obtenue par Landau et Lifchitz (1989) (voir aussi l'annexe A.3) et peut s'écrire sous la forme

$$\vec{w}_f = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$$

où dans une base sphérique ($\vec{e}_3$ coïncide avec $\vec{U}_\omega$) nous avons :

$$\vec{A} = A_\phi \vec{e}_\phi = \frac{df(r)}{dr} \vec{e}_r \wedge \vec{U}_\omega \exp(-i\omega t) .$$

En posant

$$k = \frac{1+i}{\delta} \quad \text{avec} \quad \delta = \left(\frac{2\nu_f}{\omega} \right)^{1/2} ,$$

alors Landau et Lifchitz (1989) ont obtenu

$$\frac{df(r)}{dr} = C_3 \frac{\exp(i k r)}{r^2} \left(r - \frac{1}{i k} \right) + \frac{C_4}{r^2},$$

avec

$$C_3 = -\frac{3a}{2ik} \exp(-ika) \quad \text{et} \quad C_4 = -\frac{a^3}{2} \left(1 - \frac{3}{ika} - \frac{3}{k^2 a^2} \right).$$

Connaissant $df(r)/dr$, il est possible d'en déduire l'expression analytique de $\vec{A}$, et par conséquent, celle du champ de vitesse solution de ce problème. Étant donné que dans notre étude, nous avons deux termes harmoniques dans l'expression de la condition limite, il nous suffit de calculer les champs de vitesses $\vec{w}_f^{1a}$ et $\vec{w}_f^{1b}$, en posant que $\vec{w}_f^{1a}$ est la solution du problème associé à la condition limite

$$\vec{w}_f^{1a} = \dot{R}_p \vec{e}_1 \exp(-i\omega t) \quad \text{lorsque} \quad |\vec{x}| = a$$

et que $\vec{w}_f^{1b}$ est la solution du problème associé à la condition limite

$$\vec{w}_f^{1b} = \dot{R}_p \vec{e}_2 \exp(-i\omega t) \quad \text{lorsque} \quad |\vec{x}| = a.$$

Dès lors, la solution de notre étude sera donc simplement

$$\vec{w}_f^1 = \Re(\vec{w}_f^{1a}) - \Im(\vec{w}_f^{1b}).$$

Après normalisation de la vitesse de l'écoulement induit par $\dot{R}_p$ et après introduction, dans le but d'alléger les écritures, des fonctions complexes

$$F(r) = -2 \left(\frac{C_3 \exp(ikr)(r + i/k) + C_4}{r^3} \right)$$

et

$$G(r) = -\frac{(ikr^2 - r - i/k) C_3 \exp(ikr) - C_4}{r^3}$$

qui ne dépendent que de r , il est possible de montrer que dans la base $(\vec{e}_{r_1}, \vec{e}_{\theta_1})$, la solution de notre problème s'écrit

$$w_r(r, \theta_1) = \Re(F(r) \exp(-i\omega t)) \cos \theta_1 - \Im(F(r) \exp(-i\omega t)) \sin \theta_1$$

et

$$w_{\theta_1}(r, \theta_1) = -\Re(G(r) \exp(-i\omega t)) \sin \theta_1 - \Im(G(r) \exp(-i\omega t)) \cos \theta_1.$$

Pour visualiser ce champ de vitesse, et parce que ce dernier est instationnaire, il est pratique de l'exprimer dans le référentiel $\mathcal{R}_p^r$ qui tourne autour de l'axe $\vec{e}_3$ avec la vitesse angulaire ω . En effet, dans ce référentiel et compte tenu du fait que nous supposons que le terme $\dot{R}_p$ est stationnaire, l'écoulement induit que nous venons de calculer est stationnaire.

Notons que pour exprimer la vitesse $\vec{w}_f^{1r}$ dans ce référentiel en rotation, il nous suffit d'exprimer cette vitesse en un point qui à r constant, se déplace lui-même à la vitesse $r\omega \vec{e}_{\theta_1}$, c'est à dire que nous allons écrire :

$$\vec{w}_f^{1r}(r, \theta_1) = \vec{w}_f^1(r, \theta_1 + \omega t).$$

Dans le référentiel tournant, les termes instationnaires se simplifient et après quelques calculs simples, nous pouvons montrer que

$$w_r^{1r}(r, \theta_1) = \Re(F(r)) \cos \theta_1 - \Im(F(r)) \sin \theta_1$$

et

$$w_{\theta_1}^{1r}(r, \theta_1) = -\Re(G(r)) \sin \theta_1 - \Im(G(r)) \cos \theta_1.$$

Également, il est possible de montrer que

$$\begin{aligned}\Re(F(r)) &= \frac{3a\delta}{2r^2} \exp\left(\frac{a-r}{\delta}\right) \left[\left(1 + \frac{\delta}{r}\right) \sin\left(\frac{r-a}{\delta}\right) - \cos\left(\frac{r-a}{\delta}\right) \right] + \frac{3a^2\delta}{2r^3} + \frac{a^3}{r^3}, \\ \Im(F(r)) &= -\frac{3a\delta}{2r^2} \exp\left(\frac{a-r}{\delta}\right) \left[\left(1 + \frac{\delta}{r}\right) \cos\left(\frac{r-a}{\delta}\right) + \sin\left(\frac{r-a}{\delta}\right) \right] + \frac{3a^2\delta}{2r^3} + \frac{a^3}{r^3},\end{aligned}$$

et de même

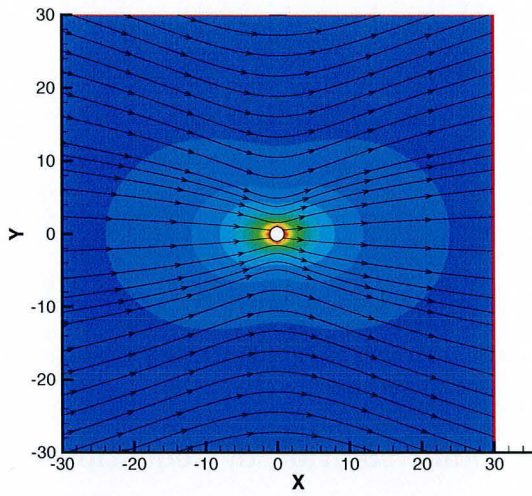
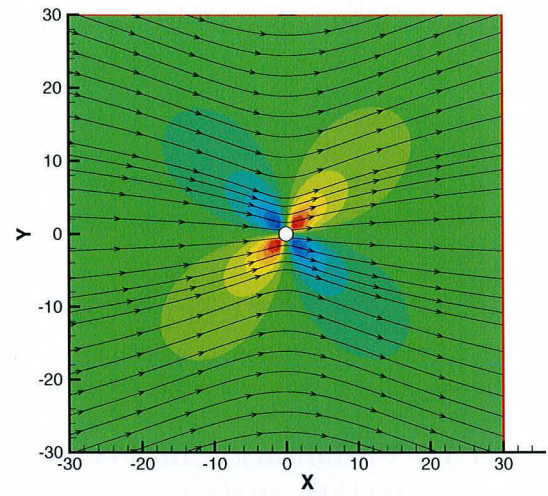
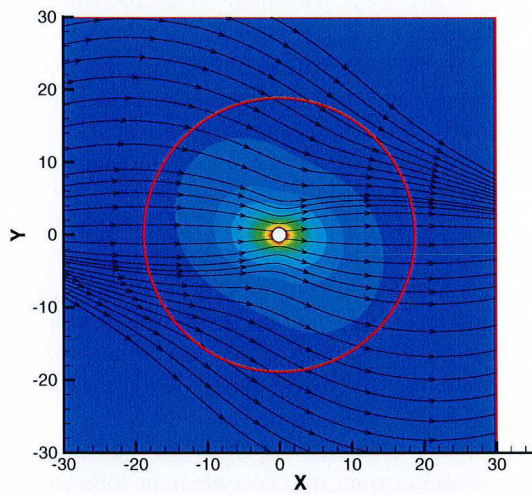
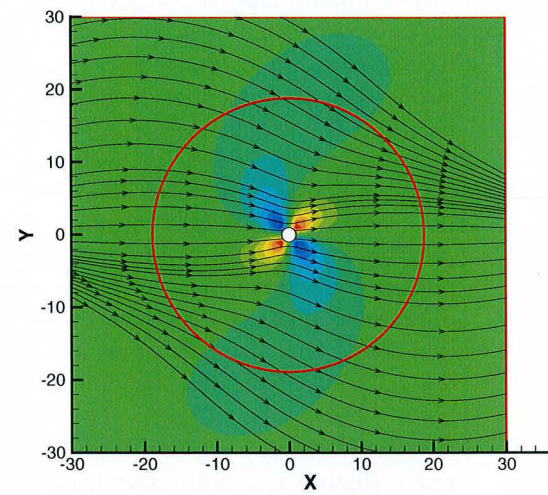
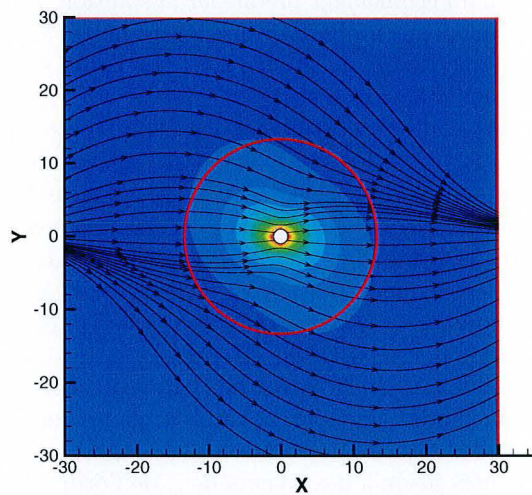
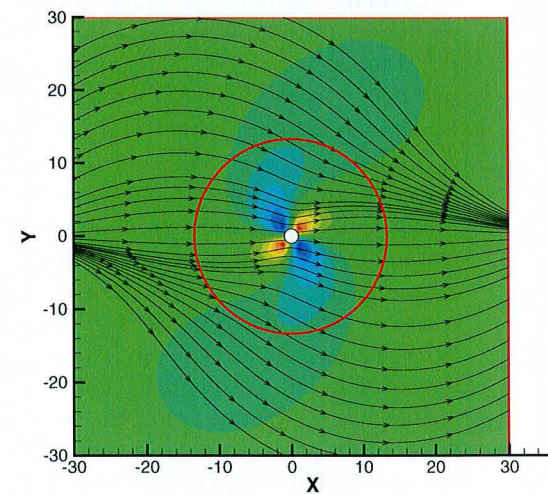
$$\begin{aligned}\Re(G(r)) &= \frac{3a\delta}{2r^2} \exp\left(\frac{a-r}{\delta}\right) \left[\left(\frac{r}{\delta} + \frac{1}{2}\right) \cos\left(\frac{r-a}{\delta}\right) - \left(\frac{\delta}{2r} + \frac{1}{2}\right) \sin\left(\frac{r-a}{\delta}\right) \right] - \frac{a^2(3\delta + 2a)}{4r^3}, \\ \Im(G(r)) &= \frac{3a\delta}{2r^2} \exp\left(\frac{a-r}{\delta}\right) \left[\left(\frac{\delta}{2r} + \frac{1}{2}\right) \cos\left(\frac{r-a}{\delta}\right) + \left(\frac{r}{\delta} + \frac{1}{2}\right) \sin\left(\frac{r-a}{\delta}\right) \right] - \frac{a^2(3\delta + 2a)}{4r^3}.\end{aligned}$$

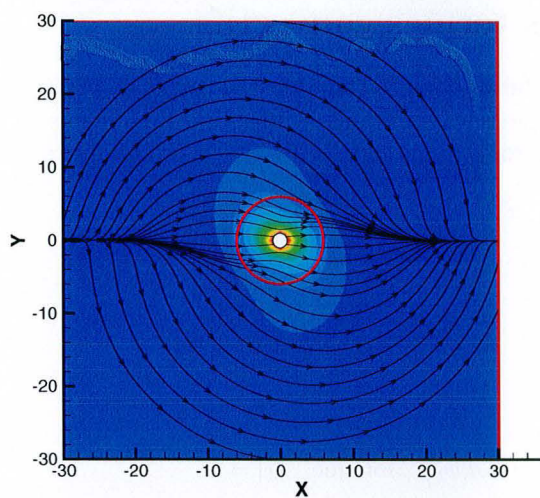
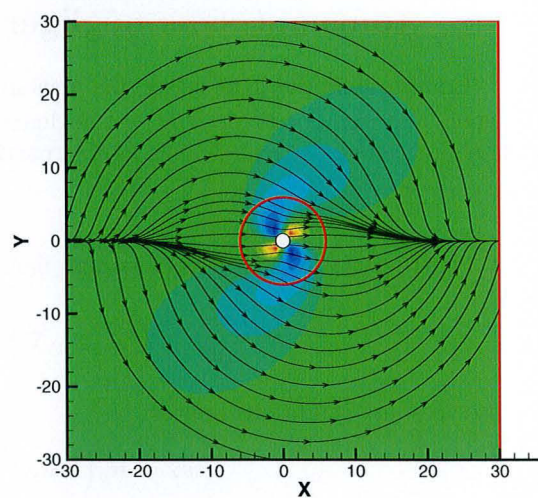
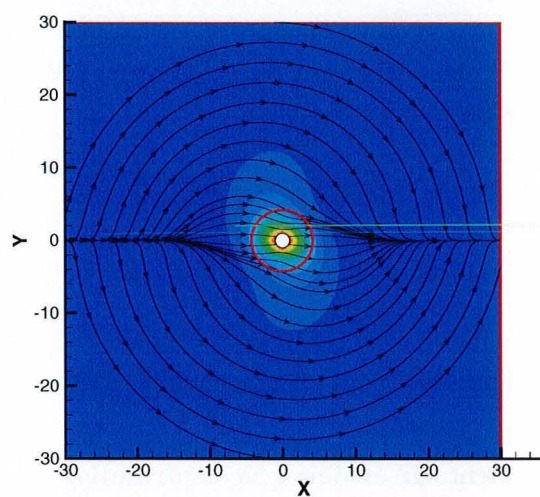
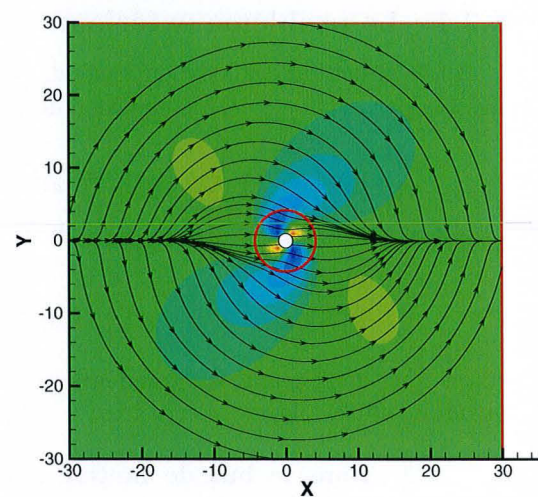
A l'aide de cette solution, nous pouvons maintenant obtenir les champs de vitesses ainsi que les lignes de courant qui sont représentés sur les figures dans la section suivante.

E.1.1 Visualisation de l'écoulement induit solution des équation de Stokes instationnaires

Sur les figures E.2 (et jusqu'à la figure E.11) nous représentons les lignes de courant observées dans le plan $(o, \vec{e}_1^r, \vec{e}_2^r)$, avec en arrière plan les valeurs normalisées par $\dot{R}_p$ des composantes suivant $\vec{e}_1^r$ et $\vec{e}_2^r$ de la vitesse induite relative, i.e. $w_1 = \vec{w}_f^{1r} \cdot \vec{e}_1^r$ et $w_2 = \vec{w}_f^{1r} \cdot \vec{e}_2^r$. Notons de plus que sur ces figures, les longueurs ont été normalisées par le rayon de la particule.

- Tout d'abord, nous pouvons remarquer que lorsque le cylindre ne tourne pas, l'écoulement induit vérifie dans le référentiel du laboratoire, une condition limite stationnaire et la solution obtenue correspond naturellement à la solution des équations de Stokes stationnaires. Ainsi, nous reconnaissons la forme classique des lignes de courant qui correspondent à une particule qui se déplace à vitesse constante dans un fluide en repos (voir par exemple Clift *et al.*, 1978). Notons aussi que dans notre étude, si $\omega = 0$, alors, en toute rigueur il n'y a pas de migration de la particule et par conséquent $\dot{R}_p = 0$. Mais ici, nous avons supposé que $\dot{R}_p$ n'était pas nul. Ce cas $\omega = 0$ nous permet donc simplement de vérifier que l'expression analytique du champ de vitesse que nous avons obtenue en annexe E.1 est bien correcte. Par la même occasion, nous voyons que le champ de vitesse a bien une répartition symétrique autour de la particule, conformément à ce que prédit la solution des équations de Stokes stationnaires calculée pour une particule qui se déplace dans un fluide au repos.
- Lorsque le cylindre est en rotation, même à très faible vitesse, c'est à dire lorsque $\omega = 0.5$ ou $\omega = 1$ rad/s, (figures E.4, E.5, E.6 et E.7), nous pouvons remarquer que l'écoulement lointain est déjà très affecté par la rotation. Notons que sur les figures E.4 et jusqu'à la figure E.11, nous avons tracé le cercle de rayon $\delta = (2\nu_f/\omega)^{1/2}$ (longueur de pénétration de l'écoulement). Aussi, si l'écoulement lointain est fortement perturbé par la rotation du cylindre, nous voyons, en revanche, que près de la particule l'écoulement induit correspond bien à l'écoulement prédit par la solution des équations de Stokes stationnaires. Par ailleurs, nous commençons à observer une légère perte de la symétrie des composantes w_1 et w_2 , ce qui implique l'augmentation de traînée ainsi que la force transversale que nous avons calculées analytiquement dans les chapitres 3 et 4.
- Lorsque le cylindre admet une vitesse de rotation un petit peu plus importante, c'est à dire par exemple lorsque $\omega = 5$ ou $\omega = 10$ rad/s (figures E.8, E.9, E.10 et E.11) alors nous pouvons voir que l'écoulement lointain est maintenant complètement modifié par la rotation du cylindre. Par ailleurs, il apparaît que δ est maintenant très proche de la particule, mais malgré cela, nous reconnaissons quand même dans la zone proche de la particule, la forme d'un écoulement rampant stationnaire. En fait, la transition entre l'écoulement proche et l'écoulement lointain est dans ce cas là assez brutale. Aussi, la perte de symétrie de l'écoulement induit s'est accrue. Dans une telle configuration, les lignes de courant sont presque circulaires autour de la particule. (Toutefois, notons que dans la région lointaine, l'écoulement induit est très faible) Aussi, la forme des lignes de courant n'évolue plus beaucoup lorsque la vitesse de rotation du cylindre augmente, c'est pourquoi nous avons choisi de ne pas représenter l'écoulement induit pour des vitesses de rotation plus importante, malgré le fait que dans nos expériences nous sommes montés jusqu'à des valeurs de ω de l'ordre de 20 rad/s.

FIG. E.2 - Arrière plan : w_1 ($\omega = 0$ rad/s).FIG. E.3 - Arrière plan : w_2 ($\omega = 0$ rad/s).FIG. E.4 - Arrière plan : w_1 ($\omega = 0.5$ rad/s).FIG. E.5 - Arrière plan : w_2 ($\omega = 0.5$ rad/s).FIG. E.6 - Arrière plan : w_1 ($\omega = 1$ rad/s).FIG. E.7 - Arrière plan : w_2 ($\omega = 1$ rad/s).

FIG. E.8 - Arrière plan : w_1 ($\omega = 5$ rad/s).FIG. E.9 - Arrière plan : w_2 ($\omega = 5$ rad/s).FIG. E.10 - Arrière plan : w_1 ($\omega = 10$ rad/s).FIG. E.11 - Arrière plan : w_2 ($\omega = 10$ rad/s).

E.2 Calculs des composantes M_{11} et M_{12} dans le référentiel non tournant sans négliger les termes convectifs

Compte tenu des hypothèses que nous avons faites dans ce chapitre 5, à savoir que $\dot{\Theta}_p = \omega$ et que la dépendance temporelle de $\dot{R}_p(t)$ est négligeable, alors les équations vérifiées par l'écoulement induit dans le référentiel non tournant mais lié à la particule sont, d'une part l'équation de continuité :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{w}_f^1 = 0, \quad (\text{E.2.1})$$

et d'autre part, les équations classiques linéarisées :

$$\frac{\partial \vec{w}_f^1}{\partial t} + \left\{ (\vec{A} \cdot \vec{x}) \cdot \vec{\nabla} \right\} \vec{w}_f^1 + \vec{A} \cdot \vec{w}_f^1 = -\frac{1}{\rho_f} \vec{\nabla} P + \nu_f \vec{\Delta} \vec{w}_f^1, \quad (\text{E.2.2})$$

associées aux conditions limites :

$$\vec{w}_f^1 = \dot{R}_p \left(\cos \omega t \vec{e}_1 + \sin \omega t \vec{e}_2 \right) \quad \text{lorsque} \quad |\vec{x}| = a \quad (\text{E.2.3})$$

et

$$\vec{w}_f^1 \rightarrow 0 \quad \text{lorsque} \quad |\vec{x}| \rightarrow \infty. \quad (\text{E.2.4})$$

E.2.1 Le problème extérieur

Après réduction des longueurs par $d_\eta = a/Ta^{1/2}$, des vitesses par $\dot{R}_p(t)$, du temps par $1/\omega$ et de la pression par $\rho_f(\omega\nu_f)^{1/2}\dot{R}_p$, l'équation du problème lointain s'écrit :

$$\frac{\partial \vec{w}_f^1}{\partial t} + \left\{ (\vec{\eta} \cdot \vec{x}) \cdot \vec{\nabla} \right\} \vec{w}_f^1 + \vec{\eta} \cdot \vec{w}_f^1 = -\vec{\nabla} P + \vec{\Delta} \vec{w}_f^1 + 6\pi \left(\cos t \vec{e}_1 + \sin t \vec{e}_2 \right) \delta(\vec{x}), \quad (\text{E.2.5})$$

où

$$\eta = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Notons que dorénavant, les grandeurs sont sans dimension, mais aucune notation particulière n'a été introduite afin d'alléger les écritures.

 **Dans le but de mettre explicitement en évidence la contribution des termes instationnaires et convectifs, nous allons arbitrairement placer un coefficient α devant le terme instationnaire et β devant les termes convectifs. Ces coefficients (qui valent 1 en toute rigueur) feront alors office de "traceurs".**

Ainsi, nous allons considérer l'équation

$$\alpha \frac{\partial \vec{w}_f^1}{\partial t} + \beta \left\{ (\vec{\eta} \cdot \vec{x}) \cdot \vec{\nabla} \right\} \vec{w}_f^1 + \vec{\eta} \cdot \vec{w}_f^1 = -\vec{\nabla} P + \vec{\Delta} \vec{w}_f^1 + 6\pi \left(\cos t \vec{e}_1 + \sin t \vec{e}_2 \right) \delta(\vec{x}), \quad (\text{E.2.6})$$

et nous allons maintenant introduire les transformées de Fourier spatiales suivantes :

$$\mathcal{F}(\vec{w}_f^1) = \vec{w} = \frac{1}{8\pi^3} \int_{\mathbb{R}^3} \vec{w}_f^1 \exp(-i \vec{k} \cdot \vec{x}) d^3 \vec{x}$$

et

$$\mathcal{F}(P) = \tilde{P} = \frac{1}{8\pi^3} \int_{\mathbb{R}^3} P \exp(-i \vec{k} \cdot \vec{x}) d^3 \vec{x}.$$

En calculant la transformée de Fourier de l'équation (E.2.6) et en faisant usage du fait que

$$\mathcal{F} \left(\frac{\partial \vec{w}}{\partial x_i} \right) = i k_i \vec{w} \quad \text{et que} \quad \mathcal{F} \left(x_j \frac{\partial \vec{w}}{\partial x_i} \right) = -k_i \frac{\partial \vec{w}}{\partial k_j},$$

nous obtenons :

$$\alpha \frac{\partial \vec{w}}{\partial t} + \beta \left(\left\{ k_1 \frac{\partial}{\partial k_2} - k_2 \frac{\partial}{\partial k_1} \right\} \vec{w} + \vec{\eta} \cdot \vec{w} \right) = -i \vec{k} \tilde{P} - k^2 \vec{w} + \frac{3}{4\pi^2} \left(\cos t \vec{e}_1 + \sin t \vec{e}_2 \right). \quad (\text{E.2.7})$$

Notons que si $\vec{w}(\alpha, \beta, k_i)$ est solution de cette équation, alors pour obtenir la solution Stokeslet correspondant à ce problème, et que nous écrirons $\vec{w}^s$, il suffira donc simplement de calculer $\vec{w}$ dans le cas particulier où $\alpha = 0$ et $\beta = 0$.

En nous inspirant du même changement de variable que celui proposé par Gotoh (1990), nous posons

$$k_1 = -\hat{k} \sin \eta \quad \text{et} \quad k_2 = \hat{k} \cos \eta,$$

et cela implique que

$$k_1 \frac{\partial}{\partial k_2} - k_2 \frac{\partial}{\partial k_1} = \frac{\partial}{\partial \eta}$$

de sorte que l'équation (E.2.7) peut être réécrite de la manière suivante :

$$\alpha \frac{\partial \vec{w}}{\partial t} + \beta \left(\frac{\partial \vec{w}}{\partial \eta} + \vec{\eta} \cdot \vec{w} \right) = -i \vec{k} \tilde{P} - k^2 \vec{w} + \frac{3}{4\pi^2} \left(\cos t \vec{e}_1 + \sin t \vec{e}_2 \right). \quad (\text{E.2.8})$$

Sachant que la solution de l'équation (E.2.8) doit être périodique en temps, nous pouvons donc l'écrire sous la forme

$$\vec{w} = \vec{w}_+ \exp(i t) + \vec{w}_- \exp(-i t)$$

et

$$\tilde{P} = \tilde{P}_+ \exp(i t) + \tilde{P}_- \exp(-i t).$$

Aussi, en utilisant les relations d'Euler pour écrire les fonctions $\cos t$ et $\sin t$, et en identifiant les composantes suivant $\exp(i t)$ et respectivement, suivant $\exp(-i t)$, nous obtenons alors deux équations. Dans la suite, nous ne nous intéressons qu'à la première de ces équations, sachant que la solution de la seconde équation correspondra simplement au vecteur conjuguée de la première. Ainsi, nous nous intéressons maintenant à la solution de l'équation :

$$\alpha i \vec{w}_+ + \beta \left(\frac{\partial \vec{w}_+}{\partial \eta} + \vec{\eta} \cdot \vec{w}_+ \right) = -i \vec{k} \tilde{P}_+ - k^2 \vec{w}_+ + \frac{3}{8\pi^2} \vec{e}_1 + \frac{3}{8i\pi^2} \vec{e}_2. \quad (\text{E.2.9})$$

Or la solution de cette équation est également périodique en η et de ce fait, la solution peut être écrite sous la forme d'une série de Fourier, dont les seules harmoniques non nulles sont :

$$\vec{w}_+ = \vec{w}_0 + \vec{w}_{1+} \exp(i \eta) + \vec{w}_{1-} \exp(-i \eta) + \vec{w}_{2+} \exp(2i \eta) + \vec{w}_{2-} \exp(-2i \eta),$$

et

$$\tilde{P}_+ = \tilde{P}_0 + \tilde{P}_{1+} \exp(i \eta) + \tilde{P}_{1-} \exp(-i \eta) + \tilde{P}_{2+} \exp(2i \eta) + \tilde{P}_{2-} \exp(-2i \eta).$$

En introduisant ces deux séries dans l'équation (E.2.9) et en exploitant l'orthogonalité des fonctions $\exp(n i \eta)$, la solution de cette dernière équation peut être obtenue analytiquement après résolution d'un système algébrique de 28 équations pour 20 inconnues. Dans la pratique, et sachant que dans le calcul de la force subie par la particule, nous serons amenés à réaliser une première intégration pour η variant de 0 à 2π , nous ne nous intéresserons donc qu'aux deux inconnues

$$\tilde{u}_0 \quad \text{et} \quad \tilde{v}_0,$$

sachant que nous avons écrit au préalable

$$\vec{w}_0 = \tilde{u}_0 \vec{e}_1 + \tilde{v}_0 \vec{e}_2 + \tilde{w}_0 \vec{e}_3.$$

En posant

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} (\tilde{u}_0 - \tilde{u}_0^s) \hat{k} d\eta d\hat{k} dk_3$$

et

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} (\tilde{v}_0 - \tilde{v}_0^s) \hat{k} d\eta d\hat{k} dk_3,$$

alors la force additionnelle que nous recherchons sera donc donnée par

$$6\pi T a^{1/2} \left[(2 \Re(I) \cos t - 2 \Im(I) \sin t) \vec{e}_1 + (2 \Re(J) \cos t - 2 \Im(J) \sin t) \vec{e}_2 \right]$$

où $\Re()$ et $\Im()$ correspondent respectivement à la partie réelle et à la partie imaginaire. Dans la pratique, pour mener à bien le calcul des intégrales I et J , nous procédons à un nouveau changement de variable en posant

$$k_3 = k' \sin \phi \quad \text{et} \quad \hat{k} = k' \cos \phi$$

avec

$$\phi \in [-\pi/2; \pi/2] \quad \text{et} \quad k' \in [0; \infty].$$

Tous calculs faits (en nous aidant de Maple 7) nous obtenons que la force hydrodynamique qui s'exerce sur la particule est donnée par

$$\vec{F}^1 = -6\pi\mu_f a \left[\vec{I} + T a^{1/2} \begin{pmatrix} M_{11}(\alpha, \beta) & -M_{12}(\alpha, \beta) \\ M_{12}(\alpha, \beta) & M_{11}(\alpha, \beta) \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} \dot{R}_p \cos \omega t \\ \dot{R}_p \sin \omega t \end{pmatrix}$$

avec

$$M_{11}(\alpha, \beta) = \frac{\sqrt{2}}{280} \left(\frac{(3\beta - \alpha)^3 \sqrt{|3\beta - \alpha|} + (\alpha + \beta)^{3/2} (\alpha^2 - 12\alpha\beta + 57\beta^2)}{\beta^3} \right) \quad (\text{E.2.10})$$

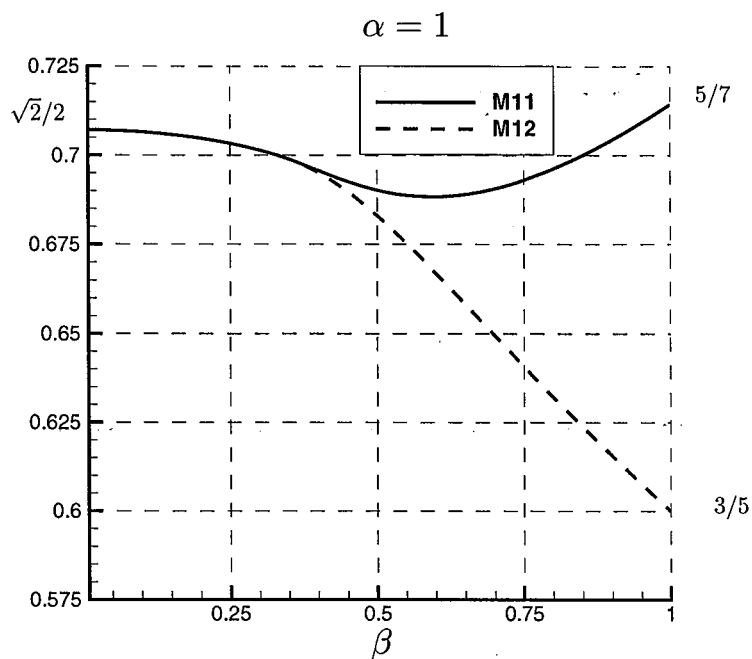
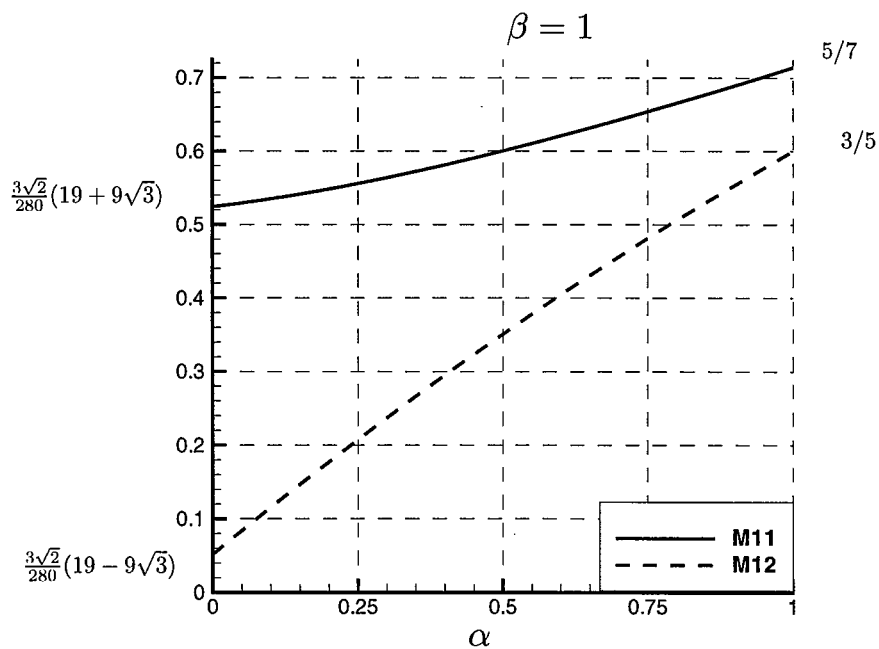
et

$$M_{12}(\alpha, \beta) = \frac{\sqrt{2}}{280} \left(\frac{-|3\beta - \alpha|^{7/2} + (\alpha + \beta)^{3/2} (\alpha^2 - 12\alpha\beta + 57\beta^2)}{\beta^3} \right). \quad (\text{E.2.11})$$

Bien entendu, nous pouvons alors vérifier que nous retrouvons les principaux résultats de la littérature récapitulé dans le tableau E.1.

	Herron <i>et al.</i> : $\alpha = 1$ $\beta = 1$	BBO : $\alpha = 1$ $\beta = 0$	Gotoh : $\alpha = 0$ $\beta = 1$
$M_{11}(\alpha, \beta)$	5/7	$\sqrt{2}/2$	$3\sqrt{2}(19 + 9\sqrt{3})/280$
$M_{12}(\alpha, \beta)$	3/5	$\sqrt{2}/2$	$3\sqrt{2}(19 - 9\sqrt{3})/280$

TAB. E.1 – Comparaison de la solution obtenue avec les principaux résultats de la littérature correspondant à l'étude de Herron *et al* (1975), de Gotoh (1990) et l'étude BBO

FIG. E.2 – Evolution des coefficients M_{11} et M_{12} lorsque $\alpha = 1$ et β varie :FIG. E.3 – Evolution des coefficients M_{11} et M_{12} lorsque α varie et $\beta = 1$.

Bibliographie

- Abbad, M. 2003 Contribution sur les forces d'histoire exercées sur des inclusions solides ou fluides à faibles nombres de Reynolds. *Thèse de Doctorat, INPL Nancy*.
- Abbad, M. et Souhar, M. 2004 Experimental investigation on the history force acting on oscillating fluid spheres at low Reynolds number. *Phys. Fluids* **16**(10), 3808–3817.
- Abbad, M. et Souhar, M. 2004 Effects of the history force on an oscillating rigid sphere at low Reynolds number. *Experiments in fluids*. **36**, 775–782.
- Abramowitz et Stegun 1965 Handbook of mathematical functions. *Dover publications inc., N.Y.*
- Annamalai, P. et Cole, R. 1986 Particle migration in rotating liquids *Phys. Fluids* **29**(3).
- Asmolov, E. et McLaughlin, J.B. 1987 The inertial lift on a oscillating sphere in a linear shear flow. *Int. J. of Multiphase Flow*. **13**, 199–218.
- Auton, T.R. 1987 The lift force on a spherical body in rotational flow. *J. Fluid Mech.* **183**, 199–218.
- Batchelor, G.K. 1967 Introduction to fluid dynamics. *Cambridge University press*.
- Basset, A.B. 1888 Treatise on hydrodynamics. *Deighton Bell, London*. **2**, 285–297.
- Bentwich, M. et Miloh, T. 1978 The unsteady matched Stokes-Oseen solution for the flow past a sphere. *J. Fluid Mech.* **88**, 17–32.
- Bretherton, F.P. 1962 The motion of rigid particles in a shear flow at low Reynolds number. *J. Fluid Mech.* **14**, 284–304.
- Boussinesq, J. 1885 Sur la résistance qu'oppose un fluide indéfini au repos sans pesanteur au mouvement varié d'une sphère solide qu'il mouille sur toute sa surface quand les vitesses restent bien continues et assez faibles pour que leurs carrés et produits soient négligeables. *C. R. Acad. Sci. Paris* **100**, 935.
- Brenner, H. 1964 *Chem. Eng. Sci.* **19**, 519.
- Candelier, F., Angilella, J.R. et Souhar, M. 2004 On the effect of the Boussinesq-Basset force on the radial migration of a Stokes particle in a vortex. *Phys. Fluids* **16**(5), 1765–1776.
- Candelier, F., Angilella, J.R. et Souhar, M. 2005 On the effect of inertia and history forces on the slow motion of a spherical solid or gaseous inclusion in a solid-body rotation flow. *J. Fluid Mech.* à paraître.
- Childress, S. 1964 The slow motion of a sphere in a rotating, viscous fluid. *J. Fluid Mech.* **20**, 305–314.
- Chwang, A.T. et Wu, T.Y-T. 1975 Hydromechanics of low- Reynolds-number flow. Part 2. Singularity method for Stokes flows. *J. Fluid Mech.* **183**, 199–218.
- Clift, R., Grace, J.R et Weber, M.E. 1978 Bubbles, drops and particles. *Academics Press*
- Coimbra, C.F.M. et Kobayashi, M. H. 2002 On the viscous motion of a small particle in a rotating cylinder. *J. Fluid Mech.* **469**, 257–286.
- Druzhinin, O.A. et Ostrovsky, L.A. (1994) 1994 The influence of the Basset force on a particle dynamics in two-dimensional flows. *Physica D* **76**, 34–43.
- Faxén, H. 1922 Der Widerstand gegen die Bewegung einer starren Kugel in einer zum den Flüssigkeit, die zwischen zwei parallelen Ebenen Winden eingeschlossen ist, *Ann. Phys (Leipzig)*, **68**, 89–119.
- Galindo, V. et Gerbeth, G. 1993 A note on the force on an accelerating spherical drop at low Reynolds numbers. *Phys. Fluids* **5**(12), 3290–3292.
- Gatignol, R. 1983 The Faxén formulae for a rigid particle in an unsteady non-uniform Stokes flow. *J. Méc. Théor. Appl.* **1** (2), 143–160.
- Gorodtsov, V.A. 1975 Slow motions of a liquid drop in a viscous liquid. *Zhurnal Prikladnoi Mekhaniki i Tekhnicheskoi Fiziki* **6**(2), 32–37. (translated in: *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* (**16**), 865)
- Gotoh, T. 1990 The brownian motion in a rotating flow *J. Stat. Phys.* **59**, 371–390.

- Guyon, E., Hulin J-P. et Petit L. 2001 Hydrodynamique physique *CNRS EDITIONS*, Paris.
- Hadamard, J. 1911 Mouvement permanent lent d'une sphère liquide et visqueuse dans un liquide visqueux. *C. R. Acad. Sci. Paris* **152**(25), 1735.
- Happel, J. et Brenner, H. 1983 Low Reynolds Hydrodynamics. *Kluwer Academic, London*, 1983.
- Harper, E.Y. et Chang, I-Dee. 1968 Maximum dissipation resulting from lift in a slow viscous shear flow. *J. Fluid Mech.* **33**, part. 2, 209–225.
- Harper, J.F. 1973 On bubbles with small immobile adsorbed films rising in liquids at low Reynolds numbers. *J. Fluid Mech.* **58**, 539–545.
- Herron, I.H., Davis, S. & Bretherton F. P. 1975 On the sedimentation of a sphere in a centrifuge. *J. Fluid Mech.* **68**, part. 2, 209–234.
- Kim, S. et Karila, S. 1991 Microhydrodynamics: principles and selected applications *Butterworth-Heinemann*, Boston.
- Lamb, H. 1945 Hydrodynamics, (ed. London : Cambridge Univ. Press) Chapitre XI.
- Landau, L., Lifchitz, E 1989 Physique théorique, Tome 6, mécanique des fluides (ed. Mir), pp. 127–129.
- Legendre, D. et Magnaudet, J. 1997 A note on the lift force on a spherical bubble or drop in a low-Reynolds-number shear flow. *Phys. Fluids* **9** (11), 3572–3574.
- Legendre, D. et Magnaudet, J. 1998 The lift force on a spherical bubble in a viscous linear shear flow. *J. Fluid Mech.* **368**, 81–126.
- Lovalenti, P.M. et Brady, J.F. 1993 The hydrodynamic force on a rigid particle undergoing arbitrary time-dependent motion at small Reynolds numbers. *J. Fluid Mech.* **256**, 561–605.
- Lovalenti, P.M. et Brady, J.F. 1993 The force on a bubble, drop, or particle in arbitrary time-dependent motion at small Reynolds numbers. *Phys. Fluids A* **5**, 2104–2116
- Magnaudet, J., Rivero, M. et Fabre, J. 1995 Accelerated flows past a rigid sphere or a spherical bubble. Part I. Steady straining flow. *J. Fluid Mech.* **284**, 97–135.
- Magnaudet, J. 2003 Small inertial effects on a spherical bubble, drop or particle moving near a wall in a time dependant linear flow. *J. Fluid Mech.* **485**, 115–142.
- Maxey, M.R., Riley, J.J. 1983 Equation of Motion for a small rigid sphere in a nonuniform flow. *Phys. Fluids* **26**(4), 883–889.
- Maxworthy, T. 1965 Accurate measurments of sphere drag at low Reynolds numbers. *J. Fluid Mech.* **23**, part 2, 369–372.
- Maxworthy, T. 1965 An experimental determination of the slow motion of a sphere in a rotating, viscous fluid. *J. Fluid Mech.* **23**, part 2, 373–384.
- McLaughlin, J. B. 1991 Inertial migration of a small sphere in linear shear flows. *J. Fluid Mech.* **224**, 261–274.
- Mei, R. et Adrian, R.J. 1992 Flow past a sphere with an oscillation in the free-stream velocity and an unsteady drag at finite Reynolds number. *J. Fluid Mech.* **237**, 323–341.
- Miyazaki, K. 1995 Dependence of the friction tensor on the rotation of a frame of reference. *Physica A* **222**, 2489–260.
- Miyazaki, K., Bedeaux, D., Bonet, Avalos, J. 1995 Drag on a sphere in a slow shear flow. *J. Fluid Mech.* **296**, 373–390.
- Naciri, A. 1992 Contribution à l'étude des forces exercées par un liquide sur une bulle de gaz : portance, masse ajoutée et interactions hydrodynamiques. *Thèse de Doctorat, Ecole Centrale de Lyon*.
- Odar, F. et Hamilton, W.S. 1964 Forces on a sphere accelerating in a viscous fluid. *J. Fluid Mech.* **18**, 302–314.
- Oseen, C.W. 1910 Über die Stokes'sche Formel und über eine verwandte Aufgabe in der Hydrodynamik. *Ark. Mat. Astron. Fysik.* **6**(29)
- Pozrikidis, C. 1992 Boundary Integral and Singularity Methods for Linearized Viscous Flow. *Cambridge University Press, Cambridge*.
- Proudman, I. et Pearson, J.R.A. 1957 Expansions at small Reynolds numbers for the flow past a sphere and circular cylinder. *J. Fluid Mech.* **22**(2), 385–400.
- Raju, N., Meiburg, E. 1997 Dynamics of small, spherical particles in vortical and stagnation point flow fields. *Phys. Fluids* **9**, 299–314.

- Rhines, P.B. et Young, W.R. 1983 How rapidly is a passive scalar mixed within closed streamlines? *J. Fluid Mech.* **133**, 133–145.
- Rybczynski, W. 1911 *Bull. int. Acad. Pol. Sci. Lett., Cl. Sci. Math. Nat., Ser. A.* 40–46.
- Sadhal, S. S. et Johnson, R. E. 1983 Stokes flow past bubbles and drops partially coated with thin films. Part 1. Stagnant cap of surfactant film-exact solution *J. Fluid Mech.* **126**, 237–250.
- Saffman, P.G. 1965 The lift on a small sphere in a viscous flow. *J. Fluid Mech.* **22**, part 2, 385–400.
- Saffman, P.G. 1968 Corrigendum *J. Fluid Mech.* **31**, 624.
- Sano, T. 1981 Unsteady flow past a sphere at low Reynolds number. *J. Fluid Mech.* **112**, 433–441.
- Segré, G. et Silberberg, A. 1962 Behaviour of macroscopic rigid spheres in Poiseuille flow. Part 2. Experimental results and interpretation. *J. Fluid Mech.* **14**, 136–157.
- Stokes, G.G. 1845 On the theories of internal friction of the fluids in motion *Trans. Cambridge Philos. Soc.* **8**, 287–319.
- Tchen, C. M. 1949 Mean values and correlation problems. connected with the motion of small particles suspended in a turbulent fluid. *Doctoral dissertation, Technical University of Delft*, Netherlands.
- Wang, L.P., Maxey, M.R., Burton, T.D., Stock, D.E. 1992 Chaotic dynamics of particle dispersion in fluids *Phys. Fluids A* **4**(8), 1822–1823.
- Yang, S., Leal, L. G. 1991 A note on memory integral contributions to the force on an accelerating spherical drop at low Reynolds number. *Phys. Fluids A* **3**, 1822–1823.

On the effect of inertia and history forces on the slow motion of a spherical solid or gaseous inclusion in a solid-body rotation flow

By **FABIEN CANDELIER,**
JEAN – RÉGIS ANGILELLA AND MOHAMED SOUHAR

Laboratoire d'Énergétique et de Mécanique Théorique et Appliquée, CNRS UMR 7563
INPL, 2 av. de la Forêt de Haye, BP 160, 54 504 Vandœuvre-Lès-Nancy, France

(Received 5 September 2005)

The motion of a spherical inclusion released in a vertical solid-body rotation flow is investigated theoretically and experimentally. Solid spheres and bubbles are considered. The particle Reynolds number, the Taylor number, the Weber number and the capillary number are smaller than unity. The motion equations of the inclusion are obtained by revisiting the hydrodynamic equations. The axial (vertical) motion and the horizontal motion are uncoupled, even though they are sensitive to the rotation rate of the flow. Analytical solutions of the particle motion equation are compared to experimental results obtained by releasing a particle in a rotating tank filled-up with silicone oil. For solid spheres and bubbles, both the terminal velocity and the particle ejection rate (or trapping rate) predicted by the theory agree with experiments, without any empirical adjustment. In particular, the experimental device enables to check the validity of various theories involving solid or gaseous inclusions with or without inertia or history effects. It is observed that the mobility tensor of Herron *et al.* (1975), obtained by writing the fluid motion equations in the rotating frame, accurately predicts the horizontal particle trajectory, like the Boussinesq-Basset equation obtained by writing the fluid motion equations in the non-rotating frame and neglecting the horizontal contribution of inertia effects.

1. Introduction

The determination of the force experienced by a spherical inclusion moving in a Newtonian fluid at low Reynolds number has been a challenging topic for several decades. This problem shows many fundamental aspects, but has obvious applications in many fields of physics or biology, as well as in engineering science. Indeed, many natural or industrial flows are loaded with solid or fluid inclusions the scale of which can range from a few microns to several meters. The prediction of their trajectories requires a detailed understanding of their dynamics, i.e. of the force acting on them. In the present paper the motion of a solid or gaseous inclusion in a vertical solid-body vortex is considered. This problem is of major importance for both elementary fluid dynamics and realistic situations. Indeed, this flow, though apparently simple, enables to investigate very rich dynamical behaviours.

The motion equation of the particle in the laboratory reference frame is generally written

as :

$$m_p \frac{d^2 \mathbf{X}_p}{dt^2} = m_p \mathbf{g} + \mathbf{F}^0 + \mathbf{F}', \quad (1.1)$$

where m_p and $\mathbf{X}_p(t)$ denote the particle mass and position respectively, $\mathbf{F}^0$ is the integral of the stress of the unperturbed velocity field $\mathbf{V}_f^0$ at the particle surface, and $\mathbf{F}'$ is the integral of the stress of the perturbation velocity field. Because the unperturbed velocity field satisfies the Navier-Stokes equations, the force $\mathbf{F}^0$ can be readily obtained and is often called the “pressure gradient force of the unperturbed flow”. In particular it includes the Archimedes force.

In contrast, it is generally difficult to find an analytical expression for $\mathbf{F}'$ in terms of $\mathbf{V}_f^0$. Nevertheless, when convective inertia effects (denoted “inertia effects” hereinafter) can be neglected, and for an isolated solid sphere immersed in a uniform flow, $\mathbf{F}'$ is provided by the well-known Basset-Boussinesq-Oseen (BBO) equation (Basset 1888; Boussinesq 1885). The various terms appearing in this equation are the drag, the added-mass force and the history force. An equivalent equation for fluid inclusions immersed in an unsteady uniform flow (in the absence of inertia effects) has been obtained by Gorodtsov (1975) (see also Yang & Leal 1991; Galindo & Gerbeth 1993). The resulting force has the same form as the one of Boussinesq (1885) and Basset (1888) except that the drag coefficient and the kernel in the history integral differ, since the boundary condition at the interface of the inclusion is different. Note that, for fluid inclusions, the expression of the kernel is known only in the Fourier space, and no general compact expression of the force in the time-domain is available except when the viscosity ratio is either very small or very large.

Clearly, both the BBO equation and the Gorodtsov equation efficiently predict the dynamics of solid or fluid inclusions provided inertia effects can be neglected. However, this “creeping-flow” assumption is no longer valid in many cases. For example, when an inclusion is released into a quiescent fluid, the unsteadiness of the velocity perturbation eventually vanishes while convective terms are no longer negligible far from the inclusion (Oseen’s problem). The determination of the particle-induced flow therefore requires to solve a steady equation, but involving inertia terms : the resulting force experienced by the particle is therefore different from the one of BBO or Gorodtsov. In particular, the history term vanishes and the drag coefficient increases (see Proudman & Pearson (1957) for solid particles). Note that Sano (1981), Mei *et al.* (1992) and Lovalenti & Brady (1993) have also investigated this problem for a particle moving unsteadily in a uniform flow.

If, in addition the unperturbed flow is a shear flow, a lift force can appear due to these inertia effects (Saffman 1965, 1968; McLaughlin 1991), as well as a shear-induced drag correction (see Harper & Chang 1968; Miyazaki, Bedeaux & Bonet Avalos 1995). Also, for particles immersed in a solid-body rotation flow, inertia effects can emerge and induce lift effects as well as drag corrections in both the axial and the radial directions (Childress 1964, Herron *al.* 1975, Gotoh 1990). These inertial effects have been recently revisited by Magnaudet (2003), and generalized to fluid inclusions, in the case of inclusions moving in a time-dependent linear flow in the vicinity of a wall (see also Legendre & Magnaudet 1997).

Several numerical investigations have been done in the last decade (see for example Magnaudet *et al.* (1995) for history effects, and Legendre & Magnaudet (1998) for inertia effects). In contrast, very few experimental verifications of these various approaches,

especially when inertial effects are present, have been done so far (see for example Odar & Hamilton (1964), Abbad & Souhar (2004a), Abbad and Souhar (2004b), Coimbra *et al.* (2004), for history effects, and Maxworthy (1965), Karanfilian & Kotas (1981) for the drag corrections due to inertia effects).

The purpose of the present paper is to investigate experimentally the history force and inertia effects experienced by a spherical solid or gaseous inclusion falling or rising in a vertical solid-body rotation flow. In addition, the radial motion of these inclusions will be investigated in details. The question of the validity of the creeping flow assumption (i.e. no inertial effects) is of major importance in this flow. Indeed, the particle is expected to reach its terminal velocity after a short transient, so that inertial effects should be taken into account at the expense of history effects to predict the vertical motion. Nevertheless, as the particle rises (or falls) it converges towards the axis of the vortex (or is ejected towards its periphery). Under the combined effect of this radial motion and of the cylinder rotation, the fluid velocity as seen by the inclusion, in the laboratory reference frame, is unsteady. Therefore, the flow induced by the inclusion is likely to be unsteady too : history effects could therefore be non-negligible. Also, in the rotating frame, the effect of the Coriolis force on the perturbed velocity is known to induce drag corrections (see Herron *et al.* 1975).

In order to analyse these effects, we have investigated the problem in two steps. First, we have revisited the flow equations around the inclusion in order to derive the particle motion equation for both solid and gaseous inclusions. For gaseous inclusions we used the approach proposed by Legendre & Magnaudet (1997), as will be shown below. Then, we have solved analytically the particle motion equations obtained by these various theories and relevant parameters, such as the particle ejection or trapping rate and the terminal velocity, could be obtained. Secondly, an experimental device has been built, in order to check the theoretical predictions.

Note that by writing the perturbed fluid equations in both the laboratory and the rotating frame, we are led to apparently different expressions for the hydrodynamic force experienced by the particle. This problem, investigated in details by Miyazaki (1995), will be discussed in the conclusion of the present paper.

The effect of the Boussinesq-Basset force on the radial migration of a solid Stokes particle falling in a vertical vortex has already been investigated in details by Candelier, Angilella and Souhar (2004), for Stokes numbers lying between 0 and 0.01. The aim of the present paper is to generalize these results to the case of gaseous inclusions and larger Stokes numbers, and to analyse the effect of rotation on the terminal vertical velocity also.

Section 2 concerns the experimental apparatus. Section 3 deals with the flow equations and the derivation of the force experienced by the inclusion. The particle motion equation is then integrated and compared to experimental results in sections 4 and 5. A discussion is proposed in section 6.

2. Experimental apparatus

2.1. General description

The main facility of our experimental device is a cylindrical vertical tank made of plexiglass. Its radius is $R = 4$ cm and its height is $L = 25$ cm. The tank rotates around its symmetry axis (figure 1). The rotation frequency can be varied from 0 to 25 rad s⁻¹, it

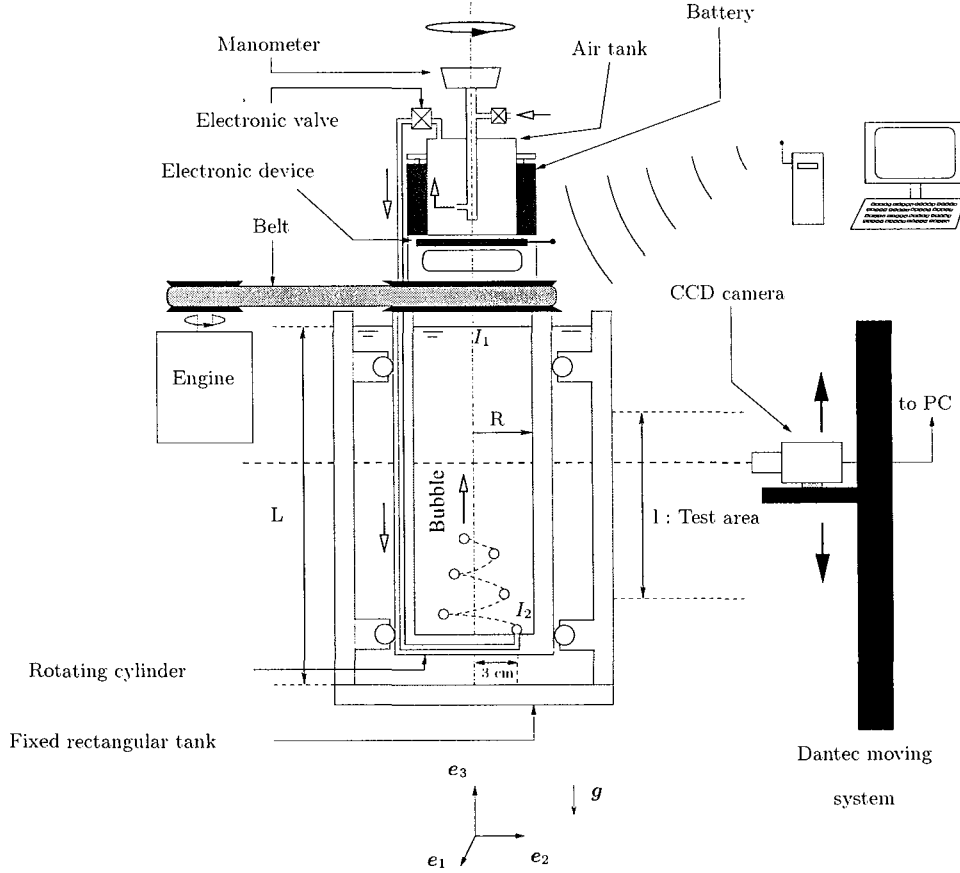


FIGURE 1. Sketch of the experimental apparatus. Solid particles are released from I_1 and bubbles are injected at I_2 .

is kept constant during the runs, and is measured with a negligible uncertainty (about 0.1 %).

The cylindrical tank is filled-up with silicone oil and immersed in a fixed rectangular tank also filled with the very same oil (in order to account for the optical deformation through the fluids and the walls). Note that the cylindrical tank is totally hermetic so that there is no interaction between the oil located within the cylinder and the oil located in the rectangular tank. Hence, the velocity field of the oil inside the cylinder has a solid-body rotation structure a few seconds after the cylinder starts rotating. The structure of the unperturbed flow has been checked by using tracers. No differential rotation has been observed.

The kinematic viscosity of the silicone oil used for this experiment has been determined accurately by making use of a capillary viscosimeter for temperatures lying between 18 and 30 °C, and follows, with a negligible uncertainty, the linear law $\nu_f = (2.743 - 0.036 T(^{\circ}\text{C})) 10^{-4} \text{ m}^2\text{s}^{-1}$. Its density has also been measured with an accurate densimeter and we have $\rho_f = 972 \text{ kg m}^{-3}$ at 20 °C. This value remains almost constant for the range of temperatures considered here.

Particles heavier than the fluid are released into the cylindrical tank through the upper lid. Bubbles are injected by means of an elaborated device described below. Because

silicone oil is translucent, the inclusions are always visible. As they fall or rise, their motion is filmed by means of a CCD camera JAI CV-M30 recording 60 or 120 images/second, according to our needs. The camera can either follow the particles along their vertical motion (by means of Dantec's moving system), or remain fixed in the laboratory reference frame. The height of the test area recorded by the camera is $l = 15$ cm (figure 1). The resolution of the camera is about 0.3 mm/pixel. By making use of the Optimas image processing software we can measure both the vertical and the radial coordinates of the inclusion, as well as its diameter.

2.2. Physical properties of the inclusions

Two kinds of inclusions are used in the experiment : solid particles and bubbles. In the following the index f denotes the continuous phase, whereas the index p denotes the particle, either solid or fluid. The solid particles are white polyacetal spheres, the radius of which is provided with a negligible uncertainty : $a \simeq 1.5$ mm. Their density is

$\rho_p = 1410 \text{ kg m}^{-3}$, so that the density ratio $\gamma = \rho_p/\rho_f$ is equal to 1.45 for solid spheres throughout this paper.

The gaseous inclusions used in this experiments are air bubbles, which are such that

$$\frac{\nu_p}{\nu_f} \text{ and } \frac{\mu_p}{\mu_f} \text{ and } \frac{\rho_p}{\rho_f} \ll 1,$$

and these properties will be used for the theoretical calculations below. Both the bubble radius and position are measured simultaneously during the motion. This can be achieved accurately by using a mobile camera moving in the vertical direction at the terminal speed of the inclusion. For example, the photograph of figure 2 shows such a bubble, together with the calibrated plane which enables to determine both the bubble radius and position. (Note that the drop is spherical, and that the 1:2 elliptical shape is an artefact due to the camera). The absolute error about the bubble radius is one pixel, that is 0.06 mm, so that the relative error is about 4 %. As for the radial position, the absolute error is about 1 pixel, so that the relative error for the bubble of figure 2 is 0.6 %.

2.3. The bubble injector

Bubbles have to be injected at the bottom of the rotating cylinder, and this increases significantly the complexity of the experimental device. Gaseous inclusions are generated by a bubble injector which is fixed on the top of the rotating tank and produces bubbles at the bottom of the tank. This additional device is shown in figure 1. It is composed of a small cylindrical tank filled with air under pressure. This pressure is measured by a manometer placed above, and can be set between 0.01 and 1.5 bar. Also, an electronic valve enables to open the air tank during a time interval τ which can be controlled accurately by using an electronic device ($5 \text{ ms} \leq \tau < \infty$). This electronic valve is supplied by batteries which were cautiously distributed in an axisymmetric manner around the air tank, and triggered by a remote control apparatus. A tiny plastic tube joins the outlet of the electronic valve and the point I_2 at the bottom of the rotating oil tank (see figure 1). Bubbles are therefore created at point I_2 , the radial position of which is $r = 3$ cm.

By controlling both the pressure in the air tank and the opening procedure of the electronic valve, one can generate isolated bubbles with a small radius distribution, so that the experiment has a satisfactory reproducibility.

2.4. Measurement of the particle coordinates

In the rotating case, the uncertainty about the position of the inclusion must be taken into account.

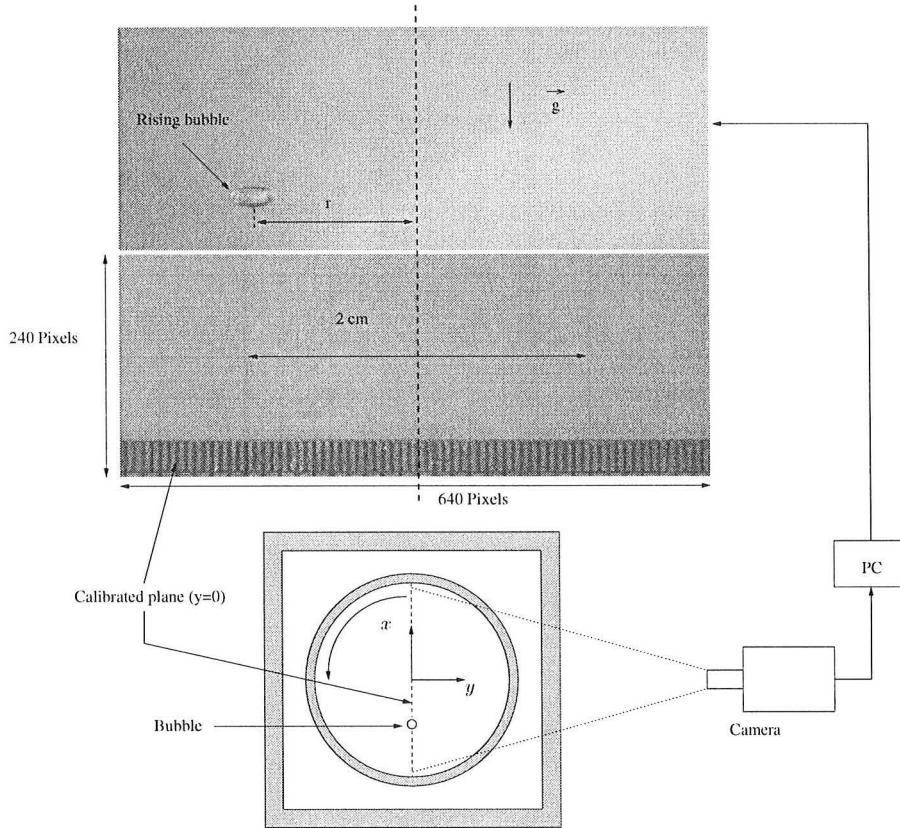


FIGURE 2. Upper view of the rotating cylinder and of the calibrated plane.

The experimental device enables to measure the radial and vertical coordinates (r, z) of the inclusion. This can be done accurately when the particle crosses the plane $y = 0$ (see figure 2), since this position corresponds to a local maximum of the x -coordinate on the frame of the camera. The absolute error Δr due to the fact that the particle is not exactly in this plane at the time of the snapshot can be readily calculated, and satisfies $\Delta r = (r/8)(\Omega/f)^2$, where f is the camera sampling frequency, which is chosen according to the angular velocity of the rotating tank. The typical value of Δr is about 0.04 mm, so that the corresponding relative error is about 0.4 %. Therefore, the sum of the relative errors due to the pixelization (0.6 % as shown above) and to the crossing of the calibrated plane is about 1 %.

Finally, for all kinds of inclusion the angular velocity of the particle $\dot{\theta}$ is measured as follows. The time t_e elapsed between every two intersection points between the particle trajectory and the plane $y = 0$ (see figure 2) is measured accurately. In all runs, we observed that t_e is constant and very close to $2\pi/\Omega$. Therefore we concluded that the angular velocity of the particle is constant, and very close to Ω . This result will be confirmed by theoretical calculations below. Furthermore, by marking particles with spots of ink, we could observe that the proper angular velocity of the particle, Ω_p , is very close to Ω . As will be shown below, this point is in agreement with Childress' theory (Childress 1964).

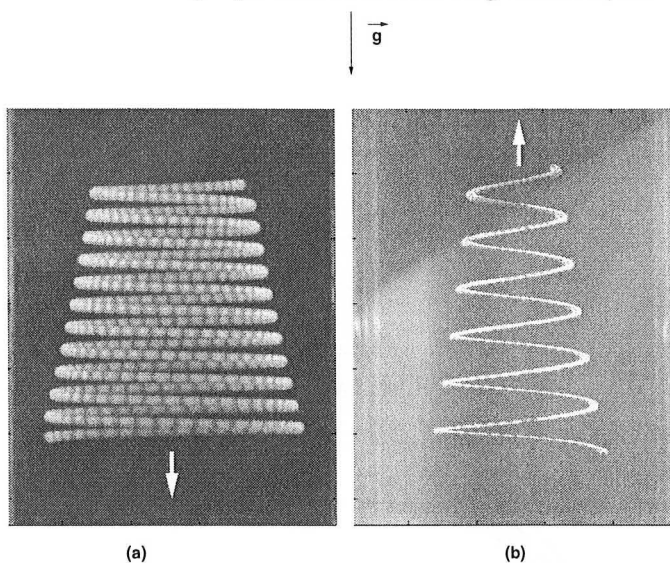


FIGURE 3. Typical trajectories in the (x,z) plane obtained par superimposing a large number of images recorded during a run. Left photograph : solid sphere of radius $a = 1.5$ mm, $\Omega = 10 \text{ rad s}^{-1}$, $Re_T \simeq 0.065$, $Re_H \simeq 0.004$, $S \simeq 0.012$. Right photograph : bubble of radius $a \simeq 1.1$ mm, $\Omega = 7 \text{ rad s}^{-1}$, $Re_T \simeq 0.1$, $Re_H \simeq 0.004$, $S \simeq 0.005$. (Note that the horizontal Reynolds numbers Re_H are unsteady. The values given here correspond to the largest speed of the inclusion during the radial migration.)

2.5. Typical trajectories and estimation of the non-dimensional parameters

Figure 3 shows typical trajectories of solid and gaseous inclusions obtained by superimposing the images of the movies. Some orders of magnitude of the relevant non-dimensional numbers can be estimated from these photographs.

First of all, since the azimuthal slip velocity is negligible, a look at the vertical distance between every two maxima of the trajectory of figure 3 clearly shows that :

$$\frac{d\mathbf{X}_p}{dt} \cdot \mathbf{e}_3 = \text{constant} = V_T,$$

i.e. the inclusions have reached a terminal vertical velocity. This velocity is denoted by V_T in the following. We have observed that this terminal velocity is reached within a few seconds.

This observation is confirmed on figure 4 where the experimental axial coordinate of a solid sphere is plotted versus time. Clearly, the vertical velocity V_T is constant, and this constant depends on the angular velocity of the tank, as observed by Maxworthy (1965) in the absence of radial migration. (Indeed, in the experiments of Maxworthy, particles are lighter than the fluid and are injected near the axis of the tank : henceforth they rise along the axis of the cylindrical tank, and experience no horizontal migration.) Maxworthy's experimental results outline the dependence of the terminal velocity on the cylinder rotation rate Ω , and are in quantitative agreement with Childress' theoretical predictions (Childress 1964). In the following the effect of Ω on the terminal velocity and the radial migration of the inclusion will be analyzed for both solid and gaseous inclusions.

The vertical speed of bubbles is also constant, as shown on figure 5. It is also sensitive

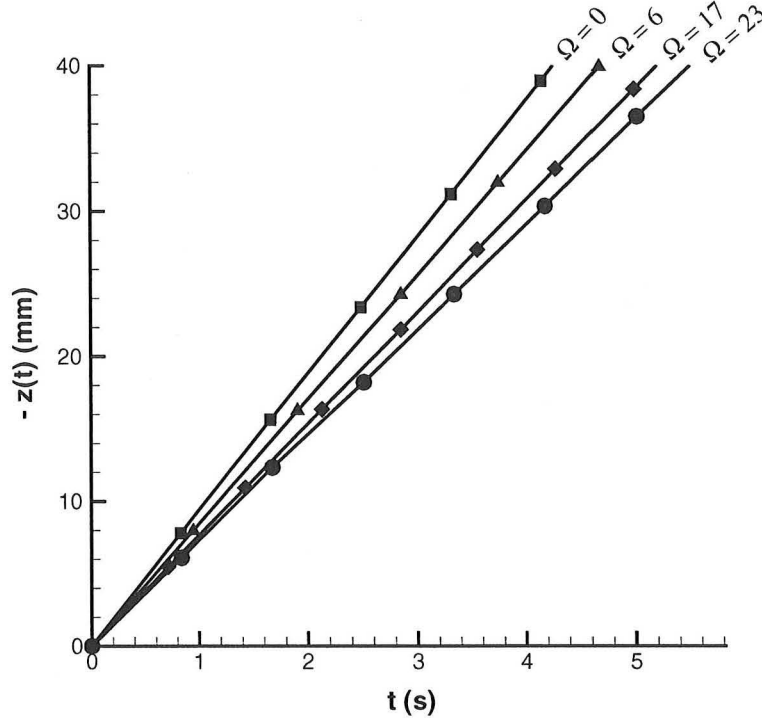


FIGURE 4. Plot of the measured vertical coordinate of a solid sphere of radius $a = 1.5$ mm versus t , for various angular velocities of the rotating cylinder (in units of rad s^{-1}). For the sake of simplicity, the time $t = 0$ on figures 4, 5, 6 and 7 corresponds to the time when the particle reaches the test area.

to Ω , as will be shown below. (Because the bubble radius slightly changes for each run, figure 5 does not show $z(t)$ for various Ω , since the bubble radius cannot be held fixed during the series of runs.)

The radial coordinate $r(t)$ of the bubble of figure 5, and the radial coordinate $r(t)$ of the solid sphere corresponding to the run $\Omega = 23 \text{ rad s}^{-1}$ of figure 4 are shown respectively on figure 6(b) and 6(a). The bubble (resp. solid particle) rises (resp. falls) with a constant speed even though it experiences a radial migration. This experimental observation suggests that the radial and the vertical motion are uncoupled. Therefore, Chidress' theory is expected to be valid here, in spite of the radial motion. Moreover, these experiments show that $r(t)$ grows (respectively decays) exponentially, as observed on figures 7(a) and 7(b). The leading order of this exponential migration can be readily estimated, for solid particles, by solving equation (1.1) with $\mathbf{F}' = -6\pi\mu_f a(\mathbf{V}_p - \mathbf{V}_f^0)$ (Stokes drag). We are led to

$$r(t) \propto \exp(\lambda^0 \Omega t) \quad \text{where} \quad \lambda^0 = \frac{2a^2\Omega(\gamma - 1)}{9\nu_f} = 2S(\gamma - 1),$$

where S will be introduced below. The typical time scale $1/(\lambda^0 \Omega)$ of this exponential will be used below to simplify the fluid motion equations. (Note that this result can be readily generalized to bubbles.)

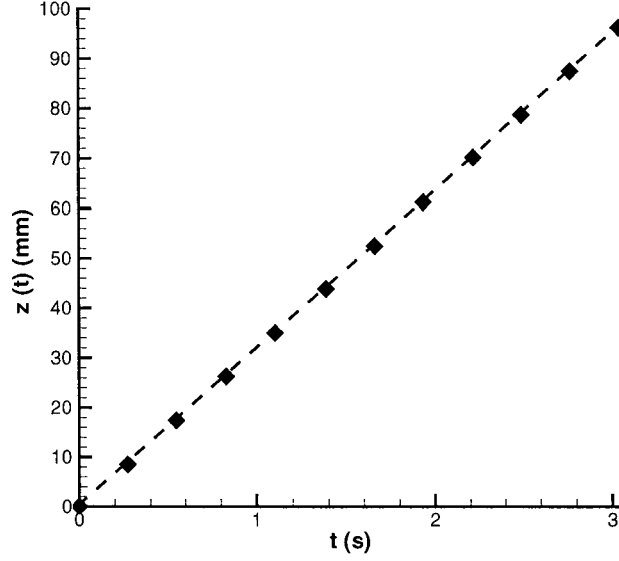


FIGURE 5. Vertical coordinate $z(t)$ of a bubble of radius $a = 1.4$ mm. The angular velocity of the tank is $\Omega = 23 \text{ rad s}^{-1}$.

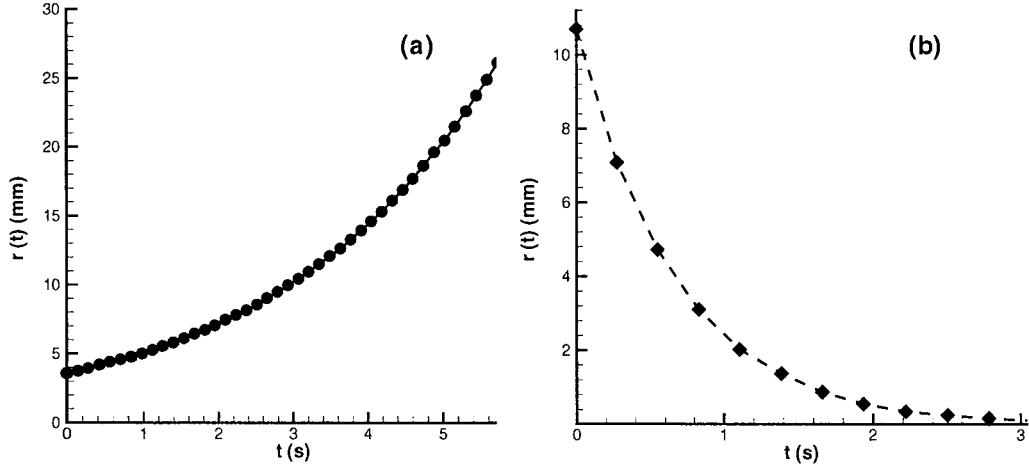


FIGURE 6. Graph (a): Experimental coordinate $r(t)$ of the solid particle of figure 4 (corresponding to the run $\Omega = 23 \text{ rad s}^{-1}$). Graph (b): Experimental radial coordinate $r(t)$ corresponding to the bubble of figure 5.

The photographs of figure 3 also give valuable informations about the relevant non-dimensional numbers of the particle dynamics. Indeed, if δr (resp. δz) is the radial (resp. vertical) distance between every two local maxima of the trajectory, these photographs suggest that :

$$\delta z = O(a) \text{ and } \delta r = O(a),$$

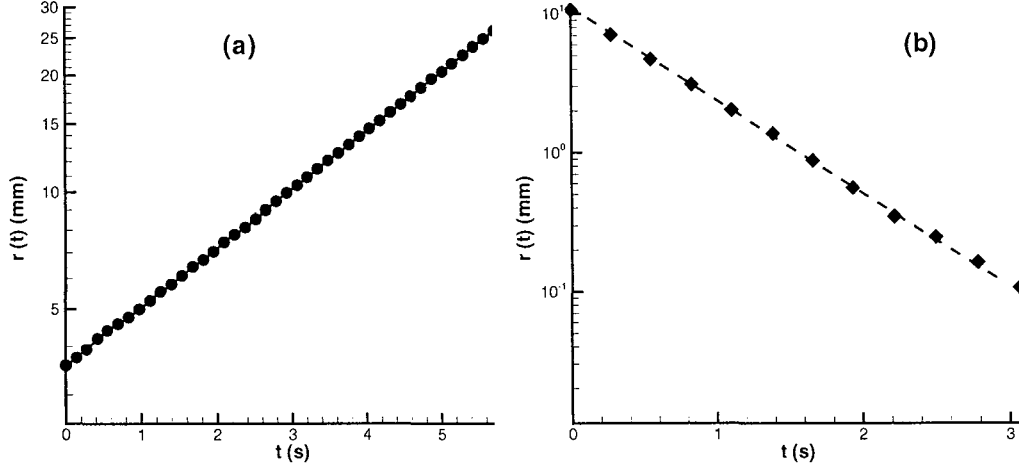


FIGURE 7. Graphs (a) and (b) are lin-log plots of figures 6(a) and 6(b), illustrating the exponential radial migration of solid particles (a) and bubbles (b). The dashed line and the solid line are least-square linear fittings the slope of which gives the experimental migration rate.

where a is the radius of the inclusion. If V_H is a typical horizontal (radial) slip velocity, then $\delta r = V_H(2\pi/\Omega)$ and $\delta z = V_T(2\pi/\Omega)$, and we conclude that $\frac{V_T}{a\Omega} \sim \frac{V_H}{a\Omega} \simeq \frac{1}{2\pi} = O(1)$. By multiplying these numbers by $a^2\Omega/\nu_f$ (which is much smaller than unity here), we conclude : $a V_T/\nu_f \ll 1$ and $a V_H/\nu_f \ll 1$. Let us define the following non-dimensional numbers :

$$Re_T = \frac{a V_T}{\nu_f} \quad \text{and} \quad Re_H = \frac{a V_H}{\nu_f} \quad \text{and} \quad S = \frac{\Omega a^2}{9\nu_f} = \frac{Ta}{9}. \quad (2.1)$$

S is the pseudo-Stokes number, and Ta is the Taylor number used by several authors (Childress 1964; Maxworthy 1965; Gotoh 1990). Accordingly, we will write

$$Re_T \ll 1 \quad \text{and} \quad Re_H \ll 1 \quad \text{and} \quad S \ll 1. \quad (2.2)$$

In particular, $\lambda^0 = O(S) \ll 1$. These assumptions will be used in the following to simplify the fluid motion equations. Note that the conclusions which have been drawn in this section are actually valid for all the runs performed in the present work.

In addition, the orders-of-magnitude of the Weber number ($\rho_f V^2 a/\sigma$) and of the capillary number ($\mu_f V/\sigma$) are less than 0.001 and 0.1 respectively ($\sigma \approx 20 \cdot 10^{-3}$ N/m is the surface tension coefficient and V is an order-of-magnitude of either V_H or V_T).

The relevant non-dimensional numbers considered in this paper are summarized in Table 1.

3. Derivation of the motion equation of the inclusion

As noted in the introduction, the prediction of the vertical motion of the inclusion requires to take convective inertia effects into account, whereas the horizontal motion is unsteady and could be sensitive to history effects. In order to clarify this point the fluid motion equations around the inclusion are revisited in the following sections, and the results of Childress (1964) are generalized to the case of particles undergoing radial

	$a(\text{mm})$	$S = a^2 \Omega / (9 \nu_f)$	$Re_T = a V_T / \nu_f$	$Re_H = a V_H / \nu_f$	$\alpha = \frac{18 S}{Re_T^2}$
Solid :	1.5	$0.006 < S < 0.029$	$0.066 < Re_T < 0.082$	$0 < Re_H < 0.09$	$20 < \alpha < 113$
Gaseous :	$1.1 < a < 1.82$	$0.005 < S < 0.043$	$0.23 < Re_T < 0.41$	$0 < Re_H < 0.34$	$6 < \alpha < 40$

TABLE 1. Numerical values of the particle radius and of the non-dimensional numbers considered in this paper. The smallest non-zero value of the angular velocity of the tank is $\Omega = 5$ rad/s and its largest value is $\Omega = 23$ rad/s.

migration. The motion equation of bubbles is then derived by using the approach of Legendre & Magnaudet (1997).

3.1. Motion equation of solid particles

As suggested by the typical trajectories discussed above, we assume that the inclusion has reached a terminal vertical velocity $V_T \mathbf{e}_3$. As noticed in the introduction, the capital letters $\mathbf{X}_p$, $\mathbf{V}_p$ and $\mathbf{V}_f^0$ denote the particle position, the velocity and the fluid undisturbed velocity respectively, in the laboratory reference frame. It is convenient to write the fluid motion equations in the reference frame rotating with the tank :

$$\nabla \cdot \mathbf{v}_f = 0, \quad (3.1)$$

$$\rho_f \left(\frac{\partial \mathbf{v}_f}{\partial t} + (\mathbf{v}_f \cdot \nabla) \mathbf{v}_f + 2 \Omega \mathbf{e}_3 \times \mathbf{v}_f \right) = -\nabla \hat{P} + \mu_f \nabla^2 \mathbf{v}_f \quad (3.2)$$

where $\mathbf{x} = (x, y, z)$ is the position vector and $\mathbf{v}_f$ is the fluid velocity in the rotating frame, and $\hat{P}$ is the modified pressure, that is

$$\hat{P} = P - \frac{1}{2} \rho_f \Omega^2 (x^2 + y^2) + \rho_f g z.$$

The corresponding boundary conditions are

$$\mathbf{v}_f \rightarrow 0, \quad |\mathbf{x} - \mathbf{x}_p| \rightarrow \infty \quad (3.3)$$

$$\mathbf{v}_f = \mathbf{v}_p(t) + \boldsymbol{\omega}_p(t) \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}_p), \quad |\mathbf{x} - \mathbf{x}_p| = a \quad (3.4)$$

where $\mathbf{x}_p$, $\mathbf{v}_p$ and $\boldsymbol{\omega}_p$ denote the particle position, velocity and angular velocity respectively in the rotating reference frame. Following Maxey & Riley (1983) we use the change of variables :

$$\mathbf{z} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_p, \quad \mathbf{w}_f(\mathbf{z}, t) = \mathbf{v}_f(\mathbf{x}, t) - \mathbf{v}_p(t) \quad \text{and} \quad t = t$$

so that the motion equations read

$$\nabla \cdot \mathbf{w}_f = 0 \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} \rho_f \left(\frac{\partial \mathbf{w}_f}{\partial t} + (\mathbf{w}_f \cdot \nabla) \mathbf{w}_f + 2 \Omega \mathbf{e}_3 \times \mathbf{w}_f + 2 \Omega \mathbf{e}_3 \times \mathbf{v}_p \right) \\ = -\nabla \hat{P} + \mu_f \nabla^2 \mathbf{w}_f - \rho_f \frac{d\mathbf{v}_p}{dt} \end{aligned} \quad (3.6)$$

where

$$\mathbf{w}_f \rightarrow -\mathbf{v}_p(t), \quad |\mathbf{z}| \rightarrow \infty \quad (3.7)$$

$$\mathbf{w}_f = \boldsymbol{\omega}_p \times \mathbf{z}, \quad |\mathbf{z}| = a. \quad (3.8)$$

One can notice that in the case of a particle rising steadily along the axis of the tank, we have $\mathbf{v}_p(t) = V_T \mathbf{e}_3$, and (3.5)-(3.6)-(3.7)-(3.8), reduce to the steady problem investigated by Childress (1964). In contrast, in the present paper we have $\mathbf{v}_p(t) = \mathbf{P}_H \mathbf{v}_p(t) + V_T \mathbf{e}_3$, where $\mathbf{P}_H$ denotes the horizontal projection operator, so that the horizontal motion of the particle affects the surrounding velocity field through the boundary condition (3.7). In order to take advantage of Childress' solution we introduce the new ansatz :

$$\mathbf{w}_f = \mathbf{w}^c + \mathbf{w}^0 + \mathbf{w}^1, \quad (3.9)$$

$$\hat{P} = \hat{P}^c + \hat{P}^0 + \hat{P}^1, \quad (3.10)$$

where $\mathbf{w}^0$ and $\hat{P}^0$ are the unperturbed *horizontal* velocity and pressure fields respectively, which are given by

$$\mathbf{w}^0 = -\mathbf{P}_H \mathbf{v}_p(t), \quad (3.11)$$

$$\nabla \hat{P}^0 = 0, \quad (3.12)$$

and $\mathbf{w}^c, \hat{P}^c$ are assumed to satisfy the following steady problem, considered by Childress (1964),

$$\nabla \cdot \mathbf{w}^c = 0 \quad (3.13)$$

$$\rho_f \left((\mathbf{w}^c \cdot \nabla) \mathbf{w}^c + 2 \Omega \mathbf{e}_3 \times \mathbf{w}^c \right) = -\nabla \hat{P}^c + \mu_f \nabla^2 \mathbf{w}^c, \quad (3.14)$$

$$\mathbf{w}^c \rightarrow -V_T \mathbf{e}_3, \quad |z| \rightarrow \infty, \quad (3.15)$$

$$\mathbf{w}^c = \boldsymbol{\omega}_p \times \mathbf{z}, \quad |z| = a. \quad (3.16)$$

This problem corresponds to the motion of a solid sphere moving steadily along the vertical axis of a rotating tank. By generalizing the matched asymptotic expansion approach of Kaplun & Lagerstrom (1957) and Proudman & Pearson (1957), and by taking into account inertia effects to leading order, Childress (1964) could derive an analytical expression for the drag, which will be used below.

Injecting the ansatz (3.9) into the motion equations, we are led to the following equations for the velocity field $\mathbf{w}^1$:

$$\nabla \cdot \mathbf{w}^1 = 0, \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned} \rho_f \left(\frac{\partial \mathbf{w}^1}{\partial t} + (\mathbf{w}^1 + \mathbf{w}^c - \mathbf{P}_H \mathbf{v}_p) \cdot \nabla \mathbf{w}^1 + (\mathbf{w}^1 - \mathbf{P}_H \mathbf{v}_p) \cdot \nabla \mathbf{w}^c + 2 \Omega \mathbf{e}_3 \times \mathbf{w}^1 \right) \\ = -\nabla \hat{P}^1 + \mu_f \nabla^2 \mathbf{w}^1, \end{aligned} \quad (3.18)$$

and

$$\mathbf{w}^1 \rightarrow 0, \quad |z| \rightarrow \infty, \quad (3.19)$$

$$\mathbf{w}^1 = \mathbf{P}_H \mathbf{v}_p(t), \quad |z| = a. \quad (3.20)$$

Note that in (3.18) we made use of the fact that $\frac{d}{dt} \mathbf{P}_H \mathbf{v}_p = \frac{d}{dt} \mathbf{v}_p$ and $\mathbf{e}_3 \times \mathbf{P}_H \mathbf{v}_p = \mathbf{e}_3 \times \mathbf{v}_p$.

In order to obtain a simplified motion equation, we now focus on the various terms of (3.18). In the vicinity of the particle, the typical length scale of the perturbed velocity is the particle radius a . Moreover, the no-slip boundary conditions enable to write

$$|\mathbf{w}^1| = O(v_p) \quad \text{and} \quad |\mathbf{w}^c| = O(V_T).$$

Therefore, the comparison between the inertia terms and the viscous terms of (3.18) leads to

$$\left| \frac{\rho_f \mathbf{w}^1 \cdot \nabla \mathbf{w}^1}{\mu_f \nabla^2 \mathbf{w}^1} \right| = O(av_p/\nu_f) = O(Re_H),$$

$$\left| \frac{\rho_f \mathbf{w}^c \cdot \nabla \mathbf{w}^1}{\mu_f \nabla^2 \mathbf{w}^1} \right| = O(aV_T/\nu_f) = O(Re_T),$$

and

$$\left| \frac{2\rho_f \Omega \mathbf{e}_3 \times \mathbf{w}^1}{\mu_f \nabla^2 \mathbf{w}^1} \right| = O(a^2 \Omega / \nu_f) = O(Ta).$$

where Re_H , Re_T and $Ta = 9S$ are the non-dimensional numbers introduced in section 2. Also, the time scale of the the unsteady term $\partial \mathbf{w}^1 / \partial t$ is $1/(\lambda^0 \Omega)$, and we are led to

$$\left| \rho_f \frac{\partial \mathbf{w}^1 / \partial t}{\mu_f \nabla^2 \mathbf{w}^1} \right| = O\left(\frac{a^2 \Omega \lambda^0}{\nu_f}\right) = O(S^2).$$

In the framework of our experiments, all these non-dimensional numbers are smaller than unity (see (2.2)). The fluid motion equation nearby the particle is therefore the steady Stokes equation.

In contrast, at large distances from the sphere, these terms may balance the viscous term. These distances scale respectively like a/Re_H , a/Re_T , $a/\sqrt{Ta}$ (Ekman length) and a/S . Provided

$$Ta \gg Re_T^2, \quad Ta \gg Re_H^2 \quad \text{and} \quad Ta \gg S^2,$$

the convective Coriolis term can be taken into account at the expense of the three other terms. In our experiments, these three conditions are satisfied (see table 1). Accordingly, the far-off velocity field satisfies approximately

$$\rho_f (2\Omega \mathbf{e}_3 \times \mathbf{w}^1) = -\nabla \hat{P}^1 + \mu_f \nabla^2 \mathbf{w}^1. \quad (3.21)$$

Then we recover the problem considered by Herron *et al.* (1975) (see also Miyazaki 1995), which can be solved by using classical matched asymptotic expansions.

Finally, the hydrodynamic force experienced by the particle can be obtained from the three contributions of the ansatz (3.9) :

$$\mathbf{F} = \int_S \boldsymbol{\Sigma}^0 \mathbf{n} dS + \int_S \boldsymbol{\Sigma}^c \mathbf{n} dS + \int_S \boldsymbol{\Sigma}^1 \mathbf{n} dS = \mathbf{F}^0 + \mathbf{F}^c + \mathbf{F}^1$$

where $\mathbf{F}^0$, $\mathbf{F}^c$ and $\mathbf{F}^1$ correspond to $\boldsymbol{\Sigma}^0$, $\boldsymbol{\Sigma}^c$ and $\boldsymbol{\Sigma}^1$ which are the stress tensors corresponding to $\mathbf{w}^0$, $\mathbf{w}^c$ and $\mathbf{w}^1$, respectively. $\mathbf{n}$ is the outward unit normal to the particle's surface. The contribution of the unperturbed velocity field ($\mathbf{w}^0$) is readily obtained,

$$\mathbf{F}^0 = \int_{\mathcal{V}} \rho_f \left(\frac{D\mathbf{V}_f^0}{Dt} - \mathbf{g} \right) d\mathcal{V}.$$

(The velocity $\mathbf{V}_f^0$ is the fluid velocity in the laboratory reference frame.) The contribution of the second integral is obtained by making use of the results of Childress (1964). Since in our experiments $Ta \gg Re_T^2$, this force reads

$$\mathbf{F}^c = -6\pi \mu_f a \left(1 + \left(\frac{a^2 \Omega}{\nu_f} \right)^{1/2} \frac{4}{7} \right) V_T \mathbf{e}_3. \quad (3.22)$$

The contribution of $\mathbf{w}^1$ leads to (Herron *et al.*) :

$$\mathbf{F}^1 = -6\pi\mu_f a \left(\mathbf{I} + \left(\frac{a^2\Omega}{\nu_f} \right)^{1/2} \Delta \right) \mathbf{P}_H(\mathbf{V}_p - \mathbf{V}_f^0), \quad (3.23)$$

where the mobility tensor Δ reads

$$\Delta = \begin{pmatrix} \Delta_{11} & -\Delta_{21} \\ \Delta_{21} & \Delta_{11} \end{pmatrix}$$

with $\Delta_{11} = 5/7$ and $\Delta_{21} = 3/5$. The diagonal components of this mobility tensor correspond to a drag increase due to the effect of the Coriolis force on the far-off perturbed velocity. The antisymmetric part of Δ corresponds to a lift force proportional to $\Omega \times (\mathbf{V}_p - \mathbf{V}_f^0)$. Note that Herron *et al.* (1975) also obtained the component $\Delta_{33} = 4/7$, in agreement with Childress' result. Nevertheless, the general form of Childress' result also enables to cope with smaller rotation rates ($Ta \simeq Re_T^2$).

The hydrodynamic forces $\mathbf{F}^c$ and $\mathbf{F}^1$ have been obtained by writing the fluid motion equation in the rotating frame. This choice is very convenient since the problem is quasi-steady there. Nevertheless, in the laboratory reference frame, the fluid motion equations are unsteady, and an history term could appear in the resulting hydrodynamic force. Indeed, the equation of the perturbed velocity field $\mathbf{W}^1$ in the non-rotating reference frame translating with the particle reads (see Maxey & Riley 1983) :

$$\underbrace{\rho_f \frac{\partial \mathbf{W}^1}{\partial t}}_{(i)} + \underbrace{\rho_f (\mathbf{W}^1 \cdot \nabla) \mathbf{W}^0 + \rho_f (\mathbf{W}^0 \cdot \nabla) \mathbf{W}^1}_{(ii)} + \rho_f (\mathbf{W}^1 \cdot \nabla) \mathbf{W}^1 = -\nabla P^1 + \mu_f \Delta \mathbf{W}^1, \quad (3.24)$$

where $\mathbf{W}^0$ is the unperturbed velocity. Since the angular velocity of the particle is very close to Ω , one can check that the boundary condition satisfied by $\mathbf{W}^1$ at the particle surface reads

$$\mathbf{W}^1 = \dot{r}(t)(\cos \Omega t \mathbf{e}_1 + \sin \Omega t \mathbf{e}_2). \quad (3.25)$$

The time scale of $\dot{r}$ is about $1/(\lambda^0 \Omega)$ and is very large compared to $1/\Omega$. Therefore, the time scale of $\partial \mathbf{W}^1 / \partial t$ is $1/\Omega$: the unsteady term in the fluid motion equation can not be neglected in this reference frame. Indeed, nearby the inclusion, we have

$$\left| \frac{\rho_f \partial \mathbf{W}^1 / \partial t}{\mu_f \Delta \mathbf{W}^1} \right| \sim \left| \frac{\rho_f (\mathbf{W}^1 \cdot \nabla) \mathbf{W}^0}{\mu_f \Delta \mathbf{W}^1} \right| \sim \left| \frac{\rho_f (\mathbf{W}^0 \cdot \nabla) \mathbf{W}^1}{\mu_f \Delta \mathbf{W}^1} \right| = O(Ta),$$

and the last term of the LHS of (3.24) scales like the particle Reynolds number and can be neglected in the framework of our experiments. Since $\mathbf{W}^1$ satisfies an oscillating boundary condition with time scale $1/\Omega$, the penetration depth of the perturbed velocity is of the order of $(\sqrt{\nu_f/\Omega})$, like the Ekman distance $(a/\sqrt{Ta})$ where (ii) is expected to balance the viscous term. In the following, we conjecture that (3.24) is mainly unsteady, since the perturbed flow is almost entirely contained within an inner zone affected by the particle oscillations. Note that, as shown by Coimbra & Kobayashi (2002), the convective term (ii) induces a lift force in the particle motion equation. Nevertheless, this lift force has very little effect on the radial migration of the particle in a vertical centrifuge for the values of angular rotation under study (see Candelier *et al.* 2004). Accordingly, we approximate (3.24) by the unsteady Stokes equation, and the resulting

horizontal hydrodynamic force is given by the well-known BBO equation,

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^1 = & -\frac{1}{2}m_f \frac{d}{dt} \left(\mathbf{P}_H(\mathbf{V}_p - \mathbf{V}_f^0) \right) - 6\pi\mu_f a \left(\mathbf{P}_H(\mathbf{V}_p - \mathbf{V}_f^0) \right) \\ & - 6a^2 \sqrt{\pi\mu_f \rho_f} \int_0^t \frac{d}{d\tau} \left(\mathbf{P}_H(\mathbf{V}_p - \mathbf{V}_f^0) \right) \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} d\tau, \end{aligned} \quad (3.26)$$

where $m_f = m_p/\gamma$.

We therefore observe that by writing the fluid motion equation in the non-rotating reference frame we are led to (3.26), whereas by writing the fluid motion equation in the rotating frame and neglecting (ii) we are led to (3.23). These apparently contradictory results manifest the fact that the effect of the unsteadiness of the perturbed flow observed in the former reference frame mainly corresponds to Coriolis effects on the perturbed flow in the latter. This point will be discussed below.

In the next section the motion equation (1.1) of the particle is solved. Both the force (3.26) and the force (3.23) will be used and compared to experiments. Before that, the results of the present subsection are generalized to fluid inclusions.

3.2. Motion equation of fluid inclusions

In order to derive the motion equations of fluid inclusions we come back to the rotating frame and apply the same method as above. The ansatz (3.9) is replaced by

$$\mathbf{w}_f = \mathbf{w}^0 + \mathbf{w}^c + \mathbf{w}^1, \quad (3.27)$$

outside the inclusion, and :

$$\tilde{\mathbf{w}}_f = \tilde{\mathbf{w}}^0 + \tilde{\mathbf{w}}^c + \tilde{\mathbf{w}}^1, \quad (3.28)$$

inside the inclusion. The same kind of ansatz is used for the pressure field. The terms $\mathbf{w}^0$ and $\tilde{\mathbf{w}}^0$ correspond to the horizontal unperturbed flow and are equal to $-\mathbf{P}_H \mathbf{v}_p(t)$. The terms $\mathbf{w}^c$ and $\tilde{\mathbf{w}}^c$ are the counterpart of the term $\mathbf{w}^c$ of the solid particle case, and satisfy the motion equation of a fluid inclusion moving steadily along a vertical axis in a rotating flow. This problem has not been solved so far, but the hydrodynamic force corresponding to this velocity field can be obtained by generalizing Childress' approach, as suggested by Legendre & Magnaudet (1997) and Magnaudet (2003). Indeed, Childress has shown that one can take rotation-induced inertia effects into account by matching the inner Stokes solution to a uniform outer velocity field depending on the angular velocity Ω . In the external problem of this matched asymptotic approach, the inclusion is treated as a point force source term of the form $\mathbf{f} \delta(\mathbf{x})$ (δ is Dirac's delta function) added into the Navier-Stokes equations. To leading order, $\mathbf{f}$ is the opposite of the drag obtained in the creeping flow approximation by Hadamard-Ribczynski (Clift, Grace & Weber 1978), $\mathbf{f} = 2\pi R_\mu a \mu_f V_T \mathbf{e}_3$, where

$$R_\mu = \frac{3+2\kappa}{1+\kappa}, \quad \text{and } \kappa = \frac{\mu_f}{\mu_p}.$$

Since the external velocity field obtained by Childress is a linear function of $\mathbf{f}$, the outer velocity field in the case of fluid inclusions can be obtained by multiplying Childress' solution by $R_\mu/3$. Therefore, the Stokes flow around the inclusion is set to match the modified outer flow, that is $-V_T \left(1 + \frac{R_\mu}{3} \frac{4}{7} (a^2 \Omega / \nu_f)^{1/2}\right) \mathbf{e}_3$. The corresponding hydro-

dynamic force acting on the inclusion is therefore

$$\mathbf{F}^c = -2\pi R_\mu a \mu_f V_T \left(1 + \frac{R_\mu}{3} \frac{4}{7} \left(\frac{a^2 \Omega}{\nu_f}\right)^{1/2}\right) \mathbf{e}_3, \quad (3.29)$$

and generalizes (3.22) to the case of fluid inclusions. Note that when $R_\mu \rightarrow 3$ (solid particles) we recover (3.22) as expected.

Note that when $\alpha = 18S/Re_T^2 \rightarrow 0$ (non-rotating cylinder) the generalization of Childress' results leads to

$$\mathbf{F}^c = -2\pi R_\mu a \mu_f V_T \left(1 + \frac{R_\mu}{8} Re_T\right) \mathbf{e}_3. \quad (3.30)$$

If, in addition $R_\mu \rightarrow 3$, we recover the well-known Oseen correction for solid spheres. Therefore equation (3.30) generalizes Oseen's correction to fluid inclusions of arbitrary viscosity ratios.

The motion equations of fluid inclusions in the horizontal plane can be obtained by injecting the ansatz (3.27)-(3.28) into the two-fluid mass and momentum equations of $\mathbf{w}_f$ and $\tilde{\mathbf{w}}_f$, together with the appropriate boundary conditions at the fluid-fluid interface and at infinity. For the same reasons as in the solid sphere case, the unsteady term can be neglected, and we are led to the steady Stokes equation, with a Coriolis source term, for $\mathbf{w}^1$ and $\tilde{\mathbf{w}}^1$. The matched asymptotic procedure used by Herron *et al.* can be generalized to fluid inclusions as described above, and we are led to

$$\mathbf{F}^1 = -2\pi \mu_f a R_\mu \left(1 + \frac{R_\mu}{3} \left(\frac{a^2 \Omega}{\nu_f}\right)^{1/2} \Delta\right) \mathbf{P}_H(\mathbf{V}_p - \mathbf{V}_f^0). \quad (3.31)$$

Also, like for solid spheres, one can note that by writing the fluid motion equations in the laboratory reference frame rather than the rotating frame, and assuming the horizontal contribution of inertia effects can be neglected, one would have obtained (see Gorodtsov (1975); Yang & Leal 1991; Galindo & Gerbeth 1993) :

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^1(t) = & -\frac{1}{2} m_f \frac{d}{dt} \left(\mathbf{P}_H \left(\mathbf{V}_p(t) - \mathbf{V}_f^0 \right) \right) - 2\pi a \mu_f R_\mu \left(\mathbf{P}_H \left(\mathbf{V}_p(t) - \mathbf{V}_f^0 \right) \right) \\ & - 2\pi a \mu_f \int_{-\infty}^t K(t-\tau) \frac{d}{d\tau} \left(\mathbf{P}_H \left(\mathbf{V}_p(\tau) - \mathbf{V}_f^0 \right) \right) d\tau \end{aligned} \quad (3.32)$$

where the kernel of the history force has a very complicated expression in the general case. For bubbles we have $\mu_p/\mu_f \ll 1$, so that one can show that the kernel is (Gorodtsov 1975) : $K(t) = 4 \exp(9\nu_f t/a^2) \text{erfc}(\sqrt{9\nu_f t/a^2})$.

To conclude this whole section, the motion equation of solid or gaseous inclusions reads

$$m_p \frac{d^2 \mathbf{X}_p}{dt^2} = m_p \mathbf{g} + \mathbf{F}^0 + \mathbf{F}^c + \mathbf{F}^1, \quad (3.33)$$

where $\mathbf{F}^0$, $\mathbf{F}^c$ and $\mathbf{F}^1$ are given by the various expressions obtained in this section. In the following, equation (3.33), together with the initial conditions

$$\mathbf{X}_p(0) = \mathbf{X}_{p0} \quad \text{and} \quad \frac{d\mathbf{X}_p}{dt}(0) = V_T \mathbf{e}_3 + \mathbf{V}_f^0(\mathbf{X}_{p0}),$$

is solved analytically and the resulting trajectories are compared to experiments. Since the vertical speed is constant and totally uncoupled from the horizontal motion, the vertical projection of (3.33) can be solved separately to obtain the terminal velocity V_T .

The radial motion is investigated in section 5. Note that one can argue that the initial horizontal slip velocity is non zero when the particle is released in our experiments, and this is in contradiction with the initial conditions above. Nevertheless, we define the time $t = 0$ as the time when the particle has reached its terminal vertical velocity, that is a few seconds after the particle release. At that time, the radial slip velocity is still very small, so that the initial conditions stated above are approximately valid.

For the sake of simplicity, the time $t = 0$ shown on the experimental curves below corresponds to the time when the particle reaches the test area (see figure 1).

Note also that the hydrodynamic forces obtained in this section are valid in a fluid of infinite extent. Therefore, the comparison between experiments and theories will have to be done with care (see below).

4. Terminal vertical velocity

We now confine attention to the prediction of the terminal velocity V_T . By writing that the vertical drag (3.29) balances the buoyancy we are led to :

$$\frac{V_T}{V_T^{\text{Stokes}}} \simeq \frac{1}{1 + \frac{4}{7} R_\mu \sqrt{S}}, \quad (4.1)$$

where V_T^{Stokes} denotes the terminal velocity of either solid or fluid inclusions, obtained when all inertia effects are neglected, namely :

$$V_T^{\text{Stokes}} = \frac{2}{3} \frac{a^2(1 - \gamma)g}{R_\mu \nu_f},$$

and γ is the density ratio. In our solid particle experiments, the smallest non-zero α is about 20, so that (4.1) is valid. Also, the typical value of α for the bubbles considered in our experiments is about 6 (see table 1), and this is sufficient for the approximation (4.1) to be valid (see Childress 1964).

4.1. Comparison with experiments

As noted in section 2, the vertical velocity of the inclusions is constant for the time range considered in our experiments. Figures 8 and 9 show this terminal velocity versus S for the two kinds of inclusions.

Figure 8 shows the experimental and theoretical values of V_T/V_T^{Stokes} versus the Stokes number, for solid particles. Also, an interpolation of Maxworthy's experimental data (Maxworthy 1965) with the same ratio a/R , is plotted on the same graph for comparison. These two curves agree rather well, but both are below the theoretical curve (4.1). This might be due to a wall effect. Indeed, for viscous flows the spatial decay of the perturbed velocity profile is rather slow, so that walls must be taken into account for efficient predictions. As shown by Happel & Brenner (1983) in the non-rotating case, walls affect the terminal velocity via a multiplicative factor of the form $1 + c a/R$, where $c \approx 2.1$ is almost constant on a wide part of the cross-section. Therefore, the terminal velocity, say V_T^0 , of a particle dropped in our tank at rest should be independent of its radial location, provided it is not too close to the wall, i.e $R - r$ larger than a few particle radii. (We have checked this carefully and observed a good agreement between Happel & Brenner's theory and our measurements.) We believe that in the rotating case the terminal velocity V_T should be compared to V_T^0 instead of V_T^{Stokes} since V_T^{Stokes} corresponds to a wall-free theory.

Indeed, in the rotating case, the particle migrates in the radial direction and this radial motion does not affect the terminal vertical velocity (as we noticed, for example,

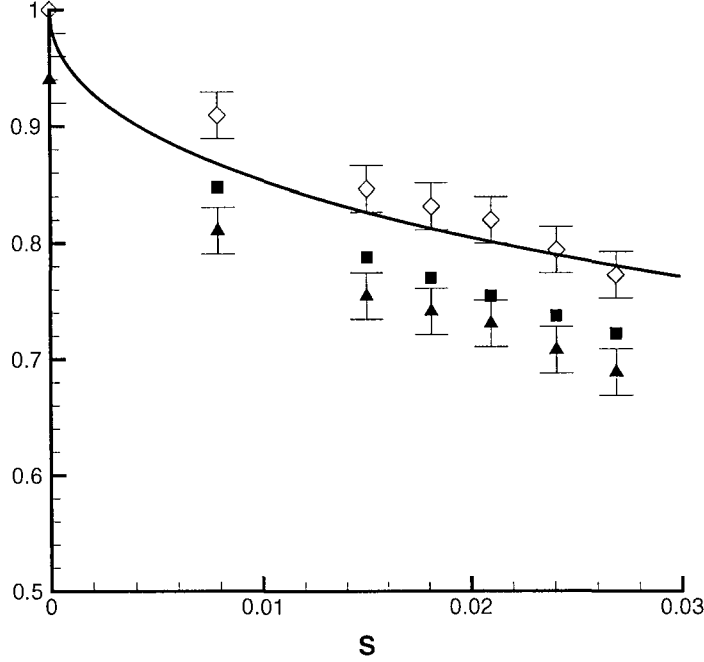


FIGURE 8. Plot of the terminal velocity V_T of a solid sphere vs. the Stokes number. Solid line : equation (4.1); triangles (▲): V_T/V_T^{Stokes} (our experiments); squares (■): V_T/V_T^{Stokes} (experimental data interpolated from Maxworthy 1965). The white diamonds (◇) show V_T/V_T^0 , where V_T^0 is the experimental terminal velocity of the sphere when $\Omega = 0$. The terminal Reynolds number Re_T ranges from 0.1 (when $S = 0$) to 0.06 (when $S = 0.03$). The horizontal Reynolds number Re_H ranges from 0 (when $S = 0$) to 0.03 (when $S = 0.03$).

in figures 4 and 6(a)). This suggests that wall effects in the rotating case are also constant on a wide part of the cross section. Assuming that these wall effects are manifested by a multiplicative factor independent of Ω , the ratio V_T/V_T^0 should be equal to the theoretical (wall-free) ratio V_T/V_T^{Stokes} given by (4.1) (since wall effects would cancel-out in V_T/V_T^0). The diamond curve of figure 8 tends to confirm this conjecture, since it is rather close to the theoretical wall-free ratio V_T/V_T^{Stokes} (solid line).

Figure 9 shows the experimental and theoretical values of V_T/V_T^{Stokes} for bubbles. Like for solid spheres the experimental V_T/V_T^{Stokes} is smaller than the theoretical prediction, because of wall effects. In contrast with solid spheres the velocity of the bubble in the absence of rotation V_T^0 is unknown, since each bubble is lost once it reaches the top of the cylinder (and one cannot produce two bubbles with exactly the same radius). Hence, one cannot check whether V_T/V_T^0 agrees with (4.1). Nevertheless, we observe that wall effects are slightly less significant for bubbles. This might be due to the fact that the length-scale of the flow induced by the inclusion is smaller for bubbles than for solid spheres. Indeed, the reflections method used by Happel & Brenner (1983) for solid spheres can be generalized to fluid inclusions (in the same way as inertia effects). By using this approach, one can show that the terminal velocity of fluid inclusions in a still cylindrical tank is $V_T^{\text{Stokes}}/(1 + (R_\mu/3) c a/R)$, where c is the same as for solid inclusions (i.e. $c \approx 2.1$). This should explain why our measurements are slightly closer to the wall-free theory for bubbles ($R_\mu = 2$) than for solid particles ($R_\mu = 3$).

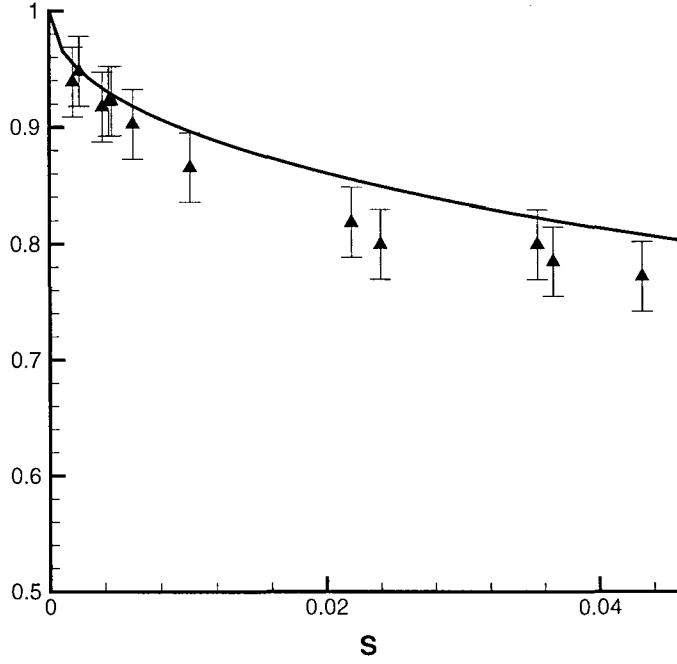


FIGURE 9. Plot of the terminal velocity of bubbles vs. the Stokes number. Solid line : equation (4.1); triangles ($\blacktriangle$) V_T/V_T^{Stokes} (our experiments). The terminal Reynolds number Re_T ranges from 0.1 to 0.3. The horizontal Reynolds number Re_H ranges from 0 to 0.08.

Finally, the experimental results discussed in this section show that the terminal velocity of either solid or gaseous inclusions is affected by the rotation of the fluid via an inertial effect due to the Coriolis force. By neglecting this inertial effect, one would overestimate the terminal velocity of more than 20 % as soon as the Stokes number is larger than 0.03.

5. Radial migration of the inclusion

5.1. Theoretical trajectories

The motion equation of the inclusion in the horizontal plane ($\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$) is obtained from the horizontal projection of (3.33) :

$$m_p \frac{d^2 \mathbf{X}_p}{dt^2} = m_f \frac{D\mathbf{V}_f^0}{Dt} + \mathbf{F}^1,$$

where $\mathbf{F}^1$ is given by (3.31) or by (3.32) according to whether the fluid motion equations have been written in the rotating or non-rotating reference frame. As discussed above, these two expressions should lead to similar particle trajectories. The goal of this section is to confirm this point theoretically and experimentally. The motion equation is solved by introducing the complex position

$$Z(t) = \mathbf{X}_p(t) \cdot \mathbf{e}_1 + i \mathbf{X}_p(t) \cdot \mathbf{e}_2, \quad (i^2 = -1),$$

in terms of which the particle motion equation reads

$$\ddot{Z} = -\frac{Z}{\gamma} + \frac{R_\mu}{6S\gamma} \left(1 + R_\mu \Delta_{11} S^{1/2}\right) (iZ - \dot{Z}) - \frac{R_\mu^2}{6S^{1/2}\gamma} \Delta_{12} (Z + i\dot{Z}) \quad (5.1)$$

by using (3.31), or

$$\ddot{Z} + A\dot{Z} + BZ + C \int_0^t \left(-\ddot{Z}(\tau) + i\dot{Z}(\tau) \right) \mathcal{K}((t-\tau)/S) d\tau = 0, \quad (5.2)$$

by using (3.32). In these equations, lengths and times have been normalized by the cylinder radius R and by $1/\Omega$. The constants A , B and C only depend on S and γ and are given in appendix A. Equation (5.1) is readily solved, and equation (5.2) is solved by making use of Laplace transforms (see appendix A and Candelier *et al.* 2004). Both equations predict an exponential evolution for $Z(t)$, of the form

$$Z(t) \approx Z(0) \exp(\lambda_r t) \exp(i\lambda_i t) + O(S). \quad (5.3)$$

The migration rate λ_r reads, after some algebra,

$$\frac{\dot{r}}{r} = \lambda_r = \frac{6}{R_\mu} S(\gamma - 1) - 6\Delta_{11} S^{3/2}(\gamma - 1) + O(\Delta_{12} S^2) \quad (5.4)$$

if one solves (5.1) and

$$\frac{\dot{r}}{r} = \lambda_r = \frac{6}{R_\mu} S(\gamma - 1) - 3\sqrt{2} S^{3/2}(\gamma - 1) + O(S^2) \quad (5.5)$$

if one solves (5.2). These two expressions are very close since $3\sqrt{2} \simeq 4.24$ and $6\Delta_{11} \simeq 4.28$, in agreement with the fact that the two approaches discussed above (i.e. fluid motion equation written in the rotating frame and fluid motion equation written in the non-rotating frame) describe the same physical phenomenon.

These results are valid for both solid spheres ($R_\mu = 3$) and bubbles ($R_\mu = 2$). For solid spheres (5.5) has already been derived by Candelier *et al.* (2004), and coincide with the ones of Druzhinin & Ostrovsky (1994) obtained with a different asymptotic approach, and for a purely two-dimensional motion. The rotation rate reads

$$\dot{\theta} = \lambda_i = 1 - 6\Delta_{12} S^{3/2}(\gamma - 1) + O(S^2) \quad (5.6)$$

if one solves (5.1) and

$$\dot{\theta} = \lambda_i = 1 - 3\sqrt{2} S^{3/2}(\gamma - 1) + O(S^2) \quad (5.7)$$

if one solves (5.2). There is a sensitive difference between the $O(S^{3/2})$ terms appearing in the two λ_i , since $3\sqrt{2} \simeq 4.24$ and $6\Delta_{12} = 3.60$. This might be due to the fact that the term (ii) has been neglected in (3.24), so that a possible additional lift force is missing in the particle motion equation (5.2). Candelier *et al.* (2004) have shown that by adding a lift force of the form $C\Omega\vec{e}_3 \times \vec{V}_g$ into the BBO equation, one modifies the $O(S^{3/2})$ term of (5.7). In particular we have checked this way that Saffman's lift force leads to an overestimated azimuthal slip velocity. This confirms that Saffman's lift is not appropriate here. Note however that the contribution of this $S^{3/2}$ term cannot be verified experimentally since it is much smaller than the leading order term $\lambda_i = 1$. Note also that R_μ does not appear in the rotation rate λ_i : it is only sensitive to the density ratio γ .

All the $S^{3/2}$ contributions appearing in these formulae manifest Coriolis or history effects. Note that even though the kernel is very different for solid and fluid inclusions,

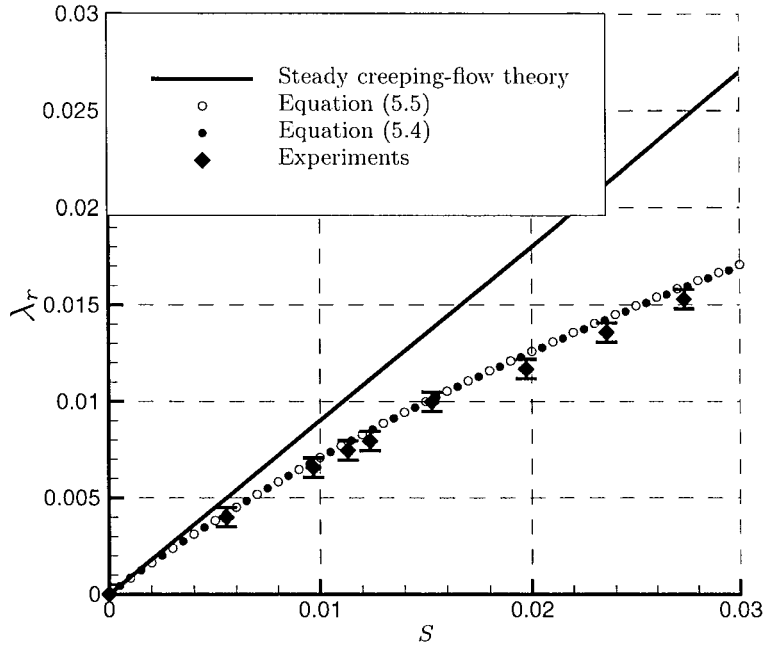


FIGURE 10. Non-dimensional ejection rate of a solid particle versus the Stokes number.

the absolute contribution to the migration and rotation rate is the same for these two kinds of inclusions, since R_μ does not appear in the $O(S^{3/2})$ term. Nevertheless, solid particles are more sensitive to these effects than fluid inclusions, since the ratio of the $O(S^{3/2})$ term to the $O(S)$ term is larger for solid inclusions. In the following, positive λ_r are denoted "ejection rates" and correspond to solid particles with $\gamma > 1$, and negative λ_r are denoted "trapping rates" ($\gamma < 1$).

5.2. Comparison with experiments

Figures 10 and 11 show the experimental and theoretical values of the ejection or trapping rate λ_r for solid spheres and bubbles, obtained from the slope of the curve $\ln r(t)$ versus t (see for example figure 7). For solid spheres the experiments are reproducible as we used the very same inclusion for our measurements. Therefore, for each Stokes number, the experimental ejection rate is averaged over several runs, and is characterized by very small fluctuations around its mean value. In contrast, in spite of the elaborated bubble injection device, one can not use the very same bubble twice. Therefore, the trapping rate of bubbles shown in figure 11 is not an averaged value. Nevertheless, the uncertainty about the trapping rate remains small compared to the uncertainty about the radius, and consequently about the Stokes number. This is the reason why the horizontal error bars remain rather large in figure 11. However, the experiment remains conclusive for the two kinds of inclusions.

For solid spheres we recover the results of Candelier *et al.* (2004). For fluid inclusions (5.5) and (5.7) generalize their results and we observe that the theoretical trapping rate (5.5) agrees with our measurements. Moreover, as noted above, the results (5.4) and (5.5) are undistinguishable, for either solid or gaseous inclusions.

In contrast, the $S^{3/2}$ term of the rotation rate cannot be measured experimentally

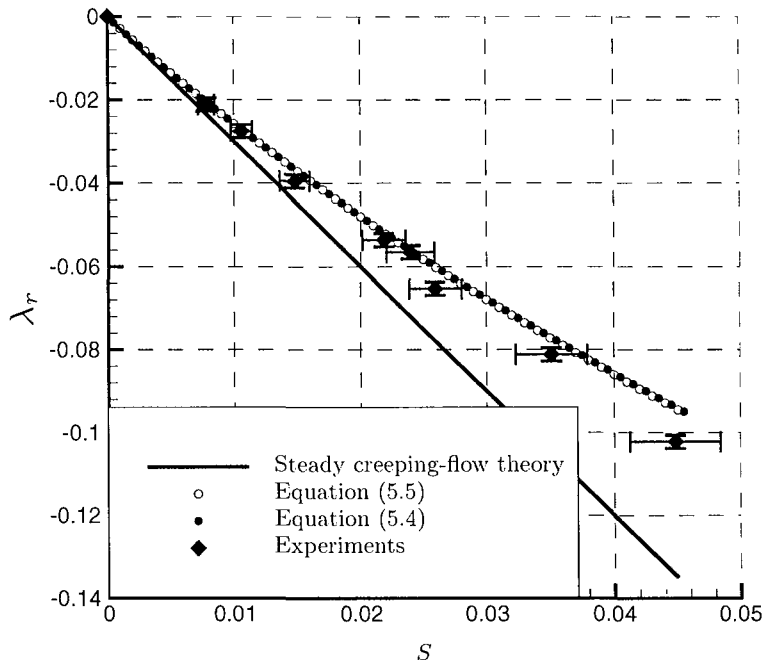


FIGURE 11. Non-dimensional trapping rate of a bubble versus the Stokes number.

because its contribution is too weak compared to unity. Nevertheless, one can notice that both (5.6) and (5.7) predict that inclusions lighter than the fluid will rotate faster than the tank (since $\gamma - 1 < 0$ there). We have indeed observed this effect for bubbles, even though we could not measure it accurately (the $S^{3/2}$ term is smaller than our experimental uncertainty about λ_i). Like for the terminal velocity, the physical interpretation of these results will be discussed below.

6. Discussion and conclusion

6.1. General considerations

The experiments presented in this paper suggest that the trajectories of either gaseous or solid inclusions within the vortex are sensitive to both inertia effects and history effects. Assuming that the vertical velocity of the inclusion is constant after a short transient (as suggested by experiments), the fluid motion equations around the inclusion show that inertia effects must be taken into account to predict the vertical terminal velocity. For solid particles we are led to Childress' equation to predict the terminal velocity, even if the particle experiences a radial migration. For fluid inclusions, we have generalized Childress' equation as suggested by Legendre & Magnaudet (1997) and Magnaudet (2003).

The horizontal motion of the particle has also been investigated. By writing the fluid motion equations in the rotating frame, we are led to a quasi steady equation for the perturbed velocity where the Coriolis force has to be taken into account. This induces drag corrections as well as a lift force in the particle motion equation (Herron *et al.* 1975). In particular, these drag corrections significantly reduce the migration rate of the particle.

By writing the fluid motion equations in the laboratory reference frame, we are led to an unsteady equation for the perturbation velocity and, if one removes the convective terms in this unsteady equation, to a Basset-like history force in the particle motion equation. Even though both approaches lead to different expressions for the hydrodynamic force experienced by the inclusion, they lead to almost undistinguishable particle trajectories.

An experimental device has been built to check these theories. It consists in a rotating closed cylinder filled-up with silicone oil, in which inclusions (either fluid or solid) are injected and followed with a mobile camera. For bubbles, an elaborated injector device has been designed. We have chosen to confine attention to both the terminal velocity V_T and the radial migration and rotation rates (λ_r, λ_i) since these quantities can be carried out analytically and experimentally, and contain rich dynamical informations.

Our experimental results concerning the vertical speed of solid spheres agree with Childress' theoretical predictions (Childress 1964), and corroborate the experimental analyses of Maxworthy (1965). In particular, rotation-induced inertia effects (manifested by the Coriolis term in the fluid motion equation) decrease the terminal velocity down to 20 %, for the Stokes numbers considered here. As for fluid inclusions, a similar effect is observed. The agreement between experiments and the generalized Childress theory is rather satisfactory.

As far as the radial migration is concerned, the theoretical migration rates λ_r given by either (5.4) and (5.5) have been confirmed experimentally. Even if the two expressions for $\mathbf{F}^1$, namely (3.23) and (3.26), are different, one can show that they are nearly equivalent in this problem. Indeed, if one neglects the time dependence of $\dot{r}(t)$ in the boundary condition (3.25), the unsteady Stokes problem reduces to the superposition of two single-frequency oscillations (along $\mathbf{e}_1$ and $\mathbf{e}_2$), and the history integral in the particle motion equation, say $\mathbf{F}_h$, can be solved (see for example Landau & Lifchitz 1989 or Coimbra & Rangel 2001), and reads

$$\mathbf{F}_h \simeq -6\pi\mu_f a \left(\frac{a^2\Omega}{\nu_f} \right)^{1/2} \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \mathbf{P}_H (\mathbf{V}_p - \mathbf{V}_f^0).$$

The diagonal of this mobility tensor is very close to the one of Herron *et al.* since, once again, $\sqrt{2}/2 \simeq 0.707$ and $5/7 \simeq 0.714$. As noted above, this manifests the fact that the effect of the unsteadiness of the perturbed flow observed in the non-rotating reference frame might correspond to Coriolis effects on the perturbed flow in the rotating reference frame. Note also that some discrepancies appear in the non-diagonal components and this might be due to the fact that the term (ii) in the fluid motion equation in the non-rotating frame, responsible for a lift effect (see Coimbra & Kobayashi 2002), has been neglected.

Because of the unsteadiness of boundary condition (3.25), one can not neglect the unsteady term $\partial \mathbf{W}^1 / \partial t$ in equation (3.24) and keep the $O(Ta)$ convective terms. Therefore, the mobility tensor of Gotoh (1990) is not expected to give satisfactory results here. Nevertheless, since this tensor is rather close to the one of Herron *et al.* (1975), we have solved the particle motion equation predicted with Gotoh's mobility tensor, and obtained an analytical expression for the migration rate λ_r (simply replace $\Delta_{11} = 5/7$ by $\Delta_{11} = (3\sqrt{2}/280)(19 + 9\sqrt{3})$ in equation (5.4)). Figure 12 shows the migration rate predicted by Gotoh's theory, together with experimental points. As expected, the agreement is not as good as the one obtained with the Boussinesq-Basset force (white dots of figure 10).

Even if the mobility tensor of Gotoh and that of Herron *et al.* lead to different results in our problem, there is no contradiction here, since the problem is unsteady in the laboratory reference frame and quasi-steady in the rotating frame. (This point has been

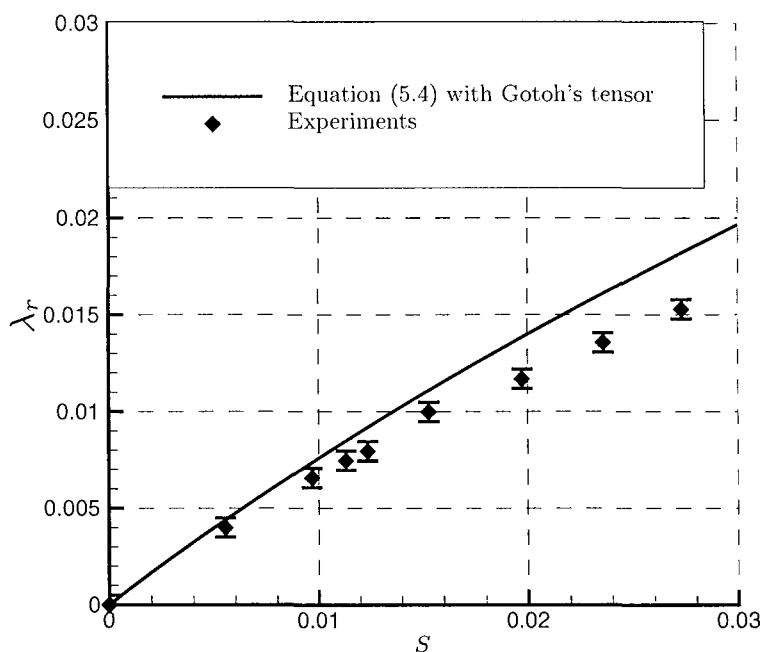


FIGURE 12. Non-dimensional ejection rate of a solid particle versus the Stokes number predicted by using Gotoh's mobility tensor.

discussed in details by Miyazaki 1995.) In the present problem, both our theoretical and experimental analyses show that the theory of Herron *et al.* 1975 (obtained by writing the fluid motion equation in the rotating frame) agrees with the BBO equation (obtained by writing the fluid motion equation in the non-rotating frame and neglecting the horizontal contribution of inertia terms) rather than with Gotoh's result. In contrast, the mobility tensor of Gotoh (1990) should be used for example when the particle is held fixed in the laboratory reference frame.

Acknowledgement

We are indebted to Bruno Chenu and Alain Delconte for the design and the set up of the experimental apparatus.

Appendix A. Solution of the horizontal motion equations

In order to solve the generalized horizontal motion equation (3.32) it is convenient to re-write it in the form :

$$m_p \frac{d^2 \mathbf{X}_p}{dt^2} = m_f \frac{D\mathbf{V}_f^0}{Dt} - \frac{1}{2} m_f \left(\mathbf{P}_H \frac{d}{dt} \mathbf{V}_p(t) - \frac{D\mathbf{V}_f^0}{Dt} \right) - k \pi a \mu_f \left[(\mathbf{P}_H \mathbf{V}_p(t) - \mathbf{V}_f^0) + C_h \int_{-\infty}^t \mathcal{K} \left(\frac{9\nu_f(t-\tau)}{a^2} \right) \frac{d}{d\tau} (\mathbf{P}_H \mathbf{V}_p(\tau) - \mathbf{V}_f^0) d\tau \right] \quad (\text{A } 1)$$

where the added-mass term has been changed according to Auton (1987) (see also Magnaudet *et al.* 1995). The terms k , C_h and $\mathcal{K}$ have been introduced for the sake of clarity and read

$$k = 6 \text{ and } C_h = 3/\sqrt{\pi} \text{ and } \mathcal{K}(s) = 1/\sqrt{s}$$

for solid particles, and

$$k = 4 \text{ and } C_h = 2 \text{ and } \mathcal{K}(s) = \text{erfc}(\sqrt{s}) \exp(s)$$

for fluid inclusions with $\mu_p/\mu_f \ll 1$. Note that we made use of the fact that, for the flow considered here, $\mathbf{P}_H \mathbf{V}_f^0 = \mathbf{V}_f^0$. In the following, (A 1) is normalized by the cylinder radius R (for lengths) and $1/\Omega$ (for times). Also, by writing :

$$Z(t) = \mathbf{X}_p(t) \cdot \mathbf{e}_1 + i \mathbf{X}_p(t) \cdot \mathbf{e}_2, \quad (i^2 = -1),$$

we are led to (5.2) where $\dot{Z}$ denotes $dZ(t)/dt$ and

$$A = \frac{k}{6S(2\gamma+1)} \quad ; \quad B = \frac{3-i k/(6S)}{2\gamma+1} \quad \text{and} \quad C = \frac{-k C_h}{6S(2\gamma+1)}. \quad (\text{A } 2)$$

The initial no slip condition, in terms of the complex variable Z , reads $\dot{Z}(0) = i Z(0)$.

Let $U = \dot{Z}$, so that (5.2) now becomes

$$\dot{U} + A U + B \left[\int_0^t U(\tau) d\tau + Z(0) \right] + C \int_0^t \left(-\dot{U}(\tau) + i U(\tau) \right) \mathcal{K}((t-\tau)/S) d\tau = 0, \quad (\text{A } 3)$$

and can be solved by using the classical Laplace transform :

$$\tilde{U} \left(p^2 + A p + B - C p(p-i) \tilde{K} \right) = U(0) p (1 - C \tilde{K}) - B Z(0)$$

where $\tilde{U}(p)$ and $\tilde{K}(p)$ denote respectively the Laplace transform of $U(t)$ and $\mathcal{K}(t/S)$. For the sake of simplicity, let $X = \sqrt{p}$, so that

$$\tilde{U} = \frac{U(0) X^2 (1 - C \tilde{K}(X)) - B Z(0)}{\underbrace{X^4 + A X^2 + B}_{P^0(X)} - \underbrace{C \tilde{K}(X) X^2 (X^2 - i)}_{P^1(X)}}.$$

In this last expression, $P^0(X)$ characterizes the case without history force and $P^1(X)$ manifests the fact that the history force is present. In order to get the solution of the motion equation, $\tilde{U}$ must be written using a partial decomposition of the form $\tilde{U} = \sum_{i=1}^n A_i/(X - X_i)$ where the roots X_i of the polynomial $P_n(X) = P^0(X) + P^1(X)$ have to be found.

In the solid particle case, the constants A_i read

$$A_i = \frac{U(0) \left(X_i^2 - C \sqrt{S\pi} X_i \right) - BZ(0)}{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{j=4} (X_i - X_j)}$$

and the polynomial is

$$P_4(X) = X^4 + A X^2 + B - C\sqrt{\pi S}X(X^2 - i).$$

In the case of bubbles, we have

$$A_i = \frac{U(0) X_i^3 + U(0) X_i^2/\sqrt{S} - (CU(0) + BZ(0))X_i - BZ(0)/\sqrt{S}}{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{j=5} (X_i - X_j)}$$

and

$$P_5(X) = (X^4 + A X^2 + B)(X + 1/\sqrt{S}) - C X(X^2 - i).$$

Inverting the Laplace transform, we finally obtain

$$Z(t) = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{A_i}{X_i} \exp(X_i^2 t) \operatorname{erfc}(-X_i \sqrt{t}). \quad (\text{A } 4)$$

When $\gamma = 1$, $\pm\sqrt{i}$ are roots of both $P_4(X)$ and $P_5(X)$ so that these polynomials can be solved and we get $Z(t) = Z(0) \exp(it)$, in agreement with the fact that there is neither radial migration nor azimuthal slip in these cases. When $\gamma \neq 1$, an approximate expression is derived in the next appendix.

Appendix B. Approximate expression for the roots X_i

First of all, it is convenient to seek the roots of the polynomial $Q_n(X, \gamma) = P_n(X)S(2\gamma + 1)$ instead of $P_n(X)$ since this new polynomial depends linearly on γ :

$$Q_n(X) = \Pi_n^0(X) + S(\gamma - 1)\Pi_n^1(X)$$

in which $\Pi_n^0(X)$ and $\Pi_n^1(X)$ are n -th order polynomials independent of γ , and such that $\Pi_n^0(X_1^0) = \Pi_n^0(X_2^0) = 0$, where $X_1^0 = \sqrt{i}$ and $X_2^0 = -\sqrt{i}$. Let us now write

$$X_i = X_i^0 + \delta X_i$$

with

$$|\delta X_i| < |X_i^0|.$$

As X_i is a root of Q_n we have :

$$0 = Q_n(X_i) = \frac{\partial \Pi_n^0}{\partial X} \Big|_{X_i^0} \delta X_i + S(\gamma - 1)\Pi_n^1(X_i^0) + S(\gamma - 1) \frac{\partial \Pi_n^1}{\partial X} \Big|_{X_i^0} \delta X_i + O(\delta X_i^2).$$

Hence,

$$\delta X_i \simeq - \frac{S(\gamma - 1)\Pi_n^1(X_i^0)}{\frac{\partial \Pi_n^0}{\partial X} \Big|_{X_i^0} + S(\gamma - 1) \frac{\partial \Pi_n^1}{\partial X} \Big|_{X_i^0}}. \quad (\text{B } 1)$$

By making use of the fact that $S \ll 1$, one can check that only the roots X_1 and X_2 (located in the vicinity of $\pm\sqrt{i}$) bring significant contributions into $Z(t)$ and that $X_2 = -X_1 + O(S)$. By using the classical relations between the roots of a polynomial, we obtain

$$\sum_{i=1}^n \frac{A_i}{X_i} = Z(0). \quad (\text{B } 2)$$

These results lead us to an approximate expression

$$Z(t) \simeq Z(0) \exp(X_1^2 t) + O(S).$$

The motion is therefore characterized by an exponential time dependence with radial migration rate $\lambda_r = \text{Re}(X_1^2)$ and rotation rate $\lambda_i = \text{Im}(X_1^2)$, where Re and Im denote the real and imaginary part respectively. The root X_1 is obtained from (B 1) in terms of S and γ and by taking the square of X_1 we obtain the complex growth rate λ , the real part of which is given by (5.5) and the imaginary part by (5.7).

REFERENCES

- Abbad, M. & Souhar, M. 2004a Effects of the history force on an oscillating rigid sphere at low Reynolds number. *Experiments in fluids*. **36**, 775–782.
- Abbad, M. & Souhar, M. 2004b Experimental investigation on the history force acting on oscillating fluid spheres at low Reynolds number. *Phys. Fluids* **16**(10), 3808–3817.
- Auton, T. R. 1987 The lift force on a spherical body in rotational flow. *J. Fluid Mech.* **183**, 199–218.
- Basset, A. B. 1888 Treatise on hydrodynamics. *Deighton Bell, London*. **2**, 285–297.
- Boussinesq, J. 1885 Sur la résistance qu’oppose un fluide indéfini au repos sans pesanteur au mouvement varié d’une sphère solide qu’il mouille sur toute sa surface quand les vitesses restent bien continues et assez faibles pour que leurs carrés et produits soient négligeables. *C. R. Acad. Sci. Paris* **100**, 935–937.
- Candelier, F., Angilella, J. R. & Souhar, M. 2004 On the effect of the Boussinesq-Basset force on the radial migration of a Stokes particle in a vortex. *Phys. Fluids* **16**(5), 1765–1776.
- Childress, S. 1964 The slow motion of a sphere in a rotating, viscous fluid. *J. Fluid Mech.* **20**, 305–314.
- Clift, R., Grace, J. R. & Weber, M. E. 1978 Bubbles, drops and particles. *Academics Press*
- Coimbra, C. F. M. & Rangel, R. H. 1998 General solution of the particle momentum equation in unsteady flows. *J. Fluid Mech.* **370**, 53–72.
- Coimbra, C. F. M. & Rangel, R. H. 2001 Spherical particle motion in harmonic Stokes flows. *AIAA Journal* **39**(9), 1673–1682.
- Coimbra, C. F. M. & Kobayashi, M. H. 2002 On the viscous motion of a small particles in a rotating cylinder. *J. Fluid Mech.* **469**, 257–286.
- Coimbra, C. F. M., L’Esperance, D., Lambert, R. A., Trolinger, J. D., & Rangel, R. H. 2004 An experimental study of stationary history effects in high-frequency Stokes flows. *J. Fluid Mech.* **504**, 353–363.
- Druzhinin, O. A. & Ostrovsky, L. A. 1994 The influence of the Basset force on a particle dynamics in two-dimensional flows. *Physica D* **76**, 34–43.
- Galindo, V. & Gerbeth, G. 1993 A note on the force on an accelerating spherical drop at low Reynolds number. *Phys. Fluids* **5**(12), 3290–3292.
- Gorodtsov, V. A. 1975 Slow motions of a liquid drop in a viscous liquid. *Zhurnal Prikladnoi Mekhaniki i Tekhnicheskoi Fiziki* **6**(2), 32–37. (translated in : J. Appl. Mech. Tech. Phys. **(16)**, 865–868)
- Gotoh, T. 1990 Brownian motion in a rotating flow *J. Stat. Phys.* **59**, 371–402.
- Happel, J. & Brenner, H. 1983 Low Reynolds Hydrodynamics. *Kluwer Academic, London*, 1983.
- Harper, E. Y. & Chang, I-Dee. 1968 Maximum dissipation resulting from lift in a slow viscous shear flow. *J. Fluid Mech.* **33**, part. 2, 209–225.
- Herron, I. H., Davis, S. & Bretherton F. P. 1975 On the sedimentation of a sphere in a centrifuge. *J. Fluid Mech.* **68**, part. 2, 209–234.
- Kaplun, S. & Lagerstrom, P. A. 1957 Asymptotic expansions of Navier-Stokes solutions for small Reynolds numbers. *J. Math. Mech.* **6**, 585–593.
- Karanfilian, S. K. & Kotas, T. J. 1981 Motion of a spherical particle in a liquid rotating as a solid body *Proc. R. Soc. Lond. A* **376**, 525–544.
- Landau, L., Lifchitz, E. 1989 Physique théorique, Tome 6, Mécanique des fluides (ed. Mir), pp. 127–129.
- Legendre, D. & Magnaudet, J. 1997 A note on the lift force on a spherical bubble or drop in a low-Reynolds-number shear flow. *Phys. Fluids* **9** (11), 3572–3574.
- Legendre, D. & Magnaudet, J. 1998 The lift force on a spherical bubble in a viscous linear shear flow. *J. Fluid Mech.* **368**, 81–126.
- Lovalenti, P. M. & Brady, J. F. 1993 The force on a bubble, drop or particle in arbitrary time dependent motion at small Reynolds number. *Phys. Fluids*. **5**(9), 2104–2116.
- Magnaudet, J., Rivero, M. & Fabre, J. 1995 Accelerated flows past a rigid sphere or a spherical bubble. Part 1. Steady straining flow. *J. Fluid Mech.* **284**, 97–135.
- Magnaudet, J. 2003 Small inertial effects on a spherical bubble, drop or particle moving near a wall in a time dependent linear flow. *J. Fluid Mech.* **485**, 115–142.

- Maxey, M. R. & Riley, J. J. 1983 Equation of motion for a small rigid sphere in a nonuniform flow. *Phys. Fluids* **26**(4), 883–889.
- Maxworthy, T. 1965 An experimental determination of the slow motion of a sphere in a rotating, viscous fluid. *J. Fluid Mech.* **23**, 373–384.
- McLaughlin, J. B. 1991 Inertial migration of a small sphere in linear shear flows. *J. Fluid Mech.* **224**, 261–274.
- Mei, R. & Adrian, R. J. 1992 Flow past a sphere with an oscillation in the free-stream velocity and a unsteady drag at finite Reynolds number. *J. Fluid Mech.* **237**, 323–341.
- Miyazaki, K. 1995 Dependence of the friction tensor on the rotation of a frame of reference. *Physica A* **222**, 248–260.
- Miyazaki, K., Bedeaux, D., & Bonet Avalos, J. 1995 Drag on a sphere in a slow shear flow. *J. Fluid Mech.* **296**, 373–390.
- Odar, F. & Hamilton, W. S. 1964 Forces on a sphere accelerating in a viscous fluid. *J. Fluid Mech.* **18**, 302–314.
- Proudman, I. & Pearson, J. R. A. 1957 Expansions at small Reynolds numbers for the flow past a sphere and circular cylinder. *J. Fluid Mech.* **2**, 237–262.
- Saffman, P. G. 1965 The lift on a small sphere in a slow shear flow. *J. Fluid Mech.* **22**, part 2, 385–400.
- Saffman, P. G. 1968 Corrigendum *J. Fluid Mech.* **31**, 624.
- Sano, T. 1981 Unsteady flow past a sphere at low Reynolds number. *J. Fluid Mech.* **112**, 433–441.
- Yang, S. & Leal, L. G. 1991 A note on memory integral contributions to the force on an accelerating spherical drop at low Reynolds number. *Phys. Fluids A* **3**(7), 1822–1824.

AUTORISATION DE SOUTENANCE DE THESE
DU DOCTORAT DE L'INSTITUT NATIONAL
POLYTECHNIQUE DE LORRAINE

ooo

VU LES RAPPORTS ETABLIS PAR :

**Monsieur Jacques MAGNAUDET, Directeur de Recherche, Institut de Mécanique des Fluides de
Toulouse**

**Monsieur John HINCH, Professeur, DAMTP, Centre for Mathematical Sciences, Cambridge,
Angleterre**

Le Président de l'Institut National Polytechnique de Lorraine, autorise :

Monsieur CANDELIER Fabien

NANCY BRABOIS
2, AVENUE DE LA
FORET-DE-HAYE
BOITE POSTALE 3
F - 54501
VANDŒUVRE CEDEX

à soutenir devant un jury de l'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE LORRAINE,
une thèse intitulée :

**"Etude du mouvement libre d'une particule dans un fluide en rotation solide à faibles
nombres de Reynolds : mise en évidence des effets d'histoire et d'inertie"**

en vue de l'obtention du titre de :

DOCTEUR DE L'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE LORRAINE

Spécialité : « mécanique et énergétique »

Fait à Vandoeuvre, le 21 juin 2005

Le Président de l'I.N.P.L.,

L. SCHUFFENECKER



Titre : "Étude du mouvement libre d'une particule dans un fluide en rotation solide à faibles nombres de Reynolds : Mise en évidence des forces d'histoire et d'inertie"

Résumé

Ce travail est consacré à une étude théorique et expérimentale du mouvement d'une particule sphérique solide, fluide ou gazeuse relâchée dans un fluide en rotation solide verticale et à faibles nombres de Reynolds et de Taylor. A cet effet, nous avons conçu un dispositif expérimental constitué d'un cylindre tournant, rempli d'huile de silicone et dans lequel sont relâchées nos particules. Au cours de nos expériences ces dernières sont filmées avec une caméra rapide, ce qui nous permet de mesurer avec précision l'évolution temporelle de leurs coordonnées spatiales. L'analyse théorique, qui s'inscrit dans une thématique de recherche relativement ancienne, corrobore l'étude de Herron, Davis et Bretherton (1975) en ce qui concerne les particules solides, et généralise leurs résultats au cas des inclusions fluide et gazeuse : bien que les vitesses de sédimentation des particules et les vitesses de migration dans le plan horizontal soient découplées, celles-ci sont affectées par la vitesse de rotation imposée au cylindre. Par ailleurs, et conformément à l'analyse théorique de Miyazaki (1995), nous observons que le mouvement horizontal de nos particules est correctement décrit par l'équation de mouvement de Boussinesq-Basset obtenue après analyse de l'écoulement de perturbation dans un référentiel non tournant et après avoir négligé, bien que cela ne soit pas tout à fait légitime, la contribution horizontal des effets d'inertie.

Mots clés : Fluide en rotation solide, faibles nombres de Reynolds, particules solides, bulles, gouttes, développements asymptotiques raccordés, force d'histoire.

Title : "On the free motion of a particle in a rotating fluid, at small Reynolds numbers. Analysis of inertia and history forces"

Abstract

The motion of a spherical inclusion released in a vertical solid-body rotation flow is investigated theoretically and experimentally. Solid spheres, bubbles and drop are considered. The particle Reynolds number and the Taylor number number are smaller than unity. The motion equations of the inclusion are obtained by revisiting the hydrodynamic equations. The axial (vertical) motion and the horizontal motion are uncoupled, even though they are sensitive to the rotation rate of the flow. Analytical solutions of the particle motion equation are compared to experimental results obtained by releasing a particle in a rotating tank filled-up with silicone oil. For solid spheres and bubbles, both the terminal velocity and the particle ejection rate (or trapping rate) predicted by the theory agree with experiments, without any empirical adjustment. In particular, the experimental device enables to check the validity of various theories involving solid or fluid inclusions with or without inertia or history effects. In agreement with Miyazaki's theory (1995), the mobility tensor of Herron, Davis and Bretherton (1975), obtained by writing the fluid motion equations in the rotating frame, accurately predicts the horizontal particle trajectory, like the Boussinesq-Basset equation obtained by writing the fluid motion equations in the non-rotating frame and neglecting the horizontal contribution of inertia effects.

Keywords : Solid-body rotation, small Reynolds numbers, solid particles, bubbles, drops, matched asymptotic expansions, history force.