



## AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : [ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr](mailto:ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr)

## LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

[http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg\\_droi.php](http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php)

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

**INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE LORRAINE**

--ooOoo--

**THESE**

[M] 1990 BONZI K.B

présentée à

L'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE LORRAINE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'I.N.P.L.

Spécialité : Mécanique et Energétique

Option : Mathématiques

par

**BONZI Kaka Bernard**

-----

sujet

**ETUDE DES EQUILIBRES THERMIQUES D'UN SUPRACONDUCTEUR****EXISTENCE ET STABILITE**

-----

Soutenue publiquement le 26 Septembre 1990

devant la Commission d'Examen

--ooOoo--

**Membres du Jury**

Président

M. PIERRE (Université de Nancy I)

Rapporteurs

F. CONRAD (Université de Nancy II)

C. MEURIS (C.E.A. Saclay)

Examineurs

G. MAURICE (I.N.P.L. Nancy)

J. SAINT JEAN PAULIN (Université de Metz)

Directeur de Thèse

H. LANCHON-DUCAUQUIS (I.N.P.L. Nancy)

## ERRATA

### Nomenclature

F :

$$F(\theta) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{2L^2}{k(T_2 - T_b)} \int_0^\theta \bar{H}(s) ds$$

au lieu de

$$F(\theta) = \frac{2L^2}{k(T_2 - T_b)^2} \int_0^\theta \bar{H}(s) ds$$

page II-9 (1ère ligne)

$$\theta''(x) \theta_-(x) + f(\theta(x)) \theta_-(x) = 0$$

au lieu de :

$$\theta''(x) \theta'_-(x) + f(\theta(x)) \theta'_-(x) = 0$$

CONCLUSION : page C-1

$$(1) \begin{cases} C \frac{\partial T}{\partial t}(X, t) - k \frac{\partial^2 T}{\partial X^2}(X, t) = H(T) \\ T(0; t) = T(L; t) = T_b \quad \forall t > 0 \\ T(X; 0) = T_0(X) \quad \forall X \in [0; L] \end{cases}$$

au lieu de :

$$(1) \begin{cases} C \frac{\partial T}{\partial t}(x, t) - k \frac{\partial^2 T}{\partial X^2}(X, t) = H(T) \\ T(0; t) = T(L; t) = T_b \quad \forall t > 0 \\ T(X; 0) = T_0(X) \quad \forall X \in [0; L] \end{cases}$$

ANNEXE page A-B 1

$$F(\theta) = \frac{2L^2}{k(T_2 - T_b)^2} \int_{T_b}^T H(s) \, ds$$

au lieu de

$$F(\theta) = \frac{2L^2}{k(T_2 - T_b)^2} \int_0^\theta H(s) \, ds$$

$$\mathfrak{H}(T) = 2 \int_{T_b}^T H(s) \, ds$$

au lieu de

$$H(T) = 2 \int_0^\theta H(s) \, ds$$

*à la mémoire de mon père*

**à ma mère**

## AVANT PROPOS

Le présent travail, effectué au Laboratoire d'Energétique et de Mécanique Théorique et Appliquée, a été motivé par le désir de notre équipe de répondre à certaines questions que se sont posés les electrotechniciens, plus particulièrement Monsieur Alain MAILFERT envers lequel j'exprime toute ma reconnaissance pour m'avoir suggéré ainsi le sujet d'étude.

Madame Hélène LANCHON-DUCAUQUIS m'a beaucoup appris. Son aide, ses suggestions et sa sollicitude à mon égard m'ont permis de progresser. Je lui adresse tout spécialement mes remerciements.

Ma gratitude va à Mademoiselle Chantal MEURIS et à Monsieur Francis CONRAD, avec lesquels j'ai souvent eu des discussions fructueuses et qui ont accepté d'être rapporteurs de ce travail.

A Messieurs Gérard MAURICE et Michel PIERRE, j'exprime mes vifs remerciements pour m'avoir consacré leur précieux temps et me permettre ainsi d'approfondir ce travail ; ils ont accepté aussi de le juger en qualité de membres du jury.

Ma marque de sympathie et de reconnaissance va aussi à Mademoiselle Jeanine SAINT JEAN PAULIN qui a bien voulu porter son attention à cette étude et être membre du jury.

Je ne peux oublier toute l'équipe de Modélisation et Approche Mathématique et Numérique au sein de laquelle j'ai évolué, dont les remarques et les suggestions m'ont été d'un apport inestimable ; à elle, ainsi qu'à toute l'équipe du LEMTA, j'exprime toute ma sympathie.

Grand merci aussi à l'ensemble de mes compatriotes qui m'ont épaulé, tant sur le plan moral que matériel, en manifestant leur solidarité, notamment à travers l'Association des Etudiants Burkinabé en FRANCE (A.E.B.F).

A Madame Marie-Hélène ZOBERMAN qui a consacré son temps à taper ce mémoire, je veux lui dire qu'il m'a été agréable de travailler avec elle, je lui adresse mes sincères remerciements.

Je serais toujours redevable à Yvonne, aux miens, plus particulièrement Jacques, ainsi qu'aux nombreux amis que je ne pourrais hélas citer, qu'ils sachent que sans leur soutien moral et /ou matériel je n'aurais pas réussi à boucler ce travail.

## **ABSTRACT**

### **A study of thermal equilibriums of a superconductor : Existence and Stability.**

The equipments which use the superconduction phenomenon often present instabilities because not only are they complex but also as a result of the particular nature of superconductor materials (loss of their properties as soon as the temperature becomes too high). Thermal instabilities are far from being the most important ; they can provoke a transition from the superconductor state to the normal resistif one. One of the consequences of this transition is a strong thermal dissipation capable of causing serious damages.

What we have been working on has been to analyse a semi-linear Partial Differential Equation after proposing a formulation of the thermal problem : "exchange between conductor and cryogenic bath". The study helps to identify the existence of stationnary states. An analysis of their stability as well as attraction zones of the thermal fields of stable equilibriums is given as a function of physical parameters such as : the length of the the conductor; the exchange function : "Supra-Cryogenic bath" and the thermal conductivity of the superconductor.



## RESUME

Les installations utilisant le phénomène de supraconduction présentent souvent des instabilités du fait de leur nature mais aussi de la particularité des matériaux supraconducteurs (perte de leur propriété dès que leur température devient excessive).

Les instabilités thermiques sont de loin les plus importantes, elles peuvent provoquer une transition du supraconducteur à l'état normal résistif. Une conséquence de cette transition est une énorme dissipation thermique susceptible d'entraîner d'importants dégâts matériels.

Le but de notre travail a été d'analyser, après une formulation du problème thermique : échange conducteur-bain cryogénique, une Equation aux Dérivées Partielles Semi linéaire.

Cette étude permet de mettre en évidence l'existence d'états stationnaires ; une analyse de leur stabilité ainsi que des zones d'attraction des champs thermiques d'équilibre stable est donnée en fonction des paramètres physiques tels que : la longueur du conducteur, certaines caractéristiques de la fonction échange supra-bain cryogénique et de la conductivité thermique du supraconducteur.

### MOTS CLES :

|                     |                             |
|---------------------|-----------------------------|
| Supraconducteur     | EDP                         |
| Equilibre thermique | Equation Semilinéaire       |
| Stabilité thermique | Sous solution, Sur solution |
| Electrotechnique    |                             |

# SOMMAIRE

## NOMENCLATURE

## INTRODUCTION

### CHAPITRE I :

I-1

BREF APERCU SUR LES PROBLEMES DE STABILITE THERMIQUE DES SUPRACONDUCTEURS DU POINT DE VUE DE L'EXPERIMENTATION ET DE LA SIMULATION NUMERIQUE

|                                                                |     |
|----------------------------------------------------------------|-----|
| 1 - Généralités                                                | I-1 |
| 2 - Problèmes de stabilité thermique pour les supraconducteurs | I-3 |
| 2-1 Introduction du modèle                                     | I-3 |
| 2-2 Quelques critères de stabilité des supraconducteurs        | I-4 |
| 3 - Conclusion                                                 | I-7 |

### CHAPITRE II :

II-1

FORMULATION MATHEMATIQUE DU PROBLEME ET PREMIERES REMARQUES

|                                                                                             |       |
|---------------------------------------------------------------------------------------------|-------|
| 1 - Présentation générale du problème                                                       | II-1  |
| 1-1 Description générale                                                                    | II-1  |
| 1-2 Description du cas traité et hypothèses simplificatrices                                | II-2  |
| 2 - Analyse dimensionnelle et équations réduites                                            | II-4  |
| 3 - Remarques générales sur les propriétés a priori des champs d'équilibre thermique du CMS | II-8  |
| 3 - 1 Préliminaire                                                                          | II-8  |
| 3 - 2 Propriétés générales a priori des solutions non triviales                             | II-8  |
| 4 - Conclusion                                                                              | II-13 |

### CHAPITRE III :

III-1

EXISTENCE ET NOMBRE DES EQUILIBRES THERMIQUES POSSIBLES

|                                                                               |       |
|-------------------------------------------------------------------------------|-------|
| 1 - Mise en évidence d'une intégrale première et conséquences                 | III-1 |
| 1 - 1 Construction d'une intégrale première                                   | III-1 |
| 1 - 2 Etude de la variation de fonction $F(\omega)$ primitive de $2f(\omega)$ | III-3 |
| 1 - 3 Premières conséquences de l'étude de l'intégrale première               | III-6 |
| 1 - 4 Conclusions et illustrations                                            | III-7 |

|                                                                                                                                  |               |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------|
| <b>2 - Conditions d'existence de solutions non triviales</b>                                                                     | <b>III-9</b>  |
| 2 - 1 Conditions nécessaires d'existence                                                                                         | III-9         |
| 2 - 2 Conditions suffisantes d'existence                                                                                         | III-11        |
| <b>3 - Multiplicité et propriétés des solutions du problème (1)</b>                                                              | <b>III-14</b> |
| 3 - 1 Symétrie de la solution du problème (1)                                                                                    | III-14        |
| 3 - 2 Correspondance entre les nombre de solutions du problème (11) et celui du problème (1)                                     | III-15        |
| 3 - 3 Relation d'ordre                                                                                                           | III-15        |
| <b>4 - Conclusion partielle</b>                                                                                                  | <b>III-18</b> |
| <b>5 - Nombre d'états d'équilibre possibles en fonction des paramètres du problème</b>                                           | <b>III-19</b> |
| 5 - 1 Introduction ; rappels                                                                                                     | III-19        |
| 5 - 2 Mise en évidence de paramètres cruciaux pour le problème (nombre $\lambda > 0$ ; fonction $\varphi$ et fonctionnelle $J$ ) | III-20        |
| 5 - 3 Etudes intermédiaires                                                                                                      | III-21        |
| 5 - 4 Etude directe de $J(\omega)$                                                                                               | III-28        |
| 5 - 5 Conclusion partielle sur le nombre de solutions non triviales                                                              | III-35        |
| <b>6 - Interprétation physique des résultats : conclusion du chapitre</b>                                                        | <b>III-37</b> |

## **CHAPITRE IV :**

**IV-1**

### **ETUDE DE LA STABILITE DES EQUILIBRES THERMIQUES POSSIBLES**

|                                                                                                                                                               |              |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------|
| <b>1 - Rappel sur la notion de stabilité et énoncés de certains resultats acquis pour le problème posé</b>                                                    | <b>IV-1</b>  |
| 1 - 1 Cadre du travail                                                                                                                                        | IV-1         |
| 1 - 2 Définitions et remarques relatives à la stabilité                                                                                                       | IV-2         |
| 1 - 3 Quelques résultats immédiats de stabilité des solutions stationnaires non triviales du problème (1)                                                     | IV-3         |
| 1 - 4 Commentaire sur les résultats précédents                                                                                                                | IV-5         |
| <b>2 - Rappels sur les notions de sur et sous solutions</b>                                                                                                   | <b>IV-6</b>  |
| 2 - 1 Définition des sur et sous solutions des problèmes (1) et (2) au sens de SATTINGER                                                                      | IV-6         |
| 2 - 2 Enoncé des résultats de stabilité basés sur les notions de sur et sous solutions                                                                        | IV-7         |
| <b>3 - Application de la méthode des sur et sous solutions pour la détermination optimum de la zone d'attraction <math>Z_0</math> de la solution supra</b>    | <b>IV-9</b>  |
| 3 - 1 Première approche de la stabilité de la solution supra $\Theta_0$                                                                                       | IV-10        |
| 3 - 2 Remarque                                                                                                                                                | IV-11        |
| <b>4 - Application de la méthode des sur et sous solutions pour la détermination de la zone d'attraction <math>Z_2</math> de la solution stable non supra</b> | <b>IV-11</b> |
| <b>5 - Essai d'extension des domaines d'attraction des solutions stables</b>                                                                                  | <b>IV-11</b> |
| <b>6 - Conclusion du chapitre</b>                                                                                                                             | <b>IV-13</b> |

**CONCLUSION**

**C-1**

**ANNEXE A**

**A-A 1**

**ANNEXE B**

**A-B 1**

**ANNEXE C**

**A-C 1**

**BIBLIOGRAPHIE**

# **NOMENCLATURE**

**--ooOoo--**

## Nomenclature (liste non exhaustive)

### Symboles latins

a      aire géométrique  $|\mathcal{H}(T_1)| = \left| \int_{T_b}^{T_1} H(T) dT \right|$

b      aire  $|\mathcal{H}(T_2) - \mathcal{H}(T_1)| = \left| \int_{T_1}^{T_b} H(T) dT \right|$

C      chaleur spécifique volumique du conducteur

f      terme source normalisé (adimensionnel) dans le cas semi-linéaire

$$f(\theta) = \frac{L^2}{k(T_2 - T_b)} [G((T_2 - T_b)\theta + T_b) - Q((T_2 - T_b)\theta + T_b)]$$

F      primitive de  $2f$  ;  $F(\theta) = \frac{2L^2}{k(T_2 - T_b)^2} \int_0^\theta H(s) ds$

g      terme source normalisé (adimensionnel), dans le cas non-linéaire :  $g = f\phi\beta$

G      puissance linéique créée par effet Joule

H(T)      compétition entre les puissances linéiques G (effet Joule) et Q (puissance absorbée)  $H(T) = G(T) - Q(T)$

H      au chapitre introduction, H est considéré comme le champ magnétique extérieur au supraconducteur

$\mathcal{H}(T)$       primitive de  $2H(T)$

I      intensité de courant électrique dans le conducteur

J      au chapitre I, densité de courant dans le conducteur

J( $\omega$ )      fonction (nelle) définissant les solutions implicites du problème stationnaire

k      conductivité thermique longitudinale du conducteur (k est éventuellement fonction de la température T)

k<sub>1</sub>      valeur moyenne de la conductivité thermique longitudinale du conducteur

$$k_1 = \int_0^1 k(s) ds$$

l( $\omega$ )      fonction auxiliaire :  $l(\omega) = \Phi(\omega) - \omega\phi(\omega)$

|                             |                                                                                                  |
|-----------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------|
| m                           | abscisse du minimum de f                                                                         |
| M                           | abscisse du maximum de f                                                                         |
| $P_{\mathcal{H}}(T)$        | expression dimensionnelle de la fonction (nelle) $J(\omega)$ déterminant le critère de stabilité |
| $\mathcal{P}_{\mathcal{H}}$ | minimum de la fonction (nelle) $P_{\mathcal{H}}(T)$                                              |
| Q                           | puissance linéique absorbée par le bain réfrigérant                                              |
| t                           | variable temporelle réduite ( éventuellement non réduite)                                        |
| t'                          | variable temporelle                                                                              |
| T                           | température du conducteur                                                                        |
| $T_1$                       | température réalisant l'équilibre entre G et Q ; $G(T_1) = Q(T_1)$                               |
| $T_2$                       | température réalisant l'équilibre entre G et Q ; $G(T_2) = Q(T_2)$ ; $T_b < T_1 < T_2$           |
| $T_c$                       | température critique du supraconducteur                                                          |
| $T_{cI}$                    | température critique du supraconducteur à intensité I donnée                                     |
| $T_{\max}$                  | température maximale réalisant le seuil des "aires égales" (chap I)                              |
| $T_r$                       | température de récupération (chap I) ou seuil des "aires égales"(chap Conclusion)                |
| U                           | "pseudo température" $U(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{k_1} \int_0^{\theta(x)} k(s) ds$    |
| u                           | sous-solution du problème stationnaire (éventuellement d'évolution, indépendante du temps)       |
| $\tilde{u}$                 | sous-solution du problème d'évolution                                                            |
| v                           | sursolution du problème stationnaire (éventuellement d'évolution, indépendante du temps)         |
| $\tilde{v}$                 | sursolution du problème d'évolution                                                              |
| x                           | variable spatiale adimensionnelle réduite                                                        |
| X                           | variable spatiale dimensionnée                                                                   |
| $Z_0$                       | zone d'attraction de la solution supra                                                           |
| $Z_{\Theta_2}$              | zone d'attraction de la solution $\Theta_2$ (non supra)                                          |

## Symboles grecs

|                  |                                                                                                         |
|------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\alpha$         | coefficient de proportionnalité définissant la puissance $G$ ,<br>$G(T) = \alpha I^2$ pour $T \geq T_c$ |
| $\eta$           | maximum de la solution d'équilibre                                                                      |
| $\eta_i$         | maximum de la solution stationnaire $\theta_i$ , ( $i = 1$ ou $2$ )                                     |
| $\theta$         | température réduite $\theta = \frac{T-T_b}{T_2-T_b}$                                                    |
| $\tilde{\theta}$ | solution du problème d'évolution                                                                        |
| $\theta_0$       | température initiale                                                                                    |
| $\Theta_0$       | solution triviale (variable réduite) asymptotiquement stable                                            |
| $\Theta_1$       | solution stationnaire non triviale (variable réduite) instable                                          |
| $\Theta_2$       | solution stationnaire non triviale (variable réduite) stable                                            |
| $\Theta_1^*$     | solution stationnaire non triviale (température : variable dimensionnée) instable                       |
| $\Theta_2^*$     | solution stationnaire non triviale (température : variable dimensionnée) stable                         |
| $\lambda$        | paramètre de bifurcation                                                                                |
| $\mu(\omega)$    | minorant de $J(\omega)$ , strictement positif                                                           |
| $\tau$           | temps caractéristique, $\tau = \frac{CL^2}{k}$                                                          |
| $\varphi$        | terme source réduit                                                                                     |
| $\Phi(\theta)$   | primitive de $\varphi(\theta)$ : $\Phi(\theta) = \frac{\mathcal{H}(T)}{\mathcal{H}(T_2)}$               |
| $\omega$         | variable désignant la valeur de la température réduite à un point et à un instant $t$ donnés            |
| $\omega_m$       | minimum de $J(\omega)$ correspondant à la grandeur dimensionnée $\mathcal{P}_{\mathcal{H}}$             |



# INTRODUCTION

--ooOoo--

## INTRODUCTION

De nombreux métaux et alliages, exception faite des éléments ferromagnétiques., présentent dans certaines conditions et à très basse température (au voisinage du zéro absolu pour la plupart) une résistivité électrique négligeable voire nulle. C'est l'état supraconducteur. Des expériences, depuis 1911 par M. Karmerling ONNES avec la liquéfaction de l'hélium à 4,2K [voir par exemple KITTEL C./1 et PEROT J./1], ont montré que la résistivité de certains de ces matériaux est si proche de zéro que l'amortissement d'un courant électrique lancé dans un anneau supraconducteur demanderait des dizaines de milliers d'années ; d'où l'intérêt de ces matériaux en électrotechnique, notamment dans la réalisation des grands aimants supraconducteurs.

Très vite les réalisations techniques se heurteront aux nombreux problèmes que pose la mise en oeuvre des supraconducteurs ; en particulier, les aimants présentent toujours des instabilités thermiques liées à un certain nombre de facteurs dont nous allons faire cas dans le chapitre I.

L'objet de ce mémoire est de poser les bases théoriques pour l'élaboration et pour l'amélioration de certains critères de stabilité thermique afin de prévenir et contrôler au mieux toutes perturbations localisées susceptibles d'être générées dans le supraconducteur. Pour ce faire nous avons adopté la procédure suivante :

Dans le premier chapitre, nous exprimons quelques généralités sur les supraconducteurs et faisons le point sur ce que l'on sait déjà de leur stabilité thermique à partir de diverses expérimentations instrumentales ou numériques.

Dans le second chapitre, nous fixons d'abord le cadre de notre étude en adoptant a priori un certain nombre d'hypothèses simplificatrices destinées à être relaxées ultérieurement ; nous donnons ensuite la formulation mathématique correspondant au problème posé et énonçons quelques propriétés générales des champs d'équilibre thermiques admissibles.

Le chapitre III , qui constitue le coeur de ce présent travail, est consacré à l'étude de l'existence et la multiplicité des équilibres thermiques possibles, c'est à dire des solutions stationnaires du problème.

Le chapitre IV enfin peut être considéré comme l'ébauche de la détermination de la zone de stabilité de l'état thermique stationnaire correspondant à l'état supraconducteur (le seul souhaité d'un point de vue technique), il permet déjà de dégager quelques critères sur la manière dont on peut jouer sur les paramètres physiques ou dimensionnels de l'installation, pour préserver au mieux son état supra, il montre enfin comment l'étude devra être poursuivie pour optimiser ce contrôle paramétrique.

# **CHAPITRE I**

**--ooOoo--**

**BREF APERCU SUR LES PROBLEMES DE STABILITE  
THERMIQUE DES SUPRACONDUCTEURS DU POINT  
DE VUE DE L'EXPERIMENTATION ET DE LA  
SIMULATION NUMERIQUE**

## CHAPITRE I

|                                                                                                                                                             |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>BREF APERCU SUR LES PROBLEMES DE STABILITE<br/>THERMIQUE DES SUPRACONDUCTEURS DU POINT DE VUE DE<br/>L'EXPERIMENTATION ET DE LA SIMULATION NUMERIQUE</b> |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

### Objet du chapitre

Après avoir donné dans ce chapitre un très bref aperçu du comportement général d'un supraconducteur, nous évoquons d'abord les différents types de difficultés rencontrées dans la mise en oeuvre, ainsi que la nature des problèmes mathématiques sous-jacents ; nous nous focalisons ensuite sur l'aspect "contrôle de la stabilité thermique", nous présentons succinctement à ce propos, les types de critère connus à partir éventuellement d'études expérimentales ou de simulation numérique.

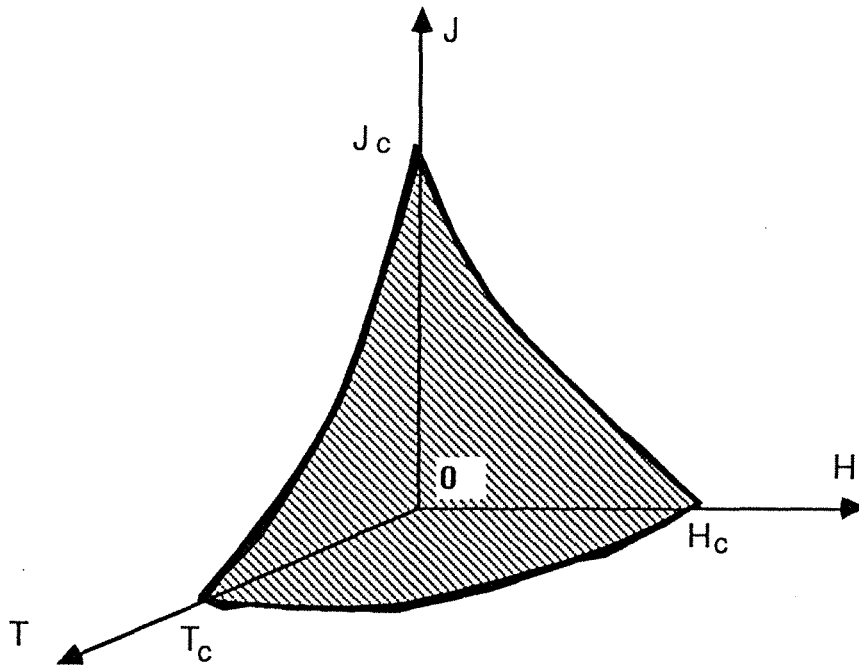
Notre point de départ a été en fait un ensemble de questions posées par A. MAILFERT, Professeur à l'INPL[ cf MAILFERT A./1] , et C. MEURIS, Ingénieur de Recherches au C.E.A. SACLAY [cf MEURIS C./1,2 & 3].

### 1- GENERALITES SUR LES SUPRACONDUCTEURS.

L'état supraconducteur d'un matériau est régi essentiellement par trois grandeurs :

- la température  $T$
- le champ magnétique  $H$
- la densité de courant électrique  $J$

Cette dépendance peut être exprimée à l'aide d'un diagramme de phases à trois dimensions décrit ci-après :



**Figure 1 : Domaine de l'état supraconducteur en fonction des trois paramètres H, J et T.**

Ce diagramme indique que l'état supraconducteur n'existe qu'à l'intérieur d'un certain "tétraèdre" de l'espace des phases (T, H, J). On remarque en particulier à travers ce diagramme que si l'on se fixe deux des trois grandeurs (par exemple une densité de courant J et un champ magnétique H) l'état supraconducteur est conditionné par l'existence d'un seuil limite de la température ( $T_{H,J}$ ). On constate aussi que ce seuil est d'autant plus petit que les autres paramètres (en particulier la densité de courant J) sont importants ; ce qui est recherché en fait d'un point de vue technique. \*

Il est facile de prévoir, à partir de ce simple diagramme, la nature et la complexité des nombreux problèmes mathématiques qu'il serait souhaitable de résoudre pour aider les physiciens et ingénieurs à maîtriser parfaitement tous les problèmes techniques basés sur les propriétés supraconductrices des matériaux. Nous en avons déjà abordés plusieurs dans notre équipe à l'occasion de deux thèses, dont l'une au moins, a donné lieu à des prolongements intéressants sur le plan des méthodes mathématiques. Citons :

- l'étude du développement du champ électrique dans un supraconducteur ; celle ci a conduit à un intéressant **problème non linéaire de type frontières libres** et a permis entre autre de développer une nouvelle technique des résolutions numériques [SERO-GUILLAUME O./1 GLOWINSKI & SERO-GUILLAUME/1; VISINTIN/1] ;

\* Des développements sur la théorie du supraconducteur peuvent être également trouvés dans : MAILFERT & FOURNET/1 ; FOURNET & MAILFERT/1 ; DAVOUST/1 ; IWASA/1.

- l'évaluation des pertes dans un C.M.S (Composite Multifilamentaire Supraconducteur) ; celle ci dépend du terme de conductivité électrique transverse globale du supra dont la détermination a également conduit à une application des **techniques d'homogénéisation** [SAINT JEAN PAULIN J./1 et MIRGAUX A. & SAINT JEAN PAULIN J./1].

Chacune de ces études implique déjà un certain nombre de problèmes ouverts à complexité croissante, cependant nous nous intéressons pour l'heure à un nouvel aspect des questions posées par les supraconducteurs, à savoir : l'étude de leur stabilité thermique vis à vis de perturbations localisées.

## **2 - PROBLEMES DE STABILITE THERMIQUE POUR LES SUPRACONDUCTEURS**

### **2 - 1 Introduction du modèle**

Certaines causes d'instabilité thermique du supraconducteur peuvent être combattues par la stabilisation dite préventive :

Il s'agit d'une mise en oeuvre de composites multifilamentaires supraconducteurs (CMS) : composite constitué de fils supraconducteurs finement taillés (de l'ordre de 50 microns) à travers une matrice peu résistive et de grande capacité thermique.

Parallèlement à la stabilisation préventive, un autre type de stabilisation est utilisé afin d'assurer la transition inverse du matériau supra de l'état normal à l'état supraconducteur : c'est la stabilisation cryostatique.

La grande variété de contraintes liées à la stabilisation des supraconducteurs (lois de seuil pour différents paramètres notamment) fait qu'il est très difficile d'en élaborer une théorie générale. Cependant d'après [MAILFERT A./1 et MEURIS C./1] il semble que l'on puisse obtenir déjà un bon nombre d'indications pratiques en étudiant l'équation (1) de la chaleur suivante :

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} C \frac{\partial T}{\partial t} - \text{div} ( \vec{\mathbb{K}} \cdot \vec{\text{grad}} T ) = G - Q \\ \text{conditions aux frontières et conditions initiales} \end{array} \right.$$

où  $C$ ,  $k$ ,  $G$  et  $Q$  dépendant a priori de la température, représentent respectivement :

- la chaleur spécifique volumique du conducteur
- la conductivité thermique longitudinale du conducteur
- la puissance calorique dissipée par unité de volume du conducteur
- la puissance calorique échangée entre le conducteur et le milieu extérieur (bain cryogénique) par unité de volume du conducteur.

La caractéristique de ce problème est la compétition entre les termes  $Q$  et  $G$  dont les allures sont explicitées sur le schéma (figure 2) ci dessous pour une intensité de courant  $I$  et un champ magnétique  $H$  fixés.

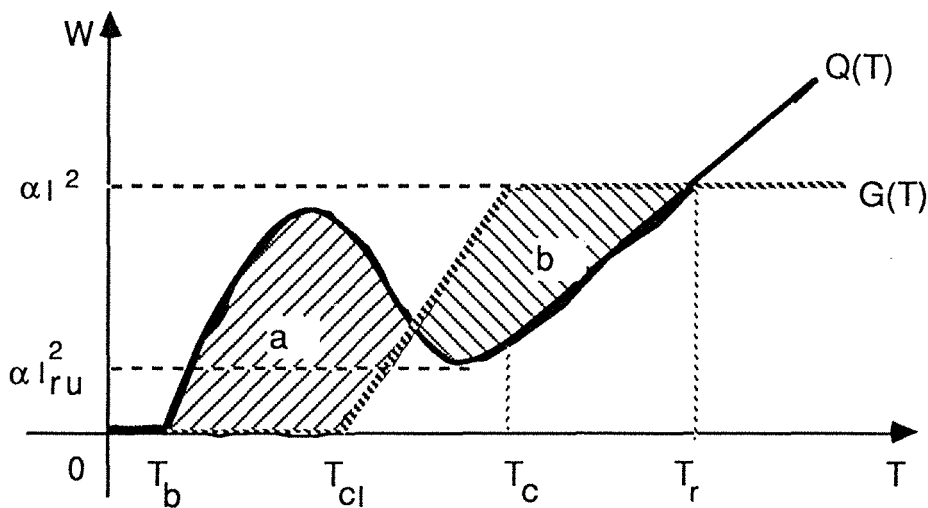


figure 2 : allure des termes source (puissance thermique  $W$ ) du problème (1)

Remarquons que la fonction puissance calorique  $G$  varie en fonction de  $T$  de manière quasi linéaire. Elle est nulle pour une température inférieure à  $T_{cl}$  (température critique correspondant à l'intensité  $I$  pour un champ  $H$  fixé) c'est l'état supra ; d'une manière linéaire pour une température de transition (comprise entre  $T_{cl}$  et  $T_c$ ) et quasiment constante et proportionnelle au carré de l'intensité  $I$  pour  $T$  supérieure à  $T_c$ .

## 2 - 2 Quelques critères de stabilité des supraconducteurs

Parmi les critères de stabilités élaborés pour la mise en oeuvre des supraconducteurs citons :

### 2-2-A Critère de Stekly

Dans l'application de ce critère, le CMS est élaboré de façon à ce que  $G$  soit partout inférieur à  $Q$  quelle que soit la température. Ce critère nécessite une importante stabilisation cryogénique, c'est à dire que le composite doit être alors conçu de manière à présenter une



faible résistivité électrique dans l'état normal. De plus l'intensité du courant doit rester inférieure à une intensité notée  $I_{ru}$  appelée courant de récupération uniforme. On parle de récupération lorsque le conducteur ayant transité à l'état normal avec une certaine température retrouve après un certain temps son état supraconducteur. Cette récupération est uniforme lorsqu'elle ne dépend pas de la température.

$I_{ru}$  est bien entendu inférieure à l'intensité critique  $I_c$  (voir diagramme figure 1,  $I_c$  est proportionnel à  $J_c$ ) du supraconducteur.

Ce critère est malheureusement très restrictif pour l'intensité  $I_{ru}$  en l'occurrence (voir à ce propos par exemple MEURIS1&2 ; WIPF/1; BAYNHAM-EDWARDS & DEAN/1). Aussi préfère-t-on l'utilisation d'autres critères que nous allons maintenant énumérer.

## 2-2-B Critère des aires égales de MADDOCK

Alors que le critère de Stekly assure une stabilité globale du système pour une intensité inférieure au courant de récupération uniforme  $I_{ru}$ , le critère des aires égales de MADDOCK quant à lui permet une intensité  $I_r$  bien supérieure mais il limite le domaine de températures admissibles à un seuil  $T_r$ ; lequel seuil est défini par l'égalité des aires (a) et (b) (voir figure 2)

On définit la température  $T_r$  par la relation (2) suivante :

$$(2) \quad \int_0^{T_r} k(T) [Q(T) - G(T)] dT = a - b = 0$$

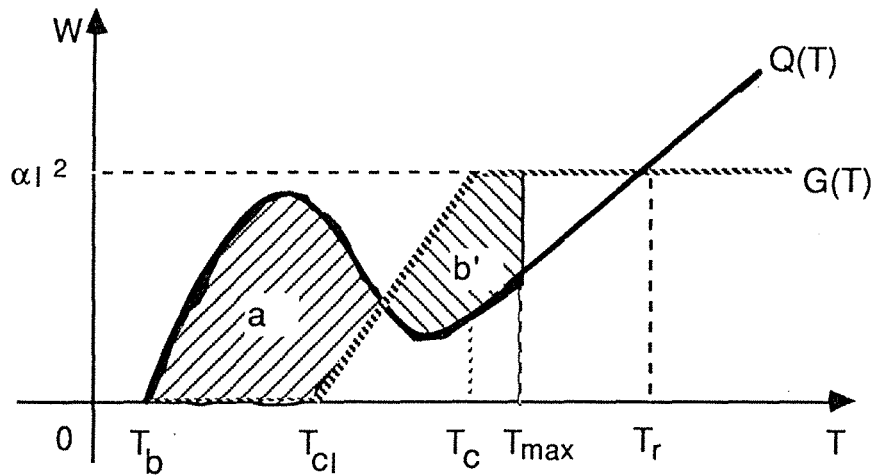
Pour des installations où l'on sollicite une intensité de courant supérieure au courant de récupération  $I_r$  ( $a < b$ ); il y a une propagation éventuelle de la zone du conducteur ayant transité à l'état normal suivant la perturbation à laquelle est soumise le conducteur.

On étend le critère des aires égales par la détermination d'une température critique  $T_{max}$  telle que :

$$(3) \quad \int_0^{T_{max}} k(T) [Q(T) - G(T)] dT = 0$$

$T_{max}$  est la température maximale de la zone minimale se propageant (ZMP). Cette ZMP correspond à une solution stationnaire instable du problème (1).

(cf figure 3 ci-dessous)



**Figure 3 : Détermination de la température critique  $T_{\max}$**

Ce critère a également son extension dans le cas où le conducteur présente une région non refroidie ( $Q$  nulle dans la portion de conducteur concernée). La température maximale  $T_{\max}$  admissible est dans ce cas restreinte par la longueur de la zone non refroidie. Le second membre de la relation (3) n'est plus nul mais proportionnel au carré de la puissance dissipée dans la zone non refroidie.

Remarque : Dans le cas où le critère de MADDOCK n'est pas vérifié (pour des perturbations "assez courtes" notamment) une analyse de la ZMP s'avère alors nécessaire. La ZMP définirait selon des constatations expérimentales et numériques une frontière des zones d'attraction de la solution supra.

Les critères ci-dessus énumérés supposent une possibilité illimitée du réfrigérant, c'est à dire que  $Q$  est indépendant du temps, ils ne sont donc valables que pour un système autonome.

C. MEURIS , P. TURCK, SEYFERT, CLAUDET et PARRAIN ont étudié et mis en évidence dans le cas d'un volume limité d'Hélium superfluide noté  $He_{II}$  de nouveaux critères s'adaptant aux cas de perturbations thermiques soit brèves et à forte énergie, soit à faible énergie mais d'une durée plus grande [cf MEURIS /2 ; CLAUDET-MEURIS/1 ; CLAUDET-MEURIS-PARRAIN & TURCK/1 ; MEURIS-TURCK-SEYFERT & CLAUDET/1]

Enfin notons que dans le cas où  $Q$  est affine par morceaux, des études ont montré l'existence d'une ZMP dont l'énergie détermine la zone d'attraction de la solution supra. L. DRESNER a, par exemple, mis en évidence une "résistance critique accidentelle" permettant

d'assurer la stabilité d'un supraconducteur métastable dans le cas d'une perturbation brève et localisée. Cette étude, faite pour un conducteur de longueur infinie souligne le rôle important joué par  $T_{\max}$  comme borne supérieure de domaine d'attraction de l'attracteur supra (cf DRESNER/1).

### 3 - CONCLUSION

Comme nous venons de le voir, la complexité de la cryostabilisation des supraconducteur confère à chaque problème une particularité. On pourrait même dire que chaque système est un cas d'espèce. Une étude plus générale de la stabilité est toutefois un point de départ permettant d'apporter des améliorations sur les plans théoriques et pratiques dans la mise en oeuvre du supraconducteur. Ainsi justifions nous l'importance du travail théorique dont le présent mémoire ne constitue qu'une base de départ.

## **CHAPITRE II**

**--ooOoo--**

### **FORMULATION MATHEMATIQUE DU PROBLEME ET PREMIERES REMARQUES**

**CHAPITRE II****FORMULATION MATHÉMATIQUE DU PROBLÈME  
ET PREMIÈRES REMARQUES****Objet du chapitre**

Dans le chapitre précédent, nous faisons le point sur les problèmes rencontrés à propos de la stabilité des équilibres thermiques des supra. L'objet de ce chapitre sera de préciser des hypothèses conduisant à un problème général de diffusion relativement simple et bien posé. Ce problème ne sera en fait qu'une équation de la chaleur dans laquelle le facteur source, dépendant de la solution de façon non linéaire, est stationnaire.

Bien entendu, l'abord de ce problème d'évolution de type parabolique nous conduira dans un premier temps à étudier les solutions d'équilibre du point de vue de leur existence, de l'unicité et de leur stabilité.

Après une analyse adimensionnelle succincte qui nous aura permis de dégager les groupements adimensionnels intervenant dans le problème, nous exposerons quelques propriétés intrinsèques et générales de l'ensemble admissible des solutions d'équilibre.

On notera enfin que certains groupements adimensionnels jouent un rôle déterminant dans le comportement du système.

**1 - PRESENTATION GÉNÉRALE DU PROBLÈME****1-1 Description générale**

Le travail porte sur l'équation de la chaleur obtenue en faisant le bilan énergétique dans un domaine élémentaire de l'ensemble cryogénique  $\Omega$  (CMS-réfrigérant). On est conduit à l'EDP suivante :

(1)

$$\begin{cases} C \frac{\partial T}{\partial t} - \text{div}(\vec{\kappa} \cdot \vec{\text{grad}} T) - W = 0 & \text{dans } \Omega \\ \text{Conditions aux limites de type Fourier et Dirichlet} \\ \text{Conditions initiales} \end{cases}$$

où :

.  $T(\underline{X}; t')$  représente le champ de température.

.  $C$  est la chaleur volumique du CMS

.  $t'$  représente le temps et  $\underline{X}$  la position spatiale.

.  $\overline{\mathbb{K}}$  est le tenseur de conductivité thermique

( $\overline{\mathbb{K}} \equiv k \mathbf{1}$  dans le cas d'un milieu isotrope) Nous admettrons par la suite qu'il dépend éventuellement de la température.

. Le terme  $C \frac{\partial T}{\partial t'}$  représente la quantité d'énergie interne accumulée dans le domaine élémentaire par unité de temps.

.  $\overline{\mathbb{K}} \cdot \vec{\text{grad}} T$  est l'expression de la densité de flux de chaleur entrant par conduction dans le domaine élémentaire de volume.

.  $W$  représente le facteur source-densité volumique d'énergie par unité de temps.  
(cf- MEURIS C-1; GERMAIN P.)

A cette équation générale aux dérivées partielles, nous allons apporter quelques hypothèses simplificatrices afin de nous ramener pour une première étape à une situation relativement simple.

### 1-2 Description du cas traité et hypothèses simplificatrices

Dans le cas particulier qui nous intéresse, certaines hypothèses complémentaires seront apportées.

a°/ Nous traiterons le conducteur comme un conducteur filiforme et donc unidirectionnel. Cette considération est rendue possible lorsque l'on suppose la température uniforme à travers une section du CMS. C'est le cas lorsque le diamètre de la section droite du conducteur est très petite devant sa longueur.

- Ainsi, seule la conductivité thermique longitudinale interviendra dans l'équation, l'effet transverse du gradient de température ayant été négligé. La densité volumique d'énergie, les conditions aux limites latérales (de type Fourier) ayant été incorporées au niveau de la section droite du conducteur et de sa frontière deviennent linéiques et entrent en compétition dans le terme source de l'équation. Reste à prendre en compte les conditions de Dirichlet aux deux extrémités du conducteur qui sont maintenues à la température du bain.

Dans la suite nous supposerons le milieu homogène. Par ailleurs nous allons considérer les grandeurs  $C$  et  $k$  comme indépendantes de la température et par conséquent comme constantes.

Toutes ces considérations étant admises, les équations (1) peuvent s'écrire pour un conducteur de longueur  $L$  :

$$\begin{array}{lcl}
 (a) & C \frac{\partial T}{\partial t'}(X, t') - k \frac{\partial^2 T}{\partial X^2}(X, t') = G(T) - Q(T) & \text{dans } ] 0 ; L [ \text{ et } ] 0 ; + \infty [ \\
 (2) & T(0, t') = T(L, t') = T_b & \forall t' > 0 \\
 (c) & T(X, 0) = T_0(X) & \forall X \in [ 0 ; L ]
 \end{array}$$

Nous poserons par la suite :

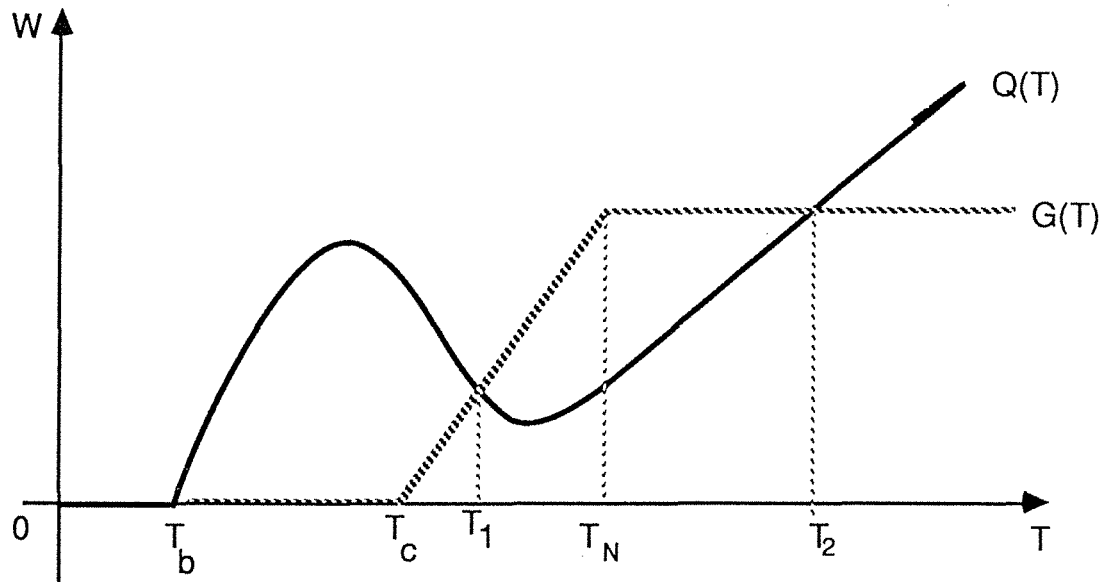
$$(3) \quad \boxed{H(T) = G(T) - Q(T)}$$

-  $T_0(X)$  représente en fait une perturbation de la température par rapport à celle du bain cryogénique.

-  $G(T)$  est la puissance énergétique linéique produite par effet Joule dans le CMS et

-  $Q(T)$  est la fonction échange, puissance calorifique (linéique) absorbée par le réfrigérant.

$Q$  et  $G$  ont les allures représentées ci-dessous.



**Figure 1** Allure des courbes de densité de puissance calorifique produite par effet Joule ( $G$ ) ou absorbée par le bain ( $Q$ )

Afin de simplifier la manipulation de nos équations, nous allons dans le paragraphe suivant effectuer une analyse dimensionnelle. Cette étude nous permettra de faire apparaître des groupements adimensionnels caractéristiques de notre problème.

## 2 - ANALYSE DIMENSIONNELLE ET EQUATIONS REDUITES

Cette étude dimensionnelle sera menée à partir des équations (2).

Parmi les quatre grandeurs étalons généralement utilisées dans les problèmes thermiques (voir par exemple GERMAIN/1 et /2) deux s'imposent d'emblée :  $L$  et l'écart  $T_2 - T_b$ , ce dernier va se révéler par la suite comme l'écart maximal de température "utile".

Effectuons donc le changement de variables :

$$(4) \quad \begin{array}{l} (a) \quad t = \frac{t'}{\tau} ; x = \frac{X}{L} \\ (b) \quad \theta(x;t) = \frac{T(X;t') - T_b}{T_2 - T_b} \end{array}$$

Les symboles  $t$ ,  $x$  et  $\theta$  représentent respectivement les variables et inconnue réduites ;

le temps caractérisant  $\tau$  est arbitraire pour le moment.



Les équations (2) peuvent donc s'écrire après simplification par  $\frac{k}{L^2} (T_2 - T_b)$

$$(5) \quad \boxed{\frac{CL^2}{k\tau} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial t} - \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \frac{L^2}{k(T_2 - T_b)} \bar{H}(\theta)} \quad \text{avec}$$

$$(6) \quad \boxed{\bar{H}(\theta) = H((T_2 - T_b)\theta + T_b)}$$

Ces relations nous incitent à choisir pour temps caractéristique :

$$(7) \quad \boxed{\tau = \frac{CL^2}{k}}$$

et à poser :

$$(8) \quad \boxed{f(\theta) = \frac{L^2}{k(T_2 - T_b)} \bar{H}(\theta) \quad \text{avec}}$$

$$(9) \quad \boxed{\bar{H}(\theta) = \bar{G}(\theta) - \bar{Q}(\theta) = G((T_2 - T_b)\theta + T_b) - Q((T_2 - T_b)\theta + T_b)}$$

de manière à obtenir le problème simplifié suivant :

Trouver  $\theta(x, t)$  défini sur  $]0; 1[ \times ]0; +\infty[$  tel que

$$(10) \quad \boxed{\begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial t} - \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} &= f(\theta) \quad ; \quad 0 < x < 1 ; t > 0 \\ \theta(0; t) &= \theta(1; t) = 0 \quad \forall t > 0 \\ \theta(x; 0) &= \theta_0(x) \quad \forall x \in [0; 1] \\ \theta_0 \text{ étant défini par : } \theta_0(x) &= \frac{T_0(Lx) - T_b}{T_2 - T_b} \\ \text{et } t, x, \theta \text{ et } f \text{ définis respectivement par (4) ; (6) et (8)} \end{aligned}}$$

Remarques II-1

a°/ Notons que les trois zéros de la fonction  $f(\theta)$  sont  $0 ; \theta_1 ; \theta_2$  tels que

$$(11) \quad \theta_0 = 0, \quad \theta_1 = \frac{T_1 - T_b}{T_2 - T_b} \quad \text{et} \quad \theta_2 = 1$$

b°) On désignera si nécessaire par  $g(\theta)$  et  $q(\theta)$  respectivement les versions réduites de  $G(T)$  et  $Q(T)$  de telle sorte que :

$$(12) \quad \boxed{f(\theta) = g(\theta) - q(\theta)}$$

c°) On a fait l'hypothèse ici que  $W$ , donc  $H$ ,  $\bar{H}$  et  $f$  ne dépendent pas explicitement de la position du point sur le conducteur. Ceci ne sera pas le cas lorsqu'on tiendra compte d'une distribution de supports (nécessaires pour maintenir le conducteur dans la position souhaitée) qui viendra perturber le bon fonctionnement de l'échange avec le bain réfrigérant.

d) Ces transformations ont été obtenues de la façon la plus naturelle qui soit. Nous constatons une forte similitude avec les analyses de W. NICK [cf NICK/1]

e°) On peut aisément à partir des transformations opérées ci-devant représenter l'allure  $f$  en fonction de  $\theta$ .

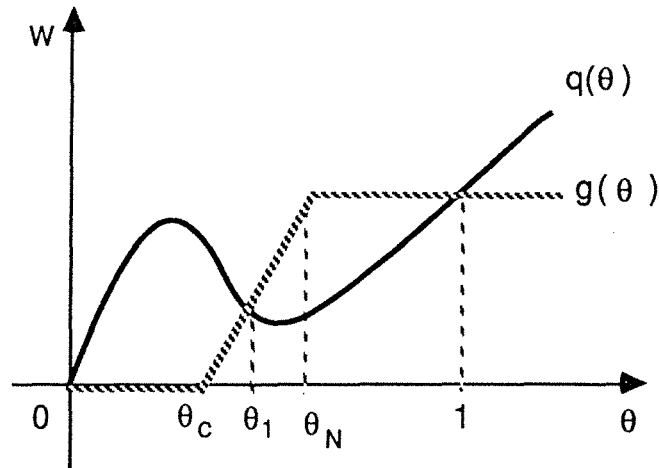


Fig 2a

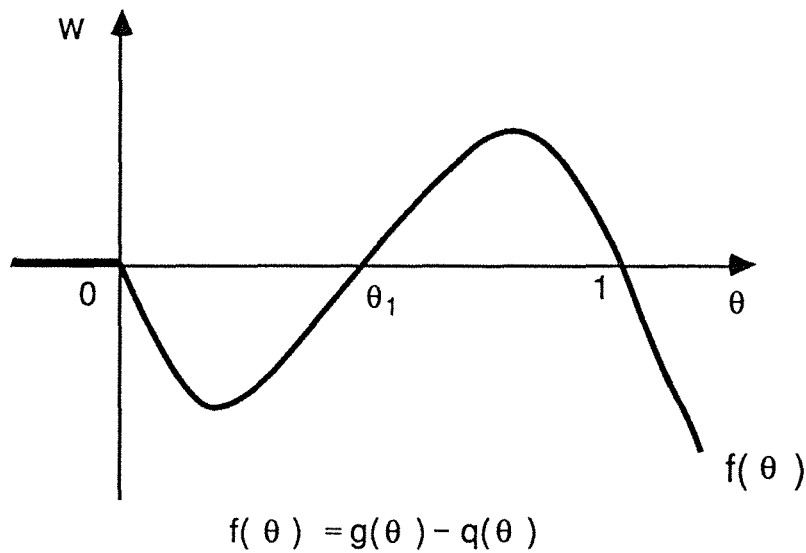


Fig 2b

FIGURES 2 : Allure du terme source  $f(\theta)$ 

Nous prolongerons  $f$  dans  $\mathbb{R}_-$  par la fonction nulle. Il est à remarquer que  $f(\theta)$  est presque partout dérivable sauf en 3 points  $0$ ,  $\theta_c$  et  $\theta_N$  où elle admet des dérivées à droite et à gauche ; une conséquence de ceci est que :  $f$  est globalement lipschitzienne sur tout intervalle borné.

Comme nous le soulignons, le but de notre étude est de poser des bases théoriques pour élaborer et/ou affiner certains critères de stabilité. Etant donné que la détermination des solutions stationnaires stables de l'équation thermique dans le CMS offre une voie de résolution du problème [ voir AMMAN/1; ARIS/1 ; SATTINGER/1 et /2] nous nous orienterons pour commencer vers une détermination des solutions stationnaires des relations (10).

L'étude consistera d'abord à chercher les conditions d'existence et d'unicité des solutions stationnaires. Nous nous engagerons ensuite dans l'analyse de leur stabilité.

Avant d'entreprendre l'étude des conditions d'existence et d'unicité des solutions stationnaires du problème (10), laquelle sera abordée au chapitre III, il est utile de dégager quelques propriétés a priori des champs d'équilibre thermique autres que  $\theta \equiv 0$ .

### **3 - REMARQUES GENERALES SUR LES PROPRIETES A PRIORI DES CHAMPS D'EQUILIBRE THERMIQUE DU CMS.**

#### **3.1. Préliminaire**

Avec les notations du précédent paragraphe, les solutions d'équilibre (ou stationnaire) du problème (10) sont les fonctions  $\theta(x)$  deux fois dérivables et satisfaisant :

$$(13) \quad \begin{cases} \theta''(x) + f(\theta(x)) = 0 & \text{sur } ]0; 1[ \\ \theta(0) = \theta(1) = 0 \end{cases}$$

où  $f(s)$  sera considérée comme une fonction lipschitzienne en  $\theta(x)$  pour  $x$  dans  $[0; 1]$  ayant 3 zéros : 0 ;  $\theta_1$  et 1 dans  $\mathbb{R}_+$  ; nulle dans  $\mathbb{R}_-$ . De plus  $f$  admet un seul minimum et un seul maximum relatifs respectivement sur  $]0; \theta_1[$  et  $]\theta_1; 1[$ . Au delà de 1,  $f(s)$  est strictement monotone décroissante vers  $-\infty$ .

On voit immédiatement, du fait que  $f(0) = 0$ ,  
que le problème (13) admet la solution triviale ( $\theta \equiv 0$ )

Nous nous posons alors la question de savoir si le problème admet des solutions non triviales (autre que 0). Et dans l'affirmative que peut-on en dire a priori.

#### **3-2 Propriétés générales a priori des solutions non triviales.**

2-a Les solutions du problème (13) avec  $f$  définie aux remarques II-1 sont positives

En effet on sait que le support de  $f$  est  $\mathbb{R}_+$ .

Posons :

$$\theta_+(x) = \max(0; \theta(x))$$

$$\theta_-(x) = -\min(0; \theta(x))$$

alors  $\theta = \theta_+ - \theta_-$  et en multipliant l'équation (13) par  $\theta_-$  on obtient :

$$\theta''(x) \theta'(x) + f(\theta(x)) \theta'(x) = 0$$

dont l'intégration entre 0 et 1 nous conduit à  $\int_0^1 [\theta'(x)]^2 dx = 0$  c'est à dire que  $\theta_1$  est constante. Mais  $\theta$  est continue et nulle sur les bords, cela indique que  $\theta_1$  est nulle ; d'où le résultat.

## 2-b Existence d'un maximum

Toute solution non triviale  $\theta(x)$  admet au moins un maximum relatif

De plus on a :

$$(14) \quad \theta'(0) \geq 0 \quad \text{et} \quad \theta'(1) \leq 0$$

Ces résultats découlent directement de la positivité de  $\theta$ , de sa continuité et du fait que  $\theta(0) = \theta(1) = 0$

## 2-c Propriété de convexité et conséquences

Toute solution  $\theta$  non triviale du problème (13), si elle existe est :  
 - convexe pour tout  $x$  tel que  $\theta(x) \in ]0 ; \theta_1 [$  ou  $]1 ; +\infty [$   
 - concave pour tout  $x$  tel que  $\theta(x) \in ]\theta_1 ; 1[$ .

En effet :

$$f(\theta(x)) \leq 0 \quad \text{pour} \quad 0 \leq \theta(x) \leq \theta_1 \quad \text{ou} \quad 1 \leq \theta(x)$$

et

$$f(\theta(x)) > 0 \quad \text{pour} \quad \theta(x) \in ]\theta_1 ; 1[.$$

Ce qui indique que  $\theta''(x)$  est positive (respectivement négative) pour  $\theta(x)$  dans  $[0 ; \theta_1] \cup [1 ; +\infty [$  (respectivement dans  $]\theta_1 ; 1[$ ).

Les conséquences d'une telle propriété sont les suivantes :

### i/ Encadrement des extréma

Si  $\theta(x)$  est une solution non triviale du problème (13) alors tout maximum relatif de  $\theta$  est dans l'intervalle  $]\theta_1 ; 1[$

En effet  $\theta(x)$  étant deux fois dérivable (donc  $C^1$ ) dans  $]0, 1[$ , un maximum relatif  $\theta(x_0)$  de  $\theta(x)$  exige que l'on ait  $\theta''(x) \leq 0$  (dans un voisinage de  $x_0$ ). Cela montre à l'évidence que  $\theta(x_0)$  est dans l'intervalle  $]\theta_1; 1]$  ou  $\theta'' \equiv 0$  puisque

$$\left. \begin{array}{l} \theta''(x) = -f(\theta(x)) \leq 0 \\ \text{dans un voisinage de } x_0 \end{array} \right\} \Rightarrow \theta_1 < \theta(x_0) \leq 1 \text{ ou } \theta'' \equiv 0 \text{ c'est à dire } \theta \equiv 0$$

On a donc  $\theta_1 < \theta(x_0) \leq 1$  (cf existence des extréma et illustration sur la figure 3 ci-après).

On montre de même que :

les minima relatifs de  $\theta(x)$  s'ils existent sont dans l'intervalle  $[0; \theta_1[$ .

Nous tirons une conséquence intéressante de ces encadrements qui est la suivante :

ii°) Conséquence de l'encadrement des extréma

La seule solution du problème (13) partout inférieure à  $\theta_1$  est la solution triviale ; toutes les autres ont un maximum dans  $]\theta_1; 1]$ .

Sinon, elle serait alors convexe, positive et s'annulant aux bords ; ce qui est impossible.

En fait cette dernière propriété jouera un rôle important dans l'étude de la stabilité du CMS par rapport aux petites perturbations.

2-d Propriété de pente de toute solution non triviale aux extrémités 0 et 1

La pente à l'origine de toute solution non triviale est strictement positive . ( $\theta'(0) > 0$ ) de même la pente en 1 est strictement négative

En effet si  $\theta'(0) = 0$ , le problème (13) se ramène à un problème de Cauchy :

$$(15) \quad \begin{cases} \theta''(x) + f(\theta(x)) = 0 \\ \theta'(0) = 0 \\ \theta(0) = 0 \end{cases}$$

On sait que  $f$  est globalement lipschitzienne et qu' alors dans ces conditions (cf théorème d'unicité globale de Peano Picard) le problème (15) a une solution unique. Mais nous connaissons cette solution unique c'est  $\theta \equiv 0$ .

( Pour plus d'informations voir par exemple DAUTRAY-LIONS JL./1 ou HARTMAN P./1)

Par le même raisonnement, en effectuant le changement de variable  $y = 1-x$  on est conduit à :

$$(\theta'(1) < 0)$$

c'est à dire que la pente à l'extrémité pour toute solution non triviale est non nulle

Enoncé du théorème :

Soit le problème de Cauchy :

Trouver  $\vec{y}$  tel que :

$$(*) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d\vec{y}}{dx} = \vec{g}(x; \vec{y}) \\ \vec{y}(x_0) = \vec{y}_0 \end{array} \right. \quad \text{dans } \Omega$$

si  $\vec{g}$  est localement lipschitzienne en  $\vec{y}$  sur  $\Omega$  tout entier, alors la solution du problème de Cauchy (\*) est globalement unique dans  $\Omega$ .

Il suffit de prendre :

$$\left\{ \begin{array}{ll} y_1 = \theta & g_1(x, \vec{y}) = y_2 \\ y_2 = \theta' & g_2(x, \vec{y}) = f(y_1) \end{array} \right. \quad \text{avec } \vec{y} = (y_1; y_2)$$

et le problème (15) se ramène à (\*) avec  $x_0 = 0$

## 2-e Propriété de symétrie

Si  $\theta(x)$  est solution du problème (13), sa symétrisée par rapport à  $\frac{1}{2}$  l'est également

En effet, soit  $v(x)$  la symétrisée de  $\theta(x)$  alors :

$$v(x) = \theta(1-x) \text{ d'où } v'(x) = -\theta'(1-x) \text{ et}$$

$$v''(x) = \theta''(1-x).$$

En posant  $y = 1-x$  on voit donc que :

$$\theta''(y) + f(\theta(y)) = 0 \quad \forall y \in ]0; 1[ \text{ est équivalent à }$$

$$v''(x) + f(v(x)) = 0 \quad \forall x \in ]0; 1[$$

et que de plus

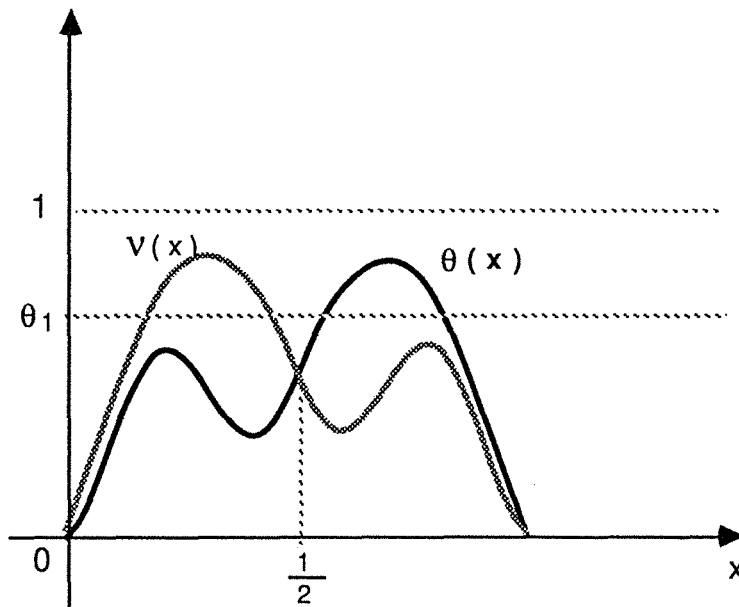
$$v(1) = \theta(0) = 0$$

$$v(0) = \theta(1) = 0$$

ce qui prouve que  $v(x)$  est aussi donc la solution du problème (13).

Nous montrerons en fait par la suite que les solutions du problème (13) sont symétriques.

Les résultats obtenus dans ce paragraphe 3 peuvent être illustrés par la figure (3) ci-après.



**fig. 3 : Représentation des propriétés a priori de toute solution non triviale**



#### 4 - CONCLUSION DU CHAPITRE

Ce chapitre préliminaire, nous a permis d'obtenir un problème modèle simple pour lequel l'allure du terme source va être cruciale pour l'existence, l'unicité et la stabilité des solutions éventuelles du problème de départ.

La seule hypothèse faite est que  $f$  est  $C^1$  par morceaux sur  $[0 ; 1]$  ; Cela entraîne son caractère lipschitzien. Cette hypothèse est somme toute conforme à la réalité physique du problème. Elle est donc justifiée.

Une des remarques essentielles à faire est que les solutions éventuelles du problème (les champs de températures réduites) sont bornées par 1. Cela signifie que la température physique ne dépassera pas un certain seuil :  $T_2$  correspondant au plus grand zéro du terme source.

Nous disposons désormais d'un aperçu général des éventuelles solutions stationnaires du problème (10). Les investigations pour la recherche de ces solutions devront avoir pour point de départ ces considérations.

## **CHAPITRE III**

**--ooOoo--**

### **EXISTENCE ET NOMBRE DES EQUILIBRES THERMIQUES POSSIBLES**

**CHAPITRE III**
**EXISTENCE ET NOMBRE DES EQUILIBRES  
THERMIQUES POSSIBLES**
**Objet du chapitre**

Dans ce chapitre dont certaines démarches sont inspirées de l'article de MAGINU.K, nous mettons en évidence une intégrale première de l'équation différentielle qui régit les états d'équilibres du composite supraconducteur ; de là nous obtenons :

i) Des propriétés supplémentaires a priori des éventuelles solutions stationnaires non triviales.

ii) Une condition nécessaire et suffisante d'existence de solutions stationnaires non triviales.

iii) Des informations sur l'existence effective de telles solutions en fonction d'une part de l'allure du terme source normalisé, d'autre part de son amplitude qui peut être caractérisée par le groupement adimensionnel :

$$\lambda^2 = \frac{2 L^2}{k(T_2 - T_b)} \int_0^1 \{ G [(T_2 - T_b) s + T_b] - Q [(T_2 - T_b) s + T_b] \} ds$$

où  $L$ ,  $k$ ,  $T_2$ ,  $T_b$ ,  $G$  et  $Q$  sont les grandeurs physiques du problème. (cf début du chapitre II)

**1 - MISE EN EVIDENCE D'UNE INTEGRALE PREMIERE ET CONSEQUENCES.****1-1 Construction d'une intégrale première**

Reprenons le problème (13) du chapitre II à savoir : trouver  $\theta$  dans  $C^2 ] 0;1[ )$  telle que :

$$(1) \quad \begin{array}{l} (a) \quad \theta''(x) + f(\theta(x)) = 0 \quad \text{dans } ] 0;1[ \\ (b) \quad \theta(0) = \theta(1) = 0 \end{array}$$

Après multiplication des membres de l'équation par  $\theta'(x)$ , on obtient :

$$\frac{1}{2} [(\theta'(x))^2]' + f(\theta(x)) \theta'(x) = 0$$

En introduisant :

$$(2) \quad F(\omega) = 2 \int_0^{\omega} f(s) ds$$

qui est encore une donnée du problème, on a alors :

$$[(\theta')^2 + F(\theta)]' = 0$$

et par intégration nous sommes conduits à la relation

$$(3) \quad [\theta']^2 = D - F(\theta)$$

où  $D$  est une constante a priori arbitraire. Cependant le fait que  $[\theta'(x)]^2$  soit positif ou nul et  $F(\theta(0)) = 0$  implique :

$$(4) \quad D = [\theta'(0)]^2 \geq \sup_{0 \leq x \leq 1} F(\theta(x)) \geq 0$$

Par ailleurs  $D = 0$  entraînerait  $\theta'(0) = 0$ . Ce cas est à exclure pour une solution non triviale d'après la propriété (2-c) du précédent chapitre.

Nous avons donc :

$$(5) \quad D > 0$$

La relation (3) nous indique également que l'on a :

$$(6) \quad \theta'(x) = (\text{sgn} \theta') \sqrt{D - F(\theta(x))}$$

où " $\text{sgn} \theta'$ " désigne le signe de la pente de  $\theta$  au point d'abscisse  $x$ .

Quelques remarques sur ce signe sont utiles :

REMARQUES III-1

i) On peut préciser les signes de  $\theta'(0)$  et  $\theta'(1)$  ; en effet on sait :

- que  $\theta'(0) \neq 0$  et  $\theta'(1) \neq 0$

- que  $\theta(0) = \theta(1) = 0$

et enfin que  $\theta(x) \geq 0$  pour tout  $x$  dans  $[0 ; 1]$

Cela implique  $\theta'(0) > 0$  et  $\theta'(1) < 0$

D'où :

$$\theta'(x) = \sqrt{D - F(\theta(x))} \quad \text{au voisinage de } 0$$

$$\theta'(x) = -\sqrt{D - F(\theta(x))} \quad \text{au voisinage de } 1$$

ii) La pente de  $\theta(x)$  est nulle en tout extremum. C'est une conséquence de la régularité exigée pour  $\theta'$ . Les extrema  $\theta_E$  doivent donc vérifier :  $D = F(\theta_E)$ . De là on tire, en faisant la comparaison avec la relation (4) :

$$(7) \quad \boxed{D = [\theta'(0)]^2 = F(\theta_E) = \sup_{x \in [0 ; 1]} F(\theta(x)) > 0}$$

Ainsi  $D$  est à la fois relié à la pente à l'origine de la solution et à ses extrema.

Une analyse plus approfondie de la relation (6) nous permet de tirer de plus amples informations sur la solution à condition d'étudier les variations de  $F(\omega)$ .

1-2 Etude de la variation de fonction  $F(\omega)$  primitive de  $2f(\omega)$ .

Rappelons que  $f(\omega)$  est définie par la figure 2 -Chap II- et que :

$$F(\omega) = 2 \int_0^{\omega} f(s) ds$$

Ainsi suivant le signe de  $f(\omega)$  nous avons pour  $F(\omega)$  la variation suivante dans le cas où  $F$  admet un second zéro :  $\omega_1$

|             |                                                                                                  |            |            |   |   |   |
|-------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|------------|---|---|---|
| $\omega$    | 0                                                                                                | $\theta_1$ | $\omega_1$ | 1 |   |   |
| $f(\omega)$ | 0                                                                                                | -          | 0          | + | 0 | - |
| $F(\omega)$ | <pre>graph TD; A["F(0) = 0"] --&gt; B["F(θ₁) &lt; 0"]; B --&gt; C["F(1)"]; C --&gt; D[" "]</pre> |            |            |   |   |   |

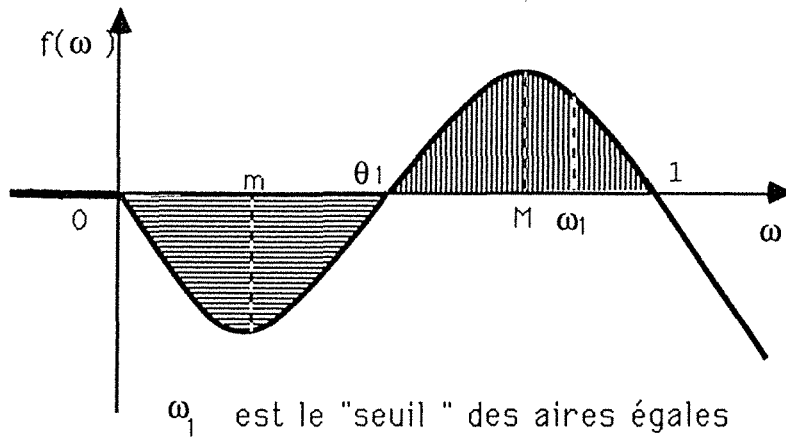
Notons que

$$F(\theta_1) = 2 \int_0^{\theta_1} f(s) \, ds < 0$$

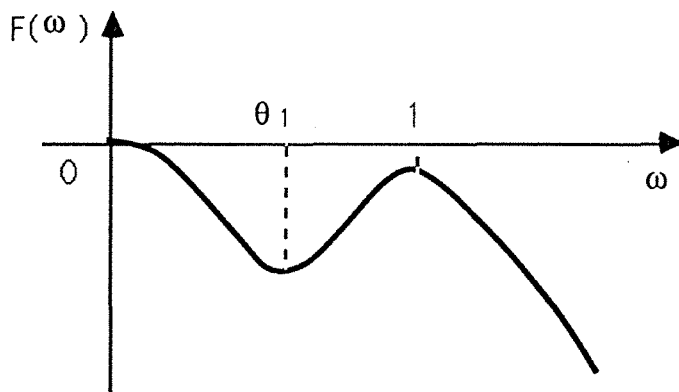
$$F(1) = 2 \int_0^1 f(s) \, ds \quad \text{peut a priori être positive ou négative.}$$

voir illustration en figures 1-a-b-c

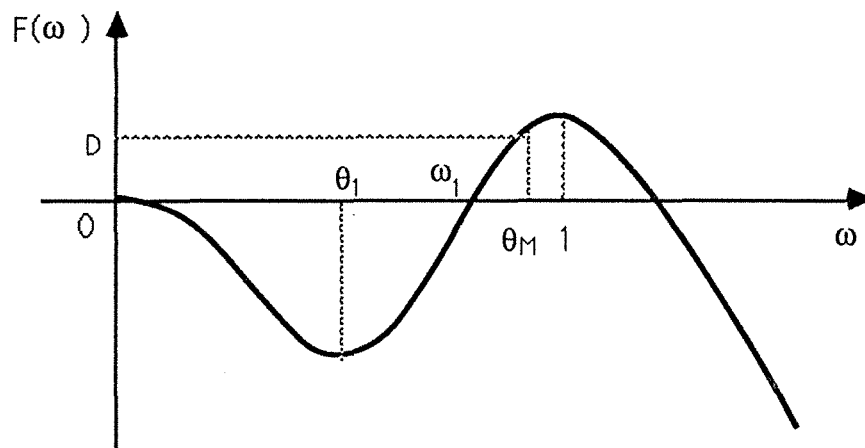
Nous avons donc :  $0 \leq \sup_{x \in [0,1]} F(\theta(x)) = \max(0 ; F(\theta_M))$  car  $\theta_M \in ]\theta_1 ; 1]$ .



**FIGURE 1 -a** : Allure du terme source  $f(\omega)$



**FIGURE 1-b** : Cas où  $F(1) < 0$



**FIGURE 1-c** : Cas où  $F(1) \geq 0$

### 1-3 Premières conséquences de l'étude de l'intégrale première

Nous pouvons dès à présent énoncer sur les données une condition nécessaire d'existence d'une solution non triviale pour le problème (1) . De plus nous obtenons une information importante sur l'allure de cette solution :

#### Proposition 1

1°/ Si  $F(1) \leq 0$  , le problème (1) n'admet qu'une solution, la solution triviale.  
 2°/ Si  $F(1) > 0$ , l'existence d'une solution non triviale est a priori possible.  
 Dans ce cas cette solution admet un et un seul maximum  $\theta_M$  et  $\theta_M$  est dans l'intervalle  $] \omega_1; 1[$ .

#### Justification et commentaires

On part des relations (3) et (7) à savoir :

$$(\theta')^2 = D - F(\theta) \text{ pour } \theta \neq 0$$

$$D = [\theta'(0)]^2 = F(\theta_E) > 0 \text{ . avec } \theta_E \text{ extremum de } \theta$$

Selon le chapitre II- § 3-2, toute solution non triviale possède au moins un maximum  $\theta_M > 0$ . Le tableau de variation de  $F$  nous montre que  $F(1)$  est le seul maximum de  $F$  autre que  $F(0) = 0$ .

Ce qui amène à :

- Si  $F(1) \leq 0$ , alors pour toute solution non triviale  $\theta$  on a  $F(\theta(x)) < 0$  ( $x \neq 1$  et  $x \neq 0$ ).

Ceci rend impossible la relation (7).

La seule solution possible dans ce cas est la solution triviale  $\theta \equiv 0$  .

Ce cas de figure correspond en fait à la situation où l'aire algébrique définie par la courbe de  $f$  et l'axe des abscisses est négative ou nulle (cf figure -1-a-). Lorsque  $F(1) = 0$ , cette aire est nulle et les aires géométriques comprises respectivement entre 0 et  $\theta_1$  d'une part et  $\theta_1$  et 1 d'autre part sont égales. Ce seuil déterminera par la suite un critère de stabilité. Le critère des aires égales de MADDOCK.



- Si  $F(1) > 0 : \exists \omega_1 \in ] 0; 1[$  tel que  $F(\omega_1) = 0$  ; la relation (7) devient possible et  $\theta_E$  appartient nécessairement à l'intervalle  $] \omega_1 ; 1[$  . Par ailleurs  $\omega_1 > \theta_1$  et l'on sait (d'après le Chap II § 3-2b) que les seuls extrema contenus dans  $] \omega_1 ; 1[$  sont des maxima.

L'unicité du maximum vient du fait que l'existence de plusieurs maxima entraîne celui d'au moins un minimum. Or l'existence d'un minimum  $\theta_m$  est à exclure. En effet on aurait alors  $D = F(\theta_m) = F(\theta_M)$  (cf relation (7))

Cette dernière relation est impossible puisque  $\theta_m < \theta_1 < \omega_1 < \theta_M$  c'est à dire que  $F(\theta_m) < 0$  et  $F(\theta_M) > 0$  (toujours d'après le même paragraphe) .

Pour ce maximum  $\theta_M$  on a :

$$(7) \text{ bis } \quad \boxed{D = [\theta'(0)]^2 = F(\theta_M) > 0}$$

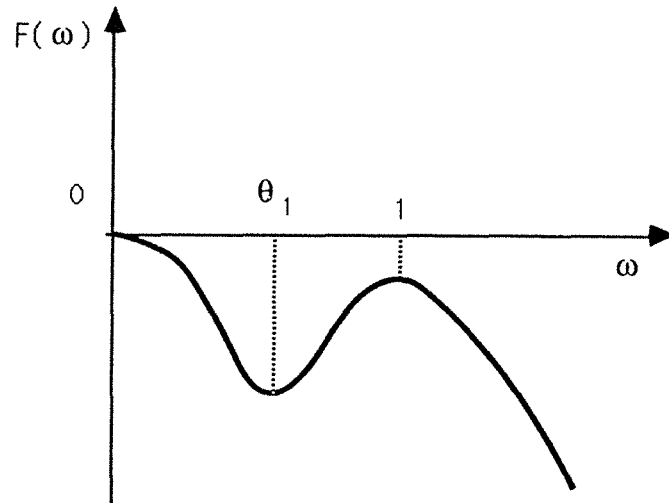
#### 1-4 Conclusions et illustrations

Cette première étude des propriétés de l'intégrale première permet de tirer les conclusions suivantes :

a/ Si  $F(1) \leq 0$  le problème (II-5) admet une seule solution, la solution triviale  $\theta \equiv 0$

b/ Toute solution non triviale du problème (1) si elle existe admet un seul maximum strictement compris entre  $\omega_1$  et 1.

c/ Illustration des différentes allures possibles de  $\theta$  suivant les valeurs de  $F(1)$  et  $D = F(\theta_M)$  (ci-après)



La solution correspondante est la solution triviale.

FIGURE 2-a : Cas où  $F(1) \leq 0$

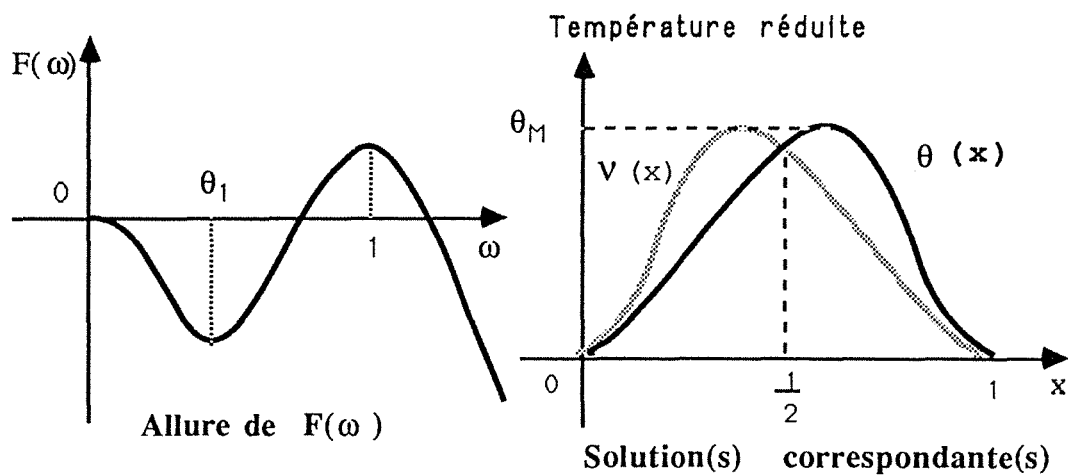


FIGURE 2-b : Cas où  $F(1) > 0$

Nous venons de voir les allures possibles des solutions non triviales éventuelles suivant la valeur de  $F(1)$ .

Dans le paragraphe suivant, nous allons mettre en évidence des conditions d'existence et d'unicité de ces solutions.

## 2 - CONDITIONS D'EXISTENCE DE SOLUTIONS NON TRIVIALES

Nous avons pu noter dans l'étude préliminaire de l'intégrale première (cf commentaires et illustration, sous paragraphe 1-4 du présent chapitre) que de telles solutions ne sont possibles que si  $F(1)$  est strictement positif.

Voyons à présent les conditions nécessaires et suffisantes d'existence de ces solutions.

### 2-1- Conditions nécessaires d'existence

Nous supposons l'existence d'une solution  $\theta(x)$  du problème (1) non triviale ayant  $\theta_M$  comme unique maximum en l'abscisse  $x_M$  ; c'est à dire que nous avons  $\theta(x_M) = \theta_M$ .

Rappelons le problème (1) :

$$\begin{cases} \frac{d^2\theta}{dx^2}(x) + f(\theta(x)) = 0 & \text{sur } ]0;1[ \\ \theta(0) = \theta(1) = 0 \end{cases}$$

$\theta(x)$  étant deux fois dérivable donc  $C^1([0,1])$  on a :  $\theta'(x_M) = 0$ .

De plus l'étude de l'intégrale première nous a révélé l'existence de  $D = F(\theta_M) > 0$  telle que (voir la relation (6) et remarque III-1) :

$$(8) \quad \begin{cases} \theta'(x) = \sqrt{F(\theta_M) - F(\theta(x))} & \text{sur } [0 ; x_M] \\ \theta'(x) = - \sqrt{F(\theta_M) - F(\theta(x))} & \text{sur } [x_M ; 1] \end{cases}$$

Les relations (8) peuvent s'écrire :  $dx = \frac{\pm d\theta}{\sqrt{F(\theta_M) - F(\theta)}}$

Une intégration nous conduit à :

$$(9) \quad \begin{cases} a & \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{\theta(x)}{\int_0^{\theta(x)} \frac{ds}{\sqrt{F(\theta_M) - F(s)}} \quad \text{si } x \in [0; x_M] \\ \\ b & \left\{ \begin{array}{l} x = 1 - \frac{\theta(x)}{\int_0^{\theta(x)} \frac{ds}{\sqrt{F(\theta_M) - F(s)}} \quad \text{si } x \in [x_M; 1] \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Afin que ces relations soient compatibles pour assurer la continuité de  $x$ , il est nécessaire qu'en  $x_M$  on ait :

$$(10) \quad \boxed{x_M = \frac{\theta(x_M) = \theta_M}{\int_0^{\theta_M} \frac{ds}{\sqrt{F(\theta_M) - F(s)}} = \frac{1}{2}}$$

Nous pouvons donc énoncer la proposition suivante :

Proposition 2

Une condition nécessaire pour que le problème (1) ait une solution non triviale est qu'il existe  $\eta$  dans  $] \omega_1; 1 [$  tel que :

$$(11) \quad \int_0^{\eta} \frac{ds}{\sqrt{F(\eta) - F(s)}} = \frac{1}{2}$$

De plus cet  $\eta$  est le maximum de cette solution.

Il nous faut maintenant voir si cette condition suffit à assurer l'existence d'une solution du problème (1)

Nous achèverons ensuite le paragraphe par une étude de la multiplicité des solutions  $\eta$  du problème (11). Nous montrerons entre autres que cette multiplicité correspond au nombre exact de solutions non triviales du problème (1) . Cela suppose qu'à chaque solution  $\eta$  du problème (11) correspond une solution unique du problème (1).

## 2-2 Conditions suffisantes d'existence

Soit  $\eta$  strictement compris entre  $\omega_1$  et 1, solution éventuelle de (11). On pose :

$$(12) \quad g_{\eta}(\omega) = \int_0^{\omega} \frac{ds}{\sqrt{F(\eta) - F(s)}}$$

(Pour la convergence de cette intégrale se reporter au § 5-4 du présent chapitre)

Ce qui nous permet d'énoncer le résultat suivant :

**Lemme 2-1** A toute solution  $\eta$  du problème (11) correspond une fonction  $\theta_{\eta}(x)$ , unique solution du problème (13) suivant :

$$(13) \quad \begin{cases} g_{\eta}(\theta_{\eta}(x)) = x & \forall x \in [0; \frac{1}{2}] \\ g_{\eta}(\theta_{\eta}(x)) = 1 - x & \forall x \in [\frac{1}{2}; 1] \end{cases}$$

et de plus on a :

$$(14) \quad \sup_{x \in [0; 1]} \theta_{\eta}(x) = \eta = \theta_{\eta}(\frac{1}{2})$$

### Preuve du Lemme 2-1

En effet soit  $\eta$  solution du problème (11), alors  $g_{\eta}$  et  $G_{\eta} \stackrel{\text{déf}}{=} 1 - g_{\eta}$  sont des applications positives et définies sur  $[0, \eta]$

De plus :

$$* g_{\eta}(0) = 0 \text{ et } G_{\eta}(0) = 1$$

$$* g_{\eta}(\eta) = G_{\eta}(\eta) = \frac{1}{2} \text{ par hypothèse (cf la relation (11))}$$

$$\text{Par ailleurs : } g'_{\eta}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{F(\eta) - F(\omega)}} = -G'_{\eta}(\omega) > 0 \text{ pour } \omega \in [0; \eta[$$

D'où la bijectivité de ces 2 applications  $g_\eta$  et  $G_\eta$  de  $[0, \eta]$  respectivement sur les intervalles  $[0, \frac{1}{2}]$  et  $[\frac{1}{2}; 1]$

Ainsi à tout  $x$  de  $[0, \frac{1}{2}]$  correspond un nombre et un seul désigné par  $\theta_\eta(x)$  tel que  $g_\eta(\theta_\eta(x)) = x$  et à tout  $x$  de  $[\frac{1}{2}; 1]$  correspond un nombre et un seul que nous désignons encore par  $\theta_\eta(x)$  tel que  $G_\eta(\theta_\eta(x)) = 1 - g_\eta(\theta_\eta(x)) = x$

La croissance de  $g_\eta$  entre 0 et  $\eta$  implique celle de  $\theta_\eta$  entre 0 et  $\frac{1}{2}$ . De même la décroissance de  $G_\eta$  entraîne celle de  $\theta_\eta$  de  $\eta$  à 0 sur l'intervalle  $[\frac{1}{2}; 1]$ . D'où la relation (14).

Ceci achève la démonstration du lemme.

Reste à montrer la coïncidence entre la solution unique du problème (13) (lorsqu'elle existe) et celle du problème de départ (1). Ce que nous énonçons par la proposition 3.

#### Proposition 3

A chaque éventuelle solution  $\eta$  du problème (11) correspond une solution et une seule  $\theta_\eta$  du problème (13). Elle coïncide avec celle du problème (1) et son maximum a pour abscisse  $\frac{1}{2}$ .

$$\text{De plus } \eta = \sup_{x \in [0; 1]} \theta_\eta(x)$$

#### Preuve

Considérons  $\eta$  solution du problème (11) soit alors  $\theta_\eta$  la solution unique du problème (13) correspondant. On sait qu'elle existe d'après le lemme 2-1.

De plus  $g_\eta(\theta_\eta(0)) = g_\eta(\theta_\eta(1)) = 0$  et la correspondance biunivoque entre  $[0; \eta]$  et  $[0; \frac{1}{2}]$  établie par la fonction  $g_\eta$  (strictement monotone sur  $[0; \eta]$  dans  $[0; \frac{1}{2}]$ ) entraîne :

$$\theta_\eta(0) = \theta_\eta(1) = 0.$$

Par ailleurs  $\theta_\eta(x)$  est continue de  $[0; \frac{1}{2}]$  sur  $[0; \eta]$  puis de  $[\frac{1}{2}; 1]$  sur  $[\eta; 0]$ . Ceci est une conséquence de la continuité de  $g_\eta$  et donc de  $1 - g_\eta$ . La continuité en  $\frac{1}{2}$  est évidente.

Ainsi nous venons de montrer qu'en fonction des hypothèses, les conditions aux limites (1) b sont réalisées de même que la continuité de la solution  $\theta_\eta$ .

Nous aurons achevé la démonstration de la proposition si nous prouvons que  $\theta_\eta$  satisfait la relation (1) a.

A partir des relations (13) on obtient :

$$\begin{cases} g_{\eta}'(\theta_{\eta}(x)) \theta_{\eta}'(x) = 1 & \text{pour } x \in [0; \frac{1}{2}[ \\ g_{\eta}'(\theta_{\eta}(x)) \theta_{\eta}'(x) = -1 & \text{pour } x \in ]\frac{1}{2}; 1] \end{cases}$$

Or d'après la relation (12) :

$$g_{\eta}'(\omega) = \frac{1}{\sqrt{F(\eta) - F(\omega)}}$$

D'où nous tirons :

$$(15) \quad \begin{cases} \theta_{\eta}'(x) = \sqrt{F(\eta) - F(\theta_{\eta}(x))} & \forall x \in [0; \frac{1}{2}] \\ \theta_{\eta}'(x) = -\sqrt{F(\eta) - F(\theta_{\eta}(x))} & \forall x \in [\frac{1}{2}; 1] \end{cases}$$

Par ailleurs d'après les relations (11), (13) et (12) (relation définissant  $g_{\eta}(\omega)$ ) nous avons :

$$g_{\eta}(\eta) = \frac{1}{2} \quad \text{c'est à dire } \theta_{\eta}(\frac{1}{2}) = \eta$$

La relation (15) ci-dessus nous permet alors de dire que  $\theta_{\eta}'(\frac{1}{2}) = 0$ . Ceci montre bien la dérivabilité de la solution  $\theta_{\eta}(x)$  sur  $[0; 1]$ .

Dérivons ensuite (15) par rapport à  $x$ , nous obtenons :

$$\theta_{\eta}''(x) = -\frac{f(\theta_{\eta}(x))}{\sqrt{F(\eta) - F(\theta_{\eta}(x))}} \theta_{\eta}'(x) \quad \text{sur } [0; \frac{1}{2}[$$

$$\theta_{\eta}''(x) = \frac{f(\theta_{\eta}(x))}{\sqrt{F(\eta) - F(\theta_{\eta}(x))}} \theta_{\eta}'(x) \quad \text{sur } ]\frac{1}{2}; 1]$$

Ce qui nous conduit après avoir remplacé  $\theta_{\eta}'(x)$  par son expression (cf relation (15)) à :

$$\theta_{\eta}''(x) + f(\theta_{\eta}(x)) = 0 \quad \text{pour } x \in [0; \frac{1}{2}[ \cup ]\frac{1}{2}; 1]$$

Quant à la détermination de  $\theta''_{\eta}(\frac{1}{2})$  il nous suffit de la prendre par prolongement continu.

En effet :

$$\theta''_{\eta}(x) = -f(\theta_{\eta}(x)) \text{ est bien défini et admet en } x = \frac{1}{2} \text{ une limite : } -f(\eta)$$

On pose donc  $\theta''_{\eta}(\frac{1}{2}) = -f(\eta)$

Ce qui nous permet d'affirmer que :

$$\theta''_{\eta}(x) + f(\theta_{\eta}(x)) = 0 \text{ pour tout } x \text{ dans } [0 ; 1]$$

Cette dernière égalité étant montrée la relation (1) a se trouve vérifiée. Ce qui achève la démonstration de la proposition 3.

Ainsi nous venons de voir que si le problème (11) admet une solution  $\eta$  comprise entre  $\omega_1$  et 1, à cette solution  $\eta$  correspond une solution unique  $\theta_{\eta}$  du problème (13) qui coïncide avec la solution du problème (1) ayant pour maximum  $\eta$ .

Voyons à présent les propriétés de symétrie et la multiplicité de telles solutions.

### **3 - MULTIPLICITE ET PROPRIETES DES SOLUTIONS DU PROBLEME (1)**

#### **3-1 Symétrie de la solution du problème (1)**

Nous avons mis en évidence aux propositions 2 et 3 que si le problème (1) admettait une solution non triviale, son maximum était en l'abscisse  $\frac{1}{2}$ . Est-elle alors symétrique par rapport à  $\frac{1}{2}$ ?

Soit  $\theta(x)$  une solution non triviale du problème (1). Nous venons de voir qu'elle coïncide avec celle du problème (13) à savoir :

$$(13) \quad \begin{cases} g_{\eta}(\theta(x)) = x & \text{pour } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ g_{\eta}(\theta(x)) = 1 - x & \text{pour } \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

$$\text{avec } \eta = \sup_{x \in [0 ; 1]} \theta(x)$$



Il suffit donc de montrer que  $\theta(x) = \theta(1 - x)$  pour tout  $x$  dans  $[0 ; 1]$

- Soit alors  $x \in [0 ; \frac{1}{2}]$  alors  $1 - x \in [\frac{1}{2} ; 1]$  et réciproquement

On a d'après les relations (13) :

$$g_{\eta}(\theta(x)) = g_{\eta}(\theta(1 - x)) = x$$

Ce qui compte tenu de l'injectivité de  $g_{\eta}$  entraîne  $\theta(x) = \theta(1 - x)$ , d'où l'énoncé suivant :

Toute solution du problème (1) admet un unique maximum en  $\frac{1}{2}$  et est symétrique

On aurait pu s'attendre à ce résultat (voir LIONS PL./1 ou LUSS D./1 ; GIDAS B., WEI-MING NI. & et NIREMBERG L./1 ; LIONS PL. & TROMBETTI/1. )

### 3 -2 Correspondance entre le nombre de solutions du problème (11) et celui du problème (1)

Nous avons vu qu'à un  $\eta$  donné solution du problème (11) il correspondait une solution unique du problème (13) et donc du problème (1). (cf proposition 3)

Compte tenu du fait qu'alors  $\eta = \sup_{x \in [0 ; 1]} \theta(x) = \theta(\frac{1}{2})$  nous déduisons que  $\eta$  est unique

pour chaque solution donnée (car le sup est unique).

On peut donc établir une correspondance biunivoque entre les solutions non triviales du problème (1) et celles du problème (11).

L'objet du sous paragraphe à venir sera de montrer que l'on peut munir l'ensemble des solutions du problème (1) d'une relation d'ordre et que cet ensemble est totalement ordonné.

### 3 -3 Relation d'ordre

Considérons la relation d'ordre suivante :

Définition : Nous dirons qu'une solution  $\theta$  est strictement supérieure à une autre solution  $\varphi$  sur  $[0 ; 1]$  si pour tout  $x$  dans  $]0 ; 1[$  on a  $\theta(x) > \varphi(x)$  presque partout.

Remarquons que  $\theta$  et  $\varphi$  sont au moins  $C^1$  ce qui entraîne  $\theta(x) > \varphi(x)$  partout dans  $]0 ; 1[$

Après cette définition, nous pouvons énoncer la proposition suivante :

Proposition 4

L'ensemble des solutions  $\theta_\eta$  est totalement ordonné par  $\eta$ .

Preuve de la proposition 4

Elle part de la proposition 3. Considérons en effet  $\eta_1; \eta_2$  d'éventuelles solutions du problème (11) telles que  $\eta_1 < \eta_2$ . Soient  $\theta_{\eta_1}; \theta_{\eta_2}$  les solutions correspondantes du problème (1). Alors nous montrons que  $\theta_{\eta_1} < \theta_{\eta_2}$ .

Nous avons :  $\eta_1 = \theta_{\eta_1}(\frac{1}{2}) < \theta_{\eta_2}(\frac{1}{2}) = \eta_2$

Supposons que l'on n'ait pas  $\theta_{\eta_1} < \theta_{\eta_2}$  alors il existerait  $x_0$  dans  $]0; 1[$  tel que :

$$\theta_{\eta_1}(x_0) = \theta_{\eta_2}(x_0) \neq 0;$$

d'après les relations (13) nous aurions :

$$g_{\eta_1}(\theta_{\eta_1}(x_0)) = g_{\eta_2}(\theta_{\eta_2}(x_0)).$$

Mais nous savons que :

$\eta \longmapsto g_\eta(\omega)$  est injective pour  $\omega$  donné non nul.

$$\text{En effet : } \frac{\partial g_\eta(\omega)}{\partial \eta} = - \int_0^\omega \frac{f(\eta)}{[F(\eta) - F(s)]^{3/2}} ds < 0 \quad \text{pour } \omega > 0;$$

comme  $\eta \in ]\omega_1; 1[$  alors  $f(\eta) > 0$  et  $F(s) \leq F(\eta) = \sup_{\omega_1 < s \leq \eta} F(s)$

$\eta \longmapsto g_\eta(\omega)$  est donc strictement monotone.

Cette injectivité entraîne  $\eta_1 = \eta_2$  d'où une contradiction avec le fait que  $\eta_1 \neq \eta_2$ .

On en déduit que si deux solutions du problème (1) coïncident en un point  $x_0$  intérieur à  $]0; 1[$  alors elles coïncident partout.

Deux solutions différentes du problème (1) ne peuvent donc s'entrecouper. (cf illustration ci-dessous)

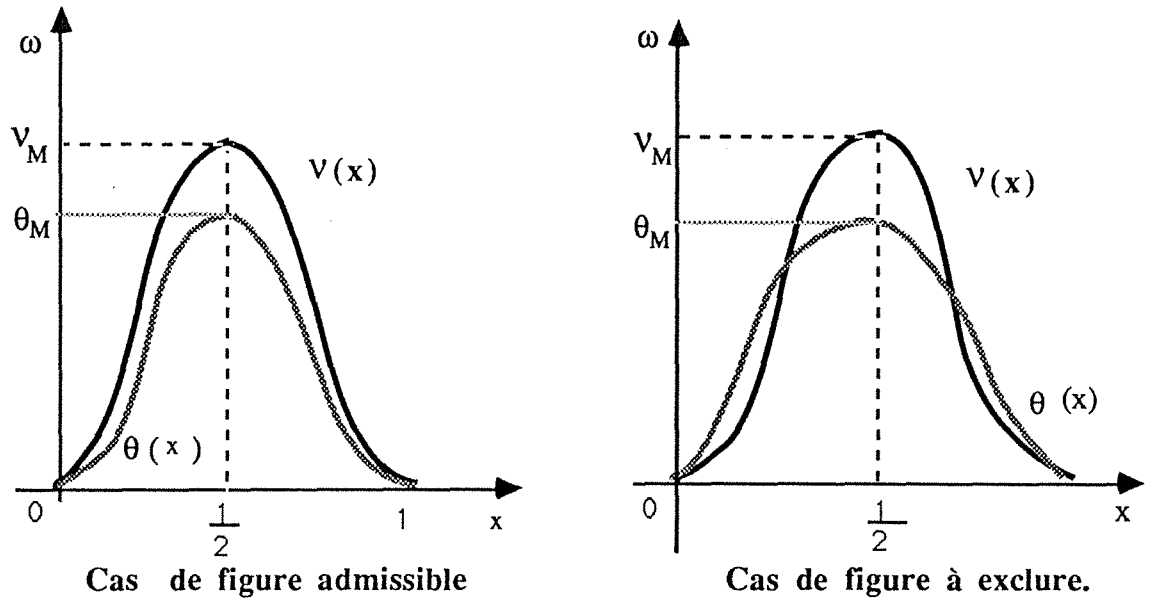


Figure 3 : Position relative d'éventuelles solutions du problème (1)

Nous pouvons à présent faire le point sur les conditions d'existence et d'unicité des solutions du problème (1) et énoncer le théorème suivant :

#### 4- CONCLUSION PARTIELLE

Au terme de la première étude des conditions d'existence, nous pouvons traduire les conclusions par le théorème ci-dessous :

##### Théorème 1

Le problème (1) admet une solution non triviale (ayant  $\eta$  pour maximum) si et seulement si :

\* d'une part  $F(1) > 0$  ;  $F$  étant définie par  $F(s) = 2 \int_0^s f(u) du$

\* d'autre part il existe  $\eta$  dans  $] \omega_1 ; 1[$  tel que

$$(11) \quad \int_0^{\eta} \frac{ds}{\sqrt{F(\eta) - F(s)}} = \frac{1}{2}$$

- Cette solution coïncide avec la solution unique  $\theta_{\eta}$  du système d'équation implicites :

$$(13) \quad \begin{cases} g_{\eta}(\theta_{\eta}(x)) - x = 0 & \text{sur } [0; \frac{1}{2}] \\ g_{\eta}(\theta_{\eta}(x)) + x - 1 = 0 & \text{sur } [\frac{1}{2}; 1] \end{cases}$$

$$\text{pour } g_{\eta}(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^{\omega} \frac{ds}{\sqrt{F(\eta) - F(s)}}$$

- De plus :

i/ A chaque valeur de  $\eta$  correspond une solution et une seule du problème (1) et réciproquement

avec  $\sup_{x \in [0; 1]} \theta_{\eta}(x) = \eta$

ii/ Chaque solution  $\theta_{\eta}$  est symétrique par rapport à  $x = \frac{1}{2}$  et l'on a  $\theta_{\eta}(\frac{1}{2}) = \eta$

iii/ Les solutions du problème (1) sont totalement ordonnées par leurs maxima.

Par ailleurs si  $F(1) \leq 0$  le problème (1) n'admet que la solution triviale ( $\theta \equiv 0$ ). Le problème (11) n'est pas défini dans ces conditions.

Reste donc à étudier l'existence et le nombre des solutions  $\eta$  telles que :

$$J(\eta) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^{\eta} \frac{ds}{\sqrt{F(\eta) - F(s)}} = \frac{1}{2} ;$$

ce qui sera l'objet du paragraphe suivant.

## **5 - NOMBRE D'ETATS D'EQUILIBRE POSSIBLES EN FONCTION DES PARAMETRES DU PROBLEME.**

### **5 -1 Introduction : Rappels**

On cherche donc dans ce paragraphe le nombre de solutions du problème suivant :

$$(16) \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \eta \in ] \omega_1 ; 1 [ \text{ tel que :} \\ \int_0^{\eta} \frac{ds}{\sqrt{F(\eta) - F(s)}} = \frac{1}{2} \end{array} \right.$$

Afin de faire apparaître les paramètres physiques qui vont régir le comportement thermique du CMS, il est bon de rappeler la définition de  $F$  :

$$(17) \quad F(s) = 2 \int_0^s f(t) dt \quad ; \quad F(1) > 0 \text{ avec}$$

$$(18) \quad \begin{cases} f(s) = \frac{L^2}{k(T_2 - T_b)} \bar{H}(s) & \text{pour } s \geq 0 \\ 0 & \text{pour } s \leq 0 \end{cases}$$

avec

$$(19) \quad \bar{H}(s) = G[(T_2 - T_b)s + T_b] - Q[(T_2 - T_b)s + T_b]$$

### **REMARQUE III-5-1 :**

On sait que  $f(s)$  est adimensionnel mais on constate que ni la grandeur  $\bar{H}(s)$  ni le coefficient qui le précède ne le sont. Il y a donc lieu d'effectuer une normalisation afin de pouvoir écrire la fonction  $f$  sous la forme :

$$(20) \quad f(s) = \lambda^2 \varphi(s) \quad ; \quad \lambda > 0$$

Tel que  $\lambda$  et  $\varphi$  soient adimensionnels ;  $\lambda$  prenant en compte l'intensité du terme source  $f$  et  $\varphi$  son allure.

5-2 Mise en évidence de paramètres cruciaux pour le problème (nombre  $\lambda > 0$  ; fonction  $\varphi$  et fonctionnelle J)

Compte tenu du rôle fondamental de la quantité  $F(1)$  pour l'existence de solutions non triviales, il apparaît intéressant de poser :

$$(21) \quad \lambda^2 = F(1) = \frac{2L^2}{k(T_2 - T_b)} \int_0^1 \bar{H}(s) ds \quad \text{d'où}$$

$$(22) \quad \varphi(s) = \begin{cases} \frac{\bar{H}(s)}{1} & \text{pour } s \geq 0 \\ 2 \int_0^{\bar{H}(t)} dt & \\ 0 & \text{pour } s < 0 \end{cases}$$

On est donc amené à introduire :

$$(23) \quad \Phi(s) = 2 \int_0^s \varphi(t) dt = \frac{F(s)}{\lambda^2}$$

et à remplacer  $F$  par  $\Phi$  dans le problème (16) qui devient :

$$(24) \quad \begin{array}{l} \text{Trouver } \eta \in ]\omega_1; 1[ \text{ tel que :} \\ J(\eta) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^\eta \frac{ds}{\sqrt{\Phi(\eta) - \Phi(s)}} = \frac{\lambda}{2}; \lambda > 0 \text{ et} \\ \Phi(1) = 1 \end{array}$$

REMARQUE III-5-2 :

Pour chaque problème particulier on connaîtra explicitement  $\Phi$  et  $\lambda$ , donc le problème (24) pourra être traité numériquement. Cependant connaissant l'allure générale de  $\Phi$ , on va pouvoir ici donner des conditions sur les paramètres  $\lambda$  et  $\Phi$  (reliés au problème physique par les relations (19), (21), (22), et (23) pour que le problème (24) et donc le problème (1) de départ ait une ou plusieurs solutions non triviales.

REMARQUE III-5-3

On constate que : évaluer  $J(\omega) = \int_0^{\omega} \frac{ds}{\sqrt{\Phi(\omega) - \Phi(s)}}$

revient à déterminer une certaine aire ; il va donc être pratique de travailler avec des bornes fixes en introduisant le changement de variable :  $s = \omega t$  ; on a alors :

$$(25) \quad J(\omega) = \int_0^1 \frac{\omega dt}{\sqrt{\Phi(\omega) - \Phi(\omega t)}} \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^1 K(\omega, t) dt$$

d'où l'intérêt d'étudier les variations de  $K(\omega, t)$  et la convergence de l'intégrale  $J(\omega)$

5-3 Etudes intermédiairesA- Variation de l'intégrant  $K(\omega, t)$  ;  $\omega$  fixé

En nous référant aux variations de  $f$ ,  $F$  et donc de  $\Phi$  (car  $\Phi$  et  $F$  ont la même allure. cf § 1-2 du présent chapitre ) nous pouvons établir les tableaux ci- dessous. Notons que nous nous situons dans le cas où  $F(1) > 0$  c'est à dire  $\Phi(1) = 1$  seul cas intéressant pour cette étude.

a/ Tableau de variation de  $K(\omega, t)$  avec  $\omega$  fixé dans  $] \omega_1 ; 1[$

$$K(\omega, t) = K_\omega(t) = \frac{\omega}{\sqrt{\Phi(\omega) - \Phi(\omega t)}} ; \omega \in ] \omega_1 ; 1[$$

|                                                   |                                             |                                                           |                           |                    |
|---------------------------------------------------|---------------------------------------------|-----------------------------------------------------------|---------------------------|--------------------|
| t                                                 | 0                                           | $\frac{\theta_1}{\omega}$                                 | $\frac{\omega_1}{\omega}$ | 1                  |
| $\Phi(\omega)$                                    | $\Phi(\omega) = \text{constante} \in [0,1]$ |                                                           |                           |                    |
| $\Phi'(\omega t)$<br>$= 2\omega\varphi(\omega t)$ | 0                                           | -                                                         | 0                         | +                  |
| $\Phi(\omega t)$                                  | 0                                           | $\Phi(\theta_1) < 0$                                      |                           | $\Phi(\omega) < 1$ |
| $\Phi(\omega) - \Phi(\omega t)$                   | $\Phi(\omega) > 0$                          | $\Phi(\omega) - \Phi(\theta_1)$                           |                           | 0                  |
| $K_\omega(t)$                                     | $\frac{\omega}{\sqrt{\Phi(\omega)}}$        | $\frac{\omega}{\sqrt{\Phi(\omega) - \Phi(\theta_1)}} > 0$ |                           | $+\infty$          |

Pour l'allure de  $K_\omega(t)$  voir plus loin l'illustration graphique aux figures 4.



b/ Variation de  $K(\omega_1, t)$  ; et de  $K(1, t)$

$$K(\omega_1, t) = \frac{\omega_1}{\sqrt{1 - \Phi(\omega_1 t)}} ; \quad K(1, t) = \frac{1}{\sqrt{1 - \Phi(t)}}$$

|                                                              |           |                                           |            |           |
|--------------------------------------------------------------|-----------|-------------------------------------------|------------|-----------|
| t                                                            | 0         | $\frac{\theta_1}{\omega_1}$               | 1          |           |
| $K(\omega_1, t = \frac{\omega_1}{\sqrt{-\Phi(\omega_1 t)}})$ | $+\infty$ | $\frac{\omega_1}{\sqrt{-\Phi(\theta_1)}}$ | $+\infty$  |           |
| t                                                            | 0         | $\theta_1$                                | $\omega_1$ | 1         |
| $K(1, t) = \frac{1}{\sqrt{1-\Phi(t)}}$                       | 1         | $\frac{1}{\sqrt{1-\Phi(t)}}$              | 1          | $+\infty$ |

Voir illustration de l'allure de  $K(\omega, t)$  aux figures 4

c/ Illustrations graphiques des allures de  $K(\omega, t)$  pour  $\omega$  donné. (voir page suivante)

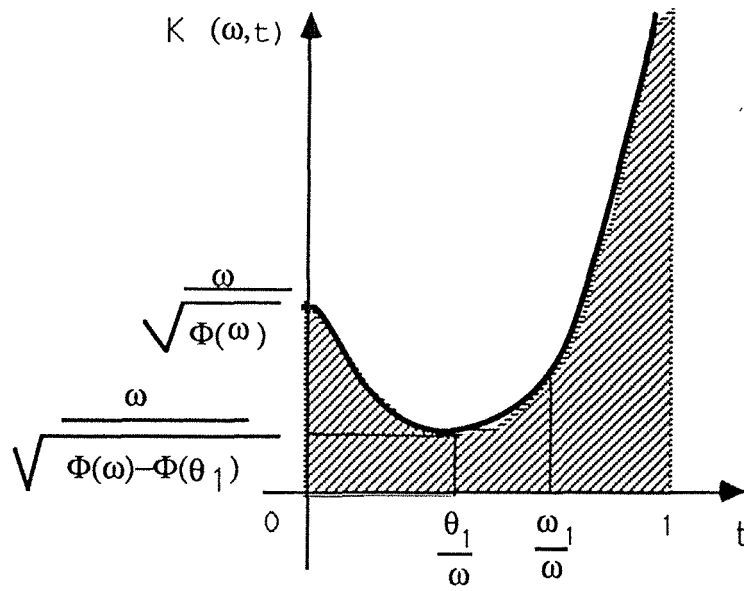


FIGURE 4-a :  $K(\omega, t)$  pour  $\omega_1 < \omega \leq 1$

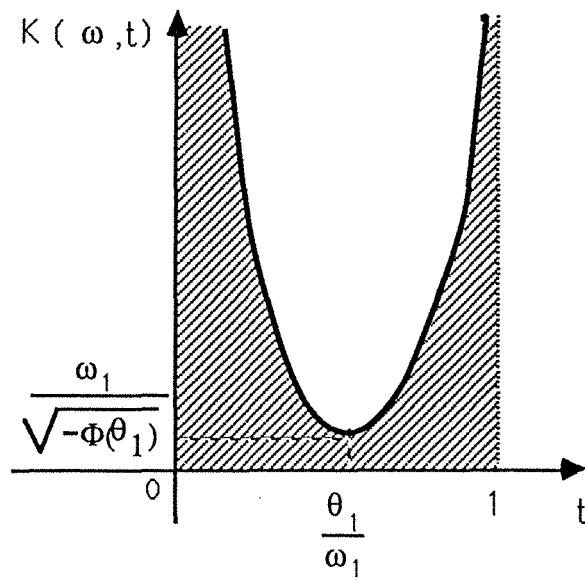


FIGURE 4-b :  $K(\omega, t)$  pour  $\omega = \omega_1$

FIGURES 4-a-b.

L'étude de l'intégrant nous a montré entre autres qu'il prenait des valeurs infinies au moins à l'une des deux extrémités de l'intervalle de variation de  $t$  ; une étude de la convergence de  $J(\omega)$  s'impose donc. C'est ce que nous abordons dans le paragraphe suivant.

### B- Convergence de $J(\omega)$

#### a/ $\omega_1 < \omega < 1$

$$J(\omega) = \int_0^1 \frac{\omega dt}{\sqrt{\Phi(\omega) - \Phi(\omega t)}} = \int_0^1 K(\omega, t) dt \quad \text{avec } \omega_1 < \omega < 1$$

L'étude des variations de  $K(\omega, t)$  pour  $\omega$  fixé nous a montré que cette quantité devenait infinie pour  $t = 1$  ; d'où la nécessité d'une étude particulière au voisinage de  $t = 1$ .

Effectuons pour ce faire un développement limité de Taylor au voisinage de 1 par rapport à la variable  $t$  ( $\omega$  étant fixé) à l'ordre 1 ou 2.  $\Phi(\omega t)$  est suffisamment régulière. ( $C^2$  par exemple)

$$\begin{aligned} \Phi(\omega t) &= \Phi(\omega) + 2\omega\varphi(\omega)(t-1) + \omega^2\varphi'(\omega)(t-1)^2 + \sigma(t-1)^3 \\ \text{d'où } \Phi(\omega) - \Phi(\omega t) &\approx 2\omega\varphi(\omega)[1-t] \end{aligned}$$

alors pour  $t$  voisin de 1

$$K(\omega, t) \approx \frac{\omega}{\sqrt{2(1-t)} \sqrt{\omega\varphi(\omega)}} \quad (\text{singularité d'ordre } (1-t)^{-1/2})$$

Ce qui indique que  $J(\omega)$  converge.

#### b/ Pour $\omega = 1$ ou $\omega = \omega_1$

on a des singularités supplémentaires car

$$J(1) = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1 - \Phi(t)}} \quad J(\omega_1) = \int_0^1 \frac{\omega_1 dt}{\sqrt{-\Phi(\omega t)}}$$

i) Détermination de J (1)

En nous référant au graphe  $K(1,t)$  ( voir § 5-3-b) nous déduisons que  $K(1, t)$  est fini sauf pour  $t = 1$ .

Un développement limité de  $K(1,t)$  au voisinage de 1 par rapport à la variable  $t$  nous indique que :

$$K(1,t) \approx \frac{1}{(1-t)\sqrt{-\varphi'(1)}}$$

Il est bien évident alors que  $J(1) = \int_0^1 K(1,t) dt$  diverge

ii - Détermination de J ( $\omega_1$ )

On a vu que  $K(\omega_1,t)$  tend vers l'infini à la fois pour  $t = 0$  et  $t = 1$

$$\begin{aligned} \text{- Au voisinage de } 0 \quad \Phi(\omega_1 t) &= 2 \omega_1 \varphi(0) t + \omega_1^2 \varphi'(0) t^2 \\ &= \omega_1^2 \varphi'(0) t^2 \end{aligned}$$

$$\text{- Au voisinage de } 1 \quad \Phi(\omega_1 t) \approx 2 \omega_1 \varphi(\omega_1) (1-t)$$

On constate que  $K(\omega,t)$  est de l'ordre de  $(1-t)^{-1/2}$  au voisinage de  $t = 1$  mais par contre de l'ordre de  $t^{-1}$  au voisinage de 0 ; d'où la conclusion que :

$$J(\omega_1) = \int_0^1 K(\omega_1,t) dt \quad \text{diverge}$$

Nous savons alors que  $J(\omega)$  continue prend des valeurs infiniment grandes aux voisinages de  $\omega_1$  et de 1. On peut donc affirmer que son minimum est atteint pour au moins une valeur  $\omega_m$  de  $]\omega_1 ; 1[$

C/ Conséquences des études précédentes

Les études précédentes de la variation de l'intégrant  $K(\omega,t)$  ainsi que la convergence de  $J(\omega)$  nous confèrent à  $J(\omega)$  le profil ci-après illustré par la figure 5

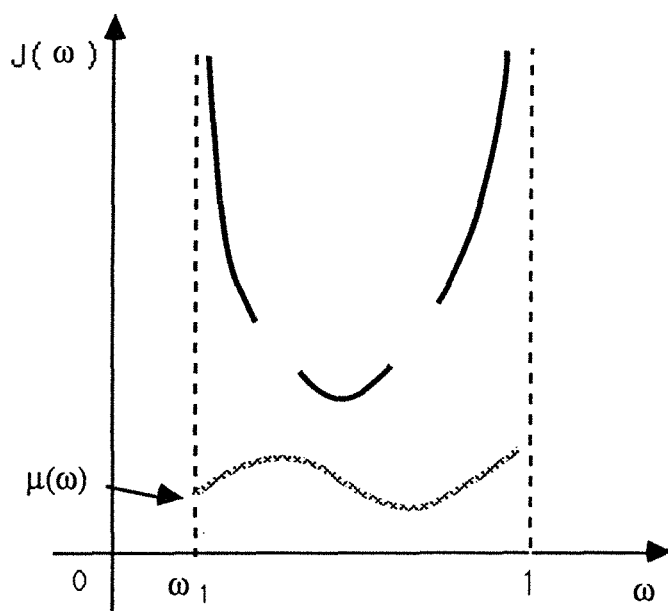


Figure 5 : Premières indications sur l'allure de  $J(\omega)$

Rappelons que :

$$J(\omega) = \int_0^1 \frac{\omega dt}{\sqrt{\Phi(\omega) - \Phi(\omega t)}}$$

$$\mu(\omega) = \frac{\omega}{\sqrt{\Phi(\omega) - \Phi(\theta_1)}} > 0 \quad \text{et}$$

$$J(\omega) > \mu(\omega)$$

$$J(\omega_1) = J(1) = +\infty$$

$$J'(\omega_1) \quad \text{et} \quad J'(1) \quad \text{non définis}$$

Reste à étudier  $J(\omega)$  à l'intérieur de l'intervalle de définition de  $J$  ou plus précisément dans  $] \omega_1 ; 1[$ .

#### 5 - 4 . Etude directe de J (ω)

##### A/ Etude de la dérivée première J'(ω)

a°) Expression de J'(ω) et remarques

Pour étudier le comportement de J (ω) à l'intérieur de l'intervalle ] ω<sub>1</sub> ; 1 [, on est naturellement conduit à examiner les dérivées de J (ω)

$$(26) \quad J'(\omega) = \int_0^1 \frac{l(\omega) - l(\omega t)}{[\Phi(\omega) - \Phi(\omega t)]^{3/2}} dt = \int_0^\omega \frac{l(\omega) - l(s)}{\omega[\Phi(\omega) - \Phi(s)]^{3/2}} ds$$

avec  $l(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} \Phi(\omega) - \omega \varphi(\omega)$

On constate :

- d'une part qu'un problème de convergence se pose en  $t = 0$  et  $t = 1$ . Mais une étude que l'on trouvera en annexe A nous montre qu'en fait J' est bien défini sur ] ω<sub>1</sub> ; 1 [

- d'autre part que l (ω) intervient de façon déterminante pour le signe de J' (ω), d'où l'utilité de construire le tableau de variation de cette fonction sur ] 0 ; 1[. C'est ce que nous faisons dans l'immédiat.

Cependant , avant d'aller plus loin, il va être nécessaire d'ordonner autant que faire se peut certains nombres de paramètres.

b°) Inventaire des données et classification

0 ; θ<sub>1</sub> ; 1 sont les trois zéros de f (s).

m et M sont respectivement les minimum et maximum de φ (s).

ω<sub>2</sub> est le point d'inflexion de φ (s) **supposé unique.**

ω<sub>1</sub> est le zéro de Φ (s) strictement compris entre θ<sub>1</sub> et 1.

On a ainsi :

$$0 < m < \theta_1 < M < 1 \quad \begin{cases} \varphi(0) = \varphi(\theta_1) = \varphi(1) = 0 \text{ et} \\ \varphi'(m) = \varphi'(M) = 0 \end{cases}$$

$$\theta_1 < \omega_1 < 1 \quad \text{et } \Phi(\omega_1) = \Phi(0) = 0$$

$$m < \omega_2 < M \quad \text{et } \varphi''(\omega_2) = 0$$

Ce premier inventaire des données nous permet d'élaborer le tableau de variation suivant :

c°) Tableau général de  $l(\omega)$  et conséquences

$$l(\omega) = \Phi(\omega) - \omega\varphi(\omega)$$

| $\omega$                                                     | 0 | m                                                                     | $\theta_1$            | M                 | 1             |
|--------------------------------------------------------------|---|-----------------------------------------------------------------------|-----------------------|-------------------|---------------|
| $\varphi(\omega)$                                            | 0 | $\varphi(m)$                                                          | 0                     | $\varphi(M)$      | 0             |
| $\varphi'(\omega)$                                           | - | 0                                                                     | +                     | 0                 | -             |
| $\varphi''(\omega)$                                          | + | Point d'inflexion unique<br>de $\varphi'$ : $\varphi''(\omega_2) = 0$ |                       |                   | -             |
| $\Phi(\omega)$                                               | - | Existence d'un zéro de $\Phi$<br>$\Phi(\omega_1) = 0$                 |                       |                   | +             |
| $l''(\omega)$<br>$= -\omega\varphi''(\omega)$                | 0 | -                                                                     | - $l''(\omega_2) = 0$ | +                 | +             |
| $l'(\omega)$<br>$= \varphi(\omega) - \omega\varphi'(\omega)$ | 0 | -                                                                     | $l'(\omega_2) < 0$    | $l'(M) > 0$       | $+ l'(1) > 0$ |
| $l(\omega)$<br>$= \Phi(\omega) - \omega\varphi(\omega)$      | 0 | $l(m)$                                                                | $l(\omega_3)$         | $l(\omega_4) = 0$ | $l(1)$        |

Ce tableau nous révèle l'importance de deux données supplémentaires  $\omega_3$  et  $\omega_4$  telles que :

$$\begin{array}{ll} \omega_2 < \omega_3 < M & \text{et } l'(\omega_3) = 0 \\ \max(\omega_1 ; \omega_3) < \omega_4 < 1 & \text{et } l(\omega_4) = 0 \end{array}$$

Nous déduisons de ce tableau l'allure générale de  $l(\omega)$

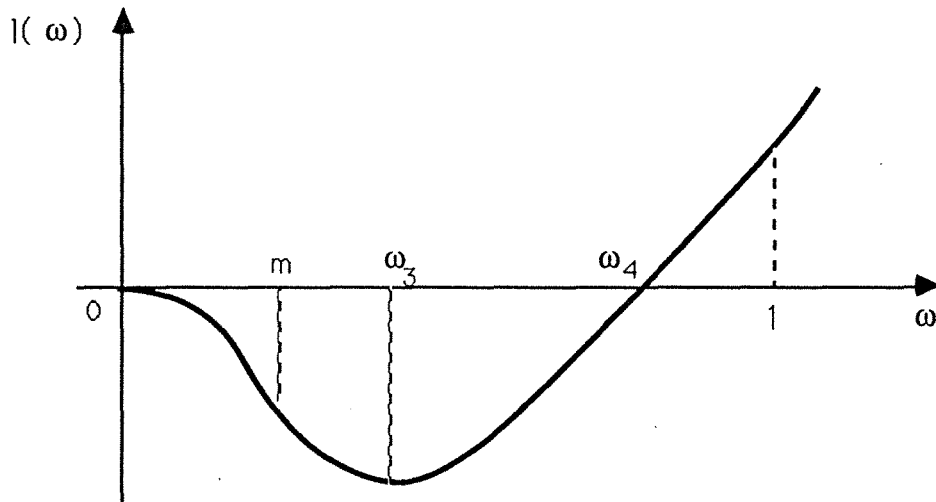


Figure 6 : Allure générale de  $l(\omega)$

Pour ce qui est de la dérivée  $J'(\omega)$ , l'étude ci-dessus nous apporte peu d'éléments. Elle nous indique seulement que pour  $\omega$  compris entre  $\omega_4$  et 1,  $J'(\omega)$  est positif (voir figure 5). Le fait que  $l'(\omega)$  soit négatif pour  $\omega$  inférieur à  $\omega_3$  n'est pas très intéressant dans la mesure où nous ne pouvons affirmer que  $\omega$  est dans l'intervalle  $[\omega_1 ; 1]$ .

On déduit de ce qui précède que  $J'(\omega)$  ne peut s'annuler qu'entre  $\omega_3$  et  $\omega_4$ .

N'ayant pu obtenir d'informations suffisantes sur  $J(\omega)$  à partir de sa dérivée première, il est naturel de s'intéresser à sa dérivée seconde.

#### B/ Etude de la dérivée seconde $J''(\omega)$

a°) Expression de  $J''(\omega)$  et remarques



En dérivant les expressions (26) de  $J'(\omega)$ , on obtient aussi deux expressions possibles de  $J''(\omega)$  à savoir en repartant de  $J'(\omega)$  :

$$J'(\omega) = \int_0^1 \frac{l(\omega) - l(\omega t)}{[\Phi(\omega) - \Phi(\omega t)]^{3/2}} dt = \int_0^\omega \frac{l(\omega) - l(s)}{\omega[\Phi(\omega) - \Phi(s)]^{3/2}} ds$$

$$J''(\omega) = \int_0^1 \frac{[l'(\omega) - t l'(\omega t)] [\Phi(\omega) - \Phi(\omega t)] - 3 [\varphi(\omega) - t \varphi(\omega t)] [l(\omega) - l(\omega t)]}{[\Phi(\omega) - \Phi(\omega t)]^{5/2}} dt$$

$$J''(\omega) = \int_0^\omega \frac{[\omega l'(\omega) - s l'(s)] [\Phi(\omega) - \Phi(s)] - 3 [\omega \varphi(\omega) - s \varphi(s)] [l(\omega) - l(s)]}{\omega^2 [\Phi(\omega) - \Phi(s)]^{5/2}} ds$$

On constate que ces expressions sont extrêmement lourdes ; cependant en notant que  $J'$  et  $J''$  font intervenir à la fois la fonction  $\varphi$  et sa primitive  $\Phi/2$ , on peut espérer qu'une combinaison linéaire de  $J'$  et  $J''$  au voisinage de certaines valeurs de  $\omega$  (en particulier les extrema) nous donne une expression plus simple.

C'est sur cette idée de J. SMOLLER & WASSERMANN [1] que l'on va s'appuyer pour l'étude suivante.

b°) Forme simplifiée de  $J''(\omega)$  aux extrema de  $J$ .

En dénombrant tous les groupements communs qui apparaissent dans les expressions de  $J'(\omega)$  et  $J''(\omega)$ , on s'aperçoit d'abord que les expressions avec bornes variables ont l'avantage de présenter une quasi symétrie en  $\omega$  et  $s$  et qu'il sera donc pratique de poser :

$$(27) \quad \begin{array}{l} \delta\Phi = \Phi(\omega) - \Phi(s) ; \quad \delta l = l(\omega) - l(s) \\ \delta\varphi = \varphi(\omega) - \varphi(s) ; \quad \delta\tilde{\varphi} = \omega\varphi(\omega) - s\varphi(s) \\ \delta l' = l'(\omega) - l'(s) ; \quad \delta\tilde{l}' = \omega l'(\omega) - s l'(s) \end{array}$$

De telle sorte que  $J'$  et  $J''$  s'écrivent maintenant :

$$(28) \quad \begin{aligned} J''(\omega) &= \int_0^\omega \frac{\delta \tilde{l}' \cdot \delta \Phi - 3 \delta \tilde{\varphi} \cdot \delta l}{\omega^2 (\delta \Phi)^{5/2}} ds \\ J'(\omega) &= \int_0^\omega \frac{\delta l}{\omega [\delta \Phi]^{3/2}} ds \end{aligned}$$

Ainsi pour  $\rho$  arbitraire

$$J''(\omega) + \rho J'(\omega) = \int_0^\omega \frac{\delta \tilde{l}' \cdot \delta \Phi + [\rho \omega \cdot \delta \Phi - 3 \delta \tilde{\varphi}] \delta l}{\omega^2 (\delta \Phi)^{5/2}} ds$$

L'idée de base consiste alors à choisir  $\rho$  de manière à simplifier au maximum l'expression ci-dessus ; or si l'on se souvient de la définition de  $l$  :

$$l(\omega) = \Phi(\omega) - \omega \varphi(\omega)$$

on constate que :

$$\delta \Phi - \delta \tilde{\varphi} = \delta l$$

d'où l'idée de choisir  $\rho = \frac{3}{\omega}$

Ce qui a l'intérêt supplémentaire de faire apparaître un terme de signe connu, on a alors :

$$(29) \quad J''(\omega) + \frac{3}{\omega} J'(\omega) = \int_0^\omega \frac{\delta \tilde{l}' \cdot \delta \Phi + 3 (\delta l)^2}{\omega^2 (\delta \Phi)^{5/2}} ds$$

En tout point de  $] \omega_1 ; 1[$  où  $J'$  est nul, c'est à dire en tout extremum  $\omega_0$  de  $J$ , on a maintenant une relation assez simple de  $J''(\omega_0)$  à savoir :

$$J''(\omega_0) = \int_0^{\omega_0} \frac{\delta \tilde{l}' \cdot \delta \Phi + 3 (\delta l)^2}{\omega_0^2 (\delta \Phi)^{5/2}} ds$$

On voit immédiatement que le signe de la quantité :

$$\delta \tilde{l}' \cdot \delta \Phi = [\omega_0 l'(\omega_0) - sl'(s)] [\Phi(\omega_0) - \Phi(s)]$$

va être déterminant pour la connaissance du signe de  $J''(\omega_0)$ . Or d'après le tableau de variation de  $K(\omega, t)$  [ cf § 5-3-A ] on constate que :

$$\delta \Phi > 0 ;$$

à chaque fois donc que l'on aura :

$$\delta \tilde{l}' = \omega_0 l'(\omega_0) - sl'(s) > 0 \quad \forall s \in [0 ; \omega_0 [$$

on pourra affirmer que  $\omega_0$  correspond à un minimum de  $J$ . Ceci entraînera en effet  $J''(\omega_0) > 0$ .

c°) Détermination du signe de  $J''(\omega_0)$

L'étude précédente de la dérivée  $J'$  à partir des variations de  $l$  a montré que :

$$] \omega_2 ; 1 [ \supset ] \omega_3 ; \omega_4 [ \ni \omega_0$$

et que  $l'$  est une fonction croissante dans cet intervalle ( $l'(s) > 0 \quad \forall s > \omega_2$ ) donc :

$$l'(s) < l'(\omega_0) \quad \forall s \in [ \omega_2 ; \omega_0 [$$

et donc a fortiori :

$$s l'(s) < \omega_0 l'(\omega_0) \quad \forall s \in [ \omega_2 ; \omega_0 [$$

d'où

$$\delta \tilde{l}' > 0 \text{ en } \omega_0 \quad \forall s \in [ \omega_2 ; \omega_0 [$$

Reste à envisager l'étude pour  $s \in [0 ; \omega_2 [$  ; or dans cet intervalle  $l'(s) < 0$  alors que  $l'(\omega_0) > 0$  donc :

$$\delta \tilde{l}' = \omega_0 l'(\omega_0) - sl'(s) > 0$$

Ainsi  $J''(\omega_0) > 0$  en tout extremum  $\omega_0$  (c'est à dire que  $J$  est localement convexe en  $\omega_0$ ) ce qui signifie que :

- d'une part  $\omega_0$  est nécessairement un minimum de  $J(\omega)$
- d'autre part que  $\omega_0$  est unique car l'existence de plusieurs minima implique au moins un maximum intermédiaire. Ce qui est exclu car  $J$  est convexe aux extrema.

On a donc maintenant une information complète sur l'allure globale de  $J(\omega)$  que nous illustrons par la figure 7 ci-dessous avec  $\omega_m$  l'unique minimum de  $J(\omega)$

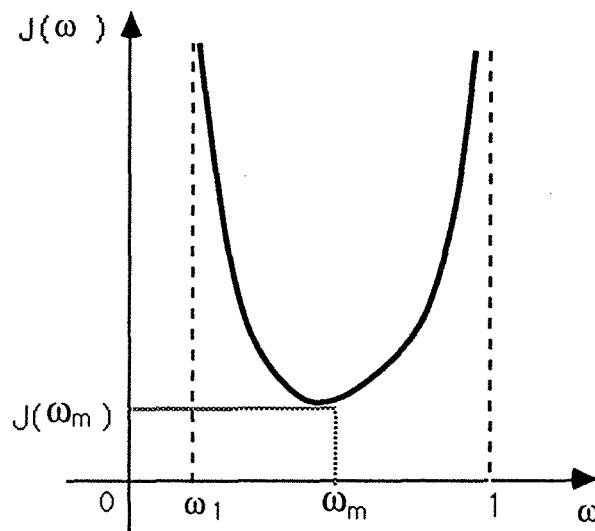


Figure 7 : Allure de  $J(\omega)$

### 5 - 5 Conclusion partielle sur le nombre de solutions non triviales

Nous pouvons à présent réunir les résultats ci-dessus obtenus dans le théorème 2 suivant que l'on peut considérer comme une extension du résultat formulé par SMOLLER & WASSERMANN/1.

#### Théorème 2

Avec l'allure effective de  $f(\theta)$  à savoir :

- i°/  $f$  est continuellement dérivable par morceaux
- ii°/  $f$  admet trois zéros :  $0$  ;  $\theta_1$  et  $1$  ( $0 < \theta_1 < 1$ )
- iii°/  $f'(0) < 0$
- iv°/  $f$  admet un seul point d'inflexion  $\omega_2$

$$v°/ \int_0^1 f(s) ds > 0 ;$$

en introduisant les notations suivantes :

$$F(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} 2 \int_0^{\omega} f(s) ds \stackrel{\text{def}}{=} 2\lambda^2 \int_0^{\omega} \varphi(s) ds$$

$$\Phi(s) = \frac{F(s)}{\lambda^2} \quad \text{avec } \lambda^2 = F(1) ;$$

le problème (24) à savoir :

$$\text{trouver } \eta \text{ compris entre } \omega_1 \text{ et } 1 \text{ tel que } J(\eta) = \frac{\lambda}{2}, \quad \left( J(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^{\omega} \frac{ds}{\sqrt{\Phi(\omega) - \Phi(s)}} \right)$$

admet au plus deux solutions.

Plus précisément si l'on appelle  $\omega_m$  l'unique minimum de  $J(\omega)$  alors :

- a°) pour  $\lambda < 2 J(\omega_m)$  le problème (24) n'a pas de solution.
- b°) pour  $\lambda = 2 J(\omega_m)$  le problème (24) a une solution :  $\eta = \omega_m$
- c°) pour  $\lambda > 2 J(\omega_m)$  le problème (24) a deux solutions distinctes  $\eta_1$  et  $\eta_2$  encadrant strictement  $\omega_m$ .

Il faut maintenant revenir au problème mathématique de départ (cf relations (1) § 1). Pour cela, il suffit de regrouper les conclusions des théorèmes 1 (cf § 4) et 2 (ci-dessus). On aboutit alors aux deux situations suivantes :

1°)  $F(1) \leq 0$  , le problème physique de départ n'admet que la solution triviale  $\theta_0 \equiv 0$

2°)  $F(1) > 0$  alors  $\lambda^2 \stackrel{\text{def}}{=} 2 F(1)$

Si nous considérons le minimum  $J(\omega_m)$  de  $J$ , trois éventualités pour le problème physique peuvent se présenter :

i)  $F(1) < 4 [J(\omega_m)]^2$ , le problème physique de départ n'admet que la solution triviale :  $\theta \equiv 0$

ii)  $F(1) = 4 [J(\omega_m)]^2$  , le problème physique admet en plus de la solution triviale une solution dont le maximum  $\theta_M$  est égal à  $\omega_m$ .

iii)  $F(1) > 4 [J(\omega_m)]^2$ , le problème physique admet, outre la solution triviale, deux solutions  $\theta^{(1)}$  et  $\theta^{(2)}$  tels que  $\theta^{(1)} < \theta^{(2)}$  et dont les maxima respectifs  $\theta_M^{(1)} = \eta_1$  et  $\theta_M^{(2)} = \eta_2$  encadrent strictement  $\omega_m$  :  $(\eta_1 < \omega_m < \eta_2)$ .

Voir l'illustration par le diagramme de bifurcation figure 8 ci-dessous.

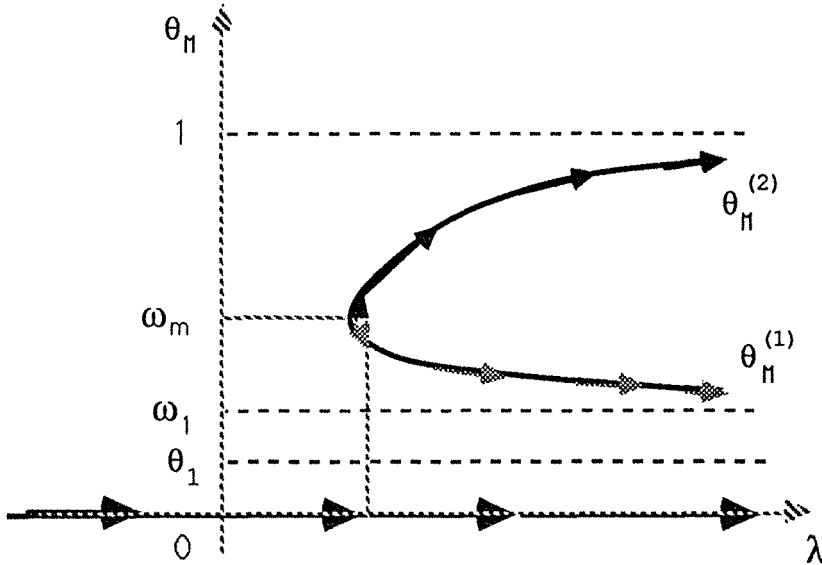


Figure 8 : Diagramme de bifurcation (évolution de  $\theta_M$  en fonction du paramètre  $\lambda = F(1) > 0$ )

## **6 - INTERPRETATION PHYSIQUE DES RESULTATS : CONCLUSION DU CHAPITRE**

Dans ce chapitre, nous avons dégagé des conditions nécessaires et suffisantes d'existence de solutions d'équilibre du problème (10) du chapitre II . Après avoir mis en évidence des propriétés qualitatives de ces solutions (symétrie, relation d'ordre, pente à l'origine ...) le paramètre  $F(1)$ , représentant l'aire algébrique délimitée par la courbe de la fonction source  $f(\theta)$  entre 0 et 1, s'est révélé capital pour la détermination du nombre de solutions d'équilibre. Pour  $F(1)$  positif nous avons introduit le paramètre  $\lambda^2 = F(1) \cdot \lambda$  peut apparaître dans cette hypothèse comme "l'intensité" du terme source  $f(\theta)$ .

Ainsi pour  $F(1) \leq 0$  nos observations font penser au critère des aires égales (voir chapitre 4 sur la stabilité).

Par contre pour  $F(1) > 0$  on constate l'existence d'un seuil critique pour  $F(1)$ . Ce seuil est  $4 [J(\omega_m)]^2$ . Suivant que  $F(1)$  est inférieur, égal ou supérieur à ce seuil, notre problème (10) ci-dessus cité pourra admettre, outre la solution triviale, zéro, une ou deux solutions d'équilibre non triviales (cf théorèmes 1 et 2).

Parmi les états d'équilibre du CMS, le plus important et intéressant pour l'ingénieur est la solution triviale ; elle correspond à l'état supraconducteur tandis que les autres supposent qu'une portion du conducteur ( voire la totalité sauf les deux bords) a transité à l'état normal résistif et dissipe donc de la chaleur par effet Joule. On cherchera donc à s'écarter le moins possible de la solution  $\theta_0 \equiv 0$ .

Sur un plan concret, on peut noter que  $\omega_m$  dépend de l'allure de la fonction échange supra-bain cryogénique ; si l'on peut contrôler cette fonction, il faudra le faire de sorte que  $J(\omega_m)$  soit le plus grand possible ; en effet l'objectif est de reculer les limites des possibilités de formation d'un état non supra et donc d'espérer un domaine de stabilité plus étendu de la solution supra.

Quant au paramètre  $F(1)$  on peut noter que, pour une fonction échange donnée, il est proportionnel au carré  $L^2$  de la longueur du conducteur, inversement proportionnel à la conductivité thermique  $k$  et à l'écart thermique maximal admissible  $(T_2 - T_b)$ . L'ingénieur pourra également jouer sur ces paramètres ( $L$ ,  $k$  et  $T_2 - T_b$ ) de manière à rendre  $F(1)$  le plus petit possible dans le cas où ce dernier serait positif. Si par contre  $F(1)$  est négative ou nulle,

aucune contrainte sur  $L$ ,  $k$  et  $T_2 - T_b$  n'est nécessaire. Ce faisant les limites de formation d'un état normal résistif seront reculées. On pourra éventuellement jouer simultanément sur les deux tableaux ( $J$  ( $\omega_m$ ) d'une part,  $L$ ,  $k$  et  $T_2 - T_b$  d'autre part).

Cependant si des écarts de température amènent une partie du CMS à un état normal résistif, il devient important de s'assurer de l'évolution du nouveau profil thermique ; de là l'utilité d'envisager l'étude de la stabilité des états d'équilibre thermiques. Nous allons essayer d'apporter une réponse à ces questions dans le chapitre suivant.



## **CHAPITRE IV**

**--ooOoo--**

### **ETUDE DE LA STABILITE DES EQUILIBRES THERMIQUES POSSIBLES**

**CHAPITRE IV**
**ETUDE DE LA STABILITE DES EQUILIBRES  
THERMIQUES POSSIBLES**

Sachant qu'il est possible, suivant les valeurs ou allures des données d'avoir pour le CMS un ou plusieurs états stationnaires stables autre que 0 (ce qui est néfaste d'un point de vue technique), il y a lieu de se préserver de ces états néfastes en étudiant leur stabilité et, le cas échéant, leur zone d'attraction. Nous chercherons alors comment jouer sur les paramètres du problème pour éviter ces états (indésirables) d'équilibre stable non supra .

Pour y parvenir nous allons utiliser diverses méthodes d'étude de la stabilité dont celle des sur et sous-solutions inspirée de PUEL /1 & /2 et SATTINGER (voir aussi H.B KELLER ; H. AMMAN /1 & /2) Cette méthode va nécessiter la construction de sur et sous-solutions.

Dans la première partie du chapitre nous ferons un exposé succinct des principaux résultats nécessaires à notre analyse.

**1 - RAPPEL SUR LA NOTION DE STABILITE ET ENONCES DE CERTAINS  
RESULTATS ACQUIS POUR LE PROBLEME POSE.**
**1-1 Cadre du travail**

Nous considérons ici le problème d'évolution suivant, avec les mêmes notations qu'au précédent chapitre :

Trouver  $\tilde{\theta}(x, t)$  définie sur  $[0; 1] \times [0; +\infty[$  telle que :

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial t} - \frac{\partial^2 \tilde{\theta}}{\partial x^2} - \lambda^2 \varphi(\tilde{\theta}) = 0 \text{ dans } ]0;1[ \times ]0;+\infty[ \\ \tilde{\theta}(x;0) = \theta_0(x) \text{ avec } \theta_0 \in C^0([0;1]) \text{ et } \theta_0(0) = \theta_0(1) = 0 \\ \tilde{\theta}(0;t) = \tilde{\theta}(1;t) = 0 \quad \forall t \geq 0 \end{array} \right.$$

pour  $\varphi$  lipschitzienne ayant les mêmes propriétés qu'au chapitre III (voir § 2 et Fig 1). le problème stationnaire associé s'écrit :

Trouver  $\theta$  définie sur  $[0;1]$  telle que :

$$(2) \quad \begin{cases} a & \theta''(x) + \lambda^2(\theta(x)) = 0 \quad \forall x \in ]0;1[ \\ b & \theta(0) = \theta(1) = 0 \end{cases}$$

### Remarque 1-1

Pour des espaces fonctionnels convenables, les problèmes (1) et (2) ont un sens, dans la mesure où nous nous situons dans l'espace des distributions  $\mathcal{D}'(\Omega)$  avec  $\Omega = ]0;1[ \cup ]1;+\infty[$  pour le problème (1) avec comme condition initiale  $\theta_0$  dans l'espace de Sobolev  $H_0^1([0;1])$

Le problème (2) quant à lui sera considéré au sens des distributions sur  $]0;1[$  (voir par exemple BREZIS H/1 ou VO KHAC KHOAN/1/2)

Nous partons de la stabilité au sens de Liapounov dont nous donnons une définition (voir par exemple SATTINGER/1 ou HARTMAN/1)

### 1-2 Définitions et remarques relatives à la stabilité

Considérons  $\theta(x)$  une solution du problème (2) et soient :

- $\chi(x)$  dans  $C^1([0;1])$  telle que  $\chi(0) = \chi(1) = 0$
- $\tilde{\theta}(x, t)$  une solution du problème d'évolution (1) avec comme condition initiale :  
 $\tilde{\theta}(x; 0) = \theta(x) + \chi(x)$  pour  $x$  dans  $[0;1]$

Nous dirons que :

i/  $\theta(x)$  est stable si :

$$\forall \varepsilon > 0 ; \exists \delta > 0 /$$

$$\max_{0 \leq x \leq 1} |\chi(x)| < \delta \quad \Rightarrow \quad \max_{\text{pour tout } t \geq 0} |\tilde{\theta}(x, t) - \theta(x)| < \varepsilon$$

ii/  $\theta(x)$  est dite instable lorsqu'elle n'est pas stable.

iii/  $\theta(x)$  est dite asymptotiquement stable si elle est stable et de plus :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \left\{ \max_{0 \leq x \leq 1} |\tilde{\theta}(x, t) - \tilde{\theta}(x)| \right\} = 0$$

iv/  $\theta(x)$  est dite globalement stable si :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \left\{ \max_{0 \leq x \leq 1} |\tilde{\theta}(x, t) - \tilde{\theta}(x)| \right\} = 0 \text{ quelles que soient les conditions initiales.}$$

Remarques 1-2-a

a°/ On parle de perturbation positive (respectivement négative) lorsque  $\chi(x)$  est positive (respectivement négative).

b°/ Pour un système asymptotiquement stable, la plus grande valeur de  $\delta$  (assurant la stabilité) est une mesure de l'étendue de la zone d'attraction de la solution stable.  $\delta$  dépend bien entendu de la solution d'équilibre concernée.

c°/ Les solutions stables sont appelées des attracteurs des solutions d'évolution.

### 1-3 Quelques résultats immédiats de stabilité des solutions stationnaires non triviales du problème (1).

Remarques préliminaires.

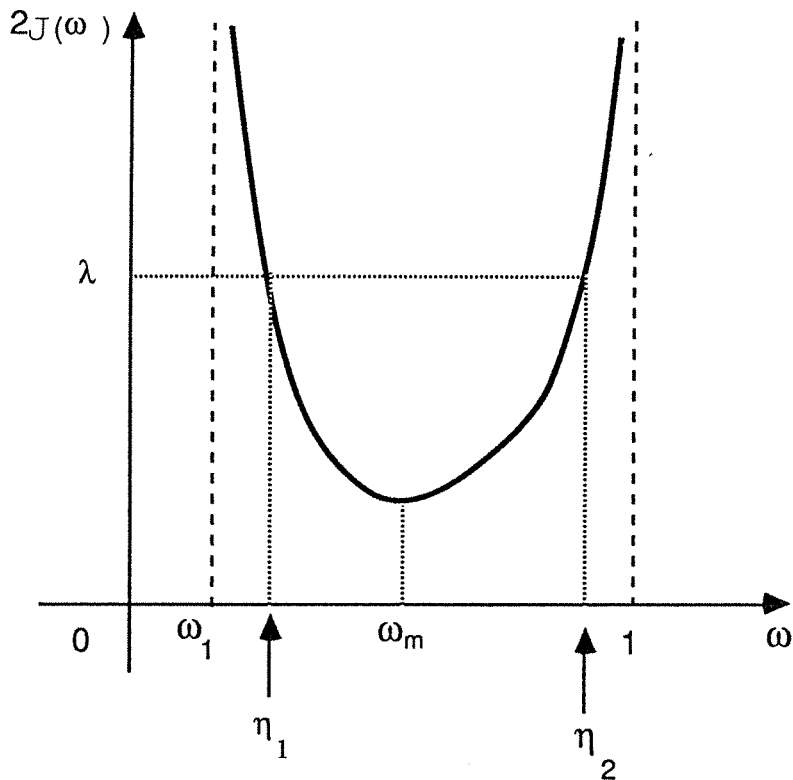
Notons que les problèmes (1) et (2) ne représentent la situation thermique du supra, avec les mêmes définitions de  $\lambda$  et  $\phi$  qu'au chapitre III-§5-1, que si la grandeur physique  $F$  (définie par les relations (17), (18), (19) et les figures 1 du dit chapitre- est telle que :

$$F(1) > 0$$

Dans le cas où  $F(1) \leq 0$ , on revient aux notations initiales du chapitre III en remplaçant dans les problèmes (1), (2) (3) et (4) (du présent chapitre)  $\lambda$  par 1 et  $\phi$  par  $f$  ; on sait alors que seule la solution supra est possible (c'est à dire la solution  $\theta = \Theta_0 \equiv 0$ )

Par contre nous avons vu au chapitre précédent que pour  $F(1) > 0$ , le problème (2) admet au plus trois solutions. Nous les désignerons désormais par :

- $\Theta_0$  pour la solution triviale qui existe toujours.
- $\Theta_1$  et  $\Theta_2$  pour les deux solutions non triviales ayant respectivement  $\eta_1$  et  $\eta_2$  comme maximum ( $\eta_1 < \eta_2$ ) lorsqu'elles existent. (voir figure 1)
- $\Theta_m$  la solution non triviale ayant  $\omega_m$  comme maximum quand elle existe.



**Figure 1 : Position relative des maxima des solutions**

On peut alors d'après un résultat déduit de MAGINU/1 énoncer la proposition suivante :

**Proposition 1**

Si le problème (2) admet deux solutions non triviales  $\Theta_1$  et  $\Theta_2$  ( $\Theta_1 < \Theta_2$ ) alors  $\Theta_2$  est asymptotiquement stable et  $\Theta_1$  est instable.

Si le problème (2) admet une seule solution non triviale  $\Theta_m$  alors cette solution est asymptotiquement stable par rapport aux perturbations positives et instable par rapport à celles de signe opposé.

En effet en transposant les notations de MAGINU dans les nôtres, il est montré que :

- i/ si  $J'(\eta) > 0$ , la solution  $\Theta(x)$  correspondante est asymptotiquement stable.
- ii/ si  $J'(\eta) = 0$  et  $J''(\eta) > 0$  (respectivement  $J''(\eta) < 0$ ), alors  $\Theta(x)$  est asymptotiquement stable par rapport aux perturbations positives (respectivement négatives) mais non stable par rapport aux perturbations de signe opposé.
- iii/ si  $J'(\eta) < 0$ ,  $\Theta(x)$  est instable.

Il suffit d'appliquer i/ ; ii/ et iii/ respectivement à  $\eta_2$  ;  $\omega_m$  et  $\eta_1$  en se reportant à l'étude de  $J(\omega)$  (voir § 5 chapitre III) pour obtenir la proposition 1.

Notons :

- d'une part que MAGINU ne s'intéresse pas à la stabilité de la solution triviale mais nous obtiendrons très facilement un résultat de stabilité pour  $\Theta_0$  au paragraphe 3.

- d'autre part que les conditions exigées par MAGINU pour l'étude de la stabilité sont plus restrictives, il impose notamment à la fonction perturbatrice une pente aux bords inférieure à  $\delta$  en valeur absolue. Bien que nous ne percevons pas tout à fait la nécessité de cette condition, nous pouvons dire que si l'on restreint les perturbations  $\chi$  à des fonctions dont la pente aux extrémités est bornée par une constante fixe, on peut affirmer que les deux notions sont les mêmes. En effet les normes qui définissent ces notions seraient alors équivalentes. Cette hypothèse est parfaitement plausible pour notre étude.

#### **1-4 Commentaire sur les résultats précédents.**

Nous savons d'ores et déjà que le problème (1) admet pour certains couples  $(\lambda ; \varphi)$  une solution stationnaire non triviale stable, c'est à dire un attracteur non supra ; il sera donc intéressant d'étudier l'étendue d'attraction de cette solution.

Des résultats basés sur les techniques de sur et sous solutions dont on trouvera les développements dans PUEL/1 ; BOCCARDO-MURAT-PUEL/1; AMANN/1 et 2 ; KELLER/1 ; SATTINGER/1 et 2 , (\*) vont nous permettre d'une part, de nous assurer que la solution supra  $\Theta_0$  est bien aussi un attracteur, d'autre part de déterminer avec une certaine "optimalité" les zones d'attraction des différentes solutions stables lorsqu'elles existent. Nous allons dans le paragraphe suivant donner les éléments de base sur les techniques de "sur et sous solutions".

(\*)Des algorithmes de construction peuvent également être trouvés dans CONRAD/1.

## 2 - RAPPELS SUR LES NOTIONS DE SUR ET SOUS SOLUTIONS.

### 2-1 Définition des sur et sous solutions des problèmes (1) et (2) au sens de SATTINGER/1.

#### a°/ Définition des sursolutions

\* Une fonction  $\tilde{v}(x, t)$  continue par rapport à  $x$  et à  $t$  est appelée sursolution du problème (1) si :

$$(3) \quad \left. \begin{array}{l} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} - \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial x^2} - \lambda^2 \varphi(\tilde{v}) \geq 0 \text{ au sens des distributions} \\ \tilde{v}(0; t) \geq 0 \\ \tilde{v}(1; t) \geq 0 \end{array} \right\} \quad \forall t > 0$$

$$\tilde{v}(x; 0) \geq \theta_0(x) \quad \forall x \in [0; 1]$$

\* Une fonction  $v$  continue est appelée sursolution du problème (2) si :

$$(4) \quad \left. \begin{array}{l} -v'' - \lambda^2 \varphi(v) \geq 0 \quad \text{dans } \mathcal{D}'([0; 1]) \\ v(0) \geq 0 \\ v(1) \geq 0 \end{array} \right\}$$

\* Il est à noter que si  $v(x) \geq \theta_0(x)$  pour tout  $x$  alors  $v(x)$  est également sursolution du problème (1).

\* Si  $v(x)$  n'est pas solution on dit qu'on a affaire à une **sursolution stricte**.

#### b°/ Définition des sous solutions

Les sous solutions  $\tilde{u}$  et  $u$  des problèmes respectifs (1) et (2) se définissent de manière analogue en inversant les inégalités.

Notons que les sous solutions  $u(x)$  du problème (2) telles que  $u(x) \leq \theta_0(x)$  sont aussi sous solution du problème (1)

## 2-2 Enoncé des résultats de stabilité basés sur les notions de sur et sous solutions.

Nous donnons ici sans démonstration quelques résultats utiles pour notre problème. Ces résultats sont essentiellement déduits de l'article de SATTINGER/1.

Soient  $u$  et  $v$  respectivement sous solution et sur solution du problème (2) éventuellement du problème (1) telles que  $u \leq v$ . Nous définissons le convexe  $K_{u,v}$  par :

$$K_{u,v} = \{ w \in C^0(0; 1) / \forall x \in (0; 1) : u(x) \leq w(x) \leq v(x) \}$$

(On sait que les sur et sous solutions du problème (2) sont également sur et sous solutions indépendantes du temps du problème (1) lorsqu'elles vérifient :  $u(x) \leq \theta_0(x) \leq v(x)$  ;  $\theta_0(x)$  étant la condition initiale)

Nous pouvons alors énoncer les résultats suivants pour  $f'(s)$  borné inférieurement :

### Théorème 1

**S'il existe une sous solution  $u$  et une sur solution  $v$  du problème (2) avec  $u \leq v$  alors le problème (2) admet au moins une solution stable contenue dans le convexe  $K_{u,v}$ )**

### Théorème 2 (évolution des solutions du problème (1))

**Soient  $u$  et  $v$  sous et sur solutions du problème (2) telles que  $u \leq v$ , alors toute solution du problème (1) avec comme condition initiale  $\theta_0 = u$  (respectivement  $\theta_0 = v$ ) est comprise entre  $u$  et  $v$ , croissante en  $t$  (respectivement décroissante) et converge vers une solution stationnaire  $\underline{\theta}$  (respectivement  $\bar{\theta}$ ) du problème (2).**

**De plus  $\theta$  et  $\bar{\theta}$  sont pour le problème (2) des solutions respectivement minimale et maximale dans le convexe  $K_{u,v}$  ; en ce sens que toute solution  $\theta$  du problème (2) contenue dans  $K_{u,v}$  est telle que :**

$$\underline{\theta}(x) \leq \theta(x) \leq \bar{\theta}(x) \quad \forall x \in [0; 1].$$



Théorème 3 : (Encadrement des solutions d'évolution)

Soient  $u$  et  $v$  une sous et sur solution du problème stationnaire (2) alors toute solution  $\tilde{\theta}(x, t)$  du problème d'évolution (1) avec comme condition initiale  $\theta_0$  dans le convexe  $K_{u,v}$  est contenue dans ce convexe.

c'est à dire que l'on a :

$$u(x) \leq \tilde{\theta}(x, t) \leq v(x) \quad \forall t > 0 \\ \text{et } \forall x \in [0; 1]$$

De ces trois théorèmes nous déduisons le corollaire suivant :

Corollaire 4 (stabilité des solutions d'équilibre)

Si le problème stationnaire (2) admet dans le convexe  $K_{u,v}$  (avec  $u$  et  $v$  sous et sur solutions) une solution unique  $\theta$  alors :

Toute solution  $\tilde{\theta}(x, t)$  du problème d'évolution (1) avec comme condition initiale  $\theta_0$  telle que  $u \leq \theta_0 \leq v$  converge uniformément vers  $\theta$  lorsque  $t$  tend vers l'infini.

\* La solution  $\theta$  est donc asymptotiquement stable au sens défini dans le sous paragraphe 1-2.

\* Le convexe  $K_{u,v}$  est contenu dans le domaine d'attraction de cette solution.

Ce corollaire est immédiat du fait de l'unicité de la solution  $\theta$  dans le convexe  $K_{u,v}$  car on a alors  $\underline{\theta}(x) = \theta(x) = \overline{\theta}(x)$

Et les théorèmes 2 et 3 permettent de conclure :

\* Si  $u$  et  $v$  sont sous et sur solutions strictes ou si  $u < \theta_0 < v$ , on prend  $\delta \leq \inf \left[ \max_{0 \leq x \leq 1} (v(x) - \theta_0(x)) ; \max_{0 \leq x \leq 1} (\theta_0(x) - u(x)) \right]$

\* Si  $u$  (respectivement  $v$ ) est la solution unique, on n'est assuré que de la stabilité asymptotique par rapport aux perturbations positives (respectivement négatives) dans le cas où la condition initiale du problème d'évolution est la sous solution (respectivement la sur solution). On prend dans ce cas  $\delta \leq \max_{0 \leq x \leq 1} (v(x) - u(x))$ .

Après cet exposé succinct d'une méthode d'étude de l'existence et de la stabilité des solutions pour les problèmes d'évolution semi-linéaires, voyons comment nous pouvons l'appliquer à notre situation.

### **3 - APPLICATION DE LA METHODE DES SUR ET SOUS SOLUTIONS POUR LA DETERMINATION OPTIMUM DE LA ZONE D'ATTRACTION $Z_0$ DE LA SOLUTION SUPRA.**

Nous venons de voir (cf sous paragraphe 1-3) que le problème (2) admettait au plus une solution non triviale stable, celle que nous avons notée  $\Theta_2$  ; cette solution est par ailleurs maximale pour tout convexe  $K_{u,v}$  la contenant. Avant de déterminer sa zone d'attraction  $Z_2$ , nous allons établir la stabilité de la solution supra  $\Theta_0$  et en déterminer une zone d'attraction .

Les études proposées seront guidées par l'application du corollaire 4 qui suppose la construction de convexes du type  $K_{u,v}$  les plus "larges" possibles ne contenant pourtant qu'une seule solution du problème (2). Cette démarche nous est facilitée par les connaissances a priori que nous avons de l'existence et du nombre de solutions du problème (2) pour tout couple de données  $(\lambda ; \varphi)$ .

Nous nous intéresserons a priori à deux familles de sur et sous solutions relativement simples :

a°/ les constantes.

b°/ les solutions  $u$  et  $v$  d'équations du type (2) dans lesquelles nous remplacerons  $\lambda$  par un nombre inférieur ou supérieur suivant les besoins. Elles seront éventuellement complétées (par prolongement  $C^1$ ) par des constantes ou des fonctions simples continuellement dérivables.

Il est immédiat de constater ( à cause d'une part des conditions aux limites nulles du problème, d'autre part de l'alternative du signe de  $\varphi$  ) que :

- La seule sous solution constante non négative du problème (2) est 0. Les autres sous solutions constantes sont les constantes négatives, elles sont également sous solutions du problème (1) car la condition initiale  $\theta_0$  est non négative.

- toute constante  $v$  dans  $] 0 ; \theta_1 ] \cup [ 1 ; + \infty [$  est sur solution stricte du problème (2) éventuellement du problème (1) si cette constante est supérieure à la condition initiale  $\theta_0$ .

### 3-1 Première approche de la stabilité de la solution supra $\Theta_0$

Les remarques précédentes nous montrent que le choix de  $u \equiv 0 \equiv \Theta_0$  et  $v \equiv C \in ]0; \theta_1] \cup [1; +\infty[$  nous place dans le cadre d'application élargie du corollaire 4. Il faut distinguer deux situations :

i/ Lorsque  $F(1) < 4 [J(\omega_m)]^2$  (on en déduit les déterminations de  $\lambda$  et de  $\varphi$ , (cf les remarques préliminaires du § 1-3), on sait que la seule solution de (2) est  $\Theta_0 \equiv 0$ , que tout convexe  $K_{0,c}$  ne contient aucune autre solution et est donc inclus dans la zone d'attraction  $Z_0$  de  $\Theta_0$ ; ce qui signifie que la solution supra  $\Theta_0 \equiv 0$  est globalement stable. (On peut prendre à la place de la solution 0 toute constante négative comme sous solution.)

ii/ Lorsque  $F(1) \geq 4 [J(\omega_m)]^2$ , il y a au moins une solution non supra dont le maximum est supérieur à  $\omega_1$  et donc à  $\theta_1$ . La sur solution constante adéquate (inférieure au maximum de la solution non supra) est alors  $v$  dans  $]0; \theta_1]$ . Par exemple  $v \equiv \theta_1$  le convexe  $K_{0,\theta_1}$  ne contient aucune autre solution différente de  $\Theta_0$  qui est alors asymptotiquement stable. On sait alors que ce convexe  $K_{0,\theta_1}$ , est contenu dans la zone d'attraction  $Z_0$  de  $\Theta_0$ . (On peut prendre  $K_{c,\theta_1}$  à la place de  $K_{0,\theta_1}$  avec  $c < 0$ ).

Nous nous plaçons désormais exclusivement dans cette seconde situation ( $F(1) \geq 4 [J(\omega_m)]^2$ ) et nous savons que pour tout couple correspondant  $(\lambda; \varphi)$  on a :

$$\theta_1 < \omega_1 < \eta_1 \leq \omega_m \leq \eta_2$$

Ce qui montre que la zone d'attraction  $Z_0$  est nécessairement plus large que  $K_{0,\theta_1}$ . Il nous faut donc trouver pour tout couple  $(\lambda; \varphi)$  une sur solution  $v$  telle que :

$$\theta_1 < \max_{0 \leq x \leq 1} v(x) < \eta_1$$

Cette sur solution ne peut être constante.

Nous savons qu'une telle sur solution existe si nous tenons compte du fait que la solution non triviale  $\Theta_1$  est instable.

Dans l'état actuel de nos investigations nous n'avons pas réussi à construire une telle sur solution  $v_1$ .

Dans ces conditions, le nouveau convexe  $K_{0,v_1}$  serait une meilleure approximation de la zone d'attraction  $Z_0$  de la solution supra  $\Theta_0$ .

**3 - 2 Remarque :** La zone  $Z_0$  ainsi définie serait intéressante mais elle ne suffit pas à assurer la sécurité du système cryogénique. Des études complémentaires seraient nécessaires pour obtenir des informations substantielles sur la vitesse de convergence du profil thermique perturbé (non souhaitable) vers le profil supra (souhaité). Ceci sera nécessaire aux praticiens afin de leur permettre de minimiser les risques dus à la transition temporaire du CMS en résistivité normale.

On peut s'attendre à ce que le temps caractéristique  $\frac{CL^2}{k}$  défini au § 2 du chapitre II joue en particulier un rôle dans la détermination de cette vitesse de convergence.

#### **4 - APPLICATION DE LA METHODE DES SUR ET SOUS SOLUTIONS POUR LA DETERMINATION DE LA ZONE D'ATTRACTION $Z_2$ DE LA SOLUTION STABLE NON SUPRA.**

Le diagramme de bifurcation (cf Figure 8 Chapitre III § 5) nous indique que pour définir un convexe  $K_{u,v}$  contenu dans la zone d'attraction de la solution stable non supra  $\Theta_2$ , il faudra veiller à ce que le maximum de la sous solution  $u$  soit strictement supérieur à  $\eta_1$ .

Le même diagramme nous montre que  $\eta_2$  est inférieur à 1. On pourra donc choisir toute constante  $c$  supérieure à 1 comme sur solution convenable pour l'application du corollaire 4 à la solution  $\Theta_2$ .

Reste donc à déterminer la sous solution  $u$  telle que le convexe  $K_{u,c}$  ne contienne pas  $\Theta_1$ . Là encore nos investigations ne nous ont pas permis d'exhiber une telle sous solution :

On peut cependant noter que le convexe  $K_{\Theta_2,c}$  est inclus dans le domaine d'influence  $Z_2$  de l'attracteur  $\Theta_2$  (pour  $c \geq 1$ ).

#### **5 - ESSAI D'EXTENSION DES DOMAINES D'ATTRACTION DES SOLUTIONS STABLES**

Ce sous paragraphe n'est qu'une ébauche d'une analyse qui se devrait d'être plus rigoureusement approfondie.

Nous venons de mettre en évidence des zones (partielles) d'influence des attracteurs  $\Theta_0$  et  $\Theta_2$  à savoir respectivement  $K_{0,\theta_1}$  et  $K_{\Theta_2,c}$ . Qu'advient-il des perturbations qui porteraient les conditions initiales en dehors de ces zones. Nous faisons une forte conjecture en ce qui concerne les perturbations comprises entre 0 et  $\Theta_1$  d'une part et supérieure à  $\Theta_1$  d'autre part.

Cette conjecture indiquerait que :

Proposition 5 :

Si une perturbation est telle que la condition initiale  $\theta$  du problème d'évolution (1) est comprise entre  $\Theta_0$  et  $\Theta_1$  (respectivement supérieure à  $\Theta_1$ ) alors la solution  $\tilde{\theta}(x, t)$  de ce problème d'évolution converge uniformément vers  $\Theta_0$  (respectivement vers  $\Theta_2$ ) lorsque  $t$  tend vers l'infini.

La proposition 5 est en fait une conséquence des résultats suivants déduits de PUEL/1 (1ère partie Chap. IV) et du fait que  $\Theta_2$  et  $\Theta_0$  sont les seules solutions stables du problème (2).

Ces résultats peuvent s'énoncer de la manière suivante :

Considérons  $u$  et  $v$  respectivement sous et sur solution du problème stationnaire (2) alors :

1°/ La solution  $\tilde{\theta}_u(x; t)$  du problème (1) avec  $u$  comme condition initiale est croissante en  $t$  et converge vers une solution stable du problème (2) lorsque  $t$  tend vers l'infini.

2°/ De même la solution  $\tilde{\theta}_v$  du problème (1) avec  $v$  condition initiale, est décroissante en  $t$  et converge vers une solution stable du problème stationnaire (2) lorsque  $t$  tend vers l'infini.

3°/ La solution  $\tilde{\theta}_v(x; t)$  du problème (1) avec comme condition initiale  $\theta_0$  telle que  $u(x) \leq \theta_0(x) \leq v(x)$  est encadrée par  $\tilde{\theta}_u$  et  $\tilde{\theta}_v$ . ( $\tilde{\theta}_u(x; t) \leq \tilde{\theta}(x; t) \leq \tilde{\theta}_v(x; t)$ )

On peut donc conclure que :

\* si  $\tilde{\theta}(x; t)$  admet une limite pour  $t$  infini alors :

$$u(x) \leq \lim_{t \rightarrow +\infty} \tilde{\theta}_u(x; t) \leq \lim_{t \rightarrow +\infty} \tilde{\theta}(x; t) \leq \lim_{t \rightarrow +\infty} \tilde{\theta}_v(x; t) \leq v(x)$$

\* si  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \tilde{\theta}_u(x; t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \tilde{\theta}_v(x; t)$  alors

$\tilde{\theta}(x; t)$  converge en  $t$  vers cette limite.

Ainsi pour  $u \equiv \Theta_0$  et  $v \equiv \Theta_1$ , la seule solution stable du problème (2) comprise entre  $\Theta_0$  et  $\Theta_1$  est  $\Theta_0$  qui est par conséquent la limite commune de  $\tilde{\theta}_u(x; t)$ ;  $\tilde{\theta}(x; t)$  et  $\tilde{\theta}_v(x; t)$ . On en déduit que le convexe  $K_{\Theta_0; \Theta_1}$  est dans la zone d'influence  $Z_0$  de l'attracteur  $\Theta_0$ .

- De même pour  $u \equiv \Theta_1$  et  $v \equiv c$  (avec  $c$  constante supérieure à 1), la seule solution stable comprise entre  $u$  et  $v$  est  $\Theta_2$  qui est alors limite commune de  $\tilde{\theta}_u(x;t)$ ,  $\tilde{\theta}(x;t)$  et  $\tilde{\theta}_v(x;t)$ . Cela signifie que le convexe  $K_{\Theta_1;C}$  est contenu dans la zone d'attraction  $Z_2$  de  $\Theta_2$ .

Remarque Pour nous situer dans le cadre d'application de ces résultats, il faut que  $f'$  soit minorée et que les sous solutions et sur solutions soient essentiellement bornées. Nous nous situons largement dans ce contexte.

Il est cependant souhaitable de maintenir  $\theta$  la condition initiale inférieure à  $\Theta_1$  car on pourrait alors se situer dans le convexe "supérieur"  $K_{\Theta_1, c}$ .

L'énoncé de la proposition 5 pour les mêmes raisons peut s'étendre au cas où le problème stationnaire (2) admet une seule solution non triviale (cas où  $\lambda = 2 J(\omega_m)$ )

## 6 - CONCLUSION DU CHAPITRE

Dans ce chapitre, nous avons mis en évidence des solutions d'équilibre stables. Par ailleurs l'utilisation des sur et sous solutions nous a permis d'approcher les domaines d'attraction de ces solutions stables.

On constate ainsi l'existence d'une température réduite  $\eta_1$  qui représenterait le seuil critique de perturbations thermiques.

Comme nous le soulignons dans le chapitre précédent, parmi les états d'équilibre thermique du CMS, celui qui nous intéresse davantage est l'état supra. Notre analyse nous a donc révélé que :

a°) Pour  $F(1) \leq 0$  ou  $0 < F(1) < 4 [J(\omega_m)]^2$  la solution triviale est globalement stable. En d'autres termes pour des "petites valeurs" de  $F(1)$  (en jouant sur  $k$ ,  $L$  et  $T_2 - T_b$ ) l'ingénieur est assuré d'obtenir un système thermique globalement stable. Aucun seuil thermique critique ne se révèle dans ce cas et l'on est assuré que le système cryogénique évoluera, après une perturbation thermique, vers la solution supra. Notons enfin que  $F(1) \leq 0$  correspond au seuil des aires égales de MADDOCK. (voir C. MEURIS/1, /2), STEFAN L. WIPF/1, W.NICK/1)

Notre étude nous a donc conduit à un nouveau critère de stabilité globale :

$$F(1) < 4 [J(\omega_m)]^2$$

b°/ Pour  $F(1) = 4 [J(\omega_m)]^2$ , le seuil critique de perturbation de la température réduite qui assure la stabilité du système supra est  $\omega_m$ . Ce qui correspond à la température :  $\omega_m (T_2 - T_b) + T_b$ . Pour une perturbation dépassant ce seuil critique, la température évoluera vers un profil stationnaire non supra (zone normale) dont le maximum sera toutefois  $\omega_m (T_2 - T_b) + T_b$ .

c°/ Pour  $F(1) > 4 [J(\omega_m)]^2$ , le seuil critique de perturbation de la température réduite assurant la stabilité du système supra est la température réduite  $\eta_1 < \omega_m$ . Ce seuil correspond à la température  $\eta_1 (T_2 - T_b) + T_b$ . Pour une perturbation supérieure au seuil critique en son maximum, il y aurait évolution de la température vers le profil thermique d'équilibre non supra. Notons que le seuil critique est supérieur à  $\omega_1$ .

**Le profil thermique  $\Theta_1$  (instable) nous semble correspondre dans le cas d'un conducteur de longueur infini à la Z.M.P. On peut donc dire que  $\Theta_1$  représente la Z.M.P pour un conducteur de longueur finie.**

Ces critères peuvent être illustrés à travers les figures 2 ci-après :

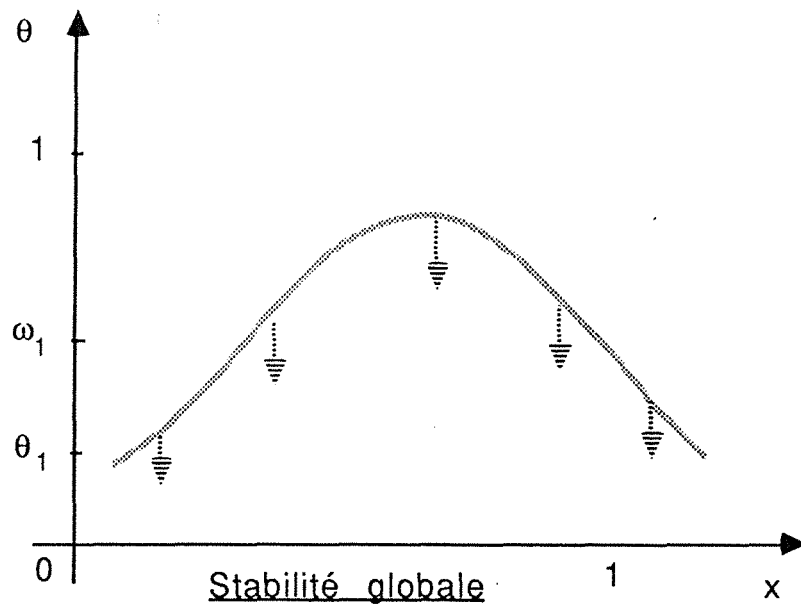


Fig 2a: cas où :  $F(1) \leq 0$  ou  $0 < F(1) < 4[J(\omega_m)]^2$

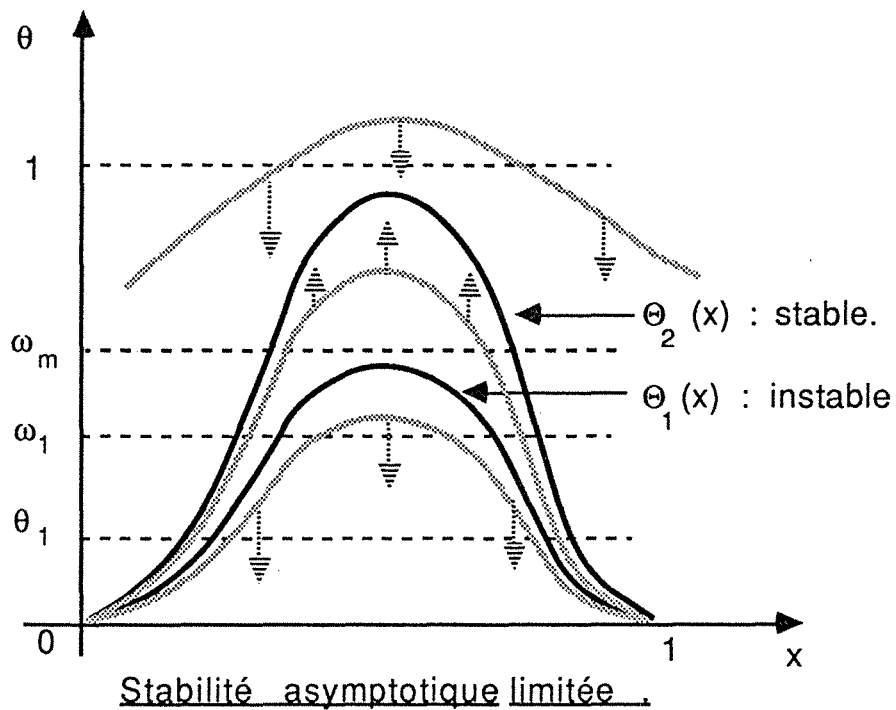
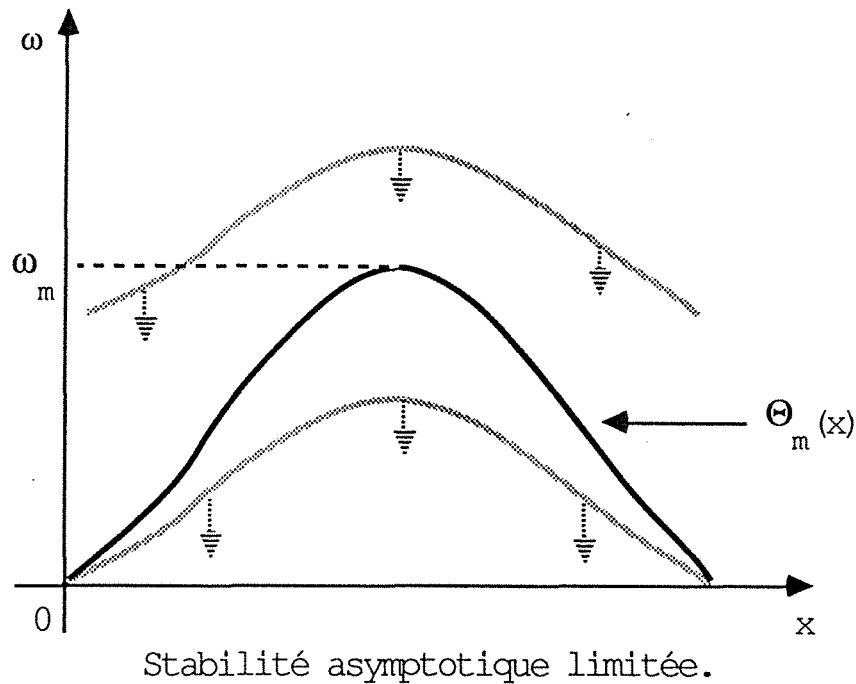


Figure 2-b : Cas  $F(1) > 4[J(\omega_m)]^2$



Figure 2-c : cas où  $F(1) = 4 [J(\omega_m)]^2$ **Figures 2 : illustration des domaines d'attraction des solutions stables**

Ces critères de stabilité permettent donc de prévoir le comportement du système cryogénique en influant sur les paramètres  $L$ ,  $k$  et  $T_2 - T_b$ . Il est clair que l'intensité de l'énergie perturbatrice  $y$  jouera un rôle important.

Notons également que le maintien des extrémités du conducteur à la température du bain nécessite un écoulement continu du réfrigérant, en l'occurrence l'hélium liquide (capacité illimitée dans le temps). Dans le cas d'un volume limité d'hélium, le problème (1) et l'étude doivent être reconsidérés car dans ces conditions  $\varphi$  dépend du temps ; nous avons affaire alors à un système non autonome.

Signalons aussi que le plus souvent dans les installations le CMS est maintenu par des supports, ce qui entraîne la présence de zones non refroidies;  $\varphi$  est alors une fonction explicite de la température et de la position  $x$ .

Pour terminer, remarquons que dans le cas d'un conducteur de longueur infinie en présence d'une zone non refroidie (de longueur  $l$ ) C. MEURIS/1 a mis en évidence (avec  $\varphi$  affine par morceaux) l'existence de deux solutions stables (l'une d'elle est la solution supra) dont l'illustration des zones d'attraction rappelle le graphique de la figure 2-b.

## CONCLUSION

--ooOoo--

## CONCLUSION

### I - Rappel sur l'objet du travail

Nous nous sommes intéressés dans ce mémoire au comportement thermique d'un supraconducteur unidimensionnel, plongé dans un bain cryogénique destiné à le maintenir à une température  $T_b$  adéquate, afin qu'il conserve ses propriétés supraconductrices. Cependant des perturbations thermiques accidentelles peuvent conduire à une évolution de la température  $T$  régie par le problème suivant :

$$(1) \left\{ \begin{array}{l} C \frac{\partial T}{\partial t} (X,t) - k \frac{\partial^2 T}{\partial X^2} (X,t) = H(T) \\ T(0;t) = T(L;t) = T_b \quad \forall t > 0 \\ T(X;0) = T_0(X) \quad \forall X \in [0; L] \end{array} \right.$$

où  $H(T)$  représente la compétition entre les puissances calorifiques linéiques  $G(T)$  (produite par effet Joule) d'une part et  $Q(T)$  (absorbée par le bain réfrigérant) d'autre part.

En fait on a  $H(T) = G(T) - Q(T)$  (voir figures reprises ci-après)

Figures 1 ; 2 ; 3 et 4

Avec les notations suivantes :

$$H(T) = G(T) - Q(T) ;$$

$$f(\theta) = \frac{L^2}{k(T_2 - T_b)} [G((T_2 - T_b)\theta + T_b) - Q((T_2 - T_b)\theta + T_b)] = \frac{L^2}{k(T_2 - T_b)} H(T) \quad \text{et}$$

$$F(\theta) = \frac{2L^2}{k(T_2 - T_b)} \int_0^\theta \bar{H}(s) ds \quad \stackrel{\text{def}}{=} \quad \frac{L^2}{k(T_2 - T_b)^2} \mathcal{H}(T) ;$$

$$\Phi(\theta) = \frac{\mathcal{H}(T)}{\mathcal{H}(T_2)}$$

$$J(\theta) = \int_0^\theta \frac{ds}{\sqrt{\Phi(\theta) - \Phi(s)}} = \frac{1}{T_2 - T_b} \int_{T_b}^T \frac{\sqrt{\mathcal{H}(T_2)}}{\sqrt{\mathcal{H}(T) - \mathcal{H}(\tau)}} d\tau \quad \text{pour } T_r < T < T_2 .$$

$$\mathcal{P} \mathcal{H} = \min_{T_r < T < T_2} \{ P \mathcal{H}(T) \} > \frac{L}{2\sqrt{k}}$$

$$\text{avec } P \mathcal{H}(T) = \int_{T_b}^T \frac{d\tau}{\sqrt{\mathcal{H}(T) - \mathcal{H}(\tau)}}$$

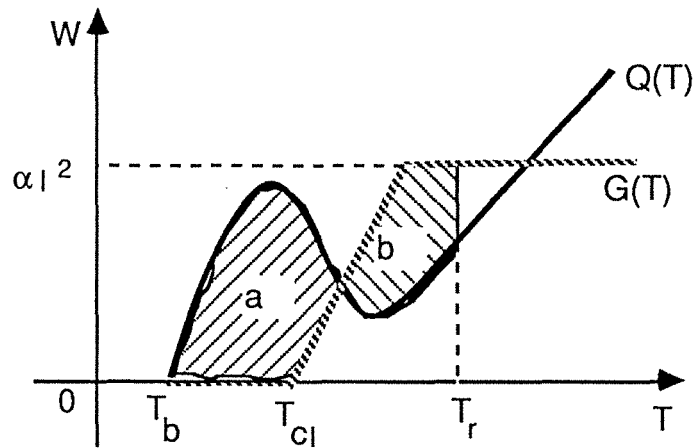


Figure 1 : termes sources  $G(T)$  et  $Q(T)$ .

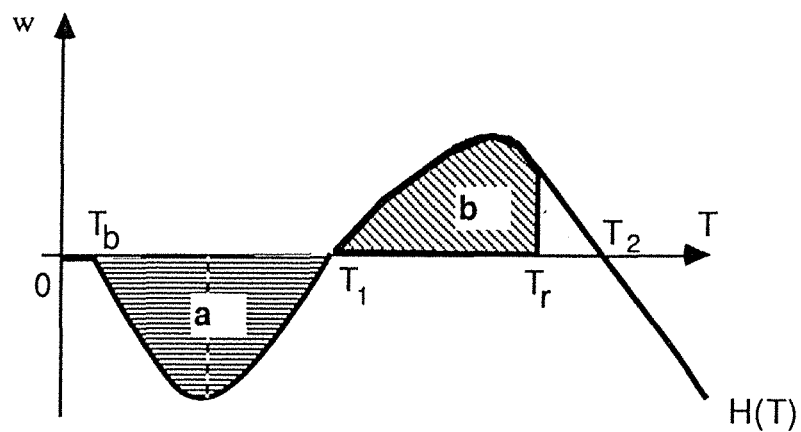
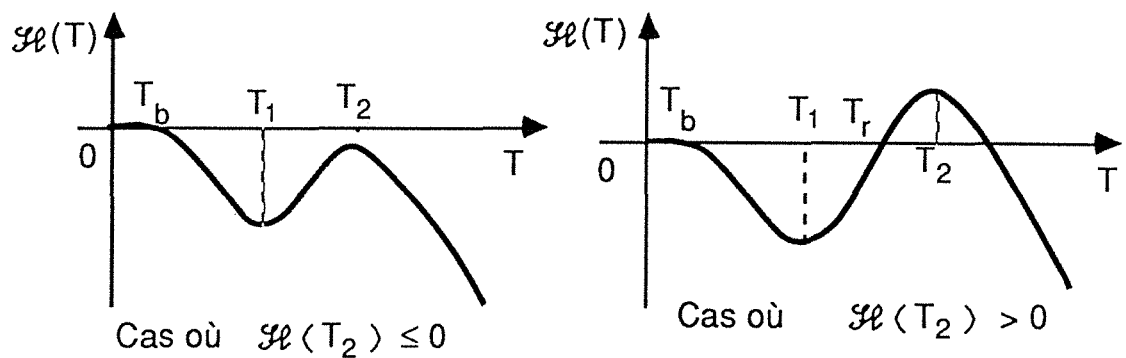


Figure 2 : allure du terme source  $H(T)$   
( $a = b$ )



Figures 3 allure de la primitive de  $2H(T)$  :  $\mathcal{H}(T)$

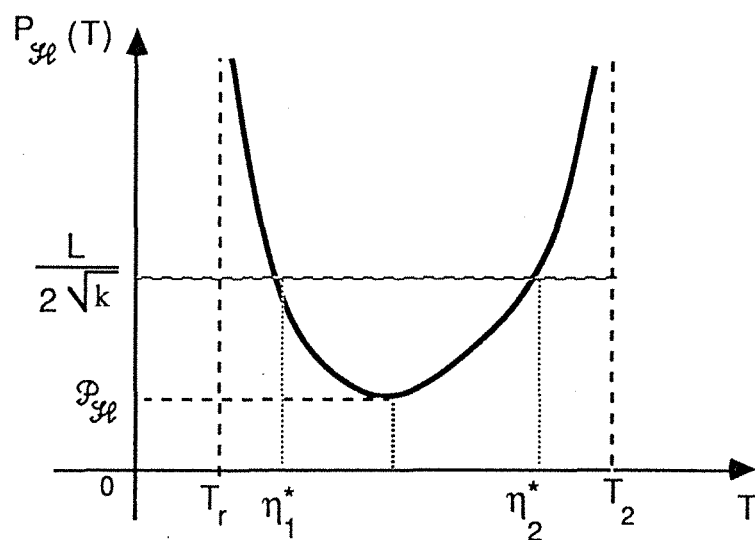


Figure 4 : position relative des maxima  $\eta_1^*$  et  $\eta_2^*$   
des profils d'équilibre de température.

## 2 - RESULTATS OBTENUS

### 2-1 Possibilité de solution stationnaire autre que Supra

Nous avons d'abord cherché quels étaient, en fonction des paramètres du problème, les états stationnaires possibles vers lesquels pourrait évoluer la température du supraconducteur.

Nous avons mis en évidence, en plus de l'état supra ( $T \equiv T_b$ ) l'existence d'au plus 2 autres profils thermiques  $\Theta_1^*$  et  $\Theta_2^*$ .

Plus précisément :

A°/ Seul l'état supra existe lorsque les données vérifient l'une des 2 conditions suivantes (cf notations sur les pages de figures)

soit

$$(3) a \quad \mathcal{H}(T_2) \stackrel{\text{def}}{=} 2 \int_{T_b}^{T_2} H(T) dT \leq 0$$

soit

$$(3) b \quad \mathcal{H}(T_2) = \int_{T_b}^{T_2} H(T) dT > 0 \text{ et } \frac{L}{2\sqrt{k}} < T_r < \min_{T_b < T < T_2} \{ P_{\mathcal{H}}(T) \} \stackrel{\text{def}}{=} P_{\mathcal{H}}$$

(Pour le détail des transformations voir en annexes B)

B°/ Si les conditions précédentes ne sont pas satisfaites (cf illustration sur fig 4) alors deux autres solutions  $\Theta_1^*$  et  $\Theta_2^*$  sont possibles ; les maxima respectifs  $\eta_1^*$  et  $\eta_2^*$  de ces profils

réalisent l'égalité :

$$(4) \quad \boxed{\frac{L}{2\sqrt{k}} = P_{\mathcal{H}}(\eta_i^*) \quad (i = 1 \text{ ou } 2)}$$

C°/ Ces profils sont ordonnés comme suit :

$$T_b < \Theta_1^*(x) \leq \Theta_2^*(x) < 1 \quad \forall x \in ]0; L[.$$

l'égalité entre  $\Theta_1^*$  et  $\Theta_2^*$  n'ayant lieu que pour  $\frac{L}{2\sqrt{k}} = P_{\mathcal{H}}$

## **2-2 Possibilité de retour à l'état supra après une éventuelle perturbation**

Nous nous sommes ensuite attachés à étudier la stabilité de ces profils et avons montré que :

A°/  $T_b$  la solution supra (souhaitable) est :

- globalement stable si l'une des conditions (3)a ou (3)b est réalisée. Cela signifie que les perturbations thermiques se résorbent toujours.
- asymptotiquement stable pour toute perturbation thermique inférieure à  $\Theta_1^*$ .

B°/ Le profil thermique stationnaire intermédiaire  $\Theta_1^*$  est instable, c'est la Z.M.P.

C°/ Le profil de température  $\Theta_2^*$  est asymptotiquement stable pour toute perturbation strictement supérieure à  $\Theta_1^*$ .

D°/ Une perturbation de la forme  $\Theta_1^*$  peut éventuellement ne pas se résorber.

## **3 - REMARQUES**

Les résultats obtenus sont nouveaux en ce sens que seul le critère

$$\mathcal{H}(T_2) \leq 0$$

(critère des aires égales dans lequel n'intervient pas l'effet de la longueur  $L$  du conducteur) a déjà, à notre connaissance, été utilisé pour éviter les situations non supra.

Les nouveaux critères proposés intéresseront les praticiens dès que l'on sera capable de calculer  $\mathcal{P}_{\mathcal{H}}$  pour toute fonction source  $H(T)$  ; ce qui est possible avec les méthodes numériques actuellement disponibles. La mise au point de ces calculs sera l'un de nos prochains objectifs.

Cependant on peut d'ores et déjà par une approche plus grossière :

- assurer que  $\mathcal{P}_{\mathcal{H}}$  est strictement positif et déterminer de façon plus ou moins optimale une contrainte strictement positive inférieure à  $\mathcal{P}_{\mathcal{H}}$ .
- donner des indications sur la manière de modifier  $H$  pour accroître  $\mathcal{P}_{\mathcal{H}}$ .

Des informations sur les allures des solutions stationnaires non supra ont été obtenues ; cependant il nous semble utile de déterminer  $\Theta_1^*$  et  $\Theta_2^*$  pour mieux connaître la zone d'attraction de la solution supra.

Il ne nous paraît pas inintéressant d'analyser le comportement thermique pour des perturbations de profil qui couperait  $\Theta_1^*$  et en particulier celles qui se produiraient aux extrémités 0 et L du conducteur ; nous n'avons en effet envisagé dans ce mémoire que des perturbations  $\tilde{T}(x)$  telles que  $T_b \leq \tilde{T}(x) \leq \Theta_1^*(x)$  ou  $\Theta_1^*(x) \leq \tilde{T}(x)$

Notons enfin que la conductivité thermique  $k$  (qui apparaît comme un paramètre crucial de stabilité de système) a été considérée comme indépendante de la température dans notre étude. **Toutefois cette étude s'adapte dans le cas où  $k$  est une fonction affine et croissante de la température  $T$ .**

En effet dans cette condition, le problème stationnaire (2) de chapitre IV se ramène à :

avec un changement de variable (voir NIVOIT, PAULMIER, PROFIZI/1)

$$(5) \quad \begin{cases} k_1 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + g(U) & \text{dans } ]0;1[ \\ U(0) = U(1) = 0 \end{cases}$$

où  $U$  est une "pseudo température" définie par :



$$(6) \quad \begin{array}{l} \text{(a)} \quad U(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{k_1} \int_0^{\theta(x)} k(s) ds \quad \text{avec } k_1 = \int_0^1 k(s) ds \\ \text{et} \\ \text{(b)} \quad g(U(x)) \stackrel{\text{def}}{=} f(\theta(x)) \end{array}$$

Rappelons également que  $\theta(x)$  est la température réduite rapportée à celle du bain.

Cette "pseudo-température" répond à nos exigences dès que  $g(U)$  a les mêmes propriétés que  $f$ . L'on pourra donc aisément passer de  $U$  à  $\theta$  et à  $T$  par les transformations inverses de (6)a et des équations réduites donnant  $\theta$  en fonction de la température  $T$ . (cf annexes C)

Pour terminer ces remarques signalons que dans le cas où la longueur du conducteur est infinie, il existe une seule solution stationnaire non constante à extrémité froide, elle a pour maximum  $T_r$  et est instable. C'est le profil thermique communément appelé ZMP. Le problème thermique stationnaire admet outre la solution triviale, deux solutions constantes  $\theta_1$  et 1 à extrémités non froides (voir par exemple ARONSON/1 ou DRESNER/1)

#### 4 - PERSPECTIVES

Les études envisagées dans ce mémoire s'adaptant à un cas unidimensionnel avec un facteur source indépendant du temps devront être généralisées (avec des hypothèses moins restrictives). On pourra donc considérer :

- une étude du problème thermique avec un terme source dépendant de temps  $t$  (ce cas survient dans les installations où la capacité du réfrigérant n'est pas illimitée), on a alors un système non autonome.
- la question avec le terme source dépendant de la position  $x$  pourra être également envisagée. Cet aspect est très important dans la mesure où la présence d'espaceurs dans l'installation perturbe l'échange avec le bain cryogénique ( $G$  nulle à l'intérieur des espaceurs).

L'application du critère de stabilité globale nécessite comme nous l'avons souligné le calcul de  $\mathcal{P}_H$ . Notre équipe s'y penche déjà en collaboration avec G. MAURICE (numéricien).

Toutes ces considérations pourront être couplées avec le cas bi ou tri dimensionnel et analysées avec des formes plus complexes du terme source  $H$ .

# **ANNEXES**

**--ooOoo--**

ANNEXES AAnnexe A 1. : Convergence de  $J(\omega)$ .

Rappelons que :

$$J(\omega) = \int_0^{\omega} \frac{ds}{\sqrt{\Phi(\omega) - \Phi(s)}} ;$$

$$J'(\omega) = \int_0^{\omega} \frac{l(\omega) - l(s)}{\omega[\Phi(\omega) - \Phi(s)]^{3/2}} ds \quad \text{avec } l(\omega) = \phi(\omega) - \omega\phi(\omega)$$

Un developpement limité de Taylor au voisinage de  $\omega$  nous donne à l'ordre 2 :

$$l(s) - l(\omega) = (s-\omega)l'(\omega) + \frac{(\omega-s)^2}{2} l''(\omega) + o(s-\omega)^3 ;$$

$$\Phi(s) - \Phi(\omega) = 2(s-\omega)\phi(\omega) + (s-\omega)^2\phi'(\omega) + o(s-\omega)^3 ;$$

$$\begin{aligned} \text{Soit } \frac{l(\omega) - l(s)}{\omega[\Phi(\omega) - \Phi(s)]^{3/2}} &\simeq \frac{(\omega-s)l'(\omega) - \frac{(\omega-s)^2}{2} l''(\omega)}{\omega[2(\omega-s)\phi(\omega) - (\omega-s)^2\phi'(\omega)]^{3/2}} \\ &= \frac{(\omega-s)[l'(\omega) - \frac{(\omega-s)}{2} l''(\omega)]}{\omega(\omega-s)^{3/2}[2(\omega-s)\phi(\omega) - (\omega-s)^2\phi'(\omega)]^{3/2}} \simeq \frac{l'(\omega) - \frac{(\omega-s)}{2} l''(\omega)}{\omega(\omega-s)^{1/2}[2\phi(\omega) - (\omega-s)\phi'(\omega)]^{3/2}} \\ &\simeq \frac{l'(\omega)}{\omega(\omega-s)^{1/2}[2\phi(\omega)]^{3/2}} \quad \text{est d'une singularité d'ordre } (\omega-s)^{-1/2} ; \end{aligned}$$

on en déduit que  $J'(\omega)$  converge pour  $\omega \neq \omega_1$  et  $\omega \neq 1$ .

## Annexe A 2 : Convergence de $J''(\omega)$

Rappelons  $J''(\omega)$  :

$$J''(\omega) = \int_0^{\omega} \frac{\delta \tilde{l}' \cdot \delta \Phi - 3 \delta \tilde{\varphi} \cdot \delta l}{\omega^2 (\delta \Phi)^{5/2}} ds \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \delta \Phi = \Phi(\omega) - \Phi(s) \\ \delta l = l(\omega) - l(s) \\ \delta \tilde{l}' = \omega l'(\omega) - s l'(s) \\ \delta \tilde{\varphi} = \omega \varphi(\omega) - s \varphi(s) \end{cases}$$

Pour  $s = 0$ ,  $\delta \Phi$  est parfaitement défini.

Reste à étudier l'ordre de grandeur de l'intégrant au voisinage de  $\omega$ .

On sait que pour  $s$  voisin de  $\omega$  :

$$\delta \Phi \simeq 2(\omega - s)\varphi(\omega),$$

$$\delta l \simeq (\omega - s)l'(\omega),$$

$$\delta \tilde{\varphi} \simeq (\omega - s)[\omega \varphi'(\omega) + \varphi(\omega)],$$

$$\delta \tilde{l}' \simeq (\omega - s)[\omega l''(\omega) + l'(\omega)],$$

si bien que

$$\frac{\delta \tilde{l}' \delta \Phi - 3 \delta \tilde{\varphi} \delta l}{\omega^2 (\delta \Phi)^{5/2}} \sim \frac{(\omega - s)^2}{(\omega - s)^{5/2}} \text{ est de l'ordre de } (\omega - s)^{-1/2}.$$

Cela signifie que  $J''(\omega)$  est bien défini pour  $\omega \neq \omega_1$  et  $\omega \neq 1$ .

**ANNEXE B****Transformations dimensionnelles relatives aux critères de stabilité.**

Avec les notations introduites au chapitre II nous avons :

$$B1 \quad \boxed{H(T) = G(T) - Q(T)}$$

$$B2 \quad \boxed{t = \frac{t'}{\tau}, \quad x = \frac{X}{L}, \quad \theta = \frac{T(X;t') - T_b}{T_2 - T_b}}$$

$$f(\theta) = \frac{L^2}{k(T_2 - T_b)} [G((T_2 - T_b)\theta + T_b) - Q((T_2 - T_b)\theta + T_b)] = \frac{L^2}{k(T_2 - T_b)} H(T) \quad \text{et}$$

$$F(\theta) = \frac{2L^2}{k(T_2 - T_b)^2} \int_0^\theta H(s) ds \quad \stackrel{\text{def}}{=} \quad \frac{L^2}{k(T_2 - T_b)^2} \mathcal{H}(T);$$

$$\text{c'est-à-dire que } H(T) = 2 \int_0^\theta H(s) ds \quad \text{et comme } \lambda^2 = \Phi(1) \text{ on en déduit que :}$$

$$\Phi(\theta) = \frac{\mathcal{H}(T)}{\mathcal{H}(T_2)} \quad \text{soit en remplaçant } \Phi(\theta) \text{ par son expression et en effectuant le}$$

changement de variables  $s = \frac{\tau - T_b}{T_2 - T_b}$  on obtient :

$$J(\theta) = \int_0^\theta \frac{ds}{\sqrt{\Phi(\theta) - \Phi(s)}} = \frac{1}{T_2 - T_b} \int_{T_b}^T \frac{\sqrt{\mathcal{H}(T_2)}}{\sqrt{\mathcal{H}(T) - \mathcal{H}(\tau)}} d\tau \quad \text{pour } T_r < T < T_2.$$

Ainsi la condition de stabilité globale :

$$F(1) < \min_{\omega_1 < \omega < \omega_2} \{ J(\omega) \}$$

s'écrit :

$$B3 \quad \boxed{\mathcal{P} \mathcal{H} = \min_{T_r < T < T_2} \{ P \mathcal{H}(T) \} > \frac{L}{2\sqrt{k}}} \quad \text{avec } P \mathcal{H}(T) = \int_{T_b}^T \frac{d\tau}{\sqrt{\mathcal{H}(T) - \mathcal{H}(\tau)}}$$

d'où la relation (3b) du chapitre Conclusion.

ANNEXE CTENTATIVE DE GENERALISATION AU CAS  
OU  $k$  DEPEND DE LA TEMPERATUREI- POSITION DU PROBLEME

Nous partons du problème :

$$(i) \begin{cases} C \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} [k(\tilde{\theta}) \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial x}] = f(\tilde{\theta}) \\ \tilde{\theta}(0,t) = \tilde{\theta}(1,t) = 0 \quad \forall t \geq 0 \\ \tilde{\theta}(x,0) = \theta_0 \quad \forall x \in [0;1] \end{cases}$$

soient alors :

$$(ii) \quad k_1 = \int_0^1 k(s) \, ds \quad : \text{valeur moyenne de la conductivité thermique sur } [0; 1];$$

$$(iii) \quad U(\theta(x)) = \frac{1}{k_1} \int_0^{\theta(x)} k(s) \, ds \quad \stackrel{\text{def}}{=} \quad u(x)$$

une "pseudo température"

Nous noterons  $\tilde{u}$  au lieu de  $u$  lorsque la "pseudo température" est non stationnaire.

On obtient :

$$u(0) = 0; \quad u(1) = 0$$

Des équations (i) nous déduisons :

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} = \frac{1}{k_1} \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial t} \cdot k \tilde{\theta} \Rightarrow \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial t} = \frac{k_1}{k \tilde{\theta}} \cdot \frac{\partial u}{\partial t}$$

(iv)

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} = \frac{1}{k_1} \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial x} \cdot k \tilde{\theta} \Rightarrow \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} = \frac{1}{k_1} \frac{\partial}{\partial x} [k \tilde{\theta} \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial x}]$$

puisque  $k$  est supposé ne pas dépendre explicitement de  $t$  et de  $x$ .

De là on tire :

$$(v) \begin{cases} \frac{k_1}{f(\beta(\tilde{u}))} \cdot \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} - k_1 \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} = g(\tilde{u}) \\ \tilde{u}(0;t) = \tilde{u}(1;t) = 0 \\ \tilde{u}(x,0) = U(\theta_0) \end{cases}$$

Ainsi, résoudre le problème (i) revient à étudier (v), à déterminer les profils de "pseudo température".

notons que  $\beta$  et  $g$  sont définis de la manière suivante :

$$(vi) \begin{cases} \beta(u) = \theta \Leftrightarrow U(\theta) = u \\ g = f \circ \beta \end{cases}$$

$\beta$  est la fonction réciproque de  $U$  ; elle est parfaitement définie puisque  $U$  est strictement croissante lorsque l'on fait l'hypothèse que  $k$  est croissante.

## II - ANALYSE DU PROBLEME ELLIPTIQUE ASSOCIE

Le problème stationnaire associé aux équations (v) est :

$$(vii) \begin{cases} -k_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = g(u) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

\* Il est clair que  $g$  et  $f$  ont les mêmes variations car  $\beta$  est strictement croissante ;  $g$  a aussi trois zéros que nous notons  $0$  ;  $u_1$  et  $1$ .

Reste à étudier  $g''$  et voir dans quelles conditions  $g$  admet tout comme  $f$  un seul point d'inflexion dans  $] 0 ; 1 [$ .

Nous avons :

$$(viii) \quad g''(u) = \beta''(u) f'(\beta(u)) + [\beta'(u)]^2 f''(\beta(u)) \text{ et}$$

$$\beta'(u) = \frac{1}{U'(\beta(u))} = \frac{k_1}{k(\beta(u))} > 0$$

$$\beta''(u) = -k_1 \frac{[k(\beta(u))]' }{k^2(\beta(u))} = -k_1^2 \cdot \frac{k'(\beta(u))}{k^3(\beta(u))}$$

d'où

$$g''(u) = \frac{k_1^2}{k^2(\beta(u))} \left[ f''(\beta(u)) - \frac{k'(\beta(u))}{k(\beta(u))} \cdot f'(\beta(u)) \right]$$

$$(ix) \quad g'' = \frac{k_1^2}{k^3} [k f'' - k' f']$$

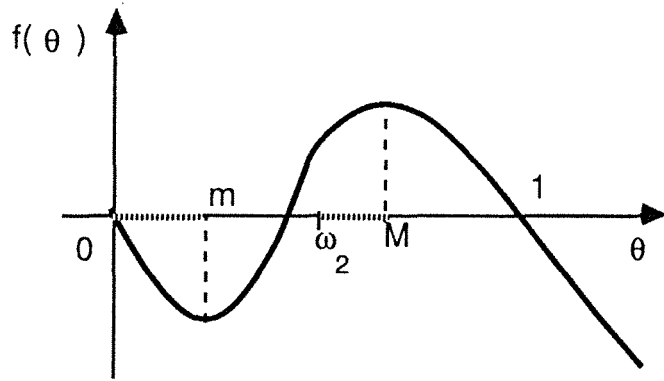
Observons qu'au point d'inflexion éventuel de  $g$  on doit avoir  $g'' = 0$  avec un changement de signe.

Puisque  $k$  et  $k'$  sont positifs, le point d'inflexion, s'il existe, ne peut être que dans un intervalle où  $f'$  et  $f''$  sont de même signe.

Soit pour  $\theta$  dans  $] m ; \omega_2] \cup ] M ; 1]$

(cf figure ci-après)





$$g''(u) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad k(\theta) f''(\theta) - k'(\theta) f'(\theta) \stackrel{\text{def}}{=} p(\theta) = 0$$

avec  $\beta(u) = \theta$

On a :

$$\begin{cases} p(m) = k(m) f'''(m) > 0 \\ p(\omega_2) = -k'(\omega_2) f'(\omega_2) < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} p(M) = k(M) f''(M) < 0 \\ p(1) = k(1) f''(1) - k'(1) f'(1) \end{cases}$$

En faisant l'hypothèse que  $f$  est trois dérivable on obtient :

$$p'(\theta) = k(\theta) f'''(\theta) - k''(\theta) f'(\theta)$$

qui serait non positive si nous supposons  $k''(\theta) = 0$  puisque  $f'''(\theta) \leq 0$  sur  $]0; 1[$

Le fait que  $k''(\theta)$  soit égal à zéro est une condition suffisante d'unicité du point d'inflexion de  $g$  ; elle n'est pas nécessaire. Une étude beaucoup plus approfondie de  $p'(\theta)$  doit être requise pour déterminer des conditions moins restrictives sur  $k$ .

### Conclusion :

Ainsi avec l'hypothèse que  $k$  est strictement croissante et affine en  $\theta$  nous pouvons conclure que le problème stationnaire (vii) répond aux hypothèses d'études envisagées dans le mémoire.

# **BIBLIOGRAPHIE**

**--ooOoo--**

**BIBLIOGRAPHIE.****AGMON S.- A. DOUGLIS & L.NIREMBERG :**

/1 "Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions."  
Comm. Pure Appl. Math., 12, 1959, p.623-727.

**AMMAN H.:**

/1 "On the existence of positive solutions of nonlinear elliptic boundary value problems."  
Indiana University Mathematic Journal- 21, 1971, p.125-146.

/2 "Existence of multiple solutions for elliptic boundary value problem"  
Indiana University mathematic Journal- 21, 1972 p 925.

**ARIS R.:**

/1 "The mathematical theory of diffusion and reaction in permeable catalysts"  
Clarendon Press; Oxford 1975

**ARONSON D.G.:**

/1 "A Comparison Method for Stability Analysis of Linear Parabolic Problems."  
Society for Industrial and Applied Mathematics (S.I.A.M.) Review, vol.20, n°2 april 1978, p 245-264.

**BAYNHAM D.E., V.W. EDWARDS, M.W. DEAN :**

/1 "Transient stability enhancement in high current density cables."  
I.I.F. (I.I.R.) Commission A1/2 Saclay (France 1981-6), p. 175-180.

**BOCCARDO L.- MURAT F. & PUEL J.P.:**

/1 "Resultats d'existence pour certains problèmes elliptiques quasilineaires ."  
Revue d'Analyse numérique et fonctionnelle. PARIS VI & CNRS n° 82035.

**BREZIS H.**

/ 1 " Analyse fonctionnelle: théorie et applications"  
Masson 1983.

**BROWN, IBRAHIM & SHIVAJI.:**

/1 "S shaped bifurcation curves"  
Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications. vol n° 5, 1981, p. 475-486.

**CHAFEE N.:**

/1 "A Stability Analysis for Semilinear Parabolic Partial Differential Equations."  
Journal of Differential Equations. (J.D.E.) 15 (1974) p. 522-540.

**CLAUDET G. - C. MEURIS - J. PARRAIN & B. TURCK :**

/1 "Superfluid Helium for stabilizing superconductors against local disturbances."  
IEEE Trans. on Magnetics - vol. MAG-15, n°1, 1979, p. 340

**CONRAD F.:**

/1 "Perturbation de problèmes aux valeurs propres non linéaires et problèmes à frontière libre."  
Thèse de doctorat d'Etat es-sciences mathématiques, Université Claude Bernard LYON I, 1983, n° 83-37.

**DAUTRAY R. & J.L. LIONS :**

/1 "Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques." Tome 1 collection CEA , Masson, 1984.

**DAVOUST M.E.:**

/1 "Conductivité électrique transverse dans les fils de matériaux composites multifilamentaires supraconducteurs."

Thèse de troisième cycle , 1978, Université de PARIS VI.

**DRESNER L.:**

/1 "Maximum Allowable Resistive Zone in Metastable Superconductor."

Oak Ridge National Laboratory / TM-8394, 1982.

**FOURNET G. & A. MAILFERT :**

/1 "Pénétration de l'induction , champ électrique et pertes dans les supraconducteurs de seconde espèce impur présentant un courant de surface."

Le Journal de Physique, tome 31, avril 1970, p.357-366.

**GARDNER R.:**

/1 " Global Continuation of Branches of Nondegenerate Solutions." J.D.E. 61 ,1986, p. 321-334.

**GERMAIN P.:**

/1 " Mécanique tome 1 "

Cours à l'Ecole Polytechnique - ellipses Paris - (1986) Edit. Marketing.

/2 "Mécanique tome 2 "

Cours à l'Ecole Polytechnique - ellipses Paris - (1986) Edit. Marketing.

**GIDAS B. WEI-MING NI & L. NIREMBERG.:**

/1 "Symetry and related properties via the maximum principle."

Comm. Math. Phys. 68, 1979, p. 209-243.

**GLOWINSKI R. & SERO-GUILLAUME O.**

/1 "Numerical Study of the current distribution in a supraconducting multifilamentary composite"

Computational Physic (1979 )

**HARTMAN P.:**

/1 "Ordinary Differential Equations."

second edition, 1982- Birkhäuser, Boston-Basel-Stuttgart.

**IWASA Y.:**

/1 " Conductor motion in the superconducting magnet- a review."

I.I.F. (I.I.R.) Commission A1/2 Saclay (France 1981-6) p. 125-137.

**KELLER H.B.:**

/1 "Elliptic boundary value problems suggested by nonlinear diffusion processes."

A.R.M.A., vol. 35, 1969, p.363-381.

**KIELHÖFER H.:**

/1 "Stability and semilinear Evolution Equations in Hilbert Space."

ARMA vol 57 n° 12 (1974) p. 150-165.

**KITTEL C.:**

/1 " Introduction à la physique de l'état solide."

Collection Dunod Université, 1981.

**LIONS P.L.:**

/1 "On the existence of positive solutions of semilinear elliptic equations."  
S.I.A.M. Review vol. 24 n° 4, oct. 1982, p. 441-467.

**LIONS P.L.:**

/2 "Two geometrical properties of solutions of semilinear problems."  
Appl. Anal., 1981

**LIONS P.L. & G. TROMBETTI:**

/1 "Comparaison des solutions d'équations paraboliques et elliptiques par symétrisation.  
Une méthode nouvelle."  
C.R.A.S. Paris t.303-Serie I, n° 20, 1986, p.975-978.

**LUSS D.:**

/1 "Uniqueness criteria for lumped and distributed parameter chemically reacting systems."  
Che. Eng. Sci. n°26, 1971, p.1713-1721.

**MAGINU K.:**

/1 "Stability of Stationary Solutions of Semilinear Parabolic Partial Differential Equations."  
J. Math. Anal. Appl. 63 (1978) p. 224-243.

**MAILFERT A:**

/1. "Supraconducteurs."  
Cours à l'Ecole Supérieure d'Electricité, 1975.

**MAILFERT A. & G. FOURNET :**

/1 "Propriétés des matériaux supraconducteurs pour l'électrotechnique."  
Entropie n°56, mars-avril 1974, p.5-13.

**MEURIS C.:**

/1 "Contribution à l'étude de la stabilité thermique des supraconducteurs."  
Thèse de doctorat d'Etat es sciences physiques présentée à l'INPL.(1982).

/2 "Influence of an uncooled region on the stability of superconducting conductors"  
I.I.F. (I.I.R.) Commission A1/2 Saclay (France 1981-6) p. 161-168.

**MEURIS C.- B. TURCK-P. SEYFERT & G. CLAUDET :**

/1 "Transient stability of superconductors cooled by superfluid Helium at atmospheric pressure."  
I.I.F. (I.I.R.) Commission A1/2 Saclay (France 1981-6) p. 215-223

**MIRGAUX A. & SAINT JEAN PAULIN J.**

"Asymptotic study of transverse conductivity in superconducting multifilamentary composite."  
Int. J. Sci. 20 (4), 1982, p. (587-600).

**NICK W.:**

/1 "Theoretical studies of stability in pool boiling Helium I."  
I.I.F. (I.I.R.) Commission A1/2 Saclay (France 1981-6) p. 139-150.

**NIVOIT M.-J.L. PROFIZI & D. PAULMIER :**

/1 "Etude des équilibres thermiques d'un filament chauffé par effet Joule."  
Int. J. Heat Mass transfer, vol. 24, 1981, p.707-713.

**PEROT J.:**

/1 "Les grands aimants supraconducteurs."  
La recherche, vol.12, 1981, p.1104-114.

**PUEL J.P.:**

/1 "Methodes de sous et sur solutions dans certains problèmes non linéaires et inéquations variationnelles."

Thèse de doctorat d'Etat es sciences mathématiques - Université de PARIS VI, 1975.

**RIES G.:**

/1 "Theoretical studies on stability in forced flow cooled superconductors."

I.I.F. (I.I.R.) Commission A1/2 Saclay (France 1981-6) p. 195-207.

**SAINT JEAN PAULIN J.:**

/1 "Etude de quelques problèmes de mécanique et d'électrotechnique liés aux methodes d'homogénéisation : II Electrotechnique."

Rapport du laboratoire d'analyse numérique et fonctionnelle, Paris VI & CNRS.  
Laboratoire associé 189.

**SATTINGER D.H.:**

/1 "Monotone Methods in Nonlinear Elliptic and Parabolic Boundary Value Problems."

Indiana University Mathematics Journal, vol 21, n° 11, 1972, p.979-1000.

/ 2 "Topics in stability and bifurcation theory."

Lecture Notes in Math. n° 309, Springer Verlag 1973.

**SERO-GUILLAUME O.**

/1 "Problème à frontière libre de type Stefan."

Thèse de doctorat de troisième cycle présentée à l'INPL ( 1978.)

**SHIVAJI R.:**

/1 "Uniqueness results for a class of positone problems."

Non linear Analysis Theory, Methods and Applications, vol.7, n°2, 1983, p.223-230.

**SMOLLER J. & A. WASSERMANN.:**

/1 "Global Bifurcation of Steady-state solutions."

J.D.E. 39, 1981, p.269-299.

/2 "An existence Theorem for positive solutions of Semilinear Elliptic Equations."

ARMA. vol. 95, n°3, 1986, p.211-226.

/3 "Symetry breaking for positive solutions of Semilinear Elliptic Equation."

ARMA. vol. 95, n°3, 1986, p.217-225.

**TUROWSKI P.:**

/1 "A review on stability experiments with superconductors in liquid Helium under pool boiling conditions."

I.I.F. (I.I.R.) Commission A1/2 Saclay (France 1981-6) p. 151-160.

**VISINTIN A.**

/1 "Phase transition in a Superconducting Multifilamentary Composite"

Instituts di Analisi Numerica des C N R (1982 - Italy - 1 - 12)

**VO-KHAC KHOAN**

/ 1 "Distibutions et analyse de Fourier, opérateurs aux dérivées partiellles."

tomes 1 & 2, Vuibert 1972.

**WIPF S.L.:**

/1 "Introduction to the stability - Review of progress since the 1977 stability workshop."

I.I.F. (I.I.R.) Commission A1/2 Saclay (France 1981-6) p. 119-124.

**AUTORISATION DE SOUTENANCE DE THESE**  
**DU DOCTORAT DE L'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE LORRAINE**

VU LES RAPPORTS ETABLIS PAR :

Monsieur CONRAD François, Professeur, Université Nancy II,  
Madame MEURIS Chantal, Docteur État, C.E.A., Gif s/Yvette.

Le Président de l'Institut National Polytechnique de Lorraine, autorise :

**M**onsieur BONZI Bernard Kaka

à soutenir devant l'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE LORRAINE, une thèse  
intitulée :

"Étude des équilibres thermiques d'un supraconducteur : existence  
et stabilité"

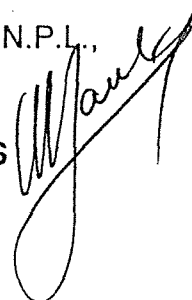
en vue de l'obtention du titre de :

**DOCTEUR DE L'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE LORRAINE**

Spécialité : "Mécanique & Energétique"

Fait à Vandoeuvre, le 13 Septembre 1990

Le Président de l'I.N.P.L.,





## ABSTRACT

### A study of thermal equilibriums existence and stability.

The equipments which use the superconduction phenomenon often present instabilities because not only are they complex but also as a result of the particular nature of superconductor materials (loss of their properties as soon as the temperature becomes too high).

Thermal instabilities are far from being the most important; they can provoke a transition from the superconductor state to the normal resistive one. One of the consequences of this transition is a strong thermal dissipation capable of causing serious damages.

What we have been working on has been to analyse a semi-linear Partial Differential Equation after proposing a formulation of the thermal problem : "exchange between conductor and cryogenic bath".

The study helps to identify the existence of stationary states. An analysis of their stability as well as attraction zones of the thermal fields of stable equilibriums is given as a function of physical parameters such as : the length of the conductor; the exchange function : "Supra-Cryogenic bath" and the thermal conductivity of the superconductor.

## RESUME

Les installations utilisant le phénomène de supraconduction présentent souvent des instabilités du fait de leur nature mais aussi de la particularité des matériaux supraconducteurs (perte de leur propriété dès que leur température devient excessive).

Les instabilités thermiques sont de loin les plus importantes, elles peuvent provoquer une transition du supraconducteur à l'état normal résistif. Une conséquence de cette transition est une énorme dissipation thermique susceptible d'entraîner d'importants dégâts matériels.

Le but de notre travail a été d'analyser, après une formulation du problème thermique : échange conducteur-bain cryogénique, une Equation aux Dérivées Partielles Semi linéaire.

Cette étude permet de mettre en évidence l'existence d'états stationnaires ; une analyse de leur stabilité ainsi que des zones d'attraction des champs thermiques d'équilibre stable est donnée en fonction des paramètres physiques tels que : la longueur du conducteur, certaines caractéristiques de la fonction échange supra-bain cryogénique et de la conductivité thermique du supraconducteur.