



AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

91 INPL 132 N

INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE LORRAINE (Nancy)
Ecole Nationale Supérieure d'Electricité et de Mécanique (E.N.S.E.M.)
Laboratoire d'Energétique et de Mécanique Théorique et Appliquée (L.E.M.T.A.)

[M] 1991 MAILLET, D.

THESE

présentée à

L'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE LORRAINE

en vue de l'obtention du grade de

DOCTEUR D'ETAT ES SCIENCES

par

Denis MAILLET

Docteur Ingénieur



**APPORT DES METHODES ANALYTIQUES
A L'IDENTIFICATION DE PARAMETRES
ET A LA CONDUCTION INVERSE EN THERMIQUE**

soutenue le 20 décembre 1991

JURY:

Président: J.B. Saulnier

Rapporteurs: A. Degiovanni
A. Delaunay
M. Laurent

Examineurs: D. Balageas
J.C. Chevrier
R. Pasquetti
N. Zabarás

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36 37 38 39 40 41 42 43 44 45 46 47 48 49 50 51 52 53 54 55 56 57 58 59 60 61 62 63 64 65 66 67 68 69 70 71 72 73 74 75 76 77 78 79 80 81 82 83 84 85 86 87 88 89 90 91 92 93 94 95 96 97 98 99 100

A Farida,

à Stéphane, Sarah et Shandra,

pour tout le temps qui leur a été volé ...

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36 37 38 39 40 41 42 43 44 45 46 47 48 49 50 51 52 53 54 55 56 57 58 59 60 61 62 63 64 65 66 67 68 69 70 71 72 73 74 75 76 77 78 79 80 81 82 83 84 85 86 87 88 89 90 91 92 93 94 95 96 97 98 99 100

Je tiens tout d'abord à remercier **J.B. Saulnier**, de l'Université de Poitiers, qui a bien voulu présider mon jury de thèse.

Toute ma gratitude va également à mes rapporteurs **A. Delaunay**, de l'Université de Nantes, et à **M. Laurent**, de l'Université de Lyon, qui ont bien voulu se pencher en détail sur ce mémoire et apporter à la fois leur regard et leurs remarques sur celui-ci.

J'exprime aussi ma reconnaissance à **D. Balageas**, de l'ONERA à Châtillon, qui a bien voulu apporter sa contribution de spécialiste sur les aspects contrôle non destructif et mesures de ce mémoire.

A **J.C. Chevrier**, dont j'ai suivi les enseignements à l'Ecole des Mines de Nancy lorsque j'étais plus jeune, vont tout autant mes remerciements pour avoir bien voulu participer à ce jury.

Que soit également remercié **R. Pasquetti**, de l'Université de Nice, pour ses remarques qui m'ont beaucoup apporté au niveau de la conduction inverse lors de ces dernières années.

I am also very grateful towards **N. Zabaraz**, of Cornell University, for participating in this jury in spite of the language barrier.

Une thèse concrétise d'abord un travail essentiellement individuel par nature. Cependant, celui-ci n'est jamais indépendant de l'environnement dans lequel il a pu s'exprimer et ce, à la fois au niveau scientifique et matériel que du point de vue des rapports humains.

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36 37 38 39 40 41 42 43 44 45 46 47 48 49 50 51 52 53 54 55 56 57 58 59 60 61 62 63 64 65 66 67 68 69 70 71 72 73 74 75 76 77 78 79 80 81 82 83 84 85 86 87 88 89 90 91 92 93 94 95 96 97 98 99 100

Cet environnement propice, **A. Degiovanni**, mon Directeur de recherche, a su le créer à tous les niveaux, d'abord à l'Ecole des Mines de Nancy, puis au sein du LEMTA regroupé à l'ENSEM à Vandoeuvre-Brabois. Je lui en suis profondément reconnaissant. Je le remercie également pour sa constante disponibilité et pour les fréquentes discussions que nous avons eues au fil des années, où il a su à la fois transmettre son expérience scientifique et technique, et faire partager ses idées novatrices.

Je remercie également tous les collègues et thésards du Laboratoire et en particulier ceux de l'équipe de **thermique du solide** pour leur disponibilité et pour l'aide que chacun a pu m'apporter.

Je tiens enfin à remercier **Anne-Sophie Didierjean** pour l'important travail de mesures thermographiques et de dépouillement qu'elle a réalisé dans le cadre de son DEA et qui a été repris ici dans le Chapitre 3, ainsi que **Anne-Sophie Houlbert** pour sa constante collaboration.

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36 37 38 39 40 41 42 43 44 45 46 47 48 49 50 51 52 53 54 55 56 57 58 59 60 61 62 63 64 65 66 67 68 69 70 71 72 73 74 75 76 77 78 79 80 81 82 83 84 85 86 87 88 89 90 91 92 93 94 95 96 97 98 99 100

AVANT-PROPOS

Le lecteur peu averti des techniques d'étude de la sensibilité, qui permettent d'aborder sagement les problèmes d'estimation de paramètres, en thermique ou dans tout autre domaine, pourra aborder ce mémoire par le Chapitre 0.

Le Chapitre 1, qui est assez spécialisé et porte sur la méthode flash, pourra être sauté par le lecteur qui n'est pas directement intéressé par cette méthode de mesure de la diffusivité thermique, bien que celle-ci soit utilisée dans les Chapitres 2 et 3.

Le Chapitre 2 porte essentiellement sur des problèmes de mesure sur des échantillons bicouche et comporte une partie importante sur les aspects statistiques de l'estimation des paramètres (étude des résidus).

Le Chapitre 3 traite du contrôle non destructif par voie thermique. Il est d'un intérêt assez général, même pour le non thermicien, car il présente une technique qui peut être comparée par exemple aux méthodes ultrasonores.

Le Chapitre 4 est essentiellement centré sur un problème inverse à proprement parler, bâti sur une équation de diffusion, dans lequel on cherche à estimer une fonction inconnue - la variation spatiale de coefficient d'échange à la surface d'un cylindre - à partir de mesures de températures internes au cylindre. Indépendamment de l'application particulière qui est traitée ici, ce chapitre peut apporter un éclairage nouveau aux personnes intéressées par les problèmes inverses, en particulier grâce à l'approche analytique de l'étude de la sensibilité qui y est présentée.

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36 37 38 39 40 41 42 43 44 45 46 47 48 49 50 51 52 53 54 55 56 57 58 59 60 61 62 63 64 65 66 67 68 69 70 71 72 73 74 75 76 77 78 79 80 81 82 83 84 85 86 87 88 89 90 91 92 93 94 95 96 97 98 99 100

SOMMAIRE

4.5.4.3 - Effets de la correction de température ambiante, de la valeur de la conductivité et du traitement des points d'arrêt	285
4.5.4.4 - Comparaison avec des mesures antérieures	286
4.6 - AVANTAGES ET INCONVENIENTS DE LA METHODE	289
4.7 - REFLEXIONS ET PERSPECTIVES	291
Bibliographie	293
CONCLUSION	296
ANNEXES DU CHAPITRE 1	
Annexe 1.1 - Champ de température produit par une excitation flash .	303
Annexe 1.2 - Coefficients de sensibilité en face arrière dans l'espace de Laplace	305
Annexe 1.3 - Coefficients de sensibilité en face arrière dans l'espace temporel	306
Annexe 1.3.1 - Calcul de la température maximum et du nombre de Fourier correspondant	306
Annexe 1.3.2 - Calcul des sensibilités des températures brute et normalisée	306
Annexe 1.3.3 - Courbes de sensibilité ($H = 10^{-2}$ et 10^{-3})	309
Annexe 1.4 - Calcul des écarts-types et de la covariance des deux moments temporels réduits	312
Annexe 1.5 - Calcul de la valeur et du nombre de Biot équivalent du refroidissement du petit corps aux temps longs He	316
ANNEXES DU CHAPITRE 2	
Annexe 2.1 - Inversion numérique de la transformation de Laplace par l'algorithme de Stehfest	320
Annexe 2.2 - Calcul du contraste dans le cas d'un dépôt semi-transparent	321
Annexe 2.2.1 - Ecriture quadripolaire du dépôt	321
Annexe 2.2.2 - Ecriture du contraste sous forme réduite	322
Annexe 2.3 - Méthode de Newton généralisée au cas de plusieurs variables	324
Annexe 2.4 - Algorithme d'identification utilisant les transformées expérimentales corrigées	326
Annexe 2.5 - Calcul de la matrice de variance-covariance de K_1 et de Z	328
Annexe 2.6 - Etude de la distribution des résidus dans le cas d'un modèle linéaire simple	332
ANNEXES DU CHAPITRE 3	
Annexe 3.1 - Contraste thermique : défaut capacitif avec augmentation d'épaisseur	342

Annexe 3.2 - Contraste thermique : défaut capacitif avec épaisseur inchangée	343
Annexe 3.3 - Coefficients de sensibilité dans l'espace de Laplace ..	344
Annexe 3.4 - Expression analytique de la résistance du délaminage en face arrière	345
Annexe 3.5 - Identification de la profondeur du délaminage en face avant	347
Annexe 3.6 - Description de la plaque d'essai	349
Annexe 3.7 - Calcul du contraste thermique par séparation des variables et biais de Laplace	350
Annexe 3.7.1 - Champ de température au sein du bicouche	350
Annexe 3.7.2 - Contraste aux temps longs pour de faibles valeurs de R ($x = 0,5$)	351
Annexe 3.7.3 - Estimation du biais sur la mesure du contraste de Laplace	352
Annexe 3.8 - Quadripôle de la cellule élémentaire tricouche symétrique	353

ANNEXE DU CHAPITRE 4

Annexe 4.1 - Correction unidimensionnelle des températures mesurées .	355
--	------------

NOMENCLATURE

- A : paramètre, coefficient d'amplitude ou de quadripôle, ou matrice (chap.4)
 a : diffusivité thermique ou coefficient (chap. 4)
 B : paramètre, coefficient de quadripôle, biais de Laplace, ou matrice (chap. 4)
 b : paramètre, rayon de défaut, ou coefficient
 Bi : nombre de Biot
 C : coefficient de quadripôle ou matrice (chap. 4)
 c : coefficient ou chaleur massique
 cov : covariance ou matrice de covariance
 d : coefficient, fonction, ou matrice (chap. 4)
 E : espérance mathématique ou matrice (chap. 4)
 e : erreur d'estimation, coefficient, ou épaisseur
 F : fonction ou matrice (chap. 4)
 f : fonction ou coefficient (chap. 4)
 G : fonction
 g : fonction ou matrice
 H : nombre de Biot ou matrice (chap. 4)
 h : coefficient d'échange
 I : luminance ou matrice identité
 K : paramètre, ratio d'erreurs relatives ou matrice
 K_1 à K_4 : paramètres de bicouche
 k : coefficient ou facteur d'aspect (chap. 4)
 l : rayon de plaque
 \mathcal{L} : transformée de Laplace
 M : matrice de quadripôle
 m : moment temporel partiel ou transformée de Laplace du contraste
 N : nombre d'intervalles angulaires (chap. 4)
 n : nombre de points de mesure
 o : notation de zéro de Landau
 P : point ou probabilité
 p : nombre de paramètres, variable de Laplace, ou matrice (chap. 4)
 Q : densité surfacique d'énergie absorbée
 q : source volumique de chaleur
 R : résidu de Laplace, résistance thermique, ratio ou résidu (chap. 4)
 r : dimension radiale ou résidu
 S : somme de carrés
 s : racine carrée de la variable réduite de Laplace (chap. 2) ou coefficient de sensibilité réduit
 T : température ou variable expliquée
 ΔT^* : contraste thermique
 t : temps, variable explicative ou coefficient (chap. 4)
 U : tension électrique
 u : fonction, valeur propre ou matrice (chap. 4)
 v : fonction ou coefficient
 var : variance

- X : coefficient de sensibilité
 x : dimension axiale (chap. 2), sensibilité de Laplace ou rayon réduit (chap. 4)
 x* : profondeur réduite d'un défaut
 Y : valeur mesurée, coefficient de sensibilité ou fonction
 y : valeur mesurée ou axe
 Z : fonction axiale (chap. 1), coefficient de sensibilité ou de réponse (chap. 4)
 z : dimension axiale ou coefficient (chap. 4)

Lettres grecques

- α : racine carrée de la variable réduite de Laplace (chap. 3), angle ou demi-valeur propre
 β : paramètre
 Δ : variation, déterminant ou différence de sinus (chap. 4)
 ∇ : opérateur nabla
 δ : distribution de Dirac ou réduction relative d'épaisseur
 δ_{ij} : symbole de Kronecker
 ϵ : bruit de mesure, erreur de Laplace ou émissivité
 ϕ : densité de flux de Laplace
 \emptyset : flux thermique
 φ : densité de flux thermique
 γ : coefficient régularisateur
 λ : conductivité thermique
 μ : coefficient
 ρ : masse volumique ou coefficient de corrélation
 Σ : matrice de covariance de Laplace ou symbole de sommation
 σ : écart-type ou constante de Stéfán
 τ : coefficient de transmission
 ν : fréquence caractéristique thermique d'échantillon ($= a/e^2$)
 η : fonction
 θ : température de Laplace ou différence de température (chap. 4)
 ω : valeur propre

Indices supérieurs

- \wedge : estimateur
 $-$: moyenne ou transformée de Laplace
 $*$: grandeur réduite
 o : relatif au corps noir
 $'$: dérivée
 c : corrigé (chap. 4)
 t : matrice transposée

Indices inférieurs

- a : arithmétique
 ai : absorption interfaciale
 c : corrigé ou de contact
 d : défaut ou décalage
 e : équivalent ou environnement (chap. 4)
 exp : expérimental
 f : face avant

g : géométrique
 H : relatif au nombre de Biot
 h : relatif au coefficient d'échange
 inf : inférieur
 loc : local
 lim : limite adiabatique
 m : relatif au temps du maximum de contraste, ou moyenne angulaire (chap. 4)
 max : valeur maximum
 min : valeur minimum
 nom : nominal
 o : valeur de référence (absence de défaut) ou relatif au rayon de mesure (chap. 4)
 p : relatif à l'impulsion
 R : relatif à la résistance
 r : radial, relatif à la face arrière ou au rayon, ou radiatif
 ref : de référence (avant l'excitation thermique)
 s : relatif à l'échantillon, ou à la première mesure
 st : semi-transparent
 stp : semi-transparent avec pertes
 sup : supérieur
 T : total ou relatif à la température
 t : porte sur le temps
 x : relatif à la profondeur du défaut
 z : axial
 ∞ : infini

Indices inférieurs grecs

α : niveau entre 0 et 1, coefficient d'absorption, ou indice muet
 β : niveau entre 0 et 1, relatif au paramètre β, ou indice muet
 γ : indice muet
 ε : relatif au bruit de mesure
 φ : relatif au flux thermique
 τ : relatif au coefficient de transmission
 ν : relatif à la fréquence caractéristique thermique

Caractères gras : sont utilisés pour les matrices et les vecteurs colonnes.

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36 37 38 39 40 41 42 43 44 45 46 47 48 49 50 51 52 53 54 55 56 57 58 59 60 61 62 63 64 65 66 67 68 69 70 71 72 73 74 75 76 77 78 79 80 81 82 83 84 85 86 87 88 89 90 91 92 93 94 95 96 97 98 99 100

INTRODUCTION

Les méthodes dites "inverses" consistent à rechercher la cause d'un phénomène à partir de l'observation des conséquences de celui-ci. Ceci n'est évidemment envisageable que si l'on dispose d'un modèle adapté, dit "modèle direct", représentant le phénomène. A ce moment-là il est généralement possible de définir un certain nombre de paramètres qui constituent la cause de ce dernier. La détermination de ces paramètres n'est pas unique, car elle dépend des préoccupations de l'utilisateur de la méthode.

Il existe de nombreux types de problèmes inverses. Nous n'aborderons ici que ceux qui concernent l'estimation de paramètres et ceux qualifiés de problèmes inverses proprement dits et ce, dans le cas où la grandeur observée est la solution d'un système linéaire d'équations aux dérivées partielles. Dans le premier cas de figure le problème inverse est mathématiquement bien posé et l'on cherche ici à estimer un nombre fini de paramètres, ce qui ne garantit d'ailleurs pas forcément une résolution aisée. Dans le deuxième cas, on cherche à estimer une condition limite, représentée ici par une fonction, c'est-à-dire un nombre infini de paramètres, à partir de mesures internes au domaine. Ce deuxième problème est dit mathématiquement "mal posé" car sa solution unique n'est pas stable.

Dans ce mémoire le modèle utilisé est basé sur une équation de diffusion, l'équation de la chaleur, et la grandeur observée, ou plutôt mesurée, est la température. Dans d'autres cas de figure en thermique, la mesure du flux est également envisageable. On peut, de façon très générale et pour fixer les idées, envisager les étapes suivantes dans la résolution d'un problème inverse basé sur l'équation de la conduction où la grandeur mesurée est la seule température :

- a - détermination des paramètres thermiques du modèle direct.
- b - conception de l'expérience optimum permettant de les estimer à partir de mesures de la température, c'est-à-dire choix des meilleures conditions initiale et aux limites possibles (matériau, géométrie, excitation ...).
- c - obtention de la solution du problème direct par résolution de l'équation de la chaleur et de ses conditions associées.
- d - étude de la sensibilité de la température aux différents paramètres afin de savoir si ceux-ci sont accessibles à partir de la mesure du signal de température, ou s'il y a lieu de changer la définition du signal, le type de paramétrage (estimation de paramètres) ou la finesse de la discrétisation (conduction inverse).
- e - développement d'une technique d'inversion permettant l'estimation de ces paramètres, une fois faite la mesure des températures.
- f - application de cette technique inverse à des mesures simulées, obtenues en ajoutant éventuellement un bruit aléatoire à la solution du problème direct.
- g - réalisation de la manipulation et obtention de mesures expérimentales.
- h - traitement de ces mesures par la technique inverse et estimation des paramètres.
- i - observation des résidus, c'est-à-dire des écarts entre les températures mesurées et celles recalculées à partir du modèle direct appliqué aux valeurs estimées des paramètres, afin de pouvoir qualifier le modèle, le paramétrage retenu et la technique d'inversion utilisée.

- j - examen de toutes les déviations possibles du modèle direct, causées par les limitations et imperfections des conditions expérimentales, et étude de leur incidence sur l'inversion (incertitude sur des paramètres présents dans le modèle mais non considérés a priori comme paramètres inconnus).
- k - utilisation des données disponibles sur le bruit de mesure (écart-type, loi de probabilité ...) pour donner les incertitudes ou les intervalles de confiance des estimations obtenues des valeurs des paramètres.

Il est évident que toutes ces étapes ne doivent pas nécessairement se dérouler de façon séquentielle et qu'en général il est nécessaire de faire des aller-retour entre les différents points. Par ailleurs, ce catalogue méthodologique, qui ne saurait être exhaustif, doit être modulé en fonction de l'application envisagée, c'est-à-dire du type de problème inverse à étudier.

Un point capital dans tout problème d'estimation de paramètres est l'étude de la sensibilité du signal aux paramètres à estimer (d). Celle-ci doit être entreprise avant même d'envisager une technique d'inversion appropriée (e). Bien qu'il existe des ouvrages récents - en particulier ceux de J.V. Beck - sur le sujet, cette technique d'étude préalable des sensibilités est encore peu répandue dans les laboratoires s'occupant de métrologie, aussi le chapitre 0 a-t-il été consacré à celle-ci dans un cadre très général.

Ainsi le premier chapitre traite des conditions d'identifiabilité des paramètres (diffusivité et pertes) de la méthode flash, et est particulièrement centré sur l'étude de la sensibilité (d) et le chiffrage des erreurs d'estimation (k). Un fort accent y est mis sur la réduction du nombre de paramètres du modèle (d et j). L'étude qui y est menée est entièrement théorique et repose sur une expérience (g), un modèle direct (a et c) et une technique d'inversion (e et h), la méthode des moments temporels partiels, largement utilisés en pratique. Les méthodes développées dans les deux chapitres suivants requièrent l'emploi de cette même méthode flash.

Le deuxième chapitre concerne le problème de l'identification des propriétés thermiques d'un dépôt solide d'un substrat dont les caracté-

ristiques sont connues. Deux types de dépôts sont étudiés et l'ensemble des questions a à j, à l'exception du point f (simulation de mesures), sont abordées. On insiste ici particulièrement sur l'adéquation du modèle à l'expérience (i et j) car un terme source d'origine radiative doit être pris en compte pour modéliser correctement le caractère semi-transparent d'un des dépôts. Dans l'autre cas, c'est un changement de paramétrage qui permet d'annuler la sensibilité à un des deux paramètres et autorise donc l'estimation du deuxième paramètre du dépôt. La méthode d'identification retenue (e) est basée sur l'utilisation des transformées expérimentales de Laplace, qui permet en outre le chiffrage des intervalles de confiance des paramètres. Une autre caractéristique de ce chapitre réside dans la notion de contraste thermique qui est utilisé comme signal. Ce dernier est la différence de deux thermogrammes normalisés résultant de deux expériences flash différentes, l'une sur le bicouche et l'autre sur le substrat seul. Cette notion de contraste est également utilisée dans le chapitre suivant.

Le troisième chapitre est focalisé sur le problème du contrôle non destructif thermique des matériaux composites stratifiés à renforcement orienté : dans ce type de technique le transfert transitoire de chaleur au sein du matériau, suite à une excitation, est utilisé à des fins de détection et d'identification de défauts internes. Ce problème est très particulier à plus d'un titre : tout d'abord on ne sait pas si un défaut est éventuellement présent dans la pièce à contrôler (problème de la détection) et d'autre part ce défaut n'est pas un paramètre thermique mais possède par contre un caractère structural ou géométrique. On s'intéresse ici au cas des délaminages, c'est-à-dire aux décollements entre deux plis adjacents du composite, occupés par des poches d'air. Dans ces conditions les paramètres directs du délaminage (profondeur, épaisseur, extension) sont traduits en terme de paramètres thermiques (position de la condition limite entre les deux couches de matériau séparées par le délaminage, résistance thermique de contact équivalente, variable dans le plan du défaut) - (a). Dans le cas où l'extension du défaut est infinie et moyennant certaines hypothèses, il est possible de ramener le problème à un modèle unidimensionnel transitoire simple, pour lequel le signal considéré est un contraste dont la variation temporelle ne dépend que de deux paramètres discrets (c). Ce contraste est issu de deux expériences flash effectuées l'une sur un échantillon sain et l'autre sur un échantillon défectueux. Les déviations éventuelles de ce mo-

dèle (j), dont notamment les effets bidimensionnels, sont examinées, ainsi que les résultats de la première méthode d'inversion utilisée au LEMTA. Cette dernière est bâtie sur le relevé du seul point expérimental de contraste maximum pour estimer les résistance de contact et profondeur réduites du délaminage. L'étude de la sensibilité du contraste à ces deux paramètres donne un nouvel éclairage aux difficultés expérimentales d'estimation précédemment rencontrées (d) : la mesure en face arrière permet d'accéder uniquement à la résistance de contact tandis que celle en face avant donne plutôt la profondeur, pour des délaminages pas trop voisins de la face arrière. Partant de ce constat, une nouvelle méthode d'identification (e), basée sur deux transformées expérimentales de Laplace particulières, permet de calculer directement la résistance en face arrière et la profondeur en face avant par élimination analytique du paramètre auquel le contraste est peu sensible sur chaque face. Cette méthode d'identification est appliquée à des thermogrammes bidimensionnels simulés (f). Des expériences (g) ont été effectuées, en utilisant une caméra infrarouge en tant que multithermomètre, aussi bien en face arrière qu'en face avant, sur des plaques en carbone-époxy contenant des délaminages simulés. Pour tenir compte des imperfections de l'expérience (j) - non-uniformité du chauffage, subjectivité de l'opérateur dans le choix de la zone saine de référence, dont la température est acquise lors de la même expérience - la normalisation de chaque thermogramme s'effectue sur une base locale permettant en outre de s'affranchir des variations d'émissivité de la face observée. Des profils de résistance de contact réduite, en face arrière, et de profondeur réduite, en face avant, ont été obtenus à partir de ces expériences (h). Ils sont tout à fait en accord avec les profils correspondant aux valeurs nominales de ces paramètres, à condition de se placer au niveau du centre de chaque défaut, et avec les images de la même plaque défectueuse, obtenues par une technique ultrasonore. Les différentes causes d'erreur sur la valeur des paramètres identifiés (j) sont ensuite passées en revue.

Le chapitre 4 traite d'un problème de conduction inverse proprement dit, à la différence du chapitre précédent où le problème de conduction inverse était transformé en un problème d'estimation de paramètres en remplaçant le problème bidimensionnel en une infinité de problèmes unidimensionnels. Dans ce dernier chapitre, la fonction à identifier est la variation angulaire du coefficient de transfert convectif sur un cylindre en écoule-

ment transverse permanent. Après une détermination des conditions aux limites optimales du problème considéré (b), un modèle direct est construit donnant le champ de température interne d'un tube cylindrique dont la paroi externe est soumise à l'échange à mesurer, et la paroi interne, à une condition de température uniforme. Ce modèle est ensuite résolu (c), à partir d'une discrétisation de la densité de flux pariétal, qui peut être calculée à partir de la même discrétisation du coefficient d'échange (a). L'étude de la sensibilité (d) aux paramètres à estimer - les flux pariétaux - ainsi qu'au rayon de mesure de la température interne, est ensuite abordée. Le problème inverse est manifestement mathématiquement "mal posé" au sens de Hadamard, c'est-à-dire que les flux pariétaux qui sont identifiés ne sont pas des fonctions continues des températures internes avec, comme conséquence immédiate, l'énorme sensibilité des flux identifiés au bruit de la mesure de température. Pour résoudre ce problème, linéaire au sens de l'estimation des paramètres, on utilise une technique de régularisation proposée par Tikhonov et Arsenine (e), tout d'abord sur des mesures simulées (f) pour des cas tests définis par Beck et un cas représentatif des conditions expérimentales. Ces simulations permettent de choisir le niveau du paramètre régularisateur nécessaire à l'application de cette technique. Une expérience a été effectuée en soufflerie (g) et les profils angulaires de température ont été traités par la méthode d'inversion semi-analytique décrite plus haut. Les profils estimés de coefficient d'échange (h) sont très sensibles à la précision sur la détermination des rayons d'implantation des sondes de température. Ils sont tout à fait cohérents avec ceux obtenus par Pasquetti qui a traité les mêmes profils expérimentaux de température par une technique inverse de régularisation, basée sur la méthode des éléments de frontière, mais minimisant une fonctionnelle complètement différente. Là encore les déviations d'origine expérimentale (j) ont été examinées.

Dans l'ensemble de ces quatre chapitres, c'est une technique analytique ou semi-analytique qui a été utilisée, tant pour l'obtention du modèle direct que pour l'identification des paramètres, le problème de l'inversion étant non linéaire dans les trois premiers chapitres (estimation de paramètres) et linéaire dans le dernier (conduction inverse) si on considère que les coefficients d'échange ne sont que des sous-produits des flux pariétaux, une fois le modèle direct établi.

CHAPITRE 0

ESTIMATION DE PARAMÈTRES ET ÉTUDE DE LA SENSIBILITÉ

2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36 37 38 39 40 41 42 43 44 45 46 47 48 49 50 51 52 53 54 55 56 57 58 59 60 61 62 63 64 65 66 67 68 69 70 71 72 73 74 75 76 77 78 79 80 81 82 83 84 85 86 87 88 89 90 91 92 93 94 95 96 97 98 99 100

ESTIMATION DE PARAMÈTRES ET ÉTUDE DE LA SENSIBILITÉ

0.1 - INTRODUCTION

Tout problème d'estimation d'un certain nombre de paramètres $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p)$, à partir d'un signal unique T dépendant d'une seule variable explicative t , peut être abordé en utilisant une fonction f dont la définition est la suivante :

$$T = f(t, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p) \quad (1)$$

Pour se fixer les idées, le signal théorique T , appelé encore variable expliquée, peut être une température variant avec le temps t . Cette fonction f doit être connue si on désire remonter, à partir des mesures de T , aux valeurs des paramètres β_j ($j = 1$ à p). Ces paramètres sont par exemple des propriétés thermophysiques, des dimensions ou d'autres grandeurs liées à l'expérience qu'on cherche à exploiter. La connaissance de cette fonction f présuppose donc la résolution du problème thermique direct.

A un instant t , la valeur mesurée y de T diffère de cette dernière par un bruit ϵ qu'on peut supposer additif :

$$y(t) = T(t, \beta) + \epsilon(t) \quad (2)$$

avec :

$$\beta^t = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p)$$

Ce bruit ϵ est en fait une variable aléatoire. Par contre, on suppose que la mesure du temps t n'est entachée d'aucune erreur.

Dans ce qui suit nous allons aborder le problème de l'identifiabilité des paramètres β_j , pour différentes valeurs de leur nombre p , en essayant de mettre en évidence la notion de "degré de liberté paramétrique" du modèle.

0.2 - MODELE A UN PARAMETRE

Dans ce cas ($p = 1$) deux situations différentes sont envisagées, suivant le cas où la fonction f , à $\beta (= \beta_1)$ fixé, possède ou non un point remarquable. Par point remarquable, on considère un minimum ou un maximum local dont l'ordonnée, T_{\max} ou T_{\min} , peut être relevé avec une précision suffisante sur la courbe expérimentale $y(t)$. Par contre, n'est pas considéré comme tel un point d'inflexion ou un point anguleux, car sa localisation est en général assez fortement "diluée" dans le bruit de mesure.

0.2.1 - Présence d'un extremum

Pour se fixer les idées, supposons que le modèle est le suivant :

$$T = f(t, \beta) = \frac{\beta^2}{1 + \beta} t^2 \exp(-\beta t) \quad (3)$$

On ne considère ici que les valeurs positives ou nulles de la valeur explicative t et du paramètre β . Dans ce cas les graphes de f , tracés pour trois valeurs (1, 2 et 3) de β sur la **figure 1a**, possèdent un maximum.

Une façon simple d'identifier β est de calculer la variation de l'amplitude du maximum T_{\max} en fonction du seul β . Cette fonction est tracée sur la **figure 1b**. Ainsi le relevé du maximum y_{\max} de la courbe expérimentale $y(t)$, après un éventuel lissage, permet de remonter à une estimation $\hat{\beta}$ du paramètre β si la fonction d'identification $T_{\max}(\beta)$ est monotone :

$$T_{\max}(\hat{\beta}) = y_{\max} = T_{\max}(\beta) + \varepsilon_{\max} \quad (4)$$

avec :

$$\varepsilon_{\max} = \varepsilon(\hat{t}_{\max})$$

où \hat{t}_{\max} est le temps correspondant à la plus grande valeur y_{\max} du signal mesuré. Ce temps n'est en fait qu'un estimateur, en général assez imprécis, du temps t_{\max} du maximum de la courbe théorique (3).

L'application de cette technique conduit à une erreur d'estimation e_{β} sur β :

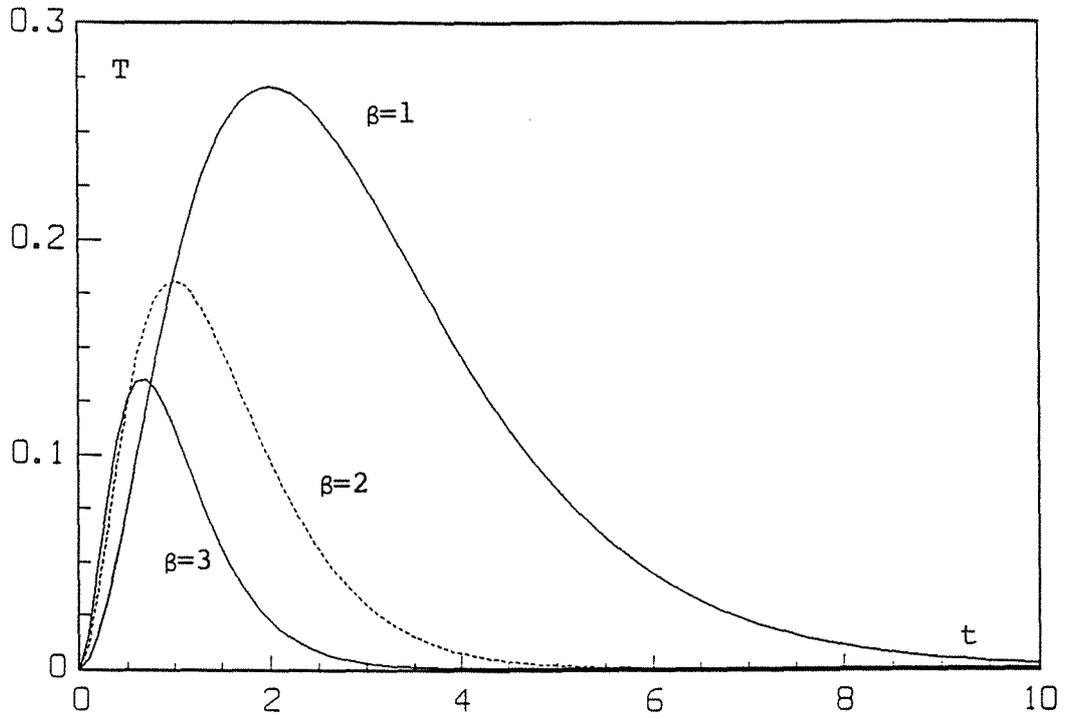


Fig. 1a. Graphe de la fonction $T=f(t, \beta)=\beta^2 t^2 \exp(-\beta t)/(1+\beta)$ pour trois valeurs du paramètre β

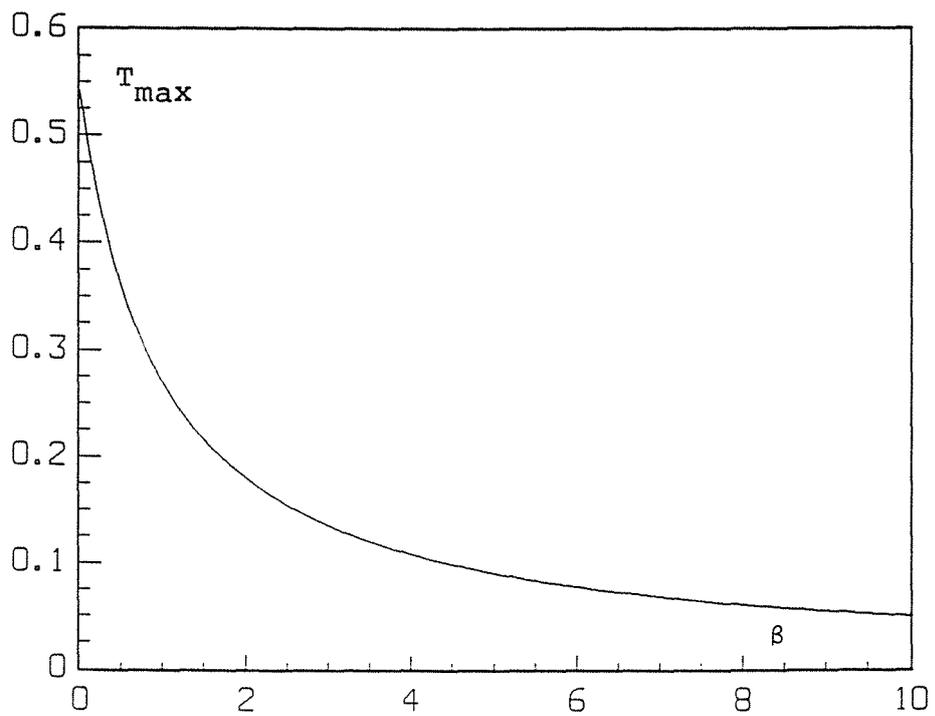


Fig. 1b. Graphe du maximum T_{\max} de f en fonction de β

$$e_{\beta} = \hat{\beta} - \beta$$

Si le bruit ε_{\max} est faible, on peut écrire au premier ordre :

$$y_{\max} = T_{\max}(\beta) + \frac{dT_{\max}}{d\beta} e_{\beta} + O(e_{\beta}^2)$$

ou encore :

$$e_{\beta} = \varepsilon_{\max} / X(\beta) \quad (5)$$

avec :

$$X = \frac{dT_{\max}}{d\beta} \approx \frac{\Delta T_{\max}}{\Delta \beta} \quad (6)$$

X est appelé coefficient de sensibilité de T_{\max} à β .

Le but de toute technique d'identification étant de minimiser l'erreur sur le paramètre recherché, la meilleure estimation correspond ici au maximum de la sensibilité $X(\beta)$, c'est-à-dire au maximum de la pente de la fonction $T_{\max}(\beta)$, si le bruit de mesure est supposé constant. Si cette fonction est indépendante de β , ou varie du moins assez peu avec β , e_{β} tend vers l'infini et l'estimation est impossible par cette technique du maximum.

De par sa définition (6), le coefficient de sensibilité dépend :

- des unités choisies pour exprimer β .
- du niveau absolu de β .

Afin de s'affranchir de ces deux points (le système d'unités est arbitraire et le niveau de β est en général inconnu a priori), il est souvent préférable de chercher à minimiser non pas l'erreur absolue e_{β} (minimum atteint ici en $\beta = 0$) mais l'erreur relative d'estimation e_{β}/β . Dans ce cas on recherche - voir l'équation (5) - une maximisation du coefficient de sensibilité réduit :

$$\beta X(\beta) = \beta \frac{dT_{\max}}{d\beta} = \frac{dT_{\max}}{d(\ln \beta)} \approx \frac{\Delta T_{\max}}{\Delta \beta / \beta}$$

Ce coefficient réduit représente en fait la variation du maximum du signal ΔT_{\max} induite par une variation relative $\Delta \beta / \beta$ (en %) du paramètre.

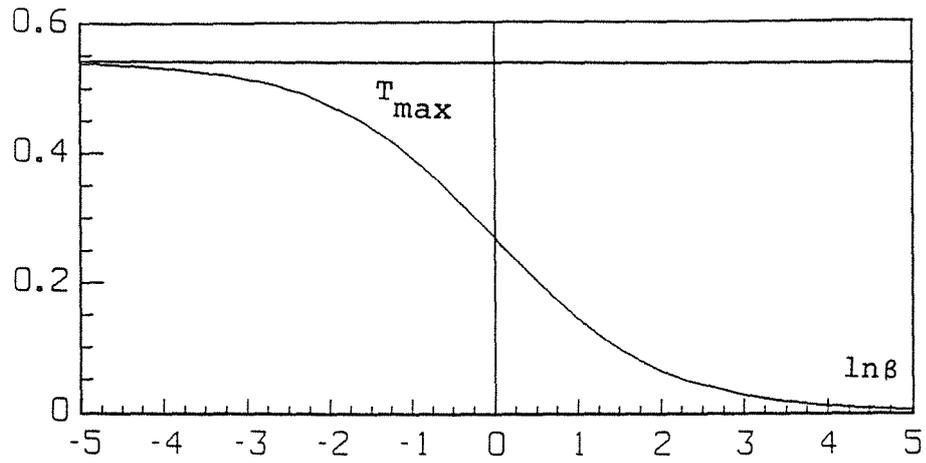


Fig. 1c. Graphe du maximum T_{\max} de f en fonction du logarithme népérien de β

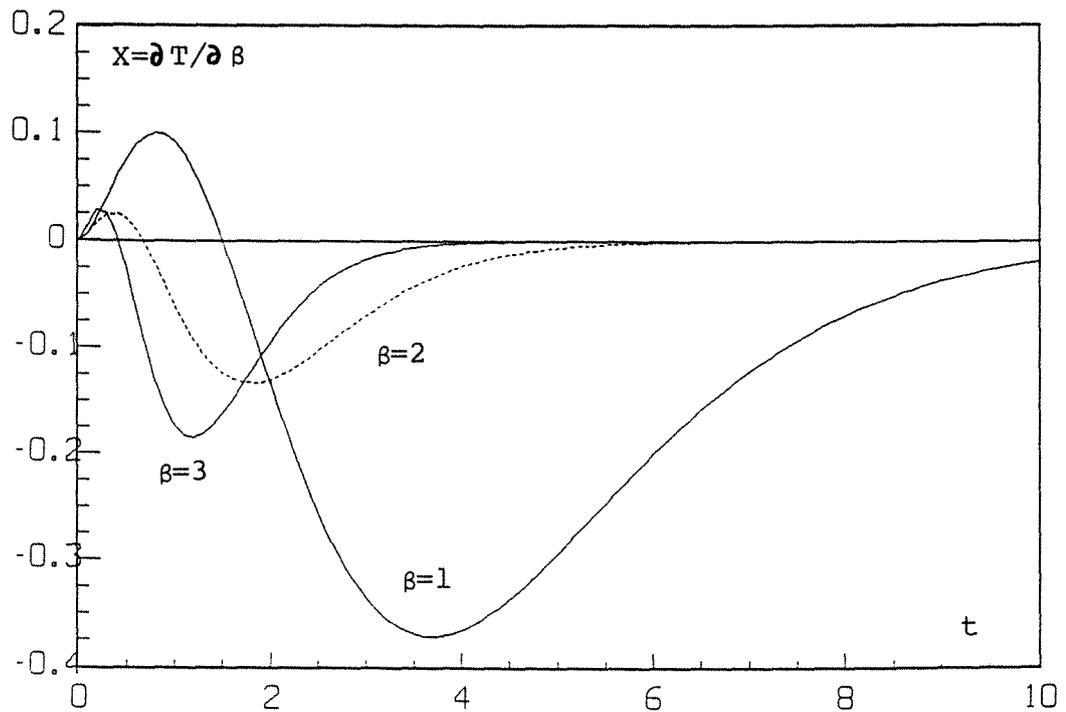


Fig. 1d. Variation temporelle du coefficient de sensibilité de T à β

En général, cette fonction $\beta X(\beta)$ ne peut être calculée de façon analytique car une expression explicite du modèle, du type de l'équation (3), n'est pas disponible. Plutôt que de chercher à dériver numériquement la fonction $T_{\max}(\beta)$, il est beaucoup plus rapide de tracer T_{\max} en fonction du logarithme du paramètre - voir figure 1c. L'optimum pour β correspond alors à l'extremum de pente de cette courbe, obtenu ici pour la valeur $\beta = 1$.

La recherche d'un optimum est intéressante si le paramètre β ne représente qu'une forme réduite du paramètre inconnu. Ainsi, en thermique, si β est un nombre de Biot et si on cherche à estimer le coefficient d'échange correspondant, cette optimisation permet un dimensionnement en conductivité et en taille du matériau utilisé.

Remarquons qu'ici seule a été envisagée l'identification à partir du point de signal maximum. On peut chercher une estimation de β à partir du signal complet, ce qui conduit à considérer un nouveau coefficient de sensibilité $X(t, \beta)$ défini par :

$$X(t, \beta) = \left. \frac{\partial T}{\partial \beta} \right|_t$$

Cette sensibilité dépend à la fois de t et de β car on a affaire à un cas non linéaire. Elle est tracée en fonction du temps t sur la figure 1d pour les trois valeurs précédentes de β . On peut alors considérer les valeurs $X(t_i, \beta)$ correspondant à n temps discrets t_i , comme un vecteur à n composantes X_i .

0.2.2 - Identification par la méthode des moindres carrés

Si le graphe de la fonction f ne possède aucun extremum ou si on ne désire pas utiliser la méthode précédente, deux approches sont possibles. La première consiste à utiliser les propriétés de l'expression explicite de la fonction f pour chercher à bâtir une procédure très spécifique d'estimation du paramètre β . On cherchera par exemple à exprimer le logarithme du signal en fonction de la racine carrée du temps pour estimer le paramètre à partir de la pente de la droite ainsi obtenue (mesure de conductivité par fil chaud), ou on considèrera le temps comme signal et la température,

après normalisation par son maximum, comme grandeur explicative (méthode flash de mesure de la diffusivité thermique, voir chapitre 1). Il est même possible de construire un nouveau signal à partir de T et t dans certains cas. Chaque problème est alors traité comme un cas particulier.

La deuxième approche consiste à utiliser la méthode, très générale, des moindres carrés. On écrit alors la relation (2) aux n instants discrets t_i de mesure :

$$y_i = T_i + \epsilon_i$$

avec :

$$y_i = y(t_i) \quad T_i = T(t_i, \beta) \quad \text{et} \quad \epsilon_i = \epsilon(t_i)$$

L'estimation $\hat{\beta}$ retenue est alors la valeur de β qui minimise le carré S d'une norme de l'écart entre mesures et modèle :

$$S(\beta) = \sum_{i=1}^n [y_i - T(t_i, \beta)]^2 \quad (7)$$

Ceci se met alors sous la forme :

$$\frac{\partial S}{\partial \beta} = -2 \sum_{i=1}^n [y_i - T_i] X_i = 0 \quad (8)$$

avec :

$$X_i = X(t_i, \beta)$$

On retrouve donc, au coeur de cette méthode très classique, la présence de ce vecteur X des coefficients de sensibilité :

$$X = (X_1 \ X_2 \ \dots \ X_n)^t$$

Considérons maintenant le cas d'un modèle linéaire où le coefficient de sensibilité X est indépendant de la valeur du paramètre β , ce qui peut s'écrire :

$$T = \beta X(t)$$

Notons que la linéarité, au sens de l'estimation de paramètres, porte sur le paramètre et non sur la variable explicative. Ainsi le modèle où le signal est $\beta \exp(-t^2)$, est encore linéaire.

Les relations (7) et (8) peuvent alors s'écrire sous les formes suivantes beaucoup plus "compactes" :

$$S(\beta) = (Y - \beta X)^t (Y - \beta X) \quad (9)$$

et :

$$(Y - \beta X)^t X = 0 \quad (10)$$

avec :

$$T = (T_1 \ T_2 \ \dots \ T_n)^t = \beta X$$

et :

$$Y = (y_1 \ y_2 \ \dots \ y_n)^t$$

L'estimateur $\hat{\beta}$ et l'erreur d'estimation e_β en découlent directement :

$$\hat{\beta} = (X^t X)^{-1} X^t Y \quad (11)$$

et :

$$e_\beta = \hat{\beta} - \beta = (X^t X)^{-1} X^t \epsilon \quad (12)$$

avec :

$$\epsilon = (\epsilon_1 \ \epsilon_2 \ \dots \ \epsilon_n)^t$$

L'espérance mathématique de e_β est bien nulle - $\hat{\beta}$ est donc un estimateur sans biais - et l'écart-type σ_β de $\hat{\beta}$ ou de e_β peut être calculé, à l'aide de la technique utilisée en Annexe 1.4, en supposant en outre les bruits de mesure ϵ_i indépendants et de même écart-type σ :

$$\sigma_\beta^2 = \sigma^2 (X^t X)^{-1} \quad (13)$$

Comme en section 0.2.1, on retrouve que la meilleure estimation, à bruit de mesure constant, passe par une maximisation du scalaire $X^t X$ bâti sur les sensibilités. Ceci permet d'optimiser ici le choix des temps de mesure. Dans le cas particulier du modèle :

$$T = \beta t \quad (14)$$

ce scalaire vaut $\sum_i t_i^2$ et l'estimateur $\hat{\beta}$ est alors :

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^n t_i y_i}{\sum_{i=1}^n t_i^2}$$

ce qui signifie que la meilleure procédure dans ce cas est de faire le maximum de mesures y_1 au temps le plus élevé possible ; ceci ne vaut évidemment que si l'on est sûr que le modèle (14) correspond bien à l'expérience.

0.3 - MODELE A DEUX PARAMETRES

Dans ce cas ($p = 2$) deux coefficients de sensibilité sont introduits :

$$X_1(t, \beta_1, \beta_2) = \left. \frac{\partial T}{\partial \beta_1} \right|_{t, \beta_2} \quad (15)$$

$$X_2(t, \beta_1, \beta_2) = \left. \frac{\partial T}{\partial \beta_2} \right|_{t, \beta_1} \quad (16)$$

Lorsque X_1 et X_2 sont indépendants de β_1 et β_2 , le problème d'estimation est linéaire et le signal s'écrit alors :

$$T = \beta_1 X_1(t) + \beta_2 X_2(t) \quad (17)$$

0.3.1 - Estimation minimale

La méthode minimale d'identification de β_1 et β_2 consiste à écrire la relation (17) en deux instants t_1 et t_2 et de "confondre" ensuite les valeurs mesurées y_1 et y_2 avec les valeurs exactes T_1 et T_2 du signal :

$$y_1 = X_1(t_1) \hat{\beta}_1 + X_2(t_2) \hat{\beta}_2 \quad (18)$$

$$y_2 = X_1(t_2) \hat{\beta}_1 + X_2(t_2) \hat{\beta}_2$$

Ceci s'écrit avantageusement sous forme matricielle :

$$Y = X \hat{\beta} \quad (19)$$

avec :

$$Y = (y_1, y_2)^t \quad \hat{\beta} = (\hat{\beta}_1 \quad \hat{\beta}_2)^t$$

et :

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} X_1(t_1) & X_2(t_1) \\ X_1(t_2) & X_2(t_2) \end{bmatrix}$$

\mathbf{X} est la matrice des sensibilités dont chaque colonne correspond au coefficient de sensibilité à un paramètre et chaque ligne à un instant différent. La résolution du système (19) fournit directement une estimation du vecteur paramètre β :

$$\hat{\beta} = \mathbf{X}^{-1}\mathbf{Y}$$

avec :

$$\beta = (\beta_1 \ \beta_2)^t = \mathbf{X}^{-1}\mathbf{T}$$

L'expression du vecteur erreur d'estimation e_β en résulte directement :

$$e_\beta = \beta - \hat{\beta} = \mathbf{X}^{-1} \epsilon$$

ϵ étant le vecteur bruit de mesure.

Là encore on remarque qu'une estimation de β n'est possible que si la matrice \mathbf{X} est inversible, ce qui peut encore s'écrire :

$$\text{Det}(\mathbf{X}) = X_1(t_1)X_2(t_2) - X_1(t_2)X_2(t_1) \neq 0$$

Dans le cas contraire, les coefficients de sensibilité X_1 et X_2 sont proportionnels et les paramètres β_1 et β_2 sont corrélés vis-à-vis du signal. Par contre ici, la maximisation du déterminant de \mathbf{X} n'est pas le meilleur critère pour le choix des instants de mesure. En effet, la matrice des covariances de β ou de e_β peut être calculée :

$$\text{cov}(e_\beta) = \sigma^2 (\mathbf{X}^t \mathbf{X})^{-1} \quad (20)$$

pour un bruit de mesure ϵ_i ($i = 1, 2$) non corrélé, et de même écart-type σ avec :

$$\text{cov}(e_\beta) = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \text{cov}(e_{\beta 1}, e_{\beta 2}) \\ \text{cov}(e_{\beta 1}, e_{\beta 2}) & \sigma_2^2 \end{bmatrix} \quad (21)$$

Les termes diagonaux σ_1^2 et σ_2^2 - carrés des écarts-types des estimateurs de β_1 et β_2 - peuvent donc être évalués :

$$(\sigma_1/\sigma)^2 = \frac{x_{22}^2 + x_{12}^2}{\text{Det}^2(\mathbf{X})} \quad \text{et} \quad (\sigma_2/\sigma)^2 = \frac{x_{11}^2 + x_{21}^2}{\text{Det}^2(\mathbf{X})} \quad (22)$$

Ce sont ces expressions qui sont à minimiser lorsque la meilleure estimation de chacun des paramètres β_1 et β_2 est recherchée de façon indépendante par cette technique minimale. Dans le cas particulier du modèle :

$$T = \beta_1 t + \beta_2 \quad (23)$$

on trouve :

$$\sigma_1/\sigma = \sqrt{2}/(t_2 - t_1)$$

et :

$$\sigma_2/\sigma = (t_1^2 + t_2^2)^{1/2}/(t_2 - t_1) \quad (24)$$

avec :

$$t_2 > t_1$$

Ici l'optimum correspond à des instants de mesure très éloignés pour l'estimation de la pente β_1 alors que l'estimation de l'ordonnée à l'origine nécessite en outre une mesure au temps nul t_1 .

0.3.2 - Identification par la méthode des moindres carrés

Dans ce cas on dispose de n mesures y_i du signal T_i , ce qui permet d'écrire cette somme sous la forme :

$$S(\beta) = (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\beta)^t (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\beta)$$

la matrice des sensibilités \mathbf{X} a maintenant n lignes (les temps de mesure) et $p = 2$ colonnes (les deux paramètres) :

$$X_{ij} = X_j(t_i)$$

La minimisation de S par rapport aux deux paramètres conduit à l'estimateur suivant :

$$\hat{\beta} = (X^t X)^{-1} X^t Y$$

L'erreur de mesure e_β en résulte directement en remplaçant Y par ϵ dans l'expression précédente. On montre de même manière qu'en section 0.3.1 et avec les mêmes hypothèses que sa matrice de covariance est :

$$\text{cov}(e_\beta) = (X^t X)^{-1} \sigma^2 \quad (25)$$

Là encore c'est la matrice des sensibilités X qui permet de minimiser les écarts-types σ_1 et σ_2 des erreurs d'estimation grâce à un choix judicieux des instants de mesure.

La matrice $(X^t X)^{-1}$ peut s'écrire :

$$(X^t X)^{-1} = \frac{1}{\text{Det}(X^t X)} A$$

Si le déterminant de $X^t X$ est faible, non pas dans l'absolu, mais par rapport au coefficient diagonal A_{pp} ($p = 1$ ou 2) de A , le paramètre β_p sera très difficile à estimer. Dans le cas particulier du modèle (23), on peut ainsi calculer les écarts-types des estimateurs :

$$\frac{\sigma_1}{\sigma} = \frac{1}{\sigma_t \sqrt{n}} \quad \text{et} \quad \frac{\sigma_2}{\sigma} = \frac{1}{\sqrt{n}} (1 + \bar{t}^2 / \sigma_t^2)^{1/2} \quad (26)$$

\bar{t} étant la moyenne des n temps de mesure t_i et σ_t^2 la variance de ceux-ci en les considérant comme un échantillon malgré leur nature évidemment déterministe :

$$\bar{t} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i \quad \text{et} \quad \sigma_t^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (t_i - \bar{t})^2 \quad (27)$$

Remarquons que les expressions correspondantes - relations (24) - de la méthode "minimale" d'estimation constituent en fait le cas particulier ($n = 2$) pour lequel la somme des moindres carrés S est d'ailleurs nulle.

Les relations (26) montrent qu'une bonne estimation de la pente β_1 nécessite des temps de mesure les plus dispersés possible alors que celle de β_2 réclame une minimisation de \bar{t} / σ_t .

Pour \bar{t} et σ_t fixés, peut-on comparer les qualités respectives des estimateurs de β_1 et de β_2 ? σ_2 et σ ont la même unité que le signal T et leur rapport caractérise bien le passage d'un rapport signal sur bruit de mesure (en normant le bruit par rapport au signal théorique au temps nul) à une erreur quadratique relative d'estimation e_{β_2}/β_2 :

$$K_2 = \frac{\sigma_2/\beta_2}{\sigma/\beta_2} = (1 + \bar{t}^2/\sigma_t^2)^{1/2}/\sqrt{n}$$

σ_1 et σ n'ayant pas les mêmes unités, il est possible de normer ce dernier, l'écart-type du bruit de mesure, par la "dynamique" de la mesure $\beta_1(t_n - t_1)$ représentant la variation théorique du signal entre la première et la dernière mesure. On a alors :

$$K_1 = \frac{\sigma_1/\beta_1}{\sigma_1/(\beta_1 \Delta t)} = \frac{1}{\sqrt{n} \sigma_t^*}$$

avec :

$$\sigma_t^* = \sigma_t/\Delta t \quad \text{et} \quad \Delta t = t_2 - t_1$$

K_1 et K_2 , qui sont alors comparables, représentent donc ce que l'on a coutume d'appeler des rapports d'incertitudes relatives :

$$\frac{\Delta \beta_p}{\beta_p} = K_p \frac{\Delta T}{T} \quad \text{pour } p = 1, 2$$

0.4 - DEGRE DE LIBERTE PARAMETRIQUE

Dans le cas du modèle linéaire à deux paramètres qui vient d'être traité :

$$T = \beta_1 t + \beta_2$$

les coefficients de sensibilité, dont les variations temporelles sont données sur la **figure 2a**, sont linéairement indépendants car non proportionnels (cette notion d'indépendance linéaire s'entend en considérant chaque fonction $X_1(t)$ et $X_2(t)$ comme un vecteur ayant une infinité de composantes, chaque composante correspondant à une valeur différente du temps). Dans ce cas une mauvaise identification de β_1 ou de β_2 ne peut résulter que d'un mauvais choix des instants de mesure comme il a été montré plus haut (ou à un bruit trop important) mais celle-ci ne peut être imputée à une caracté-

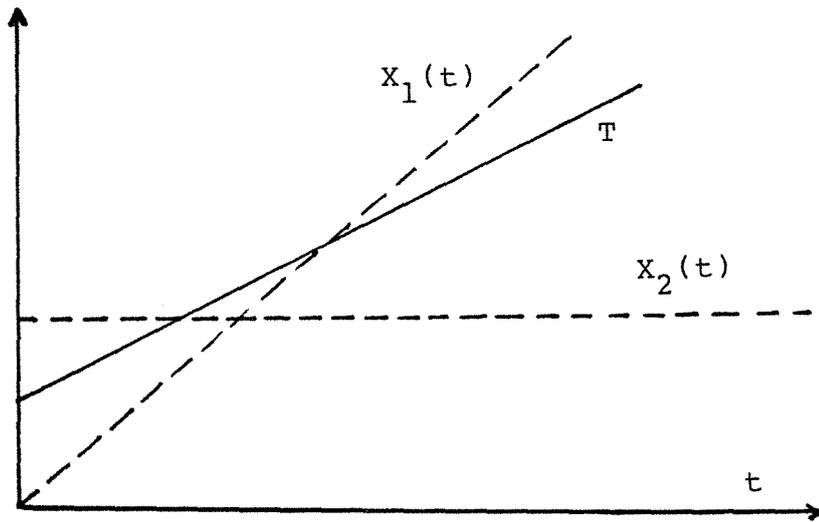


Fig. 2a. Modèle $T = \beta_1 t + \beta_2$

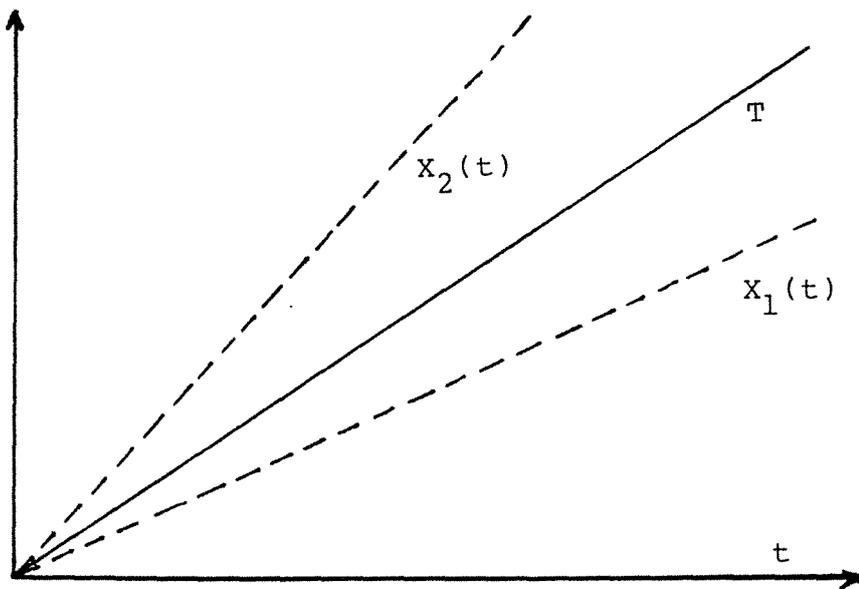


Fig. 2b. Modèle $T = \beta_1 \beta_2 t$

ristique intrinsèque du modèle. Ce modèle à deux paramètres a donc bien deux degrés de liberté.

Considérons maintenant le modèle non linéaire suivant :

$$T = \beta_1 \beta_2 t \quad (28)$$

Il est évident que les paramètres β_1 et β_2 ne peuvent être estimés séparément et que seul leur produit est accessible. En utilisant la même approche que plus haut on constate, sur la **figure 2b**, que les coefficients de sensibilité sont rigoureusement proportionnels. Ce modèle à deux paramètres n'a donc qu'un seul degré de liberté.

Entre ces deux modèles extrêmes, il existe énormément de cas intermédiaires pour lesquels la situation est beaucoup moins tranchée.

Nous allons tenter d'illustrer ce propos en partant d'un exemple concret rencontré au Laboratoire et concernant le problème de l'étalonnage d'une caméra infrarouge.

Le signal est une tension délivrée par le détecteur (après préamplification) qui est exprimée en unités arbitraires (les unités isothermiques ou UI proportionnelles à une tension). Ce signal électrique U ne dépend que de la température T (en degrés Kelvin) de l'objet observé lorsque celui-ci est un corps noir. Le constructeur propose ainsi une loi d'étalonnage qui a la même forme que la loi de Planck :

$$U = A / [\exp(B/T) - 1]$$

Les deux constantes A et B dépendant à la fois de l'ouverture et de l'objectif utilisé.

En pratique, le deuxième terme du dénominateur peut être négligé devant l'exponentielle et le modèle est alors le suivant :

$$U(T, A, B) = A \exp(-B/T) \quad (29)$$

La caméra est réétalonnée chaque année chez le constructeur et les valeurs estimées des paramètres (A, B) ont été :

$$(A_1, B_1) = (470\ 000, 2940) \quad \text{en 1990}$$

$$(A_2, B_2) = (527\ 000, 2980) \quad \text{en 1991}$$

Craignant que la dérive de ces coefficients ne provienne d'un vieillissement du détecteur, les courbes d'étalonnages ont été comparées. En fait, elles sont pratiquement superposables, notamment dans la zone d'emploi de la caméra (290 à 350°K).

Afin d'éclaircir ce paradoxe, les deux coefficients de sensibilité X_A et X_B , dérivées partielles de U par rapport aux deux paramètres A et B peuvent être aisément calculés et on montre :

$$A.X_A = U$$

$$B.X_B = - B.U/T$$

Les variations du signal de tension U et des deux sensibilités réduites $A.X_A (\approx U)$ et $B.X_B$ avec la température absolue T sont données sur la **figure 3a**. On constate que les deux courbes de sensibilité ont la même forme, ce qui semble indiquer leur proportionnalité, dans la plage de température de travail.

Ceci est confirmé en construisant leur rapport :

$$\frac{A.X_A}{B.X_B} = - \frac{T}{B} \approx - \frac{T_m}{B} \approx 0,1 \quad (30)$$

où T_m est la température moyenne de travail qui peut être prise égale à environ 320°K.

A ce stade, il est clair que les coefficients de sensibilité sont liés et qu'en conséquence les deux paramètres A et B ne peuvent pas être identifiés simultanément. Comme dans le cas du modèle (28), on a ici affaire à un seul degré de liberté mais ni A ni B ne semblent être le paramètre associé

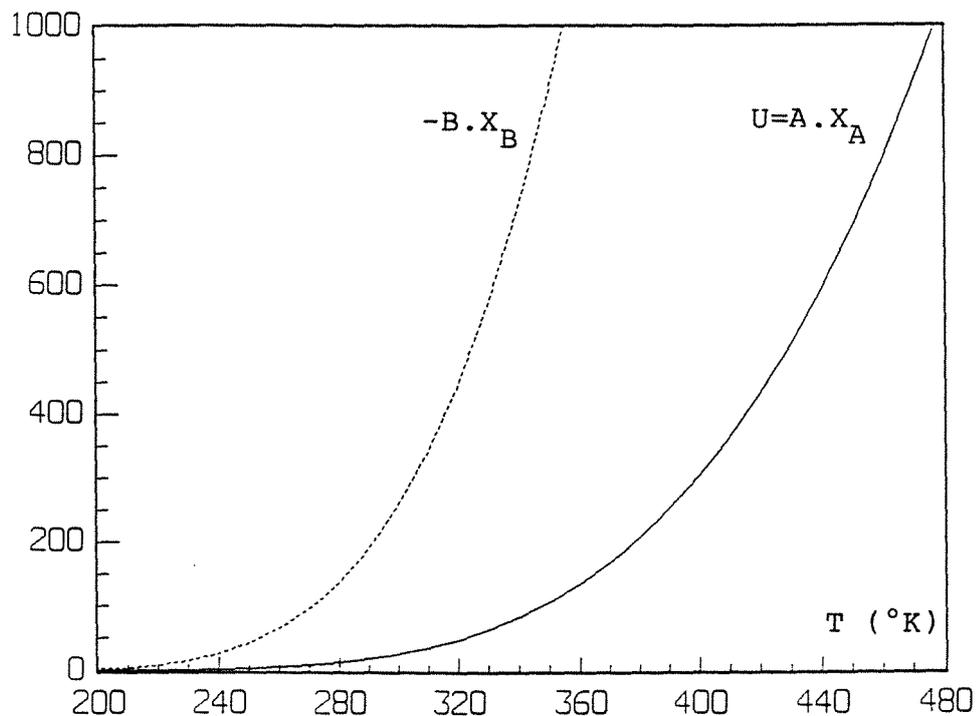


Fig. 3a. Signal U (en unités isothermes ou UI) et sensibilités réduites $A \cdot X_A$ et $B \cdot X_B$ en fonction de la température absolue T ($A=A_1$; $B=B_1$)

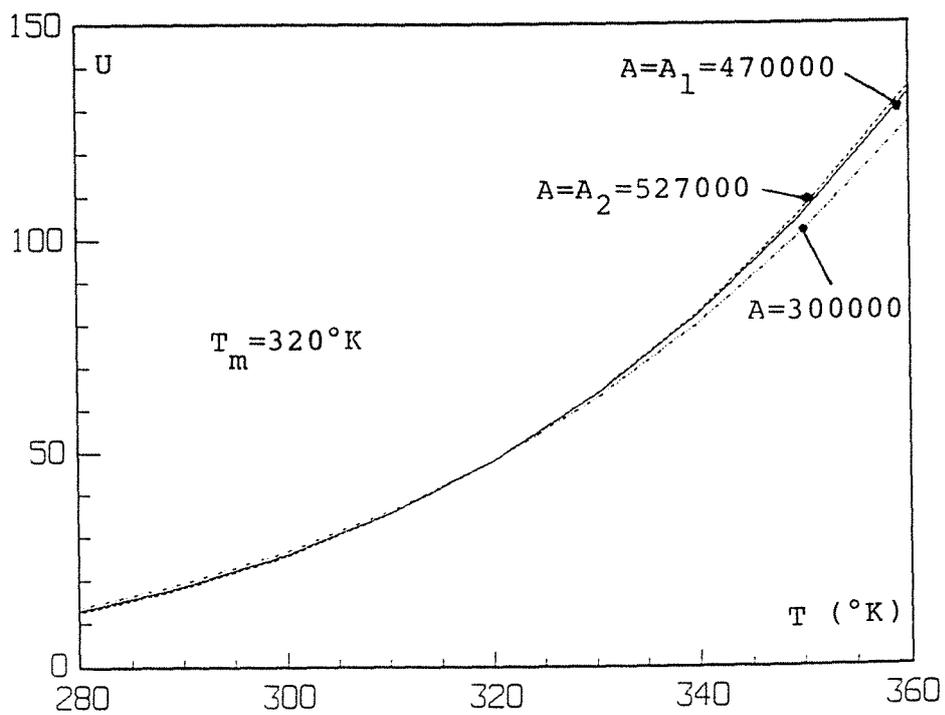


Fig. 3b. Signal U (en UI) en fonction de T pour $K=3,87$ et trois valeurs de A

à ce degré puisqu'ils varient d'une année sur l'autre. Comme formellement deux paramètres sont présents dans le modèle, il est possible d'effectuer un changement de paramétrage en passant du couple (A, B) au couple (A, K) où K s'exprime à l'aide de A et de B :

$$K = K(A, B) \quad (31)$$

Dans le nouveau paramétrage le signal U est fonction de A et de K et on peut introduire deux nouveaux coefficients de sensibilité Y_A et Y_K :

$$Y_A = \left. \frac{\partial U}{\partial A} \right|_{t, K} \quad \text{et} \quad Y_K = \left. \frac{\partial U}{\partial K} \right|_{t, A}$$

Une variation du signal dU, à température constante ($dT = 0$) peut s'écrire alors de deux façons différentes suivant qu'on envisage l'ancien ou le nouveau paramétrage :

$$dU = X_A dA + X_B dB = Y_A dA + Y_K dK \quad (32)$$

or dK peut se calculer à l'aide de sa définition (31) :

$$dK = K'_A dA + K'_B dB \quad (33)$$

En identifiant les termes en dA et en dB dans la relation (32), on obtient les expressions des nouvelles sensibilités en fonction des anciennes :

$$X_A = Y_A - \frac{K'_A}{K'_B} X_B$$

$$Y_K = \frac{1}{K'_B} X_B$$

Si on désire faire jouer à K le rôle de paramètre unique représentatif de l'unique degré de liberté, il suffit d'annuler la nouvelle sensibilité Y_A dans la gamme de température de travail ; on a alors :

$$\frac{K'_A}{K'_B} = X_A / X_B = - T/A \approx - T_m/A \quad (34)$$

La relation entre les deux membres extrêmes de cette équation peut être intégrée et la fonction $K(A, B)$ répondant à cette condition est alors :

$$K = \ln A - B/T_m$$

à une constante multiplicative près. Cette constante K peut être évaluée à partir des deux étalonnages précédents pour une température moyenne T_m de 320°K :

$$K = K(A_1, B_1) = 3,87 \quad \text{en 1990}$$

$$K = K(A_2, B_2) = 3,86 \quad \text{en 1991}$$

ce qui montre bien la quasi-invariance de la loi d'étalonnage de la caméra entre 90 et 91.

En exprimant maintenant B en fonction de A et de K , le modèle (29) s'écrit dans le nouveau paramétrage :

$$U = A \exp \left[- (\ln A - K) \frac{T_m}{T} \right] \quad (35)$$

Cette fonction est pratiquement indépendante de la valeur de A lorsqu'on ne s'écarte pas trop de la température moyenne T_m . Pour illustrer ce point, le graphe de cette fonction a été tracé pour trois valeurs A_1, A_2 et 300.000 du paramètre A (et pour $K = 3,87$) sur la **figure 3b**. Cette indépendance de la valeur de A peut être mise analytiquement en évidence si l'équation (35) est réécrite sous la forme :

$$U = A^{(1 - T_m/T)} \cdot \exp(KT_m/T) \approx \exp(KT_m/T) \quad (36)$$

Les nouvelles sensibilités issues du modèle (35) sont alors :

$$A \cdot Y_A = U \frac{T - T_m}{T} \quad \text{et} \quad K \cdot Y_K = UK \frac{T_m}{T}$$

Leur rapport, qui caractérise l'erreur que l'on commet par la prise en compte du paramètre unique K si la température T s'écarte d'une valeur $\Delta T (= T - T_m)$ de la valeur moyenne s'écrit :

$$\frac{A \cdot Y_A}{K \cdot Y_K} = - \frac{\Delta T}{T_m} \quad (37)$$

Ce rapport vaut moins de 1 % pour un écart ΔT de 10°C et il faut un écart supérieur à 120°C pour qu'il atteigne 10 %.

Cette technique très générale de réduction de paramètres a été également employée en section 2.3 de ce mémoire.

0.5 - CONCLUSION

Il a été montré dans le présent chapitre, qui reprend d'ailleurs des notions qu'on peut trouver chez Beck et col. [15 - chapitre 1], que l'étude des coefficients de sensibilité était capitale dans les problèmes d'estimation de paramètres. En effet, l'erreur d'estimation qui est commise dépend de leur nature, du bruit de mesure et des valeurs de la variable explicative qui sont retenues pour cette mesure dans les modèles où le signal est unique.

Ainsi le tracé des variations des coefficients de sensibilités avec cette variable explicative devrait être faite systématiquement dans tout nouveau problème d'estimation de paramètres.

En outre, lorsque le modèle comporte plus d'un paramètre à estimer, le problème est souvent mal posé et il a lieu de distinguer le nombre de paramètres du nombre de degrés de liberté paramétrique du modèle. Il est parfois possible d'utiliser une technique analytique simple pour réduire celui-ci.

CHAPITRE 1

MÉTHODE FLASH ET IDENTIFIABILITÉ DES PARAMÈTRES

MÉTHODE FLASH ET IDENTIFIABILITÉ DES PARAMÈTRES

1.1 - INTRODUCTION

Parmi les différentes techniques de caractérisation des matériaux solides homogènes, la méthode flash tient une place un peu à part : apparue plus tardivement que les méthodes de détermination de la chaleur spécifique par calorimétrie ou de mesure de la conductivité thermique par plaque chaude gardée, elle est la seule à reposer entièrement sur un modèle thermocinétique où la mesure du temps joue le même rôle que celui de la température. Notons que la méthode de mesure de la conductivité par fil chaud qui nécessite elle aussi le passage par un régime transitoire est en fait basée sur le régime asymptotique établi caractérisé par une indifférence au choix de l'origine des temps.

Depuis sa découverte par Parker et col. [1], la méthode flash constitue la méthode la plus utilisée pour la mesure de la diffusivité d'échantillons solides. Son extension à des matériaux poreux humides - Moyne et col. [2], multicouches - Degiovanni [3], composites stratifiés - Maillet et col. [4] et matériaux semi-transparents - voir Tan Heping et col. [5] - a été développée avec profit, notamment au sein du LEMTA. Elle constitue la base des méthodes, présentées plus loin dans ce travail, relatives à la mesure des propriétés thermophysiques des dépôts - voir le chapitre 2 - et au contrôle non destructif de composites stratifiés - voir le chapitre 3.

La méthode originale développée par Parker et col. [1] reposait sur un modèle analytique correspondant à une expérience avec pertes thermiques sur la face avant de l'échantillon, c'est-à-dire du côté de l'excitation, tandis que l'identification de la diffusivité s'effectuait grâce à la mesure du temps de demi-montée en température de la face arrière, c'est-à-dire du côté opposé à l'excitation.

L'influence des pertes radiatives ou convectives sur la détermination de la diffusivité a été étudiée par Cowan [6], Cape et Lehman [7], Faure

[8], Jamet et col. [9], Clark et Taylor [10]. Cependant dans toutes ces méthodes l'estimation des pertes pose problème : cette dernière a souvent lieu pendant la phase de décroissance du thermogramme [8] et se pose alors la question de la constance du coefficient d'échange sur des durées importantes, ou alors la non-linéarisation de ces pertes suppose connue l'émissivité de l'échantillon et nécessite en outre une démarche itérative [7, 9].

Des méthodes d'identification plus élaborées utilisant exclusivement la partie ascendante du thermogramme, pour laquelle la sensibilité à la diffusivité est la plus importante - voir la section 1.3 - ont été développées par Degiovanni [11] (méthode des temps partiels) et plus récemment par Balageas [12] (utilisation de la méthode de Parker aux temps courts par reconstruction du thermogramme sans perte) et Degiovanni et Laurent [13 et 14] (méthode des moments temporels partiels).

Dans les sections suivantes, on va examiner l'apport que peut constituer l'adoption de la méthode d'étude de la sensibilité préconisée par Beck et Arnold [15], pour justifier et préciser les limites des méthodes [11 à 14] qui reposent sur la même solution analytique du problème direct.

1.2 - LES PARAMETRES DE LA METHODE FLASH

1.2.1 - Le modèle

Le principe de la méthode consiste à exciter thermiquement la face avant d'un échantillon solide cylindrique, opaque, homogène et isotrope, de propriétés thermophysiques constantes - conductivité λ , chaleur volumique ρc et diffusivité $a = \lambda/\rho c$ - d'épaisseur e et de rayon r_s , initialement isotherme, par une impulsion de flux de densité d'énergie Q (J/m^2) uniforme sur une portion circulaire, de rayon $r_p \ll r_s$, de la face avant. L'échantillon est d'autre part soumis, suite à son échauffement, à des pertes sur ses trois faces, qui sont caractérisées par trois coefficients d'échange, h_1 sur la face avant, h_2 sur la face arrière et h_r sur la face latérale. Chaque un de ces coefficients est supposé en outre constant dans le temps et uniforme sur la face où il s'applique. Un schéma de l'expérience est représenté sur la figure 1.

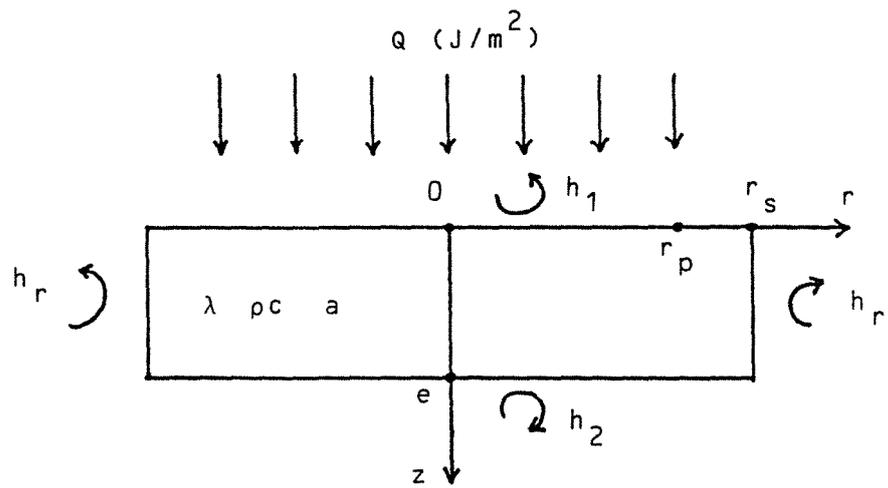


Fig. 1. La méthode flash: géométrie du modèle

Afin de garder à l'étude de sensibilité qui va suivre toute sa simplicité, on se placera dans le cas où :

- la totalité de la face avant est excitée ($r_p = r_s$)
- les pertes thermiques radiales sont négligées ($h_r = 0$) ou, ce qui revient au même, le rayon de l'échantillon r_s est infini.
- l'impulsion est une distribution temporelle de Dirac.

Moyennant ces hypothèses, qui peuvent être respectées en pratique si certains critères sont remplis - voir respectivement Lachi [16] et Degiovanni [11 et 17] - le problème thermique est unidirectionnel et transitoire. L'équation de la chaleur, accompagnée de ses conditions associées, peut être alors résolue par la méthode de séparation des variables et la température T , en un point P d'abscisse z au temps t , est donnée par la relation :

$$T = \frac{Q}{\rho c e} Z_z(z^*, t^*, H_1, H_2) \quad (1)$$

où t^* ($= at/e^2$) est le nombre de Fourier de l'échantillon, z^* ($= z/e$) la profondeur réduite par rapport à la face avant, et H_1 et H_2 les nombres de Biot caractérisant les pertes en faces avant et arrière :

$$H_1 = h_1 e/\lambda \qquad H_2 = h_2 e/\lambda$$

Si on se place en face arrière ($z^* = 1$), la température (1) prend alors la forme suivante :

$$T = \frac{Q}{\rho c e} Z(t^*, H_1, H_2) \quad (2)$$

où les fonctions Z_z et Z sont données en Annexe 1.1 sous forme de séries.

Il est d'autre part possible d'obtenir la température en face arrière, dans l'espace de Laplace, par la méthode des quadripôles (voir Degiovanni 18) :

$$\theta^* = \mathcal{L}^*[T] = \frac{Q}{\rho c e} \bar{Z}(p^*, H_1, H_2) \quad (3)$$

avec :

$$\bar{Z} = [s \operatorname{sh}(s) + (H_1 + H_2) \operatorname{ch}(s) + H_1 H_2 \operatorname{sh}(s)/s]^{-1} \quad (4)$$

et :

$$s = \sqrt{p^*}$$

$$\bar{Z} = \mathcal{L}^*[Z] = \int_0^{\infty} \exp(-p^* t^*) Z(t^*, H_1, H_2) dt^*$$

\mathcal{L}^* désignant la transformée de Laplace par rapport à la variable réduite de Laplace p^* .

1.2.2 - Réduction du modèle

1.2.2.1 - Elimination de la température limite adiabatique

L'expression (2), ou son équivalent (3) dans l'espace de Laplace peut être utilisée pour mener à bien une estimation de paramètres lorsque l'on dispose d'une mesure expérimentale $T_{\text{exp}}(t)$ de la fonction T .

A ce stade, deux types de paramétrage peuvent être envisagés :

a) - dans l'absolu l'équation (2) fournit formellement quatre paramètres :

- * la température $T_{\text{lim}} (= Q/\rho c e)$ correspondant à une expérience adiabatique
- * les nombres de Biot H_1 et H_2
- * la fréquence caractéristique $\nu (= a/e^2)$ de l'échantillon qui est intégrée, en compagnie du temps t , dans le nombre de Fourier t^* du modèle théorique.

Il est ainsi possible de définir un vecteur paramètre :

$$\beta = (T_{\text{lim}}, H_1, H_2, \nu)^t$$

La première technique, très générale, d'estimation consiste à minimiser la somme des carrés des écarts entre la température $T_{\text{exp}}(t)$ et la

température T du modèle (2) pour les différents points de mesure et ce, par rapport aux composantes du vecteur β . Une méthode de Gauss des moindres carrés non linéaires a été ainsi employée par Raynaud et col. [19] pour minimiser cette somme sur un intervalle temporel $[0, t_{\text{sup}}]$ en réduisant graduellement la borne supérieure t_{sup} de l'intervalle d'identification - technique dite de l'estimation séquentielle (voir Beck et Arnold [15]). Dans ce dernier travail, le coefficient de perte $H = H_1 = H_2$ était supposé faible, mais connu ou estimé à l'aide d'un refroidissement exponentiel aux temps longs (voir section 1.5).

- b) - Une autre façon d'envisager le problème est de tirer parti de la linéarité du modèle en $T_{\text{lim}} (= Q/\rho c e)$; en effet, si on écrit la relation (2) à l'instant t_{max} pour lequel la température mesurée (supposée sans bruit) atteint son maximum T_{max} , il est possible de modifier le modèle et de travailler à partir d'un signal T^* mesurable par l'expérience :

$$T^* = \frac{T}{T_{\text{max}}} = \frac{Z(t^*, H_1, H_2)}{Z_{\text{max}}(H_1, H_2)} \quad (5)$$

avec :

$$Z_{\text{max}}(H_1, H_2) = Z(t_{\text{max}}^*, H_1, H_2) \quad (6)$$

et :

$$t_{\text{max}}^* = t_{\text{max}}^*(H_1, H_2) \quad (7)$$

Notons que cette réduction est en outre intéressante lorsque la loi d'étalonnage du capteur de température est inconnue mais linéaire, T^* étant alors mesurée à l'aide d'un rapport de tensions.

Ainsi, lorsque T^* est le signal acquis (au bruit de mesure près), le modèle ne comporte plus que trois paramètres H_1 , H_2 et ν .

1.2.2.2 - Prise en compte d'un nombre de Biot unique

Degiovanni [11] et Balageas [12] ont montré, en travaillant empiriquement sur différents types de répartition des coefficients d'échange que

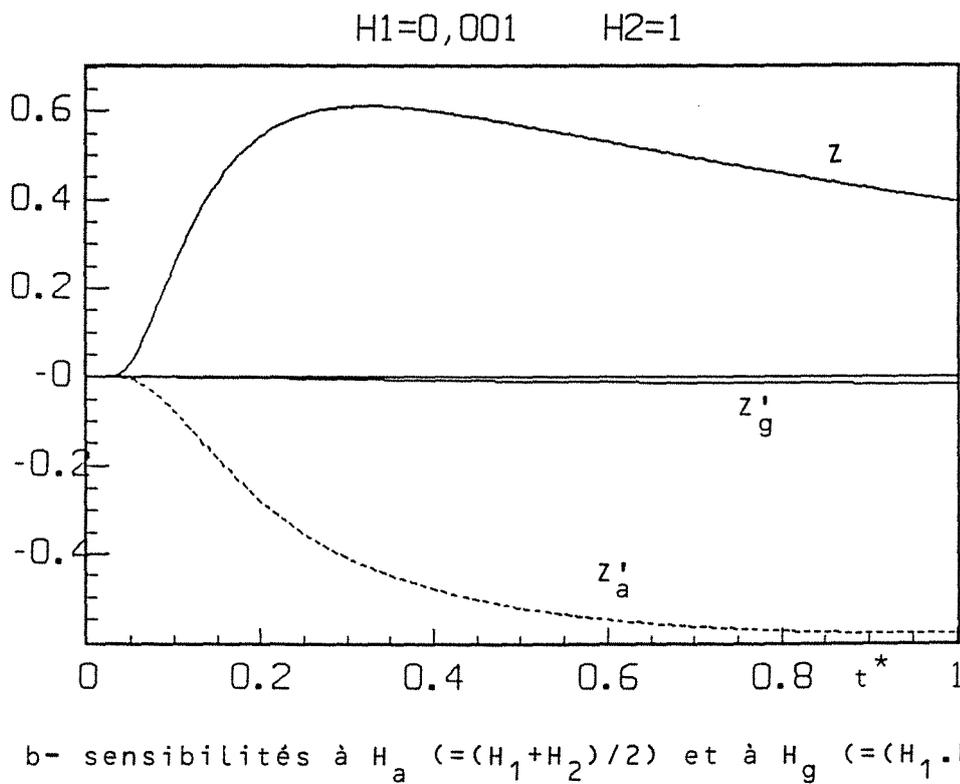
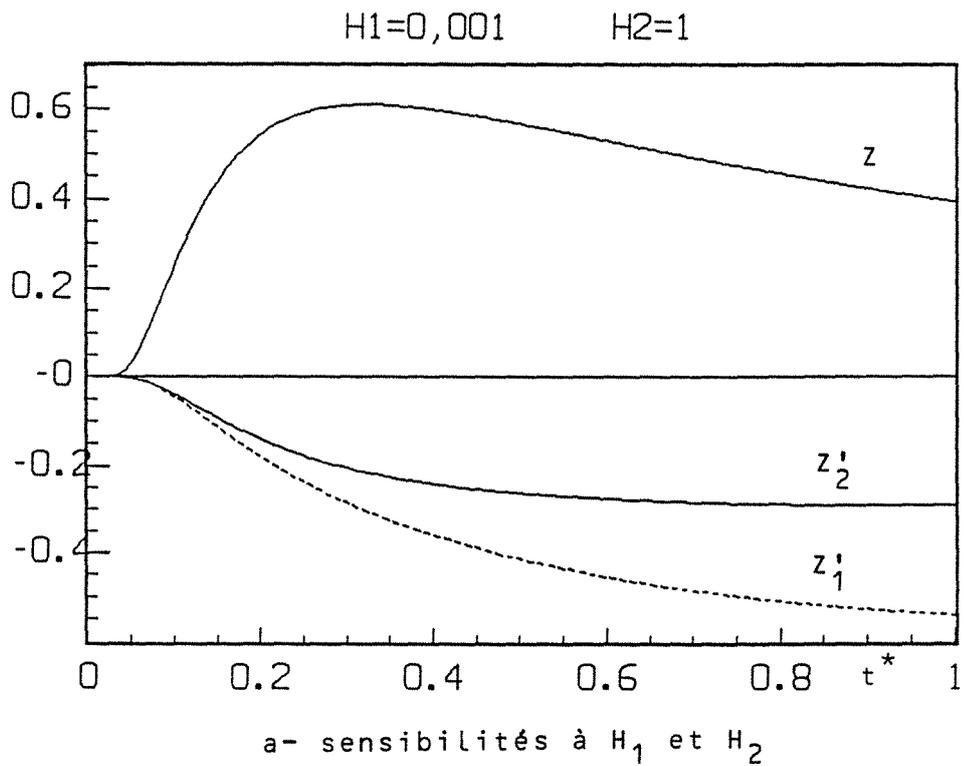


Fig. 2. Sensibilités du terme axial Z aux deux nombres de Biot des pertes (cas $H_1=0,001$ et $H_2=1$)

les nombres de Biot H_1 et H_2 (et éventuellement le nombre de Biot radial $H_r = h_r r_s / \lambda$) pouvaient être remplacés par un nombre de Biot unique H . Nous allons étudier, en utilisant des coefficients de sensibilité - voir [15] - si une telle hypothèse est justifiable, dans le cas d'échanges très dissemblables sur les deux faces, en prenant :

$$H_1 = 10^{-3} \qquad H_2 = 1$$

Remarquons ici que la fonction Z , donnée en Annexe 1.1, ou sa transformée \bar{Z} - équation (4) - est une fonction symétrique en H_1 et H_2 , c'est-à-dire qu'il est possible de permuter les coefficients d'échange des deux faces, sans modifier le thermogramme en face arrière (ceci n'est par contre plus vrai en face avant pour $z = 0$). L'écriture de l'équation (4) peut alors s'effectuer à l'aide des nombres de Biot correspondant à la moyenne arithmétique H_a ou géométrique H_g de H_1 et de H_2 :

$$H_a = (H_1 + H_2)/2 \qquad H_g = (H_1 H_2)^{1/2}$$

Les coefficients de sensibilité de Z par rapport à H_1 et H_2 ou par rapport à H_a et H_g , peuvent alors être obtenus à partir de la relation (4) - voir Annexe 1.2 - avec :

$$Z'_i = \left. \frac{\partial Z}{\partial H_i} \right|_{t^*, H_{j \neq i}} \qquad \text{pour } i, j = 1, 2 \qquad (8)$$

$$Z'_i = \left. \frac{\partial Z}{\partial H_\alpha} \right|_{t^*, H_{\beta \neq \alpha}} \qquad \text{pour } \alpha, \beta = a, g \qquad (9)$$

Les coefficients de sensibilité Z'_1 et Z'_2 ou Z'_a et Z'_g sont tracés, ainsi que la fonction Z , en fonction de t^* , sur les figures 2a et b. Il est manifeste que Z'_1 et Z'_2 sont pratiquement proportionnels, ce qui se traduit par une corrélation entre H_1 et H_2 au sens de l'estimation de paramètres - voir [15]. Si on considère maintenant les sensibilités Z'_a et Z'_g , on constate que Z'_g est environ 30 fois plus faible que Z'_a . Dans un tel cas de figure, un seul paramètre caractérisant les pertes suffit pratiquement à expliquer la variation temporelle du terme Z (à ν fixé).

A ce stade il est nécessaire d'examiner les différents choix possibles pour le nombre de Biot unique équivalent :

- une première méthode, déjà utilisée par Zhang et col. [20], consiste à écrire les développements limités de $p^* \bar{Z}$, le produit de la transformée de Laplace de Z par la variable réduite de Laplace, au voisinage de $p^* = 0$ et pour p^* tendant vers l'infini, ce qui correspond, dans le domaine temporel, à des temps respectivement longs et courts ; en travaillant sur l'expression (4), on trouve ainsi :

$$p^* \bar{Z} = (2H_a + H_g^2)p^* - (1 + H_a + H_g^2/6)p^{*2} + o(s^5) \quad (10)$$

avec : $s = \sqrt{p^*}$ au voisinage de 0

et :

$$p^* \bar{Z} \sim 2s(1 - H_a/s) \exp(-s) \quad \text{quand } p^* \rightarrow \infty \quad (11)$$

Aux temps courts c'est donc la moyenne arithmétique H_a qui régit l'évolution de la température arrière, alors qu'aux temps longs, c'est le regroupement $(2H_a + H_g^2)$ qui joue ce rôle. Ainsi le nombre de Biot unique équivalent, aux temps courts, est donc :

$$H_o = H_a = (H_1 + H_2)/2 \quad (12)$$

alors qu'aux temps longs il s'agit de H_∞ tel que :

$$2H_\infty + H_\infty^2 = 2H_a + H_g^2$$

c'est-à-dire :

$$H_\infty = [(H_1 + 1)(H_2 + 1)]^{1/2} - 1 \quad (13)$$

- une deuxième méthode consiste à construire tout d'abord les courbes de variation du maximum de Z et du nombre de Fourier correspondant à ce maximum, t_{\max}^* défini par l'équation (7), en fonction d'un nombre de Biot unique $H = H_1 = H_2$.

On peut ensuite choisir ce paramètre H de façon à ce que coïncident, soit les nombres de Fourier des maxima $t_{\max}^*(H, H)$ et $t_{\max}^*(H_1, H_2)$ - valeur $H = H_{t_{\max}}$ - soit les niveaux de ces maxima :

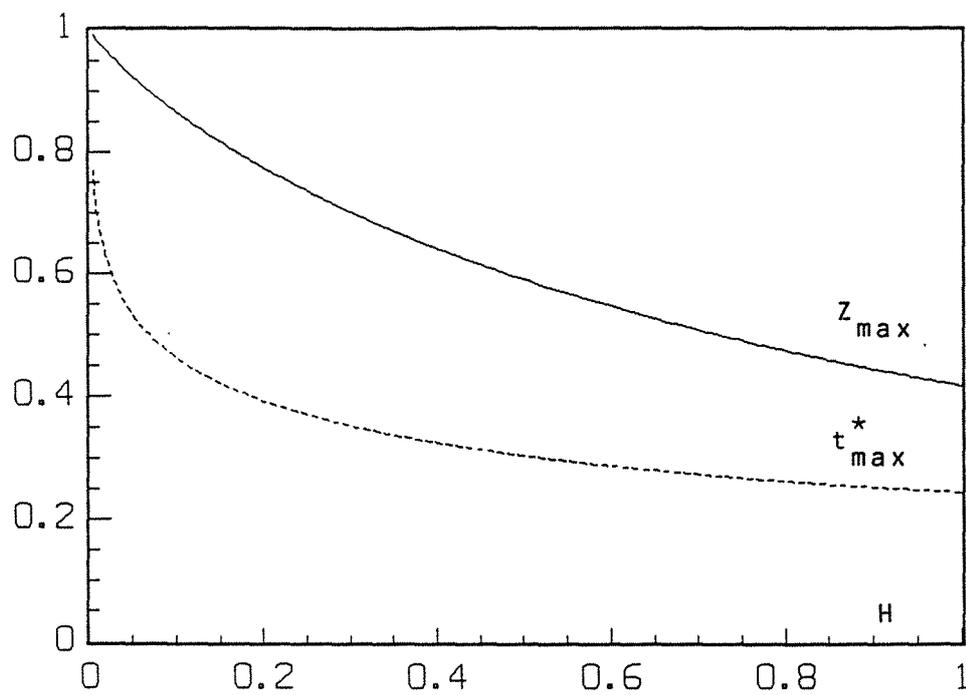


Fig. 3. Evolution du maximum du terme axial z_{\max} et de son nombre de Fourier correspondant t_{\max}^*

$$Z_{\max}(t_{\max}^*(H,H), H, H) \text{ et } Z_{\max}(t_{\max}^*(H_1, H_2), H_1, H_2)$$

- valeur $H = H_{Z_{\max}}$ -

Les fonctions Z_{\max} et t_{\max}^* ont été calculées en fonction de H à partir de la série (2) et la méthode de calcul retenue est exposée en Annexe 1.3.1. Les courbes correspondantes sont représentées sur la **figure 3**. On constate que Z_{\max} est évidemment égal à l'unité pour une expérience sans perte et décroît ensuite rapidement avec H , alors que t_{\max}^* part de l'infini (cas adiabatique), pour décroître ensuite de façon parallèle à Z_{\max} .

Les quatre valeurs de H susceptibles d'être retenues en tant que nombre de Biot unique équivalent, dans le cas présent, sont données dans la table 1.1 ainsi que les caractéristiques correspondantes du maximum de Z .

Nombre de Biot unique équivalent H	t_{\max}^*	Z_{\max}
$H_{t_{\max}} = 0,4000$	0,3253	0,6420
$H_{\infty} = 0,4149$	0,3217	0,6338
$H_{Z_{\max}} = 0,4572$	0,3126	0,6117
$H_o = H_a = 0,5005$	0,3042	0,5908
$H_1 = 10^{-3} ; H_2 = 1$	0,325	0,6114

Table 1.1 - Nombres de Biot uniques équivalents possibles H pour approcher un thermogramme en face arrière régi par deux nombres de Biot $H_1 \neq H_2$.

Les comparaisons entre le cas à deux nombres de Biot et les cas où l'on ne retient qu'un nombre de Biot unique sont présentés ici de trois façons différentes :

- sur les figures 4a à d, ce sont les termes axiaux Z, calculés à partir de l'équation (4) - qui sont tracés en fonction du nombre de Fourier. Ici c'est la courbe à nombre de Biot unique $H_{Z_{\max}}$ qui se rapproche le plus du thermogramme à deux coefficients d'échange, dans sa partie croissante.
- sur les figures 5a à d, ce sont les thermogrammes réduits par leurs maxima respectifs, T^* ($= T/T_{\max} = Z/Z_{\max}$), qui sont comparés.
- sur les figures 6a à d, c'est le résidu dû à la réduction de modèle, c'est-à-dire la différence des deux thermogrammes réduits T^* de chacune des figures 5 (thermogramme à deux coefficients soustrait du thermogramme à coefficient d'échange unique), qui est tracé en fonction de T^* correspondant au cas à deux nombres de Biot.

Sur les dernières figures, on constate que le nombre de Biot unique, dont la courbe approxime le mieux le thermogramme "réel" dans sa partie croissante, est compris entre H_{∞} et $H_{Z_{\max}}$. En effet, les résidus, dans cette phase de croissance, restent faibles (inférieurs à 0,007), tout en changeant de signe entre ces deux valeurs de H. Notons d'autre part que cette réduction s'accompagne d'un léger biais qui garde un signe constant dans cette phase, ce qui signifie qu'une identification d'un seul nombre de Biot entre les instants 0 et t_{\max}^* (temps correspondant à t_{\max}^*) s'accompagnera d'un faible résidu expérimental qui n'oscillera pas autour de zéro.

Remarquons également que le problème du choix optimum du nombre de Biot unique équivalent est quelque peu académique, car celui-ci est de toute façon compris entre H_{∞} et H_0 et si cet intervalle est large dans le cas étudié où le couple (H_1, H_2) vaut $(10^{-3}, 1)$, il est très faible dans un cas plus réaliste $(10^{-2}, 10^{-1})$ où il existe encore un facteur 10 entre les coefficients d'échange sur les deux faces de l'échantillon ; dans ce dernier cas, le couple (H_{∞}, H_0) vaut en effet $(0,054 ; 0,055)$ et la différence entre ces deux valeurs n'est pas accessible lors de l'identification - voir plus loin en section 1.3 les coefficients de sensibilité de T^* , ou de Z, à H.

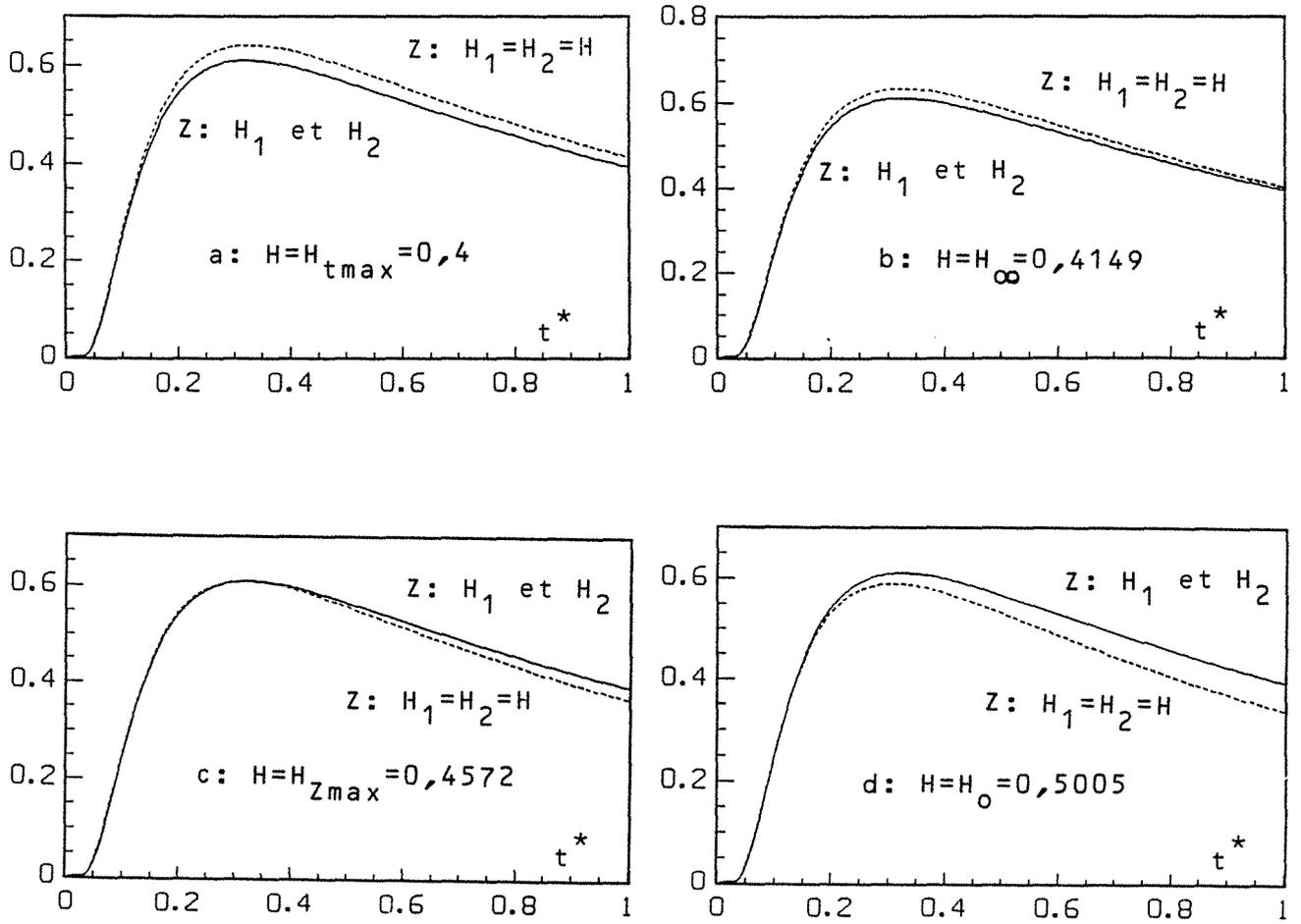


Fig. 4. Comparaison du terme axial Z obtenu avec $(H_1, H_2) = (0,001; 1)$ à celui correspondant à un nombre de Biot unique H

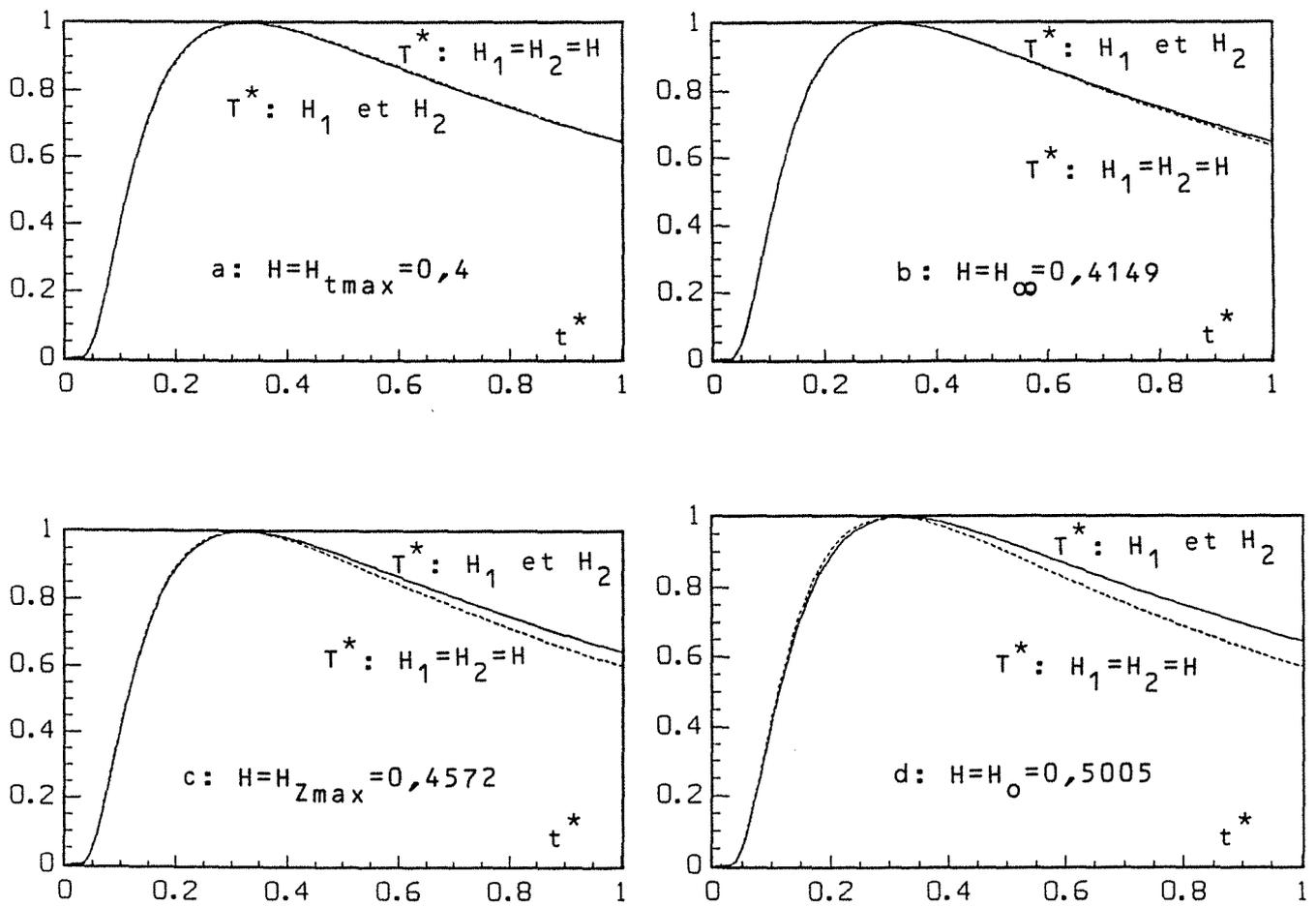


Fig. 5. Comparaison du thermogramme réduit $T^* = T/T_{\max}$ obtenu avec $(H_1, H_2) = (0,001; 1)$ à celui correspondant à un nombre de Biot unique H

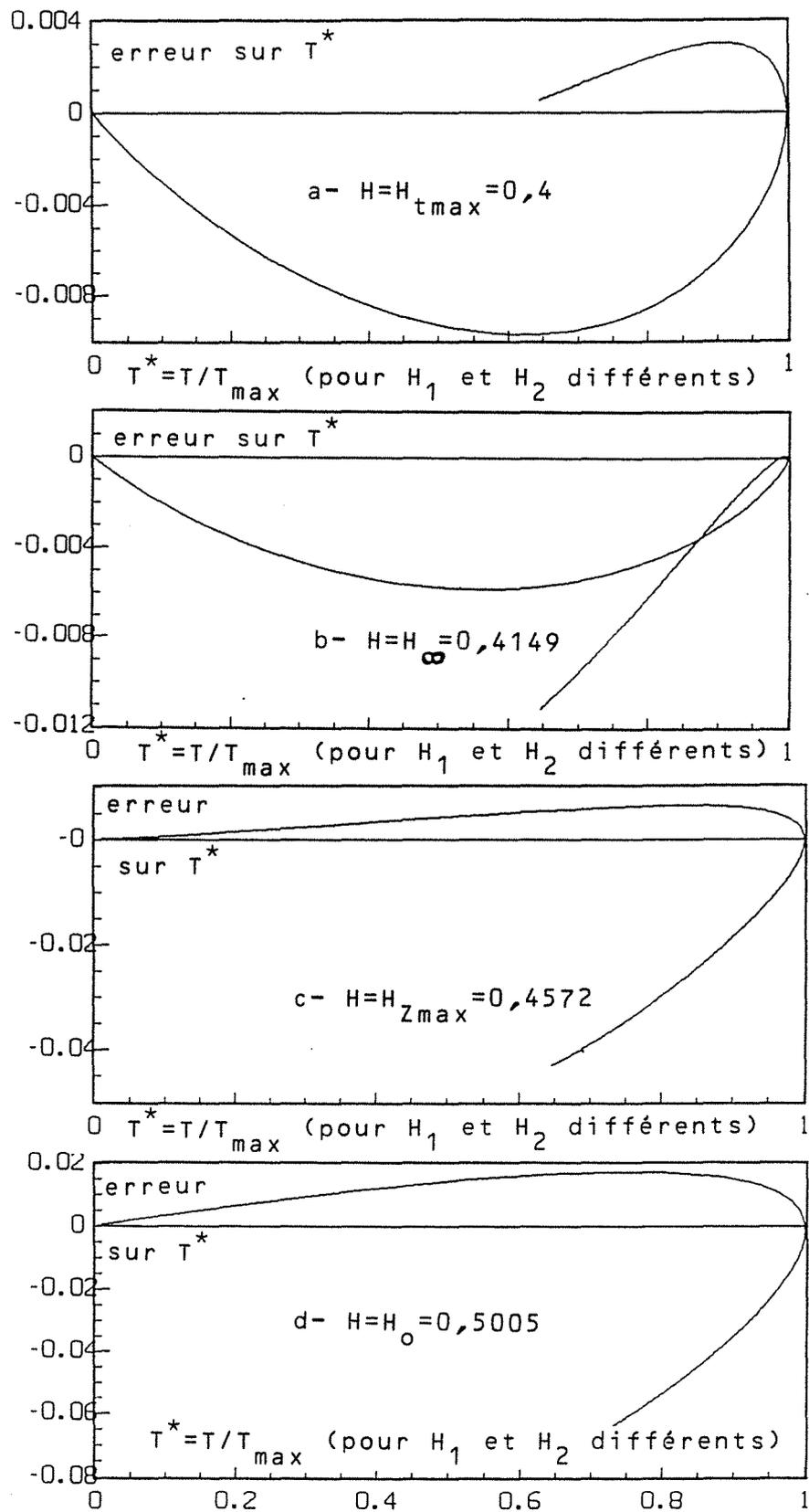


Fig. 6. Erreur sur T^* due à la réduction de modèle: passage de $(H_1, H_2) = (0,001; 1)$ à $H_1 = H_2 = H$ (nombre de Biot unique)

1.3 - ETUDE DE LA SENSIBILITE

1.3.1 - Sensibilité de la température brute

Si on adopte maintenant un seul nombre de Biot H pour représenter l'influence des pertes, la température en face arrière peut être mise sous la forme :

$$T = T_{\text{lim}} Z(t^*, H) \quad (14)$$

La fonction Z ainsi que les coefficients de sensibilité réduits $H \cdot Z'_H$ et $\nu \cdot Z'_\nu$ ont été calculés - voir Annexe 1.3.2 - et tracés en fonction de t^* , pour des valeurs de H égales à 10^{-3} et 1, sur les figures 7a et b. Les courbes similaires correspondant aux cas où H vaut 10^{-2} et 10^{-1} figurent en Annexe 1.3.3. Le calcul de ces trois fonctions a été effectué à partir de l'écriture de Z sous la forme d'une série temporelle et est explicité en Annexe 1.3.2.

La multiplication d'un coefficient de sensibilité - c'est-à-dire de la dérivée partielle d'une fonction par rapport à ce paramètre - par la valeur de ce paramètre, permet de s'affranchir à la fois du niveau absolu de ce coefficient et de sa dimension : ici ν est en s^{-1} alors que H est sans unité. Notons que la fréquence caractéristique ν n'apparaît pas directement dans l'expression (14) de la fonction Z ; cependant si l'on fait apparaître le temps t, on a :

$$t^* = \nu t \Rightarrow \nu \cdot Z'_\nu = \nu \left. \frac{\partial Z}{\partial \nu} \right|_{t, H} = t^* \left. \frac{\partial Z}{\partial t^*} \right|_H \quad (15)$$

Il est manifeste sur ces deux figures que le maximum de sensibilité à la diffusivité thermique (c'est-à-dire à ν) apparaît au temps de demi-montée $t_{\frac{1}{2}}$ correspondant à :

$$Z(t_{\frac{1}{2}}^*, H) = 0,5 Z_{\text{max}}$$

ceci est exact pour une expérience sans perte ($H = 0$) mais reste pratiquement inchangé, même avec des pertes même importantes. Ces résultats sont en

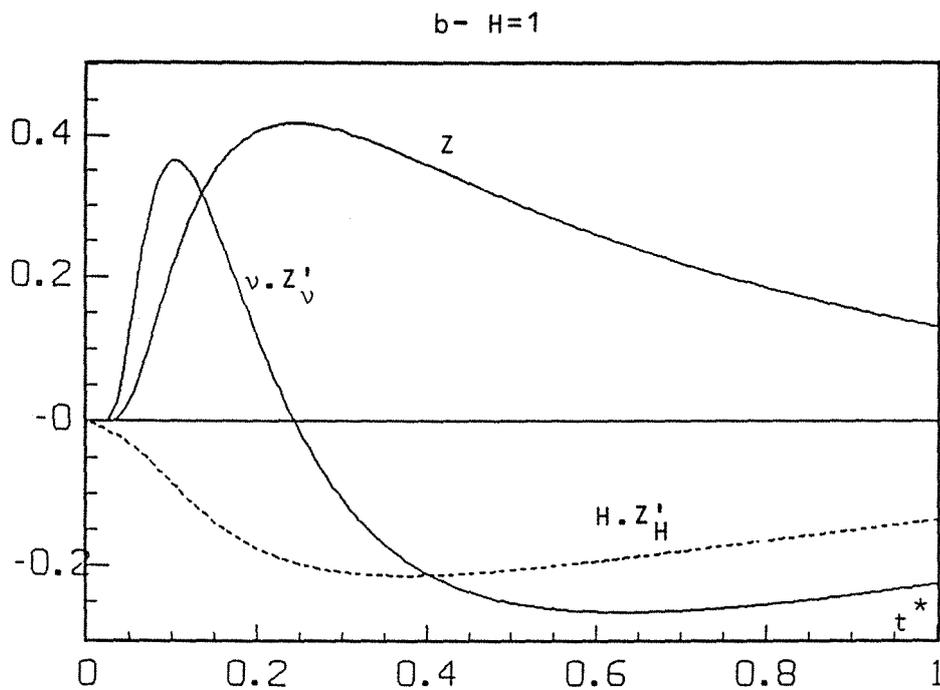
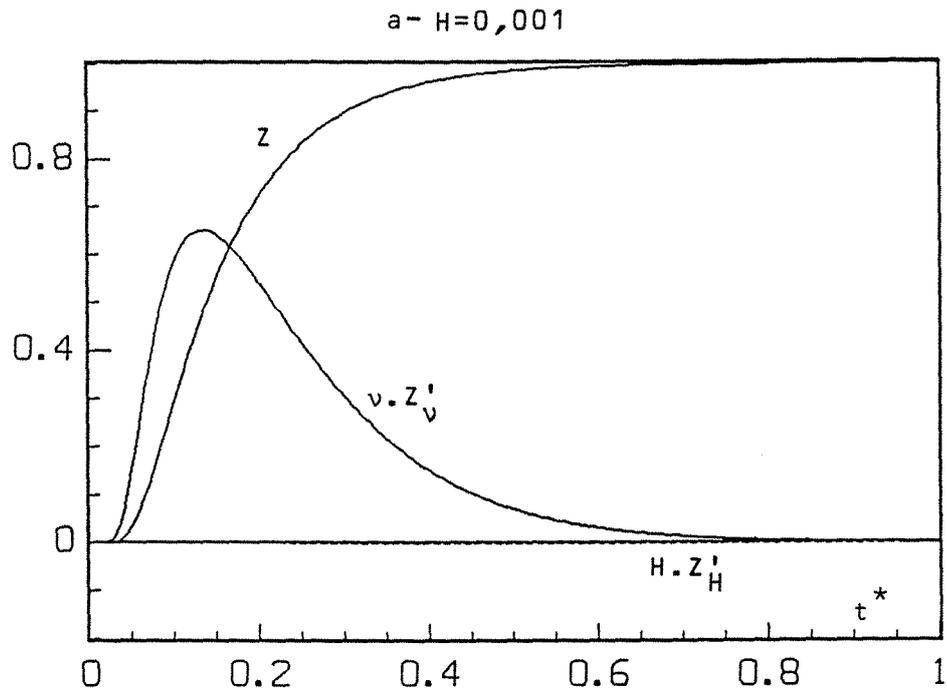


Fig. 7. Terme axial Z et sensibilités réduites au nombre de Biot unique H et à la fréquence caractéristique ν

accord avec ceux présentés par Raynaud et col. [19] et confirment l'intérêt, pressenti par Parker et col. [1], de travailler sur le temps de demi-montée si un seul point du thermogramme est utilisé pour l'estimation de la diffusivité thermique.

D'autre part, la sensibilité à ν s'annule à l'instant du maximum, ce qui est dû à la relation (15), pour devenir ensuite négative aux temps plus longs.

La sensibilité Z'_H à H est négligeable pour de faibles pertes ($H = 10^{-3}$), par contre elle reste négative dans les autres cas, pour se rapprocher ensuite aux temps longs de la sensibilité à ν . Ceci signifie qu'en pratique les deux paramètres H et ν finissent par être corrélés aux temps longs et confirme l'intérêt d'identifier la diffusivité sur la partie croissante du thermogramme pour laquelle H et ν sont indépendants au sens de l'estimation de paramètres.

Remarquons que la fonction Z est en fait la sensibilité de la température T à la température limite adiabatique T_{lim} - voir équation (14) - et il suffit de multiplier les trois fonctions représentées sur les figures 7a et 7b par T_{lim} pour obtenir les coefficients de sensibilité réduits de T à T_{lim} , H et ν (à temps t constant). En adoptant ce point de vue, on se retrouve avec le modèle à trois paramètres (T_{lim} , $H_1 = H_2 = H$, ν) de la section 1.2.2.1a et il n'est pas du tout sûr que les trois coefficients de sensibilité de T à ces paramètres soient linéairement indépendants dans le cas de fortes pertes ($H = 1$) ; en outre, si H est faible, la sensibilité $H \cdot \partial T / \partial H (= T_{lim} \cdot H \cdot \partial Z / \partial H)$ est voisine de zéro, rendant également l'identification simultanée de ces trois paramètres très délicate par une méthode des moindres carrés (la matrice des coefficients de sensibilité voit alors son déterminant tendre vers zéro : voir le chapitre 2). Ainsi, plutôt que de tenter d'estimer T_{lim} , une réduction de la température, par sa valeur maximum, élimine ce paramètre du modèle et on a alors :

$$T^* = T/T_{max} = Z(t^*, H)/Z_{max}(H) \quad (16)$$

1.3.2 - Effet de la normalisation sur le bruit de mesure

On peut alors se demander si cette élimination du paramètre T_{lim} n'entraîne pas une erreur importante sur le signal réduit T^* , du fait de la prise en compte de l'erreur sur T_{max} , qui correspond à un seul point de mesure. Pour examiner ce point, on peut considérer que la température mesurée $T_{exp}(t)$ est affectée d'une erreur additive $\varepsilon(t)$ qui peut être considérée comme un aléa. On suppose que la loi de probabilité de ce bruit est indépendante du temps et qu'il n'y a aucune corrélation entre les bruits à deux instants différents. On a alors :

$$T_{exp}(t) = T(t^*, H) + \varepsilon(t) \quad (17)$$

et :

$$T_{exp}(t_{max}) = T(t_{max}^*, H) + \varepsilon(t_{max}) \quad (18)$$

le bruit $\varepsilon(t)$ induit un bruit $\varepsilon^*(t)$ sur la mesure expérimentale T_{exp}^* de T^* tel que :

$$T_{exp}^*(t) = T^*(t^*, H) + \varepsilon^*(t) \quad (19)$$

et en supposant ce bruit suffisamment petit devant la température, on montre en différenciant l'équation (16) :

$$\varepsilon^*(t) = \frac{1}{T_{max}} [\varepsilon(t) - T^* \varepsilon(t_{max})] \quad (20)$$

L'expression (20) montre que le passage de T à T^* n'entraîne aucune erreur systématique dans la mesure où l'aléa $\varepsilon(t)$ a une espérance mathématique nulle ; si l'on appelle σ^* l'écart-type de $\varepsilon^*(t)$ et σ celui de $\varepsilon(t)$, on a alors :

$$\frac{\sigma^*}{\sigma/T_{max}} = [1 + T^{*2}]^{1/2} \quad (21)$$

Ceci montre que le rapport signal sur bruit, c'est-à-dire l'inverse du dénominateur du membre de gauche de l'équation (21), est divisé par un facteur compris entre 2 et $\sqrt{2}$ lorsque l'on passe de T à T^* ; ainsi, à niveau de bruit σ constant, il est intéressant d'avoir l'énergie absorbée Q la plus importante, ou un échantillon peu capacitif (ρ ce faible), pour augmen-

ter T_{lim} et donc T_{max} , et un nombre de Biot des pertes H le plus bas possible.

1.3.3 - Sensibilité de la température normalisée

Les coefficients de sensibilité réduits $H.X_H$ et $\nu.H_\nu$ de la température normalisée T^* ont été calculés - voir détail du calcul en Annexe 1.3.2 - et sont tracés en fonction de t^* sur les figures 8a et b pour des nombres de Biot H de 10^{-3} et 1 avec :

$$X_H = \left. \frac{\partial T^*}{\partial H} \right|_{t, \nu} \quad \text{et} \quad X_\nu = \left. \frac{\partial T^*}{\partial \nu} \right|_{t, H} \quad (22)$$

Les courbes similaires correspondant aux cas où H vaut 10^{-2} et 10^{-1} figurent en Annexe 1.3.3.

Si le nombre de Biot est faible (10^{-3}), on constate que la sensibilité de T^* à ce paramètre disparaît complètement à l'échelle de la figure 8a - comparer $H.X_H$ de cette figure à $H.Z'_H$ de la figure 7a - alors que la sensibilité à ν garde la même allure que dans le cas où on considère le signal brut T .

Lorsque le nombre de Biot est plus important ($H = 1$), la sensibilité à H n'est plus monotone : initialement négative aux temps courts, elle devient ensuite positive pour s'annuler de nouveau à l'instant du maximum pour rester négative aux temps longs. Le fait que X_H puisse être positif s'explique par les variations conjuguées du numérateur Z de T^* qui décroît avec H et de son numérateur Z_{max} qui fait de même - voir la figure 3. Cette non-monotonie de X_H pendant la phase de croissance de la température T réduit l'influence de H par rapport à celle de ν , lorsqu'on adopte T^* comme signal à utiliser pour l'estimation de ν à la place de T ; ainsi le rapport des extrema des deux sensibilités réduites $H(Z'_H)_{max} / [\nu(Z'_\nu)_{max}]$ est de 55 % pendant cette phase alors que celui de $H(X_H)_{max} / [\nu(X_\nu)_{max}]$ est d'environ 6 % : la normalisation par T_{max} conduit ainsi à une réduction drastique de l'influence des pertes sur le signal avant t_{max} .

Un autre effet bénéfique de cette normalisation concerne la sensibilité au seul paramètre ν : lorsque H passe de 10^{-3} à 1, le maximum du coefficient de sensibilité Z'_ν est réduit de 56 % alors que celui de X_ν s'accroît de 13 %.

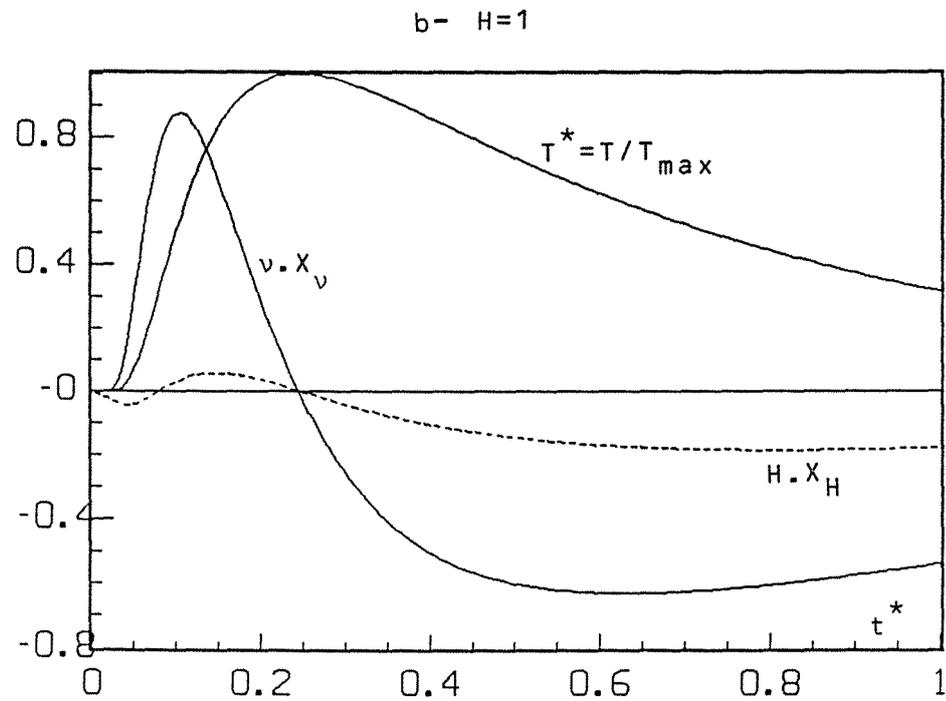
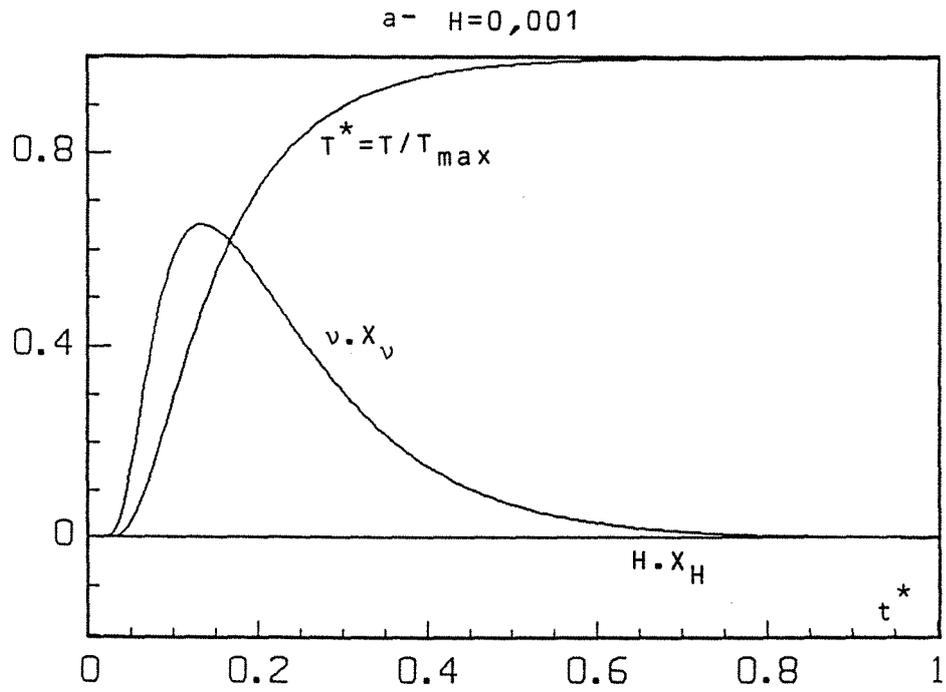


Fig. 8. Température réduite $T^* = T/T_{max}$ et sensibilités réduites correspondantes au nombre de Biot unique H et à la fréquence caractéristique v

En analysant cet effet, et en le confrontant à la réduction de l'influence des pertes décrite plus haut, il devient manifeste que le changement de fonction (passage de T à T^*) produit un transfert de sensibilité de H vers $\nu (= a/e^2)$.

1.4 - ESTIMATION DES ERREURS D'ESTIMATION DE LA METHODE DES MOMENTS TEMPORELS PARTIELS

Dans la pratique l'expérimentateur n'a accès qu'à la courbe $T_{\text{exp}}^*(t)$ et, pour affecter les sensibilités précédentes, tracées en fonction du nombre de Fourier t^* , à un domaine de mesure, il est nécessaire de les représenter en fonction de la température réduite T^* . Les trois grandeurs t^* , $H.X_H$ et $\nu.X_\nu$ ont été tracées en fonction de T^* sur les figures 9a et b pour des nombres de Biot de 10^{-3} et 1 ; les courbes similaires correspondant à $H = 10^{-2}$ et 10^{-1} figurent en Annexe 1.3.3. Chacune de ces courbes présentent deux branches correspondant à la phase de croissance ou de relaxation de T^* .

Indépendamment de la valeur du nombre de Biot des pertes H , toutes les courbes de sensibilité à ν sont positives dans la première phase et présentent un maximum pour une valeur de T^* voisine de 0,5. Ceci justifie le choix de l'intervalle $[t_{0,1}^* ; t_{0,8}^*]$ choisi par Degiovanni et Laurent [14] pour mener à bien l'identification de la diffusivité par la méthode des moments temporels partiels avec t_α^* défini par :

$$T^*(t_\alpha^*, H) = a \quad \text{pour } \alpha \in [0,1]$$

Cette méthode, dont il va être fait un bref rappel ici, consiste à extraire deux intégrales temporelles m_0 et m_{-1} du signal expérimental $T_{\text{exp}}^*(t)$ afin d'identifier les deux paramètres inconnus H et ν du modèle réduit avec :

$$m_0 = \int_{t_\alpha}^{t_\beta} T_{\text{exp}}^*(t) dt \quad \text{et} \quad m_{-1} = \int_{t_\alpha}^{t_\beta} \frac{1}{t} T_{\text{exp}}^*(t) dt \quad (23)$$

$$T_{\text{exp}}^*(t_\alpha) = a \quad T_{\text{exp}}^*(t_\beta) = \beta \quad \alpha = 0,1 \quad \beta = 0,8$$

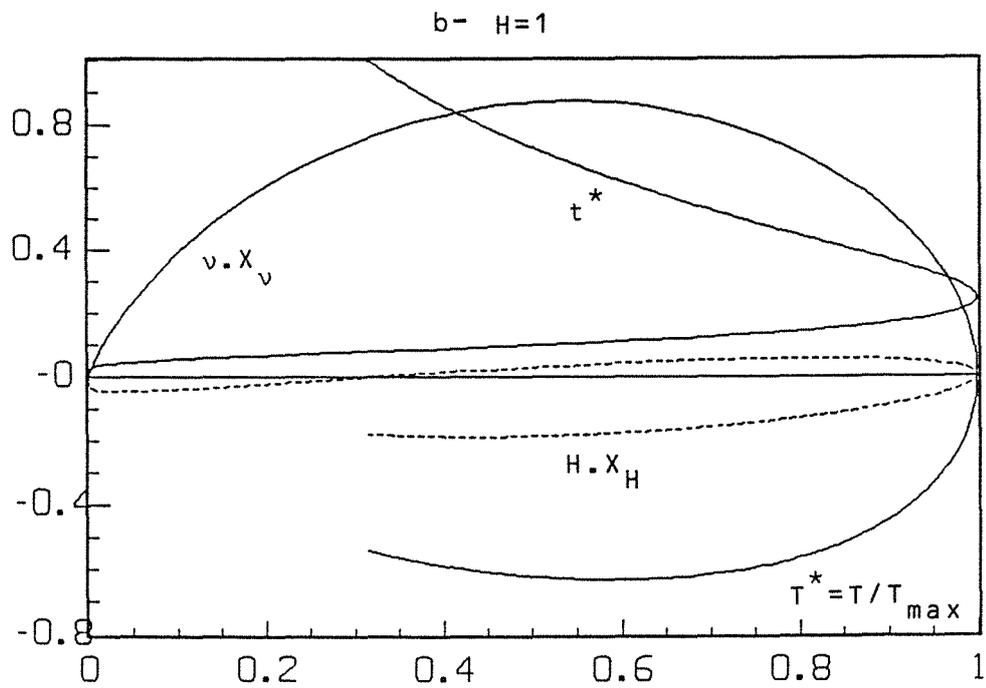
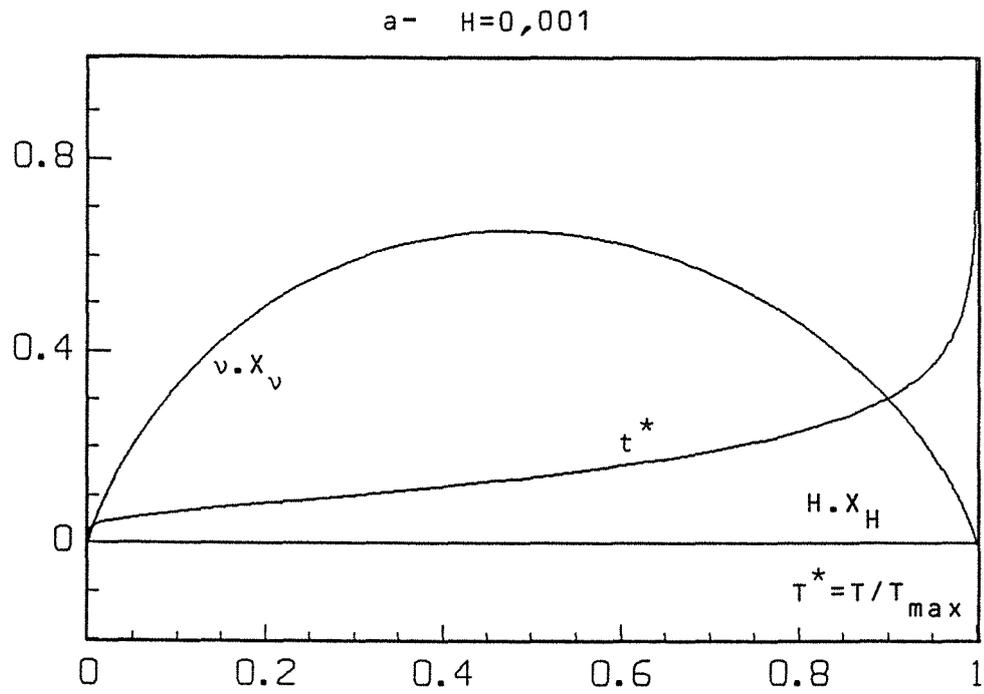


Fig. 9. Nombre de Fourier et sensibilités réduites de la température réduite T^* à H et v tracés en fonction de T^*

Ces deux intégrales, ou moments, peuvent être comparées aux intégrales correspondantes du modèle théorique pour lesquelles l'intégration s'effectue à l'aide du nombre de Fourier :

$$m_0^*(H) = \int_{t_\alpha}^{t_\beta} T^*(t^*, H) dt^* \quad \text{et} \quad m_{-1}^*(H) = \int_{t_\alpha}^{t_\beta} \frac{1}{t^*} T^*(t^*, H) dt^* \quad (24)$$

car on a :

$$m_{-1} = m_{-1}^*(H) \quad (25)$$

$$m_0 = m_0^*(H)/\nu \quad (26)$$

du fait de la définition (15) du nombre de Fourier.

Dans cette méthode, l'élimination de H entre les équations (25) et (26) permet de proposer une corrélation entre m_0^* et m_{-1}^* de la forme :

$$m_0^* = F(m_{-1}^*) \quad (27)$$

Ainsi, la mesure de m_{-1} permet de calculer m_0^* grâce à l'équation (27) et la fréquence caractéristique ν de l'échantillon se calcule grâce à l'équation (26) :

$$\nu = \frac{a}{e^2} = \frac{1}{m_0} F(m_{-1}) \quad (28)$$

En pratique, on a vu plus haut que la température réduite expérimentale $T_{\text{exp}}^*(t)$ était entâchée d'une erreur $\varepsilon^*(t)$ dérivant elle-même de l'erreur de mesure de la température $\varepsilon(t)$ - voir l'équation (20). Cette erreur se répercute alors sur les mesures expérimentales $(m_{-1})_{\text{exp}}$ et $(m_0)_{\text{exp}}$ de m_{-1} et m_0 qui peuvent alors s'écrire :

$$(m_{-1})_{\text{exp}} = m_{-1} + \varepsilon_{-1} \quad (29)$$

$$(m_0)_{\text{exp}} = m_0 + \varepsilon_0 \quad (30)$$

et les valeurs estimées \hat{H} et $\hat{\nu}$ vérifient alors les relations suivantes, dérivées du système "exact" (25-26) :

$$(m_{-1})_{\text{exp}} = m_{-1}^*(\hat{H}) \quad (31)$$

$$(m_0)_{\text{exp}} = m_0^*(\hat{H})/\hat{v} \quad (32)$$

Si on considère comme faible l'erreur d'estimation commise sur H , il est possible d'utiliser un développement limité de $m_{-1}^*(\hat{H})$ et $m_0^*(\hat{H})$ au voisinage de H :

$$m_{-1}^*(\hat{H}) = m_{-1}^*(H) + e_H \frac{dm_{-1}^*}{dH}(H) + O(e_H) \quad (33)$$

$$m_0^*(\hat{H}) = m_0^*(H) + e_H \frac{dm_0^*}{dH}(H) + O(e_H) \quad (34)$$

avec :

$$e_H = \hat{H} - H$$

En utilisant les relations (25, 29, 31 et 33), on peut exprimer l'erreur sur H en fonction de l'erreur sur m_{-1} :

$$e_H = \varepsilon_{-1} / \frac{dm_{-1}^*}{dH} \quad (35)$$

On obtient de même, grâce aux relations (26, 30, 32 et 34), l'expression suivante de l'erreur sur v :

$$e_v = \frac{v}{m_0^*} \left[e_H \frac{dm_0^*}{dH} - \varepsilon_0 \hat{v} \right] \quad (36)$$

avec :

$$e_v = \hat{v} - v$$

En éliminant e_H entre les équations (35) et (36), l'erreur sur v s'exprime en fonction des erreurs sur m_{-1} et m_0 , en remplaçant en outre \hat{v} par v dans le membre de droite de la relation (36) :

$$e_v = \frac{v}{m_0^*} \left[F'(m_{-1}^*) \varepsilon_{-1} - v \varepsilon_0 \right] \quad (37)$$

F' étant la dérivée de la fonction F définie en (27).

Les relations (35) et (37) permettent de caractériser les erreurs d'estimation de H et de v, produites par la méthode des moments partiels. En effet, les erreurs sur les moments, ϵ_{-1} et ϵ_0 , peuvent être considérées comme les aléas dérivés de l'erreur de mesure aléatoire $\epsilon(t)$ de la température T définie en section 1.3.2. On montre en Annexe 1.4 que les espérances mathématiques de ϵ_{-1} et de ϵ_0 sont nulles, à condition que $\epsilon(t)$ ait elle-même une espérance mathématique nulle. Les équations (35) et (37) permettent alors d'affirmer que les estimateurs \hat{H} et \hat{v} sont sans biais. On peut en outre calculer la variance de ces estimateurs :

$$\text{var } e_H = \sigma_H^2 = \frac{1}{G'^2(H)} \text{var } \epsilon_{-1} \quad (38)$$

$$\text{var } e_v = \sigma_v^2 = \frac{v^2}{m_o^{*2}} [d_1^2 \text{var } \epsilon_{-1} + v^2 \text{var } \epsilon_0 - 2d_1 v \text{cov}(\epsilon_{-1}, \epsilon_0)] \quad (39)$$

avec :

$$m_{-1}^* = G(H) \quad (40)$$

et :

$$m_o^* = F(m_{-1}^*) = d_1 m_{-1}^* + d_o \quad (41)$$

G' étant la dérivée de la fonction G, et la fonction F étant linéaire pour des valeurs de H inférieures ou égales à l'unité. Les expressions de ces deux fonctions sont données en Annexe 1.4, ainsi que le calcul des variances et de la covariance de ϵ_{-1} et ϵ_0 , en fonction de l'écart-type σ de l'erreur sur la température T, pour les hypothèses de la section 1.3.2.

Dans ces conditions, les écarts-types des estimateurs des deux paramètres sont donnés par :

$$K_H = \frac{\sigma_H/H}{\sigma/T_{\max}} = \frac{1}{H |G'(H)|} \left[v \Delta t (\Delta t^{*-1} - \frac{2 m_{-1}^*}{t_{\max}^*}) + m_{-1}^{*2} \right]^{1/2} \quad (42)$$

$$K_v = \frac{\sigma_v/v}{\sigma/T_{\max}} = \frac{1}{m_o^*} \left[v \Delta t (d_1^2 \Delta t^{*-1} \Delta t^* - 2d_1 L + 2d_o (\frac{d_1}{t_{\max}^*} - 1)) + d_o^2 \right] \quad (43)$$

avec :

$$\Delta t^* = t_{\beta}^* - t_{\alpha}^* \quad \Delta t^{*-1} = \frac{1}{t_{\alpha}^*} - \frac{1}{t_{\beta}^*} \quad L = \ln(t_{\beta}^*/t_{\alpha}^*)$$

et Δt étant la période d'acquisition du signal de température. K_H et K_V représentent les ratios des erreurs relatives sur les deux paramètres aux erreurs relatives sur la mesure de température. Ces deux ratios ont été calculés dans le cas d'un échantillon isolant (PVC) et d'un échantillon conducteur (Duralumin) de même épaisseur $e = 1$ cm. Dans les deux cas de figure on a pris une période d'acquisition Δt telle que $\nu \Delta t$ soit égal à 10^{-3} . Les caractéristiques thermophysiques, les coefficients d'échanges, et les valeurs des paramètres, ainsi que les ratios K_H et K_V sont présentés dans la Table 1.2 :

Matériau	a	λ	ρc	h	H	ν	K_H	K_V
P V C	$1,13 \cdot 10^{-7}$	0,15	$1,325 \cdot 10^6$	15	1	$1,13 \cdot 10^{-3}$	4,25	1,63
Duralumin	$6,79 \cdot 10^{-5}$	165	$2,43 \cdot 10^6$	16,5	10^{-3}	0,679	366	0,99

Table 1.2 - Facteurs d'amplification de l'erreur relative lors du passage du signal de température à l'estimation des deux paramètres H et ν (épaisseur de 1 cm - $\nu \Delta t = 10^{-3}$ - grandeurs dimensionnelles en SI).

Il est remarquable de noter que, dans ces deux cas fort différents, le rapport signal sur bruit n'est diminué que par un facteur inférieur à deux, lorsque l'on passe à la valeur identifiée de la fréquence caractéristique ou de la diffusivité, alors que ce paramètre intervient de façon non linéaire dans le modèle. On peut remarquer que, pour la période d'acquisition choisie ($\Delta t = 10^{-3}/\nu$), le terme en $\nu \Delta t$ est environ 10 fois plus faible que le terme en d_0^2 dans l'expression de K_V et, dans ce cas, la période d'acquisition n'a qu'une très faible incidence sur l'erreur sur ν . Par contre, si l'on diminue la fréquence d'acquisition c'est ce terme qui peut devenir prépondérant dans l'erreur.

L'expression (43) fait ressortir l'importance du choix de la fréquence d'acquisition qui doit être effectué en considérant la fréquence caractéristique de l'échantillon.

On peut comparer ce facteur K_V à la reproductibilité des valeurs identifiées, pour la diffusivité d'un même échantillon, qui fluctuent habituellement dans une plage de 1 % alors que le bruit de mesure de la température, rapporté à l'échauffement maximum en face arrière est au pire de l'ordre de 1 % lorsqu'on utilise des thermocouples à semi-conducteur Bi_2Te_3 à contacts séparés.

Le facteur K_H est toujours supérieur à K_V , ce qui traduit la plus grande difficulté d'accéder précisément à la valeur du paramètre H. D'autre part, K_H augmente de façon spectaculaire lorsque le nombre de Biot des pertes diminue. Il est donc illusoire de chercher à l'estimer par cette méthode lorsqu'on a affaire à un échantillon conducteur mince. Ceci est évidemment à rapprocher de la très faible sensibilité relative à H, $H.X_H$, lorsque H est faible.

1.5 - LES PARAMETRES ACTIFS AUX TEMPS LONGS

Il a été montré, en section 1.3.1, que les paramètres ν et H avaient tendance à être corrélés aux temps longs, lorsque la totalité du signal de température T est considérée. Il est alors intéressant de déterminer le paramètre qui justifie l'évolution de la température pendant la phase de refroidissement.

Si le nombre de Biot des pertes, H, est supposé petit, c'est-à-dire si on considère l'échantillon comme pratiquement isotherme à chaque instant, la température en face arrière obéit à la loi de refroidissement exponentiel du petit corps :

$$T = T_{\text{lim}} Z = T_{\text{lim}} \exp(-Kt) \quad (44)$$

ou, si on fait apparaître le nombre de Fourier :

$$Z = \exp(-2Ht^*) \quad (45)$$

$K (= 2H\nu)$ étant le produit de la capacité thermique de l'échantillon ($\rho c_e V$) par la résistance thermique de l'échange entre le petit corps et le milieu

environnant $(1/(2hS))$, $V (= eS)$ étant le volume de l'échantillon dont la section considérée a une aire S .

Or, le thermogramme en face arrière peut s'écrire à l'aide de l'expression suivante de la fonction Z (voir Annexe 1.1) :

$$Z(t^*, H) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \exp(-u_n^2 t^*) \quad (46)$$

où les coefficients u_n sont les solutions de l'équation aux valeurs propres et donc fonction de H , chaque coefficient A_n s'exprimant en fonction de u_n . Aux temps longs la série Z est équivalente à son terme de rang nul correspondant à la plus petite des valeurs propres u_0 :

$$Z(t^*, H) \sim Z_{\infty}(t^*, H) = A_0 \exp(-u_0^2 t^*) \quad (47)$$

En rapprochant les expressions (45) et (47), on peut considérer que, quel que soit H , l'échantillon obéit à la loi de refroidissement du petit corps, à condition de remplacer H par un nombre de Biot équivalent H_e et d'affecter l'exponentielle d'un coefficient d'amplitude A_0 s'exprimant à l'aide de H_e :

$$Z_{\infty}(t^*, H) = A_0(H) \exp(-2H_e t^*) \quad (48)$$

avec :

$$2 H_e = u_0^2$$

La fonction $H_e(H)$ peut être calculée à partir des valeurs tabulées de la fonction u_0 - voir par exemple Ozisik [21]. Elle peut être exprimée à l'aide d'une expression analytique approchée obtenue à partir de ses développements limités au voisinage de $H = 0$, $\pi/2$ et l'infini - voir Annexe 1.5. Le nombre de Biot du refroidissement du petit corps équivalent, H_e , sa dérivée par rapport à H , H'_e , sa dérivée réduite $H.H'_e$ et le coefficient d'amplitude A_0 sont tracés en fonction de H sur la **figure 10**.

Pour une raison a priori non évidente, les fonctions $H'_e(H)$ et $A_0(H)$ sont rigoureusement identiques ; ceci peut être démontré analytiquement en dérivant l'équation aux valeurs propres par rapport à H .

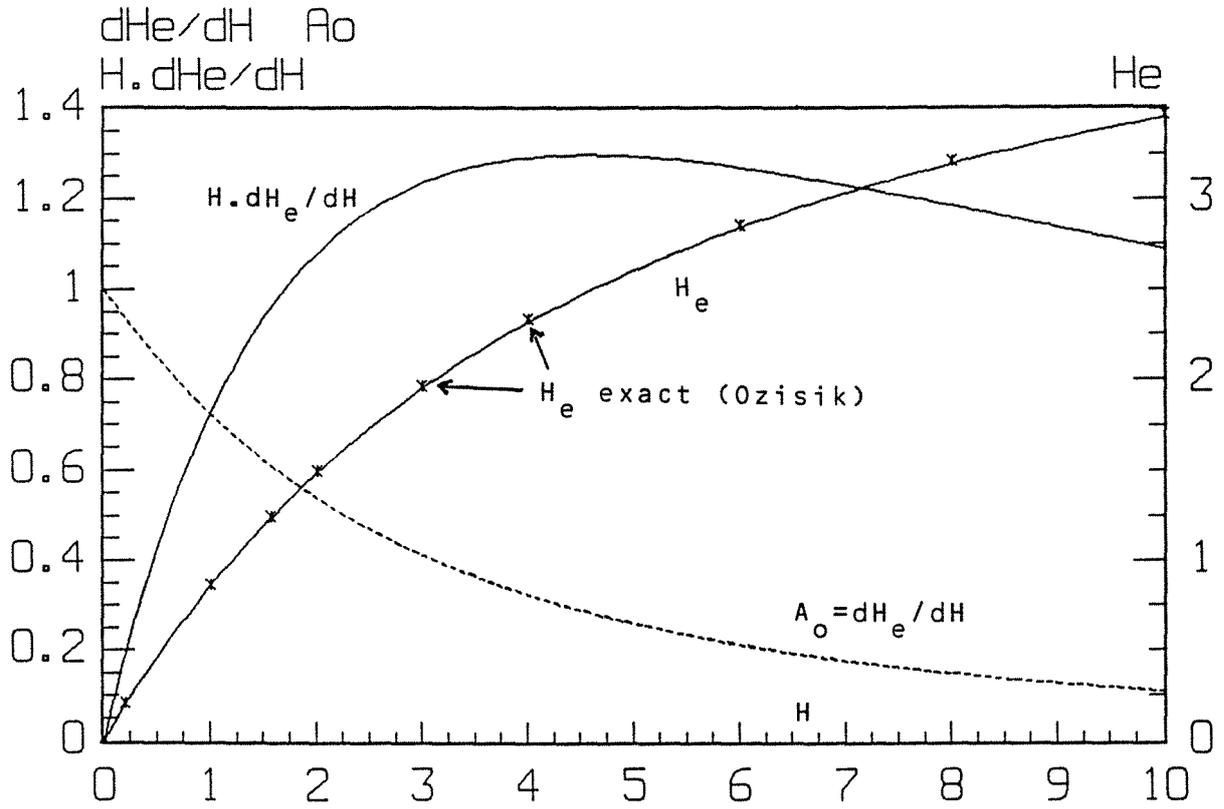


Fig. 10. Variations du nombre de Biot du petit corps equivalent H_e et du coefficient d'amplitude A_0 en fonction du nombre de Biot H lors de la phase de refroidissement exponentiel aux temps longs

On constate que H et H_e ne sont égaux que dans le cas d'un faible nombre de Biot. Par contre dès que H croît, H_e devient inférieur à H et A_0 à l'unité : ce refroidissement moins rapide que dans le cas du petit corps est dû à l'afflux de chaleur en provenance de la face avant et des zones internes de l'échantillon vers la face arrière. La dérivée H'_e , initialement égale à l'unité, décroît rapidement avec H ; par contre la dérivée logarithmique $H.H'_e$ présente un maximum au voisinage de $H = 4,5$, ce qui signifie que c'est dans ce cas de figure que l'on obtient la plus faible incertitude relative sur le nombre de Biot H ou sur le coefficient de transfert h lorsqu'on cherche à identifier ces paramètres à partir de la pente de la droite $\log T(t^*)$, si la fréquence caractéristique ν de l'échantillon est connue.

Connaissant les fonctions $H_e(H)$ et $A_0(H)$, il est possible de comparer le terme axial Z à son équivalent Z_∞ aux temps longs. Ces deux fonctions sont tracées en fonction de t^* sur les figures 11a ($H = 10^{-3}$) et b ($H = 1$). Dans le premier cas, les deux termes sont confondus à partir d'un nombre de Fourier de 1 alors que dans le deuxième ceci se produit pour $t^* \simeq 0,4$. On voit donc que la série complète Z se ramène rapidement à son premier terme exponentiel.

Si on utilise la température asymptotique T comme signal aux temps longs, les paramètres sont T_{lim} et H :

$$T = T_\infty = T_{lim} A_0(H) \exp(-2H_e(H)t^*) \quad (49)$$

Les coefficients de sensibilité réduits $T_{lim} \cdot \partial T / \partial T_{lim}$ (à H constant) et $H \cdot \partial T / \partial H$ (à T_{lim} constant) sont tracés en fonction de t^* sur la figure 12 pour $H = 1$ et $T_{lim} = 1$. La sensibilité à H passe par un léger minimum tandis que celle à T_{lim} est monotone décroissante ; cependant, pour un nombre de Fourier supérieur à 0,4, ces deux sensibilités présentent une évolution monotone, rendant difficile une éventuelle identification simultanée des deux paramètres.

Si la température n'est pas directement mesurable et si la fréquence caractéristique de l'échantillon n'est pas connue, il est possible de prendre comme signal la température réduite aux temps longs :

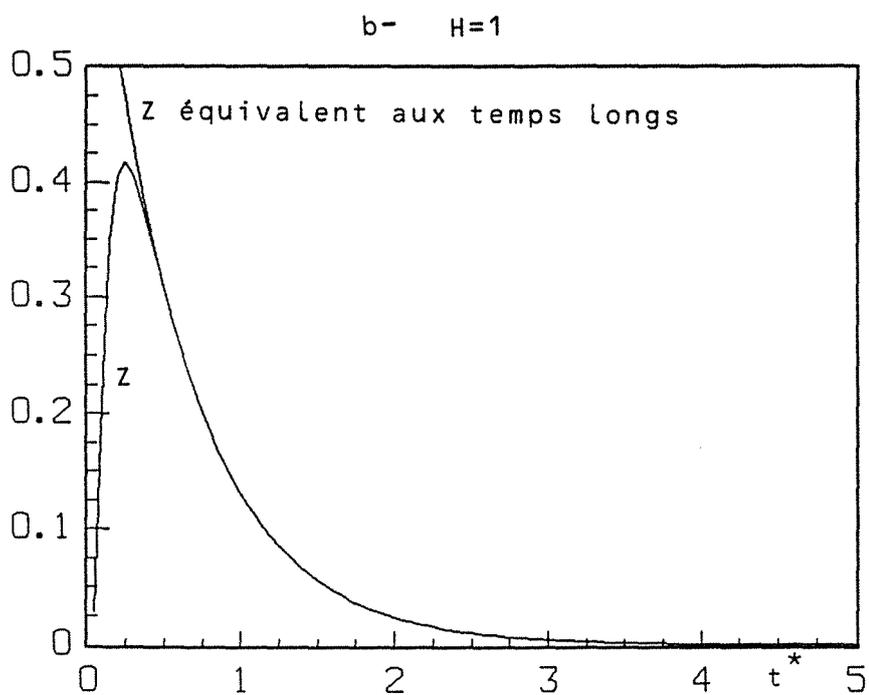
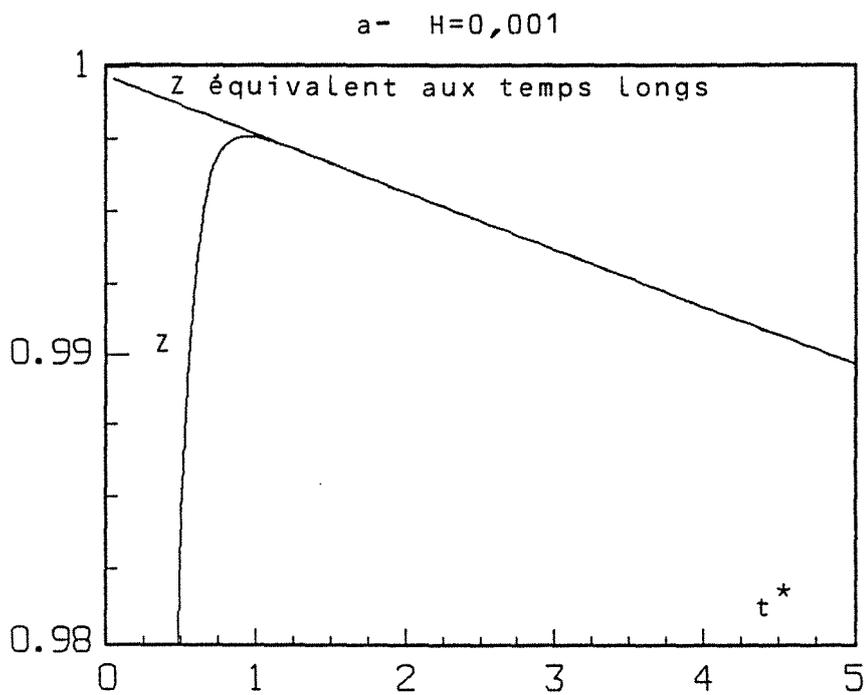


Fig. 11. Comparaison entre le terme axial Z et son équivalent aux temps longs

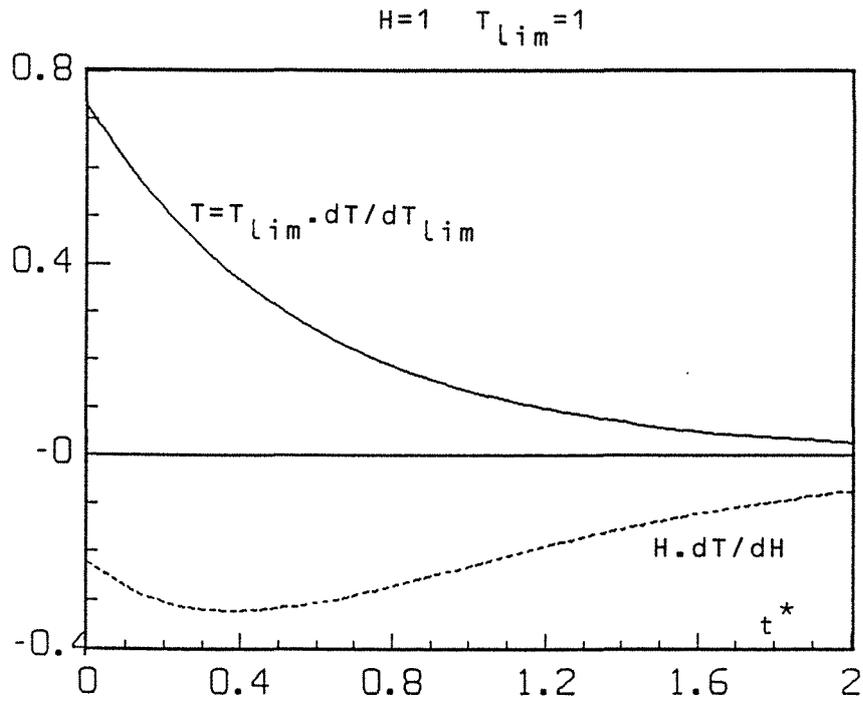


Fig. 12 . Température asymptotique T et sensibilités réduites correspondantes à T_{lim} ($=Q/\rho c_e$) et à H aux temps longs

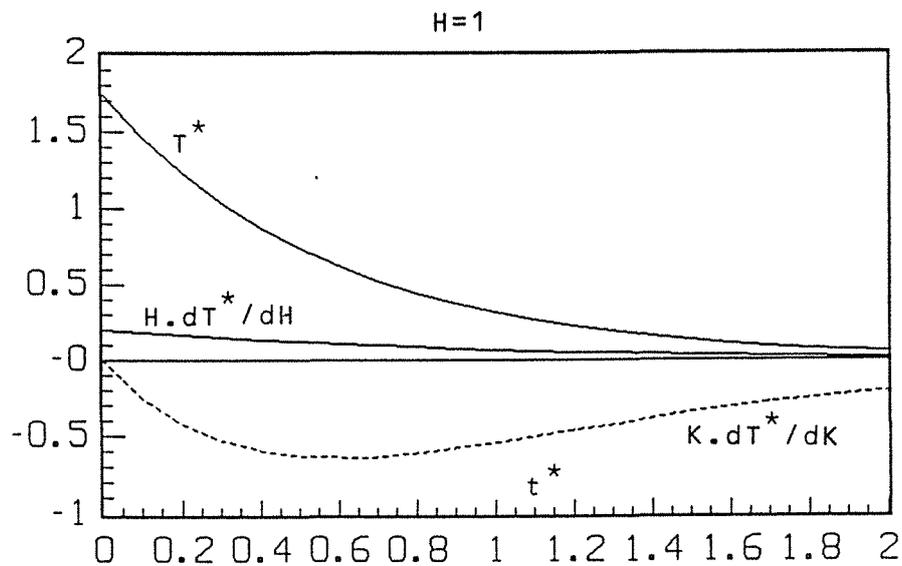


Fig. 13. Température réduite asymptotique T^* et sensibilités réduites correspondantes à H et à K aux temps longs

$$T^* = T_{\infty}^* = Z_{\infty}/Z_{\max} = A_0(H) \exp(-K_e t)/Z_{\max}(H) \quad (50)$$

avec :

$$K_e(K, H) = 2H_e \nu = H_e(H)K/H \quad (51)$$

Cette fois-ci les deux paramètres présents aux temps longs sont le nombre de Biot H et la constante K .

La dérivation de l'expression (50) permet de calculer les sensibilités réduites $K \cdot \partial T^* / \partial K$ (à H constant) et $H \cdot \partial T^* / \partial H$ (à K constant). La température réduite T^* , ainsi que ces sensibilités, sont tracées en fonction de t^* sur la **figure 13**, pour un nombre de Biot H égal à l'unité. Là encore seule la partie des courbes correspondant à un nombre de Biot supérieur à 0,4 a une signification et on observe alors rapidement une proportionnalité entre les deux sensibilités : les paramètres H et K ne peuvent alors être estimés qu'avec une grande imprécision.

Un retour à l'écriture de la température réduite T^* - équation (50) - en fonction du couple de paramètres (H, ν) ne permet pas d'identifier ν car on montre à l'aide du type de technique utilisée plus loin en section 2.4.1. que l'on a :

$$\nu X_{\nu, H} = K X_{K, H}$$

et :

$$H X_{H, \nu} = H X_{H, K} + K X_{K, H}$$

avec :

$$\alpha X_{\alpha, \beta} = \alpha \left. \frac{\partial T^*}{\partial \alpha} \right|_{t, \beta} \quad \text{pour } \alpha = \nu, H, K$$

ce qui signifie que la sensibilité réduite à K est transférée à celle à ν tandis que la nouvelle sensibilité réduite à H résulte de la somme des deux anciennes sensibilités à H et K , la liant linéairement encore plus à la sensibilité à ν aux temps longs - voir la **figure 13**. On retrouve ici évidemment les mêmes résultats qu'en section 1.3.3.

Ainsi, aux temps longs, deux paramètres H et T_{\lim} , ou H et K , déterminent l'évolution de la température suivant que l'on considère sa valeur

brute T ou réduite T^* . Ce choix est dicté par les conditions de l'expérience : mesure directe ou non d'une température sans passer par une tension et connaissance ou non de la diffusivité thermique de l'échantillon et donc de sa fréquence caractéristique.

Cependant, en pratique ces deux paramètres sont corrélés et le thermogramme n'a alors plus qu'une seul "degré de liberté". Il est donc manifeste qu'aucun paramètre représentatif des pertes ne peut être estimé avec précision si on travaille uniquement sur la partie décroissante du thermogramme.

1.6 - CONCLUSION

Cette étude paramétrique de l'évolution de la température en face arrière, suite à une excitation flash de l'échantillon, a permis tout d'abord de dégager les points suivants :

- le passage à un seul paramètre représentatif des pertes n'entraîne pas de distorsion significative du thermogramme.
- la normalisation de la température permet de réduire le modèle qui ne contient alors plus qu'une fréquence et un nombre de Biot comme paramètres.

D'autre part, l'étude de sensibilité a permis en outre de montrer que cette normalisation réduit de façon spectaculaire l'influence des pertes thermiques dans la phase de croissance du thermogramme, tout en magnifiant parallèlement celle de la diffusivité et ce, sans affecter de manière significative le rapport signal sur bruit.

L'incertitude sur les estimations de la diffusivité et du nombre de Biot, données par la méthode des moments temporels partiels, a pu être chiffrée, en fonction de l'incertitude relative sur la mesure de la température et de la fréquence d'acquisition de cette dernière. L'erreur sur la diffusivité varie peu avec le nombre de Biot. Par contre, l'erreur relative sur le coefficient de pertes est beaucoup plus importante et ce, particulièrement dans le cas où le nombre de Biot est faible.

L'étude du comportement asymptotique du thermogramme aux temps longs a permis de mettre en évidence un refroidissement exponentiel, dont la constante de temps n'est égale à celle caractérisant le refroidissement d'un petit corps à température uniforme uniquement dans le cas où le nombre de Biot est faible. L'étude de la sensibilité de la température asymptotique aux deux paramètres formellement présents dans son expression démontre que ceux-ci ne peuvent pas être identifiés simultanément pendant la phase de décroissance de la température.

BIBLIOGRAPHIE - CHAPITRE 1

- [1] - W.J. PARKER, R.J. JENKINS, C.P. BUTLER and G.L. ABBOT, Flash method of determining thermal diffusivity, heat capacity and thermal conductivity, *J. Appl. Phys.*, vol 32, n° 9, pp. 1679-1684 (1961).
- [2] - C. MOYNE, J.C. BATSALE, A. DEGIOVANNI and D. MAILLET, Thermal conductivity of wet porous media : theoretical analysis and experimental measurements, *Thermal Conductivity 21*, Edited by J.C. Cremers and H.A. Fine, Plenum Publishing Corporation, New-York, pp. 109-120 (1990).
- [3] - A. DEGIOVANNI, Systèmes multicouches : problèmes liés à l'homogénéisation des caractéristiques thermiques, *Rev. Gén. Therm.*, n° 339, pp. 117-128 (mars 1990).
- [4] - D. MAILLET, M. LACHI, A. DEGIOVANNI, Simultaneous measurements of axial and radial thermal diffusivities of an anisotropic solid in thin plate : application to multi-layered materials, *Thermal Conductivity 21*, Edited by J.C. Cremers and H.A. Fine, Plenum Publishing Corporation, New-York, pp. 91-107 (1990).
- [5] - TAN HEPING, B. MAESTRE, M. LALLEMAND, Transient and steady-state combined heat transfer in semi-transparent materials subjected to a pulse or a step radiation, *J. Heat Transf.*, 113, pp. 166-173 (feb. 1991)
- [6] - R.D. COWAN, Pulse method of measuring thermal diffusivity at high temperatures, *J. Appl. Phys.*, vol 34, n° 4, pp. 926-927 (1961).
- [7] - J.A. CAPE and G.W. LEHMAN, Temperature and finite pulse time effects in the flash method for measuring thermal diffusivity, *J. Appl. Phys.*, vol. 34, n° 7, pp. 1909-1913 (1963).
- [8] - J. FAURE, Détermination de la diffusivité thermique des isolants par la méthode du signal très bref, EUR 1822 f - Ispra, Italie (1964).
- [9] - J. JAMET, R. JALIN, C. LETOURNEUR, Etude expérimentale de la dégradation thermique d'un matériau ablatif, *Recherche Aérospatiale*, n° 4, pp. 233-244 (1974).
- [10] - L.M. CLARK III and R.E. TAYLOR, Radiation loss in the flash method for measurement of thermal diffusivity, *J. Appl. Phys.*, vol. 46, n°2, pp. 714-718 (1975).
- [11] - A. DEGIOVANNI, Diffusivité et méthode flash, *Rev. Gén. Therm.*, n° 185, pp. 420-441 (mai 1977).
- [12] - D.L. BALAGEAS, Nouvelle méthode d'interprétation des thermogrammes pour la détermination de la diffusivité thermique par la méthode impulsionnelle (méthode "flash"), *Rev. Phys. Appl.* 17, pp. 227-237 (1982).

- [13] - A. DEGIOVANNI, Identification de la diffusivité thermique par l'utilisation des moments temporels partiels, *High Temperatures-High Pressures*, 9 ETPC Proceedings, vol. 17, pp. 683-689 (1985).
- [14] - A. DEGIOVANNI et M. LAURENT, Une nouvelle technique d'identification de la diffusivité thermique par la méthode flash, *Rev. Phys. Appl.*, 21, pp. 229-237 (1986).
- [15] - J.V. BECK and K.J. ARNOLD, Parameter estimation in engineering and science, John Wiley and Sons, New-York (1977).
- [16] - M. LACHI, Détermination des diffusivités thermiques des matériaux composites par méthode flash bidirectionnelle, *Thèse*, INP de Lorraine, Nancy, 18 janvier 1991.
- [17] - A. DEGIOVANNI, Correction de longueur d'impulsion pour la mesure de la diffusivité thermique par méthode flash, *Int. J. Heat Mass Transfer*, Technical note, vol. 30, n° 10, pp. 2199-2200 (1987).
- [18] - A. DEGIOVANNI, Conduction dans un "mur" multicouche avec sources : extension de la notion de quadripôle, *Int. J. Heat Mass Transfer*, 31, pp. 553-557 (1988)
- [19] - M. RAYNAUD, J.V. BECK, R. SCHOEMAKER and R. TAYLOR, Sequential estimation of thermal diffusivity for flash tests, *Thermal Conductivity 20*, Edited by D.P.H. Hasselman and J.R. Thomas J., Plenum Publishing Corporation, pp. 305-321 (1989)
- [20] - X. ZHANG, A. DEGIOVANNI et C. MOYNE, Modélisation de sondes pour la caractérisation thermique de milieux homogènes et isotropes, *Actes du Colloque de Thermique SFT 90*, Nantes, pp. 213-216 (16-17 mai 1990).
- [21] - M.N. OZISIK, Heat Conduction, Ed. John Wiley and Sons, New-York (1980).

CHAPITRE 2

IDENTIFICATION DES PROPRIÉTÉS THERMIQUES DE DÉPÔTS PAR LA MÉTHODE FLASH

IDENTIFICATION DES PROPRIÉTÉS THERMIQUES DE DÉPÔTS PAR LA MÉTHODE FLASH

2.1 - POSITION DU PROBLEME

Dans ce chapitre nous allons aborder le problème de l'identification éventuelle des propriétés thermiques d'un dépôt solide d'un substrat à partir de thermogrammes temporels produits par la méthode flash. Les propriétés thermophysiques de ce substrat assurant la cohésion de ce dépôt seront supposées connues. Dans la pratique, la caractérisation thermique de ce type de couche est souvent malaisée car l'on ne peut accéder à une de ses deux faces. La présence du substrat affecte en outre le transfert de chaleur au sein de l'échantillon. La méthode flash de mesure de la diffusivité thermique d'échantillons massifs peut être appliquée à la mesure d'un spécimen constitué du dépôt et de son substrat à condition de considérer l'ensemble comme un milieu bicouche. Si l'excitation thermique en face avant de ce dernier est homogène et si les pertes radiales peuvent être négligées, le problème est unidirectionnel transitoire et seules les propriétés "axiales", c'est-à-dire perpendiculaires au plan des deux couches, pourront avoir une influence sur le transfert.

Dans la méthode qui va être présentée ici, l'information permettant une éventuelle identification des propriétés thermiques de la couche mince, est issue de deux manipulations flash, la première effectuée sur le bicouche et la seconde sur le substrat seul. La soustraction des deux thermogrammes en face arrière, préalablement normés, permet l'obtention d'une courbe de contraste thermique qui dépend des caractéristiques du dépôt. Dans le cas de la manipulation flash sur un monocouche, on identifie un paramètre "utile", la diffusivité, et un paramètre annexe, le coefficient de pertes. Dans le cas du bicouche, pour une expérience adiabatique, le dépôt

est caractérisé par deux paramètres "utiles" indépendants permettant de remonter éventuellement à ses diffusivité, conductivité et capacité thermique volumique ; cependant il existe d'autres caractéristiques annexes, liées à l'expérience, telles que le ou les coefficients de pertes ou la semi-transparence du dépôt. Est-il toujours possible d'extraire ces deux paramètres utiles de la courbe de contraste ? C'est ce qui va être examiné plus loin.

Notons qu'à côté de cette méthode basée sur des mesures de température en face arrière, il existe d'autres techniques de caractérisation thermique axiale des films ou des dépôts telles que :

- les méthodes où l'excitation photothermique de l'échantillon est modulée (laser) :
 - avec mesure de température sur les deux faces du film par effet mirage - déflexion d'un rayon laser en incidence rasante par changement d'indice optique de l'air [1].
 - avec mesure des températures aux bornes du substrat qui est le siège d'un effet pyroélectrique [2-5] permettant de caractériser des dépôts de quelques microns d'épaisseur.
 - avec mesure en face avant par radiométrie infrarouge, pour caractériser par exemple des traitements de surface d'aciers [6-7].
- les méthodes avec excitation photothermique impulsionnelle :
 - par mesure en face avant par détecteur quantique [8,9] et [10] permettant de descendre jusqu'au micron d'épaisseur.
 - par mesure en face avant par thermorélectance de films métalliques aussi fins que 0,1 micron [11].

2.2 - LE MODELE DIRECT

Considérons un échantillon plan bi-couche (figure 1), constitué du dépôt (épaisseur e_1) et du substrat (épaisseur e_2) et soumis à une excitation thermique impulsionnelle de densité d'énergie $Q(\text{J/m}^2)$ sur sa face avant ($x = 0$). Si l'échantillon est considéré comme infini dans la direction radiale (r) et si l'impulsion est uniforme sur la face avant, le problème est unidirectionnel. Nous appelons λ_i , a_i et $\rho_i c_i$ les conductivités, diffusivités et capacités thermiques volumiques du dépôt ($i = 1$) et du substrat ($i = 2$). Si les pertes thermiques sur les deux faces sont négligées, l'équation de la chaleur et ses conditions initiale et aux limites associées s'écrivent :

$$\begin{aligned}
 \left. \begin{aligned}
 \frac{\partial^2 T_i}{\partial x^2} &= \frac{1}{a_i} \frac{\partial T_i}{\partial t} \\
 T_i &= 0 \text{ à } t = 0
 \end{aligned} \right\} \text{ pour } i = 1 \text{ ou } 2 \\
 -\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial x} &= Q \delta(t) \quad \text{à } x = 0 \\
 \left. \begin{aligned}
 \lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial x} &= \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial x} \\
 T_1 &= T_2
 \end{aligned} \right\} \text{ à } x = e_1 \\
 \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial x} &= 0 \quad \text{à } x = e_1 + e_2
 \end{aligned} \tag{I}$$

L'échantillon est donc supposé initialement isotherme à la température de référence ($T = 0$) et le contact thermique parfait à l'interface entre les deux couches. $\delta(t)$ est la distribution de Dirac de surface unité.

Le problème est transitoire et unidirectionnel, il peut donc être avantageusement résolu par la méthode des quadripôles [12] après utilisation de la transformation de Laplace.

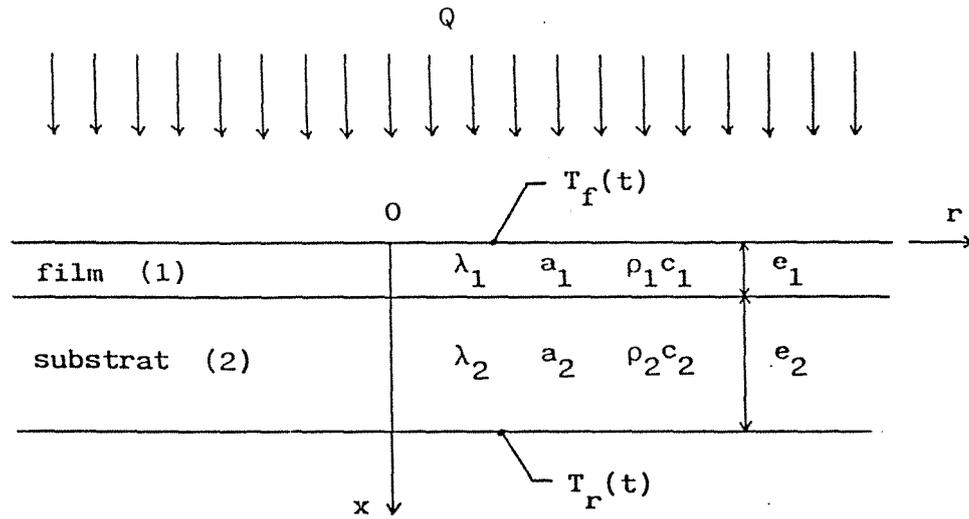


Fig. 1. Schéma de l'échantillon et manipulation flash

Si $\theta_\alpha(p)$ et $\phi_\alpha(p)$ sont les transformées de Laplace de la température $T_\alpha(t)$ et de la densité de flux $\varphi_\alpha(t)$ ($= -\lambda_i \frac{\partial T_i}{\partial x}$) sur la face avant ($\alpha = f$) et sur la face arrière ($\alpha = r$) de l'échantillon, p étant la variable de Laplace, l'équation matricielle suivante peut être écrite :

$$\begin{bmatrix} \theta_f \\ \phi_f \end{bmatrix} = \mathbf{M} \begin{bmatrix} \theta_r \\ \phi_r \end{bmatrix} \quad (1)$$

avec

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \mathbf{M}_1 \mathbf{M}_2 \quad \text{et} \quad \mathbf{M}_i = \begin{bmatrix} A_i & B_i \\ C_i & D_i \end{bmatrix}$$

pour $i = 1, 2$

et

$$\theta_\alpha = \mathcal{L}[T_\alpha] = \int_0^\infty \exp(-pt) T_\alpha(t) dt \quad \text{pour } \alpha = 1, 2$$

Les matrices \mathbf{M}_1 et \mathbf{M}_2 associées à chaque couche ont pour coefficients :

$$\left. \begin{aligned} A_i &= D_i = \text{ch}(k_i e_i) & B_i &= \frac{1}{\lambda_i k_i} \text{sh}(k_i e_i) \\ C_i &= \lambda_i k_i \text{sh}(k_i e_i) \end{aligned} \right\} \text{ pour } i = 1, 2$$

avec

$$k_i = \sqrt{p/a_i}$$

Dans ce problème particulier, les transformées de Laplace des températures des faces avant et arrière peuvent être calculées en utilisant l'équation (1) car les conditions aux limites du système (I) s'écrivent :

$$\phi_f = Q \quad \phi_r = 0$$

d'où :

$$\theta_f = Q A/C \quad \theta_r = Q/C$$

La température de Laplace en face arrière s'écrit alors (en omettant l'indice r) :

$$\theta = Q [\lambda_1 k_1 \text{sh}(k_1 e_1) \text{ch}(k_2 e_2) + \lambda_2 k_2 \text{sh}(k_2 e_2) \text{ch}(k_1 e_1)]^{-1} \quad (2)$$

Notons que si l'on intervertit les couches, c'est-à-dire si c'est le substrat qui est en face avant, la température en face arrière reste inchangée du fait de la symétrie de l'équation (2).

Si nous considérons maintenant le même problème pour le substrat seul (indice 0 : $e_1 = 0$), la réponse en température de la face arrière est :

$$\theta_0 = Q_0 [\lambda_2 k_2 \operatorname{sh}(k_2 e_2)]^{-1}$$

Les énergies Q et Q_0 absorbées par le bicouche et par le substrat n'étant pas forcément égales, il y a lieu de procéder à une normalisation à l'aide des valeurs asymptotiques (indice ∞) des températures, si l'on désire construire un contraste ΔT^* qui s'annule aux temps longs :

$$T_\infty = \frac{Q}{\rho_1 c_1 e_1 + \rho_2 c_2 e_2} \quad T_{0\infty} = \frac{Q_0}{\rho_2 c_2 e_2} \quad (3)$$

$$\Delta T^* = \frac{T}{T_\infty} - \frac{T_0}{T_{0\infty}} \quad (4)$$

Nous appelons $\Delta\theta^*$ la transformée de Laplace du contraste ΔT^* (l'indice supérieur * se rapportant aux grandeurs réduites). Celle-ci peut être exprimée en fonction des paramètres réduits K_1 et K_2 :

$$\Delta\theta^* = \mathcal{L}[\Delta T^*] = \frac{e_2^2}{a_2} \Delta\theta^{**}$$

avec :

$$\Delta\theta^{**} = \frac{1}{s} \left[\frac{1 + K_1 K_2}{K_2 \operatorname{sh}(K_1 s) \operatorname{ch}(s) + \operatorname{sh}(s) \operatorname{ch}(K_1 s)} - \frac{1}{\operatorname{sh}(s)} \right] \quad (5)$$

et :

$$s = \sqrt{p^*} \quad p^* = e_2^2 p / a_2$$

$$K_1 = \frac{e_1}{e_2} \left(\frac{a_2}{a_1} \right)^{\frac{1}{2}} \quad K_2 = \left(\frac{\lambda_1 \rho_1 c_1}{\lambda_2 \rho_2 c_2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (6)$$

K_1 est la racine carrée du rapport des temps caractéristiques de diffusion thermique des deux couches alors que K_2 est le rapport de leurs diffusivités thermiques. Ces deux paramètres peuvent être considérés comme "naturels" puisqu'ils apparaissent après l'introduction de la variable réduite de Laplace p^* , construite à l'aide des caractéristiques connues (épaisseur et diffusivité) du substrat. $\Delta\theta^{**}$ peut donc être considéré comme la transformée de Laplace du contraste ΔT^* considéré lui-même comme une fonction du nombre de Fourier t^* ($= a_2 t / e_2^2$) :

$$\Delta\theta^{**} = \mathcal{L}^*[\Delta T^*] = \int_0^\infty \exp(-p^* t^*) \Delta T^* dt^*$$

L'équation (5) donnant l'expression du contraste n'étant linéaire ni en K_1 ni en K_2 , l'étude de la sensibilité du contraste à ces deux paramètres ne peut s'effectuer de façon générale et il y a lieu d'examiner des cas particuliers de dépôts et de substrats dont on connaît les ordres de

grandeur (valeurs nominales) des paramètres K_1 et K_2 . Nous étudierons successivement le cas d'un échantillon ayant un dépôt de type résistif puis capacitif.

2.3 - DEPOT DE TYPE RESISTIF

2.3.1 - Analyse du contraste et des sensibilités

Si l'on utilise le nombre de Fourier du substrat comme variable, l'original de l'expression (5), le contraste thermique, a la forme suivante :

$$\Delta T^* = \Delta T^*(t^*, K_1, K_2) \quad (7)$$

Beck et Arnold [13] ont montré que les paramètres inconnus K_1 et K_2 pouvaient être identifiés à condition que leurs coefficients de sensibilité X_1 et X_2 ne soient pas linéairement dépendants sur l'intervalle temporel d'identification. Cette notion d'indépendance linéaire peut être examinée si l'on considère chaque coefficient de sensibilité comme un vecteur pour lequel chaque valeur du temps réduit fournit une composante sur le domaine d'identification :

$$X_i(t^*, K_1, K_2) = \left. \frac{\partial \Delta T^*}{\partial K_i} \right|_{t^*, K_{j \neq i}} \quad \text{avec } i, j = 1 \text{ ou } 2 \quad (8)$$

Les transformées de Laplace de ces deux coefficients de sensibilité sont les dérivées partielles de $\Delta \theta^{**}$ par rapport à K_1 et K_2 , p^* restant fixé pendant ces dérivations.

Les coefficients de sensibilité de Laplace peuvent donc être aisément calculés analytiquement par dérivation de l'expression (5) et, en utilisant ensuite l'algorithme d'inversion numérique proposé par Stehfest [14] - voir Annexe 2.1 - il est possible de calculer les originaux ΔT^* , X_1 et X_2 .

Nous avons tracé sur la **figure 2** la variation de l'opposé du contraste ΔT^* et les deux coefficients réduits de sensibilité $K_1 X_1$ et $K_2 X_2$ en fonction du nombre de Fourier du substrat t^* (la multiplication par K_1 permet une comparaison des sensibilités qui fait abstraction du niveau absolu de chacun des paramètres), pour un échantillon composé d'un dépôt de "wet spray" (matériau réfractaire composé principalement de poudre de silice)

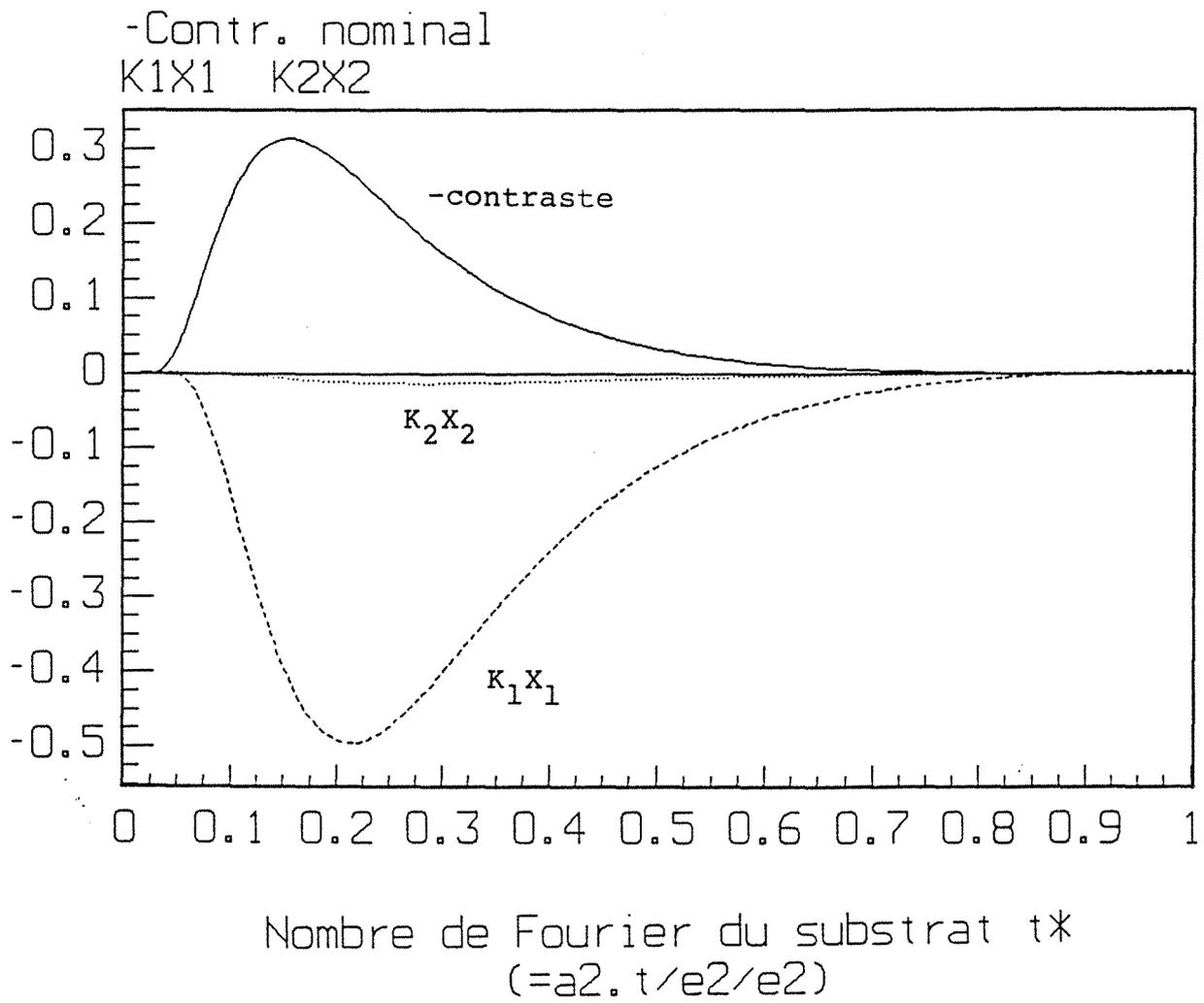


Fig. 2. Contraste et sensibilités nominales - Echantillon
wet spray/acier

déposé sur un substrat en acier. Les caractéristiques de cet échantillon de 35 mm de diamètre sont les suivantes :

- valeurs mesurées :

$$e_1 = 0,556 \text{ mm} \quad e_2 = 2,12 \text{ mm} \quad a_2 = 10,6 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$$

- valeurs nominales :

$$\lambda_1 = 1 \text{ W m}^{-1}\text{K}^{-1} \quad \rho_1 c_1 = 2,0 \cdot 10^5 \text{ J m}^{-3}\text{K}^{-1} \Rightarrow a_1 = 5 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$$

$$\lambda_2 = 30 \text{ W m}^{-1}\text{K}^{-1} \Rightarrow \rho_2 c_2 = 2,83 \cdot 10^6 \text{ J m}^{-3}\text{K}^{-1}$$

d'où les valeurs nominales des paramètres du modèle :

$$K_1 = 0,382 \quad K_2 = 0,0485$$

Le rapport (1/2) des capacités thermiques des deux couches est de l'ordre de 0,02 tandis que celui de leurs résistances thermiques est voisin de 8.

On constate que le contraste est mesurable (maximum de l'ordre de 0,3, l'unité donnant la température asymptotique de chacun des deux thermogrammes) et que la sensibilité à K_1 est importante (au voisinage d'un nombre de Fourier de 0,21, une augmentation de 10 % de K_1 se traduit par un accroissement de 0,05 du contraste en valeur absolue). Par contre le contraste est très peu sensible à K_2 : au même instant une augmentation de 10 % de K_1 n'augmenterait le contraste instantané que de l'ordre de 10^{-3} . Par ailleurs les temps sont mesurables à l'aide d'un oscilloscope numérique car le temps du maximum de contraste est de l'ordre de 0,6 secondes pour cet échantillon.

2.3.2 - Influence des pertes thermiques

Avant de procéder à la mesure du contraste expérimental, il est intéressant d'examiner l'influence éventuelle des pertes thermiques sur celui-ci.

En utilisant la méthode des quadripôles, pour l'échantillon bicouche soumis à des pertes caractérisées par un coefficient de transfert convectif h identique sur ses deux faces, la relation (1) est encore valable à condition de prendre pour ϕ_f la transformée de Laplace du flux d'excitation, Q (et non celle du flux perdu par la face avant) et pour ϕ_r une valeur nulle traduisant l'absence d'excitation en face arrière (ϕ_r n'est pas le flux perdu par la face arrière). Avec ce changement de définition des flux d'entrée et de sortie, la matrice M du quadripôle s'écrit :

$$M = H M_1 M_2 H \quad \text{avec} \quad H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ h & 1 \end{bmatrix}$$

La température de Laplace en face arrière s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \theta = Q & \left\{ \lambda_1 k_1 \operatorname{sh}(k_1 e_1) \operatorname{ch}(k_2 e_2) + \lambda_2 k_2 \operatorname{sh}(k_2 e_2) \operatorname{ch}(k_1 e_1) \right. \\ & + h \left[2 \operatorname{ch}(k_1 e_1) \operatorname{ch}(k_2 e_2) + \left(\frac{\lambda_2 k_2}{\lambda_1 k_1} + \frac{\lambda_1 k_1}{\lambda_2 k_2} \right) \operatorname{sh}(k_1 e_1) \operatorname{sh}(k_2 e_2) \right] \\ & \left. + h^2 \left[\frac{1}{\lambda_2 k_2} \operatorname{sh}(k_2 e_2) \operatorname{ch}(k_1 e_1) + \frac{1}{\lambda_1 k_1} \operatorname{sh}(k_1 e_1) \operatorname{ch}(k_2 e_2) \right] \right\}^{-1} \end{aligned}$$

En utilisant la même notation qu'en 2.3, il est possible de faire apparaître les deux paramètres K_1 et K_2 :

$$\begin{aligned} \theta = Q \frac{e_2}{\lambda_2} & \left\{ K_2 s \operatorname{ch}(s) \operatorname{sh}(K_1 s) + s \operatorname{ch}(K_1 s) \operatorname{sh}(s) \right. \\ & + \operatorname{Bi} \left[2 \operatorname{ch}(s) \operatorname{ch}(K_1 s) + \left(K_2 + \frac{1}{K_2} \right) \operatorname{sh}(s) \operatorname{sh}(K_1 s) \right] \\ & \left. + \operatorname{Bi}^2 \left[\operatorname{ch}(K_1 s) \operatorname{sh}(s) + \frac{1}{K_2} \operatorname{ch}(s) \operatorname{sh}(K_1 s) \right] / s \right\}^{-1} \quad (9) \end{aligned}$$

Bi étant le nombre de Biot des pertes ramené aux propriétés du substrat :

$$\operatorname{Bi} = h e_2 / \lambda_2$$

La transformée de Laplace θ_0 de la température en face arrière du substrat seul s'écrit comme θ en remplaçant dans l'équation (9) Q par Q_0 (énergie surfacique absorbée par le monocouche) et K_1 par zéro.

A cause de la présence des pertes, la normalisation de chaque thermogramme ne peut plus être effectuée à l'aide des valeurs asymptotiques des températures qui sont nulles ; on choisit à la place les maxima des deux thermogrammes T_{\max} et $T_{0\max}$ pour définir le contraste :

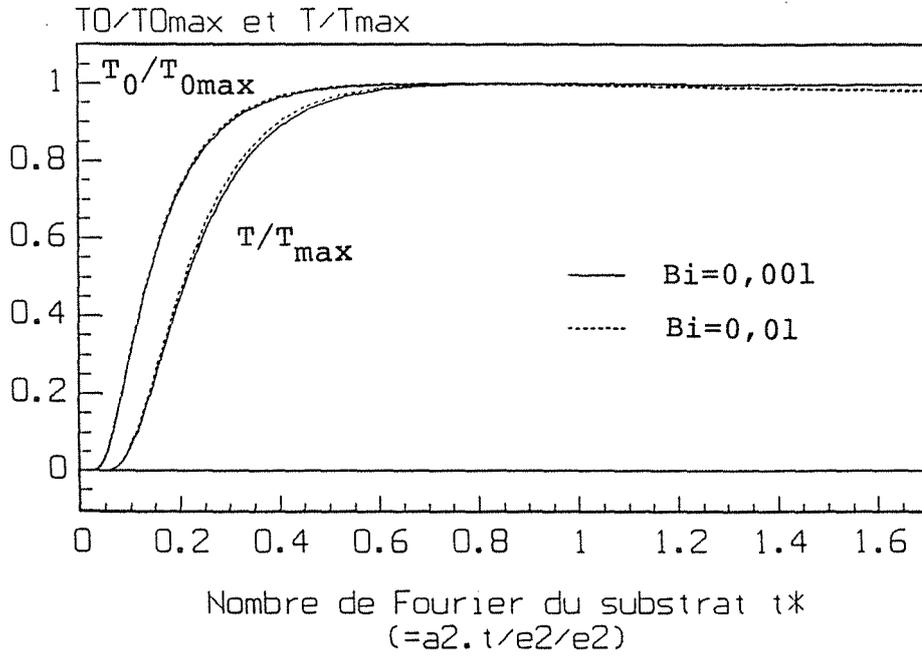
$$\Delta T^* = \frac{T}{T_{\max}} - \frac{T}{T_{0\max}} \quad (10)$$

A ce stade le contraste ne peut plus être calculé analytiquement : il est nécessaire d'inverser numériquement θ et θ_0 pour revenir dans le domaine temporel - l'inversion pouvant d'ailleurs se faire en prenant p^* comme variable de Laplace associée au nombre de Fourier t^* , Qe_2/λ_2 étant pris égal à l'unité. Une fois les deux thermogrammes T et T_0 connus, les maxima de ces deux fonctions doivent être extraits avant de calculer le contraste correspondant à l'équation (10).

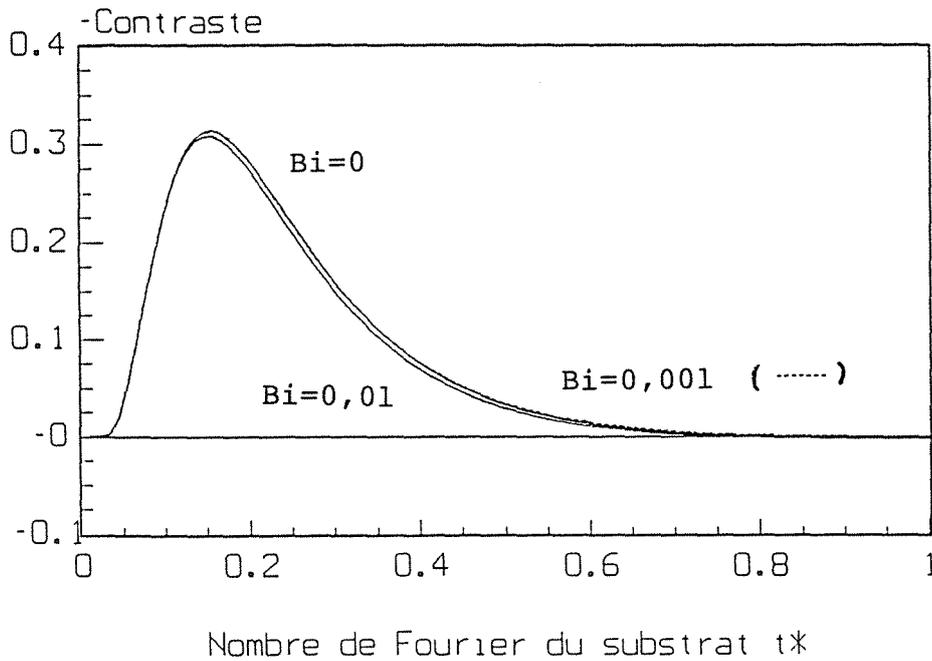
Les thermogrammes réduits T/T_{\max} et $T_0/T_{0\max}$ ainsi que les courbes de contraste ont été tracés sur les figures 3a et 3b pour une expérience sans perte ($Bi = 0$) et pour deux expériences avec pertes - nombres de Biot de 10^{-3} et 10^{-2} . Ces deux derniers cas correspondent, pour l'échantillon étudié, à des coefficients de transfert de l'ordre de 15 et de $150 \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-1}$.

On remarque que pour des valeurs usuelles des pertes ($Bi = 10^{-3}$), la courbe de contraste est confondue avec celle correspondant au cas où l'échantillon est isolé, jusqu'aux temps assez longs, sans changement de la valeur du contraste maximum. Dans le cas de pertes très importantes ($Bi = 10^{-2}$) le contraste est légèrement réduit en amplitude aux temps longs pour finir même par changer de signe.

Cette relative insensibilité aux pertes est une conséquence de la définition même du contraste : chaque thermogramme T et T_0 est réduit en amplitude du fait de ces pertes, mais la différence de ces deux courbes fait pratiquement disparaître cet effet parasite.



a- Thermogrammes normalisés



b- Contrastes

Fig. 3. Influence des pertes - Wet spray/acier - valeurs nominales

Il est donc possible d'affirmer que, pour des expériences faites dans des conditions correctes sur l'échantillon étudié - avec des coefficients d'échange du même ordre de grandeur pour les deux expériences - l'influence des pertes sur le contraste est négligeable, jusqu'à des temps correspondant à environ deux fois et demi le temps du maximum de contraste.

2.3.3 - Résultats expérimentaux

Le diffusivimètre flash du LEMTA ainsi qu'un oscilloscope à mémoire numérique ont été utilisés pour obtenir les thermogrammes temporels en face arrière du bicouche $T(t)$ - **figure 4** - et du substrat seul $T_0(t)$ une fois le dépôt de wet spray éliminé par ponçage - **figure 5**. Ce deuxième thermogramme nous a permis d'identifier la diffusivité thermique a_2 du substrat utilisée plus haut par la méthode des moments temporels partiels [15]. Ces deux courbes temporelles ont été acquises avec un gain de 3000. Le thermogramme du monocouche a été établi avec une acquisition d'un point toutes les 0,2 ms (filtrage à 1 kHz) tandis que celui relatif au bicouche correspondait à une période d'acquisition de 1 ms avec un filtrage identique.

La courbe expérimentale de contraste a pu être calculée en appliquant la relation (10) à partir de ceux deux signaux - **figure 6**. Cette dernière est construite à l'aide de 342 points avec une période de 2 ms entre points. Notons qu'aux temps courts ($t < 20$ ms), l'induction électrique produite par le flash, lui-même de durée finie (centre de gravité énergétique à environ 1 ms), produit un parasite sur chaque thermogramme et donc sur le contraste. Par la suite, le contraste expérimental sera remis d'office à zéro (valeur initiale) aux temps courts pour éliminer ce phénomène.

2.3.4 - Différentes méthodes d'identification des paramètres

Lorsque l'on est confronté à un problème d'identification de paramètres et que l'on dispose de l'équation d'état (7) du phénomène, il est habituel de recourir à une méthode des moindres carrés non linéaire telle que celle de Gauss [13] afin de minimiser l'écart quadratique moyen entre les valeurs mesurées de la fonction et ses valeurs théoriques dépendant explicitement des paramètres recherchés. Ce type de problème est dit inverse car

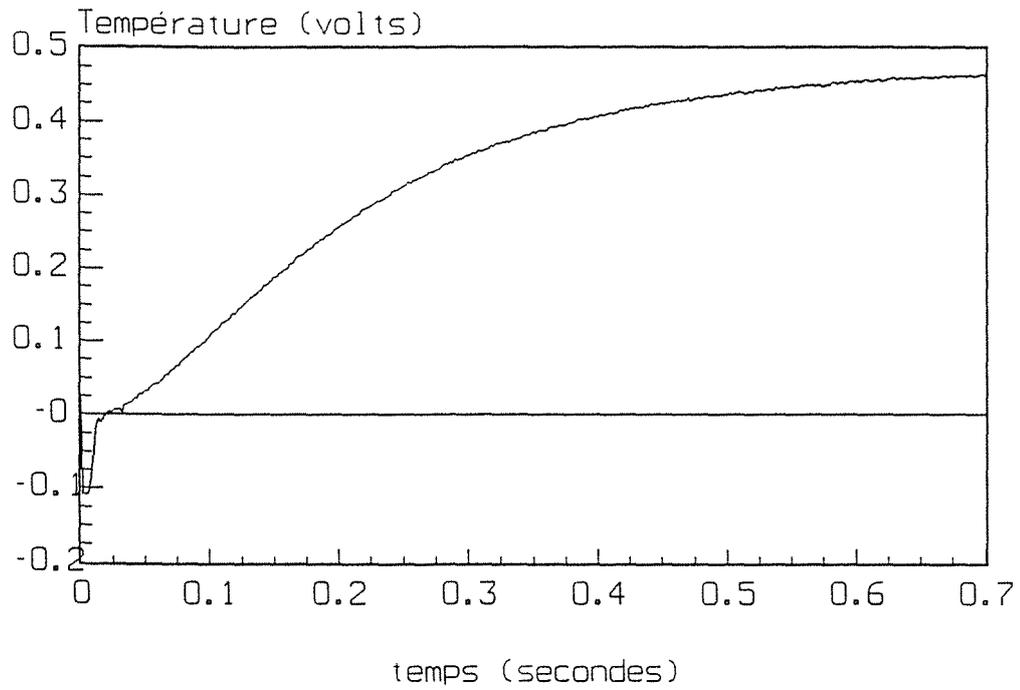


Fig. 4. Thermogramme expérimental sur le bicouche wet spray/acier

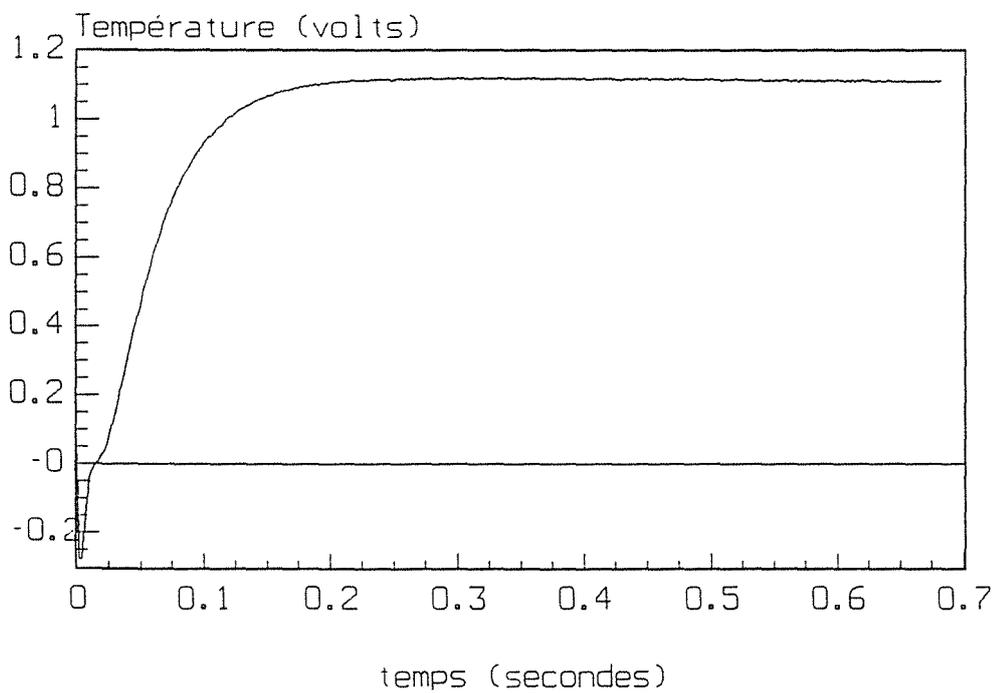


Fig. 5. Thermogramme expérimental sur le substrat seul

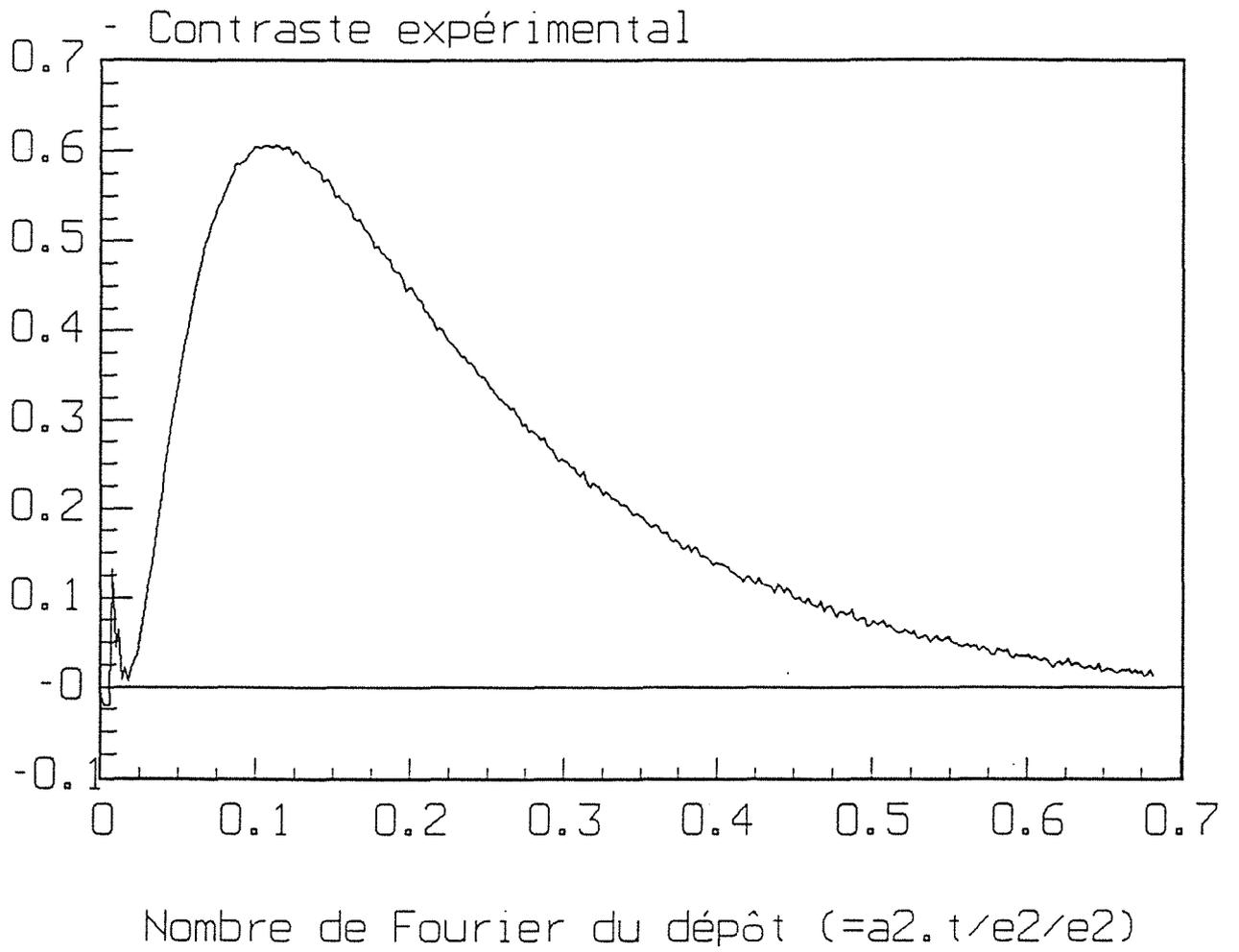


Fig. 6. Contraste expérimental - Echantillon wet spray/acier

il s'agit d'estimer les deux paramètres qui interviennent dans l'équation de la chaleur et dans ses conditions associées - système I - à partir de la mesure de l'évolution temporelle d'un point du champ. Mais le modèle direct fourni ici par l'équation (7) nécessite lui-même une inversion de Laplace de la solution (5) dans l'espace de Laplace du système I. Il en résulte que ce problème inverse, au sens de l'identification des paramètres, peut être mis sous la forme d'un problème direct si l'on considère l'expression analytique (5) de la température dans l'espace de Laplace. Cette technique d'identification a été introduite par KAVIANAPOUR et BECK [16] et reprise plus récemment par DELPECH et al. [17].

2.3.4.1 - Identification des deux paramètres par élimination de K_2

Lorsque l'on écrit l'équation (5) pour deux valeurs p_1^* et p_2^* de la variable réduite de Laplace et que l'on appelle $\Delta\theta_1^{**}$ et $\Delta\theta_2^{**}$ les contrastes de Laplace correspondants, les deux expressions obtenues peuvent être mises sous la forme :

$$K_2 = f(p_1^*, \Delta\theta_1^{**}, K_1) \quad (11)$$

$$K_2 = f(p_2^*, \Delta\theta_2^{**}, K_2) \quad (12)$$

En égalant ces deux expressions, on obtient une équation dont le paramètre K_1 est la seule inconnue si les deux contrastes de Laplace sont connus. Cette équation peut facilement être résolue en K_1 par la méthode de Newton. Une fois K_1 estimé, K_2 peut être calculé à l'aide de (11) ou (12).

Nous avons évalué les contrastes de Laplace $\Delta\theta_1^{**}$ et $\Delta\theta_2^{**}$ par intégration numérique du contraste expérimental, pondéré par $\exp(-p_1^* t^*)$ ou $\exp(-p_2^* t^*)$, par la méthode des trapèzes - aires sous les courbes de la figure 7 pour $p_1^* = 1$ et $p_2^* = 5$. Bien qu'à un instant donné il n'y ait pas égalité entre le contraste théorique - cf. équation (7) - et le contraste expérimental - du fait du bruit de mesure, une intégration temporelle permet de diminuer cet écart entre valeurs théorique et mesurée.

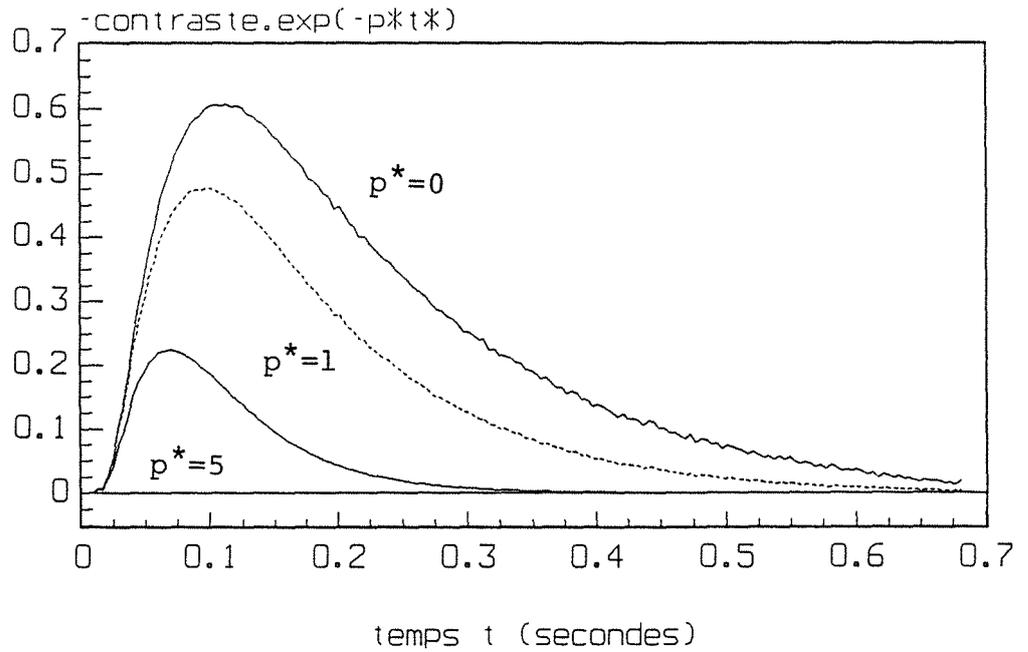


Fig. 7. Pondération du contraste expérimental par la fonction $\exp(-p^*t^*)$ - Echantillon wet spray/acier



Identification des deux paramètres par élimination de K_2

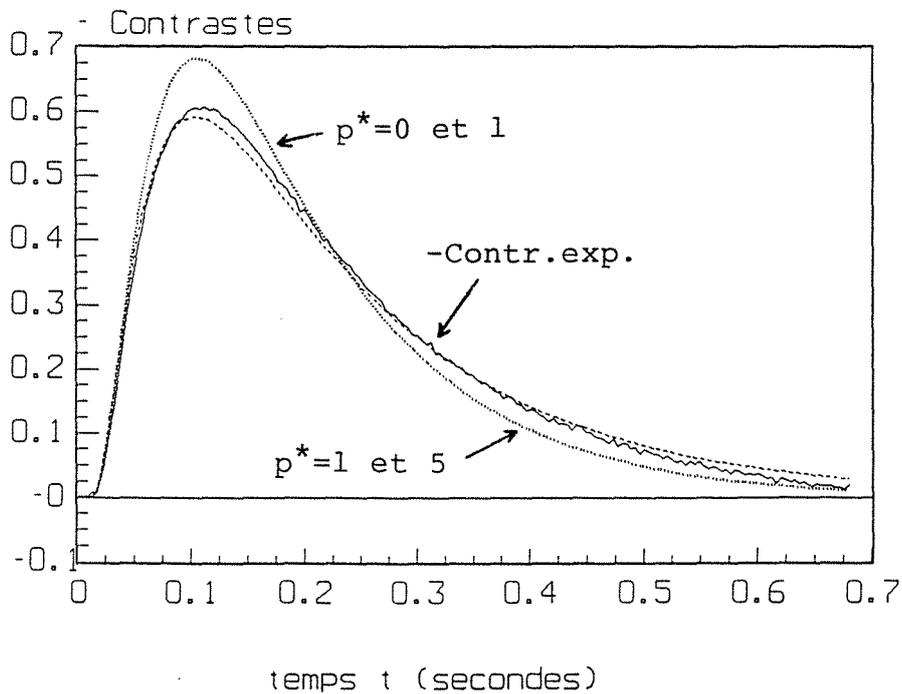


Fig. 8. Contrastes expérimental et identifiés par élimination de K_2

En travaillant avec deux couples de valeurs (p_1^*, p_2^*) , on obtient les résultats présentés dans la table 2.1 :

p_1^*	p_2^*	K_1 identifié	K_2 identifié
1	5	0,512	- 127
0	1	0,854	0,0606

Table 2.1 - Identification par élimination de K_2

Remarquons que dans le cas où p_1^* est nul, la fonction f a été obtenue à l'aide du terme d'ordre 0 du développement limité de $\Delta\theta^{**}$ en $s = \sqrt{p^*}$ au voisinage de zéro.

Le premier couple produit évidemment une valeur absurde de K_2 . Par ailleurs, les valeurs identifiées de K_1 sont très différentes. Afin de tester la validité du modèle, les contrastes correspondant aux deux couples de valeurs identifiées pour K_1 et K_2 ont été recalculés et comparés au contraste expérimental et tracés sur la **figure 8**. L'adéquation entre contraste identifié et contraste expérimental n'est bonne que pour le premier couple ($K_2 < 0$). D'autre part, un fort couplage existe entre les deux paramètres : une faible valeur de K_1 est compensée par un haut niveau de K_2 (en valeur absolue). Ceci résulte de la sensibilité à K_2 qui est très faible pour les valeurs nominales des paramètres.

Cette méthode d'identification semble donc dangereuse car l'on élimine, entre les équations (11) et (12), non pas le paramètre K_2 mais seulement sa valeur identifiée qui est forcément imprécise du fait de cette faible sensibilité à K_2 . Il en résulte que l'équation, dont la valeur identifiée de K_1 est solution, porte en elle cette incertitude importante sur K_2 et ceci même en supposant des incertitudes nulles de mesure sur $\Delta\theta_1^{**}$ et $\Delta\theta_2^{**}$.

2.3.4.2 - Identification de K_1 par transformée de Laplace à K_2 nominal

L'équation (5) donnant le contraste de Laplace peut se mettre sous la forme :

$$f(p^*, \Delta\theta^{**}, K_1) - K_2 = 0 \quad (13)$$

Si K_2 est gardé constant à sa valeur nominale et si le contraste de Laplace $\Delta\theta^{**}$ est évalué par intégration numérique du contraste expérimental pour une valeur de p^* comme en 2.3.4.1., il est possible de résoudre aisément cette équation en K_1 . Les résultats de cette identification sont présentés dans la table 2.2 pour différentes valeurs de p^* :

p^*	0	0,01	1	3	5	7	10
K_1 identifié	0,855	0,855	0,837	0,795	0,758	0,726	0,685

Table 2.2 - Identification de K_1 par transformation de Laplace à K_2 nominal

Les valeurs identifiées de K_1 sont une fonction décroissante de p^* , c'est-à-dire que plus le temps augmente plus le modèle a besoin d'augmenter K_1 pour suivre la courbe expérimentale de contraste.

2.3.4.3 - Identification de K_1 par la méthode du maximum

Une méthode très simple d'identification, dans le cas d'un modèle à un seul paramètre, est celle qui consiste à construire, à l'aide du modèle direct, une courbe d'identification donnant la variation d'un point caractéristique de la fonction étudiée (en temps ou en signal) en fonction de la valeur du paramètre. Nous avons choisi ici le point de maximum de contraste, dont l'amplitude a été calculée en fonction de K_1 , en faisant varier celui-ci sur une large plage autour de sa valeur nominale, en gardant K_2 fixé à sa valeur nominale. La courbe d'identification est tracée sur la figure 9. Le contraste maximum est très sensible à K_1 . Sa valeur expérimentale mesurée

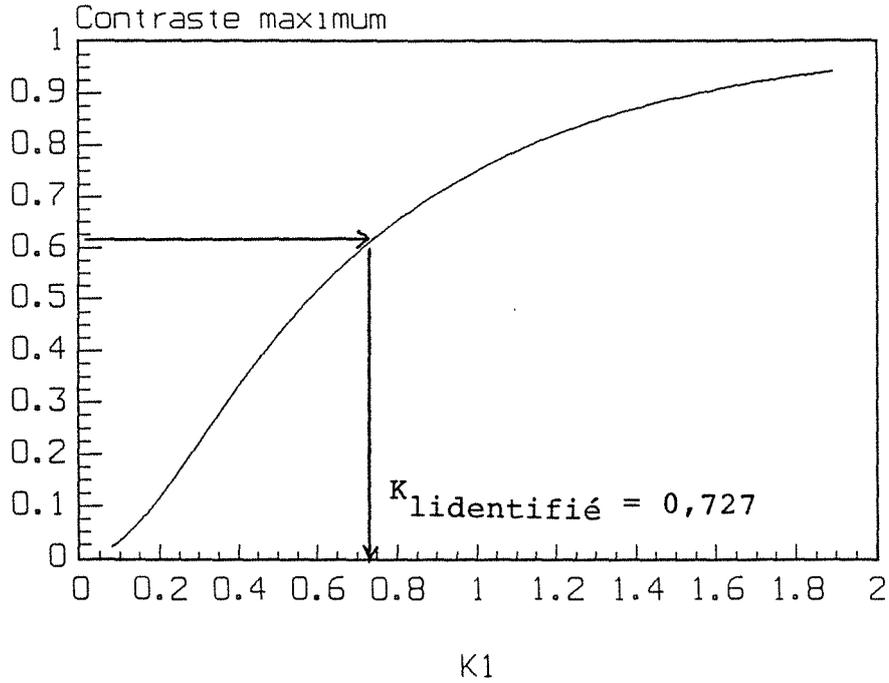


Fig. 9. Identification de K_1 par la courbe du contraste maximum à $K_2 = K_{2 \text{ nominal}}$ - wet spray/acier - modèle opaque

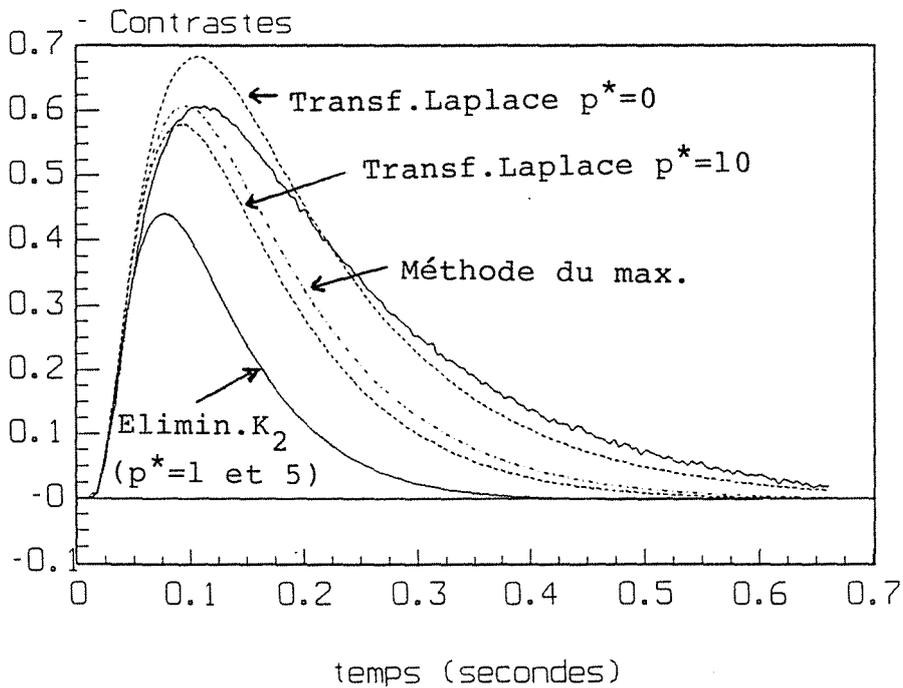


Fig. 10. Comparaison des 3 méthodes d'identification pour le modèle opaque sur l'échantillon wet spray/acier ($K_2 = K_{2 \text{ nominal}}$)

est de 0,608 ce qui nous fournit une valeur identifiée de 0,727 pour K_1 par cette méthode.

2.3.4.4 - Comparaison des trois méthodes d'identification

Une manière d'évaluer la qualité des identifications proposées est de tracer les courbes de contraste, à l'aide des valeurs identifiées, et de les comparer à la courbe expérimentale. Cette comparaison est présentée sur la **figure 10** où sont tracées les courbes identifiées par :

- la méthode d'élimination de K_2 :

$$K_1 = 0,512 \quad (p^* = 1 \text{ et } 5)$$

- la méthode utilisant une transformée de Laplace :

$$\begin{aligned} K_1 &= 0,855 & (p^* &= 0) \\ K_1 &= 0,685 & (p^* &= 10) \end{aligned}$$

- la méthode du maximum de contraste :

$$K_1 = 0,727$$

Ces quatre courbes ont été calculées en gardant K_2 fixé à sa valeur nominale.

Il est manifeste qu'aucune courbe recalculée à partir de la valeur identifiée de K_1 ne réussit à restituer la courbe expérimentale, si ce n'est aux tous premiers instants où la sensibilité à K_1 est pratiquement nulle.

A ce stade il est nécessaire de remettre en cause le modèle qui a été choisi et de revenir aux conditions expérimentales de la mesure.

La couche de wet spray, qui est très friable, n'a pas pu être placée en face arrière, à cause de la présence des deux doigts du thermocouple en Bi_2Te_3 qui l'auraient dégradé, la mesure de température se faisant par contact. Ce dépôt, situé en face avant, a donc été exposé à l'éclair des tubes

flash. Du fait de la porosité de ce dépôt, il est nécessaire d'étudier l'influence d'un éventuel transfert radiatif en son sein.

2.3.5 - Modèles radiatifs

2.3.5.1 - Modèle à absorption interfaciale

Nous examinons le cas où le flux radiatif émis par les tubes à éclat (dans le visible) traversent complètement le dépôt (transparence totale) pour être absorbé à l'interface entre les deux couches. La méthode des quadripôles peut encore être utilisée en adoptant le schéma de la figure 11. En notant Q l'énergie surfacique absorbée par l'interface, θ_i la transformée de Laplace de la température de l'interface et ϕ_i et ϕ_i' les flux de Laplace en sortie de la première couche et en entrée de la seconde, on peut écrire :

$$\begin{bmatrix} \theta_f \\ \phi_f \end{bmatrix} = M_1 \begin{bmatrix} \theta_i \\ \phi_i \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \theta_i \\ \phi_i' \end{bmatrix} = M_2 \begin{bmatrix} \theta_r \\ \phi_r \end{bmatrix}$$

avec la condition de passage :

$$\begin{bmatrix} \theta_i \\ \phi_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_i \\ \phi_i' \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ Q \end{bmatrix}$$

En exprimant matriciellement le vecteur d'entrée (f) en fonction du vecteur de sortie (r) et en considérant les faces avant et arrière isolées ($\phi_f = \phi_r = 0$), on obtient aisément l'expression de la température de Laplace de la face arrière :

$$\theta_r = \frac{A_1 Q}{A_2 C_1 + A_1 C_2}$$

Il s'agit de la même expression que celle du modèle opaque - cf. équation (2) - dans laquelle on aurait remplacé l'énergie Q par $A_1 Q$. En remplaçant l'indice r de θ par ai (absorption interfaciale), la transformée

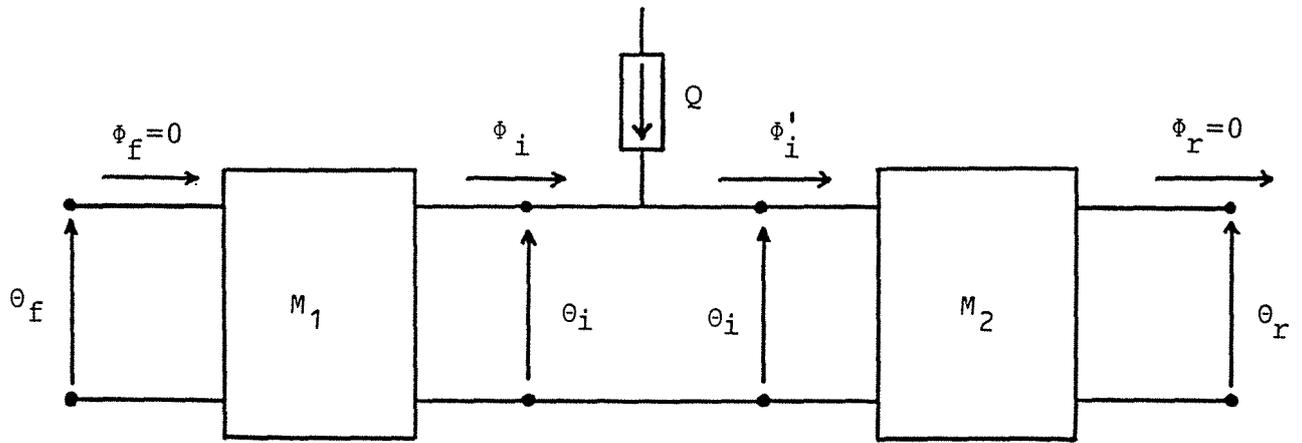


Fig. 11. Schéma quadripolaire du modèle à absorption interfaciale

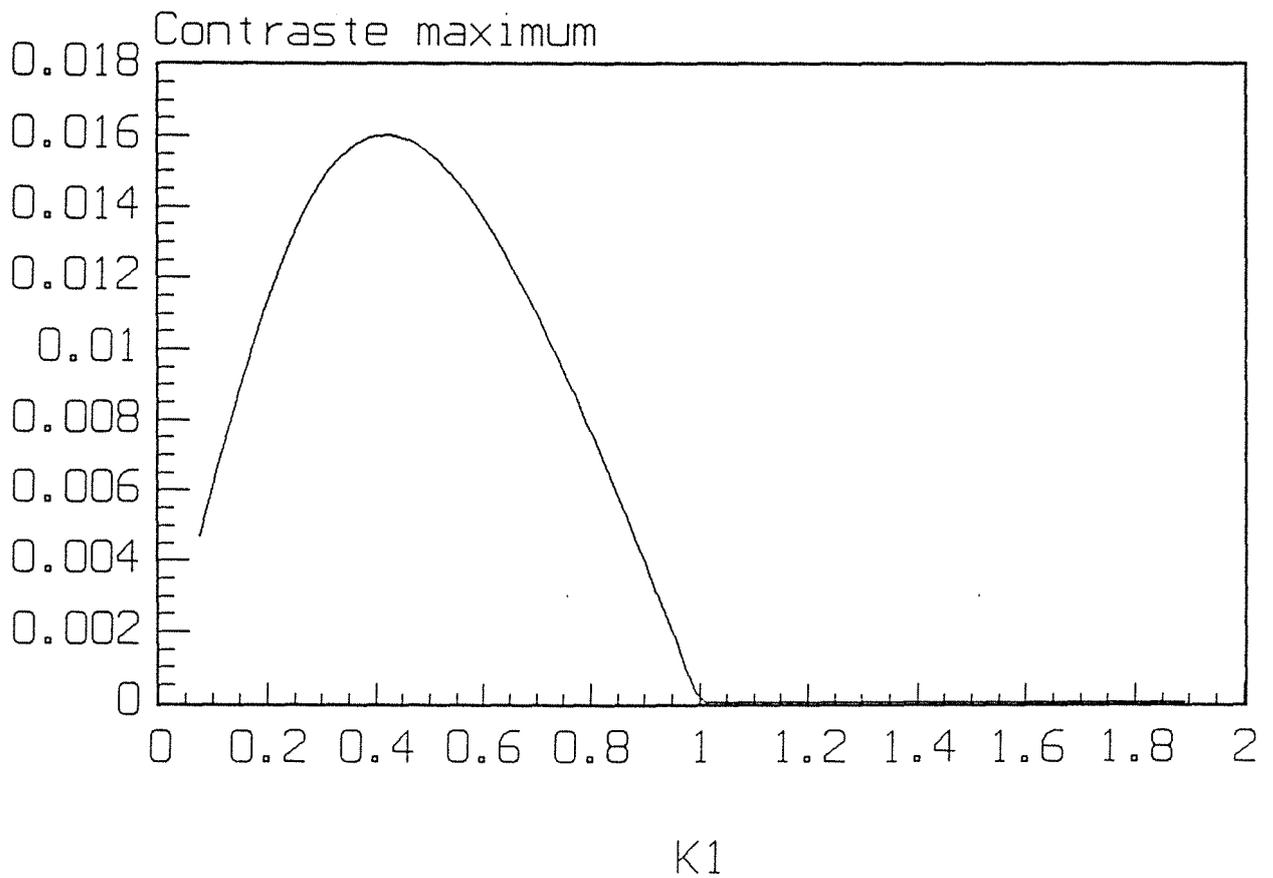


Fig. 12. Identification de K_1 par la courbe de contraste maximum à $K_2 = K_{2\text{nominal}}$ - wet spray/acier - modèle à absorption interfaciale

réduite de Laplace du contraste (4) s'écrit alors :

$$\Delta\theta_{ai}^{**} = \frac{1}{s} \left[\frac{(1 + K_1 K_2) \text{ch}(K_1 s)}{K_2 \text{sh}(K_1 s) \text{ch}(s) + \text{ch}(K_1 s) \text{sh}(s)} - \frac{1}{\text{sh}(s)} \right] \quad (14)$$

cette expression est à rapprocher de l'équation (5) du modèle opaque. Afin d'examiner l'adéquation de ce modèle vis-à-vis du contraste expérimental, l'évolution théorique du contraste maximum a été calculée en fonction de K_1 , en gardant K_2 fixé à sa valeur nominale, en adoptant la même démarche qu'en 2.3.4.3. La courbe correspondante est tracée sur la **figure 12**. Il est manifeste que les valeurs du contraste maximum (inférieures dans tous les cas à 0,016 pour ce modèle) ne peuvent expliquer le contraste expérimental maximum (0,608).

Remarquons également que le contraste maximum est virtuellement nul pour K_1 supérieur à l'unité, ce qui signifie que lorsque le temps caractéristique de diffusion du dépôt devient supérieur à celui du substrat la température en face arrière (sur le substrat) du bicouche a la même évolution que celle du substrat nu. Ceci n'est évidemment valable que si la capacité thermique du dépôt est négligeable devant celle du substrat, ce qui est le cas ici.

2.3.5.2 - Modèle semi-transparent

Le cas intermédiaire entre un dépôt opaque au flux radiatif d'excitation et un dépôt qui lui est complètement transparent (absorption interfaciale) est celui où le dépôt est semi-transparent. Dans ce cas, la première couche (1) est caractérisée par un troisième paramètre, le coefficient d'absorption volumique α , en plus de λ_1 et de $\rho_1 c_1$. Nous ne traitons ici que le cas où le dépôt est supposé "froid" du point de vue radiatif, c'est-à-dire que son émission infrarouge est négligée.

L'équation de la chaleur s'écrit alors avec un terme source q dans la première couche :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{1}{\lambda_1} q = \frac{1}{a_1} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (15)$$

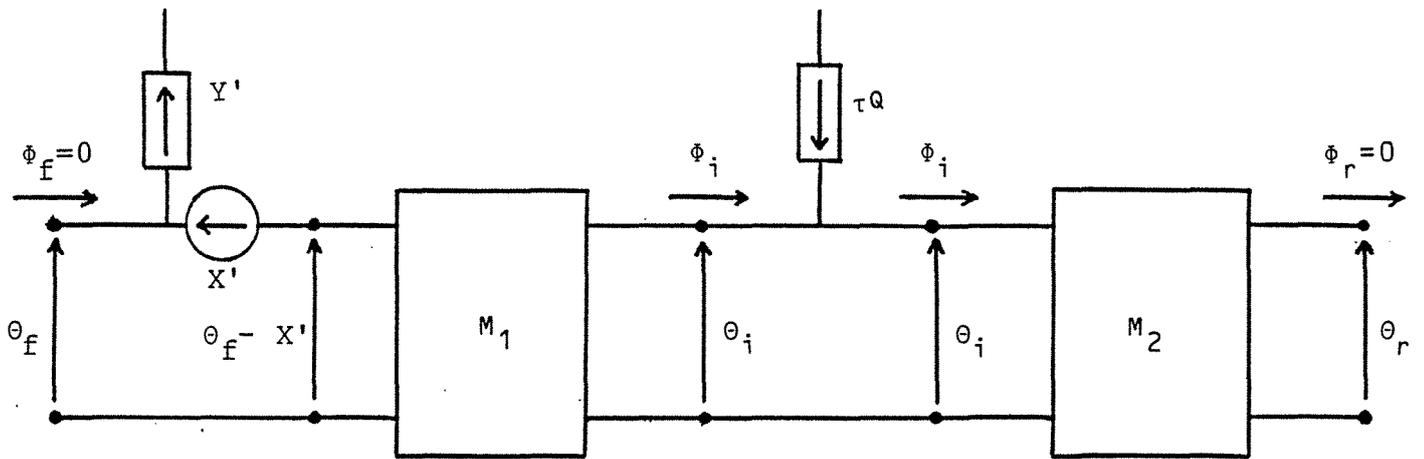


Fig. 13. Schéma quadripolaire du modèle à dépôt semi-transparent

Si l'on appelle $I(x,t)$ la luminance (dans le visible) au sein du dépôt, on peut écrire la loi de Beer :

$$I(x,t) = I_0(t) \exp(-\alpha x) \quad (16)$$

avec :

$$I_0(t) = Q \delta(t)$$

Q étant cette fois l'énergie surfacique produite par le flash et incidente sur la face avant du dépôt.

Le terme source q peut alors être calculé :

$$q = - \frac{\partial I}{\partial x} = \alpha Q \delta(t) \exp(-\alpha x)$$

L'équation (15) s'écrit, après transformation de Laplace :

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} + \frac{\alpha}{\lambda_1} Q \exp(-\alpha x) = \frac{p}{a_1} \theta \quad (17)$$

Si l'on indice par f les température θ et flux ϕ de Laplace en face avant de l'échantillon (recevant l'excitation) et par i les mêmes grandeurs à l'interface, on montre (voir Annexe 2.2.1) :

$$\begin{bmatrix} \theta_1 \\ \phi_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_f \\ \phi_f \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \theta_2 \\ \phi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_i \\ \phi_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X_2 \\ Y_2 \end{bmatrix} \quad (18)$$

avec :

$$X_1 = \frac{\alpha}{\alpha^2 - K_1^2} \frac{Q}{\lambda_1} \quad X_2 = X_1 \exp(-\alpha e_1) \quad Y_1 = \lambda_1 \alpha X_1 \quad Y_2 = Y_1 \exp(-\alpha e_1)$$

et :

$$\begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_1 \end{bmatrix} = M_1 \begin{bmatrix} \theta_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} \quad (19)$$

A l'aide des relations (18) et (19), il est possible d'exprimer les conditions de la face avant en fonction de celles de l'interface du côté du dépôt :

$$\begin{bmatrix} \theta_f \\ \phi_f \end{bmatrix} = M_1 \begin{bmatrix} \theta_i \\ \phi_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X' \\ Y' \end{bmatrix} \quad (20)$$

avec :

$$\begin{bmatrix} X' \\ Y' \end{bmatrix} = [\exp(-\alpha e_1) M_1 - I] \begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{bmatrix} \quad (21)$$

I étant la matrice identité.

Il reste à écrire la condition de passage à l'interface traduisant le fait que le flux de Laplace ϕ_i' entrant dans la deuxième couche (substrat) est la somme du flux conductif ϕ_i et de la part du flux lumineux qui n'a pas été absorbé par le dépôt :

$$\begin{bmatrix} \theta_i \\ \phi_i' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_i \\ \phi_i \end{bmatrix} + \exp(-\alpha e_1) \begin{bmatrix} 0 \\ Q \end{bmatrix} \quad (22)$$

D'autre part, la deuxième couche étant opaque, on a - voir figure 13 - :

$$\begin{bmatrix} \theta_i \\ \phi_i' \end{bmatrix} = M_2 \begin{bmatrix} \theta_r \\ \phi_r \end{bmatrix} \quad (23)$$

Les relations (20), (22) et (23) permettent d'exprimer le vecteur d'entrée -c'est-à-dire les conditions de la face avant (f)- en fonction du vecteur de sortie -c'est-à-dire les conditions de la face arrière (r) - :

$$\begin{bmatrix} \theta_f \\ \phi_f \end{bmatrix} = M_1 M_2 \begin{bmatrix} \theta_r \\ \phi_r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \quad (24)$$

avec - voir équation (21) :

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = [\exp(-\alpha e_1) M_1 - I] \begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{bmatrix} + [-\exp(-\alpha e_1) M_1] \begin{bmatrix} 0 \\ Q \end{bmatrix}$$

L'équation (24) permet le calcul de la température de Laplace de la face arrière lorsque l'échantillon est isolé ($\phi_f = \phi_r = 0$) :

$$\theta_r = \frac{\tau A_1 Q - \tau C_1 X_1 + (1 - \tau A_1) Y_1}{A_1 C_2 + A_2 C_1} \quad (25)$$

τ étant le coefficient de transmission de la première couche :

$$\tau = \exp(-\alpha e_1)$$

L'expression (25) permet de construire la transformée réduite de Laplace du contraste (voir Annexe 2.2.2) :

$$\Delta\theta_{st}^{**} = \frac{1}{s} \left\{ \frac{(1+K_1K_2) [\ln^2\tau + \tau\ln(\tau)K_1s \operatorname{sh}(K_1s) - \tau K_1^2 s^2 \operatorname{ch}(K_1s)]}{[K_2 \operatorname{sh}(K_1s) \operatorname{ch}(s) + \operatorname{sh}(s) \operatorname{ch}(K_1s)] (\ln^2\tau - K_1^2 s^2)} - \frac{1}{\operatorname{sh}(s)} \right\} \quad (26)$$

avec :

$$s = \sqrt{p^*}$$

Remarquons que l'on retrouve bien, lorsque τ tend vers zéro, l'expression (5) du contraste pour un dépôt opaque et, lorsque τ tend vers l'unité, l'expression (14) du contraste pour un substrat complètement transparent (modèle à absorption interfaciale).

2.3.6 - Identification de paramètres pour le modèle semi-transparent

2.3.6.1 - Identification pour différents couples de variables de Laplace

L'équation (26) peut se mettre sous la forme :

$$\Delta\theta_{st}^{**} = g(p^*, K_1, K_2, \tau) \quad (27)$$

Du fait de l'étude de sensibilité qui a été conduite plus haut sur le modèle opaque, il est illusoire de chercher à identifier le paramètre K_2 ; aussi ce dernier sera-t-il fixé lors de l'identification par le modèle semi-transparent.

Si on appelle $m(p^*)$ la valeur du contraste expérimental calculé dans l'espace de Laplace par intégration numérique, pour une valeur donnée de p^* , l'équation (27) peut se mettre sous la forme :

$$u(m(p^*), p^*, K_1, \tau) = g(p^*, K_1, K_2, \tau) - m(p^*) = 0 \quad (28)$$

En écrivant cette équation pour deux valeurs p_1^* et p_2^* de p^* , on dispose d'un système de deux équations transcendantes en K_1 et τ . Ce système peut être résolu numériquement, par exemple par la méthode de Newton généralisée au cas de plusieurs variables (voir Annexe 2.3) en partant d'une valeur initiale du couple (K_1, τ) . Nous avons pris Δ :

$$(K_1, \tau)_{\text{initial}} = (K_{1\text{nom}} ; 0,85).$$

Les résultats sont présentés dans la table 2.3 pour différents couples (p_1^*, p_2^*) et trois valeurs de K_2 ($5 K_{2\text{nom}}$, $K_{2\text{nom}}$ et $K_{2\text{nom}}/5$) :

$p^* \downarrow$	$p_2^* \rightarrow$	1		5		10	
	$K_2/K_{2\text{nom}}$	K_1	τ (%)	K_1	τ (%)	K_1	τ (%)
0,01	5	0,912	2,79	0,933	4,55	0,937	4,85
	1	0,924	2,97	0,942	4,62	0,945	4,89
	0,2	0,926	3,01	0,944	4,63	0,947	4,89
1	5			0,948	5,02	0,949	5,09
	1			0,954	5,06	0,955	5,11
	0,2			0,956	5,07	0,956	5,11
5	5					0,952	5,15
	1					0,957	5,15
	0,2					0,958	5,15

Table 2.3 - Identification de K_1 et de τ

On constate que, quelles que soient les valeurs prises pour K_2 , p_1^* et p_2^* , les valeurs identifiées de K_1 varient de - 3,4 à + 1,5 % autour d'une valeur moyenne de 0,944 tandis que celles pour τ varient de - 40 à + 11,5 % autour d'une moyenne de 0,0462. Si l'on ne prend pas en compte les valeurs calculées avec $p^* = 0,01$ - erreur sur $m(0,01)$ due aux temps longs : influence du bruit, des pertes, et de la valeur finie de la borne supérieure

Δ l'indice inférieur nom désigne les valeurs nominales des paramètres

d'intégration - et celles calculées avec $p^* = 10$ - erreur sur $m(10)$ par la remise à zéro des premiers points bruités des deux thermogrammes - on constate que les résultats présentent une très faible dispersion et que l'on peut donner les valeurs suivantes pour la mesure :

$$\begin{aligned} K_1 &= 0,95 \\ \tau &= 0,05 \end{aligned}$$

Afin d'examiner la validité de cette identification, le contraste a été recalculé à l'aide de l'équation (26) pour les valeurs ci-dessus de K_1 et τ et pour la valeur nominale de K_2 . Cette courbe de contraste identifiée est tracée sur la **figure 14** ainsi que la courbe expérimentale. Sont également tracées sur le même graphe les courbes de sensibilité réduite aux trois paramètres pour leurs valeurs données ci-dessus :

$$\begin{aligned} K_1 X_{1st} &= K_1 \frac{\partial \Delta T_{st}^*}{\partial K_1} \Big|_{K_2, \tau, t^*} \\ K_2 X_{2st} &= K_2 \frac{\partial \Delta T_{st}^*}{\partial K_2} \Big|_{K_1, \tau, t^*} \\ \tau X_{\tau} &= \tau \frac{\partial \Delta T_{st}^*}{\partial \tau} \Big|_{K_1, K_2, t^*} \end{aligned}$$

Cette fois-ci l'adéquation est très bonne entre courbes identifiée et expérimentale. La sensibilité relative à K_2 est virtuellement nulle ($K_2 X_{2st}$ a un extremum de $-1,2 \cdot 10^{-3}$), ce qui confirme les hypothèses précédentes. K_1 est le paramètre le plus sensible tandis que τ a une sensibilité réduite environ dix fois plus faible. Ceci peut expliquer la différence de variabilité observée dans le tableau 2.3 pour ces deux paramètres (en faisant abstraction des problèmes pratiques rencontrés pour le calcul des transformées expérimentales du contraste $m(p^*)$ évoquées plus haut). D'autre part, les maxima de sensibilité de K_1 et de τ sont nettement décalés dans

-Contrastes expériment. et ident.
 $K_1.X_1$ $K_2.X_2$ $\tau.X_\tau$

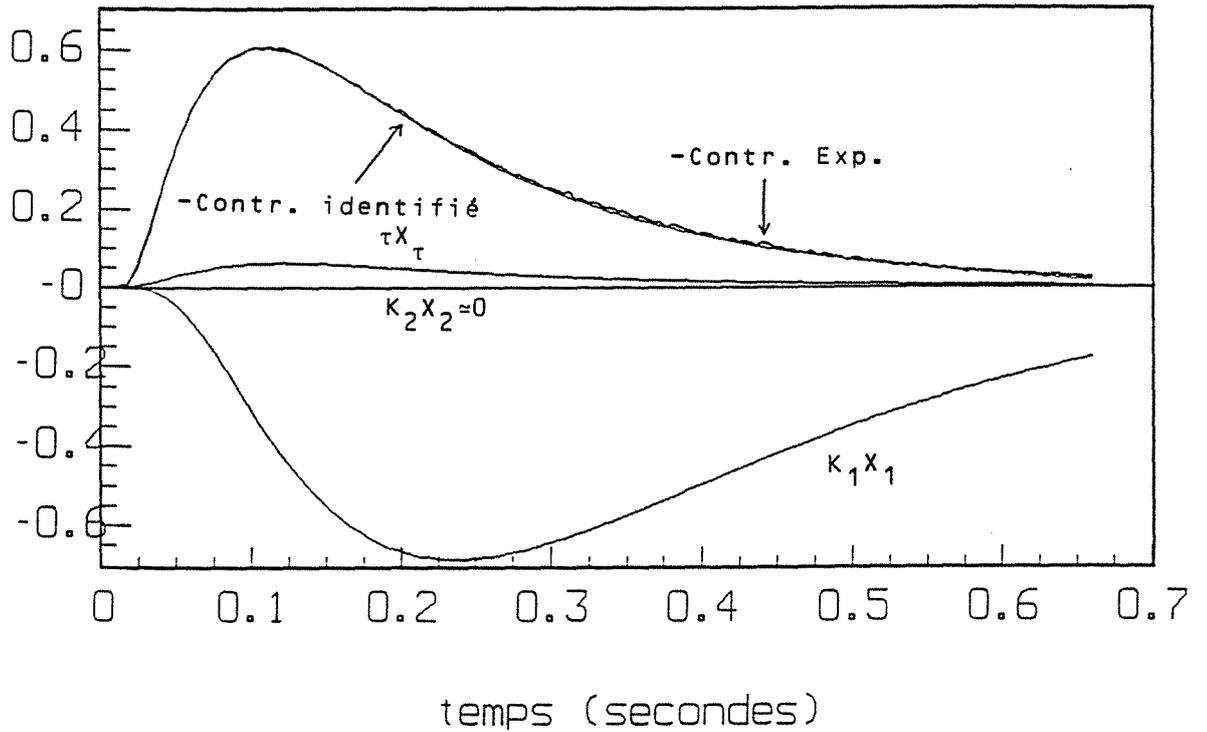
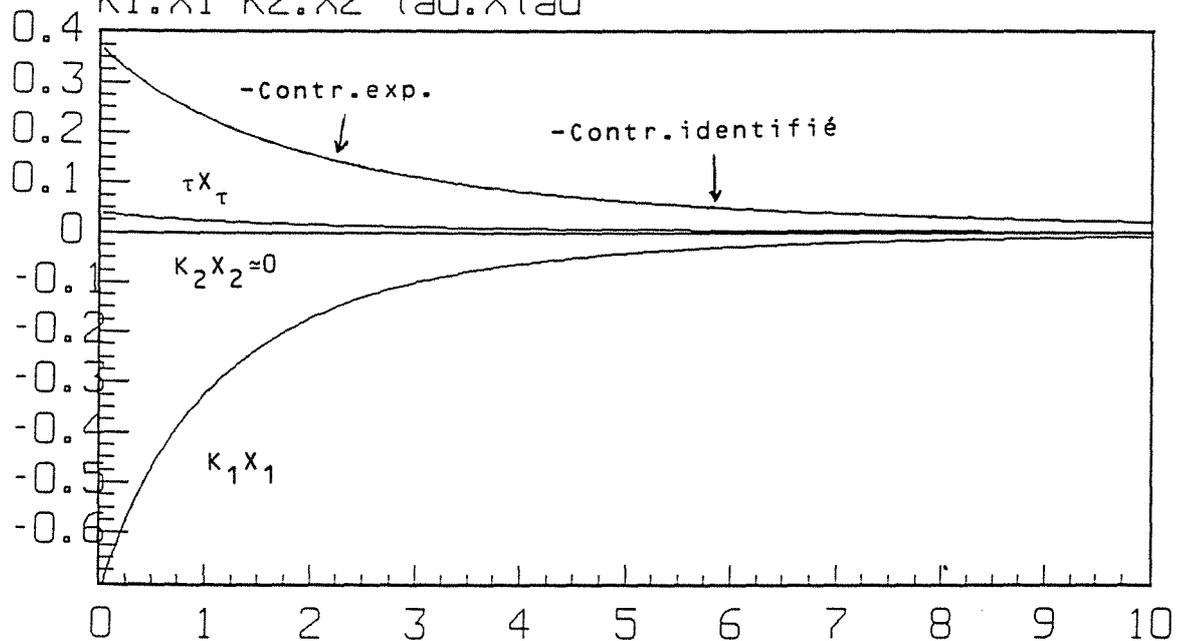


Fig. 14. Contrastes expérimental et identifiés et coefficients de sensibilité du modèle semi-transparent - $K_1=0,95$ - $K_2=K_{2nominal}$ - $\tau=0,05$ - wet spray/acier

-Contrastes expériment. et ident.
 $K_1.X_1$ $K_2.X_2$ $\tau.X_\tau$



Variable de Laplace réduite p^*

Fig. 15. Contrastes expérimental et identifié et coefficients de sensibilité dans l'espace de Laplace - modèle semi-transparent - $K_1=0,95$ - $K_2=K_{2nominal}$ - $\tau=0,05$ - wet spray/acier

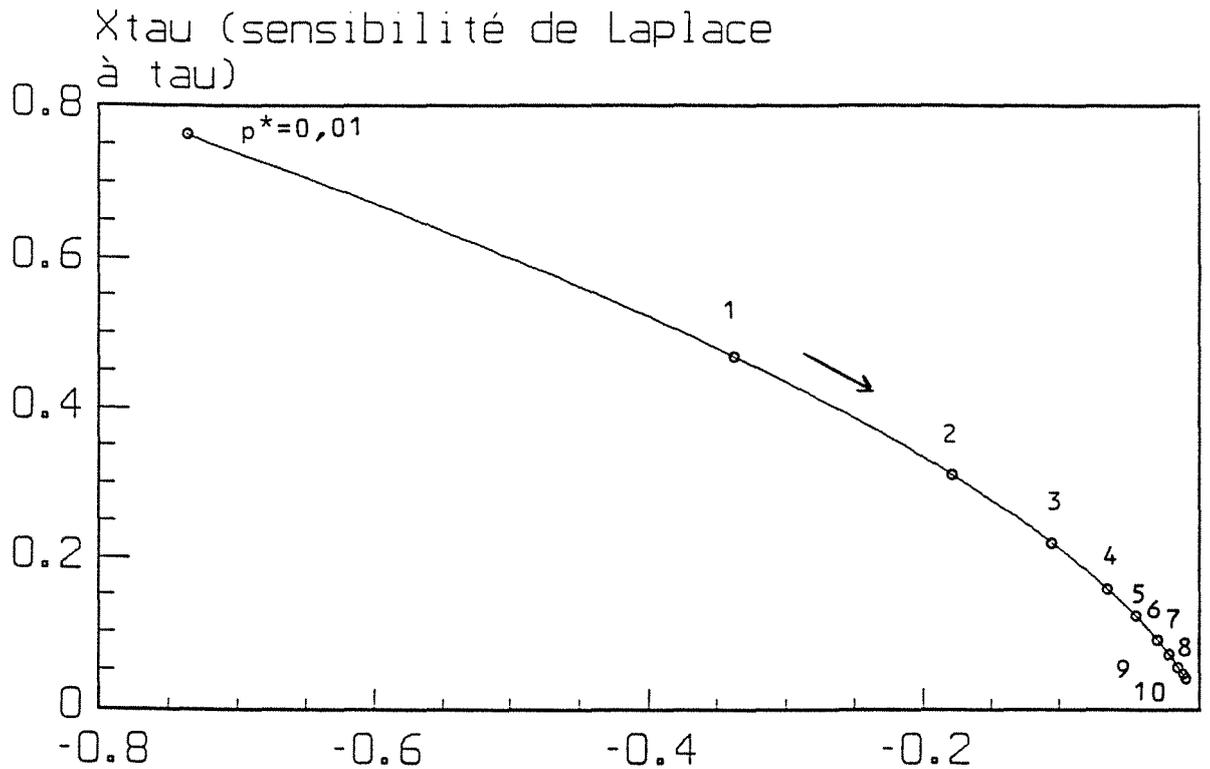
le temps, ce qui indique l'indépendance linéaire de leurs coefficients de sensibilité.

Les sensibilités ainsi que les contrastes expérimental et identifié peuvent être calculés dans l'espace de Laplace. Les courbes correspondantes sont tracées (toujours pour les mêmes valeurs des paramètres) dans l'espace de Laplace sur la **figure 15**. On constate cette fois-ci l'absolue superposition entre courbes de contraste expérimental et identifié. Ceci souligne l'intérêt de l'identification dans l'espace de Laplace : l'information $m(p^*)$, qui est ensuite utilisée pour l'identification des paramètres, résulte d'une intégration temporelle qui réduit le niveau de bruit, rendant la courbe $m(p^*)$ beaucoup plus régulière que la courbe expérimentale brute $\Delta T^*(t^*)$.

Nous avons observé, sur la **figure 14**, l'indépendance linéaire des coefficients de sensibilité $K_1 X_1$ et X_τ dans l'espace temporel. L'identification s'effectuant dans l'espace de Laplace, il est nécessaire de bien vérifier que les transformées de Laplace de ces deux coefficients - ou simplement de X_1 et de X_τ - sont linéairement indépendantes pour les valeurs p_1^* et p_2^* retenues pour l'identification. Pour chaque valeur de p^* , le point correspondant a été tracé dans le graphe $\mathcal{L}^*[X_1] - \mathcal{L}^*[X_\tau]$ de la **figure 16**. Ces deux sensibilités de Laplace sont linéairement indépendantes pour des valeurs de p_1^* et p_2^* fortement différentes de zéro. Pour des valeurs suffisamment grandes de ces deux variables, la droite qui joint leurs points représentatifs ne passe pas par l'origine et les deux paramètres peuvent être correctement estimés. En pratique, la méthode de Newton à deux variables présentée en Annexe 2.3 nécessite le calcul de l'inverse du déterminant :

$$\mathcal{L}^*[X_1(p_1^*)] \mathcal{L}^*[X_\tau(p_2^*)] - \mathcal{L}^*[X_1(p_2^*)] \mathcal{L}^*[X_\tau(p_1^*)]$$

et on retrouve cette nécessité d'indépendance linéaire des coefficients de sensibilité dans l'espace de Laplace.



X1 (sensibilité de Laplace à K1)

Fig. 16. Coefficients de sensibilité dans l'espace de Laplace
Interprétation graphique de l'indépendance linéaire -
Modèle semi-transparent - wet spray/acier

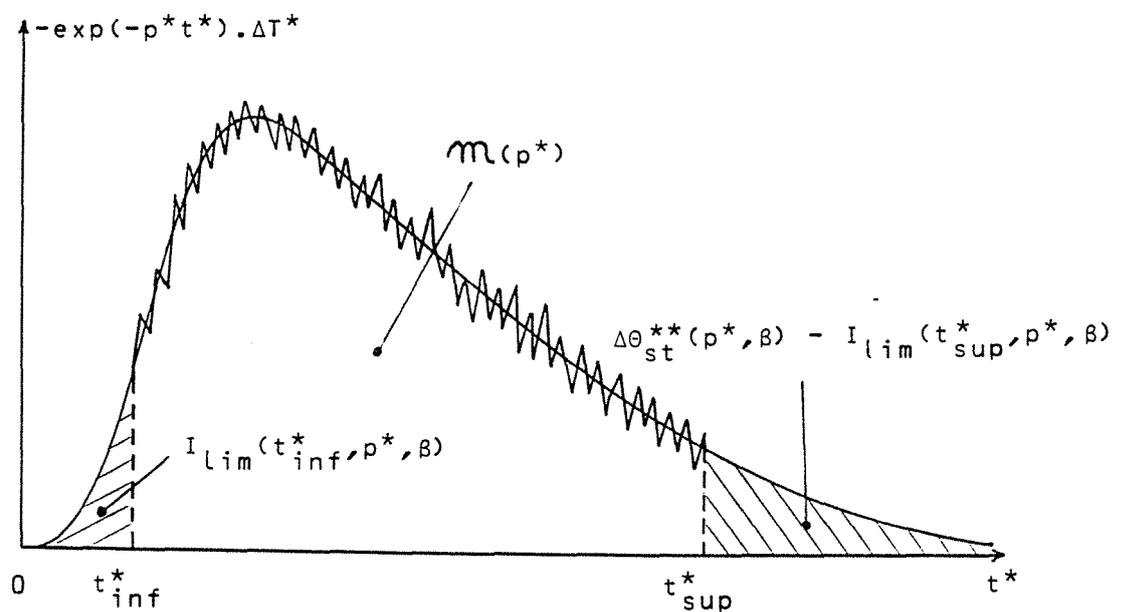


Fig. 17. Principe de la correction des effets de troncature sur
les transformées expérimentales de Laplace

2.3.6.2. - Correction des effets de troncature sur les transformées expérimentales

L'identification précédemment effectuée suppose la connaissance des transformées expérimentales de Laplace. Leur calcul est entaché de deux types d'erreurs :

- le premier est dû à l'approximation de l'intégrale de Laplace par une somme discrète, à cause de l'échantillonnage qui a été obligatoirement effectué lors de la numérisation des deux signaux expérimentaux. Ainsi, si c'est la méthode des trapèzes qui est utilisée pour l'intégration numérique, l'erreur est du deuxième ordre en Δt^* . Ce type d'erreur ne peut être évité.
- le deuxième résulte de la troncature du signal aux temps courts - pour éviter les parasites - et aux temps longs - durée finie de la mesure.

Cette deuxième erreur systématique peut être éliminée une fois que l'on dispose d'une première estimation de K_1 et τ - par exemple par la méthode présentée en 2.3.6.1. - en rajoutant les aires manquantes à l'intégrale expérimentale (voir figure 17). Il est donc possible, à partir de l'intégrale expérimentale $m(p^*)$ de construire une intégrale corrigée $m_{\text{cor}}(p^*)$ telle que :

$$m_{\text{cor}}(p^*) = m(p^*) + \text{Ilim}(t_{\text{inf}}^*, p^*, \beta) + \Delta\theta_{\text{st}}^{**}(p^*, \beta) - \text{Ilim}(t_{\text{sup}}^*, p^*, \beta) \quad (29)$$

avec : $\beta = \begin{bmatrix} K_1 \\ K_{2\text{nom}} \\ \tau \end{bmatrix}$ le vecteur paramètre identifié par la méthode "brute" à l'aide de $m(p_1^*)$ et $m(p_2^*)$;

t_{inf}^* et t_{sup}^* les nombres de Fourier du premier et du dernier point expérimental utilisé pour l'identification.

$\text{Ilim}(t^*, p^*, \beta)$ l'intégrale limitée du contraste théorique ΔT^* pondéré par l'exponentielle entre 0 et t^* .

$$I_{lim}(t^*, p^*, \beta) = \int_0^{t^*} \exp(-p^* t') \Delta T_{st}^*(t', \beta) dt'$$

Si l'on appelle t_i le temps de mesure du i ème contraste expérimental y_i ($i = 1$ correspondant aux premier point acquis après le flash) et n le nombre total de points acquis, I_{lim} et m sont calculés par les intégrations numériques suivantes :

$$I_{lim}(t_j^*, p^*, \beta) = \sum_{i=1}^j \exp(-p^* t_i^*) \Delta T_{st}^*(t_i^*, \beta) \Delta t^* \quad (30)$$

$$m(p^*) = \sum_{i=1}^n \exp(-p^* t_i^*) y_i \Delta t^* \quad (31)$$

avec :

$$\Delta t^* = a_2 \Delta t / e_2^2 \quad \text{et} \quad t_i^* = a_2 t_i / e_2^2$$

Δt étant la période d'acquisition

Les contrastes théoriques ΔT_{st}^* apparaissant dans l'expression (30) sont calculés par inversion numérique de Laplace - algorithme de Stehfest - à partir du modèle analytique $\Delta \theta_{st}^{**}$ du contraste de Laplace donné par l'expression (26).

L'application successive de la méthode de Newton généralisée, sur le système (28) des deux équations écrites en deux valeurs p_1^* et p_2^* de la variable p^* , puis de la correction (29) sur les transformées expérimentales, permet d'identifier les deux paramètres K_1 et τ par une démarche itérative. L'algorithme adopté est présenté en Annexe 2.4 tandis que les valeurs identifiées de K_1 et τ sont reportées dans la table 2.4 pour différentes valeurs de p_1^* et p_2^* .

Les valeurs de K_1 , le paramètre le plus sensible, identifiées à l'aide de la méthode utilisant les intégrales corrigées, sont supérieures à celles obtenues par la méthode sans correction (sauf dans le cas où une des valeurs utilisées pour p^* est 50), ce qui confirme bien la sous-estimation des transformées expérimentales qui est faite par la méthode sans correction (le contraste augmente en valeur absolue avec K_1).

$p_1^* - p_2^*$	\hat{K}_1 brut	\hat{K}_1 corrigé	σ_{K_1}	Intervalle de confiance de K_1 à 99 %	$100 \hat{\tau}$ brut	$100 \hat{\tau}$ corrigé	σ_{τ}	Intervalle de confiance de τ (%)	Coefficient de corrélacion entre \hat{K}_1 et $\hat{\tau}$
0,01 - 1	0,9240	0,9537	$5,92 \times 10^{-3}$	0,938 - 0,969	2,971	4,825	$4,22 \times 10^{-3}$	3,74 - 5,91	0,998
0,01 - 5	0,9421	0,9570	$2,50 \times 10^{-3}$	0,951 - 0,964	4,623	5,123	$1,07 \times 10^{-3}$	4,85 - 5,40	0,916
0,01 - 10	0,9449	0,9572	$2,32 \times 10^{-3}$	0,951 - 0,963	4,886	5,136	$1,31 \times 10^{-3}$	4,80 - 5,47	0,765
0,01 - 50	0,9080	0,9067	$6,48 \times 10^{-2}$	0,740 - 1,073	1,715	1,243	$4,04 \times 10^{-2}$	0 - 11,6	1,000
1 - 5	0,9544	0,9589	$8,27 \times 10^{-4}$	0,957 - 0,961	5,063	5,190	$7,02 \times 10^{-4}$	5,01 - 5,37	0,940
1 - 10	0,9551	0,9586	$1,72 \times 10^{-3}$	0,954 - 0,963	5,112	5,166	$1,35 \times 10^{-3}$	4,82 - 5,51	0,985
1 - 50	0,9027	0,8941	$8,42 \times 10^{-2}$	0,678 - 1,110	1,695	1,200	$4,06 \times 10^{-2}$	0 - 11,6	1,000
5 - 10	0,9568	0,9577	$4,26 \times 10^{-3}$	0,947 - 0,969	5,151	5,148	$1,90 \times 10^{-3}$	4,66 - 5,64	0,992
5 - 50	0,8519	0,8353	$1,48 \times 10^{-1}$	0,455 - 1,216	1,486	0,978	$4,05 \times 10^{-2}$	0 - 11,4	1,000
10 - 50	0,7880	0,7640	$2,07 \times 10^{-1}$	0,232 - 1,296	1,180	0,670	$3,90 \times 10^{-2}$	0 - 10,7	1,000

Table 2.4 - Intervalles de confiance des paramètres identifiés

Une comparaison entre les intégrales brutes et corrigées du contraste est présentée dans la table 2.5. Les valeurs de $m_{\text{cor}}(p^*)$ qui y figurent ont été calculées à partir des valeurs identifiées à l'aide du couple $(p^* ; 0,01)$

p^*	0,01	1	5	10	50
$m(p^*)$	- 0,3676	- 0,2320	- 0,06264	- 0,02084	- 2,296 10^{-4}
$m_{\text{cor}}(p^*)$	- 0,3743	- 0,2329	- 0,06268	- 0,02085	- 2,315 10^{-4}
$\Delta m/m$ (%)	1,9	0,4	< 0,1	< 0,1	0,8

Table 2.5 - Correction des intégrales expérimentales de Laplace

Pour les faibles valeurs de p^* , la correction porte plutôt sur la troncature aux temps longs alors que c'est l'inverse pour les grandes valeurs de p^* .

2.3.6.3 - Intervalles de confiance des paramètres indentifiés

Si le modèle semi-transparent représente correctement le transfert thermique et si les deux mesures de température sont exactes, l'identification de K_1 et de τ par la méthode des intégrales corrigées fournit les valeurs exactes de ces deux paramètres.

En pratique, les mesures y_i effectuées aux instants t_i ($i = 1$ à n) du contraste $\Delta T_{\text{st}}^*(t_i^*, \beta)$ comportent toujours un bruit aléatoire ϵ_i .

Si l'on suppose ce bruit additif, il est possible d'écrire :

$$y_i = \Delta T_{\text{st}}^*(t_i^*, \beta) + \epsilon_i \quad (32)$$

La sensibilité du contraste à K_2 étant quasiment nulle (pour notre échantillon, c'est-à-dire pour les valeurs nominales de ses paramètres),

nous prendrons comme vecteur paramètre :

$$\beta = \begin{bmatrix} K_1 \\ \tau \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix}$$

Toutes les incertitudes qu'il peut y avoir sur les valeurs identifiées de K_1 et de τ dépendent donc de la loi de probabilité suivie par ce bruit aléatoire ϵ_i . Or ce bruit peut être étudié statistiquement car l'on dispose de l'enregistrement du contraste pour les temps négatifs avant l'excitation flash des deux échantillons (58 points - enregistrement reporté sur la **figure 18a**). L'histogramme de ce bruit est présenté sur la **figure 18b**. Sa moyenne est nulle (par construction du contraste expérimental de la **figure 6**) et son écart-type estimé est :

$$\sigma_\epsilon = \left[\frac{1}{58} \sum_{i=1}^{58} \epsilon_i^2 \right]^{1/2} = 2,4 \cdot 10^{-3}$$

Sur la **figure 18b** a été également tracée la distribution gaussienne de même écart-type et de moyenne nulle. Nous faisons donc l'hypothèse d'une distribution gaussienne d'écart-type constant σ_ϵ pour le bruit ϵ .

L'hypothèse d'indépendance du bruit, qui constitue une série temporelle, peut être testée à l'aide du coefficient d'autocorrélation de rang d :

$$\rho_d = \frac{\sum_{i=1}^{58} (\epsilon_i - \bar{\epsilon})(\epsilon_{i+d} - \bar{\epsilon})}{\sum_{i=1}^{58} (\epsilon_i - \bar{\epsilon})^2} \quad (33)$$

avec :

$$\bar{\epsilon} = \frac{1}{58} \sum_{i=1}^{58} \epsilon_i = 0$$

et ;

$$\epsilon_{i+d} = \epsilon_{i+d-58} \quad \text{si } i+d > 58$$

Le numérateur de ρ_d est donc une covariance d'échantillon entre le bruit initial et le même bruit obtenu par permutation circulaire avec un décalage d . Les valeurs prises par ρ_d sont tracées en fonction de d sur la **figure 18c**.

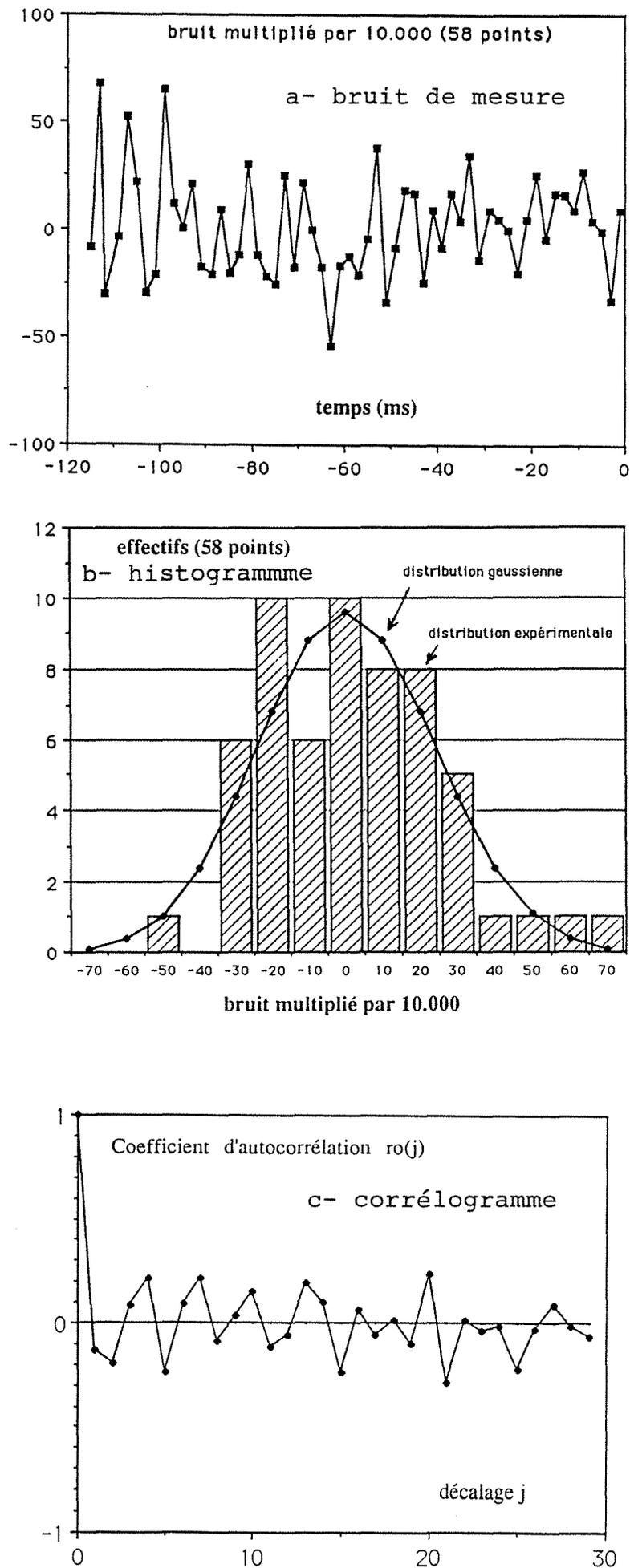


Fig. 18. Etude statistique du bruit de mesure du contraste aux temps négatifs

R.L. Anderson [18] a déterminé la loi de probabilité suivie par ρ_d dans le cas où les aléas ϵ_i sont gaussiens, indépendants, de moyenne nulle et de même écart-type. En utilisant cette loi pour un échantillon de 58 points et pour un décalage unitaire, on a, en utilisant des niveaux de signifiante de 5 et 1 % :

$$P(\rho_1 < -0,235) = 0,05$$

$$P(\rho_1 < -0,323) = 0,01$$

P désignant la probabilité. Comme le coefficient ρ_1 de notre échantillon de bruit vaut $-0,127$, on voit qu'on ne peut pas rejeter l'hypothèse d'indépendance du bruit de mesure. On supposera donc que les erreurs de mesure ne sont pas corrélées dans le temps.

Nous avons vu que, dans l'espace de Laplace, l'identification des deux coefficients K_1 et τ se faisait d'une façon directe à partir de la mesure de deux transformées expérimentales corrigées $m_{\text{cor}}(p_\alpha^*)$. Il est donc nécessaire d'écrire la relation (32) dans l'espace de Laplace si l'on désire donner des intervalles de confiance pour K_1 et τ :

$$m_\alpha = \Delta\theta_\alpha^{**} + m_{\epsilon\alpha} \quad (34)$$

avec :

$$m_\alpha = m_{\text{cor}}(p_\alpha^*) \quad \Delta\theta_\alpha^{**} = \Delta\theta_{\text{st}}^{**}(p_\alpha^*, \beta)$$

et :

$$m_{\epsilon\alpha} = \int_0^\infty \epsilon(t^*) \exp(-p_\alpha^* t^*) dt^* \quad \text{pour } \alpha = 1, 2$$

La transformée expérimentale du bruit de mesure $\epsilon(t^*)$ ne peut être calculée qu'à partir des valeurs discrètes de ce bruit ϵ_i . La relation (34) s'écrit alors sous forme vectorielle :

$$m = \eta(\beta) + m_\epsilon \quad (35)$$

avec :

$$m = \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \end{bmatrix} \quad \eta = \begin{bmatrix} \Delta\theta_1^{**} \\ \Delta\theta_2^{**} \end{bmatrix} \quad m_\epsilon = \begin{bmatrix} m_{\epsilon 1} \\ m_{\epsilon 2} \end{bmatrix}$$

Les valeurs identifiées de K_1 et de τ présentées dans la table 2.4 constituent un estimateur \mathbf{b} du vecteur paramètre β qui vérifie l'équation :

$$\mathbf{m} = \eta(\mathbf{b}) \quad (36)$$

Cet estimateur \mathbf{b} peut être considéré comme une grandeur aléatoire qui suit une loi de probabilité dérivée de celle du bruit ϵ . Si l'estimateur \mathbf{b} n'est pas trop éloigné de la valeur exacte de β , il est possible de linéariser le modèle à partir des équations (35) et (36) à partir d'un développement de Taylor :

$$\eta(\beta) = \eta(\mathbf{b}) + \underbrace{(\nabla_{\beta} \eta^t)^t}_{\text{évalué en } \mathbf{b}} (\beta - \mathbf{b}) + o(\|\beta - \mathbf{b}\|) \quad (37)$$

∇_{β} étant le vecteur (colonne) gradient par rapport aux paramètres β_1 et β_2 et t étant le symbole de transposition. On a donc, au premier ordre :

$$\mathbf{m}_{\epsilon} = \mathbf{x}(\mathbf{b}) [\mathbf{b} - \beta]$$

\mathbf{x} étant la matrice des coefficients de sensibilité dans l'espace de Laplace, pour les valeurs p_1^* et p_2^* de p^* :

$$\mathbf{x} = (\nabla_{\beta} \eta^t)^t \quad \text{où} \quad x_{ij} = \frac{\partial \eta_i}{\partial \beta_j} \quad \text{avec } i, j = 1, 2$$

On obtient donc, après inversion de cette matrice :

$$\mathbf{b} - \beta = \mathbf{x}^{-1}(\mathbf{b}) \mathbf{m}_{\epsilon} \quad (38)$$

\mathbf{m}_{ϵ} se calcule à partir du bruit expérimental :

$$\mathbf{m}_{\epsilon\alpha} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sum_{i=1}^n \exp(-p_{\alpha}^* t_i^*) \epsilon_i \Delta t^* \right]$$

On peut donc écrire :

$$\mathbf{m}_{\epsilon} = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{g} \epsilon \quad (39)$$

\mathbf{g} étant une matrice (2,n) de coefficients :

$$g_{\alpha i} = \exp(-p_{\alpha i}^* \Delta t^*)$$

Chaque composante de m_{ϵ} est donc une combinaison linéaire des n variables aléatoires indépendantes ϵ_i , dont chacune suit une loi normale centrée d'écart-type σ_{ϵ} . m_{ϵ} suit donc une loi de Gauss multivariable - voir Wilks [19] - d'espérance mathématique :

$$E(m_{\epsilon}) = g E(\epsilon) = 0$$

et de matrice de variance-covariance (voir Beck [13] p.223) :

$$\text{cov}(m_{\epsilon}) = g \text{cov}(\epsilon) g^t$$

Si le bruit est supposé non corrélé, on a :

$$\text{cov}(m_{\epsilon}) = \sigma_{\epsilon}^2 I$$

I étant la matrice d'identité (n, n), d'où :

$$\text{cov}(m_{\epsilon}) = \sigma_{\epsilon}^2 g g^t$$

avec :

$$[g g^t]_{\alpha\gamma} = \sum_{i=1}^n g_{\alpha i} g_{\gamma i} = \Delta t^{*2} \sum_{i=1}^n \exp[-(p_{\alpha}^* + p_{\gamma}^*) t_i^*]$$

pour $\alpha, \gamma = 1, 2$

En faisant tendre n vers l'infini pour respecter la limite de l'expression (39), on retrouve une transformée de Laplace:

$$[g g^t]_{\alpha\gamma} = \Delta t^* \int_0^{\infty} \exp[-(p_{\alpha}^* + p_{\gamma}^*) t_i^*] dt = \frac{\Delta t^*}{p_{\alpha}^* + p_{\gamma}^*}$$

d'où :

$$\text{cov} m_{\epsilon} = \sigma_{\epsilon}^2 \Delta t^* \begin{bmatrix} \frac{1}{2p_1^*} & \frac{1}{p_1^* + p_2^*} \\ \frac{1}{p_1^* + p_2^*} & \frac{1}{2p_2^*} \end{bmatrix}$$

Les deux transformées du bruit (non corrélé) sont donc corrélées avec un coefficient de corrélation égal à $2\sqrt{p_1^* p_2^*} / (p_1^* + p_2^*)$.

Les relations (37) et (38) permettent d'écrire au premier ordre :

$$\mathbf{b} - \beta = \mathbf{x}^{-1}(\mathbf{b}) \mathbf{g} \varepsilon$$

$\mathbf{b} - \beta$ obéit donc à une loi normale d'espérance mathématique :

$$E(\mathbf{b} - \beta) = \mathbf{x}^{-1}(\mathbf{b}) \mathbf{g} E(\varepsilon) = 0$$

en négligeant les variations de \mathbf{x}^{-1} au voisinage de β . L'estimateur \mathbf{b} est donc sans biais. $\mathbf{b} - \beta$ a en outre une matrice de variance-covariance Σ telle que :

$$\Sigma = \text{cov}(\mathbf{b} - \beta) = \mathbf{x}^{-1} \text{cov} m_{\varepsilon} (\mathbf{x}^{-1})^t$$

Il est possible de calculer cette matrice - voir détail du calcul en Annexe 2.5 - ($\hat{K}_1 - K_1$) et ($\hat{\tau} - \tau$) suivent donc chacun une loi de Gauss de moyenne nulle et d'écart-types $\Sigma_{11}^{1/2}$ et $\Sigma_{22}^{1/2}$. Si l'on recherche un intervalle de confiance à 99 %, il suffit de prendre 2,57 écarts-types autour de \hat{K}_1 ou de $\hat{\tau}$. Ces intervalles de confiance ont été reportés dans la table 2.4 pour les différents couples (p_1^* , p_2^*) utilisés lors de l'identification. Le meilleur couple, auquel correspondent les intervalles les plus petits, est (1 5) pour lequel on a :

$$K_1 = 0,959 \pm 0,2 \% \quad \tau = 0,0519 \pm 3,5 \%$$

A ce niveau trois remarques doivent être faites :

- ces intervalles de confiance ne sont qu'approchés car le modèle a été linéarisé, c'est-à-dire qu'on suppose a priori la valeur identifiée $\mathbf{b} = \hat{\beta}$ proche de la valeur exacte. Ils ne correspondent en outre qu'à une mesure sur un échantillon particulier dont le dépôt (poudre) a été homogénéisé et cette mesure n'est pas forcément reproductible (variabilité de l'échantillon due à la granulométrie, à la reprise d'humidité ...).

- les écarts-types de K_1 et de τ sont inversement proportionnels au déterminant de la matrice des coefficients de sensibilité de Laplace - cf Annexe 2.5. Une bonne estimation de ces deux paramètres nécessite donc une non-proportionnalité de ces coefficients. Graphiquement cela signifie que la droite liant les points p_1^* et p_2^* dans l'espace $x_1 - x_2$ de la figure 16 passe le plus loin possible de l'origine, mais ce n'est pas suffisant (voir l'interprétation graphique de l'Annexe 2.5).

Notons que les estimateurs de K_1 et τ sont très fortement corrélés au sens statistique du terme : leur coefficient de corrélation $\Sigma_{12}/(\Sigma_{11}\Sigma_{22})^{1/2}$ est voisin de l'unité dans tous les cas.

- les intervalles de confiance à 99 % se recouvrent parfaitement. Lorsque l'estimateur n'est pas bon - cas avec $p_2^* = 50$ par exemple - les intervalles de confiance croissent démesurément, ce qui est dû à la présence du déterminant au dénominateur des écarts-types des deux estimateurs.

2.3.6.4 - Etude statistique des résidus

Une fois les deux paramètres K_1 et τ identifiés, il est possible de construire la courbe temporelle des résidus r_i avec :

$$r_i = y_i - \Delta T_{st}^* (t_i^*, \mathbf{b}) \quad \text{pour } i = 1 \text{ à } n$$

et

$$\mathbf{b} = (\hat{K}_1, \hat{\tau})^t$$

L'opposé du résidu r_i est tracé en fonction du temps t_i sur les figures 19a (identification brute) et 19b (identification avec correction des intégrales expérimentales). Pour ces deux identifications on constate qu'il subsiste une corrélation importante entre les résidus à différents instants, ce qui se traduit par une allure sinueuse de la courbe de moyenne mobile des résidus sur une dizaine de points (existence d'une tendance statistique au sens d'une chronique). On observe d'autre part une dérive aux temps longs où les résidus semblent augmenter indéfiniment en valeur absolue. Pour examiner si ce phénomène peut être attribué aux pertes, nous avons cherché à identifier les deux paramètres en diminuant la borne

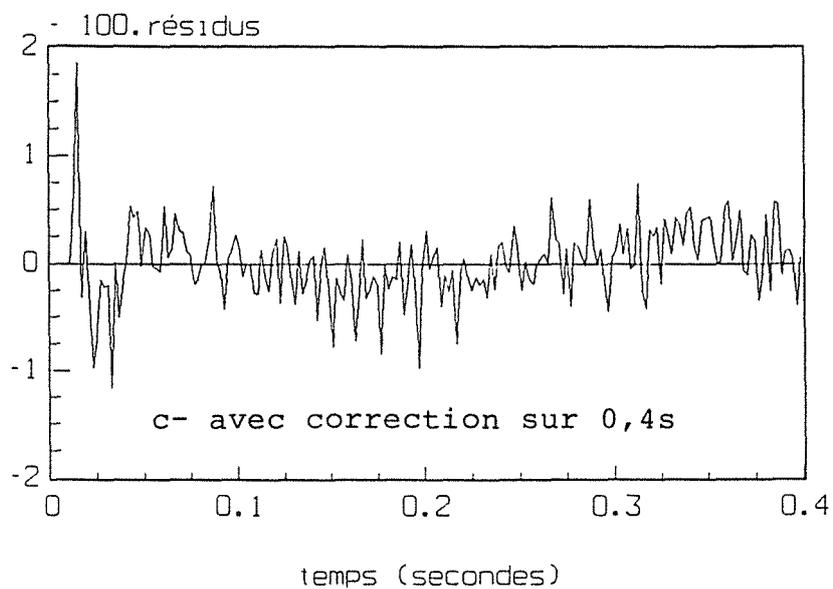
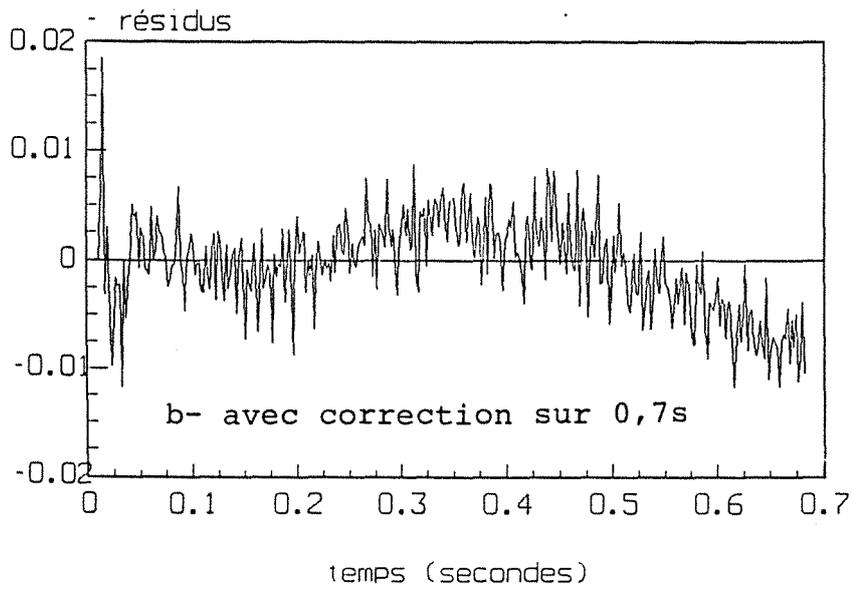
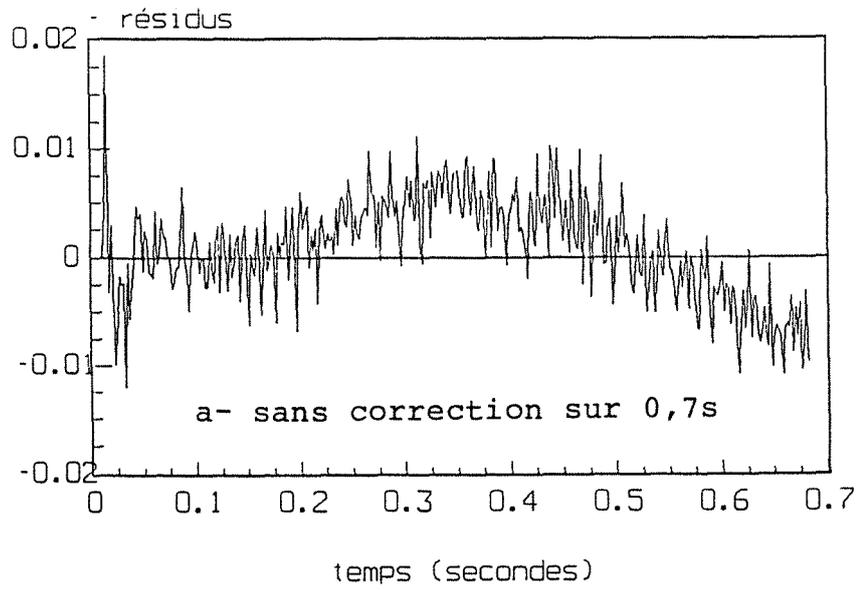
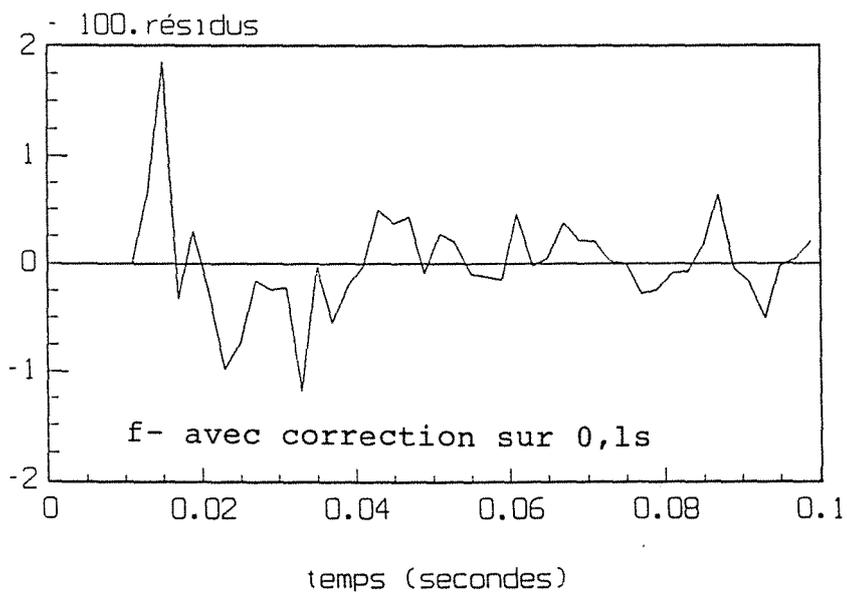
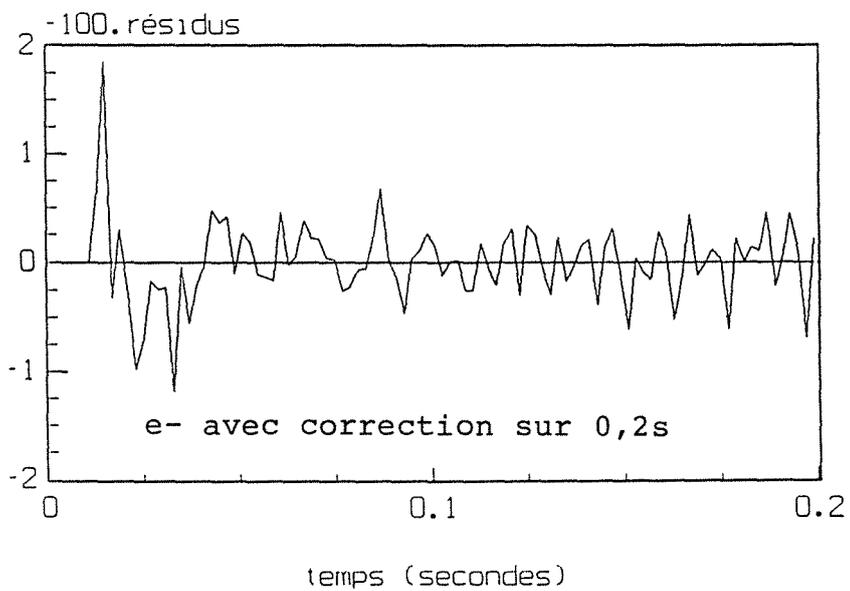
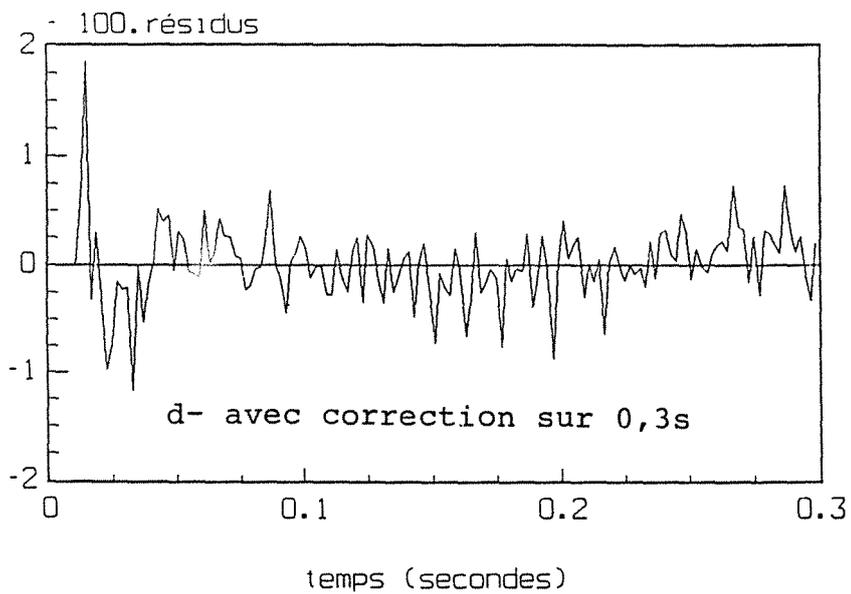


Fig. 19. Evolution temporelle des résidus de contraste ($p_1^*=1$ - $p_2^*=5$) - modèle semi-transparent - wet spray/acier



supérieure d'intégration : t_{sup}^* plus petit que t_n^* - voir équation (29) -.
Les résultats sont présentés dans la table 2.6 :

t_{sup} (s)	0,1	0,2	0,3	0,4	0,683
nombre de points de mesure n	54	94	144	194	336
K_1 identifié	0,959	0,955	0,959	0,962	0,959
τ identifié (%)	5,15	5,11	5,22	5,29	5,19
résidu moyen \bar{r}	$3,6 \cdot 10^{-6}$	$-1,9 \cdot 10^{-5}$	$5,2 \cdot 10^{-5}$	$12,7 \cdot 10^{-5}$	$-48,7 \cdot 10^{-5}$
écart-type mesuré des résidus	$4,84 \cdot 10^{-3}$	$3,81 \cdot 10^{-3}$	$3,54 \cdot 10^{-3}$	$3,51 \cdot 10^{-3}$	$4,33 \cdot 10^{-3}$

Table 2.6 - Diminution de la durée de l'intervalle d'identification

Il semble donc que l'identification aux temps courts produise des résidus plus faibles en moyenne. Ceci est confirmé par les graphes temporels des résidus présentés sur les figures 19c, d, e, et f pour des identifications jusqu'à des temps respectifs de 0,4 - 0,3 - 0,2 et 0,1 s.

Par contre l'écart-type des résidus ne varie pas beaucoup en fonction de t_{sup}^* et reste dans un intervalle correspondant à 1,5 à 2 fois l'écart-type du bruit de mesure.

Il est possible de juger la qualité de l'identification effectuée grâce à l'examen de la fonction d'autocorrélation des résidus :

$$\rho'_d = \frac{1}{n-d} \frac{\sum_{i=d+1}^n (r_i - \bar{r})(r_{i-d} - \bar{r})}{\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (r_i - \bar{r})^2 \right]} \quad (40)$$

avec :

$$\bar{r} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n r_i$$

Notons ici qu'à la différence de ce qui a été fait pour le bruit de mesure - équation (33) - aucune permutation circulaire n'est effectuée dans le calcul de ρ'_d .

Ce coefficient d'autocorrélation des résidus est tracé en fonction du décalage d (corrélogramme) sur les figures 20a, b, c, d, et e pour des identifications jusqu'à des temps respectifs de 0,7 - 0,4 - 0,3 - 0,2 et 0,1 secondes.

Ces corrélogrammes présentent une allure très ordonnée pour les deux premières durées (0,7 et 0,4 s) avec - surtout dans le premier cas - une décroissance quasi-linéaire en moyenne mobile et des autocorrélations négatives pour des valeurs importantes du décalage. Par contre, pour des durées d'identification plus courtes (0,4 - 0,2 et 0,1 s), les autocorrélations sont plus faibles et aucune tendance n'est mise en évidence.

Remarquons que des résidus corrélés peuvent traduire plusieurs phénomènes d'après Bates et Watts [20] :

- un bruit de mesure corrélé : les erreurs de mesure ϵ_i du contraste - équation (32) - ne sont plus des aléas indépendants.
- une inadéquation du modèle utilisé pour l'identification.

Cependant, ces conditions ne sont pas toujours nécessaires : en travaillant sur un modèle linéaire à deux paramètres (identification d'une pente et d'une ordonnée à l'origine dans le cas où les coefficients de sensibilité sont la variable déterministe et l'unité), où le bruit ϵ_i est un aléa gaussien centré réduit indépendant (bruits ϵ_i et ϵ_j mesurés à deux instants quelconques t_i et t_j non corrélés entre eux), il est possible de montrer, par une approche probabiliste, que le coefficient d'autocorrélation des résidus r_i entre deux instants t_i et t_j obtenu par la méthode des moindres carrés :

$$\rho_{ij} = E(r_i r_j) / \left[E(r_i^2) E(r_j^2) \right]^{1/2}$$

n'est pas toujours nul - voir Annexe 2.6.

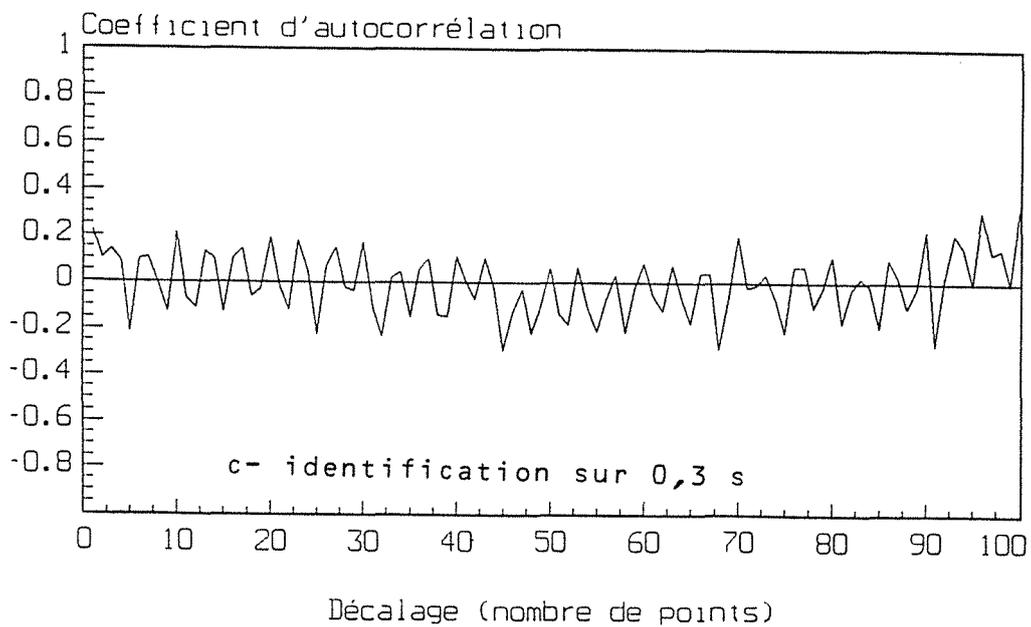
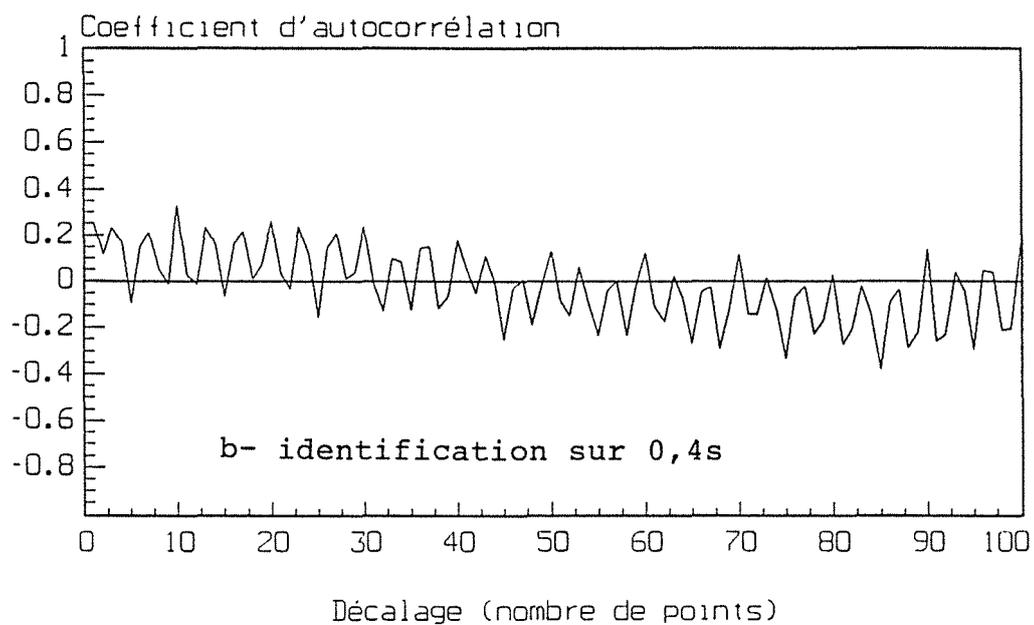
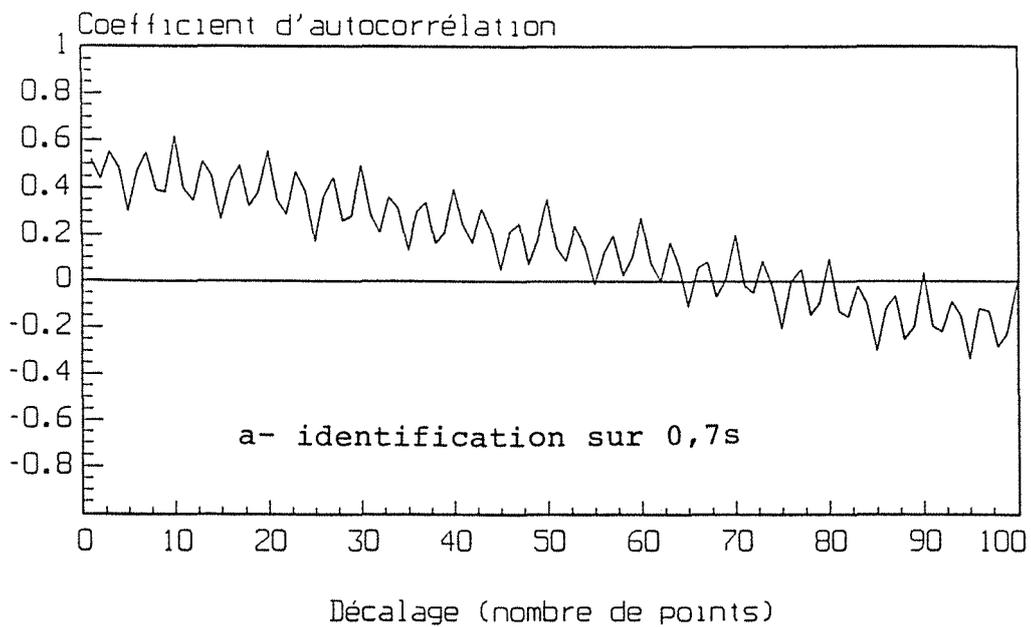
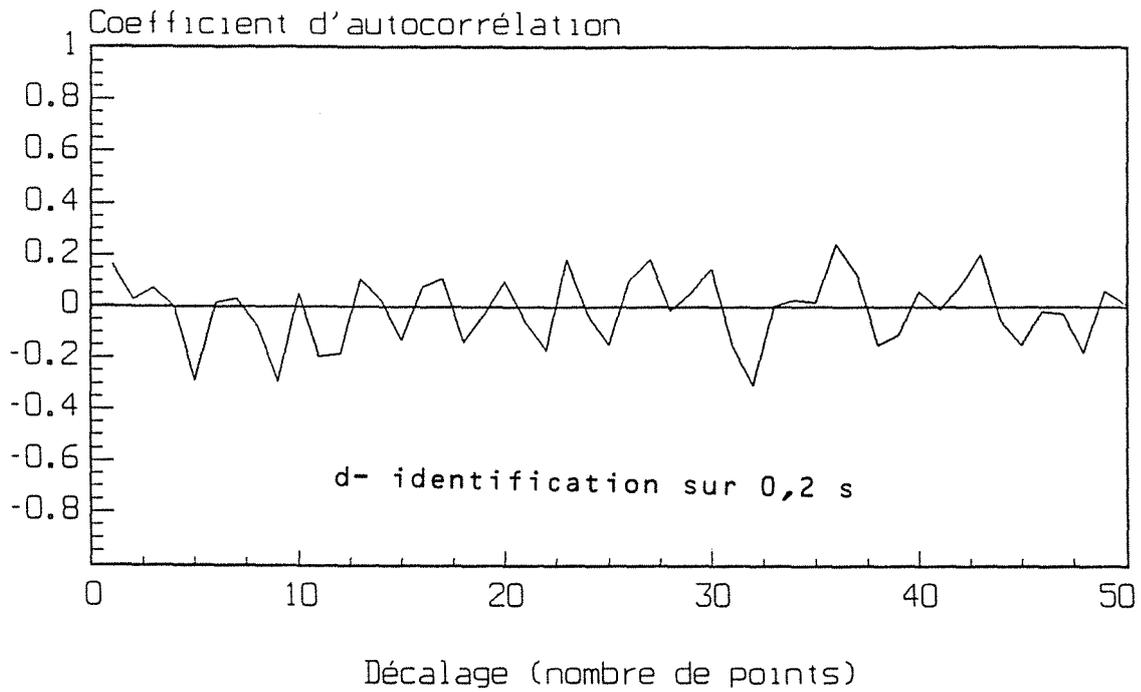
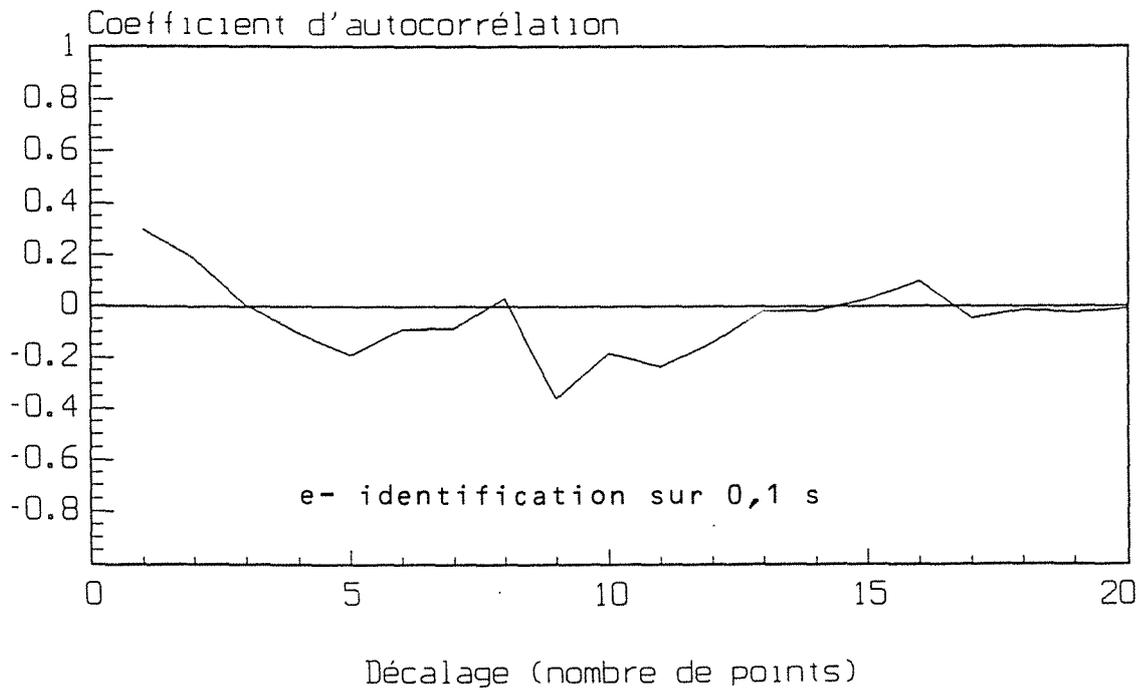


Fig. 20. Corrélogrammes des résidus



Corrélogramme des résidus
identification sur 0.1 s



Les histogrammes des résidus présentés sur les figures 21a, b et c (identification sur 0,7 - 0,2 et 0,1 s) ont encore une allure approximativement gaussienne.

Il est possible de calculer les résidus dans l'espace de Laplace :

$$R(p^*) = m_{\text{cor}}(p^*) - \Delta\theta_{\text{st}}^{**}(p^*, b) \quad (41)$$

avec :

$$b = (\hat{K}_1, \hat{\tau})$$

à partir de l'intégrale expérimentale $m(p^*)$ et des intégrales limitées du contraste théorique - voir équation (29) - calculées pour les valeurs identifiées des paramètres K_1 et τ . Le graphe de l'opposé de cette fonction est présenté sur la figure 22. Les résidus de Laplace, à la différence des résidus temporels r_i , constituent une fonction continue de la variable de Laplace p^* . Cette fonction s'annule aux valeurs 1 et 5 utilisées lors de l'identification et l'on retrouve des valeurs importantes pour les faibles niveaux de p^* correspondant aux temps longs qui sont bien affectés par les pertes.

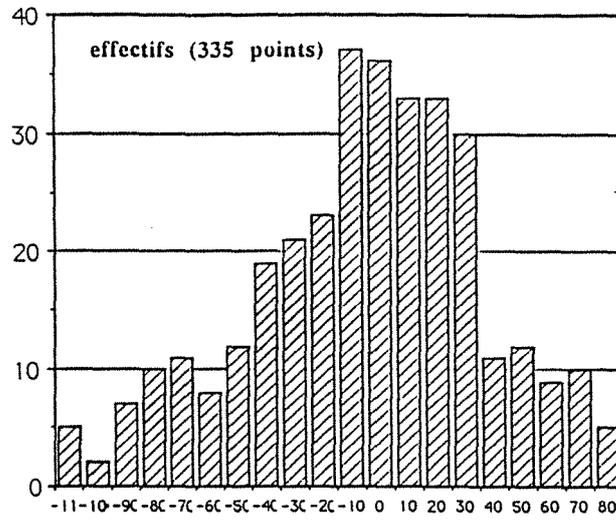
2.3.6.5 - Explication des résidus par les pertes thermiques

Il a été montré plus haut que la dérive des résidus pour l'identification aux temps longs - jusqu'à 0,7 seconde - pouvait être due aux pertes. Si l'on considère la manipulation flash sur le bicouche, affectée de pertes linéaires sur chacune des deux faces avec un même coefficient de transfert h , la relation (24) est toujours valable mais cette fois les flux de Laplace ϕ_f et ϕ_r ne sont plus nuls mais sont égaux aux flux des pertes en faces avant et arrière, et l'on a :

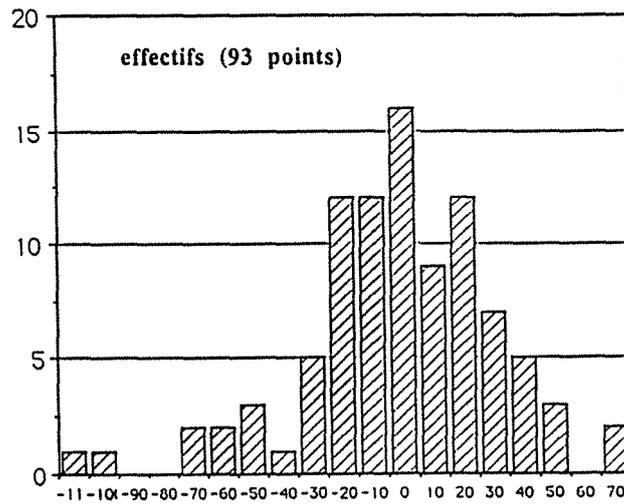
$$\begin{bmatrix} \theta_f \\ 0 \end{bmatrix} = H \begin{bmatrix} \theta_f \\ \phi_f \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \theta_r \\ \phi_r \end{bmatrix} = H \begin{bmatrix} \theta_r \\ 0 \end{bmatrix}$$

avec :

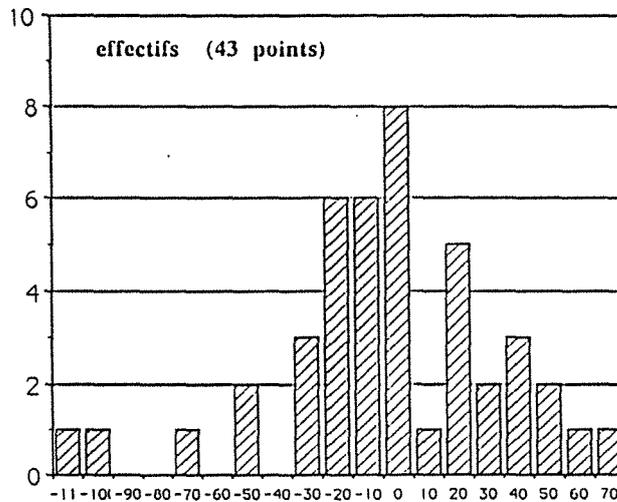
$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ h & 1 \end{bmatrix}$$



a- résidus multipliés par 10.000 (identification par les intégrales corrigées sur 0,7 s)



b- résidus multipliés par 10.000 (identification sur 0,2 seconde)



c- résidus multipliés par 10.000 (identification sur 0,1 seconde)

Fig. 21. Histogrammes des résidus

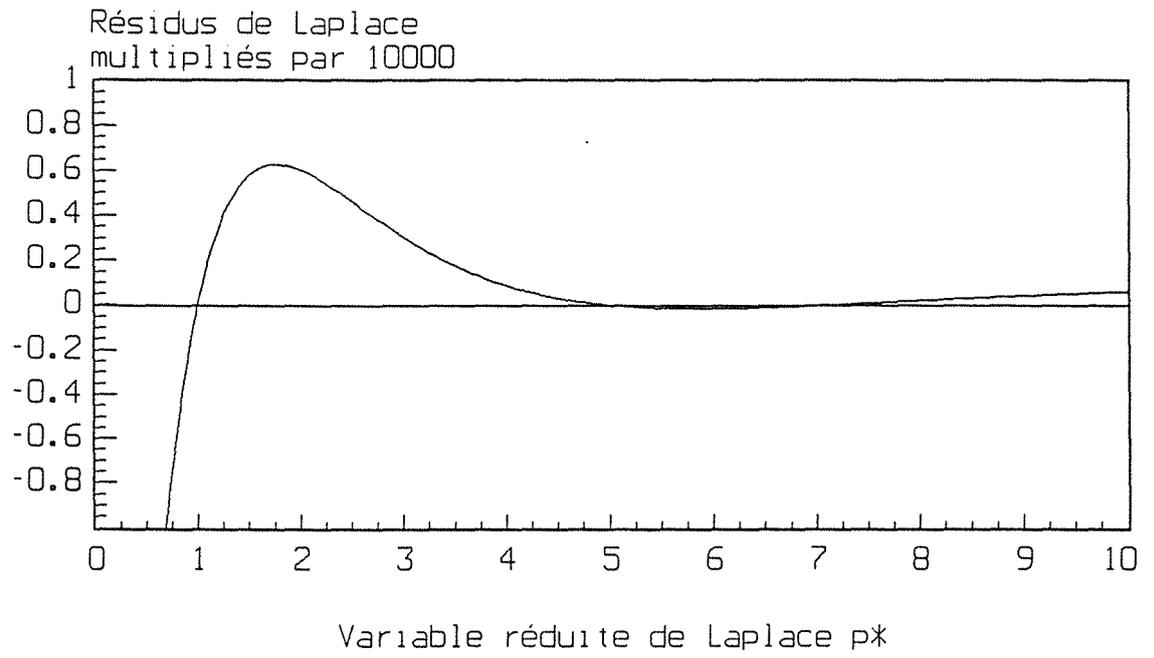


Fig. 22. Résidus de Laplace sur 0,7 seconde

On peut donc écrire, par substitution dans l'équation (24) :

$$\begin{bmatrix} \theta_f \\ 0 \end{bmatrix} = H M_1 M_2 H \begin{bmatrix} \theta_r \\ 0 \end{bmatrix} + H \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \quad (42)$$

La température de Laplace de la face arrière s'écrit alors :

$$\theta_r = \frac{-(Y + hX)}{h(A + Bh) + C + Dh}$$

A, B, C et D étant les coefficients de la matrice $M_1 M_2$ définie par l'équation (1).

Cette équation peut être mise sous forme adimensionnelle en introduisant le nombre de Biot basé sur les propriétés du substrat $Bi (=he_2/\lambda_2)$:

$$\begin{aligned} \theta_{stp} = \frac{Qe_2}{\lambda_2} & \left\{ \ln^2 \tau + \tau \ln \tau K_1 s \operatorname{sh}(K_1 s) - \tau K_1^2 s^2 \operatorname{ch}(K_1 s) \right. \\ & \left. + Bi \left[(\tau \operatorname{ch}(K_1 s) - 1) K_1 s \ln \tau - \tau K_1^2 s^2 \operatorname{sh}(K_1 s) \right] / (K_2 s) \right\} \\ & \times (\ln^2 \tau - K_1^2 s^2)^{-1} \left\{ K_2 s \operatorname{sh}(K_1 s) \operatorname{ch}(s) + s \operatorname{ch}(K_1 s) \operatorname{sh}(s) \right. \\ & \left. + Bi \left[2 \operatorname{ch}(K_1 s) \operatorname{ch}(s) + (K_2 + 1/K_2) \operatorname{sh}(K_1 s) \operatorname{sh}(s) \right] \right. \\ & \left. + Bi^2 \left[\operatorname{sh}(s) \operatorname{ch}(K_1 s) + \frac{1}{K_2} \operatorname{sh}(K_1 s) \operatorname{ch}(s) \right] / s \right\}^{-1} \quad (43) \end{aligned}$$

avec :

$$s = e_2 \sqrt{p/a_2} = \sqrt{p^*}$$

L'indice p de θ_{stp} indiquant la prise en compte de pertes linéaires.

La température de Laplace sur le substrat seul, soumis à un flash d'énergie surfacique Q_0 et ayant un coefficient d'échange h_0 sur ses deux faces, s'obtient en annulant K_1 dans l'équation (43) :

$$\theta_0 = \frac{Q_0 e_2}{\lambda_2} [s \operatorname{sh}(s) + 2 Bi_0 \operatorname{ch}(s) + Bi_0^2 \operatorname{sh}(s)/s]^{-1} \quad (44)$$

avec :

$$Bi_o = h_o e_2 / \lambda_2$$

Afin de calculer le contraste de Laplace $\Delta\theta_{stp}^{**}$, il est nécessaire de normer θ_{stp} et θ_o par les maxima des deux courbes T_{stp} et T_o . Ces maxima sont calculés numériquement de la même façon qu'en 2.3.2 pour le modèle opaque avec pertes et l'inversion de Stehfest permet de revenir à l'original ΔT_{stp}^* .

Les thermogrammes réduits T_{stp}/T_{stpmax} et T_o/T_{omax} ainsi que les courbes temporelles de contraste sont présentés sur les figures 23a et b pour deux nombres de Biot (0,001 et 0,01) correspondant à des pertes égales pour les échantillons monocouche et bicouche. Sur la deuxième figure est également tracée la courbe de contraste du modèle semi-transparent sans perte. Toutes ces courbes ont été calculées à l'aide des valeurs identifiées de K_1 et τ pour le modèle sans perte sur 0,2 seconde (voir tableau 2.6). Il semble donc que l'effet des pertes sur le contraste ne soit pas ^{rigoureusement} négligeable et ce, particulièrement dans le deuxième cas ($Bi = 0,01$) où le maximum du contraste est également affecté par celles-ci.

Les coefficients de sensibilité réduits BiX_{Bi} ont été calculés numériquement - à l'aide d'une variation de $\pm \Delta Bi/2$ autour du nombre de Biot de 0,001 ($\Delta Bi = 10^{-6}$), pour les valeurs précédentes des autres paramètres, dans trois cas de figure :

- pertes égales sur les échantillons bicouche et monocouche :

$$Bi = Bi_o = 10^{-3}$$

- pertes sur l'échantillon bicouche, l'échantillon monocouche étant isolé :

$$Bi = 10^{-3} \quad Bi_o = 0$$

- pertes sur l'échantillon monocouche, l'échantillon bicouche étant isolé :

$$Bi = 0 \quad Bi_o = 10^{-3}$$

Les trois courbes correspondantes sont tracées sur la figure 23c. On constate que, dans le premier cas, les pertes font diminuer le contraste en

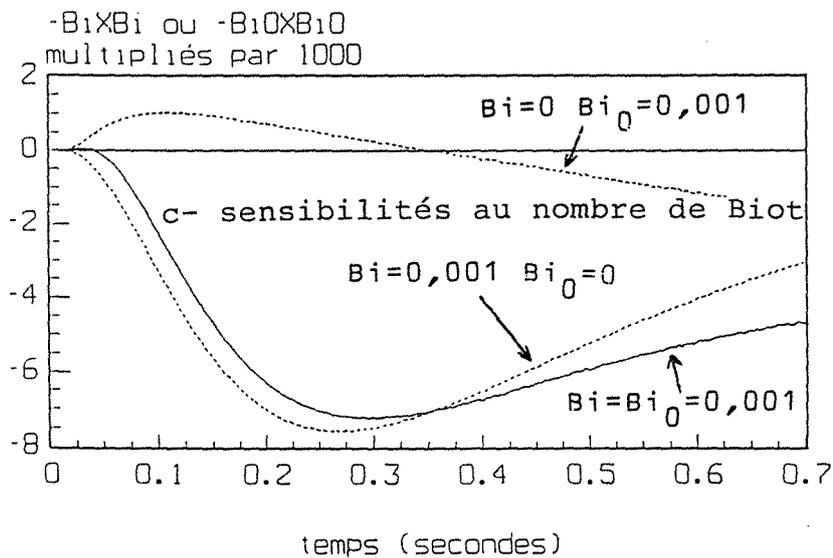
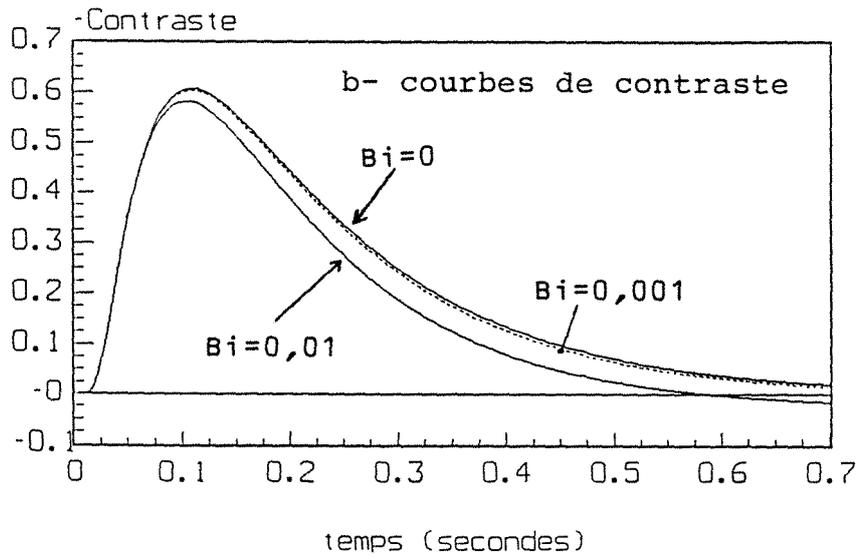
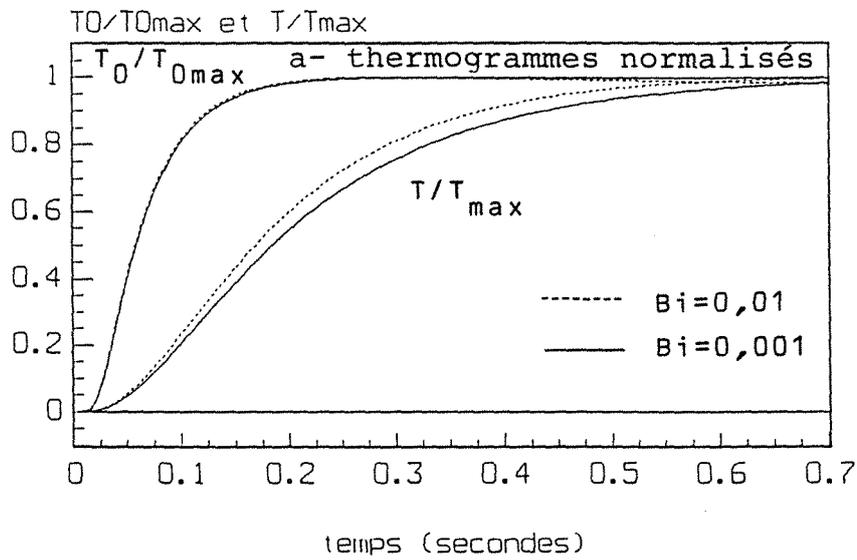


Fig. 23. Influence des pertes - modèle semi-transparent

valeur absolue. D'autre part, dans le deuxième cas, les extrema de X_{Bi} et de X_1 (voir figure 14) arrivent pratiquement au même instant. Ceci signifie, et c'est presque la même chose dans le premier cas (pertes égales sur les deux échantillons), que, lorsque l'échantillon bicouche n'est pas isolé, les paramètres K_1 et Bi ne peuvent pas être identifiés simultanément; ainsi la valeur identifiée de K_1 par le modèle adiabatique comporte un peu de pertes - c'est-à-dire qu'on a en fait identifié $K_1 Bi^{-\alpha}$ avec α positif très petit devant l'unité (voir la partie réduction de paramètre présentée plus loin en 2.4.1).

Par contre, dans le troisième cas de figure - échantillon bicouche isolé et pertes sur le monocouche - la sensibilité est complètement différente : le contraste peut même augmenter légèrement en valeur absolue aux temps courts.

Le modèle utilisé n'étant pas analytique en h (les maxima de chaque thermogramme dépendent des pertes) et ce coefficient n'étant pas nécessairement le même sur chacune des deux manipulations flash, il semble illusoire de vouloir chercher à obtenir des résidus décorrélés sur toute la durée de 0,7 s. Notons d'ailleurs qu'il est toujours possible d'envisager des modèles plus sophistiqués comportant quatre coefficients d'échanges - pertes différentes sur chacune des faces d'un échantillon.

Dans un tel cas de figure - faible sensibilité à un facteur correctif - l'identification à l'aide d'un modèle ne prenant pas en compte ce facteur correctif apporte les meilleurs résultats.

2.3 - DEPOT DE TYPE CAPACITIF

2.4.1 - Analyse de la sensibilité et choix des paramètres

Nous allons tenter d'identifier dans cette section les propriétés thermiques d'un dépôt de chrome de 100 μm d'épaisseur nominale sur un substrat d'acier de 2 mm d'épaisseur. En utilisant les mêmes notations que plus haut, les valeurs nominales des caractéristiques de l'échantillon sont les

suivantes :

$$\left. \begin{array}{l} \lambda_1 = 69 \text{ W m}^{-1} \text{K}^{-1} \\ \lambda_2 = 30 \text{ W m}^{-1} \text{K}^{-1} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \rho_1 c_1 = 3,2 \cdot 10^6 \text{ J m}^{-3} \text{K}^{-1} \\ \rho_2 c_2 = 3,7 \cdot 10^6 \text{ J m}^{-3} \text{K}^{-1} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} K_1 = 0,0303 \\ K_2 = 1,41 \end{array}$$

En utilisant le modèle opaque sans perte - équation (5) - il est possible de calculer la courbe nominale de contraste ainsi que les coefficients de sensibilité. Ces courbes sont tracées sur la **figure 24**. Par rapport au cas précédent (wet spray/acier) - voir **figure 2** - on constate que le contraste est environ six fois plus faible. D'autre part, les deux coefficients de sensibilité réduits $K_1 X_1$ et $K_2 X_2$ présentent un minimum au même instant, de niveau sensiblement identique : les paramètres K_1 et K_2 ne sont donc pas indépendants au sens de l'identification des paramètres.

Une façon de se débarrasser de cette dépendance est de conserver l'un des deux paramètres K_1 ou K_2 et de construire un nouveau paramètre à partir de K_1 et de K_2 . Si K_2 est conservé, on recherche un paramètre K_3 sous la forme :

$$K_3 = K_1^\alpha K_2^\beta \quad (45)$$

Les nouveaux coefficients de sensibilité peuvent être définis :

$$Y_2 = \left. \frac{\partial \Delta T^*}{\partial K_2} \right|_{t^*, K_3} \quad Y_3 = \left. \frac{\partial \Delta T^*}{\partial K_3} \right|_{t^*, K_2}$$

Il est possible, pour une valeur constante t^* du nombre de Fourier, d'écrire la variation du contraste ΔT^* , causée par un changement de l'un ou l'autre des deux paramètres, en utilisant la définition des coefficients de sensibilité :

$$d(\Delta T^*) = Y_2 dK_2 + Y_3 dK_3 = X_1 dK_1 + X_2 dK_2 \quad (46)$$

En calculant dK_3 à partir de la relation (45), en fonction de dK_1 et dK_2 , et en le remplaçant par cette valeur dans le membre médian de l'équation (46), on obtient, après identification des coefficients de dK_1 et de

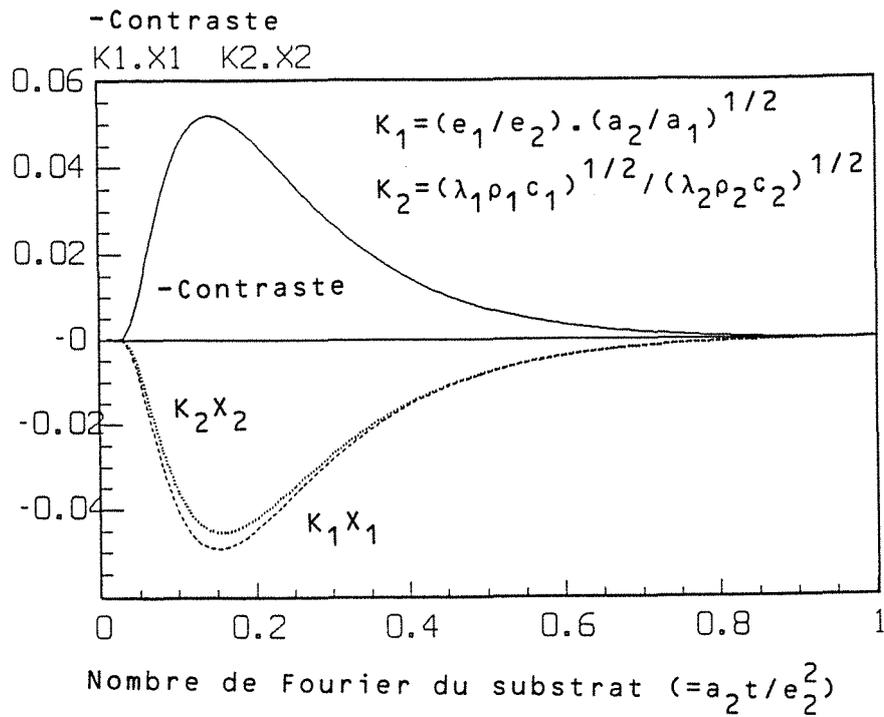


Fig. 24. Contraste et sensibilités nominales - Echantillon chrome/acier - Modèle $K_1 - K_2$

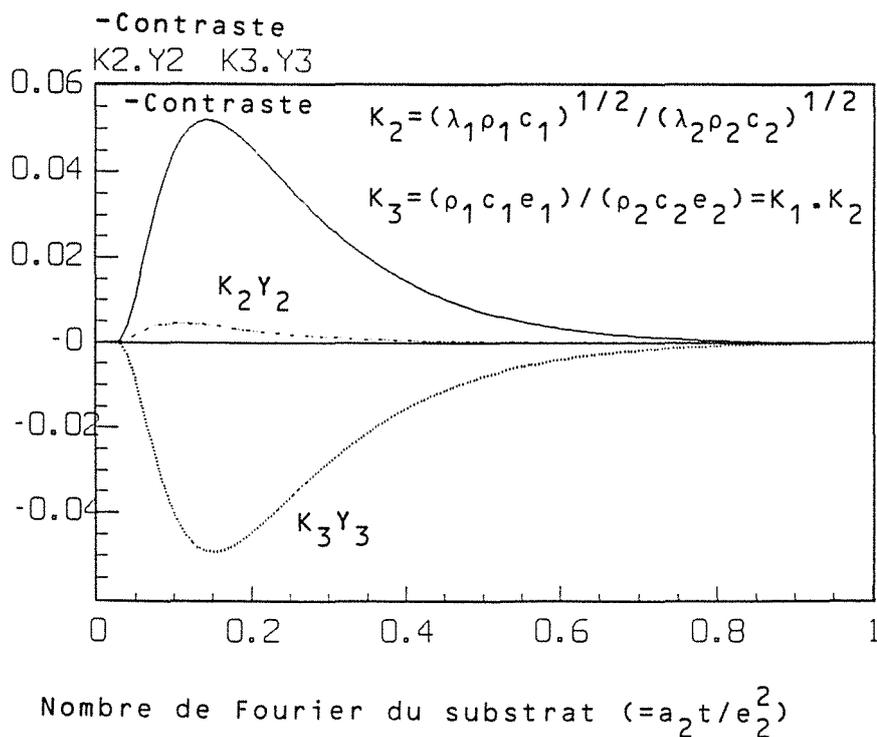


Fig. 25. Contraste et sensibilités nominales - Echantillon chrome/acier - Modèle $K_2 - K_3$

dK_2 :

$$K_2 Y_2 = K_2 X_2 - \frac{\beta}{\alpha} K_1 X_1 \quad K_3 Y_3 = \frac{1}{\alpha} K_1 X_1$$

Une manière judicieuse de choisir α et β serait d'annuler $K_2 Y_2$ en posant :

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{(K_1 X_1)_{\max}}{(K_2 X_2)_{\max}} \approx 1,09$$

Cette valeur dépendant évidemment des valeurs nominales de K_1 et K_2 , il est possible de choisir des valeurs moins artificielles de α et β :

$$\alpha = \beta = 1 \quad \Rightarrow \quad K_3 = K_1 K_2 = \frac{\rho_1 c_1 e_1}{\rho_2 c_2 e_2}$$

Le nouveau paramètre K_3 est le rapport des capacités thermiques des deux couches. L'opposé du contraste ainsi que les coefficients de sensibilité $K_2 Y_2$ et $K_3 Y_3$ sont tracés en fonction de t^* sur la **figure 25**. La sensibilité à K_1 est transférée sur K_3 tandis que la sensibilité à K_2 est divisée par un facteur voisin de 10.

Si l'on conserve maintenant le paramètre K_1 , un nouveau paramètre K_3' peut être introduit sous la forme (45). En utilisant la même technique que précédemment, on introduit les deux nouveaux coefficients de sensibilité Z_1 et Z_2 avec :

$$K_1 Z_1 = K_1 X_1 - \frac{\alpha}{\beta} K_2 X_2 \quad K_3' Z_3 = \frac{1}{\beta} K_2 X_2$$

L'annulation de $K_1 Z_1$ conduit au même paramètre $K_3' = K_3$ ($\alpha = \beta = 1$). L'opposé du contraste ainsi que les sensibilités réduites $K_1 Z_1$ et $K_3 Z_3$ sont tracés en fonction de t^* sur la **figure 26**.

On observe là encore une très sensible réduction de la sensibilité à un des deux paramètres - ici K_1 .

Un autre paramètre peut être introduit dans le modèle : K_4 , le rapport des résistances thermiques des deux couches :

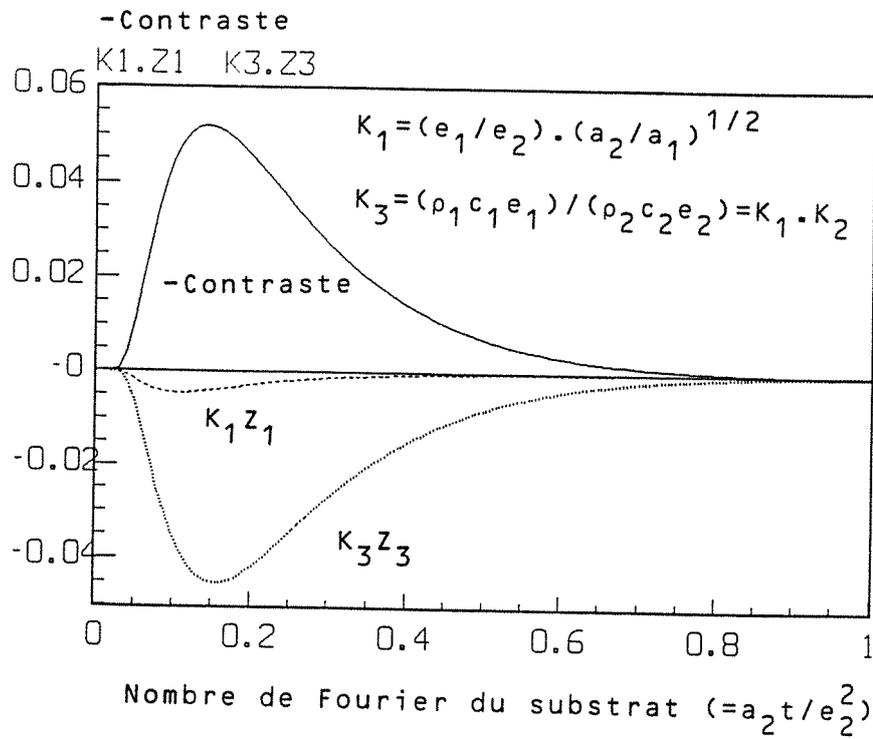


Fig. 26. Contraste et sensibilités nominales - Echantillon chrome/acier - Modèle $K_1 - K_3$

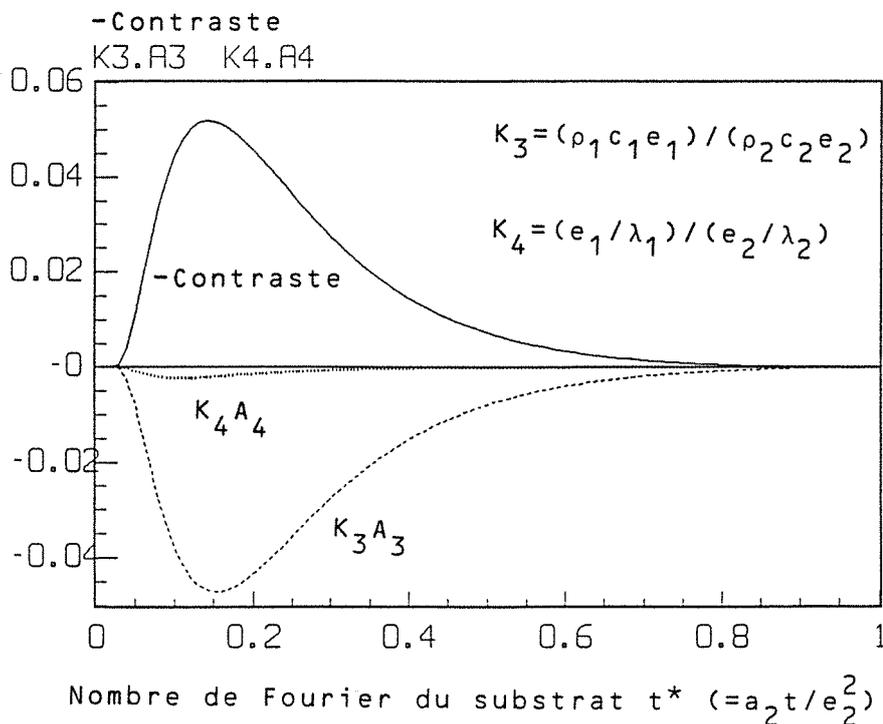


Fig. 27. Contraste et sensibilités nominales - Echantillon chrome/acier - Modèle $K_3 - K_4$

$$K_4 = (e_1/\lambda_2)/(e_2/\lambda_2) = K_1/K_2$$

Afin de déterminer, de manière systématique, le choix optimal du couple de paramètres (K_i, K_j) à retenir dans le modèle, on peut calculer les sensibilités relatives de ce nouveau paramétrage en fonction de celles du paramétrage initial (K_1, K_2) :

$$\left. \begin{aligned} K_i &= \frac{\partial \Delta T^*}{\partial K_i} \Big|_{K_j} = a K_1 X_1 + b K_2 X_2 \\ K_j &= \frac{\partial \Delta T^*}{\partial K_j} \Big|_{K_i} = c K_1 X_1 + d K_2 X_2 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{pour } i, j = 1, 2, 3, 4 \\ \text{avec } i \neq j \end{array}$$

On pose :

$$L = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

La matrice L est donnée dans la table 2.7 pour différents couples (K_i, K_j) .

$K_i \downarrow K_j \rightarrow$	K_2	K_3	K_4
K_1	1 0 0 1	1 -1 0 1	1 1 0 -1
K_2		-1 1 1 0	1 1 1 0
K_3			0,5 0,5 0,5 -0,5

Table 2.7 - Matrice L : coefficients de sensibilité pour un changement de paramétrage

Puisque les valeurs nominales des coefficients de sensibilité $K_1 X_1$ et $K_2 X_2$ sont pratiquement égales dans le cas de l'échantillon chrome-acier, un

seul paramètre peut être identifié. Le meilleur choix du paramétrage est le couple (K_3, K_4) à cause du facteur 0,5 qui réduit encore la sensibilité du paramètre K_4 qui devient pratiquement passif. Les courbes correspondant à ce paramétrage sont tracées sur la **figure 27**, A_3 et A_4 étant les coefficients de sensibilité respectifs à K_3 et K_4 . Le rapport des deux sensibilités réduites K_3A_3 et K_4A_4 est voisin de 20 ce qui confirme l'hypothèse d'un modèle à un seul paramètre actif.

2.4.2 - Résultats expérimentaux et identification

L'échantillon bicouche a été soumis à une excitation flash dans le diffusivimètre du LEMTA - courbe $T(t)$ de la **figure 28a**. Il en a été de même pour le substrat seul - courbe $T_0(t)$ de la **figure 28b**. Pour les deux expériences, le signal a été acquis grâce à un oscilloscope à mémoire numérique (gain de 3000). Lors de la manipulation flash sur l'échantillon bicouche, le dépôt de chrome a été placé en face arrière, c'est-à-dire en contact avec les deux doigts du thermocouple, afin d'éviter les éventuels phénomènes radiatifs similaires à ceux rencontrés précédemment. Ceci ne change pas le contraste en face arrière car l'expression de -
équation (2) - reste inchangée si l'on permute les deux couches.

La courbe expérimentale de contraste est tracée sur la **figure 28c**. Les propriétés thermophysiques des deux couches sont très proches (métal/métal) et le dépôt est très mince, ce qui donne les ratios suivants :

$$K_3 \simeq 0,04 \quad (\text{rapport des capacités thermiques})$$

$$K_4 \simeq 0,02 \quad (\text{rapport des résistances thermiques})$$

Ceci explique la valeur très faible mesurée pour le contraste maximum (0,0275), c'est-à-dire une valeur 22 fois plus faible que celle de l'échantillon wet spray/acier. On observe également un haut niveau relatif du bruit de mesure, des valeurs erronées aux temps courts (parasites électromagnétiques dus aux impulsions) et une dérive du signal aux temps longs.

Il n'est donc pas possible, à partir de cette courbe expérimentale, de travailler à l'aide des transformées expérimentales de Laplace. Seule la

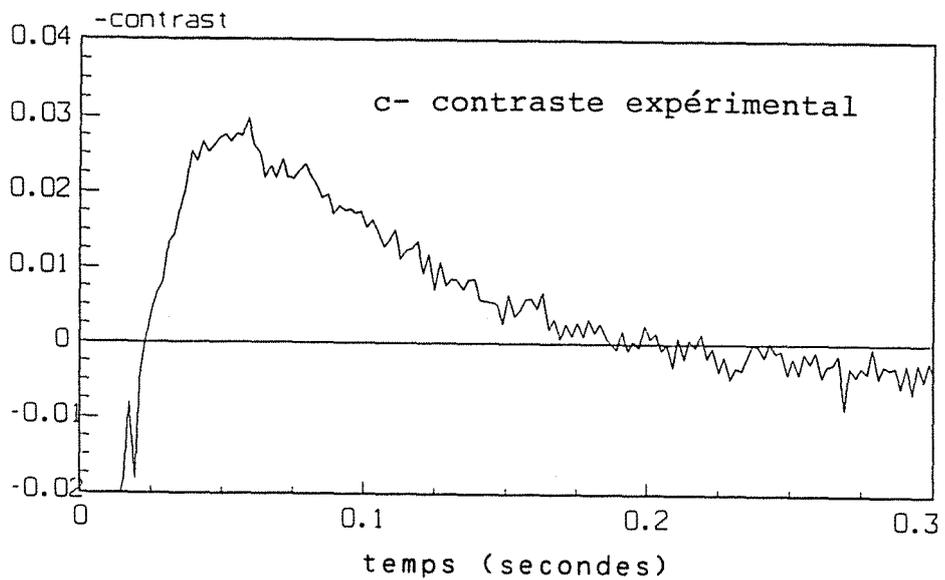
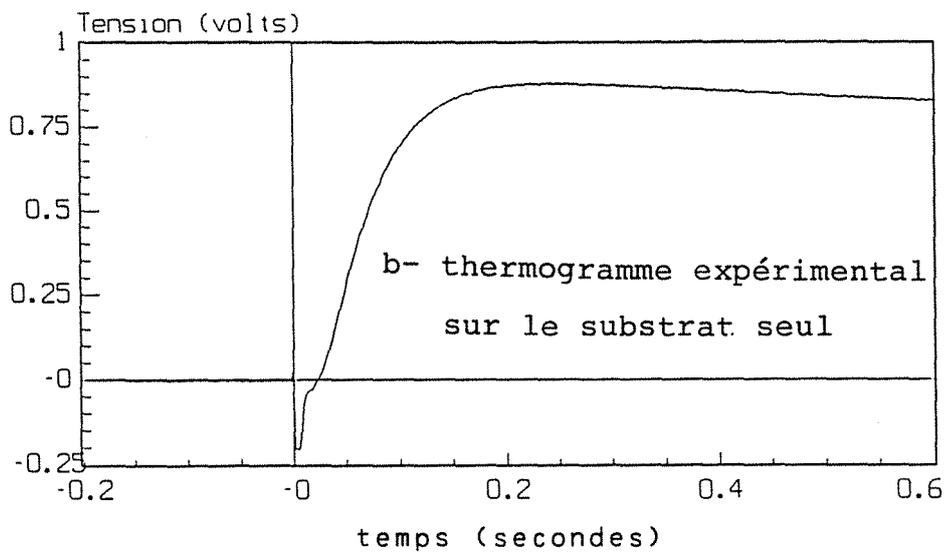
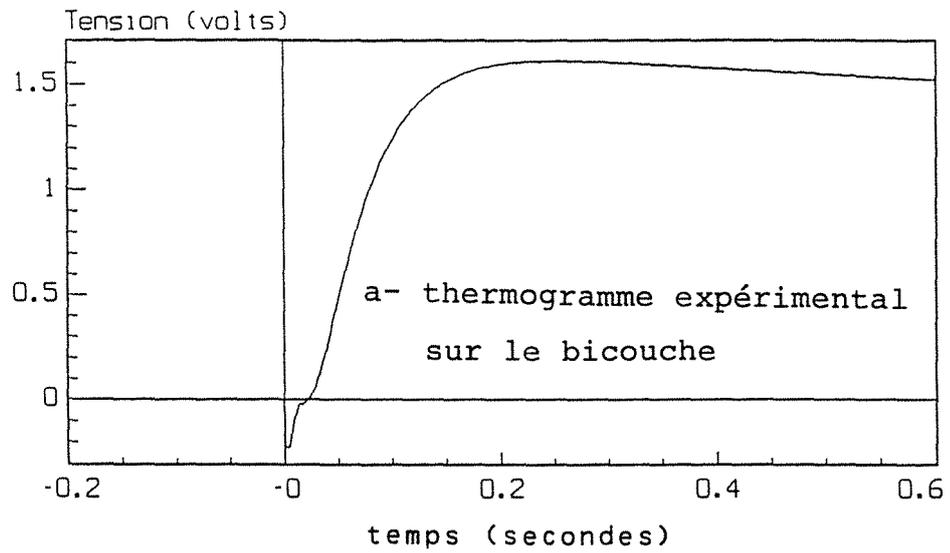


Fig. 28. Mesures sur le bicouche chrome-acier

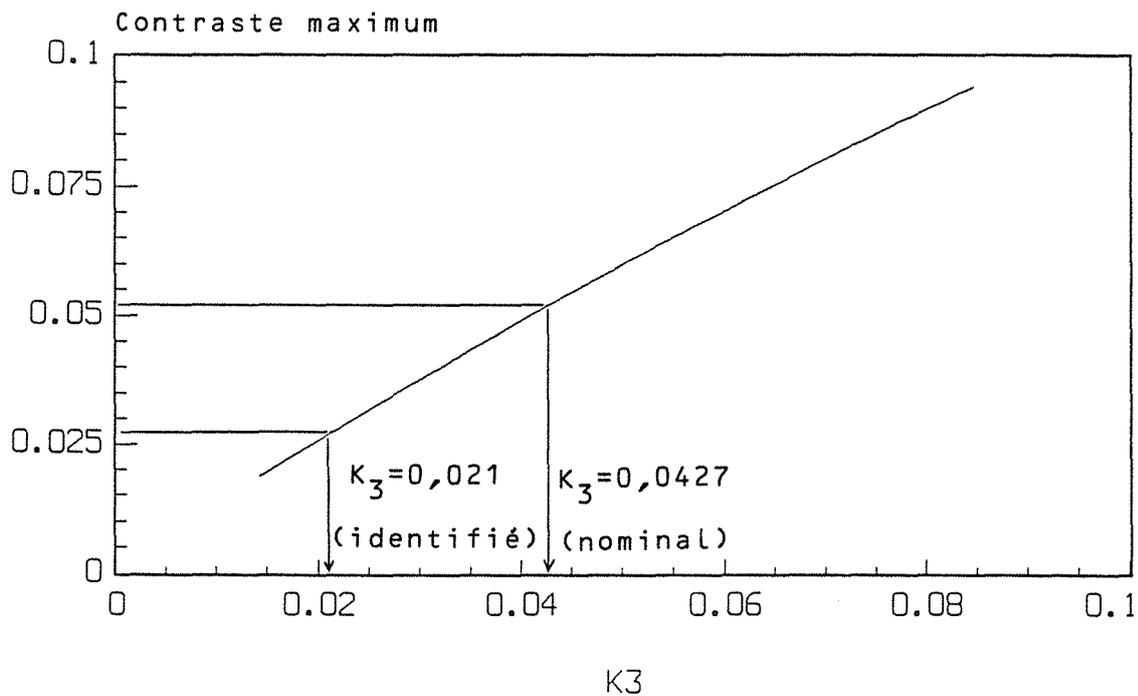


Fig. 29. Identification de K_3 par la courbe de contraste maximum à $K_4 = K_{4nominal}$ - chrome/acier

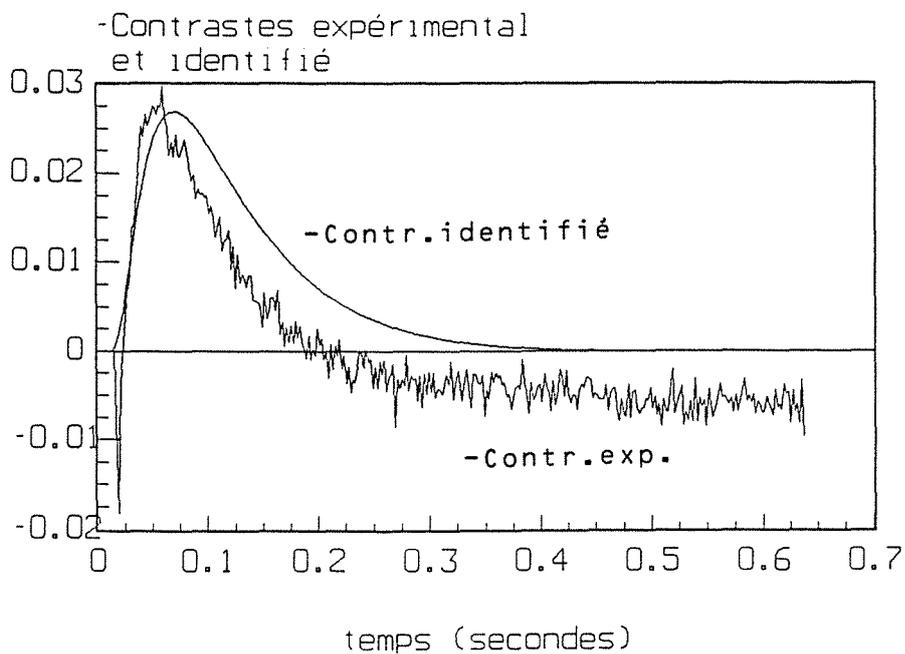


Fig. 30. Contrastes expérimental et identifiés - Echantillon chrome/acier

méthode du maximum - présentée en 2.3.4.3 - peut nous permettre d'identifier K_3 .

La variation du maximum de contraste $|\Delta T^*|_{\max}$ en fonction de K_3 a été calculée et tracée sur la **figure 29**, pour K_3 s'écartant de - 70 à + 100 % de sa valeur nominale et K_4 restant fixé à sa propre valeur nominale. Le contraste maximum de 0,0275 a permis l'identification de K_3 :

$$K_3 = 0,021$$

Il est alors possible de calculer la chaleur volumique $\rho_1 c_1$ du film de chrome ($1,55 \cdot 10^{-6} \text{ J m}^{-3} \text{ K}^{-1}$) qui est environ deux fois plus petite que sa valeur nominale. Cet écart peut résulter de la faible masse volumique ρ_1 du dépôt. Remarquons qu'une identification à partir du modèle $K_1 - K_3$ avec une fonction d'identification $|\Delta T^*|_{\max}(K_3)$, pour la valeur nominale fixée de K_1 , produit exactement la même valeur identifiée pour K_3 .

Les contrastes expérimental et identifiés sont tracés sur la **figure 30**. Il est manifeste que le contraste expérimental n'est qu'imparfaitement expliqué par la valeur identifiée de K_3 . Seule la répétition de manipulations flash sur le même échantillon pourrait permettre une meilleure adéquation entre ces deux courbes étant donné le faible niveau du signal.

2.5 - REFLEXIONS SUR L'APPLICATION DE LA METHODE FLASH A LA MESURE DES PROPRIETES THERMIQUES DE DEPOTS

Il est intéressant de constater, à la lumière des mesures effectuées sur deux échantillons différents, que la méthode flash ne fournit pas toujours systématiquement le même paramètre du dépôt : dans un cas de figure on peut mesurer sa diffusivité alors que dans l'autre cas c'est sa chaleur volumique qui est identifiée. Dans les deux cas, c'est l'étude de la sensibilité qui est capitale car elle permet de désigner le paramètre qui peut être atteint par l'expérience.

Notons également que si la notion de contraste thermique n'apporte rien au niveau des coefficients de sensibilité qui restent inchangés lorsque l'on passe du thermogramme réduit sur le bicouche T^* au contraste ΔT^* , elle permet par contre d'obtenir des courbes temporelles moins sensibles aux pertes, chaque thermogramme réduit T^* et T_0 étant affecté de la même manière par ces pertes. En outre, le contraste expérimental tendant rapidement vers zéro aux temps longs, les transformées expérimentales de Laplace ne sont que très faiblement biaisées par la troncature du signal.

BIBLIOGRAPHIE - CHAPITRE 2

- [1] - A. SKUMANICH, H. DERSCH, M. FATHALLAH, A contactless method for investigating the thermal properties of thin films, *Appl. Phys. A* 43, pp. 297-300 (1987).
- [2] - C.E. YEACK, R.L. MELCHER and S.S. JHA, Measurement of thermal diffusivity using a pyroelectric detector, *J. Appl. Phys.* 53 (3), pp. 3947-3949 (june 1982).
- [3] - R.E. MELCHER and C.E. YEACK, Pyroelectric technique for measurement of thermal conductivity, *IBM Technical Disclosure Bulletin*, Vol. 25, n° 1, pp. 69-74 (june 1982).
- [4] - H. COUFAL and P. HEFFERLE, Thermal diffusivity measurement of thin films with a pyroelectric calorimeter, *Appl. Phys. A* 38, pp. 213-219 (1985).
- [5] - H. COUFAL and P. HEFFERLE, A pulsed method for thermal:diffusivity measurements of polymer films with submicrometre thickness, *Can. J. Phys.* 64, pp. 1200-1203 (1986).
- [6] - R. DARTOIS, Caractérisation des matériaux bi-couches semitransparents par radiométrie photothermique : application aux revêtements de surface et en hématologie, *Thèse de Doctorat, Reims* (1986).
- [7] - F. POTIER, Radiométrie photothermique appliquée à la caractérisation et au contrôle du traitement thermique des métaux, *Thèse de Doctorat, Reims* (1989).
- [8] - D. BALAGEAS, D. BOSCHER, A. DEOM et F. ENGUEHARD, Panorama des méthodes thermiques de contrôle non destructif à l'ONERA, *Journée d'Etude sur les méthodes thermiques de contrôle thermique non destructif à l'ONERA - Société Française des Thermiciens* (24 janvier 1990).
- [9] - D.M. BOSCHER, A.A. DEOM et D.L. BALAGEAS, Fast pulsed photothermal method applied to diamond-like and silicon carbide coatings, *High Temp.-High Press.*, Vol. 21, pp. 113-117 (1989).
- [10] - W.P. LEUNG and A.C. TAM, Thermal diffusivity in thin films measured by non contact single-ended pulsed-laser-induced thermal radiometry, *Optics Letters*, Vol. 9, n° 3, pp. 93-95 (March 1984).
- [11] - C.A. PADDOCK and G.L. EESLEY, Transient thermorefectance from thin metal films, *J. Appl. Phys.* 60(1), pp. 285-290 (1 July 1986).
- [12] - A. DEGIOVANNI, Conduction dans un "mur" multicouche avec sources : extension de la notion de quadripôle, *Int. J. Heat Mass Transfer*, 31, pp. 553-557 (1988).

- [13] - J.V. BECK and K.J. ARNOLD, Parameter estimation in engineering and science, John Wiley and Sons, New-York (1977).
- [14] - H. STEHFEST, Remarks on algorithm 368 - Numerical inversion of Laplace transforms, Com. A.C.M., 13, p. 624 (1970).
- [15] - A. DEGIOVANNI et M. LAURENT, Une nouvelle technique d'identification de la diffusivité thermique pour la méthode "flash", Rev. Phys. Appl., 21, pp. 229-237 (1986).
- [16] - A. KAVIANIPOUR and J.V. BECK, Thermal property estimation utilizing the Laplace transform with application to asphaltic pavement, Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 20, pp. 259-267 (1977).
- [17] - P. DELPECH, D. BOSCHER, A. DEOM, D. BALAGEAS, Utilisation de la transformée de Laplace pour la détermination de grandeurs thermiques, Congrès de la Société Française des Thermiciens, n° 17.04, Nantes (juin 1990).
- [18] - R.L. ANDERSON, Distribution of the serial correlation coefficient, Ann. Math. Stat., Vol. 13, pp. 1-13 (1942).
- [19] - S.S. WILKS, Mathematical statistics, John Wiley and Sons (1962).
- [20] - D.M. BATES and D.G. WATTS, Non linear regression analysis and its applications, John Wiley and Sons (1988).
- [21] - C.R. RAO, Linear statistical inference, 2nd Ed., John Wiley and Sons, p. 228 (1973).
- [22] - B. DAVIES and B. MARTIN, Numerical inversion of the Laplace transform, Journal of Computational Physics, 33, pp. 1-32 (1979).

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36 37 38 39 40 41 42 43 44 45 46 47 48 49 50 51 52 53 54 55 56 57 58 59 60 61 62 63 64 65 66 67 68 69 70 71 72 73 74 75 76 77 78 79 80 81 82 83 84 85 86 87 88 89 90 91 92 93 94 95 96 97 98 99 100

CHAPITRE 3

DÉTECTION ET IDENTIFICATION DE DÉFAUTS INTERNES

DANS LES MATÉRIAUX COMPOSITES STRATIFIÉS

DÉTECTION ET IDENTIFICATION DE DÉFAUTS INTERNES DANS LES MATÉRIAUX COMPOSITES STRATIFIÉS

3.1 - LES METHODES DE CONTROLE NON DESTRUCTIF DES COMPOSITES STRATIFIES : PROBLEME DE L'IDENTIFICATION

3.1.1 - Les défauts des matériaux composites stratifiés

L'usage des matériaux composites, réservé initialement à l'industrie aérospatiale, est appelé à se développer dans toute l'industrie. Ce phénomène provient du désir de disposer de matériaux ayant des performances mécaniques de plus en plus élevées et des propriétés physicochimiques très particulières. Bien souvent les matériaux homogènes ne peuvent pas respecter l'ensemble des spécifications du cahier des charges d'une application particulière et il est nécessaire de concevoir des matériaux dits "composites" car ils sont fabriqués à partir d'éléments de nature et de structure différentes.

Ne seront ici considérés que les matériaux composites stratifiés à renforcement orienté dont les différents plis ou strates sont composés de fibres longues (carbone, bore, aramide, verre, ...) noyées dans une matrice de résine organique (thermodurcissable, thermoplastique, ...). En reprenant ici la description donnée par Krapez [1] : les fibres garantissent un module de Young et une résistance à la traction élevés tandis que la matrice assure une bonne cohésion au matériau ainsi qu'une bonne tenue à la compression. La matrice empêche également la propagation des fissures d'une fibre à l'autre. Le drapage, c'est-à-dire l'orientation des fibres au sein de chaque pli (fibres parallèles ou tressées) et d'un pli à l'autre, est optimisé afin d'obtenir, après polymérisation, un matériau, macroscopiquement isotrope, répondant aux caractéristiques désirées.

Si l'on ne considère pas ici les composites obtenus par collage ou les barrières thermiques à la surface d'un métal, ce type de matériaux stratifiés peut comporter les défauts de fabrication suivants :

- inclusions, c'est-à-dire insertion accidentelle de corps étrangers lors de la fabrication
- délaminages, c'est-à-dire décollement entre deux plis occupé par une poche d'air
- micro-porosité due à l'éjection incomplète des composants volatils lors de la cuisson
- variation spatiale de la concentration en résine
- variation locale de l'épaisseur de la pièce

Lors de la mise en traction transverse d'un tel stratifié ou suite à un choc, peuvent également apparaître des fissures entre les plis et des délaminages qui augmentent le risque de flambement de la plaque de stratifié en compression.

Afin de contrôler ce type de pièces, il est possible de procéder à un contrôle destructif qui permet, sur une base statistique, de suivre la qualité de la fabrication. Naturellement les constructeurs préfèrent s'orienter de plus en plus vers un contrôle non destructif qui autorise l'inspection des pièces à différents instants de leur durée de vie.

3.1.2 - Les différentes méthodes de contrôle non destructif

Avant d'envisager l'usage d'une technique particulière de contrôle non destructif, il est nécessaire de :

- déterminer le type de pièce à contrôler
- connaître le type de défaut à rechercher

Une fois ce choix effectué, le constructeur peut s'orienter vers une technique spécifique qui doit tout d'abord permettre la détection d'éventuels défauts : il s'agit d'un problème dont la réponse ne peut être que binaire (existence ou non d'un défaut au sein de la pièce étudiée). Cette détection dépend du seuil de détectabilité de la technique utilisée, ce seuil étant à la fois fonction de la sensibilité de la grandeur mesurée à la présence du défaut et du niveau du bruit de mesure.

Lorsqu'un défaut est détecté par une technique donnée, il est nécessaire de pouvoir l'identifier en terme de ses paramètres directs - taille,

nature, localisation ... - et ce, de manière indépendante de la technique utilisée.

Cette identification peut être mise en oeuvre en utilisant un savoir-faire ou des corrélations qui résultent de l'expérience ; dans ce cas l'identification est synonyme d'une détection améliorée.

Une identification plus utile peut être effectuée si l'on dispose :

- d'une caractérisation des paramètres directs du défaut en termes de paramètres actifs vis-à-vis du processus physique mis en oeuvre par la technique de contrôle non destructif (CND) : ainsi en contrôle thermique une épaisseur de délaminage pourra se traduire en terme de résistance thermique de contact.
- d'un modèle direct donnant l'évolution (spatiale ou temporelle) des grandeurs physiques du phénomène étudié (la température dans l'exemple précédent) en fonction des paramètres actifs du défaut.
- d'une technique inverse permettant l'estimation de ces paramètres en fonction des grandeurs physiques mesurées.

Une étude détaillée des méthodes de contrôle non destructif des matériaux composites a été effectuée par Krapez [1], aussi ne citons nous que pour mémoire :

- les méthodes ultrasonores basées sur la réflexion des ondes élastiques aux interfaces entre matériaux
- les méthodes basées sur les modes de vibration mécanique de la structure étudiée
- l'émission acoustique ultrasonore lors de la mise en chargement d'une pièce
- les méthodes photo-acoustique (excitation laser) ou thermo-acoustique (excitation par faisceau d'électrons) avec détection par microphone ou transducteur piezoélectrique
- les radiographies par rayons X ou par neutrons
- les méthodes optiques : holographie et analyse de speckle permettant la mesure de déplacement suite à une stimulation mécanique ou thermique (interférométrie)
- la méthode des courants de Foucault réservée aux matériaux conducteurs.

Il existe également des méthodes thermiques de CND où la détection d'éventuels défauts est basée sur l'étude du champ de température de la pièce analysée. Si l'on exclut les méthodes passives où le champ thermique est mesuré dans le cadre du fonctionnement normal de la pièce, il est possible de distinguer :

- les cas où l'excitation de la pièce est mécanique :
 - thermoélasticité mettant en évidence des échauffements cycliques réversibles (excitation périodique)
 - vibrothermographie fondée sur l'étude des points chauds correspondant à des résonances mécaniques locales au voisinage des défauts.
- les cas où l'excitation est thermique (excitation photothermique) pour lesquels la mesure de température peut être :
 - indirecte pour la méthode à effet mirage où l'on mesure la variation d'indice optique de l'air au voisinage de la pièce étudiée (déflexion d'un rayon laser)
 - indirecte par radiométrie, technique pour laquelle l'excitation peut être effectuée soit en régime modulé (addition d'une excitation constante dans le temps et d'une composante périodique), soit en régime impulsionnel (excitation flash), avec comme variante le cas où l'excitation est en créneau.

C'est l'application de cette dernière méthode, la radiométrie photothermique impulsionnelle au contrôle non destructif, qui va être étudiée par la suite ; par rapport au régime modulé elle a l'avantage de mettre en oeuvre toutes les fréquences en une seule expérience, la distribution de Dirac ayant pour spectre toutes les fréquences avec des amplitudes égales.

Cette technique a été précédemment utilisée par de nombreux auteurs ; nous citerons ici simplement pour mémoire les travaux de Balageas et al. [2,3], Boscher et al. [4], Cielo et al. [5] et ceux de Vavilov et Taylor [6].

3.2 - LA METHODE PHOTOTHERMIQUE IMPULSIONNELLE

Dans cette partie, nous reprenons la description du modèle et de la méthode utilisés au LEMTA - voir références [7 à 14].

3.2.1 - Le modèle direct

3.2.1.1 - Caractérisation du délaminage

Considérons un délaminage dans une plaque de matériau composite, la plaque et le délaminage ayant une dimension radiale (r) infinie (Figure 1). Ce matériau pourra être par exemple un composite stratifié à renforcement fibreux orienté du type carbone-epoxy. Si l'orientation des fibres au sein de chaque pli est changée de manière périodique et si le nombre de couches est suffisant pour autoriser l'homogénéisation avec utilisation de propriétés thermiques équivalentes - voir Degiovanni [15]- la partie saine de la plaque peut être considérée comme étant un matériau orthotropique de diffusivité radiale (ou transversale) a_r et de diffusivité axiale a . Dans ce qui suit, la notation λ sera utilisée pour les conductivités axiales (direction z) et la notation ρc pour les capacités thermiques volumiques. Si le délaminage (d) est formé d'une couche d'air d'étendue radiale infinie, de conductivité λ_d et d'épaisseur e_d faible (quelques microns) devant l'épaisseur totale de la plaque saine e ($= e_1 + e_2$), ce défaut peut être caractérisé par une résistance de contact $R_c (= e_d/\lambda_d)$ entourée des deux couches externes (1 et 2). Sa profondeur e_1 , par rapport à une des deux faces de la plaque, constitue son second paramètre caractéristique. Pour des délaminages d'air on montrera plus loin que la capacité du défaut $(\rho c e)_d$ peut être négligée.

3.2.1.2 - Contraste thermique

La caractérisation ci-dessus s'applique à un transfert unidirectionnel transitoire créé, par exemple, par une excitation photothermique impulsionnelle uniforme sur une face, baptisée "avant" - de la plaque. Cette excitation est quantifiée par une énergie Q absorbée par unité de surface de la plaque.

Si la température initiale de la plaque est uniforme et si les pertes de chaleur peuvent être négligées, l'équation de la chaleur s'écrit pour chaque couche ($i = 1$ ou 2) :

$$\frac{\partial^2 T_i}{\partial z^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial T_i}{\partial t} \quad (1)$$

avec les conditions initiale et aux limites :

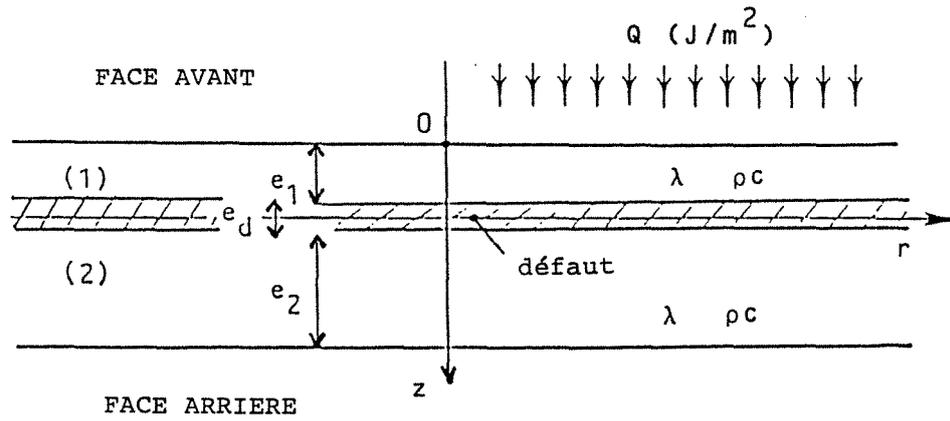


Fig. 1. Géométrie du modèle uni-dimensionnel

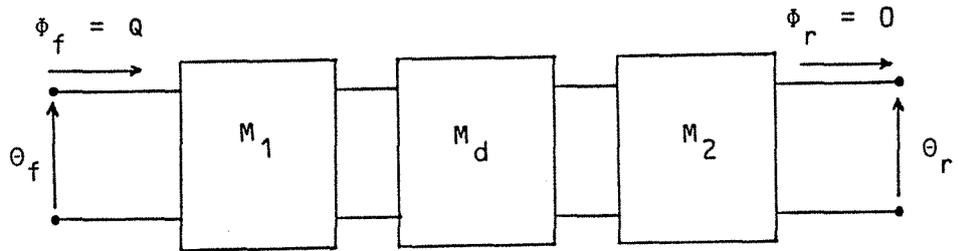


Fig. 2. Représentation quadripolaire de la plaque défectueuse

$$T_i = 0 \quad \text{à } t = 0 \quad (2)$$

$$-\lambda \frac{\partial T_1}{\partial z} = Q \delta(t) \quad \text{à } z = 0 \quad (3)$$

$$\left. \begin{aligned} T_1 - T_2 &= R_c \left(-\lambda \frac{\partial T_1}{\partial z} \right) \\ \frac{\partial T_1}{\partial z} &= \frac{\partial T_2}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad \text{à } z = e_1 \quad (4)$$

$$-\lambda \frac{\partial T_2}{\partial z} = 0 \quad \text{à } z = e \quad (5)$$

où $\delta(t)$ est la distribution de Dirac de surface unité.

Comme dans l'étude des dépôts, il est possible d'utiliser la méthode des quadripôles avec la même notation. Si l'on appelle M_1 et M_2 les matrices associées à chaque couche (1) et (2) et M_d celle associée au délaminage (résistance pure : $A_d = D_d = 1$; $B_d = R_c$; $C_d = 0$), le système différentiel précédent se réduit à la relation matricielle entre grandeurs d'entrée et de sortie des trois quadripôles précédents montés en cascade (**Figure 2**) :

$$\begin{bmatrix} \theta_f \\ Q \end{bmatrix} = M_1 M_d M_2 \begin{bmatrix} \theta_r \\ 0 \end{bmatrix} \quad (7)$$

θ_f et θ_r sont les transformées de Laplace des températures des faces avant (f) et arrière (r) de la plaque défectueuse :

$$\theta_f = A Q/C \quad \text{et} \quad \theta_r = Q/C \quad (8)$$

avec :

$$A = \text{ch}(\alpha) + R_c^* \text{sh}(\alpha x^*) \text{sh}[\alpha(1 - x^*)]$$

$$C = \frac{\alpha}{R} \{ \text{sh}(\alpha) + R_c^* \text{sh}(\alpha x^*) \text{sh}[\alpha(1 - x^*)] \}$$

avec :

$$x^* = e_1/e \quad R_c^* = R_c/R \quad R = e/\lambda$$

$$\alpha = \sqrt{p}^* \quad p^* = e^2 p/a$$

p étant la variable de Laplace.

La température T sur chaque face de la plaque peut être rendue adimensionnelle si on la divise par sa valeur asymptotique finale ($T_\infty = Q/(\rho c e)$), l'expérience étant adiabatique :

$$T^* = \frac{T}{Q/\rho c e}$$

Dans ce cas, on peut réintroduire la transformée θ^{**} de la température réduite T^* , en considérant maintenant p^* comme la nouvelle variable (réduite) de Laplace :

$$\theta^{**} = \mathcal{L}^*[T^*] = \int_0^\infty \exp(-p^* t^*) T^* dt^*$$

t^* ($= at/e^2$) étant le nombre de Fourier de la plaque.

Si l'indice o désigne un thermogramme temporel obtenu sur une plaque saine ($R_c^* = 0$), suite à une excitation de même énergie Q , il est possible de construire un contraste thermique réduit ΔT^* :

$$\Delta T^*(t^*, R_c^*, x^*) = \frac{T - T_o}{T_{o\infty}} = T^* - T_o^* \quad (9)$$

avec :

$$T_{o\infty} = T_\infty = Q/(\rho c e)$$

La transformée réduite du contraste ΔT^* peut être calculée pour les deux faces :

$$\Delta \theta_f^{**} = \frac{R_c^* \operatorname{sh}^2[\alpha(1-x^*)]}{\operatorname{sh}(\alpha) \{ \operatorname{sh}(\alpha) + R_c^* \operatorname{sh}(\alpha x^*) \operatorname{sh}[\alpha(1-x^*)] \}} \quad (10)$$

$$\Delta \theta_r^{**} = - \frac{R_c^* \operatorname{sh}(\alpha x^*) \operatorname{sh}[\alpha(1-x^*)]}{\operatorname{sh}(\alpha) \{ \operatorname{sh}(\alpha) + R_c^* \operatorname{sh}(\alpha x^*) \operatorname{sh}[\alpha(1-x^*)] \}} \quad (11)$$

Les originaux de T^* , T_o et ΔT^* peuvent être calculés en fonction du temps t (ou du nombre de Fourier t^*) grâce à l'algorithme d'inversion de Stehfest. Leurs formes typiques sont indiquées sur les figures 3a et b pour chacune des deux faces de la plaque. En face avant la valeur asymptotique $T_{o\infty}$ est

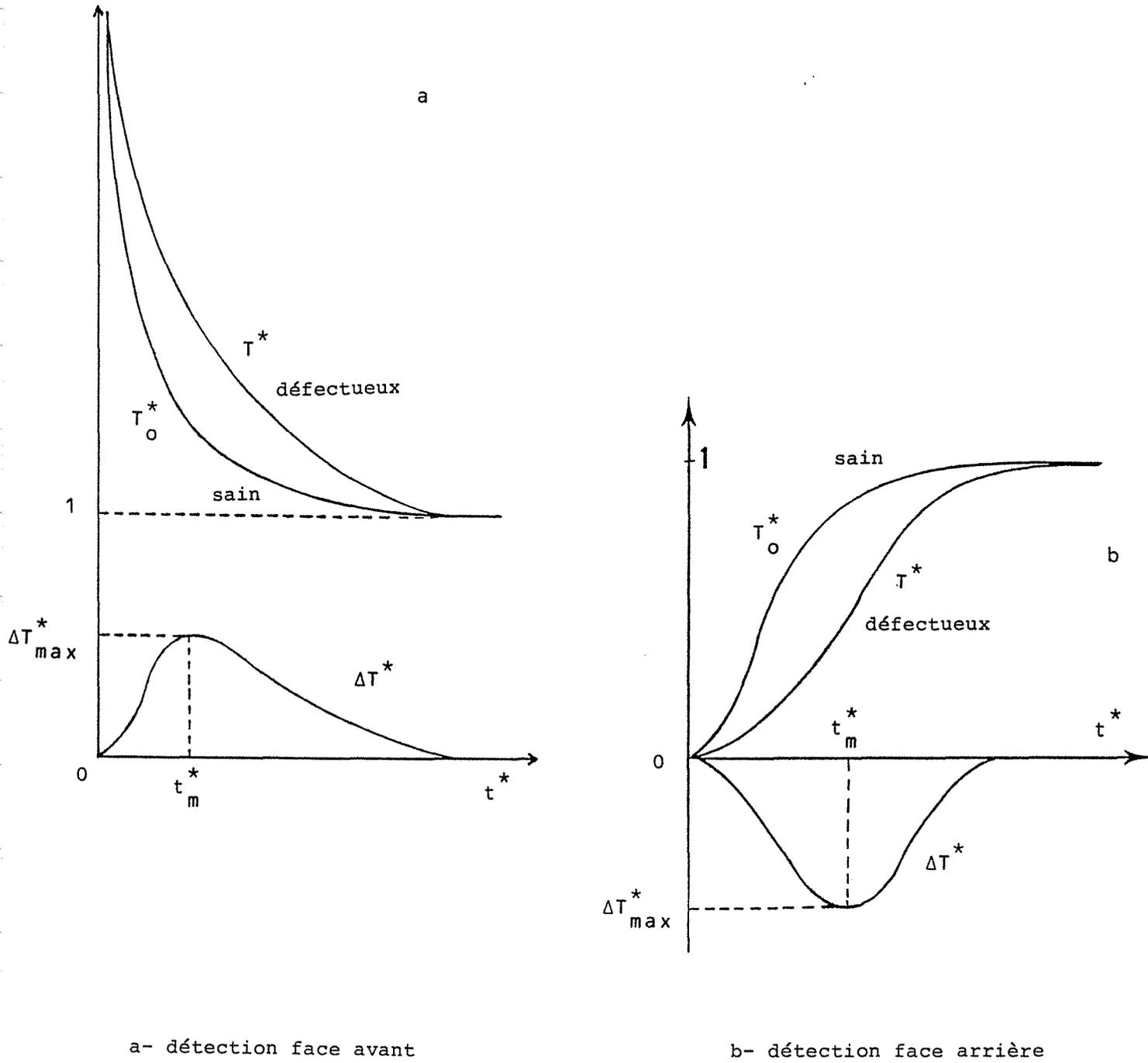


Fig. 3. Thermogrammes et contraste

un minimum du thermogramme alors que c'est un maximum en face arrière.

Une propriété intéressante de la fonction contraste réside dans le fait que celle-ci s'annule en l'absence de délaminage ($R_c = 0$) ; elle constitue donc une "signature" du défaut.

3.2.1.3 - Influence de la capacité du défaut

Dans ce qui précède, le défaut était caractérisé par une résistance de contact, c'est-à-dire qu'on avait négligé :

- sa capacité thermique volumique $(\rho c)_d$
- son épaisseur e_d devant l'épaisseur e de la plaque saine

Si l'on considère maintenant le défaut en tant que matériau réel, il faut traiter la plaque défectueuse comme un milieu tri-couche. Dans ce cas plus général, il faut examiner séparément la situation pour laquelle l'épaisseur totale de la plaque défectueuse est $(e + e_d)$, e étant l'épaisseur de référence de la plaque saine, et celle où l'épaisseur totale de la plaque défectueuse reste constante (et égale à e). Ce dernier cas correspond à des conditions réelles de fabrication, pour lesquelles les couches de stratifié sont mises en forme sous la pression d'un moule, ce qui provoque une diminution d'épaisseur des deux couches de matériau sain, de chaque côté du délaminage ou du défaut, suite à une migration de la résine de part et d'autre de la zone défectueuse.

Cas d'une augmentation d'épaisseur de la plaque défectueuse

La matrice M_d du quadripôle représentant le défaut a les coefficients suivants :

$$\begin{aligned} A_d = D_d &= \text{ch}(k_d e_d) & C_d &= \lambda_d k_d \text{sh}(k_d e_d) \\ B_d &= \text{sh}(k_d e_d) / (\lambda_d k_d) & \text{avec } k_d &= (p/a)^{1/2} \end{aligned}$$

a_d étant la diffusivité du défaut.

Si on garde la définition du contraste ΔT^* , donnée par l'équation (9), avec la même normalisation par $Q/(\rho c e)$ pour les thermogrammes T et T_0 ,

le contraste réduit de Laplace a alors la forme suivante :

$$\Delta\theta^{**} = \Delta\theta^{**} (p^*, R_c^*, x^*, K_1) \quad (12)$$

Les expressions analytiques de $\Delta\theta^{**}$ (faces avant et arrière) sont données dans l'Annexe A3.1. Le nouveau paramètre K_1 qui apparaît ici a la même signification que pour la mesure des dépôts ; il s'agit de la racine carrée du rapport des temps caractéristiques du défaut et du matériau composite sain :

$$K_1 = \frac{e_d}{e} \left(\frac{a}{a_d}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Ce paramètre peut être exprimé en fonction de K_3 , le rapport des capacités thermiques des deux matériaux (défaut et stratifié sain) :

$$K_1^2 = R_c^* K_3 \quad \text{avec} \quad K_3 = (\rho c e)_d / (\rho c e)$$

Il peut également être exprimé en fonction de K_2 , le rapport des effusivités thermiques des deux matériaux :

$$K_1 = R_c^* K_2 \quad \text{avec} \quad K_2 = (\lambda \rho c)_d^{\frac{1}{2}} / (\lambda \rho c)^{\frac{1}{2}}$$

Cas d'une épaisseur inchangée de la plaque défectueuse

Dans le cas précédent on avait :

$$e = e_1 + e$$

Du fait de la compression à laquelle a été soumise la plaque pendant la phase de polymérisation, les deux couches de matériau composite de part et d'autre du défaut ont des épaisseurs e'_1 et e'_2 telles que :

$$e = e'_1 + e_d + e'_2 \quad (13)$$

Dans l'hypothèse où la réduction d'épaisseur de chaque couche est proportionnelle à son épaisseur initiale, on peut écrire :

$$e'_1 = (1 - \delta)e_1 \quad e'_2 = (1 - \delta)e_2 \quad (14)$$

$\delta (= e_d/e)$ étant le taux de réduction de l'épaisseur de la plaque. Ainsi la profondeur du défaut peut être caractérisée par le même paramètre que plus haut :

$$x^* = e_1/e = \frac{e'_1}{(1 - \delta)e}$$

A cause de la réduction d'épaisseur, la plaque défectueuse a la résistance thermique totale suivante :

$$R_T = (1 - \delta)R + R_d \quad (15)$$

avec :

$$R = e/\lambda \quad \text{et} \quad R_d = e_d/\lambda_d$$

Le modèle purement résistif donnait la résistance totale suivante pour la plaque défectueuse :

$$R_T = R + R_c \quad (16)$$

La comparaison entre les équations (15) et (16) permet de définir la sur-résistance R_c qui est due à la présence du défaut, si celui-ci est considéré comme étant un matériau réel :

$$R_c^* = R_d^* - \delta \quad (17)$$

avec :

$$R_d^* = R_d/R \quad \text{et} \quad R_c^* = R_c/R$$

L'équation (17) montre que l'accroissement de résistance de la plaque défectueuse, par rapport à la plaque saine, est égale à la résistance propre du défaut diminuée de la réduction de résistance consécutive à la diminution d'épaisseur des deux couches saines de part et d'autre du défaut. Cette équation peut également se mettre sous la forme :

$$R_c^* = R_d^* (1 - \lambda_d/\lambda) \quad (18)$$

Ce qui montre que l'on peut éventuellement avoir une diminution de résistance thermique dans le cas d'un défaut plus conducteur que le matériau sain.

En reprenant la démarche précédemment adoptée, le contraste réduit de Laplace, correspondant à l'original défini par l'équation (9), s'écrit sous la forme :

$$\Delta\theta^{**} = \Delta\theta^{**}(p^*, R_d^*, x^*, K_1, \delta) \quad (19)$$

Les expressions analytiques de $\Delta\theta^{**}$ pour les deux faces sont données dans l'Annexe 3.2. Notons que, si on connaît les propriétés thermiques du matériau constituant le défaut, les quatre paramètres ne sont plus indépendants car on a :

$$R_d^* = \delta\lambda/\lambda_d \quad \text{et} \quad K_1 = \delta(a_d/a)^{1/2}$$

Cette caractérisation peut encore être affinée si on tient compte d'un changement des propriétés thermiques, des couches d'épaisseur e_1' et e_2' , dû à la migration radiale de la seule résine de part et d'autre du défaut, les fibres restant en place. On est alors ramené à un problème d'homogénéisation au niveau, non plus du multicouche, mais au sein d'une couche entre la résine et les fibres.

Ecart entre les modèles purement résistif et tricouche

Afin d'étudier l'influence de la capacité thermique du défaut sur le contraste ΔT^* en face arrière, celui-ci a été calculé - suivant l'équation (11) - et tracé en fonction du nombre de Fourier t^* sur la **figure 4** pour un défaut purement résistif ($R_c^* = 0,04$) situé dans le plan de symétrie ($x^* = 0,5$) d'une plaque de stratifié carbone-epoxy de 2 mm d'épaisseur (**courbe 1**). L'effet capacitif a été ensuite pris en compte avec - équation (12) - ou sans - équation (19) - augmentation d'épaisseur de la plaque défectueuse pour une couche d'air ou de téflon qui produit la même augmentation de résistance R_c^* de la résistance thermique réduite R_T/R de la plaque.

Les propriétés thermiques des couches de composite, d'air et de téflon sont données dans la table 3.1.

Couche	Epaisseur de la plaque défectueuse	Epaisseur de la couche (μm)	ρc (10^6 Jm^{-3})	λ ($\text{Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$)	R_c^*	δ (%)	K_1	K_3
Stratifié carbone-époxy		2000	1,62	0,65				
Résistance de contact pure	inchangée	0			0,04	0	0	0
Air	augmentée	3,2	0,0012	0,026	0,04	0,16	$2,18 \cdot 10^{-4}$	$1,19 \cdot 10^{-6}$
	inchangée	3,3				0,17	$2,27 \cdot 10^{-4}$	$1,23 \cdot 10^{-6}$
Téflon	augmentée	30,8	2,27	0,25	0,04	1,54	0,029	0,022
	inchangée	50				2,5	0,048	0,035

Table 3.1 - Propriétés des couches -
Effet capacitif

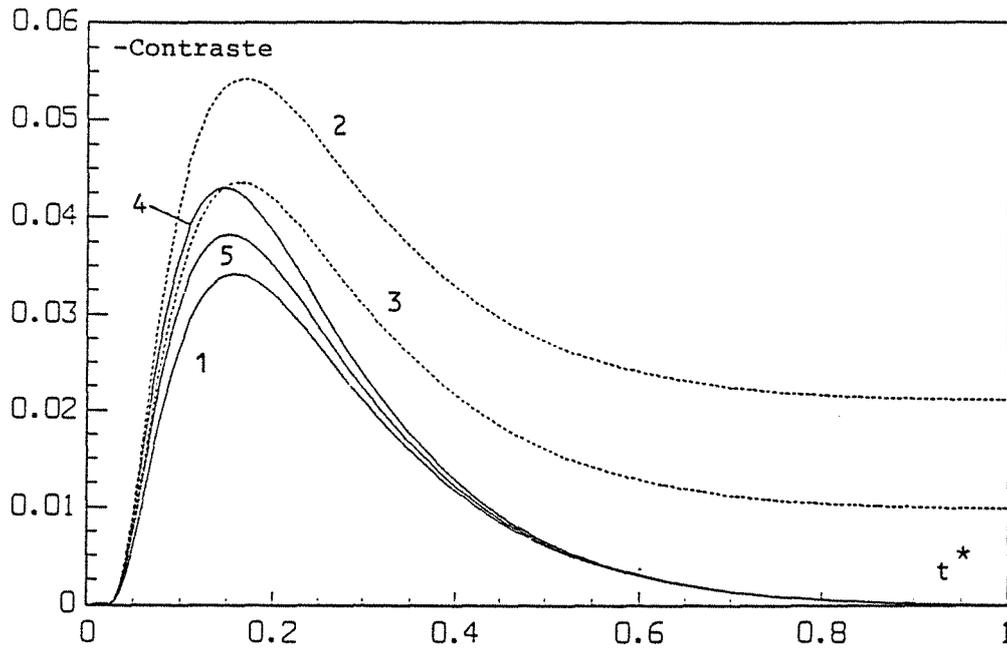


Fig. 4. Effet de la capacité du défaut sur le contraste arrière
 $(R_c^* = 0.04; x^* = 0.5; e = 2 \text{ mm}; \text{voir Table 1})$

- 1: ΔT^* - défaut purement résistif (3 μm d'air)
- 2: ΔT^* - défaut capacitif avec changement d'épaisseur (30.8 μm de téflon)
- 3: ΔT^* - défaut capacitif - épaisseur inchangée (50 μm de téflon)
- 4: ΔT_{loc}^* - même plaque défectueuse que pour la courbe 2
- 5: ΔT_{loc}^* - même plaque défectueuse que pour la courbe 3

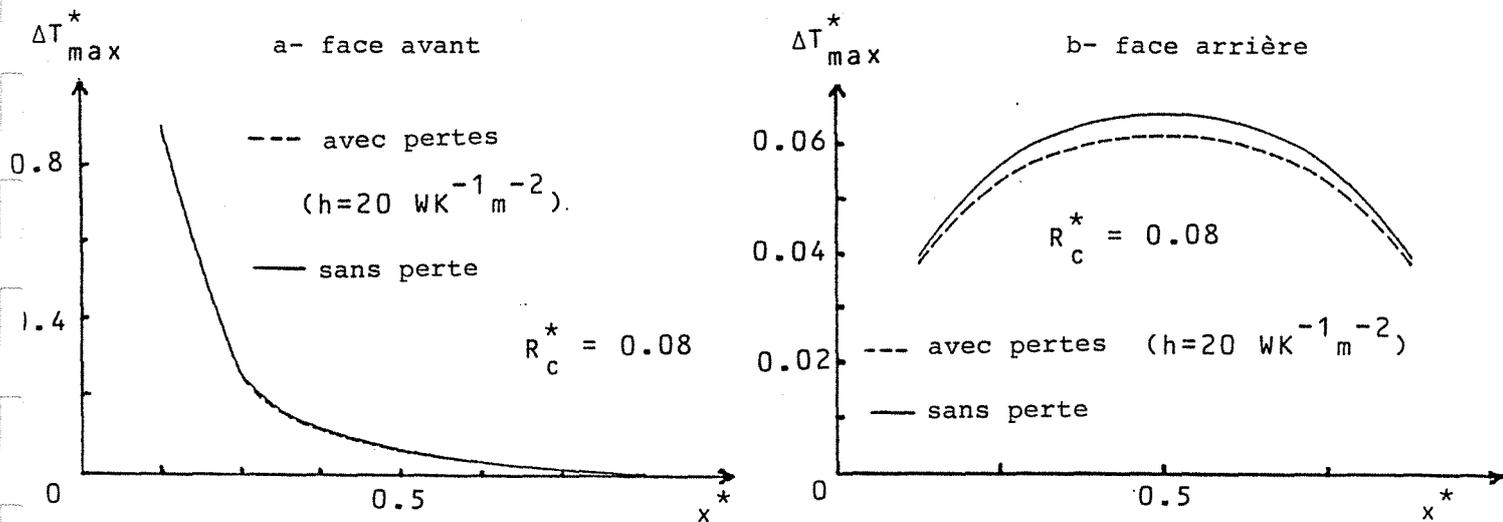


Fig. 5. Effet des pertes

Les deux courbes de contraste pour lesquelles le défaut est une couche d'air, avec ou sans augmentation d'épaisseur de la plaque, ne peuvent être distinguées l'une de l'autre. Elles sont également confondues avec la **courbe 1** représentative du défaut purement résistif. Ceci est dû à la faible valeur des coefficients K_1 et δ : lorsqu'on les fait tendre vers zéro les deux contrastes prenant en compte l'effet capacitif - équations (12) et (19) - sont équivalentes au contraste du défaut purement résistif - équation (10) ou (11).

Par contre, les effets capacitifs sont importants pour des couches de téflon : ils sont responsables d'une augmentation de 59 % (avec surépaisseur - **courbe 2**) ou de 28 % (sans surépaisseur - **courbe 3**) du contraste maximum (en valeur absolue) par rapport au cas du défaut purement résistif.

3.2.1.4 - Influence des pertes

L'effet des pertes sur le contraste peut être caractérisé par un coefficient d'échange convectif h . Il est alors possible d'introduire une matrice quadripolaire H - voir § 2.3.2 - sur les deux faces de l'échantillon défectueux et de calculer un contraste dimensionnel de Laplace $\Delta\theta$ ($= \theta - \theta_0$). Si la normalisation de chaque thermogramme T et T_0 est faite par rapport à la température asymptotique de l'expérience sans perte $Q/(\rho c e)$, il a été montré - voir A.S. Lamine [8] et les **figures 5a** et **5b** - que, pour une résistance réduite $R_C^* = 0,08$ (6,4 microns d'air dans une plaque de carbone-epoxy de 2 mm d'épaisseur) et un coefficient de pertes h de $20 \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-1}$, (nombre de Biot $Bi = 0,06$) :

- le niveau du contraste maximum ΔT_{\max}^* reste pratiquement inchangé en face avant par rapport au cas adiabatique et ce, quelle que soit la profondeur du défaut x^* .
- le niveau de cet extremum baisse légèrement en valeur absolue en face arrière (au maximum de 6 % pour un défaut centré : $x^* = 0,05$).

Notons que les coefficients habituels de transfert à température ambiante (convection naturelle et rayonnement linéarisé) sont de l'ordre de $10 \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-1}$, ce qui signifie que les réductions de contraste données ci-dessus sont surestimées. D'autre part, l'énergie Q absorbée par la plaque ne

peut être mesurée et, en pratique, la normalisation, en face arrière, s'effectue à l'aide du maximum T_{omax} de la courbe avec pertes ($T_{\text{omax}} < Q/\rho c e$). Ce qui signifie que l'effet des pertes est encore plus faible en face arrière. Il en est de même en face avant si l'on normalise non pas à l'aide de la température asymptotique T_o , qui est nulle, mais à l'aide de la dernière température T_{od} qui peut être enregistrée lors de l'expérience ($T_{\text{od}} < Q/\rho c e$).

3.2.1.5 - Influence du rayonnement interne au délaminage

L'influence du délaminage sur le transfert thermique au sein de la plaque composite s'est traduite par une caractérisation en terme de résistance thermique de contact. On peut se demander dans quelle mesure le rayonnement entre les deux parois de la cavité créée par le délaminage peut augmenter l'échange et donc diminuer cette résistance de contact.

En supposant que ces deux parois ont un comportement de corps noir, pour maximiser l'effet radiatif, la densité de flux radiatif infrarouge s'écrit :

$$\varphi = \sigma(T_1^4 - T_2^4)$$

σ étant la constante de Stefan.

Comme les températures de paroi T_1 et T_2 sont très proches, φ peut être linéarisé sous la forme :

$$\varphi = (T_1 - T_2)/R_r$$

avec :

$$R_r = \frac{1}{4\sigma T_m^3} \quad \text{et} \quad T_m = (T_1 + T_2)/2$$

Le rapport des résistances radiative et conductive peut alors être évalué :

$$R_r/R_c = \frac{\lambda_d}{4\sigma T_m^3 e_d} \quad (20)$$

Pour un délaminage d'air de 10 microns d'épaisseur, ce rapport est supérieur à 400 à température ambiante, ce qui montre que la composante radiative du flux peut être complètement négligée devant le flux conductif, les deux résistances correspondantes étant en parallèle.

3.2.1.6 - Les effets bidimensionnels

Le modèle unidimensionnel transitoire (1D) présenté plus haut va donner naissance à une méthode d'identification des délaminages - voir section 3.2.2. Cependant, en pratique, tout délaminage possède une extension radiale limitée et, même dans le cas où l'excitation est uniforme en face avant, on a affaire à un problème transitoire bi- ou tridimensionnel (2 ou 3D).

Pour simplifier l'analyse il est possible de considérer un délaminage en forme de disque de rayon b situé au sein d'un matériau orthotrope possédant deux diffusivités différentes a (direction axiale z) et a_r (direction r) schématisé sur la **figure 6**. Si les hypothèses sont les mêmes que pour le modèle 1D :

- excitation impulsionnelle uniforme sur la face avant
- température initiale uniforme dans la plaque
- conservation de la densité de flux de part et d'autre du défaut considéré comme purement résistif
- absence de perte de chaleur sur les deux faces planes

et si l'on suppose en outre la plaque de forme cylindrique isolée latéralement sur le rayon $r = \ell$, il est possible de résoudre l'équation de la chaleur en coordonnées cylindriques dans les deux parties (1) et (2) de la plaque. Le système est écrit dans l'espace de Laplace et la méthode de séparation des variables conduit à une solution analytique du champ des températures qui s'exprime formellement linéairement en fonction de la densité de flux $\varphi(r,t)$ au niveau du défaut ($z = e_1$). La condition de raccordement entre les deux champs T_1 et T_2 s'écrit alors :

$$T_1(e_1, r, t) - T_2(e_1, r, t) = R(r) (r, t) \quad (21)$$

avec :

$$\begin{array}{lll} R(r) = R_c & \text{si} & 0 \leq r \leq b \\ R(r) = 0 & \text{si} & b \leq r \leq \ell \end{array}$$

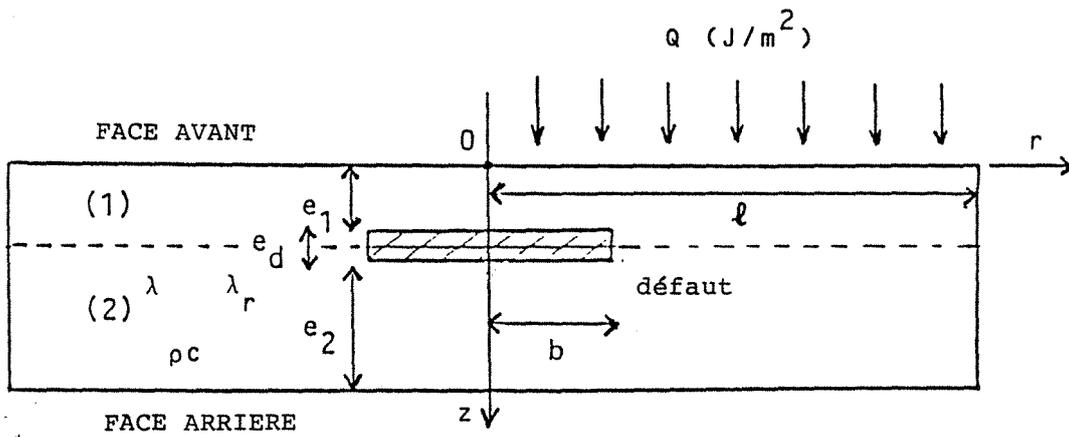


Fig. 6. Géométrie du modèle bi-dimensionnel

L'équation (21) est une équation intégrale en φ qui n'a pas de solution générale et on ne peut la résoudre qu'en faisant l'hypothèse d'une fonction $\varphi(r,t)$ constante par morceaux (en r). Il est alors possible de calculer les différentes composantes de φ - équation (21) écrite en valeur moyenne sur chaque intervalle - et de calculer ensuite chacun des champs T_1 et T_2 , en revenant dans l'espace temporel en utilisant l'algorithme de Stehfest. Cette méthode "fluxmétrique" utilisée également plus loin - voir chapitre 4 - est proche de la méthode "Heat flux Based Unsteady Surface Element" développée par Keltner et Beck [16]. A.S. Lamine [8] a optimisé le découpage radial sur quatre intervalles à partir d'un modèle de référence écrit sur 19 morceaux - voir également A.S. Houlbert et col. [13].

Afin de valider le modèle 1D par le modèle 2D et de préciser les limites de celui-ci, l'effet sur le contraste de deux paramètres doit être étudié :

Effet de la taille limitée de l'échantillon

Il a été montré que pour des stratifiés carbone-époxy ($a_r/a \approx 3,5$) de différents rayons réduits l^* ($= l/e$), il n'existe pas de différence pour le contraste maximum $(\Delta T^*)_{\max}$, au niveau du centre du défaut en face arrière, entre les cas où l^* est supérieur à 5 et le cas où l^* tend vers l'infini. Ceci montre que les effets de bord peuvent être négligés, pour des mesures centrées sur le défaut et ce, même si la plaque n'est pas très étendue et le délaminage très petit en extension.

Effet de la taille limitée du défaut : limites du modèle 1D

Pour une profondeur réduite x^* ($= e_1/e$) et une résistance réduite R_c^* du défaut données, il est évident qu'il existe un seuil pour le rayon réduit b^* ($= b/e$) du délaminage, en-dessous duquel la température au point central ($r = 0$) de la face avant ou arrière de la plaque cesse d'avoir une évolution similaire à celle du thermogramme unidirectionnel correspondant.

Ce seuil b^* est une fonction croissante du rapport d'anisotropie a_r/a du stratifié. L'étude générale de la variation de ce seuil en fonction des trois paramètres (R_c^* , x^* , a_r/a) sort du cadre de ce travail mais il est possible de rappeler des résultats [8] obtenus pour des stratifiés carbone-

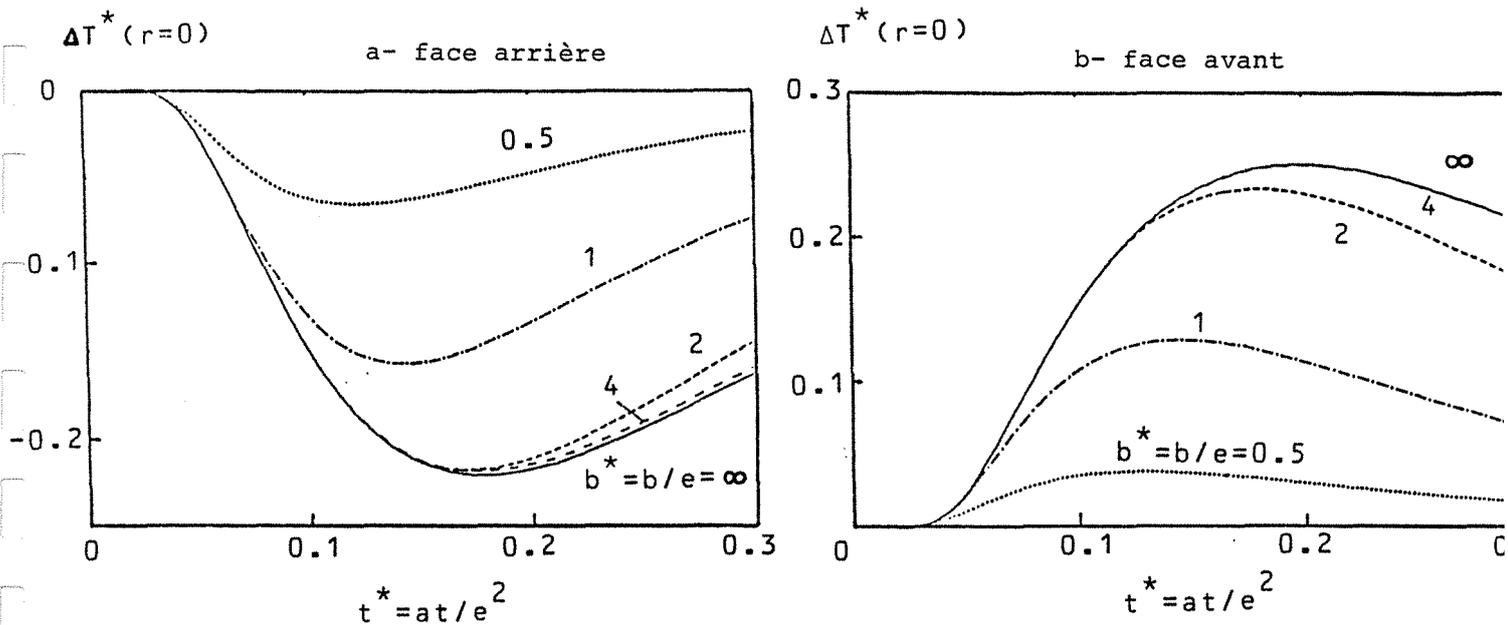


Fig. 7. Thermogrammes de contraste: effet du rayon fini b du défaut
 ($x^* = 0.5$; $R_C^* = 0.4$; $l^* = 1/e = 5$)

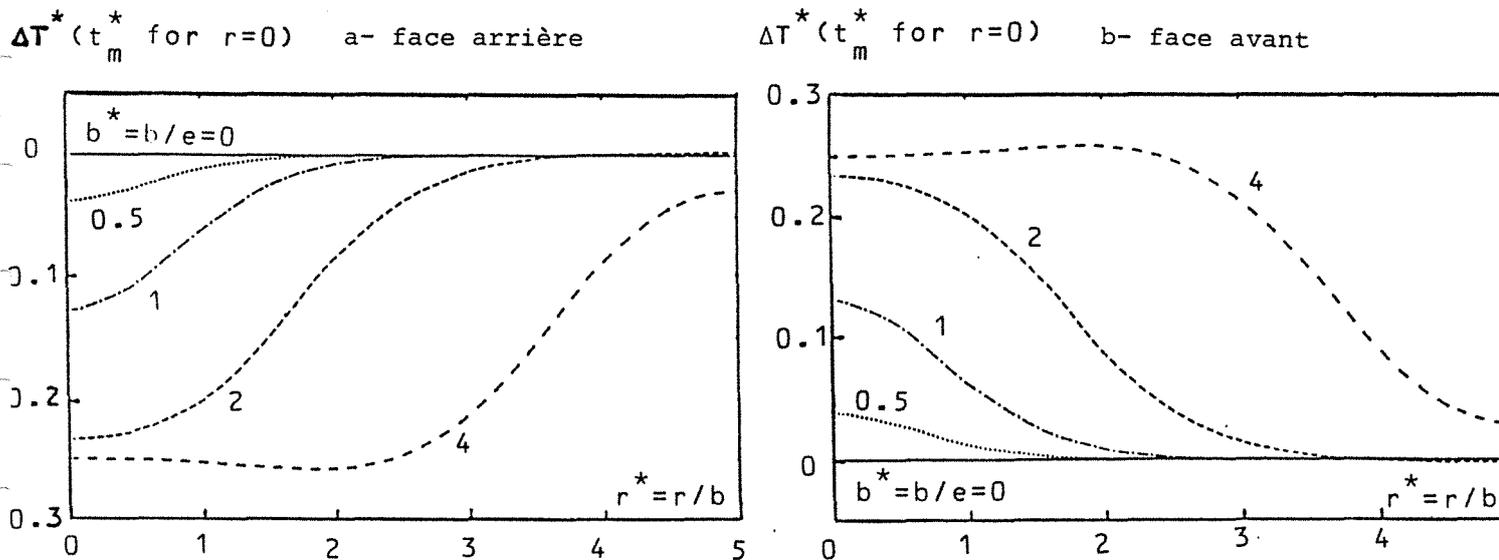


Fig. 8. Profils de contraste: effet du rayon fini b du défaut
 ($x^* = 0.5$; $R_C^* = 0.4$; $l^* = 1/e = 5$)

epoxy dont les propriétés thermophysiques sont données dans la table 3.1 avec un rapport d'anisotropie de 3,5. Les thermogrammes de contraste au niveau du centre d'un délaminage est présenté sur les figures 7a (face arrière) et 7b (face avant) pour différentes valeurs du rayon réduit du délaminage b^* et pour les valeurs suivantes des autres paramètres :

$$R_c^* = 0,40 \quad x^* = 0,5 \quad \varrho^* = 5$$

Une étude systématique des contrastes centraux pour d'autres valeurs de R_c^* et x^* a montré que le seuil pour ce matériau est $b^* = 2$, ce qui signifie que l'évolution temporelle de température de surface au niveau du centre du défaut obéit au modèle 1D dès que le diamètre (2b) du délaminage devient supérieur à quatre fois l'épaisseur e de la plaque.

Identification de la taille du délaminage

L'effet de la taille limitée du délaminage sur le contraste central interdit l'identification des paramètres (R_c^* , x^*) du délaminage à partir du modèle 1D dès que l'on est en-dessous du seuil de diamètre précédent. Par contre, cet effet est positif quant à l'identification de ce même diamètre. Un profil spatial (en r) du contraste peut en effet être tracé à l'instant t_m où le contraste central est maximum et ce, pour différentes valeurs du rayon réduit b^* - voir figure 8a (face arrière) et 8b (face avant). Un critère simple d'estimation consiste à prendre comme diamètre du délaminage (2b) le double du rayon $r_{0,4}$ correspondant à 40 % du contraste central :

$$(2b)_{\text{estimé}} = 2 r_{0,4} \quad (22)$$

avec :

$$\Delta T^*(r_{0,4}, t_m) = 0,4 \Delta T^*(0, t_m)$$

Cette corrélation obtenue par A.S. Lamine [8] et améliorée par S. Didierjean [12], découle de simulations obtenues pour différentes valeurs des paramètres, tant en face avant qu'en face arrière.

3.2.2 - Identification sur un point du thermogramme de contraste

3.2.2.1 - Principe de la méthode

Les courbes de contraste temporel du modèle résistif unidirectionnel présentent un extremum de contraste qui survient pour un nombre de Fourier t_m^* - voir les figures 3a et b. Cet extremum est un maximum en face avant et un minimum algébrique en face arrière. Dans les deux cas on peut appeler ΔT_{\max}^* sa valeur absolue.

Afin d'identifier les deux paramètres à l'aide du modèle de contraste obéissant à l'équation (9), il est possible d'utiliser les coordonnées du point extremum $(t_m^*, \Delta T_{\max}^*)$ de la courbe expérimentale de contraste car on a :

$$t_m^* = t_m^*(R_c^*, x^*) \quad (23)$$

et :

$$\Delta T_{\max}^* = \Delta T_{\max}^*(R_c^*, x^*) \quad (24)$$

On ne dispose pas de solution analytique en (R_c^*, x^*) de ces deux équations, mais il est par contre possible de calculer les deux coordonnées du point extremum pour différentes valeurs des paramètres R_c^* et x^* en utilisant le modèle 1D. Un abaque a été ainsi construit par A.S. Lamine [8] en face avant - figure 9a - et en face arrière - figure 9b. Ces abaques sont formés par les courbes iso-résistance et iso-profondeur dans le plan $(t_m^*, \Delta T_{\max}^*)$.

L'identification des paramètres du délaminage s'effectue alors de la manière suivante (en face arrière) :

- la variation temporelle de la température de surface est enregistrée au niveau du défaut - $T(t)$ - et en dehors de celui-ci - $T_0(t)$ - après une excitation thermique impulsionnelle.
- la valeur expérimentale $T_{0\max}$ est alors extraite de la courbe T_0 et le contraste dimensionnel $\Delta T (= T - T_0)$ est alors construit par soustraction des deux thermogrammes. Le maximum de cette courbe $(t_m^*, \Delta T_{\max}^*)$ permet de calculer :

$$t_m^* = at_m/e^2 \quad (25)$$

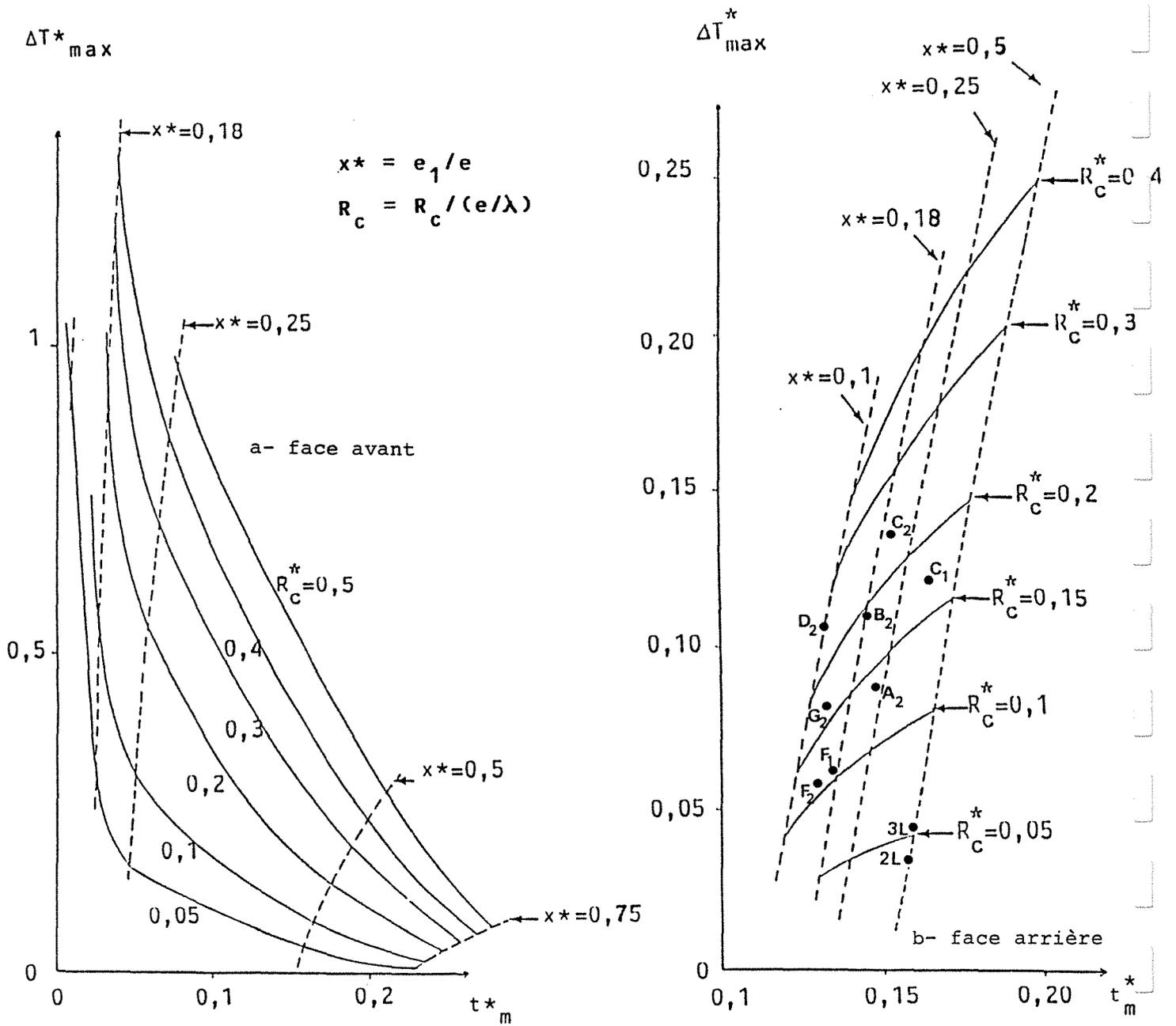


Fig. 9. Abaque d'identification sur un point

$$\Delta T_{\max}^* = \Delta T_{\max} / T_{\max} \quad (26)$$

- ces deux valeurs permettent ensuite d'entrer dans l'abaque de la figure 9 et d'y placer le point expérimental à l'intersection de deux courbes iso-valeurs qui identifient donc les paramètres (R_c^* , x^*) du délaminage.

Notons qu'en face arrière le contraste reste inchangé si l'on change x^* en $(1 - x^*)$ - voir l'équation (11) - ce qui signifie que l'identification en face arrière ne permet pas de faire un choix entre deux positions du délaminage symétriques par rapport au plan médian de la plaque.

3.2.2.2 - Application de la méthode

Des mesures de contraste ont été effectuées par excitation flash et thermographie infrarouge en face arrière - voir A.S. Houlbert [14] - sur des échantillons carrés de 6 x 6 cm en carbone-epoxy ayant une épaisseur de 2 mm. Chaque échantillon contenait un insert carré, centré sur la plaque, formé par deux épaisseurs d'un film de 25 microns de téflon, et situé dans le plan de symétrie ($x^* = 0,5$). Ces films simulent un délaminage d'environ 3 microns d'air - voir la table 3.1 - car on ne peut réaliser des délaminages d'air calibrés en épaisseur d'air en pratique. Les côtés de ces inserts ont les longueurs suivantes :

- 4 mm pour les échantillons A et F
- 10 mm pour les échantillons B et C
- 30 mm pour les échantillons D et G

Les points expérimentaux correspondants ont été placés dans l'abaque de la figure 9b. Certains échantillons ont été testés par deux expérimentateurs différents (notés 1 et 2 en indice de l'échantillon). Notons que chaque point représente la moyenne de plusieurs expériences qui se sont avérées être très reproductibles. La valeur nominale de R_c^* , donnée par le modèle capacitif sans surépaisseur, est de 0,04 avec une valeur de 0,065 pour R_d^* . Les points nominaux correspondants ont été également placés dans l'abaque grâce au calcul du couple (t_m^* , ΔT_{\max}^*) pour les modèles purement résistif - équation (11) et point 2L - et capacitif - équation (19) et point 3L.

Les profondeurs identifiées sont très dispersées : x^* ou $(1 - x^*)$ sont dans la gamme 0,1 - 0,36 (au lieu de 0,5) ; ceci est dû à la faible sensibilité de t_m^* à la profondeur x^* . Le choix d'un nombre de Fourier de demi-montée du contraste, déterminable avec plus de précision que l'abscisse t_m^* de son maximum, conduirait vraisemblablement à une meilleure identification de x^* (et ce, dans le cas $x^* \neq 0,5$: voir la section 3.3.1 plus loin).

Les résistances R_c^* s'échelonnent entre 2,5 et 6 fois la valeur nominale ; ceci peut être expliqué par :

- un transfert bi-dimensionnel dû aux extensions trop limitées de l'échantillon et de certains défauts : si le défaut est étendu (côté de 30 mm), le point de référence correspondant à la courbe $T_o(t)$ est trop proche à la fois du défaut et du bord de l'échantillon et se trouve donc soumis à un transfert transverse dans le plan des plis ; si le défaut est trop peu étendu (côté de 4 mm avec $2b^* = 2$), c'est le thermogramme $T(t)$ au niveau du défaut qui est affecté par un transfert 2D (voir section 3.2.1.6).
- une absorption de chaleur non uniforme lors de l'excitation de la face avant : si par exemple moins de chaleur est absorbée au niveau du défaut qu'à l'extérieur, le contraste augmente en valeur absolue et il en est de même de la résistance identifiée.
- la présence éventuelle d'une couche d'air emprisonnée entre le téflon et le composite ou entre les deux films de téflon : une épaisseur de quelques microns d'air peut justifier l'augmentation de résistance constatée lors de l'identification (ce type de délaminage parasite a été constaté par Balageas et al. [17] lors d'essais sur des échantillons avec inserts similaires). Ce phénomène peut provenir d'une mauvaise adhérence entre les deux couches de composite de part et d'autre des films de téflon et ce, dans le plan de ceux-ci du fait de la faible valeur du rapport b/λ .

Remarquons qu'ici les effets capacitifs ont une influence marginale sur les valeurs identifiées ; en effet, si on trace sur les mêmes axes de la figure 10 :

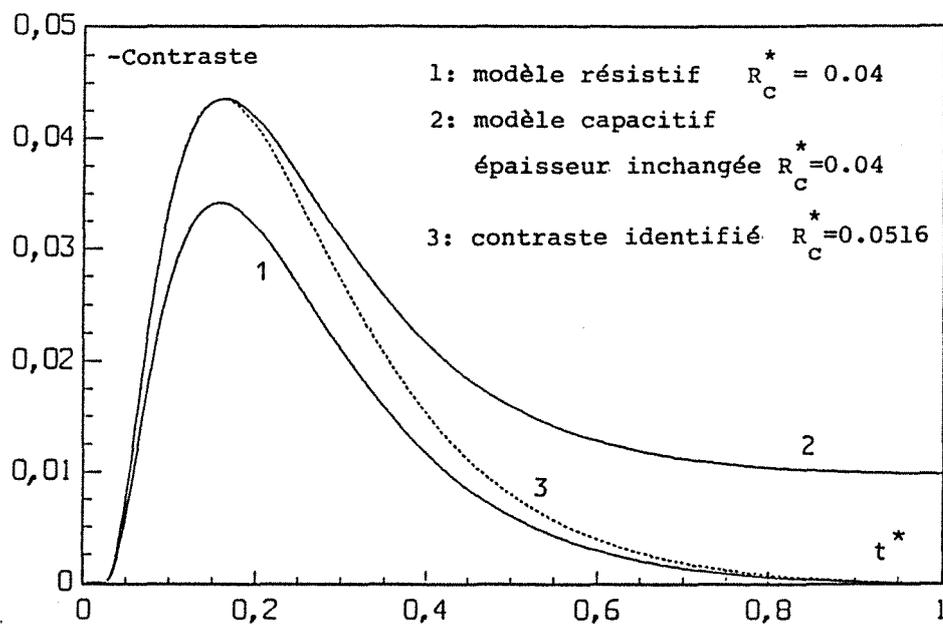


Fig. 10. Utilisation du modèle purement résistif en identification à partir du contraste ΔT^* produit par un défaut capacitif sans augmentation d'épaisseur

- le contraste d'un défaut purement résistif ($R_c^* = 0,04$ et $x^* = 0,5$) correspondant à la **courbe 1**
- le contraste du modèle capacitif sans surépaisseur correspondant à 50 microns de téflon (mêmes R_c^* et x^*) correspondant à la **courbe 2**
- le contraste d'un défaut purement résistif ayant le même maximum ΔT_{\max}^* que la **courbe 2** - voir **courbe 3**

on constate que la **courbe 3** est obtenue pour une valeur R_c^* de 0,0516 représentant une augmentation de 29 % par rapport à la valeur nominale correspondante.

Cette méthode d'identification basée sur un point peut donc seulement fournir une estimation de l'ordre de grandeur de la résistance du délaminage, la dispersion dans les valeurs de la profondeur ne permettant pas l'identification de ce paramètre en mesure face arrière.

3.3 - IDENTIFICATION DE LAPLACE INDEPENDANTE DES VALEURS NOMINALES

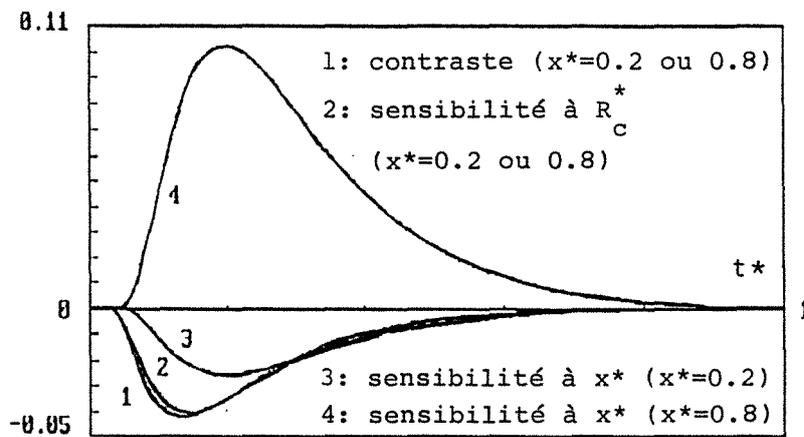
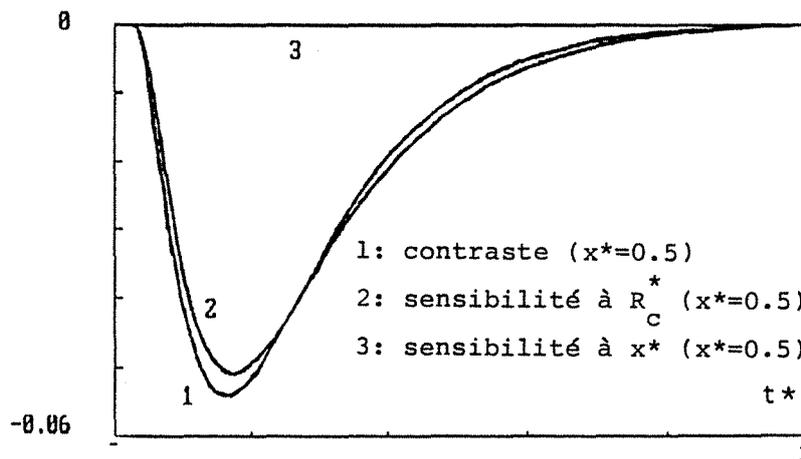
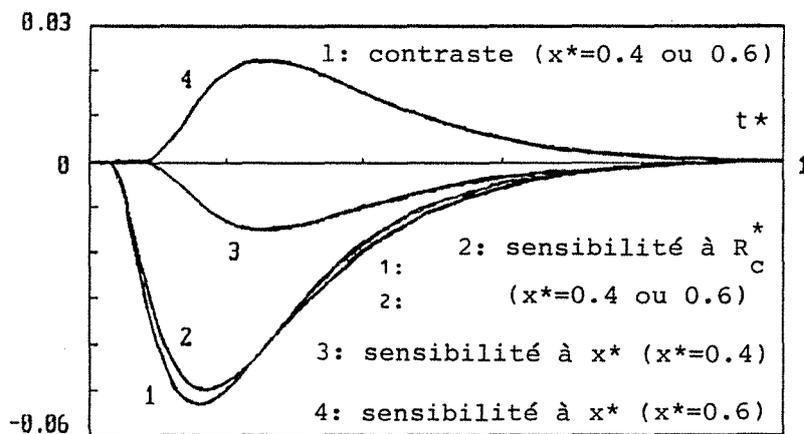
3.3.1 - Analyse de la sensibilité

L'analyse de la sensibilité du contraste aux deux paramètres du délaminage 1D peut permettre une meilleure identification de ceux-ci. Les deux coefficients de sensibilité sont définis à partir ^{de la dérivation} du contraste donné par l'équation (9), par rapport à ces paramètres :

$$X_R(t^*, R_c^*, x^*) = \left. \frac{\partial \Delta T^*}{\partial R_c^*} \right|_{t^*, x^*} \quad (27)$$

$$X_x(t^*, R_c^*, x^*) = \left. \frac{\partial \Delta T^*}{\partial x^*} \right|_{t^*, x^*} \quad (28)$$

Le calcul de ces coefficients de sensibilité s'effectue de manière similaire à celui présenté en section 2.3.1. Les transformées de Laplace réduites de X_R et de X_x sont données dans l'Annexe A3.3 à partir de la dérivation des équations (10) et (11). Les coefficients de sensibilité réduits $s_R (= R_c^* X_R)$ et $s_x (= x^* X_x)$ ainsi que le contraste ΔT^* , sont tracés en fonction du nombre de Fourier t^* , sur les **figures 11a à c** en face arrière et

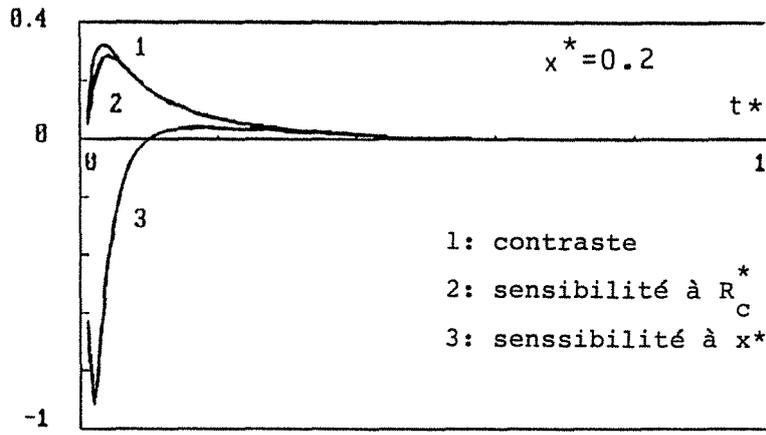
a- $x^* = 0.2$ ou 0.8 b- $x^* = 0.5$ c- $x^* = 0.4$ ou 0.6 Fig. 11. Contrastes et sensibilités s_R et s_x en face arrière ($R_C^* = 0.065$)

sur les figures 12a à c en face avant, pour différentes valeurs de la profondeur réduite x^* , la résistance de contact réduite restant constante et égale 0,065 (environ 5 microns d'air dans une plaque de 2 mm d'épaisseur de carbone-époxy). Afin d'avoir une vue synthétique du problème de l'identification, les extrema des trois fonctions ΔT^* , s_R et s_x ont été extraits des figures précédentes et tracés en fonction de x^* sur les figures 13a (face arrière) et 13b (face avant).

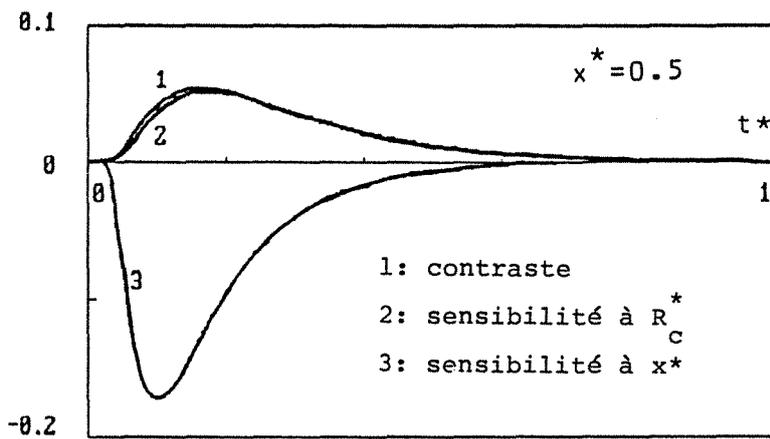
Les points suivants méritent d'être soulignés :

en face arrière

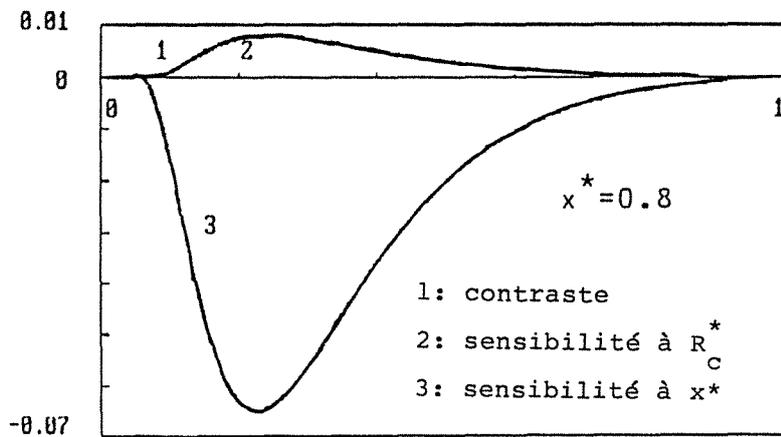
- les contrastes sont négatifs et leurs amplitudes maximales sont suffisamment élevées pour être mesurées (environ 5 % de l'élévation adiabatique de température de l'échantillon sain dans ce cas).
- les courbes de contraste ΔT^* et de sensibilité réduite à la résistance s_R sont très proches l'une de l'autre : ceci est dû au fait que ΔT^* est une fonction presque linéaire (et proportionnelle) du paramètre R_C^* ; si le deuxième terme du dénominateur du contraste arrière de Laplace $\Delta\theta^{**}$ est négligé devant $\text{sh}(\alpha)$ dans l'équation (11), s_R devient indépendant de R_C^* et $\Delta\theta^{**}$ et $\mathcal{L}^*[s_R]$ deviennent égaux. C'est le cas pour les délaminages de faible résistance R_C^* ou situés à de faibles profondeurs dans la plaque (x^* voisin de 0 ou de 1).
- la sensibilité à la profondeur s_x varie de façon importante avec x^* : sa valeur extrême (maximum ou minimum) croît de façon monotone avec x^* , passant d'une valeur négative faible en valeur absolue au voisinage de la face avant ($x^* = 0,2$) à des valeurs positives élevées à proximité de la face arrière ($x^* = 0,8$). Cette sensibilité s'annule complètement pour un défaut médian ($x^* = 0,5$) ; ceci explique les résultats décevants obtenus plus haut, pour l'identification sur un point de x^* qui avait justement cette valeur nominale.
- lorsque x^* est différent de 0,5, les extrema de s_x apparaissent pour des temps plus longs que ceux de s_R , ce qui signifie que l'identification simultanée de x^* et de R_C^* est théoriquement possible dans ce cas (indépendance linéaire des sensibilités).



a- $x^* = 0.2$



b- $x^* = 0.5$



c- $x^* = 0.8$

Fig. 12. Contrastes et sensibilités s_R et s_x en face avant ($R_C^* = 0.065$)

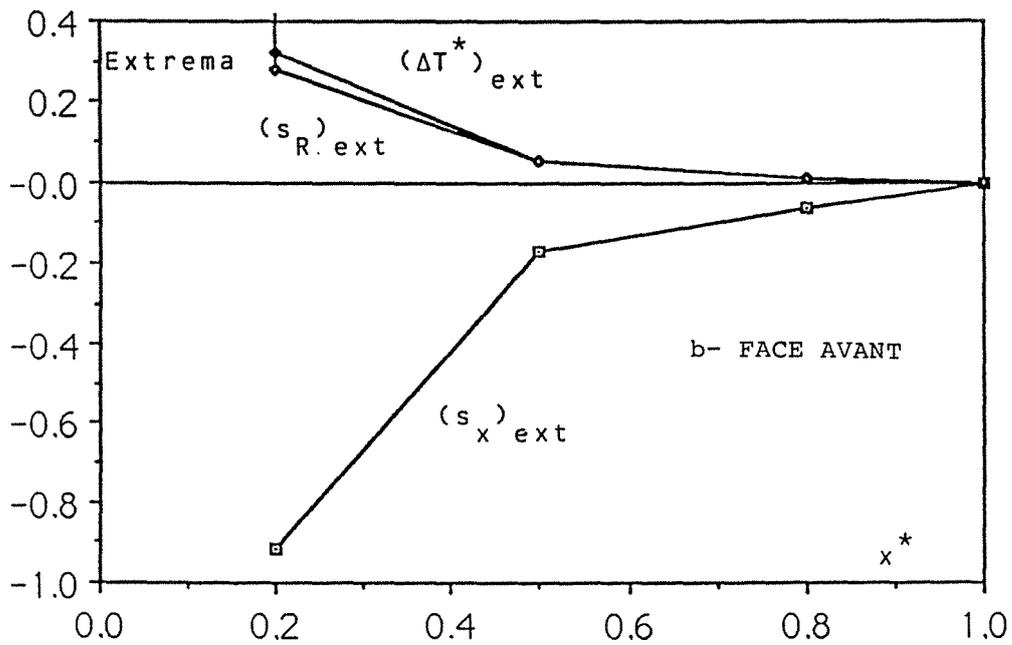
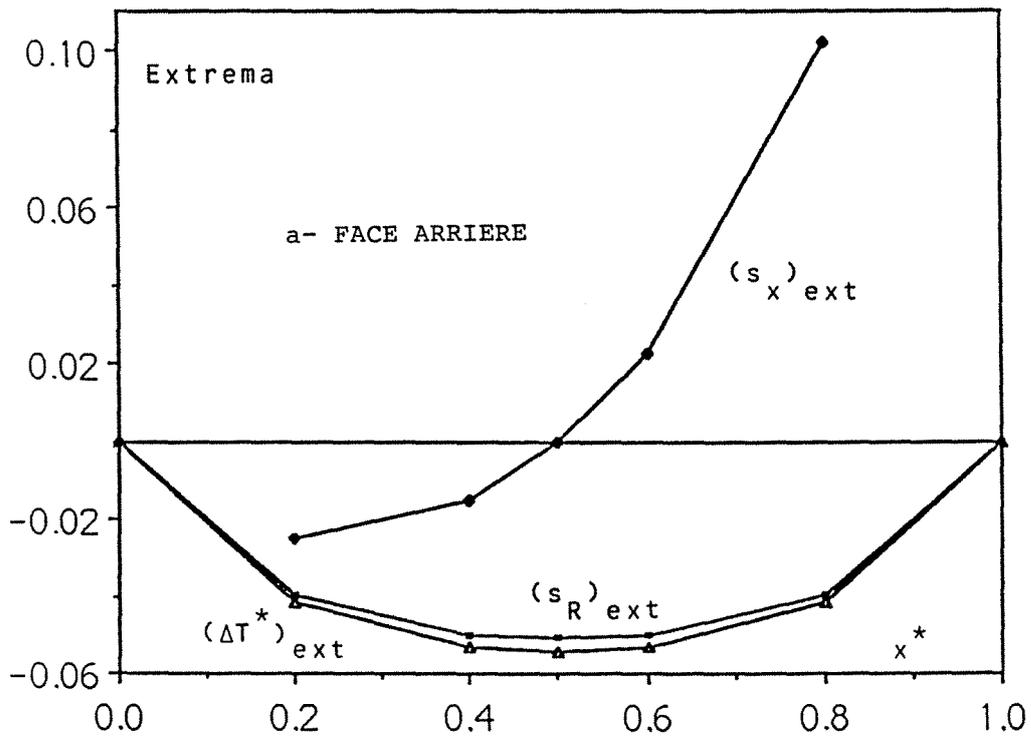


Fig. 13. Variation des extréma de contraste et de sensibilités avec la profondeur réduite ($R_c^* = 0.065$)

en face avant

- les contrastes sont positifs mais leurs maxima diminuent rapidement avec l'accroissement de profondeur du délaminage (on passe ainsi de plus de 30 % de l'élévation de température adiabatique pour $x^* = 0,2$ à moins de 1 % pour $x^* = 0,8$). Le contraste étant faible pour les défauts profonds, l'identification de R_c^* semble difficile pour ceux-ci.
- la sensibilité réduite à la résistance est pratiquement égale au contraste pour les mêmes raisons qu'en face arrière.
- la sensibilité réduite à la profondeur s_{x^*} , qui est négative, a des valeurs extrêmement élevées (- 0,9 pour $x^* = 0,2$), pour des défauts peu profonds, qui diminuent ensuite en amplitude pour des défauts plus profonds. On peut également remarquer que, pour des défauts situés dans la deuxième moitié de la plaque ($x^* > 0,5$), les extrema de s_R et s_x sont presque simultanés, ce qui signifie des effets corrélés des deux paramètres sur le contraste, rendant l'identification de ceux-ci très difficile.

En conclusion de cette étude de sensibilité, on peut constater que :

- la détection des délaminages et l'identification de leur résistance thermique est plus sûre en face arrière (valeur pratiquement constante des niveaux extrêmes du contraste et de la sensibilité à la résistance, pour une valeur constante de cette dernière).
- l'identification de la profondeur des délaminages est plus aisée en face avant et ce, particulièrement pour des défauts situés au voisinage de la face avant.

3.3.2 - Principe de l'identification de Laplace indépendante des valeurs nominales

La méthode utilisée plus haut pour identifier les paramètres du délaminage est basée sur un seul point de la courbe de contraste, ce qui signifie qu'elle est limitée par l'erreur de mesure liée à ce point. Puisque le contraste s'écrit analytiquement en fonction des paramètres dans l'espace de Laplace, il est intéressant d'examiner si une identification est possible dans cet espace. L'avantage manifeste d'une telle identification est de

remplacer un contraste bruité par sa transformée qui intègre et donc lisse ce bruit de mesure - cf. section 2.3.6.3.

La première méthode qui serait ici applicable est celle déjà utilisée en 2.3.6 : les contrastes expérimentaux de Laplace peuvent être calculés par intégration numérique pour deux valeurs p_1^* et p_2^* de la variable réduite de Laplace et l'écriture de l'équation (10) - face avant - ou (11) - face arrière - pour ces deux valeurs, conduit à la résolution numérique d'un système de deux équations à deux inconnues R_c^* et x^* .

Cette méthode bute sur deux points qui ont été mis en évidence par l'étude de la sensibilité :

- la sensibilité à la profondeur est nulle en face arrière pour un défaut médian
- les sensibilités à la résistance et à la profondeur sont liées en face arrière pour un délaminage situé dans la deuxième moitié de la plaque.

Le contrôle non destructif se différencie ici de l'identification des propriétés thermiques des dépôts car on ne dispose d'aucune valeur nominale des paramètres (on ignore même a priori s'il y a un délaminage dans la plaque testée). Ceci rend cette première méthode peu intéressante en pratique, devant le risque d'une éventuelle corrélation des sensibilités - voir les travaux du LEMTA sur cette méthode [12, 20, 21].

Une deuxième méthode d'identification dans l'espace de Laplace peut être envisagée, à condition de ne rechercher que l'identification d'un seul paramètre pour chacune des deux techniques (face avant ou arrière) en éliminant l'influence du paramètre le moins sensible : x^* en face arrière et R_c^* en face avant.

en face arrière

L'équation (11) est écrite pour deux valeurs p_1^* et p_2^* ($= 4 p_1^*$) de la variable réduite de Laplace. Le paramètre x^* peut alors être éliminé analytiquement de ces deux équations en utilisant les propriétés de duplication de la fonction cosinus hyperbolique - voir l'Annexe 3.4. Si l'on confond

ensuite les deux transformées expérimentales m_1 et m_2 avec leurs équivalents théoriques $\Delta\theta^{**}$, une expression analytique exacte de la résistance réduite de contact, en fonction de m_1 et m_2 est disponible :

$$R_c^* = \frac{m_1^2 [1 + \alpha_2 \operatorname{sh}(\alpha_2) m_2] \operatorname{sh}(\alpha_1) \operatorname{th}(\alpha_1)}{[1 + m_1 \alpha_1 \operatorname{sh}(\alpha_1)] [-m_1 + m_2 \operatorname{ch}(\alpha_1) - 3m_1 m_2 \alpha_1 \operatorname{sh}(\alpha_2)/2]} \quad (29)$$

avec :

$$\alpha_i = (p_i^*)^{1/2} \quad \text{et} \quad m_i \approx \Delta\theta^{**}(p_i^*, R_c^*, x^*)$$

pour :

$$i = 1 \text{ ou } 2$$

Il est donc possible d'éliminer entièrement l'influence de la profondeur x^* sur l'identification de R_c^* .

en face avant

Une démarche similaire, basée sur l'écriture de l'équation (10) en deux valeurs p_1^* et p_2^* ($= 4 p_1^*$), conduit à l'élimination analytique du paramètre R_c^* en face avant - voir l'Annexe 3.5. Si m_1 et m_2 sont les transformées expérimentales du contraste, la profondeur réduite x^* est solution de l'équation suivante :

$$\alpha_1 \operatorname{sh}(\alpha_2) \operatorname{sh}(\alpha_1 x^*) \{ 4 \operatorname{ch}(\alpha_1 x^*) \operatorname{ch}[\alpha_1 (1 - x^*)] - \operatorname{ch}(\alpha_1) \} + 2 \operatorname{sh}[\alpha_1 (1 - x^*)] \left\{ \frac{1}{m_1} \operatorname{ch}^2(\alpha_1) - \frac{1}{m_2} \operatorname{ch}^2[\alpha_1 (1 - x^*)] \right\} = 0 \quad (30)$$

avec :

$$\alpha_i = (p_i^*)^{1/2} \quad \text{et} \quad m_i \approx \Delta\theta_f^{**}(p_i^*, R_c^*, x^*)$$

pour :

$$i = 1 \text{ ou } 2$$

Une solution approchée, correspondant aux faibles résistances R_c^* ou aux délaminages voisins d'une des deux faces de la plaque, est disponible :

$$x^* = 1 - \frac{1}{\alpha_1} \ln \left\{ \left(\frac{m_2}{m_1} \right)^{1/2} \operatorname{ch}(\alpha_1) + \left[\frac{m_2}{m_1} \operatorname{ch}^2(\alpha_1) - 1 \right]^{1/2} \right\} \quad (31)$$

3.3.3 - Application à des thermogrammes bidimensionnels simulés

Puisque l'identification de la résistance de contact du délaminage est directe dans l'espace de Laplace dans le cas du modèle unidimensionnel - équation (29), il est possible de se demander ce que peut donner cette équation d'inversion (29) appliquée à chaque point de la face arrière d'un échantillon contenant un défaut d'extension limitée. Cette expérience peut être simulée en utilisant le modèle bidimensionnel présenté en 3.2.1.6.

Le cas étudié par S. Didierjean [12] correspond aux valeurs suivantes des paramètres (excitation impulsionnelle d'énergie $Q = 20.000 \text{ J/m}^2$) :

- matériau - carbone-epoxy T 300-914

$$a_z = 0,49 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s} \quad \lambda_z = 0,67 \text{ W/m}^\circ\text{K}$$

$$\rho c = 1,37 \cdot 10^6 \text{ J/m}^3\text{K} \quad \lambda_r = 2,40 \text{ W/m}^\circ\text{K}$$

$$\text{épaisseur } e = 4,06 \text{ mm}$$

- défaut : couche d'air cylindrique d'environ 5 microns d'épaisseur

$$R_c = 2 \times 10^{-4} \text{ }^\circ\text{C/m}^2/\text{W} \quad e_1 = 3,045 \text{ mm}$$

$$\text{rayon : } b = 5 \text{ mm}$$

Les paramètres réduits ont donc les valeurs suivantes :

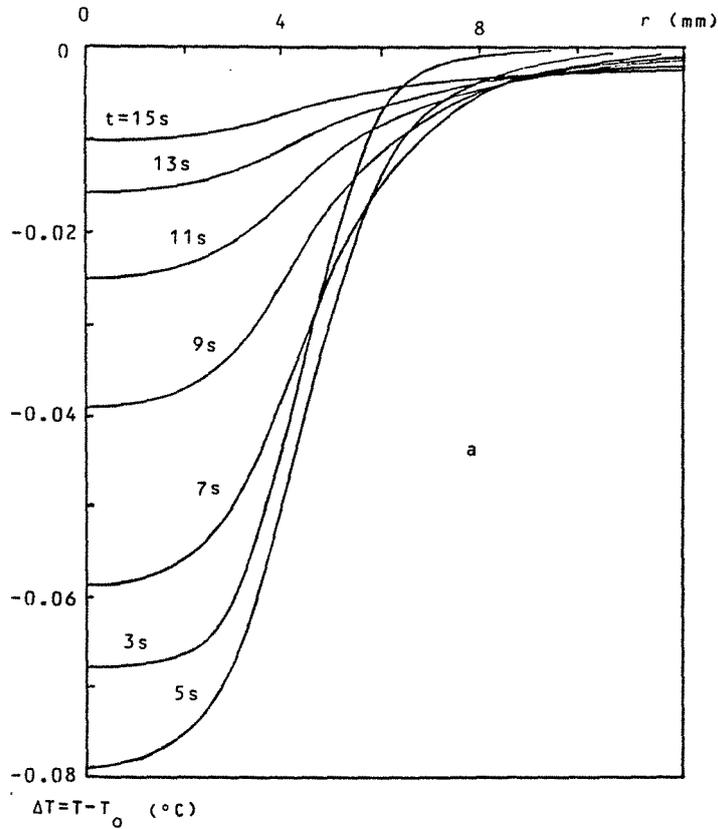
$$R_c^* = R_c \lambda_z / e = 0,033 \quad x^* = 0,75$$

$$b_* = b/e = 1,23$$

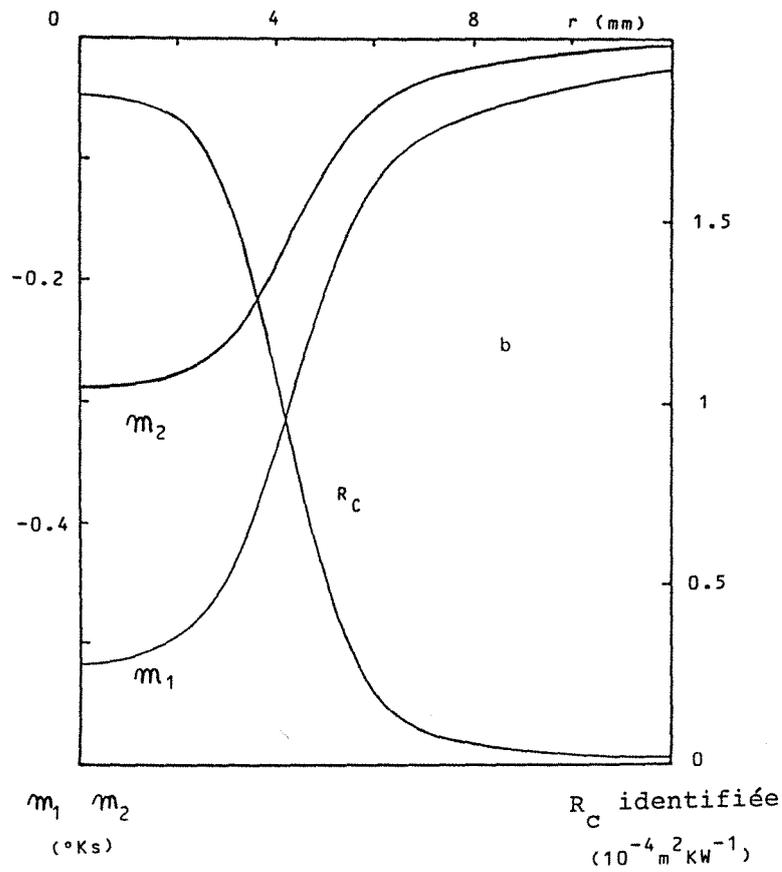
Les deux transformées utilisées pour l'identification correspondent aux valeurs suivantes des variables réduites de Laplace :

$$p_1^* = e^2 p_1 / a_z = 1 \quad \text{et} \quad p_2^* = 4$$

Les profils de contraste absolu ΔT sont tracés pour différents instants sur la figure 14a. Les transformées de Laplace correspondantes m_1 et m_2 (non



a- profils de contraste à différents instants



b- transformées de Laplace et profil de résistance identifiée

Fig. 14. Utilisation du modèle purement résistif en identification à partir thermogrammes calculés par le modèle bi-dimensionnel face arrière

réduites) ont été calculées en fonction du rayon r et sont tracées sur la **figure 14b**. Ces intégrales ont été calculées par la méthode des trapèzes avec un pas temporel de 2 secondes jusqu'à un temps de 24 secondes correspondant à un nombre de Fourier égal à l'unité.

Dans ce cas très défavorable ($2 b/e \approx 2,5$, très inférieur au seuil au-dessus duquel le contraste central peut être considéré comme unidimensionnel), la valeur de R_c identifiée au centre du défaut n'est inférieure que de 8 % à la valeur vraie qui a servi d'entrée au modèle bidimensionnel. Par contre si l'on s'éloigne du centre, les effets bidimensionnels deviennent très importants et la valeur identifiée de R_c au niveau du bord du défaut ($r = 5$ mm) ne vaut plus que 26 % de la valeur vraie. Notons cependant que le profil identifié de la résistance de contact R_c (**figure 14b**) est plus "carré" que les profils de contraste absolu de la **figure 14a**, c'est-à-dire plus proche de la forme du vrai profil de R_c qui est une fonction "porte" : ceci peut être très intéressant pour l'identification de la taille du défaut (rayon b) où le critère des 40 % du maximum de contraste - équation (22) - pourrait être changé en un critère de 25 ou 30 % du maximum de la résistance de contact identifiée.

Des essais similaires correspondant à d'autres valeurs des paramètres (R_c^* , x^* , b^*), présentés en [21], ont montré que les résistances centrales, issues de l'identification unidirectionnelle de Laplace, sont proches de leurs valeurs vraies, dans les cas où le rayon réduit du défaut b^* est suffisamment grand. Par contre des défauts peu étendus ne peuvent être identifiés par cette technique (résistances identifiées R_c trop faibles).

3.4 - APPLICATION DE LA METHODE DES DEUX TRANSFORMEES A L'IMAGERIE EN RESISTANCE

3.4.1 - Définition d'un contraste expérimental local

Le contraste thermique a été défini par l'équation (9) qui s'écrit de la façon suivante en face arrière :

$$\Delta T^* = T/T_{\text{omax}} - T_o/T_{\text{omax}}$$

Celui-ci ne peut être calculé par inversion de Laplace de l'expression (11) que pour des conditions expérimentales idéales, c'est-à-dire :

a - deux expériences flash faites l'une sur la plaque saine - $T_0(t)$ - et l'autre sur la plaque défectueuse - $T(t)$.

et pour des conditions garantissant un transfert de chaleur unidirectionnel :

b - température initiale uniforme

c - absorption uniforme de l'énergie surfacique Q en face avant

d - extension radiale infinie de la plaque ($l \rightarrow \infty$)

e - extension radiale infinie du défaut ($b \rightarrow \infty$)

f - absence de pertes de chaleur

g - défaut purement résistif ne produisant aucun changement d'épaisseur de la plaque ou des deux couches de matériau composite l'entourant

h - une mesure directe du champ de température superficiel de la plaque.

En pratique, la condition a ne peut être que rarement remplie du fait de l'indisponibilité d'une plaque saine de référence ou du fait de la lourdeur du traitement de données issues de deux expériences différentes.

En fait, une seule expérience peut être pratiquée sur la plaque à contrôler. Celle-ci produit alors le champ de température transitoire $T(P,t)$ où $P(x,y,z)$ est un point situé sur la face arrière de la plaque ($z = e$), x et y étant deux directions orthogonales de ce plan.

Le thermogramme de référence $T_0(t)$ est saisi durant la même expérience en un point P_0 considéré comme sain, c'est-à-dire correspondant à une zone uniformément froide sur la face arrière à un instant donné.

Les effets bidimensionnels peuvent provenir d'une température initiale non parfaitement uniforme dans la plaque - point b. Il est alors aisé de minimiser cet effet en travaillant à partir des augmentations de température aux points P et P_0 (T et T_0) calculées à partir de la différence entre leurs valeurs courantes absolues au temps t et leurs valeurs initiales - dans le but d'avoir $T = 0$ en tout point de la plaque avant excitation.

La condition c ne peut pas être respectée en pratique car il est très difficile de générer une excitation photothermique de type impulsional uniformément sur une surface étendue : la partie absorbée de celle-ci, Q , est donc non uniforme sur la face avant. Une répartition non uniforme du coefficient d'absorption dans la bande d'excitation sur la face avant donne naissance exactement au même effet. Une conséquence directe de ceci est que :

- les niveaux maxima T_{\max} et T_{omax} des températures $T(P,t)$ et $T(P_0,t)$ ne sont pas égaux.
- T_{omax} et donc le contraste thermique $\Delta T^*(t)$ dépendent du choix qui a été fait par l'expérimentateur pour le point ou la région P_0 de référence.

Le non respect des conditions d et e a été étudié en 3.2.1.6. Les écarts avec le modèle unidirectionnel sont faibles pour un point situé au centre du défaut sous certaines conditions, ($l/e > 5$ et $b/e > 2$). Par contre ceux-ci ne peuvent plus être négligés pour un point situé au niveau de la limite entre le défaut et le matériau sain ou au bord de la plaque (effets de bord) où T_{\max} sera différent de T_{omax} .

L'effet sur le contraste de pertes thermiques uniformes a été étudié en 3.2.1.4 et le non respect de la condition f s'est avéré sans conséquence importante sur celui-ci. Par contre les pertes thermiques expérimentales sur les deux faces de la plaque peuvent être caractérisées par deux coefficients de transfert de chaleur qui n'ont a priori aucune raison de rester constants sur chaque face et ce, spécialement si la plaque est verticale (couche limite de convection naturelle) et là encore T_{\max} et T_{omax} ne sont plus égaux.

La condition g n'est pas respectée dans les expériences faites sur des plaques tests où les délaminages sont simulés par une ou plusieurs épaisseurs d'un film de téflon qui introduit un effet capacitif qui diminue la valeur de T_{\max} (dans le cas d'une absorption uniforme) et qui rend la valeur limite du contraste différente de zéro aux temps longs (voir la figure 10 pour un cas sans accroissement d'épaisseur).

La condition h sera étudiée dans le paragraphe suivant.

Dans une expérience réelle, tous les phénomènes décrits plus haut se produisent simultanément avec des incidences différentes sur la courbe expérimentale de contraste qui doit être inversée à l'aide du modèle résistif unidirectionnel - équation (11) - afin d'estimer la valeur locale des paramètres.

Afin de s'affranchir de la subjectivité de l'expérimentateur dans le choix de la zone saine de référence et de tenir compte de tous les phénomènes ci-dessus, il est possible de définir un contraste arrière expérimental basé sur une normalisation locale :

$$\Delta T_{loc}^* = T/T_{max} - T_o/T_{omax} = T_{loc}^* - T_o^* \quad (32)$$

Pour le calcul de cette expression, le point de référence P_o doit être choisi loin des "points froids" sur les images thermiques de la face arrière et pas trop près des bords de la plaque. Dans ce cas la courbe T_o^* est une courbe unidirectionnelle universelle, qui ne dépend que du nombre de Biot des pertes (voir chapitre 1). T_{max} est le maximum de la courbe $T(t)$ mesurée au point P.

Si ce point P est éloigné d'un défaut, les fonctions $T_{loc}^*(t^*) = T(t)/T_{max}$ et $T_o^*(t^*)$ sont les mêmes et le contraste ΔT_{loc}^* défini par l'équation (32) est nul et ce, même dans le cas où les énergies Q et Q_o absorbées au niveau des points P et P_o sont différentes.

Si le point P est situé au niveau du centre d'un défaut, il n'y a pas de transfert local radial, par raison de symétrie, et la normalisation de T par T_{max} produit une fonction T_{loc}^* qui est très proche de la fonction du modèle unidirectionnel, qui ne dépend que de t^* , R_c^* et x^* et d'un éventuel nombre de Biot caractérisant les pertes. Ceci n'est évidemment vrai que si le rayon réduit du défaut b^* ($= b/e$) n'est pas trop faible (effets bidirectionnels). Dans ce cas, la différence des deux courbes, ΔT_{loc}^* , correspond pratiquement au contraste unidirectionnel théorique ΔT_{loc}^* défini par l'équation (9) et il est possible de calculer la résistance R_c^* à l'aide de l'expression (29) écrite en ce point.

Un autre effet positif de la normalisation locale dans la construction de la courbe expérimentale de contraste est la prise en compte d'un éventuel effet capacitif de l'inclusion simulant une résistance de contact : sur la **figure 4** présentée précédemment, la courbe 1 correspondant au contraste purement résistif - voir Table 3.1 - est comparée aux courbes de contraste 2 et 3 correspondant à l'effet capacitif dû au téflon (avec ou sans augmentation d'épaisseur) et aux courbes 4 et 5 de contraste normalisé localement (ΔT_{loc}^* avec les mêmes effets capacitifs). Pour ces cinq courbes la sur-résistance réduite R_c^* est la même mais la résistance réduite R_d^* du défaut est plus importante pour les courbes 3 et 5 - voir l'équation (17).

La courbe 4 a été tracée à partir de l'expression suivante du contraste de Laplace avec normalisation locale :

$$\Delta\theta_{loc}^{**} = (1 + K_3) \frac{1}{RC} - \frac{1}{RC_0} \quad (33)$$

les expressions de RC et RC_0 étant données en Annexe 3.1.

De même, pour la courbe 5, l'expression correspondante suivante a été utilisée :

$$\Delta\theta_{loc}^{**} = (1 + K_3 - \delta) \frac{1}{RC} - \frac{1}{RC_0} \quad (34)$$

où cette fois RC et RC_0 sont donnés en Annexe 3.2.

On constate sur la **figure 4** que les fonctions $\Delta T_{loc}^*(t^*)$, c'est-à-dire les courbes 4 et 5, s'annulent aux temps longs et sont donc plus proches du contraste purement résistif de la courbe 1.

Si une expérience unidirectionnelle produit un thermogramme expérimental ΔT_{loc}^* représenté par la courbe 5 (effet capacitif sans augmentation d'épaisseur) et correspondant à la même sur-résistance R_c^* (= 0,04) que la courbe 1 (défaut purement résistif), il est possible d'ajuster la courbe de contraste 6 basée sur le modèle purement résistif, de façon à ce qu'elle ait le même maximum que la courbe 5 (voir la **figure 15**).

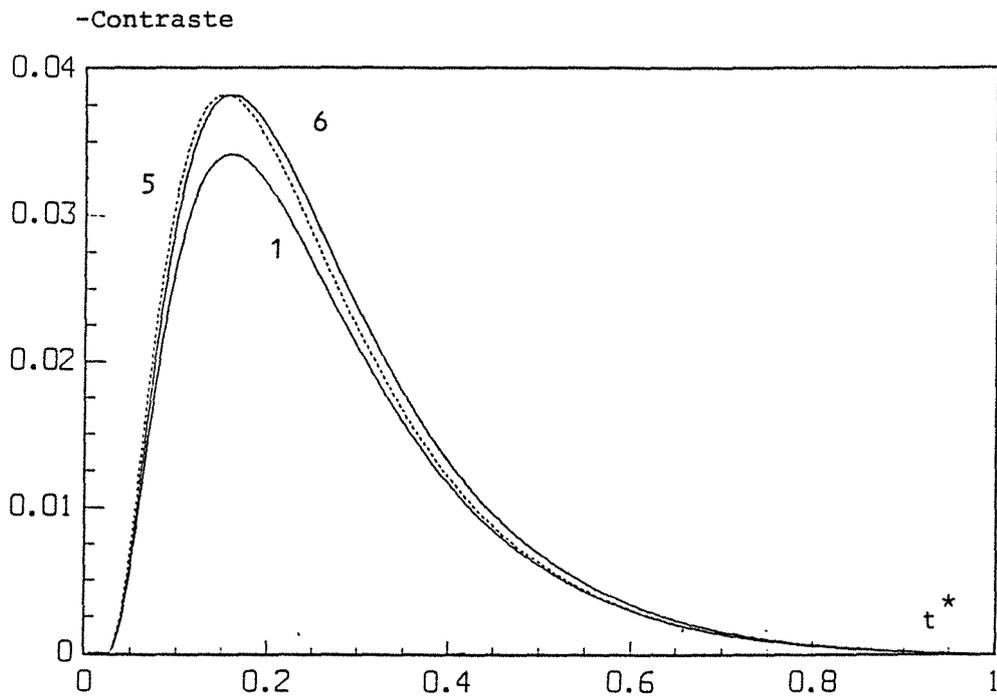


Fig. 15. Identification du profil de résistance de contact à partir du contraste ΔT_{loc}^* produit par un défaut capacitif sans augmentation d'épaisseur ($x^* = 0.5$; $e = 2$ mm)

- 1: ΔT^* - défaut purement résistif - $R_C^* = 0.04$
 5: ΔT_{loc}^* - défaut capacitif - épaisseur inchangée (50 μ m de téflon - $R_C^* = 0.04$
 6: ΔT^* - défaut purement résistif - même niveau du maximum que la courbe 5 - $R_C^* = 0.045$

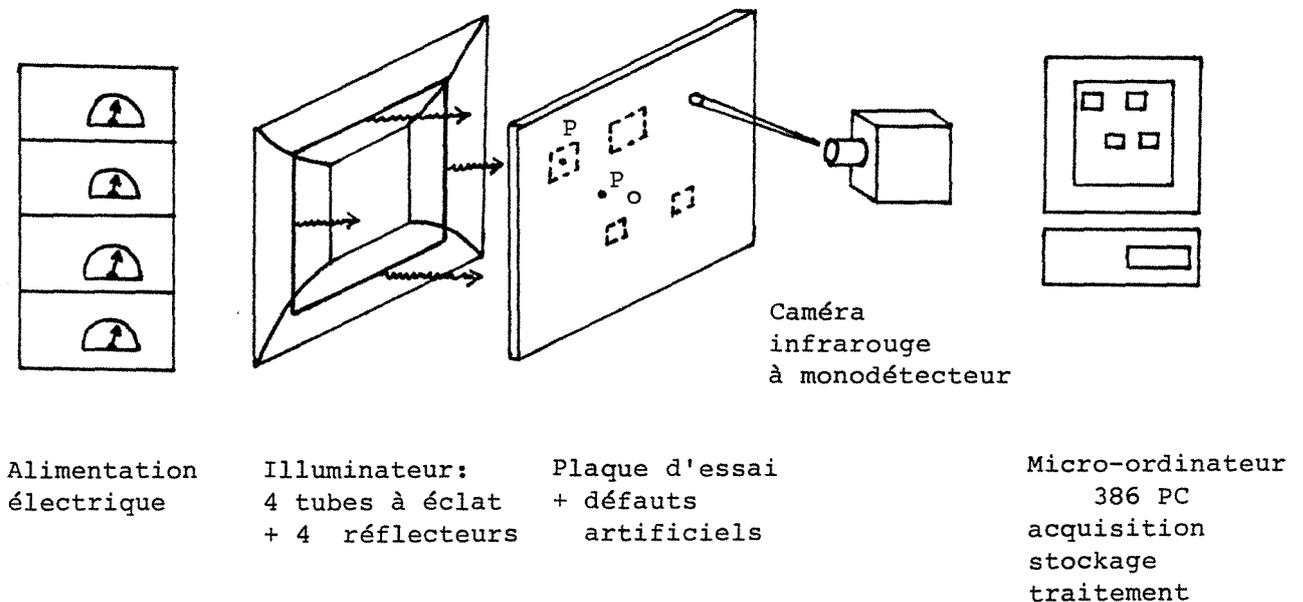


Fig. 16. Montage expérimental

Dans ce cas la résistance identifiée R_C^* correspondant à la courbe 6 (avec $x^* = 0,5$) est de 0,045, c'est-à-dire qu'elle correspond à une augmentation de 12,5 % par rapport à sa valeur réelle. Ce résultat peut être comparé à l'augmentation analogue obtenue en utilisant la définition (9) pour le contraste expérimental dans un cas capacitif (29 % - voir la section 3.2.2.2. et la figure 10).

La normalisation locale permet donc une meilleure identification de R_C^* en utilisant le modèle résistif appliqué à une plaque contenant un défaut capacitif.

3.4.2 - Montage expérimental, plaque d'essai et technique de mesure

Il a été montré dans la section 3.2.2.2 que des expériences flash, pratiquées sur des échantillons carrés de 6 cm de côté contenant des inserts de téflon, produisaient des thermogrammes de contraste qui étaient plus ou moins affectés par les effets de bord dus à l'extension trop faible de la plaque par rapport à celle du défaut (b/l est probablement le bon critère caractérisant les effets de bord).

Afin de s'affranchir de ces effets, il a été décidé de travailler sur une plaque plus étendue pour tester la nouvelle technique d'identification (contraste réduit localement, transformées expérimentales de Laplace et identification de R_C^* indépendante de x^*).

3.4.2.1 - Montage expérimental

L'excitation impulsionnelle est produite par un illuminateur composé de quatre tubes à éclat au xénon qui forment les côtés d'un carré vertical - voir figure 16. Chaque tube flash de 300 mm de long est situé sur la ligne focale d'un réflecteur cylindro-parabolique dont la surface a été rendue non spéculaire afin de réfléchir un rayonnement diffus en direction de la face avant de la plaque à contrôler. Chaque tube est alimenté par un tiroir de puissance qui peut accumuler jusqu'à 4000 joules d'énergie électrique au sein de capacités. Ce système, qui nous a été prêté par la Société Dassault, peut théoriquement produire le dépôt d'une énergie homogène sur

une surface d'environ $0,1 \text{ m}^2$ pour une durée de l'impulsion voisine de 10 ms.

Le champ de température transitoire sur la face arrière de la plaque est enregistré par une caméra infrarouge AGEMA 782 SW. Celle-ci travaille à l'aide d'un monodétecteur photoconductif In Sb, avec balayage^{assuré} par deux prismes rotatifs, refroidi à l'azote liquide, dans la bande 3,5-5,6 microns. Un objectif de 20° est utilisé sans aucun filtre. Le signal potentiométrique entre 0 et 5 volts issu du préamplificateur de la caméra est amené à une carte DATAMIN qui est située dans l'unité centrale d'un micro-ordinateur compatible PC 386. Cette carte amplifie la totalité du signal avec un gain de 10 et le numérise sur 12 bits (échantillonnage à 320 KHz. Les trames infrarouges de 64 lignes de 128 pixels sont stockées en temps réel (25 trames/seconde) dans la mémoire étendue avant leur transfert sur un disque dur pour un traitement ultérieur.

3.4.2.2 - Plaque d'essai

La plaque d'essai, une pièce rectangulaire de 360 x 300 mm et de 2 mm d'épaisseur en composite stratifié carbone-epoxy T300 (mêmes propriétés qu'en section 3.3.3) a été fabriquée par la Société Dassault. Elle contient des inserts circulaires, formés par une, deux ou trois épaisseurs d'un film de téflon de 25 microns, ayant des diamètres différents et situés à des profondeurs différentes dans la plaque. Les caractéristiques de ces défauts artificiels sont données dans l'annexe 3.6. Les défauts de types A et D ont une résistance nominale R_d de $3 \times 10^{-4} \text{ m}^2 \text{Kw}^{-1}$ tandis que ceux de types B et C ont les valeurs respectives suivantes pour R_d : 2 et $1 \times 10^{-4} \text{ m}^2 \text{kw}^{-1}$ (voir **figure 17**).

Cette plaque a été utilisée pour "calibrer" différentes techniques de contrôle non-destructif et son image obtenue par ultrasons est donnée sur la **figure 18**.

3.4.2.3 - Technique de mesure

La tension préamplifiée du détecteur $U(t)$ est proportionnelle au flux photonique incident, donc au flux énergétique \emptyset dans la bande de détection

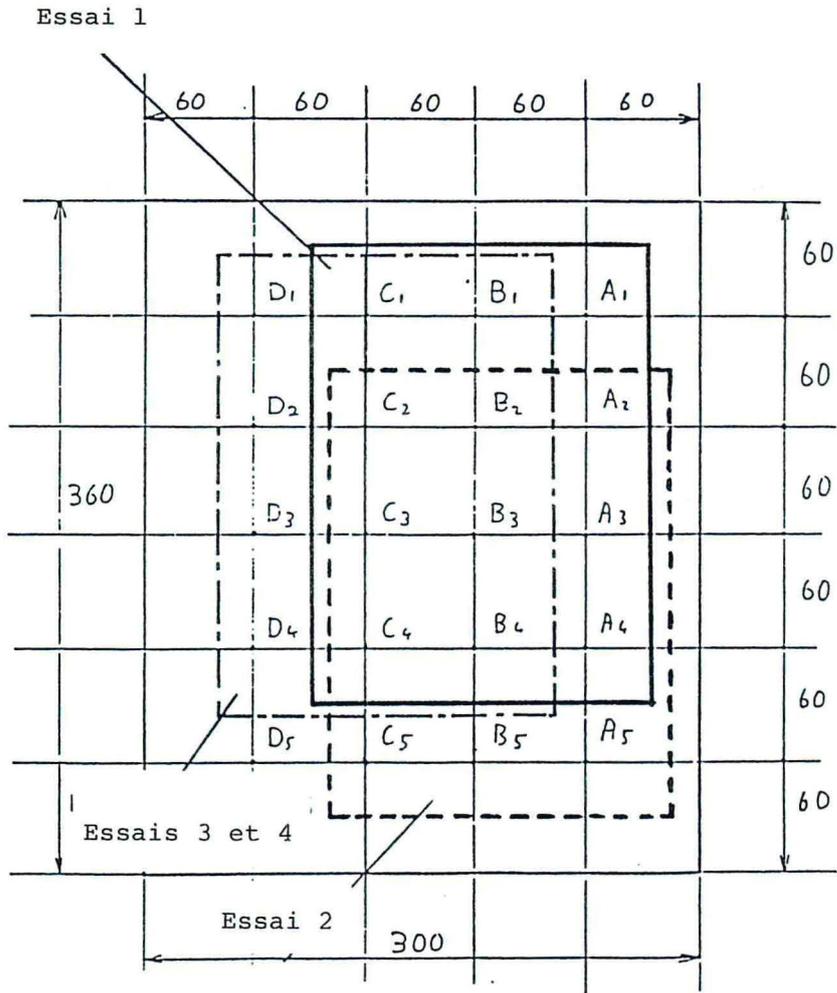


Fig. 17. Position des défauts dans la plaque d'essai et limite des champs enregistrés lors des expériences 1 à 3 (face arrière) et 4 (face avant) - dimensions en mm

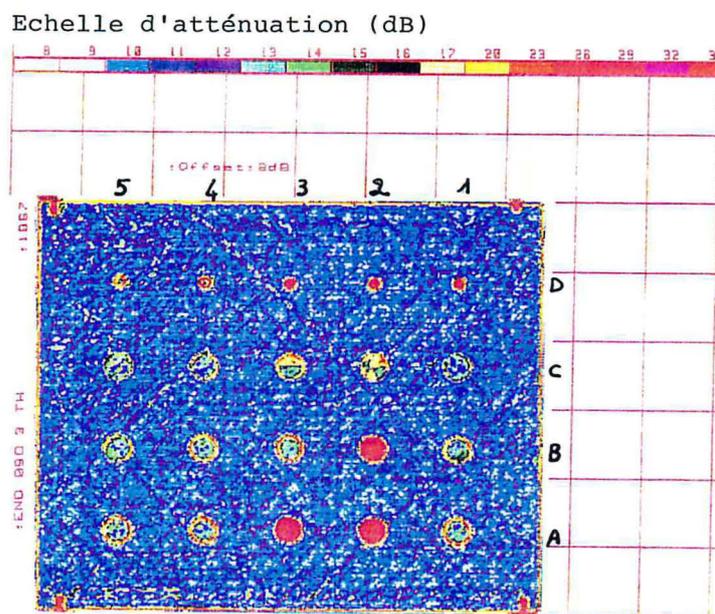


Fig. 18. Image ultrasonore de la plaque d'essai



$\Delta\lambda$ du détecteur à un instant t :

$$U = K \varnothing$$

Si la surface mesurée se comporte comme un corps noir et si l'atmosphère environnante est transparente au rayonnement dans la bande $\Delta\lambda$, le flux de chaleur \varnothing est proportionnel à la luminance du corps noir de la portion de surface à la température T qui est conjuguée optiquement avec le détecteur à l'instant t :

$$\varnothing = K' L_{\Delta\lambda}^{\circ}(T)$$

l'indice supérieur "o" indiquant une propriété de corps noir. La constante K' dépend des aires du détecteur et de la surface mesurée, de facteurs angulaires et de distance ainsi que de l'atténuation causée par les lentilles et par le système de balayage. On peut donc écrire :

$$U^{\circ}(T) = KK' L_{\Delta\lambda}^{\circ}(T)$$

A cause de considérations physiques, la loi de calibration du détecteur et de sa chaîne de mesure est recherchée sous la même forme que celle de la luminance monochromatique du corps noir (loi de Planck) :

$$U^{\circ}(T) = A [\exp(-B/T) - 1]^{-1} \quad (35)$$

La température est ici exprimée en degrés Kelvin et les constantes A et B dépendent de l'objectif utilisé et de l'ouverture du diaphragme.

Dans des conditions expérimentales la surface à mesurer ne constitue pas un corps noir ; cependant les hypothèses suivantes peuvent être faites :

- la surface est opaque et a un comportement de corps gris d'émissivité ϵ dans la bande de détection.
- elle a un comportement diffusif à la fois en émission et en réflexion.

- son émissivité ϵ ne varie pas dans la gamme de température mesurée
- l'environnement radiatif est considéré isotrope (absence de surface chaude), c'est-à-dire qu'on peut l'assimiler à un corps noir à température uniforme T_{env} .

Dans ce cas la tension préamplifiée en sortie du détecteur s'écrit :

$$U(t) = \epsilon U^0(T) + (1 - \epsilon) U^0(T_{env}) \quad (36)$$

La fonction $U^0(T)$ est une fonction non linéaire mais, lors d'une expérience flash, les élévations de température en face arrière sont de l'ordre de quelques degrés Celcius et l'on peut linéariser l'équation (35) au voisinage de la température T_{env} :

$$U^0(T) \approx U^0(T_{env}) + a [T - T_{env}]$$

avec :

$$a = \frac{dU^0}{dT} (T_{env})$$

Pendant une expérience transitoire, seule la température T varie dans l'équation (36), T_{env} restant constante ; en raisonnant en variations par rapport à l'instant initial, on a :

$$\Delta U(t) = \epsilon \Delta U^0(T) = \epsilon a \Delta T \quad (37)$$

Dans les paragraphes précédents, l'augmentation de température due à l'excitation impulsionnelle a été appelée T ; si l'on revient à cette notation et si U_{ref} est la tension avant cette excitation, l'équation (37) s'écrit :

$$\Delta U(t) = U(t) - U_{ref} = \epsilon a T$$

La variation temporelle $\Delta U(t)$ du signal du détecteur est due à l'exploration spatiale produite par le système de balayage. Un pixel P situé à l'endroit (i, j) sur la trame n (correspondant à l'instant moyen t_n après l'excitation) correspond à une tension U_{ijn} telle que :

$$U_{ijn} - U_{ijref} = \varepsilon(P) a T(P, t_n) \quad (38)$$

U_{ijref} étant la tension de référence mesurée au point P avant l'excitation.

La mesure du contraste normalisé localement en P, T_{loc}^* défini par l'équation (32), nécessite la lecture du fichier trame afin de trouver la tension maximale U_{ijnmax} du pixel P. Si l'on écrit l'équation (38) pour le point P à cet instant $t_{nmax}(P)$, on obtient par division des deux équations :

$$T_{loc}^*(P, t_n^*) = (U_{ijn} - U_{ijref}) / (U_{ijnmax} - U_{ijref}) \quad (39)$$

avec :

$$t_n^* = a t_n / e^2$$

La même procédure de calcul peut être appliquée à un point de référence P_0 (endroit sans défaut), ce qui permet d'obtenir le contraste local en P à l'instant t_n :

$$\Delta T_{loc}^*(P, t_n^*) = T^*(P, t_n^*) - T^*(P_0, t_n^*) \quad (40)$$

En pratique, le thermogramme de référence peut être construit sur la base d'un pavé de pixels afin de réduire le bruit de mesure de la courbe $T_0^*(t^*)$.

Une caractéristique très intéressante du contraste expérimental normalisé localement est son indépendance des conditions expérimentales : la condition h de la section 3.4.1 ne peut pas être respectée car une mesure de température par radiométrie n'est jamais directe et nécessite, dans le meilleur des cas, au moins la connaissance de l'émissivité de la surface à mesurer et de la température de l'environnement ; par contre le calcul de ΔT_{loc}^* ne réclame pas la connaissance de ces paramètres :

- le caractère transitoire de l'expérience fait disparaître l'influence de la température de l'environnement.
- la normalisation locale élimine l'effet du "bruit d'émissivité", c'est-à-dire de la non-uniformité de l'émissivité de la surface mesurée.

Les transformées expérimentales de Laplace de ΔT_{loc}^* sont calculées par intégration numérique sur les différentes trames :

$$m_k(P) = \frac{a}{e^2} \sum_{n=1}^N \Delta T_{loc}^*(P, t_n^*) \exp(-p_k^* t_n^*) \Delta t \quad (41)$$

pour :

$$k = 1, 2 \quad \text{avec} \quad p_1^* = 1 \quad \text{et} \quad p_2^* = 4$$

Δt étant la période trame, $n = 1$ étant la première trame après l'excitation, l'enregistrement débutant avant celle-ci afin de saisir quelques trames de référence et N étant la dernière trame saisie, l'acquisition étant limitée à 256 trames.

En pratique, la période d'intégration a été choisie égale à 80 ms, c'est-à-dire qu'elle correspond à deux périodes trame.

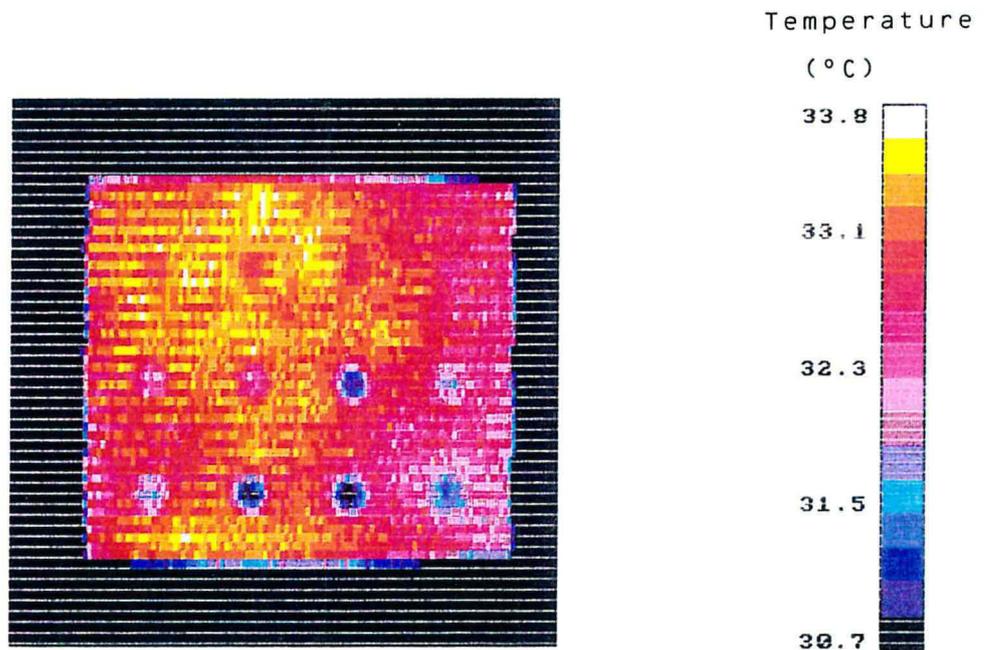
Les valeurs locales de la résistance identifiée $R_c^*(P)$ sont calculées à partir de l'équation (29).

3.4.3 - Résultats expérimentaux

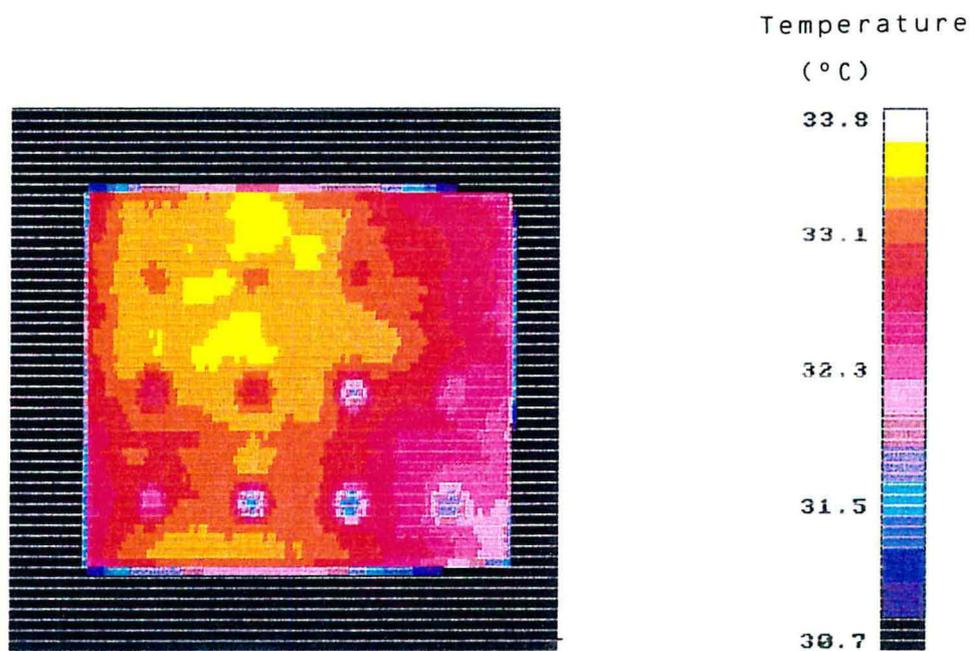
Trois expériences flash ont été faites en face arrière sur la plaque test décrite en 3.4.2.2.

Aucune des deux faces de la plaque n'était revêtue d'une peinture à haute émissivité. Une ouverture rectangulaire (largeur 250 mm - hauteur : 200 mm) a été pratiquée dans un écran pour définir le champ arrière. La position de la région étudiée lors de chacune des expériences 1, 2 et 3 est indiquée sur la **figure 17**.

La trame 57 de l'expérience 1 est montrée sur la **figure 19a**. Elle correspond à un temps moyen t de 1,88 seconde après l'excitation qui s'est produite pour la trame 10. La **figure 19a** doit être tournée d'un angle de $+90^\circ$ dans le sens trigonométrique pour correspondre à l'orientation de la **figure 17**. La palette située sur la même figure donne la correspondance entre la température Celsius apparente (hypothèse d'un comportement de corps noir) et les fausses couleurs. Onze défauts sur les douze présents dans le



a- trame 57 - temps $t = 1.88$ s - $t^* = 0.23$



b- moyenne des trames 13 à 143 ($t = 0.12$ à 5.32 s; $t^* = 0.015$ à 0.65)

Fig. 19. Expérience 1 (face arrière)



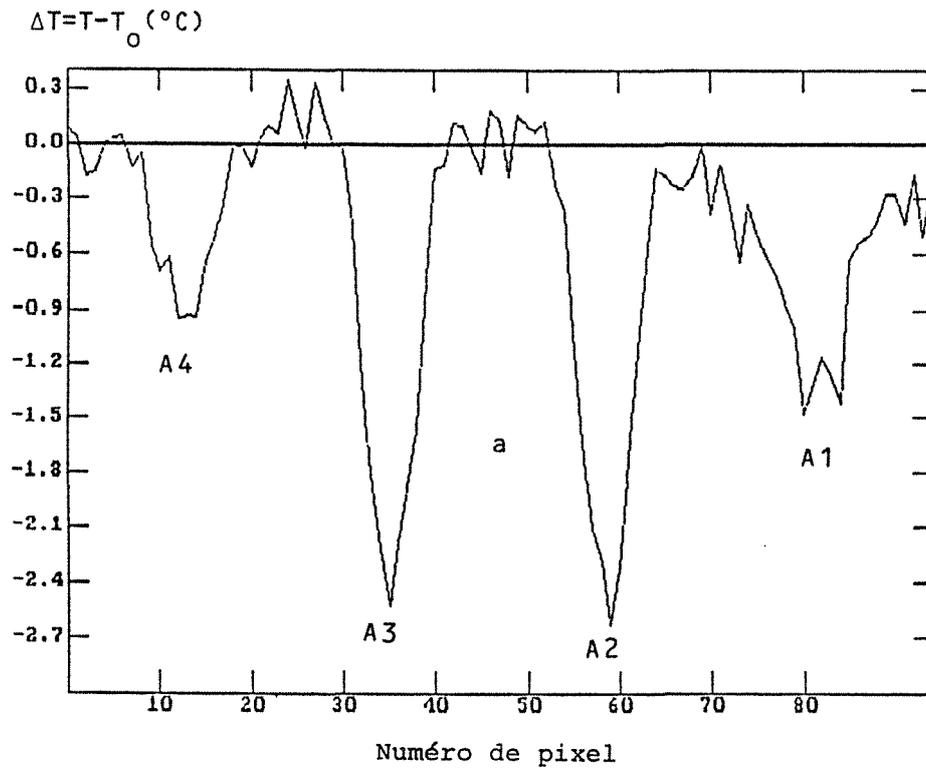
champ apparaissent sous la forme de régions froides sur cette trame : le défaut C_1 , auquel correspondent les plus faibles valeurs nominales de R_c^* et de x^* , ne peut être détecté sur cette trame.

Afin de réduire le niveau du bruit, il est possible de faire une moyenne de plusieurs trames. Une telle moyenne est présentée sur la **figure 19b** pour les trames 13 à 143 : les défauts sont détectés plus facilement mais on peut voir que le transfert de chaleur au sein de la plaque n'est pas vraiment unidirectionnel, même pour des points éloignés des défauts : l'arrière plan des défauts, c'est-à-dire les régions saines, n'a une température uniforme que sur des zones d'étendue limitée. Ceci est probablement dû à une excitation impulsionnelle non uniforme sur la face avant (ou à une variation d'absorptivité en face avant dans la bande du flash ou à une émissivité non uniforme de la face arrière dans la bande de détection). Cette **figure 19b** peut être comparée à l'image ultrasonore de la **figure 18** qui a une résolution spatiale plus élevée mais le même nombre de niveaux de discrétisation (16).

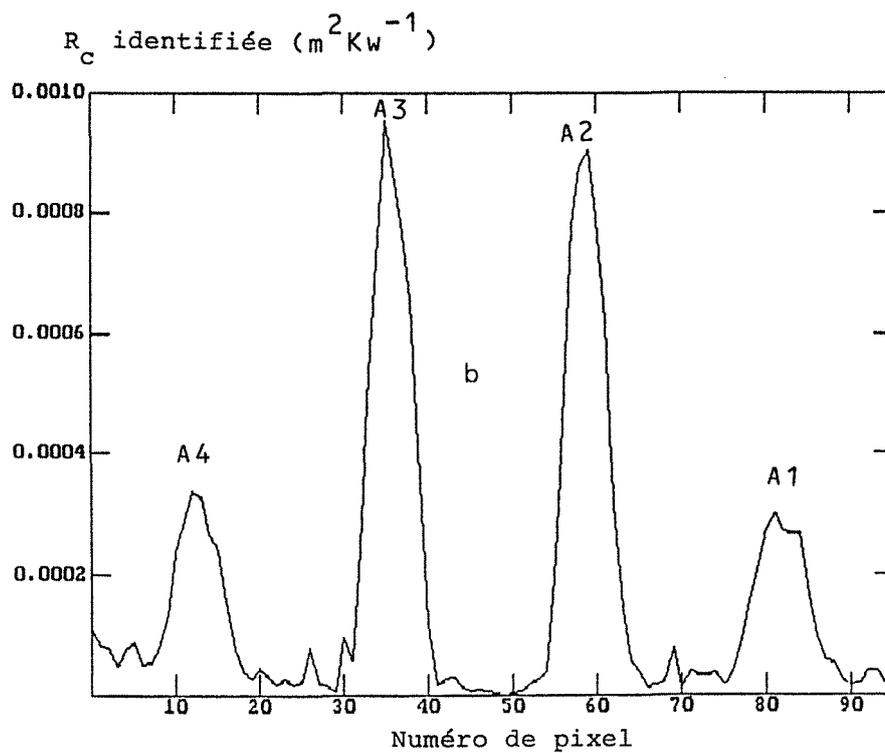
Trois lignes horizontales de pixels passant par les centres des défauts de types A, B et C ont été étudiées : les profils de contraste absolu $\Delta T (= T - T_0)$ sont tracés pour ces lignes sur les **figures 20, 21a et 22a**. L'axe horizontal de ces figures correspond au numéro du pixel - il y a 128 pixels sur une ligne horizontale d'une trame qui sont numérisés mais seule une certaine d'entre eux est visible à travers l'ouverture de 250 mm de large de l'écran. Pour chaque ligne, la même zone de référence a été choisie pour P_0 , et l'on peut construire un profil correspondant de résistance de contact R_c - voir **figures 20b, 21b et 22b** - suivant la procédure décrite dans la section 3.4.2.3.

Les résistances identifiées au centre de chaque défaut sont comparées avec les valeurs nominales des sur-résistances R_c^* dans la table 2.3 ; ici les valeurs nominales de R_c^* sont différentes des valeurs correspondantes de R_d^* car c'est le modèle capacitif sans augmentation d'épaisseur qui s'applique (voir section 3.2.1.3) :

$$R_c^* = (1 - \lambda_d/\lambda) \times R_d^* = 0,615 R_d^* \quad (42)$$

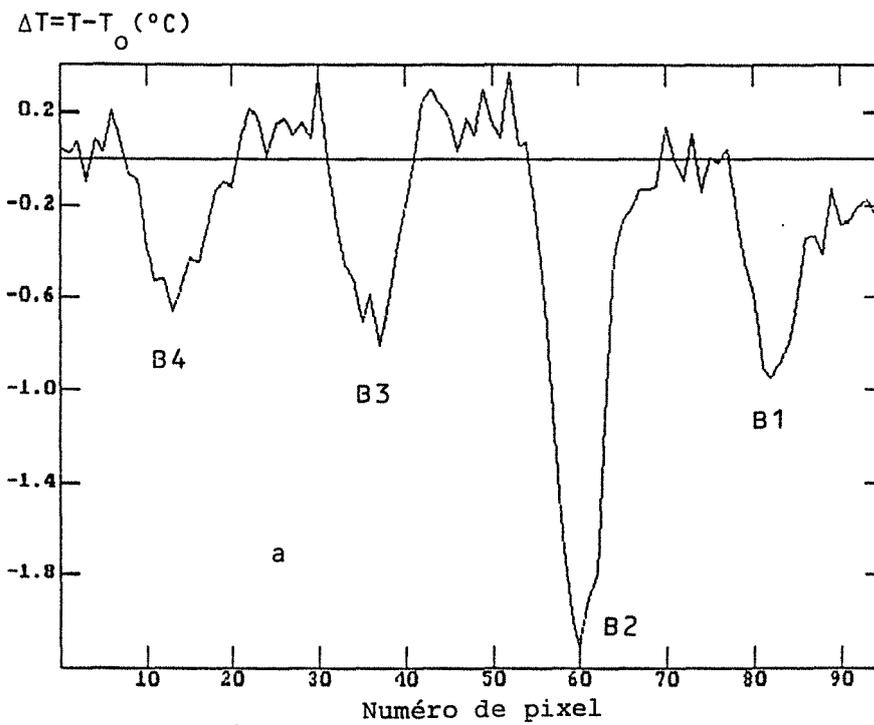


a- profil de contraste absolu ΔT - trame 54 - $t=1.76$ s

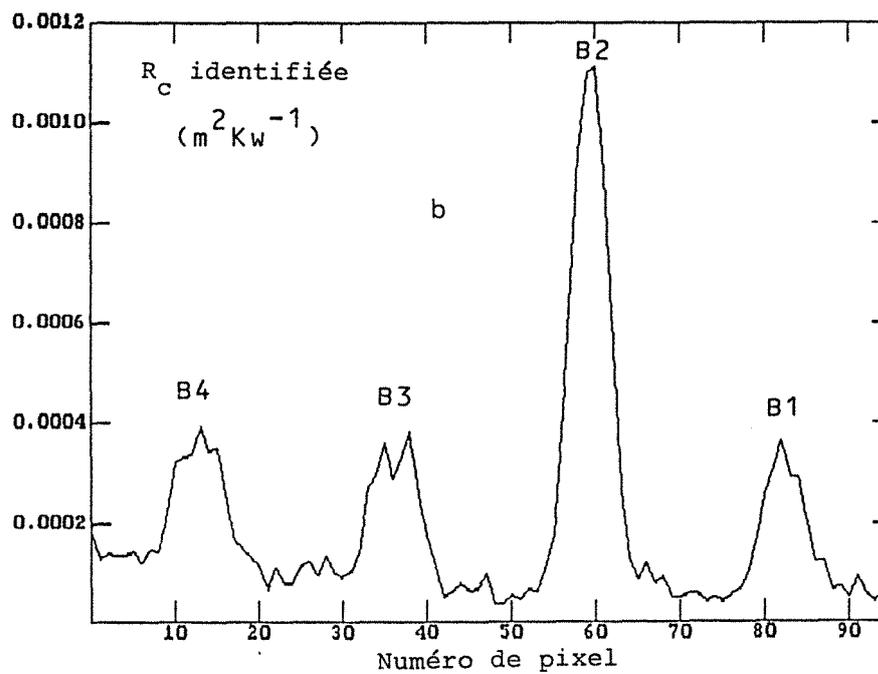


b- profil de résistance R_c identifiée

Fig. 20. Expérience 1 - défauts de type A ($R_d = 3 \cdot 10^{-4}$ SI - $2b = 20$ mm)

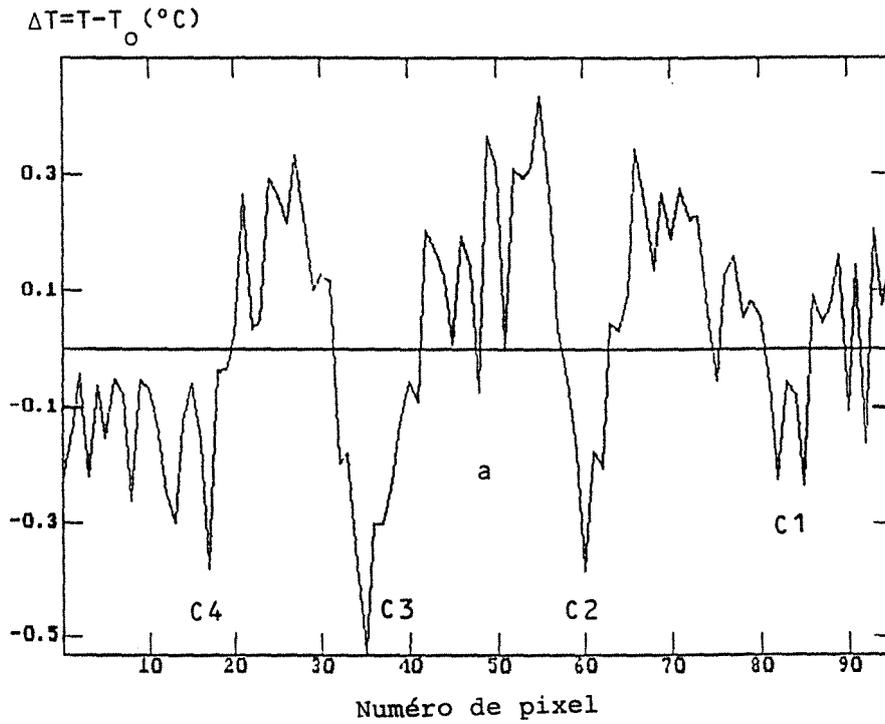


a- profil de contraste absolu ΔT - trame 56 - $t=1.84$ s

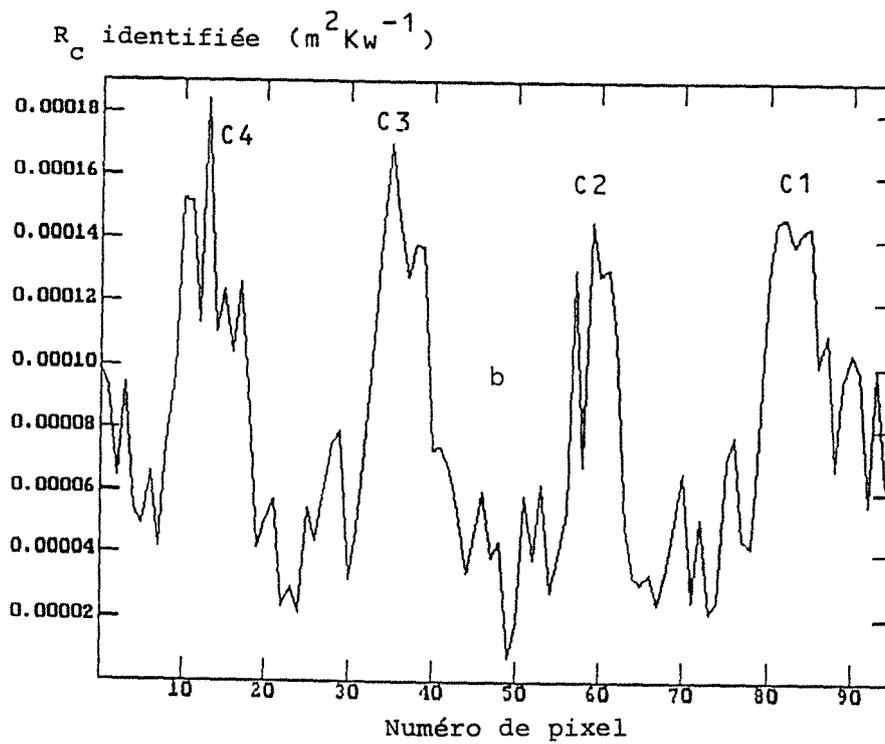


b- profil de résistance R_c identifiée

Fig. 21. Expérience 1 - défauts de type B ($R_d = 2 \cdot 10^{-4}$ SI - $2b = 20$ mm)



a- profil de contraste absolu ΔT - trame 56 - $t=1.84$ s



b- profil de résistance R_c identifiée

Fig. 22. Expérience 1 - défauts de type C ($R_d = 10^{-4}$ SI - $2b = 20$ mm)

N° du défaut Lettre du défaut					Valeurs nominales				
	4	3	2	1	$10^4 R_c$	$10^4 R_d$	R_d^*	2 b (mm)	2b*
A	3,4	9,5	8,9	2,9	1,89	3	0,1	20	10
B	3,9	3,8	11,1	3,6	1,26	2	0,065	20	10
C	1,8	1,7	1,5	1,5	0,63	1	0,033	20	10
Profondeurs nominales x*	0,643	0,5	0,286	0,143					

Table 3.2 - Sur-résistances identifiées R_c (à multiplier par $10^{-4} \text{ } ^\circ\text{C m}^2/\text{W}$) pour l'expérience 1 et valeurs nominales correspondantes.

La durée t_N de l'intégration, pour le calcul des deux transformées - équation (41) - a été de 9,6 secondes ($t_N^* = 1,18$) pour un pas d'intégration de 80 ms.

A l'exception du cas des défauts A2, A3 et B2, les résistances R_c identifiées sont du même ordre de grandeur que leurs valeurs nominales, les meilleurs résultats correspondant aux plus hautes résistances des défauts de type A. Les résistances identifiées sont toujours plus élevées que les résistances nominales correspondantes et l'on retrouve ici le même phénomène qui a déjà été constaté expérimentalement et analysé pour l'identification sur un point de la section 3.2.2.2. On peut remarquer que les défauts A2, A3 et B2 présentent des couches d'air supplémentaires en contact avec les couches de téflon comme l'a montré l'image ultrasonore de la **figure 18** : ceci explique les trois valeurs importantes des résistances identifiées par la méthode thermique.

La détection des défauts proches de la face avant et de faible résistance est améliorée par la méthode de Laplace qui intègre l'information is-

sue d'instants différents et ce, à l'aide de deux transformées : le défaut C_1 ne pouvait être détecté, ni sur une trame unique - voir **figure 19a** - ni sur une trame moyennée - voir **figure 19b** - et ce, indépendamment du phénomène de seuillage produit par le nombre limité de fausses couleurs de la palette thermique, comme le montre la **figure 22a** où le contraste dû à C_1 est pratiquement indiscernable du bruit ; par contre le profil identifié de résistance de la **figure 22b** fait ressortir très nettement ce défaut.

La deuxième expérience a été effectuée avec un des tubes flash vertical en panne (absence d'excitation pour ce tube, suite à une défaillance de son tiroir d'alimentation). Une trame moyennée - trames 22 à 152 ($t = 0,08$ à $5,28$ secondes après l'excitation correspondant à la trame 20) - est présentée sur la **figure 23** : la partie gauche mal chauffée de la plaque est clairement visible.

Les **figures 24a** et **25b** donnent les profils de contraste absolu ΔT pour deux lignes horizontales passant par les centres des défauts de types A et B. Ces deux profils ont été tracés pour un instant correspondant au maximum d'amplitude de ces contrastes ($t = 2,4$ s pour les défauts A et $t = 2,16$ s pour les défauts B. Ces profils bruts dépendent fortement du transfert radial car leurs "lignes de base" sont très inclinées. La mise en oeuvre de la même technique que celle utilisée plus haut produit deux profils de résistance identifiée R_c qui sont présentés sur les **figures 24b** et **25d**.

La troisième expérience pour laquelle le même tube flash était défec-
tueux a produit des profils similaires de contraste absolu ($t = 2,08$ s après l'excitation) - **figure 26a** - et de résistance identifiée R_c - **figure 26b** - pour une ligne horizontale passant par le centre des défauts de type D.

Les résistances R_c identifiées pour les expériences 2 et 3 au centre de chaque défaut et leurs valeurs nominales sont présentées dans la Table 3.3.

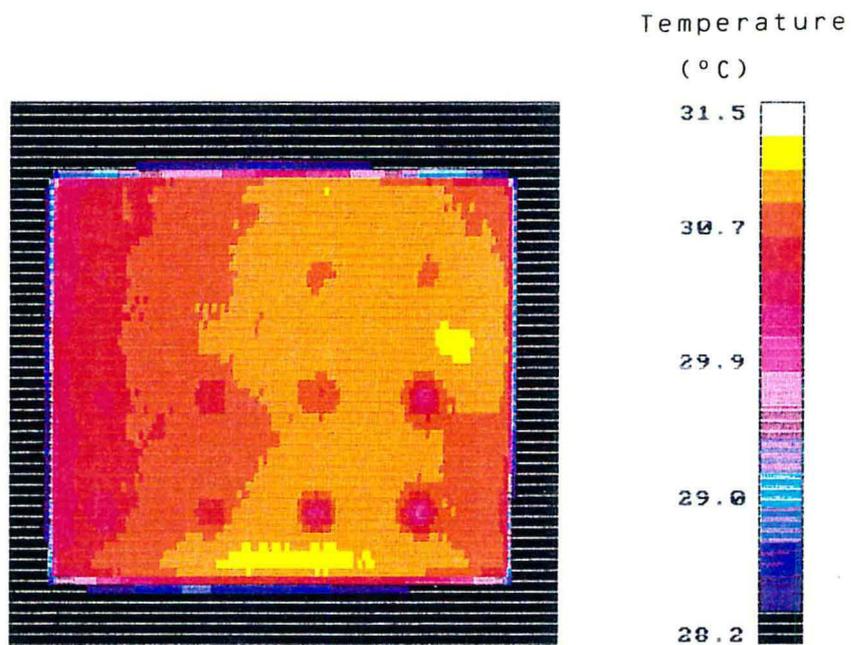
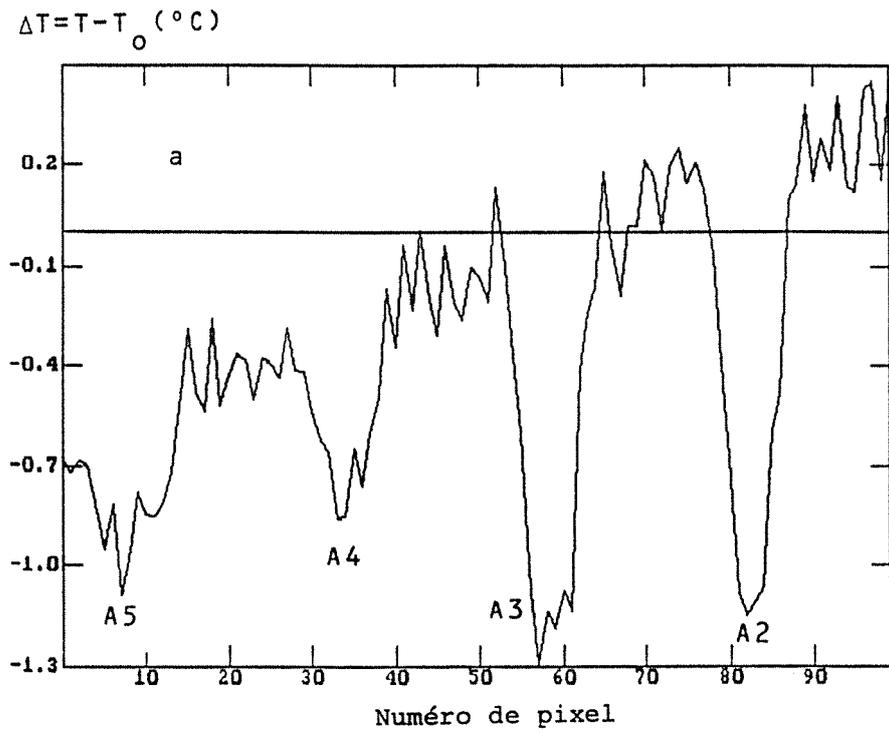


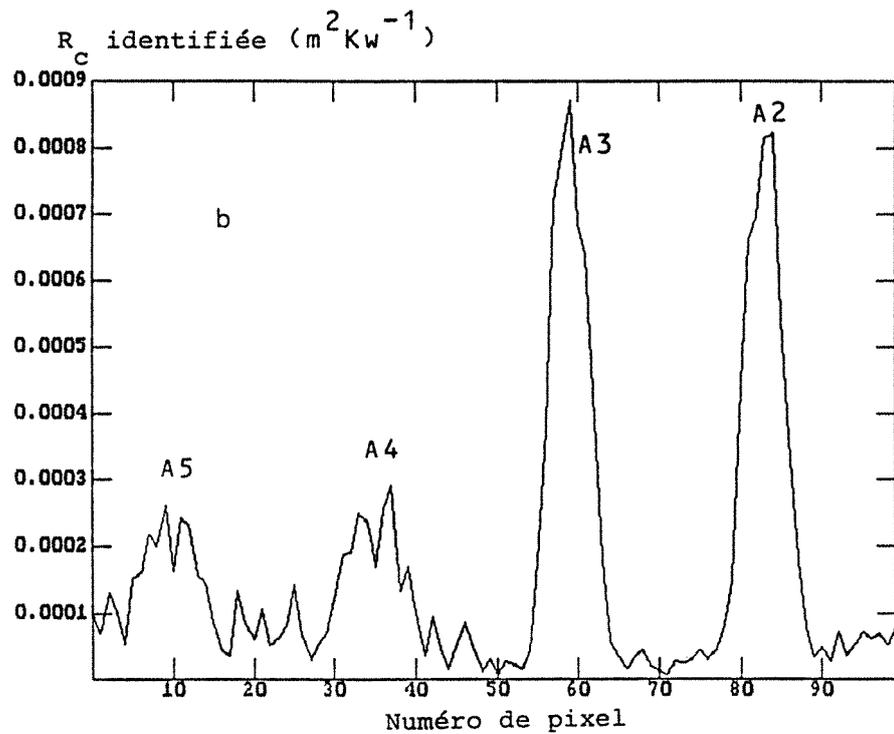
Fig. 23. Expérience 2 (face arrière) - moyenne des trames 22 à 152

($t = 0.08$ à 5.28 s; $t^* = 0.01$ à 0.65)





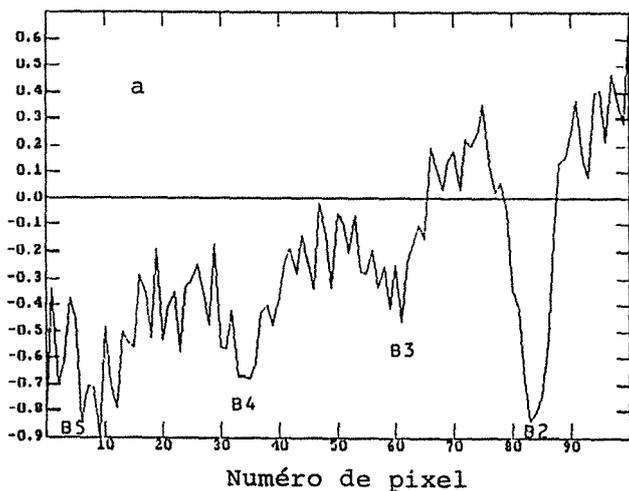
a- profil de contraste absolu ΔT - trame 80 - $t=2.4$ s



b- profil de résistance R_c identifiée

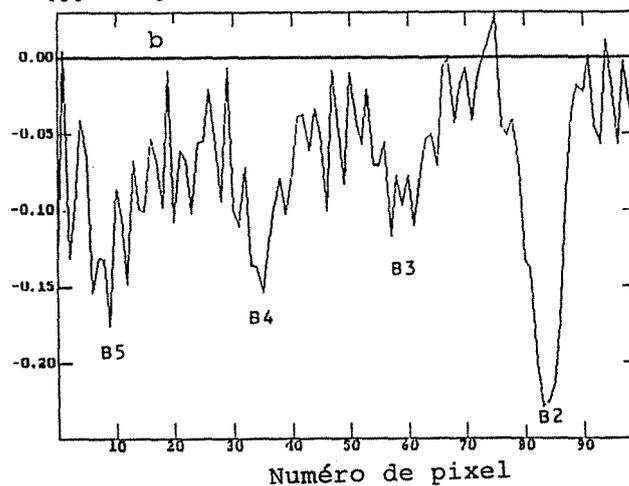
Fig. 24. Expérience 2 - défauts de type A ($R_d = 3 \cdot 10^{-4}$ SI - $2b = 20$ mm)

$$\Delta T = T - T_o \text{ (}^\circ\text{C)}$$



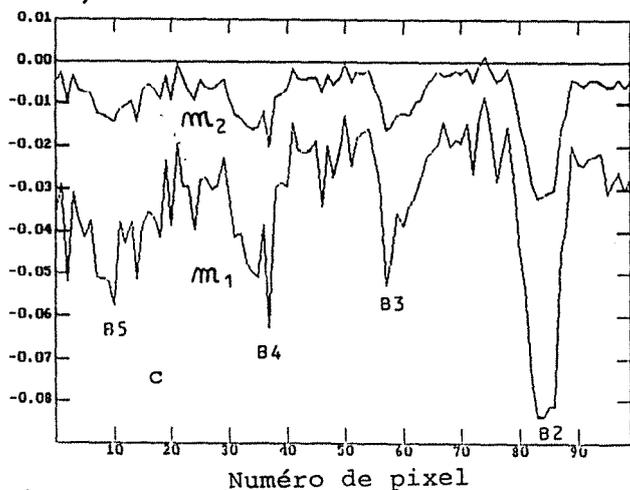
a- profil de contraste absolu ΔT
- trame 74 - $t=2.16$ s

$$\Delta T_{loc}^* = T^* - T_o^*$$



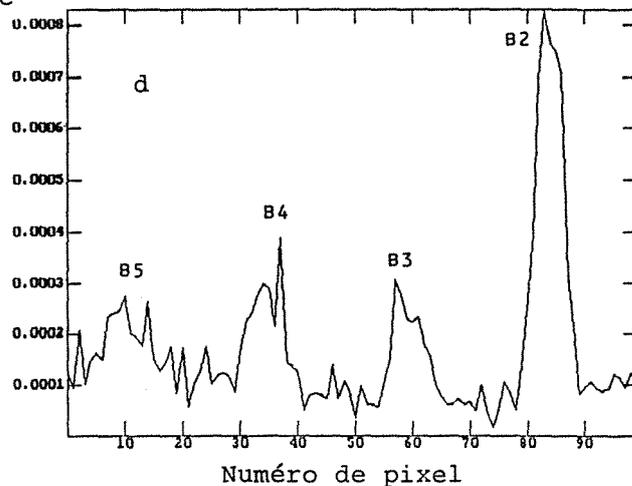
b- profil de contraste normalisé
localement ΔT_{loc}^* - $t=2.16$ s

$$m_1, m_2$$



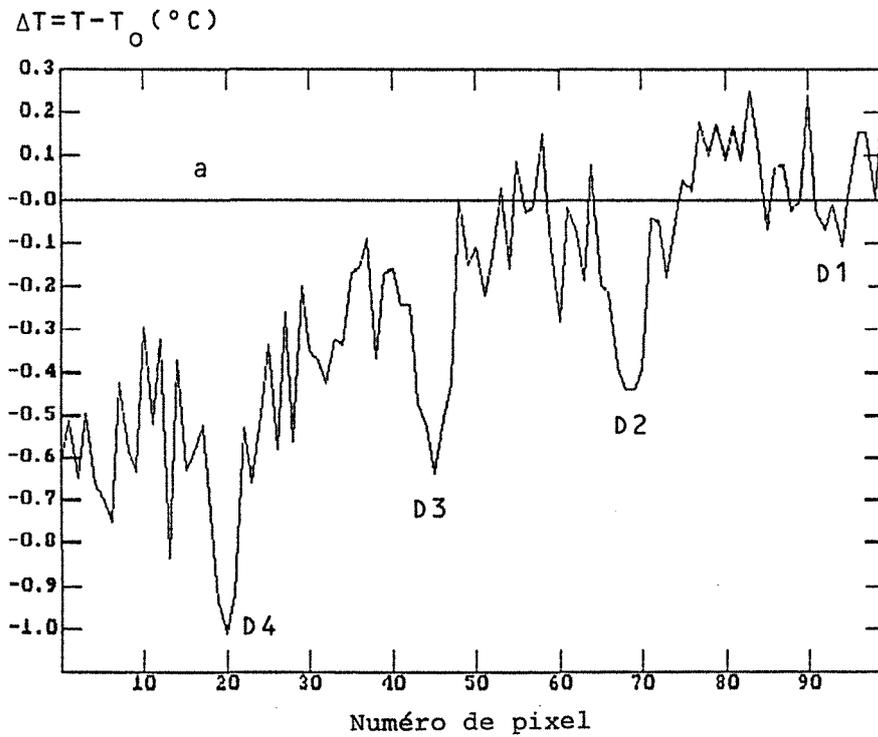
c- transformées de Laplace de ΔT_{loc}^* :
profils de m_1 et de m_2

$$R_c \text{ identifiée (m}^2\text{kw}^{-1}\text{)}$$

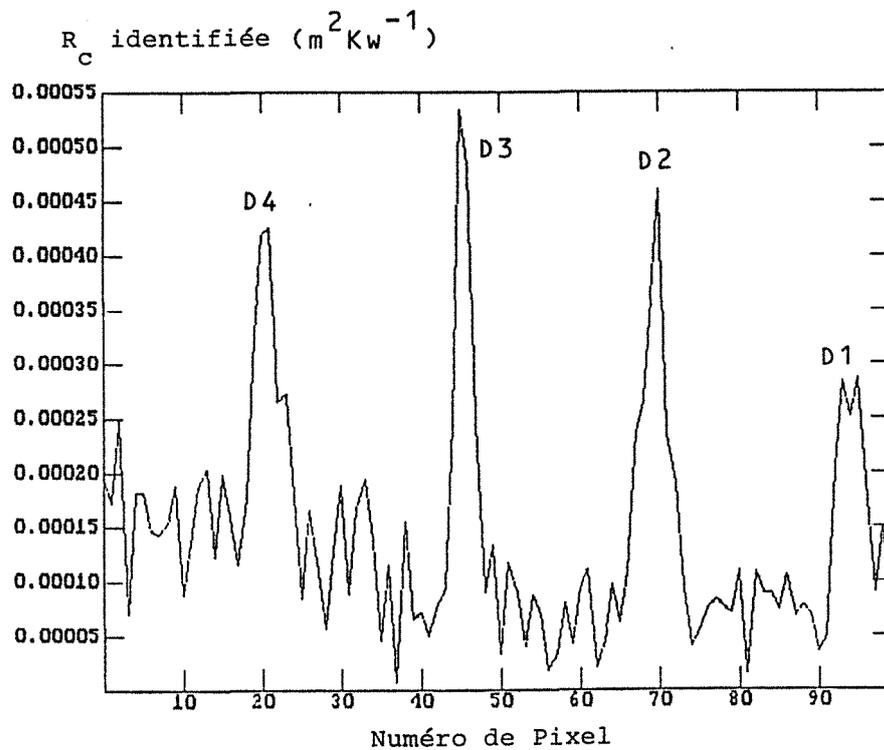


d- profil de résistance R_c identifiée

Fig. 25. Expérience 2 - défauts de type B ($R_d = 2 \cdot 10^{-4}$ SI - $2b = 20$ mm)



a- profil de contraste absolu ΔT - trame 51 - $t=2.08$ s



b- profil de résistance R_c identifiée

Fig. 26. Expérience 3 - défauts de type D ($R_d = 2 \cdot 10^{-4}$ SI - $2b = 10$ mm)

N° du défaut Lettre du défaut						Valeurs nominales				
	5	4	3	2	1	$10^4 R_c$	$10^4 R_d$	R_d^*	2b (mm)	2b*
A (exp. 2)	2,5	2,7	8,6	8,2		1,89	3	0,1	20	10
B (exp. 2)	2,7	3,1	3,0	8,3		1,26	2	0,065	20	10
D (exp. 3)		4,2	5,3	4,6	2,8	1,89	3	0,1	10	5
Profondeurs nominales x*	0,786	0,643	0,5	0,286	0,143					

Table 3.3 - Sur-résistances identifiées R_c (à multiplier par $10^{-4} \text{ } ^\circ\text{Cm}^2/\text{W}$) pour les expériences 2 et 3 et valeurs nominales correspondantes

Les résultats de l'expérience 2 sont cohérents avec ceux de l'expérience 1 (Table 3.2) et ce, en dépit du caractère non uniforme de l'excitation de la face avant.

Les différentes étapes du traitement du signal et de l'identification ont été détaillées pour le profil des défauts B pour cette expérience 2 : le profil incliné de contraste absolu $\Delta T (= T - T_0)$ de la figure 25a ne peut être traité directement (il est similaire, à la translation T_0 près, au profil brut de température $T(P)$ à cet instant t) car la température T au point P est très sensible à l'énergie absorbée localement $Q(P)$ au même niveau de la face avant. En première approximation, le maximum local de température $T_{\max}(P)$ est proportionnel à $Q(P)$, ceci étant rigoureusement vrai pour un transfert de chaleur unidirectionnel adiabatique. Ainsi la normalisation de $T(P,t)$ par $T_{\max}(P)$ produit un thermogramme réduit $T_{\text{loc}}^*(P,t)$ qui est presque indépendant de la distribution de l'énergie absorbée sur la face avant. La construction analogue du thermogramme réduit $T_{\text{loc}}^*(P_0,t)$ à par-

tir du maximum $T_{\max}(P_o)$ presque proportionnel à $Q(P_o)$ conduit, par différence, au profil de contraste $\Delta T_{\text{loc}}^*(P,t)$ - équation (32) - présenté sur la **figure 25b** (même instant que la **figure 25a**) qui est maintenant "redressé" avec une ligne de base horizontale. Les deux profils de transformée expérimentale de Laplace de ΔT_{loc}^* , $m_1(P)$ et $m_2(P)$, calculés suivant l'équation (41), sont présentés sur la **figure 25c** : ils sont hautement corrélés (coefficient de corrélation théorique de 80 % d'après la section 2.3.6.3) et un "bruit" spatial semble être présent alors que le bruit temporel a été réduit par l'intégration sur le temps. L'application locale de l'équation (29) conduit au profil de résistance identifiée R_c de la **figure 25d** pour lequel le bruit spatial semble plus faible.

Le profil de la **figure 26b** montre que même les défauts D de plus petite extension peuvent être détectés et mesurés ; cependant les résistances identifiées R_c sont plus élevées que les sur-résistances nominales pour les raisons suivantes :

- application d'un modèle purement résistif pour l'identification alors que le contraste expérimental est de type capacitif (influence faible : voir **figure 15**).
- délaminage parasite entre les deux couches de téflon
- existence éventuelle d'une surépaisseur, au niveau des inserts de téflon, qui augmente la valeur nominale de la sur-résistance due au défaut (si $\delta = 0$, $R_c = R_d$).

3.5 - APPLICATION DE LA METHODE DES DEUX TRANSFORMEES A L'IMAGERIE EN PROFONDEUR

3.5.1 - Technique d'identification en face avant

Un contraste normalisé localement peut être défini également en face avant en utilisant la température asymptotique de la plaque au point de mesure considéré :

$$\Delta T_{\text{loc}}^* = \frac{T}{T_{\infty}} - \frac{T_o}{T_{o\infty}} = T_{\text{loc}}^* - T_o^* \quad (43)$$

Ceci n'est possible que pour une expérience adiabatique où T_{∞} est le minimum de la courbe locale $T(t)$.

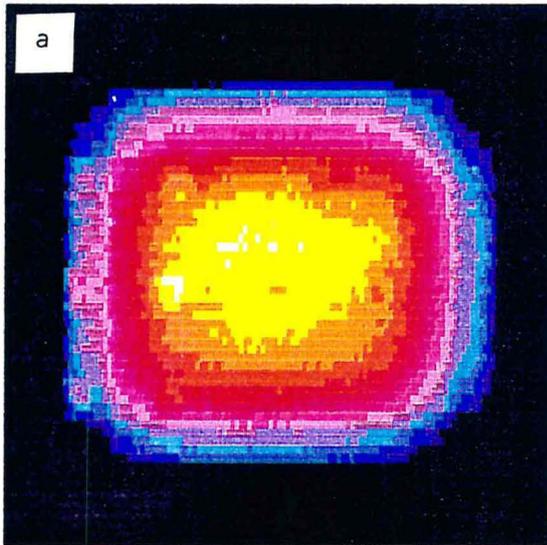
Il est alors possible, tout comme dans la section précédente, de calculer les transformées expérimentales m_1 et m_2 du contraste (43) pour $p_1^* = 1$ et $p_2^* = 4$ sur une base ponctuelle. L'application de l'équation (31) permet alors la construction d'un profil de profondeur réduite x^* ; ce profil peut être amélioré si une méthode de Newton est utilisée pour résoudre l'équation (30), la valeur initiale de x^* étant donnée par l'équation (31).

3.5.2 - Résultats expérimentaux

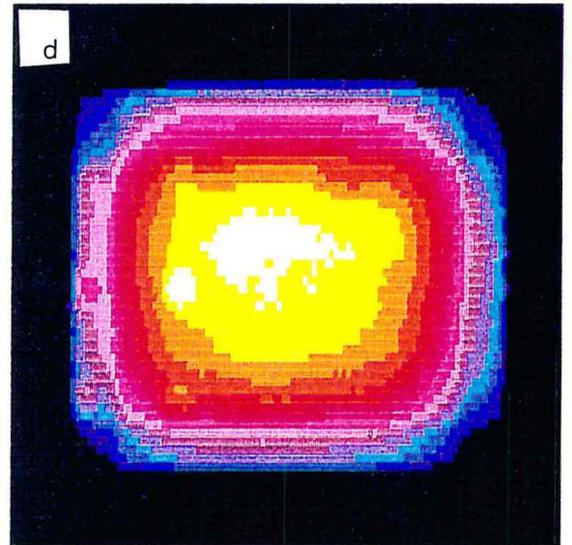
Une expérience, l'expérience 4, a été effectuée en utilisant la technique de mesure en face avant. La plaque d'essai et le montage expérimental sont les mêmes qu'en section 3.4.2 mais la caméra a été placée du côté de l'excitation de façon à mesurer le champ des températures de la face avant à travers le centre du carré défini par les tubes flash. Au cours de cette expérience ceux-ci ont fonctionné correctement.

Des trames thermiques de la face avant sont présentées pour différents instants après l'excitation sur les **figures 27a, b et c** et les mêmes trames, moyennées sur des périodes plus longues intégrant les instants précédents, sont présentées sur les **figures 27d, e et f**. Les défauts présents dans le champ sont de types B, C et D, de 4 (à gauche) à 1 (à droite). Par rapport aux trois expériences précédentes, la plaque a été retournée de telle sorte que la caméra observe la même face physique de la plaque et ainsi les défauts les moins profonds portent le numéro 4 et apparaissent aux premiers instants. Les **figures 27** confirment expérimentalement que l'instant optimal correspondant à la détection d'un défaut est une fonction croissante de sa profondeur.

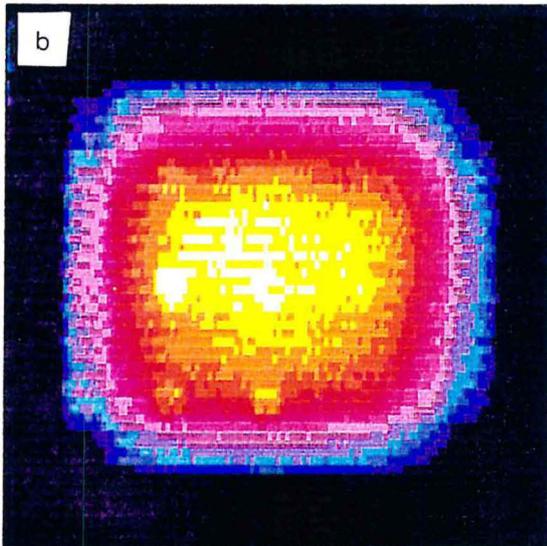
Un profil instantané de contraste absolu correspondant à une ligne horizontale passant par les centres des défauts de type B est tracé sur la **figure 28a**, le thermogramme T_0 de référence ayant été choisi pour un pavé de 4 pixels situé entre les lignes B et C et les colonnes 2 et 3 des défauts. On peut observer sur cette figure l'énorme effet de bord causé par



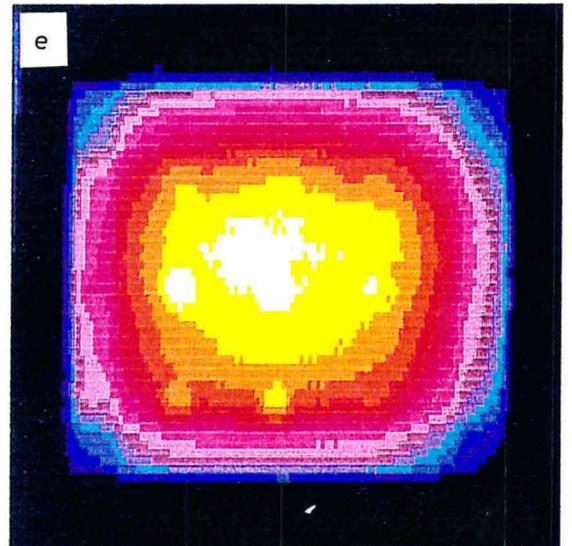
a- $t=0.08$ s, $t^*=0.01-36.8 < T < 49.5^\circ\text{C}$



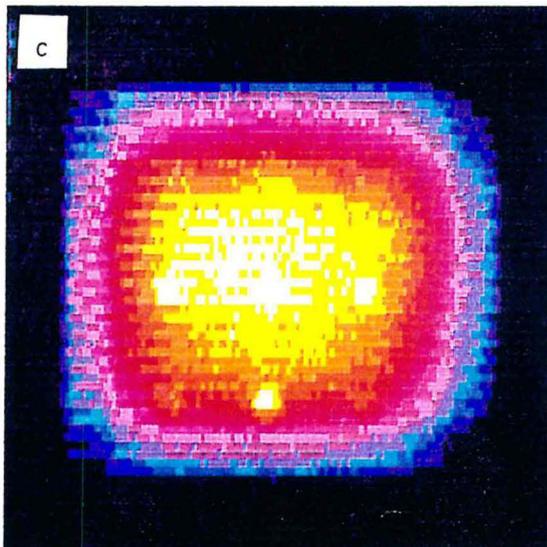
d- trame moyennée - $0 < t < 0.4$ s - $37.0 < T < 48.1^\circ\text{C}$



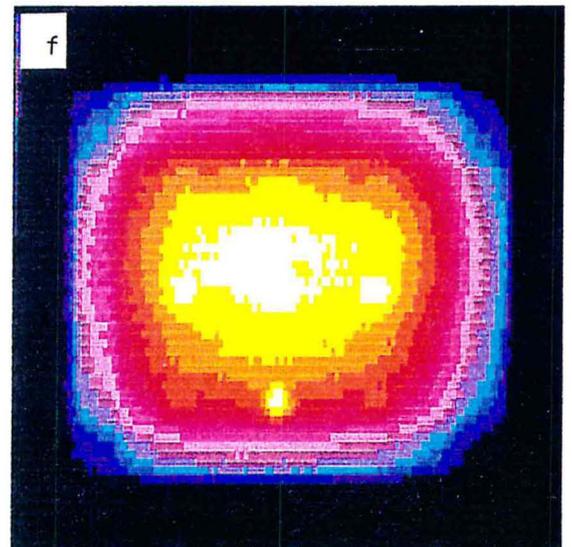
b- $t=0.88$ s, $t^*=0.11-35.1 < T < 42.4^\circ\text{C}$



e- trame moyennée - $0.8 < t < 1.2$ s - $33.1 < T < 42.1^\circ\text{C}$



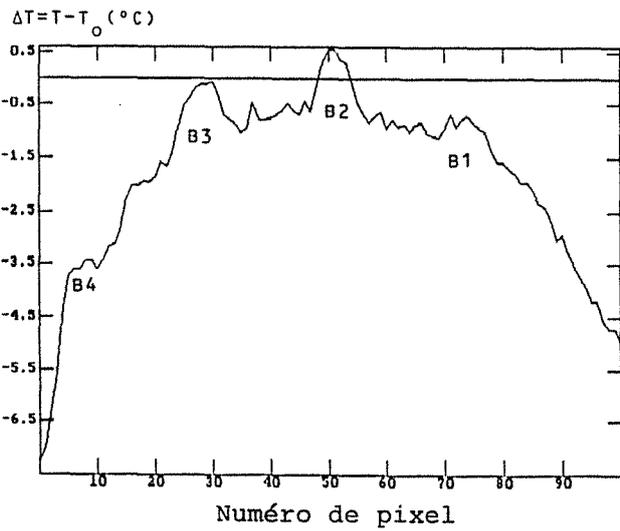
c- $t=1.68$ s, $t^*=0.21-33.9 < T < 40.1^\circ\text{C}$



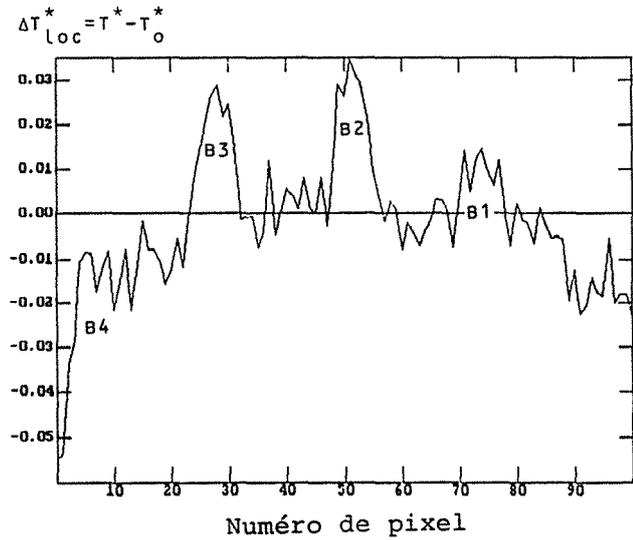
f- trame moyennée - $2 < t < 2.4$ s - $33.1 < T < 39.5^\circ\text{C}$

Fig. 27. Expérience 4 (face avant)

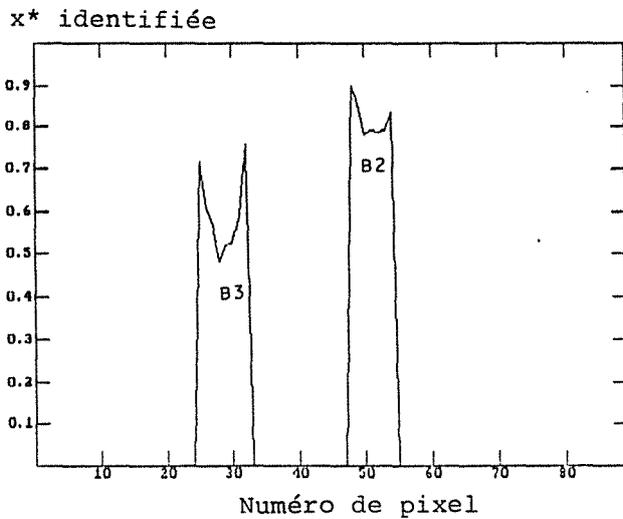




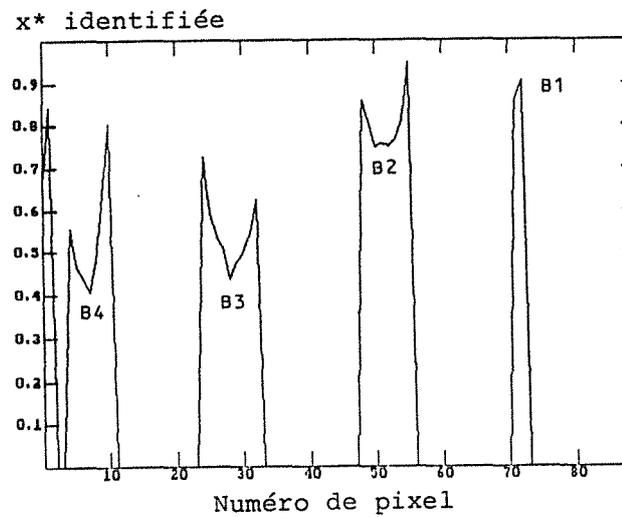
a- profil de contraste absolu ΔT - $t=0.8$ s
- zône fixe de référence P_0



b- profil de contraste ΔT_{loc}^* - $t=0.8$ s
- zône fixe de référence P_0



c- profil de profondeur x^* identifiée
- zône fixe de référence P_0



d- profil de profondeur x^* identifiée
- zône variable de référence P_0

Fig. 28. Expérience 4 (face avant) - défauts de type B ($R_d = 2 \cdot 10^{-4}$ SI - $2b=20$ mm)

l'écran, déjà utilisé en face arrière et interposé ici entre l'illuminateur et la face avant pour des raisons de définition du champ, qui génère ici une excitation partielle de la face avant. Le profil de contraste normalisé localement - équation (43) - a pu être tracé au même instant pour la même ligne sur la **figure 28b**, car les températures asymptotiques T_∞ et $T_{0\infty}$ étaient approximativement constantes à la fin de l'enregistrement ($\approx 10s$). Le contraste absolu ΔT qui était principalement négatif sur la **figure 28a** - ce qui est impossible pour un contraste unidirectionnel en face avant - est transformé en un contraste ΔT_{loc}^* qui reste positif ou proche de zéro sur la partie centrale du profil de la **figure 28b**.

Le calcul par intégration numérique des transformées expérimentales m_1 et m_2 a été suivi de la résolution de l'équation (30) en utilisant 5 itérations sur x^* . Notons que l'équation (31) donnait déjà une valeur approchée à 0,01 de x^* . Il est également nécessaire de constater ici que le paramètre x^* n'a aucun sens si aucun défaut n'est présent au niveau du point P étudié sur la face avant. Ainsi x^* a été arbitrairement ramené égal à zéro pour les pixels pour lesquels son calcul s'est révélé être impossible - voir l'équation (31) - c'est-à-dire :

m_1 ou m_2 négatif

$$a \operatorname{ch}^2(\alpha_1) - 1 = b < 0 \quad \text{avec } a = m_2/m_1$$

$[\sqrt{a} \operatorname{ch}(\alpha_1) + \sqrt{b}]$ extérieur à l'intervalle $[1, \exp(\alpha_1)]$

Cette dernière condition correspond à une valeur identifiée de x comprise entre 0 et 1. Ces critères ont été utilisés afin d'éliminer tous les points pour lesquels m_1 et m_2 résultent de l'intégration du bruit.

Le profil identifié de x^* , correspondant à la ligne B, est tracé sur la **figure 28c**. On peut remarquer que le centre de chaque défaut détecté, B2 ou B3, correspond à un minimum local de ce profil de x^* . Ceci est dû aux effets bidimensionnels, au voisinage de ces centres, qui réduisent le contraste mesuré : l'algorithme d'identification unidirectionnelle de la profondeur x^* , appliqué à un pixel excentré, interprète cette réduction de

contraste par une augmentation de profondeur qui a le même effet - voir **figure 13b**.

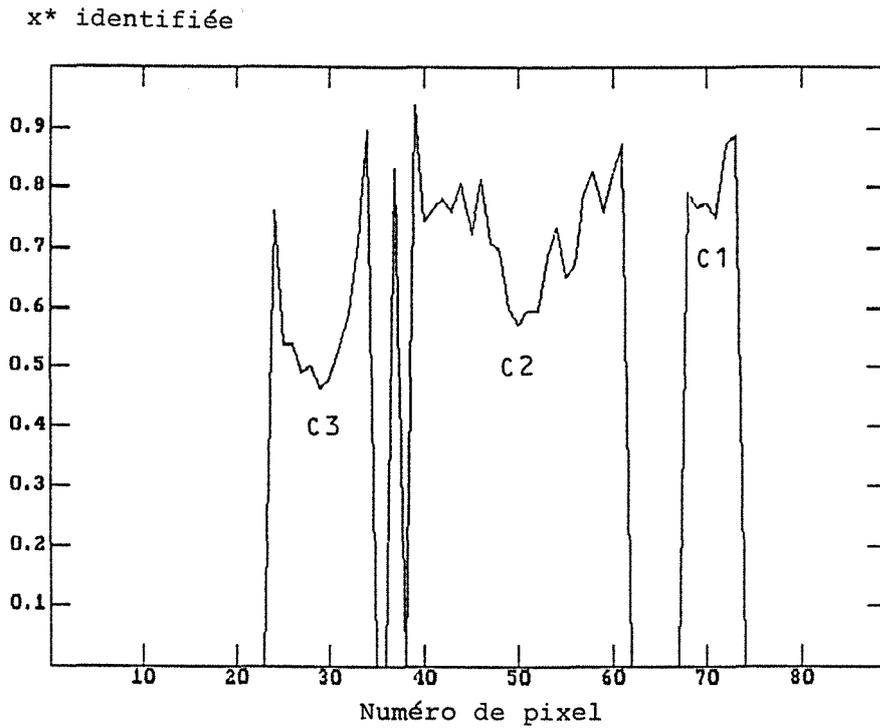
Si on applique la même procédure en utilisant cette fois un pavé de référence P_0 situé sur la même verticale que le pixel P étudié (référence "glissante" afin de prendre en compte le fort effet de bord dû à l'écran), un nouveau profil de profondeur identifiée est obtenu et présenté sur la **figure 28d** : les quatre défauts B1 à B4 y sont maintenant détectés.

Des profils similaires de profondeur identifiée ont été obtenus de façon analogue pour des lignes passant par les centres des défauts de type C - **figure 29a** avec P_0 fixé - et D - **figure 29b** avec P_0 variable. Sur cette dernière figure les deux défauts les plus profonds sont détectés alors que leur présence ne pouvait être clairement mise en évidence sur les images brutes ou moyennées des **figure 27**.

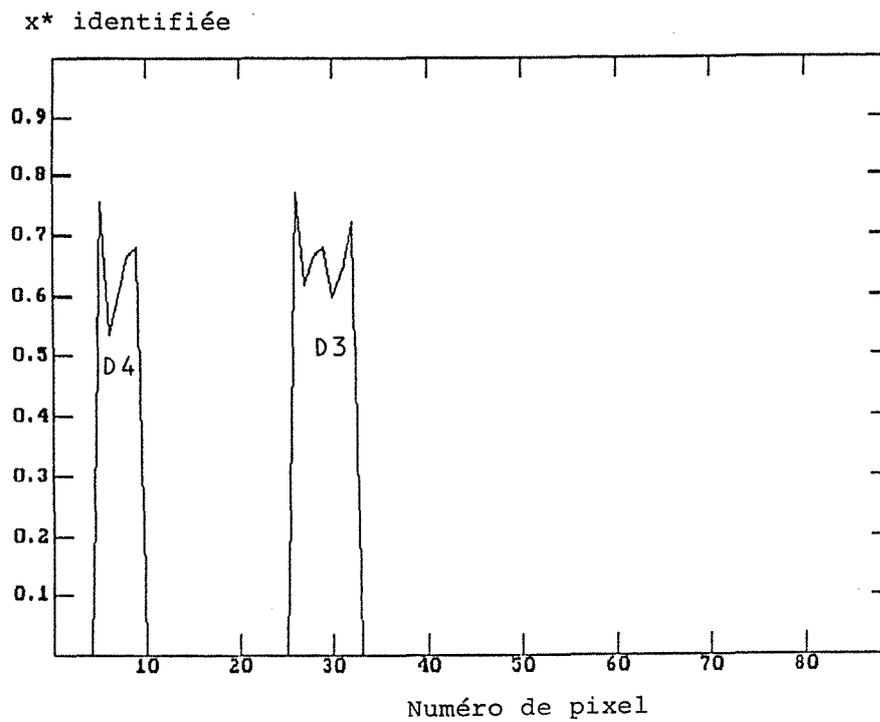
La table 3.4 récapitule les résultats obtenus en identification de profondeur, pour le centre de chaque défaut, à partir de l'expérience 4.

N° du défaut Lettre du défaut	4	3	2	1	Pavé de référence P_0	Nombre de couches de téflon	2b *
B	0,41	0,48 0,44	0,78 0,75	0,91	fixe variable	2	10
C	0,37	0,47 0,40	0,57 0,53	0,75 0,64	fixe variable	1	10
D	0,54	0,62			variable	2	5
Profondeurs nomi- nales x^*	0,357	0,5	0,714	0,857			

Table 3.4 - Profondeurs réduites identifiées x^* pour l'expérience 4 (face avant) et valeurs nominales correspondantes.



a- profil de profondeur x^* identifiée - défauts de type C ($R_d = 10^{-4}$ SI - $2b=20$ mm)
zône fixe de référence P_o



b- profil de profondeur x^* identifiée - défauts de type D ($R_d = 2 \cdot 10^{-4}$ SI - $2b=10$ mm)
zône variable de référence P_o

Fig. 29. Expérience 4 (face avant)

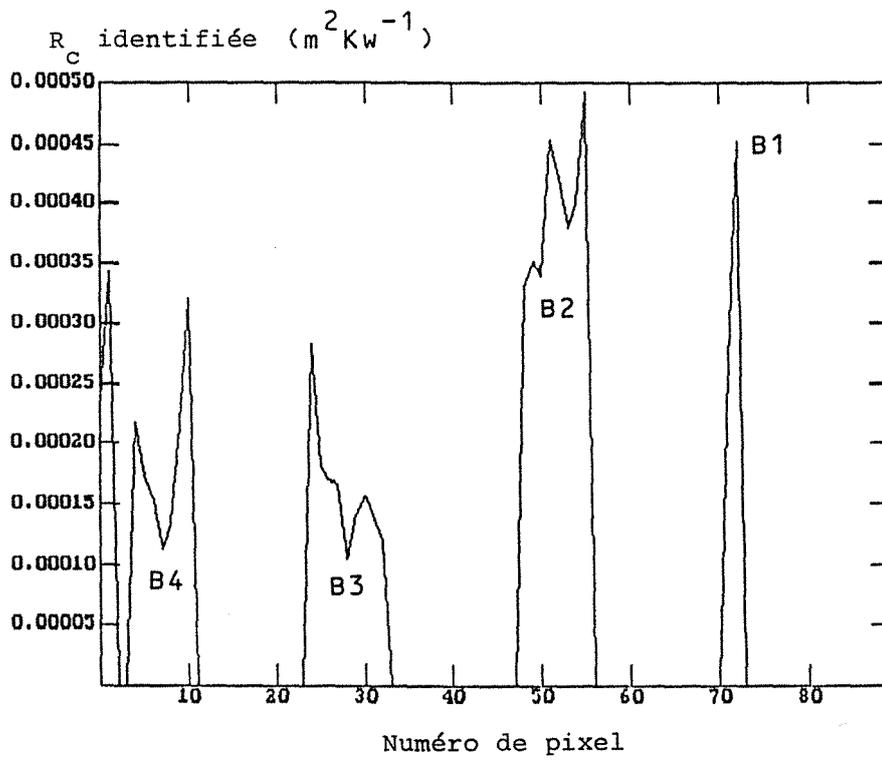


Fig. 30. Expérience 4 (face avant) - profil de résistance R_c identifiée - défauts de type B ($R_d = 2 \cdot 10^{-4}$ SI - $2b=20$ mm) - zone variable de référence P_o

Les profondeurs identifiées et nominales sont très proches pour les défauts B et C de plus grandes extensions. Remarquons ici que les valeurs nominales sont certainement plus représentatives des valeurs réelles pour la profondeur que pour la résistance de contact.

Une fois que la profondeur x^* identifiée, la résistance réduite R_c^* peut être évaluée en utilisant l'équation (A3-5). Un profil de résistance R_c est ainsi calculé et présenté sur la **figure 30** pour les défauts de type B. Le récapitulatif des essais d'identification de résistance de contact en face avant est présenté sur la table 3.5.

N° du défaut Lettre du défaut	4	3	2	1	$10^4 R_c$ (nominal)	Pavé de référence P_o	$2b^*$
B	1,12	1,24 0,84	5,02 3,40	4,52	1,26	fixe variable	10
C	0,79	1,08 0,97	1,28 1,13	1,82 1,50	0,63	fixe variable	10
D	0,85	0,94			1,26	variable	5
Profondeurs nominales x^*	0,357	0,5	0,714	0,857			

Table 3.5 - Sur-résistances identifiées R_c (à multiplier par $10^{-4} \text{ } ^\circ\text{C m}^2/\text{W}$) pour l'expérience 4 (face avant) et valeurs nominales correspondantes.

Lorsqu'on compare ces résistances avec celles identifiées en face arrière - Tables 3.2 et 3.3 - on constate que les résistances obtenues en face avant sont plus faibles et plus proches de leurs valeurs nominales et ceci spécialement pour les défauts les moins profonds. Ceci ne peut être une conséquence de la sensibilité élevée du contraste à la résistance du défaut en face avant dans la première moitié de la plaque ($x^* < 0,5$) car

les écarts vont toujours dans le même sens. Remarquons que la valeur élevée de la résistance du défaut B_2 est confirmée par la technique en face avant; cette valeur élevée n'interfère pas du tout avec l'identification de la profondeur x^* de ce défaut, ce qui confirme l'indépendance des identifications de chaque paramètre en face avant.

3.6 - QUALITE DES IDENTIFICATIONS EFFECTUEES

3.6.1 - Limitations expérimentales

3.6.1.1 - Identification de la profondeur des défauts

Les profondeurs identifiées en face avant - voir Table 3.4 - sont très proches de leurs valeurs nominales et ceci, en dépit des deux phénomènes suivants qui ont pu perturber l'identification :

- afin de protéger le détecteur infrarouge de toute réflexion du flash sur la face avant, le champ de température sur cette face n'a pas été enregistré avant l'excitation et le champ initial de tension U_{ijref} - voir équation (38) - correspond en fait à l'émissivité et à la température d'un écran qui a été retiré manuellement aussitôt après l'excitation.
- l'écran de cadrage du champ a introduit de très forts effets de bord au voisinage des côtés de son ouverture et ces effets ne peuvent être éliminés par la normalisation locale. Remarquons d'ailleurs que ces effets de bord génèrent un flux radial même au centre de la plaque comme le montre le profil de la **figure 28a**.

Une autre limitation liée à la caméra est la mesure non-isochrone des pixels d'une trame due à l'unicité de son détecteur. Cet effet peut être important en face avant du fait de la rapidité des évolutions thermiques ; une correction est envisageable sur un thermogramme local T_{loc} , en travaillant à l'aide du temps de saisie du pixel correspondant t_{ijn} - voir équation (38). Par contre le contraste instantané ne peut être affecté à cet instant autrement que par une interpolation entre deux trames successives du thermogramme de référence T^* .

Notons que dans l'expérience 4, le contraste a pu être calculé par l'équation (43) pour laquelle les températures asymptotiques T_{∞} et $T_{O\infty}$ ont été relevées sur la dernière trame. Ceci n'est correct que si l'acquisition est suffisamment longue pour atteindre ces minima et ce, en l'absence de pertes, ce qui se traduit par l'existence d'un plateau du signal en fin d'enregistrement. Dans le cas contraire, la température asymptotique en chaque point, correspondant à une même énergie d'excitation Q lors d'une expérience adiabatique, peut être calculée à l'aide de la loi de décroissance de la température du modèle semi-infini sans défaut, appliquée aux temps courts, en s'inspirant de la technique de l'effusivité apparente développée par Balageas et col. [3] pour le CND en face avant. Si l'on appelle T_s la température en un point P de la plaque correspondant aux premiers instants de l'acquisition après l'excitation - temps t_s de la première trame par exemple - on a :

$$T_s = \frac{Q}{b\sqrt{\pi t_s}} \quad (44)$$

où b est l'effusivité thermique du matériau.

Si l'expérience était adiabatique, on aurait, pour une même excitation locale Q :

$$T_{\infty} = \frac{Q}{\rho c e} \quad (45)$$

Par élimination de Q entre les relations (44) et (45), on obtient :

$$T_{\infty} = T_s (\pi t_s^*)^{1/2} \quad (46)$$

où t_s^* est le nombre de Fourier correspondant à l'instant t_s . Le calcul de T_o en un point de référence sain P_o est identique à partir de la température T_o en ce point à l'instant t_s , ce qui permet de calculer le contraste local d'une nouvelle manière :

$$\Delta T_{loc}^* = \frac{1}{(\pi t_s^*)^{1/2}} \left[\frac{T}{T_s} - \frac{T_o}{T_{os}} \right] \quad (47)$$

Par rapport à l'expression (43), cette nouvelle écriture du contraste permet de mieux corriger la non uniformité de l'énergie absorbée Q et de

produire un contraste plus près du contraste sans perte aux temps courts (nul à $t = 0$). Par contre l'expression (43) produit vraisemblablement un meilleur contraste aux temps longs qui finit par s'annuler par construction. Une solution raisonnable serait d'utiliser l'expression (43) pour le calcul de m_1 ($p_1^* = 1$) et l'expression (47) pour le calcul de m_2 ($p_2^* = 4$).

3.6.1.2 - Identification de la résistance des défauts

Il a été montré plus haut que les profils de résistance de contact des défauts peuvent être obtenus tant en face avant qu'en face arrière. Cependant les valeurs identifiées en face avant sont nettement plus faibles que celles obtenues en face arrière. Ces différences peuvent provenir des conditions expérimentales de mesure en face avant déjà mentionnées au paragraphe 3.6.1.1. Par contre il a été démontré expérimentalement plus haut que les inhomogénéités d'éclairage n'avaient que peu d'incidence sur les valeurs des résistances identifiées en face arrière.

Comme au chapitre précédent, il est possible de se poser la question des intervalles de confiance des paramètres identifiés : ceux-ci sont liés au bruit de mesure des contrastes. Un point plus crucial qui mérite d'être examiné est celui de l'effet des erreurs de troncature sur l'estimation des transformées expérimentales de Laplace et celui de l'incertitude sur le temps ou la fréquence caractéristique ($= a/e^2$) de la plaque.

3.6.2 - Effet des erreurs de troncature, de l'incertitude sur le temps caractéristique de la plaque et de son caractère non homogène

3.6.2.1 - Biais de troncature

Du fait de la durée nécessairement limitée de l'acquisition, les deux transformées expérimentales m_1 et m_2 sont nécessairement différentes des transformées exactes $\Delta\theta_i^{**}$ ($i = 1$ ou 2) du contraste théorique et celui-ci peut alors s'écrire :

$$m_i = \Delta\theta_i^{**} + B_i \quad \text{avec } i = 1 \text{ ou } 2 \quad (48)$$

B_1 et B_2 étant les biais de troncature sur les transformées. En face avant, le contraste étant positif, on a :

$$B_1 < 0 \quad \text{et} \quad B_2 < 0$$

Ces deux biais de mesure introduisent donc une erreur systématique Δx^* sur la profondeur identifiée :

$$\Delta x^* = x_{\text{identifié}}^* - x_{\text{exact}}^*$$

Dans le cas où l'acquisition est suffisamment longue, les deux biais sont faibles devant les transformées et Δx^* peut alors être calculée à l'aide d'une linéarisation de l'expression donnant la profondeur théorique en fonction des deux transformées. Si on utilise la forme approchée (31) correspondant aux faibles résistances ou aux défauts proches de la surface, pour mener à bien cette analyse, on obtient :

$$\Delta x^* = \frac{\partial x^*}{\partial \Delta \theta_1^{**}} B_1 + \frac{\partial x^*}{\partial \Delta \theta_2^{**}} B_2 + O((B_1^2 + B_2^2)^{1/2}) \quad (49)$$

ce qui donne, après dérivation :

$$\Delta x^* = \frac{1}{2\alpha_1 R_c^*} \frac{\text{sh}^2(\alpha_1) \text{ch}[\alpha_1(1-x^*)]}{\text{sh}^3[\alpha_1(1-x^*)]} \left\{ B_1 - \frac{\text{ch}^2(\alpha_1)}{\text{ch}^2[\alpha_1(1-x^*)]} B_2 \right\} \quad (50)$$

Afin d'avoir une idée de l'ordre de grandeur de cette erreur de troncature, il est nécessaire de calculer les biais de Laplace B_1 et B_2 pour une durée finie t_{lim} de mesure du contraste. Ceci est possible si le système formé par les équations (1 à 6) est résolu par la méthode de séparation des variables. Les solutions en terme de contraste en faces avant et arrière sont données sous cette forme en Annexe 3.7. Le contraste est alors la différence de deux séries - T^* et T_0^* dont chaque terme décroît exponentiellement avec le temps. Si seul le premier terme de chaque série est conservé, on obtient un équivalent du contraste aux temps longs (à condition de prendre les équivalents au premier ordre des premiers coefficients et des constantes de temps correspondantes). Une intégration ultérieure du produit de ce contraste par l'exponentielle $\exp(-p^* t^*)$ entre t_{lim}^* ($= at_{\text{lim}}/e^2$) et

l'infini fournit alors le biais $B(p^*)$. Ceci permet de calculer une valeur approchée des biais B_1 et B_2 de l'expression (50) avec :

$$B_i = B(p^*) \quad \text{pour } i = 1, 2$$

Cette procédure a été suivie dans le cas d'un défaut médian ($x^* = 0,5$) - voir Annexe 3.7.

Pour une durée d'acquisition de 10 secondes sur une plaque contenant un défaut médian avec les caractéristiques suivantes :

$$\frac{a}{e^2} = 0,1 \quad \Rightarrow \quad t_{\text{lim}}^* = 1$$

on trouve les biais suivants en face avant ($p_1^* = 1$; $p_2^* = 4$) :

$$B_1 = - 7,2 \cdot 10^{-5} R_c^* \quad B_2 = - 2,75 \cdot 10^{-6} R_c^*$$

d'où l'erreur résultante sur la profondeur réduite calculée à partir de l'expression (50) :

$$\Delta x^* \approx - 3,74 \cdot 10^{-4}$$

On constate donc que le biais de troncature introduit une erreur tout à fait négligeable sur la profondeur identifiée. Ceci peut s'expliquer par la compensation qui se produit sur les erreurs sur m_1 et m_2 du fait de la seule présence du rapport m_2/m_1 dans l'expression approchée (31) de x^* .

En face avant il est possible de calculer de façon similaire l'erreur systématique ΔR_c^* induite par les deux biais de mesure du contraste de Laplace B_1 et B_2 - expression identique à l'équation (49) en remplaçant x^* par R_c^* . Si on calcule R_c^* à partir de la valeur de x^* identifiée précédemment et de l'équation (10) écrite en $p^* = p_1^*$, en négligeant le deuxième terme du dénominateur (cas des faibles résistances de contact), on obtient :

$$\Delta R_c^* \approx \frac{\text{sh}^2(\alpha_1)}{\text{sh}^4[\alpha_1(1-x^*)]} \left\{ (1 + 2 \text{sh}^2[\alpha_1(1-x^*)]) B_1 - \text{ch}^2(\alpha_1) B_2 \right\} \quad (51)$$

Pour un défaut médian correspondant aux biais calculés plus haut, on trouve :

$$\frac{\Delta R_c^*}{R_c^*} \approx + 0,20 \%$$

Là encore l'erreur de troncature n'introduit pas de biais important sur la résistance identifiée.

L'analyse de l'erreur induite en face arrière ΔR_c^* ($= R_c^*$ identifié - R_c^* exact) sur la résistance de contact du fait du biais de troncature s'effectue de façon analogue ; on obtient, en travaillant à partir du modèle approché, linéaire en R_c^* :

$$R_c^* \text{ identifié} = \frac{m_1^2 \operatorname{sh}(\alpha_1) \operatorname{th}(\alpha_1)}{m_2 \operatorname{ch}(\alpha_1) - m_1} \quad (52)$$

l'expression suivante pour l'erreur :

$$\Delta R_c^* = \frac{4 \operatorname{sh}(\alpha_1) \operatorname{th}(\alpha_1)}{(v - 1)^2} [v B_1 - \operatorname{ch}(\alpha_1) B_2] \quad (53)$$

avec :

$$v = \frac{\operatorname{ch}[\alpha_1(2x^* - 1)]}{\operatorname{ch}(\alpha_1)} \quad (54)$$

Dans le cas d'un défaut médian les biais B_1 et B_2 sont les opposés de ceux donnés plus haut pour la face avant et on trouve ainsi :

$$\frac{\Delta R_c^*}{R_c^*} \approx + 0,12 \%$$

L'erreur de troncature est là encore négligeable en face arrière.

3.6.2.2 - Effet de l'incertitude sur la fréquence caractéristique de la plaque

Si l'on considère l'expression approchée (31) de la profondeur du défaut calculée en face avant, on constate que celle-ci dépend du rapport r des deux transformées expérimentales m_1 et m_2 évaluées en p_1^* et p_2^* . Or, pour calculer ces dernières à partir du contraste local ΔT^* , il faut être capable d'exprimer celui-ci non en fonction du temps t mais en fonction du nombre de Fourier t^* , ce qui nécessite la connaissance de la fréquence thermique caractéristique $\beta (= a/e^2)$ de la plaque :

$$m(p^*) = \int_0^{\infty} \Delta T^*(t) \exp(-p^* \beta t) dt$$

avec :

$$t^* = \beta t$$

La dérivation par rapport à β conduit à :

$$\beta \frac{\partial m}{\partial \beta} = m - p^* \int_0^{\infty} t^* \Delta T^* \exp(-p^* t^*) dt^*$$

Le deuxième terme du membre de droite peut être exprimé en fonction de la dérivée de m par rapport à la variable réduite de Laplace :

$$\beta \frac{\partial m}{\partial \beta} = m + p^* \frac{dm}{dp^*}$$

En dérivant l'équation (31) par rapport à r et ensuite r par rapport à m_1 et m_2 , on montre :

$$\beta \frac{\partial}{\partial \beta} [x_{\text{identifié}}^*] = \frac{\text{sh}(\alpha_1 x^*) + x^* \text{sh}(\alpha_1) \text{sh}[\alpha_1 (1 - x^*)]}{2 \text{ch}(\alpha_1) \text{sh}[\alpha_1 (1 - x)]} \quad (55)$$

Si l'incertitude relative $\Delta\beta/\beta$ sur la fréquence caractéristique de la plaque est faible, on peut écrire :

$$\Delta x^* / (\Delta\beta/\beta) \approx \beta \frac{\partial}{\partial \beta} [x_{\text{identifié}}^*]$$

Δx^* étant l'erreur commise sur la profondeur identifiée due à l'erreur sur β .

Toujours en face avant, on montre en procédant de manière similaire :

$$\frac{\beta}{R_c^*} \frac{\partial}{\partial \beta} [R_{\text{cidentified}}^*] = 1 + \alpha_1 \frac{\text{sh}(\alpha_1 x^*) - x^* \text{sh}(\alpha_1) \text{ch}[\alpha_1(1-x^*)]}{\text{sh}(\alpha_1) \text{sh}[\alpha_1(1-x^*)]} + 2\alpha_1 \coth[\alpha_1(1-x^*)] \beta \frac{\partial}{\partial \beta} [x_{\text{identified}}^*] \quad (56)$$

Là encore, dans le cas des faibles erreurs sur β , cette expression peut être assimilée à :

$$(\Delta R_c^*/R_c^*)/(\Delta\beta/\beta)$$

ΔR_c^* étant l'erreur commise sur la résistance identifiée en face avant due à l'erreur sur β .

Les erreurs sur les paramètres identifiées en face avant et calculées grâce aux équations (55) et (56) sont données dans la Table 3.6.

x^*	0,05	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95
$\Delta x^*/(\Delta\beta/\beta)$	0,034	0,070	0,150	0,244	0,361	0,514	0,731	1,07	1,73	3,66	7,48
$(\Delta R_c^*/R_c^*)/(\Delta\beta/\beta)$	1,06	1,14	1,34	1,65	2,15	3,00	4,59	8,09	18,3	74,2	300

Table 3.6 - Erreurs sur les paramètres identifiés en face avant dues aux incertitudes sur les caractéristiques de la plaque ($\beta = a/e^2$)

Un calcul similaire peut être mené en face arrière permettant de trouver l'erreur ΔR_c^* , sur la résistance identifiée, causée par l'incertitude sur la fréquence caractéristique β ; on trouve :

$$(\Delta R_c^*/R_c^*)/(\Delta\beta/\beta) \approx \frac{4 \text{sh}(\alpha_1) \text{th}(\alpha_1)}{(v-1)^2} [v Y_1 - \text{ch}(\alpha_1) Y_2] \quad (57)$$

v étant défini par la relation (54) et Y_1 et Y_2 étant donnés par :

$$Y_i = Y(p_i^*) \quad \text{pour } i = 1 \text{ ou } 2$$

avec :

$$Y(p^*) = - \frac{1}{\text{sh}^2(\alpha)} \left\{ \text{sh}(\alpha x^*) \text{sh}[\alpha(1 - x^*)] (1 - \alpha \coth(\alpha)) + \alpha/2 (x^* \text{sh}[\alpha(1 - 2x^*)] + \text{sh}(\alpha x^*) \text{ch}[\alpha(1 - x^*)]) \right\}$$

Les erreurs sur la résistance identifiée en face arrière, calculées grâce à l'équation (57) sont données dans la Table 3.7 pour différentes profondeurs du défaut.

x^*	0,05 0,95	0,1 0,9	0,2 0,8	0,3 0,7	0,4 0,6	0,5
$(\Delta R_c^*/R_c^*)/(\Delta\beta/\beta)$	- 10,2	- 5,27	- 2,84	- 2,10	- 1,80	- 1,72

Table 3.7 - Erreur sur la résistance de contact identifiée en face arrière due à l'incertitude sur les caractéristiques de la plaque ($\beta = a/e^2$)

Remarquons que les coefficients d'erreur présentés dans les Tables 3.6 et 3.7 varient avec x^* de façon opposée aux sensibilités présentées sur les figures 13 a et b : là où les sensibilités sont fortes, les coefficients d'erreur sont faibles et vice versa.

Pour récapituler ce qui a été vu plus haut, il est manifeste que l'incidence sur la profondeur réduire x^* d'une erreur commise sur la fréquence caractéristique β est faible pour un défaut situé dans la première moitié de la plaque : ainsi pour un défaut médian, une erreur de 10 % sur β ne produit qu'une erreur de localisation du défaut correspondant à environ 5 % de l'épaisseur de la plaque.

Les effets de l'erreur sur β , sur l'identification de R_c^* vont en sens contraire suivant qu'on travaille en face avant ou en face arrière. Dans le premier cas l'incertitude relative sur β produit une erreur relative plus forte sur R_c^* qui s'amplifie au fur et à mesure que le défaut est plus profond dans la plaque. Dans le second cas, l'incertitude sur β a l'inci-

dence la plus faible sur l'identification de R_C^* pour un défaut médian. Remarquons cependant que cette analyse d'erreur n'explique pas les plus grandes résistances identifiées en face arrière par rapport aux valeurs obtenues en face avant. En effet, les paramètres utilisés lors de l'identification étaient les suivants :

$$a = 0,49 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s} \quad e = 2 \text{ mm} \implies \beta_{\text{calcul}} = 0,123 \text{ s}^{-1}$$

alors que l'identification de β par la méthode flash dans les zones sans défaut lors de la mesure en face arrière a donné les valeurs suivantes pour β :

$$\beta_{\text{identifié}} = 0,103 \text{ et } 0,110 \text{ s}^{-1}$$

ce qui signifie que l'incertitude sur β , $\Delta\beta/\beta$ est de l'ordre de + 12 à + 20 %, ce qui devrait conduire à des résistances identifiées surestimées en face avant et sous-estimées en face arrière d'après les résultats présentés dans les Tables 3.6 et 3.7.

3.2.6.3 - Effet de l'inhomogénéité de la plaque

La plaque étudiée est constituée de 14 plis qui forment une épaisseur totale de 2 mm - voir Annexe 3.6. Il s'agit donc d'un matériau non homogène et on peut se demander si la prise en compte de ce caractère composite n'entraîne pas des écarts sur les transformées de Laplace du contraste qui a jusqu'à présent porté sur une plaque homogène. Pour étudier l'influence de cet effet, le cas de la réponse, en face arrière ou avant, de la plaque saine à une excitation flash va être examinée. On peut diviser celle-ci en $n = 14$ cellules élémentaires, chaque cellule étant constituée d'un tricouche symétrique résine/carbone/résine. Degiovanni [15] a montré que l'empilement de ces n cellules est caractérisé par un quadripôle dont les coefficients $A_n = D_n$, B_n et C_n sont donnés par :

$$\begin{aligned} A_n &= \text{ch}(u_n) & B_n &= (B_o/C_o)^{\frac{1}{2}} \text{sh}(u_n) \\ C_n &= (C_o/B_o)^{\frac{1}{2}} \text{sh}(u_n) & \text{avec } u_n &= n \ln [A_o + (A_o^2 - 1)^{\frac{1}{2}}] \end{aligned}$$

A_0 , B_0 et C_0 sont les coefficients de la cellule tricouche élémentaire et leurs expressions sont données en Annexe 3.8 en fonction des paramètres suivants :

$$b'_i = (p/a_i)^{1/2} E_i/n \quad c'_i = \lambda_i (p/a_i)^{1/2} \quad \text{pour } i = 1 \text{ ou } 2$$

E_1 et E_2 étant les épaisseurs totales respectives des milieux 1 (résine) et 2 (carbone) dans le multicouche d'épaisseur $e (= E_1 + E_2)$.

Si on appelle $r_1 (= E_1/e)$ le taux volumique de résine et $r_2 (= 1 - r_1)$ celui de fibres de carbone, les grandeurs thermophysiques équivalentes du multicouche homogénéisé peuvent être calculées à partir de la loi des mélanges et de la composition en série des résistances thermiques :

$$\rho c = r_1 \rho_1 c_1 + r_2 \rho_2 c_2$$

$$\lambda = (r_1/\lambda_1 + r_2/\lambda_2)^{-1}$$

d'où la valeur de la diffusivité équivalente :

$$a = \lambda/\rho c$$

Si la variable de Laplace réduite p^* est construite à l'aide de cette diffusivité équivalente et de l'épaisseur de la plaque, les paramètres précédents s'écrivent :

$$b'_i = \frac{r_i}{n} \left(\frac{a}{a_i}\right)^{1/2} \alpha \quad c'_i = \frac{\alpha}{R} \frac{b_i}{b} \quad \text{pour } 1 \text{ ou } 2$$

avec :

$$\alpha = \sqrt{p^*} \quad p^* = pe^2/a \quad \text{et } R = e/\lambda$$

b_1 , b_2 et B étant les effusivités thermiques respectives de la résine, du carbone, et du multicouche homogénéisé.

La transformée de Laplace réduite θ_n^{**} de la température, en face arrière ou avant du multicouche, peut alors être comparée à celle θ_e^{**} du même multicouche homogénéisé (dont les coefficients sont donnés en annexe A3.8) ; on a alors :

$$R_f = \frac{\theta_n^{**}}{\theta_e^{**}} = \frac{A_n C_e}{A_e C_n} = \frac{\alpha \operatorname{th}(\alpha)}{R} \frac{A_n}{C_n} \quad \text{en face avant}$$

et :

$$R_r = \frac{\theta_n^{**}}{\theta_e^{**}} = \frac{C_e}{C_n} = \frac{\alpha \operatorname{sh}(\alpha)}{RC_n} \quad \text{en face arrière}$$

Ces deux rapports ont été calculés en fonction de p^* en prenant les caractéristiques thermophysiques suivantes :

- pour la résine : $\lambda_1 = 0,2 \text{ SI}$ $\rho_1 c_1 = 2,0 \cdot 10^6 \text{ SI}$ $r_1 = 0,3$
- pour le carbone : $\lambda_2 = 18,2 \text{ SI}$ $\rho_2 c_2 = 1,457 \cdot 10^6 \text{ SI}$ $r_2 = 0,7$

Remarquons ici que les propriétés du carbone - ou plutôt les propriétés transverses des fibres de carbone - ont été ajustées de manière à ce que les propriétés du milieu homogénéisé équivalent correspondent aux valeurs présentées en Table 3.1.

Les deux rapports R_f et R_r sont présentés en Table 3.8 pour le multicouche étudié ($n = 14$) et pour le composite correspondant constitué d'une seule cellule tricouche ($n = 1$).

n ↓	$p^* \rightarrow$	0	0,01	1	4	10	100
14	R_f	1	1	1,00038	1,0014	1,0034	1,033
	R_r	1	1	1,00045	1,0020	1,0059	1,112
1	R_f	1	1,00081	1,07	1,21	1,36	1,62
	R_r	1	1,00081	1,081	1,31	1,75	10,2

Table 3.8 - Rapport des transformées de Laplace des températures du multicouche et de la plaque homogénéisée, en face avant (R_f) et en face arrière (R_r)

Il est manifeste que, pour la plaque qui a été étudiée, l'effet de non homogénéisation sur les transformées m_1 et m_2 , est tout à fait négligeable car il ne provoque qu'une variation, inférieure à 0,2 %, de la transformée de la température T_o^* (pour $p^* = 1$ ou 4) - voir équation (9). Il peut paraître surprenant que l'homogénéisation soit moins rapide en face arrière qu'en face avant ($R_r > R_f$). Ceci est dû au fait que le rapport des effusivités de la résine (couche en face avant) et du matériau homogénéisé est voisin de l'unité ($b_1/b \approx 0,62$) ; or c'est justement l'effusivité thermique qui détermine le thermogramme aux temps courts en face avant - voir équation (44) - instants qui "pèsent" le plus dans le calcul des transformées de Laplace.

3.7 - REMARQUES GENERALES ET PERSPECTIVES

L'outil principal utilisé ici pour la détection et l'identification des délaminages dans les composites stratifiés est le modèle unidirectionnel adiabatique transitoire de contraste thermique. Si certaines conditions sont respectées, les déviations de ce modèle - pertes, effet capacitif, rayonnement interne au délaminage - n'ont qu'une influence négligeable sur le contraste thermique. Il en est de même des effets bi-directionnels pourvu que certains critères soient vérifiés. L'analyse de la sensibilité a permis de fixer les limites de l'identification des deux paramètres du défaut. Un découplage analytique de ces deux paramètres dans l'expression de la transformée de Laplace du contraste a permis d'exprimer directement la résistance de contact du délaminage en face arrière et sa profondeur en face avant et ce, en fonction de deux transformées bien choisies du contraste. Cette nouvelle technique a été mise en oeuvre pour l'identification en résistance sur des contrastes bi-dimensionnels calculés.

La définition d'un contraste normalisé localement a permis de traiter des trames expérimentales obtenues par thermographie infrarouge en s'affranchissant de la subjectivité de l'expérimentateur dans le choix de la zone saine de référence : cette écriture du contraste réduit ou supprime les effets bi-directionnels produits principalement par une absorption non uniforme de l'énergie du flash en face avant. Elle prend également partiel-

lement en compte les effets de non uniformité des pertes sur les deux faces ainsi que la variation éventuelle d'épaisseur de la plaque ou de chacune des couches de part et d'autre d'un défaut éventuellement capacitif. Les effets de la non-uniformité de l'émissivité dans la bande de détection et des réflexions de l'environnement sont complètement supprimés.

Les expériences effectuées en détection face arrière ou face avant sur une plaque d'essai contenant des inserts de téflon de différentes épaisseurs, profondeurs et extensions radiales, simulant des délaminages, ont été traités par cette nouvelle technique (contraste normalisé localement + transformées expérimentales de Laplace). Des profils de résistance de contact (et donc d'épaisseur de délaminage) ont été obtenus de façon quasi automatique en face arrière, ainsi que des profils de profondeur en face avant, par une application de l'équation unidirectionnelle d'inversion et ce, pixel par pixel. La technique face avant peut même générer les profils de résistance de contact (pour des délaminages peu profonds).

Les limitations expérimentales (manipulations qui peuvent être améliorées) ont été passées en revue ainsi que les remèdes éventuels correspondants. Les effets du biais de troncature dans le calcul de la transformée expérimentale de Laplace ont été étudiés ainsi que ceux dus à l'incertitude sur la fréquence thermique caractéristique de la plaque. Le problème de l'homogénéisation de la plaque a été également examiné. Ces effets ne suffisent cependant pas à expliquer les différences existantes entre les profils de résistance identifiés sur les mêmes défauts en face arrière et en face avant. Celles-ci sont probablement dues aux mauvaises conditions expérimentales en face avant. Les résultats expérimentaux obtenus sont corroborés qualitativement par les essais non destructifs effectués sur la même plaque d'essai par une technique ultrasonore.

Il est possible de récapituler les avantages de cette méthode de contrôle non destructif :

- c'est une technique intégrale qui réduit le bruit de mesure (filtrage par transformée de Laplace).

- la détection est directe et les diamètres des défauts peuvent être mesurés en utilisant les profils de résistance de contact identifiée.
- une surface importante peut être contrôlée en une seule expérience en utilisant une excitation flash même non rigoureusement uniforme car les effets bi-dimensionnels sont corrigés.
- un traitement de surface ou une mise en peinture de la plaque à contrôler n'est pas nécessaire.
- la production des profils d'épaisseur ou de profondeur de délaminage peut être automatisée en utilisant l'outil informatique.

Cette méthode peut être également utilisée pour l'imagerie en épaisseur ou en profondeur des délaminages (images au lieu de profils).

Les extensions éventuelles peuvent également se produire en amont au niveau par exemple de la différenciation qualitative de deux "anomalies" de types différents de la plaque étudiée : peut-on reconnaître par exemple un changement d'épaisseur d'un délaminage à partir d'une série de trames infrarouges ?

En conclusion, ce travail a permis de résoudre un problème de type purement inverse - identification de deux fonctions $R_c^*(P)$ et $x^*(P)$ dépendant du pixel examiné, à partir du champ transitoire bidimensionnel de température surfacique $T(x,y,t)$ grâce à une solution explicite ne dépendant que du thermogramme (ou plutôt du contraste) du pixel considéré - découplage des pixels par résolution d'un problème purement local d'estimation de paramètre.

BIBLIOGRAPHIE - CHAPITRE 3

- [1] - J.C. KRAPEZ, Contribution à la caractérisation des défauts de type délaminage ou cavité par thermographie stimulée, Thèse , Ecole Centrale de Paris (mars. 1991).
- [2] - D. BALAGEAS, J.C. KRAPEZ and P. CIELO, Pulsed photothermal modeling of layered materials, J. Appl. Phys., 59, pp. 348-357 (1986).
- [3] - D. BALAGEAS, A. DEOM et D. BOSCHER, Contrôle non destructif des composites carbone-époxy par méthode photothermique impulsionnelle, Revue Générale de Thermique, n° 301, pp. 37-41, janv. 1987.
- [4] - D.M. BOSCHER, A.A. DEOM, G. GARDETTE and D.L. BALAGEAS, Thermal NDT of carbon-epoxy laminates, Proc. EURO THERM 4, Nancy, pp. 112-115 (28-29 june 1988).
- [5] - P. CIELO, X. MALDAGUE, A.A. DEOM and R. LEWARK, Thermographic non destructive evaluation of industrial materials and structures, Materials Evaluation, 45, pp. 452-466 (1987).
- [6] - V.P. VAVILOV and R. TAYLOR, Research Techniques in NDT, Ed. 5, Academic Press, London, 1982.
- [7] - A.S. LAMINE, A. DEGIOVANNI and D. MAILLET, Detection of subsurface defects by a thermal method, Proceedings of the Internal Congress "Advancing with composites", Milano, pp. 313 to 320 (may 10-12, 1988).
- [8] - A.S. LAMINE, Caractérisation de défauts dans les matériaux composites par thermographie infrarouge, Thèse , I.N.P.L., Nancy (novembre 1988).
- [9] - A.S. LAMINE, D. MAILLET et A. DEGIOVANNI, Modélisation et détection d'un défaut limité dans un matériau composite, Colloque EURO THERM 4 "Thermal transfer in composite materials and at solid-solid interface, pp. 101 à 104, Nancy (28-30 juin 1988).
- [10] - A.S. HOULBERT, A. DEGIOVANNI et J.M. ROUX, Modélisation d'un défaut 2D dans un multimatériau anisotrope en vue de sa détection par thermographie infrarouge, Communication, Journée S.F.T. "Méthodes thermiques des contrôles non destructifs", Paris (24 janvier 1990).
- [11] - A.S. LAMINE, P. PIERRE et A. DEGIOVANNI, Modélisation de défauts subsurfaciques et technique d'identification, application à des matériaux composites, Communication, Journée S.F.T. "Méthodes thermiques des contrôles non destructifs", Paris (24 janvier 1990).
- [12] - S. DIDIERJEAN, Modèle bidimensionnel des transferts de chaleur dans un matériau défectueux. Caractérisation des défauts par transformation de Laplace, Mémoire de Diplôme d'Etudes Approfondies - LEMTA - Nancy, septembre 1990.

- [13] - A.S. HOULBERT, A.S. LAMINE et A. DEGIOVANNI, Modélisation d'un défaut limité en vue du contrôle non destructif des multimatériaux anisotropes, *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 34, n° 4/5, pp. 1125-1138 (1991).
- [14] - A.S. HOULBERT, Détection de défauts subsurfaciques dans les matériaux composites par thermographie infrarouge. Identification de la profondeur et de la résistance thermique d'un défaut 1D par transformée de Laplace, *Rapport technique du LEMTA* - (juillet 1990).
- [15] - A. DEGIOVANNI, Systèmes multicouches : problèmes liés à l'homogénéisation des caractéristiques thermiques, *Revue Générale de Thermique*, n° 339, pp. 117-128 (mars 1990).
- [16] - N.R. Keltner and J.V. Beck, Unsteady Surface Element Method, *ASME Journal of Heat Transfer*, vol. 103, pp. 759-764 (1981).
- [17] - D. BALAGEAS, D. BOSCHER, A. DEOM, J. FOURNIER et R. HENRY, La thermographie infrarouge : un outil quantitatif à la disposition du thermicien, *Revue Générale de Thermique*, n° 322, pp. 501-510 (oct. 1988).
- [18] - A. DEGIOVANNI, A.S. LAMINE, A.S. HOULBERT and D. MAILLET, Identification of subsurface defects by a thermal method using a sensitivity analysis, *Proceedings of the 4th European Conference on Composite Materials*, Stuttgart, pp. 691-696 (25-28 septembre 1990).
- [19] - A. DEGIOVANNI, A.S. HOULBERT et D. MAILLET, Modélisation de défauts subsurfaciques et méthode thermique d'identification par transformée de Laplace expérimentale, *Compte rendu des 7èmes Journées Nationales sur les Composites*, Lyon, pp. 519-527 (6-8 novembre 1990).
- [20] - D. MAILLET, A.S. HOULBERT, S. DIDIERJEAN and A. DEGIOVANNI, Non destructive thermal evaluation at LEMTA. Delaminations inside a laminate : the identification problem, *Article soumis à Composite Science and Technology*, Elsevier Applied Science.
- [21] - D. MAILLET, A.S. HOULBERT, S. DIDIERJEAN and A. DEGIOVANNI, Identification of a contact resistance located at any depth inside a laminated composite material using experimental Laplace transforms and thermography, *Proceedings of the 4th Annual Inverse Problems in Engineering Seminar*, East Lansing (June 10-11, 1991).

CHAPITRE 4

CONDUCTION INVERSE APPLIQUÉE À LA MESURE DU COEFFICIENT DE TRANSFERT

SUR UN CYLINDRE EN ÉCOULEMENT TRANSVERSE

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36 37 38 39 40 41 42 43 44 45 46 47 48 49 50 51 52 53 54 55 56 57 58 59 60 61 62 63 64 65 66 67 68 69 70 71 72 73 74 75 76 77 78 79 80 81 82 83 84 85 86 87 88 89 90 91 92 93 94 95 96 97 98 99 100

CONDUCTION INVERSE APPLIQUÉE À LA MESURE DU COEFFICIENT DE TRANSFERT SUR UN CYLINDRE EN ÉCOULEMENT TRANSVERSE

4.1 - INTRODUCTION

La mesure du coefficient local de transfert de chaleur h par une méthode directe (ni optique, ni analogique) entre un point P d'une paroi et un fluide à la température T_e , pose des problèmes de métrologie car il faut mesurer au même endroit une température de surface T et un flux de chaleur ϕ qui traverse une portion ΔS de la surface centrée sur P (figure 1).

Dans le cas d'une géométrie cylindrique, typique par exemple d'un échangeur de chaleur à courants croisés, le problème est facilité car la sonde de température peut être déplacée angulairement par une rotation du cylindre.

Le flux est généralement créé par une résistance électrique qui est, soit pelliculaire entourant le cylindre (flux uniforme) [1], soit localisée en P avec des gardes et compensations et une génération de chaleur sur l'axe [2]. Dans ces expériences, la sonde de température ne peut mesurer avec précision la température de surface si celle-ci n'est pas uniforme. En outre, l'évaluation des pertes thermiques est délicate.

Une autre méthode a été développée récemment au LEMTA [3 et 4] ; elle consiste, à partir d'une température mesurée au coeur du cylindre et d'une condition limite interne imposée et connue, à remonter à la condition limite de Fourier sur la surface externe du cylindre, c'est-à-dire au coefficient h . C'est une synthèse de ces travaux qui est présentée ici.

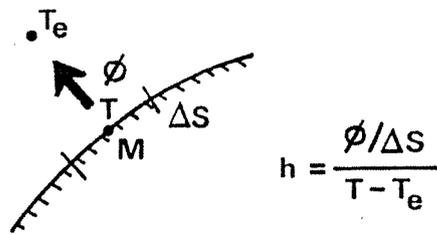


Fig. 1. Mesure directe du coefficient local de transfert

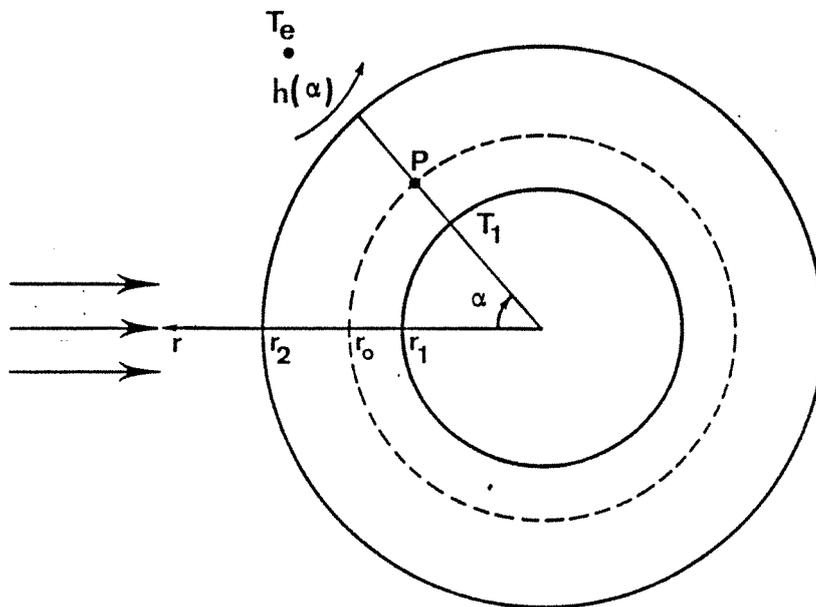


Fig. 2. Géométrie du modèle

4.2 - LE PROBLEME DIRECT

4.2.1 - Modélisation

Dans le problème direct, on cherche à calculer la température T en un point P d'un tube cylindrique de coordonnées polaires (r, α) compris entre deux surfaces cylindriques de rayons r_1 et r_2 (figure 2). On impose une température uniforme sur le rayon intérieur r_1 et un coefficient de transfert h variant avec l'abscisse angulaire α sur la surface extérieure r_2 . On s'impose en outre une symétrie de h par rapport au plan $\alpha = 0$. La température est alors solution de l'équation de la chaleur et des conditions (limites, de parité et de périodicité) suivantes :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \alpha^2} \right) = 0 \quad (1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} T \text{ fonction paire en } \alpha \end{array} \right. \quad (2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} T \text{ périodique de période } 2\pi \text{ en } \alpha \end{array} \right. \quad (3)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} T = T_1 \quad \text{en } r = r_1 \end{array} \right. \quad (4)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -\lambda \frac{\partial T}{\partial r} = h(\alpha) [T - T_e] \quad \text{en } r = r_2 \end{array} \right. \quad (5)$$

La dernière condition (5) interdit l'utilisation de la méthode de séparation des variables à cause de la non constance de h . Pour pallier cet inconvénient, il est possible d'utiliser la méthode fluxmétrique [5] qui se rapproche de la méthode développée par Keltner et Beck [6] en régime transitoire. Elle consiste, dans un premier temps, à imposer à la place de (5) une condition de densité de flux variable $\varphi (= \dot{Q}/\Delta s)$ sur la surface extérieure :

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial r} = \varphi(\alpha) \quad (6)$$

Le problème peut alors être résolu en exprimant la température T en fonction de $\varphi(\alpha)$. Cette densité de flux sera identifiée dans un deuxième temps en égalant les membres de droite des conditions (5) et (6).

Pour rendre homogène la condition (4), on fait un changement de fonction :

$$\theta(r, \alpha) = T_1 - T(r, \alpha) \quad (7)$$

Le problème est alors linéaire, à coefficients constants et homogènes, à l'exception de la condition (6). Il est résolu par séparation des variables [7] :

$$\theta(r, \alpha) = \mu \sum_{n=0}^{\infty} a_n g_n(x) \cos(n\alpha) \quad (8)$$

avec :

$$\mu = 2r_2/(\lambda\pi)$$

$$x = r/r_2$$

$$a_n = \int_0^{\pi} \varphi(\alpha') \cos(n\alpha') d\alpha' \quad (9)$$

$$g_0(x) = \frac{1}{2} \ln(x/k)$$

$$g_n(x) = \frac{1}{nx^n} \frac{x^{2n} - k^{2n}}{1 + k^{2n}} \quad \text{si } n \geq 1$$

$$k = r_1/r_2$$

4.2.2 - Résolution exacte

φ est alors solution de l'équation intégrale suivante :

$$\varphi(\alpha) = h(\alpha) [\theta_e - \theta_2(\alpha)] \quad (10)$$

avec :

$$\theta_e = T_1 - T_e$$

$$\theta_2(\alpha) = \theta(r_2, \alpha)$$

ou encore, en tenant compte de l'équation (8) :

$$\varphi(\alpha) + \mu \int_0^{\pi} Q(\alpha, \alpha') \varphi(\alpha') d\alpha' = f(\alpha) \quad (11)$$

avec :

$$Q(\alpha, \alpha') = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(\alpha) v_n(\alpha')$$

$$u_n(\alpha) = g_n(1) h(\alpha) \cos(n\alpha)$$

$$v_n(\alpha') = \cos(n\alpha')$$

$$f(\alpha) = \theta_e h(\alpha)$$

L'équation (11) est une équation intégrale à noyau dégénéré [8] dont la solution est la suivante :

$$\varphi(\alpha) = \mu \sum_{n=0}^{\infty} z_n u_n(\alpha) + f(\alpha) \quad (12)$$

les coefficients z_n étant solution du système suivant :

$$z_n - \mu \sum_{\ell=0}^{\infty} t_{n\ell} z_{\ell} = f_n \quad (n = 0, \infty) \quad (13)$$

avec :

$$t_{n\ell} = \int_0^{\pi} v_n(\alpha') u_{\ell}(\alpha') d\alpha'$$

$$f_n = \int_0^{\pi} v_n(\alpha') f(\alpha') d\alpha'$$

La solution analytique exacte $\theta(r, \alpha)$ est alors obtenue en remplaçant $\varphi(\alpha)$, par son expression (12) dépendant de $h(\alpha)$ dans la définition (9) des coefficients a_n de la série de Fourier (8).

4.2.3 - Solution analytique approchée

Dans la pratique, le calcul des coefficients Z_n entrant dans l'écriture (12) de φ nécessite la résolution du système linéaire (13) comportant un grand nombre d'équations (idéalement l'infini), ce qui peut poser un problème de conditionnement de matrice lorsqu'on augmente la borne supé-

rieure de n . Par ailleurs, lorsque l'on va examiner le cas du problème inverse, les valeurs recherchées pour φ et h sur $[0, \pi]$ ne pourront plus être continues. Nous nous proposons d'examiner le cas particulier où la fonction φ est constante par morceaux :

$$\begin{aligned} \varphi(\alpha) &= \varphi_i && \text{pour } \alpha_{i-1} \leq \alpha < \alpha_i \\ & && \text{avec } \alpha_i = i \frac{\pi}{N} \\ & && \text{et } 1 \leq i \leq N \end{aligned}$$

Les coefficients a_n peuvent alors être exprimés en fonction des valeurs discrètes φ_i :

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{\pi}{N} \sum_{i=1}^N \varphi_i \\ a_n &= \sum_{i=1}^N \frac{\Delta_{ni}}{n} \varphi_i && \text{si } n > 0 \end{aligned}$$

avec :

$$\Delta_{ni} = \sin(n\alpha_i) - \sin(n\alpha_{i-1})$$

La température θ est alors une combinaison linéaire des densités de flux φ_i :

$$\theta(r, \alpha) = \sum_{i=1}^N d_i \varphi_i = \mathbf{d}^t \boldsymbol{\varphi} \quad (14)$$

avec :

$$d_i(x, \alpha) = \mu \left[\frac{\pi}{N} g_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \Delta_{ni} g_n(x) \cos(n\alpha) \right]$$

On définit le coefficient de transfert moyen h_i sur l'intervalle $[\alpha_{i-1}, \alpha_i]$ comme le rapport de la densité moyenne de flux à l'écart moyen de température à la paroi :

$$h_i = \varphi_i / (\theta_e - \bar{\theta}_{2i}) \quad (15)$$

avec :

$$\bar{\theta}_{2i} = \frac{N}{\pi} \int_{\alpha_{i-1}}^{\alpha_i} \theta(r_2, \alpha) d\alpha$$

$\bar{\theta}_{2i}$ peut être calculé par intégration de (14) en $x = 1$:

$$\bar{\theta}_{2i} = \sum_{j=1}^N C_{ij} \varphi_j \quad (16)$$

avec :

$$C_{ij} = \mu \left[\frac{\pi}{N} g_0(1) + \frac{N}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} g_n(1) \Delta_{ni} \Delta_{nj} \right]$$

En combinant les relations (15) et (16), les densités de flux sont solution de l'équation :

$$\mathbf{A} \varphi = \mathbf{u} \quad (17)$$

avec :

$$\mathbf{A} = (\mathbf{C} + \mathbf{H}) / \theta_e$$

$$H_{ij} = \delta_{ij} / h_i \quad \text{pour } 1 \leq i \leq N \quad \text{et } 1 \leq j \leq N$$

$$u_i = 1$$

δ_{ij} étant le symbole de Kronecker.

La solution approchée du problème direct est donc :

$$\theta(r, \alpha) = \mathbf{d}^t \mathbf{A}^{-1} \mathbf{u} \quad (18)$$

4.2.4 - Résultats du modèle direct

Pour valider le modèle direct, examiner la faisabilité de la méthode inverse et étudier l'influence du pas de discrétisation angulaire, nous sommes donné une fonction $h(\alpha)$ représentative du refroidissement d'un

cylindre, de 32 mm de diamètre extérieur, par un écoulement forcé d'air en régime subcritique ($\alpha = 0$ étant la direction de l'écoulement amont) :

- h constant égal à $250 \text{ W m}^{-2}\text{K}^{-1}$ sur $[0, 40^\circ]$
- décroissance linéaire de h jusqu'à $100 \text{ W m}^{-2}\text{K}^{-1}$ sur $[40^\circ, 80^\circ]$
- croissance linéaire de h jusqu'à $200 \text{ W m}^{-2}\text{K}^{-1}$ sur $[80^\circ, 180^\circ]$

Le rayon intérieur est de 8 mm - rapport de forme k de 0,5 - la température est calculée pour un rayon r_o de 14 mm et la conductivité thermique du matériau constituant le tube est de $0,26 \text{ W m}^{-1}\text{K}^{-1}$. L'écart de température extrême θ_e du système est de 40°C .

Les résultats du modèle sont représentés en termes de profils de température θ_o pour un rayon r_o de 14 mm et de densité de flux pariétal q_2 (figures 3a, b et c) pour des discrétisations sur 5, 9 et 18 intervalles. Les N coefficients h_i représentés (entrée du modèle) sont les moyennes sur chaque intervalle de la fonction $h(\phi)$ donnée plus haut.

Il est à noter que les variations de température sont mesurables - de l'ordre de $2,5^\circ\text{C}$ - et que la sensibilité du profil de θ_o au nombre d'intervalles N est faible. Lorsque l'on donne à N les valeurs successives suivantes : 5, 9, 18 et 36, l'écart maximum local passe de 15 à 12 puis 2 centièmes de degré Celsius tandis que l'écart quadratique moyen passe de 7,2 à 3 puis 0,5 centième de degré Celsius, ce qui nous a permis de travailler avec une valeur optimum de 18 intervalles.

4.3 - ETUDE DE LA SENSIBILITE

4.3.1 - Sensibilité au flux pariétal et au niveau de discrétisation

L'équation (16) souligne la difficulté de l'estimation du coefficient local de transfert par la seule mesure en paroi des flux ϕ et différences de température $T_2 - T_e$ locaux. Il est en effet possible de définir le coeffi-

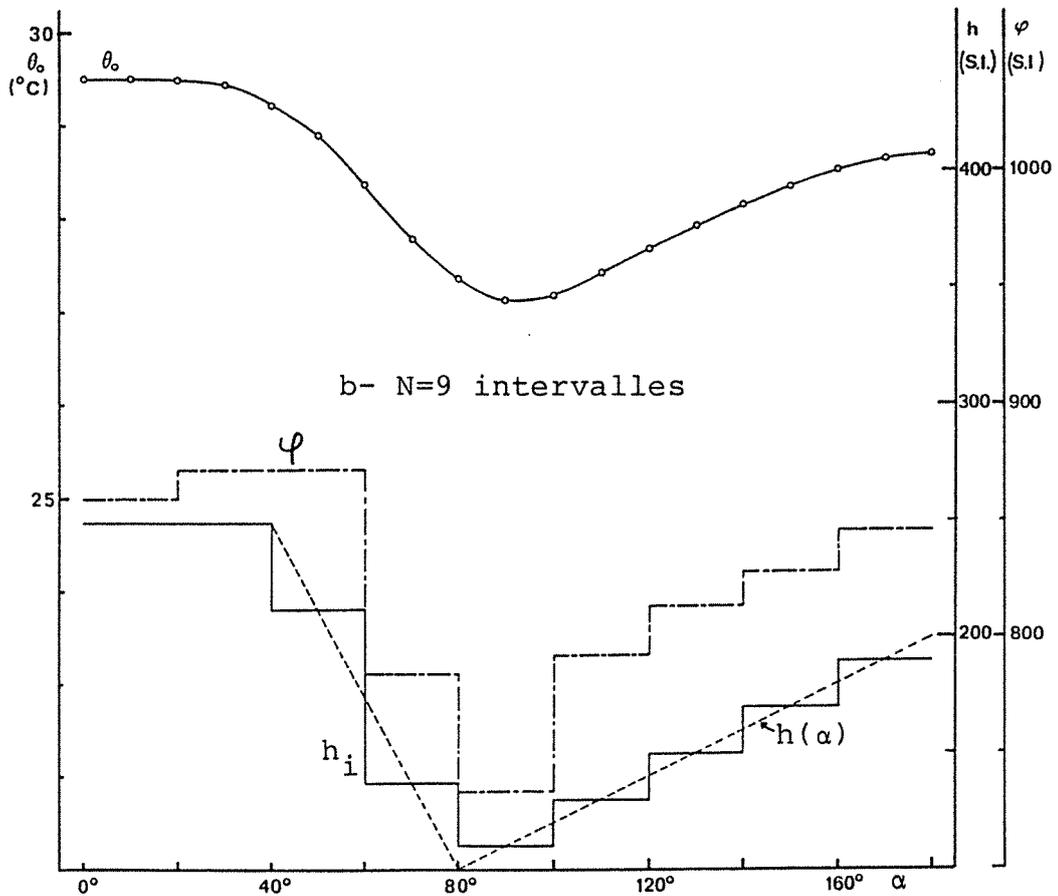
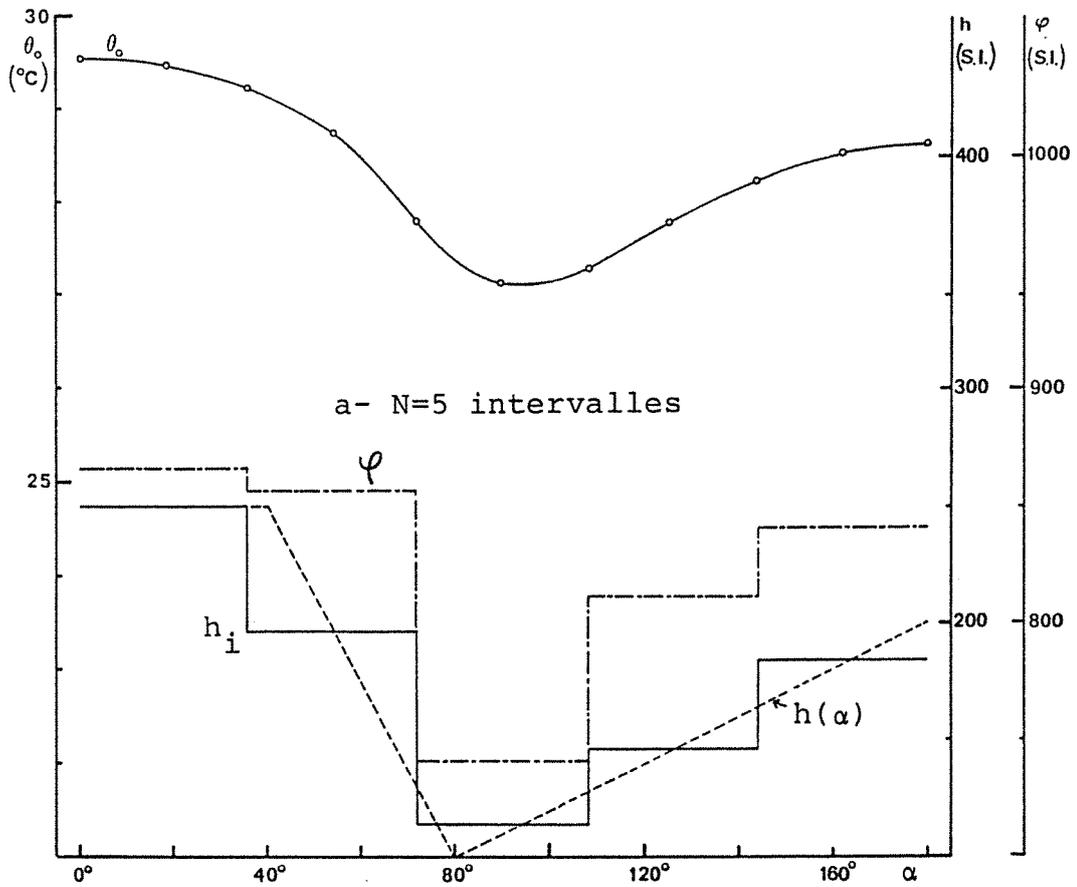


Fig. 3. Résultats du modèle direct - influence du pas de discrétisation angulaire

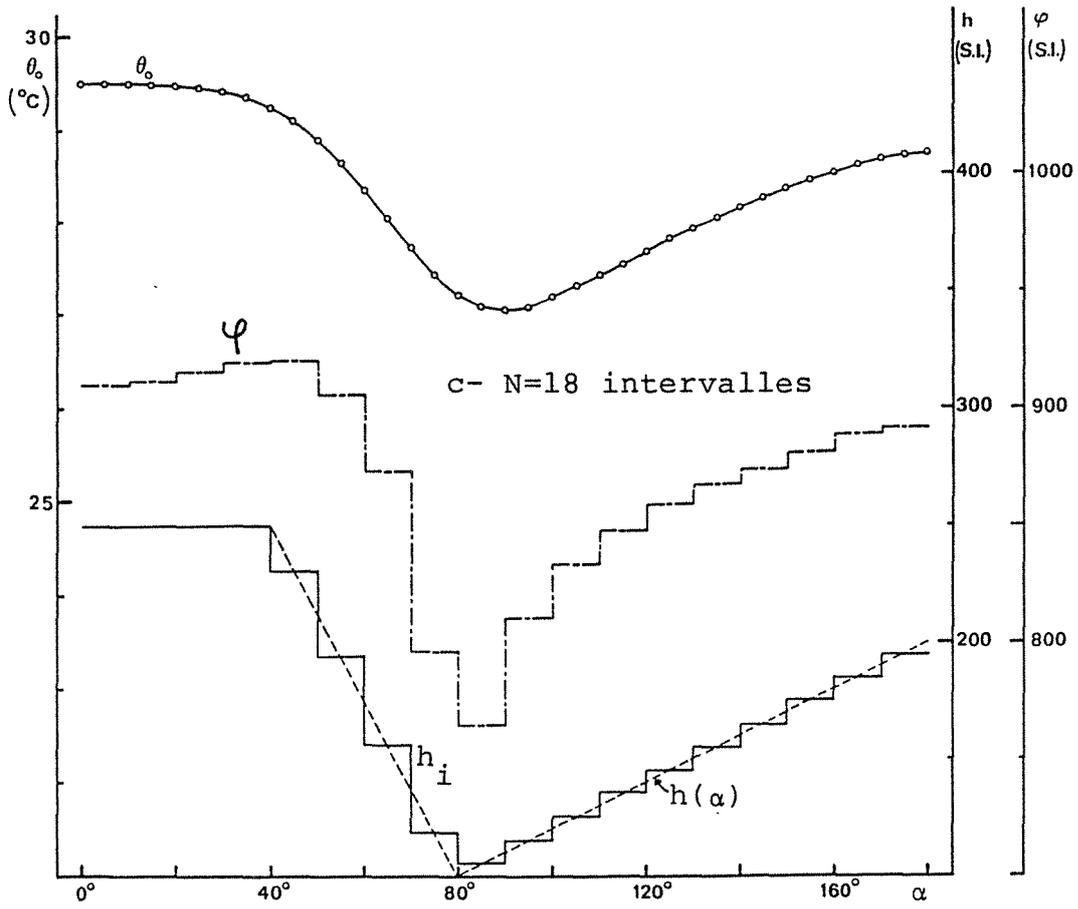


Fig. 3. (suite)

coefficient de sensibilité X_{ij} de la température moyenne pariétale sur le i ème intervalle $\bar{\theta}_{2i}$ à la densité moyenne de flux sur le j ème intervalle φ_j :

$$X_{ij} = \frac{\partial \bar{\theta}_{2i}}{\partial \varphi_j} = C_{ij} \quad (19)$$

Ce coefficient de sensibilité est indépendant de la condition limite de flux pariétal en $r = r_2$ du fait de la linéarité du problème conductif en φ . X_{ij} est tracé, pour $N = 9$ intervalles, un facteur de forme k de 0,5 et pour les valeurs précédentes de r_2 et de λ sur la **figure 4a**. On constate que les termes non diagonaux de la matrice C ne sont pas nuls traduisant le couplage entre température et flux pour différentes positions angulaires. Ce couplage croît en outre comme le rapport r_2/λ .

Les profils de X_{ij} présentés sur la **figure 4** présentent des maxima plus élevés pour les valeurs extrêmes des angles de la température $\bar{\theta}_{2i}$ (10° , 30° , 150° et 170°) ; ceci n'est dû qu'à la condition de symétrie qui a été adoptée pour le profil $h(\alpha)$; ainsi le coefficient de sensibilité X_{ij} de la température $\bar{\theta}_{2i}$ à un angle de 10° au flux φ_j au même angle de 10° incorpore également la sensibilité au flux à un angle de -10° si l'on considère le profil de $h(\alpha)$ sur l'ensemble des 360° sans cette hypothèse. Dans ce dernier cas, tous les profils de X_{ij} , pour une valeur constante de l'angle de la température, se déduisent les uns des autres à partir d'une translation angulaire d'un même profil (ce profil de référence étant très proche du profil à 90° de la **figure 4a**).

Il est intéressant d'examiner l'effet de la discrétisation adoptée sur les coefficients de sensibilité X_{ij} en paroi. La **figure 4b** montre les profils de ce coefficient pour $N = 5$ intervalles angulaires et les mêmes valeurs des autres paramètres que sur la **figure 4a**. On remarque que cette nouvelle discrétisation plus grossière produit des coefficients de sensibilité plus élevés qui traduisent la diminution du nombre de paramètres (les flux φ_i) modélisant la condition limite du transfert.

En pratique la mesure de température est souvent interne et il est utile d'étudier la sensibilité de cette température locale θ_{oi} (angle α_i ,

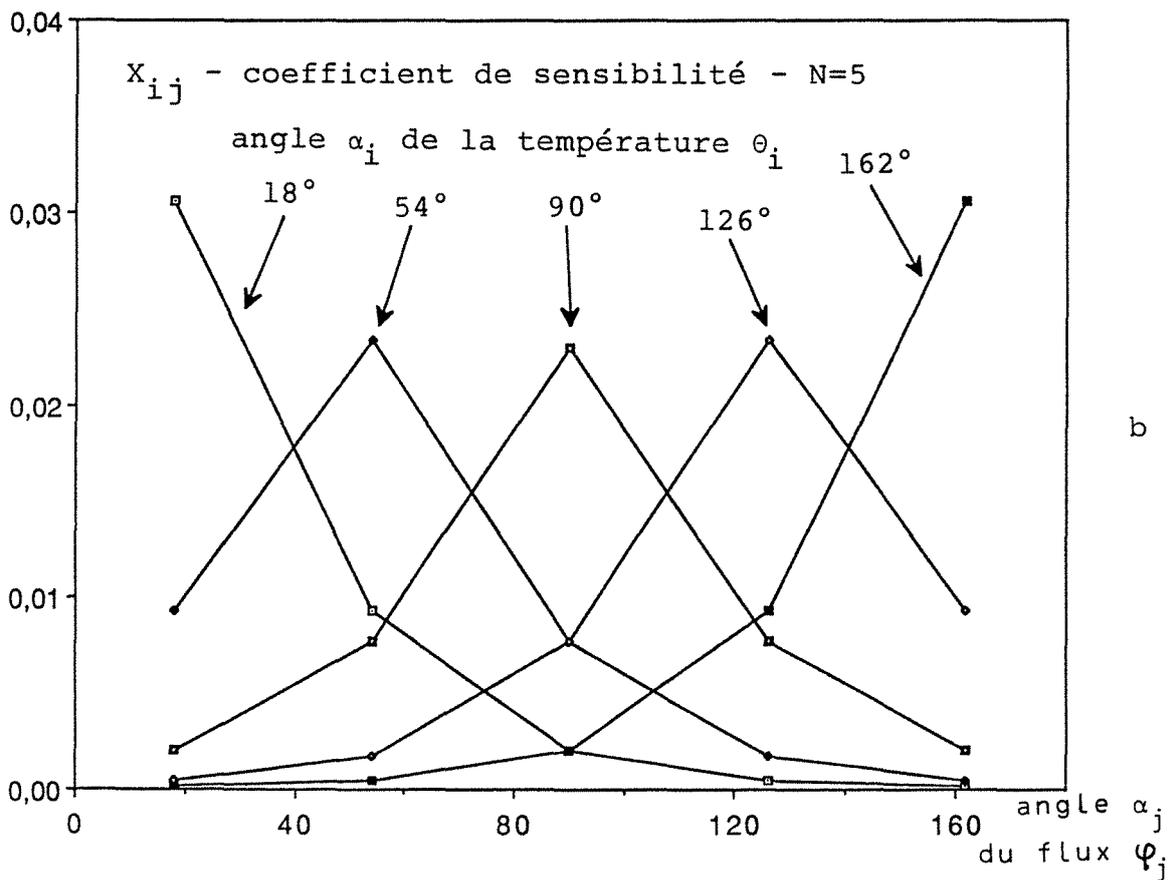
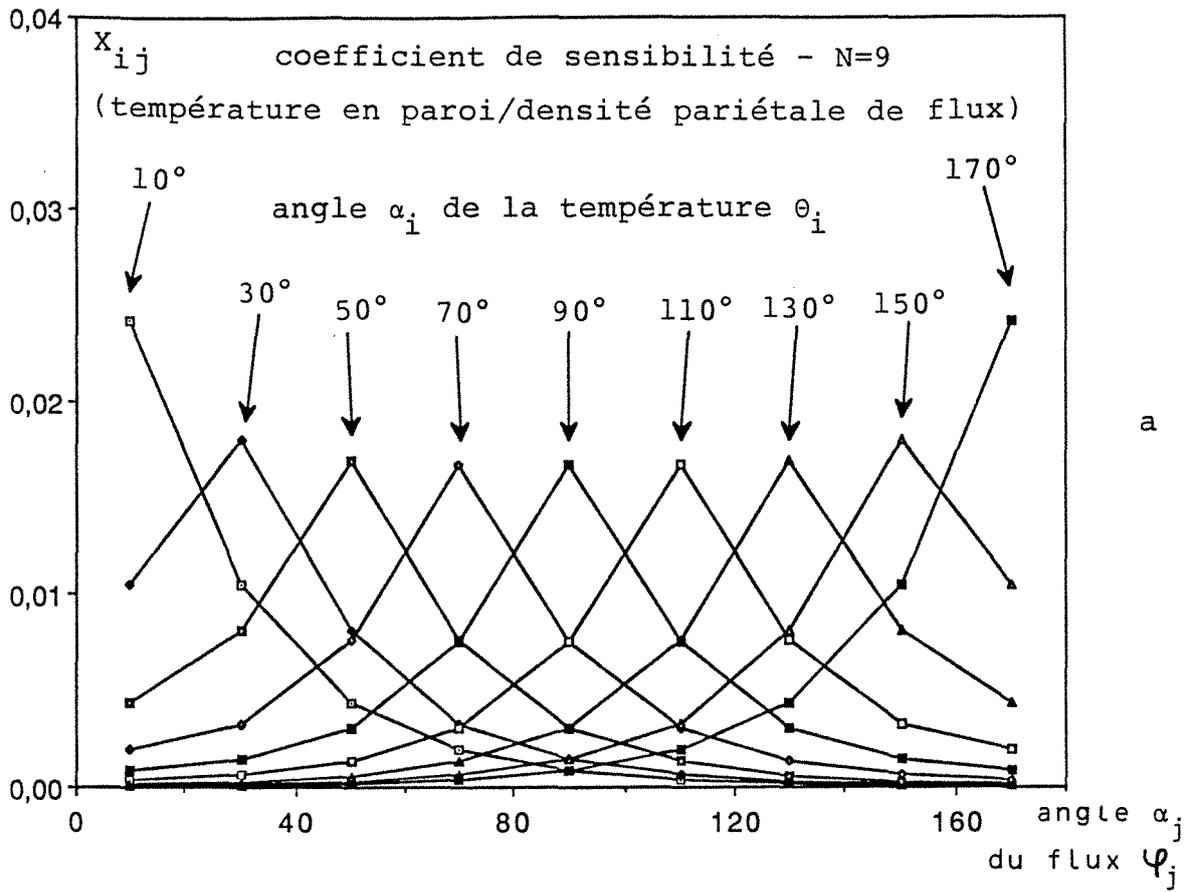


Fig. 4. Coefficient de sensibilité pariétal à la densité de flux pariétal X_{ij}

rayon r_o), au flux local φ_j , en remplaçant $\bar{\theta}_{2i}$ par θ_{oi} dans l'expression (18). A cause de la linéarité de l'équation (14), on obtient :

$$X'_{ij} = \frac{\partial \theta_{oi}}{\partial \varphi_j} = d_j(x_o, \alpha_i) \quad (20)$$

avec

$$x_o = r_o/r_2$$

Les coefficients de sensibilité X_{ij} ($\alpha_i = 90^\circ$) et X'_{ij} ($\alpha_i = 90^\circ$, $r_o = 14$ et 10 mm) sont tracés en fonction de l'angle α_j du flux pariétal sur la **figure 5** établie pour $N = 9$ intervalles : la baisse de sensibilité de la température au flux pariétal, avec la diminution du rayon r_o de mesure, est très forte. Cette chute de sensibilité avec l'accroissement de profondeur de la mesure s'observe également si l'on considère le coefficient de sensibilité en valeurs moyennes $\partial \theta_m(r_o)/\partial \varphi_m$ calculé à partir de l'équation (22) - voir section 4.3.2.

4.3.2 - Sensibilité au rayon de mesure

Lorsqu'on dispose d'une mesure de la température locale θ_{oi} mentionnée plus haut, il est nécessaire de l'affecter à un rayon r_o . A ce stade ce rayon r_o constitue lui-même une entrée du modèle inverse au même titre que les mesures de θ_{oi} . Le calcul de la sensibilité de ces températures au rayon r_o (à flux fixés) est envisageable ; cependant r_o ne constitue pas un paramètre à identifier et il est plus intéressant d'essayer de calculer l'influence de son incertitude sur le coefficient de transfert à identifier. Cette influence peut être étudiée plus aisément si l'on travaille sur les valeurs moyennes angulaires des températures, coefficient de transfert et densité de flux :

$$\theta_m(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \theta(r, \alpha) d\alpha \quad \theta_{om}(r) = \theta_m(r_o) \quad \theta_{2m} = \theta_m(r_2)$$

$$h_m = \varphi_m / (\theta_e - \theta_{2m}) \quad (21)$$

$$\varphi_m = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\alpha) d\alpha$$

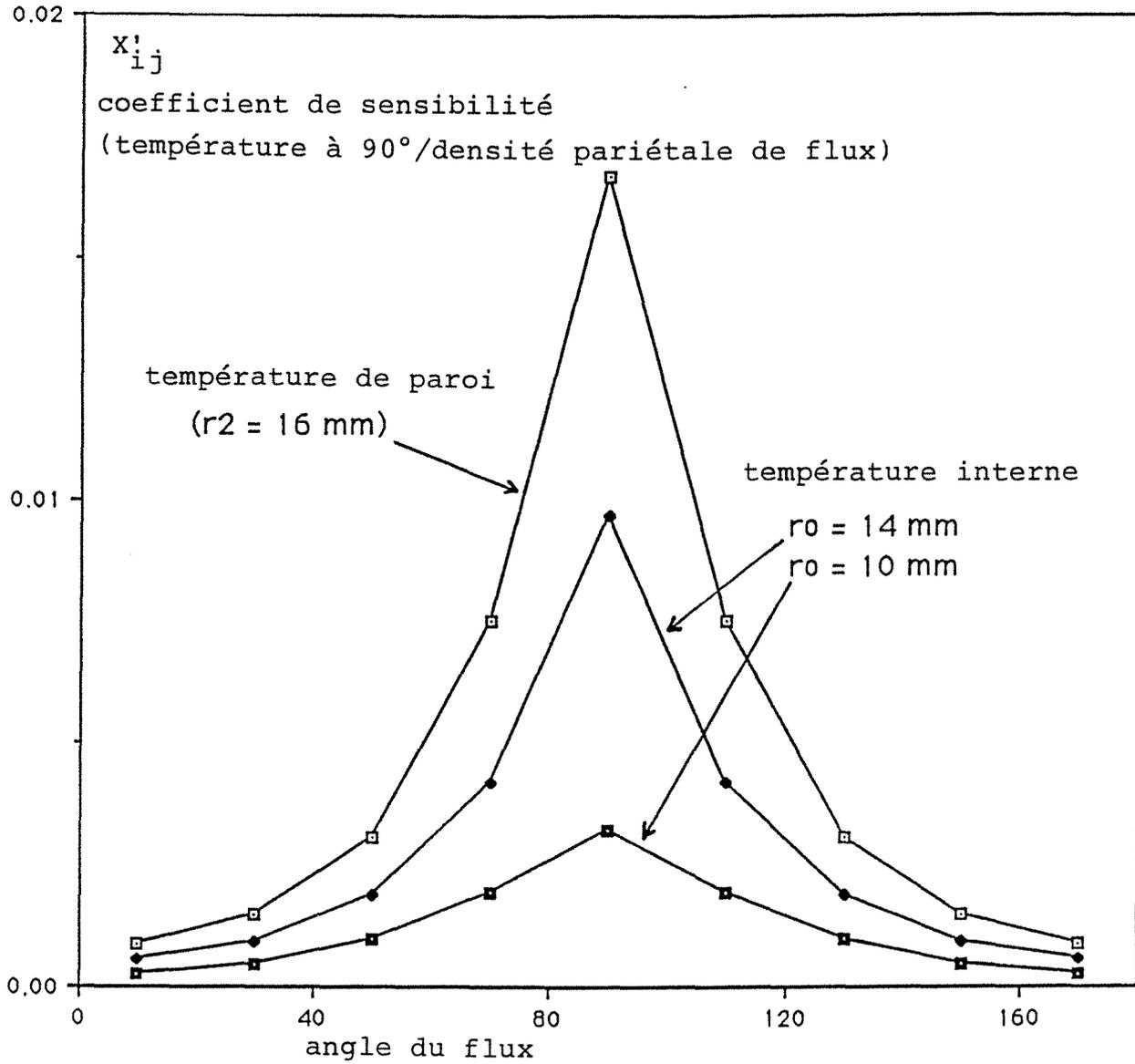


Fig. 5. Coefficient de sensibilité de la température interne à la densité de flux pariétal X'_{ij}

Par le changement de fonction (7) et par intégration de l'équation de la chaleur (1) et de ses conditions limites (4) et (6) sur l'intervalle $[0, 2\pi]$, on obtient le système différentiel suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \theta_m}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \theta_m}{\partial r} = 0 \\ \theta_m = 0 \quad \text{en } r = r_1 \\ \lambda \frac{\partial \theta_m}{\partial r} = \varphi_m \quad \text{en } r = r_2 \end{array} \right.$$

dont la solution est :

$$\theta_m(r) = \frac{r_2}{\lambda} \ln\left(\frac{r}{r_1}\right) \varphi_m \quad (22)$$

En écrivant la relation (22) en r_o et en r_2 , le coefficient moyen h_m peut être calculé à l'aide de sa définition (21) :

$$h_m = \frac{\lambda}{r_2 \left[\frac{\theta_e}{\theta_{om}} \ln \frac{r_o}{r_1} - \ln \frac{r_2}{r_1} \right]} \quad (23)$$

En dérivant cette relation par rapport à r_o , en gardant θ_{om} constant (résultat des mesures), on obtient la relation suivante :

$$\frac{1}{h_m} \frac{\partial h_m}{\partial r_o} = - \frac{1}{r_o \left[\ln \frac{r_o}{r_1} - \frac{\theta_{om}}{\theta_e} \ln \frac{r_2}{r_1} \right]}$$

θ_{om} peut alors être exprimée en fonction du coefficient moyen h_m , de l'écart extrême de température θ_e et des divers rayons grâce à (23), ce qui nous permet de calculer le coefficient Z_r de réponse relative de h_m à une incertitude relative sur r_o :

$$Z_r = \frac{\Delta h_m}{h_m} / \frac{\Delta r_o}{r_o} = \frac{1 + Bi \ln(1/k)}{\ln(x_o/k)} \quad (24)$$

avec :

$$Bi = \frac{h_m r_2}{\lambda}$$

Les variations de ce coefficient Z_r avec le rayon réduit x_o , le rapport des rayons interne et externe k et le nombre de Biot Bi sont représentés sur la **figure 6**. Les cas de figure les plus intéressants pour une bonne mesure se rapportent aux faibles valeurs de Bi et k et à une implantation de la sonde de température à proximité de la surface externe du tube.

4.3.3 - Sensibilité au coefficient de transfert

Les températures qui sont mesurées sont nécessairement bruitées. Nous allons examiner l'incidence sur le coefficient moyen h_m d'une incertitude sur la température moyenne θ_{om} .

De la même façon que précédemment il est possible de calculer le coefficient de réponse relative de h_m à une incertitude relative sur les températures :

$$Z_T = \frac{\Delta h_m}{h_m} / \frac{\Delta \theta_{om}}{\theta_e} = \frac{(1 + Bi \ln(1/k))^2}{Bi \ln(x_o/k)} \quad (25)$$

Les variations de ce coefficient Z_T avec le rayon réduit x_o , le facteur de forme k du cylindre et le nombre de Biot sont données sur la **figure 7**. Pour chaque valeur de k il existe un nombre de Biot Bi_k pour lequel Z_T est minimum.

Remarquons que dans le meilleur des cas - faible valeur de k , Bi proche de Bi_k et sonde de température proche de la surface externe du tube - une erreur de 1 % (normée par l'écart extrême θ_e) induit une erreur de 4 % sur l'échange moyen h_m .

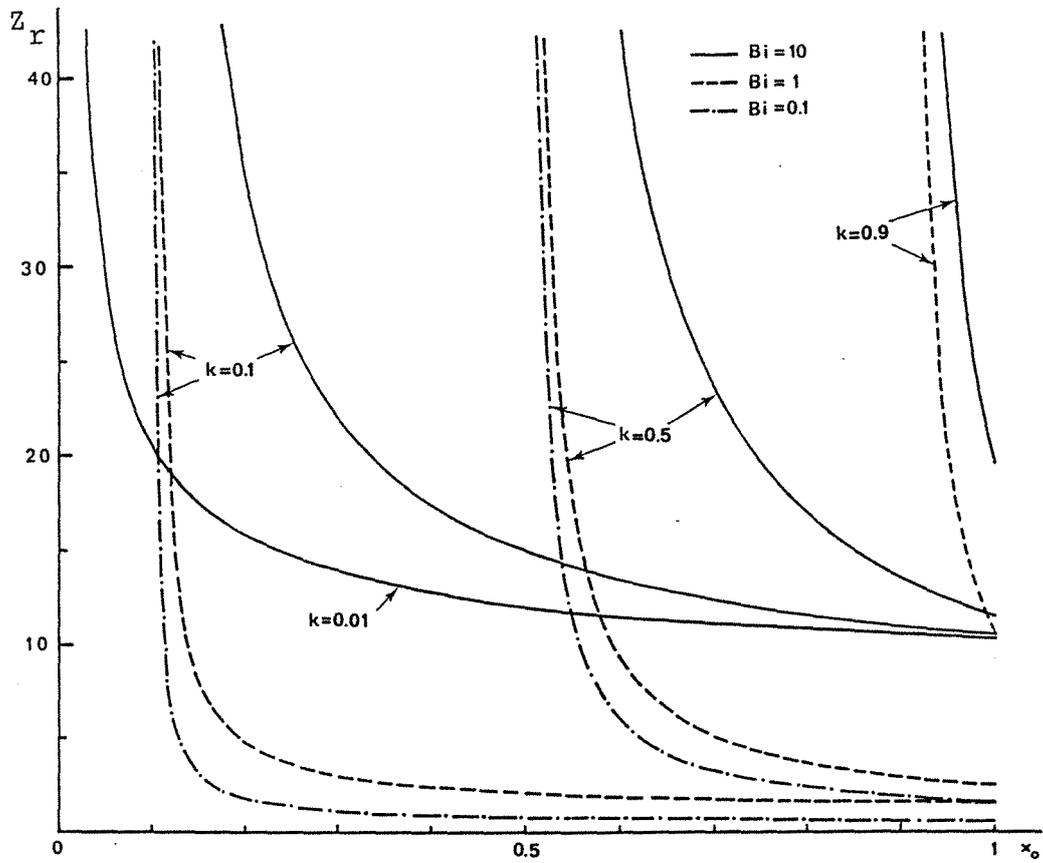


Fig. 6. Coefficient de réponse relative Z_r de h_m à une incertitude sur le rayon de mesure r_0

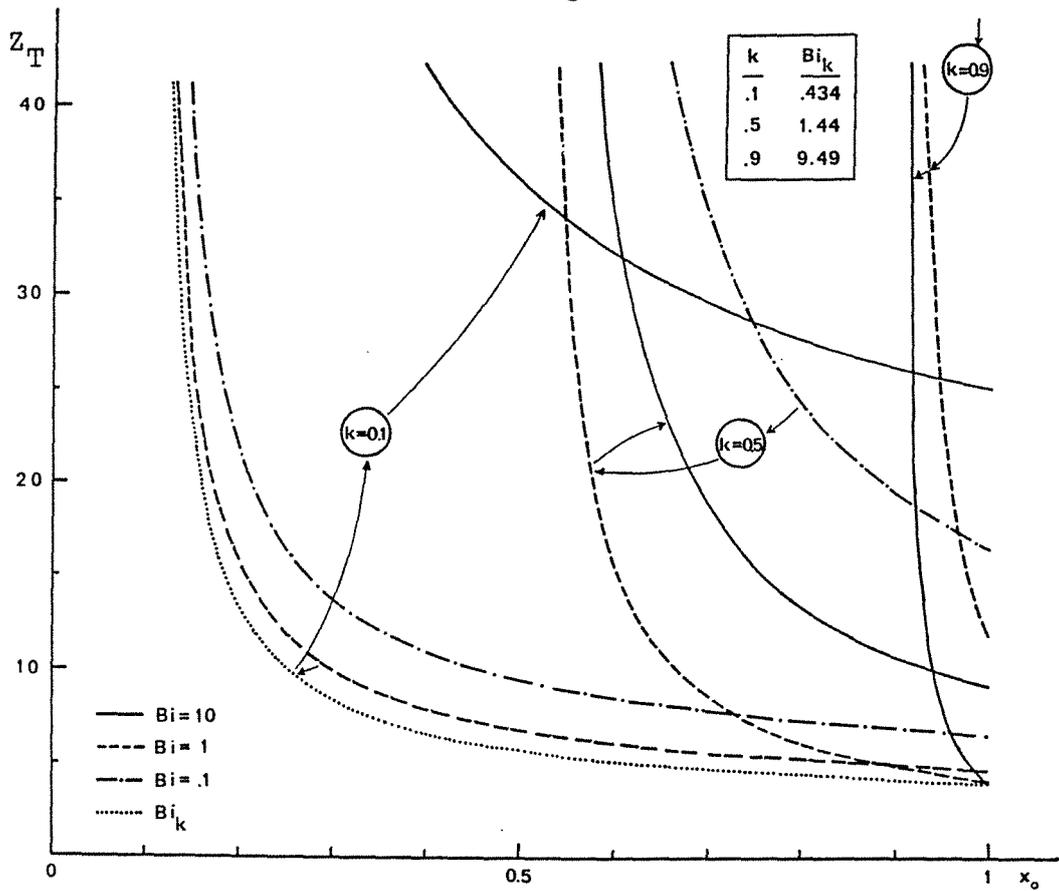


Fig. 7. Coefficient de réponse relative Z_T de h_m à une incertitude sur la mesure de température θ_{om}

4.4 - LE PROBLEME INVERSE

4.4.1 - Bruit de mesure et régularisation

Dans ce problème les conditions (2) à (4) demeurant inchangées tandis que la condition (5) est remplacée par une condition de température imposée sur un rayon r_0 interne au cylindre :

$$\theta(r_0, \alpha) = \theta_0(\alpha) \quad \text{avec} \quad r_1 \leq r_0 \leq r_2 \quad (26)$$

Pour des raisons pratiques, la température θ_0 n'est mesurée qu'en un nombre fini ($N + 1$) de points correspondant aux angles α_i ($i = 0$ à N) et la fonction $\theta_0(\alpha)$ n'est connue qu'en ces points où elle prend la valeur θ_{0i} . L'équation (14) qui représente la solution du problème direct peut alors être réécrite pour ces points de la façon suivante :

$$\theta_0 = B \varphi \quad \text{avec} \quad B_{ij} = d_j(x_0, \alpha_i) \quad (27)$$

Si les températures mesurées sont exactes, le système (27) peut être résolu pour trouver les densités pariétales de flux.

En fait, des mesures expérimentales de température présentent toujours une certaine incertitude et la méthode de résolution précédente n'est pas applicable. Si l'on appelle $y_{\epsilon i}$ la valeur mesurée de θ_{0i} à l'angle α_i et au rayon r_0 , θ_{0i} étant la valeur exacte correspondante et ϵ_i l'erreur aléatoire supposée additive, on a :

$$y_{\epsilon i} = \theta_{0i} + \epsilon_i \quad (28)$$

La prise en compte de ce bruit est envisageable en utilisant une méthode des moindres carrés, qui consiste à minimiser la somme des carrés des différences $(y_{\epsilon i} - \theta_{0i})$ par rapport aux flux φ_i inconnus. L'inconvénient de cette méthode réside dans le fait que la fonction $\varphi(\alpha)$ ne dépend pas de façon continue des données y , car le problème inverse est instable car mathématiquement "mal posé", parce que la condition qu'on cherche à évaluer en

$r = r_2$ est située à l'extérieur des limites thermiquement connues du domaine ($r = r_1$ et r_0) - voir Tikhonov et Arsenini [9].

Pour assurer une certaine régularité à la variation angulaire de φ - c'est-à-dire pour "lier" entre eux les paramètres φ_i qu'on cherche à estimer - un terme régularisateur peut être ajouté à la somme précédente. Un terme du second ordre qui représente, sous une forme discrète, la dérivée seconde de la fonction $\varphi(\alpha)$, a été choisi ici. Il permet un lissage des fluctuations de flux et stabilise le problème comme Beck et col. l'ont montré [10] :

$$S = \sum_{i=0}^N (y_{\epsilon i} - \theta_{oi})^2 + \gamma \sum_{i=2}^{N-1} (\varphi_{i+1} - 2\varphi_i + \varphi_{i-1})^2, \quad (29)$$

Notons qu'apparaît ici un paramètre de pondération de choix a priori arbitraire, le coefficient de régularisation γ . Les flux sont alors solution du système :

$$\frac{\partial S}{\partial \varphi_l} = 0 \quad \text{pour} \quad 1 \leq l \leq N$$

Celui-ci peut être mis sous la forme suivante :

$$E \varphi_{\epsilon \gamma} = p_{\epsilon} \quad (30)$$

avec :

$$E = B^t B + \gamma F^t F \quad \text{et} \quad p_{\epsilon} = B^t y_{\epsilon}$$

F étant une matrice tridiagonale de dimensions (N, N) . Le système (30) peut être résolu en φ et les coefficients de transfert de chaleur sont alors calculés grâce à leur définition (15).

4.4.2 - Inversion à partir de mesures simulées

4.4.2.1 - Cas tests et méthodologie

Beck et al. [10] ont défini trois cas tests qui permettent de voir comment se comporte le modèle avec ou sans bruit. Il s'agit des cas où la

fonction à identifier en surface présente une variation en impulsion de Dirac, puis en échelon et enfin en fonction triangle. Dans notre problème, où la fonction à identifier est $h(\alpha)$, ces trois cas ont été simulés (figures 8, 9, 10a et b) pour 18 pas angulaires de 10° , différents niveaux de bruit et différentes valeurs du paramètre régularisateur γ .

Le modèle inverse a également été étudié pour le cas de convection forcée présenté précédemment (figure 11).

Pour chacun de ces cas, la démarche adoptée a été la suivante :

- $h(\alpha)$ et ses valeurs discrétisées h_i sont données et l'on calcule la répartition exacte des températures $\theta_o(\alpha)$ au rayon r_o choisi par le modèle direct.
- la température exacte θ_{oi} est bruitée avec un bruit aléatoire ϵ_i d'écart type σ , ce qui produit une simulation $y_{\epsilon i}$ des mesures expérimentales.
- le modèle inverse décrit précédemment est alors mis en oeuvre en introduisant un paramètre régularisateur γ , ce qui nous donne une estimation \hat{h}_i de la valeur du coefficient de transfert en surface.

4.4.2.2 - Discussion

Remarquons tout d'abord que pour les quatre cas étudiés, il n'y a aucune différence, lorsque le bruit σ est nul, entre les valeurs directes φ_i et h_i et les valeurs estimées après inversion $\hat{\varphi}_i$ et \hat{h}_i lorsque l'on ne régularise pas ($\gamma = 0$) ou lorsque l'inversion directe par résolution du système (27) est effectuée.

Dès que l'on passe à un bruit de $0,05^\circ\text{C}$ d'écart-type, les deux premiers cas qui présentent une variation "dure" du coefficient h (figures 8 et 9) ne peuvent plus être correctement approximés par le modèle inverse (que ce soit en h ou en φ) :

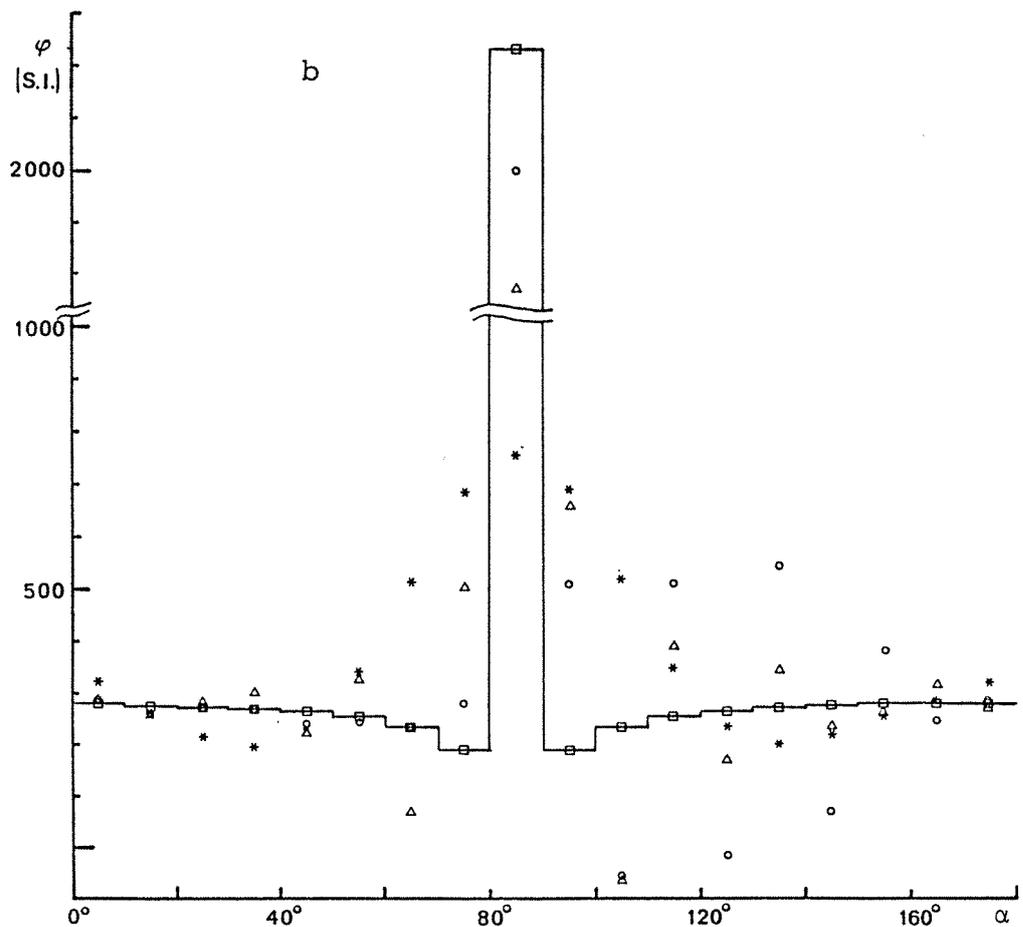
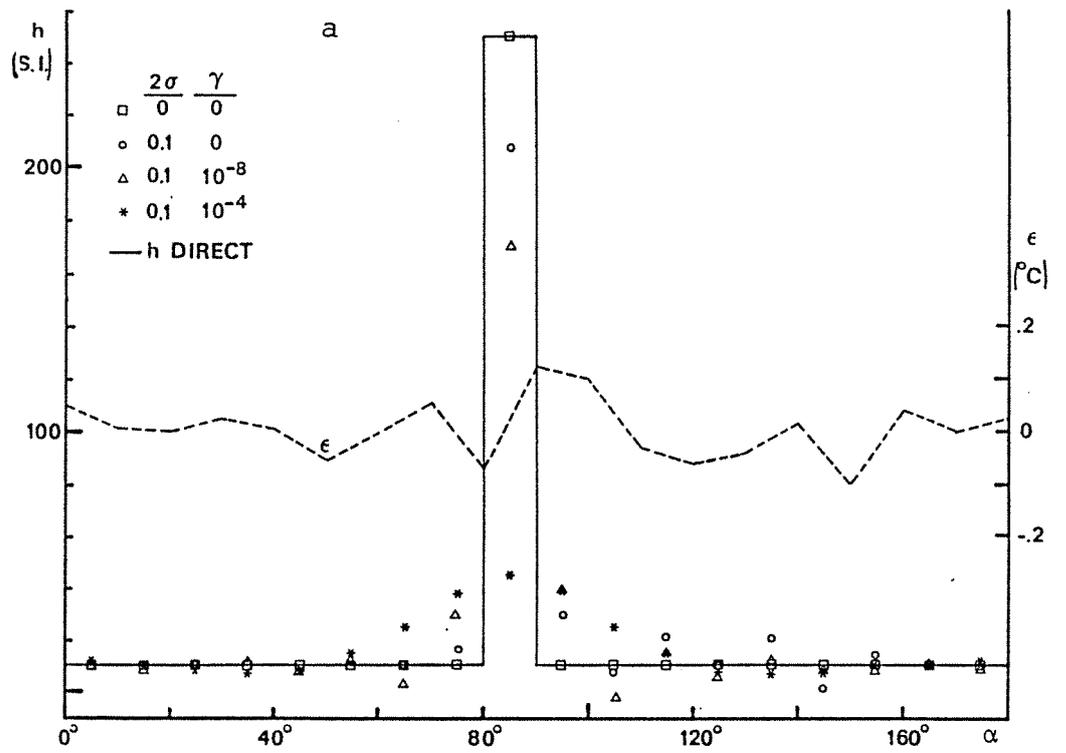


Fig. 8 a et b. Inversion à partir de mesures simulées:
cas d'une impulsion de Dirac de coefficient
de transfert ($r_0=14$ mm - $\lambda=0,26$ SI)

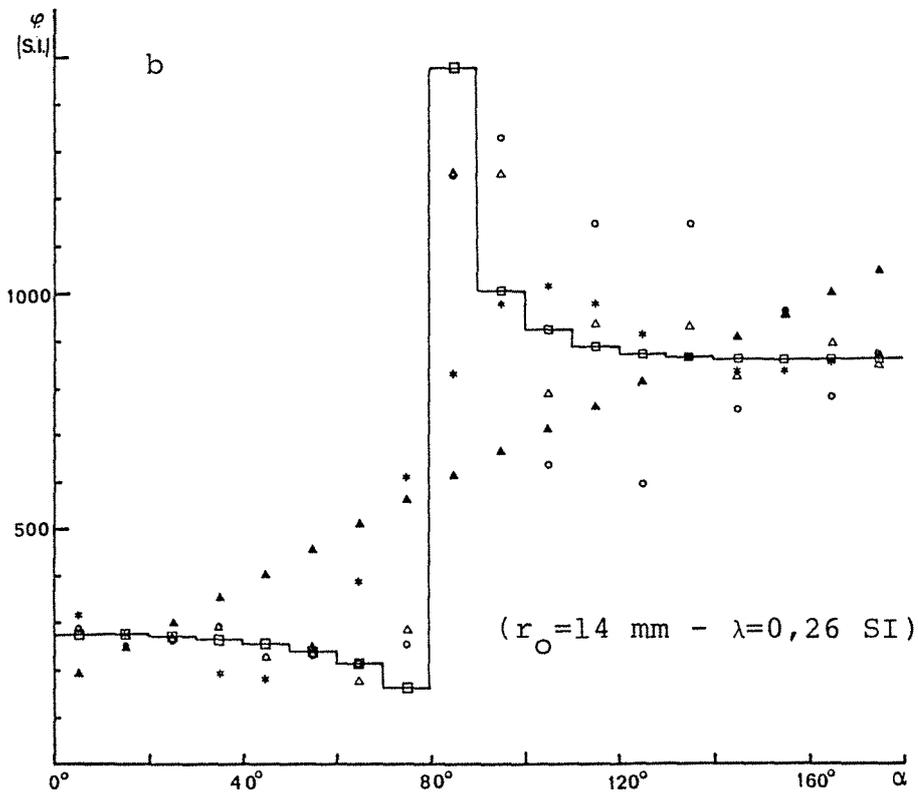
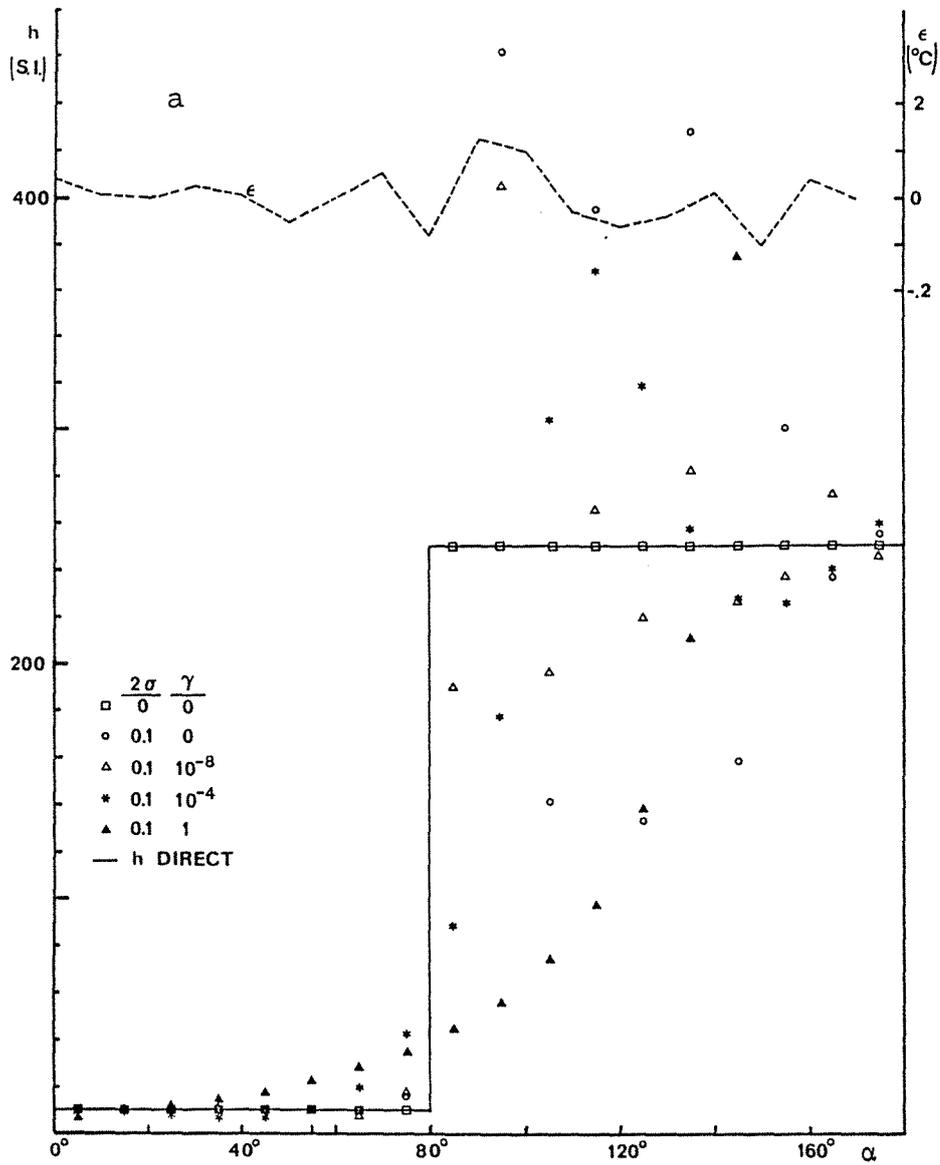


Fig. 9 a et b. Inversion à partir de mesures simulées: échelon de h

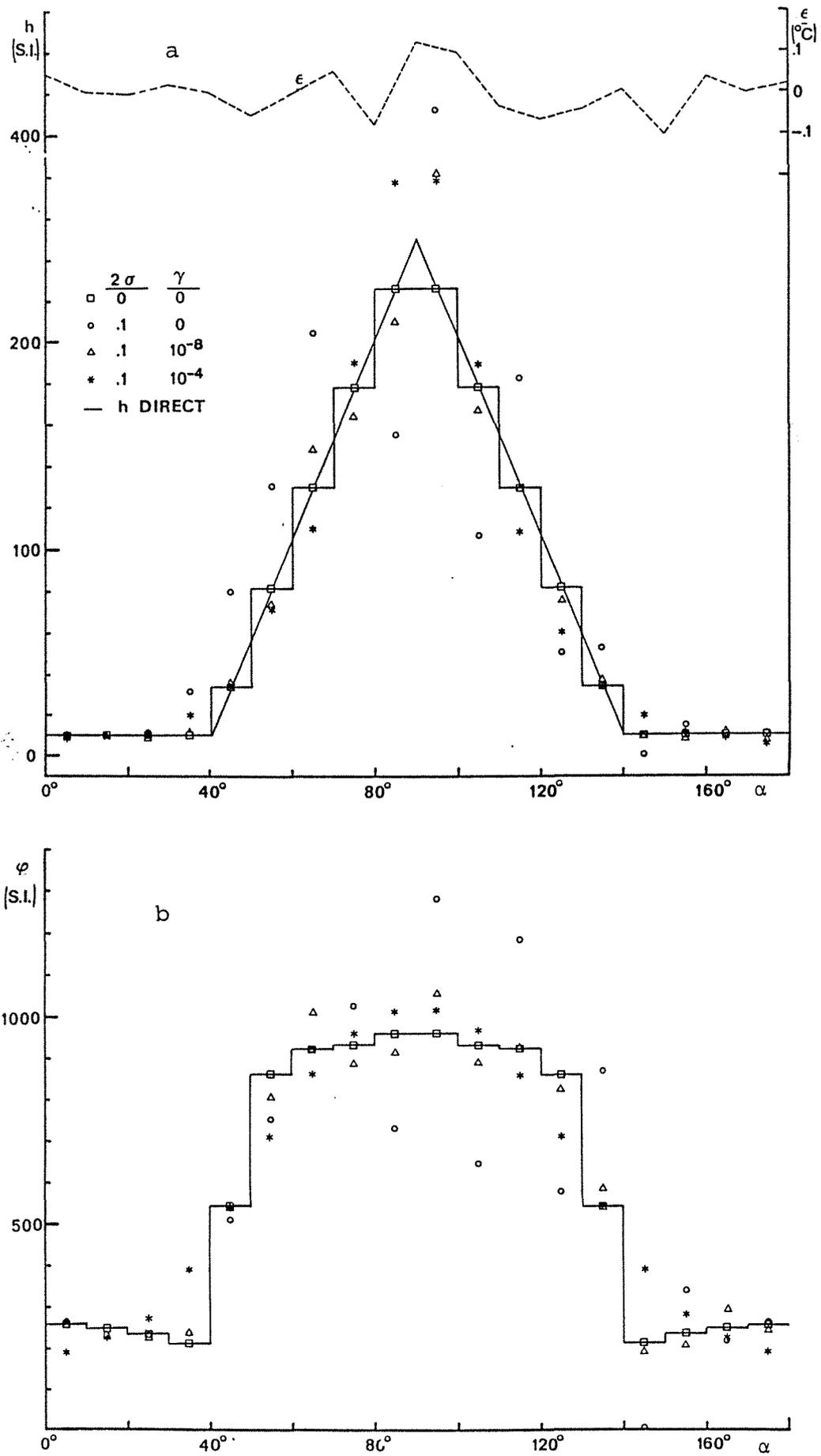


Fig. 10 a et b. Inversion à partir de mesures simulées: h triangulaire
 $r_0 = 14$ mm - $\lambda = 0,26$ SI

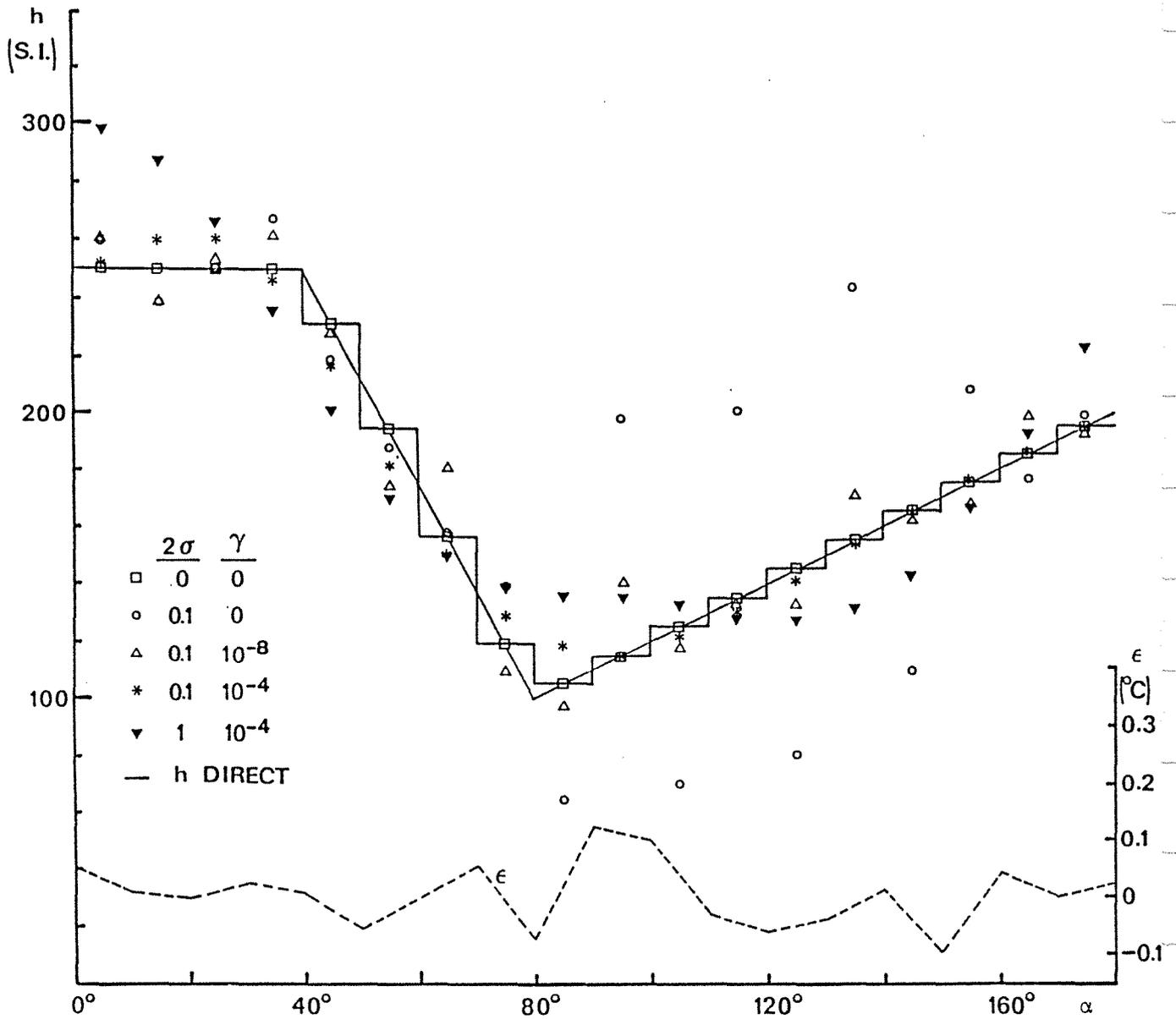


Fig. 11. Inversion à partir de mesures simulées: cas d'un coefficient de transfert typique de la convection forcée
 $r_o=14$ mm - $\lambda=0,26$ SI

- si γ est nul ou faible (10^{-8}), les valeurs estimées se mettent à osciller dès le changement brutal de la valeur de h_i à 80°C et ce, de façon très importante dans le cas de l'échelon.
- si γ est plus fort (10^{-4}), les oscillations sont réduites mais les variations brusques sont extrêmement amorties et réparties sur une large plage angulaire.
- si γ est grand ($= 1$), c'est le terme régularisateur qui domine dans la somme (29) dont la minimisation produit une évolution quasi linéaire de (figure 9b) et donc hyperbolique de h (figure 9a).

Ces estimations n'ont alors plus grand chose à voir avec les valeurs directes.

Dans les deux derniers cas qui présentent une variation plus "douce" de h (figures 10 et 11), un bruit identique produit les mêmes oscillations en l'absence de régularisation. Par contre, pour des valeurs intermédiaires de γ (10^{-8} et 10^{-4}), l'accord entre valeurs directes et valeurs estimées devient très satisfaisant et ce particulièrement dans le dernier cas (figure 11).

Notons également que dans ce cas, même un bruit dix fois plus fort - σ de $0,5^\circ\text{C}$ - fournit encore l'allure générale du profil direct de h .

Notre modèle inverse semble donc adapté à des mesures expérimentales de h dans les cas réels où son évolution est toujours "douce" et régulière.

4.4.2.3 - Choix du paramètre régularisateur

Le choix de γ est un point d'importance cruciale si l'on désire traiter des mesures expérimentales : son niveau doit être ajusté en fonction du bruit de mesure.

Il est possible de le choisir γ de manière à minimiser le résidu quadratique moyen de température R_T calculé à partir des écarts entre les températures mesurées et les températures issues du modèle direct et calculées

à partir des flux estimés :

$$R_T^2(\gamma, \varepsilon) = \frac{1}{N+1} \sum_{i=0}^N (y_i - \theta_{oi})^2 \quad (31)$$

Une autre norme dont la minimisation est recherchée est l'erreur moyenne quadratique e_h sur les coefficients de transfert estimés :

$$e_h^2(\gamma, \varepsilon) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\hat{h}_i - h_i)^2 \quad (32)$$

Enfin, il est également possible de prendre pour critère, pour le choix de γ , la minimisation de l'erreur moyenne quadratique e_φ , basée cette fois sur les densités de flux pariétales estimées :

$$e_\varphi^2(\gamma, \varepsilon) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\hat{\varphi}_i - \varphi_i)^2 \quad (33)$$

Lorsqu'on travaille sur des données expérimentales, seule la norme R_T est accessible. Par contre si l'entrée du modèle inverse est constituée par des simulations de mesure, les erreurs e_h et e_φ peuvent alors être également calculées.

La variation de ces trois normes avec le paramètre régularisateur γ est mise en évidence sur la **figure 12** pour deux valeurs (10 et 14 mm) du rayon de mesure r_o . Ces normes ont été évaluées dans le cas où l'entrée du modèle inverse est le profil de température $\theta_o(\alpha)$ correspondant à r_o , calculé à partir de la fonction $h(\alpha)$ pour $N = 18$ et des valeurs des paramètres $(\lambda, r_1, r_2, \theta_e)$ données dans la section 4.2.3, ce profil étant modifié par le bruit additif ε de la **figure 11**, généré lui-même à partir d'un écart-type σ de $0,05^\circ\text{C}$.

Il est intéressant de remarquer que la "meilleure" valeur de γ , qui minimise e_h , est pratiquement la même pour un rayon de 14 mm ($1,5 \times 10^{-6}$) ou pour un rayon de 10 mm (9×10^{-7} ou $1,5 \times 10^{-6}$), avec un minimum assez plat pour le dernier rayon ; il semble donc qu'il ne serve à rien d'augmenter le coefficient régularisateur lorsque l'on traite des profils mesurés pour de faibles rayons auxquels correspondent de faibles sensibilités -

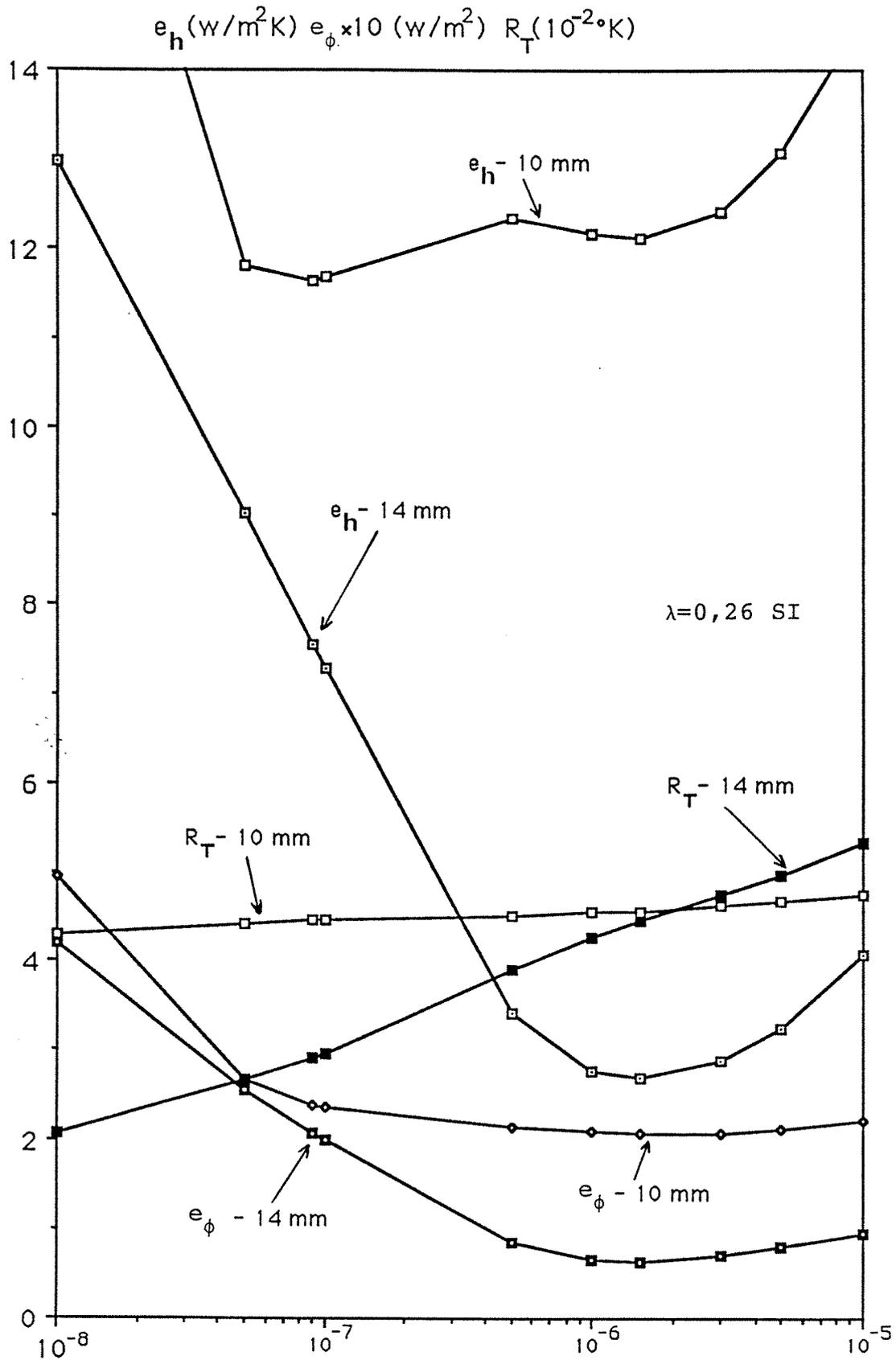


Fig. 12. Variation du résidu moyen R_T et des erreurs moyennes sur la densité de flux e_ϕ et sur le coefficient d'échange e_h

voir la **figure 5** - lorsque le bruit de mesure est constant : la baisse de sensibilité ne peut être compensée par une régularisation accrue.

Si l'on retient la valeur ajustée suivante qui minimise γ pour un bruit d'écart-type $\sigma = 0,05^\circ\text{C}$:

$$\gamma = 1,5 \times 10^{-6}$$

pour laquelle on a (pour $r_o = 14 \text{ mm}$) :

$$e_h = 2,68 \text{ W m}^{-2}\text{K}^{-1} \quad \text{et} \quad R_T = 0,045^\circ\text{C}$$

on peut constater que le résidu de température R_T , c'est-à-dire la part du champ de température non expliquée par le modèle $(N+1)R_T^2$ est le premier terme de la somme régularisée S définie par la relation (29) - est très proche de l'écart-type σ de l'erreur de mesure : c'est précisément la recommandation faite par Tikhonov et Arsenine [9] quant au choix du paramètre régularisateur.

Ceci peut s'expliquer physiquement par le fait qu'une diminution du résidu de température en-dessous du niveau d'incertitude de la mesure - produite ici par une réduction de la régularisation - ne peut avoir qu'une influence néfaste sur le profil identifié.

Il est intéressant de comparer ici l'erreur moyenne e_h sur les coefficients d'échange identifiés (pour la valeur ajustée de γ), à l'erreur e'_h sur le coefficient d'échange moyen calculée à l'aide du coefficient de réponse Z_T de h_m à une erreur sur la température moyenne - équation (25) - avec :

$$e'_h = h_m \frac{\sigma}{\theta_e} Z_T$$

Les résultats sont présentés dans la table 4.1 pour un coefficient moyen h_m de $175 \text{ W m}^{-1}\text{K}^{-1}$.

r_o (mm)	e_h (S.I)	e'_h (S.I)
14	2,7	2,6
10	12,2	6,5

Table 4.1 - Erreur moyenne d'identification et erreur sur la moyenne de h ($\gamma = 1,5 \cdot 10^{-6}$)

Les deux erreurs sont très proches pour le plus grand des deux rayons, traduisant ainsi la quasi linéarité de la relation température-coefficient d'échange identifié lorsque la sensibilité est suffisante alors que les écarts sont beaucoup plus forts pour l'autre rayon correspondant à une sensibilité plus faible.

Des mesures simulées ($r_o = 14$ mm) sans bruit ont été utilisées comme entrées du modèle inverse pour la valeur ajustée de γ donnée plus haut. Le profil de coefficient de transfert qui a été obtenu est très proche du profil théorique ($e_h = 1,67 \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-2}$), ce qui montre que le biais déterministe est très petit pour le niveau de régularisation obtenu.

4.5 - RESULTATS EXPERIMENTAUX

4.5.1 - Montage expérimental

Un cylindre de résine époxy (conductivité de $0,26 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$) de 500 mm de longueur, de 8 mm de rayon intérieur et 16 mm de rayon extérieur a été obtenu par moulage puis tournage sur un tube de cuivre de diamètres 14/16. Trois thermocouples en chromel-alumel de 0,12 mm de diamètre ont été implantés parallèlement aux génératrices du cylindre, les soudures, décalées les unes par rapport aux autres d'un angle d'environ 120° , étant localisées dans le plan de symétrie transverse du cylindre. Leurs rayons nominaux d'implantation étaient les suivants :

$$\begin{aligned}
 r_o &= 14 \text{ mm} \\
 r' &= 12 \text{ mm} \\
 r'' &= 10 \text{ mm}
 \end{aligned}$$

Un débit d'eau chaude à 65°C, produit par un thermostat à circulation, à travers le tube central en cuivre, assurait la condition limite interne. La température du tube de cuivre était également mesurée par un thermocouple implanté dans la section transverse.

Le cylindre de mesure a été placé dans la veine d'une soufflerie de section 400 x 400 mm dont le taux de turbulence était de l'ordre de 1 %. La température de l'air en amont du cylindre était également mesurée par un thermocouple.

4.5.2 - Procédure expérimentale et mesure de température

Les mesures ont été effectuées pour une vitesse d'air de 30,7 m/s, ce qui correspond à un nombre de Reynolds de 64250. Une rotation du cylindre d'un pas de 10° permettait d'obtenir un nouveau point de mesure pour les trois sondes une fois le régime permanent établi, ce qui prenait environ 30 à 40 minutes.

A cause de la durée de l'expérience et de la chaleur dégagée par le moteur de la soufflerie, la température ambiante ne restait pas constante entre chaque mesure. Il a donc fallu ramener toutes les mesures à un même écart des températures extrêmes θ_e . Nous avons opté pour une correction unidirectionnelle de la température (voir Annexe 4.1) :

$$y_i^c = y_i + \frac{\text{Bi} \ln(x_o/k)}{1 + \text{Bi} \ln(1/k)} (\theta_e - \theta_{ei}) \quad (34)$$

θ_e est la moyenne des écarts extrêmes de température mesurés θ_{ei} pour chaque mesure y_i de θ_{oi} et y_i est la valeur corrigée de θ_{oi} , le nombre de Biot Bi étant calculé sur un transfert moyen h_m de $175 \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-1}$.

Les profils bruts et corrigés de température pour chaque sonde ^{sont} présentés (figure 13a, b et c). On remarque l'effet de lissage dû à la correction 1D.

La figure 13d regroupe tous les profils mesurés sur un même graphe.

4.5.3 - Localisation des mesures

Il est nécessaire d'affecter un rayon à chaque profil y_i^c afin de pouvoir mettre en oeuvre le modèle inverse explicité plus haut. Pour ce faire, nous avons détruit par tournage le cylindre de mesure et avons mesuré les rayons minima et maxima de chaque soudure - 0,8 mm de diamètre environ - sur une photographie de la coupe prise à l'aide d'un objectif macroscopique. Cela nous a permis de donner pour chaque rayon un intervalle d'incertitude.

La relation (22), portant sur les valeurs moyennes de la température et du flux, écrite pour deux rayons différents r_o et r'_o , rend possible la diminution des plages d'incertitudes. En faisant le rapport des deux relations, on obtient :

$$\frac{\theta'_{om}}{\theta_{om}} = \frac{\ln r'_o/r_1}{\ln r_o/r_1} = \frac{q'_o}{q_o} \quad (35)$$

Cette relation définit également les rayons homologues r_o et r'_o , des sondes externe et centrale, qui fournissent la même densité moyenne de flux ϕ_m .

Le rapport des températures moyennes exactes θ_{om} est égal au rapport des moyennes des valeurs mesurées et corrigées y_i^c si le bruit ε_i est un aléa centré. Ce rapport peut donc être calculé par intégration numérique. Le rapport des logarithmes des rayons réduits de deux sondes de température est alors connu ; cela permet de ramener les incertitudes sur q'_o et q''_o à des incertitudes sur q_o et donc de diminuer l'incertitude sur le rayon r_o . En pratique, cette dernière est divisée par deux.

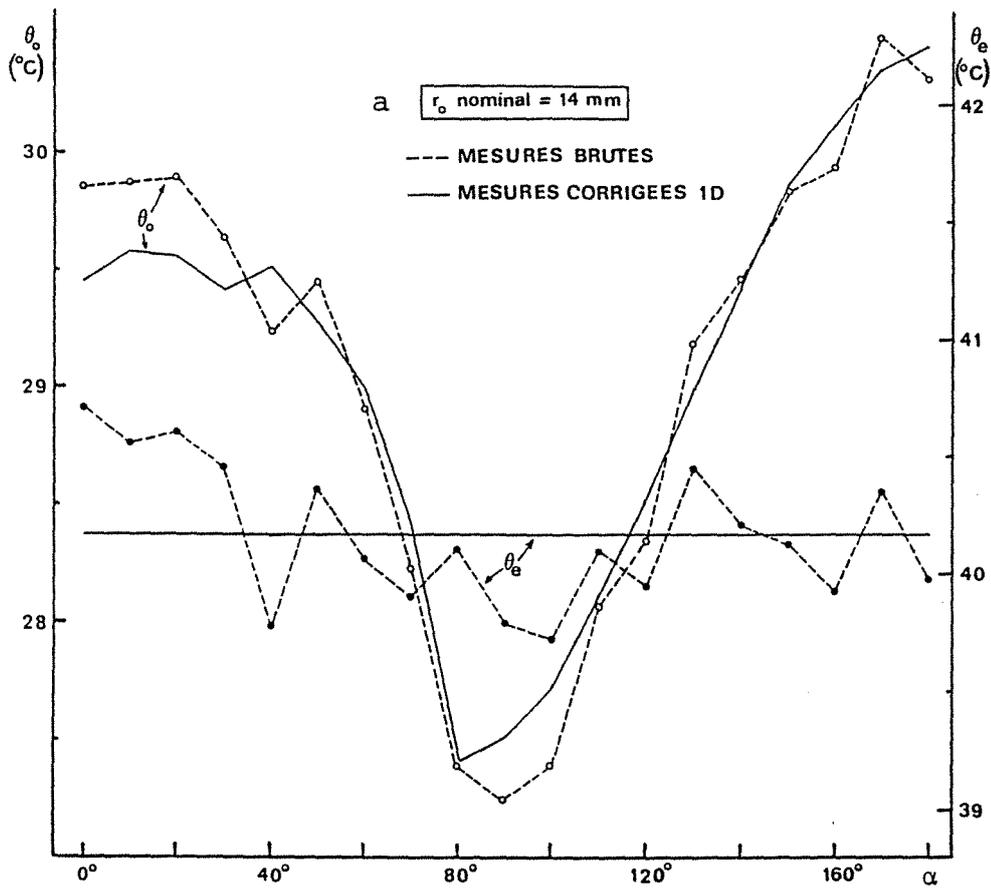
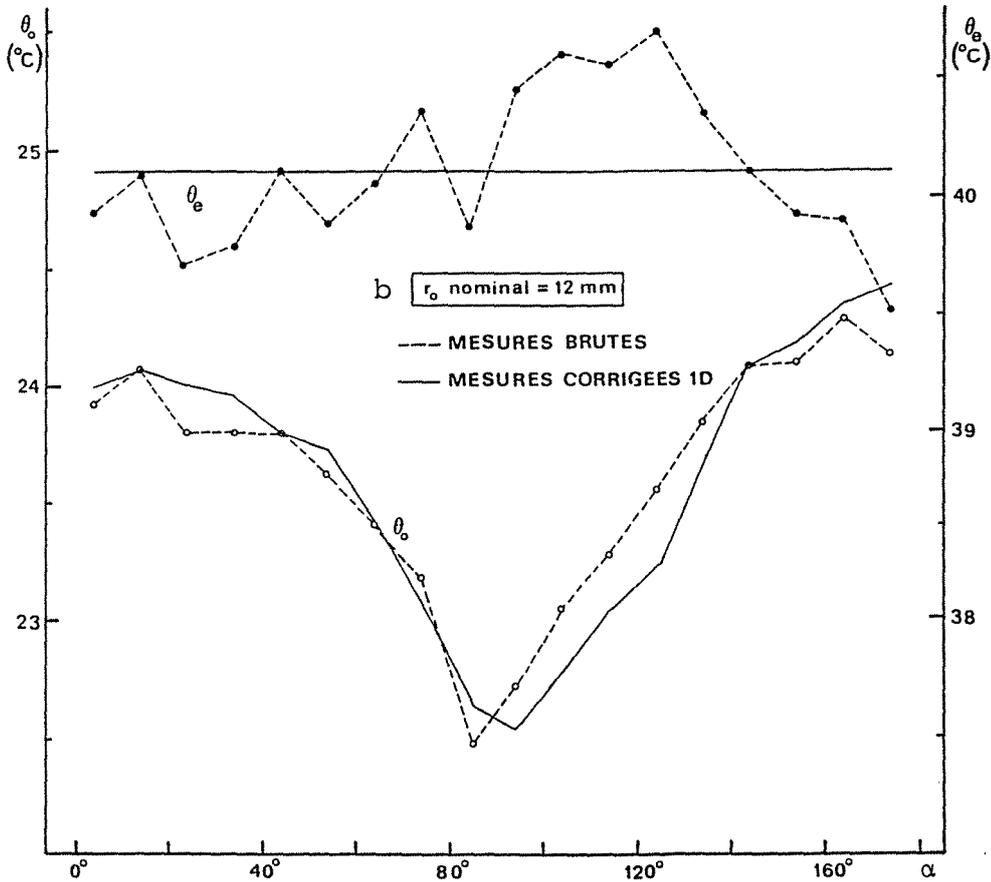


Fig. 13. Profils de température expérimentaux



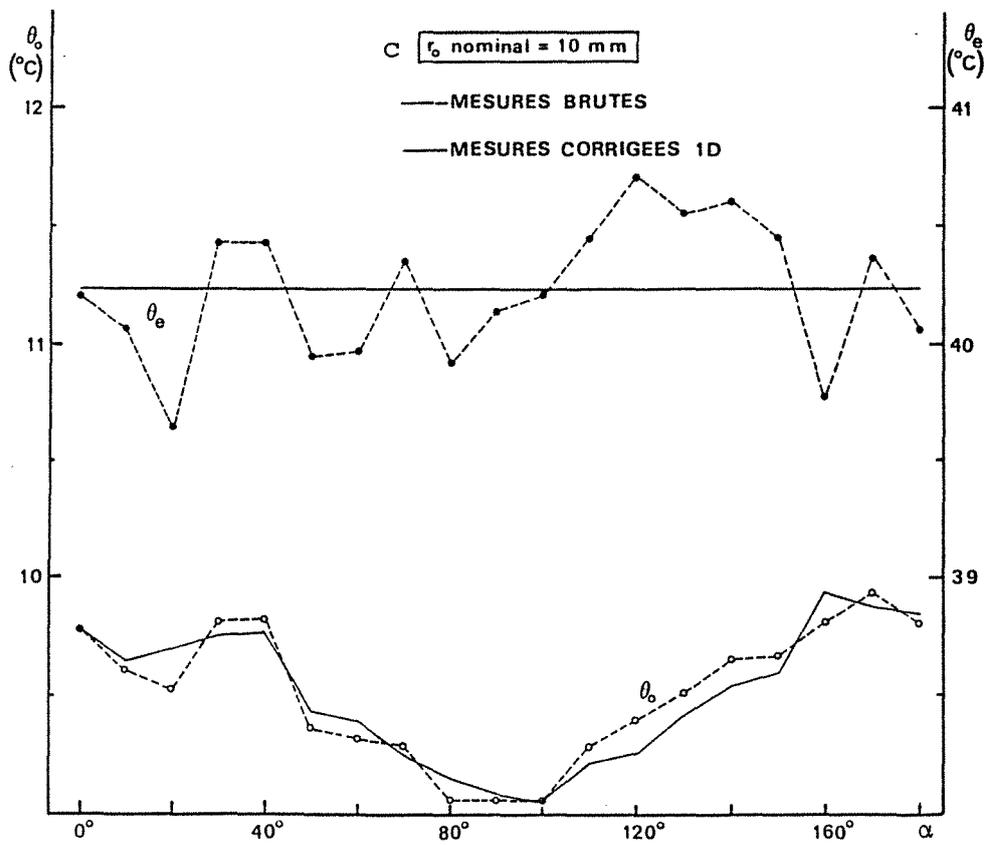


Fig. 13. (suite

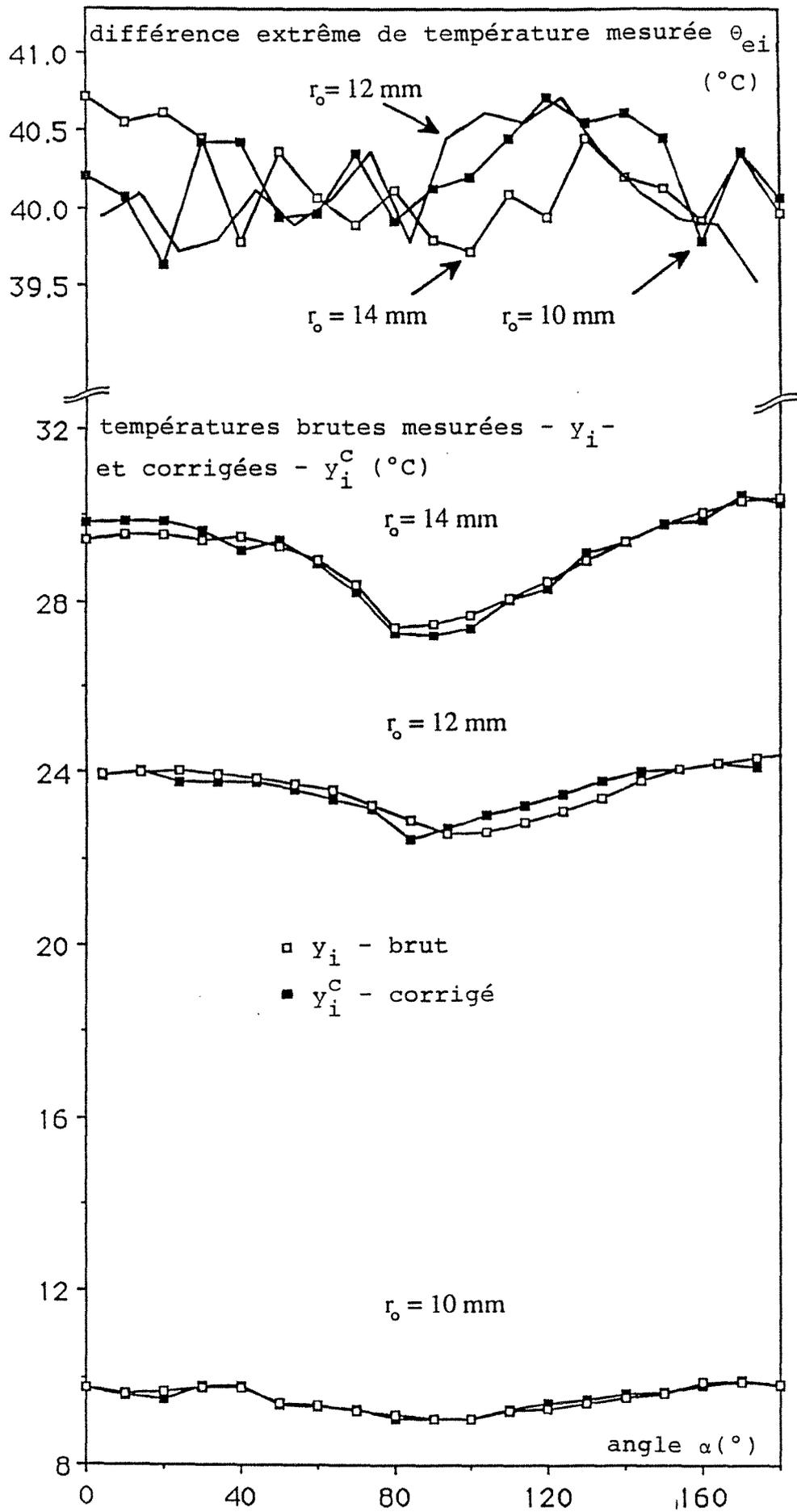


Fig. 13 d. Récapitulatif des profils de température mesurés

4.5.4 - Résultats expérimentaux et discussion

4.5.4.1 - Influence de la localisation des mesures et des propriétés thermiques de la résine

Le modèle inverse a été utilisé pour calculer, à partir des températures corrigées y_1^C , les profils $h(\alpha)$ présentés sur les figures 14, b et c pour les valeurs minimum, centrale et maximum de r_0 ainsi que pour les valeurs homologues de r'_0 et r''_0 .

Les profils de coefficient de transfert obtenus grâce à la méthode inverse sont extrêmement sensibles à l'incertitude sur le rayon d'implantation des sondes de température. On retrouve ici les résultats du modèle unidimensionnel présenté en 4.3.2 : nos mesures ont été effectuées pour un nombre de Biot voisin de 10 et un coefficient de forme k de 0,5 qui nous permettent d'évaluer les coefficients de réponse à l'incertitude sur le rayon Z_r de 14, 20 et 35 pour les trois sondes en partant de la sonde la plus externe. Cela signifie par exemple qu'une erreur de 0,25 mm sur le rayon d'implantation de cette dernière sonde produit une incertitude de l'ordre de 25 % sur le coefficient moyen de transfert h_m . L'unique façon d'éliminer cette incertitude sur la position du thermocouple serait de mesurer le flux total quittant le cylindre par une méthode calorimétrique et d'utiliser ensuite la relation (22) pour évaluer son rayon.

Malgré les valeurs élevées du coefficient de réponse à l'incertitude sur la température Z_T - ici de 11, 15 et 28 (voir figure 7) - l'incertitude sur la température, qui est voisine de 0,05°C pour un écart extrême θ_e de 40°C, n'entraîne qu'une incertitude de 1,4 % sur le transfert moyen h_m lorsque l'on calcule ce dernier à l'aide des températures mesurées par le thermocouple extérieur.

Les profils du coefficient h représentés sur les figures 14 mettent en évidence la bonne concordance des résultats obtenus à partir des profils indépendants de température relevés aux rayons homologues central r'_0 et externe r_0 . Le coefficient h présente bien une valeur constante sur les 50 premiers degrés, puis un minimum voisin de 90° suivi d'une remontée quasi linéaire jusqu'à 180°.

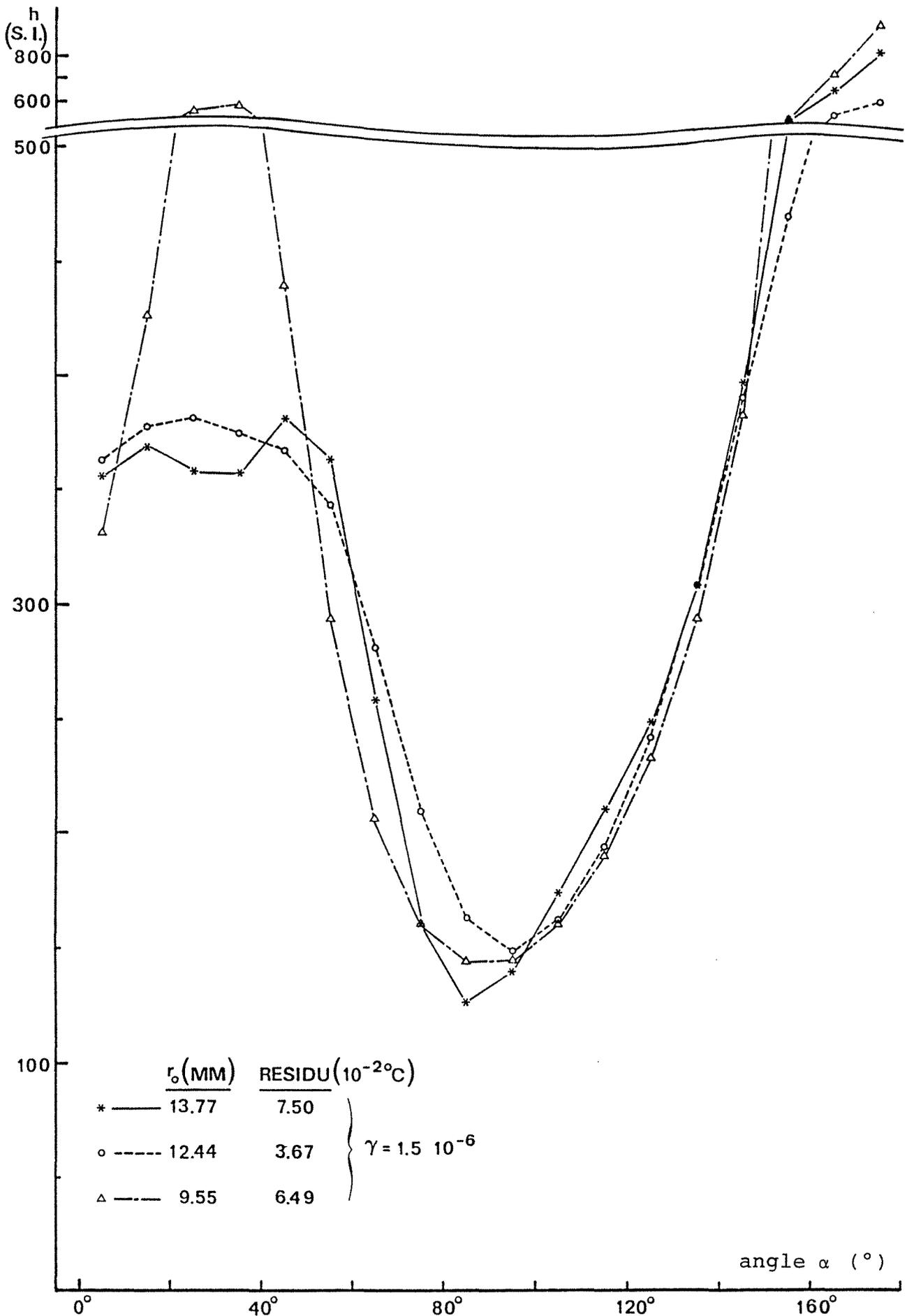


Fig. 14 a. Coefficients de transferts identifiés - rayons homologues minima - $\lambda=0,26$ SI - $\gamma = 1,5 \cdot 10^{-6}$

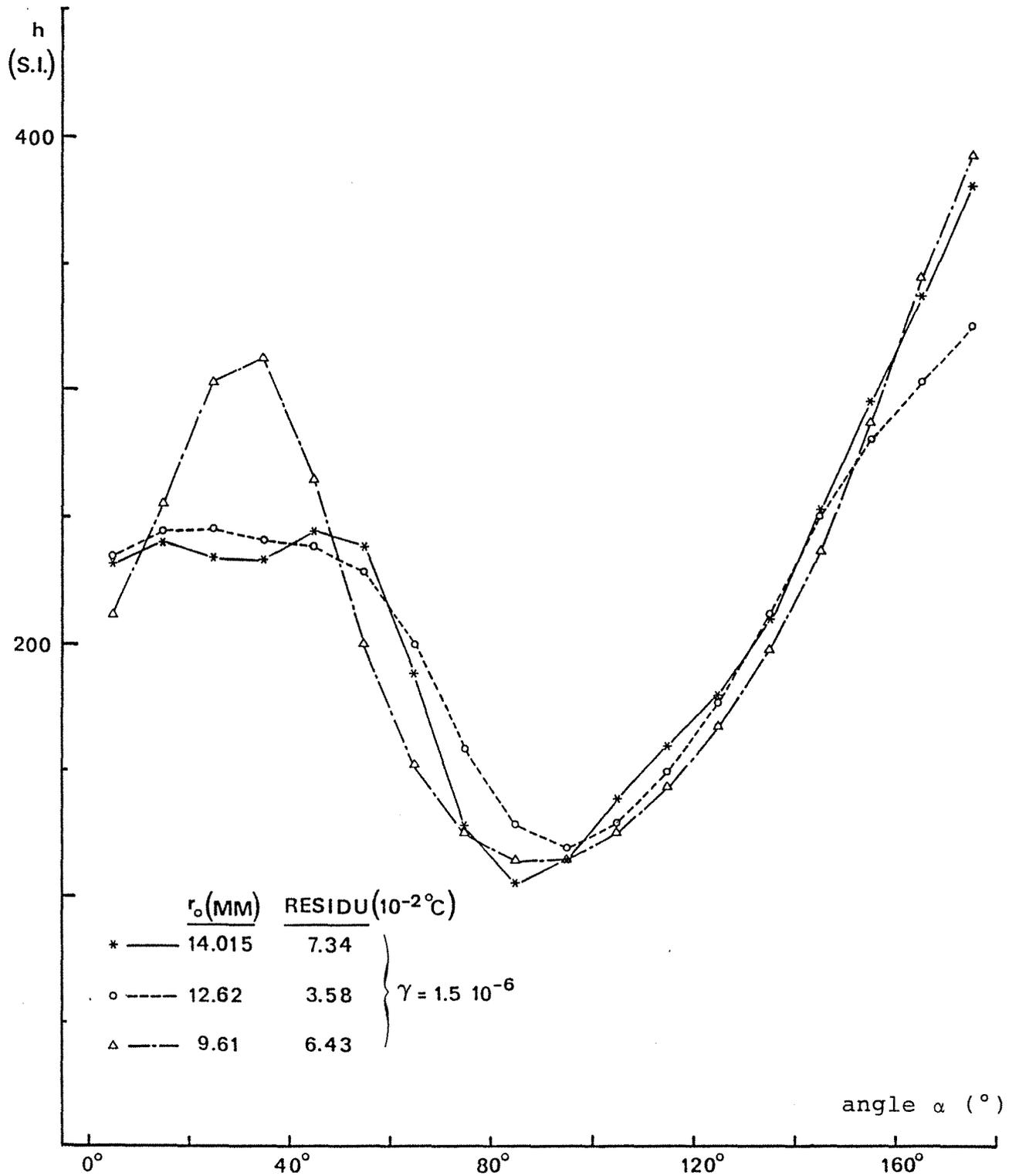


Fig. 14 b. Coefficients de transfert identifiés - rayons homologues moyens - $\lambda=0,26$ SI

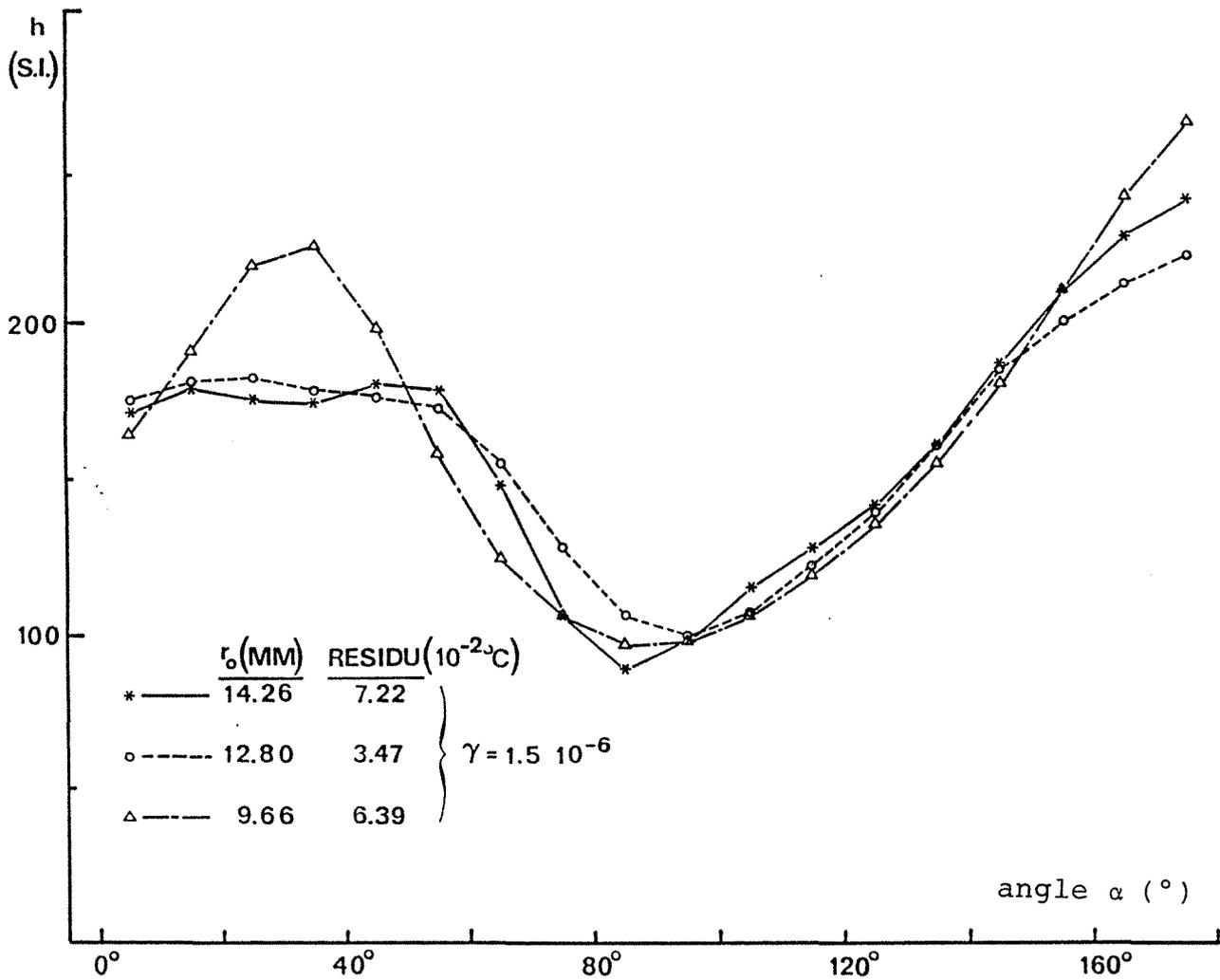


Fig. 14 c. Coefficients de transfert identifiés - rayons homologues maxima - $\lambda=0,26$ SI

Les résultats obtenus avec la sonde interne r''_0 s'écartent notablement des autres profils entre 0 et 50°. Cela provient certainement, d'une part d'une plus forte sensibilité locale au bruit lorsque l'on se rapproche du rayon interne r_1 et d'autre part du comportement de la résine utilisée dans la gamme de température mesurée par cette sonde (54 à 57°C). Une mesure en continu de la capacité thermique de la résine a mis en évidence une transformation vitreuse endothermique centrée sur 62°C, c'est-à-dire à une température inférieure à celle du tube de cuivre central (65 à 66°C). Cette transformation n'est plus mise en oeuvre lorsque le régime permanent est atteint ; par contre, toute fluctuation de température induit une fluctuation du degré d'avancement de la transformation qui crée ainsi un terme local - source ou puits de chaleur - dans l'équation (1) et perturbe le champ des températures au voisinage du rayon r''_0 de la sonde interne.

Les profils du coefficient h des figures 14 ont été calculés à l'aide d'une conductivité thermique nominale λ de $0,26 \text{ W m}^{-1}\text{K}^{-1}$. Les mesures de capacité thermique mentionnées plus haut et de diffusivité thermique de la résine époxy (Cyba-Geigy CY 1301 + durcisseur HY 932) ont permis d'accéder indirectement à la variation de sa conductivité avec la température représentée sur la figure 15. Celle-ci varie faiblement avec la température (de l'ordre de 14 % entre l'ambiante et la température du tube de cuivre). Il est ainsi possible de choisir pour cette conductivité λ :

- soit une valeur moyenne : $\bar{\lambda} = 0,224 \text{ W m}^{-1}\text{K}^{-1}$

- soit une variation linéaire avec la température T (en degrés Celsius) obtenue par une régression linéaire :

$$\lambda(T) = 0,186 + 7,52 \times 10^{-4}T \quad (36)$$

4.5.4.2 - Comparaison avec un traitement des mesures par la méthode des éléments de frontière

Les températures mesurées présentées plus haut ont pu être traitées par une méthode inverse différente, issue d'un modèle de résolution de l'équation de la chaleur par la méthode des éléments frontières, développée par

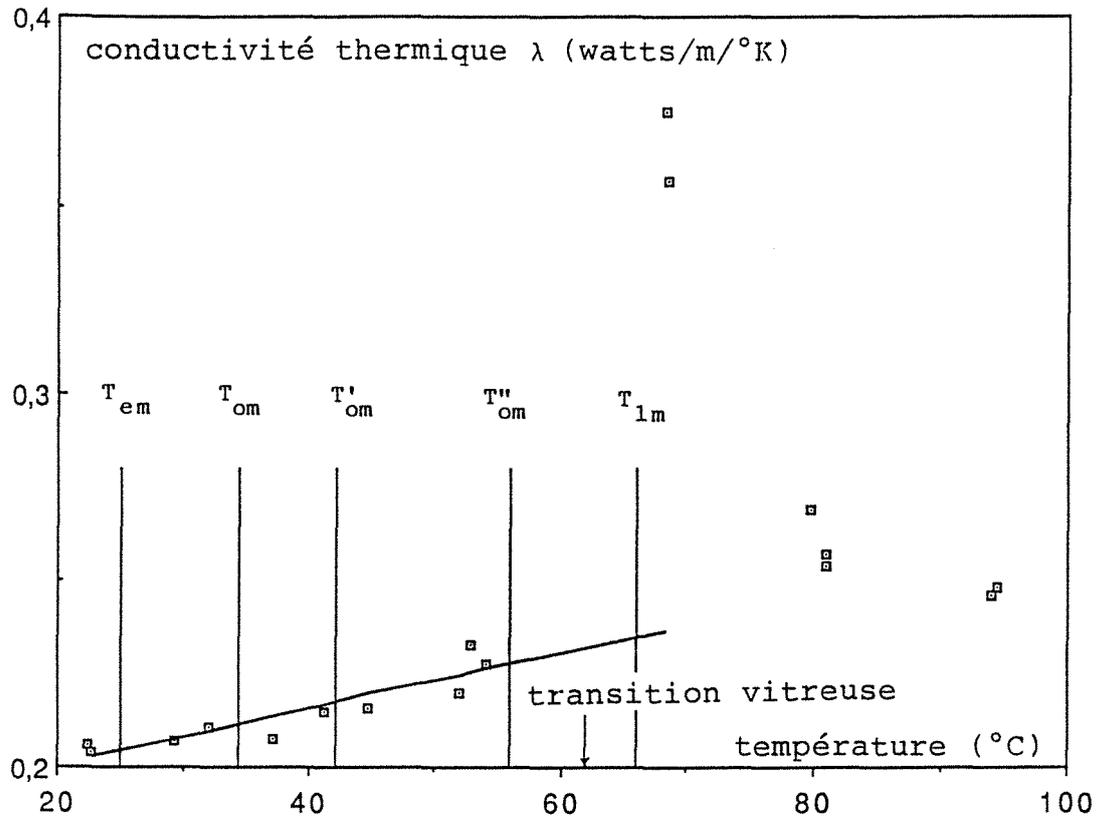


Fig. 15. Conductivité thermique de la résine: variation avec la température et niveaux moyens des températures mesurées à différents rayons

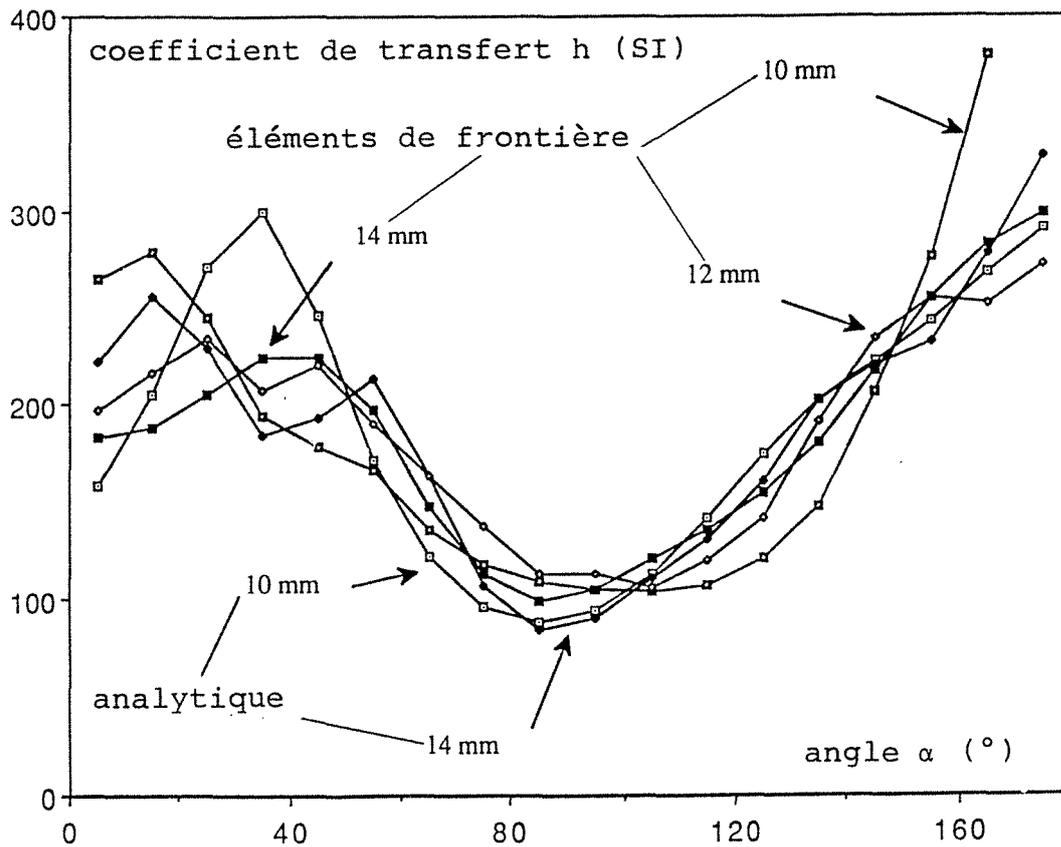


Fig. 16. Inversion à partir de mesures brutes - $\lambda=0,224$ SI; $\gamma = 1,0 \cdot 10^{-6}$

R. Pasquetti et col. [11 et 12]. Cette méthode utilise la technique de régularisation mais la norme utilisée est différente et est minimisée par rapport à un vecteur inconnu qui est constitué, dans le cas présent, non seulement des densités de flux φ_i inconnues - ou, ce qui est semblable, des dérivées radiales de la température - mais aussi des températures et des flux inconnus sur la frontière du domaine défini ici par les deux demi-cercles de rayons r_1 et r_2 et les segments rectilignes $\alpha = 0$ et $\alpha = \pi$. Les profils de coefficient d'échange identifiés obtenus par les deux méthodes (inversion semi-analytique ou par éléments frontières), à partir des profils de température brute y_i et θ_{ei} affectés aux valeurs centrales des rayons de mesure (voir la **figure 13d**) - sont présentés sur la **figure 16** pour une conductivité λ de $0,224 \text{ W m}^{-1}\text{K}^{-1}$ et pour une valeur commune, égale à 10^{-6} , du paramètre régularisateur γ .

L'inversion analytique produit deux profils de même minimum, leurs instabilités, c'est-à-dire leurs absences de régularités, étant situées dans les 50 premiers degrés angulaires, tandis que l'inversion par éléments de frontière permet d'obtenir trois profils dont les minima se décalent vers des angles plus importants lorsque la profondeur du thermocouple augmente (r_0 diminue).

Les résultats des deux techniques sont voisins pour un rayon r_0 de 14 mm tandis que les écarts sont plus importants pour la valeur la plus basse ($r_0 = 10$ mm), même si la forme générale reste identique.

La technique d'inversion par éléments frontières permet d'utiliser une conductivité variable avec la température ; les résultats obtenus dans ce cas par Pasquetti, présentés en [4], pour une conductivité obéissant à la loi donnée par l'équation (36), sont comparés sur la **figure 17** à ceux obtenus par la même technique pour la conductivité précédente constante - **figure 16**. L'effet non linéaire induit par cette conductivité variable semble très faible, du moins dans notre cas où λ dépend peu de la température, même si la prise en compte d'une conductivité moyenne représentative semble avoir un certain effet régularisant.

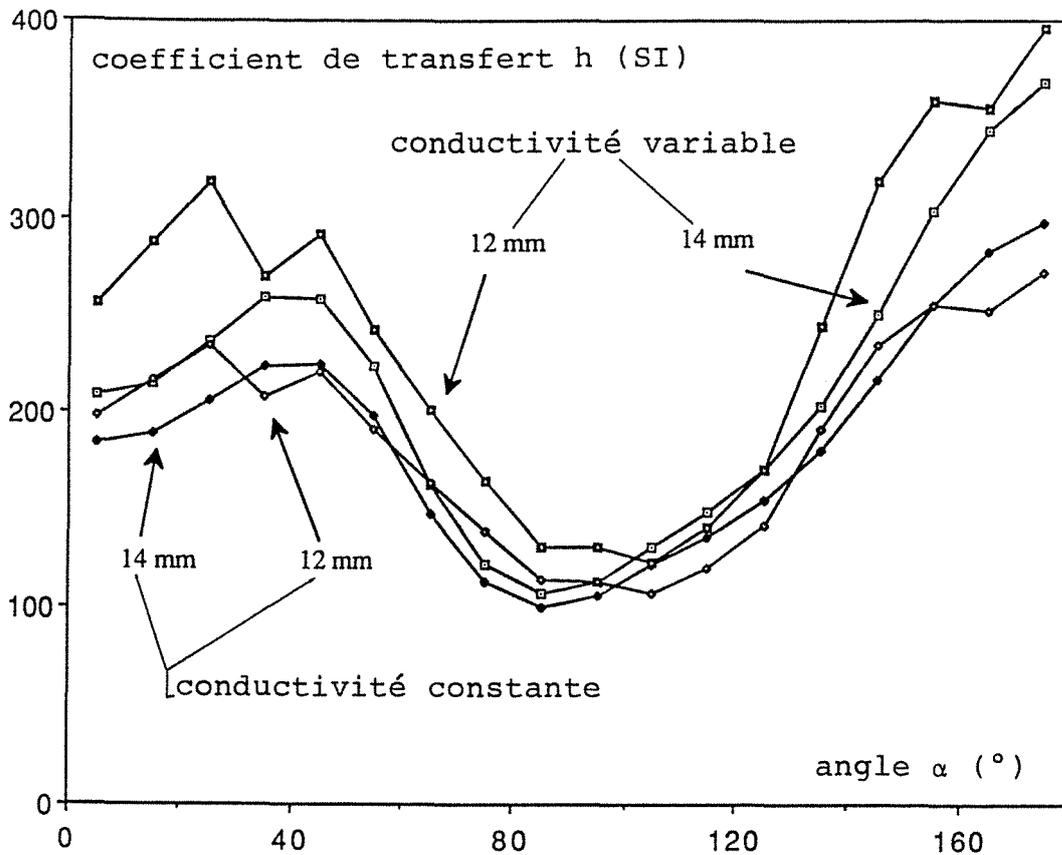


Fig. 17. Inversion par la méthode des éléments de frontière: comparaison entre les cas à conductivité variable ou constante ($\gamma = 1,0 \cdot 10^{-6}$)

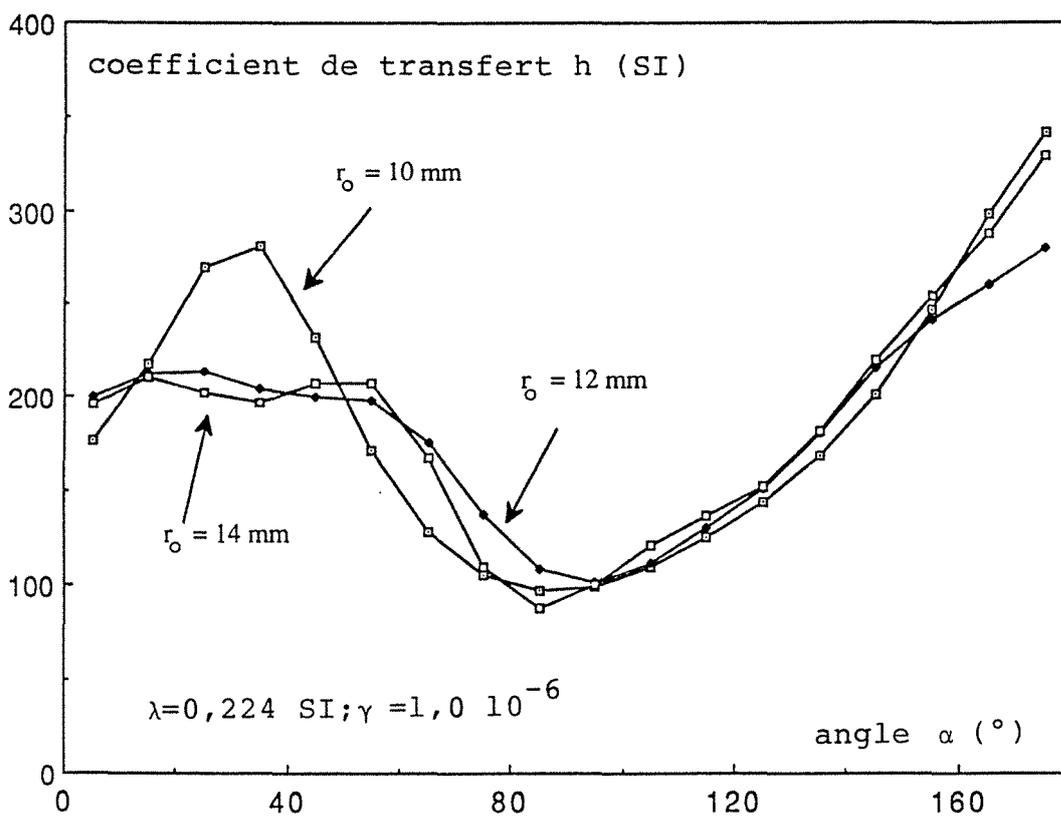


Fig. 18. Inversion à partir de mesures corrigées

Notons que l'incertitude sur la valeur représentative de la conductivité, à adopter lors de l'inversion, ne peut être levée par une paramétrisation de celle-ci, au même titre que les flux φ_i , car le coefficient de sensibilité relative $\lambda X_\lambda (= \lambda \partial \theta_o / \partial \lambda)$ est égal à la température θ_o qui est elle-même une combinaison linéaire de ces flux φ_i - voir équation (14) ; cette existence de coefficients de sensibilités complètement corrélés traduit alors la nécessité de connaître au moins une grandeur énergétique - ici la conductivité ou un flux local dans les méthodes basées sur des bilans - pour mesurer un coefficient d'échange.

4.5.4.3 - Effets de la correction de température ambiante, de la valeur de la conductivité et traitement des points d'arrêt

L'inversion analytique, dont les résultats sont présentés sur la **figure 16**, correspond aux données brutes (y_i ; $\theta_e = \sum \theta_{ei} / (N + 1)$; $\lambda = 0,224$ SI ; $\gamma = 10^{-6}$; valeurs centrales de r_o et r'') ; afin d'examiner l'effet de la correction (34) - remplacement des mesures y_i par y_i^c - les profils de coefficient de transfert, obtenus pour les trois sondes pour les mêmes valeurs des autres paramètres, ont été calculés et tracés sur la **figure 18**.

Cette correction permet de supprimer les fluctuations aux faibles valeurs angulaires constatées plus haut : celles-ci étaient donc dues aux fluctuations de la température ambiante T_e entre deux mesures. D'autre part, cette correction unidimensionnelle n'entraîne aucune distorsion du profil identifié pour h .

Le profil obtenu pour un rayon de 12 mm semble plus "lissé" que celui correspondant à 14 mm ; cet effet est causé par l'interpolation qui a été effectuée pour ramener les températures mesurées à des multiples de 10° , le profil original pour 12 mm ayant été obtenu pour $4^\circ, 14^\circ, \dots$

Cette interpolation n'introduit aucun biais sur la densité de flux identifiée dans les régions où son évolution angulaire est linéaire. Par contre elle fait apparaître des extrema moins marqués dans les autres régions où $d^2\varphi/d\alpha^2$ n'est plus négligeable, c'est-à-dire ici dans la région $80-90^\circ$ - comparer les minima de profil obtenu pour $r_o = 12$ mm à celui cor-

respondant à $r_0 = 14$ mm ; dans ces zones l'interpolation angulaire a le même effet qu'une augmentation du paramètre régularisateur.

On peut remarquer qu'un changement de la valeur de la conductivité se répercute proportionnellement sur le coefficient de transfert identifié - voir les équations (7), (16) et (27) - et ce, en l'absence de régularisation et de bruit ; cet effet n'est pas sensiblement modifié en présence d'une faible régularisation sur les données expérimentales nécessairement bruitées comme on peut le constater par comparaison des **figures 11b** et **18**.

La pente des profils $h(\alpha)$ représentés sur la **figure 18** n'est pas nulle au point d'arrêt arrière ($\alpha = 180^\circ$) et ceci est contraire à l'hypothèse de symétrie par rapport au vecteur vitesse de l'écoulement amont ; on peut envisager ici un effet de convection naturelle sur le cylindre horizontal ou une absence de points de mesure symétriques dans la régularisation. Pour prendre ceux-ci en compte un terme régularisateur S' , du premier ordre, a été ajouté à la somme S définie par l'équation (29) ; il prend en compte les deux intervalles angulaires extrêmes pour lesquels la dérivée seconde ne peut être évaluée :

$$S' = (\varphi_2 - \varphi_1)^2 + (\varphi_N - \varphi_{N-1})^2$$

Remarquons que ce terme est pris en compte avec un poids très fort - 1 par rapport à une valeur de 10^{-6} pour γ - destiné à aplatir les profils de h et φ aux voisinages de 0 et 180° et qu'il peut être considéré comme un terme du second ordre "déguisé" si l'on prend en compte l'hypothèse de symétrie, car le premier terme de S' peut être mis sous la forme :

$$(\varphi_2 - 2\varphi_1 + \varphi_2)^2/4$$

4.5.4.4 - Comparaison avec des mesures antérieures

Une moyenne des deux profils de coefficient h , obtenus avec correction unidimensionnelle et prise en compte du terme S' pour les rayons centraux à 12 et 14 mm, est présentée sur la **figure 19**. On peut constater que

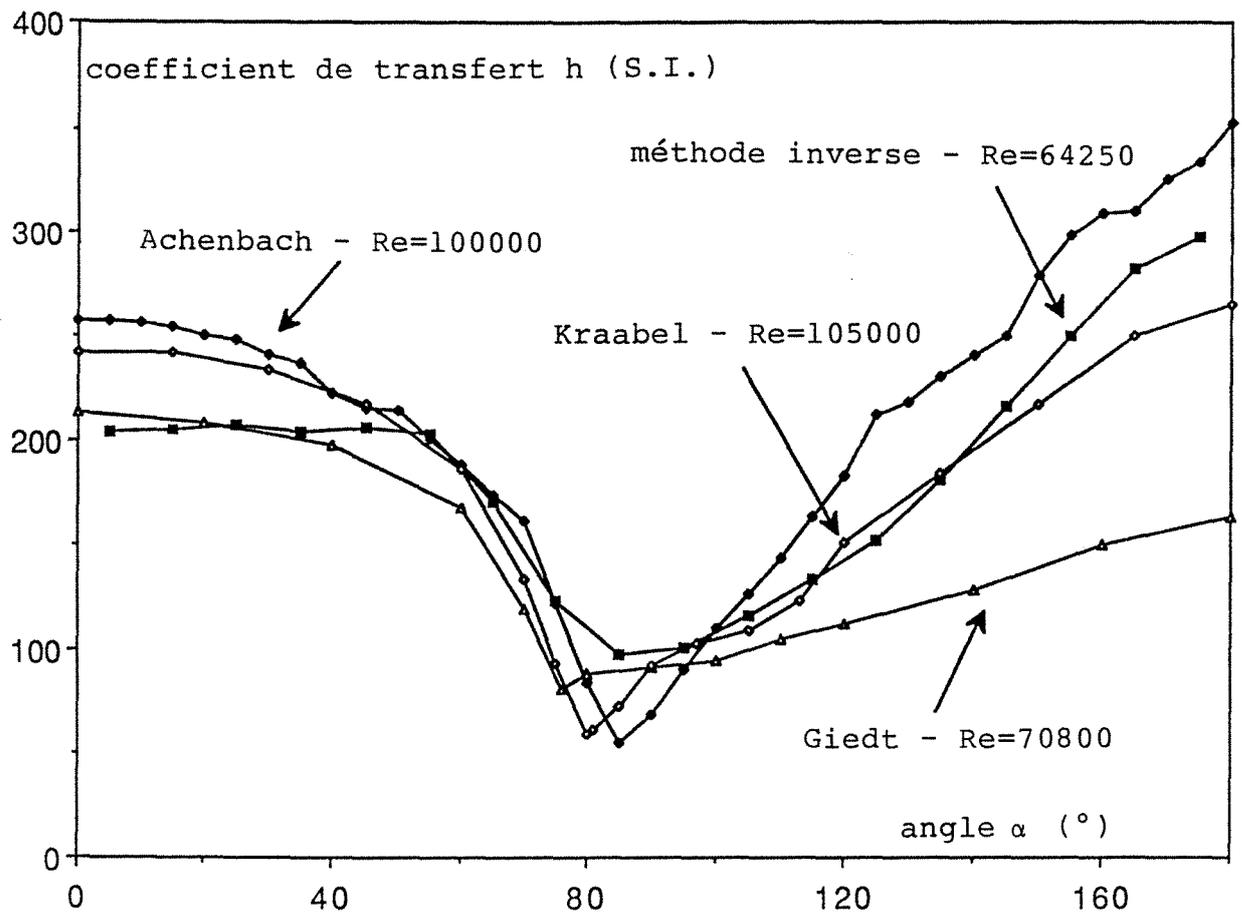


Fig. 19. Comparaison avec des mesures antérieures de coefficient de transfert

la pente est nulle au voisinage de 0° et qu'elle est plus faible que précédemment - voir la **figure 18** - à 180° .

Les profils expérimentaux de coefficient d'échange obtenus par Giedt en 1949 [13], Achenbach en 1975 [14] et Kraabel en 1985 [15], pour des nombres de Reynolds légèrement plus élevés, sont tracés également sur la même **figure 19**. Les mesures du nombre Nusselt de ces trois auteurs ont été converties en valeur de h en utilisant le rayon r_2 des mesures présentées ici et la conductivité thermique de l'air.

Les quatre profils représentés présentent la même variation qualitative : on retrouve l'évolution quasi linéaire sur l'aval du cylindre avec un transfert au point d'arrêt aval supérieur à celui du point amont (sauf chez Giedt). Pour les faibles taux de turbulence Zukauskas et Ziugzda [1] proposent des corrélations locales du nombre de Nusselt qui varient en $Re^{0,5}$ au point d'arrêt amont, en $Re^{0,83}$ au point d'arrêt aval et en $Re^{0,6}$ sur le transfert moyen en régime subcritique correspondant à ces mesures. Il est donc pratiquement impossible d'isoler l'influence du nombre de Reynolds pour faciliter la comparaison entre les trois courbes de la **figure 19**. Les différences peuvent provenir des conditions expérimentales : taux de turbulence, facteur de blocage et condition limite pariétale comme Zukauskas et Ziugzda l'ont montré. Ces différences peuvent également avoir pour origine les limitations intrinsèques des méthodes de mesure basées sur les bilans et qui ont déjà été mentionnées en 4.1. Pour souligner ce dernier point, il est possible de remarquer que les profils des trois auteurs présentent un minimum très marqué au voisinage du point de séparation de la couche limite ($\approx 80^\circ$). Cela provient du fait qu'un bilan local ne peut pas prendre correctement en compte la conduction tangentielle à la paroi. En effet, ces méthodes modifient le champ de température interne dans le cylindre et ceci, de façon différente pour chaque point de mesure : chaque point de mesure ne correspond donc pas au même problème (modification des conditions limites). Ceci constitue un des avantages de la mise en oeuvre d'une technique inverse qui permet d'éliminer ce problème.

4.6 - AVANTAGES ET INCONVENIENTS DE LA METHODE

Les avantages de cette méthode inverse pour l'obtention de l'évolution angulaire du coefficient de transfert sur un cylindre, par rapport à une méthode basée sur les bilans, sont les suivants :

- pas de perturbation des lignes de flux : l'homogénéité du cylindre de mesure est conservée et les thermocouples suivent les isothermes du problème (caractère non intrusif).
- partie expérimentale aisée : pas de réglage de résistances de compensation ou d'anneaux de garde.
- estimation des pertes inutile.
- maîtrise des incertitudes sur le transfert moyen, dues aux erreurs de mesure de la température et de positionnement des sondes.

D'autres avantages peuvent être relevés :

- inversion exacte si les mesures sont sans bruit (pour $\epsilon = \gamma = 0$).
- un seul paramètre γ , le coefficient de régularisation, est arbitraire mais l'on peut l'ajuster.
- le profil de coefficient de transfert obtenu est indépendant de la technique d'inversion utilisée car la méthode des éléments frontières, qui utilise la minimisation d'une autre fonctionnelle, produit des résultats voisins.
- la prise en compte d'une conductivité constante produit une bonne approximation du cas d'une variation avec la température si cette variation est faible.
- temps de calcul très courts : l'inversion ne nécessite que quelques secondes de calcul sur un ordinateur type 386 PC, une fois que les matrices du système (30) ont été calculées.

Une limitation certaine quant à l'utilisation de cette méthode réside en la nécessité de connaître avec une grande précision le rayon d'implantation de la sonde de température, qui a un effet très important sur le niveau de l'échange identifié. Afin de lever l'incertitude sur ce rayon, on peut envisager, à la place de la méthode calorimétrique de mesure du flux total mentionnée dans la section 4.5.4.1, l'une ou l'autre des méthodes suivantes :

- prise en compte de ce rayon r_0 de mesure en tant que composante supplémentaire du vecteur inconnu, au même titre que les flux ϕ_i et minimisation de la fonctionnelle (29) par rapport à ce vecteur élargi des paramètres.
- écriture de la fonctionnelle (29) en remplaçant la température locale théorique θ_{oi} par une température moyenne représentative de l'extension de la jonction du thermocouple de mesure.

La première solution semble séduisante mais présente l'inconvénient de rendre le problème non linéaire avec ses conséquences sur la minimisation de la fonctionnelle S qui nécessite alors la mise en oeuvre d'un processus itératif. La deuxième solution se rapproche plus de la physique du phénomène car la température mesurée n'est nullement ponctuelle, au sens mathématique du terme, mais représente en fait l'intégrale d'une force électromotrice sur le volume de la soudure au sein de laquelle les deux matériaux constitutifs du couple sont en contact. Ainsi l'écriture du problème en valeur moyenne, par exemple sur un élément quadratique défini par deux rayons et deux cercles dans lequel la soudure serait inscrite, permettrait de s'affranchir de ce problème. Notons ici qu'une mesure de température de surface, par exemple par radiométrie infrarouge comme pratiqué au chapitre 3, présente l'énorme avantage d'éliminer ce paramètre inconnu constitué par la profondeur d'implantation de la sonde de température.

Remarquons que, comme dans d'autres méthodes de conduction inverse, une estimation précise des erreurs d'identification est assez délicate - voir Groetsch [16].

4.7 - REFLEXIONS ET PERSPECTIVES

Le modèle conductif qui a été établi ici est destiné à l'identification d'une condition limite convective non uniforme à partir de mesures de température à l'intérieur du matériau constituant la paroi.

Le problème direct a été décrit dans une géométrie cylindrique, le transfert dans la direction axiale n'étant pas mis à contribution. La résolution analytique obtenue est exacte, sous réserve que le profil pariétal de densité de flux soit une fonction constante par morceaux de l'abscisse angulaire. Cette hypothèse n'est nullement restrictive car il a été montré plus haut que le profil angulaire interne de température, à rayon constant, est indépendant de la discrétisation, dès que le nombre d'intervalles est suffisant. L'étude de la sensibilité aux flux pariétaux a par ailleurs montré que l'augmentation de la finesse de la discrétisation angulaire s'accompagnait d'une réduction des coefficients de sensibilité accompagnée d'une augmentation de leur corrélation spatiale. Ceci traduit le nécessaire compromis qui doit être adopté entre finesse de description et possibilité d'identification quant au choix du nombre de composantes du vecteur paramètre à identifier.

Le problème n'étant pas linéaire, en terme de coefficient local d'échange, l'influence sur ce dernier, des incertitudes sur la localisation de la sonde et sur la mesure des températures, a été étudié en valeurs moyennes, après intégration angulaire.

Le problème inverse a été abordé à l'aide d'une méthode de régularisation du second ordre. Le traitement, pour plusieurs cas tests, de mesures simulées, constituées de profils de température issus du modèle direct, qui ont été ensuite bruitées, a permis d'ajuster le niveau du paramètre régularisateur, de façon à minimiser l'erreur sur le coefficient d'échange. A cet endroit on a bien retrouvé l'idée que le résidu de température doit être du même ordre de grandeur que le bruit de mesure.

Des mesures expérimentales sur trois rayons différents ont été obtenues dans un cas de convection forcée. Les profils de coefficient d'échange

qui ont été identifiés sont cohérents entre eux. Ils sont d'autre part très proches des profils obtenus par une méthode d'inversion des mêmes mesures de température par une méthode des éléments de frontière. Une comparaison avec des profils d'échange obtenus par d'autres expérimentateurs, dans des conditions voisines, par des méthodes plus classiques de type "bilans" a permis de "calibrer" cette technique inverse en faisant ressortir sa spécificité. D'autre part, les avantages et inconvénients de la méthode ont été examinés.

Ce type de mesure de coefficient d'échange pariétal par méthode de conduction inverse peut être étendu en géométrie cylindrique aux cas suivants :

- le profil $h(\alpha)$ n'est plus symétrique.
- c'est la condition limite interne qui est inconnue.
- l'évolution de h est axiale avec axisymétrie (cas de l'établissement d'un régime thermique en écoulement interne ou externe) ; voir à ce sujet l'étude de Z. Lassed [17].
- l'évolution de h est radiale avec axisymétrie (impact d'un jet sur un plan chaud par exemple).

Dans tous ces cas de figure, à géométrie simple mais typique de problèmes industriels, des solutions analytiques existent et le problème de l'identification de h peut être abordé de manière similaire. La principale difficulté réside dans le choix des conditions limites connues qui doivent être assez réalistes pour pouvoir être mises en oeuvre lors de l'expérimentation.

BIBLIOGRAPHIE - CHAPITRE 4

- [1] - A. ZUKAUSKAS, J. ZIUGZDA, Heat transfer of a cylinder in crossflow (ed. by Hewitt G.F., Hemisphere Pub. Corp., Springer Verlag, New-York), 1985.
- [2] - M.G. MARTIN, J. GOSSE, Etude de la convection thermique autour des cylindres par un écoulement pulsé, C.R. Acad. Sc. Paris, t. 266, Série A, p. 1107 (20 mai 1969).
- [3] - D. MAILLET et A. DEGIOVANNI, Méthode analytique de conduction inverse appliquée à la mesure du coefficient de transfert local sur un cylindre en convection forcée, Rev. Physique Appliquée, vol. 24, pp. 741-759, 1989.
- [4] - D. MAILLET, A. DEGIOVANNI et R. PASQUETTI, Inverse heat conduction applied to the measurement of the heat transfer coefficient on a cylinder : comparison between an analytical and a boundary element technique, ASME, Journal of Heat Transfer, vol. 113, pp. 549-557 (August 1991).
- [5] - A. DEGIOVANNI, G. SINICKI, A. GERY, M. LAURENT, Un modèle de résistance thermique de contact en régime permanent, Rev. Générale de Thermique, 267, pp. 161-175, mars 1984.
- [6] - N.R. KELTNER, J.V. BECK, Unsteady surface element method, J. of Heat Transfer, 103, pp. 759-764, novembre 1981.
- [7] - M.N. OZISIK, Heat conduction (ed. John Wiley and Sons, New-York), 1980.
- [8] - R. COURANT, D. HILBERT, Methods of mathematical physics, 1, Chap 3 (ed. John Wiley and Sons, New-York), 1953.
- [9] - A. TIKHONOV, V. ARSENINE, Méthode de résolution des problèmes mal posés, Editions de Moscou, 1976.
- [10] - J.V. BECK, B. BLACKWELL, C.R. ST-CLAIR Jr., Inverse heat conduction - Ill-posed problems, (ed. John Wiley and Sons, New-York) 1985.
- [11] - R. PASQUETTI, C. LE NILIOT, Conduction inverse par éléments de frontière. Cas stationnaire, Rev. Physique Appliquée, vol. 25, pp. 99-107, 1990.
- [12] - R. PASQUETTI, A. CARUSO, Boundary element approach for transient and non-linear thermal diffusion, Numerical Heat Transfer, part B, vol. 17, pp. 83-99, 1990.

- [13] - **W.H. GIEDT**, Investigation of variation of point unit-heat-transfer coefficient around a cylinder normal to an air stream, **Trans. ASME**, 71 (1949) cité par **F. KREITH**, Principles of heat-transfer (ed. Intext Educational Pub. Nework) 1973.
- [14] - **E. ACHENBACH**, Total and local heat transfer from a smooth circular cylinder in cross-flow at high Reynolds number, **Int. J. Heat Mass Transfer**, 18, pp. 1287-1396, 1975.
- [15] - **J.S. KRABEL**, **J.W. BAUGHN** and **A.A. Mc KILLOP**, An instrument for the measurement of heat flux from a surface with uniform temperature, **ASME Journal of Heat Transfer**, vol. 102, pp. 576-578, 1980.
- [16] - **W.C. GROETSCH**, The theory of Tikhonov regularization for fredholm equations of the first kind, **Pitman**, 1984.
- [17] - **Z. LASSED**, Mesure de l'évolution axiale d'un coefficient d'échange en conduite cylindrique par conduction inverse, **Mémoire de DEA, LEMTA - INPL, Nancy, oct. 1991.**

CONCLUSION ET PERSPECTIVES

A travers les quatre problèmes différents d'inversion qui ont été traités dans ce mémoire, on constate que la qualité de l'estimation obtenue est étroitement dépendante du degré d'indépendance des coefficients de sensibilité du signal aux paramètres à estimer du modèle. A ce sujet il est tout d'abord naturel de tenter un rapprochement entre les problèmes d'estimation de paramètres et ceux liés à la conduction inverse.

En estimation de paramètre, lorsque les choses se passent mal, les sensibilités sont liées et les paramètres sont corrélés entre eux, vis-à-vis du signal retenu, rendant impossible leur identification simultanée. Notons que cette corrélation dépend de l'intervalle temporel ou spatial choisi pour l'estimation. On a vu, principalement au chapitre 2, qu'une solution à ce problème réside dans un changement de paramétrage afin de faire disparaître du modèle le paramètre dont la sensibilité est nettement plus faible que les autres dans le nouveau paramétrage : on fait ainsi diminuer d'une unité le nombre de degrés de liberté du modèle. Ce procédé est efficace car un système à deux paramètres presque totalement corrélés peut être caractérisé par deux sensibilités pratiquement proportionnelles et de même ordre de grandeur dans un premier type de paramétrage ou par deux sensibilités dont l'une a un niveau nettement inférieur à celui de l'autre (un à plusieurs ordres de grandeur) dans un deuxième type de paramétrage.

Un changement de définition du signal, tel que celui effectué au chapitre 1 (passage d'une température brute T à une température normalisée T^*) permet d'obtenir un résultat voisin dans certains cas (ici réduction de la sensibilité au nombre de Biot et disparition de la température adiabatique du modèle).

Cette tendance naturelle à chercher à réduire le nombre de paramètres d'un modèle provient du fait que, plus les paramètres sont nombreux, plus augmentent les chances de voir les sensibilités se lier et ce, particuliè-

rement en régime transitoire pour lequel le signal évolue entre deux niveaux constants, ce qui signifie que ses sensibilités sont nulles avant l'excitation pour retourner à zéro au bout d'une durée, en pratique finie après la fin de cette dernière.

En conduction inverse linéaire, il est évident qu'une réduction du nombre de niveaux de discrétisation de la fonction inconnue conduit à un meilleur conditionnement de la matrice de sensibilité et joue donc un rôle régularisateur. En effet, comme il a été montré en section 4.3.1, les profils des coefficients de sensibilité d'une température particulière à une composante différente et variable du vecteur paramètre (un flux pariétal particulier) représentent en fait une ligne de la matrice de sensibilité : si le nombre de composantes du vecteur paramètre augmente, les profils se rapprochent tout en voyant leur niveau maximum diminuer, ce qui tend à lier de façon plus forte les différentes lignes adjacentes de la matrice de sensibilité et augmente donc son mauvais conditionnement. Ce phénomène est dû au fait que chaque composante du vecteur paramètre (ici un flux) n'a pas de réalité intrinsèque et ne représente alors qu'une composante moyenne, donc une intégrale sur un intervalle fini, de la fonction inconnue (ici la densité de flux pariétal) ; cette augmentation de la corrélation des paramètres avec la finesse de la discrétisation, et donc avec leur nombre, est tout à fait similaire à ce qui a été vu plus haut sur l'estimation de paramètres. A la limite on peut dire qu'un problème d'estimation de paramètres où le modèle direct contient un grand nombre de paramètres sensés représenter de façon très fine le processus physique (du type caractéristique thermique variable avec la température et représentée par une loi comportant des coefficients discrets) conduit à un problème inverse tout aussi "mal posé" que celui consistant à chercher à évaluer une condition située en dehors des limites thermiquement connues du domaine en conduction inverse.

En conduction inverse, la seule façon de contourner ce seuil de finesse de discrétisation est d'injecter une information supplémentaire dans le modèle inverse, à savoir le fait que les paramètres sont en fait les valeurs discrétisées d'une même fonction et que leur variation spatiale ou temporelle ne saurait être quelconque (méthode de régularisation par exemple). Ceci revient en fait à corrélérer les paramètres entre eux et va encore

dans le sens d'une réduction du nombre de degrés de liberté du système tout en introduisant un biais systématique en cas de mesures exactes.

Un deuxième enseignement qui a été mis en évidence par ce travail est la méthode qui consiste à contourner le caractère "mal posé" du problème inverse en changeant la définition de la grandeur à observer ; ainsi, pour éliminer les effets des pertes, qui peuvent être traduits par un petit paramètre dans les chapitres 2 et 3, un contraste a été construit, qui résulte des évolutions temporelles de la température, issues de deux expériences distinctes ou de deux sites différents, et dont la mesure est en fait très proche du contraste adiabatique. Outre la réduction du modèle qui en résulte, consécutive à la disparition du nombre de Biot, cette technique permet de plus, sans changer les sensibilités absolues (dérivées du signal par rapport aux différents paramètres), d'augmenter leurs niveaux relatifs par rapport au signal maximum. Dans le cas particulier du contrôle non destructif par voie thermique, qui constitue en fait un problème de conduction inverse bidimensionnel transitoire dont l'inversion est délicate, ce passage de la température au contraste normalisé localement permet de "coller" beaucoup plus aux conditions expérimentales, lorsqu'on applique ponctuellement une technique d'inversion unidimensionnelle. Ceci est de plus particulièrement intéressant chaque fois que les conditions aux limites sont incontrôlables ou difficiles à respecter. Ainsi un changement de fonction inconnue, éventuellement doublé d'un éventuel changement de paramétrage pour les raisons invoquées plus haut, permet d'obtenir une certaine forme de diagonalisation de la matrice des sensibilités qui permet de "mieux poser" le problème inverse.

Un troisième apport de ce mémoire réside en l'étude ou l'emploi de méthodes d'estimation de paramètres basées sur des intégrales temporelles pondérées des mesures - moments partiels au chapitre 1 et transformées expérimentales de Laplace aux chapitres 2 et 3 - et ce, dans des cas fortement non linéaires pour lesquels un algorithme "aveugle" de minimisation itérative d'une fonctionnelle, du type de la méthode des moindres carrés, a toute chance d'échouer (problème du choix du point initial). Ceci est particulièrement vrai dans le cadre du contrôle non destructif pour lequel on ne dispose d'aucune valeur nominale des paramètres puisqu'on ignore même l'existence des défauts qu'ils sont sensés caractériser.

Remarquons en outre que l'identification dans l'espace de Laplace est particulièrement bien adaptée dans les régimes transitoires à relaxation rapide, caractéristiques des signaux de type contraste. Par ailleurs, ces techniques inverses intégrales permettent d'obtenir, tout comme les différentes variantes de la méthode des moindres carrés, un chiffrage des intervalles de confiance de l'estimation, à partir des données dont on dispose sur le bruit de mesure et ce, grâce à des considérations statistiques.

Enfin, cette étude souligne l'intérêt des méthodes analytiques qui permettent, en dépit de leurs limitations à des géométries simples et à des problèmes directs linéaires, de se rapprocher davantage de la physique d'un phénomène, en conservant un formalisme qui met en évidence les interactions entre les différentes grandeurs de son modèle, interactions qui peuvent être masquées par une discrétisation trop précoce de celui-ci. Ceci est possible dans le cas de la conduction pour laquelle l'équation de la chaleur repose sur un potentiel unique, la température, et une loi simple, la loi de Fourier, qui modélisent correctement le transfert correspondant pour le problème direct. Dans d'autres problèmes de diffusion, le transfert de masse par exemple, la situation peut être considérablement compliquée du fait de l'existence de plusieurs potentiels différents.

Les méthodes analytiques décrites ici peuvent donc constituer un apport fertilisant aux méthodes inverses basées sur des formulations intégrales, éléments finis ou de frontière par exemple, qui sont plus adaptées lorsque les géométries sont plus complexes et le problème direct non linéaire.

Les questions qui restent en suspens à l'issue de cette étude concernent le cas du problème de conduction inverse bidimensionnelle :

- quelle est le meilleur moyen de réduire l'extrême sensibilité de l'estimation obtenue à la localisation des sondes de température ?
- comment chiffrer les intervalles de confiance d'une fonction ?

Remarquons que, bien que cette dernière question reste sans réponse, le fait que deux techniques d'inversions différentes apportent pratiquement

le même résultat, après traitement des mêmes données expérimentales, est en soi une constatation très positive.

Les perspectives qui s'ouvrent dans le prolongement de ce travail sont les suivantes :

- en contrôle non destructif thermique, en amont de ce qui a été traité ici, et une fois un défaut, c'est-à-dire une anomalie de la structure, détecté, on peut se poser la question de pouvoir déterminer le type de ce dernier - délaminage unique ou superposé, microporosité, variation d'épaisseur ... - et ce, avant même de chercher à chiffrer les paramètres de celui-ci. La question est donc essentiellement qualitative : peut-on sérier le type de l'anomalie observée à partir, par exemple, de la forme du thermogramme local de contraste ? Une autre question, directement liée à la précédente, est l'utilisation de ce type de méthode à des fins de métrologie d'épaisseur, dans le cas par exemple de pièces composites creuses ou non accessibles sur la face arrière. En aval de ce qui a été abordé au chapitre 3 on peut se demander si une excitation plus longue de la pièce, permettant la limitation des surchauffes éventuellement dommageables en face avant, peut permettre une identification de la résistance de contact du défaut. D'autres manières d'aborder le problème inverse de l'identification des délaminages, telles que les méthodes des perturbations, méritent également d'être considérées. Enfin l'extension des techniques analytiques à d'autres types de défauts et de matériaux - fissures dans des revêtements composites - sont envisageables bien que difficiles.
- en conduction inverse, l'extension de la technique du chapitre 3 à des mesures de coefficients d'échange constants dans le temps en géométrie cylindrique - évolution axiale du coefficient d'échange interne dans une conduite ou évolution radiale de ce coefficient lors de l'impact d'un jet sur une plaque en incidence normale - est tout à fait possible avec des applications pratiques immédiates (échangeur - revêtement de surface). Plus fondamentale est la question de l'estimation de la variation temporelle du coefficient d'échange aux instants très courts après l'excitation impulsionnelle d'un échantillon : c'est-à-dire comment le coefficient d'échange évolue-t-il aux cours du temps pour atteindre une valeur permanente, dans la mesure où l'on peut encore définir un coefficient

d'échange dans ces conditions . Enfin, toujours en extension de la méthode flash : quelle est la meilleure façon d'estimer une excitation temporelle uniforme de forme quelconque mais finie, à partir de mesures de température en face arrière ?

Il est évident que toutes ces considérations ne sont que des pistes pouvant donner lieu à un développement futur ...

ANNEXES

.....

ANNEXE 1.1

CHAMP DE TEMPERATURE PRODUIT PAR UNE EXCITATION FLASH

Lorsque le problème peut être considéré comme unidirectionnel, la température en tout point z de la plaque soumise à une excitation flash en $z = 0$, s'écrit à l'instant t sous la forme :

$$T = \frac{Q}{\rho c e} Z_z (z^*, t^*, H_1, H_2) \quad (\text{A1.1})$$

avec :

$$z^* = z/e \quad \text{et} \quad t^* = at/e^2$$

$H_1 (= h_1 e/\lambda)$ et $H_2 (= h_2 e/\lambda)$ étant les nombres de Biot des pertes en faces avant et arrière et la fonction Z étant définie par :

$$Z_z = \sum_{n=0}^{\infty} b_n [\cos(u_n z^*) + H_1 \sin(u_n z^*)/u_n] \exp(-u_n^2 t^*) \quad (\text{A1.2})$$

et les valeurs propres u_n étant les solutions positives ou nulle, classées par ordre croissant de n , de l'équation :

$$\sin(u) [u^2 - H_1 H_2] = u \cos(u) [H_1 + H_2] \quad (\text{A1.3})$$

Ces valeurs propres peuvent être calculées par dichotomie sur chaque intervalle d'amplitude π - voir Annexe 1.5.

Les coefficients b_n sont définis par la relation :

$$b_n = 2u_n^2 (u_n^2 + H_2^2) [(u_n^2 + H_1^2)(u_n^2 + H_2^2) + (u_n^2 + H_1 H_2)(H_1 + H_2)]^{-1} \quad (\text{A1.4})$$

Si on se place en face arrière ($z^* = 1$), la température prend la forme suivante :

avec :

$$T = \frac{Q}{\rho c e} Z(t^*, H_1, H_2)$$

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \exp(-u_n^2 t_n^*) \quad (\text{A1.5})$$

et :

$$A_n = \frac{2 u_n^2 \cos(u_n)}{1 + (H_1 + H_2)(u_n^2 + H_1 H_2)/D} \frac{1}{u_n^2 - H_1 H_2} \quad (\text{A1.6})$$

où :

$$D = (u_n^2 + H_1^2)(u_n^2 + H_2^2)$$

ANNEXE 1.2

COEFFICIENTS DE SENSIBILITE EN FACE ARRIERE DANS L'ESPACE DE LAPLACE

La transformée de Laplace \bar{Z} de Z peut s'écrire :

$$\bar{Z} = [s \operatorname{sh}(s) + 2 H_a \operatorname{ch}(s) + H_g^2 \operatorname{sh}(s)/s]^{-1} \quad (\text{A1.7})$$

avec :

$$H_a = \frac{1}{2} (H_1 + H_2) \quad H_g = (H_1 H_2)^{1/2} \quad \text{et} \quad s = \sqrt{p^*}$$

Comme on peut commuter les opérations de transformation et de dérivation par rapport à un paramètre, on a :

$$\mathcal{L}^*[Z'_i] = \frac{\partial \bar{Z}}{\partial H_i} \Big|_{p^*, H_{j \neq i}} = \bar{Z}'_i \quad \text{pour } i, j = 1, 2 \quad (\text{A1.8})$$

$$\mathcal{L}^*[Z'_\alpha] = \frac{\partial \bar{Z}}{\partial H_\alpha} \Big|_{p^*, H_{\beta \neq \alpha}} = \bar{Z}'_\alpha \quad \text{pour } \alpha, \beta = a, g \quad (\text{A1.9})$$

avec :

$$\bar{Z}'_a = -\frac{2}{\bar{Z}^2} \operatorname{ch}(s) \quad \text{et} \quad \bar{Z}'_g = -\frac{2}{\bar{Z}^2} H_g \operatorname{sh}(s)/s \quad (\text{A1.10})$$

et :

$$\bar{Z}'_1 = [\bar{Z}'_a + (H_2/H_1)^{1/2} \bar{Z}'_g]/2 \quad (\text{A1.11})$$

$$\bar{Z}'_2 = [Z'_a + (H_1/H_2)^{1/2} \bar{Z}'_g]/2 \quad (\text{A1.12})$$

Une fois les quatre fonctions \bar{Z}' calculées analytiquement en fonction de p^* dans l'espace de Laplace, l'algorithme numérique d'inversion de Stehfest - voir Annexe 2.1 - permet de revenir dans le domaine temporel et de calculer les sensibilités Z' en fonction du nombre de Fourier t^* .

ANNEXE 1.3

COEFFICIENTS DE SENSIBILITE EN FACE ARRIERE DANS L'ESPACE TEMPOREL

1.3.1 - Calcul de la température maximum et du nombre de Fourier correspondant

Lorsqu'un seul nombre de Biot est pris en compte, on a formellement :

$$Z = Z(t^*, H) \quad (A1.13)$$

Le nombre de Fourier correspondant à la température maximum est alors solution de l'équation :

$$\frac{\partial}{\partial t^*} [Z^*(t^*, H)] = 0 \quad (A1.14)$$

c'est-à-dire, en dérivant Z sous sa forme (A1.5) :

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n u_n^2 \exp(-u_n^2 t^*) = 0 \quad (A1.15)$$

Cette équation est résolue par dichotomie, ce qui permet de calculer numériquement la fonction $t_{\max}^*(H)$. La variation du maximum de Z avec H s'écrit alors :

$$Z_{\max}(H) = Z(t_{\max}^*(H), H) \quad (A1.16)$$

1.3.2 - Calcul des sensibilités des températures brute et normalisée
Température brute

Dans le cas d'un nombre de Biot H unique, on a formellement :

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(u_n, H) \exp(-u_n^2 t^*) \quad (A1.17)$$

avec :

$$u_n = u_n(H)$$

solution de :

$$\operatorname{tg}(u) = \frac{2Hu}{u^2 - H^2} \quad (\text{A1.18})$$

La sensibilité de Z à H est alors :

$$Z'_H = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\left(\frac{\partial A_n}{\partial u_n} - 2 A_n u_n t^* \right) \frac{du_n}{dH} + \frac{\partial A_n}{\partial H} \exp(-u_n^2 t^*) \right] \quad (\text{A1.19})$$

La dérivée de u_n par rapport à H se calcule en dérivant l'équation (A1.18) par rapport à H. Tous calculs faits, on obtient :

$$\frac{du_n}{dH} = \frac{2u_n}{u_n^2 + H^2 + 2H} \quad (\text{A1.20})$$

La sensibilité réduite vZ'_v de Z à v est égale à :

$$vZ'_v = v \frac{\partial Z}{\partial v} \Big|_{t,H} = t^* \frac{\partial Z}{\partial t^*} \Big|_H \quad (\text{A1.21})$$

Elle s'obtient directement par dérivation de l'équation (A1.17) par rapport à t^* .

Température normalisée

La température normalisée T^* est définie par :

$$T^* = Z(t^*, H) / Z_{\max}(H) \quad (\text{A1.22})$$

Sa sensibilité à H est :

$$X_H = \frac{\partial T^*}{\partial H} \Big|_{t^*} = \frac{1}{Z_{\max}^2} \left[\frac{\partial Z}{\partial H} Z_{\max} - Z \frac{dZ_{\max}}{dH} \right] \quad (\text{A1.23})$$

avec :

$$\frac{dZ_{\max}}{dH} = \frac{\partial Z}{\partial t^*} (t_{\max}^*, H) \frac{d t_{\max}^*}{dH} + \frac{\partial Z}{\partial H} (t_{\max}^*, H) \quad (A1.24)$$

La dérivée dt_{\max}^*/dH s'obtient en dérivant l'équation (A1.14) par rapport à H, ce qui donne :

$$\frac{dt_{\max}^*}{dH} = - \frac{\partial^2 Z}{\partial H \partial t^*} (t_{\max}^*, H) / \frac{\partial^2 Z}{\partial t^{*2}} (t_{\max}^*, H) \quad (A1.25)$$

et les deux dérivées secondes qui apparaissent au membre de droite se calculent à partir des dérivations de l'équation (A1.17).

La sensibilité réduite de T^* à v est :

$$v X_v = v \frac{\partial T^*}{\partial v} \Big|_{t,H} = \frac{1}{Z_{\max}^2} \left[v \frac{\partial Z}{\partial v} \Big|_{t,H} Z_{\max} - Z v \frac{\partial Z_{\max}}{\partial v} \Big|_{t,H} \right] \quad (A1.26)$$

Les deux termes du crochet du membre de droite peuvent être calculés grâce à l'équation (A1.21) appliquée en t^* et t_{\max}^* , ce qui donne :

$$v X_v = \frac{1}{Z_{\max}^2} \left[t_{\max}^* Z_{\max}(H) \frac{\partial Z}{\partial t^*} \Big|_H - t_{\max}^*(H) Z \frac{\partial Z}{\partial t^*} (t_{\max}^*, H) \right] \quad (A1.27)$$

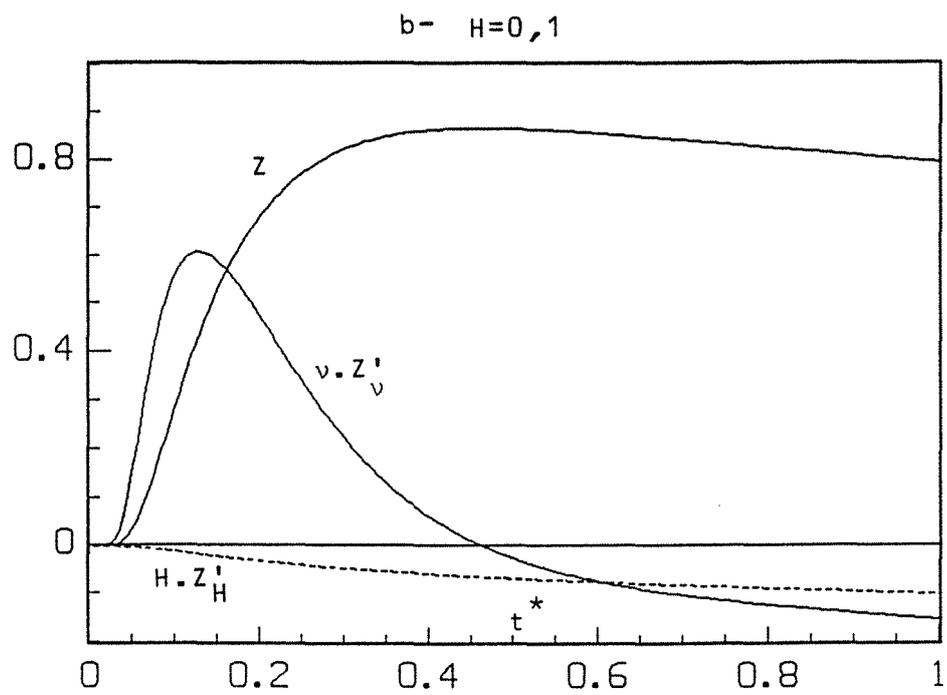
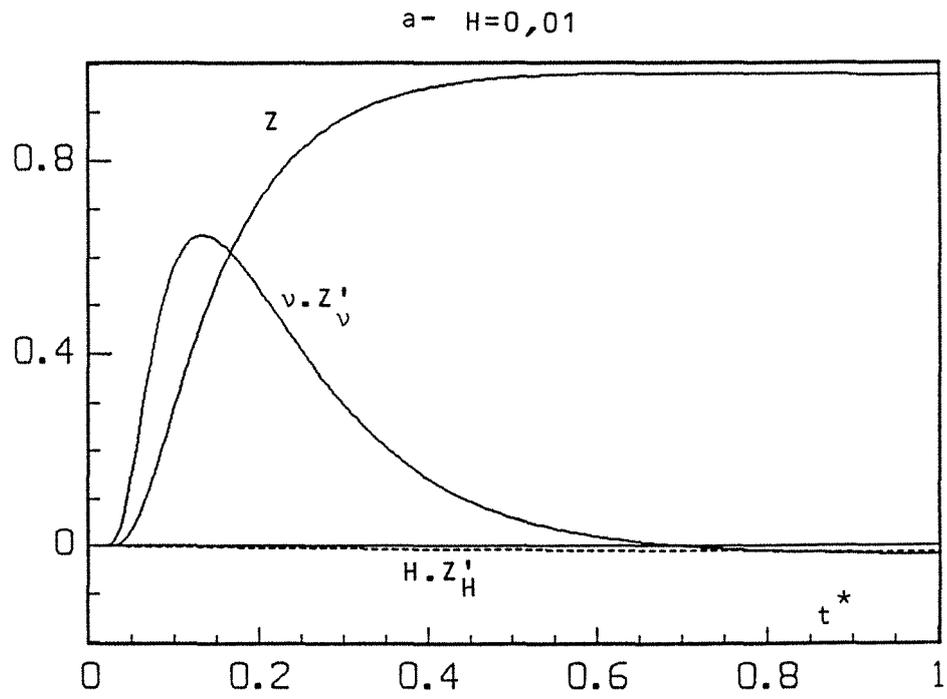
Annexe 1.3.3. Courbes de sensibilité ($H=10^{-2}$ et 10^{-3})

Fig. A1.1. Terme axial Z et sensibilités réduites au nombre de Biot unique H et à la fréquence caractéristique ν

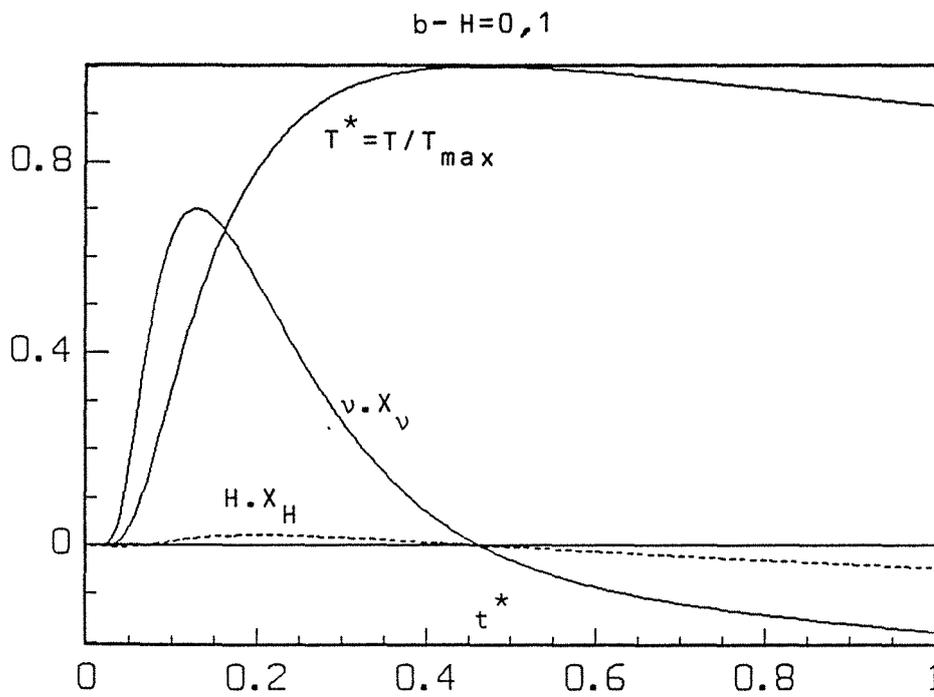
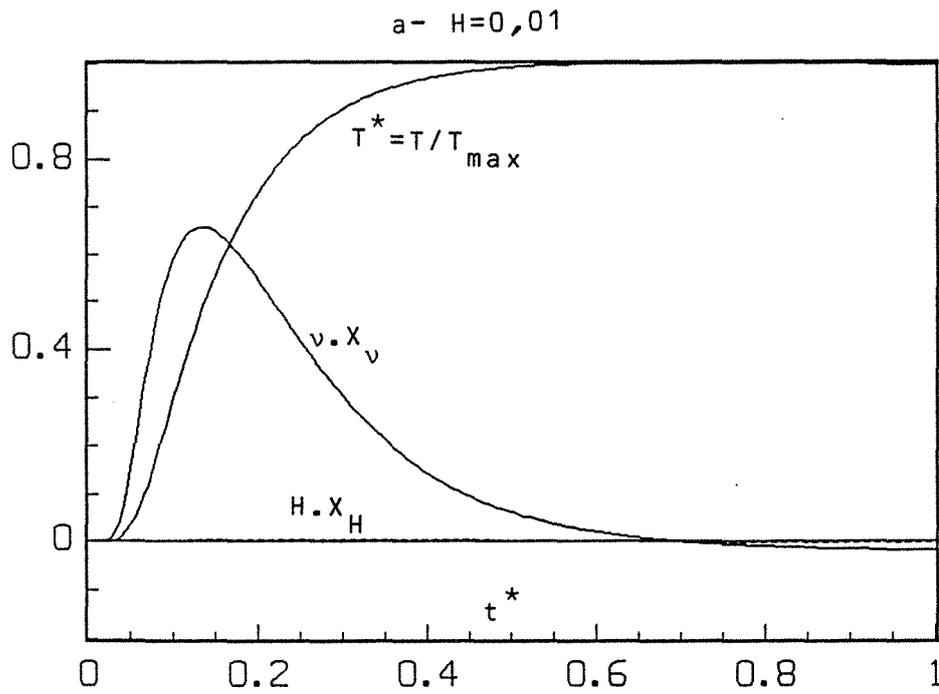


Fig. A1.2. Température réduite $T^* = T/T_{\max}$ et sensibilités réduites correspondantes au nombre de Biot unique H et à la fréquence caractéristique ν

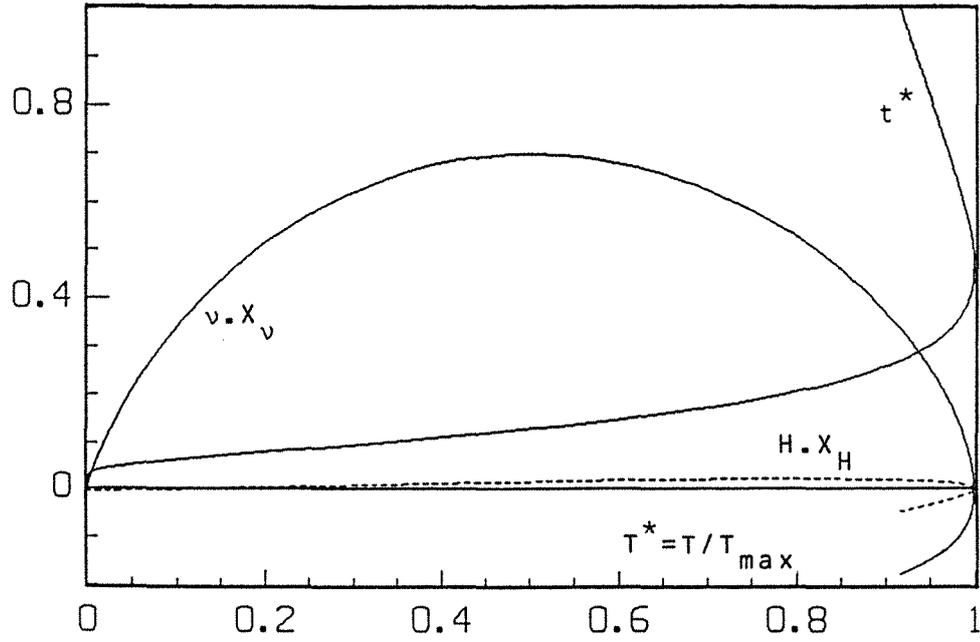
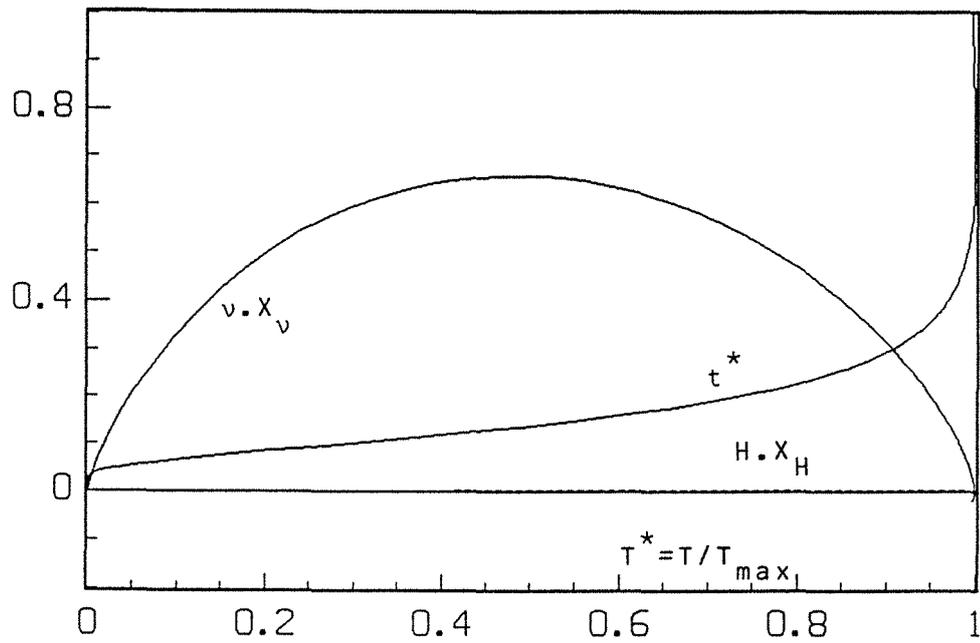
b- $H=0,1$ a- $H=0,01$ 

Fig. A1.3. Nombre de Fourier et sensibilités réduites de la température réduite T^* à H et v , tracés en fonction de T^*

ANNEXE 1.4

**CALCUL DES ECARTS-TYPES
ET DE LA COVARIANCE DES DEUX MOMENTS TEMPORELS PARTIELS**

Les deux fonctions d'identification utilisées dans la méthode des moments temporels partiels sont les suivantes :

$$H = G^{-1}(m_{-1}^*) = e_0 + e_1X + e_2X^2 + e_3X^3 + e_4X^4 \quad (A1.28)$$

$$\text{si } 0,504 < X < 0,56$$

et :

$$G^{-1}(m_{-1}^*) = c_0 + c_1X + c_2X^2 + c_3X^3 + c_4X^4$$

$$\text{si } 0,44 < X < 0,504$$

avec :

$$X = m_{-1}^* = m_{-1}$$

La première forme de G^{-1} correspond aux faibles nombres de Biot ($0 \leq H \leq 0,1$) tandis que la seconde correspond à des valeurs plus fortes ($0,1 \leq H \leq 1$). Les valeurs des différents coefficients, obtenues par des régressions, sont données dans la table A1 :

i	e_i	c_i
0	8,438722459 10^2	1,085995148 10^2
1	- 6,380615082 10^3	- 8,014914481 10^2
2	1,812577990 10^4	2,25713259 10^3
3	- 2,291931835 10^4	- 2,867489088 10^3
4	1,088033541 10^4	1,382587042 10^3

Table A1 - Coefficients définissant la fonction d'identification G^{-1} .

La deuxième fonction est la suivante :

$$m_0^* = F(m_{-1}^*) = d_0 + d_1 m_{-1}^* = -0,0819 + 0,305 m_{-1}^* \quad (A1.29)$$

$$\text{si } m_{-1}^* > 0,44$$

En utilisant les définitions (29) et (30) des erreurs ϵ_{-1} et ϵ_0 sur les moments mesurés et celles des moments théoriques m_{-1}^* et m_0^* , on montre :

$$\epsilon_k = \int_{\alpha}^{\beta} [T_{\text{exp}}^*(t) - T^*(t^*, H)] t^k dt \quad (A1.30)$$

$$\text{pour } k = -1 \text{ ou } 0$$

α et β désignant les bornes t_{α} et t_{β} de l'intégration.

L'erreur $\epsilon^*(t)$ sur la température mesurée T^* figurant en premier facteur sous l'intégrale peut être exprimée en fonction de l'erreur de mesure $\epsilon(t)$ de la température brute - équation (20) - on en déduit :

$$\epsilon_k = \frac{1}{T_{\text{max}}} \left[\int_{\alpha}^{\beta} \epsilon(t) t^k dt - \epsilon_{\text{max}} \int_{\alpha}^{\beta} T^* t^k dt \right] \quad (A1.31)$$

avec :

$$\epsilon_{\text{max}} = \epsilon(t_{\text{max}})$$

En passant d'une intégration temporelle à une intégration en nombre de Fourier, on obtient :

$$\epsilon_k = \frac{1}{T_{\text{max}} \nu^{k+1}} \left[\int_{\alpha}^{\beta} \epsilon(t) t^{*k} dt - \epsilon_{\text{max}} m_k^* \right] \quad (A1.32)$$

En pratique cette intégrale correspond à une somme discrète sur n intervalles de largeur Δt^* entre t_{α}^* et t_{β}^* :

$$\epsilon_k = \frac{1}{T_{\text{max}}} \left[\sum_{i=1}^n \epsilon_i t_i^{*k} \frac{\Delta t^*}{\nu^{k+1}} - \epsilon_{\ell} \frac{m_k^*}{\nu^{k+1}} \right] \quad (A1.33)$$

en posant :

$$t_i = i \Delta t \quad \epsilon_i = \epsilon(t_i) \quad t_{\ell} = t_{\text{max}} \quad \text{et} \quad \epsilon_{\text{max}} = \epsilon_{\ell}$$

Cette discrétisation correspond en pratique à la numérisation du signal de température ou de tension qui est faite à des instants discrets t_i (n acquisitions du signal après le flash) - auxquels correspondent les nombres de Fourier t^* ($= v t_i$) - avec une période d'acquisition Δt en temporel et Δt^* ($= v \Delta t$) en nombre de Fourier.

Les deux erreurs sur les moments temporels partiels sont donc des combinaisons linéaires des erreurs sur les températures acquises, ce qui peut s'écrire matriciellement :

$$\begin{bmatrix} \epsilon_{-1} \\ \epsilon_0 \end{bmatrix} = \frac{1}{T_{\max}} \begin{bmatrix} \frac{\Delta t^*}{t_1^*} & \frac{\Delta t^*}{t_2^*} & \dots & \frac{\Delta t^*}{t_\ell^*} & -m_{-1}^* & \dots & \frac{\Delta t^*}{t_n^*} \\ \frac{\Delta t^*}{v} & \frac{\Delta t^*}{v} & \dots & \frac{\Delta t^*}{v} & -\frac{m_0^*}{v} & \dots & \frac{\Delta t^*}{v} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \vdots \\ \epsilon_\ell \\ \vdots \\ \epsilon_n \end{bmatrix} \quad (\text{A1.33})$$

ou encore, en appelant m_ϵ le vecteur erreur sur les moments - de dimensions (2, 1) - et ϵ le vecteur erreur (bruit) sur les températures, de dimensions (n, 1) :

$$m_\epsilon = g \epsilon \quad (\text{A1.34})$$

la matrice g ayant les dimensions (2, n).

Si on suppose, outre l'indépendance des bruits ϵ_i , que chacune des composantes ϵ_i de ϵ suit une loi normale centrée d'écart-type σ , alors m_ϵ suit une loi de Gauss multivariée d'espérance mathématique :

$$E(m_\epsilon) = g E(\epsilon) = 0 \quad (\text{A1.35})$$

et, le bruit étant donc non corrélé, de matrice de variance-covariance (voir les références citées en section 2.3.6.3) :

$$\text{cov}(m_\epsilon) = g \text{cov}(\epsilon) g^t \quad (\text{A1.36})$$

telle que :

$$\text{cov}(\epsilon) = \sigma^2 I \quad (\text{A1.37})$$

I étant la matrice identité (n, n), d'où :

$$\text{cov}(m_\varepsilon) = \sigma^2 \mathbf{g} \mathbf{g}^t \quad (\text{A1.38})$$

Les termes diagonaux de cette matrice symétrique sont les variances σ_{-1}^2 et σ_0^2 de ε_{-1} et de ε_0 alors que le terme hors diagonale est la covariance de ε_{-1} et ε_0 .

Après avoir effectué le produit matriciel, on peut remplacer, en faisant tendre n vers l'infini (et Δt^* vers dt^*), les sommes par des intégrales. Ainsi :

$$\sum_{i=1}^n \frac{\Delta t^*}{t_i^{*2}} \approx \frac{1}{t_\alpha^*} - \frac{1}{t_\beta^*} \quad (\text{A1.39})$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{\Delta t^*}{t_i^*} \approx \ln(t_\beta^*/t_\alpha^*) = L \quad (\text{A1.40})$$

$$n \Delta t^* = t_\beta^* - t_\alpha^* \quad (\text{A1.41})$$

On trouve ainsi, tous calculs faits :

$$\sigma_{-1} = \frac{\sigma}{T_{\max}} \left[\nu \Delta t \left(\frac{1}{t_\alpha^*} - \frac{1}{t_\beta^*} - 2 \frac{m_{-1}^*}{t_{\max}^*} \right) + m_{-1}^{*2} \right]^{1/2} \quad (\text{A1.42})$$

$$\sigma_0 = \frac{\sigma}{\nu T_{\max}} \left[\nu \Delta t (t_\beta^* - t_\alpha^* - 2 m_0^*) + m_0^{*2} \right]^{1/2} \quad (\text{A1.43})$$

$$\text{cov}(\varepsilon_{-1}, \varepsilon_0) = \frac{\sigma^2}{\nu T_{\max}^2} \left[\nu \Delta t \left(L - \frac{m_0^*}{t_{\max}^*} - m_{-1}^* \right) + m_0^* m_{-1}^* \right] \quad (\text{A1.44})$$

ANNEXE 1.5

CALCUL DE LA PLUS PETITE VALEUR PROPRE ET DU NOMBRE DE BIOT EQUIVALENT
DU REFROIDISSEMENT DU PETIT CORPS AUX TEMPS LONGS

Aux temps longs, la série Z est équivalente à son premier terme, la fonction Z_{∞} :

$$Z_{\infty}(t^*, H) = A_0 \exp(-u_0^2 t^*) \quad (\text{A1.45})$$

u_0 étant la plus petite solution positive ou nulle de l'équation :

$$\operatorname{tg} u = \frac{2Hu}{u^2 - H^2} = f(u) \quad (\text{A1.46})$$

Les graphes des fonctions $\operatorname{tg} u$ et $f(u)$ sont tracés sur la **figure A1.4**. On remarque que u_0 est compris entre 0 et $\pi/2$ et reste sur la branche positive de $f(u)$ tant que H est inférieur à $\pi/2$ alors qu'il correspond à l'autre branche dès que H devient supérieur à $\pi/2$, pour tendre vers π aux temps longs. Si on résout alors l'équation (A1.46) qui est du second degré en H , on se rend compte que ses deux solutions (en H) se ramènent à la forme unique :

$$H = 2 \alpha \operatorname{tg} \alpha \quad (\text{A1.47})$$

avec :

$$\alpha = u_0/2$$

Les racines en α de cette équation ont été tabulées par Özisik [21]. Il est alors possible de chercher les équivalents de α pour les faibles valeurs de H :

$$H \rightarrow 0 \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha \sim \alpha \Rightarrow u_0^2 \sim 2H \quad (\text{A1.48})$$

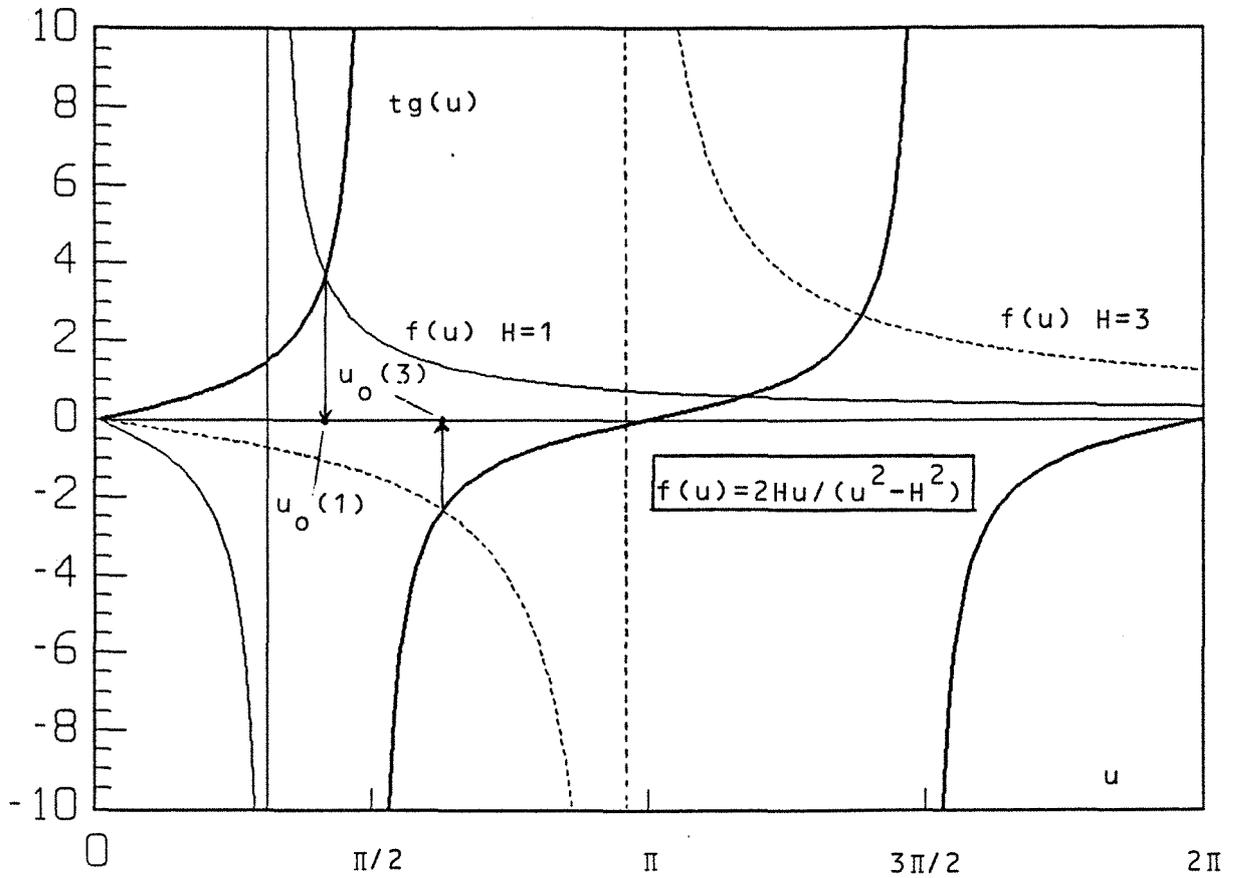


Fig. A1.4. Résolution graphique de l'équation aux valeurs propres $\text{tg}(u) = f(u)$ pour $H=1$ et 3

De même pour les fortes valeurs de H , l'équation (A1.46) peut être reprise en développant $\operatorname{tg} u_0$ au voisinage de $u_0 = \pi$, ce qui donne :

$$H \rightarrow \infty \implies u_0 \rightarrow \pi \implies u_0 \sim \frac{\pi H}{H+2} \implies u_0^2 \sim \pi^2(1 - 4/H) \quad (\text{A1.49})$$

Enfin, lorsque H tend vers $\pi/2$, u_0 tend vers $\pi/2$ et α vers $\pi/4$, il est possible de faire un développement de $\operatorname{tg} \alpha$ au voisinage de $\alpha = \pi/4$ dans l'équation (A1.47) :

$$H \rightarrow \pi/2 \implies u_0 \sim \frac{\pi^2 + 4H}{2(\pi + 2)} \quad (\text{A1.50})$$

Si on pose maintenant :

$$2 H_e = u^2$$

les équations A1.48 à 50 deviennent les équations des courbes tangentes à la fonction $H_e(H)$ aux voisinages de $H = 0$, l'infini et $\pi/2$, ce qui s'écrit:

$$H_e(H) \sim H \quad \text{quand } H \rightarrow 0 \quad (\text{A1.51})$$

$$H_e(H) \sim a_i H + b_i \quad \text{quand } H \rightarrow \pi/2 \quad (\text{A1.52})$$

$$H_e(H) \sim a_\infty(1 - 4/H) \quad \text{quand } H \rightarrow \infty \quad (\text{A1.53})$$

avec :

$$a_i = \frac{1}{2} \frac{\pi}{\pi + 2} \quad b_i = \frac{\pi^2}{4} a_i \quad \text{et} \quad a_\infty = \frac{\pi^2}{2}$$

Une approximation de $H_e(H)$ est alors recherchée sous la forme du rapport de deux polynômes du second degré en H . On ajuste leurs coefficients de façon à avoir :

$$(a) \quad H_e(0) = 0 \quad (d) \quad H'_e(0) = 1$$

$$(b) \quad H_e(\pi/2) = \pi^2/8 \quad (e) \quad H'_e(\pi/2) = a_i$$

$$(c) \quad H_e(\infty) = a_\infty \quad (f) \quad H'_e \sim 4 a_\infty/H^2$$

quand $H \rightarrow \infty$

C'est-à-dire qu'on recherche une courbe passant par les points $(H, H_e) = (0, 0)$, $(\pi/2, \pi/2)$ et $(\infty, \pi^2/2)$ ayant mêmes tangentes ou asymptotes que les équivalents de $H_e(H)$ au voisinage de ces points. On trouve :

$$H_e(H) \simeq \frac{a_\infty H^2 + b H}{H^2 + (4 + b/a_\infty)H + b} \quad (\text{A1.54})$$

avec :

$$b = \frac{\pi^2(3\pi - 8)}{4(\pi - 3)}$$

En comparant les valeurs de H_e données par cette approximation avec celles déduites des valeurs de α données par Ozisik, on constate que l'équation (A1.54) fournit des valeurs exactes jusqu'au troisième chiffre significatif, et ce, pour des valeurs de H variant de 0 à l'infini. Il faut noter qu'en pratique, la condition (e) n'a pu être respectée. Lorsque H_e est connue, la fonction $A_o(H)$ peut être calculée analytiquement car l'équation (A1.6) s'écrit alors :

$$A_o = \frac{2 u_o^2 (u_o^2 + H^2) \cos(u_o)}{(u_o^2 - H^2) (u_o^2 + H^2 + 2 H)} \quad (\text{A1.55})$$

Ceci permet de calculer analytiquement les sensibilités de Z aux temps longs. Notons que pour le calcul des sensibilités asymptotiques ($t^* \rightarrow \infty$) de la température normalisée T^* - équation (50) - on a utilisé une approximation relativement grossière de la fonction $Z_{\max}(H)$:

$$Z_{\max}(H) \simeq \frac{0,1766}{0,1766 + H} \quad (\text{A1.56})$$

pour :

$$0 \leq H \leq 1$$

ANNEXE 2.1

INVERSION NUMERIQUE DE LA TRANSFORMATION DE LAPLACE
PAR L'ALGORITHME DE STEHFEST

Si on connaît l'expression $F(p)$ de la transformée de Laplace de la fonction $f(t)$, il est possible de remonter à la valeur de cette dernière à tout instant t par la relation :

$$f(t) = \frac{\ln 2}{t} \sum_{i=1}^{10} v_i F\left(\frac{i \ln 2}{t}\right)$$

où les v_i sont des coefficients connus ayant les valeurs suivantes :

$$\begin{aligned} v_1 &= 0,0833333333 & v_2 &= - 32,08333333 & v_3 &= 1279,000076 \\ v_4 &= - 15623,66689 & v_5 &= 84244,16946 & v_6 &= - 236957,5129 \\ v_7 &= 375911,6923 & v_8 &= - 340071,6923 & v_9 &= 164062,5128 \\ v_{10} &= - 32812,50256 \end{aligned}$$

Cette inversion numérique a été étudiée de façon systématique sur des fonctions dont la transformée de Laplace est connue et comparée à d'autres méthodes d'inversion numérique par Davies et Martin [22]. Dans le cas où $f(t)$ est la réponse en face arrière à un flash sur un échantillon homogène isolé thermiquement, la méthode d'inversion donne la fonction $f(t)$, à partir de sa transformée ($F(p) = (\sqrt{p} \operatorname{sh} \sqrt{p})^{-1}$), avec six chiffres significatifs exacts (comparaison avec la série temporelle) avec de légères oscillations lorsque f devient constante. Toujours dans le cas de la méthode flash, si l'excitation est un Dirac de flux, ou tout autre fonction présentant une discontinuité à $t = 0$, l'inversion de la réponse en température en face arrière est satisfaisante. Par contre si la discontinuité d'excitation se produit à un instant $t > 0$, l'inversion est très mauvaise et il faut recourir au principe de superposition pour retrouver cette évolution en face arrière.

ANNEXE 2.2

CALCUL DU CONTRASTE DANS LE CAS D'UN DEPOT SEMI-TRANSPARENT

2.2.1 - Ecriture quadripolaire du dépôt

L'équation de la chaleur (15) dans le dépôt semi-transparent s'écrit sous la forme suivante dans l'espace de Laplace :

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} - \frac{p}{a_1} \theta = \frac{\alpha}{\lambda_1} Q \exp(-\alpha x)$$

La solution générale de cette équation linéaire avec second membre est :

$$\theta(x, p) = a \exp(k_1 x) + b \exp(-k_1 x) - \frac{\alpha}{\alpha^2 - k_1^2} \frac{Q}{\lambda_1} \exp(-\alpha x)$$

avec :

$$k_1^2 = p/a_1$$

Le flux de Laplace est :

$$\phi(x, p) = -\lambda_1 \frac{\partial \theta}{\partial x}$$

Si on se donne les conditions suivantes aux bornes du dépôt :

$$\theta(0, p) = \theta_f$$

$$\theta(e_1, p) = \theta_i$$

$$\phi(0, p) = \phi_f$$

$$\phi(e_1, p) = \phi_i$$

les constantes a et b peuvent alors s'exprimer soit à l'aide des conditions de la face avant soit à l'aide de celles de l'interface :

$$\left. \begin{aligned} a + b - \frac{\alpha}{\alpha^2 - k_1^2} \frac{Q}{\lambda_1} &= \theta_f \\ -\lambda_1 k_1 a + \lambda_1 k_1 b - \frac{\alpha^2}{\alpha^2 - k_1^2} Q &= \phi_f \end{aligned} \right\} \iff \begin{bmatrix} \theta_f \\ \phi_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \phi_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{bmatrix}$$

$$\left. \begin{aligned} a \exp(k_1 e_1) + b \exp(-k_1 e_1) - \frac{\alpha}{\alpha^2 - k_1^2} \frac{Q}{\lambda_1} \exp(-\alpha e_1) &= \theta_i \\ -\lambda_1 k_1 a \exp(k_1 e_1) + \lambda_1 k_1 b \exp(-k_1 e_1) - \frac{\alpha^2}{\alpha^2 - k_1^2} Q \exp(-\alpha e_1) &= \phi_i \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \theta_i \\ \phi_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_2 \\ \phi_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} X_2 \\ Y_2 \end{bmatrix}$$

avec :

$$X_1 = \frac{\alpha}{\alpha^2 - k_1^2} \frac{Q}{\lambda_1} \qquad X_2 = X_1 \exp(-\alpha e_1)$$

$$Y_1 = \frac{\alpha^2}{\alpha^2 - k_1^2} Q \qquad Y_2 = Y_1 \exp(-\alpha e_1)$$

Les vecteurs $(\theta_1 \ \phi_1)^t$ et $(\theta_2 \ \phi_2)^t$ représentent les conditions de température et de flux qui règneraient aux bornes du quadripôle relatif au dépôt en l'absence de terme source, ils sont donc reliés par l'équation suivante :

$$\begin{bmatrix} \theta_1 \\ \phi_1 \end{bmatrix} = M_1 \begin{bmatrix} \theta_2 \\ \phi_2 \end{bmatrix}$$

2.2.2 - Ecriture du contraste sous forme réduite

La température de Laplace en face arrière - équation (25) - s'écrit de la manière suivante pour le bicouche (en omettant l'indice r et en utilisant l'indice st comme semi-transparent) :

$$\theta_{st} = \frac{N}{D}$$

avec :

$$N = \left[\tau \operatorname{ch}(k_1 e_1) - \frac{\alpha \tau}{\alpha^2 - k_1^2} k_1 \operatorname{sh}(k_1 e_1) + \frac{\alpha^2}{\alpha^2 - k_1^2} (1 - \tau \operatorname{ch}(k_1 e_1)) \right] Q$$

$$D = \lambda_1 k_1 \operatorname{sh}(k_1 e_1) \operatorname{ch}(k_2 e_2) + \lambda_2 k_2 \operatorname{sh}(k_2 e_2) \operatorname{ch}(k_1 e_1)$$

$$k_1^2 = p/a_1 \qquad k_2^2 = p/a_2$$

La transformée réduite du thermogramme normalisé sur le bicouche s'écrit :

$$\theta_{st}^{**} = \mathcal{L}^* \left[\frac{T}{T_\infty} \right] = \frac{a_2}{e_2} \frac{Q / (\rho_1 c_1 e_1 + \rho_2 c_2 e_2)}{\theta_{st}}$$

En remarquant que l'on a :

$$k_1 e_1 = K_1 s \quad k_2 e_2 = s \quad \frac{\lambda_1 k_1}{\lambda_2 k_2} = K_2 \quad \alpha e_1 = -\ln(\tau) \frac{\rho_1 c_1 e_1}{\rho_2 c_2 e_2} = K_1 K_2$$

et :

$$s = \sqrt{p^*} \quad p^* = e_2^2 p / a_2$$

θ_{st}^{**} s'écrit :

$$\theta_{st}^{**} = \frac{(1 + K_1 K_2) [\ln^2 \tau + \tau \ln \tau K_1 s \operatorname{sh}(K_1 s) - \tau K_1^2 s^2 \operatorname{ch}(K_1 s)]}{s [K_2 \operatorname{sh}(K_1 s) \operatorname{ch}(s) + \operatorname{sh}(s) \operatorname{ch}(K_1 s)] (\ln^2 \tau - K_1^2 s^2)}$$

La transformée réduite du thermogramme normalisé sur le substrat seul s'écrit (en faisant tendre K_1 vers zéro dans l'expression précédente) :

$$\theta_o^{**} = \frac{1}{s \operatorname{sh}(s)}$$

le contraste en face arrière du modèle semi-transparent est donc :

$$\Delta \theta_{st}^{**} = \theta_{st}^{**} - \theta_o^{**}$$

ANNEXE 2.3

METHODE DE NEWTON GENERALISEE AU CAS DE PLUSIEURS VARIABLES

Le système à résoudre est le suivant :

$$\begin{cases} f_1(b_1, b_2, \dots, b_p) = 0 \\ \vdots \\ f_i(b_1, b_2, \dots, b_p) = 0 \\ \vdots \\ f_p(b_1, b_2, \dots, b_p) = 0 \end{cases}$$

Il peut se mettre sous la forme vectorielle suivante :

$$f(\mathbf{b}) = 0$$

\mathbf{b} étant le vecteur colonne constitué par les p variables b_j et f le vecteur colonne constitué par les p fonctions du système. Si l'on appelle β , telle que $\beta^t = (\beta_1, \dots, \beta_j, \dots, \beta_p)$ la solution du système, il est possible d'écrire un développement de Taylor de $f(\beta)$ au voisinage d'un point quelconque \mathbf{b} :

$$f_i(\beta) = 0 = f_i(\mathbf{b}) + (b_j - \beta_j) \frac{\partial f_i}{\partial b_j}(\mathbf{b}) + o(\|\mathbf{b} - \beta\|)$$

ou sous une forme vectorielle équivalente :

$$f(\beta) = 0 = f(\mathbf{b}) + X(\mathbf{b}) [\mathbf{b} - \beta] + o(\|\mathbf{b} - \beta\|)$$

avec :

$$X(\mathbf{b}) = [\nabla_{\mathbf{b}} f^t(\mathbf{b})]^t$$

c'est-à-dire :

$$X_{ij}(\mathbf{b}) = \frac{\partial f_i}{\partial b_j}(\mathbf{b}) \quad \text{pour } i, j = 1 \text{ à } p$$

∇_b étant l'opérateur gradient par rapport aux p variables p_j . La relation précédente peut servir à construire une suite de vecteurs $b^{(n)}$ convergeant vers β , dans le cas où la matrice X est régulière. Il suffit de remplacer β par $b^{(n+1)}$ et b par $b^{(n)}$:

$$b^{(n+1)} = b^{(n)} - X^{-1}(b^{(n)}) f(b^{(n)})$$

La convergence de cette suite dépend évidemment du choix du point initial $b^{(0)}$.

Dans le cas d'un système de deux équations à deux inconnues, la récurrence précédente s'écrit :

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}^{(n+1)} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}^{(n)} - \frac{1}{\Delta^{(n)}} \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial b_2} & -\frac{\partial f_1}{\partial b_1} \\ -\frac{\partial f_2}{\partial b_1} & \frac{\partial f_2}{\partial b_2} \end{bmatrix}^{(n)} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}^{(n)}$$

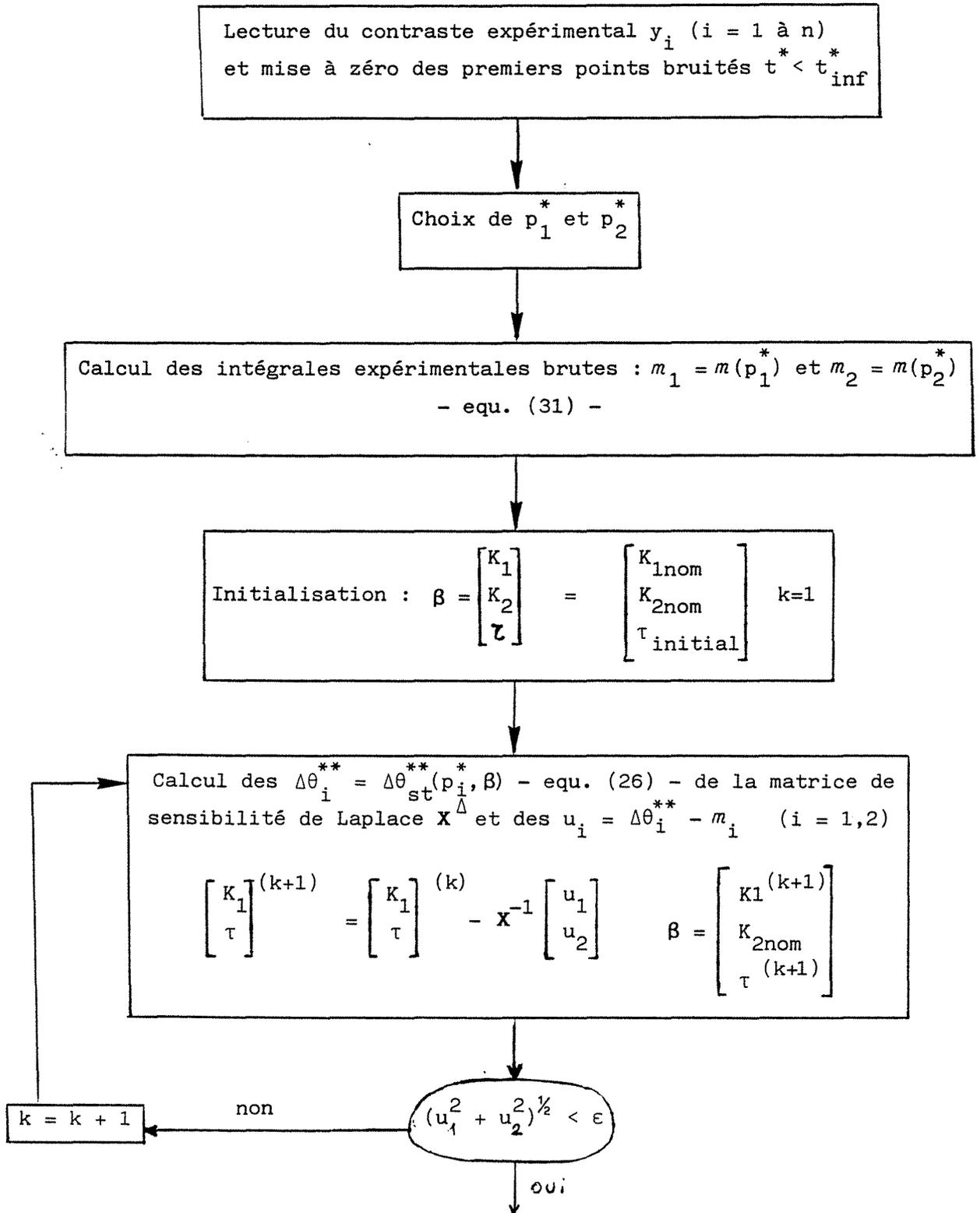
avec :

$$\Delta^{(n)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial b_1} & \frac{\partial f_2}{\partial b_2} - \frac{\partial f_1}{\partial b_2} \frac{\partial f_2}{\partial b_1} \end{bmatrix}^{(n)}$$

Géométriquement, le point $b^{(n+1)}$ est, dans le plan b_1, b_2 (noté π), l'intersection de deux droites D_1 et D_2 de ce plan. D_1 est l'intersection du plan tangent à la surface d'équation $z = f_1(b_1, b_2)$ au point $b^{(n)}$ avec le plan π et D_2 est l'intersection du plan tangent à la surface d'équation $z = f_2(b_1, b_2)$ au point $b^{(n)}$ avec ce même plan π .

ANNEXE 2.4

ALGORITHME D'IDENTIFICATION
UTILISANT LES TRANSFORMEES EXPERIMENTALES CORRIGEES



ANNEXE 2.4

ALGORITHME D'IDENTIFICATION
UTILISANT LES TRANSFORMÉES EXPERIMENTALES CORRIGÉES

Lecture du contraste expérimental y_i ($i = 1$ à n)
et mise à zéro des premiers points bruités $t^* < t_{inf}^*$

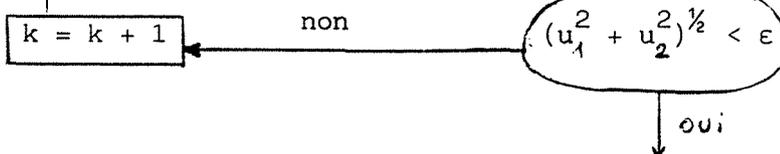
Choix de p_1^* et p_2^*

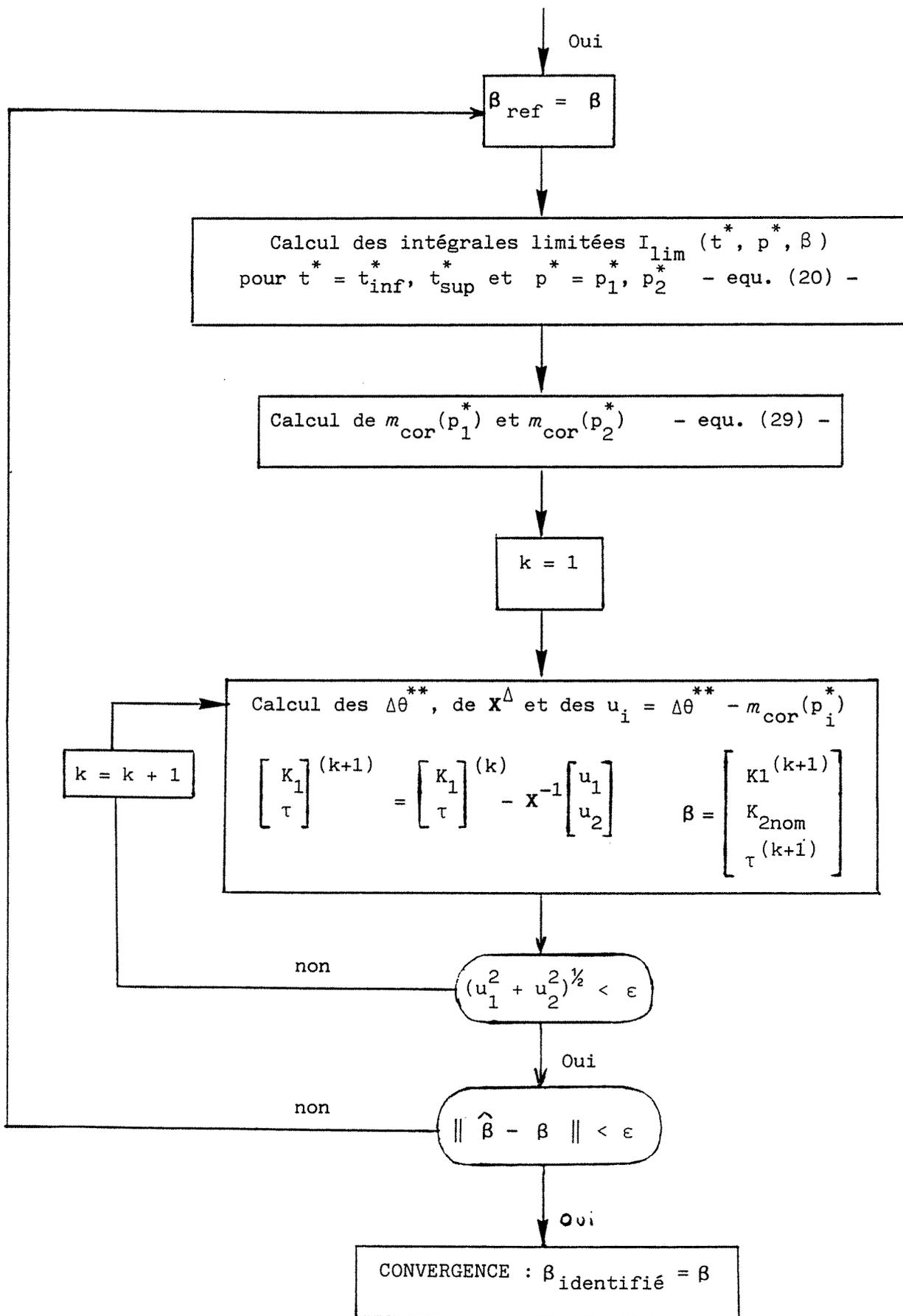
Calcul des intégrales expérimentales brutes : $m_1 = m(p_1^*)$ et $m_2 = m(p_2^*)$
- equ. (31) -

Initialisation : $\beta = \begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \\ \tau \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{1nom} \\ K_{2nom} \\ \tau_{initial} \end{bmatrix} \quad k=1$

Calcul des $\Delta\theta_i^{**} = \Delta\theta_{st}^{**}(p_i^*, \beta)$ - equ. (26) - de la matrice de sensibilité de Laplace X^Δ et des $u_i = \Delta\theta_i^{**} - m_i$ ($i = 1, 2$)

$$\begin{bmatrix} K_1 \\ \tau \end{bmatrix}^{(k+1)} = \begin{bmatrix} K_1 \\ \tau \end{bmatrix}^{(k)} - X^{-1} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad \beta = \begin{bmatrix} K_1^{(k+1)} \\ K_{2nom} \\ \tau^{(k+1)} \end{bmatrix}$$





$$\Delta \quad X_{i1} = \frac{\partial \theta_{\text{st}}^{**}}{\partial K_1}(p_i^*, \beta) \quad X_{i2} = \frac{\partial \theta_{\text{st}}^{**}}{\partial \tau}(p_i^*, \beta) \quad \text{pour } i = 1, 2$$

ANNEXE 2.5

CALCUL DE LA MATRICE DE VARIANCE-COVARIANCE DE K_1 ET DE τ

$$\Sigma = \text{cov}(\mathbf{b} - \beta) = \mathbf{x}^{-1} \text{cov } m_\varepsilon (\mathbf{x}^{-1})^t$$

avec :

$$[\text{cov } m_\varepsilon]_{\alpha\gamma} = \frac{1}{p_\alpha + p_\gamma} \sigma_\varepsilon^2 \Delta t^* \quad \text{pour } \alpha, \gamma = 1, 2$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix} \quad \text{avec } x_{\alpha\gamma} = \frac{\partial \eta_\alpha}{\partial \beta_\gamma}$$

$$\mathbf{x}^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} x_{22} & -x_{12} \\ -x_{21} & x_{11} \end{bmatrix} \quad \text{avec } \Delta = x_{11}x_{22} - x_{12}x_{21}$$

$$\Sigma_{11} = \frac{\sigma_\varepsilon^2 \Delta t^*}{\Delta^2} \left[\frac{1}{2p_1^*} x_{22}^2 - \frac{2 x_{22}x_{12}}{p_1^* + p_2^*} + \frac{1}{2p_2^*} x_{12}^2 \right]$$

$$\Sigma_{22} = \frac{\sigma_\varepsilon^2 \Delta t^*}{\Delta^2} \left[\frac{1}{2p_1^*} x_{21}^2 - \frac{2 x_{11}x_{21}}{p_1^* + p_2^*} + \frac{1}{2p_2^*} x_{11}^2 \right]$$

$$\Sigma_{12} = \frac{\sigma_\varepsilon^2 \Delta t^*}{\Delta^2} \left[-\frac{1}{2p_1^*} x_{22} x_{21} + \frac{x_{11}x_{22} + x_{12}x_{21}}{p_1^* + p_2^*} - \frac{1}{2p_2^*} x_{11}x_{12} \right]$$

NB - On peut mettre chaque coefficient de Σ sous la forme :

$$\Sigma_{\alpha\gamma} = \frac{\sigma_\varepsilon^2 \Delta t^*}{|\mathbf{x}|^2} (-1)^{\alpha+\gamma} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \frac{(-1)^{i+j}}{p_i + p_j} x_{i,\alpha} x_{j,\gamma}$$

avec :

$$\alpha, \gamma = 1, 2 \quad \text{et} \quad k' = 2 - k \quad \text{pour } k = \alpha, \beta, i, j$$

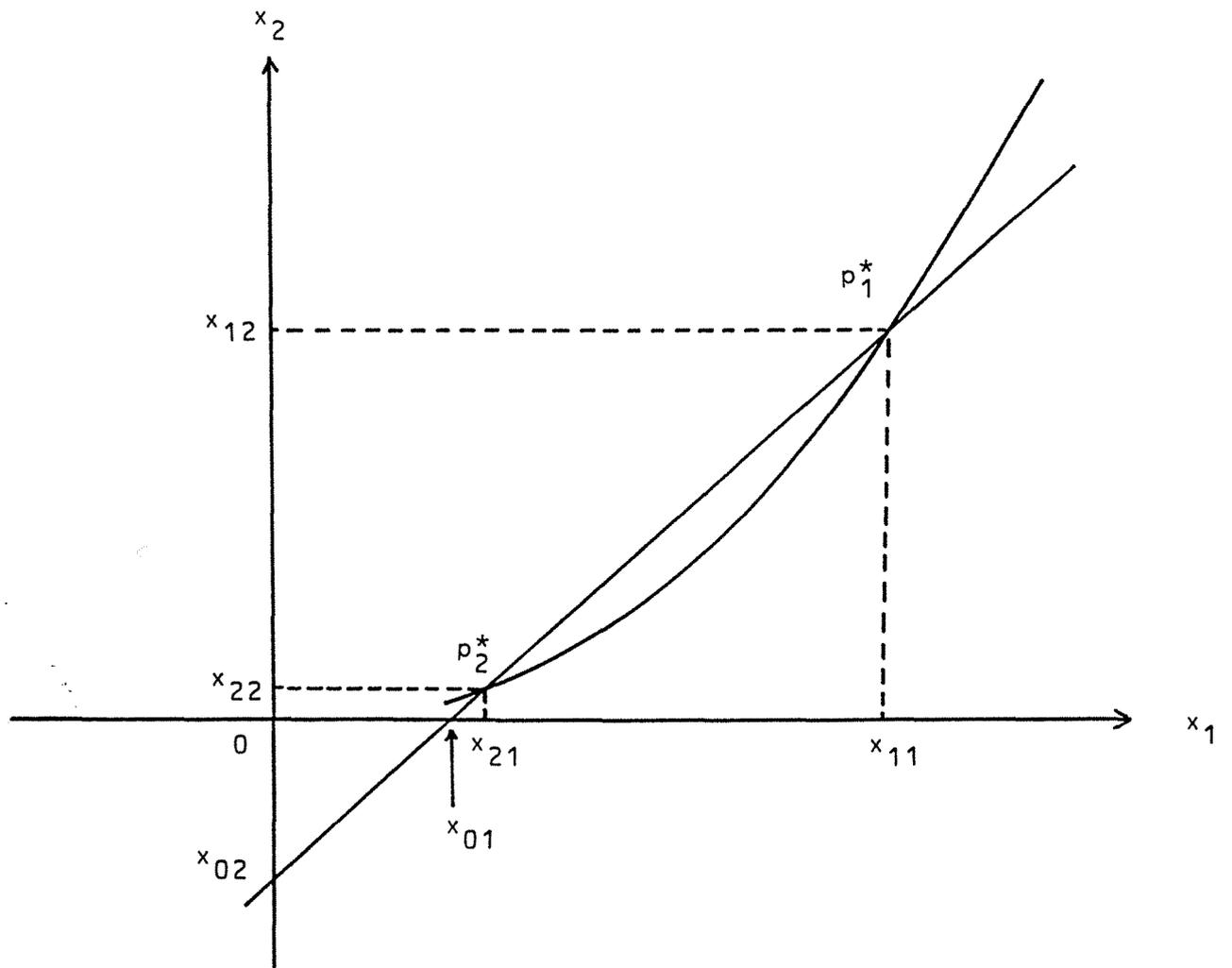


Fig. A2.1. Minimisation graphique de l'intervalle de confiance de chacun des deux paramètres dans l'espace de Laplace

Critères relatifs au choix des variables de Laplace pour l'identification

Considérons la courbe paramétrique en p^* tracée dans le repère $x_1 - x_2$ de la figure A2.1 :

$$x_1 = x_1(p^*, \beta_1, \beta_2)$$

$$x_2 = x_2(p^*, \beta_1, \beta_2)$$

Si p_1^* et p_2^* sont les valeurs retenues pour l'identification, la droite D joignant les deux points correspondant de la courbe coupe l'axe des x_1 en x_{o1} et celui des x_2 en x_{o2} . On a :

$$x_{o1} = - \Delta / \Delta x_2 \qquad x_{o2} = \Delta / \Delta x_1$$

avec :

$$\Delta x_1 = x_{11} - x_{21} \qquad \Delta x_2 = x_{12} - x_{22}$$

$$\Delta = |\mathbf{x}| = x_{11}x_{22} - x_{12}x_{21}$$

Les coefficients de la matrice Σ s'écrivent alors :

$$\Sigma_{11} = \frac{\sigma_\epsilon^2 \Delta t^*}{2(p_1^* + p_2^*)x_{o1}^2} \left[1 + \frac{1}{p_1^* p_1^*} \left(\frac{\Delta_2}{\Delta x_2} \right)^2 \right]$$

$$\Sigma_{22} = \frac{\sigma_\epsilon^2 \Delta t^*}{2(p_1^* + p_2^*)x_{o2}^2} \left[1 + \frac{1}{p_1^* p_2^*} \left(\frac{\Delta_2}{\Delta x_1} \right)^2 \right]$$

$$\Sigma_{12} = \frac{\sigma_\epsilon^2 \Delta t^*}{2(p_1^* + p_2^*)x_{o1}x_{o2}} \left[1 + \frac{1}{p_1^* p_2^*} \frac{\Delta_1 \Delta_2}{\Delta x_1 \Delta x_2} \right]$$

avec :

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} x_{1i} & p_2 \\ x_{2i} & p_1 \end{vmatrix} \qquad \text{pour } i = 1, 2$$

Remarquons que le deuxième terme de la variance de K_i ne peut s'annuler que si Δ_j ($j \neq i$) est nul, c'est-à-dire si :

$$\frac{x_{1j}}{x_{2j}} = \frac{p_2^*}{p_1^*}$$

Ce n'est possible que si le coefficient de sensibilité x_j en Laplace est inversement proportionnel à p^* . C'est en particulier le cas si le modèle est tel que X_j , le coefficient de sensibilité temporel, est constant dans le temps.

Notons que Δ_1 et Δ_2 ne peuvent pas être simultanément nuls car dans ce cas le déterminant Δ de x est aussi nul et Σ_{11} et Σ_{22} tendent vers l'infini, c'est-à-dire que l'identification de β_1 et β_2 devient impossible.

Une bonne identification de β_1 nécessite donc une minimisation de la variance de son estimateur, c'est-à-dire qu'il faut avoir :

- p_1^* et p_2^* suffisamment grands
- x_{01} , l'abscisse du point d'intersection de D avec l'axe $x_1 = 0$, la plus grande possible en valeur absolue.
- $\Delta_2/\Delta x_2$ le plus petit possible, c'est-à-dire soit une grande différence entre les sensibilités de Laplace à β_2 en p_1^* et p_2^* , ou x_2 inversement proportionnel à p^* (en p_1^* et p_2^*).

Des conditions symétriques peuvent être tirées quant à une bonne identification de β_2 .

ANNEXE 2.6

ETUDE DE LA DISTRIBUTION DES RESIDUS
DANS LE CAS D'UN MODELE LINEAIRE SIMPLE

Considérons le modèle linéaire :

$$\eta = at + b \quad (\text{A2.1})$$

où $\beta = (a \ b)^t$ est le vecteur paramètre, t la variable indépendante déterministe et η la variable dépendante. Supposons bruitées les mesures y_i de η à des temps t_i ($i = 1$ à n) et le bruit ε_i additif, gaussien, centré, d'écart-type indépendant de t_i . On considère le cas où les bruits ε_i et ε_j ($i \neq j$), ne sont pas corrélés.

L'équation (A2.1) peut se mettre sous la forme vectorielle suivante, en considérant les différents instants :

$$\eta = X\beta$$

X étant la matrice de sensibilité

$$X^t = \begin{bmatrix} t_1 & t_2 & \dots & t_n \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

avec :

$$\eta^t = (\eta_1 \ \dots \ \eta_n)$$

Les mesures y_i de η_i sont telles que :

$$y_i = \eta_i + \varepsilon_i \quad \text{ou} \quad Y = X + \varepsilon$$

avec :

$$\varepsilon^t = (\varepsilon_1 \ \dots \ \varepsilon_n)$$

Le modèle étant linéaire en β , on peut utiliser la méthode des moindres carrés qui consiste à minimiser la somme :

$$S = \sum_{i=1}^n (y_i - \eta_i)^2 = (Y - \eta)^t (Y - \eta)$$

par rapport aux paramètres $\beta_1 = a$ et $\beta_2 = b$.

On trouve donc un estimateur $\hat{\beta}$ de β :

$$\hat{\beta} = (X^t X)^{-1} X^t Y$$

Les résidus r_i ($i = 1$ à n) sont définis de la manière suivante :

$$r_i = y_i - \hat{\eta}_i \quad \text{avec} \quad \hat{\eta} = X \hat{\beta}$$

On peut donc écrire vectoriellement, I étant la matrice identité :

$$r = (I - X(X^t X)^{-1} X^t) Y = K Y \quad (\text{A2.2})$$

avec :

$$r^t = (r_1 \ r_2 \ \dots \ r_n)$$

Les résidus r_i suivent donc une loi normale en tant que combinaisons linéaires des variables y_i qui sont elles-mêmes normales. Il est possible de montrer - voir Rao [21] - que la matrice carrée K est symétrique et idempotente. On a donc :

$$\text{cov}(r) = K \text{cov}(Y) K^t$$

avec :

$$\text{cov}(Y) = \text{cov}(\epsilon) = \sigma^2 I$$

On en déduit :

$$\text{cov}(r) = \sigma^2 K$$

Dans notre cas particulier, la matrice K peut être calculée en utilisant sa définition (A2.2) :

$$K_{ij} = \delta_{ij} - \frac{[\sum t^2 - (t_i + t_j)\sum t + nt_i t_j]}{[n\sum t^2 - (\sum t)^2]}$$

pour :

$$i, j = 1, n$$

δ_{ij} étant le symbole de Kronecker.

K_{ij} peut également s'écrire :

$$K_{ij} = -\frac{1}{n} \frac{\sum (t - t_i)(t - t_j)}{\sum (t - \bar{t})^2} \quad \text{si } i \neq j$$

$$K_{ii} = 1 - \frac{1}{n} \frac{\sum (t - t_i)^2}{\sum (t - \bar{t})^2}$$

avec :

$$\bar{t} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n t_k$$

Il est alors possible de calculer l'écart-type σ_i du résidu r_i ainsi que le coefficient de corrélation ρ_{ij} entre les résidus r_i et r_j ($i \neq j$) :

$$\sigma_i = \sigma \sqrt{K_{ii}}$$

$$\rho_{ij} = \frac{\text{cov}(r_i, r_j)}{\sigma_i \sigma_j} = K_{ij} (K_{ii} K_{jj})^{-\frac{1}{2}}$$

Dans le cas où la mesure des y_i est isochrone avec une période Δt , on a :

$$t_k = t_1 + (k - 1) \Delta t \quad \text{pour } k = 1 \text{ à } n$$

et σ_i et ρ_{ij} (avec $i \neq j$) sont alors aisément calculables :

$$\frac{\sigma_i}{\sigma} = \left[\frac{u_n + 12 i(n + 1 - i)}{n(n^2 - 1)} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (\text{A2.3})$$

$$\rho_{ij} = 2 \frac{3(n + 1)(i + j) - 6ij - (n + 1)(2n + 1)}{[u_n + 12 i(n + 1 - i)]^{\frac{1}{2}} [u_n + 12 j(n + 1 - j)]^{\frac{1}{2}}} \quad (\text{A2.4})$$

avec :

$$u_n = (n + 1)[n(n - 1) - 2(2n + 1)]$$

Afin de faire des comparaisons entre les deux fonctions définies plus haut pour différents nombres de points mesurés n , celles-ci peuvent être exprimées à l'aide des indices réduits α et γ :

$$\frac{\sigma_i}{\sigma} = \left[\frac{u_x + 12 \alpha x(x + 1 - \alpha)}{1 - x^2} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (\text{A2.5})$$

$$\rho_{ij} = 2 \frac{3x(1+x)(\alpha + \gamma) - 6\alpha\gamma x - x(1+x)(2+x)}{[u_x + 12 \alpha x(1+x-\alpha)]^{\frac{1}{2}} [u_x + 12 \gamma x(1+x-\gamma)]^{\frac{1}{2}}} \quad (\text{A2.6})$$

avec :

$$x = 1/n \quad \alpha = i/n \quad \gamma = j/n$$

et :

$$u_x = (1+x) [1-x-2x(2+x)]$$

Le rapport des écarts-types σ_i/σ est tracé en fonction de α sur la **figure A2.2** pour différentes valeurs de n . On constate que, pour un faible nombre de points, l'écart-type du résidu r_i est minimum pour les points extrêmes et maximum pour le point central (fonction symétrique). Cette variation s'estompe lorsque le nombre de points de mesure augmente et on peut pratiquement considérer ^{l'écart-type} des résidus comme constant à partir d'une centaine de points (σ_i/σ variant alors de 0,98 à 0,995).

Remarquons que si nous appelons e_i l'erreur d'estimation faite au point i sur η avec :

$$e_i = \hat{\eta}_i - \eta_i$$

on a :

$$\varepsilon_i = r_i + e_i \quad \text{avec : } \text{cov}(r_i, \varepsilon_i) = 0$$

et l'écart-type σ'_i de l'erreur d'identification au point i s'écrit :

$$\sigma'_i = \sigma^2 - \sigma_i^2$$

Ce qui signifie qu'à l'encontre de σ_i , l'écart-type σ'_i de l'erreur d'identification e_i est minimum au point central et maximum aux points extrêmes.

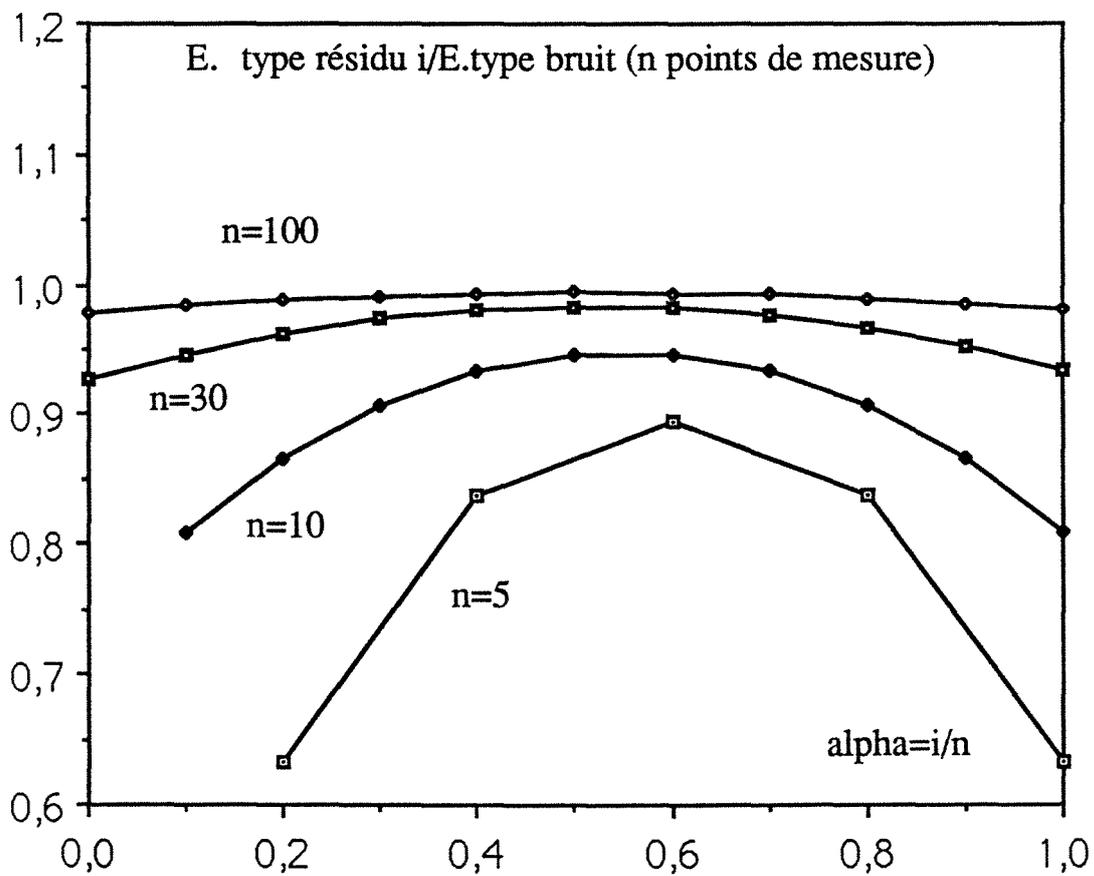


Fig. A2.2. Ecart-type des résidus - Modèle linéaire - Mesures isochrones

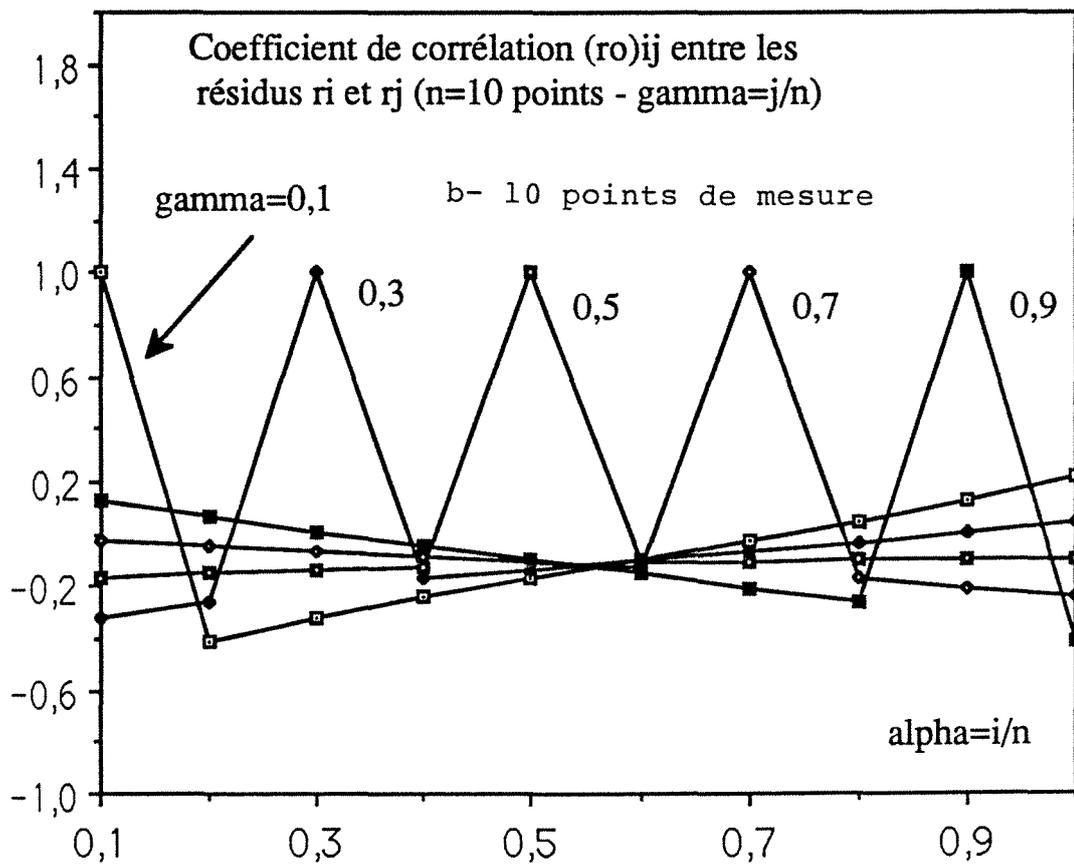
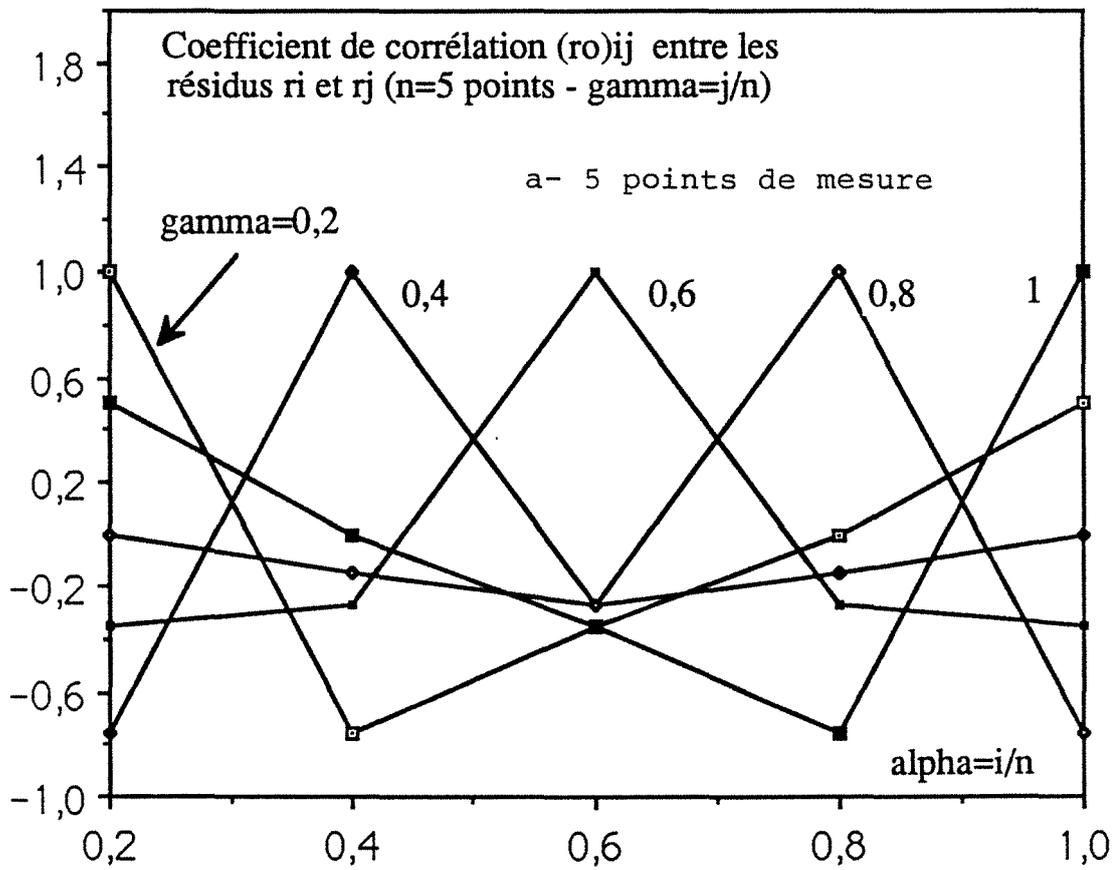
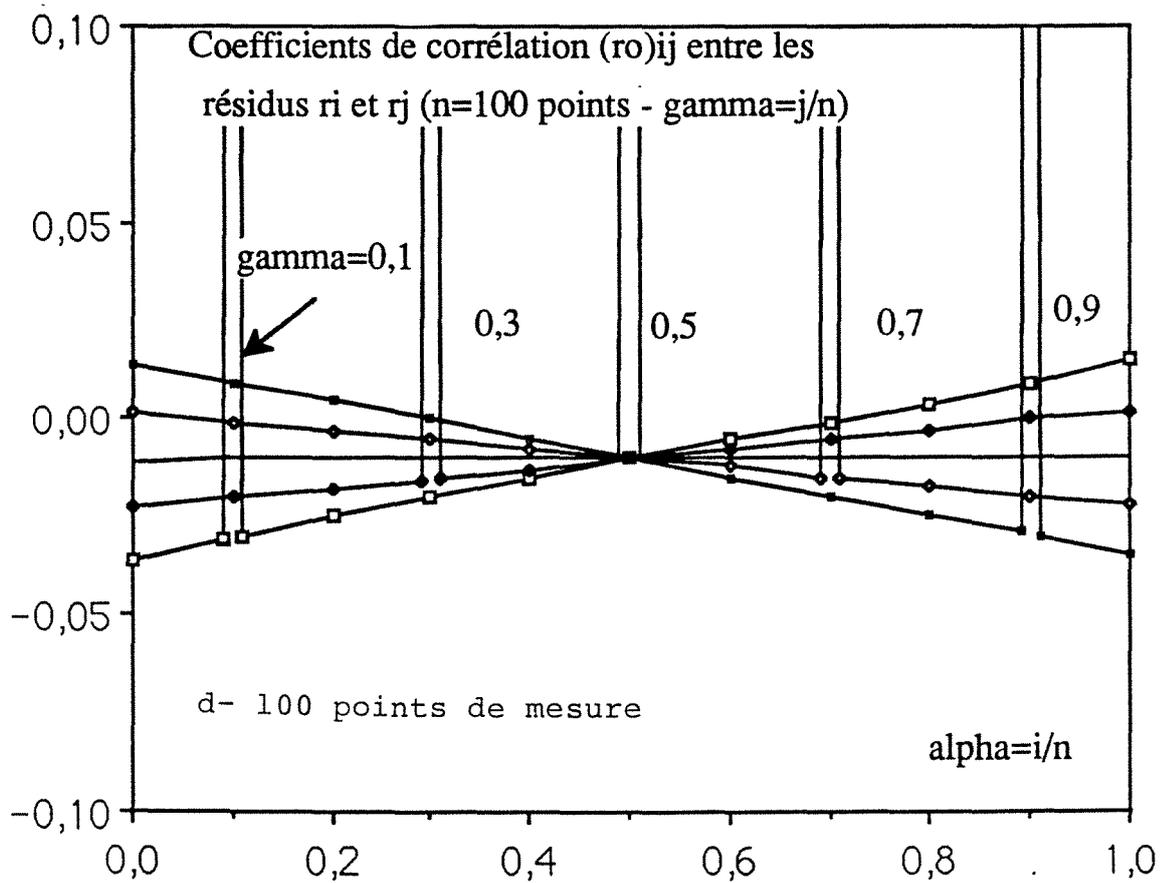
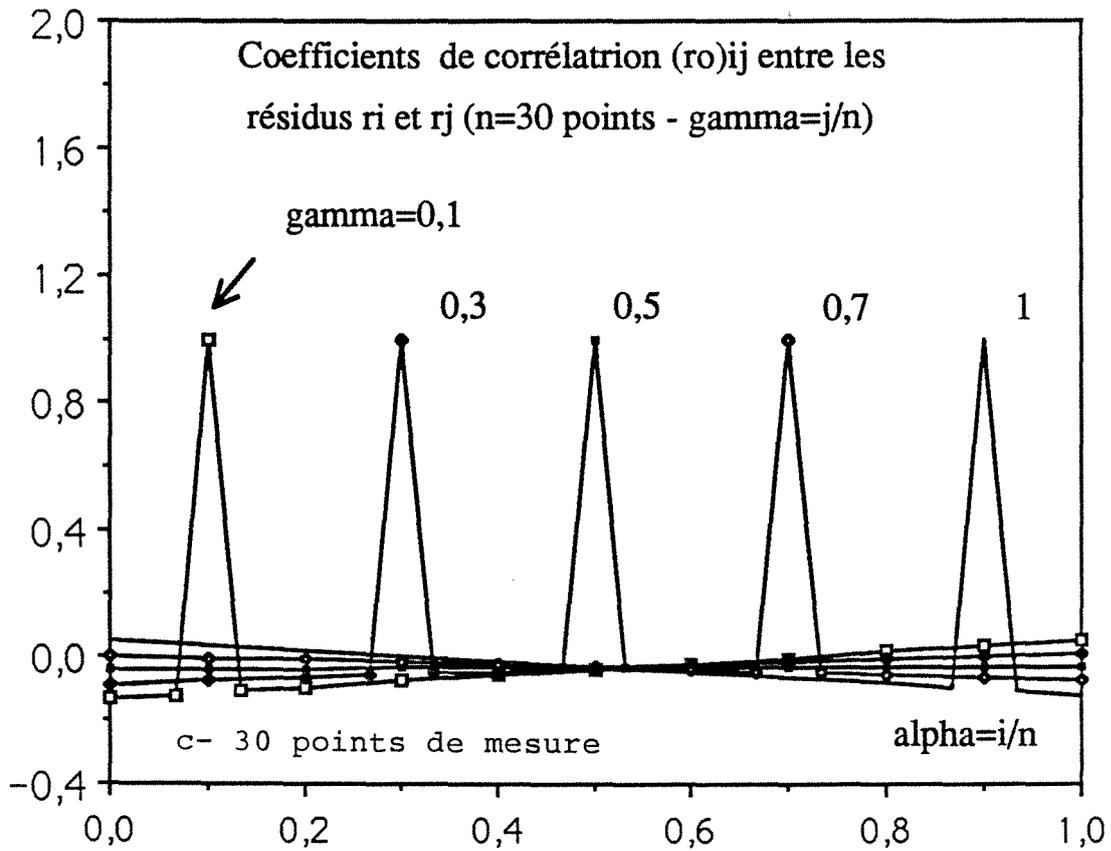


Fig. A2.3. Coefficients de corrélation entre résidus -Modèle linéaire à mesures isochrones



Les coefficients de corrélation ρ_{ij} entre les résidus r_i et r_j sont tracés sur les figures A2.3 a, b, c et d pour les valeurs respectives suivantes de $n = 5, 10, 30$ et 100 .

Pour un faible nombre de points ($n = 5$ ou 10), les résidus ne sont pas indépendants entre eux. On constate en particulier que chaque résidu r_i est corrélé négativement avec ses voisins immédiats r_{i-1} et r_{i+1} ce qui explique la distribution alternée successivement positive puis négative lorsqu'on observe des résidus expérimentaux obtenus avec un faible nombre de points de mesure.

Lorsque le nombre de points est plus important ($n = 30$ et 100), ce qui a été dit plus haut reste qualitativement valable mais le niveau des coefficients de corrélation ρ_{ij} est si faible que l'on peut considérer les résidus comme indépendants.

Il est enfin possible de calculer une valeur "moyenne" de la fonction d'auto-corrélation des résidus $\bar{\rho}'_d$ définie en 2.3.6.4 en prenant le rapport des espérances mathématiques de son numérateur et de son dénominateur pour lesquels la moyenne d'échantillon \bar{r} est remplacée par son espérance mathématique qui est ici nulle :

$$\bar{\rho}'_d = E \left[\frac{1}{n-d} \sum_{i=d+1}^n r_i r_j \right] / E \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n r_i^2 \right] = N/D$$

avec :

$$N = \frac{1}{n-d} \sum_{i=d+1}^n \text{cov}(r_i, r_{i-d}) = \frac{1}{n-d} \sum_{i=d+1}^n \rho_{i \ i-d} \sigma_i \sigma_{i-d}$$

et :

$$D = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \text{var}(r_i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sigma_i^2$$

$\bar{\rho}'_d$ peut ainsi être calculée à partir des écarts-types des résidus et de leurs coefficients de corrélation :

$$\bar{\rho}'_d = \frac{1}{n-d} \sum_{i=d+1}^n \rho_{i \ i-d} \frac{\sigma_i}{\sigma} \frac{\sigma_{i-d}}{\sigma} / \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\sigma_i}{\sigma} \right)^2$$

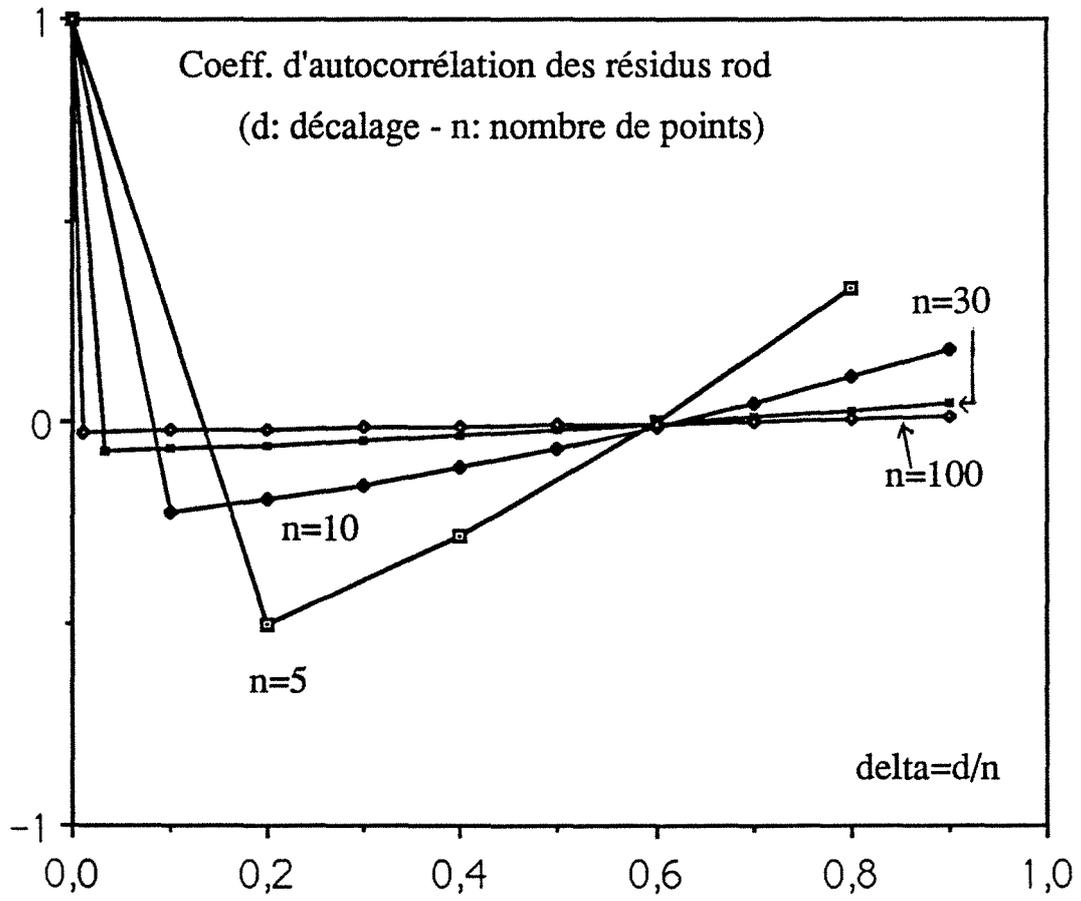


Fig. A2.4. Fonction d'autocorrélation des résidus - Modèle linéaire à mesures isochrones

ANNEXE 3.1

CONTRASTE THERMIQUE : DEFECT CAPACITIF AVEC AUGMENTATION D'ÉPAISSEUR

Les deux coefficients A et C de la matrice associée au quadripôle tricouche sont donnés par :

$$A = \operatorname{ch}(\alpha K_1) \operatorname{ch}(\alpha) + \operatorname{sh}(\alpha K_1) \left[R_c^* S'D/K_1 + K_1 SD'/R_c^* \right]$$

$$RC = \alpha \operatorname{ch}(\alpha K_1) \operatorname{sh}(\alpha) + \alpha \operatorname{sh}(\alpha K_1) \left[R_c^* SS'/K_1 + K_1 D D'/R_c^* \right]$$

avec :

$$\alpha = \sqrt{p^*} \quad R = e/\lambda \quad K_1 = \frac{e_d}{e} \left(\frac{a}{a_d} \right)^{1/2}$$

$$S = \operatorname{sh}(\alpha x^*) \quad S' = \operatorname{sh}[\alpha(1 - x^*)]$$

$$D = \operatorname{ch}(\alpha x^*) \quad D' = \operatorname{ch}[\alpha(1 - x^*)]$$

Les coefficients correspondant pour la plaque saine (épaisseur e) sont :

$$A_o = \operatorname{ch}(\alpha) \quad RC_o = \operatorname{sh}(\alpha)$$

Les transformées de Laplace réduites du contraste défini par l'équation (9) sont :

$$\Delta\theta_f^{**} = \frac{A}{RC} - \frac{A}{RC_o} \quad (\text{face avant})$$

$$\Delta\theta_f^{**} = \frac{1}{RC} - \frac{1}{RC_o} \quad (\text{face arrière})$$

ANNEXE 3.2

CONTRASTE THERMIQUE : DEFECT CAPACITIF AVEC EPAISSEUR INCHANGE

Les deux coefficients A et C de la matrice associée au quadripôle tricouche sont donnés par :

$$A = \text{ch}(\alpha K_1) \text{ch}[\alpha(1 - \delta)] + \text{sh}(\alpha K_1) [R_d^* S'D/K_1 + K_1 SD'/R_d^*]$$

$$RC = \alpha \text{ch}(\alpha K_1) \text{sh}[\alpha(1 - \delta) + \alpha \text{sh}(\alpha K_1) [R_d^* SS'/K_1 + K_1 DD'/R_d^*]$$

avec :

$$\alpha = \sqrt{p}^* \quad \delta = e_d/e$$

$$R_d^* = \frac{e_d}{e} \frac{\lambda}{\lambda_d} \neq R_c^* = (1 - \frac{\lambda_d}{\lambda}) R_d^*$$

$$S = \text{sh}[\alpha(1 - \delta)x^*] \quad S' = \text{sh}[\alpha(1 - \delta)(1 - x^*)]$$

$$D = \text{ch}[\alpha(1 - \delta)x^*] \quad D' = \text{ch}[\alpha(1 - \delta)(1 - x^*)]$$

A_o et C_o ont la même expression qu'en Annexe 3.1.

Les transformées de Laplace réduites du contraste défini par l'équation (9) sont :

$$\Delta\theta_f^{**} = \frac{A}{RC} - \frac{A_o}{RC_o} \quad (\text{face avant})$$

$$\Delta\theta_f^{**} = \frac{1}{RC} - \frac{1}{RC_o} \quad (\text{face arrière})$$

ANNEXE 3.3

COEFFICIENTS DE SENSIBILITE DU CONTRASTE DANS L'ESPACE DE LAPLACE

Les coefficients de sensibilité peuvent être mis sous la forme réduite suivante :

$$s_R = R_c^* X_R$$

$$s_x = x^* X_x$$

Les transformées de Laplace de ces sensibilités réduites sont :

- pour la face arrière :

$$\mathcal{L}^* [s_R] = - R_c^* \operatorname{sh}(\alpha x^*) \operatorname{sh}[\alpha(1 - x^*)]/D^2$$

$$\mathcal{L}^* [s_x] = x^* R_c^* \alpha \operatorname{sh}[\alpha(2x^* - 1)]/D^2$$

- pour la face avant :

$$\mathcal{L}^* [s_R] = R_c^* \operatorname{sh}^2[\alpha(1 - x^*)]/D^2$$

$$\mathcal{L}^* [s_x] = \left\{ - \operatorname{sh}[2\alpha(1 - x^*)] (\operatorname{sh}(\alpha) + R_c^* \alpha \operatorname{sh}(\alpha x^*) \operatorname{sh}[\alpha(1 - x^*)]) + R_c^* \alpha \operatorname{sh}^2[\alpha(1 - x^*)] \operatorname{sh}[\alpha(2x^* - 1)] \right\} / D^2$$

avec :

$$D = \operatorname{sh}(\alpha) + R_c^* \alpha \operatorname{sh}(\alpha x^*) \operatorname{sh}[\alpha(1 - x^*)]$$

$$p^* = e^2 p/a : \text{variable de Laplace réduite}$$

$$\alpha = \sqrt{p^*}$$

ANNEXE 3.4

EXPRESSION ANALYTIQUE DE LA RESISTANCE DU DELAMINAGE EN FACE ARRIERE

L'équation (11) peut être écrite de la manière suivante :

$$\operatorname{sh}(\alpha x^*) \operatorname{sh}[\alpha(1-x^*)] = -\frac{1}{R_c^*} \cdot \frac{m \operatorname{sh}^2(\alpha)}{1 + m \alpha \operatorname{sh}(\alpha)} \quad (\text{A3.1})$$

avec :

$$m = \Delta \theta_r^{**}(p^*, R_c^*, x^*) \quad \text{et} \quad \alpha = \sqrt{p^*}$$

En utilisant les propriétés des fonctions hyperboliques, on a :

$$\operatorname{sh}(\alpha x^*) \operatorname{sh}[\alpha(1-x^*)] = \frac{1}{2} \left\{ \operatorname{ch}(\alpha) - \operatorname{ch}[\alpha(2x^* - 1)] \right\} \quad (\text{A3.2})$$

En remplaçant le membre de gauche de l'équation (A3.1) par l'expression précédente, on obtient :

$$\operatorname{ch}[\alpha(2x^* - 1)] = \operatorname{ch}(\alpha) + \frac{2}{R_c^*} \cdot \frac{m \operatorname{sh}^2(\alpha)}{1 + m \alpha \operatorname{sh}(\alpha)} \quad (\text{A3.3})$$

Si on considère les deux valeurs suivantes pour p^* :

$$p_2^* = 4 p_1^* \implies \alpha_2 = 2\alpha_1$$

on peut écrire la formule de duplication suivante :

$$\operatorname{ch}[\alpha_2(2x^* - 1)] = 2 \operatorname{ch}^2[\alpha_1(2x^* - 1)] - 1 \quad (\text{A3.4})$$

L'écriture de l'équation (A3.3) pour ces deux valeurs p_1^* et p_2^* de p^* et la substitution des membres de droite des deux équations correspondantes

dans chacun des membres de l'équation (A3.4) permet l'élimination exacte de x^* :

$$\operatorname{ch}(\alpha_2) + \frac{2 m_2 \operatorname{sh}^2(\alpha_2)}{R_c^* [1 + m_2 \alpha_2 \operatorname{sh}(\alpha_2)]} = 2 \left\{ \operatorname{ch}(\alpha_1) + \frac{2 m_1 \operatorname{sh}^2(\alpha_1)}{R_c^* [1 + m_1 \alpha_1 \operatorname{sh}(\alpha_1)]} \right\}^2 - 1$$

Cette équation, dont l'inconnue est R_c^* , peut être simplifiée (les termes en R_c^{*2} disparaissent). Sa solution est :

$$R_c^* = \frac{m_1^2 [1 + \alpha_2 \operatorname{sh}(\alpha_2) m_2] \operatorname{sh}(\alpha_1) \operatorname{th}(\alpha_1)}{[1 + m_1 \alpha_1 \operatorname{sh}(\alpha_1)] [-m_1 + m_2 \operatorname{ch}(\alpha_1) - 3 m_1 m_2 \alpha_1 \operatorname{sh}(\alpha_2)/2]}$$

ANNEXE 3.5

IDENTIFICATION DE LA PROFONDEUR DU DELAMINAGE EN FACE AVANT

L'équation (10) est mise sous la forme suivante :

$$-\frac{1}{R_c^*} = \frac{\text{sh}(\alpha - u)}{\text{sh}^2(\alpha)} \left[\alpha \text{sh}(\alpha) \text{sh}(u) - \frac{1}{m} \text{sh}(\alpha - u) \right] \quad (\text{A3.5})$$

avec :

$$m = \Delta\theta_f^{**}(p^*, R_c^*, x^*) \quad \alpha = \sqrt{p^*} \quad u = \alpha x^*$$

Si l'équation (A3.5) est écrite pour deux valeurs p_1^* et p_2^* de p^* , on peut éliminer son membre de gauche, ce qui donne dans le cas $p_2^* = 4 p_1^*$:

$$\alpha_1 \text{sh}(\alpha_2) \text{sh}(u_1) \left[4 \text{ch}(u_1) \text{ch}(\alpha_1 - u_1) - \text{ch}(\alpha_1) \right] + 2 \text{sh}(\alpha_1 - u_1) \left[\frac{\text{ch}^2(\alpha_1)}{m_1} - \frac{\text{ch}^2(\alpha_1 - u_1)}{m_2} \right] = 0 \quad (\text{A3.6})$$

avec :

$$m_i = \Delta\theta_f^{**}(p_i^*, R_c^*, x^*) \quad \alpha_i = \sqrt{p_i^*} \quad \text{pour } i = 1 \text{ ou } 2$$

et :

$$\alpha_2 = 2\alpha_1 \quad u_1 = \alpha_1 x^*$$

L'équation (A3.6) est de la forme :

$$f(p_1^*, m_1, m_2, x^*) = 0$$

Une valeur approchée x^* de sa solution peut être calculée par la même méthode, si le deuxième terme du dénominateur $R_c^* \alpha \text{sh}(\alpha x^*) \text{sh}[\alpha(1 - x^*)]$ du contraste de Laplace avant donné par l'équation (10) est négligé devant $\text{sh}(\alpha)$. Ceci est légitime pour les délaminages de faible résistance R_c^* ou

pour ceux qui sont superficiels. Dans ce cas, le premier terme du membre de gauche de l'équation (A3.6) s'annule et celle-ci s'écrit alors :

$$\operatorname{ch}(\alpha_1 - u_1) = (m_2/m_1)^{1/2} \operatorname{ch}(\alpha_1)$$

ce qui donne une valeur approchée de x^* :

$$x^* = 1 - \frac{1}{\alpha_1} \ln \left\{ (m_2/m_1)^{1/2} \operatorname{ch}(\alpha_1) + [(m_2/m_1) \operatorname{ch}^2(\alpha_1) - 1]^{1/2} \right\}$$

Cette valeur peut être utilisée comme valeur initiale d'une méthode de Newton de résolution de l'équation (A3.6).

ANNEXE 3.6

DESCRIPTION DE LA PLAQUE D'ESSAI

Pièce n° END 09 D.3 TH

- matière : Ruban T 300-914
- dimensions : 360 x 300 mm
- épaisseur : 2 mm, 14 plis
- drapage : (0° / +45° / - 45° / + 90° / + 45° / - 45° / 0°) S
- défauts artificiels : 1, 2 ou 3 épaisseurs de film téflon
A R 3 - épaisseur 0,025 mm

Type A : diamètre 20, 3 épaisseurs de téflon

Type B : diamètre 20, 2 épaisseurs de téflon

Type C : diamètre 20, 1 épaisseur de téflon

Type D : diamètre 10, 3 épaisseurs de téflon

A1, B1, C1, D1 : entre le 2ème et le 3ème pli

A2, B2, C2, D2 : entre le 4ème et le 5ème pli

A3, B3, C3, D3 : entre le 7ème et le 8ème pli

A4, B4, C4, D4 : entre le 9ème et le 10ème pli

A5, B5, C5, D5 : entre le 11ème et le 12ème pli

ANNEXE 3.7

**CALCUL DU CONTRASTE THERMIQUE PAR SEPARATION
DES VARIABLES ET BIAIS DE LAPLACE**

3.7.1 - Champ de température au sein du bicouche

Le système d'équations (1 à 6) régissant le champ de température au sein de la plaque défectueuse - voir figure 1 - peut être résolu par la méthode de séparation des variables et on a alors en tout point de profondeur réduite z^* ($= z/e$) :

$$\left. \begin{aligned} T = T_1 &= A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \omega_n z^* \exp(-\omega_n^2 t^*) && \text{si } 0 \leq z^* \leq x^* \\ T = T_2 &= A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n K_n [\cos \omega_n z^* + \operatorname{tg} \omega_n \sin \omega_n z^*] && \text{si } x^* \leq z^* \leq 1 \end{aligned} \right\} \quad (\text{A3.8})$$

ω_n étant une valeur propre non nulle solution de l'équation :

$$\sin \omega = R_c^* \omega \sin [\omega(1 - x^*)] \sin(\omega x^*) \quad (\text{A3.9})$$

et les coefficients K_n et A_n étant donnés par :

$$K_n = [1 - \operatorname{tg} \omega_n \cotg \omega_n x^*]^{-1} = -R_c^* \omega_n \sin^2 \omega_n x^* \cotg \omega_n$$

$$A_0 = \frac{Q}{\rho c e} \quad \text{et} \quad A_n = A_0 A_n^* \quad \text{si } n \geq 1$$

$$\begin{aligned} A_n^* &= \omega_n \left\{ \frac{1}{2} [\omega_n x^* + \frac{1}{2} \sin 2\omega_n x^*] + \frac{1}{2} (K_n / \cos \omega_n)^2 \omega_n (1 - x^*) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{4} (K_n / \cos \omega_n)^2 \cos 2\omega_n (\sin 2\omega_n - \sin 2\omega_n x^*) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} K_n^2 \operatorname{tg} \omega_n (\cos 2\omega_n - \cos 2\omega_n x^*) \right\}^{-1} \end{aligned}$$

Dans le cas d'une plaque saine ($R_c^* = 0$), le champ de température est donné par la solution habituelle (méthode flash) :

$$T_o = \frac{Q}{\rho c e} \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \cos n\pi z^* \exp(-n^2 \pi^2 t^*) \right] \quad (A3.10)$$

3.7.2 - Contraste aux temps longs pour de faibles valeurs de R_c^* ($x^* = 1/2$)

Les contrastes face avant ($z^* = 0$) et face arrière ($z^* = 1$) peuvent se calculer à partir de la différence des expressions (A3.8) et (A3.10), différence divisée ensuite par $Q/\rho c e$. Il est possible de trouver un équivalent du contraste aux temps longs en ne gardant que le terme de rang 1 ($n = 1$) de chaque série :

$$\Delta T_f^* \sim A_1^* \exp(-\omega_1^2 t^*) - 2 \exp(-\pi^2 t^*)$$

$$\Delta T_r^* \sim A_1^* K_1 \frac{1}{\cos \omega_1} \exp(-\omega_1^2 t^*) + 2 \exp(-\pi^2 t^*) = -\Delta T_f^*$$

On retrouve ici le fait que dans le cas d'un défaut médian, les contrastes avant et arrière sont égaux au signe près.

Nous allons tenter d'exprimer ce contraste dans le cas des faibles valeurs de R_c^* . Afin de pouvoir calculer ω_1 , nous nous plaçons dans le cas d'un défaut médian ($x^* = 1/2$). Dans ce cas $\omega_1/2$ est la première racine positive de l'équation dérivée de (A3.9) :

$$f(\alpha) = \cotg \alpha - R_c^* \alpha = 0$$

Cette équation peut être résolue par la méthode de Newton à partir de la valeur initiale $\alpha = \pi/2$. La première itération produit une valeur approchée de $\omega_1/2$:

$$\frac{\omega_1}{2} \approx \frac{\pi}{2} - \frac{f(\pi/2)}{f'(\pi/2)} = \frac{\pi}{2} \frac{1}{1 + R_c^*}$$

Ceci nous donne une expression au premier ordre en R_c^* de ω_1 :

$$\omega_1 \sim \pi (1 - R_c^*)$$

Il est alors possible de trouver des équivalents au premier ordre de A_1^* et de K_1 :

$$K_1 = 1 + O(R_c^*)$$

$$A_1^* = 2(1 - R_c^*) + O(R_c^*)$$

d'où les équivalents aux faibles valeurs de R_c^* et aux temps longs des contrastes avant et arrière :

$$\Delta T_f^* \sim 2 \exp(-\pi^2 t^*) [(1 - R_c^*) \exp(2\pi^2 R_c^* t^*) - 1] \sim -\Delta T_r^*$$

3.7.3 - Estimation du biais sur la mesure du contraste de Laplace

En face avant, pour une intégration entre les instants 0 et t_{lim} , ce biais est égal à :

$$B(p^*) = - \int_{t_{lim}}^{\infty} \Delta T_f^* \exp(-p^* t^*) dt^*$$

En remplaçant ΔT_f^* dans cette intégrale par son équivalent donné plus haut et après intégration, on trouve :

$$B(p^*) \simeq - \frac{2 R_c^*}{\pi^2 + p^*} \left(\frac{\pi^2 - p^*}{\pi^2 + p^*} + 2\pi^2 t_{lim}^* \right) \exp [-(\pi^2 + p^*) t_{lim}^*]$$

Le biais en face arrière est l'opposé de l'expression ci-dessus.

ANNEXE 3.8

QUADRIPOLE DE LA CELLULE ELEMENTAIRE TRICOUCHE SYMETRIQUE

Les coefficients du quadripôle de la cellule élémentaire tricouche symétrique, représentée sur la **figure A8.1** et dont la répétition périodique engendre le multicouche à n plis, sont les suivants :

$$A_o = \text{ch}(b'_1)\text{ch}(b'_2) + 0,5 \text{ sh}(b'_1)\text{sh}(b'_2) [c'_2/c'_1 + c'_1/c'_2] = D_o$$

$$B_o = \text{sh}(b'_1)\text{ch}(b'_2)/c'_1 + 0,5 [\text{ch}(b'_1) + 1] \text{sh}(b'_2)/c_2 \\ + 0,5 [\text{ch}(b'_1) - 1] \text{sh}(b'_2) c'_2/c_1^2$$

$$C_o = \text{sh}(b'_1)\text{ch}(b'_2)c'_1 + 0,5 [\text{ch}(b'_1) + 1] \text{sh}(b'_2)c'_1 \\ + 0,5 [\text{ch}(b'_1) - 1] \text{sh}(b'_2)c_1^2/c'_2$$

avec :

$$b'_i = (p/a_i)^{1/2} E_i/n \quad c'_i = \lambda_i (p/a_i)^{1/2} \quad \text{pour } i = 1, 2$$

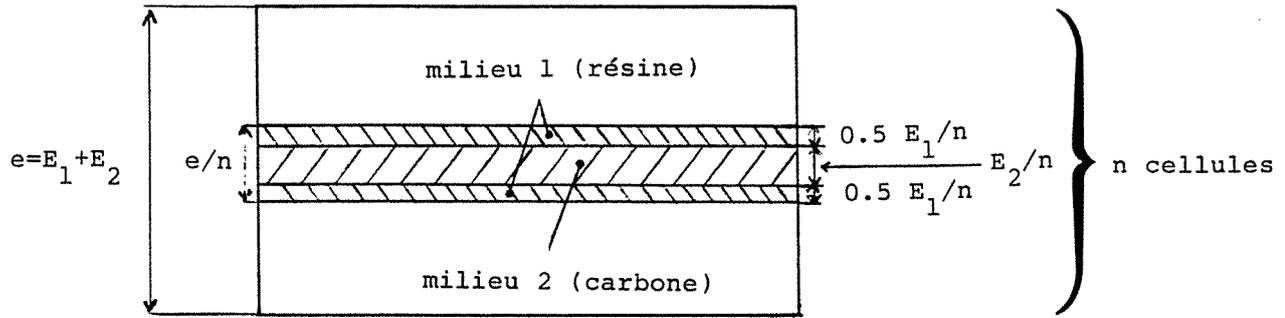


Fig. A3.1. Décomposition du composite multicouche en n cellules tricouches symétriques élémentaires

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36 37 38 39 40 41 42 43 44 45 46 47 48 49 50 51 52 53 54 55 56 57 58 59 60 61 62 63 64 65 66 67 68 69 70 71 72 73 74 75 76 77 78 79 80 81 82 83 84 85 86 87 88 89 90 91 92 93 94 95 96 97 98 99 100

ANNEXE 4.1

CORRECTION UNIDIMENSIONNELLE DES TEMPERATURES MESUREES

Pendant toute la durée des mesures, la différence extrême des températures $\theta_e (= T_1 - T_2)$ n'a pas pu être gardée constante. Chaque valeur mesurée $y_i (= \theta_{oi} + \varepsilon_i)$ de la température, pour un rayon r_o et un angle α_i , correspond à une valeur différente θ_{ei} de cette différence. Afin d'obtenir des mesures qui correspondent au modèle, celles-ci doivent être corrigées pour se rapporter à une valeur constante de θ_e qui peut être prise égale à la moyenne de ces valeurs θ_{ei} . Une façon de procéder consiste à adopter le modèle unidimensionnel (pas de variation en α) qui est vérifié par les valeurs moyennes de la température sur $[0, 2\pi]$.

L'équation (22) peut être écrite aux deux rayons r_o et r_2 :

$$\theta_{2m} = \theta_m(r_2) = (r_2/\lambda) \ln \frac{1}{k} \varphi_m \quad (\text{A.4.1})$$

$$\theta_{om} = \theta_m(r_o) = (r_2/\lambda) \ln \frac{x_o}{k} \varphi_m \quad (\text{A.4.2})$$

La définition (21) du coefficient moyen d'échange s'écrit :

$$\varphi_m = h_m (\theta_e - \theta_{2m}) \quad (\text{A.4.3})$$

L'élimination de θ_{2m} entre les équations (A.4.1 et 2) donne :

$$\varphi_m = h_m [\theta_e + (r_2/\lambda) \ln k \varphi_m] \quad (\text{A.4.4})$$

φ_m peut être ensuite éliminé entre les équations (A.4.2 et 4) :

$$\theta_{om} = (r_2/\lambda) \ln x \cdot h_m \theta_e [1 - (h_m r_2/\lambda) \ln k]^{-1}$$

Le nombre de Biot de l'échange moyen Bi ($= h_m r_2 / \lambda$) est ensuite introduit :

$$\theta_{om} = \frac{Bi \ln(x_o/k)}{1 + Bi \ln(1/k)} \theta_e$$

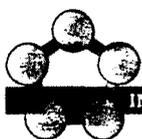
une variation $\Delta\theta_e$ de θ_e produit la variation suivante de θ_{om} :

$$\Delta\theta_{om} = \frac{Bi \ln(x_o/k)}{1 + Bi \ln(1/k)} \Delta\theta_e$$

Cette équation peut ensuite être écrite pour chaque valeur θ_{ei} et y_i mesurée, correspondant à un angle α_i avec :

$$\Delta\theta_e = \theta_{ei} - \theta_e \quad \text{et} \quad \Delta\theta_{om} = y_i - y_i^c$$

ce qui permet d'obtenir l'équation de correction (34).



INPL

INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE LORRAINE

AUTORISATION SOUTENANCE DE THESE EN VUE DE L'OBTENTION DU GRADE DE DOCTORAT D'ETAT-SCIENCES

- o o o o -

Vu les rapports établis par :

Monsieur DEGIOVANNI, Professeur, ENSEM/INPL,
Monsieur LAURENT, Professeur, IUT B Villeurbanne,
Monsieur DELAUNAY, Directeur de Recherche CNRS, ISITEM Nantes.

Le Président de l'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE LORRAINE, autorise

Monsieur MAILLET Denis

à soutenir devant l'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE LORRAINE, une
thèse intitulée :

"Apport des méthodes analytiques à l'identification de paramètres et à la conduction
inverse en thermique"

en vue de l'obtention du grade de DOCTORAT D'ETAT-SCIENCES

Spécialité : "SCIENCES"

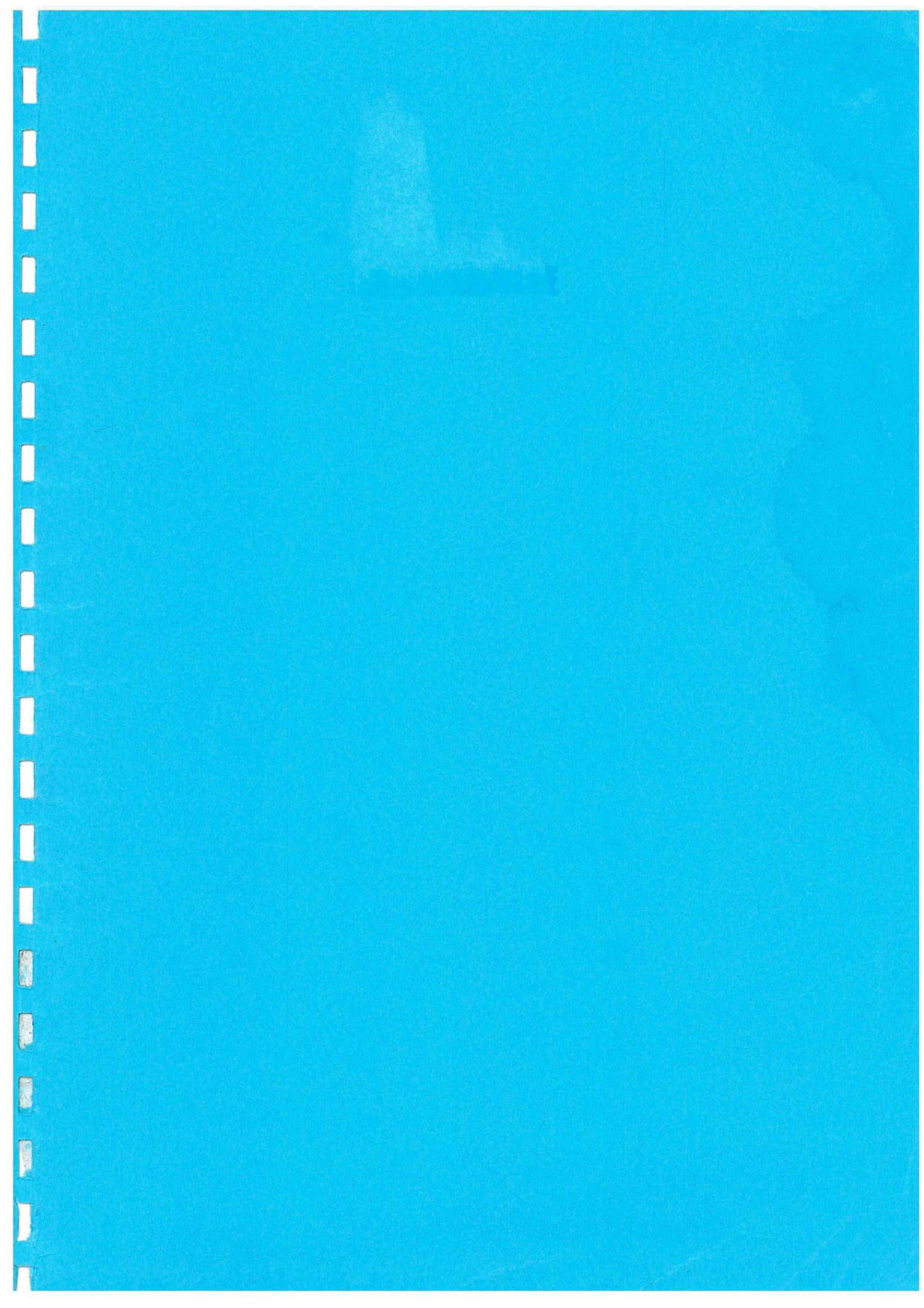
Vandœuvre, le 05 Décembre 1991

Le Président de

M. GANTSIS



1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36 37 38 39 40 41 42 43 44 45 46 47 48 49 50 51 52 53 54 55 56 57 58 59 60 61 62 63 64 65 66 67 68 69 70 71 72 73 74 75 76 77 78 79 80 81 82 83 84 85 86 87 88 89 90 91 92 93 94 95 96 97 98 99 100



Résumé

Les conditions d'identifiabilité des paramètres actifs (nombres de Biot des pertes et diffusivité thermique) de la méthode flash, sont étudiées ainsi que le chiffrage des erreurs sur leurs estimations. La même méthode flash permet également d'accéder à certaines propriétés thermophysiques d'un dépôt solide d'un substrat connu et une nouvelle méthode d'identification, basée sur les transformées expérimentales du contraste thermique, est développée. Le contrôle non-destructif de plaques de composites stratifiés, présentant des délaminages, est ensuite abordé : la méthode thermique est basée sur l'étude, en face avant ou arrière, de l'incidence d'un défaut interne sur la diffusion de la chaleur dans le solide, suite à une excitation flash en face avant. Une méthode d'estimation de l'épaisseur, de la profondeur et de l'extension du délaminage est ensuite présentée. Elle utilise la notion de contraste thermique normalisé localement et est appliquée à des champs de température bidimensionnels transitoires, acquis à l'aide d'une caméra infrarouge (emploi également des transformées expérimentales de Laplace). Une méthode semi-analytique de conduction inverse bidimensionnelle permanente est ensuite appliquée à l'estimation expérimentale de l'évolution angulaire du coefficient de transfert sur un cylindre en convection forcée transverse.

Abstract

"Contribution of analytical methods to parameter estimation and inverse conduction in heat transfer"

The identifiability conditions of the active parameters (Biot numbers and thermal diffusivity) of the heat pulse (flash) method are studied and the errors in their estimation are calculated. The same flash method allows to reach some thermophysical properties of a deposit that has been laid upon a known substrate and a new identification method, based on the experimental Laplace transforms of the thermal contrast, is developed. Non destructive evaluation of laminated-composite plates, that present internal delaminations, is then started : this thermal method is based on the study, in front or rear side, of the influence of an internal defect on heat diffusion in the plate, after a heat pulse excitation on its front side. A method of estimation of the thickness, depth and extent, of the delamination is then presented. It uses the notion of a locally normalized thermal contrast and is implemented on transient two-dimensional temperature fields that have been recorded using an infrared scanner (similar use of experimental Laplace transforms). A semi-analytical method of steady two-dimensional inverse heat conduction is then applied to the experimental estimation of the variation of the heat transfer coefficient with the angle, in transverse forced convection on a cylinder.