



AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

136000+1025

91 INPL 091N

INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE LORRAINE
LABORATOIRE D'ENERGETIQUE ET DE MECANIQUE THEORIQUE ET APPLIQUEE
UA 875 CNRS (E.N.S.E.M.)

THESE

[M] 1991 WEISSE, D.

Présentée à

L'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE LORRAINE

Pour obtenir le titre de

DOCTEUR DE L'I.N.P.L.

SPECIALITE : MECANIQUE

OPTION : GENIE CIVIL

Par :

DENIS WEISSE



**MODELISATION DE L'ECOULEMENT GRAVITAIRE
D'UN MATERIAU GRANULAIRE**

Soutenue publiquement le 18 octobre 1991

devant la Commission d'Examen

Membres du Jury:

M.	M. LUCIUS	<i>Président</i>
M ^{me}	F. HOMAND	<i>Rapporteurs</i>
MM.	M.P. LUONG	
	A. KHELIL	<i>Examineurs</i>
	J.C. ROTH	
	J.D. WEBER	
	K.H. BOSMAN	
		<i>Invité</i>

Remerciements

Monsieur M. LUCIUS, Professeur de Mécanique à l'INPL m'a fait l'honneur de présider le Jury, ce dont je lui suis gré tout particulièrement.

Madame F. HOMAND, Professeur à l'Ecole Nationale Supérieure de Géologie a bien voulu être rapporteur de mon travail. Je tiens à lui exprimer toute ma reconnaissance.

Monsieur le Professeur MP. LUONG Directeur de Recherche au CNRS à l'école Polytechnique de Paris, a suivi avec beaucoup d'intérêts les travaux réalisés au laboratoire. Qu'il trouve ici toute ma reconnaissance.

Monsieur JD. WEBER, Professeur à l'Université de Metz, c'est beaucoup intéressé à mon travail, ce dont je le remercie.

Monsieur A. KHELIL, Maître de Conférence à l'I.U.T. génie civil de Nancy, m'a toujours soutenu dans des périodes difficiles. Ses conseils furent très précieux. Qu'il trouve dans ces quelques lignes mes sincères remerciements.

Monsieur le Professeur JC. ROTH, Directeur de Recherche. Depuis mes études à l'IUT génie civil jusqu'à l'aboutissement de ce travail, en passant par mes études d'Ingénieur à l'ISFATES, il m'a guidé, soutenu, et surtout fait confiance. Sans son soutien et sa détermination, ce travail n'aurait jamais vu le jour. Les mots ne seront jamais assez forts pour lui témoigner toute ma gratitude.

Monsieur KH. BOSMAN, Professeur à la Fachhochschule des Saarlandes à Sarrebruck en Allemagne c'est beaucoup intéressé à mon travail en me facilitant l'accès à la bibliographie Allemande. Je lui dis tout simplement un grand merci.

Monsieur JP ROMANN, Professeur à l'IUT Génie Civil de Nancy a toujours répondu présent lorsqu'il s'agissait de m'épauler d'une manière ou d'une autre. Qu'il trouve dans ces quelques mots mes sincères remerciements.

Naturellement je n'oublie pas d'associer à ces remerciements tout le corps enseignant de l'IUT Génie Civil de Nancy, avec lequel j'ai eu tout au long de ma présence dans l'établissement des rapports amicaux. De peur d'oublier des personnes, je ne citerai pas de nom.

Je tiens aussi à remercier tous mes amis du laboratoire, GBAGUIDI V, EL-RABIH M, KAMACHER C, REMESCH JC, pour leur amitié et pour leur aide.

Enfin pour terminer je remercierai encore tout le personnel ATOS de l'atelier et du secrétariat du département Génie Civil avec lequel j'ai eu des contacts amicaux.

Résumé

Après une mise au point de la terminologie, des techniques de mesure et de caractérisation des propriétés physiques et mécaniques des matériaux granulaires à travers une étude bibliographique poussée, nous nous sommes intéressés à l'analyse des écoulements gravitaires des matières granulaires.

La caractérisation mécanique des matériaux en vrac est faite à travers des essais simples et classiques. Ces tests permettent d'établir l'aptitude à l'écoulement et l'aptitude à l'éboulement des matériaux en vrac. Le comportement d'un matériau en fonction de son état de consolidation initiale est décrit par le diagramme tridimensionnel de ROSCOE qui introduit ainsi la notion de lieu d'écoulement et lieu de consolidation d'un matériau en vrac. Ces lieux d'écoulement sont repris par JENIKE pour caractériser l'écoulement d'un matériau à l'intérieur d'un silo.

L'étude théorique des champs de vitesses d'un matériau granulaire s'écoulant à l'intérieur de trémies convergentes est réalisée à l'aide d'une modélisation originale établies à partir des équations classiques de la mécanique des fluides. Les particules du matériau sont assimilées aux molécules d'un fluide dans lequel les chocs et les collisions entre particules sont inélastiques, contrairement à ce qui se passe dans un fluide classique. Ce modèle est validé dans un premier temps en comparant les champs de vitesses théoriques avec ceux mesurés sur un écoulement de billes de verre de 5 millimètres de diamètre. Billes de verre formant un matériau granulaire qui respecte au mieux les hypothèses d'application de la modélisation.

L'influence des différents paramètres tels que le frottement en paroi et l'inclinaison des parois sur l'intensité et la répartition des vitesses d'écoulement est montré expérimentalement sur un matériau granulaire naturel que sont les petits pois secs. Les champs de vitesses ainsi obtenus sont confrontés aux vitesses calculées avec la modélisation originale. Cette comparaison montre que la théorie s'accorde parfaitement avec les mesures expérimentales lorsque l'écoulement est soumis à de forts taux de cisaillement, c'est à dire lorsque les contacts entre grains restent de courtes durées afin d'empêcher la création de forces de frottement créant des couples de rotation des grains.

Sommaire

Introduction Générale	1
Notations	4
 Partie A	 Caractéristiques mécaniques des matériaux en vrac
 Chapitre 1	 Propriétés mécaniques des matériaux en vrac
 I	 Introduction
II	La classification de CARR
II.1	Présentation du principe de la classification
II.2	Définition et réalisation des essais préconisés par CARR
II.3	Détermination de la coulabilité
II.4	Calcul de l'aptitude à l'éboulement
III	Autres caractéristiques des matériaux en vrac
III.1	Angle d'éboulement
III.2	Angle d'écoulement
III.3	Masse volumique en vrac
IV	Le cisaillement des matériaux en vrac
IV.1	La théorie classique de Mohr-Coulomb
IV.2	Les différents critères de rupture
	Généralisation du critère de Mohr-Coulomb
IV.3	Etudes de ROSCOE : Diagramme d'état
IV.4	Position de la surface de rupture
V	Caractérisation de l'aptitude à l'écoulement des matériaux en vrac à l'intérieur d'un silo
V.1	Rappel des différents types d'écoulement
V.2	Résistance à la compression d'un matériau en vrac
V.3	Fonction d'écoulement
V.4	Capacité d'écoulement à l'intérieur d'un silo
VI	Concept de l'état caractéristique d'un matériau granulaire
VI.1	Constatations expérimentales
VI.2	Etat caractéristique d'un matériau granulaire
VI.3	Procédure expérimentale
VI.4	Caractérisation rhéologique des matériaux testés par Luong dans [60]
VII	Conclusion

Partie B Modélisation de l'écoulement gravitaire
 d'un matériau granulaire naturel
 Etudes théorique et expérimentale

Chapitre 2	Description d'un écoulement granulaire à l'aide des équations de l'hydrodynamique	53
I	Introduction	54
II	Description et domaine d'application du modèle	55
II.1	La taille des grains et des molécules de fluide	55
II.2	Conservation de l'énergie	55
II.3	Taille des grains	55
II.4	Interaction entre les grains	56
II.5	Hypothèse de collision binaire	56
II.6	Etat physique du milieu	56
III	Equations de mouvement	57
III.1	Conservation de la masse	57
III.2	Conservation de la quantité de mouvement	58
III.3	Conservation de l'énergie	58
IV	Modèle microscopique	59
IV.1	Equation d'état	59
IV.2	Coefficient de viscosité	60
IV.3	Coefficient de diffusivité thermique	61
IV.4	Pertes d'énergie par collisions	61
IV.5	Remarques	62
V	Les conditions aux limites	63
V.1	Conditions sur la vitesse de fluctuation V à la paroi	63
V.2	Conditions sur la vitesse d'écoulement U à la paroi	64
V.3	Remarques	65
VI	Conclusion	66

Chapitre 3 Modélisation de l'écoulement gravitaire à l'intérieur d'un puits vertical 67

I	Introduction	68
II	Positionnement du problème	69
III	Modélisation de l'écoulement dans un puits vertical	69
III.1	Conservation de la quantité de mouvement	70
III.2	Conservation de l'énergie	70
IV	Détermination des grandeurs caractéristiques de l'écoulement	71
IV.1	Vitesse de fluctuation V	71
IV.2	Vitesse d'écoulement U	73
IV.3	Autre paramètre du modèle : Δl	75
IV.4	Variation de la masse volumique dans une section	76
IV.5	Détermination de la vitesse de fluctuation et de la vitesse d'écoulement	77
V	Influence des différents coefficients du modèle sur les caractéristiques de l'écoulement	80
V.1	Influence de la vitesse de fluctuation V_p	80
V.2	Influence du coefficient γ	83
V.3	Influence du coefficient γ_p caractérisant les collisions grain-paroi	85
V.4	Influence de la constante t	85
V.5	Influence de la constante r	86
V.6	Influence de la constante q	86
VI	Confrontation du modèle avec des mesures réelles	88
VI.1	Généralités	88
VI.2	Comparaison des vitesses théoriques avec les vitesses expérimentales	88
VII	Conclusion	89

Chapitre 4 Caractérisation expérimentale d'un écoulement gravitaire à l'intérieur de trémies planes 90

I	Introduction	91
II	Description des essais réalisés	92

II.1	Généralités	92
II.2	Le matériau granulaire	93
II.3	Les parois des trémies	94
III	Dispositif expérimental	96
IV	Observations faites lors de l'écoulement	97
V	Débits massiques en fonction de la configuration de trémie	100
V.1	Débit massique	100
V.2	Débit en fonction de l'angle de frottement en paroi	103
VI	Détermination des champs de vitesses	104
VI.1	Matériel utilisé	104
VI.2	Détermination des champs de vitesses	105
VII	Vitesses verticales expérimentales	110
VII.1	Profils de vitesses	110
VII.2	Corrélation entre le débit massique et les vitesses d'écoulement	118
VIII	Conclusion	120

Chapitre 5 Détermination des constantes 122 de la modélisation

I	Introduction	123
II	Les constantes du modèle pour les petits pois secs	124
II.1	Les constantes γ , r , q , β_p	124
II.2	Constantes γ_p et β_p en fonction de l'inclinaison et de l'état de surface des parois	128
II.3	Remarques	131
III	Conclusion	133

Chapitre 6	Détermination des champs de vitesses	135
	théoriques à partir du débit	
	massique de l'écoulement gravitaire	
I	Introduction	136
II	Calcul de la vitesse de fluctuation à partir de la donnée expérimentale du débit massique	137
II.1	Calcul de la vitesse de fluctuation en fonction du débit massique	137
II.2	Détermination de la fonction $V_n(Y)$	138
II.3	Détermination de V^* et de la vitesse d'écoulement $U(Y)$	139
II.4	Algorithme de calcul	139
III	Vitesses d'écoulement	140
III.1	Généralités	140
III.2	Calcul des vitesses d'écoulement adimensionnelles	140
III.3	Différence entre les deux courbes théoriques	143
IV	Conclusion	145
	Conclusion générale	148
	Bibliographie	152
	Annexes (définies en page suivante)	162

A N N E X E S

Annexe 1	Profils de vitesses verticales expérimentales pour les billes de verre	162
Annexe 2	Profils de vitesses verticales expérimentales pour les petits pois	166
Annexe 3	Détermination des constantes r , q , γ , γ_p , β_p de la modélisation de l'écoulement gravitaire	191
Annexe 4	Dépouillement des mesures expérimentales pour la détermination des champs de vitesses expérimentales	208
Annexe 5	Superposition des vitesses verticales adimensionnelles - calculées à partir de la vitesse en paroi - calculées à partir du débit massique - expérimentales	215
Annexe 6	Superposition des vitesses verticales calculées à partir du débit massique avec les vitesses expérimentales	225

Introduction générale

La recherche de l'amélioration de la productivité et de la qualité des produits agro-alimentaires, pharmaceutiques ..., a engendré de nombreux travaux scientifiques visant à améliorer les conditions de stockage des matières granulaires et de leur manutention. Le but de cette multitude de travaux et d'éviter les incidents fonctionnels et structuraux survenant lors de l'exploitation des silos de stockage et des trémies alimentant les chaînes de production industrielle.

Les problèmes fonctionnels sont principalement des obturations de l'orifice de vidange ou des formations de voûtes au sein de la matière en mouvement. Ils surviennent lorsque la trémie n'est pas conçue de façon optimale pour le matériau qu'elle doit contenir, matériau dont l'aptitude à l'écoulement est mauvaise. Ces perturbations ont une conséquence néfaste sur le rendement et sur la qualité du produit car elles provoquent des variations du débit massique, et même dans des cas extrêmes l'arrêt de l'écoulement. L'effondrement d'une voûte au sein de la matière ensilée peut également être à l'origine de surpressions sur les parois qui peuvent entraîner des désordres structuraux sur l'installation. Ce type de dommage est aussi lié à la méconnaissance des champs de contraintes au niveau des parois lorsque la matière est en mouvement. Les efforts réels en paroi qui ne sont pas donnés avec suffisamment de fiabilité par les différents modèles de calcul provoquent souvent des flambement locaux de parois métalliques, l'éclatement du béton dans les différents éléments de structure. Ces incidents structuraux provoquent dans certains cas la ruine totale de la structure, mettant souvent en péril des vies humaines.

A l'heure actuelle il existe de nombreuses méthodes efficaces permettant d'établir l'aptitude à l'écoulement, c'est à dire la coulabilité d'un matériau en vrac. Ces techniques utilisées avec beaucoup de succès dans l'industrie permettent de concevoir au mieux les trémies et silos afin d'obtenir un écoulement régulier du matériau. C'est pourquoi la recherche est orientée aujourd'hui vers la caractérisation aussi bien expérimentale que théorique du champ de contrainte à l'intérieur de la matière ensilée lors de la vidange des installations de stockage. Ce type de travaux de recherche ont été confié en France à la "mission silo" qui regroupa des partenaires industriels et universitaires ayant pour but fut la rédaction d'une norme française pour le calcul des efforts en paroi. Les études théoriques et expérimentales de ce groupement ont montré grâce à la participation du laboratoire et notamment à travers KHELIL [50], une relation étroite entre le champ de contrainte et le mode d'écoulement du matériau en vrac à l'intérieur des silos et trémies. Les modes d'écoulement qui se rangent essentiellement dans deux classes représentées par la figure 1 :

- *écoulement en masse* : le matériau entré en dernier est évacué en dernier
- *écoulement en cheminée* : formation d'un puits dans la matière, puits alimenté par le matériau qui se trouve à la surface libre.

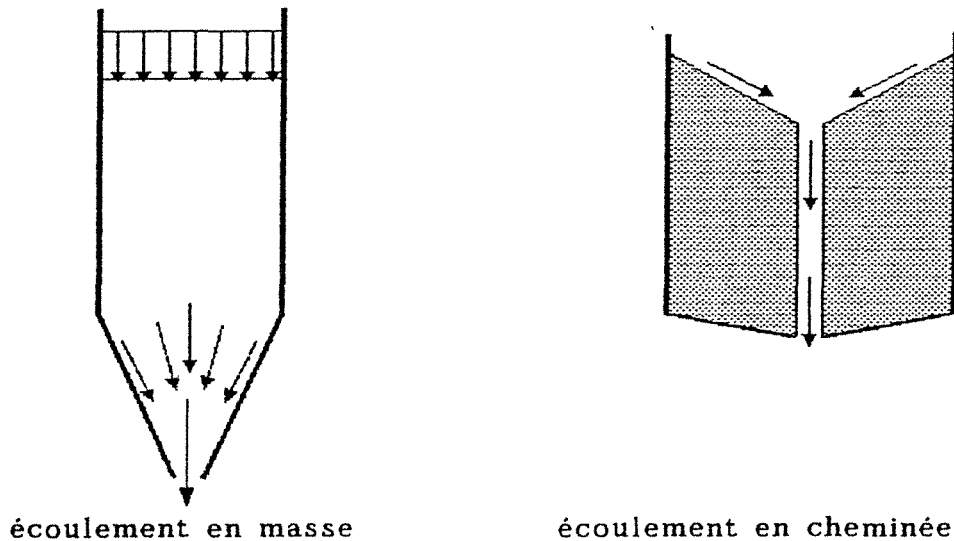


Figure 1 : Les deux principaux modes d'écoulement

Dans les silos industriels on rencontre généralement un écoulement qui est une combinaison des deux modes précédemment décrit , c'est à dire en cheminée dans la zone inférieure alors que dans la partie haute il y a une descente en masse de la matière sur toute la largeur de la section de la cellule {fig.2}.

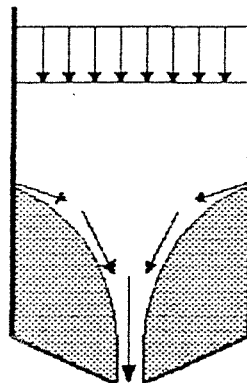


Figure 2 : écoulement généralement rencontré dans les silos élancés

Vu l'importance de la connaissance du type d'écoulement donc des paramètres qui le conditionne pour la détermination des contraintes à l'interface paroi-matériau, nous nous sommes intéressés dans ce mémoire à la détermination expérimentale et théorique des vitesses d'écoulement. Ces travaux cherchent donc à déterminer les modes d'écoulement par la connaissance théorique du champ de vitesses pour pouvoir par la suite développer des modèles de calcul des efforts en paroi plus fiables que ceux existant à l'heure actuelle.

Le mémoire que nous présentons se décompose en deux parties. La première (Partie A) avec le chapitre 1 est consacrée à une étude bibliographique des différentes méthodes de détermination de la coulabilité des matériaux en vrac développées par des auteurs tels que CARR, JENIKE et plus récemment LUONG. Dans cette première partie on retrouve encore les travaux de ROSCOE qui grâce à son diagramme tridimensionnel relie l'indice des vides à la contrainte de cisaillement et à la contrainte normale au cours du chargement d'un échantillon de matériau, et cela en fonction de l'état de consolidation initial de l'échantillon.

La seconde partie (Partie B) de ce mémoire s'articule autour de la détermination théorique et expérimentale des champs de vitesses à l'intérieur de trémies convergentes. Les deux premiers chapitres de cette seconde partie, c'est à dire les chapitres 2 et 3 sont consacrés à la description et au développement réalisé au laboratoire de la modélisation des champs de vitesses dans les trémies convergentes. Modèle qui repose essentiellement sur les équations classiques de la mécanique des fluides qui sont introduites dans le chapitre 2. Le troisième chapitre résume le développement de notre modèle et analyse sa sensibilité aux différents paramètres qui le composent. Il se termine par une validation de la modélisation en comparant les courbes de vitesses mesurées avec celles données par le modèle avec des billes comme matériau granulaire.

Le chapitre 4 se consacre essentiellement à l'étude expérimentale du débit et du champ de vitesses engendrées par l'écoulement d'un matériau granulaire naturel que sont les petits pois secs à travers différentes géométries de trémies. Trémies dont on a modifié l'inclinaison et l'état de surface des parois, afin de voir l'influence de ces deux paramètres sur les grandeurs mesurées. Les champs de vitesses expérimentales sont utilisées dans le chapitre 5 pour déterminer les paramètres du modèle original. Cela se faisant par une méthodologie adaptée. La fin de ce chapitre 5 comme le chapitre 6, où l'on utilise une autre méthode de résolution des équations du modèle, comparent les champs de vitesses théoriques et expérimentales. On montre dans ce dernier chapitre que notre modélisation donne des résultats très satisfaisants lorsque l'écoulement est soumis à des forts taux de cisaillement, ce qui est une des principales hypothèses d'application du modèle.

Dans la conclusion nous situons notre travail par rapport au contexte réel et proposons une extension des travaux dans le cas de faibles vitesses d'écoulement. Notre mémoire est complété par la présentation dans les annexes de l'ensemble des résultats de mesures et de calculs exploités.

Notations

Partie A

α_r	: angle de repos
α_s	: angle de spatule
α_c	: angle de chute
α_d	: angle de différence
β_{eb}	: angle d'éboulement
β_{ec}	: angle d'écoulement
ρ	: masse volumique d'un matériau en vrac
ρ_P	: masse volumique du matériau tassé
ρ_A	: masse volumique du matériau lâche
$\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3$	: contraintes principales
σ	: contrainte normale
τ	: contrainte de cisaillement
$\sigma_P \tau_P$	: contraintes agissant sur la surface de rupture
p	: contrainte moyenne
q	: contrainte déviatorique
α	: angle d'inclinaison de la surface de rupture par rapport au plan d'action de la contrainte principale majeure
φ	: angle de frottement interne
φ_{st}	: angle de frottement de l'écoulement stationnaire
φ_i	: angle de frottement au début de l'écoulement
φ_e	: angle de frottement effectif
φ_c	: angle de frottement caractéristique
$\dot{\epsilon}$	: vitesse de déformation
$\dot{\epsilon}_1 \dot{\epsilon}_2 \dot{\epsilon}_3$	: vitesses de déformation suivant les directions principales
$\dot{\epsilon}_v$	: taux de variation volumique
ϵ_v	: déformation volumique
ϵ_q	: déformation distorsionnelle
d	: taux de dilatance
$\dot{\gamma}/2$	: vitesse de déformation angulaire
v	: angle de dilatation
ζ	: angle entre les plans de rupture statique et dynamique
γ	: angle d'inclinaison des parois d'une trémie par rapport à l'horizontale
θ	: angle d'inclinaison des parois d'une trémie par rapport à la verticale
A_t	: aptitude au tassement
C	: cohésion du matériau
$I_1 I_2 I_3$	: invariants du tenseur des contraintes
$J_1 J_2 J_3$	: invariants du déviateur des contraintes
I_c	: indice de coulabilité
I_d	: indice de désenchevêtrement

Notations

V_v	: volume des vides
V_T	: volume total
V_s	: volume des solides
e	: indice des vides
n	: porosité
fc	: résistance à la compression d'un matériau en vrac
FF	: fonction d'écoulement
ff	: facteur d'écoulement
b	: largeur de l'orifice de vidange
l	: longueur de l'orifice de vidange
d	: diamètre de l'orifice de vidange

Partie B

m	: masse d'un grain
d	: diamètre d'un grain
s	: distance séparant deux grains voisins
ρ	: masse volumique du matériau qui s'écoule
ρ_o	: masse volumique du matériau au repos
l	: demi-distance séparant les deux parois de la trémie
h	: épaisseur de la trémie
Δl	: paramètre décrivant le foisonnement du matériau
δ	: rapport du diamètre des grains sur la largeur de l'écoulement ($\delta = d/2l$)
ξ	: épaisseur de la couche cisailée au niveau des parois
u	: vitesse d'écoulement verticale
u_b	: vitesse d'écoulement verticale au milieu de l'écoulement
v	: vitesse de fluctuation d'un grain
U	: vitesse d'écoulement verticale adimensionnelle
V	: vitesse de fluctuation adimensionnelle
U_p	: vitesse verticale adimensionnelle au niveau des parois
V_p	: vitesse de fluctuation adimensionnelle au niveau des parois
p	: pression à l'intérieur de l'écoulement
τ	: contrainte de cisaillement
τ_p	: contrainte de cisaillement à la paroi
P_o	: pression adimensionnelle
T	: contrainte de cisaillement adimensionnelle
η	: coefficient de viscosité du matériau
K	: coefficient de conductivité thermique
I	: taux de perte d'énergie
γ	: facteur traduisant l'inélasticité des collisions entre grains
γ_p	: facteur traduisant l'inélasticité des collisions grain-paroi
e	: coefficient de restitution de l'énergie lors d'une collision grain-grain
e_p	: coefficient de restitution de l'énergie lors d'une collision grain-paroi
β_p	: coefficient caractérisant la paroi
t, a, b	: coefficients caractérisant le matériau granulaire
r, q	: coefficients caractérisant le matériau granulaire
T	: temps de collision entre deux particules du matériau
φ	: angle de frottement interne
φ_p	: angle de frottement en paroi
δ_{ij}	: symbole de Kronecker
g	: accélération de la pesanteur

Notations

Q_M	: débit massique de l'écoulement gravitaire
Q_M^a	: débit massique adimensionnel
x, y	: coordonnées d'une particule
X, Y	: coordonnées adimensionnelles d'une particule
X	: cote verticale d'un profil de vitesse
Y	: position horizontale de la particule à la cote X
α	: angle d'inclinaison des parois par rapport à la verticale

PARTIE A

Caractéristiques mécaniques des matériaux en vrac

Chapitre 1

Propriétés mécaniques des matériaux en vrac

I. Introduction

L'ensilage des matériaux granulaires en vrac génère des difficultés innombrables qui sont à la fois structurales (voilement, flambement, fissuration... des éléments de structure du silo) et fonctionnelles (formation de voûtes, de cavités, de noyaux... au sein de la matière ensilée). Dans notre synthèse bibliographique nous nous intéressons plus particulièrement à la compréhension et à la résolution de ces difficultés fonctionnelles qui surviennent lors de l'exploitation d'un silo. Les difficultés fonctionnelles qui entraînent généralement des surpressions sur les parois des silos, ces dernières sont très difficiles à évaluer et donc à prendre en compte dans le dimensionnement du silo. De ce fait les problèmes structuraux et fonctionnels sont étroitement liés.

La formation de voûtes et leur effondrement, au cours de l'exploitation d'un silo, n'entraînent pas seulement des surpressions indésirables sur les parois, mais également une fluctuation plus ou moins importante du débit, voir l'arrêt complet de l'écoulement. L'utilisation et la conception optimale d'un silo dépend essentiellement de l'aptitude à l'écoulement et du comportement rhéologique du matériau ensilé. Un matériau avec une mauvaise coulabilité aura tendance à présenter des difficultés fonctionnelles qu'il faudra contourner par des dispositifs constructifs adaptés.

Depuis 1950 de nombreux chercheurs se sont intéressés à la caractérisation des matériaux en vrac. CARR [14] propose en 1965 une classification des matériaux en fonction de leur aptitude à l'écoulement (flowability) et de leur aptitude à l'éboulement (floodability). Par la suite ROSCOE cité dans [13] montre à l'aide de son diagramme tridimensionnel, les relations entre l'état de consolidation - la variation volumique et l'état de contrainte dans un matériau granulaire. Ce diagramme permet de mieux comprendre la construction et l'utilité des lieux d'écoulement, théorie surtout développée par JENIKE [38] [39] [40] et très utilisée pour caractériser les matériaux granulaires pouvant présenter de la cohésion (poudres...) sous certaines conditions. Plus récemment LUONG [60] a développé une théorie originale basée sur la caractérisation de l'enchevêtrement des grains. Il définit ainsi un seuil de désenchevêtrement des grains auquel il associe un indice de désenchevêtrement I_d et un indice de coulabilité I_c . D'après LUONG un matériau granulaire peut s'écouler librement si le niveau de contrainte est suffisant pour permettre le désenchevêtrement des grains.

II. La classification de Carr R.L.

II.1 Présentation du principe de la classification

Carr propose de classer les matériaux à l'aide de deux indices qui caractérisent deux comportements différents qu'il appelle "aptitude à l'écoulement" et "aptitude à l'éboulement".

Un matériau ayant une bonne aptitude à l'écoulement à :

- des particules de géométrie suffisamment grande
- la forme des particules est plus ou moins sphérique avec un état de surface lisse et régulier
- une activité électrostatique induite minime
- une bonne résistance mécanique à la déformation
- une densité élevée

Un matériau ayant une aptitude à l'éboulement s'écoule d'une manière instable, discontinue et incontrôlable. Ce type de matériau peut facilement être fluidisé par incorporation d'air.

Les particules constituant ce matériau :

- ont une grande surface spécifique
- absorbent facilement de l'air
- sont sphériques et uniformes
- ne sont pas agglomérés
- ont une faible densité

Pour déterminer ces deux indices, CARR utilise des caractéristiques physiques et mécaniques facilement mesurables, ainsi l'aptitude à l'écoulement (ou coulabilité) se détermine par l'intermédiaire de :

- l'angle au repos
- l'aptitude au tassement
- l'angle de spatule
- la cohésion, de l'uniformité

alors que l'aptitude à l'éboulement est déterminée par la combinaison du résultat du critère précédent avec :

- l'angle de chute
- l'angle de différence
- la dispersibilité

II.2 Définition et réalisation des essais préconisés par CARR

- L'angle de repos : α_r a déjà été défini par TERZAGHI en 1943. C'est l'angle que forme la pente d'un amoncellement de grains tombant d'une certaine hauteur, avec l'horizontale. Plus l'angle de repos est faible, plus le matériau s'écoule facilement et plus il s'écoule rapidement.

L'angle de repos dont la détermination est facile donne une bonne indication sur l'aptitude à l'écoulement. C'est par ailleurs une méthode simple pour la mesure indirecte des propriétés affectant l'écoulement : la taille et la forme des grains, la porosité, la cohésion, ...

– Aptitude au tassement : elle est calculée en pourcent :

$$A_t = \frac{100 (\rho_P - \rho_A)}{\rho_P}$$

ρ_P : densité du matériau dense
 ρ_A : densité du matériau lâche

Plus un matériau est apte au tassement, moins il sera apte à l'écoulement et inversement. La limite entre écoulement libre (matériau granulaire) et un écoulement non libre (poudre) se situe aux alentours de $A_t = 20\%$ d'après CARR.

L'aptitude au tassement permet d'estimer indirectement l'uniformité de la forme et de la taille des particules, la déformabilité, la cohésion et l'humidité du matériau.

– Angle de spatule : α_s est un angle qui donne le frottement relatif (angle de rupture) pour chaque matériau sec. Il est déterminé aisément : la spatule repose sur le fond d'un plateau rempli de matériau, le plateau est ensuite abaissé lentement. Il reste alors une quantité de poudre sur la spatule. Un matériau s'écoulant librement forme un angle bien net alors qu'un matériau ayant un écoulement non-libre (non-free-flowing) tend à former des angles irréguliers souvent droits pour des matériaux cohésifs (fig.11).

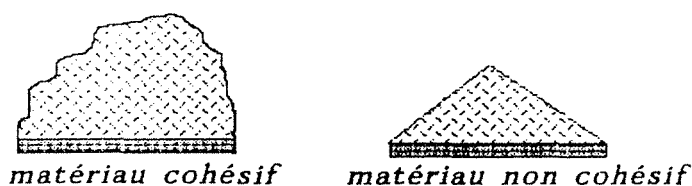


Figure 11 : Angle de spatule α_s

A l'exception des matériaux s'écoulant très librement l'angle de spatule est toujours plus élevé que l'angle de repos pour un matériau donné. L'angle de spatule donne une gamme d'information plus large sur la coulabilité que l'angle de repos. Plus élevé est l'angle α_s d'un matériau, plus petite est son aptitude à l'écoulement. CARR considère qu'un matériau à un écoulement libre lorsque l'angle de spatule α_s est inférieur à 40 degrés.

Il permet encore d'estimer indirectement la cohésion, la taille, la forme, la surface spécifique, la porosité et la déformabilité des particules...

– Cohésion et Uniformité : Les coefficients de cohésion et d'uniformité sont utilisés alternativement pour évaluer les propriétés d'écoulement. Le test de cohésion permet de caractériser les matériaux pulvérulents pouvant présenter de la cohésion, alors que le coefficient d'uniformité est utilisé pour des

matériaux granulaires ou poudreux sur lesquels on ne peut pas mesurer une cohésion surfacique.

Le test de cohésion : Il s'applique aux particules très fines. Il consiste à mesurer la quantité de poudre qui ne passe pas à travers trois tamis superposés de mailles différentes, bien que la plus petite maille permette le passage de toutes les particules.

Le test d'uniformité : il s'applique aux matériaux qui s'écoulent librement, et permet d'évaluer la dispersion de la granulométrie des particules. Sa mise en oeuvre nécessite la construction de la courbe granulométrique du matériau dans un graphique semi-logarithmique. Le rapport entre l'ouverture du tamis qui permet le passage de 60% des particules et celle qui permet le passage de 10% est la valeur du coefficient d'uniformité. L'écoulement est meilleur quand le rapport tend vers 1.

L'uniformité donne une représentation de la taille des grains ainsi que de l'aptitude au tassement.

- Angle de chute (α_c) : Une fois que l'on a mesuré l'angle de repos on laisse tomber une masselotte trois fois sur le plateau sur lequel se trouve la matière. On provoque ainsi un affaissement du cône. L'angle obtenu est l'angle de chute.

Plus un matériau s'écoule librement plus cet angle est faible et plus il s'écoule régulièrement autour du cône. Un matériau qui tend à s'effondrer tombe en masse, cela est dû à l'air inclus.

L'angle de chute permet d'estimer la fluidité la forme, la taille, l'uniformité, la quantité d'air incluse et la cohésion.

- Angle de différence (α_d) : La différence entre l'angle de repos et l'angle de chute donne l'angle de différence. Plus cet angle est grand, pour un matériau apte à l'effondrement, plus grande est sa capacité de fluidisation, c'est à dire sa capacité à s'écouler librement par incorporation d'air.

Cette valeur permet d'estimer la fluidité, la surface spécifique et la cohésion.

- La dispersibilité : Elle est étroitement en corrélation avec l'état poussiéreux et l'aptitude à l'effondrement d'un matériau donné. La dispersibilité est une mesure directe de la capacité d'un matériau à se fluidiser. On détermine la dispersibilité à l'aide d'un appareil fort simple (fig.12). Il est constitué d'un cylindre fixé à une certaine hauteur au-dessus d'un verre à montre. Un échantillon de matériau de 10 grammes est laissé tomber en masse d'une certaine hauteur au dessus du verre à travers le cylindre. Le matériau récupéré dans le verre à montre est pesé, le matériau perdu s'est dispersé pendant la chute.

La dispersibilité est une mesure directe de la capacité qu'à le matériau à se fluidiser.

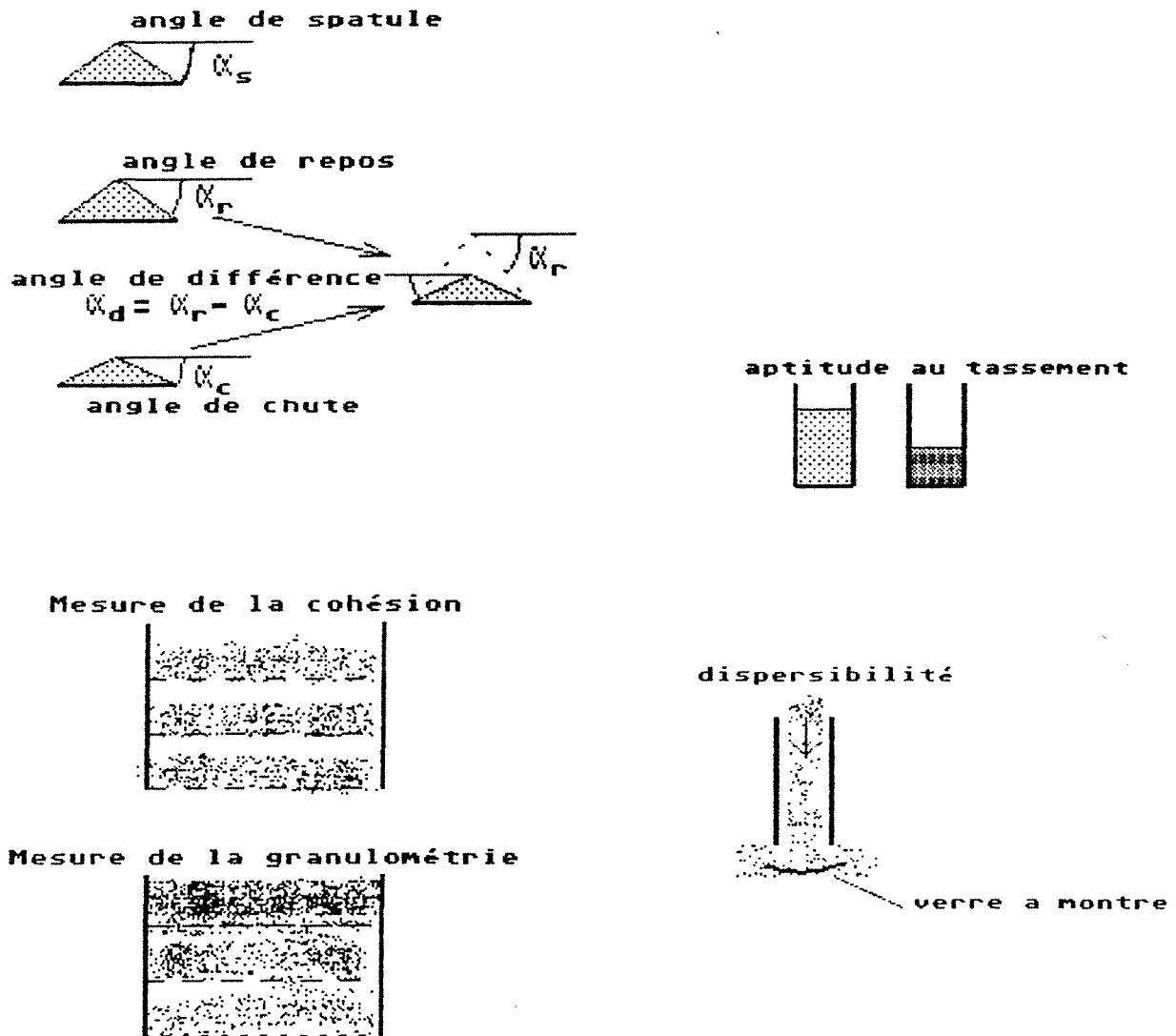


Figure 12 : Résumé des différents essais préconisés par CARR

II.3 Détermination de la "Coulabilité"

Définie dans le paragraphe II.1 la coulabilité c'est à dire l'aptitude à l'écoulement se détermine à l'aide des caractéristiques mécaniques suivantes :

- l'angle au repos
- l'angle de spatule
- l'aptitude au tassement
- la cohésion ou l'uniformité

Chacune de ces quatre caractéristiques est mise en corrélation avec une note entre 0 et 25 à l'aide du tableau I1. La somme de ces quatre notes donne l'indice de coulabilité, qui caractérise d'après le tableau I2 l'aptitude à l'écoulement d'un matériau et permet de prévoir éventuellement un moyen mécanique d'extraction.

angle de repos		compressibilité		angle spatule		uniformité *		cohésion **	
degrés	points	%	points	degrés	points	d50/d10 points		%	points
25	25	5	25	25	25	1	25		
25-29	24	5-9	23	25-30	24	2-4	23		
30	22.5	10	22.5	31	22.5	5	22.5		
31	22	11	22	32	22	6	22		
32-34	21	12-14	21	33-37	21	7	21		
35	20	15	20	38	20	8	20		
36	19.5	16	19.5	39	19.5	9	19		
37-39	18	17-19	18	40-44	18	10-11	18		
40	17.5	20	17.5	45	17.5	12	17.5		
41	17	21	17	46	17	13	17		
42-44	16	22-24	16	47-59	16	15-16	16		
45	15	25	15	60	15	17	15	16	15
46	14.5	26	14.5	61	14.5	18	14.5	6-9	14.5
47-54	12	27-30	12	62-74	12	19-21	12	10-29	12
55	10	31	10	75	10	22	10	30	10
56	9.5	32	9.5	76	9.5	23	9.5	31	9.5
57-54	7	33-36	7	77-89	7	24-26	7	32-54	7
65	5	37	5	90	5	27	5	55	5
66	4.5	38	4.5	91	4.5	28	4.5	56	4.5
67-89	2	39-45	2	92-99	2	29-36	2	51-79	2
90	0	>45	0	>99	0	>36	0	>79	0

* utilisée pour les matériaux granulaires

** utilisée pour les poudres présentant une cohésion mesurable

Tableau II : Calcul de l'indice de coulabilité

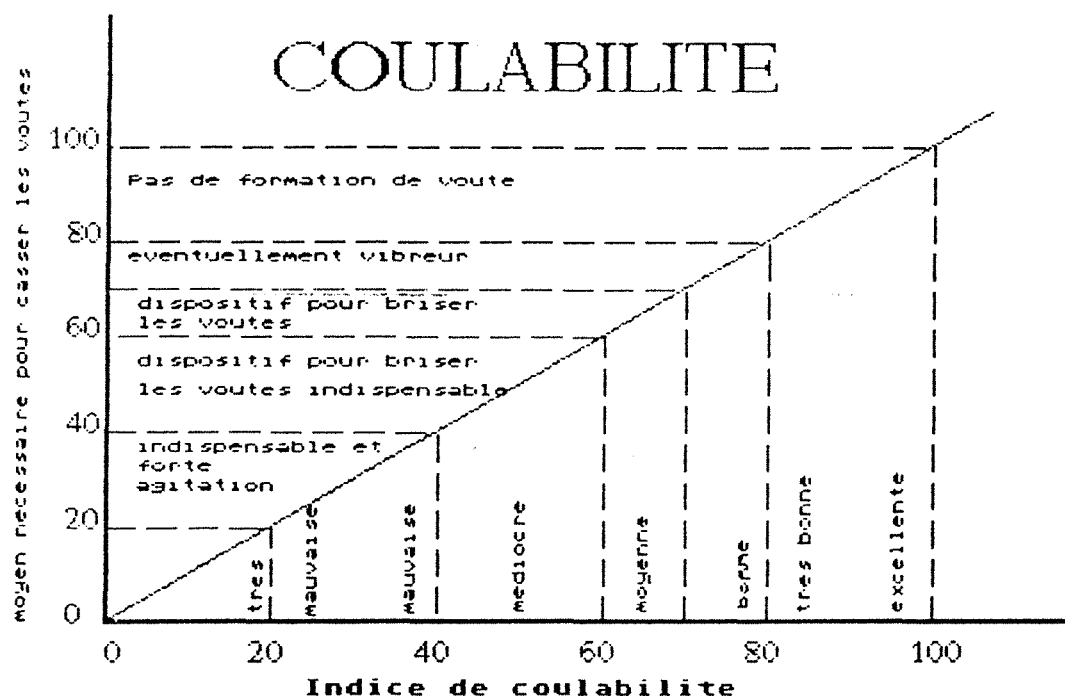


Tableau I2 : caractérisation de l'aptitude à l'écoulement en fonction de l'indice de coulabilité

II.4 Calcul de l'aptitude à l'éboulement

Elle se calcule à partir de l'indice de coulabilité obtenu à l'aide du tableau II, et à partir des caractéristiques mécaniques suivantes :

- l'angle de chute
- l'angle de différence
- la dispersibilité

Chacun de ces quatre résultats est noté de 0 à 25 à l'aide du tableau I3 pour obtenir l'indice de "Floodability", qui caractérise d'après le tableau I4 l'aptitude à l'éboulement.

Coulabilité		angle de chute		angle différence		dispersibilité	
tab I ³	points	degrés	points	degrés	points	%	points
50 +	25	10	25	30 +	25	50 +	25
59-56	24	11-19	24	29-28	24	49-44	24
55	23.5	20	23.5	27	23.5	43	23.5
54	22	21	22	26	22	42	22
53-50	21	22-24	21	25	21	41-36	21
49	20	25	20	24	20	35	20
48	19.5	26	19.5	23	19.5	34	19.5
47-45	18	27-29	18	22-20	18	33-29	18
44	17.5	30	17.5	19	17.5	28	17.5
43	17	31	17	18	17	27	17
44-40	16	32-39	16	17-16	16	26-21	16
39	15	40	15	15	15	20	15
38	14.5	41	14.5	14	14.5	19	14.5
37-34	12	42-49	12	13-11	12	18-11	12
33	10	50	10	10	10	10	10
32	9.5	51	9.5	9	9.5	9	9.5
31-29	8	52-56	8	8	8	8	8
28	6.25	57	6.25	7	6.25	7	6.25
27	6	58	6	6	6	6	6
26-23	3	59-64	3	5-1	3	5-1	3
22	0	64	0	0	0	0	0

Tableau I3 ; calcul de l'indice de Floodability

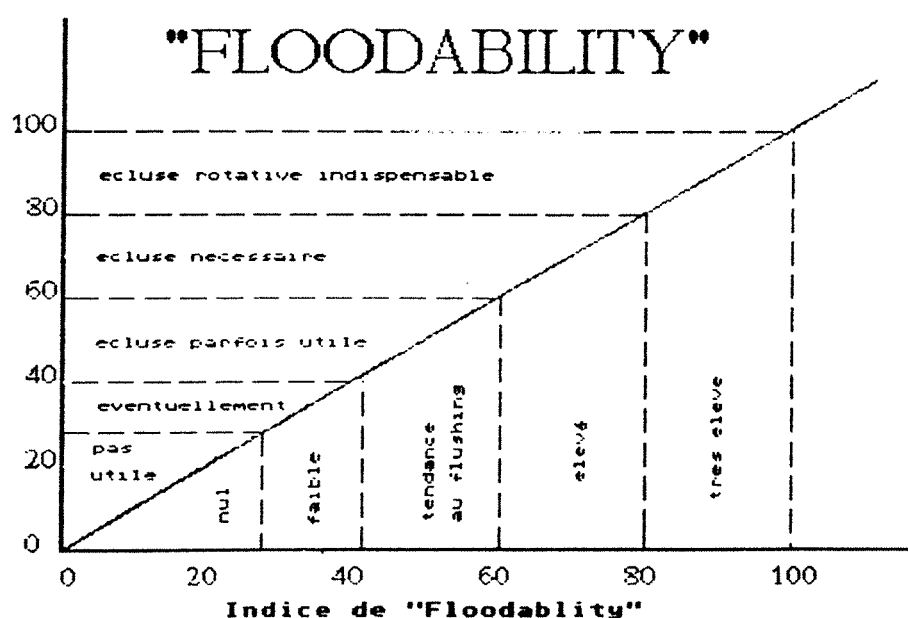


Tableau I4 : Caractérisation de l'aptitude à l'éboulement

III. Autres caractéristiques des matériaux en vrac

La fédération européenne de manutention (F.E.M.) dans le document [22] décrit la procédure à suivre pour la mesure de différentes caractéristiques des matériaux en vrac. Elle décrit notamment les conditions dans lesquelles doivent se faire les essais, l'échantillonnage, la granulométrie par tamissage d'un produit non séché ou séché, elle décrit encore le calcul ou la mesure de la masse volumique en vrac, d'un angle d'éboulement - d'écoulement - de glissement, de l'humidité et de l'aptitude à la fluidisation.

III.1 Angle d'éboulement

L'angle d'éboulement β_{eb} est l'angle que fait avec l'horizontale la pente du tas conique formé par un produit lorsqu'il tombe librement et régulièrement d'une faible hauteur. La F.E.M. préconise de mesurer cet angle à l'aide de l'appareil représenté par la figure I3, alors que le CEMAGREF [17] le mesure à l'aide d'un appareil cylindrique fabriqué par ses soins (fig.I5). Cet angle est analogue à l'angle au repos de CARR [14].

III.2 Angle d'écoulement

L'angle d'écoulement β_{ec} est formé avec l'horizontale par le talus du reliquat de produit restant dans un récipient dont le fond horizontal comporte un orifice. La F.E.M. mesure cet angle avec l'appareillage de la figure I4, alors que le CEMAGREF [17] utilise à nouveau l'appareil de la figure I5.

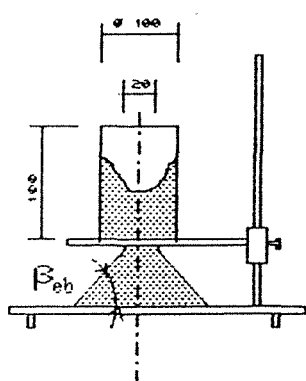


Figure I3
Mesure des angles d'écoulement β_{eb} et β_{ec}
d'après la FEM

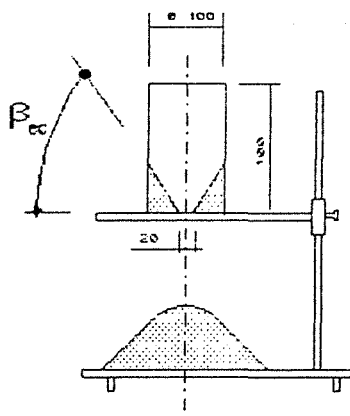


Figure I4

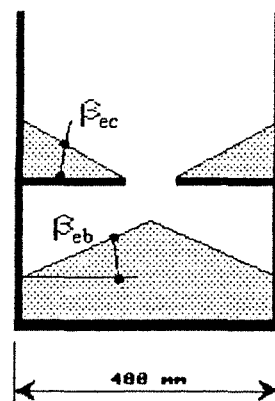


Figure I5
et d'après le CEMAGREF

III.3 Masse volumique en vrac

La masse volumique en vrac est la masse par unité de volume d'un produit au repos ayant été déversé librement. La F.E.M. [22] utilise l'appareil représenté par la figure I6, le mode opératoire avec le calcul de la masse volumique tassée ρ_P et de la masse volumique non tassée (lâche) ρ_A y est décrit avec beaucoup de précision.

Par ailleurs il ne faut pas oublier qu'il existe une multitude de densités en vrac, en effet la densité en vrac n'est pas une simple valeur similaire au poids spécifique, mais plutôt une valeur parmi plusieurs. Parmi ces valeurs il y a la densité moyenne qui est simplement la moyenne de la densité lâche et de la densité tassée, ou encore la densité dynamique ("Working Bulk Density") qui est :

$$\rho_w = (\rho_P - \rho_A) \cdot A_t + \rho_A = \frac{(\rho_P - \rho_A)^2}{\rho_P} + \rho_A \quad (1.1)$$

où ρ_w , ρ_A et ρ_P sont respectivement la densité dynamique, la densité lâche et la densité tassée; A_t est l'aptitude au tassement.

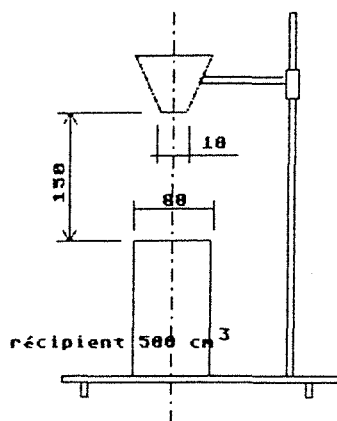


Figure I6 : Détermination de la masse volumique en vrac d'après la F.E.M.

IV Le cisaillement des matériaux en vrac

IV.1 La théorie classique de Mohr-Coulomb

La mécanique des sols classique utilise la condition de rupture de Mohr-Coulomb qui dit que la contrainte tangentielle τ d'un matériau dépend linéairement de la contrainte normale σ perpendiculaire à la surface de rupture.

$$\tau = C + \sigma \cdot \operatorname{tg} \varphi \quad (1.2)$$

L'angle d'inclinaison φ de la droite est appelé angle de frottement interne (fig.I7). La distance "C" représente la contrainte tangentielle τ admissible pour $\sigma = 0$, elle est appelée cohésion. Chaque combinaison τ, σ sur la

droite d'équation $\tau = C + \sigma \cdot \operatorname{tg} \varphi$ {fig.17} traduit la rupture du matériau, c'est à dire l'écoulement de celui-ci. Les états de contrainte en-dessous de cette droite de rupture sont stables, les combinaisons τ, σ au-dessus de celle-ci sont impossibles. Un état de contrainte à l'intérieur d'un massif semi-infini est entièrement décrit par les contraintes principales σ_1 et σ_3 . Le cercle de Mohr qui est une représentation géométrique des conditions d'équilibre, donne les contraintes dans le matériau sur une facette d'orientation quelconque, la surface le long de laquelle se produit l'écoulement c'est à dire la rupture du matériau est donc définie.

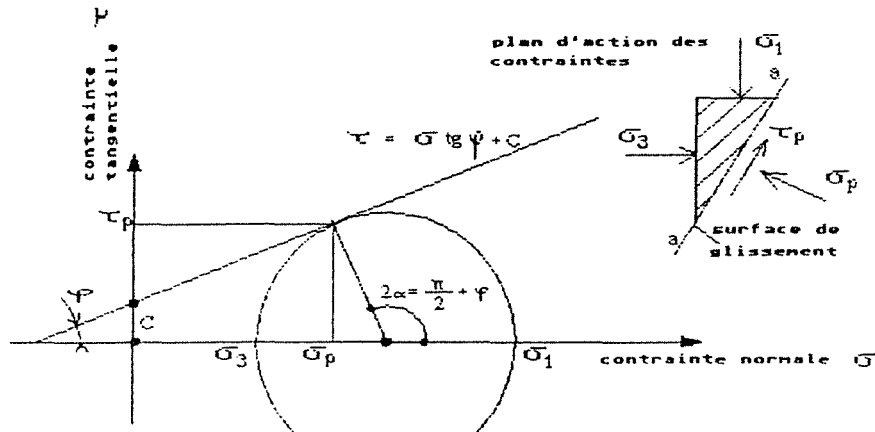


Figure 17 : Condition de rupture de MOHR-COULOMB

Les contraintes de rupture σ_p et τ_p agissent le long de la surface de rupture qui est inclinée d'un angle

$$\alpha = \pi/4 + \varphi/2 \quad (1.3)$$

par rapport au plan d'action de la contrainte principale majeure σ_1 .

La position de la surface de rupture est donc caractérisée par l'angle de frottement interne φ qui est une caractéristique intrinsèque du matériau.

IV.2 Les différents critères de rupture

Généralisation du critère de Mohr-Coulomb

On suppose que la densité du matériau est constante en tout point et que le matériau a un comportement isotrope. C'est à dire que les directions principales du tenseur des contraintes coïncident avec les directions principales du tenseur des vitesses de déformation.

IV.2.1 Critère d'écoulement, surface d'écoulement

Dans un cas simple de compression ou traction uniaxiale il y a écoule-

ment du matériau lorsque la contrainte dépasse une contrainte critique K (fig. I8). Par la suite on admettra que le matériau a un comportement plastique idéal, comme le représente la figure I8. C'est à dire que l'on a un

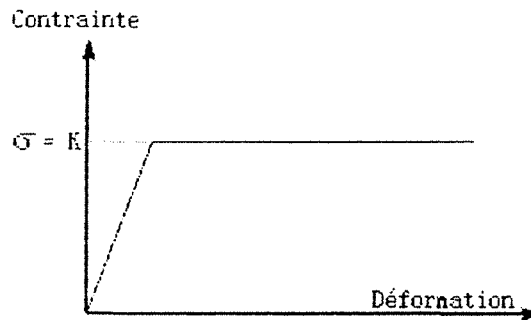


Figure I8 : critère d'écoulement

écoulement stationnaire pour $\sigma = K$. La condition d'écoulement dans ce cas est :

$$f(\sigma, K) = 0 \quad (1.4)$$

Dans le cas d'une sollicitation triaxiale le critère (I.4) se généralise en:

$$f(I_1, I_2, I_3, K) = 0 \quad (1.5)$$

ou I_1, I_2, I_3 sont les invariants du tenseur des contraintes.

D'après la théorie de la plasticité, les critères d'écoulement doivent porter sur le déviateur des contraintes s_{ij} et non sur la partie sphérique. Si J_1, J_2, J_3 sont les invariants du déviateur des contraintes, la relation (I.5) devient :

$$f(J_2, J_3, K) = 0 \quad (1.6)$$

car par définition J_1 est nul.

IV.2.2 Critère d'écoulement de Tresca

Tresca suppose que l'écoulement a lieu lorsque la contrainte de cisaillement maximale atteint la valeur critique $\tau_{\max} = K/2$. La différence entre la contrainte principale maximum $\sigma_{\max}$ et minimum $\sigma_{\min}$ est donc égale à la valeur K d'après Tresca. La valeur moyenne n'influence pas le début de l'écoulement.

$$\sigma_{\max} - \sigma_{\min} = K \quad (1.7)$$

Le critère énonce donc que la limite élastique est atteinte lorsque l'une des quantités $|\sigma_1 - \sigma_2|$, $|\sigma_2 - \sigma_3|$, $|\sigma_3 - \sigma_1|$ atteint la valeur K , si bien que l'on peut écrire le critère de Tresca sous la forme suivante :

$$F = 0 = [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 - K^2][(\sigma_2 - \sigma_3)^2 - K^2][(\sigma_3 - \sigma_1)^2 - K^2] \quad (1.8)$$

IV.2.3 Critère de Von Mises

Le critère de Von Mises utilise le deuxième invariant du tenseur des contraintes, qui est pris égal à une valeur critique fonction de la contrainte seuil K .

$$J_2 - \frac{1}{2} K^2 = 0 \quad (1.9)$$

IV.2.4 Représentation et comparaison des critères de Tresca et Von Mises

Le critère de Tresca est représenté par un cylindre à base hexagonale régulière d'axe Δ d'équation $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ dans l'espace des contraintes, alors que le critère de Von Mises se traduit par un cylindre de rayon $r = K$ de même axe Δ (fig.19).

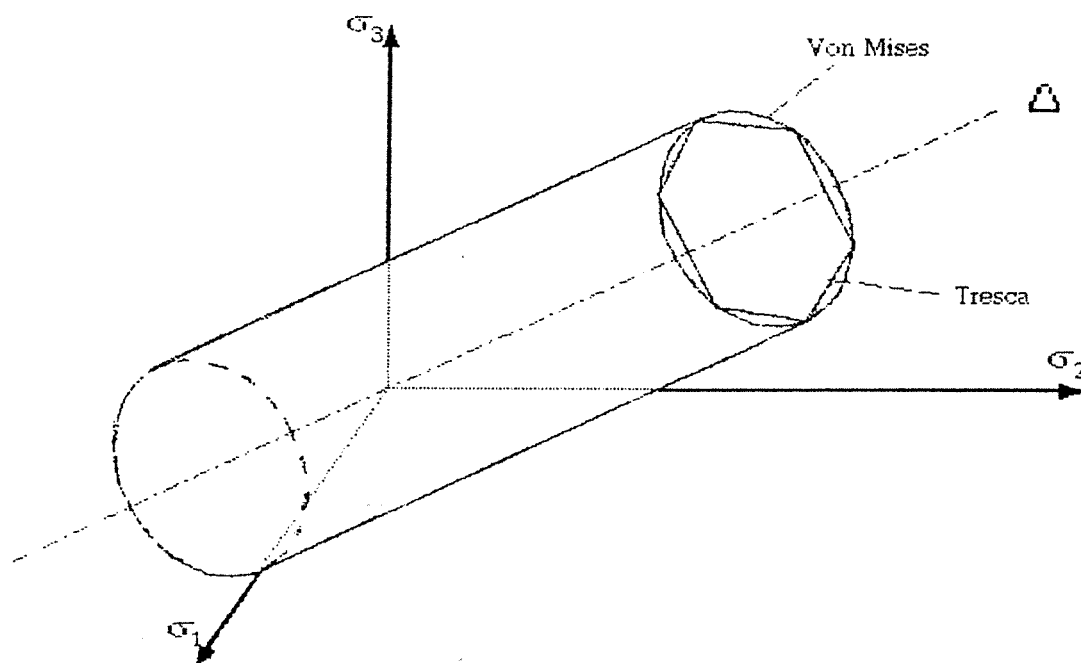


Figure 19 : surface d'écoulement d'après Tresca et Von Mises

Les états de contrainte à l'intérieur des surfaces d'écoulement conduisent à des déformations élastiques.

Les états de contrainte qui se situent sur les surfaces d'écoulement conduisent à des déformations plastiques irréversibles.

Les états de contrainte en dehors des surfaces d'écoulement ne sont pas possibles

IV.2.5 Le critère de Mohr-Coulomb

Les critères de Tresca et de Von Mises permettent de décrire l'écoulement plastique des métaux. Mais ne permettent pas de décrire le comportement des matériaux granulaires. Un critère d'écoulement pour les matériaux en vrac ne doit pas seulement tenir compte de la différence entre les contraintes principales mais aussi de la valeur de celles-ci.

En mécanique des sols on utilise souvent comme nous l'avons vu au § IV.1, le critère de Mohr-Coulomb donné par l'équation (I.2) qui est traduite d'une manière générale par la figure I10.

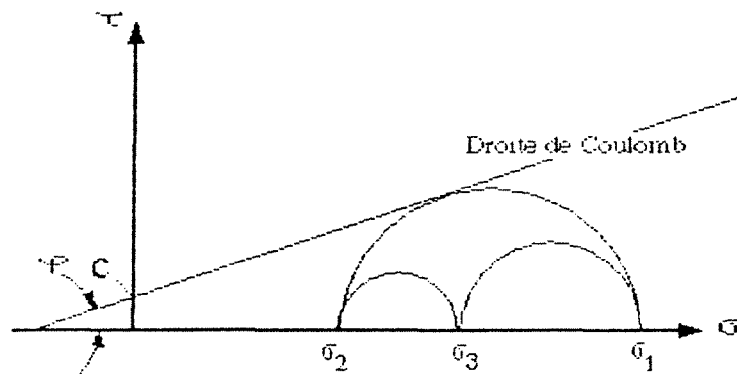


Figure I10 : La droite de Coulomb (droite intrinsèque)

Un état de contrainte tridimensionnel est schématisé par la figure I10 dans un diagramme τ - σ par trois cercles de Mohr. Si le plus grand cercle de Mohr tangente la droite de Coulomb alors il se produit des déformations plastiques. Comme pour le critère de Tresca celles-ci ne dépendent pas de la contrainte principale moyenne.

A partir de la droite définie par φ et C et du cercle de Mohr qu'elle tangente, on peut écrire la relation suivante :

$$\sigma_1 - \sigma_2 = (\sigma_1 + \sigma_2) \sin \varphi + 2C \cdot \cos \varphi \quad (I.10)$$

relation qui est égale au critère de Tresca pour $\varphi=0$ et $2C=K$. Dans le cas général d'un état de contrainte tridimensionnel le critère d'écoulement de Mohr prend la forme suivante :

$$\begin{aligned} & \left[[\sigma_1 - \sigma_2]^2 - [(\sigma_1 + \sigma_2) \sin \varphi + 2C \cdot \cos \varphi]^2 \right] \times \\ & \left[[\sigma_2 - \sigma_3]^2 - [(\sigma_2 + \sigma_3) \sin \varphi + 2C \cdot \cos \varphi]^2 \right] \times \\ & \left[[\sigma_3 - \sigma_1]^2 - [(\sigma_3 + \sigma_1) \sin \varphi + 2C \cdot \cos \varphi]^2 \right] = F = 0 \end{aligned} \quad (I.11)$$

L'équation (I.11) donne un volume hexagonal de côté égal de forme pyramidale dont le sommet se situe dans le domaine des contraintes principales négatives (fig.I11).

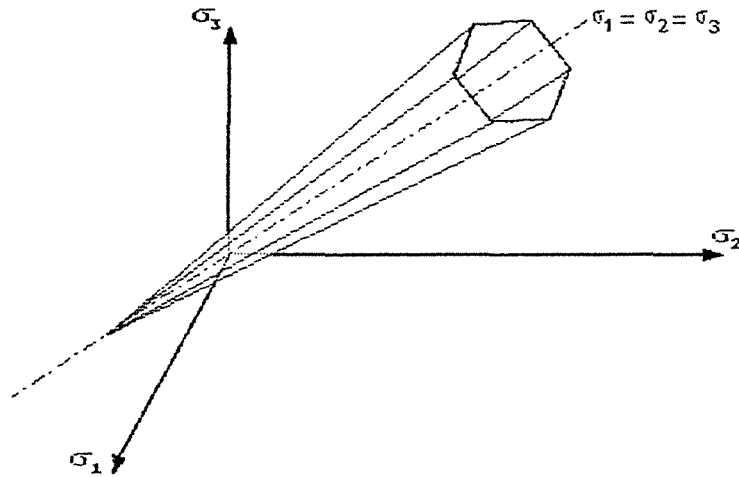


Figure I11 : Surface d'écoulement d'après Mohr-Coulomb

IV.3 Etudes de Roscoe à Cambridge : Diagramme d'état

Des études aussi bien théoriques que pratiques menées par ROSCOE ont montré un lien étroit entre l'état de contrainte et l'état de déformation d'un matériau avec sa densité en place. On en déduit que la théorie de Mohr-Coulomb (§IV.2) n'est valable que pour un matériau cisailé sans variation de volume (échantillon critique ment consolidé).

La suite de ce paragraphe s'attache à décrire d'une manière qualitative le comportement au cisaillement des matériaux granulaires. Le diagramme d'état tridimensionnel de ROSCOE [73] et [90] met en évidence le comportement contrainte-déformation d'un sol. La figure I12 représente une simplification valable pour les matériaux en vrac. Les axes représentent la contrainte normale σ perpendiculaire au plan de cisaillement, la contrainte de cisaillement dans le plan de cisaillement et l'indice des vides e , qui se détermine par le rapport du volume des vides V_v sur le volume des solides V_s (I.12).

$$e = \frac{V_v}{V_s} = \frac{V_T}{V_s} - 1 \quad (I.12)$$

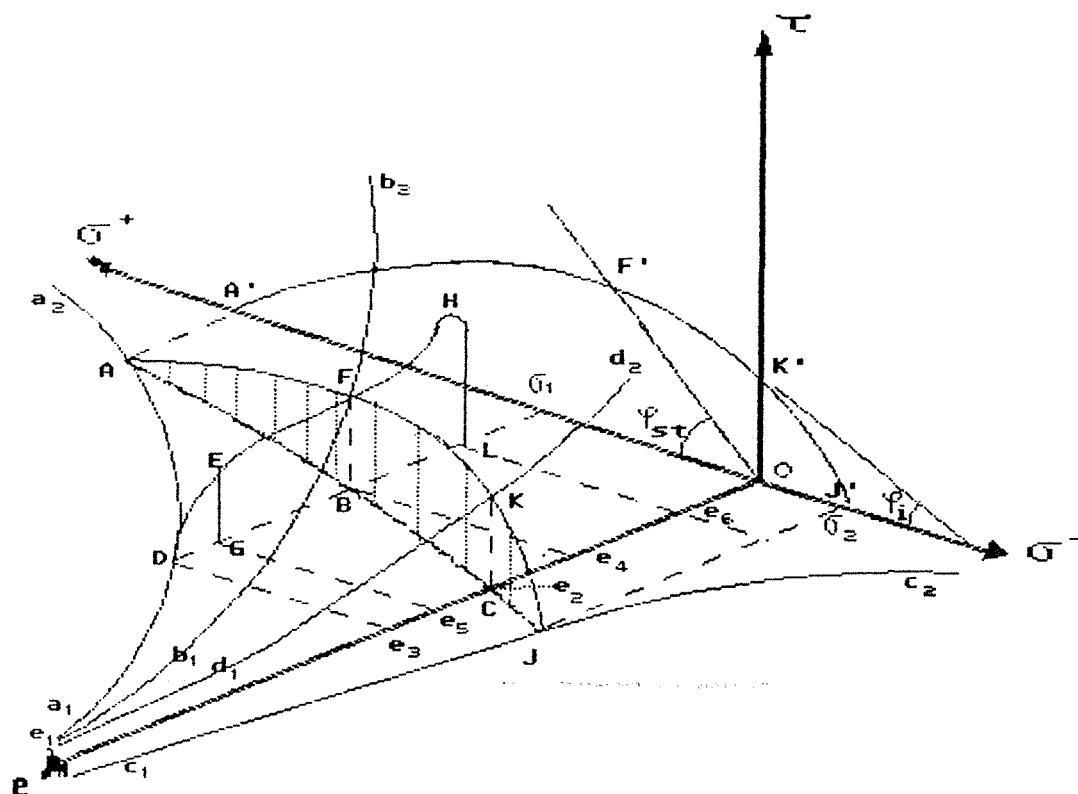
Préchargement de l'échantillon de matériau

Lorsqu'un matériau en vrac avec sa plus petite densité est chargé progressivement avec une charge σ , il parcourt dans le plan $\sigma - e$ la courbe de premier chargement a_1-a_2 . On a ainsi défini une frontière pour les états initiaux, les états au-delà de la courbe par rapport aux axes ne sont pas

possibles. Lorsqu'on charge le matériau jusqu'au point A de la figure I12 et que l'on décharge à nouveau, il se produit une déformation élastique sur la courbe de gonflement A-B-C avec une variation de la porosité permanente. Avec un rechargement de l'échantillon la déformation suit la courbe de gonflement jusqu'au point A pour ensuite continuer dans la direction de a_2 . Lorsque l'échantillon a été chargé une fois jusqu'en A, d'autres états de contrainte en-dehors de la courbe de gonflement ne sont plus possible, le matériau à un comportement quasi-élastique.

Cisaillement avec diminution de volume

Lorsqu'un matériau sur la courbe de premier chargement $a_1 - a_2$ (point D - indice des vides e_3 - contrainte normale σ_1) est soumis à un effort de cisaillement croissant τ , il apparait une déformation plastique dans le plan $\sigma = \sigma_1$ (ligne D-E-F), l'indice des vides se réduit alors pour atteindre la valeur e_4 . Cette diminution de volume est montrée dans le cas d'un cisaillement d'un tas de billes sur la figure I13a.



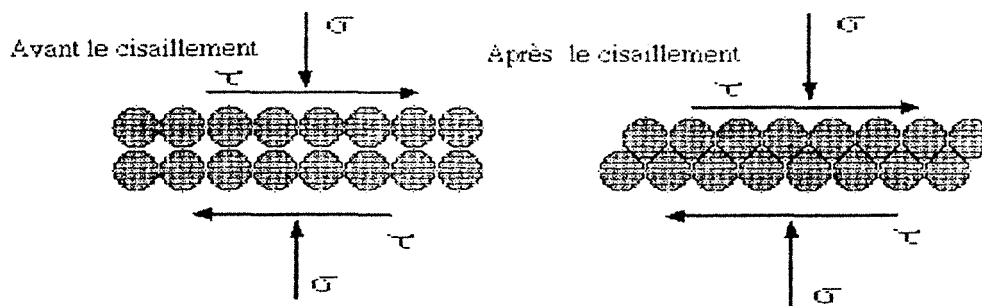
$b_1 - b_2$: lignes d'état critique (lieu d'écoulement stationnaire)
 A-F : lieu de consolidation
 F-K-J : lieu d'écoulement

Figure I12 : Diagramme d'état de Roscoe pour les matériaux en vrac

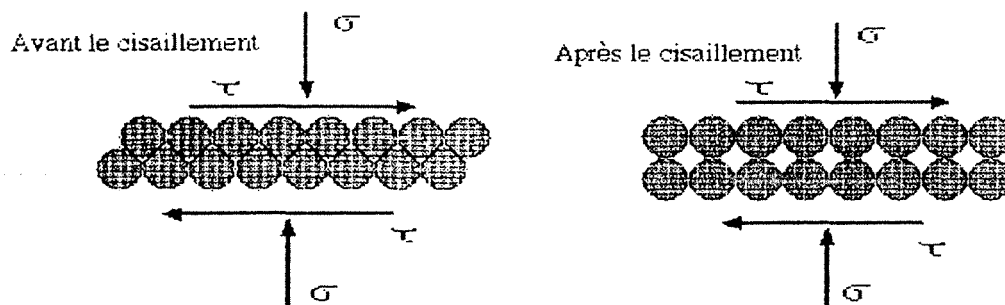
Au point F on a atteint un état d'écoulement stationnaire avec une déformation permanente où l'augmentation de τ et la modification de e ne sont plus possible. Les points de la courbe D-F représentent des états stables, car sans augmentation de la contrainte de cisaillement il n'apparait plus de déformation. La courbe enveloppe des états finaux F pour des essais

avec différentes contraintes normales σ constantes et différents états de départs sur la courbe de premier chargement a_1-a_2 donne la courbe b_1-b_2 , définie, d'après ROSCOE, comme la courbe d'état critique et d'après JENIKE, comme le lieu d'écoulement stationnaire.

La courbe de premier chargement a_1-a_2 , et la ligne d'état critique b_1-b_2 délimitent la surface de consolidation. En dessous de cette courbe l'échantillon de matériau à un comportement élastique, les états sur la surface sont stables, les états au-delà de la surface de consolidation ne sont pas possibles. Si l'on effectue un essai de cisaillement sous une contrainte normale σ_1 constante sur un échantillon avec un indice des vides de départ e_5 (point G), alors la contrainte tangentielle τ croît linéairement avec la déformation jusqu'à ce que l'on atteigne le point E sur la surface de consolidation. A partir de ce moment là, apparaît un tassement de l'échantillon si on continue à augmenter τ jusqu'à ce qu'on arrive au point F de l'écoulement stationnaire. Les échantillons qui se consolident pour arriver à l'écoulement stationnaire, sont des échantillons sous-consolidés et ils correspondent à la courbe (a) du diagramme contrainte tangentielle - chemin de cisaillement de la figure I14 .



a) Diminution de volume avec une faible densité (milieu lâche)



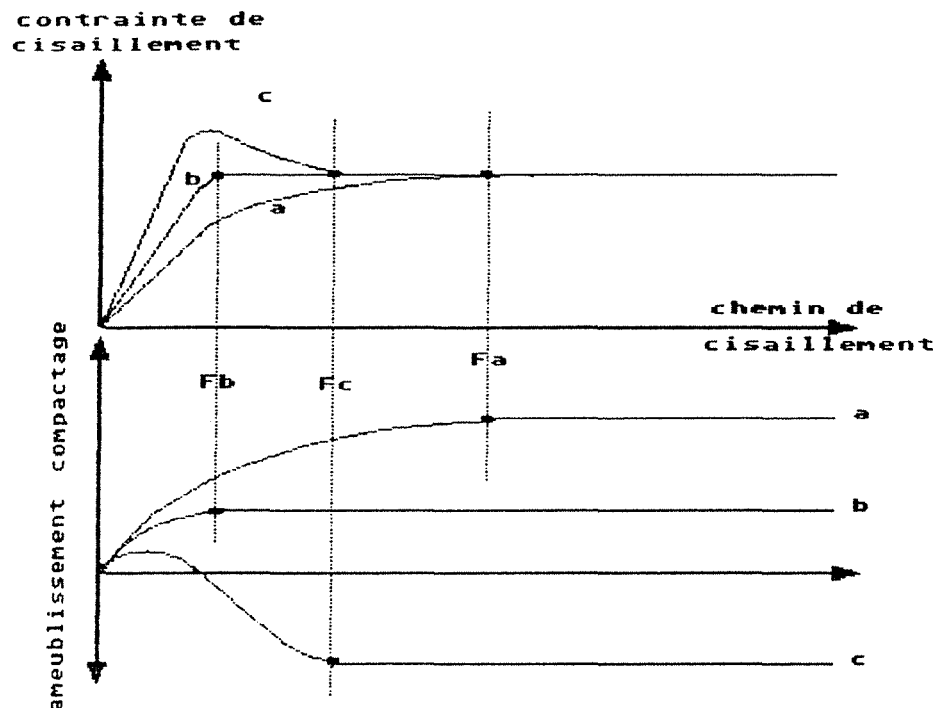
b) augmentation du volume avec une grande densité (milieu dense)

Figure I13 : Variation de volume lors d'un cisaillement

Cisaillement sans variation de volume

Lorsque l'état de contrainte d'un matériau se situe sur la projection de la ligne d'état critique dans le plan $\tau = 0$ (point B), alors avec l'apparition de la contrainte de cisaillement on atteint le lieu d'écoulement sans variation

de l'indice des vides e . L'échantillon est critiquelement consolidé et ne subit pas de variation de volume avant et pendant l'écoulement (courbe (b) - fig.I14).



courbe (a) : échantillon sous-consolidé
 courbe (b) : " critiquelement consolidé
 courbe (c) : " sur-consolidé

Figure I14 : Variation de la contrainte de cisaillement et du volume avec différentes densités et une contrainte normale constante

Cisaillement avec augmentation de volume

Lorsque l'on commence un essai de cisaillement avec une contrainte normale σ_1 et avec l'indice des vides e_0 , point L {fig.I12}, il apparaît une déformation élastique jusqu'à ce qu'on atteigne la surface d'écoulement au point H. Avec un essai de cisaillement classique, il y a rupture du matériau en H. Si par contre, on peut faire correspondre la contrainte de cisaillement aux déformations que l'on impose, alors l'essai pourra se poursuivre. Avec un effort τ décroissant et un indice des vides augmentant, le cisaillement se poursuit le long de la surface d'écoulement jusqu'à l'état stationnaire au point F. L'échantillon surconsolidé subit sur la surface d'écoulement une augmentation de volume mise en évidence par la figure I13b, son chemin de cisaillement correspond à la courbe (c) de la figure I14. Les matériaux ont un comportement élastique sous la surface d'écoulement, les états de contrainte sur cette surface d'écoulement sont stables, mais provoquent des déformations plastiques avec une variation de la contrainte de cisaillement, les états au-dessus de cette surface sont impossibles.

Relation entre la résistance à la traction et l'indice des vides

La courbe c_1-c_2 dans le plan $\sigma - e$ donne la relation entre la résistance à la traction d'un matériau cohésif et l'indice des vides. L'intersection de la surface d'écoulement délimitée par les courbes b_1-b_2 et c_1-c_2 avec le plan $\sigma = 0$ donne la courbe d_1-d_2 . Cette courbe relie la cohésion à l'indice des vides, elle est confondue avec l'axe des indices des vides lorsque le matériau n'est pas cohésif.

Lieux de consolidation, lieux d'écoulement

La projection verticale vers le haut de la courbe de gonflement A-B-C-J coupe la surface de consolidation le long de la ligne A-F (lieu de consolidation) et la surface d'écoulement le long de la ligne F-K-J (lieu d'écoulement). La surface hachurée de la figure I12 est définie comme étant un "mur élastique". Un matériau compacté jusqu'à la ligne de gonflement, ne peut plus qu'admettre des états de contrainte à l'intérieur du mur élastique.

Lorsqu'on atteint le lieu de consolidation AF, il se produit sous une augmentation de la contrainte de cisaillement une déformation plastique avec une diminution de volume, et lorsqu'on atteint le lieu d'écoulement FKJ apparaît avec une augmentation de volume et une contrainte tangentielle décroissante un écoulement plastique. Par ailleurs un écoulement stationnaire ($\sigma, \tau, \varepsilon = \text{cste}$) sans variation de volume se met en place si la ligne d'état critique b_1-b_2 est atteinte.

La projection horizontale de la ligne d'état critique b_1-b_2 dans le plan $\tau-\sigma$ donne la droite O-F'

$$\tau = \sigma \cdot \text{tg}(\varphi_{st}) \quad (I.13)$$

L'égalité (I.13) n'est valable que pour l'état critique où règne l'écoulement stationnaire sans variation de volume. Il existe ici une analogie avec le frottement solide des grains entre eux (équation (I.2) avec $C=0$). L'angle φ_{st} de l'écoulement stationnaire peut être défini comme angle de frottement interne à l'état critique. Il est indépendant de l'indice des vides e et de la contrainte normale σ .

La projection des courbes de consolidation et d'écoulement dans le plan $\tau-\sigma$ donne les courbes A'-F' et F'-K'-J'. Selon l'intensité de la contrainte maximale σ , donc selon la position du point A {fig.I12} sur la courbe du premier chargement, le mur élastique coupe d'autres courbes limites des lieux de consolidation et d'écoulement. Leur projection dans le plan $\sigma-e$ donne les lieux de consolidation et d'écoulement qui dépendent de la contrainte normale et de l'indice des vides. Les points finaux des lieux d'écoulement se trouvent sur la ligne d'état critique.

L'angle de frottement au début de l'écoulement φ_i est l'angle d'inclinaison des différents lieux d'écoulement, il dépend de la contrainte normale et de l'indice des vides. Il décroît généralement avec une contrainte normale croissante et augmente avec la densité en place. La figure I15 montre les lieux d'écoulement d'un matériau cohésif, où tous les échantillons d'un

même lieu d'écoulement ont la même densité de départ, c'est à dire qu'ils ont le même indice des vides au début du cisaillement.

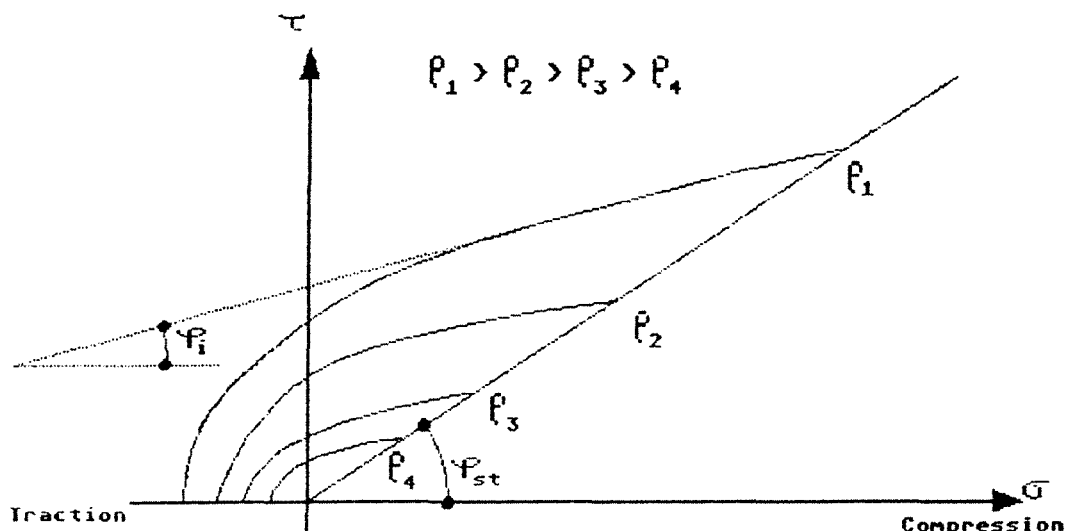


Figure 115 : Lieux d'écoulement pour des matériaux cohésifs

IV.4 Position de la surface de glissement

a) Hypothèse de Mohr-Coulomb

Cette Hypothèse définit la position du plan de glissement où à lieu l'écoulement à l'aide de l'angle de frottement interne. Le plan de rupture est orienté d'un angle α (I.3) par rapport au plan d'action de σ_1 {fig.I7}. Sur la surface de rupture agissent les contraintes σ_p et τ_p , cette hypothèse est confirmée par des essais sur des sols très cohésifs.

b) Mécanisme de frottement à l'intérieur d'un milieu granulaire

Les matériaux granulaires n'ont pas de surface de glissement très marquée lorsque celle-ci n'est pas imposée. Il se développe progressivement des zones d'ameublissement et des zones d'écoulement. D'après HANSEN cité dans [73], la position du plan de rupture ne doit pas forcément être confondue avec le plan d'action des contraintes de rupture, mais la surface est définie de manière à ce qu'il n'y ait pas de déformation dans celle-ci.

En effet le frottement se manifeste de deux manières différentes :

- le frottement solide (fig.I16a) que l'on peut schématiser par deux blocs qui se déplacent l'un par rapport à l'autre. La surface sur laquelle s'exerce le frottement est clairement définie par la séparation des blocs rigides.

- l'*écoulement plastique* (fig.I16b) qui provoque une déformation des milieux continus et que l'on schématise par la transformation de la géométrie du milieu : un carré se transforme en losange.

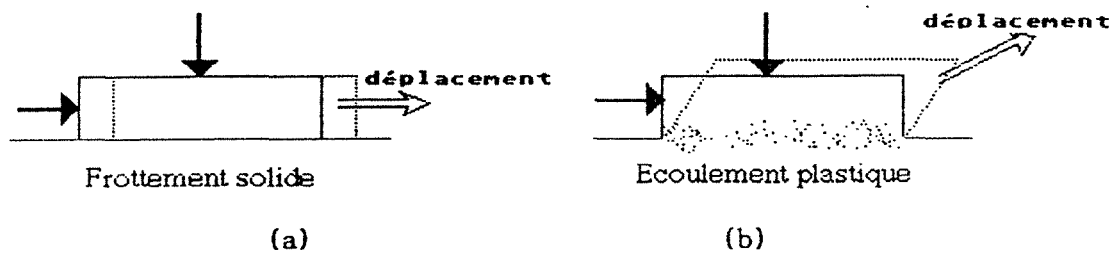


Figure I16 : Déplacement dû au cisaillement

La première interprétation du frottement caractérise le frottement solide, elle donne une image de l'angle de frottement interne d'un matériau, en faisant une analogie avec le coefficient de frottement entre deux solides. Pourtant l'analyse d'un essai de cisaillement montre que les matériaux en vrac ne se comportent pas comme deux blocs solides indéformables, mais comme un bloc unique qui se déforme du fait du déplacement des grains entre eux. Lors d'un tel cisaillement apparaissent des variations de volume qui sont caractéristiques des matériaux en vrac.

c) Position de la surface de glissement à l'intérieur d'un milieu granulaire

Si on considère que le matériau est isotrope et qu'il réponde aux conditions de normalité, au sens de la coaxialité entre les directions principales des contraintes et des vitesses de déformation, alors le cercle de Mohr des vitesses de déformation donne une représentation géométrique des états de déformation dans un plan quelconque du matériau. La contrainte principale majeure du cercle des contraintes correspond à la plus grande vitesse de déformation normale $\dot{\epsilon}_1$ et la contrainte de cisaillement maximum τ à la plus grande vitesse angulaire $\dot{\gamma}/2$.

Le plan a-a du matériau est incliné d'un angle δ par rapport au plan de la contrainte principale (fig.I17).

Le point A sur le cercle des contraintes donne la position du plan sur lequel la contrainte σ_A est normale, et sur le cercle des déformations il donne le plan normal à la vitesse de déformation $\dot{\epsilon}_A$. De la même manière perpendiculairement au plan défini par le point B il n'y a pas de déformation. Ce plan sans déformation est donc orienté d'un angle π par rapport au point B dans le cercle des vitesses de déformation, il est représenté par le point V. Le plan sans déformation, qui d'après HANSEN [73] est un plan de glissement, est orienté par rapport au plan de la contrainte principale majeure de

$$\beta = \frac{1}{2} (\pi/2 + \nu) \quad (I.14)$$

où l'angle de dilatation ν se laisse déterminer par :

$$\sin \nu = - \frac{\dot{\epsilon}_1 + \dot{\epsilon}_3}{\dot{\epsilon}_1 - \dot{\epsilon}_3} \quad (I.15)$$

Suivant l'état de déformation d'un échantillon lors d'un cisaillement, il y a :

- | | |
|--------------------------|--|
| - diminution de volume | si $\dot{\epsilon}_1 + \dot{\epsilon}_3 > 0$ |
| - volume constant | si $\dot{\epsilon}_1 + \dot{\epsilon}_3 = 0$ |
| - augmentation de volume | si $\dot{\epsilon}_1 + \dot{\epsilon}_3 < 0$ |

Le plan de glissement défini sur le cercle de Mohr des vitesses de déformation est orienté de l'angle défini par la relation (I.14) et est appelé, plan de glissement cinématique. Alors que le plan de rupture défini par le cercle de Mohr des contraintes est orienté de l'angle α donné par la relation (I.3), il est défini comme étant un plan de glissement statique. Ces deux plans sont donc orientés l'un par rapport à l'autre d'un angle.

$$\zeta = \frac{\varphi}{2} - \frac{\nu}{2} \quad (I.16)$$

Lorsque les deux plans de glissement : statique et cinématique, sont confondus, alors ζ est nul. Cela signifie que la variation volumique du matériau est nul lors du cisaillement, le matériau est donc critiquement consolidé. Cité par SCHWEDES dans [90] CUTRESS et PULVER confirment à l'aide de radiographies, l'existence de ces deux plans de glissement et la relation (I.16).

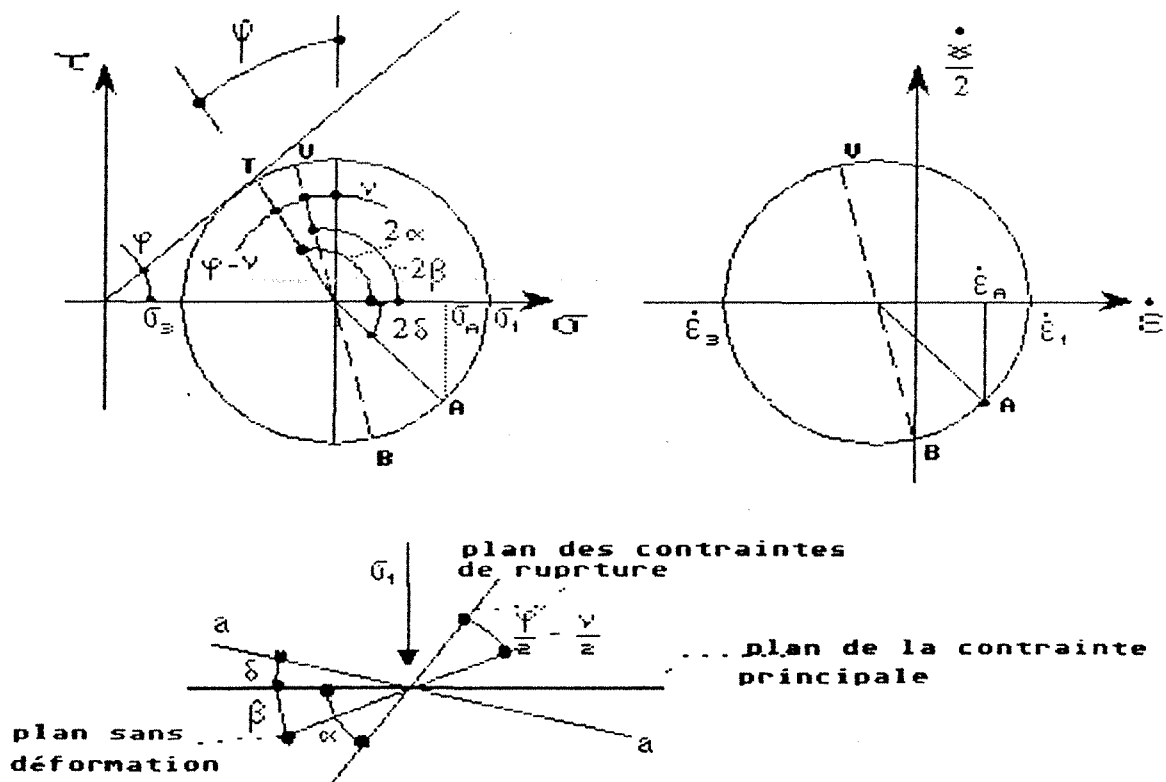


Figure I17 : Détermination des surfaces de rupture à l'aide de l'hypothèse de la coaxialité

V. Caractérisation de l'aptitude à l'écoulement des matériaux en vrac à l'intérieur d'un silo **Utilisation des lieux d'écoulement.**

V.1 Rappel des différents types d'écoulement à l'intérieur d'un silo.

Le groupe de travail FIP/ISO a récemment défini de façon claire et précise les différents mécanismes d'écoulement à l'intérieur d'un silo, mécanismes qui sont divisés en deux groupes, l'écoulement en masse et l'écoulement en cheminée. Ce dernier est encore divisé en sous-groupes.

- *Écoulement en masse* : tout le matériau dans le silo est en mouvement lors de l'extraction (fig.I18). La surface libre du matériau descend régulièrement. Ce mécanisme permet une exploitation optimale du silo.

- *Écoulement en cheminée* : l'écoulement se fait dans une zone confinée au dessus de l'orifice de vidange, alors qu'une partie du matériau reste immobile le long des parois. La zone d'écoulement peut rejoindre les parois à un certain niveau dans le silo, ou remonter jusqu'à la surface libre (fig.I18). Dans se dernier cas nous avons à faire à un écoulement en noyau (Internal flow).

Ces deux grands mécanismes dépendent essentiellement des caractéristiques mécaniques des matériaux ensilés, de la géométrie du silo ainsi que de la rugosité des parois. JENIKE à travers les graphes de la figure I19 donne le type d'écoulement en fonction du frottement en paroi ($\mu = \tan \delta$), de l'angle de frottement effectif ϕ_e défini par la figure I21 et de l'inclinaison γ de la trémie avec l'horizontale.

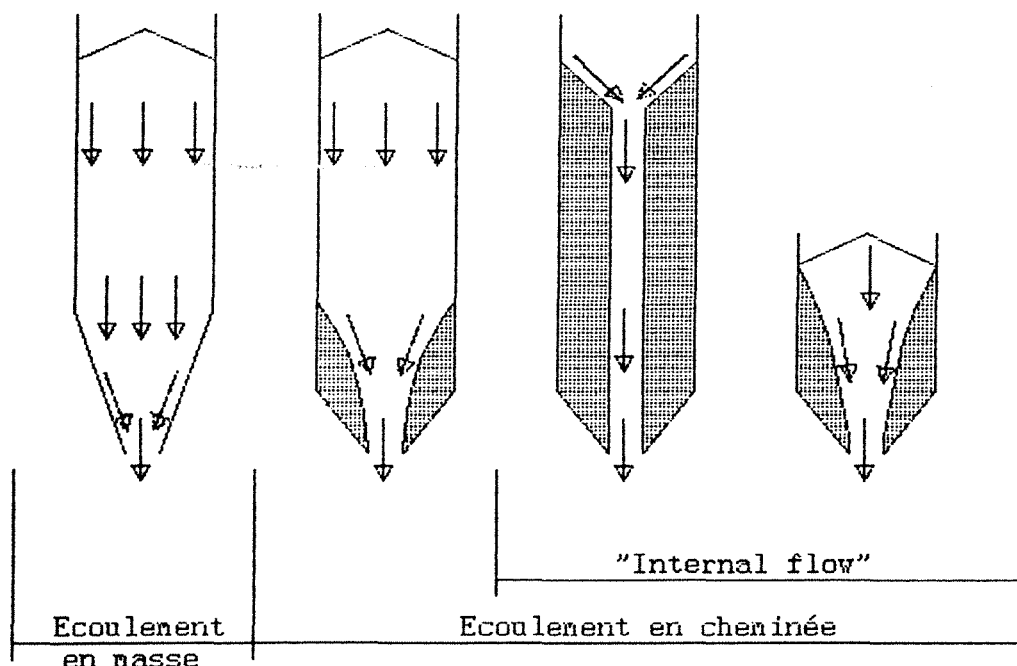


Figure I18 : les différents types d'écoulement à l'intérieur d'un silo

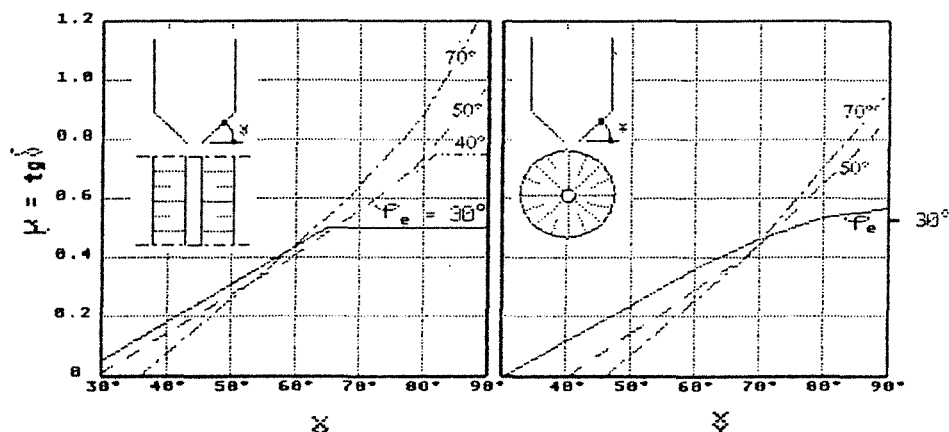


Figure I19 : Détermination du mode d'écoulement d'après JENIKE

V.2 Résistance à la compression f_c d'un matériau en vrac

Interprétation physique

La résistance à la compression f_c d'un matériau en vrac peut être expliquée à l'aide de la figure I20. Imaginons un cylindre rempli de matériau sans frottement contre les parois intérieures. On retire le cylindre après avoir tassé le matériau avec une contrainte de compression σ_1 qui est la contrainte principale majeure. L'échantillon ainsi obtenu est soumis à une pression croissante jusqu'à la rupture. La contrainte à la rupture est la résistance à la compression f_c du matériau tassé par la contrainte σ_1 .

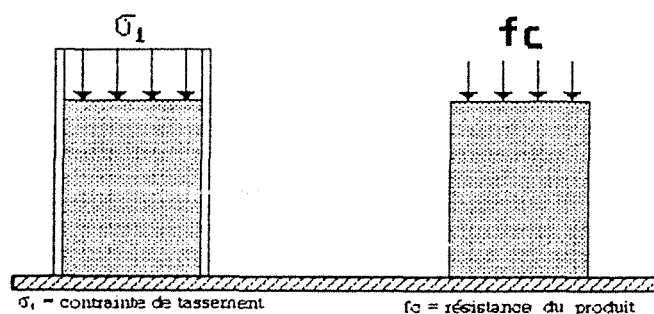


Figure I20 : expérience mentale pour expliquer f_c

Détermination de f_c

Etant donné que l'essai de la figure I20 n'est pas réalisable dans la pratique, on détermine la résistance à la compression f_c à partir des lieux d'écoulement que l'on a construit pour le matériau étudié. En effet à chaque masse volumique correspond un lieu d'écoulement, c'est à dire une contrainte de tassement σ_1 . f_c se détermine en traçant le cercle de Mohr tangent au lieu d'écoulement passant par l'origine (fig.I21).

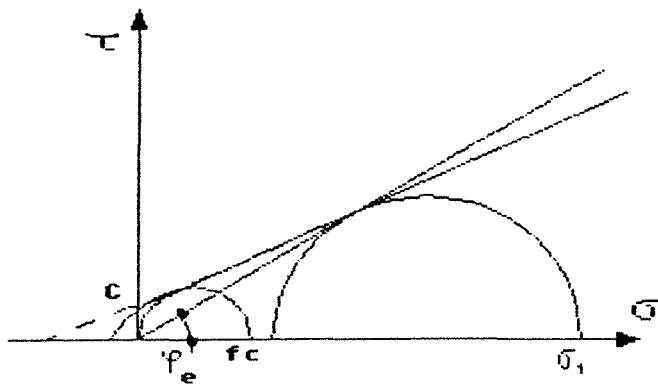


Figure I21 : Lieu d'écoulement

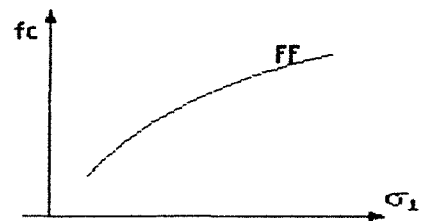


Figure I22 : fonction d'écoulement

Sur un plan qualitatif, la capacité d'écoulement d'un matériau peut être décrite comme suit :

- matériau s'écoulant librement : $\sigma_1/fc > 10$
- matériau s'écoulant facilement : $4 < \sigma_1/fc \leq 10$
- matériau cohésif s'écoulant difficilement : $2 < \sigma_1/fc \leq 4$
- matériau très cohésif ne s'écoulant pas : $\sigma_1/fc \leq 2$

V.3 Fonction d'écoulement

La fonction $fc(\sigma_1) = FF$ (fig.I22) est appelée fonction d'écoulement, elle caractérise le comportement du matériau à l'écoulement. La figure I23 représente des fonctions d'écoulement typiques de certains matériaux.

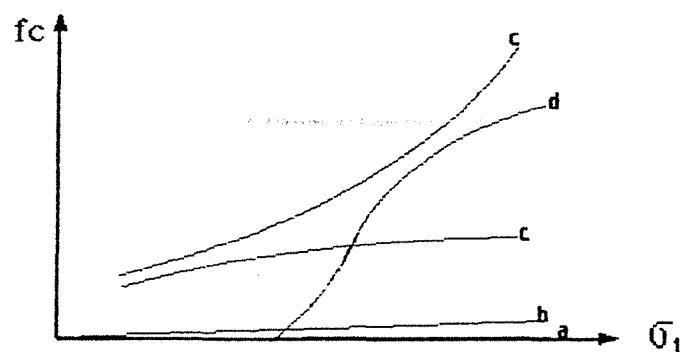


Figure I23 : Fonctions d'écoulement FF typiques

- le sable sec (courbe a) : de relativement grosse granulométrie n'a quasiment pas de résistance à la compression ($fc = 0$), sa fonction d'écoulement coïncide pratiquement avec l'axe σ . Ce sable s'écoule librement.

- le sable humide (courbe b) : n'a qu'une faible résistance fc , la fonction d'écoulement est relativement plate, ce sable humide est considéré

comme s'écoulant facilement.

- les produits pulvérulents (courbe c) : présentent des fonctions d'écoulement à pente plus forte car on peut les durcir fortement en les compactant. Ces matériaux font partie des produits cohésifs s'écoulant difficilement ou pas du tout.

- les matériaux en vrac fibreux (courbe d) : ont une faible résistance f_c si la pression est faible, ils s'écoulent alors facilement. Lorsque la pression est assez élevée pour permettre un enchevêtrement des particules fibreuses, la fonction d'écoulement s'élève brutalement et le matériau s'écoule difficilement.

D'autre part, les propriétés d'écoulement d'un matériau en vrac ne dépendent pas seulement de la sollicitation à la compression mais également :

- du taux d'humidité
- des conditions d'exploitation (durée de stockage, géométrie-dimensions du silo)
- des modifications physico-chimiques du produits durant le stockage.

V.4 Capacité d'écoulement à l'intérieur d'un silo

Le dimensionnement d'un silo en fonction des propriétés d'écoulement du matériau en vrac se fait généralement par la méthode de JENIKE, elle permet d'éviter la formation de voûte dans un silo [54]. A l'intérieur d'un silo chaque élément de produit subit une contrainte de compression principale majeure σ_1 . Cette compression tasse le produit et lui donne une résistance f_c . Une voûte ne peut pas se former tant que la résistance f_c sera inférieure à la contrainte d'appui σ_1 nécessaire pour qu'une voûte stable puisse se former (fig.I24).

En d'autres termes, une voûte stable peut se former si la résistance f_c du matériau ensilé est assez grande pour transmettre la contrainte d'appui σ_1 .

Les dimensions, la géométrie de l'orifice et de la trémie du silo jouent un rôle prépondérant pour que σ_1 soit toujours plus grande que f_c , et donc que l'écoulement régulier des matériaux soit possible.

V.4.1 La trémie

Le succès de la construction d'un silo dépend largement de la trémie si on stocke des matériaux s'écoulant difficilement. Une trémie force le matériau à converger et à s'écouler à travers l'orifice. La facilité avec laquelle le matériau s'écoule vers l'orifice dépend presque entièrement de la forme de la trémie et de la rugosité des parois. Des matériaux cohésifs avec un écoulement non libre requièrent une trémie excentrique (fig.I25).

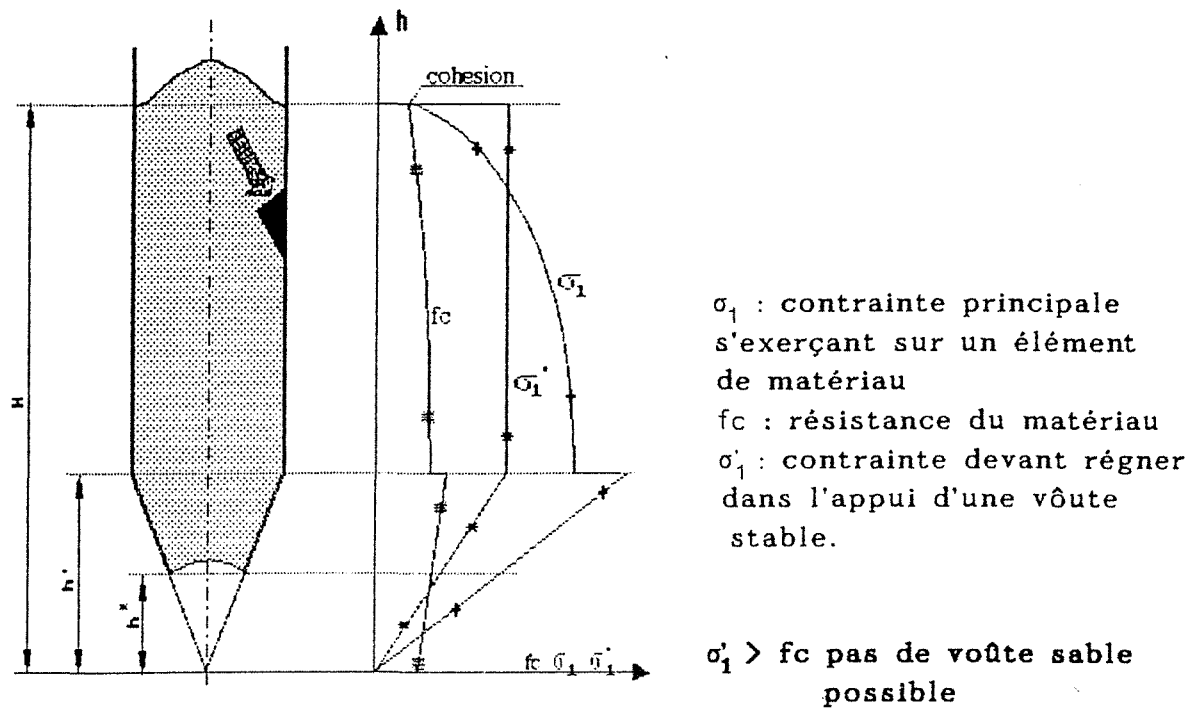


Figure I24 : condition pour avoir un écoulement optimal à l'intérieur d'un silo d'après Jenike

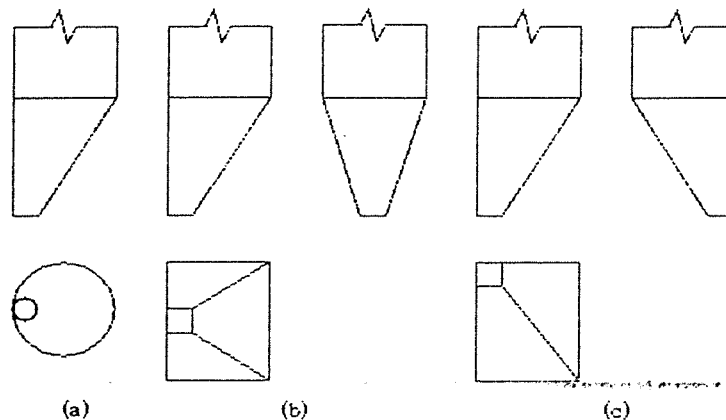


Figure I25 : Trémies excentriques

En effet dans ce cas des voûtes stables ne peuvent se former car le matériau glisse le long de la paroi verticale.

V.4.2 L'orifice de vidange

La fonction d'un orifice de vidange est d'assurer un débit constant, et donc de permettre un écoulement permanent et régulier du matériau.

Il est important de différencier la surface réelle de l'orifice de la surface effective à travers laquelle s'écoule le matériau. En effet on constate généralement que la surface effective n'est qu'une partie de la surface réelle de l'orifice de vidange. Les études que nous avons mené en laboratoire confirment cela.

Pour pouvoir assurer un débit régulier l'écoulement ne doit pas être interrompu par la formation de voûtes au-dessus de l'orifice, celui-ci doit donc avoir des dimensions suffisamment grandes. La figure I27 représente une voûte à l'intérieur d'une trémie, en supposant que les limites supérieures et inférieures soient des surfaces libres. Cette hypothèse implique que la contrainte principale mineure σ_1 à l'intérieur de la voûte (normale aux surfaces libres) est nulle, alors que la contrainte principale majeure σ_3 correspondante (tangente à la voûte) est différente de zéro. Les contraintes de cisaillement maximales pour cet état de contrainte agissent sur des plans inclinés à 45 degrés par rapport au plan d'action de σ_3 et sont égales à la moitié de σ_3 (fig.I26).

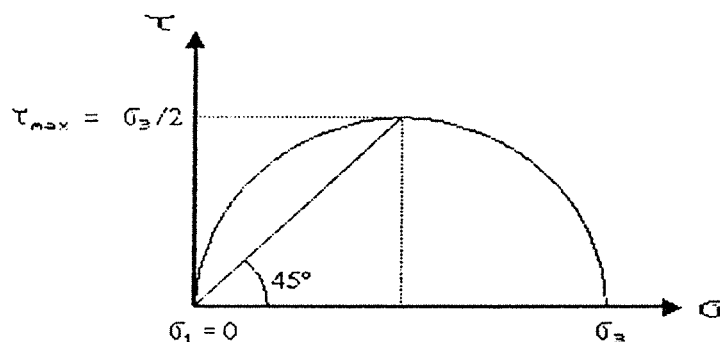


Figure I26 : hypothèse de l'état de contrainte à l'intérieur d'une voûte

La portée maximale d'une voûte est atteinte sous ce système de contrainte si le cisaillement dans la section verticale au point de poussée (appui) a atteint sa valeur maximale. Cette condition est réalisée si la contrainte principale majeure au point de poussée est égale à la résistance à la compression du matériau f_c , et agit à 45° par rapport à l'horizontale (fig.I27). Le cisaillement sur la section verticale correspondante est donc de $f_c/2$. L'équilibre des efforts verticaux pour une voûte d'épaisseur unitaire se formant au-dessus d'un orifice rectangulaire de largeur b et de longueur l donne :

$$\frac{2 \cdot l \cdot f_c}{2} = \rho \cdot b \cdot l \quad (I.17)$$

d'où la largeur de l'orifice $b = \frac{f_c}{\rho} \quad (I.18)$

De la même manière l'équation d'équilibre des efforts verticaux pour un dôme se formant au-dessus d'un orifice circulaire de diamètre d est :

$$\frac{\pi \cdot d \cdot f_c}{2} = \frac{\rho \cdot \pi \cdot d^2}{4} \quad (I.19)$$

d'où le diamètre de l'orifice
$$d = \frac{2 \cdot fc}{\rho} \quad (I.20)$$

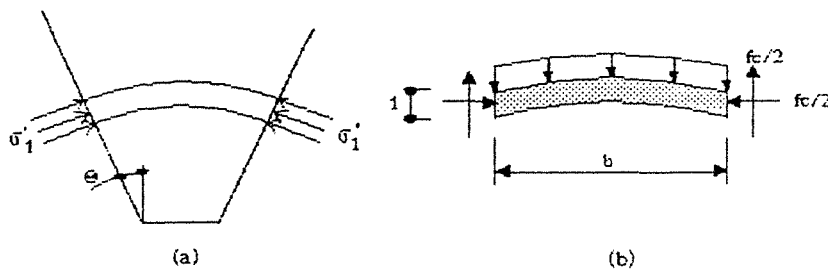


Figure I27 : Formation d'une voûte dans une trémie

En accord avec la théorie de JENIKE cité dans [25] le diamètre d'orifice nécessaire est également fonction de l'angle d'inclinaison de la trémie Θ (fig.I27a). Les équations (I.17), (I.18) et (I.19), (I.20) sont uniquement valables pour $\Theta = 0$. JENIKE et JOHANSON cités dans [25] proposent les dimensions suivantes :

orifice circulaire :
$$d \geq \frac{2.2}{\rho} fc \quad (I.21)$$

orifice rectangulaire :
$$b \geq \frac{1.3}{\rho} fc \quad (I.22)$$

V.4.3 Aptitude à l'écoulement à l'intérieur d'un silo

La coulabilité d'un matériau ensilé peut être caractérisée par sa fonction d'écoulement FF, dont la construction est expliquée au paragraphe V.3. La fonction d'écoulement permet de déterminer les conditions de stockage les plus défavorables. Elles sont ordinairement le plus haut taux d'humidité, la plus haute température et la plus longue durée de stockage. Certains matériaux ne montrent pas d'augmentation de résistance même après une semaine ou plus de consolidation, d'autres tel que le charbon, continuent à augmenter en résistance durant des années, à cause de réactions chimiques lentes.

a) le facteur d'écoulement ff

Les caractéristiques géométriques et physiques du silo et de sa trémie doivent éviter l'engorgement de cette dernière, cela requière que la contrainte exercée sur une voûte dû au poids du matériau exède toujours l'effort d'engorgement. Pour caractériser cela JENIKE a défini le facteur d'écoulement, égale au rapport de la contrainte principale majeure σ_1 sur la contrainte d'appui σ'_1 d'une voûte pour que celle-ci soit stable ($ff = \sigma_1/\sigma'_1$). Ce rapport qui est une constante est fonction de l'angle de frottement effectif φ_e , de l'angle de frottement en paroi δ , de l'inclinaison de la paroi

Θ et du type d'écoulement à l'intérieur de la trémie. Dans la littérature deux écoulements sont étudiés, l'écoulement plan entre deux parois planes convergentes et l'écoulement conique dans une trémie elle-même conique ou pyramidale (fig.I28). D'après JENIKE l'écoulement à travers un orifice rectangulaire dont la longueur l et au moins trois fois plus grande que la largeur b , peut être approché par un écoulement plan.

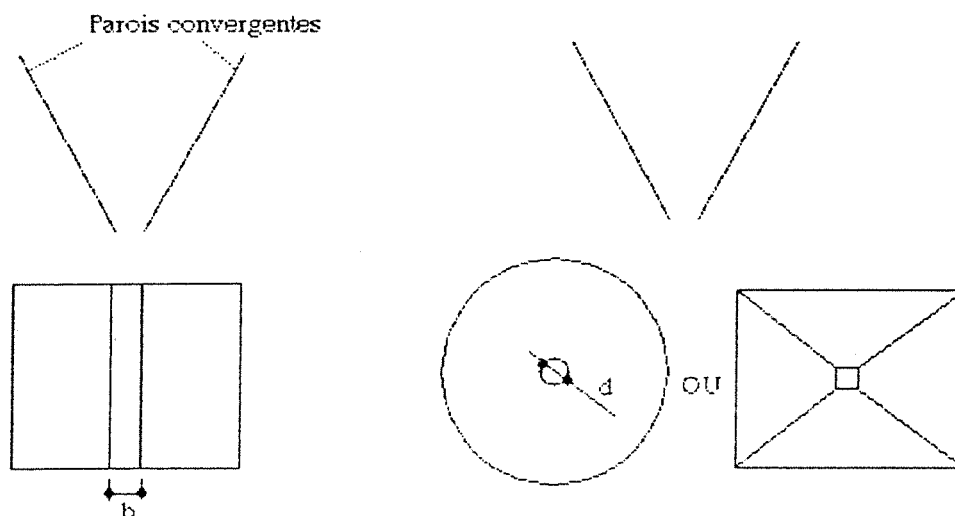


Figure I28 : Trémies à écoulement plan - à écoulement conique

JENIKE a en premier dans [37] donné des courbes pour déterminer le facteur d'écoulement d'un écoulement en masse dans une trémie (fig.I29b). Ces courbes couvrent un grand nombre de valeur de Θ et sont tracées pour un angle de frottement effectif φ_e donné. Colijn donne dans [15] des courbes pour trois valeurs de Θ différentes (10° , 20° , 30°) représentées par les figures I30, I31 et I32. WALKER pour sa part dans [99] donne les équations suivantes pour le calcul du facteur d'écoulement d'un écoulement conique :

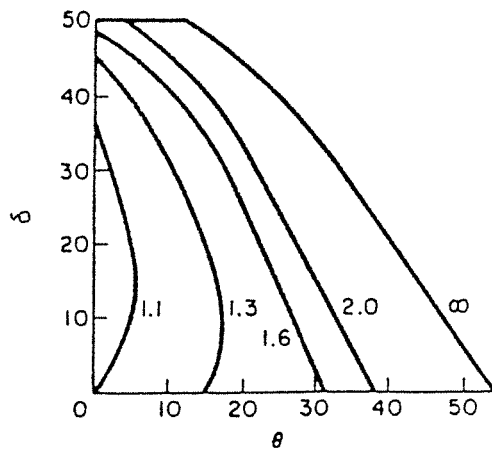
$$ff = \frac{1 + \sin \varphi_e}{\Delta} \quad \text{pour } \Theta + \delta \geq 45^\circ \quad (I.23)$$

$$ff = \frac{1 + \sin \varphi_e}{\Delta} \sin 2(\Theta + \delta) \quad \text{pour } \Theta + \delta \leq 45^\circ \quad (I.24)$$

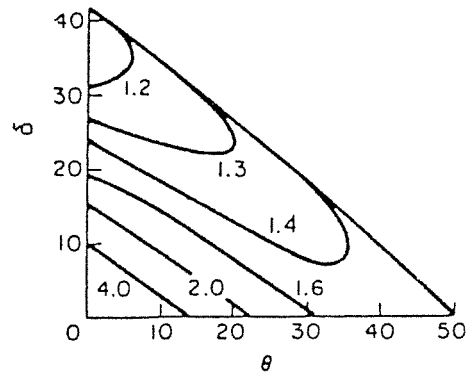
$$\text{où } \Delta = 2 \cdot \sin \varphi_e \sin 2(\Theta + \varepsilon) - \operatorname{tg} \Theta \left[1 - \sin \varphi_e \cos 2(\Theta + \varepsilon) \right]$$

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \left(\Phi' + \sin^{-1} \frac{\sin \delta}{\sin \varphi_e} \right)$$

Les facteurs d'écoulement obtenus par les équations (I.23)-(I.24) sont comparés avec ceux de JENIKE sur la figure I29.



(a) Walker



(b) Jenike

Figure 129 : Facteur d'écoulement pour $\varphi_e = 50^\circ$ et pour une trémie conique

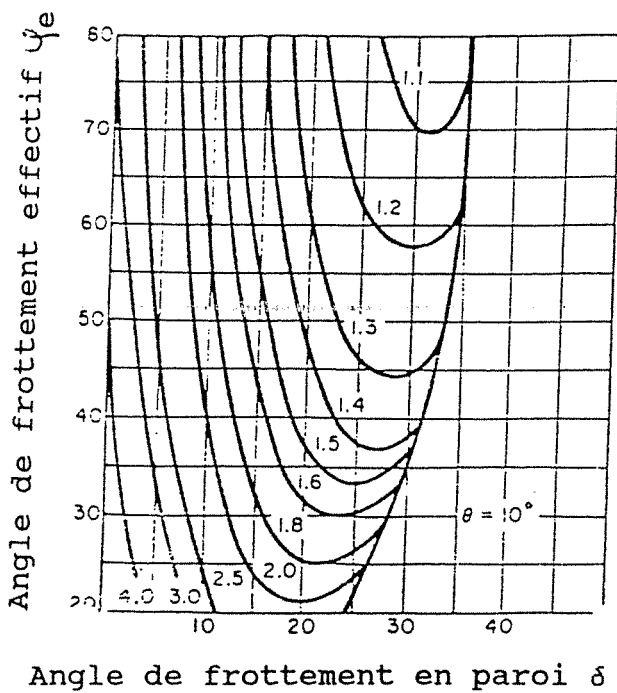


Figure 130 : Facteur d'écoulement pour une trémie conique avec un écoulement en masse, $\Theta=10^\circ$

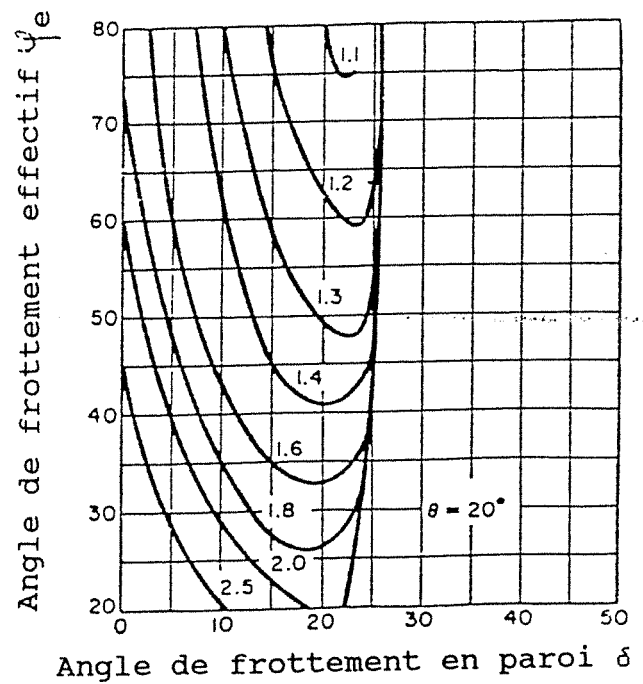


Figure 131 : Facteur d'écoulement pour une trémie conique avec un écoulement en masse, $\Theta=20^\circ$

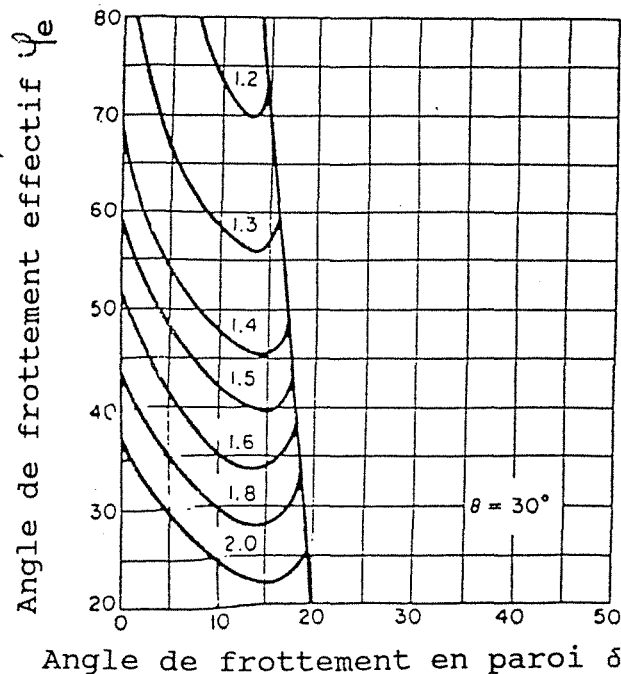


Figure 132 : Facteur d'écoulement pour une trémie conique avec un écoulement en masse, $\theta = 30^\circ$

Les équations de WALKER donnent le plus petit facteur d'écoulement pour les trémies les plus raides et les plus lisses; c'est à dire plus lisse et plus inclinées sont les parois et meilleurs sont les caractéristiques d'exploitation. Alors que les courbes de JENIKE montrent qu'il existe une inclinaison optimale de la trémie pour un angle de frottement donné, une paroi plus ou moins inclinée que l'optimum diminue la coulabilité. La différence entre ces deux types de courbe est due au fait que WALKER suppose que la rupture de la voûte se fait par glissement le long de la paroi si celle-ci est lisse et inclinée, alors que JENIKE admet que la rupture ait lieu directement dans le matériau.

b) Condition pour avoir un écoulement régulier du matériau

Comme nous l'avons vu le facteur d'écoulement est une constante, il peut donc être représenté par une droite de pente $1/ff$ dans un repère (O, σ_1, σ_1') . La fonction d'écoulement FF du matériau peut être tracée sur le même graphe en remplaçant en ordonnée σ_1' par la résistance à la compression f_c (fig.133).

De O vers A {fig.133a} la fonction d'écoulement FF est au-dessus du facteur d'écoulement, c'est à dire que la contrainte nécessaire pour casser une voûte au-dessus de l'orifice est supérieure à la contrainte agissant sur la voûte. Il peut donc y avoir formation d'une voûte stable. Au-delà du point A la contrainte agissant sur la voûte est supérieure à sa résistance, des éboulements et arrêt d'écoulement ne peuvent ainsi pas se produire. Le point A sur la figure 133a représente les conditions sous lesquelles la contrainte agissant sur la voûte est égale à la résistance de celle-ci, la contrainte σ_1'

correspondante est appelée la contrainte d'appui critique σ_{AC} qui est utilisée pour le calcul d'une dimension critique de l'orifice de vidange.

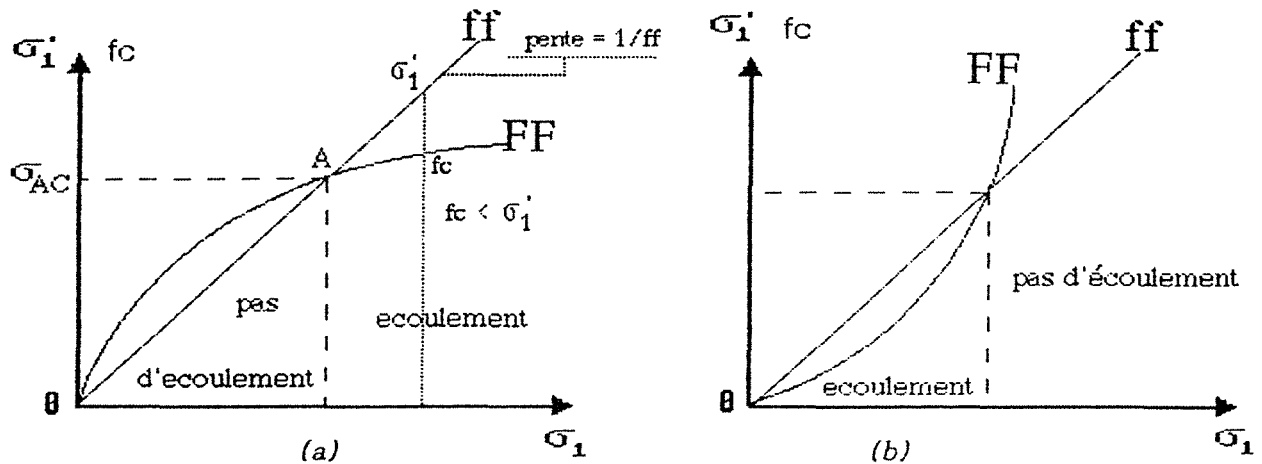


Figure 133 : Critère d'écoulement et de non-écoulement

Imaginons que l'on ait un matériau cohésif dans une trémie conique avec un orifice de vidange très petit, sur lequel se forme une voûte. La contrainte appliquée au-dessus de l'orifice est proportionnelle à la distance du sommet imaginaire du cône, et donc du diamètre de l'orifice de vidange. Si on augmente progressivement la taille de l'orifice, la contrainte augmente graduellement (on se déplace de O vers A sur la figure 133a). La dimension critique de l'orifice correspondante à la contrainte d'appui critique est obtenue à l'aide de l'équation (I.25)

$$B = \frac{H(\theta) \cdot \sigma_{AC}}{\gamma} \quad (I.25)$$

B : est le diamètre de l'orifice de sortie circulaire (écoulement conique), ou la largeur de la rainure (écoulement plan)

γ : poids spécifique du matériau en vrac

$H(\theta)$: fonction de l'inclinaison des parois (θ)

- trémie conique $H(\theta) = 2 + \theta/70$

- trémie à parois convergentes $H(\theta) = 1 + \theta/100$

VI Concept de l'état caractéristique d'un matériau Granulaire

Ce concept a été développé au Laboratoire de Mécanique du Solide de l'école Polytechnique par HABIB et LUONG .

VI.1 Constatations expérimentales

Au cours d'essais de cisaillement LUONG M.P. a pu observer dans [61] une déformation volumique qui est d'abord une contraction qui se ralentie et puis qui s'annule dans le cas d'un matériau lâche, ou qui s'inverse avec un matériau dense pour permettre un désenchevêtrement des grains avant les grands déplacements relatifs {fig.I35}. L'indice des vides correspondant au taux de variation de volume nul, n'a pas de propriété particulière, il dépend de la porosité initiale et de la contrainte de confinement σ_3 {fig.I35}. Le niveau de contrainte σ_1/σ_3 correspondant à cette inversion de sens des déformations volumiques est stable {fig.I35}.

Mécanisme de déformation

Un matériau granulaire sans cohésion peut être assimilé d'après [60] à un assemblage de grains en contact neutre les uns avec les autres : le tout formant une structure globale créée à partir de la superposition des éléments de base. Le comportement rhéologique du matériau s'explique par cette propriété constitutive et de ce fait à deux niveaux différents :

- au niveau du grain élémentaire où la liaison grain - grain dépend essentiellement de la déformabilité du matériau, de sa texture superficielle, de sa susceptibilité au taux d'humidité, et de sa forme.
- au niveau de la structure formée par l'ensemble des grains pouvant se grouper en agrégats ou parcelles plus ou moins orientés.

Ces deux niveaux, microscopique et macroscopique, ne sont pas totalement indépendants d'après [60] : leurs propriétés fondamentales doivent être exprimées au niveau le plus restreint, c'est à dire en fonction des propriétés d'un grain élémentaire en contact avec ses voisins. Une telle approche repose sur la modélisation des contacts intergranulaires, elle a donné lieu à de nombreux travaux fondamentaux menés en premier par MINDLIN en 1949 puis par CAMBOU (1978) et CUNDALL- STRACK (1979). La forme allongée des particules favorise des mécanismes de flexion des grains qui se traduisent au niveau globale par une forte compressibilité quasi réversible {fig.I34}.

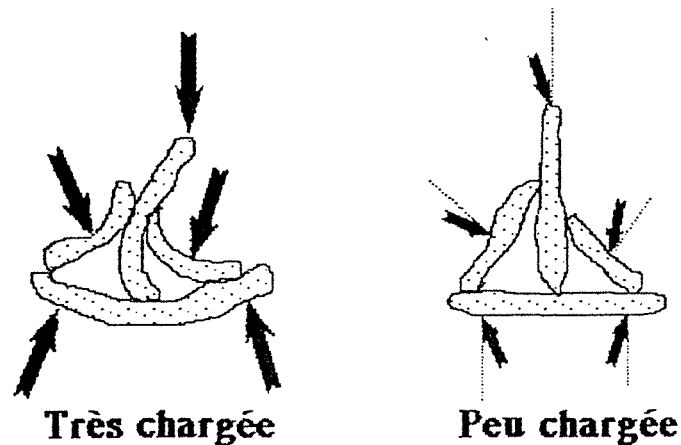


Figure I34 : Mécanismes de déformation réversible des particules allongées entraînant une diminution de l'angle d'incidence des forces de contact

Les déformations irréversibles globales proviennent essentiellement des modifications de structure du matériau. On peut envisager les principaux mécanismes de déformation suivant :

- un serrage des grains les uns sur les autres
- un déplacement relatif des grains les uns par rapport aux autres, associé généralement à une rotation de ceux-ci.
- une déformation des particules
- une modification physico-chimique du produit par variation d'ambiance hygrométrique ou thermique

VI.2 Etat caractéristique d'un matériau granulaire

Les essais triaxiaux conventionnels en compression ($\sigma_1 > \sigma_2 = \sigma_3$) comme en extension ($\sigma_1 < \sigma_2 = \sigma_3$) permettent de définir par le niveau de contrainte correspondant au passage de la déformation volumique contractante à la déformation volumique dilatante, un état caractéristique du matériau granulaire associé à :

- un taux de variation de volume nul $\dot{\epsilon}_v = 0$
- un seuil de changement de comportement : le processus d'enchevêtrement des grains se termine pour laisser la place au désenchevêtrement. L'angle de frottement interne φ_c donné par la relation (I.26).

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \operatorname{tg} 2\left(-\frac{\pi}{4} + \varphi_c / 2\right) \quad (I.26)$$

caractérise la capacité d'enchevêtrement du matériau [49].

φ_c est un paramètre intrinsèque du matériau, il est caractérisé par :

- des déformations de sol relativement faibles et bien avant la rupture
- une indépendance vis à vis de la porosité initiale
- une non-influence de l'anisotropie de contact
- une insensibilité à la granulométrie initiale

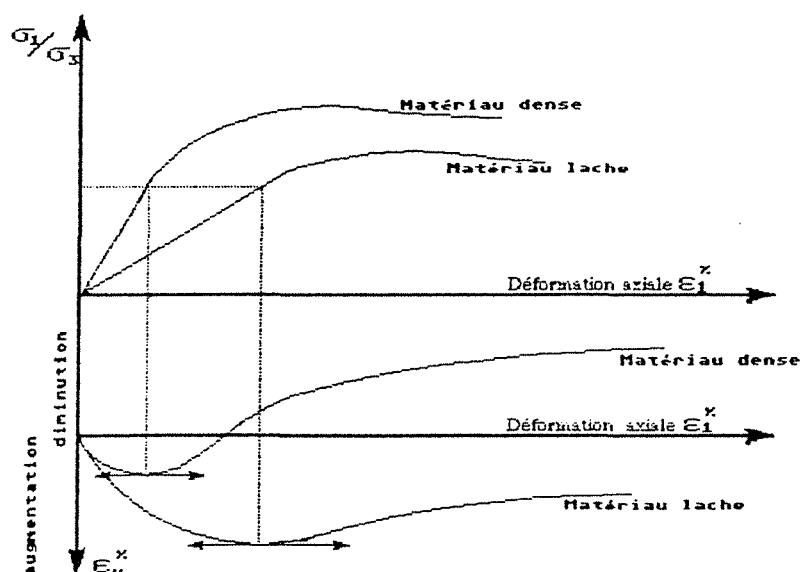


Figure I35 : Variation volumique en fonction de la densité initiale

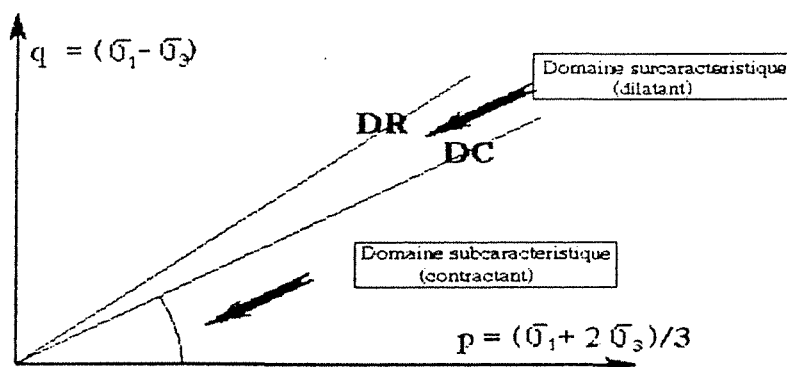


Figure I36 : Critère caractéristique

L'état caractéristique sépare donc deux types de comportement rhéologique du matériau granulaire {fig.I36} : contractant dans le domaine subcaractéristique délimité dans le plan p, q (voir paragraphe VI.3) par la droite DC et dilatant dans le domaine surcaractéristique jusqu'à la limite de rupture DR existante ou non.

Le paramètre essentiel dans l'étude du comportement rhéologique d'un matériau est l'évolution de la déformation volumique au cours du chargement. L'angle de frottement interne caractéristique φ_c est un facteur intrinsèque caractérisant la capacité d'enchevêtrement du matériau granulaire.

re. Le seuil caractéristique doit donc correspondre au seuil de contraintes où se produisent les phénomènes de désenchevêtrement permettant l'écoulement des matériaux ensilés lors de la vidange.

VI.3 Procédure expérimentale

LUONG MP propose dans [60] d'examiner ce comportement rhéologique avec des essais triaxiaux à symétrie de révolution (fig.I37) dont les paramètres sont:

$$\text{Contrainte moyenne } p = (2\sigma_3 + \sigma_1)/3$$

$$\text{Déviateur } q = \sigma_1 - \sigma_3$$

$$\text{Niveau déviatorique } \eta = q/p$$

auxquels on ajoute les paramètres de déformation :

$$\text{Volumique } \varepsilon_v = 2\varepsilon_3 + \varepsilon_1$$

$$\text{Distorsionnelle } \varepsilon_q = 2(\varepsilon_1 - \varepsilon_3)/3$$

$$\text{Taux de dilatance } d = \Delta\varepsilon_v / \Delta\varepsilon_q$$

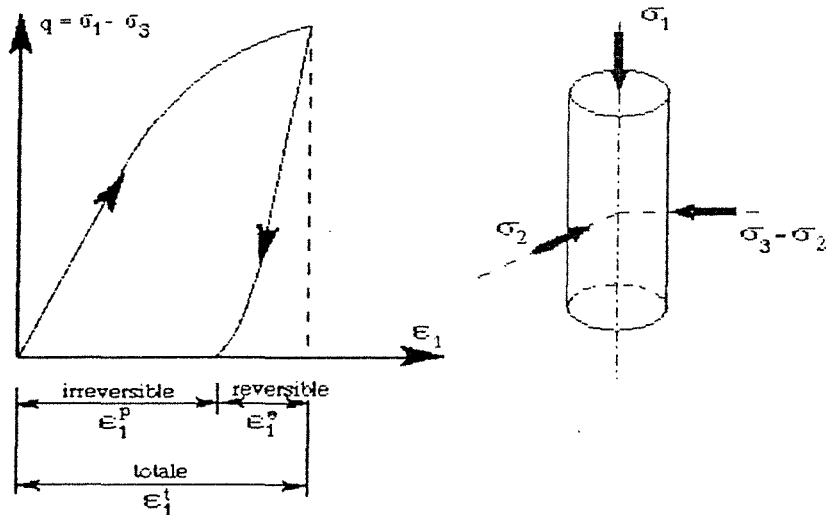


Figure I37 : Paramètres de l'essai triaxial

L'incrément de travail $\dot{\mathbf{W}} d\Omega$ au tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}$ et au tenseur incrément de déformation $\dot{\mathbf{E}}$ s'écrit :

$$\dot{\mathbf{W}} = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\mathbf{E}} = (p\mathbf{I} + \mathbf{s}) : (\dot{\varepsilon}_v \mathbf{I} + \dot{\mathbf{e}}) \quad (1.27)$$

(":" produit tensoriel)

L'incrément de travail total $\dot{\mathbf{W}}$ se sépare donc en une partie déviatorique $\dot{\mathbf{W}}_s$ et une partie volumique $\dot{\mathbf{W}}_v$ qui s'écrit de façon unique comme le produit des invariants du tenseur des contraintes et du tenseur incrément

de déformation. L'incrément de travail irréversible dissipé peut s'écrire :

$$\dot{W}^i = p \dot{\epsilon}_v^i + q \dot{\epsilon}_q^i \quad (1.28)$$

si on fait des hypothèses simplificatrices sur l'incrément de déformation sur un trajet triaxial cylindrique ou la déformation est relativement faible [60].

LUONG dans [60] a effectué des essais triaxiaux en compression $\sigma_1 \geq \sigma_2 = \sigma_3$ et en extension $\sigma_2 = \sigma_3 \geq \sigma_1$. Ces deux types d'essai sont assimilés au processus de remplissage (une contrainte principale majeure et deux contraintes principales mineures) et de vidange (deux contraintes principales majeures et une contrainte principale mineure). Le critère de Mohr-Coulomb s'écrit pour un matériau granulaire sans cohésion :

$$f(\sigma) = \max [\sigma_i (1 - \sin \varphi) - \sigma_j (1 + \sin \varphi)] \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (1.29)$$

A la rupture de l'échantillon les niveaux de contraintes déviatoriques en compression ηf^+ et en extension ηf^- s'écrivent :

$$\eta f^+ = 6 \cdot \sin \varphi_f^+ / (3 - \sin \varphi_f^+)$$

$$\eta f^- = 6 \cdot \sin \varphi_f^- / (3 - \sin \varphi_f^-)$$

Les valeurs correspondantes à l'état caractéristiques s'obtiennent en remplaçant l'indice "f" par "c".

VI.4 Caractérisation rhéologique des matériaux testés par Luong dans [60]

LUONG a testé du blé de la base expérimentale de Chartres, du riz rond en paddy et du riz long en paddy. Suivant le matériau et suivant la pression de confinement σ_3 maintenue constante au cours de l'essai, LUONG distingue deux types de comportement :

- une contraction volumique suivie d'une dilatation continue jusqu'à l'écoulement du matériau
- une contraction continue jusqu'à l'écoulement

Les courbes expérimentales obtenues par LUONG (fig. I38) montrent que le phénomène de dilatance disparaît lorsque la pression de confinement augmente et empêche ainsi le désenchevêtrement de la structure granulaire. De plus la figure I39 montre que les courbes intrinsèques des trois matériaux sont non linéaires. Le tableau I5 extrait de [60] donne les résultats obtenus par Luong pour les matériaux qu'il a testé, où les valeurs des angles de frottement sont calculées à l'aide de l'interprétation de Mohr-Coulomb au pic de contrainte et au seuil caractéristique, en compression et en extension. Les valeurs manquantes dans le tableau I5 signifient que le

matériau ne présente pas de seuil caractéristique jusqu'au niveau de contrainte imposé. C'est à dire que le désenchevêtrement granulaire ne peut pas s'opérer pour ces cas de chargement, la coulabilité est mauvaise, voir impossible pour le matériau à ce niveau de contrainte.

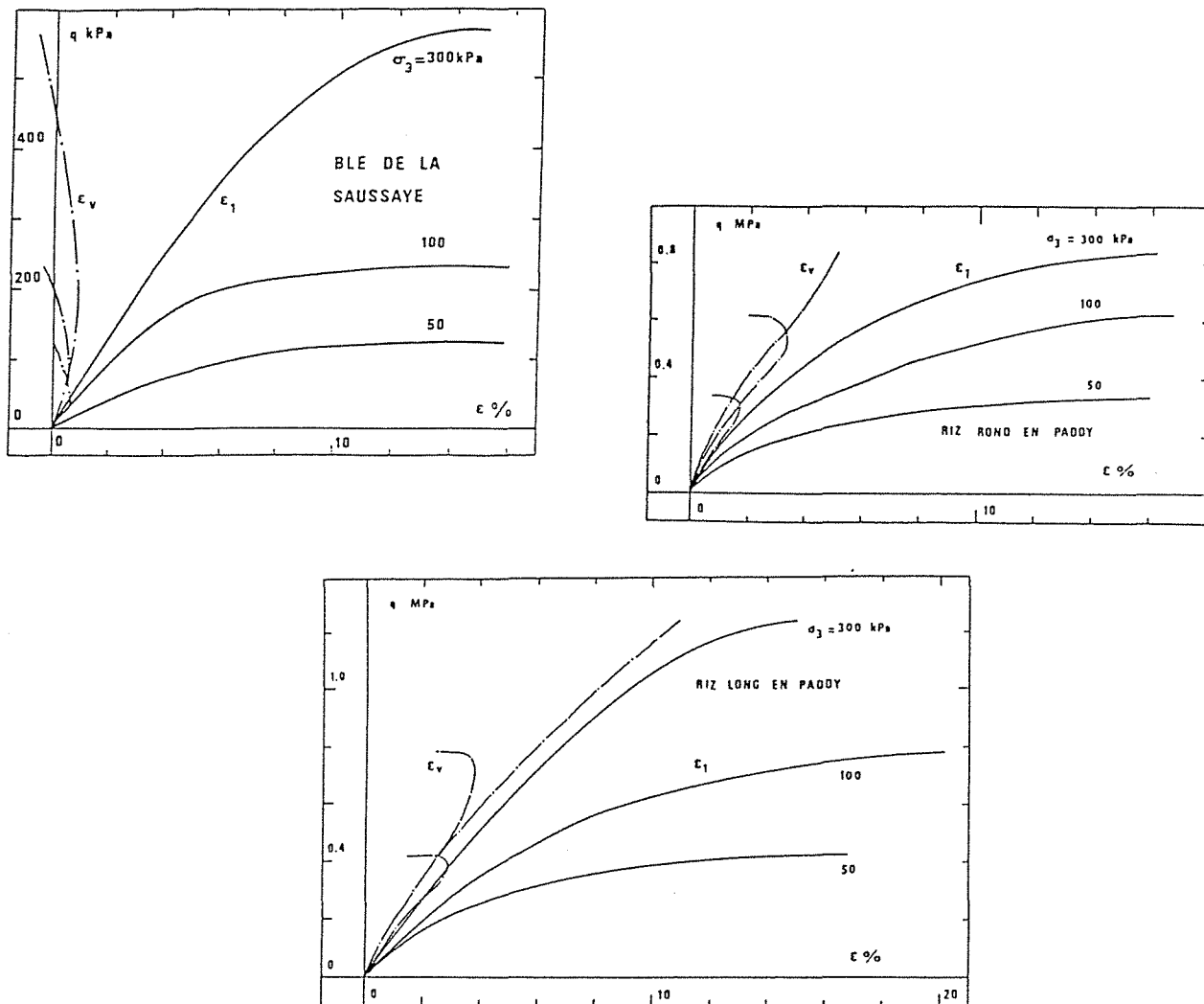


Figure 138 : Comportement rhéologique sous confinement constant
Courbes extraites de [60]

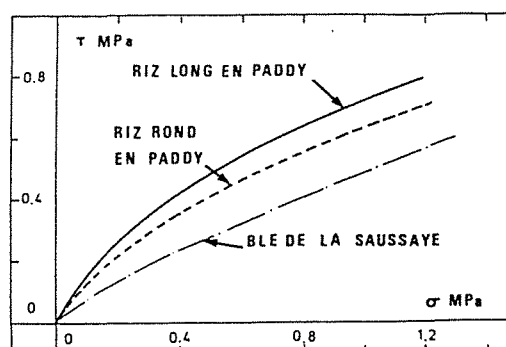


Figure 139 : Courbes intrinsèques obtenus par Luong dans [60]

σ Mpa	0.50			1.00			3.00		
ρ KN/m ³	8.20	6.34	6.37	8.07	6.43	6.57	8.16	6.30	6.65
Matériau	Blé	RR	RL	Blé	RR	RL	Blé	RR	RL
$\bar{q}_f$ Mpa	1.25	3.38	4.42	2.34	6.24	7.80	5.72	8.32	12.37
$\bar{\eta}_f$	1.36	2.08	2.24	1.31	2.03	2.17	1.17	1.44	1.74
$\bar{\phi}_f$ °	33.7	50.5	54.6	32.5	49.2	52.7	29.3	35.5	42.5
$\bar{q}_c$ Mpa	0.42	3.01	3.90	0.65	5.20	7.02	1.56		
$\bar{\eta}_c$	0.65	2.00	2.17	0.53	1.90	2.10	0.44		
$\bar{\phi}_c$ °	17.1	48.7	52.7	14.2	46.2	51.1	11.8		
$\bar{q}_c$ Mpa	-0.23			-0.39			-1.04		
$\bar{\eta}_c$	-0.48			-0.45			-0.39		
$\bar{\phi}_c$ °	15.1			14.0			12.0		
$\bar{q}_f$ Mpa	-0.36	-0.73	-2.08	-0.65	-1.97	-1.04	-1.82	-3.64	-1.56
$\bar{\eta}_f$	-0.91			-0.83		-1.59	-0.76		-0.63
$\bar{\phi}_f$ °	32.4			28.8		38.9	25.8		20.6

Tableau I5 : Caractéristiques rhéologiques des matériaux

Les constatations expérimentales décrites dans [60] ont suggéré à LUONG de prendre en compte sur un essai triaxial cylindrique classique :

- un indice de désenchevêtrement I_d {fig.I40} défini par le rapport du travail W_e d'enchevêtrement sur le travail W_d de dilatance globale à la rupture : le désenchevêtrement de la structure s'opérera d'autant plus facilement que cet indice I_d est faible.

- un indice de coulabilité I_c {fig.I40} défini par le rapport du travail W_d de distorsion jusqu'au seuil d'enchevêtrement au travail W_{dm} mobilisé jusqu'à la résistance au cisaillement maximale du matériau : la coulabilité en masse du matériau est d'autant meilleure que l'indice I_d est faible.

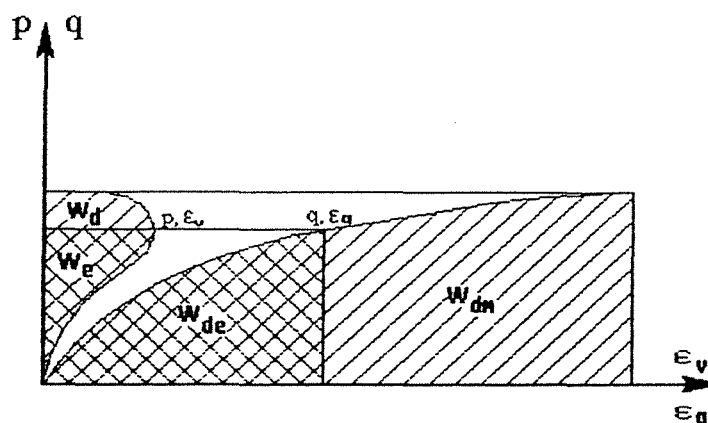


Figure I40 : Définitions des indices de désenchevêtrement I_d et de coulabilité I_c

$$I_d = \frac{W_e}{W_d} = \frac{\int_0^{\varepsilon_{ve}} p d\varepsilon_v}{\int_0^{\varepsilon_{vm}} p d\varepsilon_v} \quad I_c = \frac{W_{de}}{W_{dm}} = \frac{\int_0^{\varepsilon_{eq}} q d\varepsilon_q}{\int_0^{\varepsilon_{qm}} q d\varepsilon_q} \quad (1.30)$$

VII Conclusion

La synthèse bibliographique que l'on a fait dans ce chapitre présente les différentes méthodes que l'on utilise dans le but de concevoir des silos favorisant la coulabilité des matériaux lors de la vidange des installations. En effet de bonnes propriétés de coulabilité éviteront de nombreux problèmes fonctionnels et structuraux.

La première partie de ce chapitre est consacrée à la classification et à la caractérisation du comportement des matériaux en vrac. Les classifications de CARR et de la fédération européenne de manutention qui débutent cette partie s'adressent surtout aux matériaux pulvérulents qui ont une grande sensibilité à la teneur en eau. Cette première partie s'attache ensuite à décrire les matériaux en vrac à travers des critères de rupture du type Mohr-Coulomb. Mais ces théories issuent directement de la mécanique des sols ont malheureusement un grand inconvénient, elles ne tiennent pas compte des variations volumiques engendrées par le cisaillement du matériau. Or des études de ROSCOE montrent à travers son fameux diagramme d'état l'étroite relation entre l'indice des vides et l'état de contrainte d'un échantillon de matériau en vrac.

Après avoir décrit dans une première partie le comportement des matériaux en vrac, on cherche dans une seconde partie à expliciter le comportement du même matériau lorsque celui-ci est ensilé. Cette partie s'attache ainsi à mettre en évidence les interactions entre le silo et la matière ensilée. On montre ainsi que la coulabilité du matériau ensilé dépend dans une large mesure de la résistance à la compression du matériau et de la géométrie et des dimensions du silo ou de la trémie. Ces considérations permettent alors d'établir des abaques, différents suivant les auteurs, pour caractériser l'aptitude à l'écoulement du matériau ensilé.

La dernière partie de ce chapitre est consacrée au récent concept de l'état caractéristique d'un matériau granulaire. Ce concept suppose l'existence de deux domaines, le premier contractant et le second dilatant. Ce dernier état se manifeste lorsque l'état de contrainte est suffisamment élevé. D'après ce concept seul un matériau étant soumis un état de contrainte qui lui permettent d'atteindre le domaine dilatant pourra s'écouler sans difficulté, car l'état de contrainte auquel il est soumis favorise le désenchevêtrement des grains.

Ce chapitre présente des méthodes permettant la conception d'installation d'ensilage avec le moins de problèmes fonctionnels et structuraux possibles. Il fait une mise au point entre de nombreuses techniques de caractérisation des matériaux pulvérulents ou des matériaux granulaires, afin de mieux comprendre leurs mécanismes d'écoulement et de déformation. Cette meilleure compréhension du comportement des matériaux granulaires acquise au cours de cette partie, va nous permettre dans la partie B de tenter de caractériser les écoulements gravitaires d'une manière théorique et expérimentales.

PARTIE B

*Modélisation de l'écoulement gravitaire
d'un matériau granulaire naturel
Etude théorique et expérimentale*

Chapitre 2

Description d'un écoulement granulaire à l'aide des équations de l'hydrodynamique

I. Introduction

Le comportement mécanique de l'écoulement des matériaux granulaires dénués de cohésion résulte de forces de contact qui s'exercent au cours des collisions entre les particules. BAGNOLD, cité dans [44] fut le premier en 1954 à tenter de modéliser les écoulements de matériaux granulaires soumis à un fort taux de cisaillement, en s'intéressant aux chocs entre les particules constituant le matériau. Il faut ensuite attendre le développement des industries pharmaceutiques, agro-alimentaires... qui nécessitent d'importants moyens de stockage et de transport des matériaux en vrac pour voir vers la fin des années soixante dix, des chercheurs comme SAVAGE [82], SAVAGE & JEFFREY [83], JENKINS & RICHMAN [43], HAFF [29], HANES & INMAN [32] reprendre et développer les travaux théoriques et expérimentaux de BAGNOLD. La plupart des études théoriques sont basées sur l'étude du mouvement désordonné des grains à l'intérieur du milieu granulaire, comme on le fait dans les ouvrages [79] et [2] pour les molécules dans la théorie cinétique des gaz. La compréhension de ces phénomènes microscopiques permet de décrire l'état macroscopique du matériau. Cette approche a conduit JENKINS & COWIN cité dans [29] et SAVAGE & JEFFREY [83] à introduire parmi les premiers une vitesse de fluctuation des grains dans les modèles mathématiques. Cette vitesse de fluctuation peut être décrite physiquement par le mouvement de vibration aléatoire d'un grain autour de sa position moyenne.

Le concept de vitesse de fluctuation est largement repris par HAFF dans [29] pour établir les bases de son modèle. L'originalité de cette modélisation réside dans le fait qu'elle repose essentiellement sur des équations analogues à celles de la mécanique des fluides. Les grains constituant le matériau sont assimilés aux molécules d'un fluide réel newtonien. L'état macroscopique du milieu dépend, d'après HAFF, du comportement microscopique du matériau, c'est à dire de l'interaction entre les grains. Cette interaction est décrite par un modèle microscopique heuristique. Les contraintes de frottement qui apparaissent dans cette description mathématique et qui s'opposent à l'écoulement sont donc, comme en mécanique des fluides, d'origine visqueuse. Ceci est vrai pour l'écoulement d'un matériau granulaire, comme le rappelle encore KNIGHT [53], lorsque le gradient de vitesse est élevé et que par conséquent les collisions de très courte durée entre grains sont prédominantes et sont la cause de la résistance à l'écoulement et à la dilatation du matériau.

II. Description et domaine d'application du modèle

La modélisation de type fluide reprise par HAFF dans [29] assimile un écoulement de matériau granulaire à un écoulement de fluide réel newtonien, et suppose la continuité milieu granulaire. Cela permet l'utilisation des équations classiques de continuité et de conservation de la quantité de mouvement. Vu l'importance de la vitesse de fluctuation v des grains qui est de l'ordre de la vitesse d'écoulement u , HAFF intègre également une équation de conservation de l'énergie, pour la description théorique de l'écoulement. Cependant il existe une différence clef entre les particules d'un milieu granulaire et les molécules d'un fluide : le choc entre deux grains est inélastique alors que le choc entre deux molécules est élastique. Ce phénomène est caractérisé par HAFF avec son modèle microscopique original.

La suite de ce paragraphe est consacrée à quelques comparaisons entre le système granulaire et le système fluide, justifiant les hypothèses d'application des équations proposées dans [29].

II.1 La taille des grains et des molécules de fluide

La différence évidente entre un grain et une molécule de fluide est la taille ou la masse. Un grain de sable peut être 10^{18} fois plus massif qu'une molécule. Pourtant cette différence frappante n'est pas particulièrement fondamentale d'après HAFF à condition de rester dans une description microscopique du mouvement. Les lois de la mécanique classique sont applicables dans les deux cas.

II.2 Conservation de l'énergie

Bien que la trajectoire des grains et des molécules puisse être décrite par la mécanique classique, la nature des molécules en terme de mécanique quantique est caractérisée par l'aptitude de celles-ci à supporter totalement des collisions élastiques. Alors que les collisions entre les grains présentent toujours une perte d'énergie cinétique qui se dissipe sous forme de chaleur. Cette différence entre les matériaux granulaires et les fluides conduit à une différence de comportement macroscopique. Ceci est vrai même si la perte d'énergie par collision est faible.

II.3 Taille des grains

Contrairement aux molécules les grains sont des particules non iden-

tiques. Les équations classiques de la mécanique des fluides reprises dans [29] ne s'appliquent donc qu'aux milieux granulaires formés de grains de taille identique.

II.4 Interaction entre les grains

Les contacts entre les grains dont la forme réelle peut être éloignée de la forme sphérique et dont les surfaces sont rugueuses, engendrent également des forces tangentielles. Ces forces créent des couples de rotation qui induisent le pivotement des grains. Pour supprimer ces effets de rotation, qui ne sont pas pris en compte par les équations, on suppose que les grains du milieu sont de forme sphérique et présentent un état de surface lisse.

Dans un fluide il existe des forces répulsives entre les molécules qui sont à l'origine du phénomène de tension surfacique, celles-ci ont une grande influence sur des paramètres tels que la viscosité... L'application des équations retenues par HAFF dans [29] ne prend pas en compte ces effets.

II.5 Hypothèse de collision binaire

Une hypothèse simplificatrice fréquemment faite pour les fluides moléculaires, même si sa validité est douteuse, est qu'uniquement les collisions par paire sont importantes pour l'évolution dynamique du fluide. Cette hypothèse est reprise ici ainsi que par de nombreux auteurs tels que SAVAGE & JEFFREY [83], JENKINS & SAVAGE [44], JOHNSON & JACKSON [45] pour décrire le mouvement des matériaux granulaires soumis à des taux de cisaillement élevés.

II.6 Etat physique du milieu

Dans les paragraphes précédents on été émis des hypothèses sur l'état physique des particules qui composent le matériau granulaire. On a vu que les grains doivent être sphériques, sans adhérence... A ces hypothèses on ajoute une restriction sur la masse volumique ρ du matériau. En effet la masse volumique ρ doit être telle que l'espace moyen s entre les grains voisins soit toujours très inférieur au diamètre des grains d (fig.II1).

$$s \ll d$$

$$(II.1)$$

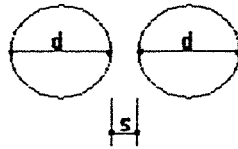


Figure III : Séparation moyenne de deux grains voisins

Cette condition est probablement respectée d'après HAFF si on considère une partie de l'écoulement assez grande. Cette hypothèse va donc induire des simplifications dans les équations de mouvement qui résultent dans le fait que la variation de la masse volumique ρ est quasiment nulle.

La relation (II.1) entraîne :

$$\rho = \frac{m}{(s + d)^3} \quad (II.2)$$

Lorsque s tend vers zéro la relation (II.2) devient :

$$\rho = \frac{m}{d^3} \quad (II.3)$$

En plus de la condition $s \ll d$, le modèle n'admet pas la possibilité $s = 0$. Naturellement pour n'importe quelle collision la séparation entre deux grains tend vers zéro, mais s reste néanmoins différent de zéro car s représente la moyenne des distances entre deux grains au voisinage d'un point. Par conséquent si s tend vers zéro dans quelques zones du milieu granulaire, sa rhéologie sera différente de celle décrite par les équations introduites dans le paragraphe III. En effet $s = 0$ signifie que les grains restent en contact durant un laps de temps important et peuvent alors glisser et frotter les uns sur les autres. Par contre pour $s \neq 0$ les grains rebondissent les uns sur les autres tout comme les molécules d'un fluide. Clairement, $s = 0$ correspond à un empilement des grains qui resteront immobiles, il faut par conséquent une énergie suffisante (taux de cisaillement élevé) pour que l'on puisse décrire l'écoulement en terme de collisions grain-grain.

Le mouvement du fluide ne doit pas par ailleurs être affecté par la présence d'air, d'eau, ou de tout autre fluide, cette condition semble tout de même respectée si les vides entre les grains sont remplis par de l'air uniquement.

III. Equations de mouvement

III.1 Conservation de la masse

Soit $\vec{u}$ le vecteur vitesse de composante $u_i = (u_1, u_2, u_3)$, alors la conservation de la masse s'écrit comme en mécanique des fluides :

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i) = 0} \quad (11.4)$$

ou $x = (x_1, x_2, x_3)$ sont les coordonnées. Si par contre la masse volumique ρ est constante, alors on obtient l'équation de continuité d'un fluide incompressible en écoulement stationnaire :

$$\text{div } \vec{u} = 0 \quad (11.5)$$

III.2 Conservation de la quantité de mouvement

L'objectif de ce paragraphe est de déterminer une équation décrivant la conservation de la quantité de mouvement. En hydrodynamique cette équation correspond à celle de Navier-Stokes. Pour notre part on reprend intégralement cette équation :

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_i) = - \frac{\partial}{\partial x_k} \left[p \delta_{ik} + \rho u_i u_k - \eta \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) \right] + \rho g_i} \quad (11.6)$$

ou $p(x,t)$ est la pression

g_i est la composante de l'accélération de la pesanteur

η est le coefficient de viscosité cinématique qui joue ici un rôle plus important qu'en mécanique des fluides. HAFF suppose dans [29] que η et tous les autres coefficients similaires dépendent de l'énergie de l'écoulement.

III.3 Conservation de l'énergie

L'équation de conservation de l'énergie reprise par HAFF dans [29] est également issue de la mécanique des fluides :

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho u^2 + \frac{1}{2} \rho v^2 \right) = & - \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\rho u_k \left(\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} u^2 + \frac{1}{2} v^2 \right) - u_i \eta \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) \right. \\ & \left. - K \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{1}{2} \rho v^2 \right] + \rho u_i g_i - I \end{aligned}} \quad (11.7)$$

L'introduction d'une équation de conservation de l'énergie dans la des-

cription d'un écoulement granulaire a été effectuée en premier par OGAWA (cité dans [29]) en 1978 et en 1980, alors que l'introduction d'une vitesse de fluctuation v fut réalisée en premier toujours d'après [29] par JENKINS & COWIN en 1979. L'énergie totale du système est la somme de l'énergie cinétique de l'écoulement $1/2 \cdot \rho \cdot u^2$ et de l'énergie interne $1/2 \cdot \rho \cdot v^2$, ce dernier terme se comporte surtout comme une température du système granulaire. Le coefficient K est donc analogue à une conductivité thermique, alors que la vitesse de fluctuation v peut être assimilée à une vitesse de diffusion thermique.

La quantité I donne le taux d'énergie perdue par le système du fait de l'inélasticité des collisions grain-grain. Comme pour η et K , I dépend du taux de collision et par conséquent de v et s . Le paragraphe suivant donne les équations qui permettent la détermination de ces trois quantités.

IV. Modèle microscopique

Le modèle microscopique proposé dans [29] décrit l'interaction élémentaire de deux particules, il permet de relier la pression p , les coefficients de transport η et K , et le terme de perte d'énergie I aux variables qui apparaissent dans les différentes équations de conservation.

IV.1 Equation d'état

Supposons un grain de masse m , de diamètre d en vibration avec la vitesse moyenne v sur un chemin quelconque et par suite il exerce une pression p sur les grains autour de lui. La quantité de mouvement pour une collision grain-grain est de l'ordre de mv . Le temps de collision s'exprime de la manière suivante :

$$T \approx \frac{s}{v} \quad (II.8)$$

Par conséquent la pression exercée sur la paroi de la cellule est d'après [29] :

$$p \approx \frac{mv}{T} \frac{1}{d^2} \quad (II.9)$$

car $s \ll d$ implique que la surface sur laquelle s'exerce la pression p est proportionnelle à d^2

En multipliant cette dernière relation par la fréquence de collision v/s et en utilisant la relation (II.3), on obtient l'expression définitive de la pression :

$$p = t d \rho \frac{v^2}{s} \quad (II.10)$$

t : constante adimensionnelle

Remarques : L'équation (II.10) est semblable à celle donnée pour un gaz par la théorie cinétique des gaz. La formule donnant la pression à l'intérieur d'un gaz dans [65] est également basée sur la durée et sur la fréquence de collision, et est fonction du carré de la vitesse des molécules du gaz. L'équation (II.10) montre encore que lorsque le terme ρv^2 , assimilable à la température du système augmente, alors la pression augmente également à l'intérieur du milieu, comme pour un gaz.

IV.2 Coefficient de viscosité

Pour expliciter le coefficient de viscosité η , on considère deux couches de grains adjacentes. Le gradient de vitesse est supposé être dans la direction Oy perpendiculaire aux deux couches repérées par l'axe Ox, de façon à ce que la couche supérieure se déplace avec une vitesse relative Δu par rapport à la couche sous-jacente (fig.II.2). Lors des collisions de grains entre ces deux couches une quantité de mouvement $m\Delta u$ est transmise suivant la direction Ox (direction de l'écoulement). Si de plus la fréquence de collision est v/s , alors la contrainte de cisaillement exercée par la couche supérieure sur la couche inférieure dans la direction Ox est :

$$\tau = \frac{m \Delta u}{d^2} \frac{v}{s} \quad (\text{II.11})$$

En supposant que le rapport $\Delta u/d$ est très peu différent de du/dy , on montre que la contrainte de cisaillement τ s'exprime définitivement par :

$$\tau = q d^2 \rho \frac{v}{s} \frac{du}{dy} \quad (\text{II.12})$$

q : constante adimensionnelle

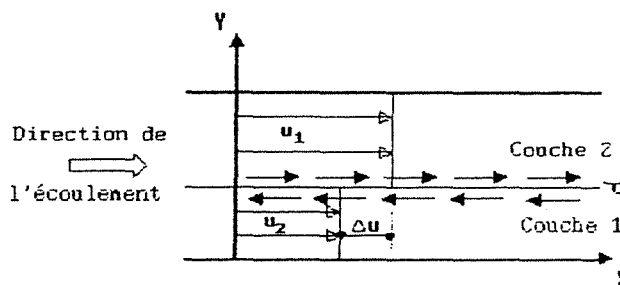


Figure II.2 : gradient de vitesse entre deux couches

En comparant cette équation bidimensionnelle (II.12) avec le terme de contrainte visqueuse dans (II.6), on obtient l'expression suivante pour le coefficient de viscosité :

$$\eta = q d^2 \rho \frac{v}{s}$$

(II.13)

et d'après les relations (II.12) et (II.13)

$$\tau = \eta \frac{du}{dy} \quad (II.14)$$

IV.3 Coefficient de diffusivité thermique

D'après [29] l'énergie moyenne transportée est $mv\Delta v$, où Δv est la différence de vitesse de fluctuation entre les grains voisins. Le flux d'énergie s'exprime alors par :

$$Q = \frac{mv\Delta v}{d^2} \frac{v}{s} \quad (II.15)$$

$$\text{ou} \quad Q = -r d^2 \frac{v}{s} \frac{d}{dy} \left(\frac{1}{2} \rho v^2 \right) \quad (II.16)$$

r est une nouvelle constante adimensionnelle. Or le coefficient K de l'équation (II.7) représente exactement la divergence du flux d'énergie interne que l'on peut identifier par :

$$K = r d^2 \frac{v}{s} \quad (II.17)$$

L'équation (II.16) indépendante de la vitesse d'écoulement u , décrit le transport de l'énergie interne. Elle est semblable à une équation de diffusion thermique, où comme déjà souligné au paragraphe III.3, le terme $1/2 \cdot \rho \cdot v^2$ se comporte comme une température du système, alors que le coefficient K est similaire à un coefficient de conductivité thermique.

IV.4 Pertes d'énergie par collisions

Un autre terme de l'équation (II.7) indépendant de la vitesse u est le terme I , qui représente l'énergie perdue irrévocablement par le système à cause de l'inélasticité des collisions entre les grains. Le choc de deux particules de masse identique m {fig.II3}, animées pour la première d'une vitesse v_o et la seconde de la vitesse v'_o avant le choc et d'une vitesse v_1 pour la première et v'_1 pour la seconde après le choc, est décrit par la relation (II.18).

$$v_1 - v'_1 = -e(v_o - v'_o), \quad (II.18)$$

ou e est le coefficient de restitution de l'énergie. Si e est égal à 1, il y a restitution complète de l'énergie, les corps sont alors parfaitement élastiques. Si e est nul on a $v_1 = v'_1$, c'est le cas de la persistance de contact lorsque les corps sont parfaitement mous.



Figure II3 : Choc entre deux particules

La variation de l'énergie cinétique au cours du choc se traduit par :

$$2(E_0 - E_1) = m(v_0^2 - v_1^2) + m(v_0'^2 - v_1'^2) \quad (II.19)$$

Les équations (II.18) et (II.19) permettent de montrer que la variation d'énergie cinétique lors du choc est :

$$2(E_0 - E_1) = \frac{m^2}{2m} (v_0 - v_0')^2 \quad (II.20)$$

Si on suppose que la vitesse relative de collision $(v_0 - v_0')$ est très proche de la vitesse de fluctuation v , alors l'énergie perdue au cours d'une collision grain-grain est :

$$2\Delta E = (1 - e^2) \frac{1}{2} m v^2, \quad (II.21)$$

e est le coefficient de restitution de l'énergie décrivant la collision de deux grains.

En multipliant la relation (II.21) par la fréquence de collision v/s et en la divisant par le terme d^3 proportionnel au volume car la relation (II.1) est vraie, on obtient le taux de perte d'énergie par unité de volume :

$$\boxed{I = \gamma \rho \frac{v^3}{s}} \quad (II.22)$$

γ est un facteur adimensionnel proportionnel à $(1 - e^2)$, $\gamma = b(1 - e^2)$. Pour des collisions parfaitement élastiques $\gamma = 0$, alors que pour des chocs entièrement dénués d'élasticité γ vaut 1. Dans la pratique γ sera toujours compris entre 0 et 1.

IV.5 Remarques

Le modèle microscopique décrit ici ne tient pas compte de l'influence de l'accélération de la pesanteur. Ceci est une bonne approximation aussi longtemps que le nombre microscopique de Froud :

$$f = \frac{v^2}{gs} \quad (II.23)$$

reste grand par rapport à 1 ($f \gg 1$). Ceci signifie que l'énergie cinétique acquise avec la vitesse de fluctuation v par une particule est toujours plus grande que le gain d'énergie potentielle liée à la distance s .

V. Les conditions aux limites

Comme les conditions aux limites données dans [29] ne sont pas satisfaisantes, HUI, HAFF, UNGAR & JACKSON ont défini dans [30] des conditions aux limites plus réalistes que celles proposées dans [29]. Ces conditions aux limites ont été déduites du bilan énergétique d'un élément de volume en contact avec la paroi. Elles sont de la forme :

$$v_p = C_1 \left(\frac{dv}{dy} \right)_p \quad u_p = C_2 \left(\frac{du}{dy} \right)_p$$

l'indice "p" indique que l'on se trouve au niveau de la paroi, les termes C_1 et C_2 ayant la dimension d'une longueur.

V.1 Conditions sur la vitesse de fluctuation v au niveau de la paroi

La valeur de la vitesse de fluctuation v le long de la paroi dépend de la nature des collisions entre les grains et la paroi. Dans [30], on caractérise ces collisions inélastiques par un coefficient de restitution e_p , qui permet d'exprimer le taux d'énergie perdu à la paroi par unité de surface de la manière suivante :

$$Q_p = a \frac{1}{2} m v^2 (1 - e_p^2) \frac{1}{d^2} \frac{v}{s} \quad (II.24)$$

a est une constante adimensionnelle de l'ordre de l'unité. Cependant le flux d'énergie transmis à la paroi en raison de la collision grain-paroi est :

$$Q = K \frac{d}{dy} \left(\frac{1}{2} \rho v^2 \right) \quad (II.25)$$

où K est le coefficient de diffusivité thermique (défini dans le chapitre I, §IV.3) et y la distance perpendiculaire à la paroi. Le bilan énergétique au niveau de la paroi implique l'égalité des relations (II.24) et (II.25), cette mise en équation donne alors la vitesse de fluctuation au niveau de la paroi :

$$\boxed{v_p = \frac{2rd}{\gamma_p} \frac{dv_p}{dy}} \quad (II.26)$$

$$\text{avec } \gamma_p = a(1 - e_p^2) \quad (II.27)$$

où v_p et dv_p/dy se rapportent aux valeurs de la vitesse de fluctuation et à sa dérivée au niveau de la paroi en question. L'équation (II.26) qui est la condition aux limites pour la vitesse de fluctuation suppose que les relations (II.1) et (II.2) soient respectées. Le terme γ_p explicité par la relation (II.27) traduit l'élasticité des chocs paroi-grain, il varie entre 0 pour des chocs parfaitement élastiques et 1 pour des collisions dénuées de toute élasticité.

V.2 Conditions sur la vitesse d'écoulement u au niveau de la paroi

Cette condition sur u est obtenue par un chemin similaire que précédemment. Le flux de quantité de mouvement latéral transmis à la paroi par les chocs grain-paroi provoque une contrainte de cisaillement entre les grains et la paroi de :

$$\tau_p = \frac{c \Phi m u_p}{d^2} \frac{v_p}{s_p} \quad (\text{II.28})$$

où c est une constante adimensionnelle proche de 1, s_p est la distance moyenne libre au niveau de la paroi, u_p est la vitesse de glissement des particules sur la paroi. Si u_w est la vitesse de la paroi on a alors

$$u_p = u(0) - u_w \quad (\text{II.29})$$

où $u(0)$ est la vitesse d'écoulement au niveau de la paroi. Dans le cas d'un écoulement dans une conduite, dans un silo... on a $u_p = u(0)$ car les parois ne se déplacent pas. La quantité Φ comprise entre 0 et 1 est essentiellement dépendante de la rugosité de la paroi, Φ tend vers zéro pour une paroi lisse.

La vitesse de glissement le long des parois peut alors s'écrire à partir des relations (II.3), (II.13), (II.14) et (II.28) de la manière suivante :

$$u_p = \frac{q d}{\beta_p} \frac{du_p}{dy} \quad (\text{II.30})$$

$$\text{avec} \quad \beta_p = c \Phi \quad (\text{II.31})$$

où du_p/dy est la dérivée de la vitesse d'écoulement au niveau de la paroi. On remarque dans l'équation (II.30) que si Φ est faible (paroi lisse), on a une vitesse u_p élevée, c'est à dire que les collisions sont quasi-élastiques. Si par contre Φ tend vers 1, u_p sera plus faible car une quantité importante de quantité de mouvement est absorbée par la paroi du fait de la rugosité de celle-ci.

V.3 Remarques

Les coefficients qui apparaissent dans les équations (II.22), (II.27) et (II.31) pourraient, en théorie, être déterminés expérimentalement. Les coefficients de restitution de l'énergie e et e_p sont déterminables indépendamment du type d'écoulement par des études expérimentales de collisions grain-grain et grain-paroi. Pour cela il faut pouvoir mesurer la variation de la composante normale de la vitesse lors d'une collision. Les résultats obtenus seront fonctions de la nature du grain et de la paroi, mais seront indépendants de la forme de la paroi. De la même manière on peut obtenir la valeur Φ , si on mesure la variation de la composante tangentielle de la vitesse lors d'un choc grain-paroi. Pour les parois lisses la variation de vitesse tangentielle est faible, il peut donc y avoir glissement le long de la paroi. Pour les parois rugueuses la détermination de Φ est nettement plus délicate car Φ dépend surtout du rapport entre le diamètre des grains c et de la dimension des aspérités...

On se rend donc compte que la détermination expérimentale des coefficients intervenants dans les équations est quasiment impossible en laboratoire. Il faut donc les déterminer empiriquement, ou par calage des équations sur de ce chapitre des mesures expérimentales.

D'autre part un écoulement granulaire à travers un orifice situé dans une paroi d'orientation quelconque, les dimensions de l'orifice étant grandes par rapport à celles des grains, engendre du fait de l'inélasticité des chocs la formation de zones mortes ($s = 0$) autour de l'orifice (fig.II.4).

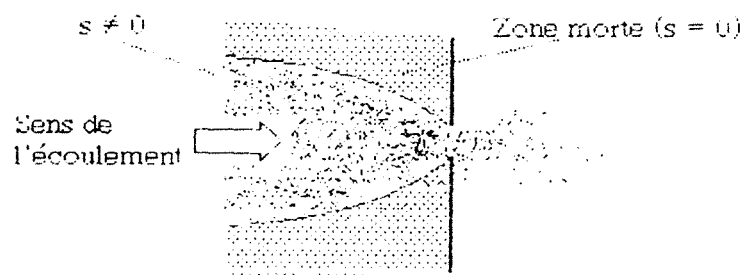


Figure II.4 : formation d'une zone morte

Les détails d'une théorie capable de donner les limites de l'écoulement d'un fluide granulaire ainsi que les conditions aux limites à appliquer sur ces limites, ne sont à l'heure actuelle pas encore entièrement développées, bien que ce comportement soit général aux écoulements de matériaux granulaires à travers des orifices.

VI. Conclusion

La description des écoulements de matériaux granulaires à gradient de vitesse élevé à l'aide des équations utilisées par HAFF dans [29] présente l'avantage de reposer sur des équations analogues à celles de la mécanique des fluides. Aux vues des travaux de ce dernier et de son équipe dans [29],[30] et [31], on constate que cette modélisation semble bien adaptée aux écoulements de type "Couette" et aux écoulements gravitaires, à condition que ceux-ci aient un taux de cisaillement et un gradient de vitesse élevés, et donc par conséquent des contraintes tangentielles provoquées essentiellement par des frottements visqueux, comme lors de l'écoulement d'un fluide classique réel.

La modélisation d'un écoulement à faible taux de cisaillement nécessite la distinction entre deux types de collisions, les collisions de courte durée et les collisions de longue durée. Ce dernier type de collision provoque encore une perte d'énergie par frottement entre grains. JOHNSON & JACKSON présentent dans [45] une description mathématique très complexe tenant compte des deux types de chocs que l'on trouve dans un écoulement lent. Ce modèle tient compte des pertes d'énergie dues à l'inélasticité des collisions de courte durée et des pertes d'énergie par frottement entre grains lors de chocs de durée prolongée.

Le modèle présenté dans ce chapitre ne peut donc pas directement décrire les écoulements dont les gradients de vitesse sont relativement faibles. En effet la durée très brève des collisions, comme c'est le cas pour les molécules d'un fluide, ne permet de prendre en compte que les pertes d'énergie dues à l'inélasticité des chocs entre les particules constituant le matériau granulaire. Il sera donc intéressant de voir si par la suite il sera possible d'ajouter un terme dans les équations de mouvement qui tienne compte du frottement solide entre deux couches de matériaux glissant l'une sur l'autre. Le frottement solide n'étant plus négligeable par rapport au frottement visqueux, qui seul est pris en compte par les équations retenues par HAFF dans [29].

Chapitre 3

Modélisation de l'écoulement gravitaire à l'intérieur d'un puits vertical

I. Introduction

L'une des applications intéressantes de la modélisation proposée dans le chapitre précédent, est la description théorique de l'écoulement d'un matériau granulaire à travers une conduite ou un puits à parois verticales représenté par la figure III.1. En effet ce type d'écoulement est proche des écoulements que l'on rencontre dans les trémies d'alimentation des industries pharmaceutiques, chimiques ou agro-alimentaires, où la maîtrise du débit et des vitesses d'écoulement à l'intérieur des trémies est un facteur essentiel pour obtenir un produit final de bonne qualité. Les équations obtenues dans ce chapitre pour décrire l'écoulement gravitaire d'un matériau granulaire entre deux parois verticales seront utilisées dans les chapitres V et VI pour décrire l'écoulement de ce même matériau lorsque les parois du puits sont légèrement inclinées par rapport à la verticale.

Les équations décrivant l'état macroscopique du milieu granulaire et celles du modèle microscopique permettent de développer une équation différentielle du second ordre régissant la vitesse de fluctuation v . La résolution de cette équation différentielle est faite numériquement. Elle donne la répartition de la vitesse de fluctuation v dans une section transversale du puits, ainsi que la pression p que le matériau exerce sur les parois du canal vertical. La connaissance de la vitesse de fluctuation et de la pression permet de calculer la vitesse d'écoulement u dans la section transversale étudiée, ainsi que bien d'autres paramètres caractéristiques de l'écoulement, comme la variation de la masse volumique ρ dans la section considérée.

La dernière partie de ce chapitre s'attache à étudier l'influence des différents paramètres, ou constantes de notre modèle original sur les vitesses de fluctuation et d'écoulement ainsi que sur d'autres caractéristiques de l'écoulement. Dans cette partie on confronte également notre modélisation à des vitesses d'écoulement réelles que nous avons mesurées sur des trémies dont les parois sont faiblement inclinées par rapport à la verticale. Des billes de verre ont servi de matériau granulaire pour cette première comparaison entre la théorie et la réalité. Ce matériau modèle respectant de manière exacte les hypothèses d'application des équations présentées dans le chapitre précédent.

II. Positionnement du problème

Un puits vertical est formé par deux parois parallèles de longueur infinie, de même rugosité et séparées par une distance $2l$ (fig.III1). Entre ces deux parois s'écoule un matériau granulaire soumis à l'accélération de la pesanteur $\vec{g}$ dont le comportement en régime stationnaire est décrit par le modèle. Les paramètres t , q , r , γ du matériau, le diamètre d des particules sphériques ainsi que la densité moyenne ρ devront être connus, comme les paramètres γ_p et β_p qui décrivent l'interaction grain-paroi.

III. Modélisation de l'écoulement dans un puits vertical

L'écoulement du matériau granulaire qui répond naturellement aux hypothèses restrictives des équations de mouvement est décrit mathématiquement dans le repère cartésien représenté par la figure III1. L'origine est au milieu des deux parois verticales, l'axe Ox est dirigé vers le haut et l'axe Oy vers la droite perpendiculairement aux parois.

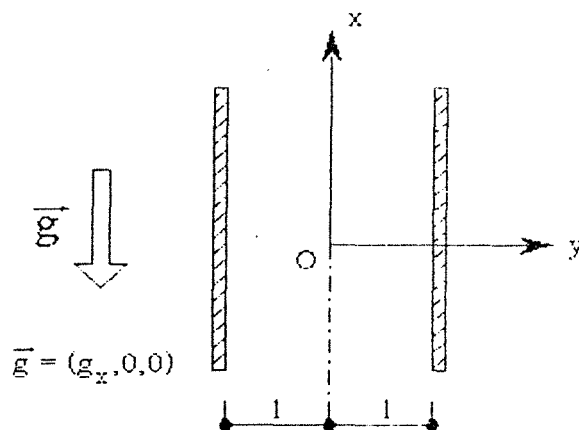


Figure III1 ; Caractéristiques du puits

Un tel type d'écoulement est caractérisé par :

- la vitesse d'écoulement ne dépend que de la position par rapport à l'axe Ox
- la vitesse d'écoulement u_y est nulle, on pose $u = u_x(y)$
- $\partial/\partial x$ est nulle
- $\partial/\partial t$ est nulle car l'écoulement est en régime stationnaire
- $g = -g_x$; $g_y = 0$
- la contrainte de cisaillement τ est nulle sur l'axe central du silo
- la masse volumique reste constante ou quasiment constante au cours de l'écoulement

III.1 Conservation de la quantité de mouvement

La forme contractée de la conservation de la quantité de mouvement donnée par l'équation (II.6) permet d'obtenir pour un écoulement du type de la figure III1 le système d'équations suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{\partial}{\partial x} \left[\rho \delta_{xx} + \rho u_x u_x - \eta \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial x} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial y} \left[\rho \delta_{xy} + \rho u_x u_y - \eta \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \right] + \rho g_x = \frac{\partial}{\partial t} \rho u_x \\ -\frac{\partial}{\partial x} \left[\rho \delta_{xy} + \rho u_y u_x - \eta \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial y} \left[\rho \delta_{yy} + \rho u_y u_y - \eta \left(\frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) \right] + \rho g_y = \frac{\partial}{\partial t} \rho u_y \end{array} \right. \quad (III.1)$$

En utilisant les différentes hypothèses simplificatrices, le système (III.1) se réduit au système d'équations suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial y} \left(\eta \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) + \rho g_x = 0 \\ -\frac{\partial}{\partial y} p = 0 \end{array} \right. \quad (III.2)$$

La seconde équation du système (III.2) indique que la pression à l'intérieur du puits est constante, alors que la première donne la relation (III.3).

$$\boxed{\frac{d}{dy} \left(\eta \frac{du_x}{dy} \right) = \rho g} \quad (III.3)$$

III.2 Conservation de l'énergie

La forme contractée de la conservation de l'énergie (II.7) donne, en tenant compte de la stationnarité de l'écoulement représenté par la figure III1, le système d'équations (III.4).

$$\left\{ \begin{array}{l}
 - \frac{\partial}{\partial x} \left[\rho u_x \left(\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} u^2 + \frac{1}{2} v^2 \right) - u_x \eta \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial x} \right) - K \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{2} \rho v^2 \right] \\
 - \frac{\partial}{\partial y} \left[\rho u_y \left(\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} u^2 + \frac{1}{2} v^2 \right) - u_x \eta \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) - K \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{2} \rho v^2 \right] \\
 + \rho u_x g_x - I = 0 \\
 - \frac{\partial}{\partial x} \left[\rho u_x \left(\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} u^2 + \frac{1}{2} v^2 \right) - u_y \eta \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) - K \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{2} \rho v^2 \right] \\
 - \frac{\partial}{\partial y} \left[\rho u_y \left(\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} u^2 + \frac{1}{2} v^2 \right) - u_y \eta \left(\frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) - K \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{2} \rho v^2 \right] \\
 + \rho u_y g_y - I = 0
 \end{array} \right. \quad (III.4)$$

Après simplification du système (III.4), la conservation de l'énergie s'exprime par la relation (III.5).

$$\boxed{\frac{d}{dy} \left(u \eta \frac{du}{dy} + K \frac{d}{dy} \frac{1}{2} \rho v^2 \right) = \rho u g + I} \quad (III.5)$$

IV. Détermination des grandeurs caractéristiques de l'écoulement

IV.1 Vitesse de fluctuation V

A partir de l'équation (II.14) l'équation de conservation de la quantité de mouvement (III.3) peut encore s'écrire :

$$\frac{d\tau}{dy} = \rho g \quad (III.6)$$

La contrainte de cisaillement en paroi s'exprime alors à partir de la conservation de la quantité de mouvement (III.6) de la manière suivante :

$$\tau(l) = \tau_p = \rho g l, \quad (III.7)$$

car la contrainte de cisaillement τ sur l'axe central du puits est nulle et parce que la masse volumique ρ est constante.

τ en fonction de y s'exprime alors :

$$\tau(y) = \tau_p \frac{y}{l} \quad (III.8)$$

La combinaison de (II.14) et de (III.8) donne : $\tau_p \frac{y}{l} = \eta \frac{du}{dy}$

d'où
$$\frac{du}{dy} = \frac{\tau_p}{\eta} \cdot \frac{y}{l} \quad (III.9)$$

L'intégration de la relation (III.9) permet d'obtenir la relation suivante pour la vitesse d'écoulement :

$$u = \frac{\tau_p}{2\eta} \frac{y^2}{l} + A \quad (III.10)$$

A est la constante d'intégration.

En dérivant (III.8) on obtient la variation de τ en fonction de y :

$$\frac{d\tau}{dy} = \frac{\tau_p}{l} \quad (III.11)$$

L'introduction des équations (II.14), (II.17), (II.22), (III.8), (III.10) et (III.11) dans la conservation de l'énergie (III.5) permet d'écrire :

$$\frac{\tau_p}{l} \left(\frac{\tau_p}{2\eta} \frac{y^2}{l} + A \right) + \gamma \rho \frac{v^3}{s} = \frac{d}{dy} \left[\eta \left(\frac{\tau_p}{2\eta} \frac{y^2}{l} + A \right) \left(\frac{\tau_p}{\eta} \frac{y}{l} \right) \right] + \frac{1}{2} r d^2 \rho \frac{d}{dy} \left(\frac{v}{s} \frac{d}{dy} v^2 \right)$$

d'où
$$\frac{\tau_p^2}{\eta} \frac{y^2}{l^2} + \frac{1}{2} r d^2 \rho \frac{d}{dy} \left(\frac{v}{s} \frac{d}{dy} v^2 \right) - \gamma \rho \frac{v^3}{s} = 0$$

La combinaison de cette dernière équation avec les relations (II.10) et (II.13), donne l'équation suivante :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dy} \left(\frac{v}{s} \frac{d}{dy} v^2 \right) + \frac{v^2}{s} v \left[\frac{\tau_p^2 t^2}{\rho^2 q r d^2} \frac{y^2}{l^2} - \frac{\gamma}{r d^2} \right] = 0,$$

sachant que la pression est constante à l'intérieur de l'écoulement on en déduit à l'aide de la relation (II.10) que le terme v^2/s est également constant. Ceci nous conduit finalement à une équation différentielle du second ordre qui décrit la variation de la vitesse de fluctuation v sur une section transversale de l'écoulement.

$$\boxed{\frac{d^2 v}{dy^2} + v \frac{1}{r d^2} \left[\frac{\tau_p^2 t^2}{\rho^2 q} \frac{y^2}{l^2} - \gamma \right]} = 0 \quad (III.12)$$

Posons maintenant : $P_0 = \frac{p}{\rho g l}$ et $T_p = \frac{\tau_p}{\rho g l}$

D'après la relation (III.7) on a : $T_p = 1$

Posons encore : $Y = \frac{y}{2l}$, $\delta = \frac{d}{2l}$ et $V = \frac{v}{\sqrt{gl}}$

pour obtenir : $dy^2 = 4l^2 dY^2$, $d^2v = \sqrt{gl} d^2V$ et $\frac{y}{l} = 2Y$

Ces dernières relations conduisent à une équation adimensionnelle qui donne la vitesse de fluctuation V pour Y variant entre -0.5 et $+0.5$.

$$\boxed{\frac{d^2V}{dY^2} + V \frac{1}{r\delta^2} \left[\frac{t^2}{P_0^2 q} 4Y^2 - \gamma \right] = 0} \quad (\text{III.13})$$

Conditions sur la vitesse de fluctuation V

La symétrie de l'écoulement impose que la dérivée de V par rapport à Y est nulle sur l'axe central du puits :

$$\left. \frac{dV}{dY} \right|_{Y=0} = 0 \quad (\text{III.14})$$

La relation (II.26) donne l'expression de la vitesse de fluctuation V_p au niveau des parois. Cette relation s'écrit adimensionnellement :

$$V_p = \frac{2r\delta}{\gamma_p} \left. \frac{dV_p}{dY} \right|_{Y=\pm 0.5} \quad (\text{III.15})$$

$$\gamma_p = a(1 - e_p^2)$$

γ_p traduit l'inélasticité des collisions grains-parois. Plus le coefficient de restitution des chocs grain-paroi e_p est proche de 1, plus élevée sera la vitesse de fluctuation V_p à la paroi.

IV.2 Vitesse d'écoulement U

La répartition de la vitesse de fluctuation V dans une section transversale de l'écoulement permet de calculer la variation de la vitesse d'écoulement u dans la même section.

A partir de l'équation (II.10) le diamètre des grains peut s'exprimer en fonction de la pression p et de la vitesse de fluctuation v de la manière suivante :

$$d = \frac{p s}{\rho t v^2} \quad (\text{III.16})$$

La combinaison de cette dernière équation avec les équations (II.13), (II.14) et (III.6) donne l'expression suivante :

$$\frac{du}{dy} = \frac{\tau_p t}{q \delta p} v \frac{y}{l}$$

D'où la relation suivante donnant la vitesse d'écoulement sur une section transversale de l'écoulement :

$$u = \frac{\tau_p t}{q \delta p} \int_{-l}^y v \frac{y}{l} dy \quad (\text{III.17})$$

en posant : $U = \frac{u}{\sqrt{gl}}$, on obtient une relation adimensionnelle donnant la vitesse d'écoulement U pour Y variant de -0.5 à 0.5 :

$$U = \frac{2t}{q \delta p_c} \int_{-0.5}^Y v Y dY \quad (\text{III.18})$$

Conditions sur la vitesse d'écoulement U

Comme pour la vitesse de fluctuation, la symétrie de l'écoulement par rapport à l'axe central du silo impose que :

$$\left. \frac{dU}{dY} \right|_{Y=0} = 0 \quad (\text{III.19})$$

a) Parois rugueuses

Si les parois sont suffisamment rugueuses alors la vitesse d'écoulement U au niveau des parois est nulle :

$$U_p = U(-0.5) = U(0.5) = 0 \quad (\text{III.20})$$

b) Parois lisses

Dans ce cas on utilise la condition à la paroi (II.30) sur u , qui combinée avec les équations (II.10), (II.13) et (II.14) donne la vitesse d'écoulement au niveau des parois :

$$u_p = \frac{\tau_p t}{\beta_p p} v(y) \quad (\text{III.21})$$

avec $y = \pm l$

La relation (III.21) s'écrit adimensionnellement :

$$U_p = \frac{t}{\beta_p P_0} V(Y) \quad (III.22)$$

avec $Y = \pm 0.5$

La vitesse d'écoulement U dans une section transversale de l'écoulement s'écrit donc définitivement :

$$U = U_p + \frac{2t}{q \delta P_0} \int_{-0.5}^Y V Y dY \quad (III.23)$$

IV.3 Autre paramètre du modèle : Δl

Un matériau qui s'écoule occupe un volume légèrement plus élevé qu'un matériau au repos. Le paramètre Δl introduit ici, décrit cette augmentation de volume entre un matériau au repos ($s = 0$) et un matériau qui s'écoule ($s \neq 0$). Si on imagine que le matériau qui s'écoule à l'intérieur du puits représenté par la figure III1 est tassé contre une paroi du puits, alors il se forme un espace vacant de largeur Δl entre la seconde paroi et la surface des grains, comme schématisé par la figure III2.

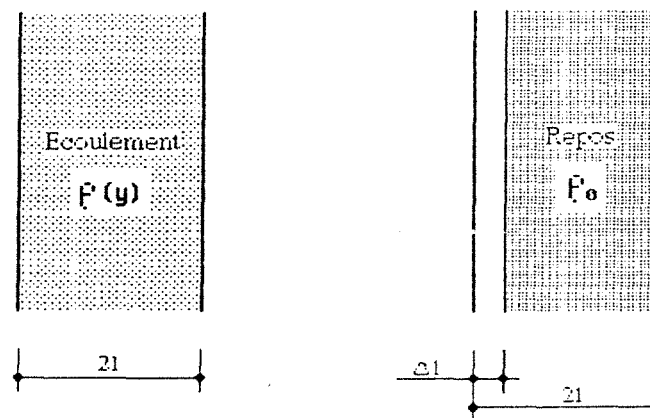


Figure III2 : illustration de la définition du paramètre Δl

Si la masse volumique du matériau au repos est ρ_0 et que la masse volumique du matériau en mouvement est $\rho(y)$, alors on peut écrire l'égalité suivante :

$$\int_{-l}^l \rho(y) dy = \int_{-l}^{l-\Delta l} \rho_0 dy, \quad (III.24)$$

les expressions de $\rho(y)$ et de ρ_0 sont données respectivement par les relations (II.2) et (II.3). La combinaison de ces deux dernières relations et l'utilisation de l'inégalité (II.1) permet d'exprimer $\rho(y)$ en fonction de ρ_0 en négligeant les termes s^2 et s^3 car très petit devant s :

$$\rho(y) = \rho_0 \left(1 - \frac{3s(y)}{d}\right) \quad (\text{III.25})$$

A partir de ces deux dernières relations (III.24) et (III.25) il est facile de trouver l'expression de Δl en fonction de la distance s :

$$\Delta l = \frac{3}{d} \int_{-l}^l s(y) dy \quad (\text{III.26})$$

Δl peut encore être exprimé en fonction de la vitesse de fluctuation v en injectant l'équation d'état (II.10) dans (III.26) :

$$\Delta l = \frac{3t}{p} \int_{-l}^l v^2(y) \rho(y) dy \quad (\text{III.27})$$

en posant $\Delta L = \frac{\Delta l}{2l}$, (III.27) s'écrit adimensionnellement :

$$\Delta L = \frac{3t}{P_0} \int_{-0.5}^{0.5} V^2(Y) dY \quad (\text{III.28})$$

IV.4 Variation de l'espacement des grains s et de la masse volumique ρ dans une section de l'écoulement

Les équations de conservation de la masse (II.4), de la quantité de mouvement (II.6) et de conservation de l'énergie (II.7) ne prennent pas en compte une éventuelle variation de la masse volumique ρ au cours de l'écoulement. Il sera donc intéressant de calculer la variation de la masse volumique pour se rendre compte de la validité de cette hypothèse. Cette variation se calcule à partir de la distance s qui sépare les grains entre eux.

L'équation d'état (II.10) permet d'écrire directement :

$$s(y) = t \frac{d}{p} \rho(y) v^2(y) \quad (\text{III.29})$$

En posant $S = \frac{s}{2l}$, on obtient pour $S(Y)$ l'équation adimensionnelle suivante (III.30)

$$S(Y) = t \frac{\delta}{P_o} V^2(Y) \quad (III.30)$$

La variation de la masse volumique $\rho(y)$ par rapport à la masse volumique au repos ρ_o s'obtient à l'aide de la relation (III.25), elle s'écrit adimensionnellement de la manière suivante :

$$\frac{\rho(Y)}{\rho_o} = 1 - 3 \frac{S(Y)}{\delta} \quad (III.31)$$

IV.5 Résolution numérique de l'équation différentielle (III.13) donnant la vitesse de fluctuation V Détermination de la vitesse d'écoulement U

Algorithme du logiciel HAFF.PRGR

La solution de l'équation différentielle (III.13) est la fonction $V(Y)$, donnant la répartition de la vitesse de fluctuation sur une section de l'écoulement. La résolution se fait à l'aide d'une méthode numérique basée sur l'algorithme de Runge-Kutta. Dans un premier temps les coefficients r , q , t et a sont pris égaux à 1. Seule une étude expérimentale permettra de définir les valeurs des constantes pour le matériau granulaire étudié. L'équation (III.13) est alors intégrée numériquement en ayant choisi P_o et V_p arbitrairement. La valeur arbitraire de V_p , permet ensuite de calculer dV_p/dY par la relation (III.15). Tout en gardant la valeur de V_p inchangée, la valeur de P_o est calculée par itérations successives jusqu'à ce que la valeur de P_o vérifie la relation (III.14).

Avec la valeur de P_o trouvé auparavant est calculée numériquement par la relation (III.23) la vitesse d'écoulement $U(Y)$. Si cette dernière est physiquement compatible avec l'écoulement dans le puits vertical de la figure III1, alors la solution est valable. Si par contre la répartition de U dans une section n'est pas physiquement acceptable, alors une nouvelle solution de l'équation (III.13) est cherchée en modifiant à nouveau la valeur de P_o . La figure III3 donne un exemple de calcul pour $t = q = r = a = 1$, $e_p = 0.84$, $\delta = 0.01$, $\gamma = 0.1$, $V_p = 0.004$ et $U_p = 0$. La solution (a) calculée avec le logiciel HAFF.PRGR développé au laboratoire donne une pression $P_o = 1.6836$ alors que (b) donne $P_o = 2.5886$, cette dernière solution étant physiquement compatible avec l'écoulement dans un puits, alors que la première ne l'est pas.

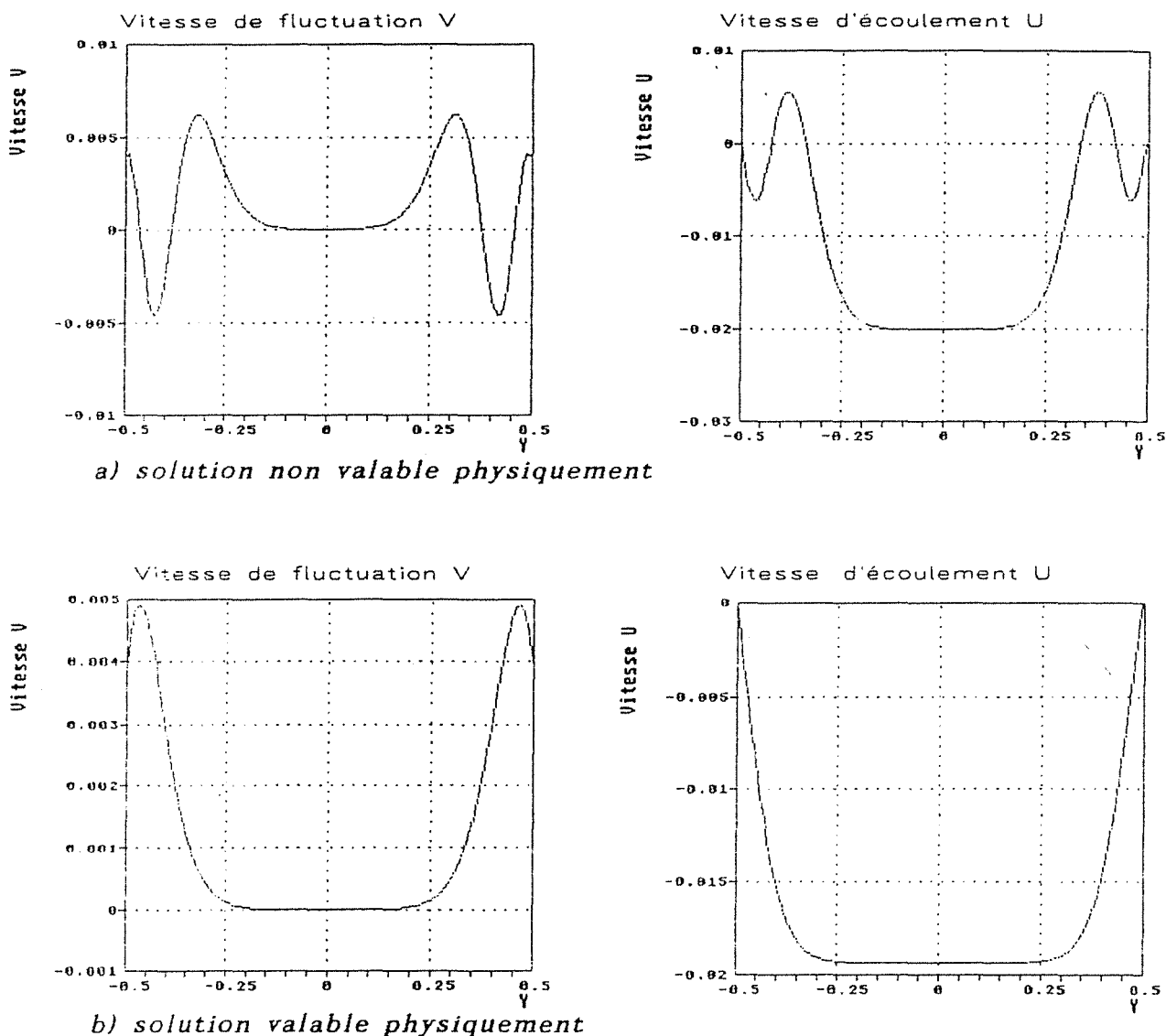
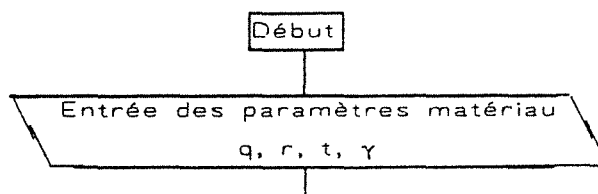
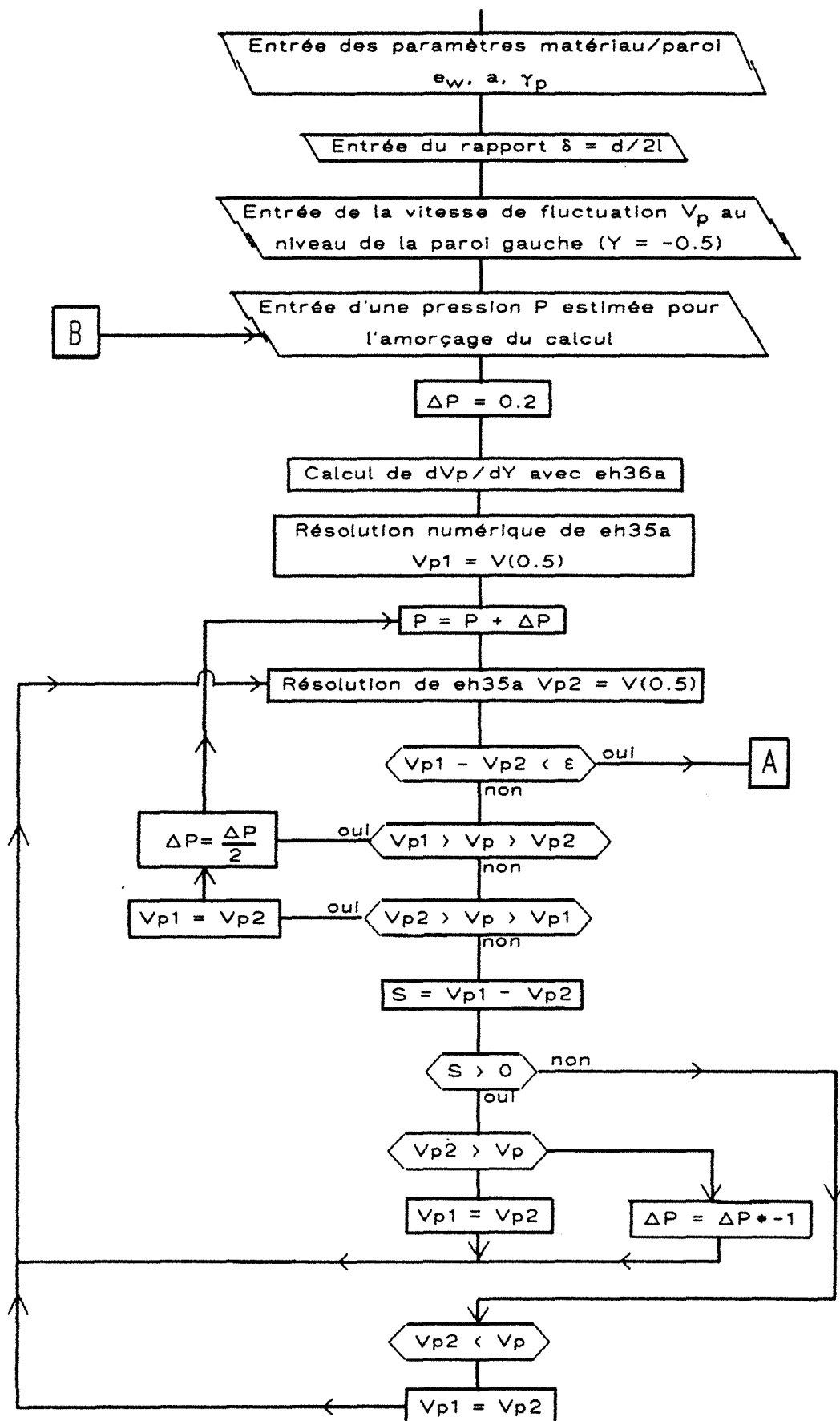


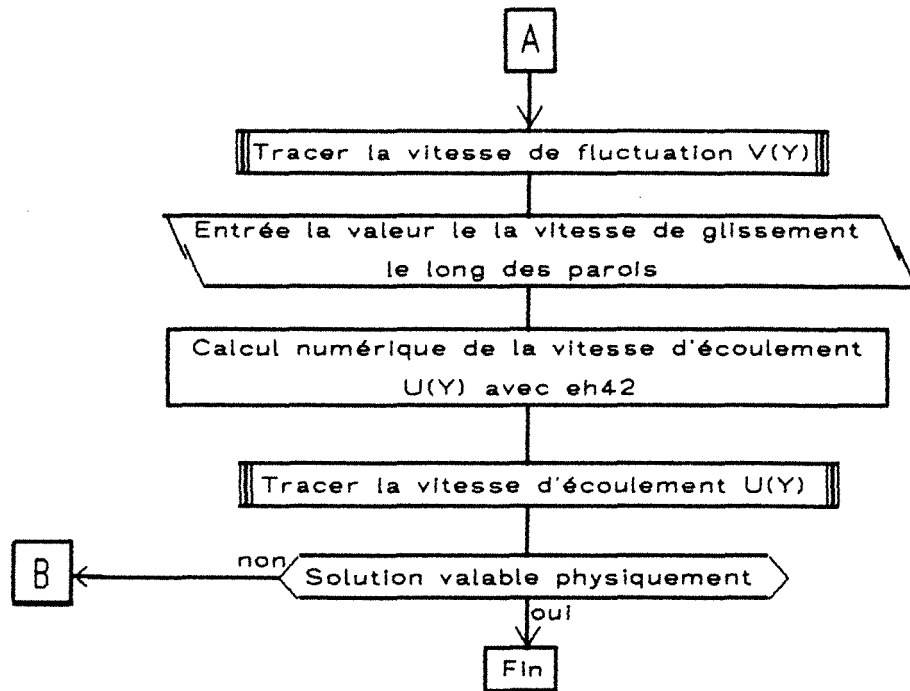
Figure III.3 : Différentes solutions pour V et U

Organigramme du logiciel de résolution HAFF.PRGM de l'équation (III.13) et de calcul des autres caractéristiques de l'écoulement

L'organigramme donne les trois étapes de calcul pour obtenir les vitesses de fluctuation $V(Y)$ et d'écoulement $U(Y)$. Il donne notamment la technique de calcul utilisée pour obtenir la pression P_0 donnant une fonction $V(Y)$ dont les valeurs à la paroi gauche et la paroi droite sont les mêmes.







V. Influence des différents coefficients du modèle sur les caractéristiques de l'écoulement

V.1 Influence de la vitesse de fluctuation en paroi V_p

Il paraît intéressant d'étudier l'influence de la vitesse de fluctuation sur la vitesse d'écoulement ou sur la variation de la distance S qui sépare les grains entre eux. La figure III4 montre la variation de la vitesse de fluctuation dans une section de l'écoulement en fonction de la vitesse de fluctuation en paroi V_p . Les paramètres t , q , r , a sont pris égales à 1, le coefficient γ d'élasticité des chocs grain-grain vaut 0.01 pour cette étude, alors que le coefficient e_p de restitution de l'énergie pour les chocs grain-paroi vaut 0.84. La géométrie du puits est donnée par le paramètre $\delta = 0.01$. La figure III4 montre encore la variation de la vitesse d'écoulement $U(Y)$ calculées à partir des courbes $V(Y)$ de la même figure.

La figure III4 montre que la vitesse de fluctuation V_p au niveau des parois a une très grande influence sur la courbe $V(Y)$ de la vitesse de fluctuation comme sur la vitesse d'écoulement $U(Y)$. La connaissance de la valeur de V_p est donc primordiale pour pouvoir approcher des écoulements gravi-

taires de matières granulaires avec le modèle que nous avons développé dans ce chapitre. Par contre comme on le voit également la vitesse V_p n'a pas

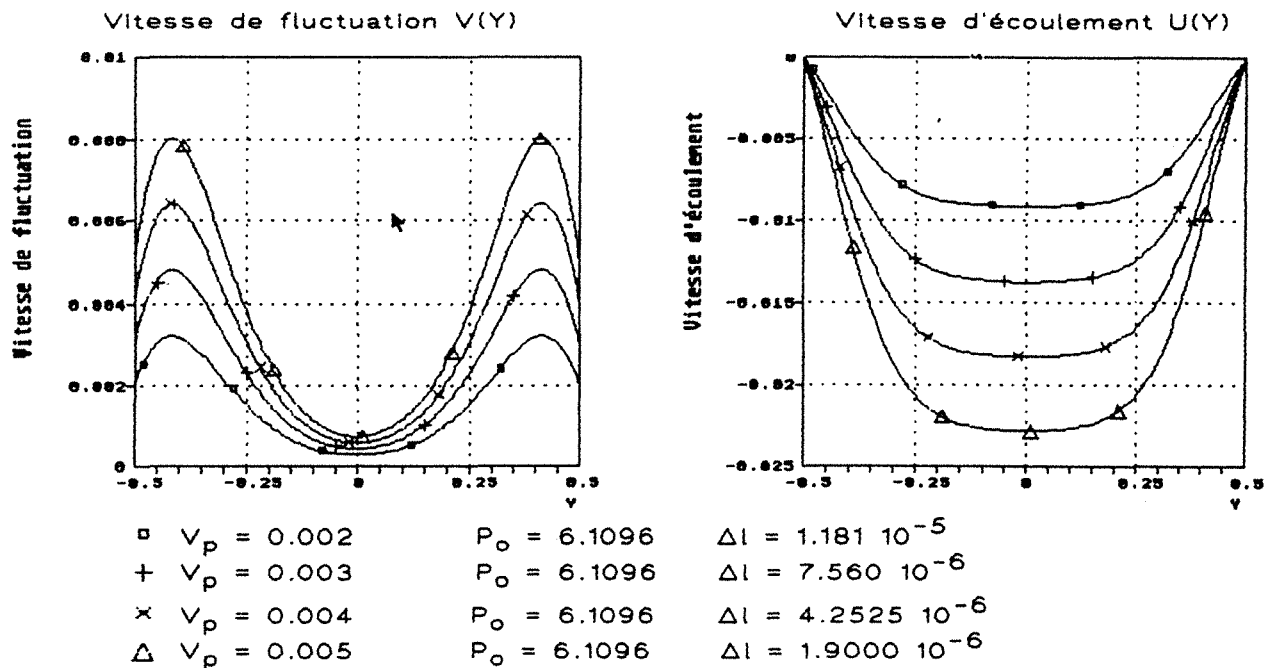


Figure III4 : Influence de V_p sur les vitesses $V(Y)$ et $U(Y)$

d'influence sur la pression à l'intérieur de l'écoulement gravitaire. Les valeurs minimums et maximums des courbes $V(Y)$ de la figure III4 données dans le tableau III1 ont toutes la même abscisse Y , soit respectivement 0 et 0.4.

V_p	$V_{\min}$	$V_{\max}$
0.002	0.0003007	0.003188
0.003	0.0004532	0.004783
0.004	0.0006014	0.006377
0.005	0.0007516	0.007972

Tableau III1 : valeurs minimums et maximums des courbes $V(Y)$ de la figure III4

Lorsqu'on fait le rapport des valeurs V_p , $V_{\min}$, $V_{\max}$ pour deux courbes quelconques du tableau III1 on constate que celui-ci reste constant. On peut ainsi par exemple écrire :

$$\frac{0.002}{0.005} = \frac{0.003188}{0.007972} = \frac{0.0003007}{0.0007516} = 0.40$$

Ce résultat permet de décomposer le fonction $V(Y)$, représentant la vitesse de fluctuation, de la manière suivante :

$$V(Y) = V^* \cdot V_n(Y), \quad (\text{III.32})$$

V^* est un facteur qui dépend des caractéristiques de l'écoulement, telles que le débit ou la vitesse de glissement le long des parois. La fonction $V_n(Y)$ dépend des caractéristiques du puits et des valeurs des constantes de la modélisation théorique qui caractérisent le matériau granulaire.

La figure III5 montre la variation de la distance S qui sépare les grains ainsi que la variation de la masse volumique par rapport à la masse volumique au repos ρ_0 . Ces deux types de courbes sont naturellement déterminées à partir des courbes $V(Y)$ de la figure III4 et avec les relations (III.30) et (III.31).

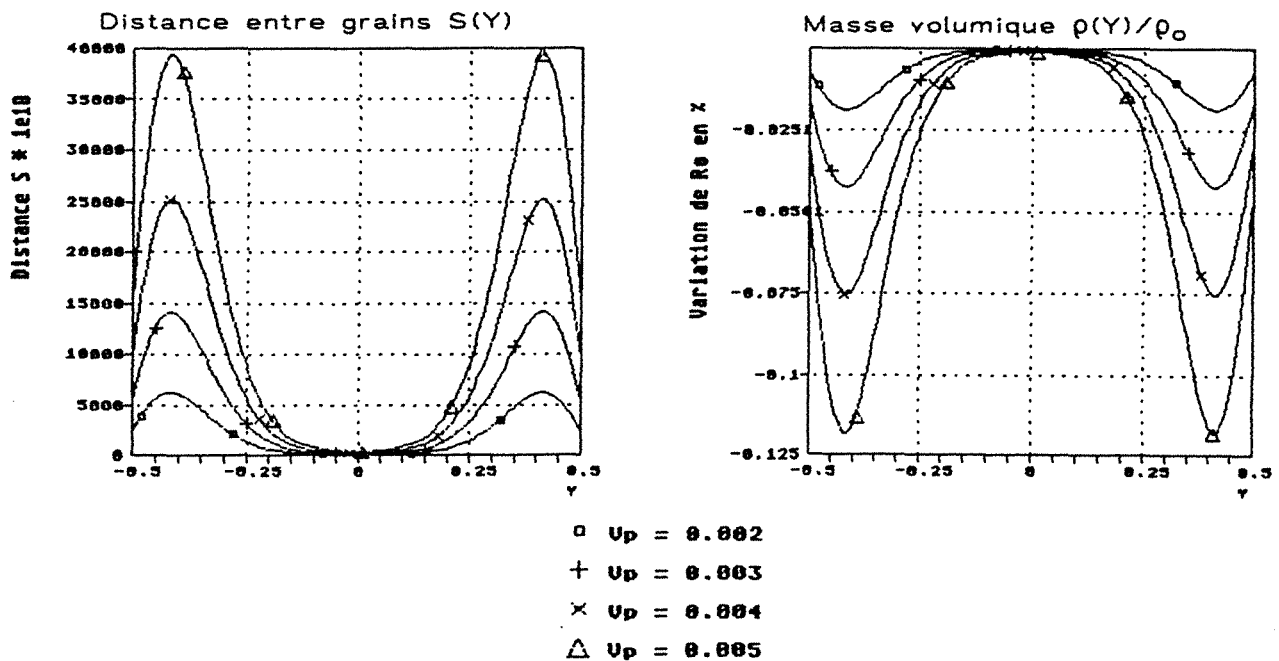


Figure fh6 : Variation de la distance $S(Y)$ et de $\rho(y)/\rho_0$ en fonction de V_p

La figure III5 montre que plus la vitesse de fluctuation $V(Y)$ est élevée, plus la distances entre les grains $S(Y)$ est grande et plus faible sera la masse volumique du matériau à l'intérieur de l'écoulement gravitaire soumis à un taux de cisaillement élevé.

Les quatres graphes des figures III4 et III5 montrent très clairement qu'au milieu de l'écoulement il se forme un bouchon dont la largeur est fonction des paramètres de l'écoulement. A l'intérieur du bouchon les grains sont très proche les uns des autres et s'écoulent avec une vitesse verticale uniforme. La masse volumique du matériau dans le bouchon est d'ailleurs très proche de la masse volumique au repos ρ_0 . Alors qu' au niveau des parois le matériau est soumis à un fort gradient de vitesse qui provoque une dilatance du matériau, qui engendre une augmentation de la distance S entre les grains qu'au milieu de l'écoulement.

V.2 Influence du coefficient γ

La figure III6 montre l'influence du coefficient de restitution de l'énergie γ lors des chocs grains-grains lorsque le coefficient en paroi γ_p est plus faible que γ . La figure III7 montre l'évolution des vitesses de fluctuation et d'écoulement lorsque nous supposons que $\gamma = \gamma_p$. Cette dernière hypothèse peut être réalisée en collant le matériau granulaire sur le parois du canal. La figure III8 montre enfin l'influence de γ lorsque celui-ci est inférieur à γ_p .

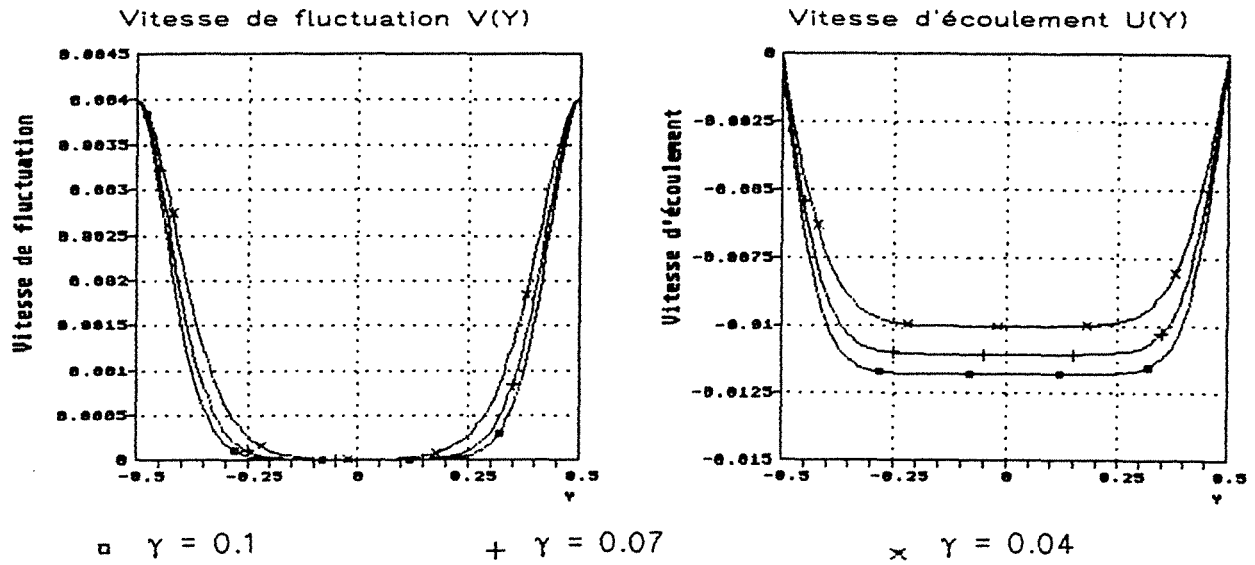


Figure III6 : $\gamma > \gamma_p$ $a = r = t = q = 1$ $\delta = 0.01$ $V_p = 0.004$
 $\gamma_p = 0.01$

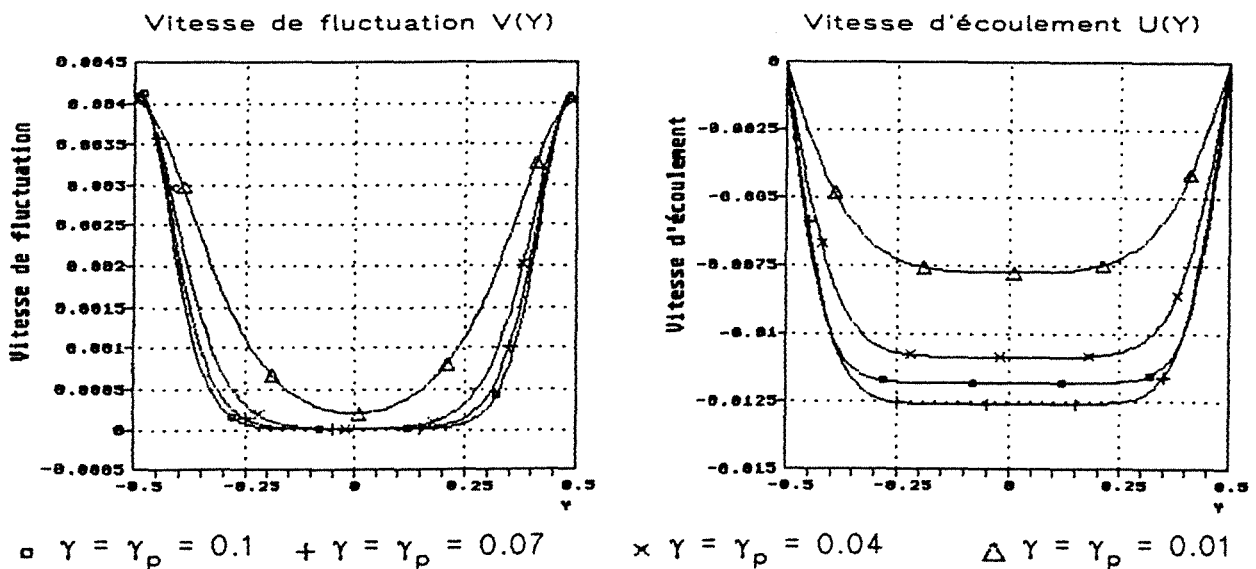


Figure III7 : $\gamma = \gamma_p$ $a = r = t = q = 1$ $\delta = 0.01$ $V_p = 0.004$

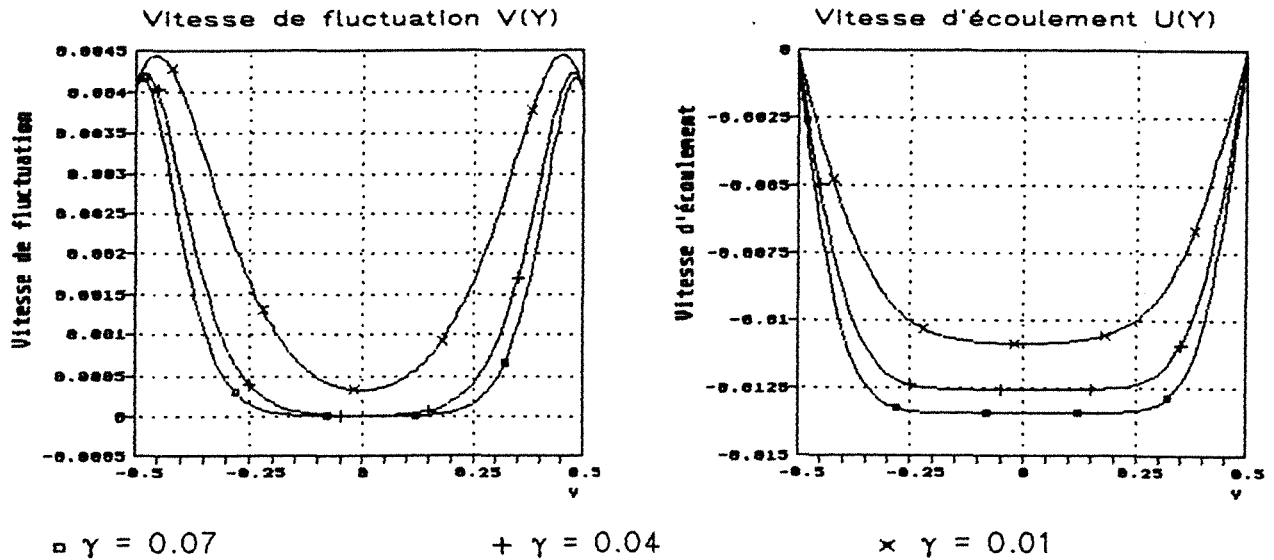


Figure III8: $\gamma < \gamma_p$ $a = r = t = q = 1$ $\delta = 0.01$ $V_p = 0.004$
 $\gamma_p = 0.1$

Sur les trois figures III6, III7 et III8 on constate d'une manière générale que le coefficient d'élasticité des collisions γ a une grande influence sur les valeurs des vitesses d'écoulement $U(Y)$ et sur la forme des ces mêmes courbes. En effet plus γ est faible est plus faible sera la vitesse d'écoulement u_p sur l'axe central du puits et plus faible sera la largeur du bouchon au milieu du puits.

Ce phénomène peut s'expliquer de la manière suivante. Plus les grains constituant le matériau granulaire absorbe l'énergie lors des collisions entre grains, plus élevé sera le coefficient γ . Pour de tels matériaux l'énergie aura tendance à se dissiper rapidement en allant de la paroi vers le centre, ce qui entrainera une chute rapide de la vitesse de fluctuation vers zéro. Une vitesse de fluctuation nulle signifie que les grains ne sont plus animés d'un mouvement vibratoire aléatoire autour de leurs position moyenne, c'est à dire que les grains restent en contact quasi permanent, la distance S tend vers zéro (fig.III5). Il se forme un bouchon central s'écoulant avec une vitesse uniforme sur toute sa largeur. Plus ce bouchon sera large plus il sera lourd, donc plus grande sera vitesse d'écoulement. Le poids du bouchon facilitant la chute de celui-ci à travers le matériau granulaire. Cet écoulement peut être schématisé par un piston coulissant entre deux couches soumises à un taux de cisaillement, qui joue le rôle de lubrifiant pour favoriser le mouvement du piston.

On peut encore remarquer que de tels écoulements sont à la limite de validité du modèle, car n'oublions pas qu'une des hypothèses est que la distance S entre les grains est très faible par rapport au diamètre d des grains, mais qu'en aucun cas cette distance S peut être nulle.

V.3 Influence du coefficient γ_p caractérisant les collisions grain-paroi

Les courbes de la figure III9 montrent que l'influence du coefficient γ_p n'est pas négligeable. Comme dans le paragraphe précédent plus le coefficient caractérisant l'élasticité des collisions grain-paroi augmente, plus la vitesse d'écoulement $U(Y)$ augmente.

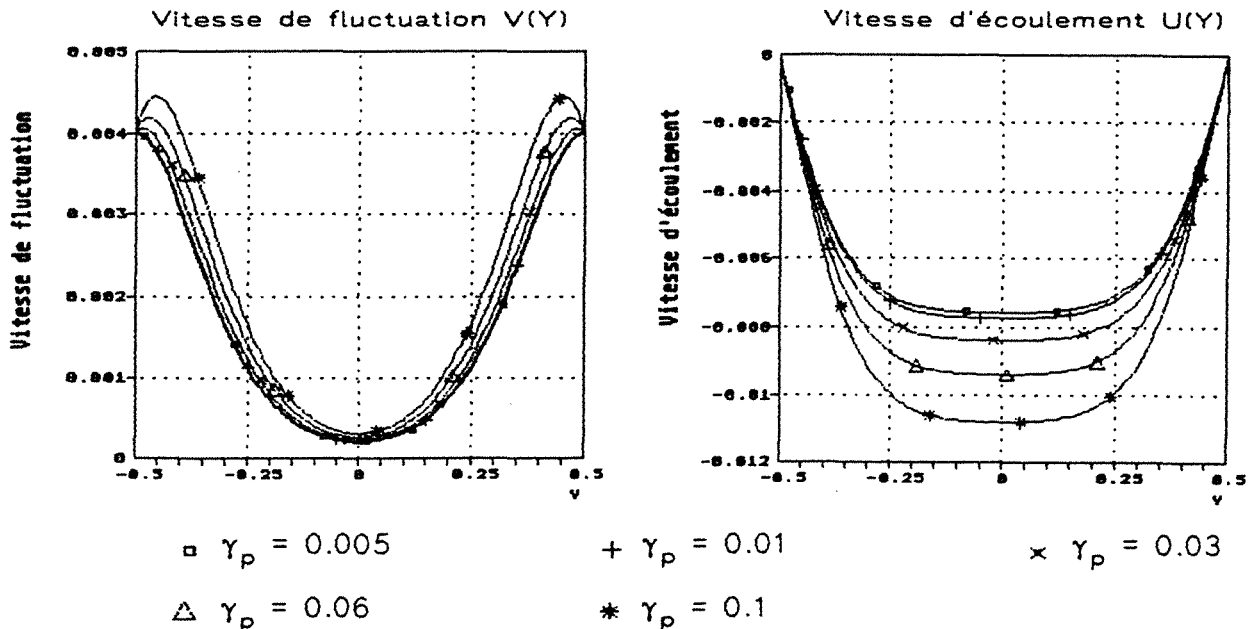


Figure III9 : $a = r = t = q = 1$ $\delta = 0.01$ $V_p = 0.004$
 $\gamma = 0.01$

V.4 Influence de la constante t

La figure III10 montre que la constante t n'a pas d'influence sur les vitesses de fluctuation et d'écoulement, mais que par contre il sert à ajuster la pression à l'intérieur de l'écoulement sur des données expérimentales. En effet on se rend compte qu'il apparaît toujours le rapport P_0/t dans les équations (III.13) et (III.23) que nous avons établies dans ce chapitre. Ce rapport restant naturellement toujours constant pour un type d'écoulement. Dans l'exemple qui a été choisi sur la figure III10 P_0/t vaut 6.1096.

Par ailleurs on constate encore que la constante t n'a pas d'influence sur le paramètre Δl décrivant le foisonnement du matériau pendant son écoulement et sur la distance $S(Y)$ qui sépare les grains entre eux. En effet dans les relations (III.28) et (III.30) permettant le calcul de Δl et de $S(Y)$, le rapport P_0/t , constant quelle que soit t , est multiplié par la fonction $V(Y)$ au carrée, ou par l'intégrale de cette dernière, qui sont également invariante lorsque t varie (fig.III10).

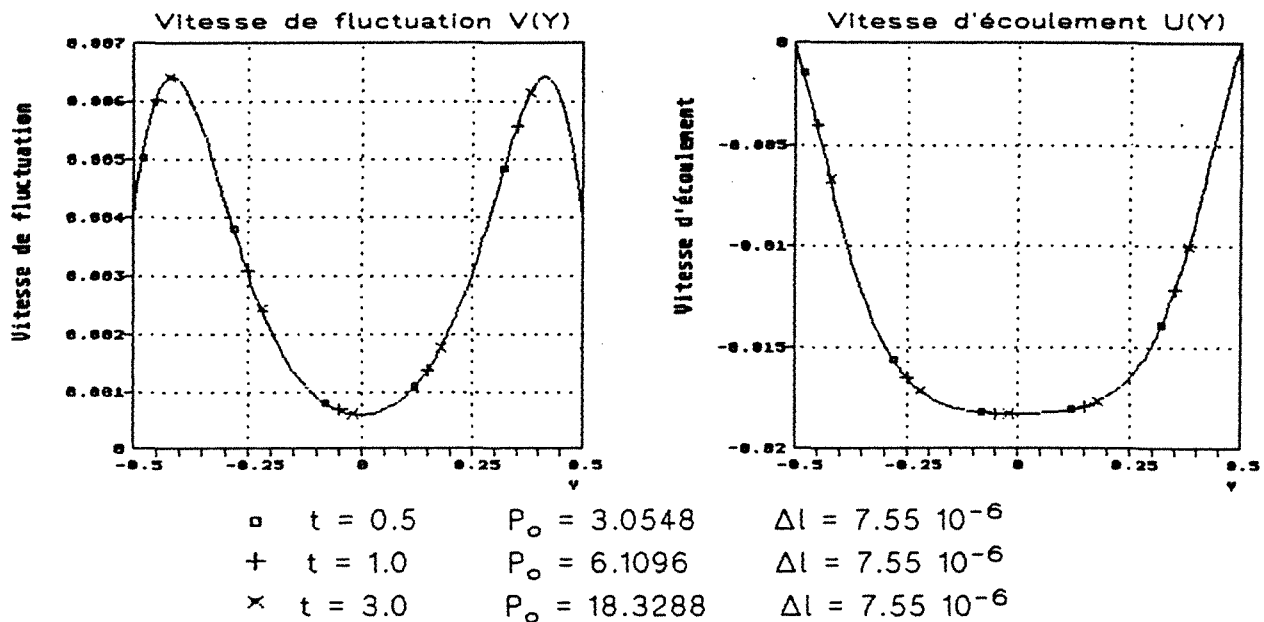


Figure III10 : influence du paramètres t sur $V(Y)$ et $U(Y)$

$$a = q = r = 1 \quad V_p = 0.004 \quad \gamma = 0.01 \quad \delta = 0.01 \quad e_p = 0.84$$

La relation (III.31) permet encore d'affirmer que la variation de la masse volumique $\rho(Y)$ est également indépendante de la constante t , car $\rho(Y)$ est directement proportionnelle à la distance $S(Y)$. Tout ceux-ci est tout à fait logique car le paramètre Δl et les fonctions $S(Y)$ et $\rho(Y)$ sont étroitement liés, car ils décrivent tout les trois le foisonnement du matériau granulaire pendant l'écoulement.

V.5 Influence de la constante r

La figure III11 montre l'évolution des vitesses de fluctuation et d'écoulement lorsque la constante r introduite par HAFF dans l'équation (II.16) varie. Plus r augmente et plus la vitesse de fluctuation a tendance à s'uniformiser sur toute la largeur du puits. Ce qui entraîne une diminution de la vitesse d'écoulement avec un rétrécissement de la largeur du bouchon qui se forme au centre.

V.6 Influence de la constante q

Comme le montre la figure III12 la constante q n'influence pas la vitesse de fluctuation. En effet si on regarde l'équation différentielle (III.13) dont $V(Y)$ est la solution, on constate que le produit $P_0^2 \cdot q$ reste constant lorsque q varie. Dans l'exemple de la figure III12 le produit $P_0^2 \cdot q$ est égal à

37.32. Mais par contre la constante q intervient dans l'équation (III.23) pour le calcul de la vitesse d'écoulement. Ce terme q sert dans la relation (II.12) à déterminer le gradient de vitesse d'écoulement du/dy à partir de la contrainte de cisaillement τ .

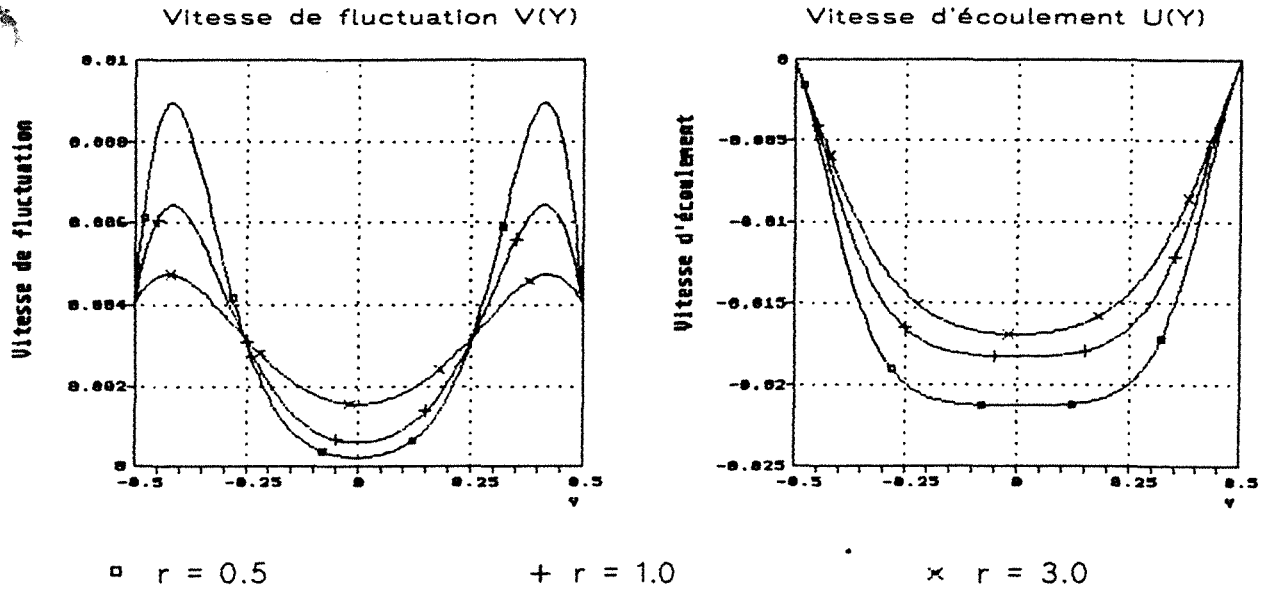


Figure III11 : influence du paramètres r sur $V(Y)$ et $U(Y)$

$a = q = t = 1$ $V_p = 0.004$ $\gamma = 0.01$ $\delta = 0.01$ $ep = 0.84$

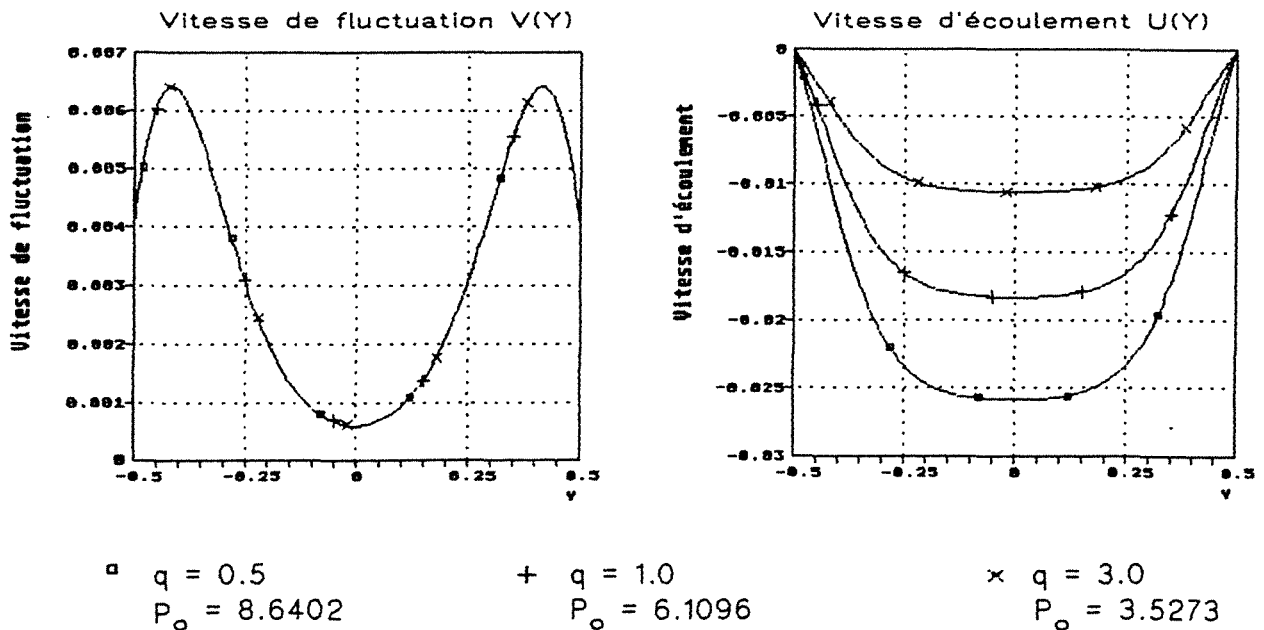


Figure III12 : influence du paramètres q sur $V(Y)$ et $U(Y)$

$a = t = r = 1$ $V_p = 0.004$ $\gamma = 0.01$ $\delta = 0.01$ $ep = 0.84$

VI. Confrontation du modèle avec des mesures réelles

VI.1 Généralités

Avant d'appliquer notre modélisation originale développée dans ce chapitre à des écoulements de matériaux granulaires naturels, nous avons confronté la théorie avec des écoulements gravitaires de billes de verre à l'intérieur de trémies dont les parois sont faiblement inclinées par rapport à la verticale. Les billes constituant le matériau modèle ont toutes un diamètre de 5 millimètres, de plus elles respectent d'une manière excellente les hypothèses d'utilisation de la modélisation. Les champs de vitesses expérimentales déterminées par une technique de mesure présentée dans le chapitre suivant sont représentés dans l'annexe 1.

VI.2 Comparaison des vitesses théoriques avec les vitesses expérimentales

Nous nous contentons dans ce paragraphe de faire la comparaison entre les vitesses théoriques et les vitesses expérimentales pour les profils aux cotes de 20 et 35 centimètres avec des parois inclinées à 10 degrés par rapport à la verticale. Les parois de la trémie étant elles-mêmes recouvertes de billes de verre afin d'obtenir l'égalité entre les paramètres γ et γ_p . L'ouverture de l'orifice inférieur de la trémie est fixée à 2.66 centimètres.

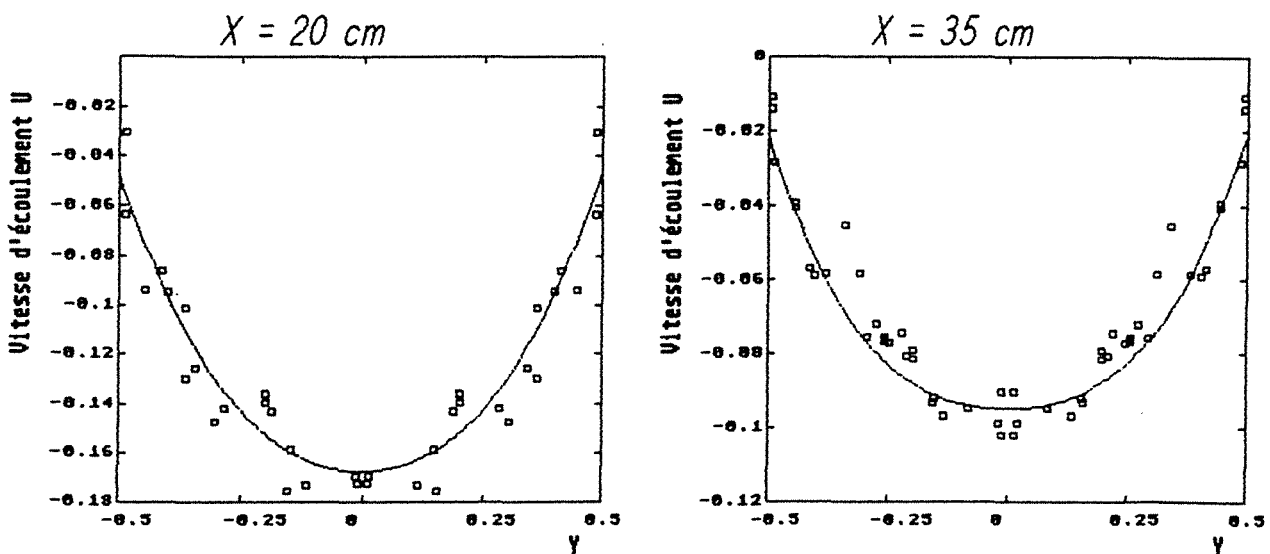


Figure III13 : comparaison des champs de vitesses adimensionnelles théoriques et expérimentales pour les billes de verre

La figure III13 donne la comparaison des différents champs de vitesses, elle montre une excellente concordance entre les vitesses théoriques et les vitesses expérimentales. Les différents paramètres de la modélisation pour les billes de verre de 5 millimètres de diamètre sont les suivants :

$$q = 1.4 \quad r = 1.2 \quad \gamma = \gamma_p = 0.023 \quad \beta_p = 0.8$$

La technique de détermination des paramètres ci-dessus caractérisant les billes de verre de 5 millimètres de diamètre et décrite dans les chapitres suivants.

VII . Conclusion

Les équations décrivant l'écoulement gravitaire d'un matériau granulaire ont été déterminées d'un manière originale à partir du modèle proposé dans le chapitre précédent. Comme on peut le constater les caractéristiques de l'écoulement, comme la vitesse d'écoulement, la pression et la variation volumique dépendent toutes de la vitesse de fluctuation des grains. Cette vitesse est donc une grandeur essentielle pour pouvoir caractériser les écoulements gravitaires rapides.

L'algorithme développé au laboratoire permet dans un premier temps de calculer numériquement la vitesse de fluctuation et la pression à l'intérieur de l'écoulement. La seconde étape consiste à calculer les vitesses d'écoulement et des grandeurs caractérisant la variation de la masse volumique à partir de la connaissance de la fonction représentant la la variation de la vitesse de fluctuation dans une section transversale de l'écoulement.

La dernière partie de ce chapitre étudie les modifications du comportement de l'écoulement lorsque les caractéristiques du matériau étudié changent. L'influence des différentes constantes du modèle sur les vitesses de fluctuation et d'écoulement, et sur la pression est traduites par des courbes. A partir de ces courbes on constate que la plupart des paramètres de la modélisation caractérisant le matériau et la paroi ont une grande influence sur les grandeurs caractéristiques de l'écoulement gravitaire. Dans le dernier paragraphe nous montrons que notre modélisation redonne les vitesses réelles avec précision très satisfaisante, à condition de connaître les constantes caractéristiques du matériau que sont les billes de verre dans ce cas. Il sera donc très important de développer dans la suite de ce travail une procédure visant à déterminer de manière précise les différents paramètres et constantes. Cette recherche pourra se faire par exemple en calant les vitesses d'écoulement théorique sur des mesures expérimentales.

Chapitre 4

Caractérisation expérimentale d'un écoulement gravitaire à l'intérieur de trémies planes

I. Introduction

Une meilleure compréhension des mécanismes d'écoulement des matériaux granulaires à l'intérieur de trémies convergentes nécessite de longues investigations expérimentales. De nombreux auteurs tels que BUGGISCH & FUTTERER dans [7], [8] et [10], SAVAGE dans [82], NEDDERMAN & LAOHAKUL dans [71] ont mené des études expérimentales pour déterminer les champs de vitesses à l'intérieur de trémies ou de silos plans. Mais dans la littérature on ne trouve pas trace d'études expérimentales complètes visant à déterminer l'influence de l'inclinaison et de la rugosité des parois latérales sur l'écoulement des matériaux granulaires à l'intérieur des trémies planes.

Il nous a donc paru intéressant de mesurer les champs de vitesses à l'intérieur de plusieurs trémies bidimensionnelles de géométrie et de rugosité de paroi différentes. Pour chaque type de rugosité de paroi et d'inclinaison de paroi nous avons ainsi déterminé la variation du débit massique au cours du temps, et les champs de vitesses sur trois niveaux différents. La détermination des profils de vitesses verticales est faite par une méthode qui s'inspire d'une méthodologie déjà utilisée au laboratoire dans les ouvrages [100], [102], et [50]. Les points expérimentaux des différents profils de vitesses sont ensuite approximés par plusieurs méthodes pour obtenir des courbes passant au mieux par les points.

Ces données expérimentales pourront servir par la suite à vérifier ou à infirmer des modèles mathématiques ou numériques caractérisant ce type d'écoulement.

Cette longue et laborieuse étude expérimentale met en évidence plusieurs types d'écoulement de matériaux granulaires en fonction de l'inclinaison des parois des trémies. Celle-ci varie entre 0° et 33° par rapport à la verticale. En effet pour des angles α faibles par rapport à la verticale nous sommes en présence d'écoulements soumis à des taux de cisaillement élevés au niveau des parois, alors que pour des angles d'inclinaison plus élevés apparaissent des zones proches des parois où la vitesse d'écoulement du matériau est faible voir quasiment nulle. L'épaisseur de cette zone morte semble s'agrandir lorsque la rugosité des parois augmente.

II. Description des essais réalisés

II.1 Généralités

Toute une série d'essais dont les caractéristiques sont données dans le tableau IV1 ont été réalisés afin de mieux comprendre l'influence de l'inclinaison et de la rugosité des parois des trémies sur les champs de vitesses et donc sur les contraintes à l'intérieur d'un écoulement de matière granulaire. Comme cela est précisé dans le tableau IV1 pour chaque type de trémie nous avons déterminé, dans la mesure du possible, les profils de vitesses aux cotes $x = 20$ cm, $x = 35$ cm, $x = 55$ cm {fig.IV7, fig.IV15}. L'épaisseur des trémies h et la largeur l_1 {fig.IV1} de l'orifice inférieur sont les mêmes pour tous les essais, c'est à dire 3 centimètres pour l'épaisseur et 4 centimètres pour la largeur de l'orifice de vidange. Notre objectif fut dans un premier temps de faire varier l'angle α d'inclinaison des parois par rapport à la verticale de 0° jusqu'à 33° {fig.IV1}. Mais lors des essais préliminaires, il c'est rapidement avéré que l'alimentation de la trémie en matériau grâce au bac surmontant le dispositif expérimental {fig.IV7} n'était plus possible pour des angles α entre 0° et 4° . Le débit est trop élevé pour de telles géométries.

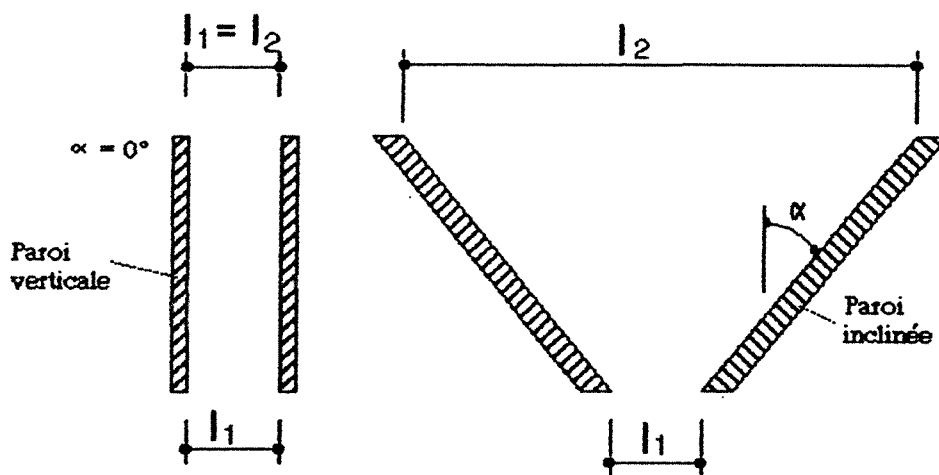


Figure IV1 : Les différents angles α d'inclinaison des trémies planes

Par ailleurs il se produit un foisonnement important lors de l'ouverture de l'orifice inférieur de largeur l_1 {fig.IV1} lorsque l'inclinaison des parois par rapport à la verticale est inférieure ou égale à 4 degrés. Il se crée ainsi de grands espaces vides entre les grains qui empêchent tout contact entre les grains ou entre les grains et les parois. Pour ce type de trémies on est en présence d'un phénomène qui ne peut plus être considéré comme un écoulement de matériau granulaire car les grains, n'ayant plus d'interaction entre eux, tombent individuellement en chute libre. Ces raisons nous ont dissuadées d'étudier des trémies ou des puits dont les parois étaient verticales ou quasi verticales et dont l'orifice inférieur est de même largeur que le puits ou la trémie à son extrémité inférieure {fig.IV1}.

II.2 Le matériau granulaire

Des petits pois secs ont été utilisés pour tous les essais d'écoulement. Ils présentent l'avantage d'être un matériau granulaire naturel dont les particules sont de forme sphérique. Le diamètre des grains varie entre 6mm et 9mm, le diamètre d moyen est alors égal à 7.5 millimètres. En plus de leurs sphéricité, les grains ont une surface lisse et dure. L'angle de frottement interne φ fut mesuré sur la boîte de cisaillement de Casagrande (fig.IV2) est donné par la figure IV3. L'angle de frottement φ fut mesuré sur ce type d'appareillage et non sur une machine triaxiale, bien que cette dernière donne des valeurs plus fiables, car les angles de frottement en parois φ_p ont été déterminés avec la même boîte de cisaillement de Casagrande. La mesure de l'angle de frottement en paroi étant très délicate avec un appareil triaxial.

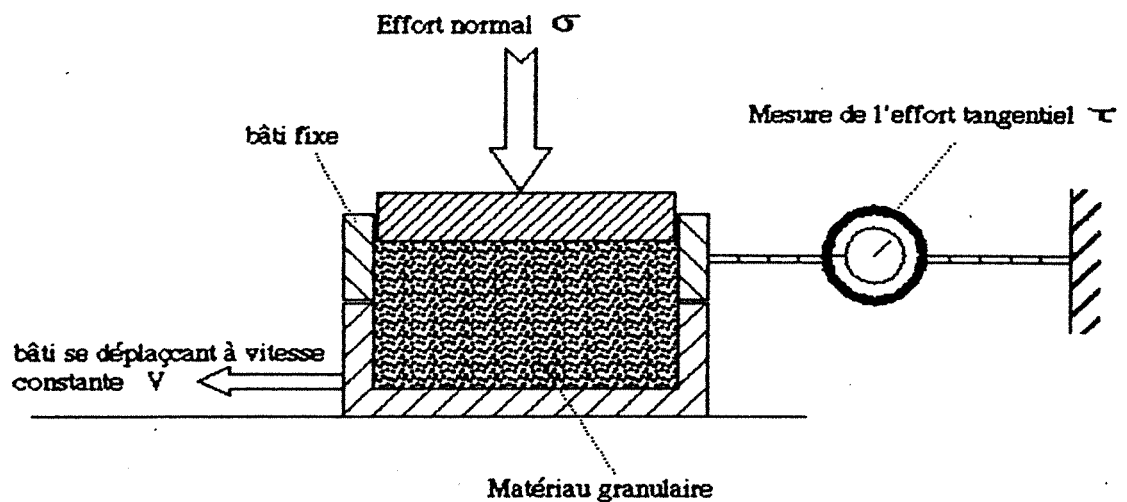


figure IV2 : boîte de cisaillement de Casagrande

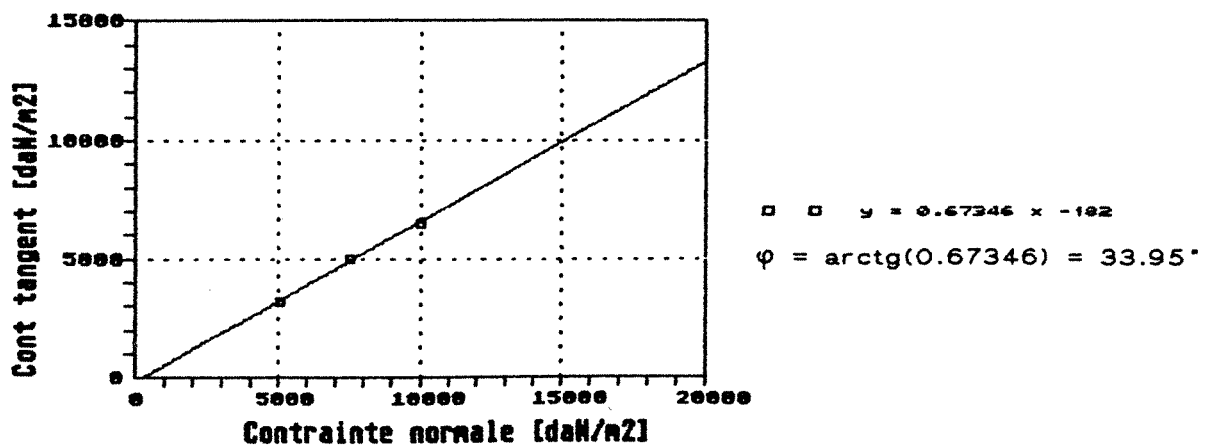


Figure IV3 : angle de frottement interne des petits pois

La mesure de la masse volumique au repos ρ_0 des petits pois secs donne une valeur de 818 daN/m³.

II.3 Les parois des trémies

Pour mieux comprendre l'influence de la rugosité des parois sur les caractéristiques de l'écoulement, nous avons utilisé pour une même géométrie de trémie quatre types d'état de surface de paroi, afin d'obtenir quatre angles de frottement en paroi différents.

Paroi I

Le premier type de paroi s'obtient en collant tout simplement des grains de petits pois sur les parois des trémies. Cette paroi permet dans les chapitres suivants de caler plus facilement notre modèle sur les mesures expérimentales. En effet ce procédé supprime une inconnue, l'interaction grain-grain est dans ce cas la même que l'interaction grain-paroi. La figure IV5 montre l'évolution de la contrainte de cisaillement τ en fonction du déplacement, alors que la valeur de l'angle de frottement φ_p des petits pois sur la paroi est donnée par la figure IV6. Comme on pouvait s'y attendre l'angle de frottement en paroi φ_p est quasiment égal à l'angle de frottement interne φ des petits pois. Les angles de frottement en paroi ont été mesurés sur la boîte de cisaillement de Casagrande, dans le bâti inférieur le matériau granulaire est remplacé par un échantillon de paroi comme le schématise la figure IV4. Cet essai donne un angle φ_p égal à 34.62° pour la paroi de type I

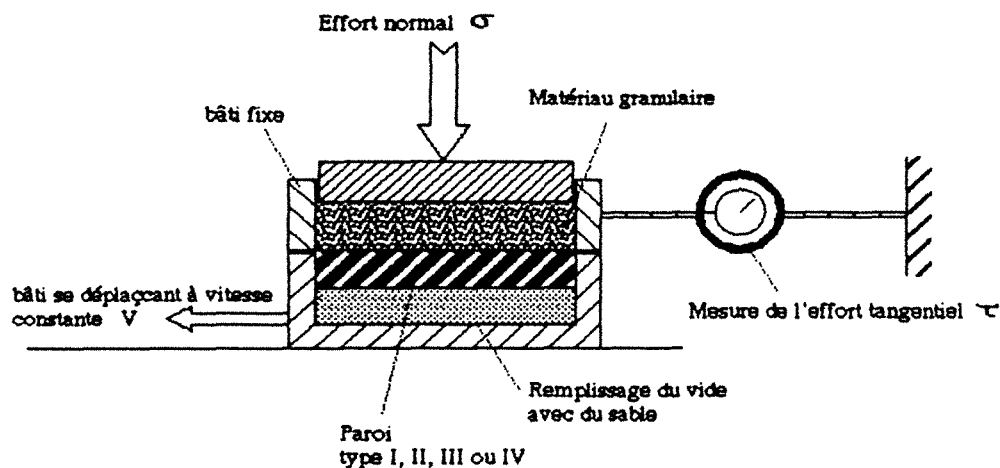


figure IV4 : mesure de l'angle de frottement en paroi

Paroi II

Le second type de paroi est en bois lisse. L'angle de frottement φ_p , mesuré avec le dispositif de la figure IV4, des petits pois sur cette paroi en bois vaut 16.11 degrés (fig.IV5, fig.IV6).

Paroi III

L'état de surface de cette paroi est obtenu en collant du sable quart-

zeux de granulométrie 1.6/2 mm sur celle-ci. Pour un tel état de surface on obtient un angle de frottement $\varphi_p = 30.62^\circ$.

Paroi IV

Cette dernière paroi est également réalisée par collage de sable quart-zeux sur celle-ci. La granulométrie du sable est cette fois ci de 0.315/0.40 mm. L'angle de frottement mesuré avec l'appareillage de la figure IV4 est de 23.89° . Valeur intermédiaire entre la paroi lisse (II) et les parois rugueuses de type I ou III.

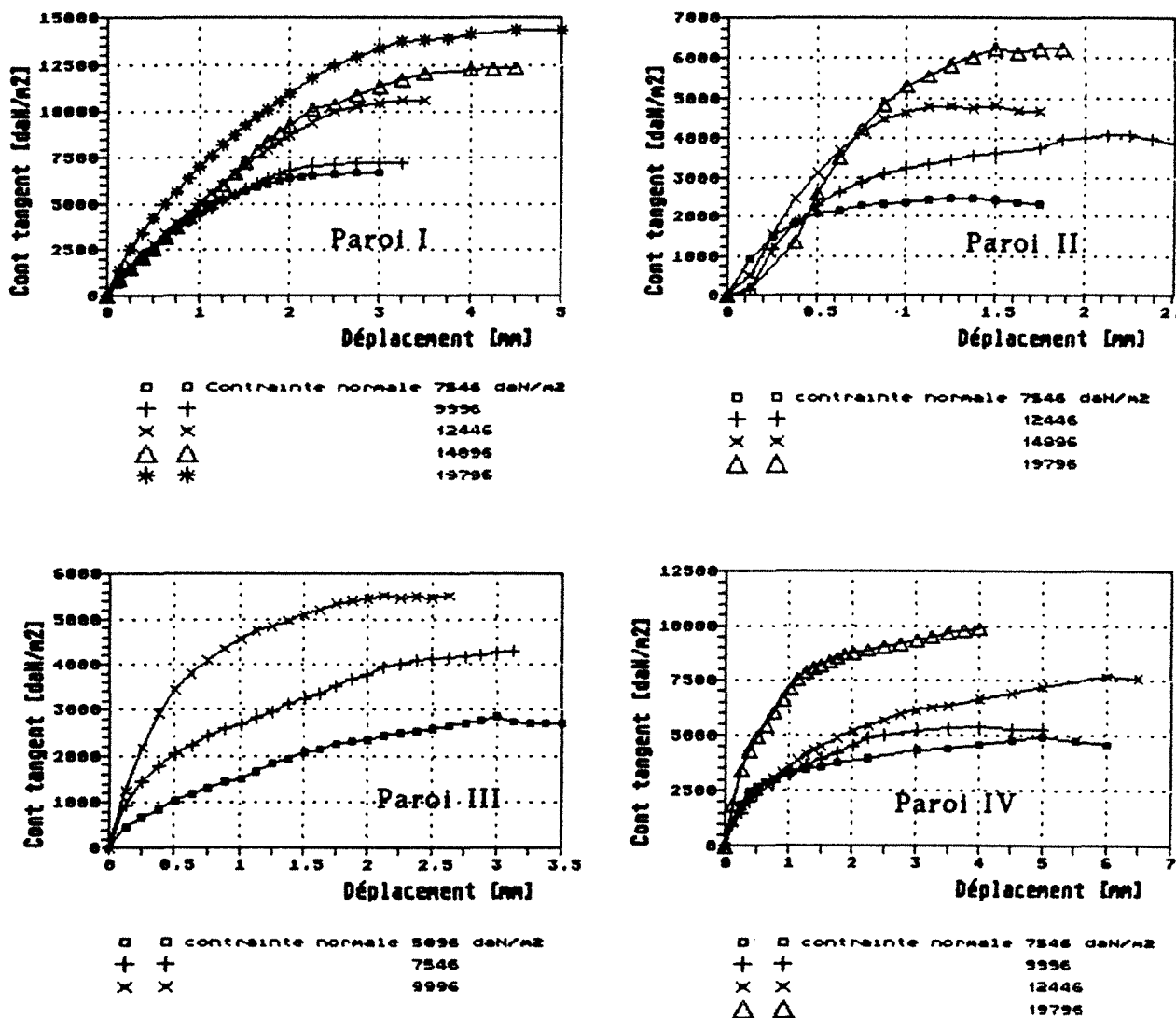


figure IV5 : contrainte de cisaillement τ en fonction du déplacement et de la contrainte normale σ

Classification de la rugosité des parois

D'après la norme DIN 1055 Teil 6 qui décrit les efforts exercés par la matière ensilée sur les cellules de stockage, on peut classer les quatres parois dans les trois catégories proposées par cette norme.

- parois rugueuses : type I et III
- parois moyennement rugueuses : type IV
- parois lisses : type II

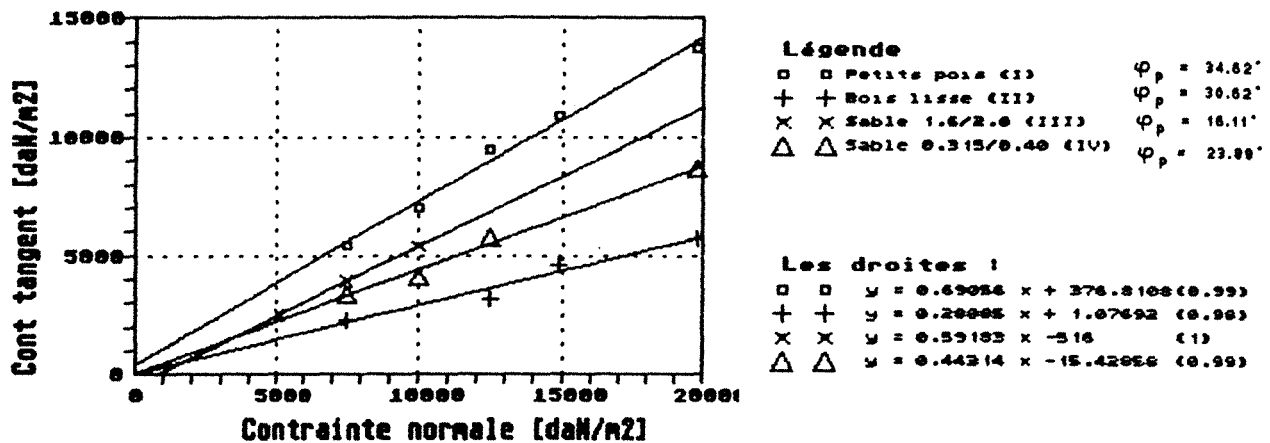


figure IV6 : angles de frottement en paroi ϕ_p

n° manip	type paroi	n° manip	type paroi	angle α [°]	cotes X des profils de vitesse [cm]
3	I	13	II	6	20, 35, 55
4	I	14	II	10	20, 35, 55
5	I	15	II	15	20, 35, 55
6	I	16	II	19.15	20, 35, 55
7	I	17	II	24.22	20, 35
8	I	18	II	28	20, 35
9	I	19	II	33.1	20
23	III	33	IV	6	20, 35, 55
24	III	34	IV	10	20, 35, 55
25	III	35	IV	15	20, 35, 55
26	III	36	IV	19.15	20, 35, 55
27	III	37	IV	24.22	20, 35
28	III	38	IV	28	20, 35
29	III	39	IV	33.1	20

Tableau IV1 : configurations des trémies étudiées
épaisseur 3cm, largeur de l'orifice inférieur 4cm

III. Dispositif expérimental

Pour pouvoir réaliser avec un même dispositif les différentes géométries de trémies présentées dans le tableau VII, nous avons conçu et réalisé au laboratoire le montage représenté par la figure IV7. Ce dispositif experi-

mental est constitué d'un cadre fixe reposant sur une table, il est encore surmonté d'un bac d'alimentation en matériau pour les trémies. Ce bac permet d'assurer un écoulement permanent à l'intérieur des trémies planes que l'on va étudier.

A l'intérieur du cadre fixe on peut déplacer les parois latérales pour réaliser différentes géométries, comme le montre le schéma de fonctionnement de la figure IV7. La conception des parois permet de mettre en oeuvre les quatres types de paroi que nous avons présenté dans le paragraphe précédent.

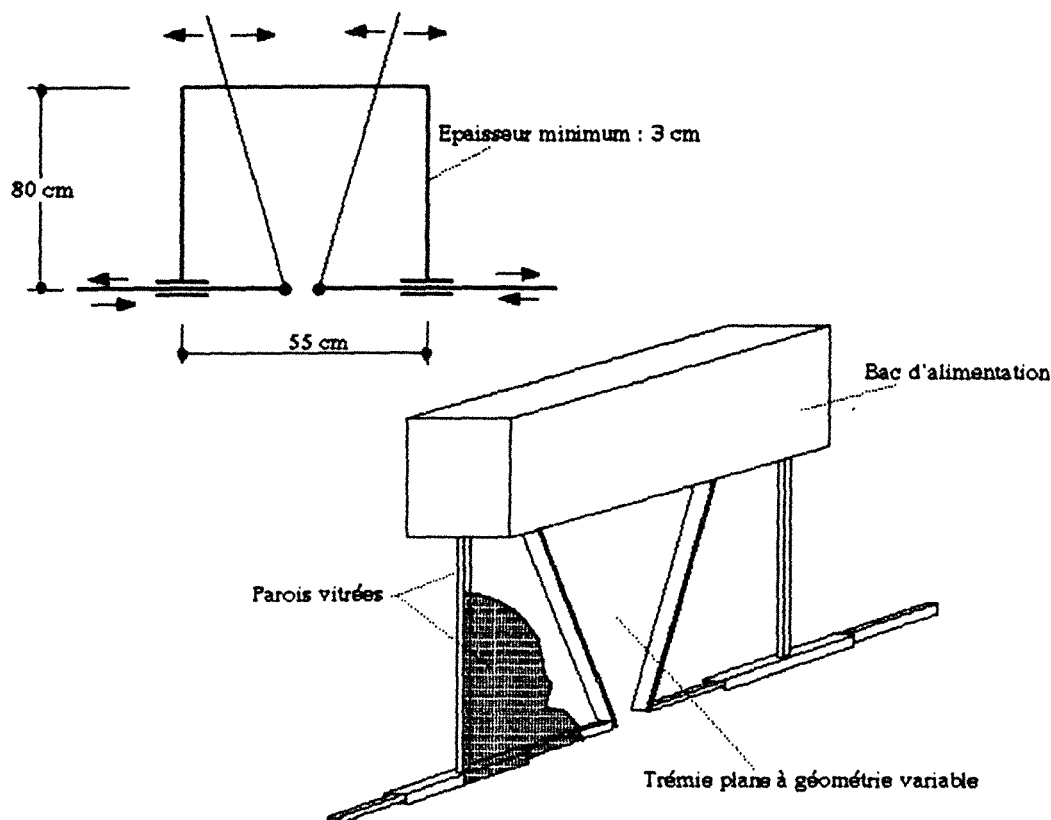


Figure IV7 : dispositif expérimental

L'épaisseur minimale de 3 cm de l'écoulement est limitée de part et d'autre du cadre fixe par une paroi vitrée ammovible à travers lesquelles on peut visualiser l'écoulement.

IV Observations faitent lors de l'écoulement

Lors de l'ouverture de la trappe obturant l'orifice inférieur nous avons pu observer que le passage de l'état au repos à l'écoulement se fait progressivement du bas vers le sommet de la trémie. On peut ainsi observer le déplacement rapide vers le haut d'une voûte s'appuyant sur les parois de la trémie (fig.IV8). La propagation de cette voûte est due à son effondrement

immédiat après sa formation, les causes de la rupture des voûtes sont clairement expliquées dans le paragraphe V du chapitre I. Sous la limite éphémère de la voûte les grains commencent à s'écouler, au-dessus ils restent encore immobiles. Par ailleurs on devine que le matériau augmente légèrement de volume sous cette limite, c'est à dire lorsqu'il s'écoule. Il se crée un petit espace vide entre les grains du matériau qui se meuvent en s'entrechoquant. Au dessus de la voûte la masse volumique reste égale à la masse volumique au repos ρ_0 .

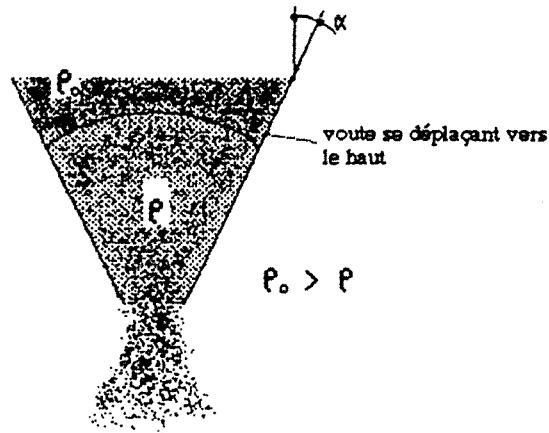


figure IV8 : mise en place d'un écoulement permanent

Le phénomène décrit ci-dessus est surtout visible pour des trémie dont l'inclinaison α (fig.IV8) est inférieure ou égale à 15 degrés, voir 20 degrés pour les parois lisses du type II.

Pour des angles α inférieurs à 15° ou 20° on observe également que l'écoulement est formé d'à-coups successifs. Au-delà d'un angle α de 20 degrés ce phénomène n'est quasiment plus perceptible. Pour de tels écoulements ($\alpha \leq 15^\circ, 20^\circ$), on ne peut que parler d'écoulement stationnaire en moyenne sur un laps de temps suffisamment grand. Ces à-coups successifs peuvent s'expliquer par la formation et l'effondrement successif d'une voûte (fig.IV9) à l'intérieur de l'écoulement au-dessus de l'orifice inférieur de la trémie. La voûte s'effondre instantanément pour les mêmes raisons que précédemment.

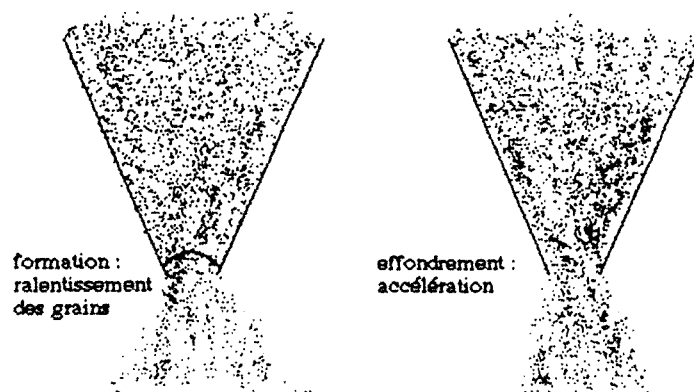
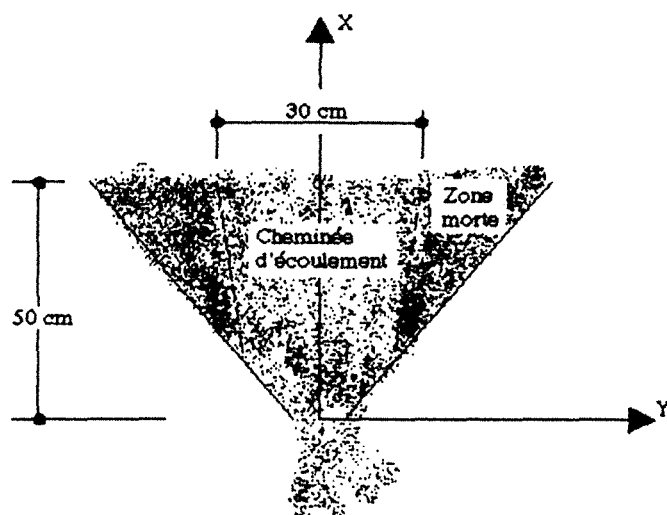


figure IV9 : la cause des à-coups à l'intérieur de l'écoulement

Si cette hypothèse s'avère exacte la formation de la voûte entraînerait un léger ralentissement des vitesses d'écoulement des particules et une diminution instantanée du débit massique. L'effondrement de la voûte provoquerait alors une petite augmentation des vitesses, comme du débit. Cette succession de ralentissements et d'accélération serait alors à l'origine des à-coups perceptibles durant la vidange des trémies. Une conséquence de la manifestation de ce phénomène est que les vitesses d'écoulement auront tendance à fluctuer autour d'une valeur moyenne à une position donnée à l'intérieur de l'écoulement.

Durant tous les essais réalisés au laboratoire, on a observé pour des angles α toujours encore inférieurs ou égaux à 15 ou 20 degrés suivant le type de paroi, que les vitesses d'écoulement augmentaient régulièrement et fortement à partir de la paroi jusqu'à une abscisse horizontale ξ . A partir de l'abscisse ξ et jusqu'au milieu de l'écoulement le gradient de vitesse devient plus faible voir nul. Ceci s'accorde avec les mesures faites dans [71], où l'on décompose les écoulements rapides en deux zones distinctes. La première au niveau des parois d'épaisseur ξ est soumise à un gradient de vitesse élevé, donc à un taux de cisaillement élevé. Alors que la seconde s'écoule avec une vitesse quasiment uniforme sur toute sa largeur. Par contre pour des angles α supérieurs à 15° ou 20° on a pu observer des phénomènes différents des précédents. Pour les parois rugueuses de type I ou II on a pu observer la formation d'une trémie naturelle, ou d'une cheminée à l'intérieur de l'écoulement (fig.IV10). La formation de la cheminée pour des trémies à parois plus lisses du type II ou IV est moins perceptible qu'avec les parois rugueuses.



Figures IV10 : formation d'une cheminée à l'intérieur des écoulements
 $\alpha > 15^\circ$

A l'intérieur de la cheminée d'écoulement le matériau s'écoule rapidement alors qu'à l'extérieur de la cheminée les grains ne s'écoulent plus ou avec des vitesses très faibles. La forme et la taille restent environ les mêmes quelle que soit l'angle α supérieur à 15° et quelle que soit le type I ou III des parois. La largeur de la cheminée d'écoulement est aux alentours de 30

centimètres à la cote x de 50 centimètres, cette largeur diminue lorsque l'on se rapproche de l'orifice inférieur.

Ces observations préliminaires de l'écoulement des petits pois à travers les différentes trémies du tableau IV1, montrent que nous sommes très certainement en présence de deux types d'écoulement. Le premier est un écoulement soumis à un taux de cisaillement élevé, alors que le second semble avoir des gradients de vitesse et des vitesses d'écoulement nettement plus faibles que le premier type.

V. Débit massique en fonction de la configuration de trémie

V.1 Poids écoulé en fonction du temps

Avant de mesurer les vitesses d'écoulement il s'agit de vérifier que le débit massique des différentes trémies étudiées est indépendant de la hauteur de charge de matière granulaire au-dessus de l'orifice de vidange, ce qui est vrai pour des silos modèles réduits étudiés dans [100] et [50], et dans d'autres travaux. Mais peu de mesures de débit sur des trémies ont été réalisées à ce jour. La figure IV11 montre les résultats obtenus en mesurant le poids de matériau écoulé en fonction du temps pour les différentes trémies du tableau IV1.

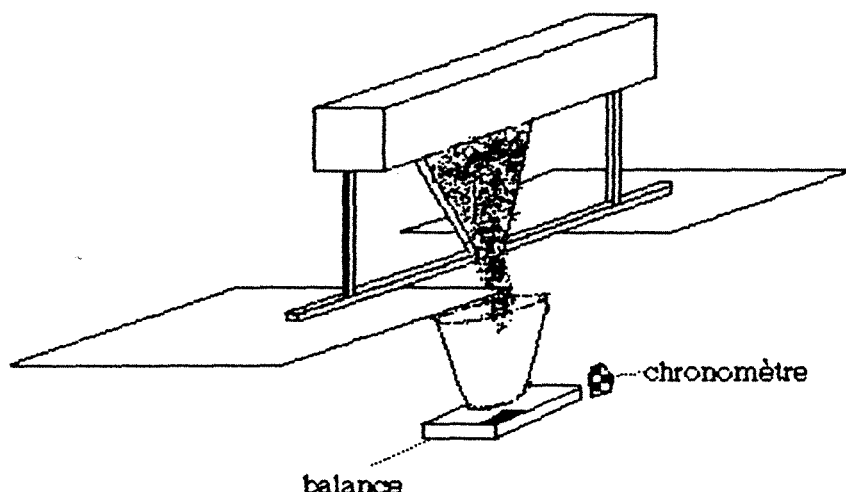
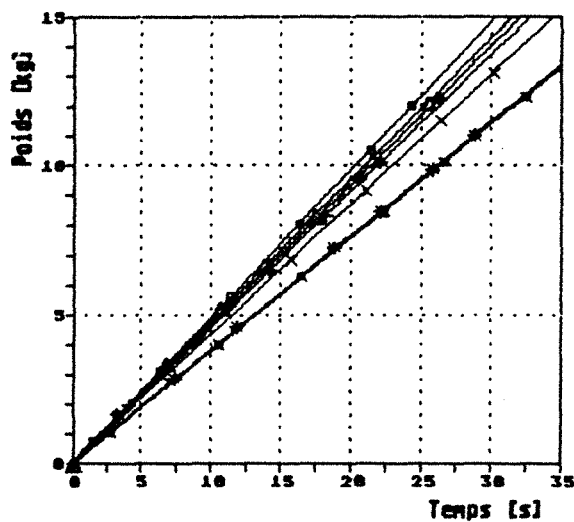


Figure IV11 : mesure du poids écoulé en fonction du temps

Les mesures de débit furent effectuées en plaçant le récipient de récupération des petits pois sur une balance, à côté de laquelle est placé un chronomètre. Pendant la vidange du dispositif expérimental (trémie avec son bac d'alimentation) on filme simultanément l'affichage de la balance et du chronomètre (fig.IV11). Le dépouillement des films permit alors de tracer le poids écoulé en fonction du temps (fig.IV12).





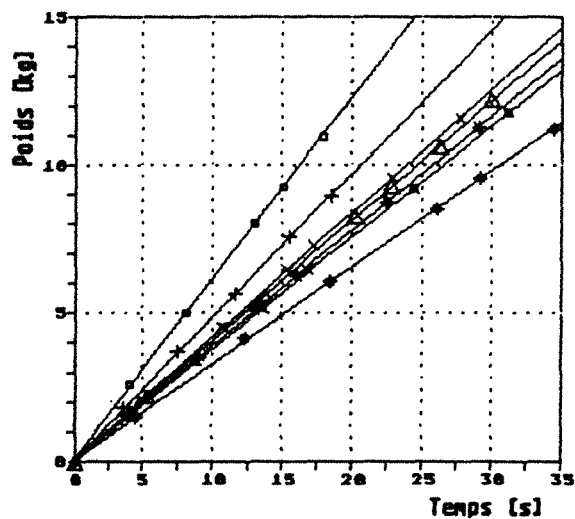
Légende

- □ Alpha = 6°
- + + Alpha = 10°
- x x Alpha = 15°
- △ △ Alpha = 19.15°
- * * Alpha = 24.22°
- ■ Alpha = 28°
- ◆ ◆ Alpha = 33.10°

Les droites :

- □ $y = 0.43273 x + 0.04266$ (0.99)
- + + $y = 0.45556 x + 0.0615$ (0.99)
- x x $y = 0.43292 x + 0.02041$ (0.99)
- △ △ $y = 0.47162 x + 0.12021$ (0.99)
- * * $y = 0.38139 x + 0.07692$ (0.99)
- ■ $y = 0.37912 x + 0.03299$ (0.99)
- ◆ ◆ $y = 0.46391 x + 0.09907$ (0.99)

poids en fonction du temps pour une paroi de type I (petits pois collé)



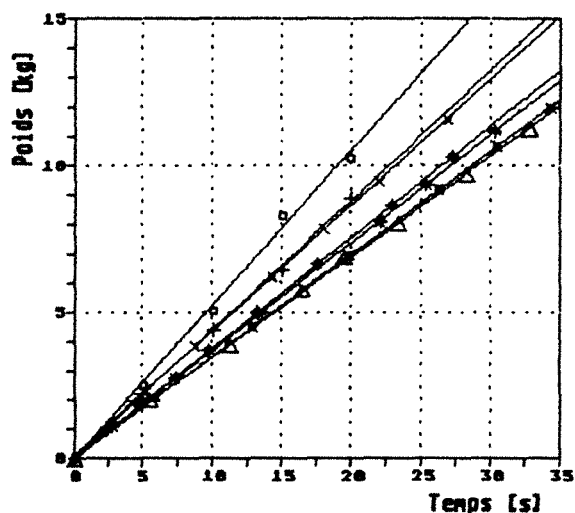
Légende

- □ Alpha = 6°
- + + Alpha = 10°
- x x Alpha = 15°
- △ △ Alpha = 19.15°
- * * Alpha = 24.22°
- ■ Alpha = 28°
- ◆ ◆ Alpha = 33.10°

Les droites :

- □ $y = 0.50982 x + 0.10051$ (0.99)
- + + $y = 0.48174 x + 0.0857$ (0.99)
- x x $y = 0.41652 x + 0.08635$ (0.99)
- △ △ $y = 0.40511 x + 0.06452$ (0.99)
- * * $y = 0.38752 x + 0.05946$ (0.99)
- ■ $y = 0.3755 x + 0.09816$ (0.99)
- ◆ ◆ $y = 0.32472 x + 0.0934$ (0.99)

poids en fonction du temps pour une paroi de type II (lisse)



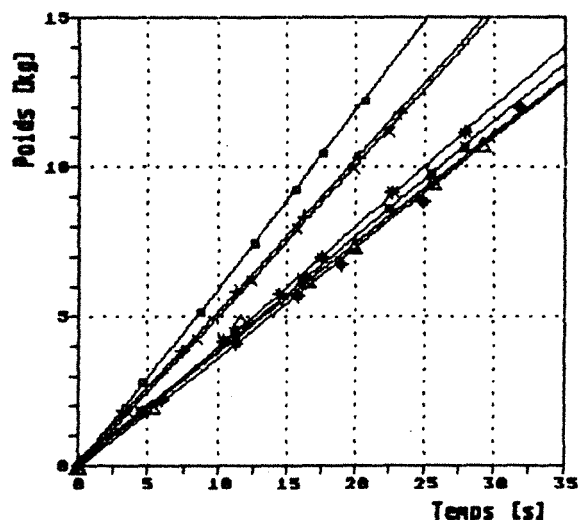
Légende

- □ Alpha = 6°
- + + Alpha = 10°
- x x Alpha = 15°
- △ △ Alpha = 19.15°
- * * Alpha = 24.22°
- ■ Alpha = 28°
- ◆ ◆ Alpha = 33.10°

Les droites :

- □ $y = 0.52845 x - 0.061$ (0.99)
- + + $y = 0.44135 x - 0.008$ (0.99)
- x x $y = 0.42825 x + 0.10143$ (0.99)
- △ △ $y = 0.34279 x + 0.03845$ (0.99)
- * * $y = 0.36735 x + 0.07205$ (0.99)
- ■ $y = 0.3489 x + 0.04717$ (0.99)
- ◆ ◆ $y = 0.37799 x + 0.04256$ (0.99)

poids en fonction du temps pour une paroi de type III (sable 1.6/2.0)



Légende

- □ Alpha = 6°
- + + Alpha = 10°
- × × Alpha = 15°
- △ △ Alpha = 19.15°
- * * Alpha = 24.22°
- ■ Alpha = 28°
- ◆ ◆ Alpha = 33.10°

Les droites :

- □ $y = 0.59066 x + 0.06432$ (0.99)
- + + $y = 0.50559 x + 0.15572$ (0.99)
- × × $y = 0.50095 x + 0.03987$ (0.99)
- △ △ $y = 0.2647 x + 0.21084$ (0.99)
- * * $y = 0.40099 x + 0.03441$ (0.99)
- ■ $y = 0.38167 x + 0.09411$ (0.99)
- ◆ ◆ $y = 0.36881 x - 0.04878$ (0.99)

poids en fonction du temps pour une paroi de type IV (sable 0.315/0.40)

Figure IV12 : Poids écoulé en fonction du temps

Les courbes de la figure IV12 montre que pour chaque type de paroi et que pour tout angles d'inclinaison par rapport à la verticale compris entre 6° et 33.1° nous avons une relation linéaire entre le poids écoulé et le temps de vidange. Le débit massique est donc constant pendant la vidange du dispositif expérimental, sa valeur en kilogrammes par seconde est donnée par les pentes des différentes droites de la figure IV12. Dans le tableau IV2 on retrouve les valeurs du débit massique pour chaque trémie.

n° manip	débit [kg/s]	n° manip	débit [kg/s]	n° manip	débit [kg/s]	n° manip	débit [kg/s]
3	0.493	13	0.609	23	0.528	33	0.591
4	0.456	14	0.482	24	0.441	34	0.506
5	0.433	15	0.417	25	0.428	35	0.501
6	0.471	16	0.404	26	0.343	36	0.365
7	0.381	17	0.388	27	0.367	37	0.401
8	0.378	18	0.375	28	0.348	38	0.382
9	0.463	19	0.324	29	0.377	39	0.369

Tableau IV2 : les débits massiques mesurés

Une conséquence importante de ces résultats est que les champs de vitesses seront également indépendants de la hauteur de charge et du temps. La détermination de ces champs de vitesses pourra donc se faire sans veiller à garder une hauteur de remplissage constante à l'intérieur du bac d'alimentation des trémies. On se passe donc d'un système de remplissage continu du bac pour assurer une hauteur de charge constante lors de la vidange.

V.2 Débit en fonction de l'angle de frottement en paroi

Le tableau IV3 donne les valeurs de débit que nous avons mesuré sur le dispositif expérimental en fonction de l'angle de frottement en paroi.

$\varphi_p [^\circ]$	type de paroi	angle d'inclinaison des parois par rapport à la verticale $[^\circ]$						
		6	10	15	19.15	24.22	28	33.1
16.11	II	0.609	0.482	0.417	0.405	0.388	0.375	0.324
23.89	IV	0.591	0.506	0.501	0.365	0.401	0.382	0.369
30.62	III	0.528	0.441	0.428	0.343	0.367	0.348	0.377
34.63	I	0.493	0.456	0.433	0.471	0.381	0.378	0.463

Tableau IV3 : Débit massique [kg/s] en fonction de l'angle de frottement en paroi

Ce tableau IV3, comme la figure IV13 montrent que le débit diminue lorsque l'angle de frottement en paroi φ_p augmente, cela pour un angle α d'inclinaison des parois de 6° . Ce phénomène s'inverse lorsque l'angle α dépasse la valeur de 33° . Pour des angles d'inclinaison compris entre ses deux valeurs extrêmes il semble que le débit massique ne dépendent que très peu de la rugosité et de l'inclinaison des parois. Surtout pour des angles allant de 24° à 28° .

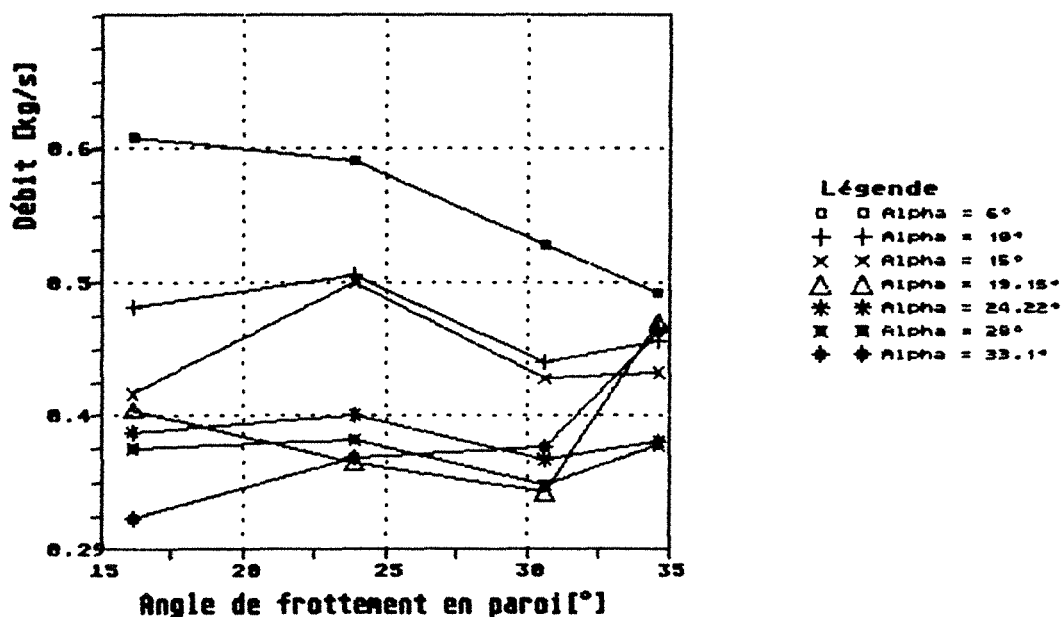


Figure IV13 : débit massique en fonction de l'angle de frottement en paroi et de l'inclinaison des parois

VI. Détermination des champs de vitesses

VI.1 Matériel utilisé

La visualisation de l'écoulement se fait grâce à une caméra vidéo filmant à travers les parois vitrées du dispositif expérimental (fig.IV14). La caméra dont on disposait au laboratoire filme avec un intervalle de temps Δt de 0.04 seconde entre chaque image. Un dépouillement image par image des

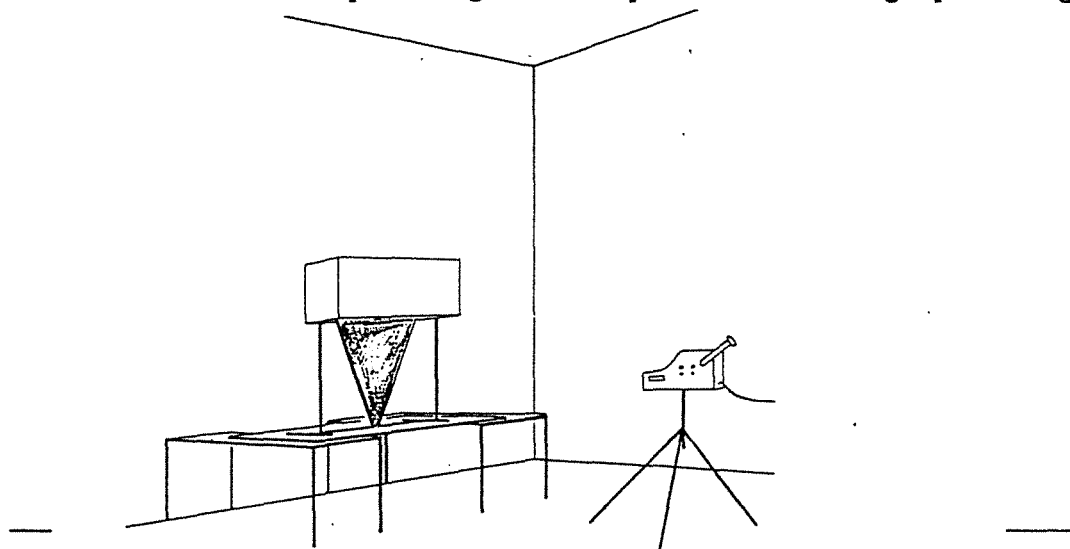


Figure IV14 : Dispositif expérimental pour la détermination des vitesses d'écoulement

films vidéos sur un moniteur de télévision permet d'obtenir la référence "temps" indispensable au calcul des vitesses d'écoulement. Le repérage dans le plan (x,y) des particules de petits pois en mouvement (fig.IV15) est permis grâce à un quadrillage de 1 cm de côté (fig.IV15) que l'on a gravé dans la paroi vitrée se situant devant la caméra vidéo. Certains grains de matériau sont colorés, afin de faciliter leurs repérage dans la masse du matériau lors du dépouillement des films vidéos.

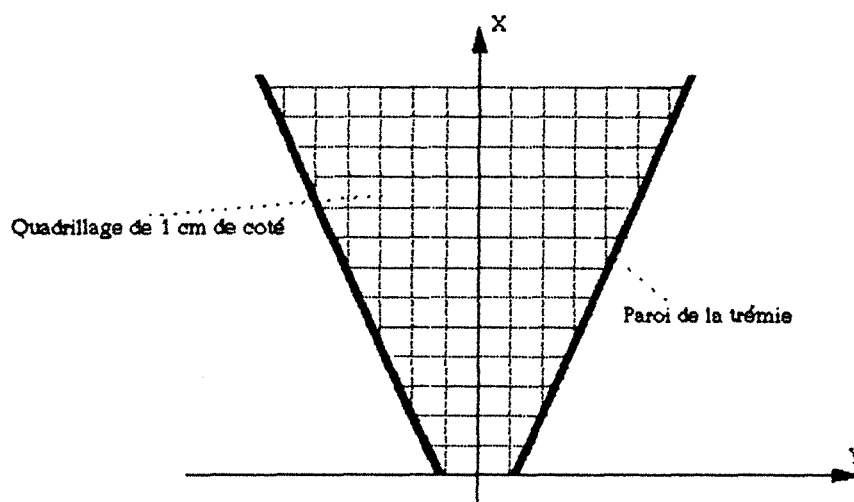


Figure IV15 : repérage dans le plan (x,y) des particules en mouvement

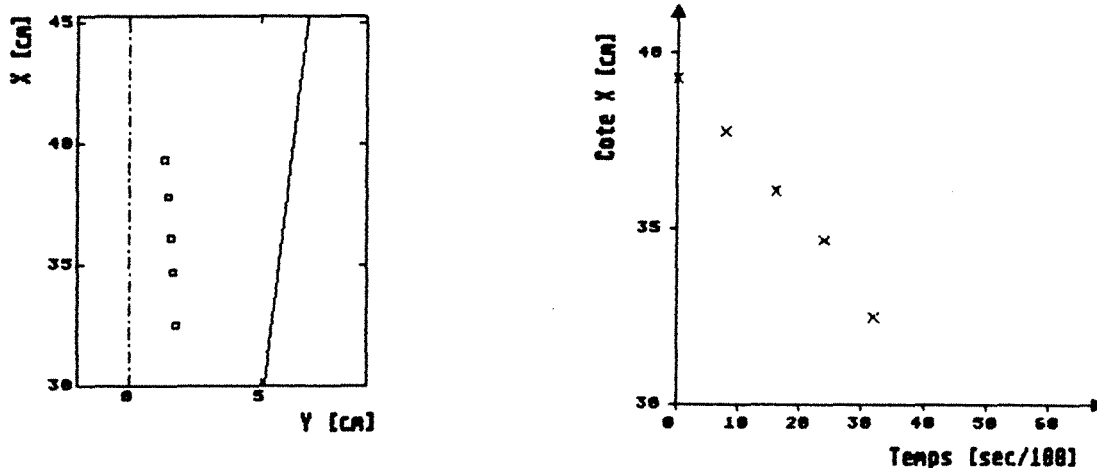
VI.2 Détermination des champs de vitesses

VI.2.1 Principe de détermination

Vitesse verticale d'une particule

La caméra est placée devant chaque cote X (tableau IV1) où on cherche les vitesses d'écoulement de manière à cadrer horizontalement la largeur de l'écoulement comme le montre la figure IV18. Les limites verticales du cadrage sont environs de $X+8$ cm et de $X-8$ cm (fig.IV18).

Le dépouillement image par image des films permet de tracer l'évolution de la position (x,y) dans les limites du cadrage de la caméra d'une particule que l'on a suivie au cours de l'écoulement du matériau granulaire à l'intérieur de la trémie. L'écart de temps entre deux positions (x,y) successives de la particule suivie est un multiple de 0.04 seconde. La figure IV16a donne un exemple de trajectoire d'une particule lors de l'écoulement dans une trémie dont les parois sont inclinées de 6° par rapport à la verticale (essai n°3). Le graphe b de la figure IV16 montre l'évolution de la cote x de la particule en fonction du temps. Ce dernier permet d'apprécier l'accélération de la particule au cours de l'écoulement.



a) position (x,y) de la particule pendant l'écoulement. $\Delta t = 0.08$ s. b) points expérimentaux $x = f(t)$

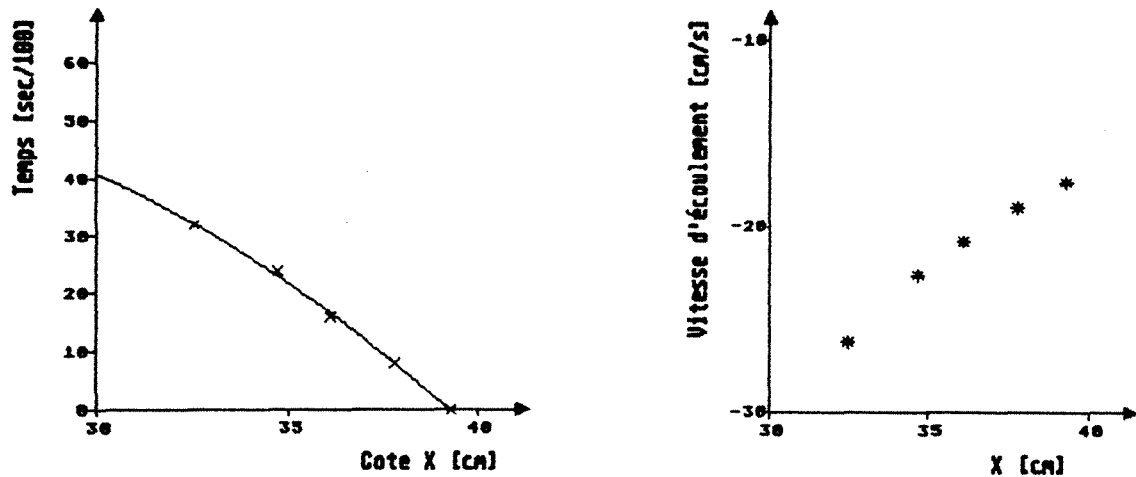
Figure IV16 : $\alpha = 6^\circ$, matériau : petits pois, parois : petits pois (type I)

La vitesse d'écoulement verticale de la particule s'obtient par une méthode similaire à celle développée au laboratoire et que l'on retrouve dans les travaux [50] et [100]. La méthode consiste à représenter pour la particule étudiée le temps t en fonction de la cote x (fig.IV17a). Ces points expérimentaux sont ensuite approchés par un polynôme de degré de 2 ou 3 pour obtenir la fonction $t = g(x)$. La dérivée de la fonction ainsi obtenue

donne l'inverse de la vitesse verticale $u(x)$. La dérivée g' de la fonction g

$$\frac{dt}{dx} = g'(x) = \frac{1}{u(x)}$$

permet de calculer la vitesse verticale instantanée pour toutes cotes x , et en particulier pour la cote X où l'on cherche le profil de vitesses verticales.



a) approximation des points
expérimentaux : fonction $g(x)$

b) vitesse verticale instantanée
 $1/g'(x)$

Figure IV17 : Vitesse verticale de la particule dont la trajectoire est donnée par figure IV16

La figure IV17b donne la vitesse instantanée, calculée avec $1/g'(x)$, de la particule en fonction de sa cote x . Elle met en évidence l'accélération à laquelle est soumise la particule lorsque sa cote x diminue.

Pour pouvoir représenter un profil de vitesse à une cote X nous devons encore déterminer la position horizontale Y de la particule à la cote X comme le montre la figure IV18. Celle-ci s'obtient par régression linéaire entre la position (x,y) , dont la cote x est immédiatement supérieure à la cote X , et la position (x,y) , où x est inférieure ou égale à X .

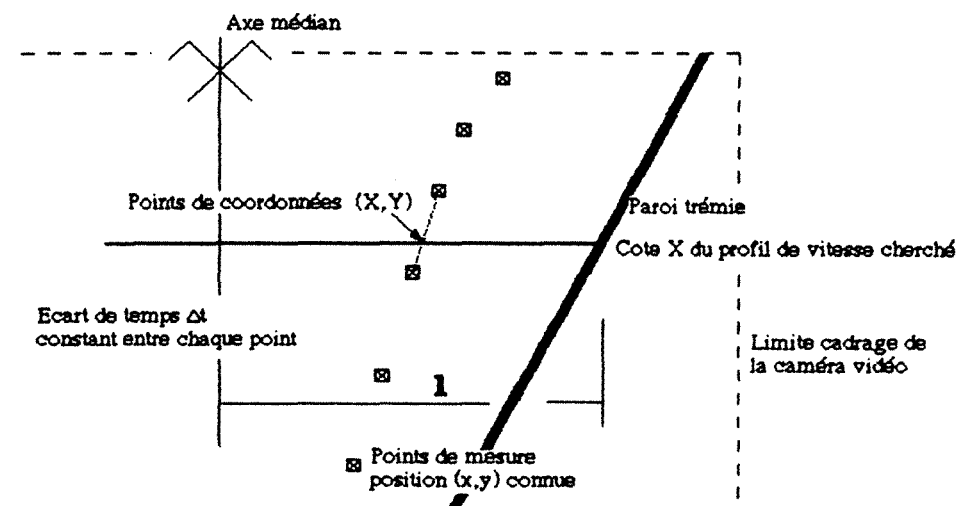


figure IV18 : détermination de la position Y à la cote X

Profil de vitesses verticales

Le champ de vitesses à une cote X s'obtient en déterminant la vitesse instantanée u à cette cote X pour différentes particules dont la position Y varie entre 0 et la demi largeur l de l'écoulement {fig.IV18}. Chaque profil de vitesses a ainsi nécessité entre 25 et 35 points expérimentaux. Pour obtenir un profil de vitesses parfaitement symétrique par rapport à l'axe médian, les vitesses verticales ont été représentées aussi bien avec une abscisse Y négative qu'avec une abscisse Y positive. La figure IV19 donne un exemple de profil de vitesses que l'on représente soit dimensionnellement (a), soit adimensionnellement (b). La vitesse adimensionnelle U est obtenue par

$$U = \frac{u}{\sqrt{g \cdot l}},$$

alors que la cote Y adimensionnelle est donnée par la relation suivante :

$$Y = \frac{y}{2 \cdot l}$$

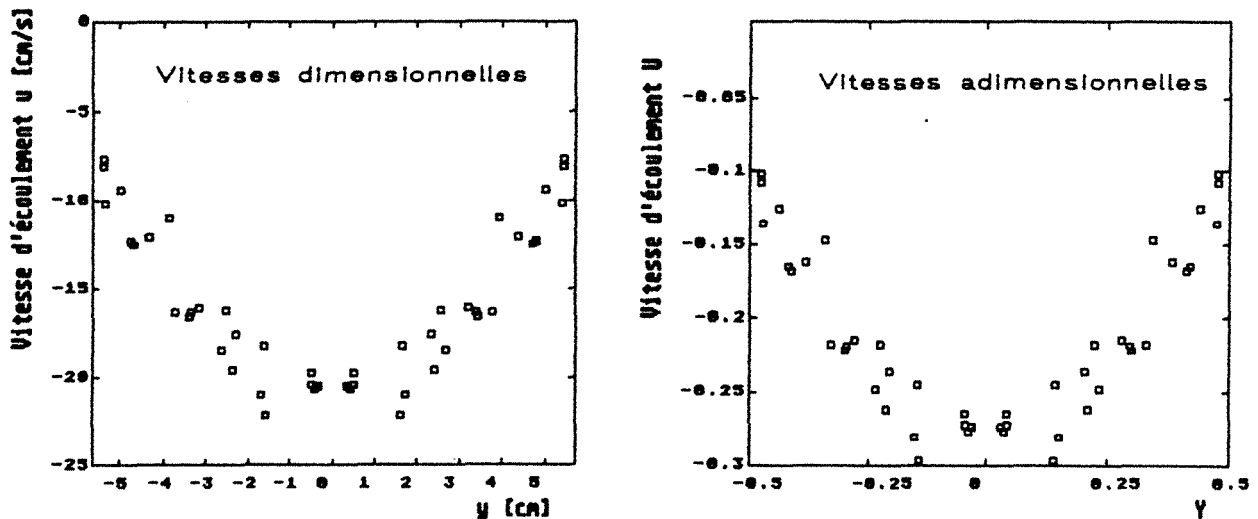


figure IV19 : exemple d'un profil de vitesses

matériau : petits pois, parois : petits pois, $X = 35\text{cm}$, $\alpha = 6^\circ$

VI.2.2 Approximation des champs de vitesses verticales

Au vue de la figure IV19 et comme on le prévoyait dans le paragraphe IV, on constate que la distribution de vitesses autour d'une position (x,y) peu paraître importante. Ce phénomène peut être dû en partie aux incertitudes de mesure qui d'après nos calculs aux laboratoires ne devraient pas dépasser 4 pourcents. Mais cette distribution de vitesse s'explique surtout par le fait que l'écoulement n'est que permanent en moyenne, car sur des laps de temps très court l'écoulement est soumis à des variations de vitesse dues aux à-coups que l'on a pu observer dans le paragraphe II.1. Par ailleurs on peut rappeler que cette distribution de la vitesse d'écoulement u autour d'une

position (x,y) n'est pas due à la diminution de la hauteur de charge dans le bac d'alimentation (fig.IV7) au cours de l'écoulement. En effet le paragraphe III montre expérimentalement que le débit massique est constant et indépendant de la hauteur de charge, ce qui par conséquent est certainement aussi le cas pour les vitesses d'écoulement des particules.

Il paraît donc intéressant d'approcher les points expérimentaux par des fonctions mathématiques afin d'obtenir les caractéristiques moyennes du profil de vitesses. Dans [71] NEDDERMAN & LOAHAKUL proposent plusieurs modèles pour approcher les vitesses expérimentales d'un écoulement soumis à un fort taux de cisaillement (fig.IV19). Parmi ces modèles nous avons retenu une approximation linéaire et une approximation non linéaire. La figure IV20 reprend le profil de vitesse adimensionnelle de la figure 6, en l'approchant soit par le modèle linéaire, soit par le modèle non linéaire. Les deux

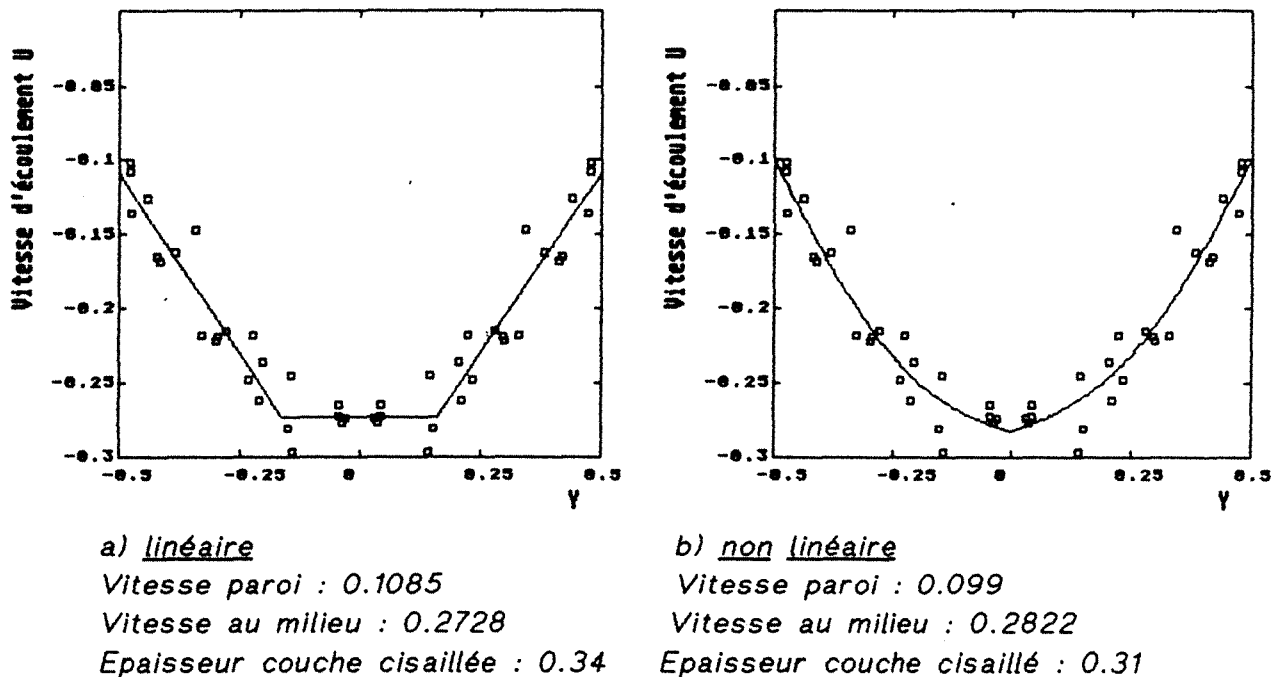


Figure IV20 : exemple d'approximation d'un profil de vitesse adimensionnelle

méthodes retenus pour les écoulement rapides permettent de déterminer la vitesse verticale u_p sur l'axe médian, la vitesse de glissement u_b sur les parois et l'épaisseur ξ de la couche soumise à un fort taux de cisaillement.

Approximation linéaire

Comme on peut le voir sur figure IV20 le modèle linéaire distingue deux zones, une zone proche des parois avec un accroissement linéaire de la vitesse d'écoulement et une seconde zone au milieu de l'écoulement où on suppose que la vitesse d'écoulement reste constante : c'est la vitesse du bouchon central.

L'algorithme de calcul est le suivant :

soit u_b la vitesse centrale, u_p la vitesse de glissement sur les parois, ξ l'épaisseur de la couche cisailée et z_i l'abscisse du point expérimental comptée à partir de la paroi gauche.

1. choisir une épaisseur ξ plus faible que la valeur réelle

2. calculer $u_b = \sum u_i / N$ pour $z_i > \xi$ (IV.1)

avec N le nombre de points dont $z_i > \xi$

$$u_p = \frac{\sum (1 - a_i) u_i - u_b \sum a_i (1 - a_i)}{\sum (1 - a_i)} \quad \text{avec } a_i = z_i / \xi \quad \text{pour } z_i \leq \xi \quad (IV.2)$$

3. calcul de la somme S qui est la distance au carrée entre les points expérimentaux et l'approximation.

$$S = \sum_{z_i > \xi} (u_i - u_b)^2 + \sum_{z_i \leq \xi} \left(u_i - u_p - (u_b - u_p) \frac{z_i}{\xi} \right)^2 \quad (IV.3)$$

On recommence ainsi les trois étapes de calcul jusqu'à ce que l'on trouve la distance S minimale.

Approximation non linéaire

Cette approximation comme la précédente détermine la vitesse centrale u_b , la vitesse de glissement en paroi u_p et l'épaisseur ξ de la couche soumise à un taux de cisaillement élevé. Elle se base sur la tangente hyperbolique, qui rappelons le s'exprime de la manière suivante :

$$\text{th } x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \quad (IV.4)$$

L'algorithme de calcul est le suivant :

1. choisir une valeur de ξ plus faible que la valeur réelle.

2. calculer :

$$u_b = \frac{(\sum a_i u_i)(\sum (1 - a_i)^2) - (\sum (1 - a_i) u_i)(\sum a_i (1 - a_i))}{(\sum a_i^2)(\sum (1 - a_i)^2) - (\sum a_i (1 - a_i))^2} \quad (IV.5)$$

$$u_p = \frac{(\sum a_i^2)(\sum (1 - a_i) u_i) - (\sum a_i u_i)(\sum a_i (1 - a_i))}{(\sum a_i^2)(\sum (1 - a_i)^2) - (\sum a_i (1 - a_i))^2} \quad (IV.6)$$

$$\text{avec } a_i = \text{th} \left(\frac{z_i}{\xi} \right)$$

3. calculer la somme S qui est la distance au carrée entre l'approximation et les points expérimentaux.

$$S = \sum \left(u_i - u_p - (u_b - u_p) a_i \right)^2 \quad (IV.7)$$

On recommence ainsi les trois étapes de calcul jusqu'à ce que l'on trouve la distance S minimale.

Approximation polynômiale

Les deux approximations précédentes ne sont plus applicables pour pour des écoulements dont les parois de trémie sont inclinées d'un angle α supérieur ou à égale à 20 degrés par rapport à la verticale {fig.IV21}.

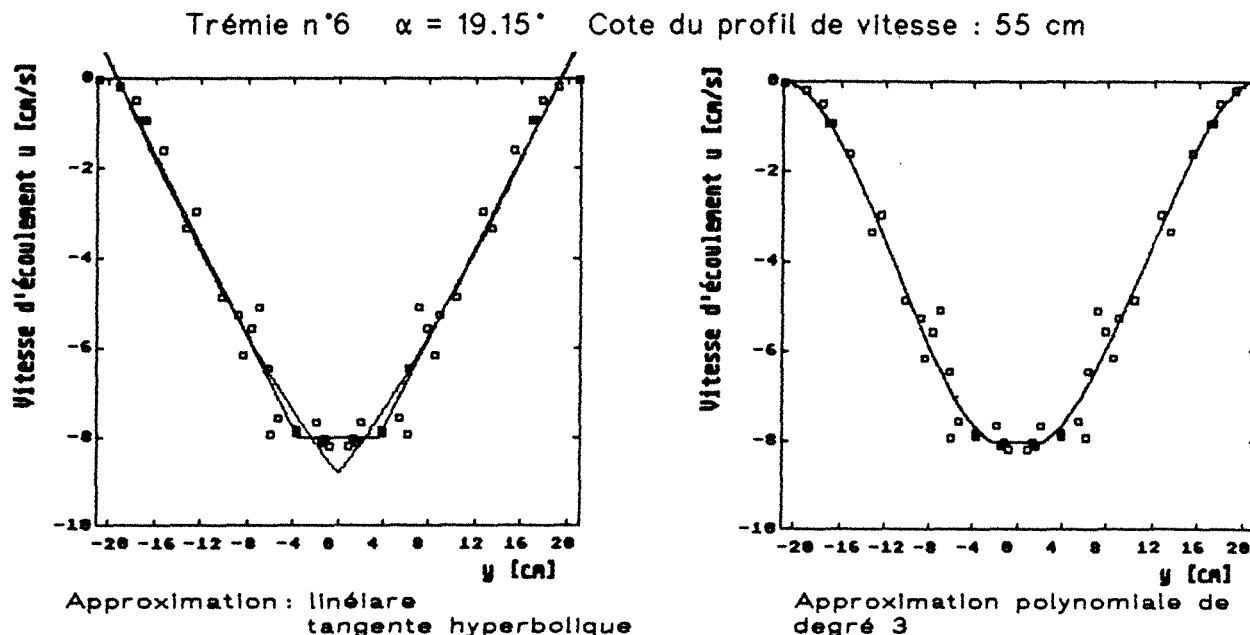


Figure IV21 : approximation d'un profil de vitesse pour des angles d'inclinaison de paroi élevés.

Cette défaillance des techniques d'approximation proposées dans [71] due à l'apparition d'une zone à faible gradient de vitesse au niveau de la paroi, nous a conduit à utiliser pour ce type d'écoulement gravitaire une approximation polynômiale de degré 3, comme on peut le voir sur la figure fe7b.

VII Vitesses verticales expérimentales

VII.1 Profils de vitesses

L'annexe 2 présente tous les profils de vitesses expérimentales pour les les différentes trémies étudiées {tableau IV1}. Les vitesses expérimentales sont approchées avec les modèles linéaire ou non linéaire (tangente hy-

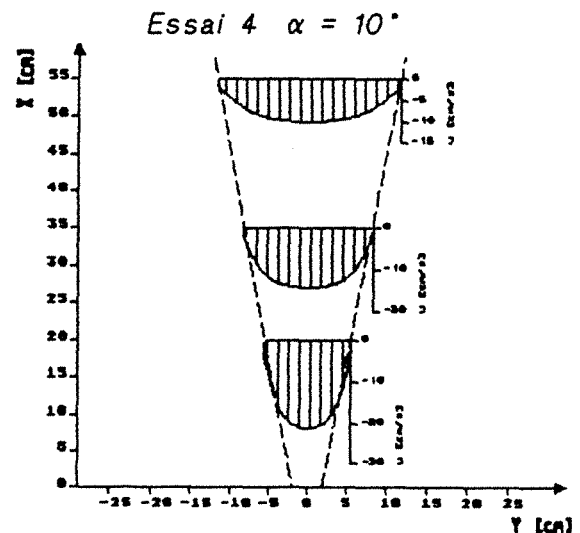
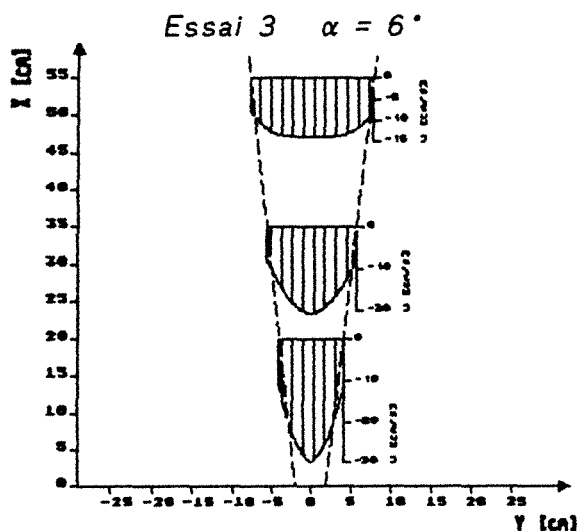
perbolique), ou encore par l'approximation polynomiale de degré 3 lorsque les modèles linéaires et non linéaires ne sont plus applicables. Pour chaque profil on donne sa surface (IV.8) calculée à partir de la fonction d'approximation $u(y)$,

$$\text{"Surface"} = \int_{-l}^l u(y) \cdot dy \quad (\text{IV.8})$$

ainsi que les vitesses verticales au centre et au niveau de la paroi. Les paragraphes suivants présentent l'approximation $u(y)$ des profils de vitesse expérimentaux, $u(y)$ est calculée soit avec la méthode de la tangente hyperbolique (profil hachuré) soit par une approche polynomiale de degré 3. Les champs de vitesses sont représentés dans un repère orthonormé donnant les limites géométriques de la trémie. L'échelle des vitesses est la même pour toutes les courbes de manière à apprécier rapidement les variations de vitesses en fonction des différentes trémies et des différentes cotes (20cm, 35cm, 55cm) .

VII.1.1 Champs de vitesses expérimentales avec les parois I

La figure IV22 donne les vitesses d'écoulement expérimentales pour les trémies dont les parois latérales sont recouvertes de petits pois collés. On rappelle que pour ce type de paroi nous avons un angle de frottement en paroi φ_p égal à 34.62 degrés, c'est à dire que la paroi est considérée comme rugueuse d'après la norme DIN 1055 Teil 6.



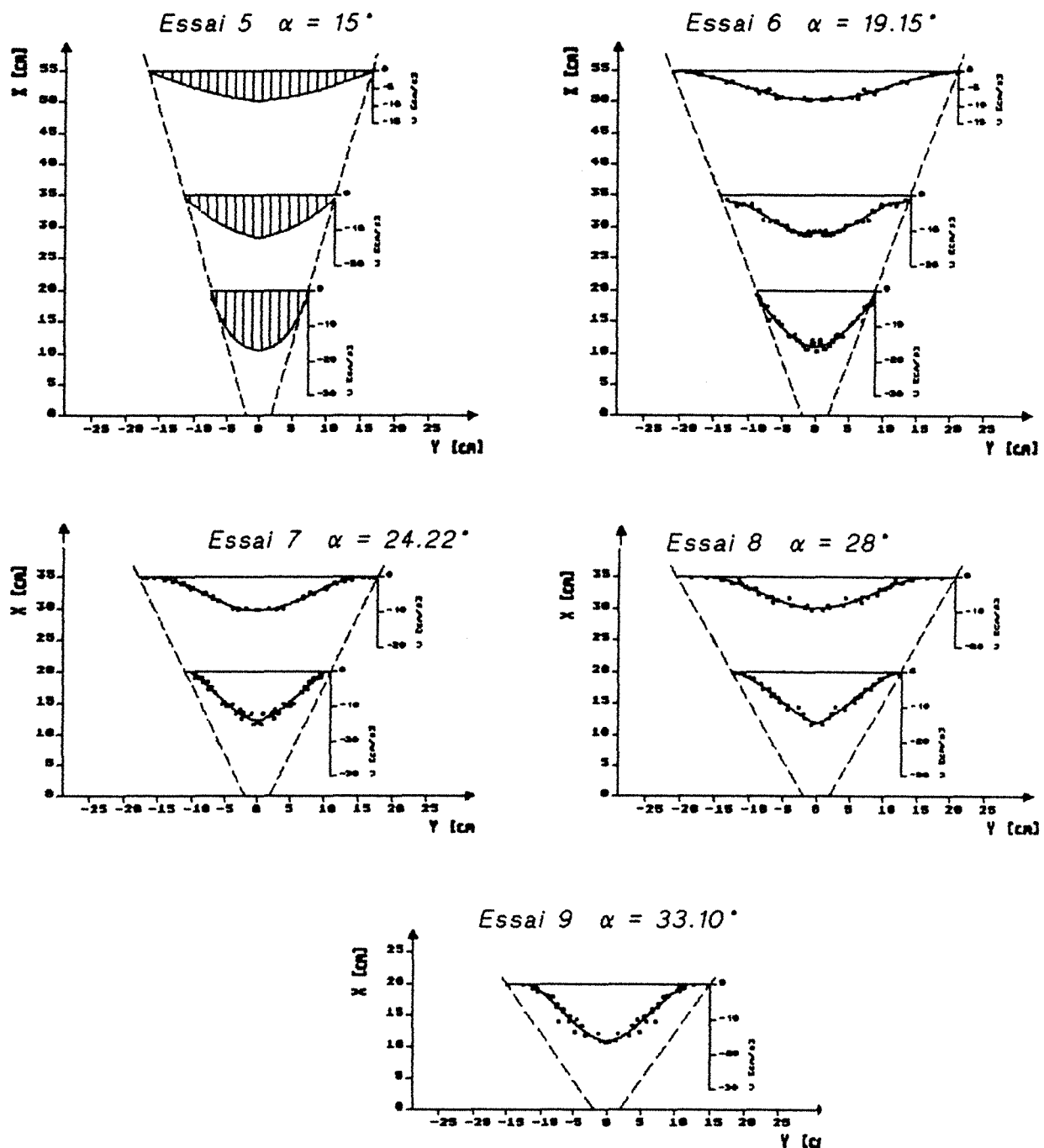


Figure IV22 : vitesses d'écoulement expérimentales pour des trémies avec des parois de type I

VII.1.2 Champs de vitesses expérimentales avec les parois II

La figure IV23 présente les profils de vitesses expérimentales pour les écoulements gravitaires de petits pois secs à travers les différentes géométries de trémies. L'angle de frottement en paroi φ_p pour les limites latérales des trémies est de 16.11 degrés, soit un état de surface lisse d'après la réglementation allemande.

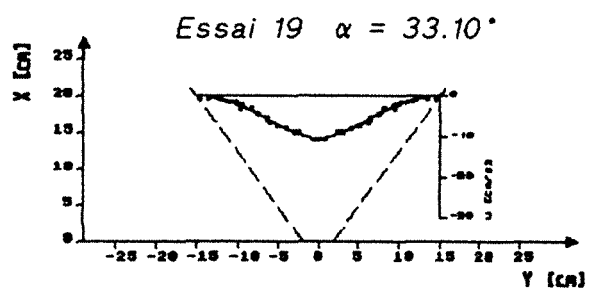
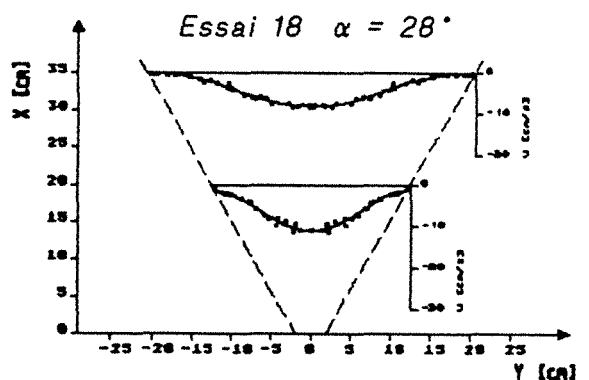
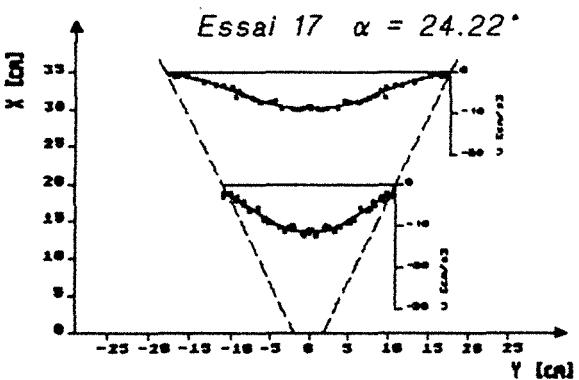
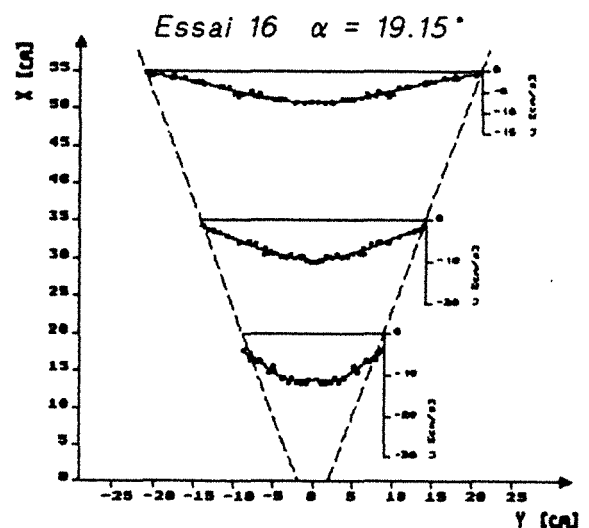
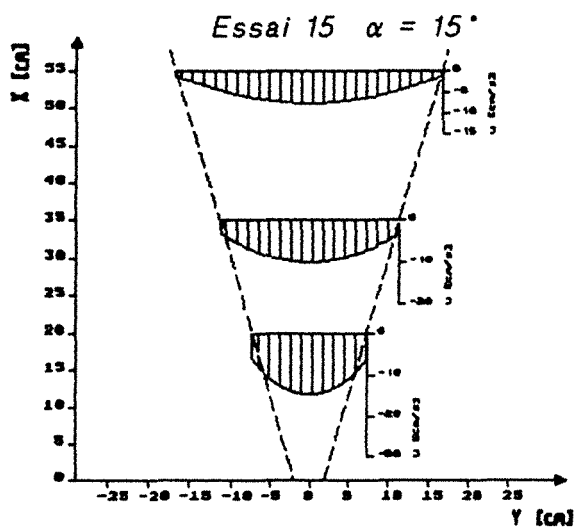
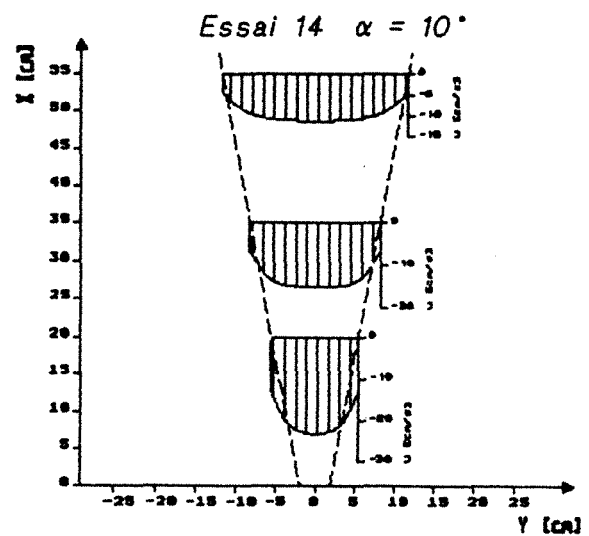
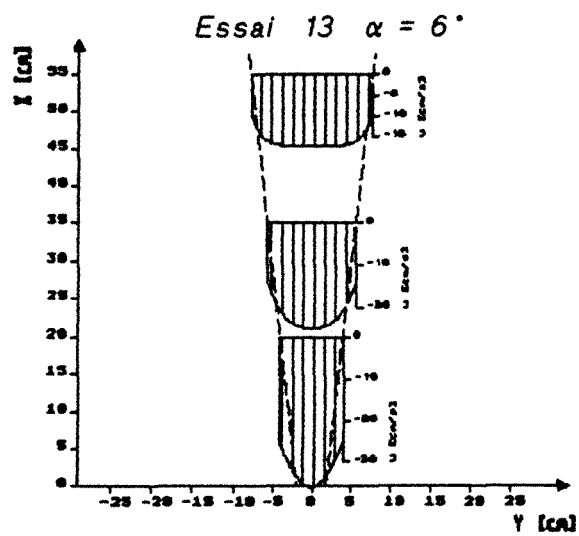
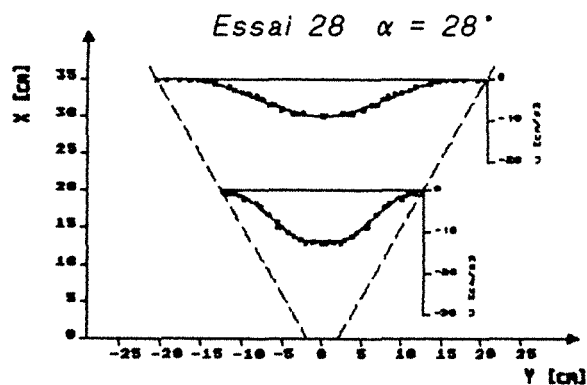
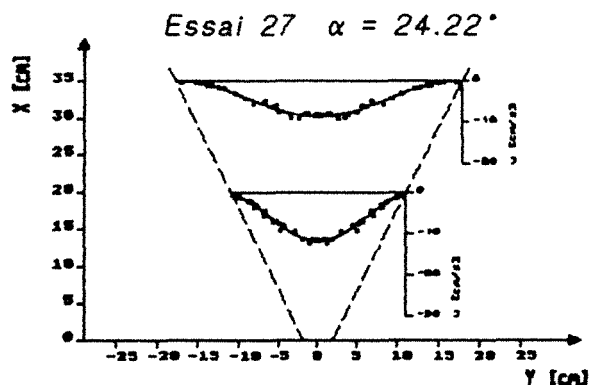
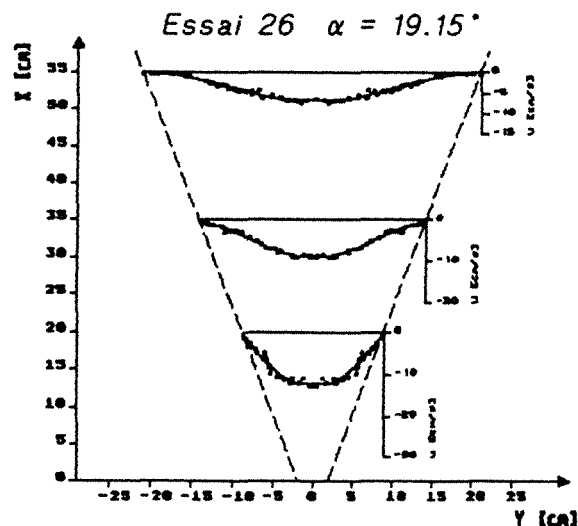
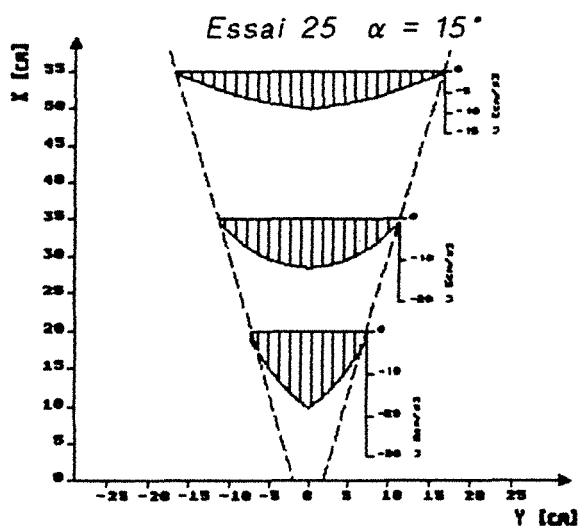
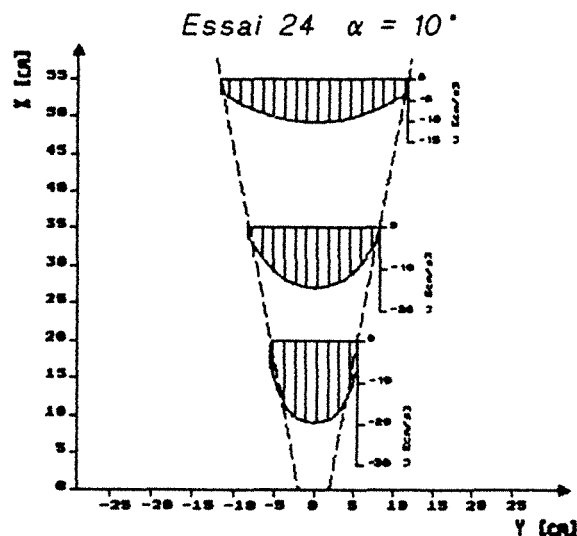
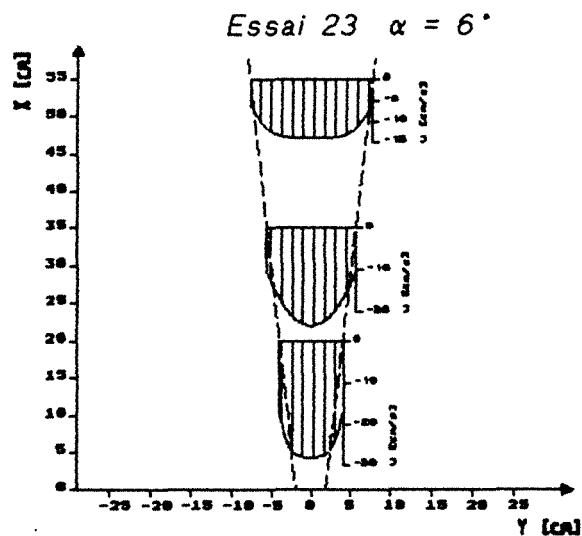


Figure IV23 : vitesses d'écoulement expérimentales pour des trémies avec des parois de type II

VII.1.3 Champs de vitesses expérimentales avec les parois III

Sur les différents graphes de la figure IV24 on montre les champs de vitesses verticales mesurés sur les différentes trémies du tableau IV1 correspondantes au type de paroi III. L'angle de frottement en paroi est cette fois ci de 30.62° , angle correspondant également à une paroi rugueuse.



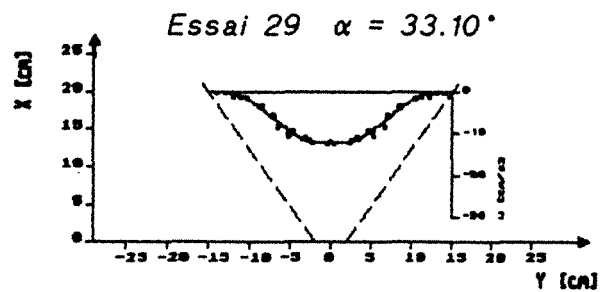
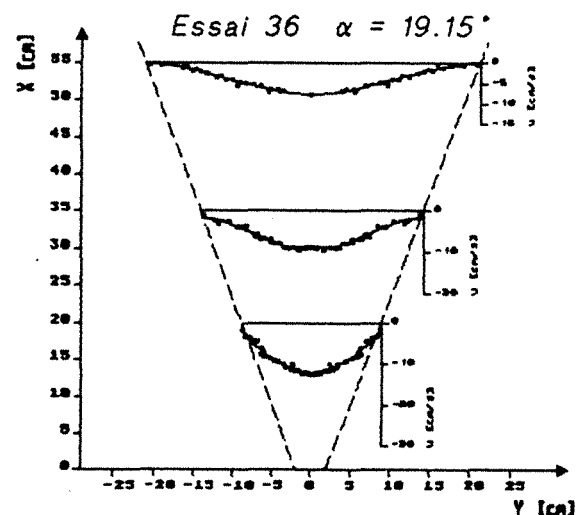
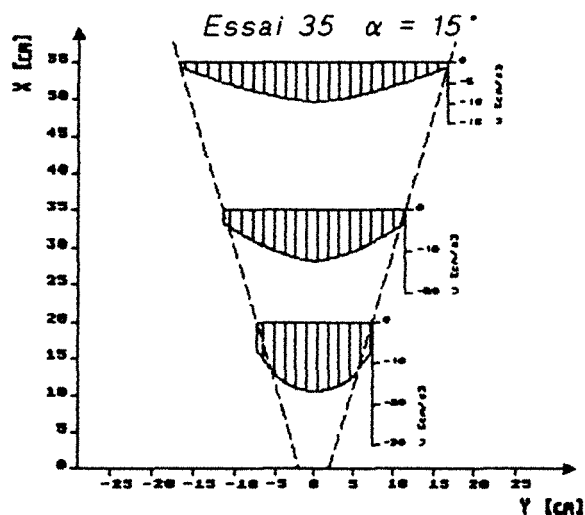
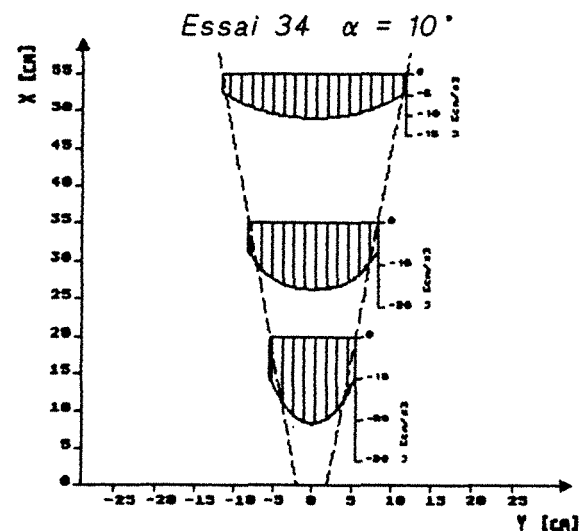
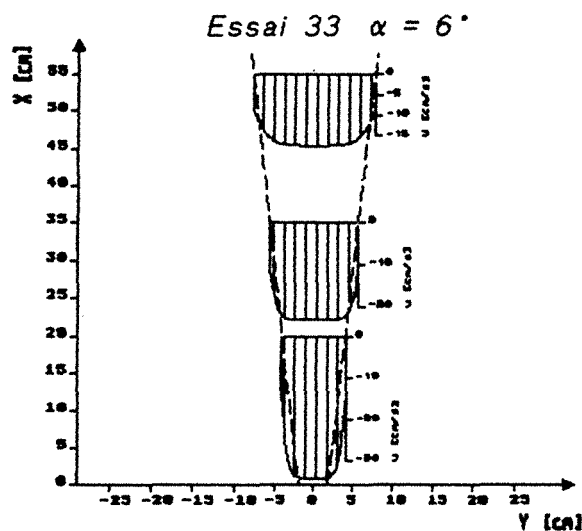


Figure IV24 : vitesses d'écoulement expérimentales pour des trémies avec des parois de type III

IV.1.4 Champs de vitesses expérimentales avec les parois IV

La figure IV24 donne les profils de vitesses verticales obtenus avec le dernier type de paroi étudié. L'angle de frottement en paroi φ_p est une valeur intermédiaire entre les valeurs mesurées sur les parois II et III, il est de 23.89° . Angle de frottement en paroi qui se classe dans la catégories des surface moyennement rugueuse d'après la DIN 1055 T.6.



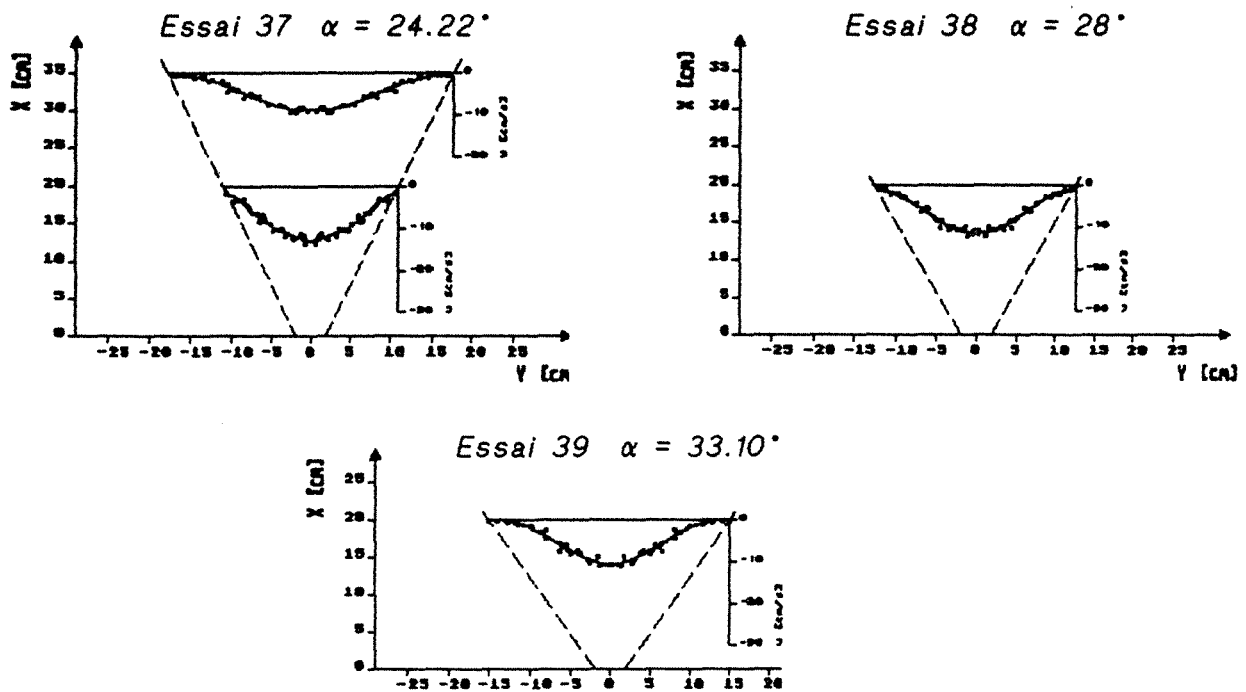


Figure IV25 : vitesses d'écoulement expérimentales pour des trémies avec des parois de type IV

VII.1.5 Remarques

Un premier phénomène que l'on peut observer sur les profils de vitesses présentés par les figures IV22, IV23, IV24 et IV25 est l'évolution de la forme des champs de vitesses pour un même type de paroi lorsque l'inclinaison des parois par rapport à la verticale reste inférieure ou égale à 15 degrés. On constate pour les quatre types de paroi de notre étude que la valeur de la vitesse u_b sur l'axe médian de l'écoulement diminue très nettement avec l'augmentation de l'inclinaison α . De plus le champ de vitesses verticales mesuré dans la partie supérieure des trémies a tendance à s'aplatir en son centre, il y a formation d'un bouchon au milieu de l'écoulement, lorsque la pente de la paroi reste inférieure ou égale à 10°. Ce phénomène n'apparaît déjà plus pour un angle de 15 degrés par rapport à la verticale. Pour cette dernière géométrie les champs de vitesses aux différentes cotes de 20, 35 et 55 centimètres sont de forme arrondie pour les quatre parois utilisées lors de notre étude.

Par ailleurs on constate que la vitesse d'écoulement u_b sur l'axe central n'évolue plus significativement lorsque l'on s'intéresse aux profils mesurés sur des trémies dont l'inclinaison des parois latérales est supérieure ou égale à 15 degrés (fig.IV26). Ce mécanisme d'écoulement se produit pour tous les types d'état de surface des parois. Cette première observation permet donc de distinguer deux types de comportement différents. Le premier pour des angles α inférieure ou égale à 15°, où la vitesse u_b sur l'axe central varie nettement avec l'inclinaison des parois de la trémie. Le second

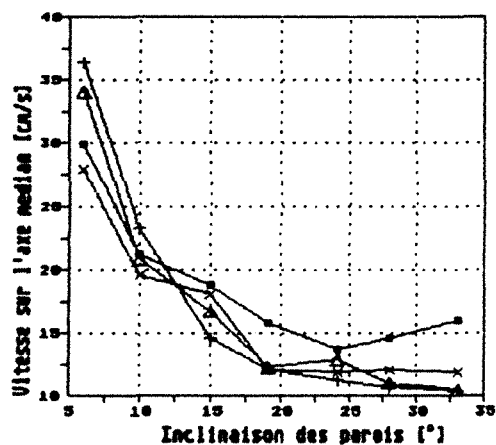
comportement montre par contre une relative insensibilité de la vitesse

α	Paroi	u_b			u_p		
		20	35	55	20	35	55
6°	I	29.91	21.02	13.99	11.43	7.35	7.59
	II	36.47	25.09	16.97	25.33	13.88	9.55
	III	27.98	23.89	14.93	17.04	10.43	5.85
	IV	34.16	23.20	17.17	14.12	11.30	8.59
10°	I	21.24	14.22	10.06	3.49	2.12	1.52
	II	23.37	15.17	11.00	19.63	6.45	4.22
	III	19.68	14.35	10.36	6.90	2.03	2.94
	IV	20.94	15.60	10.61	9.29	6.89	4.16
15°	I	18.98	11.99	8.59	1.51	0.68	0
	II	14.70	10.67	7.63	5.92	3.08	1.00
	III	18.12	11.72	8.90	2.20	0.62	0.25
	IV	16.79	12.34	9.66	6.50	3.02	1.05
19.1°	I	15.82	10.59	8.62			
	II	12.19	9.89	7.26	3.50	1.19	
	III	12.13	8.77	6.64			
	IV	12.33	9.69	7.41	1.72	0.33	
24.2°	I	13.78	9.45				
	II	11.26	8.67				
	III	11.93	8.29				
	IV	12.06	8.73				
28°	I	14.64	8.84				
	II	10.73	8.17				
	III	12.10	9.05				
	IV	11.07					
33.1°	I	16.09					
	II	10.45					
	III	11.96					
	IV	10.50					

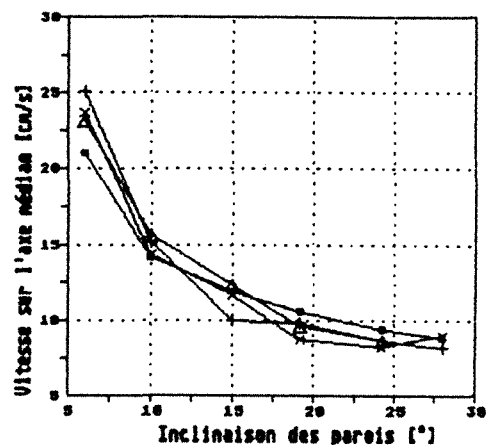
Tableau IV4 : Vitesse u_b sur l'axe central
Vitesse u_p au niveau des parois

verticale u_b lorsque α est compris entre 15 et 34 degrés. Ces deux mécanismes d'écoulement sont naturellement confirmés par les graphes plus détaillés présentés dans l'annexe 2 ou encore par les valeurs du tableau IV4, à partir desquelles nous avons tracé les courbes de la figures IV26 .

Cote du profil de vitesse : 20 cm



Cote de profil de vitesse : 35 cm



Cote du profil de vitesse : 55 cm

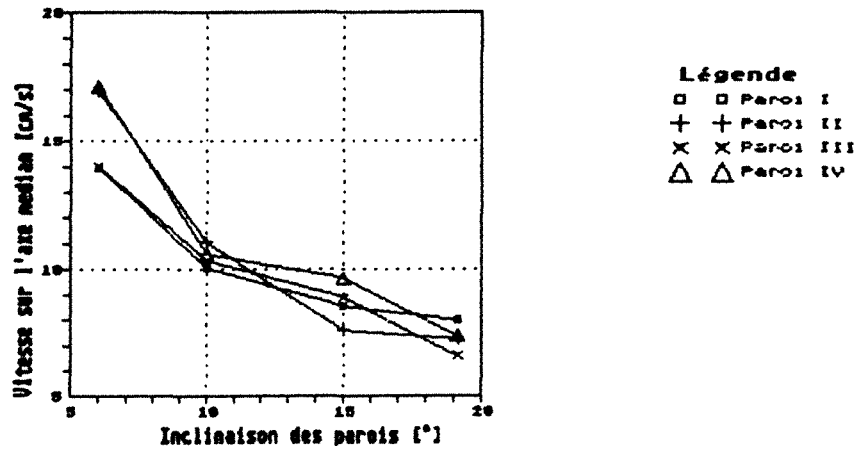


Figure IV26 : Influence de l'inclinaison des parois sur la vitesse u_b au milieu de l'écoulement

Les courbes de la figure IV26 représentant la vitesse au milieu de l'écoulement en fonction de l'inclinaison et de la rugosité des parois montrent très clairement un comportement identique quelle que soit l'état de surface des parois latérales. La seule petite exception que l'on rencontre est pour le profil à la cote de 20 cm avec les parois de type I où la vitesse u_b augmente nouveau avec une inclinaison de paroi supérieure ou égale à 28 degrés. Ce comportement est certainement dû au fait que l'angle de frottement en paroi ϕ_p soit identique à l'angle de frottement interne ϕ des petits pois secs.

Pour les deux profils de vitesses verticales dans la moitié inférieure de l'écoulement on voit très clairement que plus l'angle de frottement en paroi ϕ_p est faible plus sera élevée la vitesse u_b . Ceci pour des pentes de parois de 6 et 10 degrés. Pour des angles plus élevés il est plus difficile de conclure, en tout cas d'après les courbes que nous avons pu obtenir, il semble que dans ce cas l'état de surface des parois ait moins de conséquence sur la vitesse centrale u_b .

VII.2. Corrélation entre le débit massique et les vitesses d'écoulement

Un moyen de contrôle de la précision et de la validité des mesures expérimentales peut se faire en corrélant le débit massique Q_M avec les vitesses d'écoulement $u(y)$. En effet la relation (IV9) relie ces deux grandeurs :

$$Q_M = h \int_{-l}^l u(y) \rho(y) dy, \quad (IV.9)$$

h est l'épaisseur de la trémie, l la demi-largeur de la trémie à la cote du

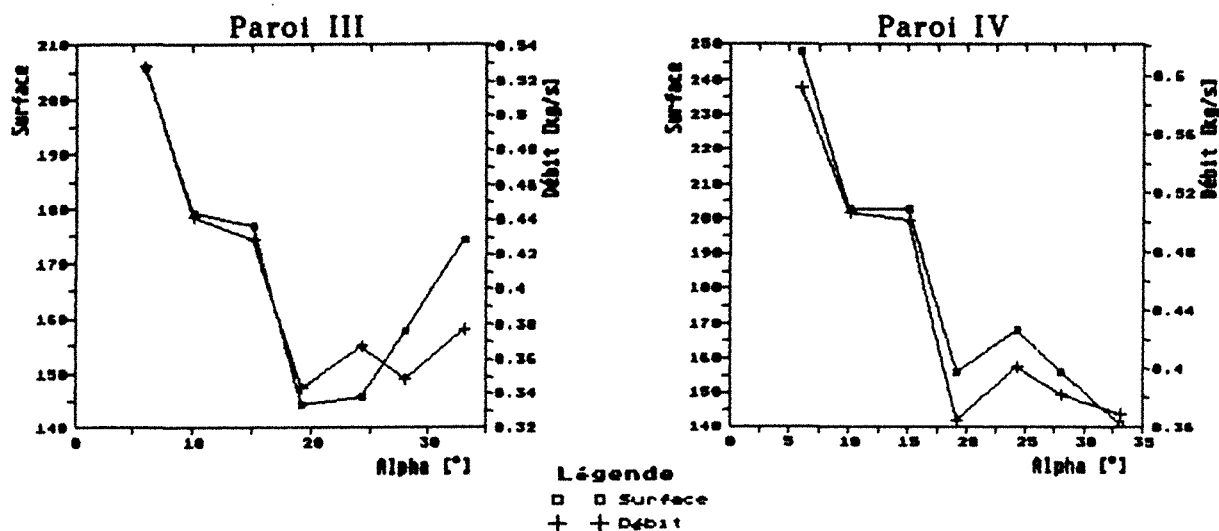


Figure IV27 : Surface, débit en fonction de l'angle d'inclinaison des parois de la trémie

Les courbes de la figure IV27 superposant l'évolution du débit massique et l'évolution de la surface des profils de vitesses (IV.8) en fonction de l'inclinaison des parois montrent une bonne corrélation (IV.11) entre la mesure des deux quantités. Ces deux courbes permettent de constater une bonne fiabilité de nos mesures expérimentales, car la mesure du débit est une technique tout à fait indépendante de la méthode de détermination des champs de vitesses.

Nos courbes expérimentales montrent encore que les valeurs et le comportement sont très liés avec la rugosité des parois. Selon l'état de surface des parois on a un comportement très différent en fonction de l'inclinaison de celles-ci. Pour les parois rugueuses du type I et III ou l'angle de frottement en paroi φ_p est identique ou proche de l'angle de frottement interne φ on remarque à nouveau une très forte ou forte augmentation des valeurs lorsque l'inclinaison des parois dépasse 30 degrés. Alors que pour des parois lisses du type II et IV nous sommes plutôt en présence d'une diminution des valeurs expérimentales. Pour la paroi la plus lisse du type II on peut même distinguer deux parties quasiment linéaires dans l'évolution du débit en fonction de l'angle α . La première zone entre 6 et 15 degrés est caractérisée par une très grande chute du débit lorsque α augmente, alors que le second domaine se caractérise par une diminution nettement plus lente.

VIII. Conclusion

Ce chapitre nous a permis de mettre expérimentalement en évidence différentes caractéristiques de l'écoulement gravitaire d'un matériau granulaire naturel à l'intérieur de trémies planes. On montre ainsi l'évolution des vitesses verticales et du débit en fonction du frottement en paroi et de la

géométrie de la trémie. Le matériau granulaire s'écoule ainsi à travers les trémies avec un débit massique constant, quelle que soit l'inclinaison des parois entre 6 et 33 degrés par rapport à la verticale, et quelle que soit la rugosité de ces parois latérales. Le débit massique est donc indépendant de la hauteur de matériau granulaire au-dessus de la trémie, hauteur de matériau qui diminue au fur et à mesure que celui-ci s'écoule à travers la trémie. Une conséquence de ce résultat est naturellement l'invariance des vitesses lors de l'écoulement. Pour des angles d'inclinaison inférieure ou égale à 15 degrés on observe une fluctuation importante de la vitesse d'écoulement des grains autour d'une valeur moyenne. L'écoulement à l'intérieur de ces géométrie de trémie est donc uniquement permanent en moyenne sur un laps de temps suffisamment grand.

Les mesures de débit que nous avons effectué au laboratoire montrent que la sensibilité de l'écoulement à la rugosité des parois est fonction de l'inclinaison de celles-ci. Le débit massique est relativement indépendant de la rugosité lorsque l'angle α est supérieur à 20 degrés.

La plus grande partie de cette étude expérimentale est tout de même consacrée à la mesure et à l'exploitation des vitesses verticales de l'écoulement gravitaire. On trace ainsi les profils de vitesses expérimentales sur des sections horizontales situées à 20, 35 et 55 centimètres au-dessus de l'orifice inférieure des trémies étudiées. On détaille ici et dans l'annexe 4 la lourde technique permettant de tracer les profils de vitesses à partir de l'exploitation des films vidéos, champs de vitesses verticales que nous présentons dans ce chapitre et dans l'annexe 2. L'analyse des profils de vitesse a montré que les vitesses verticales comme les valeurs de débit massique sont très influencés par la rugosité des parois et donc par l'angle de frottement en paroi. Pour un état de surface de paroi donnée on constate une rapide diminution de la vitesse verticale sur l'axe médian lorsque l'inclinaison des parois passe de 6 à 15 degrés. A partir de 15 degrés nous avons une diminution nettement moins rapide de cette vitesse verticale.

La longue étude expérimentale que nous avons mené au laboratoire nous a permis non seulement de mettre en évidence des caractéristiques originales de l'écoulement gravitaire à l'intérieur de trémies de géométrie et de type de paroi différentes. Mais cette étude a également permis de créer une base de donnée conséquente contenant de nombreux champs de vitesses expérimentales. Nous utiliserons par la suite ces données expérimentales pour valider la modélisation que nous proposons dans le chapitre précédent, bien que celle-ci ait été développée pour un puits à parois verticales. En effet on peut supposer que l'inclinaison des parois est négligeable tant que celle-ci reste faible par rapport à la verticale. Ces données expérimentales nous permettrons encore de déterminer les constantes pour les petits pois secs de notre modèle.

Chapitre 5

Détermination des constantes de la modélisation de l'écoulement gravitaire

I. Introduction

Les vitesses d'écoulement expérimentales obtenues dans le chapitre IV sont utilisées dans cette partie pour déterminer les constantes r , q , γ , γ_p et β_p de la modélisation développée dans le chapitre III. Ces dernières s'obtiennent en calant les vitesses théoriques sur les courbes expérimentales. Les vitesses verticales expérimentales sont celles mesurées à l'intérieur de trémies où l'inclinaison des parois latérales est inférieure ou égale à 15 degrés par rapport à la verticale. Dans ce cas il y a de fortes chances d'être en présence d'un écoulement qui réponde aux hypothèses d'application du modèle, tout au moins dans la partie inférieure de la trémie. Dans ce cas l'écoulement gravitaire est soumis à un fort taux de cisaillement où les collisions entre grains sont de courtes durée. Les contraintes tangentielles d'origine visqueuses sont donc prédominantes, comme le requière notre modélisation inspirée des équations de l'hydrodynamique.

La première étape de la détermination consiste à chercher les constantes r , q , γ décrivant les caractéristiques du matériau, et la constante β_p décrivant l'interaction grain-paroi. Pour cela on utilise les résultats expérimentaux des essais n°3, 4 et n°5 où on a collé des grains de petits pois sur les parois de la trémie. Cette astuce expérimentale permet d'éliminer le coefficient d'élasticité des chocs grain-paroi γ_p , car dans ce cas il est identique au coefficient d'élasticité γ des chocs grain-grain. Une fois les valeurs de r , q , γ et β_p trouvées, on s'attachera dans une seconde étape à chercher les valeurs de γ_p et β_p pour d'autres types de paroi.

Le calage du modèle mathématique sur les vitesses d'écoulement réelles met en outre en évidence les limites d'application de notre modélisation originale. Pour certains types de paroi on remarque que les champs de vitesse théorique ne s'accordent plus avec les courbes expérimentales lorsque l'on se trouve dans la partie supérieure de l'écoulement de matériau granulaire à travers la trémie. Pour de tels cas, l'écoulement gravitaire ne répond plus aux hypothèses d'application de la modélisation développée au chapitre III. On peut donc supposer que les contraintes tangentielles d'origine visqueuse ne sont plus prépondérantes et que la durée des collisions entre grains devient trop grande, créant ainsi des forces de frottement entre grains lors des chocs.

II. Les constantes du modèle pour les petits pois secs

II.1 Constantes γ , r , q , β_p

II.1.1 Généralités

Ce paragraphe se propose de rechercher les paramètres γ , r , q caractérisant le matériau et le terme β_p qui caractérise l'interaction grain-paroi. Pour faciliter la recherche des paramètres on utilise les courbes expérimentales obtenues avec les essais numéro 3, 4 et 5 où les parois sont recouvertes avec des petits pois secs collés. Ce procédé permet d'éliminer le paramètre γ_p d'élasticité des collisions grain-paroi car dans ce cas il est identique à γ .

La constante t qui n'a aucune influence sur les fonctions $V(Y)$, $U(Y)$, $S(Y)$ et prise égale à 1. Car comme cela est montré sur un exemple dans le chapitre III, la constante t permet uniquement d'ajuster la valeur de la pression à l'intérieur de la trémie.

Mais avant de pouvoir rechercher les constantes r , q , γ et β_p il faut encore pouvoir déterminer la vitesse de fluctuation en paroi V_p . Cela est rendu possible grâce à la connaissance de la vitesse verticale le long des parois U_p . A partir des relations (II.28, (II.10) et (II.22) on arrive facilement à exprimer la vitesse de fluctuation en paroi V_p en fonction de la vitesse d'écoulement U_p . La combinaison de ces trois équations donne :

$$\tau_p = \beta_p \frac{p}{t \cdot v_p} u_p \quad (\text{ep1})$$

L'équation (V.1) s'écrit adimensionnellement :

$$T_p = \beta_p \frac{P_o}{t \cdot V_p} U_p \quad (\text{ep2})$$

$$\begin{aligned} \text{avec } T_p = 1 \quad \text{car} \quad T_p = \tau_p / \rho g l \quad \text{et} \quad \tau_p = \rho g l \\ V_p = v_p / \sqrt{g l} \quad U_p = u_p / \sqrt{g l} \quad P_o = p / \rho g l \end{aligned}$$

La relation (V.3) permet enfin d'obtenir la vitesse de fluctuation V_p en fonction de la vitesse d'écoulement en paroi U_p . Cette dernière est donnée par l'approximation linéaire ou non linéaire (annexe 2) des vitesses expérimentales.

$$\boxed{V_p = \beta_p \frac{P_o}{t} U_p} \quad (\text{ep3})$$

L'équation (V.3) montre que la vitesse de fluctuation V_p dépend bien de la vitesse de glissement en paroi U_p , mais qu'elle dépend aussi de la pression P_0 régnant à l'intérieur de l'écoulement gravitaire. P_0 est également une inconnue qu'il faut déterminer. Or comme on le montre sur dans exemple dans le paragraphe V.1 du chapitre III, la pression est indépendante de la vitesse de fluctuation en paroi. La première étape de calcul consistera donc à calculer la valeur de P_0 en prenant une vitesse de fluctuation V_p arbitraire comme nous l'avons fait dans le paragraphe IV.5 du chapitre III par le logiciel HAFF.PRГ. Dans la seconde étape on calcule la vitesse V_p avec l'équation (V.3), grâce à la donnée expérimentale de U_p grâce à de la valeur de P_0 calculée dans la procédure précédente. Les valeurs de V_p et P_0 permettent alors de calculer les courbes $V(Y)$ et $U(Y)$ correspondantes en se fixant des valeurs pour les différentes constantes du modèle, t restant toujours égal à 1.

II.1.2 Algorithme de calcul pour la détermination des constantes r, q, γ, β_p

La détermination des constantes r, q, γ, β_p se fait en calant les vitesses théoriques simultanément sur au moins deux profils de vitesses expérimentales de cotes différentes, mais appartenant à la même trémie. La recherche s'effectue en analysant une multitude de combinaisons r, q, γ, β_p grâce au logiciel CALAGE.PRГ dont la conception repose sur l'algorithme de HAFF.PRГ.

Pour chaque combinaison de constantes r, q, γ, β_p on calcule les vitesses théoriques que l'on veut caler sur les champs de vitesses expérimentales. On compare ensuite numériquement les profils de vitesses adimensionnelles théoriques et expérimentales en calculant la somme des distances verticales au carré séparant les deux courbes en vingt points répartis sur la largeur de l'écoulement. La courbe expérimentale est donnée par l'approximation des points expérimentaux à l'aide de la méthode de la tangente hyperbolique, les caractéristiques de l'approximation des points expérimentaux pour chaque profil de vitesses sont présentées dans l'annexe 2. La figure VI montre les distances entre les courbes théoriques et expérimentales que l'on élève au carré et que l'on somme numériquement pour pouvoir trouver la combinaison r, q, γ, β_p qui donne l'écart le plus faible entre la théorie et l'expérience.

Le logiciel CALAGE.PRГ a été entièrement automatisé car le temps de calcul est de plusieurs heures lorsque l'on étudie un grand nombre de combinaisons de γ, r, q, β_p . La vérification de la symétrie de la fonction $V(Y)$ se fait alors numériquement, CALAGE.PRГ vérifie encore automatiquement que toutes les valeurs de $U(Y)$ sont négatives, afin d'éliminer les courbes du même type que celles sur la figure III3a.

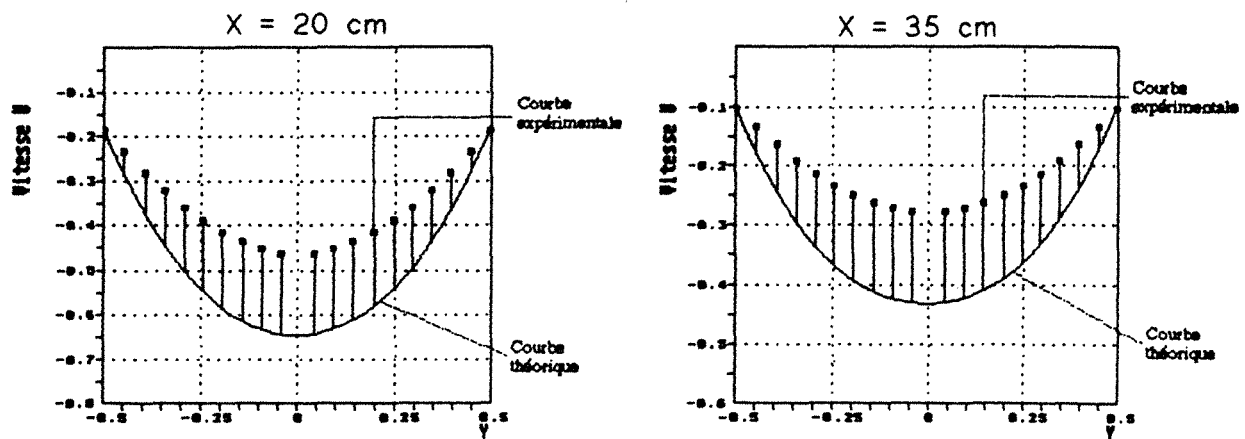


Figure V1 : écart entre les vitesses théoriques et expérimentales

$q = 1.5$ $r = 0.8$ $\gamma = 0.03$ $\beta_p = 1.5$
 courbes expérimentales : trémie n°3

L'algorithme du logiciel peut se résumer de la manière suivante :

1. lire les caractéristiques u_p , u_b , ξ de l'approximation par la tangente hyperbolique des profils de vitesses expérimentales à approcher par le modèle.
2. lire le rapport $\delta = d/2l$ pour chaque profil de vitesses
3. entrer les plages de variation des constantes γ, r, q, β_p
4. début des boucles sur les 4 constantes
5. début de la boucle sur les profils de vitesses expérimentales
 6. si $P_1 = 0$ alors lire P_1
 7. on fixe V_p égal à 0.002
 8. calcul de dV_p/dY et de $V(Y)$ (algorithme du logiciel HAFF.PRG) pour la détermination de la pression P_0
 9. vérification de la symétrie de la fonction $V(Y)$.
 Si ce n'est pas le cas $P_1 = 0$, recommencer en 6.
 10. calcul de la vitesse V_p réelle avec la donnée de P_0 et la donnée expérimentale de u_p (approximation par la tangente hyperbolique).
 11. calcul de dV_p/dY et de la fonction $V(Y)$ (pas de calcul itératif car P_0 est déjà connue)
 12. calcul de la vitesse d'écoulement $U(Y)$.
 13. vérifier que toutes les valeurs de $U(Y)$ soient négatives.
 Si ce n'est pas le cas $P_1 = 0$, recommencer en 6.
 14. sommer les distances au carré entre la courbe expérimentale (approximation par la tangente hyperbolique) et la courbe théorique calculée (sur 20 points répartis sur la demi-largeur du profil).
15. fin de la boucle sur les profils de vitesses
16. stocker γ, r, q, β_p la somme des distances au carré
17. somme des distances au carré = 0
18. corriger la valeur de P_1 en fonction de la nouvelle combinaison de constantes que l'on va utiliser pour le prochain calcul de $U(Y)$.
19. fin de boucle sur les constantes γ, r, q, β_p .

II.1.3 Les constantes r , q , γ , β_p pour les petits pois secs

Le calage des vitesses d'écoulement théoriques sur les vitesses d'écoulement expérimentales à l'aide du logiciel CALAGE.PRG montre que le coefficient β_p décrivant l'interaction grain-paroi varie avec l'angle d'inclinaison et l'état de surface de la paroi. Le tableau VI donne les valeurs de β_p en fonction de l'angle d'inclinaison des parois par rapport à la verticale. La recherche des paramètres r , q , γ , β_p a encore montré qu'il n'était pas possible de trouver des paramètres r , q , γ du matériau permettant d'approcher à la fois les champs de vitesses aux cotes 20 cm, 35 cm et 55 cm. Cette première approche montre déjà que dans certains cas l'écoulement gravitaire dans la partie supérieure n'est peut être plus modélisable par le modèle que nous proposons ici. Nous nous sommes par conséquent contenté d'utiliser les données expérimentales aux cotes de 20 et 35 centimètres. A partir de nos données expérimentales du chapitre III nous avons calculée les constantes suivantes pour les petits pois secs.

$r = 1.3$	$q = 3.2$	$\gamma = 0.045$
-----------	-----------	------------------

La détermination de ces valeurs a été effectuée avec les mesures expérimentales faites sur la trémie numéro 3 aux cotes de 20 et 35 centimètres. L'annexe 3 donne une partie des combinaisons de r , q , γ , β_p étudiées pour obtenir les valeurs ci-dessus, ainsi que la comparaison des vitesses théoriques avec l'approximation non linéaire des vitesses expérimentales pour les profils aux cotes de 20 et 35 centimètres, c'est à dire ceux qui ont servi à la détermination des constantes ci-dessus.

Les figures V2, V3 et V4 montrent la superposition des champs de vitesses réels, formés par les points expérimentaux, avec les courbes théoriques obtenues par la modélisation que nous avons développé à partir des équations proposées dans [29], avec l'aide des paramètres que l'on propose dans ce paragraphe. Sur ces figures on remarque que les champs de

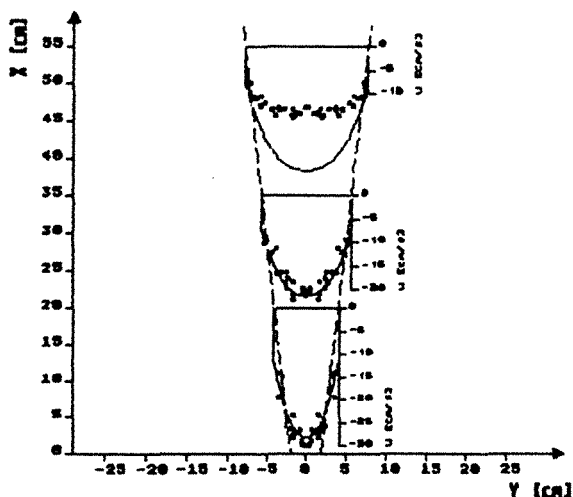


Figure V2 : manip n°3 $\alpha = 6^\circ$

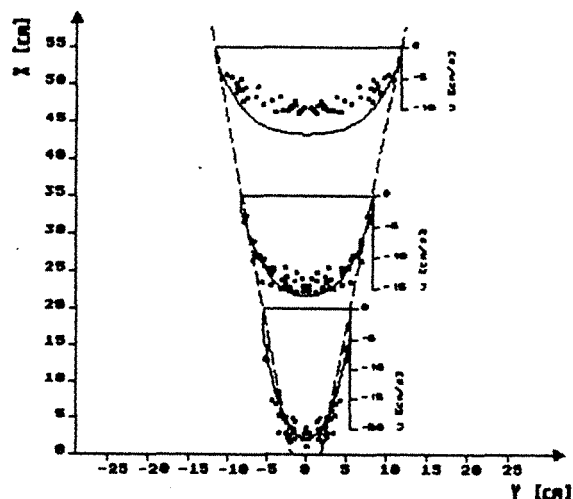


Figure V3 : manip n°4 $\alpha = 10^\circ$

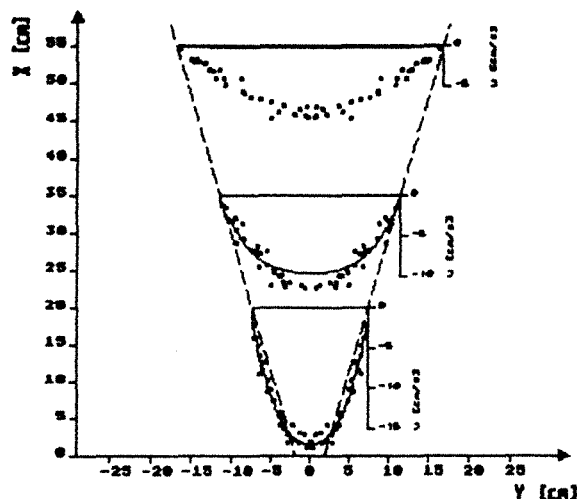


Figure V4 : manip n°5 $\alpha = 15^\circ$

vitesses théoriques se superposent de manière satisfaisante avec les vitesses expérimentales pour les cotes de 20 cm et 35 cm. Alors que, comme cela a été prévisible, les vitesses verticales théoriques aux cotes de 55 cm sont trop élevées par rapport aux vitesses réelles pour les angles de 6° et 10° et beaucoup trop faibles pour l'inclinaison de 15°

II.2 Constantes γ_p et β_p en fonction de l'inclinaison et de l'état de surface des parois

Maintenant que l'on connaît les constantes du modèle caractérisant les petits pois secs, il reste encore à déterminer les coefficient γ_p , caractérisant l'élasticité des collisions entre les grains et la paroi, et β_p . La recherche de ces coefficients s'effectue avec le logiciel CALAGE-P.PRГ dont la conception est tout à fait identique à CALAGE.PRГ. Par contre CALAGE-P.PRГ analyse des combinaisons de γ_p et β_p en gardant les valeurs des autres paramètres r, q, t, γ constantes et égales aux valeurs trouvées par le logiciel CALAGE.PRГ et données précédemment. Dans l'annexe 3 on donne un exemple de calcul qui a permis d'obtenir les constantes γ_p et β_p pour les parois de type II, par l'étude de différentes combinaisons de ces constantes.

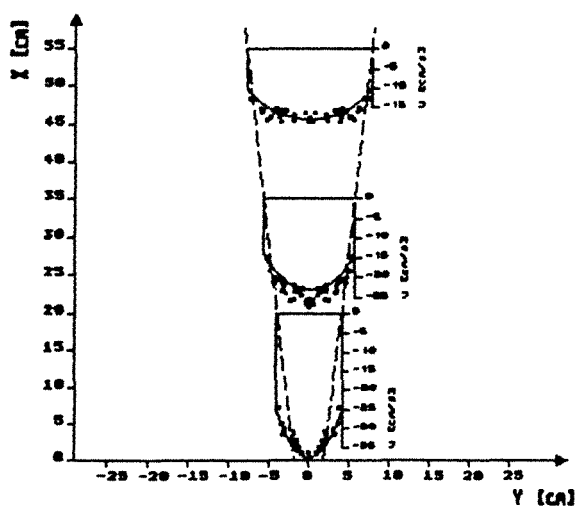
Les valeurs des coefficients γ_p et β_p pour les quatre types de parois que nous avons utilisé pour notre étude sont résumés dans le tableau VI suivant.

Coefficients γ_p et β_p pour les parois lisses de type II

Les figures V5, V6 et V7 comparent les courbes théoriques avec les vitesses d'écoulement expérimentales que l'on a pu obtenir pour des angles d'inclinaison α de 6° , 10° et 15° . Les valeurs de γ_p et β_p sont données dans le tableau V1.

Paroi	γ_p	Inclinaison des parois [$^\circ$]		
		6	10	15
I	0.045	1.8	4.4	7.5
II	0.055	0.6	0.9	1.1
III	0.005	1	2.5	5.3
IV	0.005	1.4	1.1	1.3

Tableau VI : coefficient γ_p et β_p en fonction des caractéristiques des parois



Figures V5 : manip n°13 $\alpha = 6^\circ$

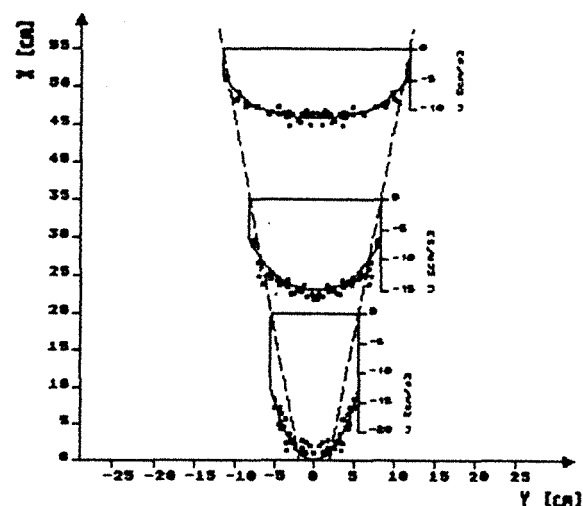
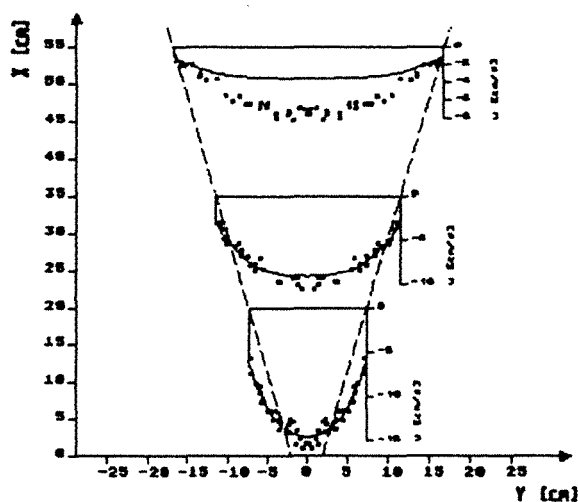


Figure V6 : manip n°14 $\alpha = 10^\circ$



Figures V7 : manip n°15 $\alpha = 15^\circ$

Sur ces figures V5 , V6 et V7 on constate que l'approche théorique à l'aide de la modélisation coïncide de manière tout à fait satisfaisante avec les vitesses verticales expérimentales aux cotes de 20 et 35 centimètres. En ce qui concerne les champs de vitesses à la cote de 55 centimètres on re-

marque les vitesses théoriques se superposent avec l'expérience pour les inclinaisons de 6 et 10 degrés, alors que pour $\alpha=15^\circ$ les valeurs théoriques sont à nouveau inférieure aux vitesses mesurées en laboratoire.

Coefficients γ_p et β_p pour les parois rugueuses de type III

Les figures V8, V9 et V10 montrent les résultats obtenus avec notre modélisation pour des parois de trémies de type III, c'est à dire du sable de granulométrie 1.6/2.0 collé sur les parois latérales des trémies. Les courbes théoriques sont obtenues avec $\gamma_p = 0.005$ et $\beta_p = 1, 2.5, 5.3$ suivant l'inclinaison des parois par rapport à la verticale.

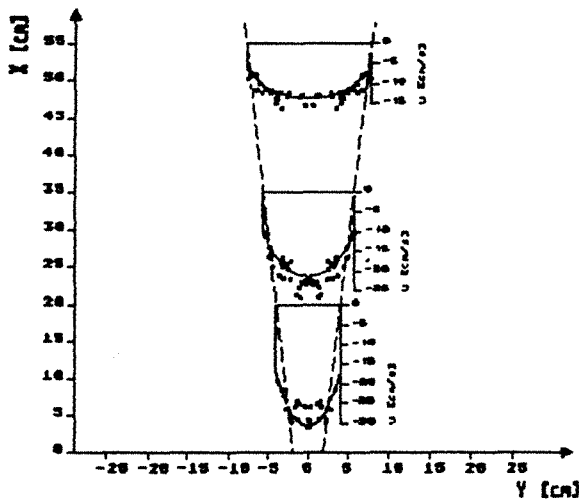


Figure V8 : manip n° 23 $\alpha = 6^\circ$

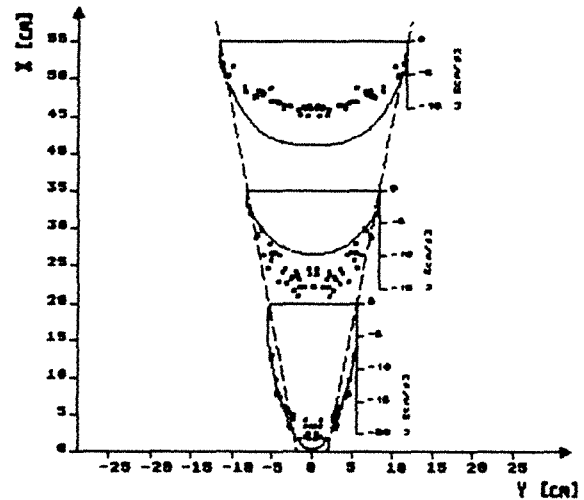


Figure V9 : manip n°24 $\alpha = 10^\circ$

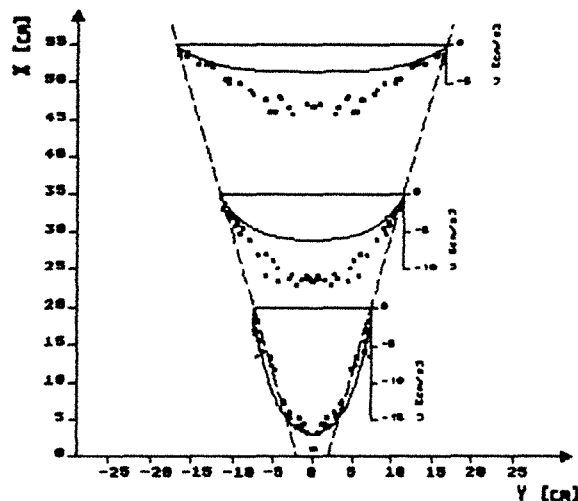


Figure V10 : manip n°25 $\alpha = 15^\circ$

Les champs de vitesse théorique obtenus avec les parois III donnent des résultats moyens ou très moyens pour des angles de 10 et 15 degrés.

Coefficients γ_p et β_p pour les parois rugueuses de type IV

Pour terminer ce paragraphe nous présentons encore sur les figures V11 , V12 et V13 les courbes théoriques destinées à approcher les champs de vitesses expérimentales mesurées avec des parois de type IV, réalisées par collage de sable de granulométrie 0.315/0.40.

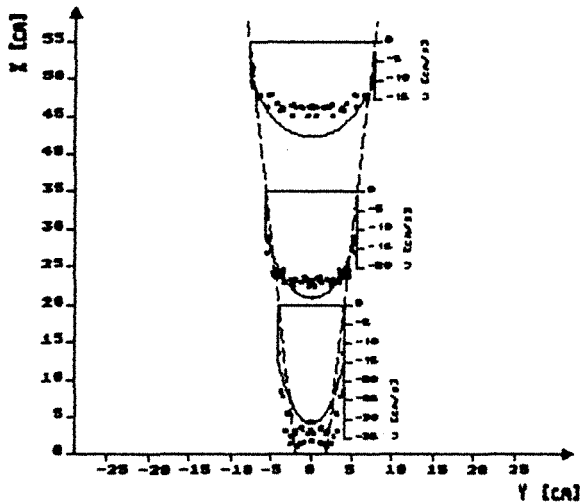


Figure V11 : manip n°33 $\alpha = 6^\circ$

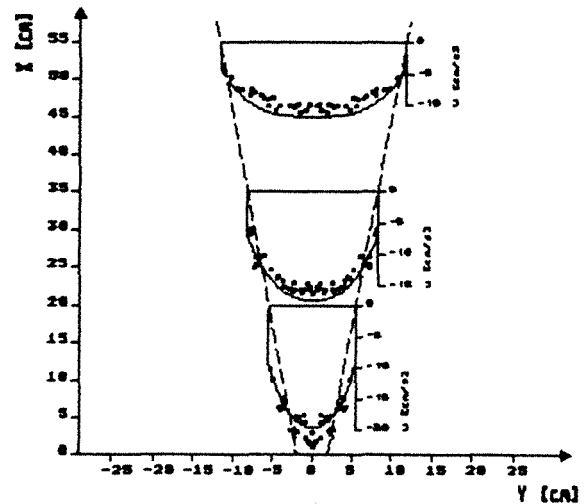


Figure V12 : manip n°34 $\alpha = 10^\circ$

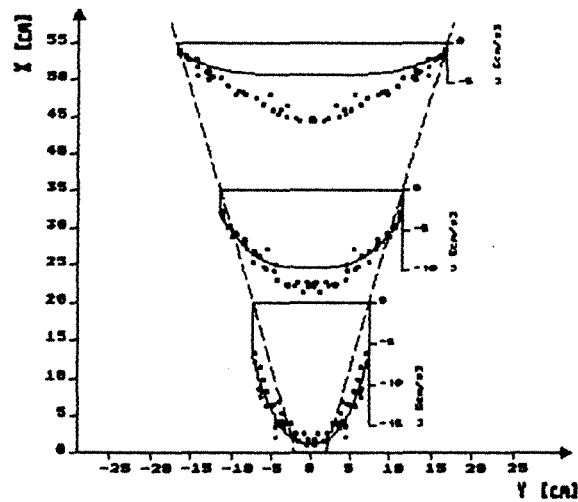


Figure V13 : manip n°35 $\alpha = 15^\circ$

Sur ces figures ci-dessus on a à nouveau une meilleure superposition de la théorie et de l'expérience qu'avec les courbes obtenues avec le sable grossier collé sur les parois des trémies.

II.3 Remarques

La première chose frappante que l'on peut observer est l'impossibilité,

dans certains cas, de modéliser l'écoulement dans la partie supérieure de l'écoulement. Par contre dans la partie inférieure, c'est à dire pour les champs de vitesse aux cotes de 20 et 35 centimètres, nous obtenons des résultats tout à fait satisfaisants. On peut donc supposer que les hypothèses d'application du modèle ne sont plus respectées dans ces zones d'écoulement où les courbes théoriques et expérimentales ne coïncident plus. Le chapitre suivant confirmera ou infirmera cette hypothèse. La condition essentielle du modèle étant le taux de cisaillement élevé, ce qui se traduit par des vitesses et des débits élevés. En effet on constate que lorsque les vitesses verticales et les débits d'un écoulement à l'intérieur d'un trémie sont plus élevés qu'avec une autre trémie, alors la modélisation peut retracer la réalité pour des cotes de profil de vitesse élevés. Cela est observable sur les figures V5, V6, V7 et V11, V12, V13 où nous avons de meilleurs résultats à la cote de 55 centimètres qu'avec les parois plus rugueuses telles que celles des figures V2, V3, V4 et V8, V9, et V10. Toutefois il n'y a pas de concordance entre la théorie et l'expérience pour les profils à 55 centimètres lorsque les parois sont inclinées de 15 degrés. Une autre explication aux problèmes de cohérence entre la théorie et l'expérience peut être la détermination de la vitesse de fluctuation en paroi V_p qui est une donnée essentielle au calcul de la vitesse d'écoulement $U(Y)$ comme on le montre dans le chapitre III. On peut ainsi supposer que le calcul de V_p à travers la relation (V.3) est faussée soit par une difficulté de détermination de la vitesse de glissement en paroi U_p , soit par une défaillance de la relation (V.3) elle-même dans certains cas.

Le tableau V1 qui donne les valeurs du coefficient β_p décrivant l'interaction grain-paroi de l'écoulement, montre que les valeurs et la variation des valeurs dépendent fortement de la rugosité des parois. Plus l'angle de frottement en paroi est élevé, plus grandes sont les valeurs de β_p . Les courbes de la figure V14 retracent la variation des constantes β_p en fonction de l'inclinaison des parois par rapport à la verticale. Ces courbes montrent que

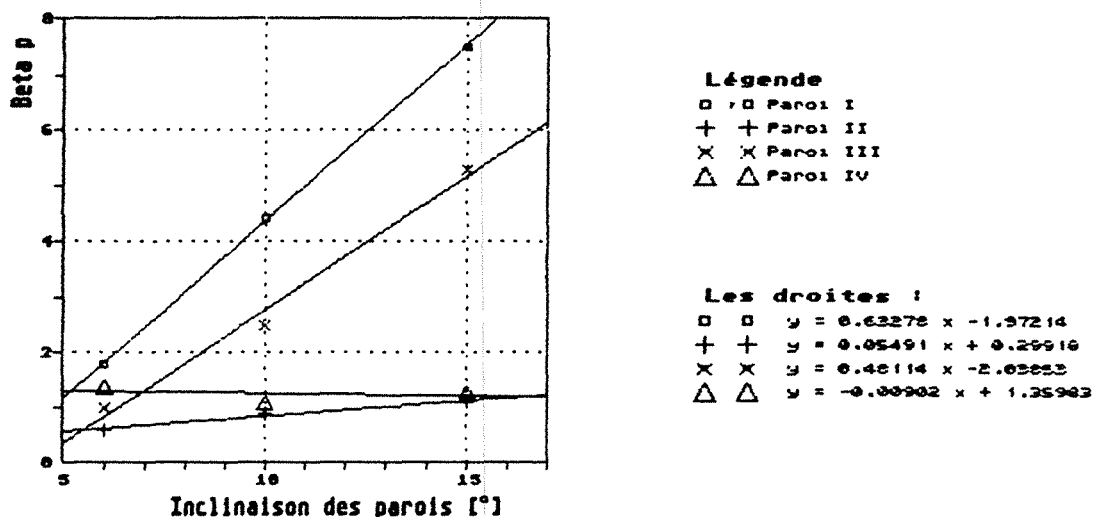


Figure V14 : variation de β_p en fonction de l'inclinaison des parois

nous sommes en présence d'une variation linéaire du coefficient β_p en fonction de l'inclinaison des parois latérales de la trémie. Les courbes montrent encore que les pentes des droites sont plus forte pour des rugosité élevées, alors que pour des parois lisses du type II et IV nous avons des pentes très faibles.

La tableau VI donne encore les valeurs de la constante γ_p caractérisant les collisions grain-paroi. γ_p est nul pour des chocs parfaitement élastique, c'est à dire pour des chocs sans aucune perte d'énergie. γ_p vaut 1 pour caractériser les chocs parfaitement moux. Les valeurs de γ_p du tableau VI montrent que ce coefficient est très faible pour les parois III et IV, c'est à dire pour les parois recouvertes de sable et ayant ainsi une surface très dur qui absorbe peu d'énergie lors des collisions. Par contre pour des états de surface de paroi plus tendre, type I et II, nous avons des valeurs plus élevées. La paroi en bois absorbe d'après le tableau VI plus d'énergie que celle recouverte avec des petits pois secs. Les valeurs expérimentales de γ_p sont donc être en concordance avec sa définition.

III. Conclusion

Dans ce chapitre nous décrivons la méthode qui a permis de déterminer les constantes de la modélisation pour les petits pois secs s'écoulant entre quatres types de parois différentes. Les résultats que nous obtenons, tout au moins pour les champs de vitesses aux cotes de 20 et 35 centimètres montrent que cette technique est très efficace quant à la détermination des coefficients de la modélisation pour un matériau donné. La divergence que l'on rencontre entre la théorie et l'expérience à la cote de 55 centimètres est très difficile à expliquer pour le moment. Provient-elle d'une défaillance de la relation (V.3), ou d'une difficulté à mesurer de façon suffisamment précise la vitesse verticale au niveau de la paroi. D'un autre coté cette différence peut aussi s'expliquer par le fait que dans ces zones ou les vitesses d'écoulement se réduisent, il n'est plus possible d'approcher les vitesses par notre modèle. Dans ce dernier cas l'écoulement ne respecterait plus les hypothèses d'application du modèle au niveau des champs de vitesses où les courbes théoriques ne passent plus par les points expérimentaux.

Dans ce chapitre nous ne pouvons pas proposer des valeurs pour la constante t qui permet d'ajuster la pression à l'intérieur de l'écoulement. Cette constante qui n'influence que les valeurs de pression ne peut qu'être déterminée par des mesures de pression à l'intérieur ou au niveau des parois de l'écoulement. De futures études au laboratoire s'occuperont de mettre au point un capteur de mesure de pression et de frottement afin de pouvoir mener une campagne de mesures de contraintes au niveau des parois de notre dispositif expérimental utilisé dans le chapitre IV.

La détermination des champs de vitesses théoriques repose sur la con-

naissance de la vitesse d'écoulement en paroi u_p . Ce qui peut être un inconvénient quant à l'utilisation de notre modèle dans la pratique car la détermination de la grandeur expérimentale u_p nécessite, comme nous l'avons vu dans le chapitre IV, une investigation expérimentale longue et laborieuse en laboratoire. De plus il semble que la valeur de la vitesse U_p ne soit pas assez fiable pour le calcul théorique. Par ailleurs dans la pratique, c'est à dire sur des installations industrielles il est très difficile, voir impossible de déterminer sa valeur. La méthode de résolution des équations de la modélisation proposée dans ce chapitre semble donc uniquement bien adaptée à la détermination en laboratoire des constantes r , q , γ , γ_p , β_p . Par contre pour des installations industrielles où le débit massique est la seule grandeur facilement mesurable, nous avons cherché dans le chapitre suivant à développer une technique de calcul des champs de vitesses qui utilise comme donnée expérimentale le débit massique et non plus la vitesse d'écoulement en paroi.

Chapitre 6

Détermination des champs de vitesses théoriques

à partir du débit massique de l'écoulement gravitaire

I. Introduction

Comme nous l'avons vu dans le chapitre précédent la modélisation que nous avons développé se prête bien à l'approximation des vitesses d'écoulement pour des écoulements gravitaires soumis à des forts taux de cisaillement. La technique utilisée jusqu'à présent s'appuie sur la connaissance de la vitesse de glissement le long des parois. Cette méthode de calcul est d'ailleurs très bien adaptée à la détermination des constantes du modèle pour un matériau granulaire donné. Dans la pratique elle ne pourra pas être utilisée car pour des raisons diverses dans les installations industrielles les vitesses de glissement en paroi ne sont jamais connues. Mais la donnée facilement mesurable dans la pratique est le débit massique d'une installation de vidange gravitaire. Celui-ci est une des caractéristiques essentielles d'une trémie ou d'un silo industriel, car généralement la qualité du produit final en dépend de manière importante. Il paraît donc évident qu'un modèle théorique doit se servir de la donnée du débit massique pour la détermination des champs de vitesses et des pressions à l'intérieur d'un écoulement gravitaire afin qu'il puisse être utilisé dans la pratique. C'est pourquoi nous avons cherché à développer une seconde technique d'application de notre modélisation qui se servent du débit massique pour le calcul des courbes de vitesse de fluctuation $V(Y)$ et de vitesse d'écoulement $U(Y)$. Cette seconde technique qui vise à calculer les vitesses d'écoulement d'installations réelles à partir du débit massique est alors complémentaire à la première qui calcul les fonctions $U(Y)$ à partir de la vitesse de glissement en paroi U_p pour la détermination des constantes du modèle par calage sur des mesures expérimentales effectuées en laboratoire.

II. Calcul de la vitesse de fluctuation à partir de la donnée expérimentale du débit massique.

II.1 Calcul de la vitesse de fluctuation en fonction du débit massique

Avant de calculer la fonction $U(Y)$, il faut d'abord déterminer la vitesse de fluctuation $V(Y)$. Le calcul de la fonction $V(Y)$ devra maintenant se faire à partir du débit massique de l'écoulement et non plus avec la vitesse d'écoulement U_p au niveau de la paroi. Le débit massique Q_M donné par la relation (IV.9), combinée avec celle donnant la vitesse d'écoulement $u(y)$ (III.23) permet d'écrire l'équation (VI.1) reliant le débit massique à la vitesse de fluctuation.

$$Q_M = h \int_{-l}^l \left[\frac{\tau_p t}{\beta_p \rho} v_p + \frac{\tau_p t}{q d \rho} \int_{-l}^y v(y) \frac{y}{l} dy \right] \rho(y) dy \quad (VI.1)$$

Cette dernière relation s'écrit encore adimensionnellement :

$$Q_M = 2l \cdot h \cdot \sqrt{gl} \cdot \rho^* \int_{-1/2}^{1/2} \left[\frac{t}{\beta_p P_o} v_p + \frac{t}{q P_o \delta} \int_{-1/2}^Y V(Y) \cdot Y dY \right] dY \quad (VI.2)$$

ρ^* est la masse volumique moyenne du matériau granulaire qui s'écoule. Elle est définie par la relation (IV.10).

L'étape suivante consiste à utiliser la propriété de la fonction $V(Y)$ que nous avons déjà mise en évidence dans le paragraphe V.1 du chapitre III. Cette propriété, résumée par la relation (III.32) permet de décomposer la vitesse de fluctuation $V(Y)$ en un terme constant V^* multiplié par une fonction $V_n(Y)$ dépendante de la valeur des constantes du modèle et des caractéristiques du puits ou de la trémie. Si de plus la relation suivante donne le débit adimensionnel Q_M^a de l'écoulement gravitaire :

$$Q_M^a = \frac{Q_M}{2l \cdot h \cdot \sqrt{gl} \cdot \rho^*} \quad (VI.3)$$

alors la relation (VI.2) permet d'écrire la relation définitive (VI.4) qui relie le débit massique à la vitesse de fluctuation :

$$Q_M^a = V^* \int_{-1/2}^{1/2} \left[\frac{t}{\beta_p P_o} V_{np} + \frac{2t}{q P_o \delta} \int_{-1/2}^Y V_n(Y) \cdot Y dY \right] dY \quad (VI.4)$$

avec $V(Y) = V^* \cdot V_n(Y)$ $V_{np} = V_n(0.5) = V_n(-0.5)$

II.2 Détermination de la fonction $V_n(Y)$

Le calcul de $V_n(Y)$ se fait en prenant dans un premier temps le terme V^* égal à 1, celui-ci est la vitesse de fluctuation sur l'axe central de l'écoulement gravitaire. Dans ce cas la fonction $V_n(Y)$, qui est indépendante du débit massique de l'écoulement prend également la valeur de 1 pour une abscisse Y nulle.

La détermination de la fonction inconnue se fait alors comme dans les chapitres précédents par résolution de l'équation différentielle du second ordre (III.13), la fonction recherchée sera maintenant $V_n(Y)$ et non plus $V(Y)$. Lors du calcul il faudra veiller à ce que la fonction $V_n(Y)$ soit égale à 1 au centre de l'écoulement, et à ce que celle-ci respecte les conditions aux limites (III.14) et (III.15) de la modélisation. La résolution de l'équation différentielle ne se fera donc plus comme se fut le cas jusqu'à présent en commençant le calcul numérique à la limite gauche de l'écoulement, mais on amorcera le calcul au milieu de l'écoulement gravitaire. A $Y = 0$ les conditions aux limites nécessaires pour débiter le calcul numérique de $V_n(Y)$ sont :

$$V_n(Y) = 1 \quad \frac{dV_n}{dY} = 0$$

La valeur de la pression P_0 entrant dans l'équation (III.13) devra être choisie afin que la fonction $V_n(Y)$ obtenue vérifie la condition aux limites (III.15) au niveau de la paroi, c'est à dire pour $Y = 0.50$.

La figure VII montre la courbe $V_n(Y)$ calculée avec les caractéristiques des courbes $V(Y)$ présentées sur la figure III.4. Pour tracer ces courbes nous avons $a = t = r = q = 1$, $\delta = 0.01$, $\gamma = 0.01$ et $e_p = 0.84$. Alors que le calcul donne une pression P_0 de 6.1096.

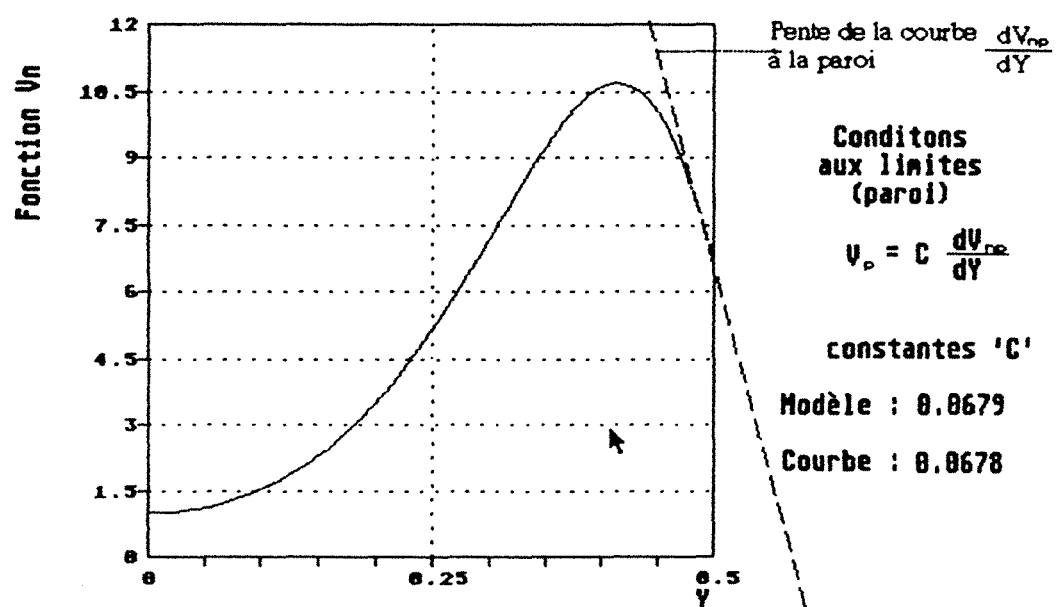


Figure VII : exemple d'une fonction $V_n(Y)$

II.3 Détermination de V^* et de la vitesse d'écoulement $U(Y)$

Lorsque la fonction $V_n(Y)$ est trouvée il est alors facile de calculer la vitesse de fluctuation au centre de l'écoulement V^* à partir de la relation (VI.4). Mais pour se faire la grandeur Q_M^a devra être calculée avec la mesure expérimentale du débit massique et les caractéristiques géométriques de la section traversée par l'écoulement gravitaire. Le calcul du débit adimensionnel se fait en supposant que la masse volumique ρ^* est très peu différente de la masse volumique au repos ρ_0 . Une fois la vitesse V^* déterminée on calcule la vitesse de fluctuation $V(Y)$ finale avec la relation (III.32).

A partir du moment que la fonction $V(Y)$ est déterminée, il ne reste plus qu'à calculer les vitesses d'écoulement $U(Y)$ à l'aide de la relation (III.23).

II.4 Algorithme de calcul

Le logiciel HAFF-DEB.PRG que nous avons réalisé au laboratoire permet de calculer les vitesses d'écoulement adimensionnelles à partir de la connaissance du débit massique, de la masse volumique du matériau granulaire, et des caractéristiques géométriques de la section traversée par l'écoulement. Les principales étapes de calcul du logiciel peuvent se résumer de la manière suivante :

1. Lecture de constantes $t, r, q, \gamma, \gamma_p, \beta_p$ caractérisant le matériau granulaire
2. Lecture des caractéristiques géométrique de la section : δ, l, h
3. Lecture de la masse volumique au repos $\rho_0 \approx \rho^*$
4. Lecture de la pression adimensionnelle P_0 compatible avec les conditions aux limites du modèle (résultat du calcul itératif fait avec HAFF.PRG)
5. Calcul de la fonction $V_n(Y)$ par résolution numérique (algorithme de Runge-Kutta) de l'équation (III.13) à partir de $Y=0$ jusqu'à $Y=0.5$.
6. Calcul du débit adimensionnel (VI.3)
7. Calcul numérique de l'intégrale de l'équation (VI.4)
8. Calcul du terme V^* , puis de la vitesse de fluctuation $V(Y)$
9. Affichage de la fonction $V(Y)$, et pour vérification de la condition aux limites (eh36a) à $Y=0.5$ théorique et numérique
10. Calcul de la vitesse d'écoulement en paroi (III.22)
11. Calcul de la vitesse d'écoulement $U(Y)$ avec l'équation (III.23)

III. Vitesses d'écoulement

III.1 Généralités

Dans ce paragraphe on compare les profils de vitesses théoriques que l'on a obtenu dans la chapitre précédent avec les vitesses d'écoulement calculées avec le logiciel HAFF-DEB.PRG utilisant la technique de calcul décrite dans ce chapitre. Les caractéristiques des petits pois secs nécessaires pour le calcul des champs de vitesses avec cette dernière méthode sont la masse volumique au repos ρ_0 et le diamètre des grains d . Ces grandeurs caractéristiques, comme les différentes valeurs du débit massique sont mesurées dans le chapitre IV. Les constantes de la modélisation sont données dans le chapitre précédent.

III.2 Calcul des vitesses d'écoulement adimensionnelles

Ce paragraphe montre les superpositions des champs de vitesses cal-

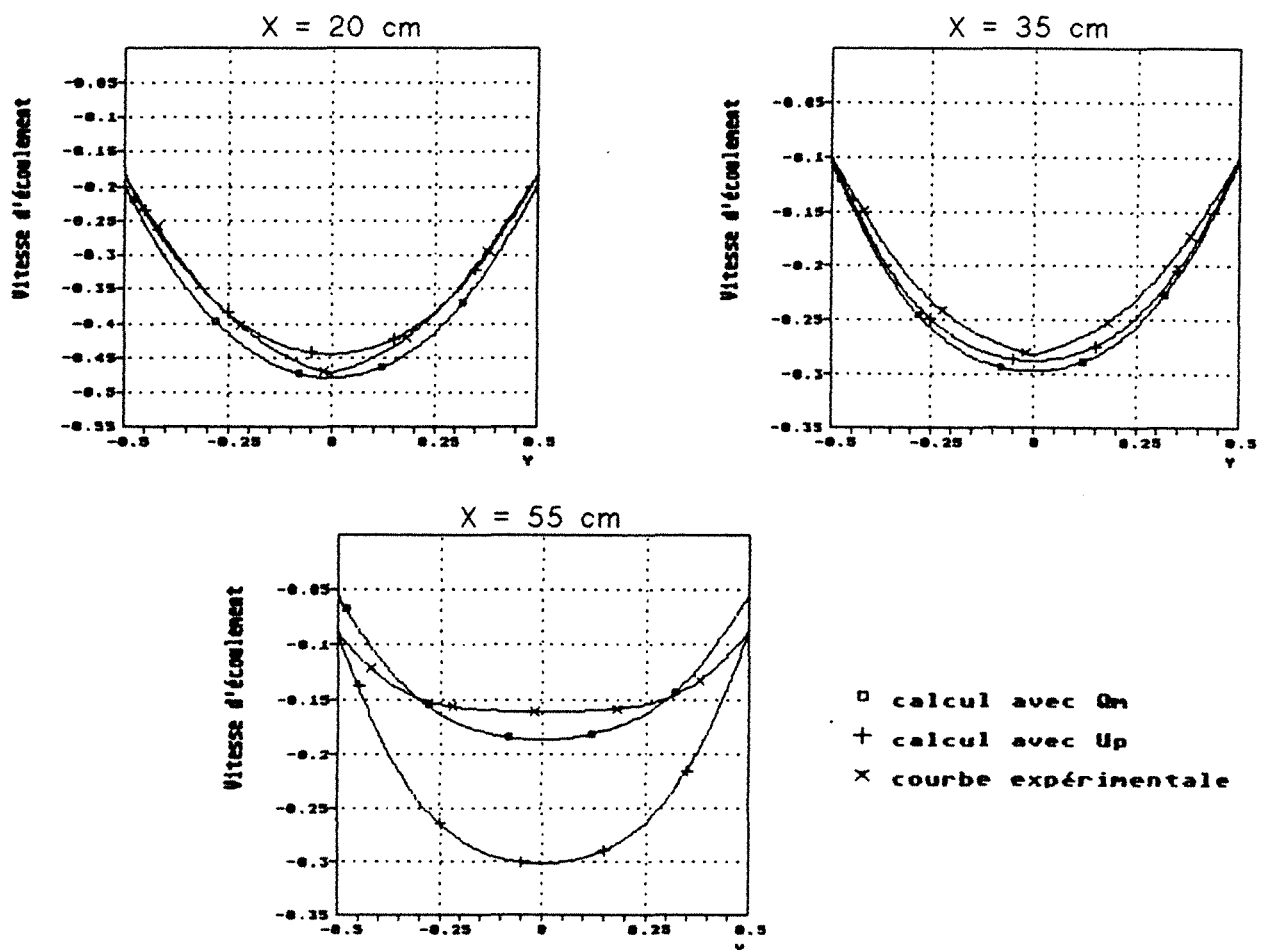


Figure VI2 : Comparaison des différents champs de vitesses
Paroi de type I Inclinaison des parois : 6°

culées à partir de la donnée de la vitesse de glissement en paroi et celles calculés avec le débit massique de l'installation. Les figures VI.2, VI.3 et VI.4 représentent les champs de vitesses adimensionnelles pour les trémies avec la paroi de type I pour des inclinaison de paroi de 6,10 et 15 degrés.

La figure VI2 ci-dessus montre pour les cotes de 20 et 35 centimètres que les deux techniques de calcul théorique donne des courbes de vitesses d'écoulement adimensionnelle tout à fait comparables et qui s'accordent avec les vitesses expérimentales. Quant aux champs de vitesse à 55 centimètres on se rend compte que la courbe théorique calculée à partir du débit massique adimensionnel coïncide d'une façon nettement meilleure avec la courbe expérimentale que la courbe théorique déterminée avec la vitesse de glissement en paroi. Les résultats présentés sur la figure VI2 sont tout à fait confirmés par les schémas des figures VI3 et VI4 qui donnent les champs de vitesses pour des parois de type I inclinées à 10 et 15 degrés. Il en est également de même dans l'annexe 5 où l'on retrouve les vitesses verticales pour les parois II, III et IV.

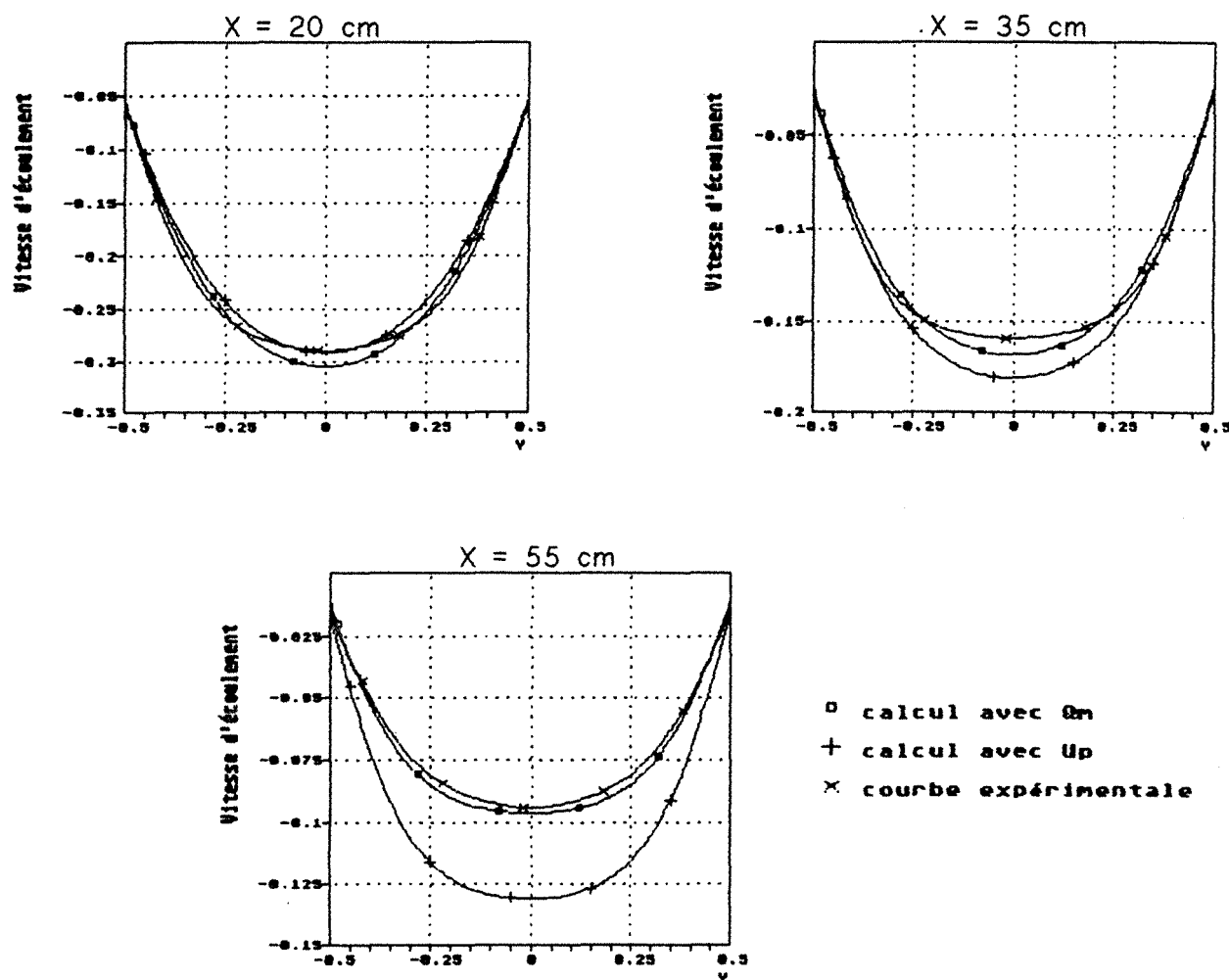


Figure IV3 : Comparaison des différents champs de vitesses
Paroi de type I Inclinaison des parois : 10°

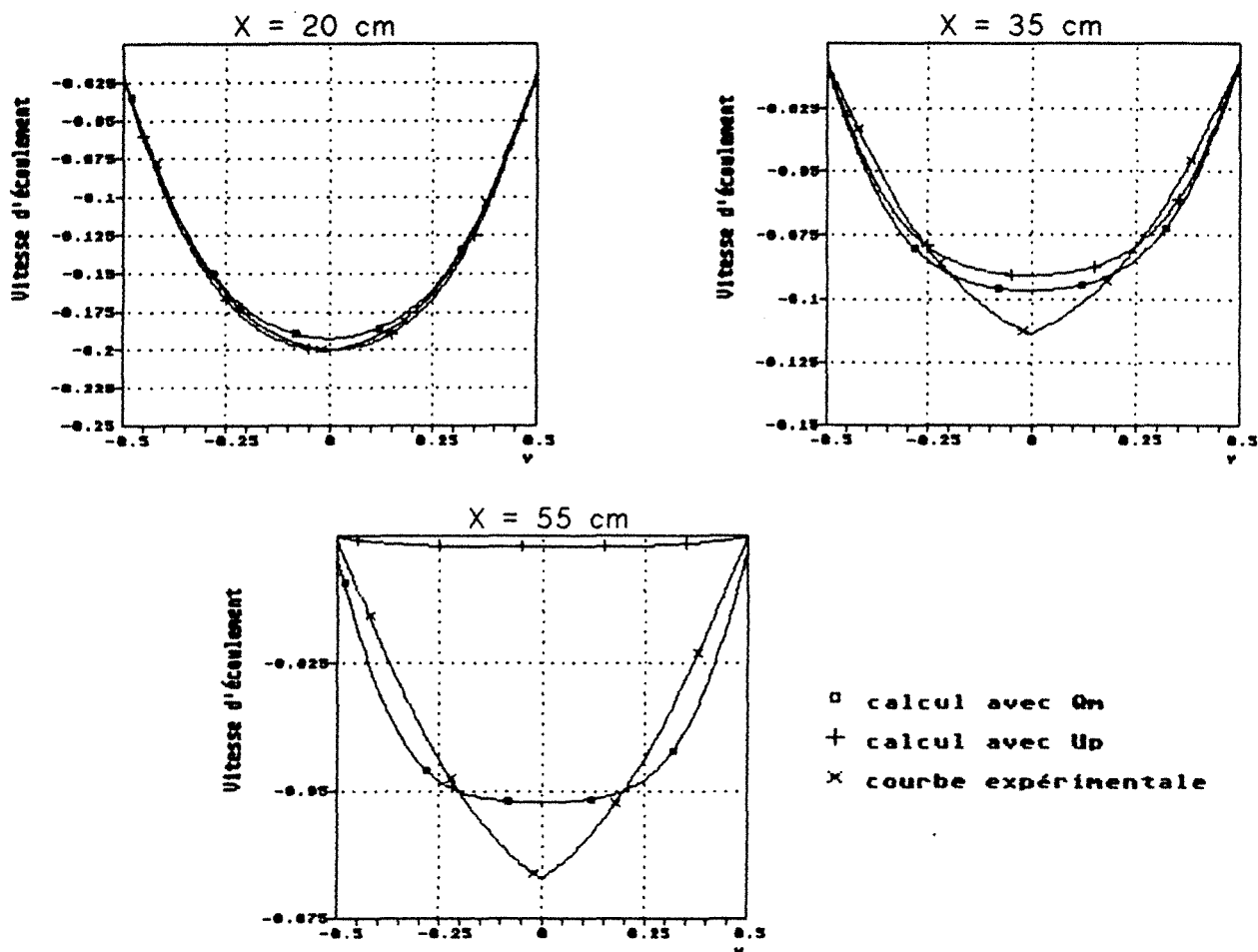


Figure VI4 : Comparaison des différents champs de vitesses
Paroi de type I Inclinaison des parois : 15°

En regardant de plus près les courbes des figures VI2, VI3, VI4 et celles de l'annexe 5 on se rend compte que les champs de vitesses théoriques calculées avec la donnée du débit massique épouse la forme des courbes expérimentales lorsque le profil se situe dans la moitié inférieure de l'écoulement. Pour les vitesses verticales des particules dans la partie supérieure des trémies on a des vitesses théoriques et expérimentales de valeur moyenne comparable sur la section de l'écoulement, bien que l'allure des courbes ne soit pas semblable. Les champs de vitesses expérimentales sont généralement de forme pointus au milieu lorsque l'inclinaison des parois est de 10 ou 15 degrés, alors que la modélisation donne des courbes à gradient de vitesse plus élevé au niveau des parois et avec une courbe de forme aplatie au centre de l'écoulement. Comme dans le chapitre précédent l'écoulement entre les parois lisses de type II fait à nouveau exception. En effet pour ces écoulements qui présentent les vitesses et les débits les plus élevés, nous avons des courbes théoriques qui s'accordent avec les vitesses expérimentales tant au niveau des valeurs de vitesses verticales qu'au niveau de l'allure des courbes. Pour les écoulements entre les parois lisses (essais n°13, 14 et 15) les champs de vitesses expérimentales et théoriques ont une courbure régulière à la cote de 55 centimètres, et n'ont pas de cassure pointue comme le montre les figures VI3 et VI4 par exemple.

Les courbes théoriques calculées avec la méthode de résolution présentée dans ce chapitre se superposent de la manière la plus satisfaisante dans la partie inférieure de l'écoulement, c'est à dire dans la zone où nous avons les plus grandes vitesses d'écoulement et les plus grands gradients de vitesses. Alors que dans les parties d'écoulement où les vitesses se réduisent par rapport aux vitesses précédentes nous avons certes des résultats meilleurs que dans le chapitre précédent, mais sans pour autant pouvoir retracer de façon précise l'allure des courbes expérimentales mesurées dans ces zones à vitesses d'écoulement plus faibles. La modélisation ne retrace qu'approximativement la réalité dans la section à 55 centimètres au-dessus de l'orifice de vidange lorsque nous avons des écoulements entre des parois inclinées à 10 ou 15 degrés ou uniquement à 15 degrés pour des angles de frottement en paroi inférieurs à 25 degrés (paroi de type II et IV).

On met donc à nouveau en évidence des zones à trop faible gradient de vitesse où le modèle théorique s'éloigne des vitesses expérimentales. Dans ces parties l'écoulement, comme nous l'avons déjà mis en évidence, ne respecte plus de façon rigoureuse les hypothèses d'application de notre modélisation. Les contraintes de frottement de type "Coulomb" ne peuvent plus être négligées devant les contraintes tangentielles d'origine visqueuse.

III.3 Différence entre les deux courbes théoriques

Il s'agit maintenant de rechercher la cause de la divergence entre les courbes théoriques pour les champs de vitesses à la cote de 55 centimètres. Pour cela il convient dans un premier temps de comparer les courbes de vitesse de fluctuation $V(Y)$ que l'on obtient à partir des deux techniques de calcul. Les figures VI5 et VI6 comparent les courbes $V(Y)$ calculées soit à partir de la vitesse de glissement en paroi U_p , soit à partir du débit massique Q_M .

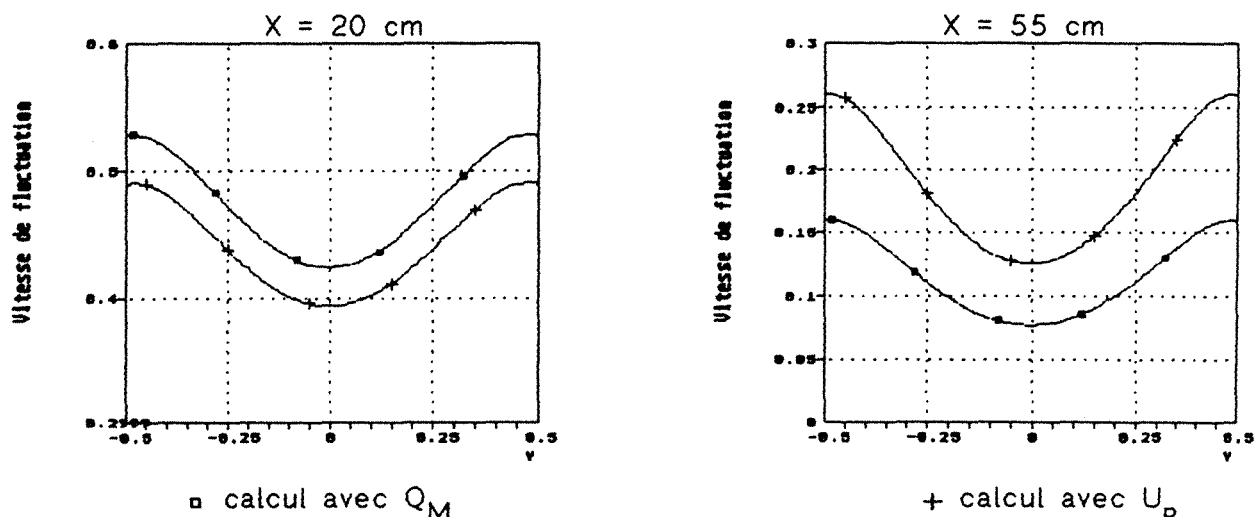


Figure IV5 : Vitesse de fluctuation $V(Y)$
Paroi de type I Inclinaison des parois : 6°

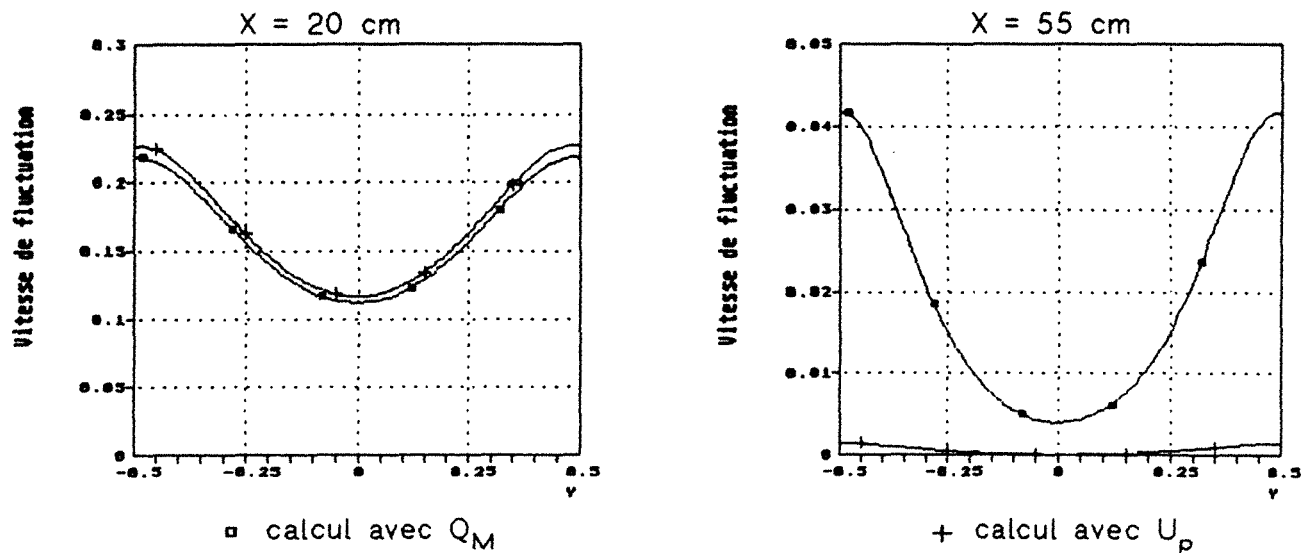


Figure VI6 : Vitesse de fluctuation $V(Y)$
Paroi de type I Inclinaison des parois : 15°

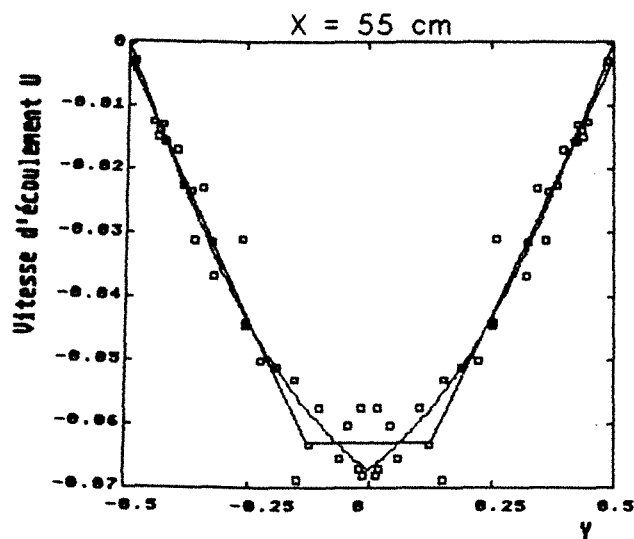
Au regard des figures VI5 et VI6 on constate que les courbes de vitesses de fluctuation $V(Y)$ sont très proches les unes des autres pour les cotes de 20 centimètres. Les courbes $V(Y)$ à la cote de 55 centimètres sont au contraire assez éloignées entre elles. Toutefois quelque soit les courbes des figures VI5 et VI6 les conditons aux limites (III.14) et (III.15) sont respectées par celles-ci. L'écart entre les courbes calculées à partir de la vitesse expérimentale U_p et les courbes calculées avec le débit massique Q_M est uniquement dû à la valeur de la vitesse de fluctuation en paroi V_p . Le tableau VII résume les valeurs de V pour les figures VI5 et VI6. Il indique également

Cote X	Inclinaison des parois : 6°		Inclinaison des parois : 15°	
	Calcul avec Q_M	Calcul avec U_p	Calcul avec Q_M	Calcul avec U_p
20 cm	0.5273	0.4893	0.2175	0.2265
55 cm	0.1597	0.2596	0.0416	0.0015

Figure VII : Vitesse de fluctuation en paroi en fonction de la technique de calcul

que les valeurs sont uniquement comparables entre elles pour les courbes à la cote de 20 centimètres et non à la cote de 55 centimètres.

Ces remarques nous permettent donc de supposer que le calcul de la vitesse de fluctuation en paroi V_p en fonction de la vitesse de glissement en paroi U_p à partir de l'équation (V.3) ne se fait pas dans de bonne condition. En effet la figure VI7 montre sur un exemple la difficulté que l'on peut rencontrer à déterminer de manière précise la vitesse adimensionnelle U_p pour les profils de vitesses à la cote de 55 centimètres.



Vitesse de glissement en paroi U_p

approximation linéaire :

$$U_p = -0.0024$$

approximation non linéaire :

$$U_p = -0.0002$$

Figure VI7 : détermination de la vitesse de glissement en paroi U_p

La figure VI7 montre donc qu'il est très difficile d'obtenir une valeur expérimentale précise de la vitesse d'écoulement en paroi U_p lorsque celle-ci est faible. Par conséquent il n'est pas possible de trouver une vitesse de fluctuation V_p à travers l'équation (V.3) qui permette un calcul rigoureux de la fonction $V(Y)$, nécessaire à la détermination de la vitesse d'écoulement $U(Y)$. Dans de tel cas le débit massique est une donnée expérimentale nettement plus fiable. Celui-ci donne donc par voie de conséquence avec la méthode de calcul explicitée dans ce chapitre, une meilleure cohérence entre la théorie et l'expérience lorsque nous avons à faire à des vitesses en paroi faibles.

IV. Conclusion

La technique de résolution des équations de la modélisation de l'écoulement gravitaire que nous mettons en oeuvre dans ce chapitre vise surtout la détermination des champs de vitesses dans les trémies industrielles. En effet la mesure du débit massique d'une installation réelle est une chose facile lorsque celui-ci n'est pas déjà connu. Cette méthode donne des résultats comparables voir meilleurs dans certains cas que la technique utilisant la donnée expérimentale de la vitesse d'écoulement au niveau de la paroi. On montre ensuite pourquoi il existe généralement une défaillance pour les vitesses verticales aux cotes de 55 centimètres de la première méthode développée dans cette ouvrage. Ce grand écart provient de la difficulté à trouver une valeur expérimentale fiable de la vitesse de glissement en paroi lorsque les vitesses en paroi sont relativement faibles. Dans ce cas la débit massique représente une donnée expérimentale beaucoup plus précise.

Malgré les mauvais résultats que nous montrons dans ce chapitre, il faut tout de même signaler que les champs de vitesses théoriques calculées dans

Conclusion générale

Les travaux de recherche que l'on présente dans ce mémoire ont pour principal objectif de mieux faire comprendre les mécanismes d'écoulement des matériaux en vrac. On présente ainsi dans la première partie une synthèse bibliographique sur les différentes méthodologies servant à caractériser le comportement des poudres ou des matières granulaires. Le premier présente généralement de la cohésion, alors que le second beaucoup plus rarement. La seconde partie de l'ouvrage s'intéresse à la description théorique et expérimentale des vitesses d'écoulement à l'intérieur de trémies convergentes. On y montre clairement l'influence de l'inclinaison et de la rugosité des parois sur les vitesses comme sur les débits massiques.

Dans la première partie de ce travail on fait le point sur les différentes méthodes théoriques et expérimentales qui permettent de caractériser le mécanisme d'écoulement des matériaux en vrac. Cette étude bibliographique permet de faire le point sur les nombreux travaux entrepris dans ce domaine, et pourra servir de base à de nouvelles études. Par ailleurs la terminologie spécifique à la description des matériaux en vrac que l'on a utilisé dans cette partie pourra servir de référence à la rédaction d'un dictionnaire regroupant tout le vocabulaire utilisé dans ce domaine scientifique. Ce document permettra d'unifier le vocabulaire entre les différents laboratoires et entreprises français et étrangers ayant une activité dans le domaine.

Cette étude s'adresse encore aux concepteurs de silos et de trémies destinés au stockage de matières dont l'aptitude à l'écoulement est réputée mauvaise. Ils y trouveront les moyens de caractériser ce type de matériaux, et pourront en conséquence déterminer les dimensions géométriques des cellules de stockage, et, si nécessaire choisir un organe d'extraction mécanique adapté lorsque les mauvaises propriétés du matériau le requièrent.

La seconde partie qui décrit plus particulièrement la détermination des champs de vitesses verticales à l'intérieur de trémies convergentes, analyse le comportement du matériau granulaire utilisé, en fonction de l'inclinaison et de la rugosité des parois que l'on a réalisé au laboratoire. Pour les gammes d'inclinaison de parois étudiées on met expérimentalement en évidence deux types de comportement. Le premier se rencontre dans des écoulements où les parois latérales sont faiblement inclinées par rapport à la verticale, c'est à dire entre 6 et 15 degrés, voir 20 degrés si le frottement en paroi reste faible. Il s'agit dans ce cas d'un écoulement à vitesses verticales élevées soumis à des taux de cisaillement importants. L'allure et les valeurs des vitesses verticales sont étroitement liées à la pente et à la rugosité des parois.

Dans les trémies où l'inclinaison des parois par rapport à la verticale est supérieure aux valeurs précédentes on rencontre un autre comportement. Les vitesses verticales comme les débits sont nettement moins sensibles à la modification du frottement en paroi et à la pente des limites latérales des trémies. Au niveau des parois on distingue l'apparition de zones mortes

où les particules sont animées d'une vitesse faible voir nulle. Ce phénomène et d'autant plus marqué que les parois sont inclinées et rugueuses. Les champs de vitesses mesurées au laboratoire montrent très clairement que l'épaisseur de la zone morte pour une pente de paroi donnée dépend fortement de l'angle de frottement en paroi. Une prochaine campagne de mesures aura comme objectif de déterminer l'influence de tous les paramètres tels que, rugosité des parois, frottement interne du matériau, dimensions de l'orifice inférieur, pente des parois, sur les dimensions de la cheminée d'écoulement qui se forme au sein du matériau. Cette étude expérimentale servira à la création d'abaques et de formulations empiriques pour la prévision des modes d'écoulement à l'intérieur des cellules de stockage.

L'études théoriques des champs de vitesses verticales se fait dans la seconde partie du mémoire grâce à une modélisation originale que nous avons développé au laboratoire. Le développement de ce modèle que l'on décrit dans le chapitre 3 se fait à l'aide des équations de conservation classiques de la mécanique des fluides, dans lesquelles on injecte un terme traduisant l'inélasticité des collisions entre les particules. Cette modélisation, applicable aux écoulements à fort taux de cisaillement donne d'excellents résultats pour un matériau modèle que sont les billes de verre, comme avec des matières naturelles telles que les petits pois secs. La formulation théorique redonne parfaitement les champs de vitesses réelles que l'on a mesuré dans le chapitre 4 à condition que l'écoulement que l'on cherche à approcher soit à forts taux de cisaillement, qu'on obtient lorsque les gradients de vitesse sont élevés. Dans ce cas les collisions entre particules sont de très courtes durées et les seules forces qui s'opposent au mouvement des grains sont des forces tangentielles d'origine visqueuse. La courte durée des chocs empêchant la création d'autres efforts.

La comparaison des champs de vitesses théoriques et des champs de vitesses expérimentales permet non seulement de constater une concordance très satisfaisante entre la théorie et les mesures, mais met également en évidence les limites d'application de notre formulation. En effet la très bonne similitude entre les mesures et la théorie est obtenue pour des pentes de parois de 6 et 10 degrés par rapport à la verticale. Ceci montre donc bien que l'écoulement granulaire dans ce cas est soumis à des taux de cisaillement élevés, son comportement est donc comparable à celui d'un fluide réel classique. A partir d'une inclinaison de 15 degrés, surtout pour les parois à rugosité élevées on commence à observer une divergence entre les courbes théoriques et expérimentales dans la partie supérieure de l'écoulement, là où apparaissent les plus faibles gradients de vitesse. Ces faibles gradients engendrent des contacts entre particules de durée prolongée, qui eux mêmes engendrent la création de forces de frottement solide entre les grains. Ces frottements de type "Coulomb" provoquent l'apparition des zones mortes au niveau des parois. A partir de cette configuration géométrique (15°) commence également à apparaître des vitesses horizontales qui sont entièrement négligées pour l'instant par le modèle.

Les travaux originaux que nous présentons dans cet ouvrage permettent déjà mieux d'apprécier les paramètres qui influencent les écoulements gravitaires, et permettent de montrer qu'elles sont les études aussi bien expérimentales que théoriques qu'il faudra encore mener pour maîtriser en grande partie les mécanismes d'écoulement des matières granulaires. Ceci afin de développer de nouveaux modèles pour la détermination théorique des champs de contraintes à l'intérieur de la matière ensilée. Il faudra ainsi dans l'avenir injecter dans notre modélisation un terme de frottement solide qui devra être associé à un critère utilisant le gradient de vitesse pour déterminer l'intensité des forces de frottement solide par rapport aux efforts visqueux.

Bibliographie
et
Références bibliographiques

- [1] Contribution à l'étude des propriétés mécaniques des sols et des matériaux pulvérulents
BIAREZ J.
Thèse de Docteur ès Sciences - Université de Grenoble - 1962
- [2] Lectures on gas theory
BOLTZMANN L.
University of California Press - Berkeley and Los Angeles - 1964
- [3] Thermodynamique et énergétique
BOREL L.
Presses polytechniques romandes
- [4] Mécanique Rationnelle
BOULIGAND G.
Librairie Vuibert - Paris - 1959
- [5] Rhéologie des milieux pulvérulents : Etude expérimentale et identification d'une loi de comportement
BOUVARD D.
Thèse de Docteur-Ingénieur - I.N.P. Grenoble - 1982.
- [6] Rheology of granular materials
BUGGISCH H.
The university of the West Indies
Proceeding of the first caribbean conference on fluid dynamics - p 8,11 - 1989
- [7] Theoretische und Experimentelle Untersuchungen zum schnellen Fliesen von Schuttgutern in Konvergenten Geometrien
BUGGISCH H - FUTTERER G.
Sonderforschungsbereich 219 - Arbeits- und ergebnisbericht für die Jahre 1985,1986 - p 121,145 - Universität Karlsruhe - 1987
- [8] Geschwindigkeitsfelder von schuttgutern in konischen Schächten
BUGGISCH H - FUTTERER G.
Silos Forschung und Praxis - p 153,163 - Karlsruhe 1988
- [9] Zum fließen locker gepakter granularer Medien im senkrechten Schacht
BUGGISCH H - FUTTERER G.
Z. angew. Math. Mech. - 67 5 - p 280,281 - 1987
- [10] Schnelles fließen von trockenen Schuttgutern in konvergenten Schächten
BUGGISCH H. - FUTTERER G.
Z. angew. Math. Mech. - 70 5 - p 385,386 - 1990
- [11] Schuttgut - Wand -wechselwirkung für trockene und feuchte Schuttgüter
BUGGISCH H - LOFFELMANN G.

- [12] Influence of the deformation rate on shear stresses in bulk solids.
Theoretical aspect and experimental results
STADLER R. - BUGGISH H.
Fédération européenne de génie chimique EFCE Publication series n°49
- Reliable flow of particulate solids - Bergen, Norvège - 1985
- [13] La pression dans les silos
CAQUOT A.
Butterworths scientific publication - London - 1957
- [14] Evaluating flow properties of solids
CARR R.L.
Chemical Engineering - January 18 - p 163,168 - 1965
- [15] Weighing and proportioning of bulk solids
COLIJN H.
Trans. Tech. Publications - Clausthal Zellerfeld - West Germany - 1975
- [16] Manuel de rhéologie des géomatériaux
DARVE F.
Presse de l'ENPC - 1987
- [17] Caractérisation en laboratoire des propriétés physiques et mécaniques
des matières ensilées
DEGOUTTE G.
Revue Construction Métallique CTICM - 2/1989
- [18] A numerical method for the calculation of the powder flow properties
obtained with the Jenike flow factor tester.
EELKMAN ROODA J.
Powder Tech. - p 97,102 - 12/1975
- [19] La dynamique du tas de sable
EVESQUE P. - RAJCEHNBACH J.
C.R. Acad. Sci. Paris - t 307 - série II - p 1,4 - 1988
- [20] Caractérisation d'avalanches de billes dans un cylindre tournant
EVESQUE P. - RAJCEHNBACH J.
C.R. Acad. Sci. Paris - t 307 - série II - p 223,226 - 1988
- [21] Caractéristiques spécifiques des produits en vrac intervenant dans le
stockage en silos. Détermination et représentation des propriétés
d'écoulement.
Fédération Européenne de Maintenance - Section II - 1986
- [22] Caractéristiques spécifiques des produits en vrac intervenant dans la

manutention pneumatique - Définition et détermination des méthodes de mesure.

Fédération Européenne de Manutention - Section II - 1984

- [23] Kinematik des Schwerkraft-Auslaufs kornigen Gutes aus einem Bunker
FIREWICZ H.

Aufbereitungs Technik - p 61,70 - 2/1988

- [24] Druckverhältnisse in zylindrische Silozellen

FRESE B.

Dissertation Universität Karlsruhe - 1979

- [25] Design of steel bins for stockage of bulk solids

GAYLORD E.H - GAYLORD C.N.

Prentice-Hall International Series in Civil Engineering and Engineering Mechanics

- [26] Numerische Untersuchung der Lasten in Silozellen beim exzentrischen Entleeren

GLADEN W.

Dissertation - Universität Karlsruhe (TU) - 1985

- [27] Measurement and prediction of flow patterns of granular solids in cylindrical vessels

GRAHAM D.P. - TAIT A.R. - WADMOU R.S.

Powder technology - vol.50 - p 65,76 - 1987

- [28] The kinetic model for granular flow

GUANGQIAN W. - XIANGJUN F.

Fourth International Symposium on river sedimentation - 5,9 juin - 1989 - Beijing - Chine

- [29] Grain flow as fluid mechanical phenomenon

HAFF P.K.

J. Fluid Mech. - vol 134 - p 401,430 - 1983

- [30] Boudary conditions for high-shear grain flows

HUI K. - HAFF P.K. - UNGAR J.E. - JACKSON R.

J. Fluid Mech. - vol 145 - p 223,233 - 1984

- [31] Kinetic grain flow in a vertical channel

HUI K. - HAFF P.K.

Int. J. Multiphase Flow - vol 12 - n° 2 - p 299,298 - 1986

- [32] Observation of rapidly flowing granular-fluid materials

HANES D.M. - INMAN D.L.

J. Fluid Mech. - vol 150 - p 357,380 - 1985

- [33] Mécanique des milieux formé de particules
HARR M.E.
Presses Polytechniques Romandes
- [34] Geschwindigkeits- und Spannungsfelder beim entleeren von Silozellen
HAUSSLER U.
Dissertation - Universität Karlsruhe (TH) - 1984
- [35] Zutreffende Siloberechnung
HERZOG M.
Bautechnik - p 41,48 - 2/1987
- [36] Experimentelle Darstellung der Spannungsverteilung in Bunkern und Silos in Abhängigkeit vom Fließbild der Anlage
HOPPE H.
Dissertation Universität Clausthal (TH)
- [37] Storage and flow of solids
JENIKE A.W.
bull n°123, Utah Engineering experiment station - University of Utah, Salt Lake City - 1964
- [38] Quantitative design of mass flow bins
JENIKE A.W.
Symposium on powder flow and storage - Bradford - 1967
- [39] The flow properties and storage of difficult materials
JENIKE A.W.
I. Chem. E. Symposium series n°63 - 1981
- [40] Principles flow of solids in bins
JENIKE A.W.
American Inst. of Mining, Metallurgical and Petroleum Engineers - New York - 1968
- [41] Balance laws and constitutive relations for plane flows of a dense, binary mixture of smooth, nearly elastic, circular disk.
JENKINS J.T. - MANCINI F.
Journal of Applied Mechanics - vol 54 - p 27,34 - 1987
- [42] Kinetic theory for binary mixtures of smooth, nearly elastic spheres
JENKINS J.T. - MANCINI F.
Phys. Fluid - A vol 1 - n° 12 - p 2050,2057 - 1989
- [43] Boundary conditions for plane flows of smooth, nearly elastic, circular disks
JENKINS J.T. - RICHMAN M.W.
J. Fluid Mech. - vol 171 - p 53,69 - 1986

- [44] A Theory for the rapid flow of identical, smooth, nearly elastic, spherical particles
JENKINS J.T. - SAVAGE S.B.
J. Fluid Mech. - vol 130 - p 187,202 - 1983
- [45] Frictional - collisional constitutive relations for granular materials, with application to plane shearing
JOHNSON P.C. - JACKSON R.
J. Fluid Mech. - vol 176 - p 67,93 - 1987
- [46] Wandrucke von Silos in Abhängigkeit von Beschickung und ent Entleerungsgeschwindigkeit
KAMINSKI M.
Silos Forschung und Praxis Tagung'88 in Karlsruhe - p 237 - 1988
- [47] Untersuchungen des Getreidedrucks in Silozellen
KAMINSKI M.
Die Bautechnik - 1/1981
- [48] Problèmes posés par le stockage des poudres : approche par l'étude du cisaillement ou de la compression uniaxiale
KAMGUEU V.
ENITIAA - Nantes - 1975
- [49] Discussion on soil properties and their measurement
KIRKPATRICK W.M.
Proc. 5th Inten. Conf. on Soil Mech. and Fond. Eng. III - p131, 133 - 1961 - Paris
- [50] Etude des champs de vitesses et de contraintes dans les silos métalliques
KHELIL A.
Thèse de doctorat I.N.P.L. Nancy 1989
- [51] Theoretical and experimental studies of stresses in full scale silos at the Chartres experimental base
KHELIL A. - ROTH J.C.
Powders and grains, Clermont-Ferrand, Balkema - p 453,460 - 1989
- [52] The state of the stresses and velocity profiles of granular materials in silos. Theoretical and experimental research using scale models and full scale silos
KHELIL A. - ROTH J.C.
Third Int. Conf. on bulk materials, storage, handling and transportation - Newcastle Australia - p 321,326 - 1989
- [53] The role of particule collisions in determining high strain rate flow behaviour
KNIGHT P.C.
Powder Technologie - p 183,193 - 37/1984

- [54] Stockage en silos de produits en vrac
KUHNEMUND B.
Buhler Miag Braunschweig Nouvelle 217
- [55] Theorie der Schuttgutbewegung
KVAPIL R.
VEB Verlag Technik Berlin - 1959
- [56] Gravity flow of granular materials in hoppers and bins
KVAPIL R.
Int. J. Rock Mech. Mining Sci. vol.2 pp 35-41
- [57] Experimental observations of stability, instabilty, and shear planes in granular matériels
LADE P.V.
Ingenieur-Archiv - Springer Verlag - p 114,123 - 59/1989
- [58] Aspect physicochimiques du comportement rhéologique d'aliments pulvé-
rulents
LE FLECHER R.
Mémoire de Diplôme d'ingénieur C.N.A.M. - Nancy - 1986
- [59] Les phénomènes cycliques dans les sables
LUONG M.P.
Journée de Rhéologie - Cycles dans les sols
Publication de l'ENTPE n°2 - 1979
- [60] Rhéologie des grains agro-alimentaires ensilés
LUONG M.P.
Revue C.T.I.C.M. - p 81,89 - 2/1989
- [61] Etat caractéristique d'un sol
LUONG M.P.
C.R. Acad. Sc. Paris, t287 Série B-305 - 1978
- [62] Fiber motions and flocculation
MASSON S.G.
TAPPI - p 494,501 - vol 37 - n° 1 - 1954
- [63] Flow of granular materials through a plane hopper
MICHALOWSKI R.L.
Powder technology - vol 39 - p 29,40 - 1984
- [64] Flow of granular media through a plane parallel / converging bunker
MICHALOWSKI R.L.
Chemical Engineering Science - vol 42 - n° 11 - p 2587,2596 - 1987
- [65] Conductivité thermique des solides, liquides, gaz et de leur mélanges
MISSENARD A.
Editions Eyrolles - 1965

- [66] Belastung von Siloboden und Auslauftrichtern durch kornige Schüttgüter
MOTZKUS V.
Dissertation Universität Braunschweig - 1974
- [67] Size effect in slender grain silos
MUNCH - ANDERSEN J. - NIELSEN J.
Bulk solids handling - vol 6 - n° 5 - oct. 1986
- [68] The boundary layer in rough silos
MUNCH - ANDERSEN J.
Danish Building Research Institute
- [69] Geeft de gebruikelijke rekenwijze ter bepaling van de drukken op wanden en bodem van Silogebouwen veilige uitkomsten ?
NANNINGA N.
De Ingenieur n°44 - p 190,194 - 2-11 /1956
- [70] The measurement of the velocity profile in a granular materials discharging from a conical hopper
NEDDERMAN R.M.
Chemical Engineering Science - vol 43 - n°7 - p 1507,1516 - 1988
- [71] The thickness of the shear zone of flowing granular materials
NEDDERMAN R.M. - LAOHAKUL C.
Powder Tech. - p 91,100 - 25/1980
- [72] Méthodes de calcul numérique
NOWAKOWSKI C.
Editions du PSI - tomes 1 et 2
- [73] Die innere Reibung von Schüttgütern - Untersuchungen von Materialeigenschaften verschiedener Silo Lagerstoffe
OGNIWECK, NEUSS D.
V.D.I. Verlag Dusseldorf - 19
- [74] Flowability of food powders and methods for its evaluation - a review
PELEG M.
Journal of food process and engineering 1 - p 303,328 - 1977
- [75] Probleme der Silostatik
PESCHL I.
Haus des Technik-Vetragsoffentlichungen - 386 - 1976
- [76] Solids flow velocity profiles in mass flow hoppers
POLDERMAN H.G. - BOOM J. - DE HILSTER E. - SCOTT A.M.
Chemical Engineering Science - vol 4 - n°2 - p 737,744 - 1987
- [77] Silos, théorie et pratique
REIMBERT M. - REIMBERT A.
Editions Eyrolles

- [78] A theory for grain size reduction in granular flows of spheres
 RICHMAN M.W. - CHOU C.S.
 Journal of Applied Mathematics and Physics - 40/1989
- [79] Thermodynamique
 ROCARD Y.
 Masson & Cie Editeur - 1952
- [80] Consistent modelling of filling and discharging processes in silo
 ROMBACH G. - EIBL J.
 Silos Forschung und Praxis - p 1,15 - Universitat Karlsruhe - 1988
- [81] Zur bestimmung des maximalen inneren Silodrucks
 ROSEMEIER G.E.
 Bautechnik - 11/1986
- [82] Gravity flow of cohesionless granular materials in chutes and channels
 SAVAGE S.B.
 J. Fluid Mech. - vol 92 - p 53,96 - 1979
- [83] The Stress tensor in a granular flow at high shear rates
 SAVAGE S.B. - JEFFREY D.J.
 J. Fluid Mech. - vol 110 - p 255,272 - 1981
- [84] Shear stresses developed during rapid shear of concentrated suspensions of large spherical particles between concentric cylinders
 SAVAGE S.B. - Mc KEOWN S.
 J. Fluid Mech. - vol 127 - p 453,472 - 1983
- [85] Stresses developed by dry cohesionless granular materials sheared in an annular shear cell
 SAVAGE S.B. - SAYED M.
 J. Fluid Mech. - vol 142 - p 391,430 - 1984
- [86] Kinetics theories for granular flow inelastic particles in couette flow and slightly inelastic particles in a general flowfield
 LUN C.K.K. - SAVAGE S.B. - JEFFREY D.J. - CHEPURNIY N.
 J. Fluid Mech. - vol 140 - p 223,256 - 1984
- [87] Comportement cyclique et transitoire des milieux pulvérulents
 SIDANER J.F.
 Thèse de Docteur Ingénieur - ENPC - 1981
- [88] Boundary layer theory
 SCHLICHTING H.
 Mc Graw Hill - Series in Mechanical Engineering
- [89] Eléments de mécanique des sols
 SCHLOSSER F.
 Presses de l'ENPC

- [90] Scherverhalten leicht verdichteter, kohäsiver Schüttgüter - Untersuchungen an einer Kalksteinfraktion mit Korngrossen $< 15 \mu\text{m}$
SCHWEDES J.
Dissertation - Universität Karlsruhe (TH)
- [91] Fließeigenschaften von schüttgütern
SCHWEDES J. - WILMS
Silotechnik - p357 - 12/1988
- [92] Shearing behaviour of slightly compressed cohesive granular materials
SCHWEDES J.
Powder Tech. - p 59,67 - 11/1975
- [93] Fliessverhalten von Schüttgütern in Bunkern
SCHWEDES J.
Verlag Chemie gmbh - 1968
- [94] Influence de l'angularité des granulats sur les caractéristiques rhéologiques des milieux granulaires non liés
SONG Y.
Thèse de Doctorat I.N.P.L. Nancy - 1989
- [95] Quantification of the degree of mixing in bins
STANDISH N. - LIU Y.N. - Mc LEAN A.G.
Powder Tech. - p 197,208 - 54/1988
- [96] The flow pattern of solids in a gravity flow column
STANDISH N. - TAMBAKIS N.
Powder Tech. p 113,117 - 21/1978
- [97] Flow profile and void fraction of granular solids in a moving bed
TAKAHASHI H. - XANAI H.
Powder Tech. - p 205,214 - 7/1973
- [98] Silos
TIMM G. - WINDELS R.
Betonkalender Teil 2 - p 725 - 1984
- [99] An approximate theory for pressure and arching in hoppers
WALKER D.M.
Chem. Eng. Sci. - vol 21 - 1966
- [100] Caractérisation des écoulements de matériaux granulaires - Application aux silos
WEISSE D.
D.E.A. I.N.P.L. Nancy - 1988
- [101] Comportement des matériaux granulaires : bases des théories classiques; influence et rôle des paramètres définis en laboratoire.
WEISSE D. Rapport bibliographique D.E.A. 1988

- [102] Analysis of flow granular materials whilst gravitationally emptying a silo - A study of the experimental and theoretical velocity fields
WEISSE D. - KHELIL A. - ROTH J.C.
Powders and Grains - Clermont-Ferrand - Balkema p 461,468 - 1989
- [103] Etude comparative du silo modèle réduit à l'échelle 1/10 en centrifugeuse et de la cellule "D" de la base de Chartres
WEISSE D. - KHELIL A.
Rapport interne - Groupe de travail mission silo
- [104] Modélisation de l'écoulement gravitaire d'un matériau granulaire
WEISSE D.
9^{èmes} rencontres universitaires de Génie Civil - Reims 1991
- [105] Untersuchungen über die Druckverhältnisse in Silozellen
WENZEL F.
Dissertation - Universität Braunschweig - 1963
- [106] The design of mass flow hoppers
WILLIAMS J.C.
University of Bradford - England - 1986
- [107] Belastungen zur Theorie des ebenen Silodruckes
WINDELS R.
Bautechnik - p 73,81 - 3/1983
- [108] Hüllkurven der Belastung bei ebenem Silodruck
WINDELS R.
Bautechnik - p 18,24 - 1/1986
- [109] Zur theorie des Silodruks im Kreiszylinder
WINDELS R.
Bautechnik - p 93,99 - 3/1986
- [110] Der Anfangsschlag und andere Belastungsgrossen im Silo
WOLF K.
Dissertation Universität Braunschweig (TH)

ANNEXE 1

Profils de vitesses verticales expérimentales pour les billes de verre ($d = 5 \text{ mm}$)

Ouverture de l'orifice inférieur des trémies : 2.66 centimètres

Paroi recouverte de billes de verre

Essai n°1 $\alpha = 6^\circ$

Approximation linéaire

Vitesse en paroi : -4.37

Vitesse au centre : -18.29

ξ : 1.58

Surface : 103.66

Approximation non linéaire

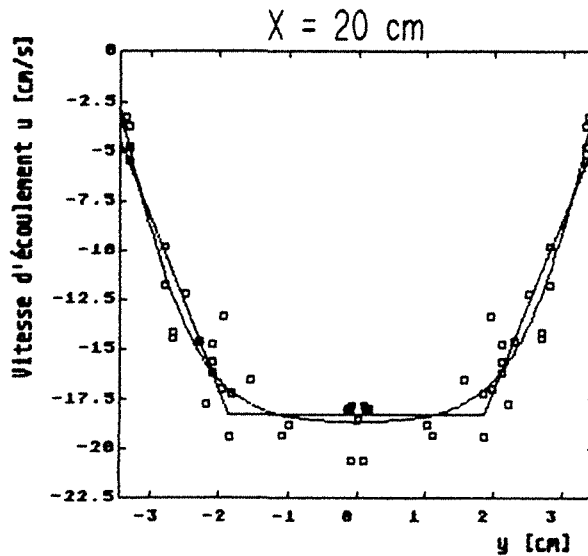
Vitesse en paroi : -2.7

Vitesse au centre : -18.69

ξ : 1.10

Surface : 104.38

Largeur (2l) : 6.86



Approximation linéaire

Vitesse en paroi : -4.23

Vitesse au centre : -12.91

ξ : 2.56

Surface : 107.13

Approximation non linéaire

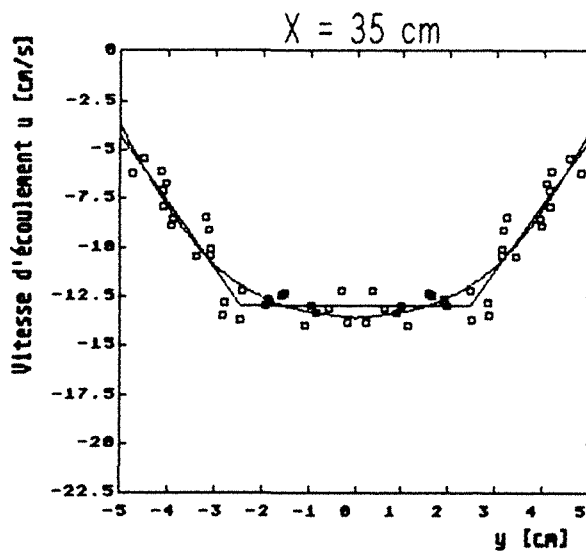
Vitesse en paroi : -3.65

Vitesse au centre : -13.59

ξ : 2.25

Surface : 107.23

Largeur (2l) : 10.02 cm



Approximation linéaire

Vitesse en paroi : -3.07

Vitesse au centre : -8.81

ξ : 3.06

Surface : 107.68

Approximation non linéaire

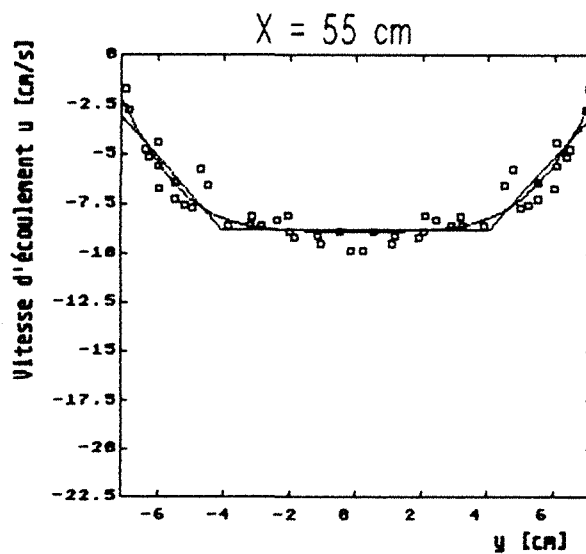
Vitesse en paroi : -2.16

Vitesse au centre : -8.91

ξ : 2.13

Surface : 106.97

Largeur (2l) : 14.22 cm



Essai n°2 $\alpha = 10^\circ$

Approximation linéaire

Vitesse en paroi : -3.43

Vitesse au centre : -11.20

ξ : 2.34

Surface : 95.76

Approximation non linéaire

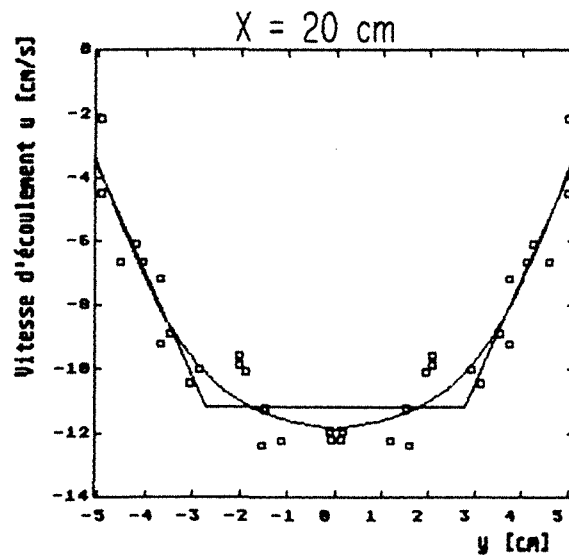
Vitesse en paroi : -3.22

Vitesse au centre : -11.86

ξ : 2.24

Surface : 95.88

Largeur (2l) : 10.16 cm



Approximation linéaire

Vitesse en paroi : -2.23

Vitesse au centre : -8.49

ξ : 5.69

Surface : 98.55

Approximation non linéaire

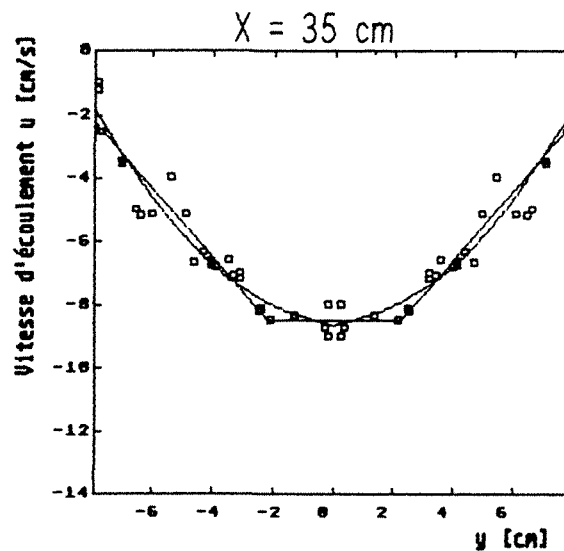
Vitesse en paroi : -1.81

Vitesse au centre : -8.64

ξ : 4.82

Surface : 98.34

Largeur (2l) : 15.8 cm



Approximation linéaire

Vitesse en paroi : -0.56

Vitesse au centre : -5.24

ξ : 4.08

Surface : 102.92

Approximation non linéaire

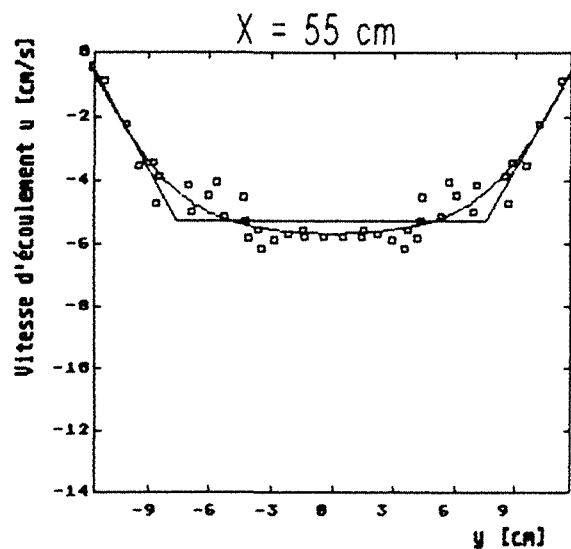
Vitesse en paroi : -0.65

Vitesse au centre : -5.67

ξ : 4.43

Surface : 102.37

Largeur (2l) : 23.32 cm



Essai n°3 $\alpha = 15^\circ$

Approximation linéaire

Vitesse en paroi : -1.79

Vitesse au centre : -8.15

ξ : 3.81

Surface : 84.72

Approximation non linéaire

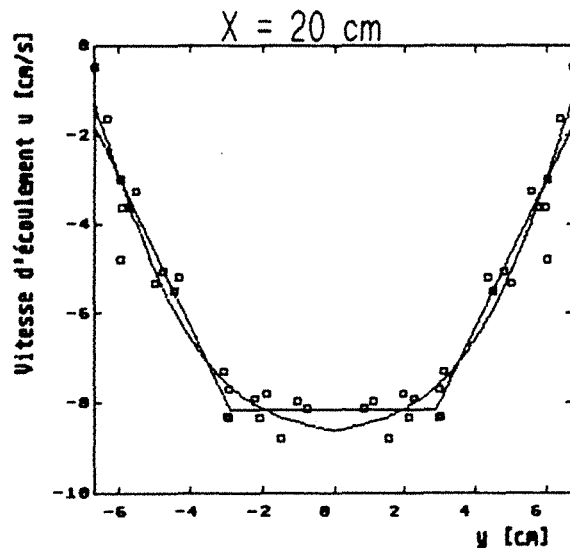
Vitesse en paroi : -1.24

Vitesse au centre : -8.61

ξ : 3.07

Surface : 86.04

Largeur (2l) : 13.38 cm



Approximation linéaire

Vitesse en paroi : -0.41

Vitesse au centre : -5.53

ξ : 6.32

Surface : 86.02

Approximation non linéaire

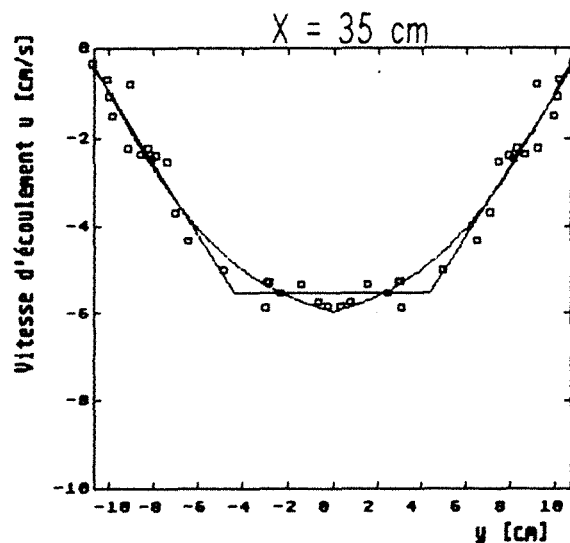
Vitesse en paroi : -0.34

Vitesse au centre : -5.95

ξ : 6.64

Surface : 84.45

Largeur (2l) : 21.42 cm



Approximation linéaire

Vitesse en paroi : -0.07

Vitesse au centre : -4.14

ξ : 11.73

Surface : 85.15

Approximation non linéaire

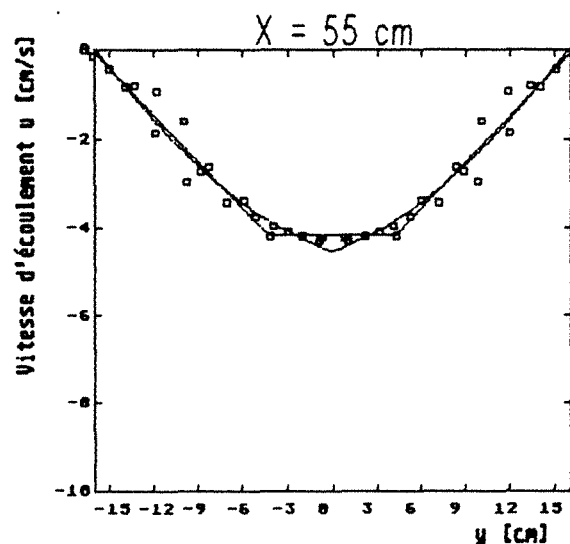
Vitesse en paroi : 0.00

Vitesse au centre : -4.54

ξ : 13.50

Surface : 85.58

Largeur (2l) : 32.12 cm



ANNEXE 2

Profils de vitesses verticales expérimentales pour les petits pois secs

Ouverture de l'orifice inférieur des trémies : 4 centimètres

Paroi type I : Petits pois collés

Essai n°3 $\alpha = 6^\circ$

Approximation linéaire

Vitesse en paroi : -12.72

Vitesse au centre : -28.77

ξ : 2.83 cm

Surface : 190.42

Approximation non linéaire

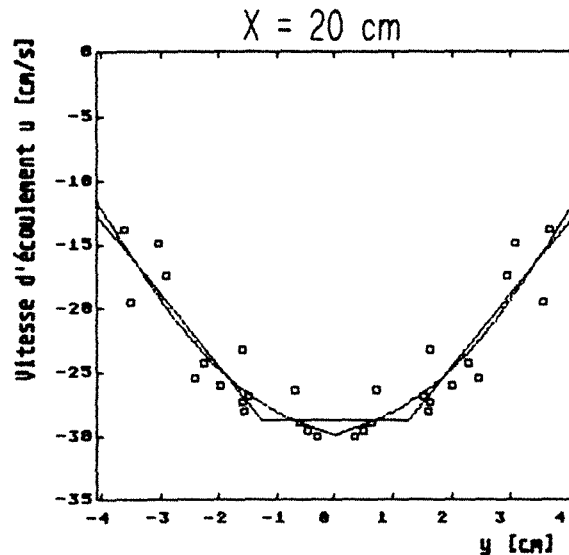
Vitesse en paroi : -11.43

Vitesse au centre : -29.91

ξ : 2.67 cm

Surface : 189.88

Largeur (2l) : 8.18 cm



Approximation linéaire

Vitesse en paroi : -9.65

Vitesse au centre : -20.01

ξ : 3.97 cm

Surface : 185.88

Approximation non linéaire

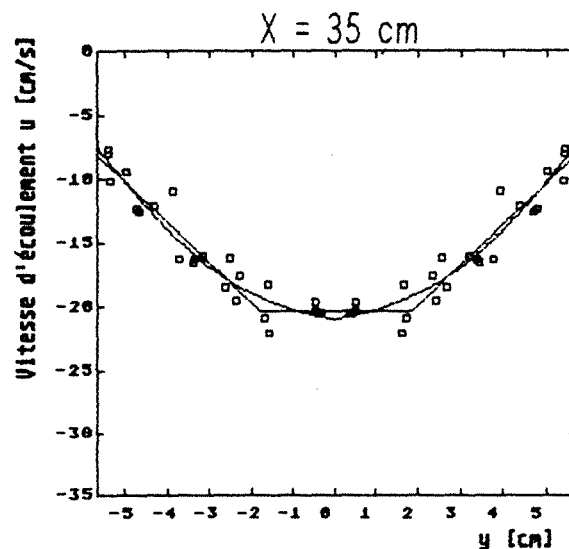
Vitesse en paroi : -7.35

Vitesse au centre : -21.02

ξ : 3.43 cm

Surface : 183.66

Largeur (2l) : 11.34 cm



Approximation linéaire

Vitesse en paroi : -8.10

Vitesse au centre : -13.76

ξ : 3.11 cm

Surface : 196.26

Approximation non linéaire

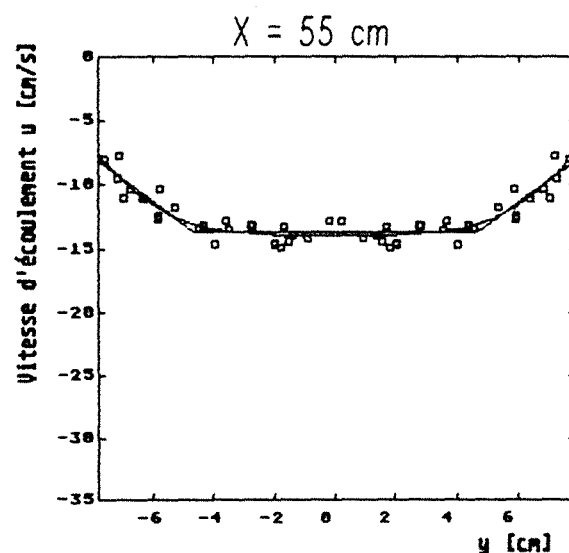
Vitesse en paroi : -7.59

Vitesse au centre : -13.99

ξ : 2.49 cm

Surface : 195.77

Largeur (2l) : 15.54 cm



Essai n°4 $\alpha = 10^\circ$

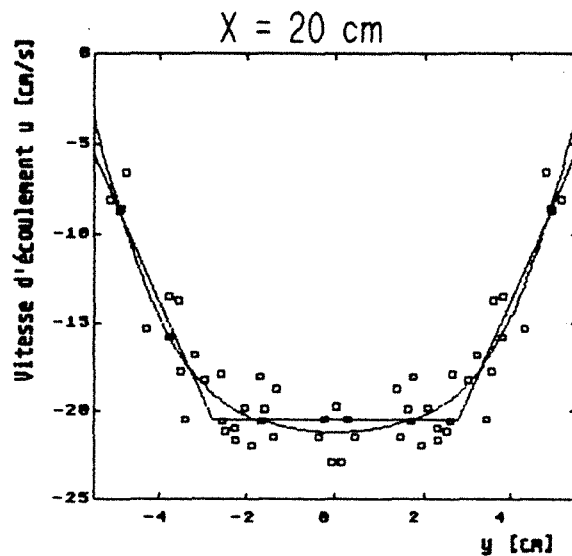
Approximation linéaire

Vitesse en paroi : -5.46
 Vitesse au centre : -20.45
 ξ : 2.77 cm
 Surface : 184.79

Approximation non linéaire

Vitesse en paroi : -3.49
 Vitesse au centre : -21.24
 ξ : 2.10 cm
 Surface : 185.13

Largeur (2l) : 11.06 cm



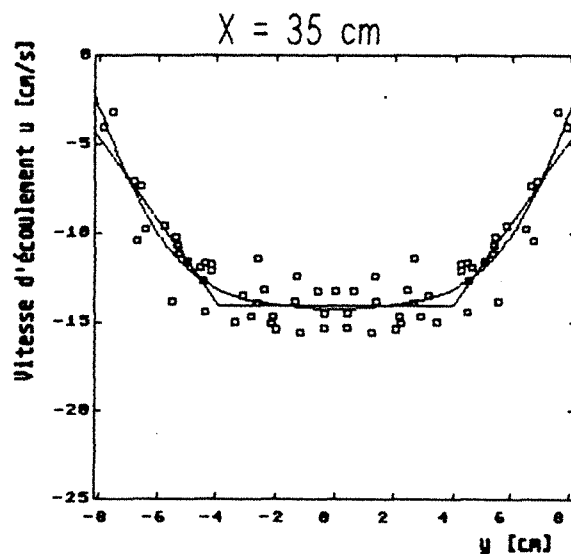
Approximation linéaire

Vitesse en paroi : -4.21
 Vitesse au centre : -14.03
 ξ : 4.25 cm
 Surface : 187.71

Approximation non linéaire

Vitesse en paroi : -2.12
 Vitesse au centre : -14.22
 ξ : 2.86 cm
 Surface : 185.79

Largeur (2l) : 16.36 cm



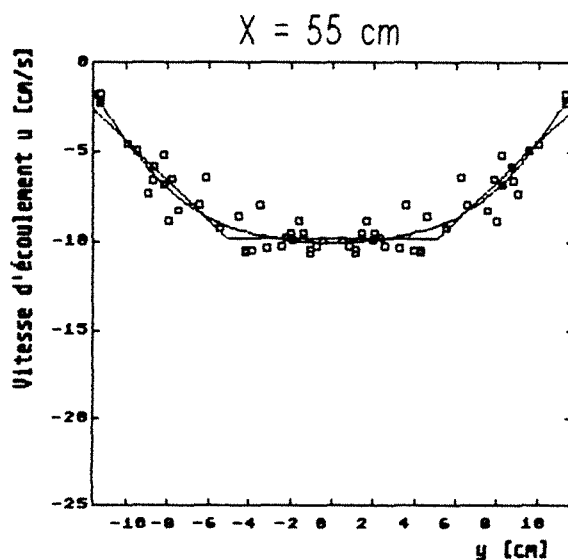
Approximation linéaire

Vitesse en paroi : -2.56
 Vitesse au centre : -9.80
 ξ : 6.68 cm
 Surface : 181.18

Approximation non linéaire

Vitesse en paroi : -1.52
 Vitesse au centre : -10.06
 ξ : 5.04 cm
 Surface : 179.52

Largeur (2l) : 23.42 cm



Essai n°5 $\alpha = 15^\circ$

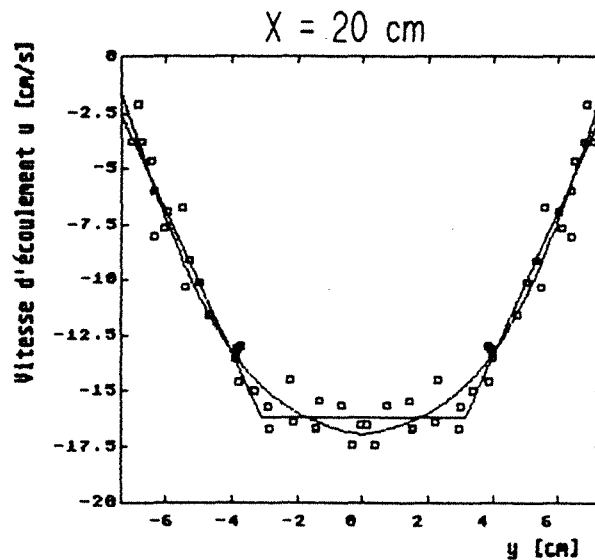
Approximation linéaire

Vitesse en paroi : -2.58
 Vitesse au centre : -16.17
 ξ : 4.27 cm
 Surface : 180.06

Approximation non linéaire

Vitesse en paroi : -1.51
 Vitesse au centre : -16.98
 ξ : 3.61 cm
 Surface : 179.77

Largeur (2l) : 14.72 cm



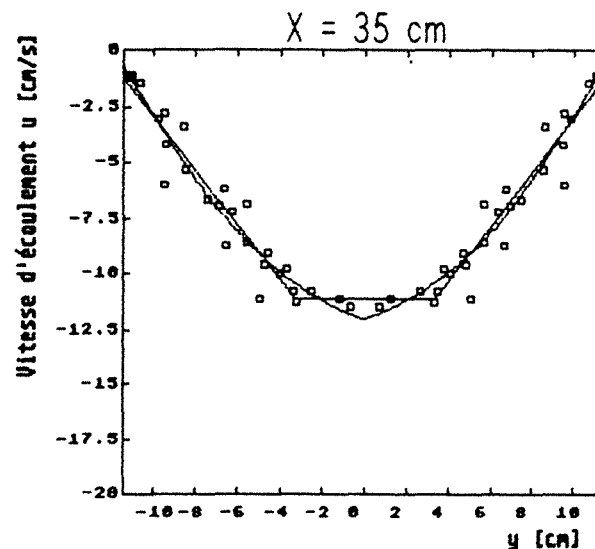
Approximation linéaire

Vitesse en paroi : -1.22
 Vitesse au centre : -11.13
 ξ : 8.09 cm
 Surface : 173.38

Approximation non linéaire

Vitesse en paroi : -0.66
 Vitesse au centre : -11.99
 ξ : 8.09 cm
 Surface : 174.72

Largeur (2l) : 22.78 cm



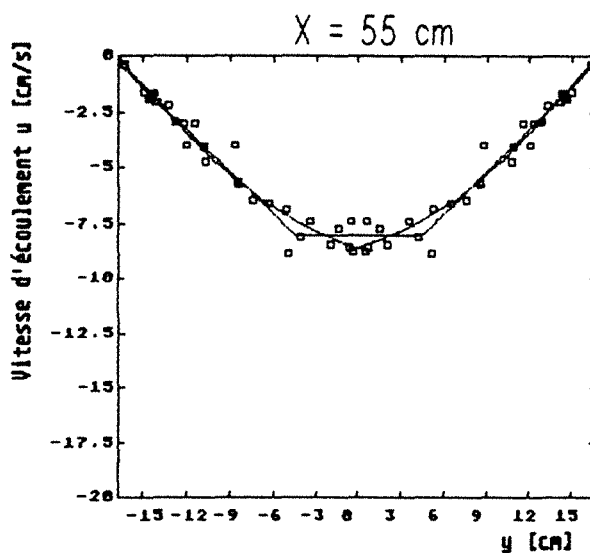
Approximation linéaire

Vitesse en paroi : -0.31
 Vitesse au centre : -8.05
 ξ : 12.40 cm
 Surface : 173.74

Approximation non linéaire

Vitesse en paroi : 0
 Vitesse au centre : -8.59
 ξ : 13.41 cm
 Surface : 172.27

Largeur (2l) : 33.50 cm



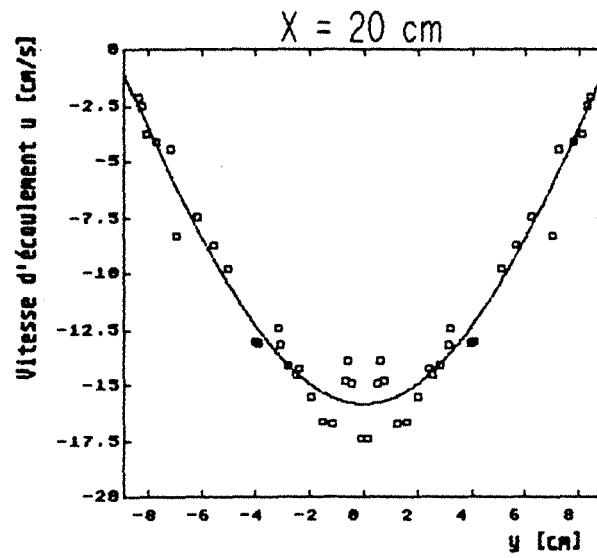
Essai n°6 $\alpha = 19.15^\circ$

Approximation polynomiale
de degré 3

Vitesse au centre : -15.82

Surface : 187.34

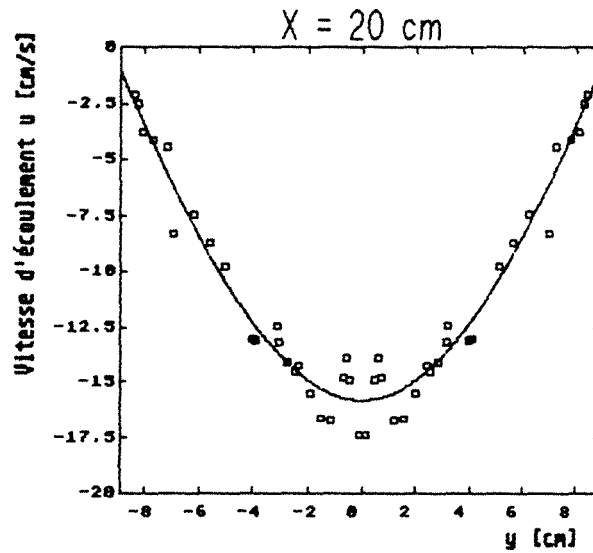
Largeur (2l) : 17.88 cm



Essai n°6 $\alpha = 19.15^\circ$

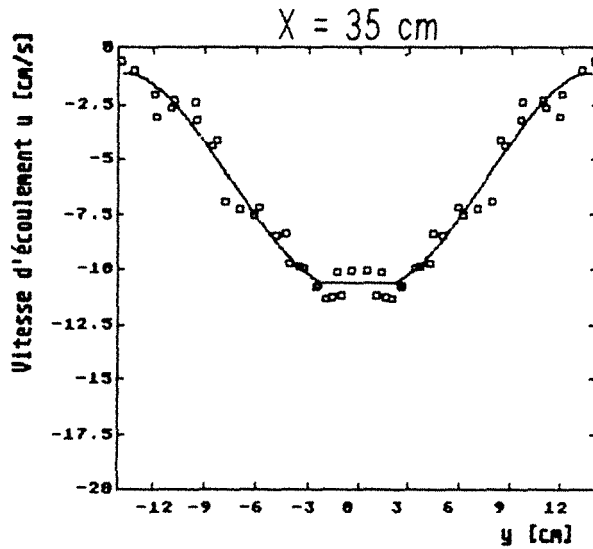
Approximation polynomiale
de degré 3
Vitesse au centre : -15.82
Surface : 187.34

Largeur (2l) : 17.88 cm



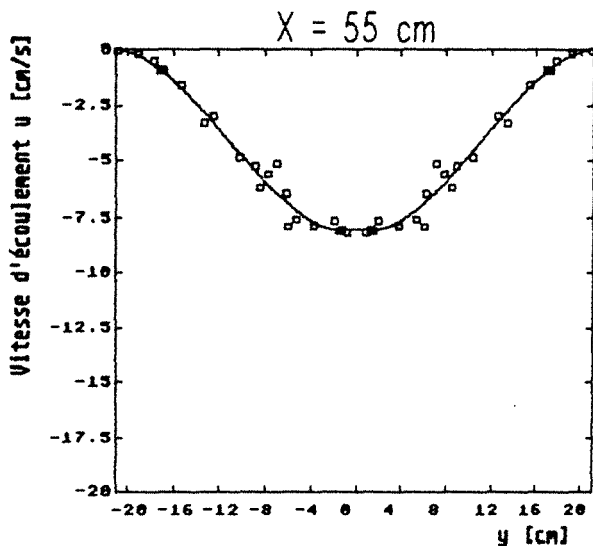
Approximation polynomiale
de degré 3
Vitesse au centre : -10.59
Surface : 174.15

Largeur (2l) : 28.32 cm



Approximation polynomiale
de degré 3
Vitesse au centre : -8.02
Surface : 180.62

Largeur (2l) : 42.22 cm



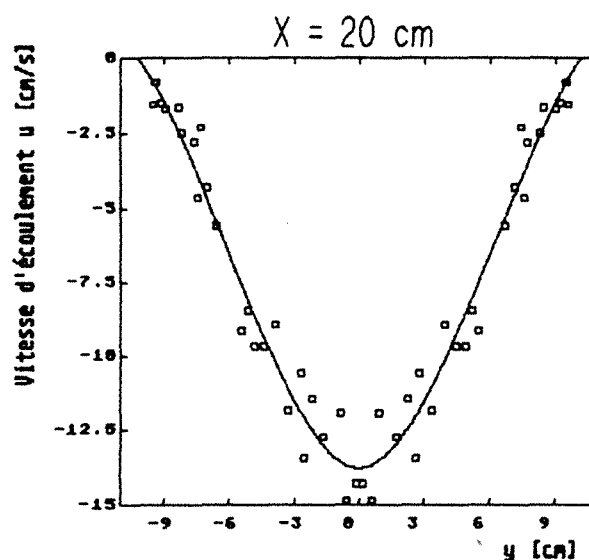
Essai n°7 $\alpha = 24.22^\circ$

Approximation polynomiale
de degré 3

Vitesse au centre : -13.76

Surface : 157.09

Largeur (2l) : 22.00 cm

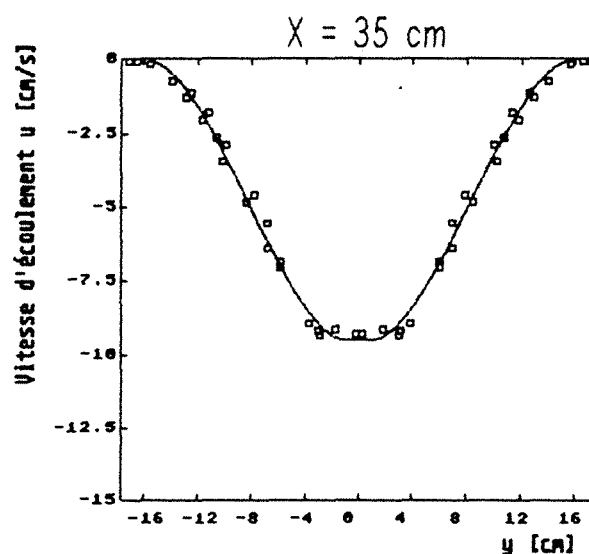


Approximation polynomiale
de degré 3

Vitesse au centre : - 9.45

Surface : 158.36

Largeur (2l) : 35.50 cm



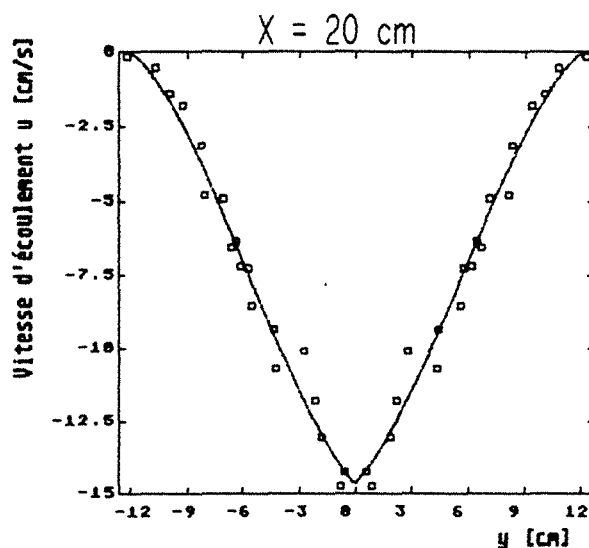
Essai n°8 $\alpha = 28^\circ$

Approximation polynomiale
de degré 3

Vitesse au centre : -14.64

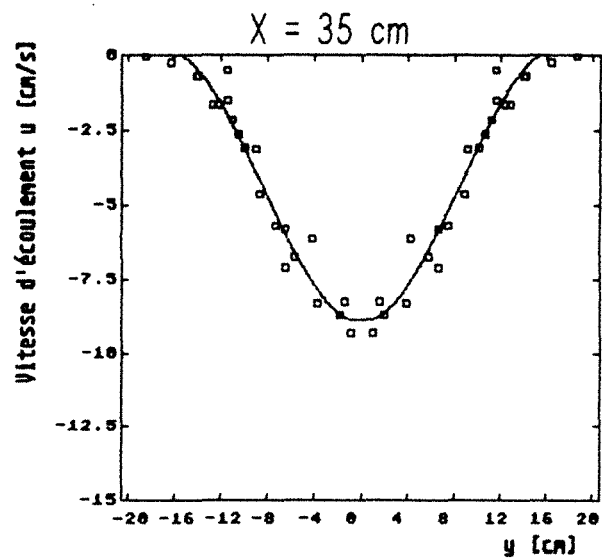
Surface : 170.58

Largeur (2l) : 25.28 cm



Approximation polynomiale
de degré 3
Vitesse au centre : -8.84
Surface : 148

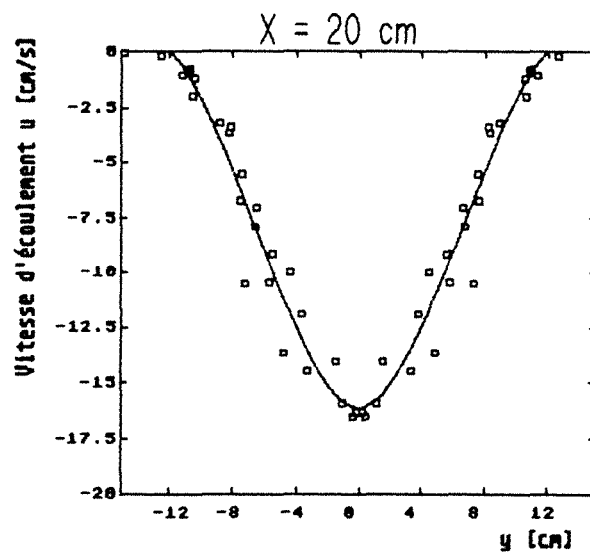
Largeur (2l) : 41.24 cm



Essai n°9 $\alpha = 33.1^\circ$

Approximation polynomiale
de degré 3
Vitesse au centre : -16.09
Surface : 207.75

Largeur (2l) : 30.06 cm



Parois type II : bois lisse

Essai n°13 $\alpha = 6^\circ$

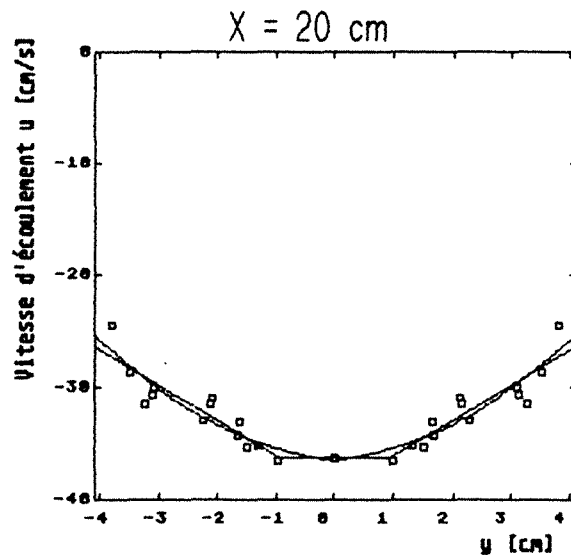
Approximation linéaire

Vitesse en paroi : -26.29
Vitesse au centre : -36.25
 ξ : 3.16 cm
Surface : 265.78

Approximation non linéaire

Vitesse en paroi : -25.33
Vitesse au centre : -36.47
 ξ : 2.75 cm
Surface : 265.15

Largeur (2l) : 8.18 cm



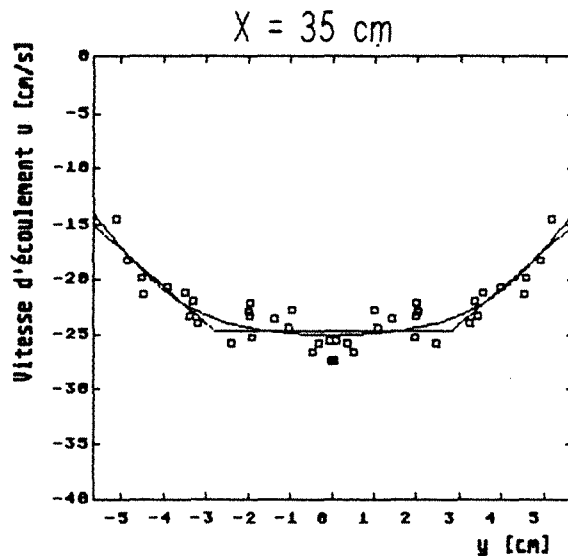
Approximation linéaire

Vitesse en paroi : -15.01
Vitesse au centre : -24.58
 ξ : 2.84 cm
Surface : 251.78

Approximation non linéaire

Vitesse en paroi : -13.88
Vitesse au centre : -25.09
 ξ : 2.33 cm
Surface : 250.35

Largeur (2l) : 11.34 cm



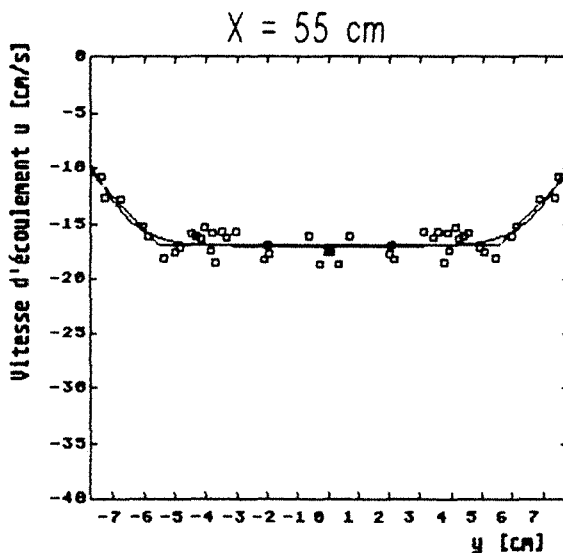
Approximation linéaire

Vitesse en paroi : -10.33
Vitesse au centre : -16.87
 ξ : 2.25 cm
Surface : 247.45

Approximation non linéaire

Vitesse en paroi : -9.55
Vitesse au centre : -16.97
 ξ : 1.56 cm
Surface : 247.87

Largeur (2l) : 15.54 cm



Essai n°14 $\alpha = 10^\circ$

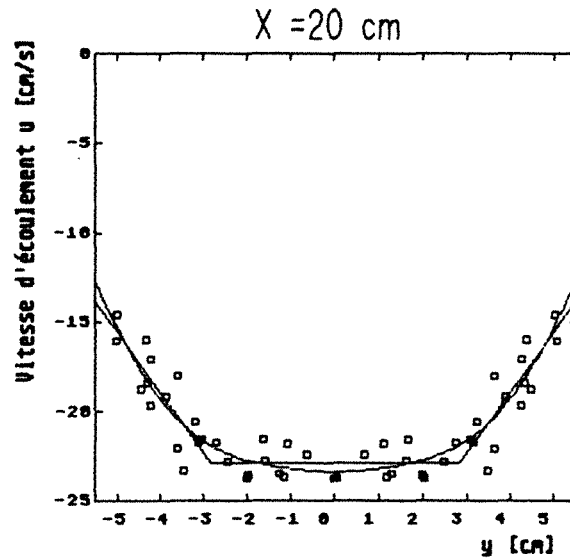
Approximation linéaire

Vitesse en paroi : -13.82
 Vitesse au centre : -22.90
 ξ : 2.71 cm
 Surface : 228.74

Approximation non linéaire

Vitesse en paroi : -13.63
 Vitesse au centre : -23.37
 ξ : 2.16 cm
 Surface : 227.78

Largeur (2l) : 11.06 cm



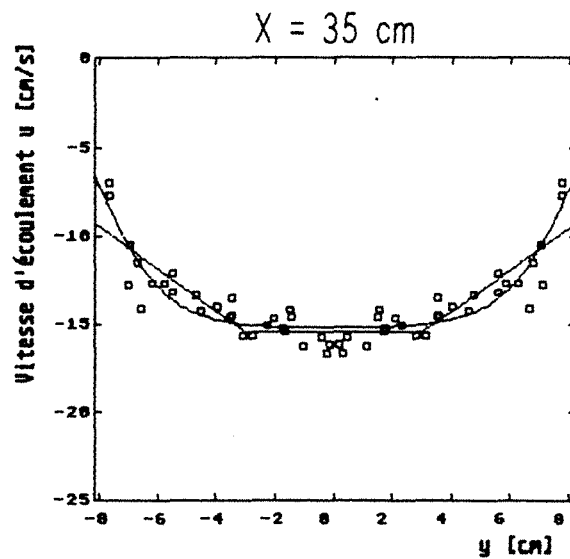
Approximation linéaire

Vitesse en paroi : -9.23
 Vitesse au centre : -15.39
 ξ : 5.16 cm
 Surface : 220.03

Approximation non linéaire

Vitesse en paroi : -6.45
 Vitesse au centre : -15.17
 ξ : 2.37 cm
 Surface : 219.77

Largeur (2l) : 16.36 cm



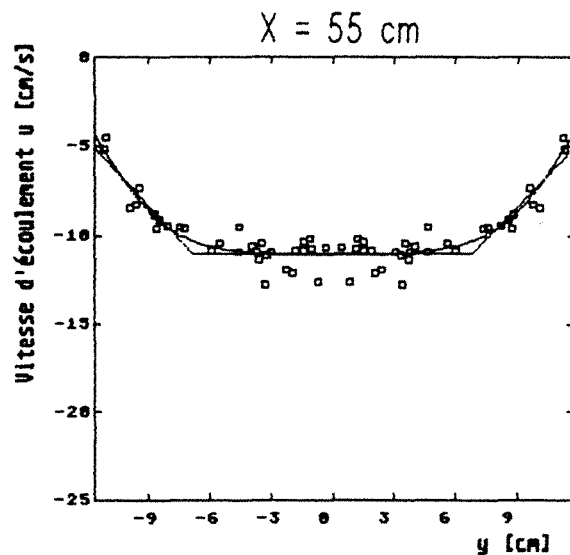
Approximation linéaire

Vitesse en paroi : -5.02
 Vitesse au centre : -10.95
 ξ : 4.92 cm
 Surface : 227.39

Approximation non linéaire

Vitesse en paroi : -4.22
 Vitesse au centre : -11.08
 ξ : 3.63 cm
 Surface : 225.43

Largeur (2l) : 23.42



Essai n°15 $\alpha = 15^\circ$

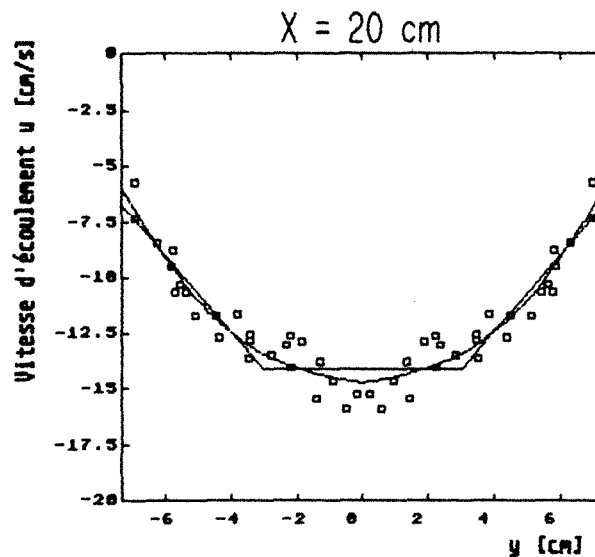
Approximation linéaire

Vitesse en paroi : -6.72
 Vitesse au centre : -14.11
 ξ : 4.35 cm
 Surface : 175.65

Approximation non linéaire

Vitesse en paroi : -5.92
 Vitesse au centre : -14.70
 ξ : 3.76 cm
 Surface : 175.49

Largeur (2l) : 14.72 cm



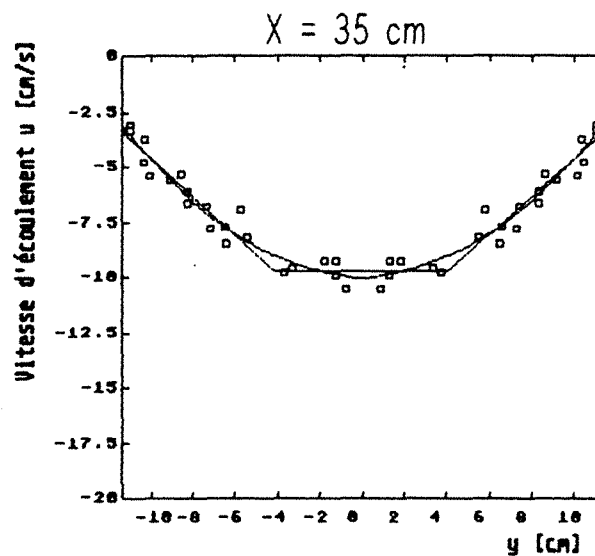
Approximation linéaire

Vitesse en paroi : -3.38
 Vitesse au centre : -9.70
 ξ : 7.29 cm
 Surface : 174.84

Approximation non linéaire

Vitesse en paroi : -3.08
 Vitesse au centre : -10.07
 ξ : 6.84 cm
 Surface : 173.52

Largeur (2l) : 22.78 cm



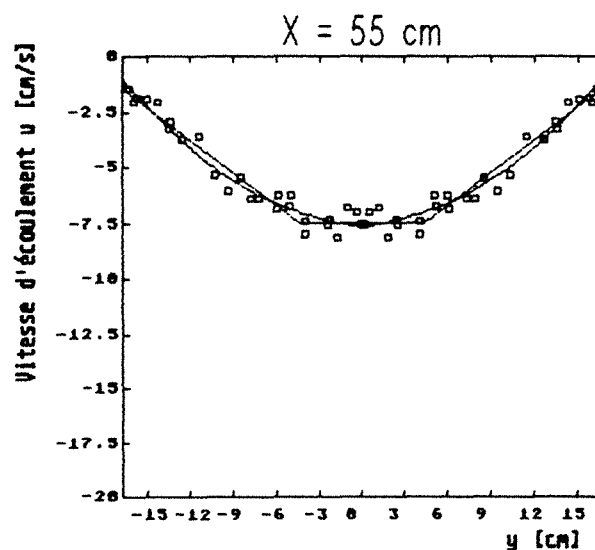
Approximation linéaire

Vitesse en paroi : -1.46
 Vitesse au centre : -7.43
 ξ : 12.40 cm
 Surface : 174.89

Approximation non linéaire

Vitesse en paroi : -1.00
 Vitesse au centre : -7.63
 ξ : 10.39 cm
 Surface : 176.37

Largeur (2l) : 33.50 cm



Essai n°16 $\alpha = 19.15^\circ$

Approximation linéaire

Vitesse en paroi : -3.77

Vitesse au centre : -11.52

ξ : 5.82 cm

Surface : 161.05

Approximation non linéaire

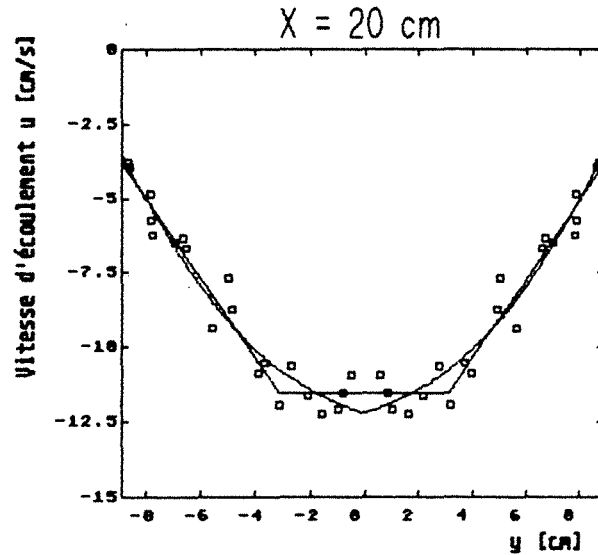
Vitesse en paroi : -3.50

Vitesse au centre : -12.19

ξ : 5.82 cm

Surface : 161.28

Largeur (2l) : 17.88



Approximation linéaire

Vitesse en paroi : -1.24

Vitesse au centre : -9.02

ξ : 10.62 cm

Surface : 172.69

Approximation non linéaire

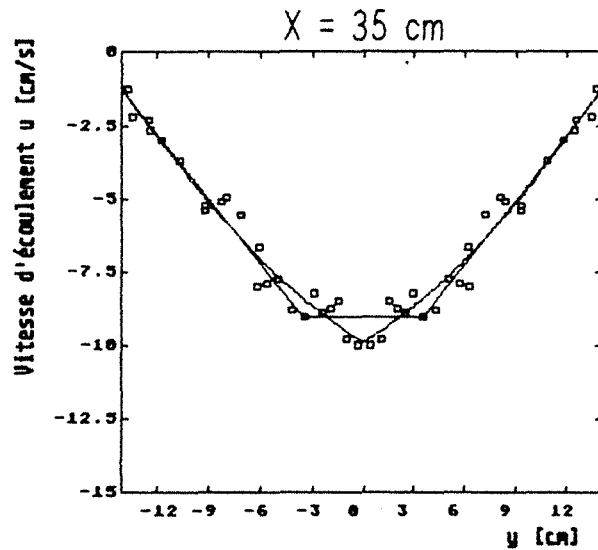
Vitesse en paroi : -1.18

Vitesse au centre : -9.89

ξ : 14.73 cm

Surface : 172.66

Largeur (2l) : 28.32 cm

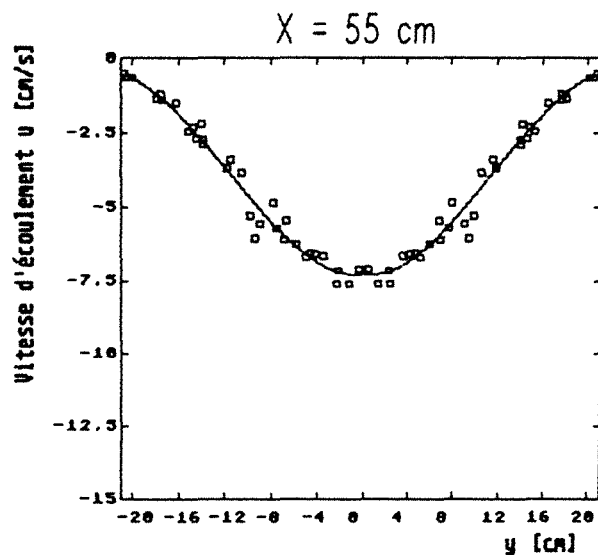


Approximation polynomiale
de degré 3

Vitesse au centre : -7.26

Surface : 176.04

Largeur (2l) : 42.22 cm



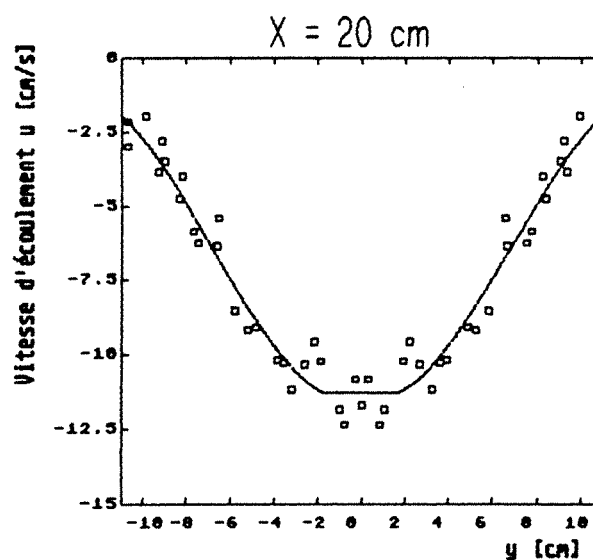
Essai n°17 $\alpha = 24.22^\circ$

Approximation polynomiale
de degré 3

Vitesse au centre : -11.26

Surface : 165.86

Largeur (2l) : 22.00 cm

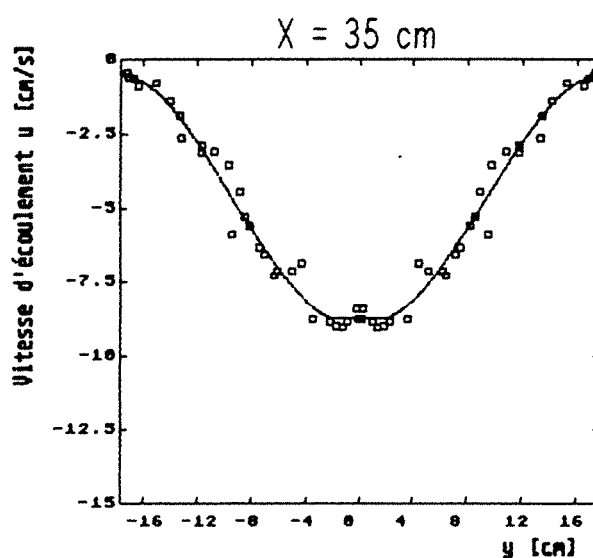


Approximation polynomiale
de degré 3

Vitesse au centre : -8.67

Surface : 173.5

Largeur (2l) : 35.50 cm



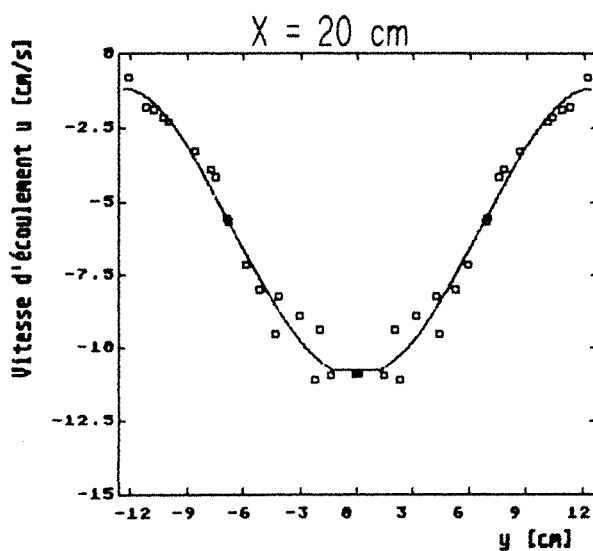
Essai n°18 $\alpha = 28^\circ$

Approximation polynomiale
de degré 3

Vitesse au centre : -10.73

Surface : 154.02

Largeur (2l) : 25.28

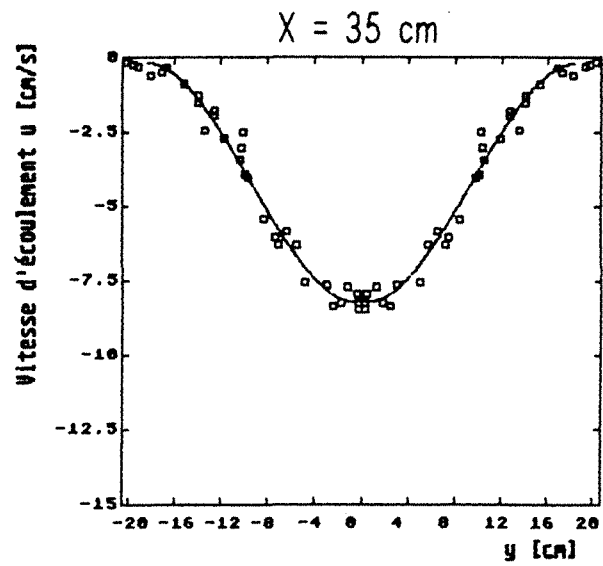


Approximation polynomiale
de degré 3

Vitesse au centre : -8.17

Surface : 158.27

Largeur (2l) : 41.24



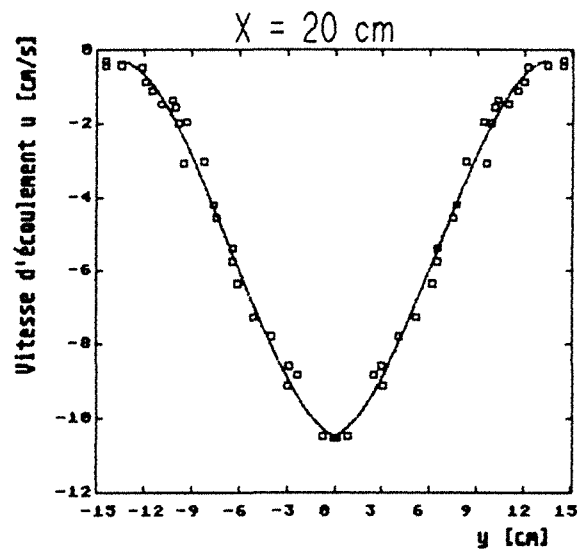
Essai n°19 $\alpha = 33.10^\circ$

Approximation polynomiale
de degré 3

Vitesse au centre : -10.45

Surface : 141.03

Largeur (2l) : 30.06 cm



Parois type III : sable 1.6/2.0

Essai n°23 $\alpha = 6^\circ$

Approximation linéaire

Vitesse en paroi : -17.51

Vitesse au centre : -27.67

ξ : 1.56 cm

Surface : 211.03

Approximation non linéaire

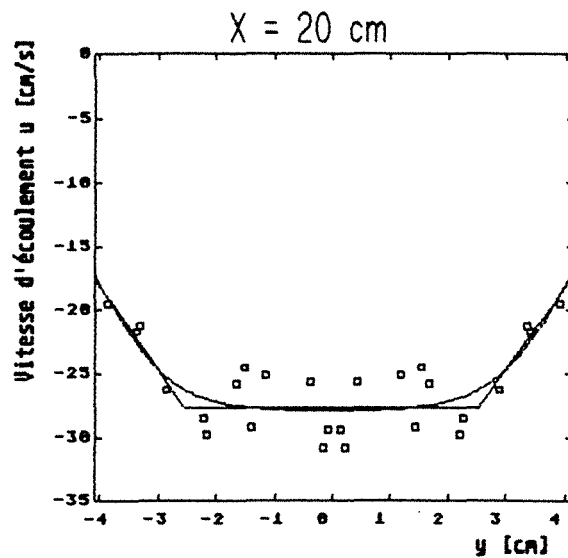
Vitesse en paroi : -17.04

Vitesse au centre : -27.98

ξ : 1.27 cm

Surface : 210.04

Largeur (2l) : 8.18 cm



Approximation linéaire

Vitesse en paroi : -11.58

Vitesse au centre : -23.43

ξ : 4.14 cm

Surface : 216.76

Approximation non linéaire

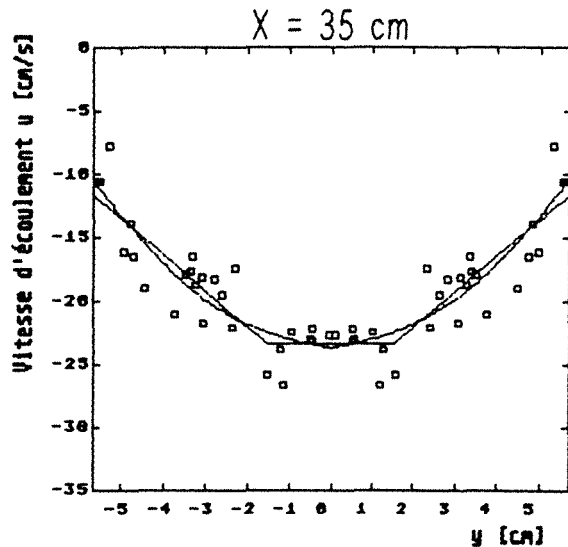
Vitesse en paroi : -10.43

Vitesse au centre : -23.69

ξ : 3.29 cm

Surface : 217.17

Largeur (2l) : 11.34 cm



Approximation linéaire

Vitesse en paroi : -6.82

Vitesse au centre : -13.76

ξ : 3.50 cm

Surface : 189.62

Approximation non linéaire

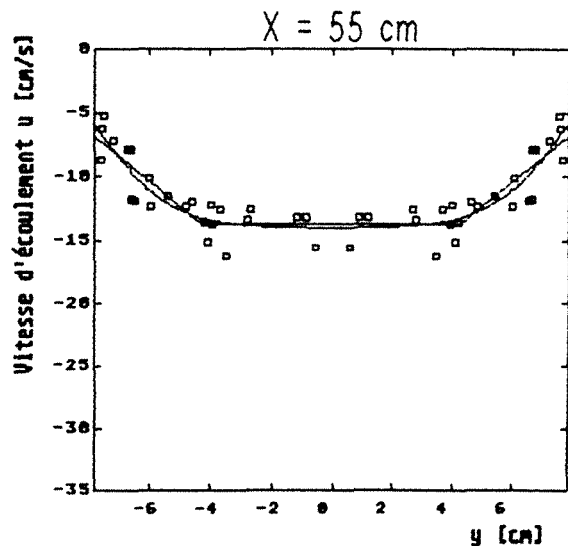
Vitesse en paroi : -5.85

Vitesse au centre : -14.03

ξ : -2.41 cm

Surface : 191.13

Largeur (2l) : 15.54 cm



Essai n°24 $\alpha = 10^\circ$

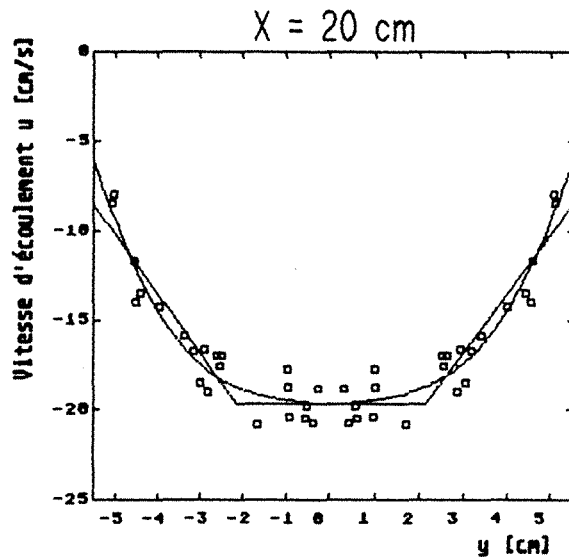
Approximation linéaire

Vitesse en paroi : -3.35
 Vitesse au centre : -19.67
 ξ : 3.38 cm
 Surface : 179.88

Approximation non linéaire

Vitesse en paroi : -6.00
 Vitesse au centre : -19.68
 ξ : 2.16 cm
 Surface : 178.46

Largeur (2l) : 11.06 cm



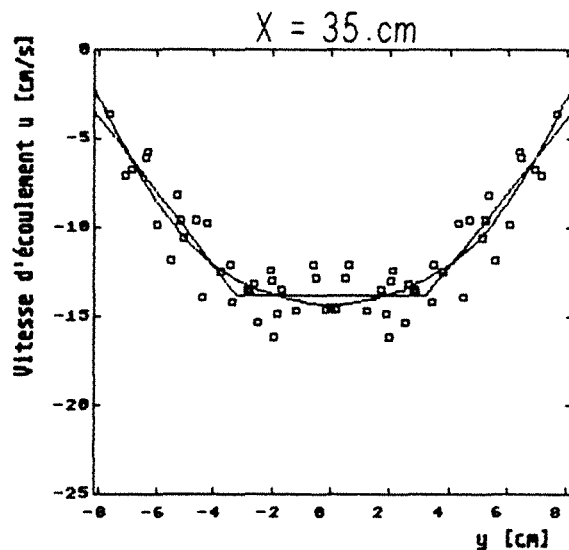
Approximation linéaire

Vitesse en paroi : -3.35
 Vitesse au centre : -13.83
 ξ : 4.99 cm
 Surface : 173.94

Approximation non linéaire

Vitesse en paroi : -2.03
 Vitesse au centre : -14.35
 ξ : 2.93 cm
 Surface : 173.46

Largeur (2l) : 173.46



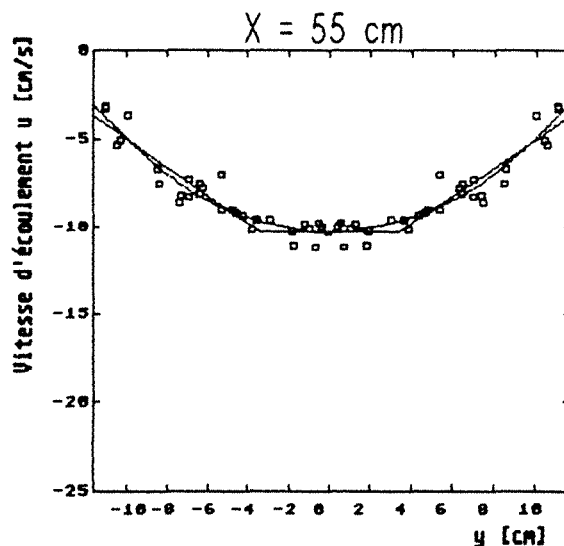
Approximation linéaire

Vitesse en paroi : -3.66
 Vitesse au centre : -10.18
 ξ : 8.31 cm
 Surface : 184.22

Approximation non linéaire

Vitesse en paroi : -2.94
 Vitesse au centre : -10.36
 ξ : 6.68 cm
 Surface : 183.50

Largeur (2l) : 23.42 cm



Essai n°25 $\alpha = 15^\circ$

Approximation linéaire

Vitesse en paroi : -2.28

Vitesse au centre : -16.20

ξ : 5.17 cm

Surface : 166.83

Approximation non linéaire

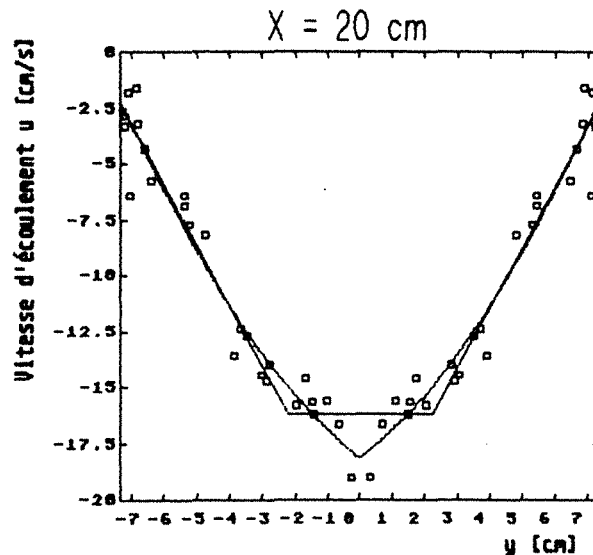
Vitesse en paroi : -2.20

Vitesse au centre : -18.12

ξ : 6.92 cm

Surface : 167.67

Largeur (2l) : 14.72



Approximation linéaire

Vitesse en paroi : -1.28

Vitesse au centre : -11.28

ξ : 7.29 cm

Surface : 183.87

Approximation non linéaire

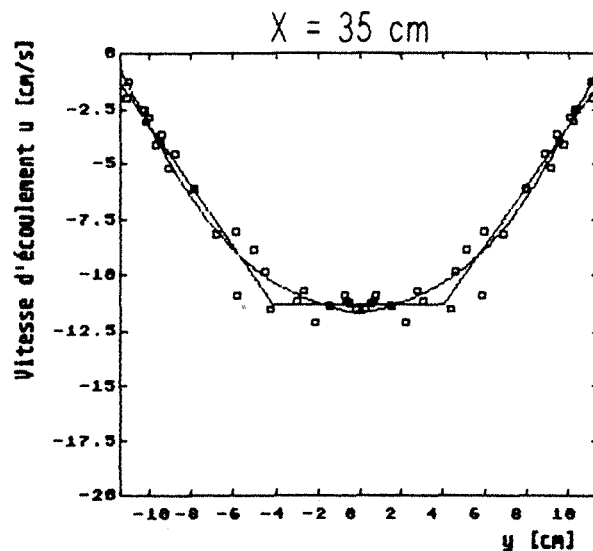
Vitesse en paroi : -0.62

Vitesse au centre : -11.72

ξ : 6.15 cm

Surface : 183.66

Largeur (2l) : 22.78 cm



Approximation linéaire

Vitesse en paroi : -0.47

Vitesse au centre : -8.02

ξ : 11.73 cm

Surface : 180.14

Approximation non linéaire

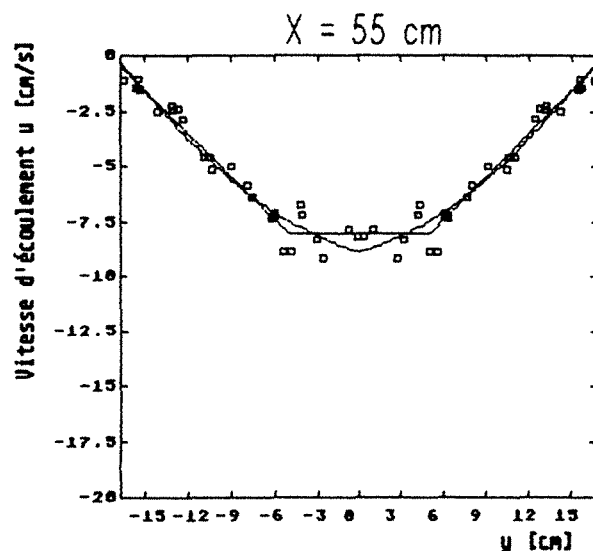
Vitesse en paroi : -0.25

Vitesse au centre : -8.90

ξ : 13.41 cm

Surface : 182.08

Largeur (2l) : 33.50 cm



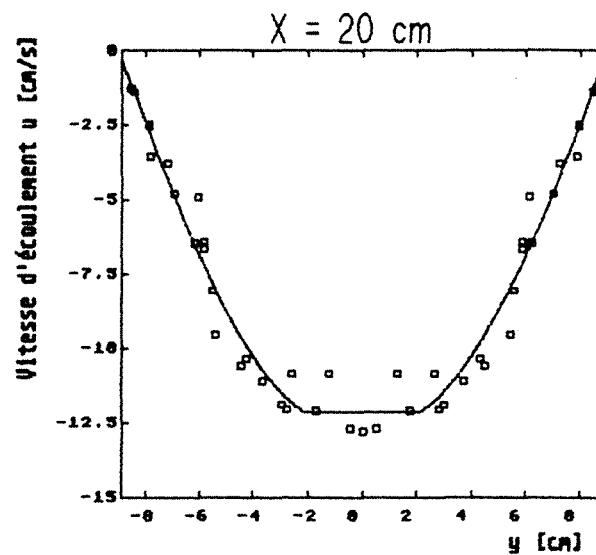
Essai n°26 $\alpha = 19.15^\circ$

Approximation polynomiale
de degré 3

Vitesse au centre : -12.13

Surface : 150.23

Largeur (2l) : 17.88 cm

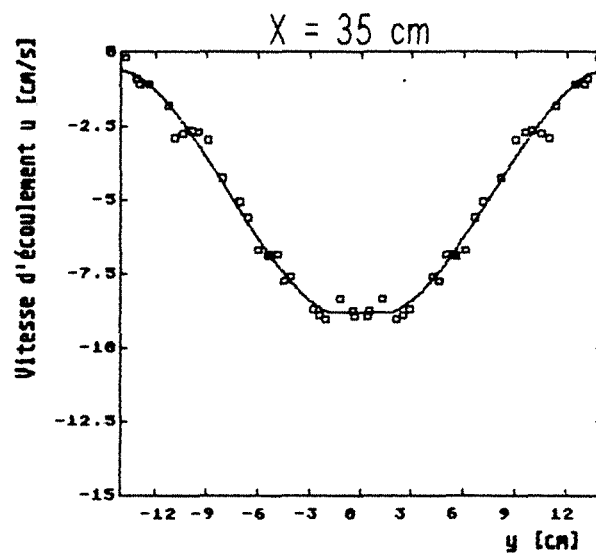


Approximation polynomiale
de degré 3

Vitesse au centre : -8.77

Surface : 144.17

Largeur (2l) : 28.32 cm

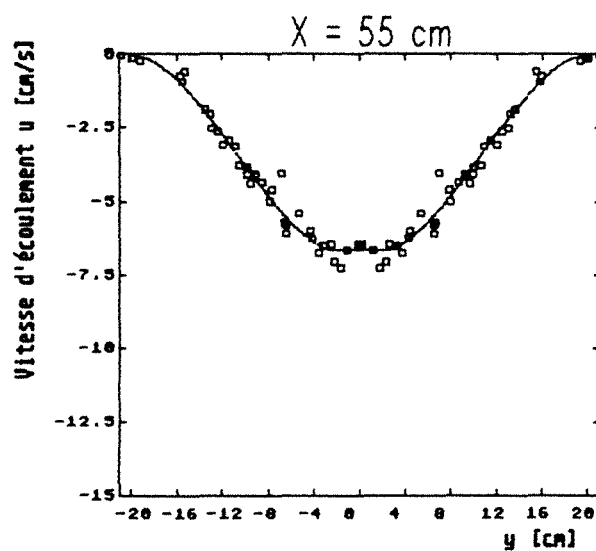


Approximation polynomiale
de degré 3

Vitesse au centre : -6.64

Surface : 144.18

Largeur (2l) : 42.22 cm



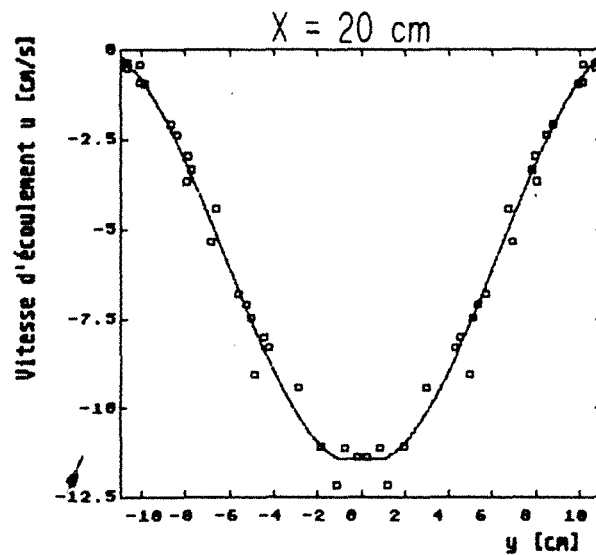
Essai n°27 $\alpha = 24.22^\circ$

Approximation polynomiale
de degré 3

Vitesse au centre : -11.39

Surface : 142.32

Largeur (2l) : 22.00 cm

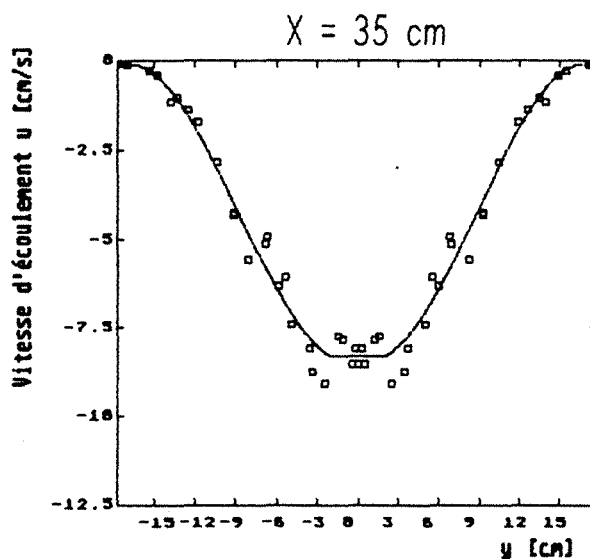


Approximation polynomiale
de degré 3

Vitesse au centre : -8.29

Surface : 149.16

Largeur (2l) : 35.50 cm



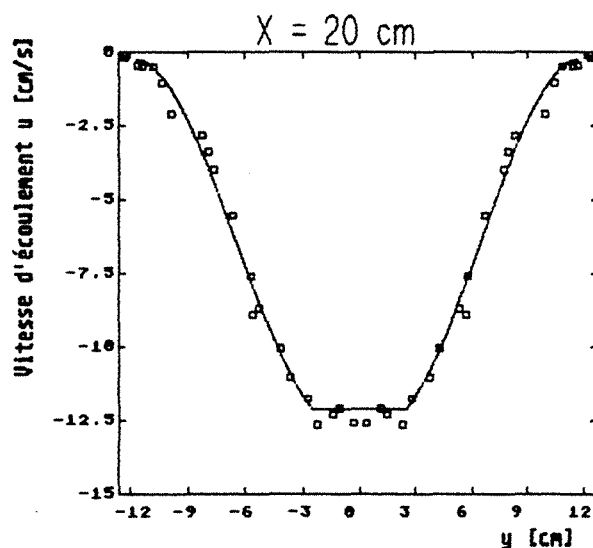
Essai n°28 $\alpha = 28^\circ$

Approximation polynomiale
de degré 3

Vitesse au centre : -12.10

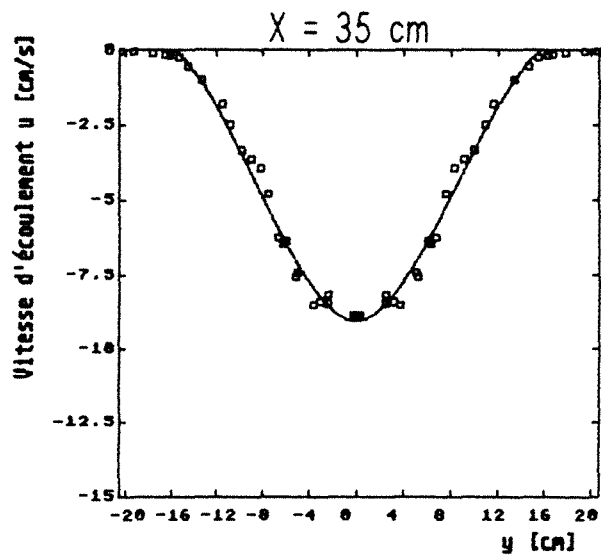
Surface : 163.38

Largeur (2l) : 25.28 cm



Approximation polynomiale
de degré 3
Vitesse au centre : -9.05
Surface : 152.39

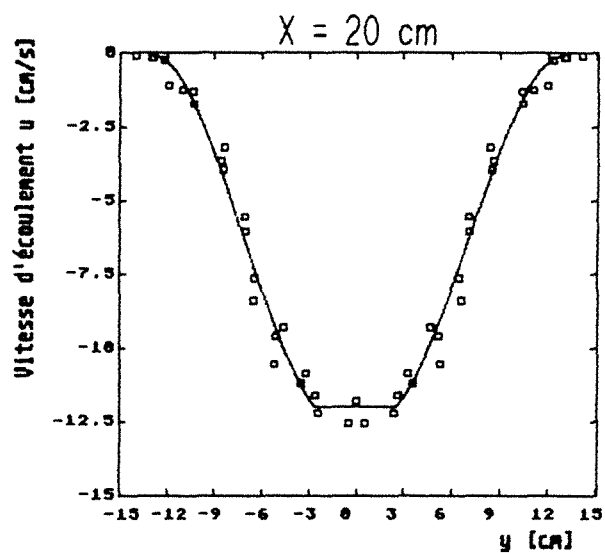
Largeur (2l) : 41.24 cm



Essai n°29 $\alpha = 33.10^\circ$

Approximation polynomiale
de degré 3
Vitesse au centre : -11.96
Surface : 174.47

Largeur (2l) : 30.06 cm



Paroi type IV : sable 0.315/0.4

Essai n°33 $\alpha = 6^\circ$

Approximation linéaire

Vitesse en paroi : -17.15

Vitesse au centre : -34.11

ξ : 1.27 cm

Surface : 258.08

Approximation non linéaire

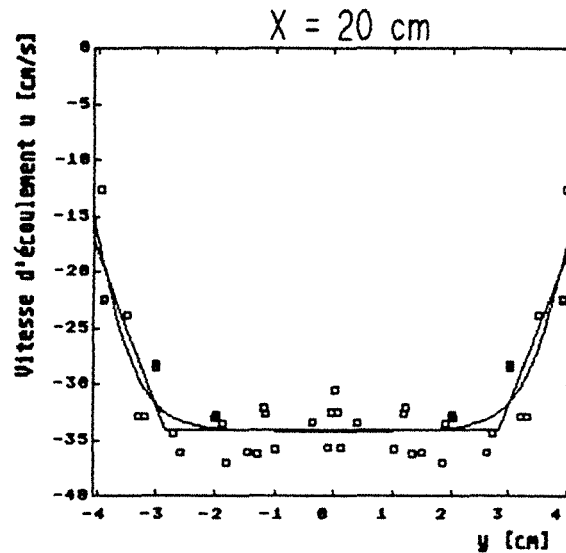
Vitesse en paroi : -14.12

Vitesse au centre : -34.16

ξ : 0.82 cm

Surface : 257.95

Largeur (2l) : 8.18 cm



Approximation linéaire

Vitesse en paroi : -11.59

Vitesse au centre : -22.85

ξ : 1.25 cm

Surface : 245.25

Approximation non linéaire

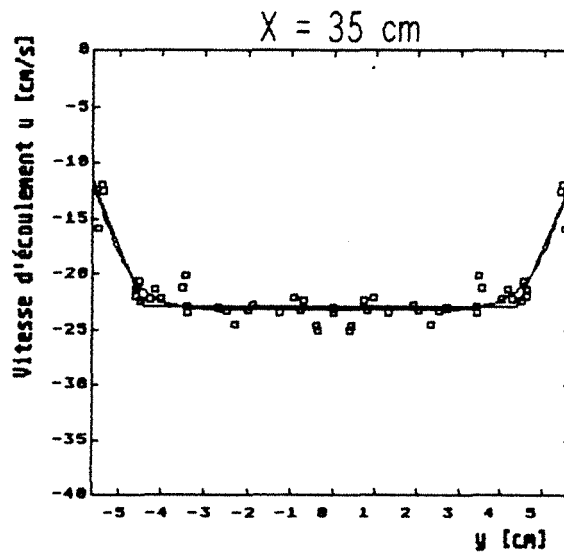
Vitesse en paroi : 11.30

Vitesse au centre : 23.20

ξ : 1.02 cm

Surface : 246.43

Largeur (2l) : 11.34 cm



Approximation linéaire

Vitesse en paroi : -9.88

Vitesse au centre : -17.17

ξ : 3.19 cm

Surface : 243.72

Approximation non linéaire

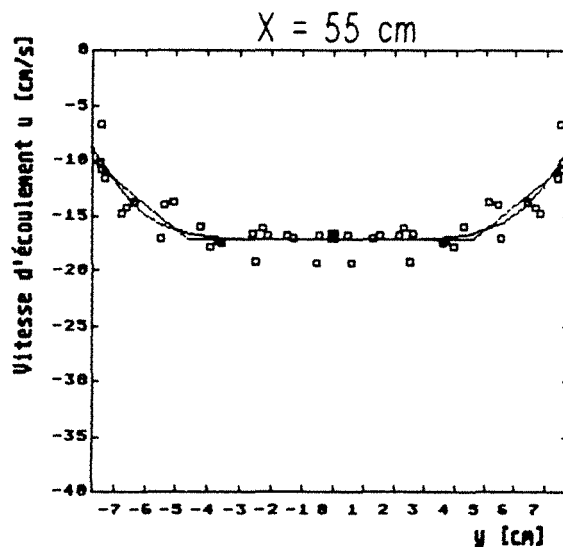
Vitesse en paroi : -8.59

Vitesse au centre : -17.17

ξ : 1.94 cm

Surface : 243.86

Largeur (2l) : 15.54 cm



Essai n°35 $\alpha = 15^\circ$

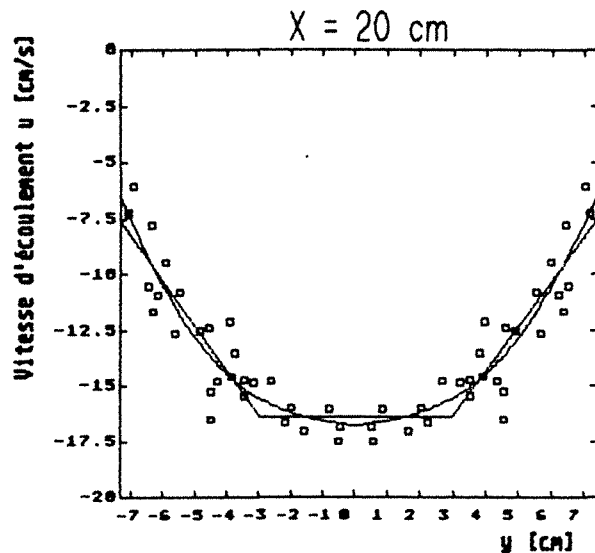
Approximation linéaire

Vitesse en paroi : -7.56
 Vitesse au centre : -16.40
 ξ : 4.42 cm
 Surface : 202.49

Approximation non linéaire

Vitesse en paroi : -6.50
 Vitesse au centre : -16.79
 ξ : 3.46 cm
 Surface : 201.85

Largeur (2l) : 14.72 cm



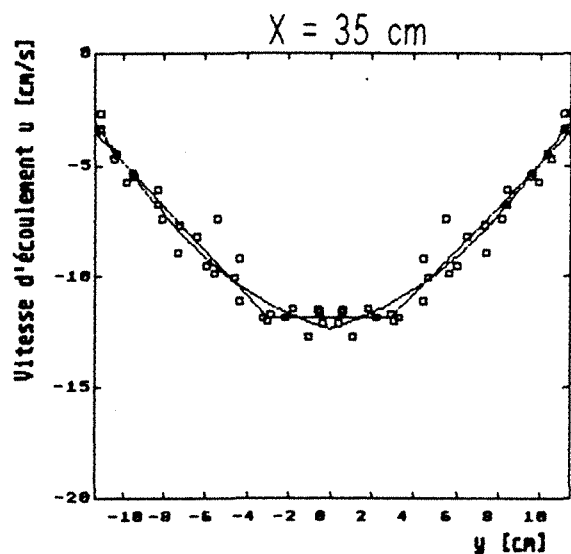
Approximation linéaire

Vitesse en paroi : -3.44
 Vitesse au centre : -11.85
 ξ : 8.43 cm
 Surface : 198.89

Approximation non linéaire

Vitesse en paroi : -3.02
 Vitesse au centre : -12.34
 ξ : 8.20 cm
 Surface : 199.61

Largeur (2l) : 22.78 cm



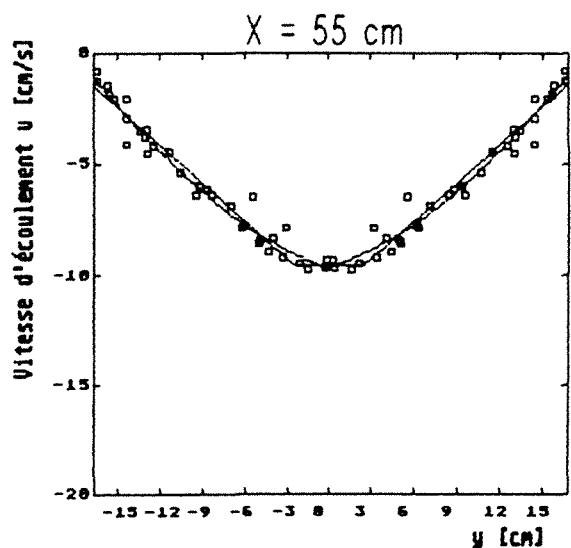
Approximation linéaire

Vitesse en paroi : -1.46
 Vitesse au centre : -9.54
 ξ : 14.24 cm
 Surface : 207.47

Approximation non linéaire

Vitesse en paroi : -1.05
 Vitesse au centre : -9.66
 ξ : 14.41 cm
 Surface : 204.96

Largeur (2l) : 33.50 cm



Essai n°36 $\alpha = 19.15^\circ$

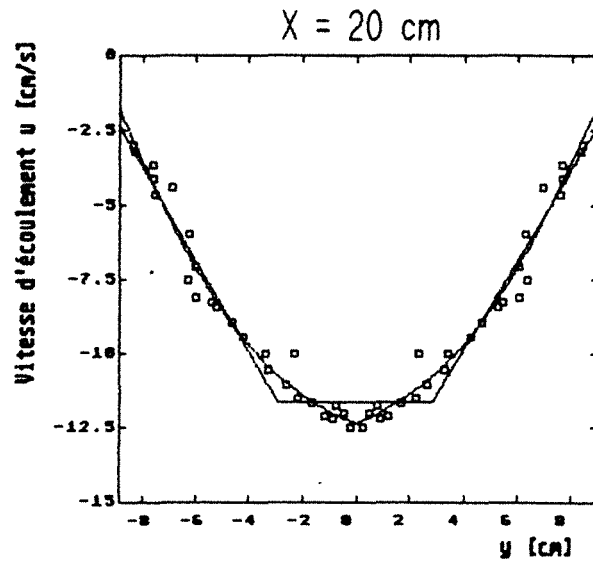
Approximation linéaire

Vitesse en paroi : -2.31
 Vitesse au centre : -11.63
 ξ : 6.09 cm
 Surface : 151.30

Approximation non linéaire

Vitesse en paroi : -1.72
 Vitesse au centre : -12.33
 ξ : 6.00 cm
 Surface : 150.23

Largeur (2l) : 17.88 cm



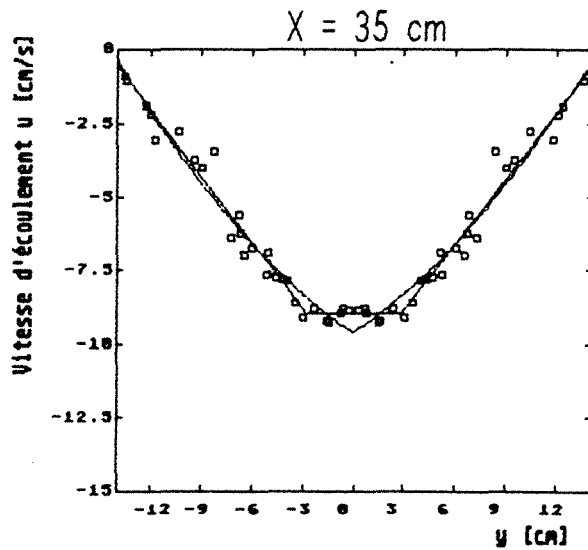
Approximation linéaire

Vitesse en paroi : -0.49
 Vitesse au centre : -8.95
 ξ : 11.33 cm
 Surface : 157.51

Approximation non linéaire

Vitesse en paroi : -0.33
 Vitesse au centre : -9.60
 ξ : 14.73 cm
 Surface : 157.70

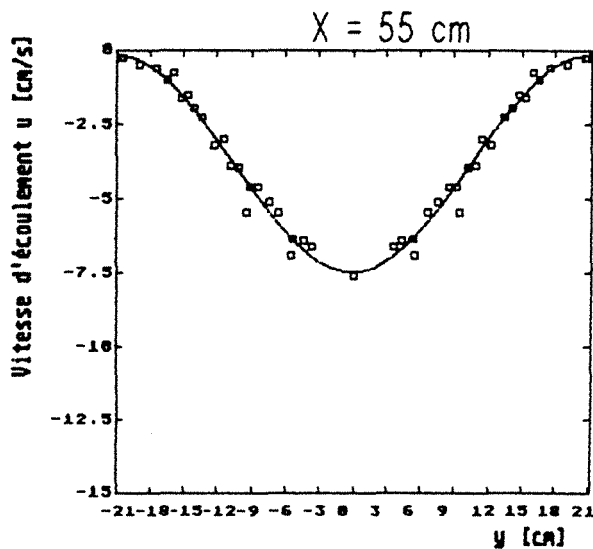
Largeur (2l) : 28.32 cm



Approximation polynomiale de degré 3

Vitesse au centre : -7.41
 Surface : 159.46

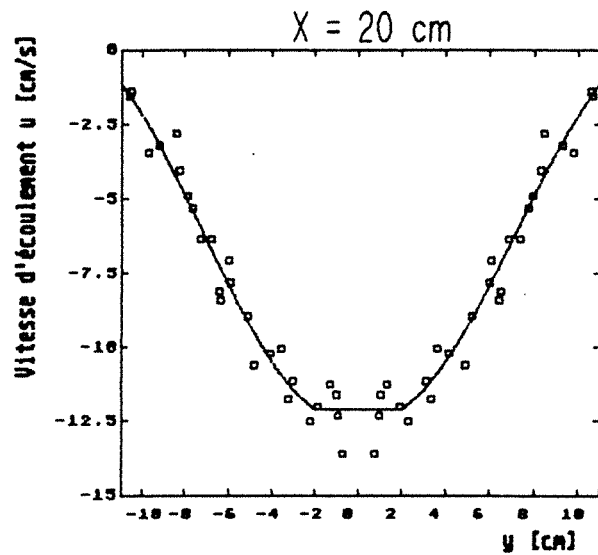
Largeur (2l) : 42.22 cm



Essai n°37 $\alpha = 24.22^\circ$

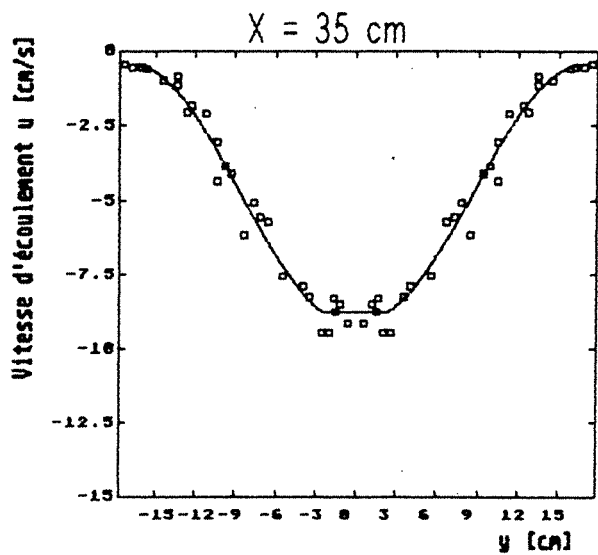
Approximation polynomiale
de degré 3
Vitesse au centre : -12.06
Surface : 173.19

Largeur (2l) : 22.00 cm



Approximation polynomiale
de degré 3
Vitesse au centre : -8.73
Surface : 162.10

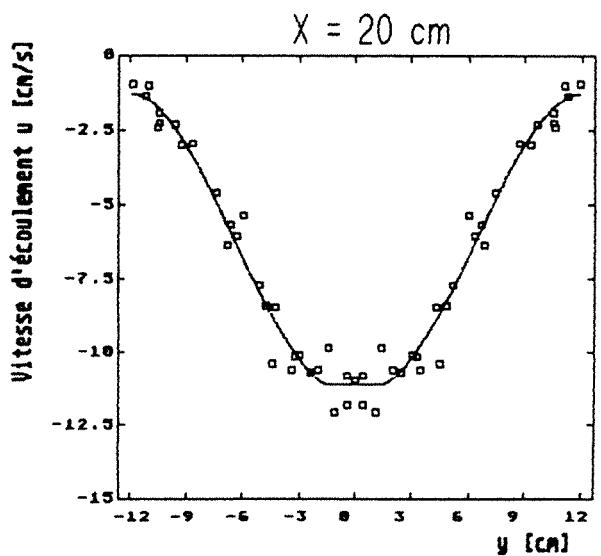
Largeur (2l) : 35.50 cm



Essai n°38 $\alpha = 28^\circ$

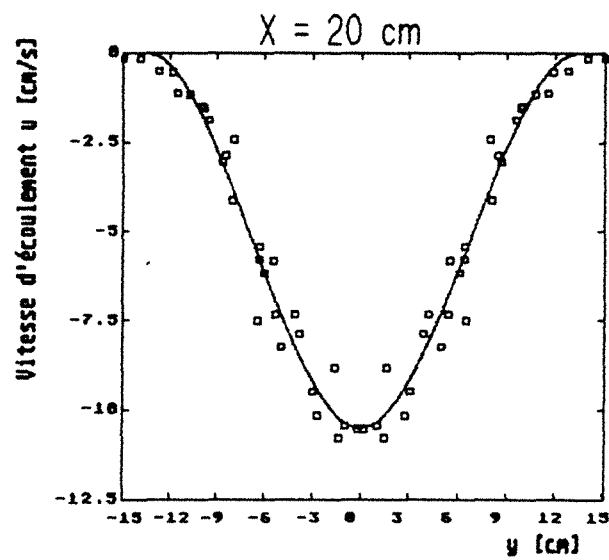
Approximation polynomiale
de degré 3
Vitesse au centre : -11.07
Surface : 156.5

Largeur (2l) : 25.28 cm



Essai n°39 $\alpha = 33.1^\circ$

Approximation polynomiale
de degré 3
Vitesse au centre : -10.50
Surface : 140.7
Largeur (2l) : 30.06 cm



ANNEXE 3

Détermination des constantes
 $r, q, \gamma, \gamma_p, \beta_p$
de la modélisation de l'écoulement gravitaire

Détermination des paramètres de la modélisation pour les petits pois secs

Exemples de combinaisons des constantes r , q , γ , β_p

analysées automatiquement par le logiciel CALAGE.PRG

Cet annexe présente quelques listes de combinaisons des constantes r , q , γ , γ_p , β_p qui nous ont permis de déterminer les constantes les mieux adaptées pour les petits pois secs s'écoulant entre les différents types de paroi. La première ligne de ces listes indique les fichiers contenant les données expérimentales qui ont été utilisées. Ensuite chaque ligne correspond à une combinaison de constantes analysées par le logiciel CALAGE.PRG. La dernière valeur de la ligne donne l'écart entre les courbes théoriques et les courbes expérimentales pour la combinaison donnée. Cet écart est le résultat du calcul de la somme des distances verticales au carré entre les points représentant les courbes expérimentales (approximation des vitesses expérimentales par la tangente hyperbolique) et les courbes théoriques. La seconde partie de l'annexe présente quelques superpositions de courbes expérimentales obtenues par approximation non linéaire des points expérimentaux avec les courbes théoriques. En conclusion à la fin de chaque liste on donne avec les constantes correspondantes l'écart minimum obtenu entre la théorie et l'expérience. Les paramètres ainsi déterminés sont les paramètres du matériau de la modélisation théorique développée au laboratoire. Pour toutefois être sûr que nous sommes en présence des paramètres recherchés, il faut encore que dans la liste des combinaisons étudiées l'écart minimum soit encadré par des valeurs plus élevées lorsque les différentes constantes du modèle diminuent et augmentent. Comme cela peut se voir sur les listes que l'on présente ici.

Détermination des constantes du matériau r , q , γ

et de la constante β_p pour la trémie numéro 3

($\alpha = 6^\circ$ - parois de type I - $\gamma = \gamma_p$)

Cotes des profils de vitesses : 20 cm et 35 cm

E:\THESE.DW\MANIP\M3-20-M.MES

q	r	γ
3.000	1.100	0.0300
3.000	1.100	0.0300
3.000	1.100	0.0300
3.000	1.100	0.0300
3.000	1.100	0.0300
3.000	1.100	0.0350
3.000	1.100	0.0350

E:\THESE.DW\MANIP\M3-35-M.MES

β_p	ecart
1.600	0.00469876
1.700	0.00383843
1.800	0.00749774
1.900	0.01567967
2.000	0.02837922
1.600	0.00504530
1.700	0.00369022

3.000	1.100	0.0350	1.800	0.00679515
3.000	1.100	0.0350	1.900	0.01436017
3.000	1.100	0.0350	2.000	0.02638536
3.000	1.100	0.0400	1.600	0.00543570
3.000	1.100	0.0400	1.700	0.00362189
3.000	1.100	0.0400	1.800	0.00621148
3.000	1.100	0.0400	1.900	0.01320459
3.000	1.100	0.0400	2.000	0.02460136
3.000	1.100	0.0450	1.600	0.00586405
3.000	1.100	0.0450	1.700	0.00362294
3.000	1.100	0.0450	1.800	0.00573064
3.000	1.100	0.0450	1.900	0.01219001
3.000	1.100	0.0450	2.000	0.02299849
3.000	1.100	0.0500	1.600	0.00632444
3.000	1.100	0.0500	1.700	0.00368526
3.000	1.100	0.0500	1.800	0.00534154
3.000	1.100	0.0500	1.900	0.01129952
3.000	1.100	0.0500	2.000	0.02155771
3.000	1.100	0.0550	1.600	0.00680975
3.000	1.100	0.0550	1.700	0.00379517
3.000	1.100	0.0550	1.800	0.00503120
3.000	1.100	0.0550	1.900	0.01051765
3.000	1.100	0.0550	2.000	0.02025430
3.000	1.200	0.0300	1.600	0.00454809
3.000	1.200	0.0300	1.700	0.00394817
3.000	1.200	0.0300	1.800	0.00789806
3.000	1.200	0.0300	1.900	0.01640438
3.000	1.200	0.0300	2.000	0.02945958
3.000	1.200	0.0350	1.600	0.00483491
3.000	1.200	0.0350	1.700	0.00376587
3.000	1.200	0.0350	1.800	0.00718964
3.000	1.200	0.0350	1.900	0.01510835
3.000	1.200	0.0350	2.000	0.02752203
3.000	1.200	0.0400	1.600	0.00517085
3.000	1.200	0.0400	1.700	0.00365785
3.000	1.200	0.0400	1.800	0.00658821
3.000	1.200	0.0400	1.900	0.01395939
3.000	1.200	0.0400	2.000	0.02577142
3.000	1.200	0.0450	1.600	0.00553675
3.000	1.200	0.0450	1.700	0.00361456
3.000	1.200	0.0450	1.800	0.00608248
3.000	1.200	0.0450	1.900	0.01293862
3.000	1.200	0.0450	2.000	0.02418276
3.000	1.200	0.0500	1.600	0.00593793
3.000	1.200	0.0500	1.700	0.00363047
3.000	1.200	0.0500	1.800	0.00566157
3.000	1.200	0.0500	1.900	0.01203451
3.000	1.200	0.0500	2.000	0.02274820
3.000	1.200	0.0550	1.600	0.00636605

3.000	1.200	0.0550	1.700	0.00369001
3.000	1.200	0.0550	1.800	0.00531394
3.000	1.200	0.0550	1.900	0.01123101
3.000	1.200	0.0550	2.000	0.02144588
3.000	1.300	0.0300	1.600	0.00443172
3.000	1.300	0.0300	1.700	0.00406223
3.000	1.300	0.0300	1.800	0.00826949
3.000	1.300	0.0300	1.900	0.01705927
3.000	1.300	0.0300	2.000	0.03042727
3.000	1.300	0.0350	1.600	0.00467343
3.000	1.300	0.0350	1.700	0.00385236
3.000	1.300	0.0350	1.800	0.00755548
3.000	1.300	0.0350	1.900	0.01578358
3.000	1.300	0.0350	2.000	0.02853763
3.000	1.300	0.0400	1.600	0.00495914
3.000	1.300	0.0400	1.700	0.00371498
3.000	1.300	0.0400	1.800	0.00694483
3.000	1.300	0.0400	1.900	0.01464886
3.000	1.300	0.0400	2.000	0.02682720
3.000	1.300	0.0450	1.600	0.00528074
3.000	1.300	0.0450	1.700	0.00363718
3.000	1.300	0.0450	1.800	0.00642195
3.000	1.300	0.0450	1.900	0.01363051
3.000	1.300	0.0450	2.000	0.02526273
3.000	1.300	0.0500	1.600	0.00562832
3.000	1.300	0.0500	1.700	0.00361280
3.000	1.300	0.0500	1.800	0.00597725
3.000	1.300	0.0500	1.900	0.01271870
3.000	1.300	0.0500	2.000	0.02383809
3.000	1.300	0.0550	1.600	0.00600175
3.000	1.300	0.0550	1.700	0.00363743
3.000	1.300	0.0550	1.800	0.00560280
3.000	1.300	0.0550	1.900	0.01190437
3.000	1.300	0.0550	2.000	0.02253791
3.000	1.400	0.0300	1.600	0.00434497
3.000	1.400	0.0300	1.700	0.00417372
3.000	1.400	0.0300	1.800	0.00860852
3.000	1.400	0.0300	1.900	0.01764692
3.000	1.400	0.0300	2.000	0.03128858
3.000	1.400	0.0350	1.600	0.00454967
3.000	1.400	0.0350	1.700	0.00394865
3.000	1.400	0.0350	1.800	0.00790150
3.000	1.400	0.0350	1.900	0.01640435
3.000	1.400	0.0350	2.000	0.02946143
3.000	1.400	0.0400	1.600	0.00479011
3.000	1.400	0.0400	1.700	0.00378663
3.000	1.400	0.0400	1.800	0.00728214
3.000	1.400	0.0400	1.900	0.01528216
3.000	1.400	0.0400	2.000	0.02778723

3.000	1.400	0.0450	1.600	0.00507035
3.000	1.400	0.0450	1.700	0.00368022
3.000	1.400	0.0450	1.800	0.00674914
3.000	1.400	0.0450	1.900	0.01427369
3.000	1.400	0.0450	2.000	0.02625462
3.000	1.400	0.0500	1.600	0.00537358
3.000	1.400	0.0500	1.700	0.00362671
3.000	1.400	0.0500	1.800	0.00628664
3.000	1.400	0.0500	1.900	0.01335856
3.000	1.400	0.0500	2.000	0.02484273
3.000	1.400	0.0550	1.600	0.00570479
3.000	1.400	0.0550	1.700	0.00361421
3.000	1.400	0.0550	1.800	0.00589150
3.000	1.400	0.0550	1.900	0.01253658
3.000	1.400	0.0550	2.000	0.02355389
3.200	1.100	0.0300	1.600	0.01008100
3.200	1.100	0.0300	1.700	0.00490327
3.200	1.100	0.0300	1.800	0.00369826
3.200	1.100	0.0300	1.900	0.00646593
3.200	1.100	0.0300	2.000	0.01320622
3.200	1.100	0.0350	1.600	0.01085435
3.200	1.100	0.0350	1.700	0.00527773
3.200	1.100	0.0350	1.800	0.00361391
3.200	1.100	0.0350	1.900	0.00587188
3.200	1.100	0.0350	2.000	0.01205264
3.200	1.100	0.0400	1.600	0.01164859
3.200	1.100	0.0400	1.700	0.00569498
3.200	1.100	0.0400	1.800	0.00360777
3.200	1.100	0.0400	1.900	0.00538986
3.200	1.100	0.0400	2.000	0.01104308
3.200	1.100	0.0450	1.600	0.01245454
3.200	1.100	0.0450	1.700	0.00614638
3.200	1.100	0.0450	1.800	0.00366479
3.200	1.100	0.0450	1.900	0.00500480
3.200	1.100	0.0450	2.000	0.01016850
3.200	1.100	0.0500	1.600	0.01326687
3.200	1.100	0.0500	1.700	0.00663285
3.200	1.100	0.0500	1.800	0.00377819
3.200	1.100	0.0500	1.900	0.00470427
3.200	1.100	0.0500	2.000	0.00940662
3.200	1.100	0.0550	1.600	0.01407949
3.200	1.100	0.0550	1.700	0.00714192
3.200	1.100	0.0550	1.800	0.00394078
3.200	1.100	0.0550	1.900	0.00447606
3.200	1.100	0.0550	2.000	0.00874774
3.200	1.200	0.0300	1.600	0.00970399
3.200	1.200	0.0300	1.700	0.00473731
3.200	1.200	0.0300	1.800	0.00377429
3.200	1.200	0.0300	1.900	0.00681074

3.200	1.200	0.0300	2.000	0.01385377
3.200	1.200	0.0350	1.600	0.01040198
3.200	1.200	0.0350	1.700	0.00505354
3.200	1.200	0.0350	1.800	0.00365265
3.200	1.200	0.0350	1.900	0.00620475
3.200	1.200	0.0350	2.000	0.01270423
3.200	1.200	0.0400	1.600	0.01112039
3.200	1.200	0.0400	1.700	0.00541050
3.200	1.200	0.0400	1.800	0.00360304
3.200	1.200	0.0400	1.900	0.00570091
3.200	1.200	0.0400	2.000	0.01169882
3.200	1.200	0.0450	1.600	0.01185171
3.200	1.200	0.0450	1.700	0.00580680
3.200	1.200	0.0450	1.800	0.00361739
3.200	1.200	0.0450	1.900	0.00528590
3.200	1.200	0.0450	2.000	0.01080965
3.200	1.200	0.0500	1.600	0.01258893
3.200	1.200	0.0500	1.700	0.00622823
3.200	1.200	0.0500	1.800	0.00368097
3.200	1.200	0.0500	1.900	0.00494838
3.200	1.200	0.0500	2.000	0.01003250
3.200	1.200	0.0550	1.600	0.01333579
3.200	1.200	0.0550	1.700	0.00667184
3.200	1.200	0.0550	1.800	0.00379137
3.200	1.200	0.0550	1.900	0.00468251
3.200	1.200	0.0550	2.000	0.00934754
3.200	1.300	0.0300	1.600	0.00938482
3.200	1.300	0.0300	1.700	0.00460831
3.200	1.300	0.0300	1.800	0.00385781
3.200	1.300	0.0300	1.900	0.00713348
3.200	1.300	0.0300	2.000	0.01443192
3.200	1.300	0.0350	1.600	0.01002380
3.200	1.300	0.0350	1.700	0.00487478
3.200	1.300	0.0350	1.800	0.00370744
3.200	1.300	0.0350	1.900	0.00651858
3.200	1.300	0.0350	2.000	0.01330502
3.200	1.300	0.0400	1.600	0.01067747
3.200	1.300	0.0400	1.700	0.00518695
3.200	1.300	0.0400	1.800	0.00362587
3.200	1.300	0.0400	1.900	0.00599832
3.200	1.300	0.0400	2.000	0.01230253
3.200	1.300	0.0450	1.600	0.01134296
3.200	1.300	0.0450	1.700	0.00552875
3.200	1.300	0.0450	1.800	0.00360081
3.200	1.300	0.0450	1.900	0.00556423
3.200	1.300	0.0450	2.000	0.01141365
3.200	1.300	0.0500	1.600	0.01202238
3.200	1.300	0.0500	1.700	0.00590018
3.200	1.300	0.0500	1.800	0.00362758

3.200	1.300	0.0500	1.900	0.00520057
3.200	1.300	0.0500	2.000	0.01062316
3.200	1.300	0.0550	1.600	0.01270422
3.200	1.300	0.0550	1.700	0.00629326
3.200	1.300	0.0550	1.800	0.00369393
3.200	1.300	0.0550	1.900	0.00490316
3.200	1.300	0.0550	2.000	0.00992088
3.200	1.400	0.0300	1.600	0.00911696
3.200	1.400	0.0300	1.700	0.00450703
3.200	1.400	0.0300	1.800	0.00394515
3.200	1.400	0.0300	1.900	0.00742716
3.200	1.400	0.0300	2.000	0.01495639
3.200	1.400	0.0350	1.600	0.00970064
3.200	1.400	0.0350	1.700	0.00473522
3.200	1.400	0.0350	1.800	0.00377313
3.200	1.400	0.0350	1.900	0.00681165
3.200	1.400	0.0350	2.000	0.01385071
3.200	1.400	0.0400	1.600	0.01029959
3.200	1.400	0.0400	1.700	0.00500474
3.200	1.400	0.0400	1.800	0.00366678
3.200	1.400	0.0400	1.900	0.00628321
3.200	1.400	0.0400	2.000	0.01285993
3.200	1.400	0.0450	1.600	0.01091432
3.200	1.400	0.0450	1.700	0.00530385
3.200	1.400	0.0450	1.800	0.00361063
3.200	1.400	0.0450	1.900	0.00583418
3.200	1.400	0.0450	2.000	0.01197263
3.200	1.400	0.0500	1.600	0.01153638
3.200	1.400	0.0500	1.700	0.00563202
3.200	1.400	0.0500	1.800	0.00360393
3.200	1.400	0.0500	1.900	0.00545201
3.200	1.400	0.0500	2.000	0.01117614
3.200	1.400	0.0550	1.600	0.01216677
3.200	1.400	0.0550	1.700	0.00598024
3.200	1.400	0.0550	1.800	0.00363907
3.200	1.400	0.0550	1.900	0.00513201
3.200	1.400	0.0550	2.000	0.01046699
3.400	1.100	0.0300	1.600	0.01858374
3.400	1.100	0.0300	1.700	0.01007909
3.400	1.100	0.0300	1.800	0.00509526
3.400	1.100	0.0300	1.900	0.00363375
3.400	1.100	0.0300	2.000	0.00568977
3.400	1.100	0.0350	1.600	0.01968828
3.400	1.100	0.0350	1.700	0.01085552
3.400	1.100	0.0350	1.800	0.00549479
3.400	1.100	0.0350	1.900	0.00360601
3.400	1.100	0.0350	2.000	0.00518911
3.400	1.100	0.0400	1.600	0.02078896
3.400	1.100	0.0400	1.700	0.01165192

3.400	1.100	0.0400	1.800	0.00593912
3.400	1.100	0.0400	1.900	0.00365253
3.400	1.100	0.0400	2.000	0.00479414
3.400	1.100	0.0450	1.600	0.02188329
3.400	1.100	0.0450	1.700	0.01245434
3.400	1.100	0.0450	1.800	0.00641271
3.400	1.100	0.0450	1.900	0.00375794
3.400	1.100	0.0450	2.000	0.00449136
3.400	1.100	0.0500	1.600	0.02295627
3.400	1.100	0.0500	1.700	0.01326470
3.400	1.100	0.0500	1.800	0.00691880
3.400	1.100	0.0500	1.900	0.00391795
3.400	1.100	0.0500	2.000	0.00426683
3.400	1.100	0.0550	1.600	0.02401531
3.400	1.100	0.0550	1.700	0.01407819
3.400	1.100	0.0550	1.800	0.00744600
3.400	1.100	0.0550	1.900	0.00412311
3.400	1.100	0.0550	2.000	0.00410948
3.400	1.200	0.0300	1.600	0.01802610
3.400	1.200	0.0300	1.800	0.00491840
3.400	1.200	0.0300	1.900	0.00368063
3.400	1.200	0.0300	2.000	0.00598375
3.400	1.200	0.0350	1.600	0.01904264
3.400	1.200	0.0350	1.700	0.01040311
3.400	1.200	0.0350	1.800	0.00525867
3.400	1.200	0.0350	1.900	0.00361329
3.400	1.200	0.0350	2.000	0.00546691
3.400	1.200	0.0400	1.600	0.02005522
3.400	1.200	0.0400	1.700	0.01112034
3.400	1.200	0.0400	1.800	0.00563634
3.400	1.200	0.0400	1.900	0.00361392
3.400	1.200	0.0400	2.000	0.00504723
3.400	1.200	0.0450	1.600	0.02106131
3.400	1.200	0.0450	1.700	0.01185192
3.400	1.200	0.0450	1.800	0.00605534
3.400	1.200	0.0450	1.900	0.00367448
3.400	1.200	0.0450	2.000	0.00471036
3.400	1.200	0.0500	1.600	0.02206052
3.400	1.200	0.0500	1.700	0.01259275
3.400	1.200	0.0500	1.800	0.00649502
3.400	1.200	0.0500	1.900	0.00378339
3.400	1.200	0.0500	2.000	0.00444809
3.400	1.200	0.0550	1.600	0.02304362
3.400	1.200	0.0550	1.700	0.01333050
3.400	1.200	0.0550	1.800	0.00696051
3.400	1.200	0.0550	1.900	0.00393420
3.400	1.200	0.0550	2.000	0.00425031
3.400	1.300	0.0300	1.600	0.01755423
3.400	1.300	0.0300	1.700	0.00938493

3.400	1.300	0.0300	1.800	0.00477814
3.400	1.300	0.0300	1.900	0.00373668
3.400	1.300	0.0300	2.000	0.00626285
3.400	1.300	0.0350	1.600	0.01849726
3.400	1.300	0.0350	1.700	0.01002481
3.400	1.300	0.0350	1.800	0.00506859
3.400	1.300	0.0350	1.900	0.00363885
3.400	1.300	0.0350	2.000	0.00573277
3.400	1.300	0.0400	1.600	0.01943328
3.400	1.300	0.0400	1.700	0.01067650
3.400	1.300	0.0400	1.800	0.00540012
3.400	1.300	0.0400	1.900	0.00360497
3.400	1.300	0.0400	2.000	0.00529540
3.400	1.300	0.0450	1.600	0.02036884
3.400	1.300	0.0450	1.700	0.01134149
3.400	1.300	0.0450	1.800	0.00576345
3.400	1.300	0.0450	1.900	0.00362564
3.400	1.300	0.0450	2.000	0.00493483
3.400	1.300	0.0500	1.600	0.02129622
3.400	1.300	0.0500	1.700	0.01202167
3.400	1.300	0.0500	1.800	0.00615471
3.400	1.300	0.0500	1.900	0.00369272
3.400	1.300	0.0500	2.000	0.00464392
3.400	1.300	0.0550	1.600	0.02221354
3.400	1.300	0.0550	1.700	0.01270636
3.400	1.300	0.0550	1.800	0.00656893
3.400	1.300	0.0550	1.900	0.00380195
3.400	1.300	0.0550	2.000	0.00441329
3.400	1.400	0.0300	1.600	0.01716045
3.400	1.400	0.0300	1.700	0.00912247
3.400	1.400	0.0300	1.800	0.00466944
3.400	1.400	0.0300	1.900	0.00380148
3.400	1.400	0.0300	2.000	0.00651874
3.400	1.400	0.0350	1.600	0.01803159
3.400	1.400	0.0350	1.700	0.00970281
3.400	1.400	0.0350	1.800	0.00491875
3.400	1.400	0.0350	1.900	0.00368083
3.400	1.400	0.0350	2.000	0.00598657
3.400	1.400	0.0400	1.600	0.01889900
3.400	1.400	0.0400	1.700	0.01029768
3.400	1.400	0.0400	1.800	0.00520506
3.400	1.400	0.0400	1.900	0.00361830
3.400	1.400	0.0400	2.000	0.00553501
3.400	1.400	0.0450	1.600	0.01977008
3.400	1.400	0.0450	1.700	0.01091610
3.400	1.400	0.0450	1.800	0.00552620
3.400	1.400	0.0450	1.900	0.00360784
3.400	1.400	0.0450	2.000	0.00515859
3.400	1.400	0.0500	1.600	0.02063571

3.400	1.400	0.0500	1.700	0.01153650
3.400	1.400	0.0500	1.800	0.00587163
3.400	1.400	0.0500	1.900	0.00364120
3.400	1.400	0.0500	2.000	0.00484528
3.400	1.400	0.0550	1.600	0.02149522
3.400	1.400	0.0550	1.700	0.01216671
3.400	1.400	0.0550	1.800	0.00623979
3.400	1.400	0.0550	1.900	0.00371516
3.400	1.400	0.0550	2.000	0.00459010
3.600	1.100	0.0300	1.600	0.02909265
3.600	1.100	0.0300	1.700	0.01802009
3.600	1.100	0.0300	1.800	0.01007832
3.600	1.100	0.0300	1.900	0.00528420
3.600	1.100	0.0300	2.000	0.00362413
3.600	1.100	0.0350	1.600	0.03046206
3.600	1.100	0.0350	1.700	0.01910636
3.600	1.100	0.0350	1.800	0.01085423
3.600	1.100	0.0350	1.900	0.00570087
3.600	1.100	0.0350	2.000	0.00364256
3.600	1.100	0.0400	1.600	0.03179437
3.600	1.100	0.0400	1.700	0.02019189
3.600	1.100	0.0400	1.800	0.01164839
3.600	1.100	0.0400	1.900	0.00616414
3.600	1.100	0.0400	2.000	0.00373551
3.600	1.100	0.0450	1.600	0.03310482
3.600	1.100	0.0450	1.700	0.02127362
3.600	1.100	0.0450	1.800	0.01245466
3.600	1.100	0.0450	1.900	0.00666000
3.600	1.100	0.0450	2.000	0.00388648
3.600	1.100	0.0500	1.600	0.03438200
3.600	1.100	0.0500	1.700	0.02233225
3.600	1.100	0.0500	1.800	0.01326395
3.600	1.100	0.0500	1.900	0.00718172
3.600	1.100	0.0500	2.000	0.00408573
3.600	1.100	0.0550	1.600	0.03563022
3.600	1.100	0.0550	1.700	0.02337878
3.600	1.100	0.0550	1.800	0.01407568
3.600	1.100	0.0550	1.900	0.00772607
3.600	1.100	0.0550	2.000	0.00432752
3.600	1.200	0.0300	1.600	0.02840587
3.600	1.200	0.0300	1.700	0.01746855
3.600	1.200	0.0300	1.800	0.00970277
3.600	1.200	0.0300	1.900	0.00508963
3.600	1.200	0.0300	2.000	0.00364141
3.600	1.200	0.0350	1.600	0.02966482
3.600	1.200	0.0350	1.700	0.01847036
3.600	1.200	0.0350	1.800	0.01039889
3.600	1.200	0.0350	1.900	0.00545104
3.600	1.200	0.0350	2.000	0.00362249

3.600	1.200	0.0400	1.600	0.03090267
3.600	1.200	0.0400	1.700	0.01947152
3.600	1.200	0.0400	1.800	0.01111947
3.600	1.200	0.0400	1.900	0.00585266
3.600	1.200	0.0400	2.000	0.00366774
3.600	1.200	0.0450	1.600	0.03212881
3.600	1.200	0.0450	1.700	0.02046437
3.600	1.200	0.0450	1.800	0.01184703
3.600	1.200	0.0450	1.900	0.00628470
3.600	1.200	0.0450	2.000	0.00376929
3.600	1.200	0.0500	1.600	0.03332156
3.600	1.200	0.0500	1.700	0.02144792
3.600	1.200	0.0500	1.800	0.01258915
3.600	1.200	0.0500	1.900	0.00674538
3.600	1.200	0.0500	2.000	0.00391601
3.600	1.200	0.0550	1.600	0.03449333
3.600	1.200	0.0550	1.700	0.02241807
3.600	1.200	0.0550	1.800	0.01333163
3.600	1.200	0.0550	1.900	0.00722914
3.600	1.200	0.0550	2.000	0.00410599
3.600	1.300	0.0300	1.600	0.02781858
3.600	1.300	0.0300	1.700	0.01700741
3.600	1.300	0.0300	1.800	0.00938664
3.600	1.300	0.0300	1.900	0.00493923
3.600	1.300	0.0300	2.000	0.00367709
3.600	1.300	0.0350	1.600	0.02898651
3.600	1.300	0.0350	1.700	0.01793440
3.600	1.300	0.0350	1.800	0.01002298
3.600	1.300	0.0350	1.900	0.00525146
3.600	1.300	0.0350	2.000	0.00362516
3.600	1.300	0.0400	1.600	0.03014279
3.600	1.300	0.0400	1.700	0.01885968
3.600	1.300	0.0400	1.800	0.01067707
3.600	1.300	0.0400	1.900	0.00560365
3.600	1.300	0.0400	2.000	0.00363303
3.600	1.300	0.0450	1.600	0.03128381
3.600	1.300	0.0450	1.700	0.01977649
3.600	1.300	0.0450	1.800	0.01134348
3.600	1.300	0.0450	1.900	0.00598121
3.600	1.300	0.0450	2.000	0.00369335
3.600	1.300	0.0500	1.600	0.03240636
3.600	1.300	0.0500	1.700	0.02068930
3.600	1.300	0.0500	1.800	0.01201790
3.600	1.300	0.0500	1.900	0.00638867
3.600	1.300	0.0500	2.000	0.00379743
3.600	1.300	0.0550	1.600	0.03349760
3.600	1.300	0.0550	1.700	0.02160049
3.600	1.300	0.0550	1.800	0.01270572
3.600	1.300	0.0550	1.900	0.00681711

3.600	1.300	0.0550	2.000	0.00394552
3.600	1.400	0.0300	1.600	0.02730667
3.600	1.400	0.0300	1.700	0.01661961
3.600	1.400	0.0300	1.800	0.00912318
3.600	1.400	0.0300	1.900	0.00482052
3.600	1.400	0.0300	2.000	0.00371931
3.600	1.400	0.0350	1.600	0.02840685
3.600	1.400	0.0350	1.700	0.01747013
3.600	1.400	0.0350	1.800	0.00970291
3.600	1.400	0.0350	1.900	0.00509283
3.600	1.400	0.0350	2.000	0.00364319
3.600	1.400	0.0400	1.600	0.02949079
3.600	1.400	0.0400	1.700	0.01832958
3.600	1.400	0.0400	1.800	0.01029790
3.600	1.400	0.0400	1.900	0.00539631
3.600	1.400	0.0400	2.000	0.00362181
3.600	1.400	0.0450	1.600	0.03055535
3.600	1.400	0.0450	1.700	0.01918745
3.600	1.400	0.0450	1.800	0.01091371
3.600	1.400	0.0450	1.900	0.00573413
3.600	1.400	0.0450	2.000	0.00364871
3.600	1.400	0.0500	1.600	0.03160965
3.600	1.400	0.0500	1.700	0.02004352
3.600	1.400	0.0500	1.800	0.01153501
3.600	1.400	0.0500	1.900	0.00609546
3.600	1.400	0.0500	2.000	0.00371875
3.600	1.400	0.0550	1.600	0.03263643
3.600	1.400	0.0550	1.700	0.02088471
3.600	1.400	0.0550	1.800	0.01216595
3.600	1.400	0.0550	1.900	0.00647994
3.600	1.400	0.0550	2.000	0.00382594

Les meilleurs paramètres sont

$q = 3.2$

$r = 1.3$

$\gamma = 0.045$

$\beta_p = 1.8$

Ecart mini entre théorie et mesure : 0.003600805145194

Détermination de la constante β_p pour la trémie numéro 5

($\alpha = 15^\circ$ - parois de type I - $\gamma = \gamma_p$)

Cotes des profils de vitesse : 20 cm et 35 cm

E:\THESE.DW\MANIP\M5-20-M.MES

E:\THESE.DW\MANIP\M5-35-M.MES

q	r	γ	β_p	ecart
3.200	1.300	0.0450	5.400	0.02172950
3.200	1.300	0.0450	5.500	0.01985764
3.200	1.300	0.0450	5.600	0.01807694
3.200	1.300	0.0450	5.700	0.01638894
3.200	1.300	0.0450	5.800	0.01478906
3.200	1.300	0.0450	5.900	0.01328155
3.200	1.300	0.0450	6.000	0.01186506
3.200	1.300	0.0450	6.100	0.01054001
3.200	1.300	0.0450	6.200	0.00930569
3.200	1.300	0.0450	6.300	0.00816243
3.200	1.300	0.0450	6.400	0.00711024
3.200	1.300	0.0450	6.500	0.00615017
3.200	1.300	0.0450	6.600	0.00527940
3.200	1.300	0.0450	6.700	0.00450039
3.200	1.300	0.0450	6.800	0.00381253
3.200	1.300	0.0450	6.900	0.00321591
3.200	1.300	0.0450	7.000	0.00271009
3.200	1.300	0.0450	7.100	0.00229546
3.200	1.300	0.0450	7.200	0.00197177
3.200	1.300	0.0450	7.300	0.00173931
3.200	1.300	0.0450	7.400	0.00159795
3.200	1.300	0.0450	7.500	0.00154744
3.200	1.300	0.0450	7.600	0.00158823
3.200	1.300	0.0450	7.700	0.00172001
3.200	1.300	0.0450	7.800	0.00194268
3.200	1.300	0.0450	7.900	0.00225671
3.200	1.300	0.0450	8.000	0.00266152

Les meilleurs paramètres sont

q = 3.2

r = 1.3

$\gamma = 0.045$

$\beta_p = 7.5$

Ecart mini entre théorie et mesure : 0.001547439246829

Détermination des constantes γ_p et β_p décrivant
l'interaction grain-paroi pour la trémie numéro 13
($\alpha = 6^\circ$ - Parois de type III)

Cotes des profils de vitesses: 20 cm et 35 cm

E:\THESE.DW\MANIP\M13-20-L.MES E:\THESE.DW\MANIP\M13-35-L.MES

γ_p	β_p	ecart
0.0450	0.400	0.04198591
0.0450	0.500	0.01876806
0.0450	0.600	0.01274885
0.0450	0.700	0.02393943
0.0450	0.800	0.05232782
0.0500	0.400	0.04175629
0.0500	0.500	0.01862091
0.0500	0.600	0.01274729
0.0500	0.700	0.02413122
0.0500	0.800	0.05278237
0.0550	0.400	0.04152672
0.0550	0.500	0.01847758
0.0550	0.600	0.01274621
0.0550	0.700	0.02433501
0.0550	0.800	0.05323721
0.0600	0.400	0.04129517
0.0600	0.500	0.01833278
0.0600	0.600	0.01274752
0.0600	0.700	0.02454023
0.0600	0.800	0.05370005

Les meilleurs paramètres sont

$q = 3.2$

$r = 1.3$

$\gamma = 0.045$

$\gamma_p = 0.055$

$\beta_p = 0.6$

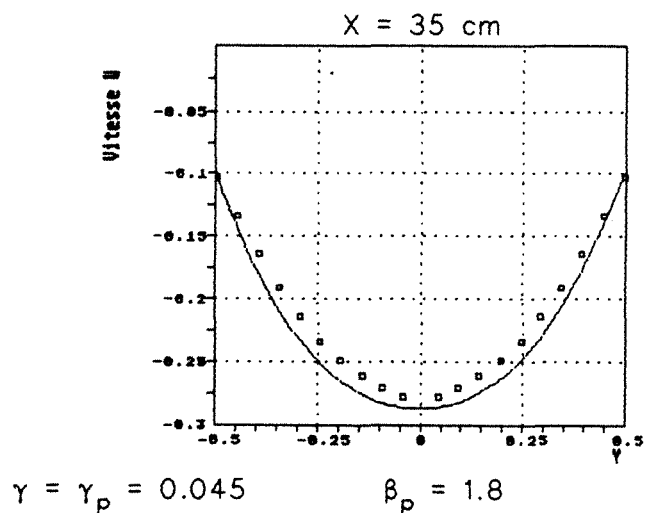
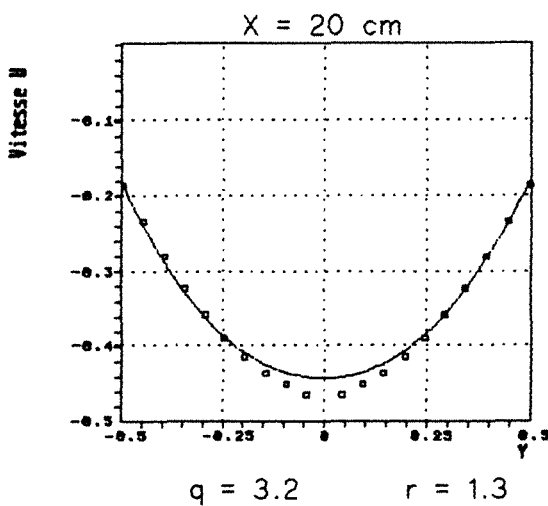
Ecart mini entre théorie et mesure : 0.01274620640815

Superposition des vitesses verticales théoriques avec les vitesses verticales expérimentales

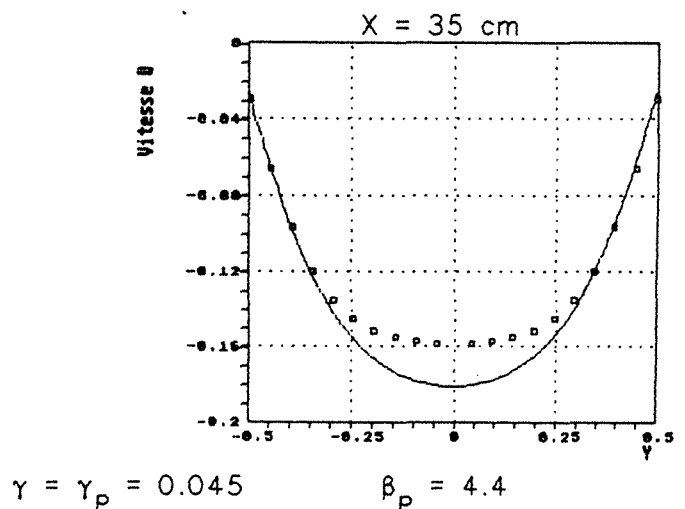
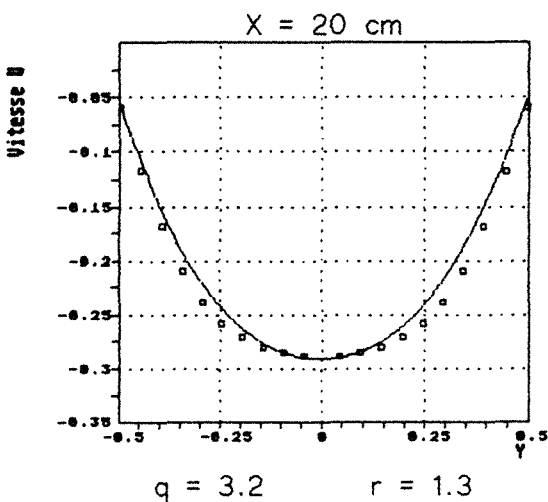
Sur les graphes suivants les courbes en trait continue représentent les champs de vitesses adimensionnelles théoriques, alors que les courbes schématisées par les points représentent l'approximation des vitesses adimensionnelles verticales expérimentales à l'aide de la tangente hyperbolique.

Courbes pour la détermination des
constantes r , q , γ , β_p pour les petits pois secs, parois de type I

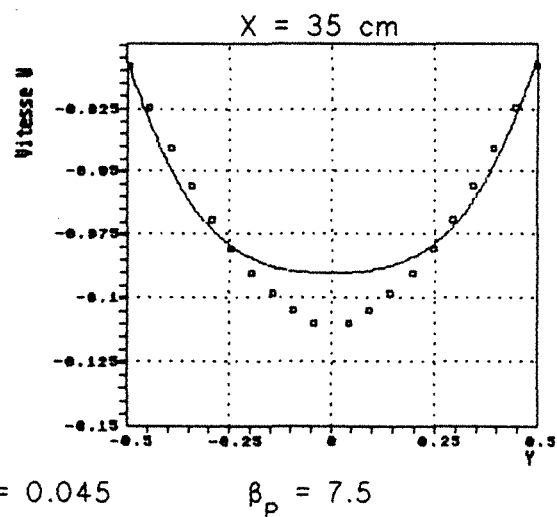
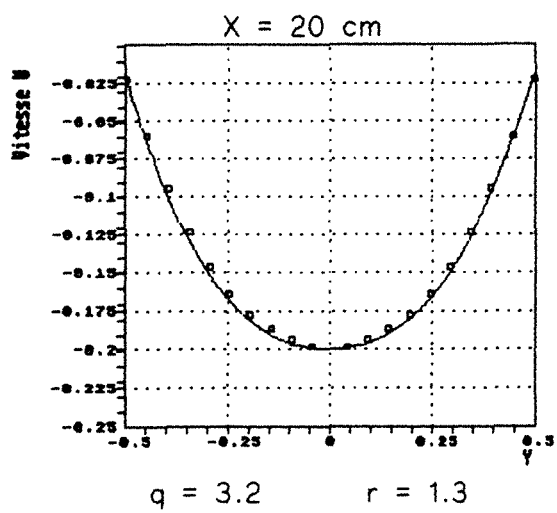
Trémie n°3 : $\alpha = 6^\circ$



Trémie n°4 : $\alpha = 10^\circ$

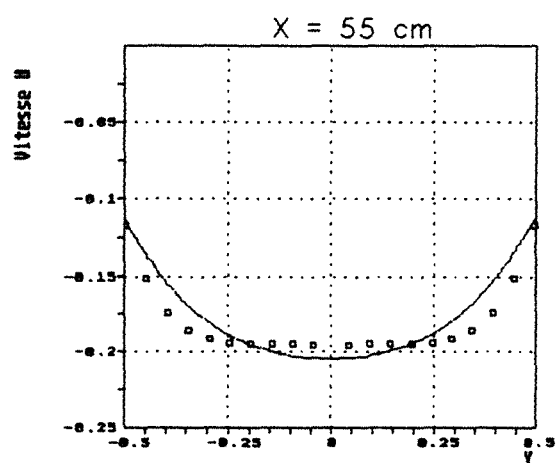
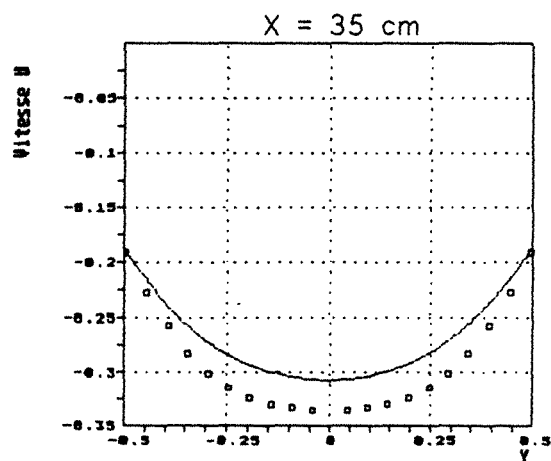
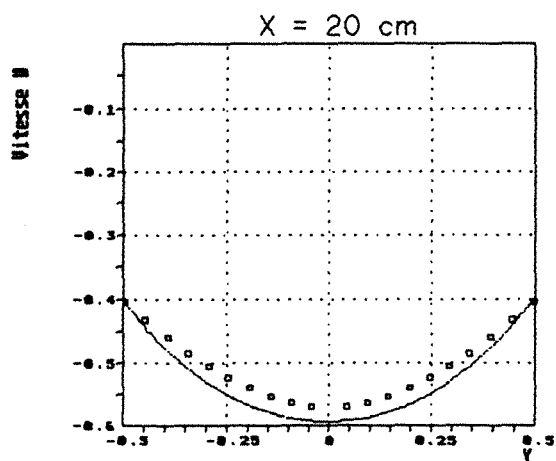


Trémie n°5 : $\alpha = 15^\circ$



Courbes pour la détermination des
constantes γ_p et β_p décrivant l'interaction entre
les petits pois secs et les parois des trémies

Parois lisses de type II, trémie numéro 13 : $\alpha = 6^\circ$



ANNEXE 4

**Dépouillement des mesures expérimentales
pour la détermination
des champs de vitesses expérimentales**

Dans cette annexe 3 nous présentons les différentes étapes qui nous ont permis d'arriver à tracer les champs de vitesses expérimentales que l'on donne dans les annexes 1 et 2 ou dans les autres parties de ce mémoire.

Sauvegarde des trajectoires des particules

La première étape de réalisation des profils de vitesses expérimentales consiste à créer des fichiers contenant les points x, y, t caractérisant la trajectoire des particules obtenues par dépouillement image par image des films vidéos. Pour chaque profil de vitesse est créé un fichier de donnée. La structure des noms de fichiers est la suivante :

Mn°manip-cote du profil-type de paroi

L'extension du nom des fichiers est "MES"

Un exemple de fichier est donné ci-dessous. L'entête du fichier contient les caractéristiques géométriques de la trémie, puis suit la partie principale du fichier contenant les caractéristiques des trajectoires (entre 25 et 35) des particules qui serviront au calcul du profil de vitesses concerné par ce fichier.

La création des fichiers *.MES est assurée par le logiciel MESURE. PRG.

Fichier M3-20-M.MES (manip n°3, cote du profil 20 cm, Paroi de type I)

6°	N°3	Petits Pois	M	4 cm	<i>référence de l'essai</i>
2					<i>demi-largeur de la trémie pour X=0</i>
8.3					<i>demi-largeur de la trémie pour X=60</i>
1					<i>trajectoire numéro 1</i>
23.5		1.5		0	
21.8		1.5		8	
19.9		1.5		16	
17.3		1.5		24	
FIN					
2					<i>trajectoire numéro 2</i>
24.2		4.2		0	
23.7		4.1		8	<i>liste des points x,y,t</i>
22.7		4		16	
21.9		4		24	<i>caractérisant la trajectoire</i>
20.5		3.7		32	
19.6		3.6		40	<i>de la particule</i>
18.5		3.4		48	
17.1		3.2		56	
FIN					
3					<i>trajectoire numéro 3</i>
24.2		2.2		0	
22.1		2.3		8	
20.4		2.3		16	
18.2		2.1		24	
16.4		2		32	

FIN

.

26

22.5	3.9	0
------	-----	---

21.6	3.7	8
------	-----	---

20.8	3.2	16
------	-----	----

19.7	3	24
------	---	----

17.9	3	32
------	---	----

FIN

27

24.7	1.3	0
------	-----	---

22.2	1.5	8
------	-----	---

20	1.6	16
----	-----	----

18.4	1.6	24
------	-----	----

15.7	1.6	32
------	-----	----

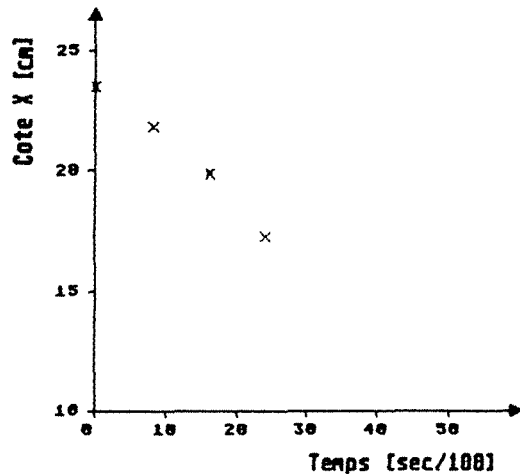
FIN

fin de fichier

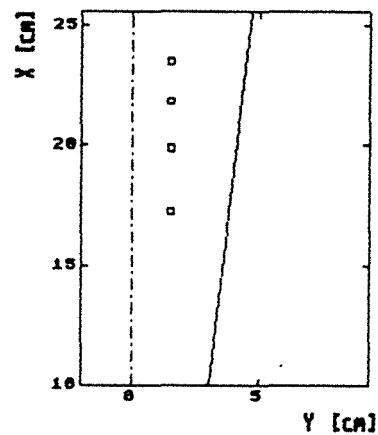
La vitesse d'écoulement des particules

Les fichiers "mesures" *.MES vont maintenant nous servir à travers le logiciel VITESSE.PRG à déterminer la vitesse verticale instantanée des particules dont la trajectoire est stockée dans le fichier "mesure". Pour chaque particule VITESSE.PRG permet de tracer la trajectoire des particules et la cote X en fonction de du temps t, comme on le montre sur le schéma suivant.

Graphes tracé avec la mesure n°1 du fichier M3-20-M.MES



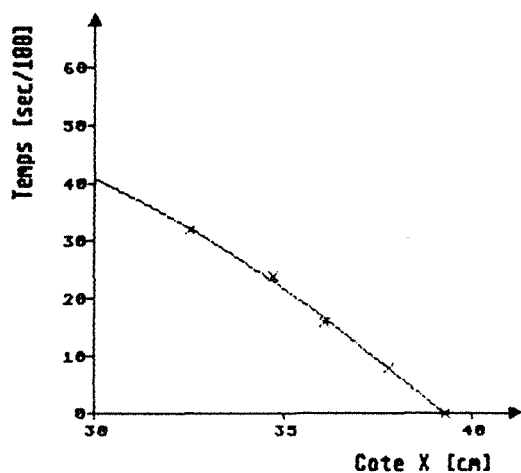
Cote X en fonction du temps



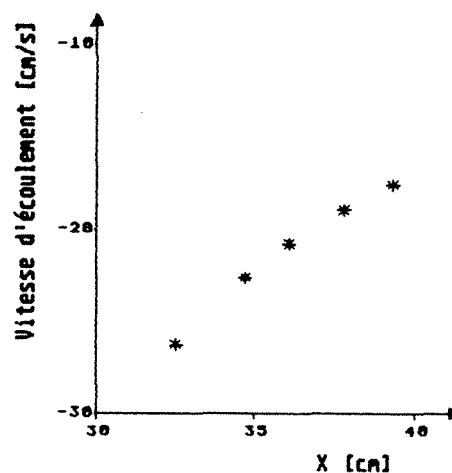
Trajectoire de la particule
 $\Delta t = 0.08s$

Sur les figures suivantes le logiciel VITESSE.PRG trace le temps t en fonction de la cote X. Les points expérimentaux sont approchés polynomialement pour obtenir la fonction $t=g(x)$. L'inverse de la dérivée de la fonction $g(x)$ donne la vitesse verticale instantanée de la particule en fonction de X.

Graphes tracé avec la mesure n°1 du fichier M3-20-M.MES



Approximation polynomiale de degré 2. $t = g(x)$



Vitesse instantanée en fonction de la cote X

Le polynôme $t = g(x)$ calculé pour chaque trajectoire de particule est

alors sauvegardé dans un fichier dont on donne un exemple ci-dessous. Le nom du fichier reste toujours identique au nom précédent du fichier "mesure" mais la nouvelle extension est VIT.

Fichier M3-20-M.VIT (manip n°3, cote du profil 20 cm, Paroi de type I)

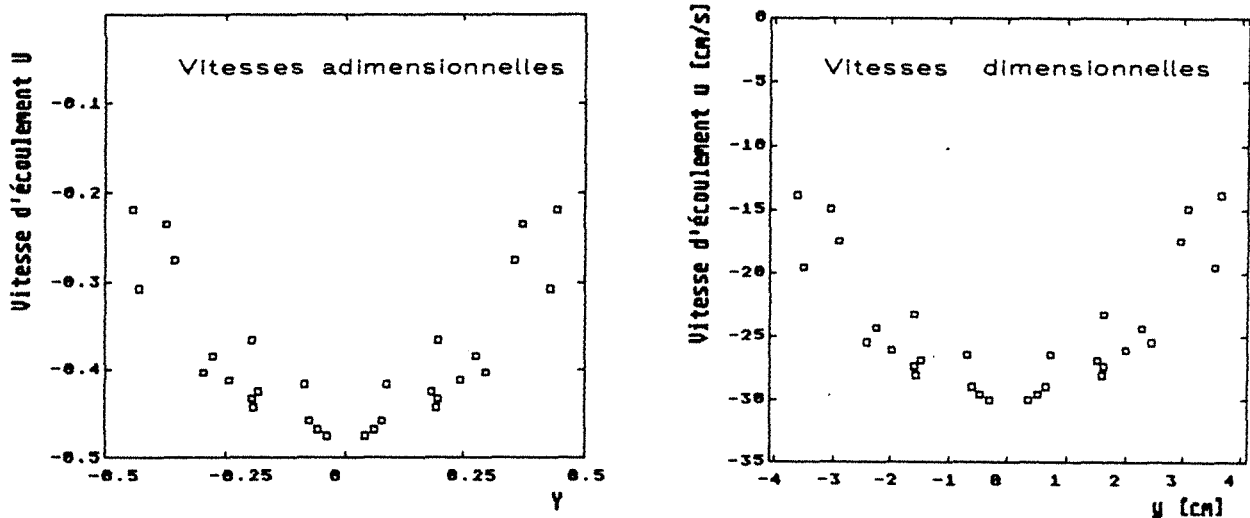
1	<i>n° de la particule</i>
2	<i>degré du polynôme</i>
4.627782939762	<i>coefficients du polynôme $t=g(x)$</i>
-0.4172718869074	
2	
2	
5.130808206071	
-0.6177218464288	
3	<i>n° de la particule</i>
2	<i>degré du polynôme</i>
-4.408866868966	<i>coefficients du polynôme $t=g(x)$</i>
0.01535722003986	
.....	
26	
2	
27.14451623277	
-1.693596719166	
27	<i>n° de la particule</i>
2	<i>degré du polynôme</i>
-3.837190233006	<i>coefficients du polynôme $t=g(x)$</i>
0.009253380471114	
	<i>fin de fichier</i>

Profils de vitesses verticales

Pour calculer et tracer les profils de vitesses nous avons réalisé deux programmes, le premier PROFIL.PRГ trace les profils adimensionnellement et le second PROFIL-U.PRГ les trace dimensionnellement.

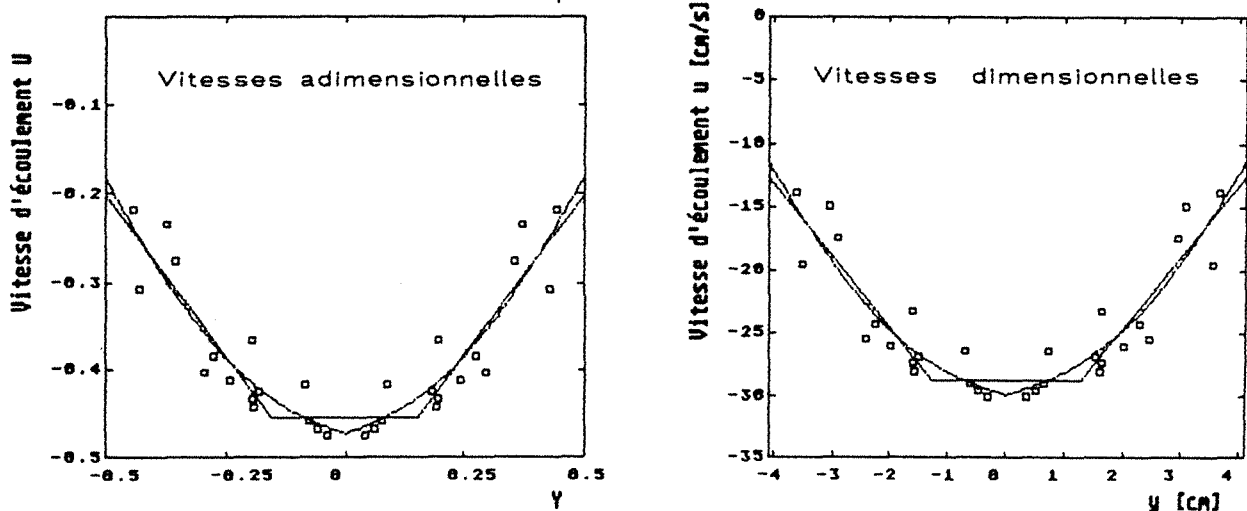
Pour déterminer les champs de vitesses les deux logiciels lisent les fichiers *.MES et *.VIT dans lesquels sont sauvegardées les données permettant de tracer le profil de vitesses désiré. A l'aide des polynômes $t=g(x)$ enregistrés dans les fichiers "vitesse" on calcul la vitesse verticale instantanée à la cote ou l'on trace le profil de vitesses, c'est à dire 20cm, 35cm ou 55 centimètres. Avec les caractéristiques x,y,t contenues dans les fichiers "mesure" on calcul par régression linéaire l'abscisse Y de la particule à la cote X du profil de vitesse. on peut ainsi tracer à l'aide des deux fichiers donnés en exemple les profils de vitesses suivants à la cote de 20cm.

Cote du profil de vitesse : 20 cm



Ces points expérimentaux sont ensuite approchés dans les logiciels par les deux méthodes proposées dans [71]. Il s'agit d'une approximation linéaire et d'une approximation non linéaire qui utilise la tangente hyperbolique. Les profils de vitesses ci-dessus sont approchés ci-dessous par ces deux méthodes.

Cote du profil de vitesse : 20 cm



Les caractéristiques u_p , u_b et ξ du profil de vitesses adimensionnelles sont sauvegardées dans un fichier dont l'extension est la suivante :

P cote du profil de vitesses

Le fichier suivant contient les caractéristiques du profil adimensionnel ci-dessus.

Fichier M3-20-M.P20 (manip n°3, cote du profil 20 cm, Paroi de type I)

-0.2003324626477,	-0.4535275030012,	0.345	u_p	u_b	ξ	<i>modèle linéaire</i>
-0.1813785087225,	-0.5018684360314,	0.33	u_p	u_b	ξ	<i>modèle non linéaire</i>

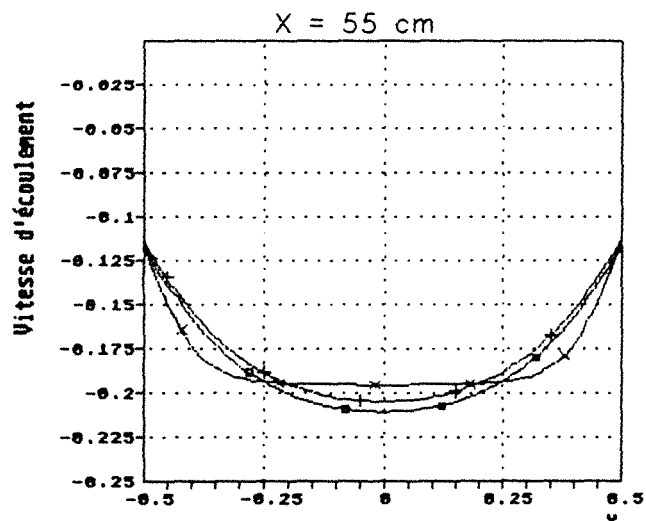
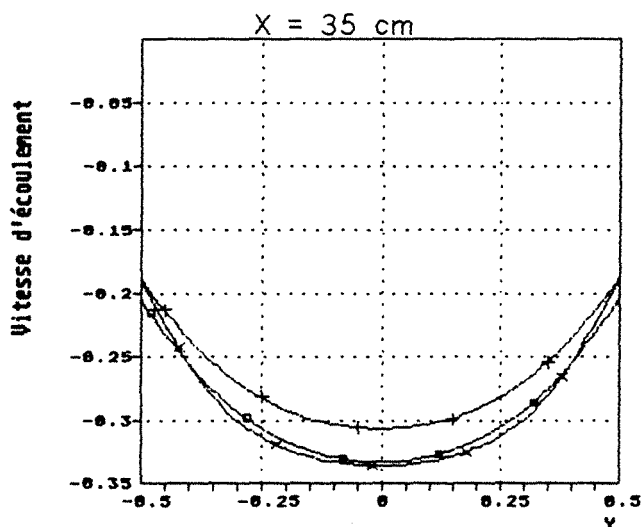
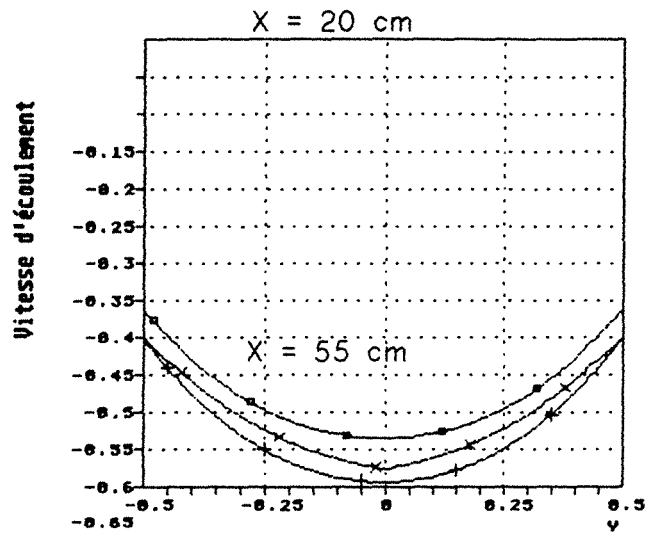
Les fichiers *.P* contenant les caractéristiques des profils de vitesses sont ensuite utilisés par un grand nombre d'autres programmes d'exploitation des mesures.

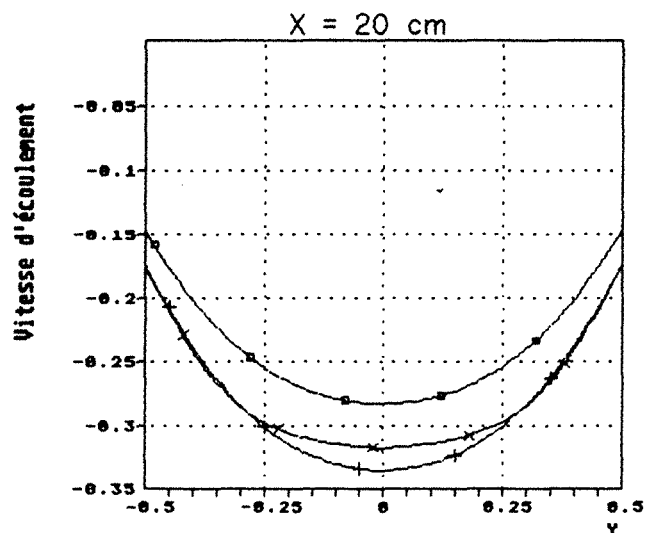
ANNEXE 5

Superposition des vitesses verticales adimensionnelles

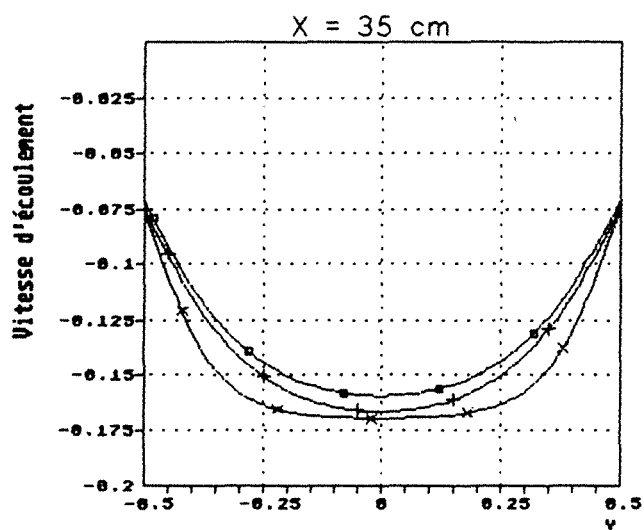
- calculées à partir de la vitesse en paroi**
- calculées à partir du débit masique**
- expérimentales**

Parois de type II (bois lisse)

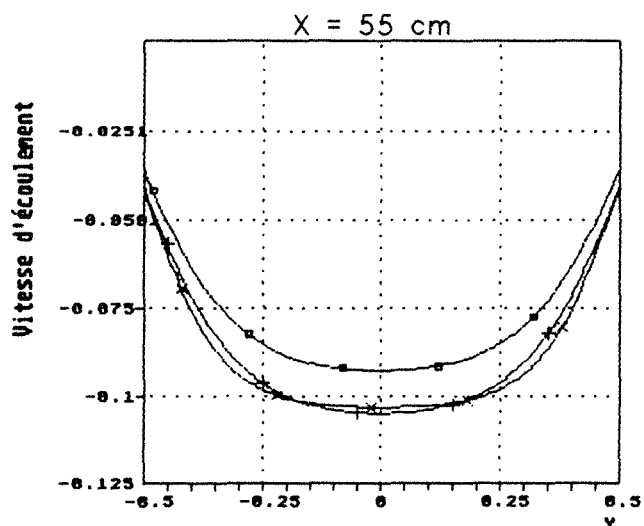




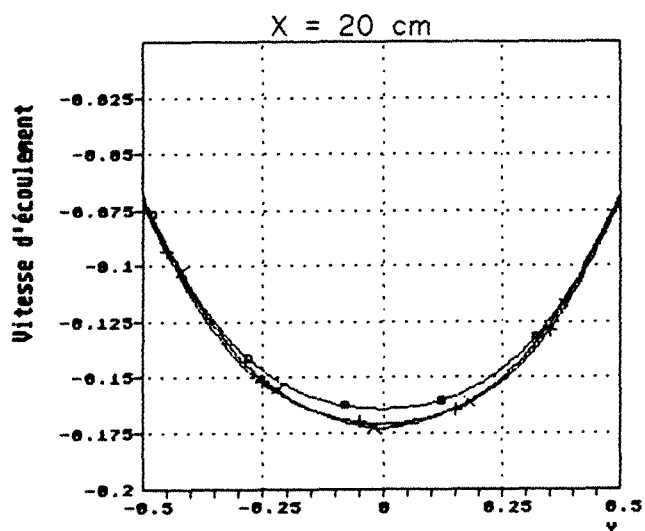
$\alpha = 10 \text{ degrés}$



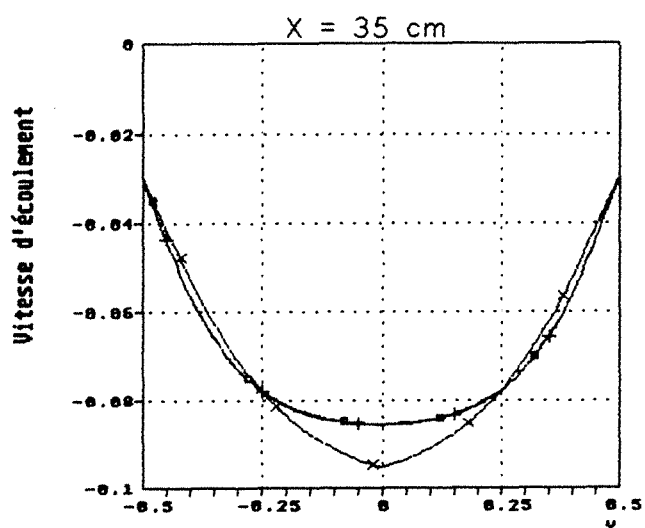
$\alpha = 10 \text{ degrés}$



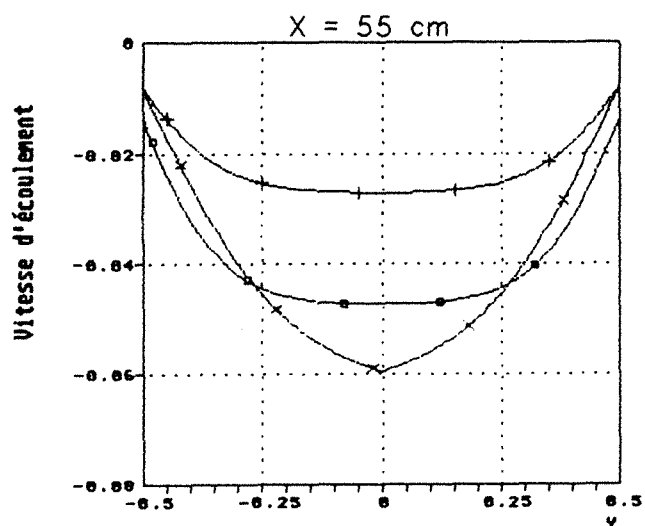
$\alpha = 10 \text{ degrés}$



$\alpha = 15 \text{ degrés}$

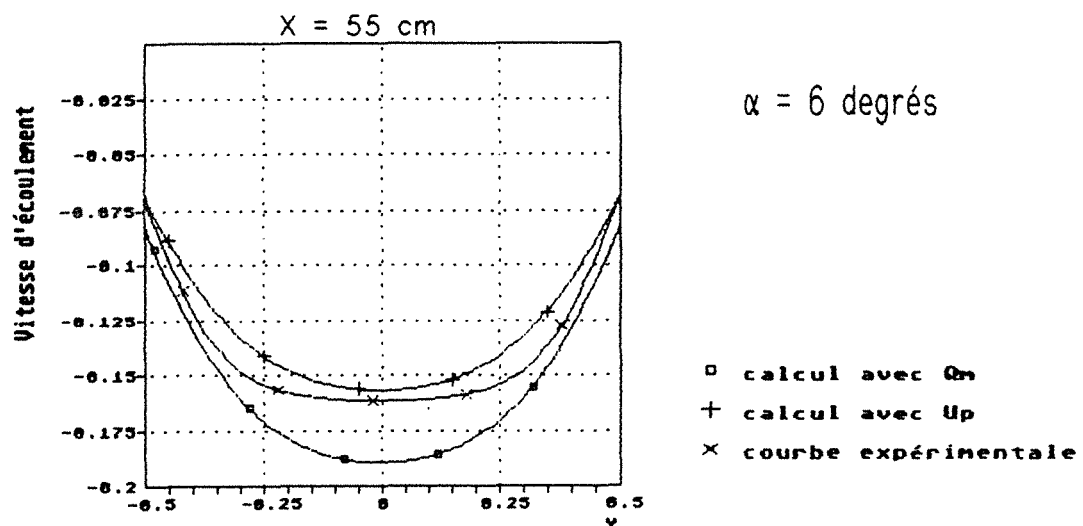
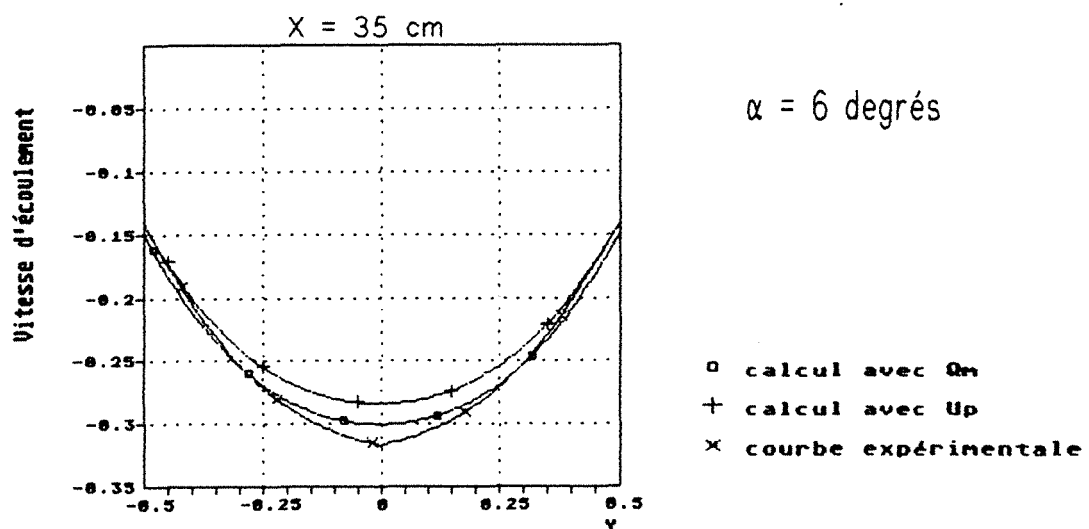
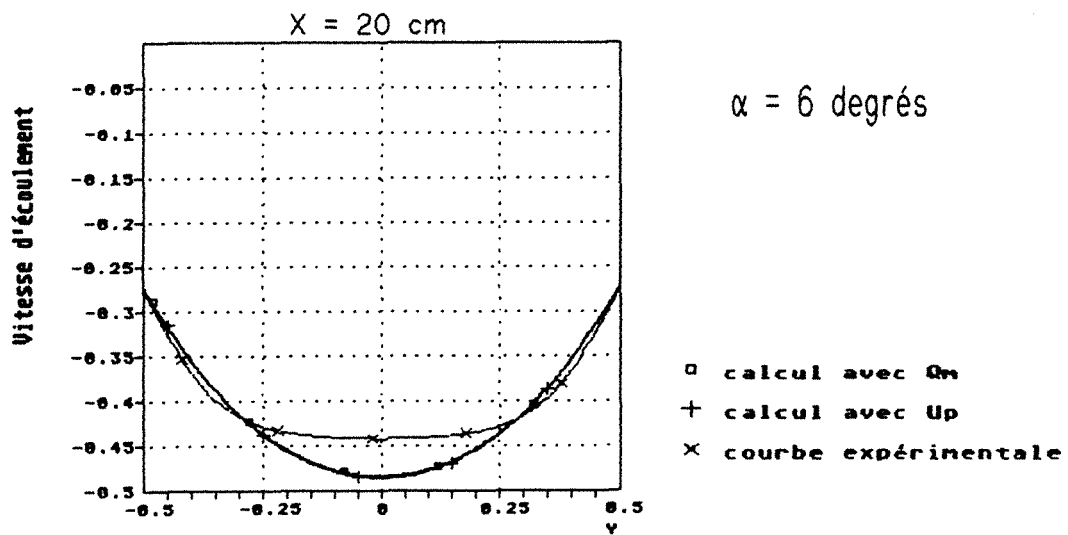


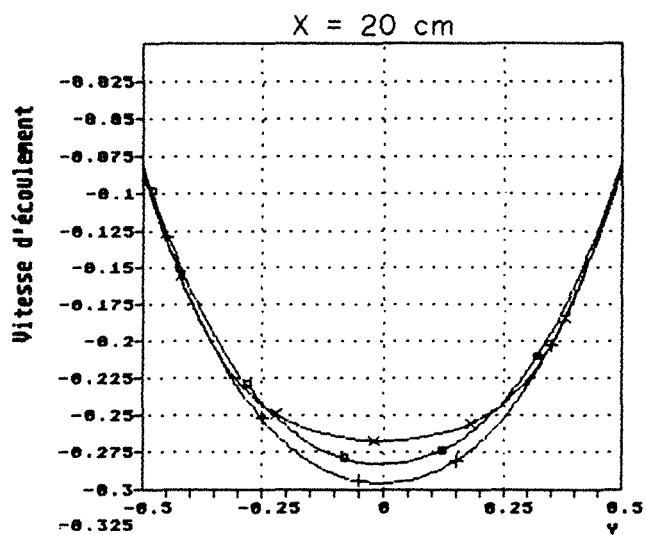
$\alpha = 15 \text{ degrés}$



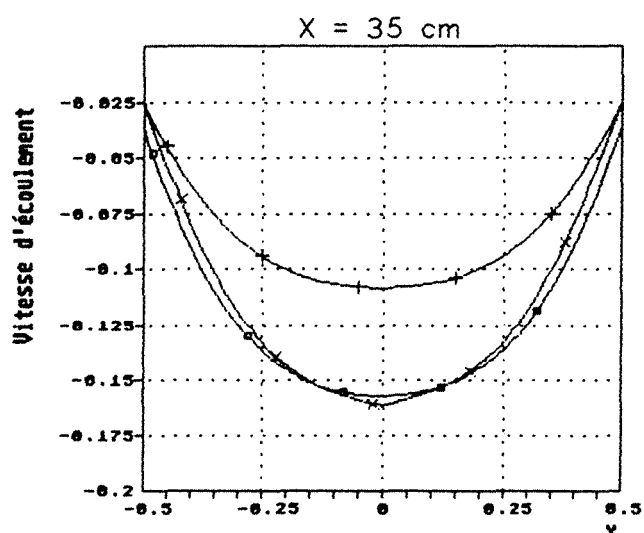
$\alpha = 15 \text{ degrés}$

Parois de type III (sable 1.6/2.0)

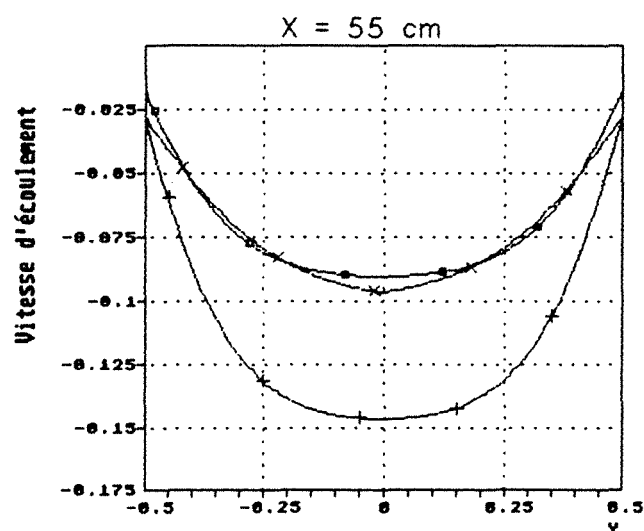




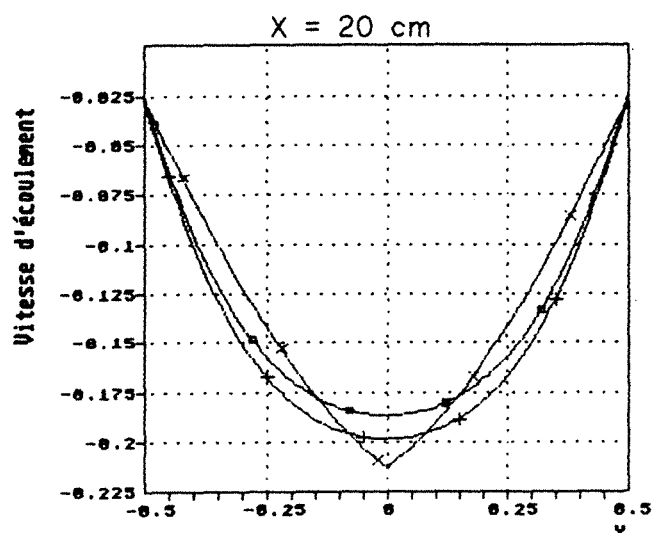
$\alpha = 10 \text{ degrés}$



$\alpha = 10 \text{ degrés}$

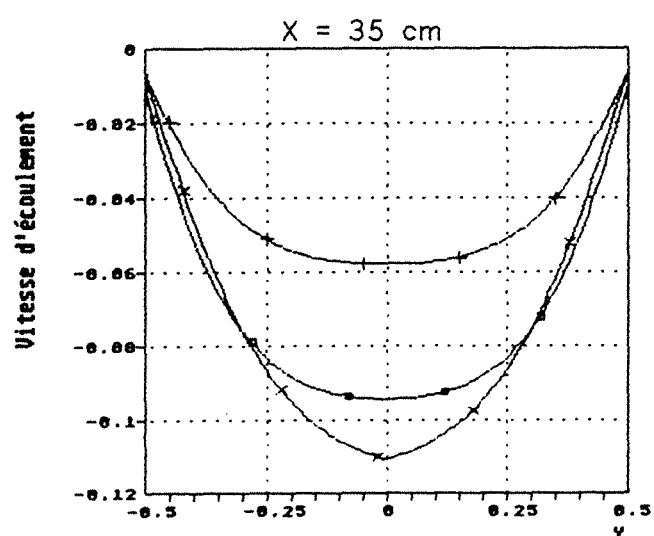


$\alpha = 10 \text{ degrés}$



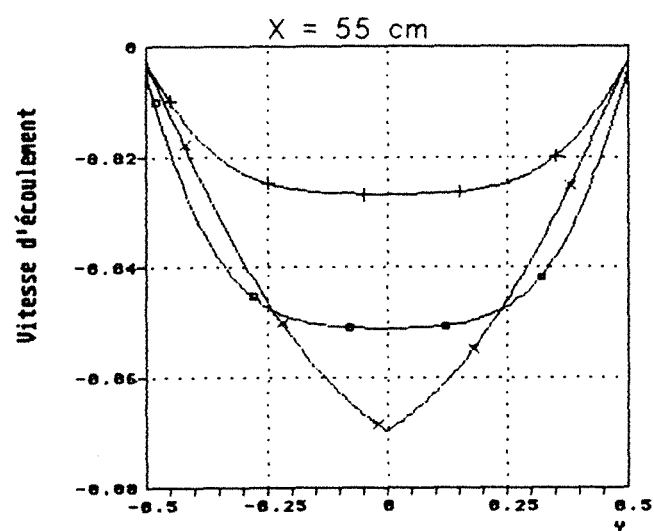
$\alpha = 15 \text{ degrés}$

$\square$ calcul avec Q_m
 $+$ calcul avec U_p
 $\times$ courbe expérimentale



$\alpha = 15 \text{ degrés}$

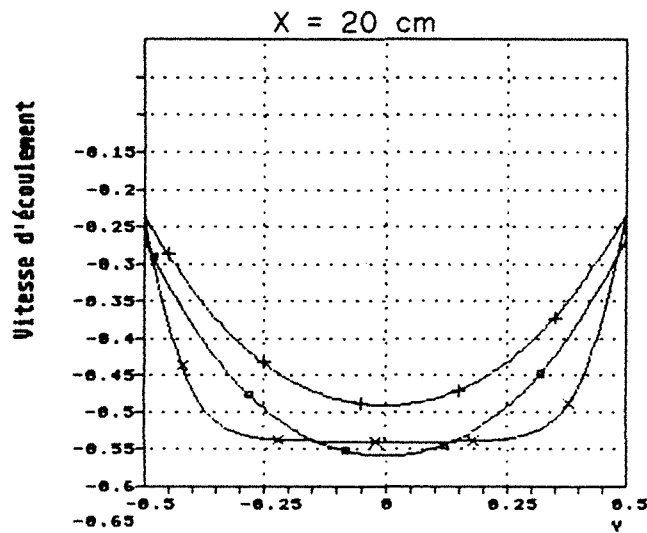
$\square$ calcul avec Q_m
 $+$ calcul avec U_p
 $\times$ courbe expérimentale



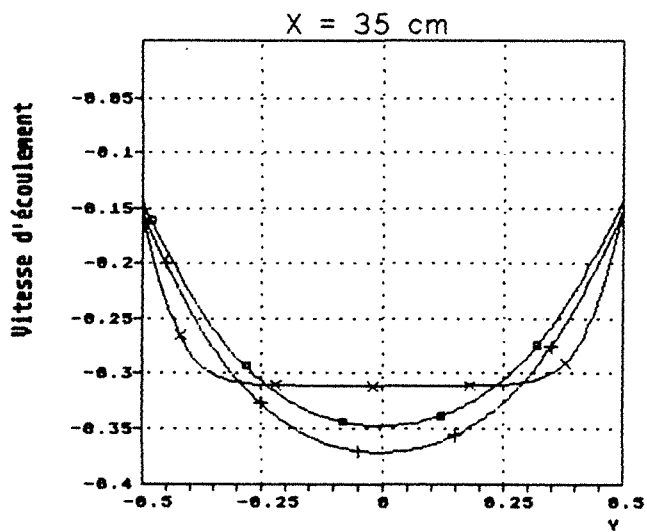
$\alpha = 15 \text{ degrés}$

$\square$ calcul avec Q_m
 $+$ calcul avec U_p
 $\times$ courbe expérimentale

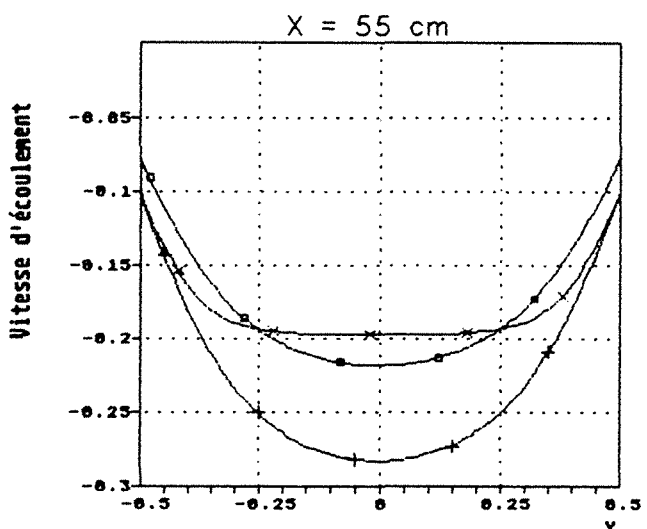
Parois de type IV (sable 0.315/0.40)



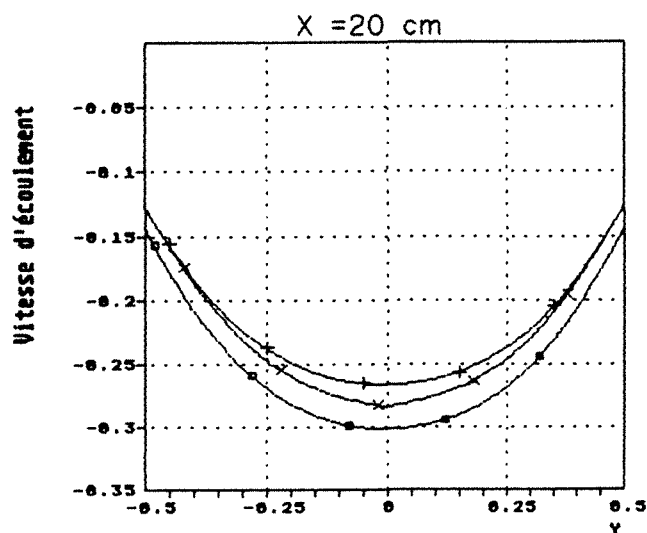
$\alpha = 6 \text{ degrés}$



$\alpha = 6 \text{ degrés}$

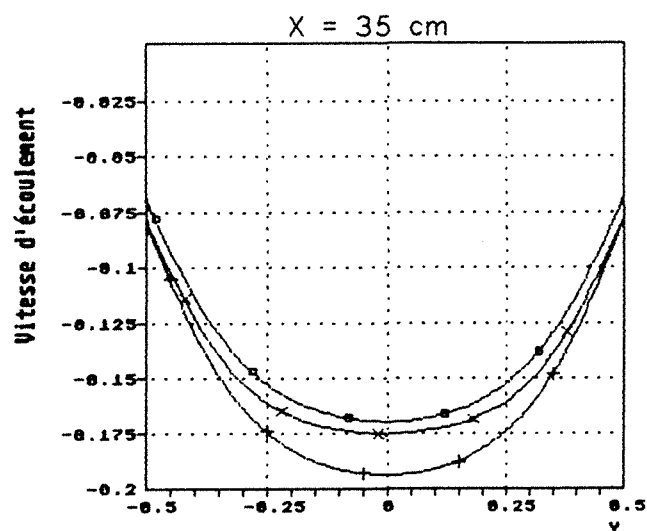


$\alpha = 6 \text{ degrés}$



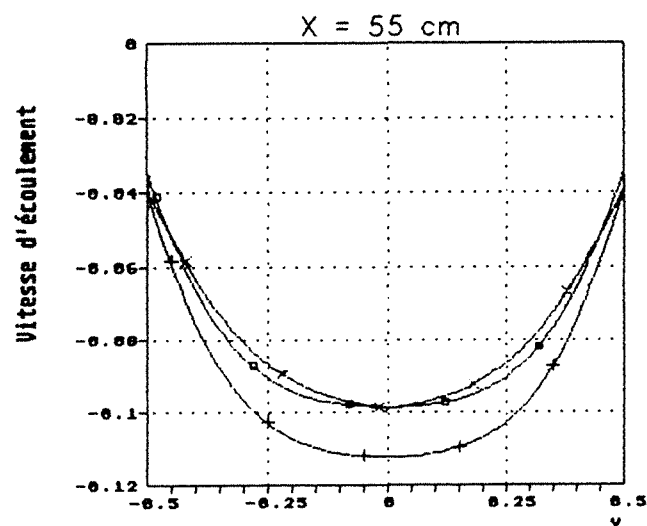
$\alpha = 10 \text{ degrés}$

□ calcul avec Q_m
 + calcul avec U_p
 × courbe expérimentale



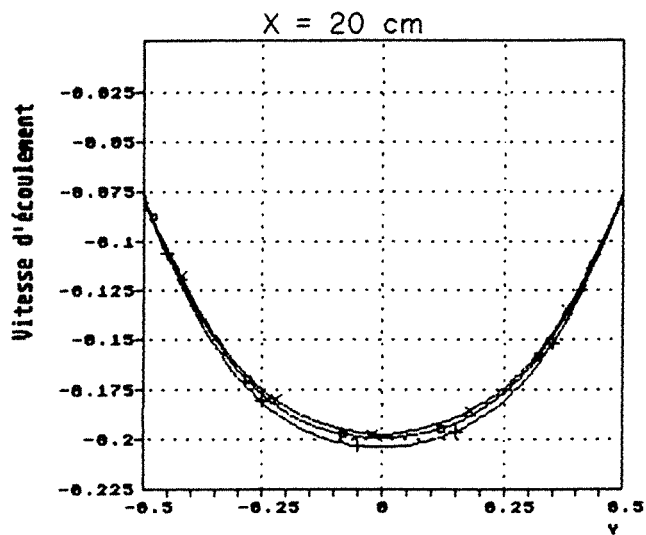
$\alpha = 10 \text{ degrés}$

□ calcul avec Q_m
 + calcul avec U_p
 × courbe expérimentale

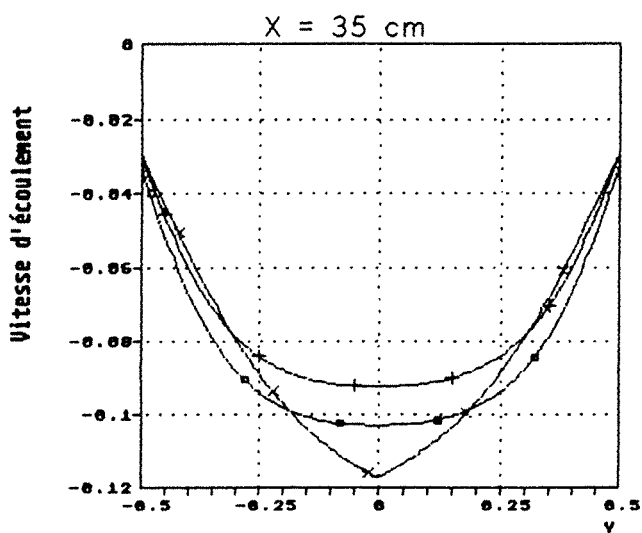


$\alpha = 10 \text{ degrés}$

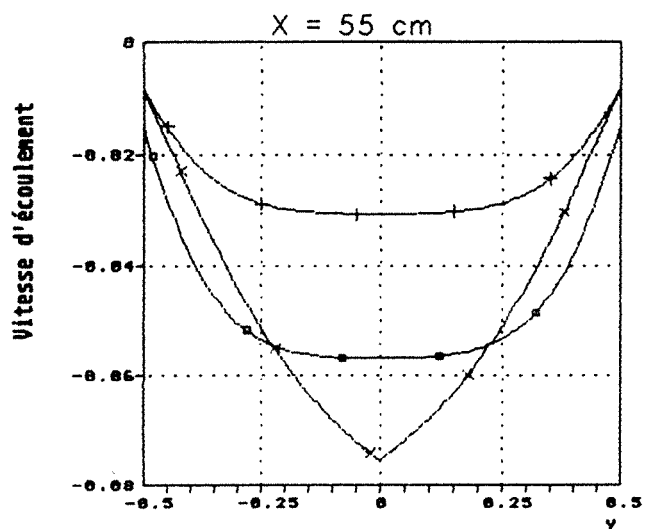
□ calcul avec Q_m
 + calcul avec U_p
 × courbe expérimentale



$\alpha = 15 \text{ degrés}$



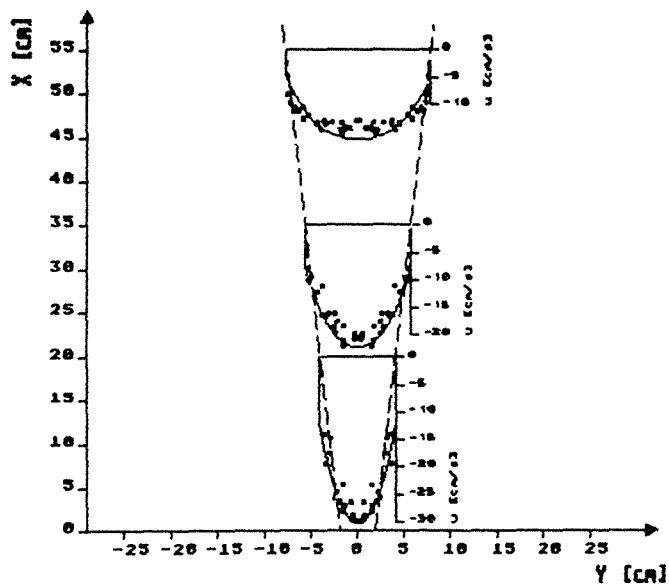
$\alpha = 15 \text{ degrés}$



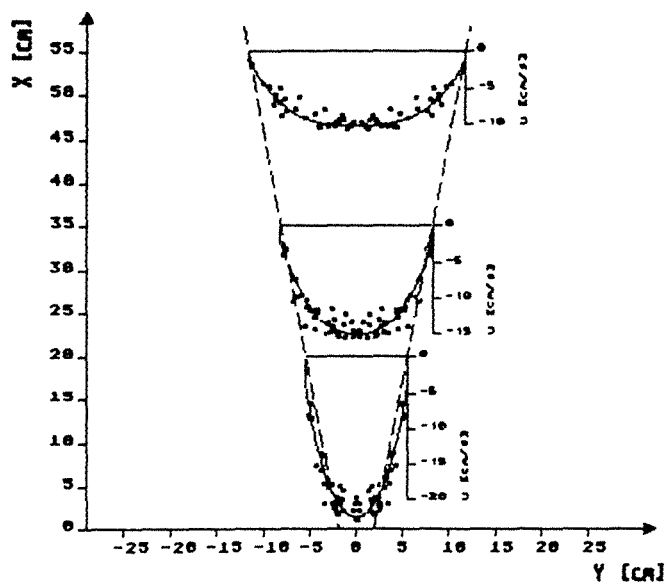
$\alpha = 15 \text{ degrés}$

ANNEXE 6

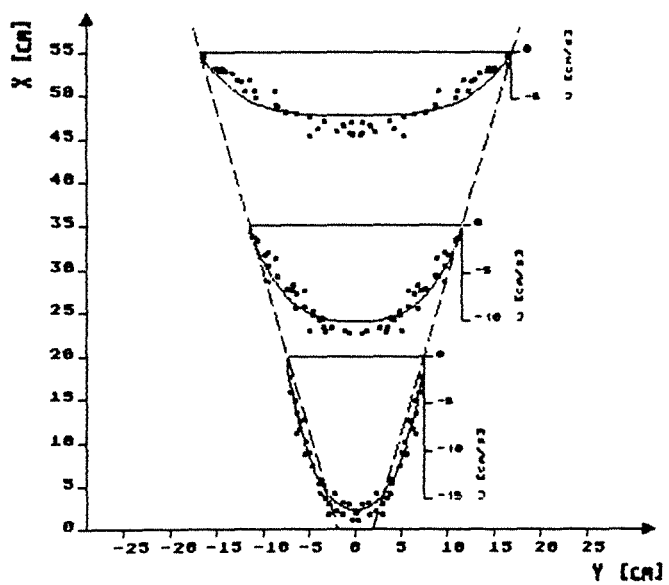
**Superposition des vitesses verticales
calculées à partir du débit masique
avec
les vitesses expérimentales**



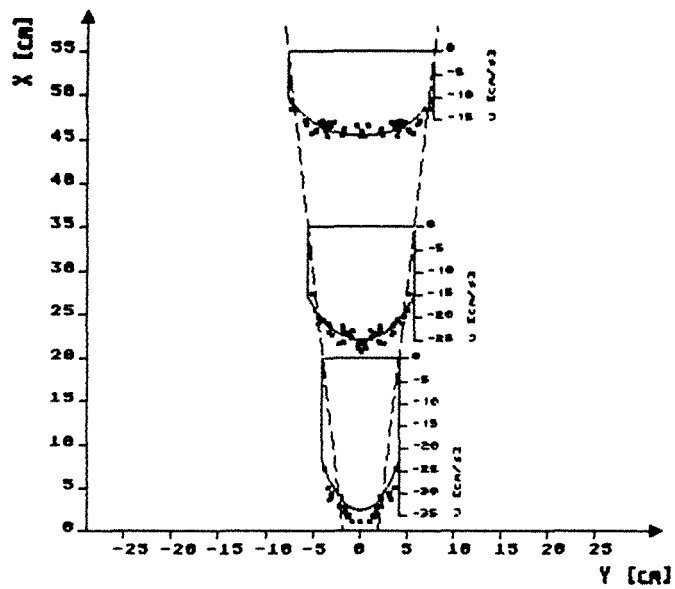
Parois type I
 $\alpha = 6$ degrés



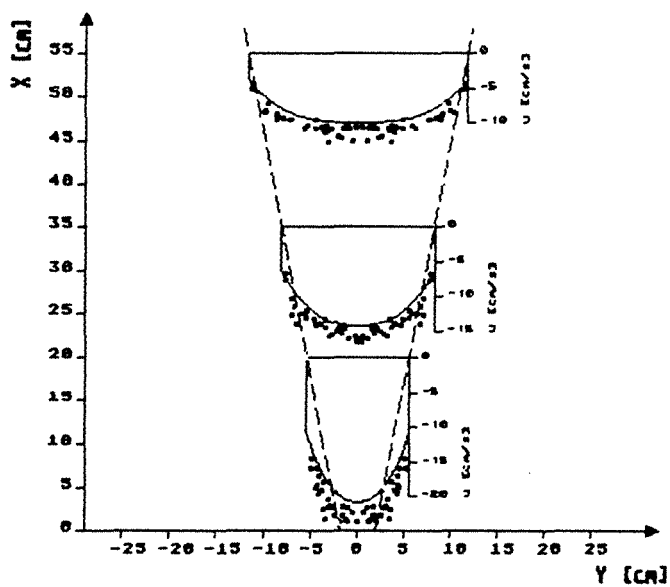
Parois type I
 $\alpha = 10$ degrés



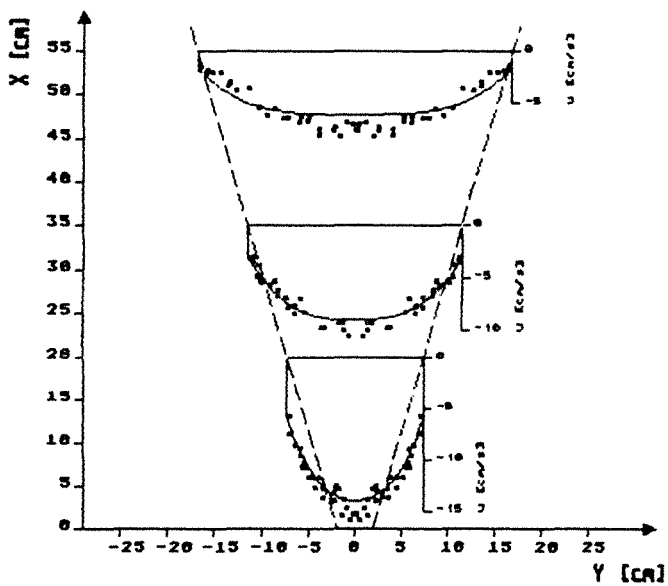
Parois type I
 $\alpha = 15$ degrés



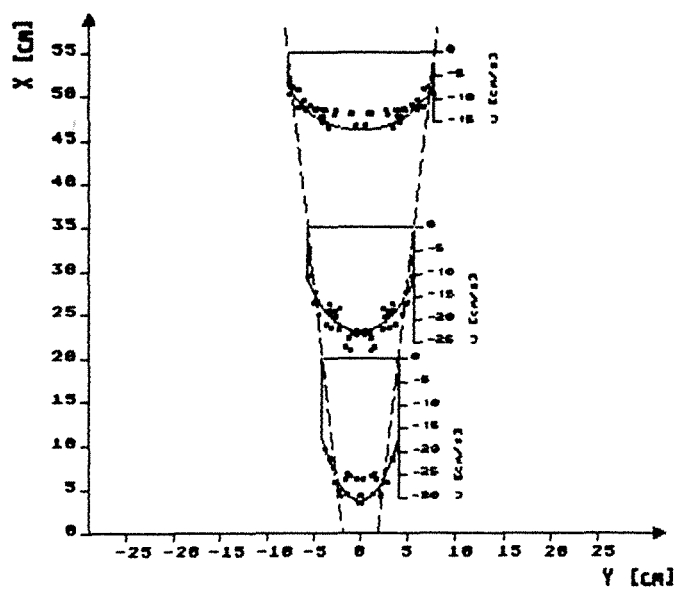
Parois type II
 $\alpha = 6$ degrés



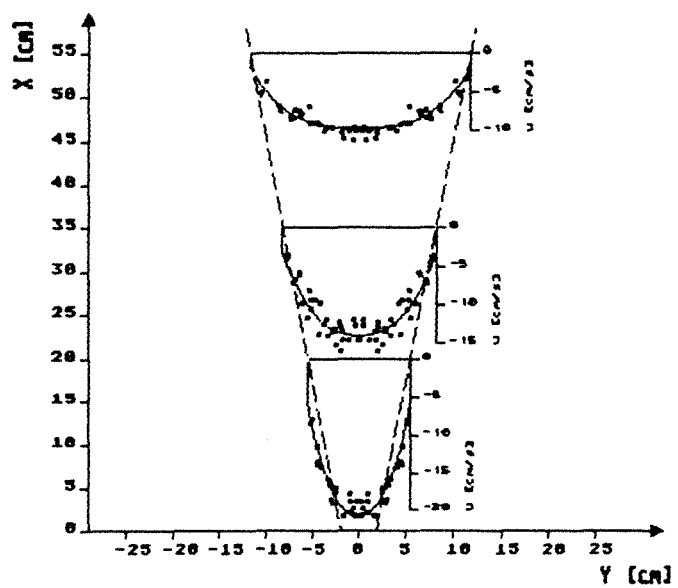
Parois type II
 $\alpha = 10$ degrés



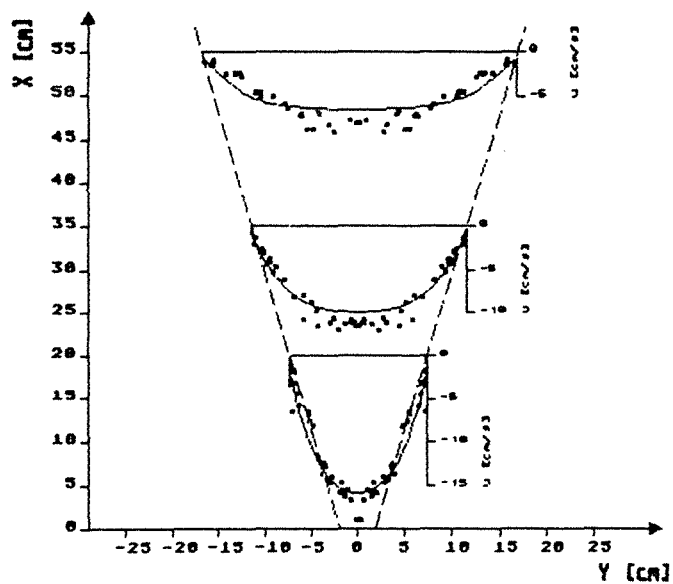
Parois type II
 $\alpha = 15$ degrés



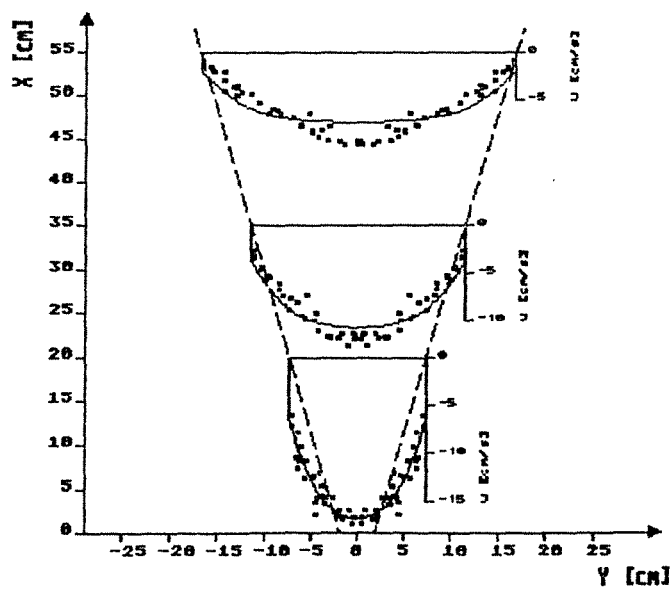
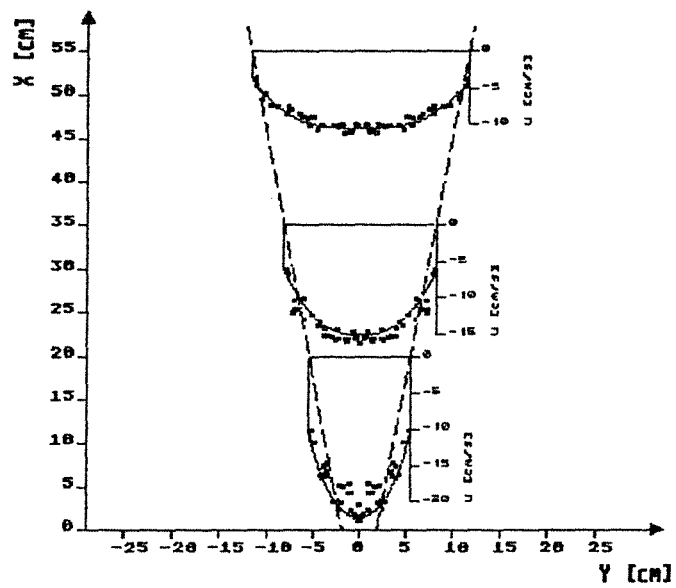
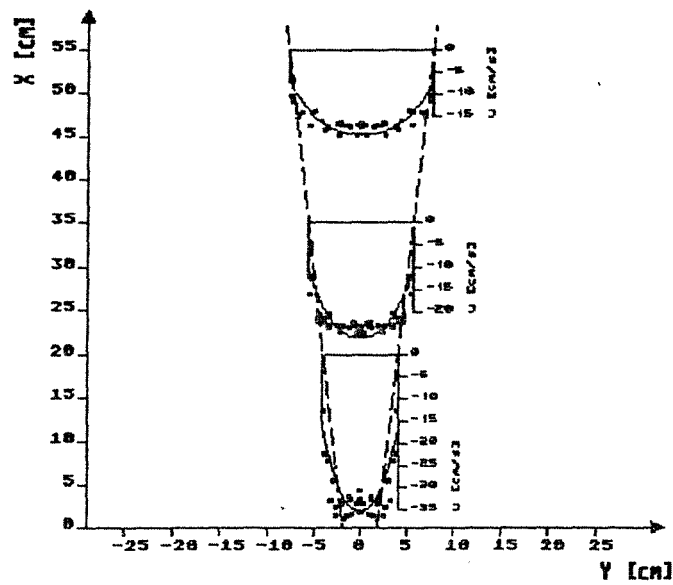
Parois type III
 $\alpha = 6$ degrés



Parois type III
 $\alpha = 10$ degrés



Parois type III
 $\alpha = 15$ degrés



**AUTORISATION DE SOUTENANCE DE THESE
DU DOCTORAT DE L'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE LORRAINE**

VU LES RAPPORTS ETABLIS PAR :

Madame HOMAND, Professeur, ENSG/INPL,

Monsieur LUONG, Directeur de Recherche CNRS, Ecole Polytechnique Palaiseau.

Le Président de l'Institut National Polytechnique de Lorraine, autorise :

Monsieur WEISSE Denis

à soutenir devant l'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE LORRAINE, une thèse
intitulée :

"Modélisation de l'écoulement gravitaire d'un matériau granulaire"

en vue de l'obtention du titre de :

DOCTEUR DE L'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE LORRAINE

Spécialité : "MECANIQUE & ENERGETIQUE"

Fait à Vandoeuvre le, **18 Octobre 1991**

Le Président de l'I.N.P.L.,

M. GANTOIS

