



AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

Synthèse de lois de commande pour les systèmes à commutations avec contraintes de performances

THÈSE

présentée et soutenue publiquement le 27/05/2011

pour l'obtention du

Doctorat de l'Institut National Polytechnique de Lorraine
Spécialité Automatique, Traitement du Signal et des Images, Génie Informatique

par

Julie MÉLIN

Composition du jury

<i>Président :</i>	Jean-Jacques LOISEAU	Directeur de Recherches CNRS, IRCCyN, Nantes
<i>Rapporteurs :</i>	Hervé GUÉGUEN	Professeur, Supélec, Rennes
	Sophie TARBOURIECH	Directrice de Recherches CNRS, LAAS-CNRS, Toulouse
<i>Examineurs :</i>	Jamal DAAFOUZ	Professeur, INPL, Nancy Université (directeur de thèse)
	Claude IUNG	Professeur, INPL, Nancy Université (co-directeur de thèse)
	Marc JUNGERS	Chargé de Recherches CNRS, CRAN Nancy (co-dir. de thèse)



Centre de Recherche en Automatique de Nancy
UMR 7039 Nancy-Université – CNRS

2, avenue de la forêt de Haye 54516 Vandœuvre-lès-Nancy
Tél.+33 (0)3 83 59 59 59 Fax +33 (0)3 83 59 56 44

Mis en page avec la classe thloria.

Remerciements

Les travaux de recherche présentés dans ce mémoire ont été effectués au Centre de Recherche en Automatique de Nancy (CRAN) une Unité Mixte de Recherche Nancy Université - INPL - CNRS - UMR 7039. Je remercie mes directeurs de thèse, M. Jamal Daafouz, professeur à l’Institut National Polytechnique de Lorraine, M. Marc Jungers, chargé de recherche CNRS au CRAN et M. Claude Iung, professeur à l’Institut National Polytechnique de Lorraine de m’avoir accueillie au sein du groupe thématique Automatique Commande et Observation des Systèmes (ACOS). Je leur suis reconnaissante pour leur patience, leur soutien, leurs conseils avisés et leur aide précieuse qui m’ont permis d’aller au bout.

Je tiens à exprimer toute ma gratitude à Mme Sophie Tarbouriech, directrice de recherche au LAAS-CNRS, et M. Hervé Guéguen, professeur à Supélec Rennes, d’avoir accepté d’être les rapporteurs de ce travail. Je remercie M. Jean-Jacques Loiseau, directeur de recherche à l’IRCCyN, président du jury, pour sa participation au jury. Je leur suis reconnaissante pour la lecture attentive de mon manuscrit et pour leurs remarques.

Je remercie également les membres du CRAN et mon tuteur de monitoring Ye-Qiong Song ainsi que Michel Dufner. Comme la thèse est également une aventure humaine, mes remerciements vont également aux doctorants de l’ENSEM ainsi qu’aux anciens doctorants pour les bons moments passés au labo : Diego, Ivan, Gil, Hugo, Rebecca, Ricardo, Christophe, Nedja, Olivier et ma nouvelle collègue de bureau Meriem.

Enfin, je ne peux pas conclure sans adresser mes plus chaleureux remerciements à mes parents et mes soeurs Pauline et Maud qui m’ont toujours soutenue. Il me faut également remercier de tout mon coeur Régis et je profite de ces quelques lignes pour lui dire à quel point sa confiance inconditionnelle en moi a été importante. Je n’oublie pas, bien entendu, ma petite princesse Louise dont les sourires et les gazouillis ont égayé la rédaction de cette thèse.

*A mes parents et mes soeurs,
A Régis et Louise.*

Table des matières

Notations	ix
Introduction générale	1
Chapitre 1 Prérequis sur les systèmes à commutations	5
1.1 Définition d'un système commuté	5
1.2 Stabilité des systèmes	7
1.3 Stabilité des systèmes linéaires à commutations pour une loi de commutation arbitraire	10
1.3.1 Approche spécifique au temps discret : le rayon spectral joint	10
1.3.2 Fonction de Lyapunov dépendant d'un paramètre	11
1.3.2.1 Fonction de Lyapunov quadratique commune	11
1.3.2.2 Fonction de Lyapunov dépendant d'un para- mètre	11
1.3.2.3 Fonction de Lyapunov dépendant du chemin	14
1.4 Stabilité des systèmes linéaires à commutations pour une loi de commutation contrainte	15
1.5 Stabilisation des systèmes linéaires à commutations par la loi de commutation	17
1.6 Stabilisation des systèmes linéaires à commutations	22
1.7 Conclusion	23
Chapitre 2 Analyse des performances	25
2.1 Introduction	25
2.2 Définition des performances	27
2.3 Majorant du coût garanti	30
2.4 Minorant du coût garanti	35

2.4.1	Validation du majorant	35
2.4.2	Amélioration de la validation du majorant	38
2.5	Encadrement du coût garanti pour une condition initiale donnée	39
2.6	Exemples numériques	40
2.7	Conclusion	47
Chapitre 3	Synthèse de lois de commande	49
3.1	Introduction	49
3.2	Synthèse d'un contrôleur par retour d'état.	51
3.3	Synthèse d'un contrôleur par retour d'état reconstruit par obser- vateur.	54
3.4	Synthèse d'un contrôleur par retour de sortie dynamique. . . .	58
3.5	Exemple	64
3.6	Conclusion	66
Chapitre 4	Application aux systèmes contrôlés en réseau	69
4.1	Introduction	69
4.2	Les Systèmes Contrôlés en Réseau	70
4.2.1	Problématiques	70
4.2.2	Difficultés des systèmes contrôlés en réseau	71
4.2.2.1	Quantification	71
4.2.2.2	Temps de transmission	71
4.2.2.3	Temps de traitement de l'information	72
4.2.2.4	Pertes de données	72
4.2.2.5	Période d'échantillonnage non périodique	73
4.2.3	Hypothèses concernant les retards induits par le réseau . . .	74
4.2.3.1	Retards inférieurs à la période d'échantillonnage	74
4.2.3.2	Retards multiples de la période d'échantillonnage	74
4.2.3.3	Retards supérieurs la période d'échantillonnage	75
4.3	Point de vue des systèmes commutés pour les SCR.	76
4.3.1	Modélisation du système	76
4.3.2	Modélisation des performances	81
4.3.3	Obtention d'une loi de commande certifiant les perfor- mances	82
4.3.4	Illustration académique	83
4.3.4.1	Exemple scalaire	83

4.3.4.2 Exemple de dimension 2	86
4.4 Conclusion	87
Chapitre 5 Conclusion générale et perspectives	91
5.1 Conclusion générale	91
5.2 Perspectives	92
Bibliographie	95
Résumé	105
Abstract	107

Notations

- $\mathbb{R}^n$ - ensemble des vecteurs réels de dimension n ,
- $\mathbb{R}^{n \times m}$ - ensemble des matrices réelles de tailles $n \times m$,
- $\mathbb{N}$ - ensemble des entiers naturels,
- $\llbracket n_1; n_2 \rrbracket$ - ensemble des entiers compris entre $n_1 \in \mathbb{N}$ et $n_2 \in \mathbb{N}$, $n_1 \leq n_2$,
- $M > 0$ - matrice définie positive,
- $M < 0$ - matrice définie négative,
- M^{-1} - inverse de la matrice carrée non singulière M ,
- M^T - transposée de la matrice M ,
- $M = \begin{bmatrix} A & B \\ \star & D \end{bmatrix}$ - matrice M symétrique où $\star$ désigne B^T ,
- $M^\perp$ - noyau de la matrice M ,
- $\text{diag}\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ - matrice diagonale avec $A_1, A_2, \dots, A_n$ sur la diagonale principale,
- $\Sigma = \{1, \dots, N\}$ - ensemble des N premiers nombres entiers positifs,
- $I_{n \times m}$ - matrice de taille $n \times m$ où $I_{ii} = 1, \forall i \leq \min(n, m)$ et $I_{ij} = 0, \forall i \neq j$,
- $I_n = I_{n \times n}$ - matrice identité de taille $n \times n$,
- $0_{n \times m}$ - matrice nulle de taille $n \times m$,
- 0_n - matrice nulle de taille $n \times n$,
- $\lambda_{\min}(A)$ - plus petite valeur propre de la matrice symétrique réelle A ,
- $\lambda_{\max}(A)$ - plus grande valeur propre de la matrice symétrique réelle A .

Introduction générale

Préambule

Les systèmes à commander sont désormais de plus en plus complexes. En particulier de nombreuses applications correspondent à des systèmes dits embarqués, qui généralement sont composés de sous-systèmes pilotés par un automate. De la même manière beaucoup de systèmes actuels présentent plusieurs comportements au cours du temps, afin de réaliser différentes tâches. Un automate gère alors ces différentes configurations. Les champs d'applications couvrent entre autre l'aéronautique, l'industrie automobile, l'industrie métallurgique, ainsi que la gestion d'énergie.

Ces types de structure peuvent être regroupés et modélisés par la catégorie générique des systèmes dynamiques hybrides. Ce sont des systèmes qui présentent une interaction entre des processus de dynamique à temps continu ou discret et des processus de type logique. La classe des systèmes dynamiques commutés constitue une classe importante des systèmes dynamiques hybrides. Un système dynamique commuté est l'association d'un ensemble fini de sous-systèmes différentiels ou aux différences et d'une loi de commutation qui indique à chaque instant le système actif.

Depuis plusieurs années, la communauté des automaticiens et mathématiciens appliqués s'est attachée à l'étude et à la maîtrise de ce type de systèmes, tout particulièrement sur la question de leur stabilité et de leur stabilisation. Ce domaine de recherche ayant atteint un certain degré de maturité, la question de l'étude des performances des systèmes commutés se pose naturellement. De récents travaux de la littérature commencent à aborder cette problématique, qui reste néanmoins largement ouverte.

Le lien entre les performances et les différentes lois de commutation reste encore peu étudié et maîtrisé. Les travaux de cette thèse s'inscrivent dans ce cadre pour les systèmes commutés linéaires à temps discret. Parmi différents problèmes identifiés, celui de la détermination d'un coût garanti, quelle que soit la loi de commutation sera tout particulièrement étudié. Un premier objectif de la thèse est d'effectuer cette détermination pour les systèmes linéaires commutés autonomes en la décomposant en deux étapes : tout d'abord un majorant de ce coût garanti sera obtenu à l'aide d'une fonction de Lyapunov commutée. Dans un second temps, de façon à valider l'écart entre le coût garanti et son majorant, un minorant du coût garanti sera proposé. Une étude critique sera détaillée pour discuter l'efficacité de cette méthode ainsi que ses

limites. Aussi, les liens avec les conditions suffisantes de stabilité des systèmes linéaires commutés seront mis en avant.

Un second objectif de la thèse est de proposer la synthèse de correcteurs afin de minimiser le majorant du coût garanti. Plusieurs classes de correcteurs commutés seront proposées : correcteur par retour d'état ; retour d'état estimé par un observateur ; retour dynamique de sortie. A titre d'illustration, ces méthodes seront appliquées aux systèmes contrôlés par un réseau, où le retard est un multiple de la période d'échantillonnage.

Structure du mémoire

En plus de cette introduction générale, ce mémoire comporte quatre chapitres et une conclusion générale. Sa structure, définie comme suit, a comme fil conducteur la démarche succinctement énoncée dans le préambule.

Chapitre 1

Le premier chapitre est constitué de définitions sur les systèmes linéaires commutés et de rappels sur leur stabilité. Les principaux outils pour la stabilité et la stabilisation de ces systèmes sont présentés comme prérequis à cette étude. Citons notamment les conditions suffisantes de stabilité et de stabilisation sous forme d'inégalités matricielles linéaires (LMI).

Chapitre 2

Le deuxième chapitre considère plus particulièrement les systèmes linéaires commutés autonomes associés à un cahier des charges de performances. Après avoir défini les performances à l'aide d'un critère à minimiser, un coût garanti est formalisé. Ce coût garanti étant difficile à déterminer de façon analytique, un encadrement à l'aide d'un majorant et d'un minorant sera proposé pour estimer, au mieux, celui-ci. Une discussion, fondée sur des exemples simples permettra de commenter l'efficacité et les limites de l'encadrement proposé.

Chapitre 3

Le troisième chapitre est consacré à la synthèse de lois de commande commutées qui minimisent le majorant du coût garanti. Plusieurs structures de contrôleurs commutés sont proposées : le retour d'état, le retour d'état reconstruit à l'aide d'un observateur et finalement un retour dynamique de sortie. Ces synthèses seront testées sur des exemples académiques.

Chapitre 4

Le but du quatrième et dernier chapitre est de montrer l'apport de notre méthode dans le cadre de la commande des systèmes commandés via un ré-

seau présentant un ou des retards commensurables.

Références liées à la thèse

Les travaux effectués durant cette thèse ont donné lieu aux publications suivantes.

Revues internationales avec comité de lecture

1. MELIN Julie, JUNGERS Marc, DAAFOUZ Jamal, IUNG Claude. *Performance analysis and design of dynamic output feedback control for switched systems*. International Journal of Control, Volume 84, Issue 2, pp. 253–260, February 2011.

Conférences internationales et nationales avec comité de lecture

1. MELIN Julie, JUNGERS Marc, DAAFOUZ Jamal, IUNG Claude. *Sur l'analyse de performance et l'approche SdH pour les systèmes commandés en réseau*. In Proceedings of Conférence Francophone Internationale en Automatique (CIFA'08). Bucarest, Roumanie, Septembre 2008.
2. MELIN Julie, JUNGERS Marc, DAAFOUZ Jamal, IUNG Claude. *On analysis of performance for digitally controlled and time-varying delayed systems*. In Proceedings of European Control Conference (ECC'09), pp. 4181–4186, Budapest, Hungary, August 2009.
3. MELIN Julie, JUNGERS Marc, DAAFOUZ Jamal, IUNG Claude. *On Performance Analysis of Time Delay Systems using a Switched System Approach*. In Proceedings of 3rd IFAC Conference on Analysis and Design of Hybrid Systems (ADHS'09). Zaragoza, Spain, September 16–18, pp. 192–197, 2009.
4. MELIN Julie, JUNGERS Marc, DAAFOUZ Jamal, IUNG Claude. *Analyse de performances et synthèse d'un contrôleur par retour de sortie dynamique pour les systèmes à commutation en temps discret*. In Proceedings of Conférence Francophone Internationale en Automatique (CIFA'10), Nancy, France, Juin 2010.

Chapitre 1

Prérequis sur les systèmes à commutations

Ce chapitre a pour objectif de fournir les prérequis sur les systèmes à commutations qui serviront de socle de connaissances utile pour les autres chapitres. Les systèmes à commutations à temps discret sont tout d'abord formellement définis. En effet, ce chapitre, ainsi que le reste du manuscrit se focalisera dans le cadre du temps discret et offrira un succinct état de l'art en ce qui concerne la stabilité des systèmes à commutations dans ce cadre. Différents rappels sur la stabilité de ces systèmes seront faits, afin de présenter les conditions nécessaires et suffisantes de stabilité des systèmes linéaires à commutations à temps discret, en utilisant comme outils le rayon spectral joint ou bien les fonctions de Lyapunov. Des conditions suffisantes de stabilisation des systèmes linéaires à commutations seront aussi indiquées. Pour ce rappel, plusieurs hypothèses seront considérées à propos des lois de commutation : lois de commutation *a priori* inconnues, ou bien vérifiant certaines contraintes tel un temps de maintien, ou bien encore faisant partie des moyens d'action (commande) des systèmes à commutations. Les références détaillant chacun des théorèmes et lemmes présentés dans ce chapitre seront indiquées et seules certaines démonstrations, essentielles pour la suite du manuscrit, seront proposées pour des raisons pédagogiques.

1.1 Définition d'un système commuté

Les systèmes à commutations sont un cas particulier des systèmes dynamiques hybrides [Zay01, AK03, Lib03, SWM⁺07]. Ils allient l'élégance de la simplicité et la richesse des phénomènes décrits. Un système à commutations est composé d'un ensemble fini de $N \in \mathbb{N}^*$ dynamiques, dont une et une seule est activée à chaque instant par une loi de commutation. Un système à commutations est dit à temps discret s'il est, plus précisément, composé de dynamiques aux différences. Un tel système peut se définir sous la forme suivante :

$$x_{k+1} = f_{\sigma(k)}(k, x_k, u_k), \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad (1.1)$$

$$z_k = g_{\sigma(k)}(k, x_k, u_k), \quad (1.2)$$

où $x_k \in \mathbb{R}^{n_x}$, $u_k \in \mathbb{R}^{r_u}$ et $z_k \in \mathbb{R}^{m_z}$ sont respectivement l'état, l'entrée et la sortie de performance du système. Les N couples de fonctions $f_i(\cdot, \cdot, \cdot)$ et $g_i(\cdot, \cdot, \cdot)$, $i \in \{1, \dots, N\}$ sont les dynamiques des sous-systèmes, ou *modes*. La fonction

$$\sigma : \begin{cases} \mathbb{N} & \rightarrow \Sigma = \{1, \dots, N\} \\ k & \mapsto \sigma(k) \end{cases} \quad (1.3)$$

est la *loi de commutation*, le mode $\sigma(k)$ est le mode *actif* à l'instant k . Le système à commutations à temps discret (1.1)-(1.2) est représenté sur la Figure 1.1.

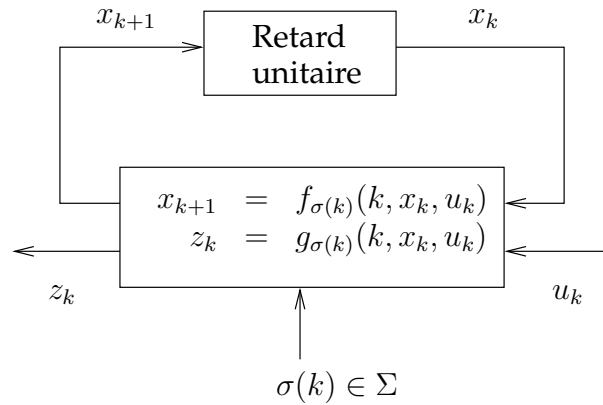


FIGURE 1.1 – Structure générique d'un système à commutations à temps discret.

La loi de commutation peut être générée par une loi temporelle, par un automate autonome ou non, ou encore par une partition de l'espace d'état. Afin de limiter la trop grande complexité de l'ensemble de ces cas, l'hypothèse sera faite que la loi de commutation sera *a priori* inconnue, arbitraire, mais que sa valeur courante $\sigma(k)$ à l'instant k sera accessible. Ainsi, la loi de commutation sera subie et ne fera pas partie des moyens d'action sur le système.

Le modèle correspondant aux systèmes à commutations (1.1) et (1.2) est très général. Dans ce manuscrit, la classe des systèmes considérés sera restreinte aux systèmes linéaires à commutations, dont les modes sont linéaires et invariants par rapport au temps. De plus, sans perte de généralité, on peut considérer la sortie z_k indépendante de la commande u_k .

$$x_{k+1} = A_{\sigma(k)}x_k + B_{\sigma(k)}u_k, \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad (1.4)$$

$$z_k = C_{\sigma(k)}x_k. \quad (1.5)$$

Ce système est dit *autonome*, si de plus, la dynamique est indépendante de la commande u_k , c'est-à-dire

$$x_{k+1} = A_{\sigma(k)}x_k, \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad (1.6)$$

$$z_k = C_{\sigma(k)}x_k. \quad (1.7)$$

La structure générique du système (1.6)-(1.7) est représentée sur la Figure 1.2.

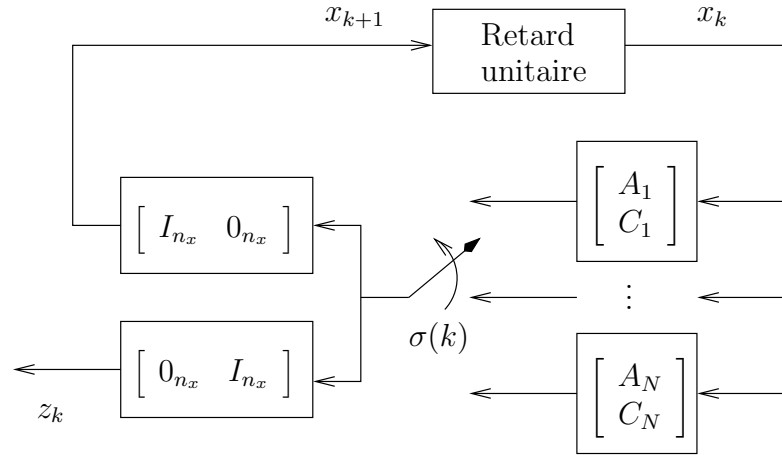


FIGURE 1.2 – Structure générique d'un système linéaire autonome à commutations à temps discret.

Remarque 1 Notons que le terme autonome peut dans certains ouvrages être synonyme d'invariant dans le temps. Le système (1.6)-(1.7) est bien dépendant du temps, à cause de la dépendance en temps de la loi de commutation.

Bien évidemment, d'autres classes particulières de systèmes à commutations peuvent être envisagées, certaines sont présentées dans [Joh02, Lib03, SWM⁺07, LLL09]. On peut, par exemple, citer la classe des systèmes affines commutés.

1.2 Stabilité des systèmes

La stabilité est une question majeure pour l'étude des systèmes en automatique. Avant de traiter la stabilité des systèmes dynamiques linéaires à commutations, celle des systèmes classiques est rappelée. Considérons le système à temps discret suivant :

$$x_{k+1} = f(k, x_k), \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad (1.8)$$

où $f(\cdot, \cdot)$ est une fonction de $\mathbb{N} \times \mathbb{R}^{n_x}$ dans $\mathbb{R}^{n_x}$, localement lipschitzienne par rapport à la seconde variable.

Définition 1 Les points d'équilibre x_{eq} sont les solutions réelles de l'équation

$$f(k, x_{eq}) = x_{eq}, \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (1.9)$$

Un point d'équilibre x_{eq} du système (1.8) est dit

– *stable* à l'instant k_0 , si $\forall \epsilon > 0, \exists \delta = \delta(\epsilon, k_0) > 0$ tel que

$$\|x_{k_0} - x_{eq}\| < \delta \Rightarrow \|x_k - x_{eq}\| < \epsilon, \quad \forall k \geq k_0; \quad (1.10)$$

- *asymptotiquement stable* à l’instant k_0 , si x_{eq} est stable et $\delta = \delta(\epsilon, k_0)$ peut être choisi tel que

$$\|x_{k_0} - x_{\text{eq}}\| < \delta \Rightarrow \lim_{k \rightarrow +\infty} x_k = x_{\text{eq}}; \quad (1.11)$$

- *exponentiellement stable*, s’il existe trois réels positifs c , K et ρ ($0 \leq \rho < 1$) tel que

$$\|x_k - x_{\text{eq}}\| \leq K \|x_{k_0} - x_{\text{eq}}\| \rho^{(k-k_0)}, \quad \forall \|x_{k_0} - x_{\text{eq}}\| < c. \quad (1.12)$$

Définition 2 Lorsque ces définitions sont valables indépendamment de l’instant k_0 , les équilibres sont qualifiés d’uniforme. Lorsque ces définitions ne dépendent pas de x_{k_0} , c’est-à-dire $\delta = +\infty$, les équilibres sont qualifiés de globaux, sinon de locaux.

Sans perte de généralité, le point d’équilibre x_{eq} peut être ramené à l’origine, c’est-à-dire $x_{\text{eq}} = 0$.

Le concept de stabilité est étroitement lié à la théorie de la stabilité de Lyapunov. Cette théorie établit le fait que les systèmes dont les trajectoires sont attirées vers un point d’équilibre asymptotiquement stable perdent progressivement de l’énergie, de façon autonome. Lyapunov généralise la notion d’énergie en fonction de l’état du système. Le principal théorème, qui est souvent utilisé pour l’analyse de la stabilité est donné comme suit en temps discret :

Définition 3 Soit $a > 0$. Une application continue $\varphi : [0, a) \rightarrow \mathbb{R}^+$ est dite de classe $\mathcal{K}$, si elle est strictement croissante et vérifie $\varphi(0) = 0$.

Définition 4 Une application continue $\varphi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ est dite de classe $\mathcal{K}_\infty$, si elle est strictement croissante, vérifie $\varphi(0) = 0$ et est radialement non-bornée.

Théorème 1 [Hah67] Considérons le système (1.8) à temps discret, avec l’origine comme point d’équilibre isolé. Soit un voisinage $\mathcal{V}$ de l’origine, pour lequel il existe un scalaire $\rho > 0$ tel que $\{x \in \mathbb{R}^{n_x}; \|x\| \leq \rho\} \subset \mathcal{V} \subset \mathbb{R}^{n_x}$. S’il existe une fonction $V : \mathbb{N} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ localement lipschitzienne par rapport à la seconde variable et deux fonctions $\alpha(\cdot)$ et $\beta(\cdot)$ de classe $\mathcal{K}$ tel que

$$\alpha(\|x\|) \leq V(k, x) \leq \beta(\|x\|), \quad \forall (k, x) \in \mathbb{N} \times \mathcal{V}, \quad (1.13)$$

alors l’origine du système est

- *uniformément stable* si

$$\begin{aligned} \Delta V(k, x_k) &= V(k+1, x_{k+1}) - V(k, x_k), \\ &= V(k+1, f(x_k)) - V(k, x_k) \leq 0, \quad \forall x_k \in \mathcal{V}; \forall k \in \mathbb{N}; \end{aligned}$$

- *uniformément asymptotiquement stable* s’il existe une fonction φ de classe $\mathcal{K}$ tel que

$$\Delta V(x_k) \leq -\varphi(\|x_k\|), \quad \forall x_k \in \mathcal{V}; \quad (1.14)$$

- uniformément exponentiellement stable, s'il existe quatre constantes positives c_1, c_2, c_3 et p tel que

$$c_1 \|x_k\|^p \leq V(k, x_k) \leq c_2 \|x_k\|^p; \quad \Delta V(k, x_k) \leq -c_3 \|x_k\|. \quad (1.15)$$

La fonction $V(\cdot, \cdot)$ est appelée fonction de Lyapunov du système.

Remarque 2 Les propriétés énoncées dans le théorème 1 sont locales car les fonctions $\alpha(\cdot)$, $\beta(\cdot)$ et φ sont de classe $\mathcal{K}$. Elles deviennent globales si les fonctions choisies sont de classe $\mathcal{K}_\infty$.

Le problème de stabilité des systèmes à commutations est complexe et intéressant. L'exemple de systèmes asymptotiquement stables qui, par une séquence de commutations donnent lieu à un comportement instable, est bien connu. Le cas de systèmes instables qui, grâce à une loi de commutation particulière, donnent lieu à un comportement stable est aussi remarquable. L'article de référence dû à Liberzon et Morse [LM99] énumère quelques problèmes de stabilité pour le cas de systèmes à commutations :

Problème 1 Trouver des conditions de stabilité tel que le système est asymptotiquement stable quelle que soit la loi de commutation.

Problème 2 Identifier les classes de lois de commutation pour lesquelles le système à commutations soit asymptotiquement stable.

Problème 3 Construire une loi de commutation qui rend le système asymptotiquement stable.

Dans les sections suivantes, nous verrons comment cette approche, utilisant des fonctions de Lyapunov dépendant d'un paramètre, peut être utilisée pour les systèmes linéaires à commutations afin de résoudre ou esquisser des solutions à ces problèmes.

Le problème 1, considère la loi de commutation comme un paramètre inconnu. La notion de stabilité se comprend donc comme robuste vis-à-vis de cette incertitude. La résolution de ce problème dans la littérature sera détaillée dans la section 1.3.

Le problème 2 qui vise à identifier les lois de commutation assurant la stabilité du système à commutations autonome est particulièrement délicat. Une variante possible est de déterminer des conditions de stabilité non pas pour des lois de commutation arbitraires (comme dans le problème 1), mais uniquement pour une catégorie de lois de commutation. Une esquisse de solution à ce problème, dans le cas de lois de commutation vérifiant un temps de maintien, est proposée dans la section 1.4.

Le problème 3 est, quant à lui, dédié à la stabilisation d'un système à commutations linéaire à l'aide de la loi de commutation comme moyen d'action. Une solution de ce problème est proposée dans la section 1.5.

1.3 Stabilité des systèmes linéaires à commutations pour une loi de commutation arbitraire

Les systèmes linéaires à commutations font partie des systèmes dépendant du temps. Il est possible d'adapter les techniques des systèmes dépendant du temps pour obtenir des conditions suffisantes de stabilité. Dans la suite, nous allons étudier des systèmes autonomes. Néanmoins, les résultats présentés peuvent se généraliser aux systèmes (1.4)-(1.5). Nous présentons une première technique fondée sur le rayon spectral joint, puis des techniques reposant sur les fonctions de Lyapunov adaptées. Ces différentes techniques permettent l'analyse de la stabilité de systèmes linéaires à commutations quelle que soit la loi de commutation.

1.3.1 Approche spécifique au temps discret : le rayon spectral joint

Considérons le système linéaire à commutations (1.6)-(1.7). Le taux de convergence dans le pire cas pour une trajectoire de ce système, pour toute séquence possible de la loi de commutation peut être caractérisée à l'aide du rayon spectral joint.

Définition 5 [LLL09] Le rayon spectral joint d'un ensemble de matrices $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i \in \Sigma}$ est le plus petit scalaire $\rho = \rho(\mathcal{A}) \geq 0$ telle que pour toute trajectoire du système (1.6)-(1.7), il existe une constante positive C pour laquelle :

$$\|x_k\| \leq C \rho^k, \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (1.16)$$

Théorème 2 Un système linéaire autonome à commutations (1.6)-(1.7) est asymptotiquement uniformément et globalement stable si et seulement si le rayon spectral joint satisfait l'inégalité :

$$\rho(\mathcal{A}) < 1. \quad (1.17)$$

Il est possible de définir le rayon spectral joint par la limite :

$$\rho(\mathcal{A}) = \lim_{p \rightarrow +\infty} \rho_p(\mathcal{A}), \quad (1.18)$$

où

$$\rho_p(\mathcal{A}) = \sup_{A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_p} \in \mathcal{A}} \|A_{i_1} A_{i_2} \cdots A_{i_p}\|^{\frac{1}{p}}. \quad (1.19)$$

La principale difficulté réside dans le calcul du rayon spectral joint, qui est un problème de complexité non-polynomiale [TB97]. Il est cependant possible, dans certains cas, d'obtenir des approximations du rayon spectral joint [BNT04, BN05].

Une seconde difficulté dans notre étude est que cet outil, bien adapté à l'étude de la stabilité ne semble ni s'étendre à l'étude des performances ni à la synthèse de lois de commande.

1.3.2 Fonction de Lyapunov dépendant d'un paramètre

La recherche d'une fonction de Lyapunov candidate pour vérifier des conditions suffisantes de stabilité est un problème délicat. Généralement cette recherche se limite à différentes classes de fonctions de Lyapunov. Parmi celles-ci, seront traitées les fonctions de Lyapunov quadratiques communes, dépendant d'un paramètre, dépendant d'un chemin.

1.3.2.1 Fonction de Lyapunov quadratique commune

La recherche d'une fonction de Lyapunov peut se limiter à une classe de fonctions quadratiques en l'état mais indépendantes du temps, donc ici du mode actif, c'est-à-dire aux fonctions $x \mapsto V(x) = x^T P x$. D'où le théorème :

Théorème 3 *Considérons le système linéaire à commutations (1.6)-(1.7). S'il existe une matrice P , symétrique et définie positive $P = P^T > 0$, solution de l'inégalité matricielle linéaire*

$$A_i^T P A_i - P < 0, \quad \forall i \in \Sigma, \quad (1.20)$$

alors la fonction quadratique $V(x) = x^T P x$ est une fonction de Lyapunov pour le système (1.6)-(1.7) et l'origine est globalement uniformément exponentiellement stable, quelque soit la loi de commutation.

Preuve 1 *Supposons qu'il existe une matrice P symétrique et définie positive, solution des inégalités (1.20). Les inégalités (1.20) sont de nombre fini (N le nombre de modes), strictes et linéaires en P . Il est donc possible à un facteur d'échelle scalaire près de trouver une solution symétrique et définie positive à l'ensemble des inégalités :*

$$A_i^T P A_i - P < -I_{n_x}, \quad \forall i \in \Sigma. \quad (1.21)$$

En multipliant à gauche cette dernière inégalité par x_k^T et à droite par x_k et en posant $i = \sigma(k) \in \Sigma$, on obtient la relation (1.15) concluant le théorème 3.

Lorsque l'existence d'une telle fonction de Lyapunov quadratique commune détermine la stabilité d'un système, on dit que le système est *quadratiquement stable* et l'on parle de *stabilité quadratique*. Le théorème 3 propose une condition suffisante de stabilité, qui généralement n'est pas nécessaire.

1.3.2.2 Fonction de Lyapunov dépendant d'un paramètre

Contrairement au cas du temps continu, il est possible de montrer en temps-discret une équivalence entre différentes classes de fonctions de Lyapunov.

Définition 6 *Un système linéaire à commutations est dit quadratiquement stable dépendant d'un paramètre si la fonction $V(\sigma(k), x_k) = x_k^T P(\sigma(k)) x_k$ est fonction de Lyapunov.*

Définition 7 *Un système linéaire à commutations est dit quadratiquement stable dépendant d'un paramètre et du temps si la fonction $V(k, \sigma(k), x_k) = x_k^T P(k, \sigma(k)) x_k$ est fonction de Lyapunov.*

Définition 8 *Un système linéaire à commutations est dit poly-quadratiquement stable s'il est quadratiquement stable dépendant d'un paramètre et que $P(\sigma(k))$ est linéaire en $\sigma(k)$.*

Théorème 4 [MSD07] *Les stabilités*

- quadratiquement stable dépendant d'un paramètre
- quadratiquement stable dépendant d'un paramètre et du temps
- poly-quadratiquement stable

sont équivalentes pour les systèmes linéaires à commutations. Il s'agit alors de la stabilité uniformément globalement exponentiellement stable.

La dépendance en temps dans les fonctions de Lyapunov pour les systèmes à commutations peut donc se restreindre à la dépendance en la loi de commutation, qui plus est, sous forme linéaire. Le théorème 4 permet d'obtenir des conditions nécessaires et suffisantes d'existence d'une fonction de Lyapunov dépendant de la loi de commutation.

Théorème 5 [DRI02] *Les propositions suivantes sont équivalentes :*

i) *Il existe une fonction de Lyapunov poly-quadratique*

$$V_{\sigma(k)}(x_k) = x_k^T P_{\sigma(k)} x_k, \quad (1.22)$$

strictement décroissante le long des trajectoires du système, quel que soit la loi de commutation σ .

ii) *Il existe des matrices $P_i = P_i^T > 0, \forall i \in \Sigma$, satisfaisant les inégalités matricielles linéaires :*

$$\begin{bmatrix} P_i & \star \\ P_j A_i & P_j \end{bmatrix} > 0, \quad \forall (i, j) \in \Sigma^2. \quad (1.23)$$

iii) *Il existe des matrices $S_i = S_i^T > 0$, et des matrices $G_i, \forall i \in \Sigma$, satisfaisant les inégalités matricielles linéaires suivantes :*

$$\begin{bmatrix} G_i + G_i^T - S_i & \star \\ A_i G_i & S_j \end{bmatrix} > 0, \quad \forall (i, j) \in \Sigma^2. \quad (1.24)$$

La preuve du théorème 5 est donnée ci-dessous. La démarche adoptée dans les chapitres suivants s'inspire de celle utilisée dans cette preuve.

Preuve 2 *La démonstration se fait en montrant l'équivalence des deux premières propositions i) et ii), puis les implications ii) $\Rightarrow$ iii) et iii) $\Rightarrow$ ii). Supposons l'existence d'une fonction de Lyapunov poly-quadratique de la forme (1.22). Ainsi pour tout état non nul et pour toute loi de commutation, nous avons*

$$x_{k+1}^T P_{\sigma(k+1)} x_{k+1} - x_k^T P_{\sigma(k)} x_k = x_k^T A_{\sigma(k)}^T P_{\sigma(k+1)} A_{\sigma(k)} x_k - x_k^T P_{\sigma(k)} x_k < 0, \quad (1.25)$$

soit, comme $P_j > 0_{n_x}$,

$$P_i - A_i^T P_j A_i = P_i - A_i^T P_j P_j^{-1} P_j A_i > 0_{n_x}, \quad \forall (i, j) \in \Sigma^2. \quad (1.26)$$

Comme $P_j > 0_{n_x}$, il est possible d'utiliser le complément de Schur [BEFB94] et on obtient l'inégalité matricielle (1.23). Chaque étape se faisant par équivalence, on a l'équivalence entre les propositions i) et ii).

Montrons que iii) implique ii). Supposons que l'inégalité matricielle (1.24) soit vérifiée, on a alors $S_i > 0_{n_x}$ et $G_i + G_i^T - S_i > 0_{n_x}$. Cela implique que G_i est de rang plein. En développant $(G_i - S_i)^T S_i^{-1} (G_i - S_i) \geq 0_{n_x}$

$$\begin{bmatrix} G_i^T S_i^{-1} G_i & \star \\ A_i G_i & S_j \end{bmatrix} > 0, \quad \forall (i, j) \in \Sigma^2. \quad (1.27)$$

En utilisant le changement de base $\text{diag}(G_i^{-T}, S_j^{-1})$, on obtient l'inégalité

$$\begin{bmatrix} S_i^{-1} & \star \\ S_j^{-1} A_i & S_j^{-1} \end{bmatrix} > 0. \quad (1.28)$$

Enfin en posant $P_i = S_i > 0$ on obtient l'inégalité (1.23), ce qui prouve que iii) implique ii).

Reste à prouver que ii) implique iii). Supposons que l'inégalité matricielle (1.23) soit vérifiée. Posons $S_i = P_i^{-1}$. A l'aide du changement de base $\text{diag}(S_i, S_j)$, on obtient

$$\begin{bmatrix} S_i & \star \\ A_i S_i & S_j \end{bmatrix} > 0. \quad (1.29)$$

En appliquant le complément de Schur sur le premier bloc, on obtient

$$S_j - A_i S_i A_i^T = T_{ij} > 0_{n_x}. \quad (1.30)$$

Comme T_{ij} est inversible, il existe des scalaires positifs $g_i > 0$ suffisamment petits, tels que

$$g_i^{-2} (S_i + 2g_i I_{n_x}) > A_i^T T_{ij} A_i, \quad (1.31)$$

qui est équivalent par complément de Schur à l'inégalité matricielle

$$\begin{bmatrix} S_i + 2g_i I_{n_x} & \star \\ -A_i g_i & T_{ij} \end{bmatrix} > 0. \quad (1.32)$$

En posant $G_i = S_i + g_i I_{n_x}$, on obtient l'inégalité (1.24). Cela termine la preuve du théorème 5.

Remarque 3 L'approche par fonctions de Lyapunov poly-quadratiques représente une généralisation de l'approche quadratique. Il suffit de poser $P_i = P, \forall i \in \Sigma$ pour se ramener au cas des fonctions quadratiques. Cette généralisation permet de relaxer les contraintes imposées par la méthode quadratique et d'obtenir des conditions de stabilité moins conservatives.

Nous rappelons ici le lemme de Finsler, afin de commenter par une remarque ce théorème.

Lemme 1 Lemme de Finsler [SIG97] Soit $x \in \mathbb{R}^n$, $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ une matrice symétrique et une matrice $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ de rang strictement inférieur à n . Les propositions suivantes sont équivalentes :

- i) $x^T Q x < 0, \forall Bx = 0, x \neq 0$.
- ii) $(B^\perp)^T Q B^\perp < 0$.
- iii) $\exists \mu \in \mathbb{R}$ tel que $Q - \mu B^T B < 0$.
- iv) $\exists X \in \mathbb{R}^{n \times m}$ tel que $Q + XB + B^T X^T < 0$.

Remarque 4 Il faut noter que dans le cas de la stabilité quadratique, une autre démonstration est possible. Elle consiste à vérifier

$$\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ x_k \end{pmatrix}^T \begin{bmatrix} P_j & 0_{n_x} \\ 0_{n_x} & -P_i \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_{k+1} \\ x_k \end{pmatrix} \leq 0, \quad \forall \begin{bmatrix} -I_{n_x} & A_i \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_{k+1} \\ x_k \end{pmatrix} = 0_{n_x \times 1}. \quad (1.33)$$

L'espace orthogonal à la matrice $\begin{bmatrix} -I_{n_x} & A_i \end{bmatrix}$ est généré par les colonnes de $\begin{bmatrix} A_i \\ I_{n_x} \end{bmatrix}$, c'est-à-dire que l'on a

$$\begin{bmatrix} -I_{n_x} & A_i \end{bmatrix}^\perp = \begin{bmatrix} A_i \\ I_{n_x} \end{bmatrix}. \quad (1.34)$$

En utilisant le lemme de Finsler [SIG97], on obtient que la proposition (1.33), qui est une forme quadratique contrainte est équivalente à l'existence de matrices carrées G_{ij} et F_{ij} , appelées multiplieurs de Lagrange, telles que

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} P_j & 0_{n_x} \\ 0_{n_x} & -P_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G_{ij} \\ F_{ij} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -I_{n_x} & A_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -I_{n_x} \\ A_i^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_{ij}^T & F_{ij}^T \end{bmatrix} \\ & = \begin{bmatrix} P_j - G_{ij} - G_{ij}^T & F_{ij} A_i + A_i^T F_{ij}^T - P_i \\ -F_{ij} + A_i^T G_{ij}^T & F_{ij} A_i + A_i^T F_{ij}^T - P_i \end{bmatrix} < 0_{2n_x}. \end{aligned} \quad (1.35)$$

Les matrices G_{ij} et F_{ij} dépendent bien a priori des deux modes i et j pour avoir l'équivalence. Néanmoins, le théorème 5 permet de restreindre le nombre de variables, tout en maintenant l'équivalence, en posant $G_{ij} = G_i$ et $F_{ij} = 0_{n_x}$.

La stabilité poly-quadratique est une condition suffisante et non une condition nécessaire de stabilité. Afin d'obtenir une condition nécessaire et suffisante de stabilité, il faut avoir recours aux fonctions de Lyapunov dépendant du chemin.

1.3.2.3 Fonction de Lyapunov dépendant du chemin

Les fonctions de Lyapunov dépendant du chemin ont été introduites par Lee pour les systèmes linéaires en un paramètre variant [Lee06], puis avec Dullerud pour les systèmes à commutations [LD06, LD07].

Définition 9 Pour un entier $L \in \mathbb{N}$, un chemin de commutation de longueur L est défini par

$$\hat{\sigma}(k) = (\sigma(k), \sigma(k+1), \dots, \sigma(k+L-1)).$$

Une fonction de Lyapunov dépendant d'un chemin de longueur L se définit alors par :

$$V(\hat{\sigma}(k), x_k) = x_k^T P_{(\sigma(k), \sigma(k+1), \dots, \sigma(k+L-1))} x_k. \quad (1.36)$$

Remarque 5 Un chemin de longueur nulle ($L = 0$) correspond à un vecteur $\hat{\sigma}(k)$ vide et donc une matrice $P_{\hat{\sigma}(k)}$ constante et on obtient la stabilité quadratique. Pour un chemin de longueur unitaire, ($L = 1$), la matrice $P_{\hat{\sigma}(k)}$ est linéaire en $\sigma(k)$, c'est-à-dire $P_{\hat{\sigma}(k)} = P_{\sigma(k)}$. On obtient alors la stabilité poly-quadratique.

Théorème 6 [LD07] Un système linéaire à commutations en temps discret est uniformément globalement exponentiellement stable si et seulement s'il existe un entier non nul m et une famille de N^m matrices $P_{(i_0, i_1, \dots, i_{m-1})}$, $\forall (i_0, i_1, \dots, i_{m-1}) \in \Sigma^m$ tel que

$$P_{(i_0, i_1, \dots, i_{m-1})} = P_{(i_0, i_1, \dots, i_{m-1})}^T > 0_{n_x} \quad (1.37)$$

et

$$A_{i_m}^T P_{(i_1, i_2, \dots, i_m)} A_{i_m} - P_{(i_0, i_1, \dots, i_{m-1})} < 0, \quad \forall (i_0, i_1, \dots, i_m) \in \Sigma^{(m+1)}. \quad (1.38)$$

L'obtention de la nécessité pour la condition de stabilité se paye au prix de la méconnaissance de la longueur du chemin à prendre en compte. En effet, il ne semble pas y avoir d'information sur l'ordre de grandeur de la longueur minimale pour obtenir la nécessité de la stabilité. Plus la longueur augmente, plus l'aspect numérique, en nombre de variables, et en nombre d'inégalité devient contraignant. En général les longueurs de chemin considérées doivent rester faibles afin de pouvoir mener à des calculs faisables.

Remarque 6 Les inégalités (1.37) et (1.38) peuvent à l'aide d'un complément de Schur se mettre sous la forme équivalente suivante, comme les variables $P_{(i_0, i_1, \dots, i_{m-1})}$ sont définies positives,

$$\begin{bmatrix} P_{(i_0, i_1, \dots, i_{m-1})} & \star \\ P_{(i_1, i_2, \dots, i_m)} A_{i_m} & P_{(i_1, i_2, \dots, i_m)} \end{bmatrix} > 0, \quad \forall (i_0, i_1, \dots, i_m) \in \Sigma^{(m+1)}. \quad (1.39)$$

Afin de ne pas surcharger les notations et conserver la clarté de l'exposé, seuls les chemins de longueur unitaire seront considérés ici, c'est-à-dire le cadre poly-quadratique. Etendre nos résultats à des chemins de longueur plus grande ne pose pas de problème théorique, mais peut engendrer des difficultés numériques, pour une amélioration limitée selon les exemples étudiés.

1.4 Stabilité des systèmes linéaires à commutations pour une loi de commutation contrainte

Jusqu'à présent, la stabilité des systèmes linéaires à commutations a été présentée pour des lois de commutation arbitraires. Ce cadre, très générique, peut englober des lois de commutation qui ne sont pas pertinentes ou impossibles selon les applications. Effectivement certaines transitions de mode peuvent être unilatérales, (c'est-à-dire qu'une transition du mode i au mode j est possible, alors que celle du mode j au mode i est impossible), ou tout simplement impossible. En pratique, les lois de commutation peuvent présenter un certain

nombre de contraintes, se justifiant par la nature de l'application étudiée. Par exemple, les lois de commutation peuvent être périodiques ou bien vérifier un temps de maintien entre chaque transition. Il est donc intéressant de s'intéresser aux conditions de stabilité des systèmes linéaires à commutations non pas pour une loi de commutation arbitraire, mais pour une catégorie spécifiée de lois de commutation.

Ici nous rappelons des conditions de stabilité pour les systèmes linéaires à commutations pour une loi de commutation vérifiant un temps de maintien, ou temps de permanence [Ger10], qui se traduit en anglais par *dwell time*. Ces conditions ont été obtenues dès 2006 par J.C. Geromel et P. Colaneri [GC06].

Tout d'abord définissons l'ensemble des lois de commutation $\mathcal{D}_\Delta$ vérifiant un temps de maintien fixé Δ .

Définition 10 Soit un entier strictement positif $\Delta \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathcal{D}_\Delta = \{\sigma(\cdot); \sigma(k) = i \in \Sigma, \forall \ell_q \leq k < \ell_{q+1}; \ell_{q+1} - \ell_q \geq \Delta\}, \quad (1.40)$$

où l'on note $\{\ell_q\}_{q \in \mathbb{N}}$ la suite des instants de commutations ($\ell_q \in \mathbb{N}$), vérifiant $\ell_0 = 0$ et $\ell_{q+1} > \ell_q$.

Une loi de commutation $\sigma \in \mathcal{D}_\Delta$ est une fonction constante par morceaux, sur des intervalles de temps d'une durée au moins égale à Δ . Par définition,

$$\tilde{\Delta} \geq \Delta \Rightarrow \mathcal{D}_{\tilde{\Delta}} \subset \mathcal{D}_\Delta. \quad (1.41)$$

En effet, si le temps de maintien $\tilde{\Delta}$ est supérieur ou égal au temps de maintien Δ alors l'ensemble des lois de commutation qui vérifient un temps de maintien $\tilde{\Delta}$ est inclus dans l'ensemble des lois de commutation vérifiant un temps de maintien inférieur ou égal à $\tilde{\Delta}$.

Remarque 7 Deux cas particuliers sont notables. Effectivement $\mathcal{D}_1$ regroupe l'ensemble des lois de commutation arbitraires, le temps de maintien étant égal à l'unité. A chaque instant, la valeur du mode commuté peut changer. Aussi $\mathcal{D}_\infty$ est l'ensemble des lois de commutation de temps de maintien infini, c'est-à-dire dont la valeur du mode actif ne change pas. Il s'agit des N lois de commutation constantes.

Le théorème suivant, issu de [GC06], propose des conditions suffisantes de stabilité pour les systèmes linéaires à commutations à temps discret pour des lois de commutation appartenant à $\mathcal{D}_\Delta$.

Théorème 7 [GC06] Soit $\Delta \in \mathbb{N}^*$, supposons qu'il existe un ensemble de matrices symétriques définies positives $P_i \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ ($i \in \Sigma$) tel que

$$A_i^T P_i A_i - P_i < 0_{n_x}, \quad \forall i \in \Sigma, \quad (1.42)$$

$$(A_i^\Delta)^T P_j A_i^\Delta - P_i < 0_{n_x}, \quad \forall (i, j) \in \Sigma^2, i \neq j, \quad (1.43)$$

alors le système (1.6) est globalement asymptotiquement stable pour toute loi de commutation $\sigma \in \mathcal{D}_\Delta$.

Preuve 3 Soit un temps de maintien $\Delta \in \mathbb{N}^*$ et une loi de commutation $\sigma \in \mathcal{D}_\Delta$. Considérons que la loi de commutation est associée au mode $i \in \Sigma$ entre ℓ_q et ℓ_{q+1} , c'est-à-dire $\sigma(k) = i$, $\ell_q \leq k < \ell_{q+1}$ et qu'en $k = \ell_{q+1}$, la loi de commutation passe au mode $j \in \Sigma$, $j \neq i$. Considérons la fonction de Lyapunov $V(\sigma(k), x_k) = x_k^T P_{\sigma(k)} x_k$. Pour tout k vérifiant $\ell_q \leq k < \ell_{q+1} - 1$, nous avons, grâce à l'inégalité (1.42) :

$$\begin{aligned} V(\sigma(k+1), x_{k+1}) - V(\sigma(k), x_k) &= V(i, x_{k+1}) - V(i, x_k), \\ &= x_k^T (A_i^T P_i A_i - P_i) x_k \\ &< 0. \end{aligned} \quad (1.44)$$

Aussi pour $k = \ell_{q+1} - 1$, nous avons grâce à l'inégalité (1.43) et au fait que $\ell_{q+1} - \ell_q \geq \Delta$:

$$\begin{aligned} V(\sigma(k+1), x_{k+1}) &= V(\sigma(\ell_{q+1}), x_{\ell_{q+1}}), \\ &= x_{\ell_{q+1}}^T P_j x_{\ell_{q+1}}, \\ &= x_{\ell_q}^T (A_i^{(\ell_{q+1}-\ell_q)})^T P_j A_i^{(\ell_{q+1}-\ell_q)} x_{\ell_q}, \\ &< x_{\ell_q}^T (A_i^{(\ell_{q+1}-\ell_q-\Delta)})^T P_i A_i^{(\ell_{q+1}-\ell_q-\Delta)} x_{\ell_q}, \end{aligned} \quad (1.45)$$

De plus, grâce à l'inégalité (1.42) :

$$\begin{aligned} V(\sigma(k+1), x_{k+1}) &= V(\sigma(\ell_{q+1}), x_{\ell_{q+1}}), \\ &< x_{\ell_q}^T P_{\ell_q} x_{\ell_q}. \end{aligned} \quad (1.46)$$

Il est donc possible de construire une sous-suite $V(\sigma(\ell_q), x_{\ell_q})$ de fonctions de Lyapunov convergeant uniformément vers l'origine.

Remarque 8 Notons que pour des matrices A_i , $i \in \Sigma$ stables, l'inégalité (1.42) est faisable. Comme ces matrices sont stables, il existe toujours un entier $\Delta \in \mathbb{N}^*$ vérifiant l'inégalité (1.43).

Remarque 9 Notons que si les matrices A_i , $i \in \Sigma$ sont quadratiquement stables, il existe une solution $P = P_i$, $i \in \Sigma$, symétrique et définie positive, solution de l'inégalité (1.42). L'inégalité (1.43) admet alors aussi cette matrice P comme solution.

Remarque 10 Les conditions (1.42) et (1.43) permettent de retrouver des conditions classiques dans les deux cas particuliers $\Delta = 1$ et $\Delta = +\infty$. Effectivement pour $\Delta = 1$, on retrouve les conditions (1.23) proposées dans [DB01]. Aussi dans le cas de matrices A_i , $i \in \Sigma$ stables, le cas $\Delta = +\infty$ implique $A_i^\Delta = 0_{n_x}$. C'est-à-dire que l'inégalité (1.43) n'a plus lieu d'être et les conditions se réduisent à la seule inégalité (1.42).

1.5 Stabilisation des systèmes linéaires à commutations par la loi de commutation

Dans les sections précédentes, la loi de commutation, vérifiant ou non un certain nombre d'hypothèses, était considérée comme subie. Seule l'étude de

la stabilité des systèmes linéaires à commutations était alors possible pour telle ou telle classe de lois de commutation. Ici l'hypothèse est faite qu'il est possible d'agir sur la loi de commutation et de l'imposer. Ainsi le problème 3 de déterminer une loi de commutation stabilisant un système linéaire à commutations se pose.

Il est évident que l'intérêt de ce type de problème consiste à stabiliser un système linéaire à commutations dont toutes les matrices A_i , ($i \in \Sigma$) sont instables. Sinon, considérer la loi de commutation activant uniquement l'un des modes stables suffit à résoudre le problème 3.

Cette section rappelle les principaux résultats présentés dans [GC06] et dans [Zha01]. La recherche d'une loi de commutation stabilisante est faite sur une classe de fonctions dépendant de l'état courant du système. C'est-à-dire qu'une fonction $u(\cdot) : \mathbb{R}^{n_x} \rightarrow \Sigma$ est recherchée telle que :

$$\sigma(k) = u(x_k), \quad (1.47)$$

stabilise le système linéaire à commutations (1.6).

Posons la fonction de Lyapunov suivante, associée à un ensemble $\{P_i\}_{i \in \Sigma}$ de matrices symétriques et définies positives :

$$v(x) = \min_{i \in \Sigma} x^T P_i x. \quad (1.48)$$

Cette fonction de Lyapunov est appelée *fonction quadratique composée* par T. Hu [Hu07]. J.C. Geromel propose dans [GC06] une condition suffisante sur les matrices P_i , utilisant les matrices de Metzler, afin de résoudre le problème 3. Définissons tout d'abord les matrices de Metzler puis la classe des matrices de Metzler considérée.

Définition 11 Une matrice de Metzler est une matrice $\Pi \in \mathbb{R}^{N \times N}$ dont les éléments π_{ij} vérifient :

$$\pi_{ij} \geq 0 \quad \forall i \neq j, \quad \forall (i, j) \in \Sigma^2. \quad (1.49)$$

Les matrices 0_N , I_N et $-I_N$ sont donc des matrices de Metzler.

Définition 12 La classe des matrices de Metzler à temps discret, notée $\mathcal{M}_d$, est constituée de toutes les matrices $\Pi \in \mathbb{R}^{N \times N}$ avec des éléments π_{ij} vérifiant :

$$\pi_{ij} \geq 0 \quad \forall i \neq j, \quad \sum_{i=1}^{i=N} \pi_{ij} = 1; \quad \forall (i, j) \in \Sigma^2. \quad (1.50)$$

La matrice I_N est une matrice de Metzler à temps discret, mais ce n'est pas le cas des matrices 0_N et $-I_N$.

Par définition, une matrice de Metzler en temps discret admet toujours le vecteur composé de 1 comme vecteur propre associé à la valeur propre 1, car

$$\Pi^T \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \forall \Pi \in \mathcal{M}_d. \quad (1.51)$$

Une autre propriété importante des matrices de Metzler est une conséquence directe du théorème de Perron-Fröbenius [HJ85] : tout vecteur propre d'une telle matrice associé à la valeur propre 1 est à composante positive ou nulle. En d'autres termes, à une normalisation prêt, il existe toujours un vecteur $z \in \Omega_N$, tel que

$$\Pi z = z, \quad (1.52)$$

où le simplex Ω_N est défini par

$$\Omega_N = \left\{ z \in \mathbb{R}^N; \sum_{i=1, \dots, N} z_i = 1; z_i \geq 0, \forall i = 1, \dots, N \right\}. \quad (1.53)$$

La relation (1.50) se traduit d'ailleurs par le fait que chaque colonne de la matrice Π de Metzler à temps discret est un élément du simplex Ω_N :

$$\begin{pmatrix} \pi_{1j} \\ \vdots \\ \pi_{Nj} \end{pmatrix} \in \Omega_N, \quad \forall j \in \Sigma. \quad (1.54)$$

Le théorème de Perron-Fröbenius permet d'énoncer le théorème suivant.

Théorème 8 *Supposons qu'il existe une matrice de Metzler $\Pi \in \mathcal{M}_d$ et un ensemble de matrices définies positives et symétriques $\{P_i\}_{i \in \Sigma}$ vérifiant les inégalités suivantes, appelées inégalités de Lyapunov-Metzler.*

$$A_i^T \left(\sum_{j=1}^N \pi_{ji} P_j \right) A_i - P_i < 0, \quad \forall i = 1, \dots, N, \quad (1.55)$$

alors la loi de commutation

$$\sigma(k) = u(x_k) \in \arg \min_{i=1, \dots, N} x_k^T P_i x_k = \arg v(x_k), \quad (1.56)$$

où la fonction $v(\cdot)$ est définie par la relation (1.48), stabilise globalement et exponentiellement le système linéaire à commutations (1.6).

Preuve 4 *Supposons qu'à l'instant k , $\sigma(k) = i \in \Sigma$. Montrons que la fonction $v(\cdot)$ définie par (1.48) est une fonction de Lyapunov pour le système (1.6).*

$$\begin{aligned} v(x_{k+1}) &= \min_{j \in \Sigma} x_{k+1}^T P_j x_{k+1}, \\ &= \min_{j \in \Sigma} x_k^T A_i^T P_j A_i x_k, \\ &= \min_{z \in \Omega_N} x_k^T A_i^T \left(\sum_{j=1, \dots, N} z_j P_j \right) A_i x_k, \\ &\leq x_k^T A_i^T \left(\sum_{j=1, \dots, N} \pi_{ji} P_j \right) A_i x_k, \end{aligned} \quad (1.57)$$

due au fait que la i -ème colonne de $\Pi \in \mathcal{M}_d$ est un élément de Ω_N , comme l'indique l'équation (1.54). De plus grâce à l'inégalité de Lyapunov Metzler (1.55), nous avons :

$$\begin{aligned} v(x_{k+1}) &\leq x_k^T A_i^T \left(\sum_{j=1, \dots, N} \pi_{ji} P_j \right) A_i x_k, \\ &< x_k^T P_i x_k = v(x_k). \end{aligned} \quad (1.58)$$

Les conditions (1.55) nécessitent des commentaires plus poussés dans des cas particuliers. Dans le cas où les matrices $\{A_i\}_{i \in \Sigma}$ sont asymptotiquement stables, il existe des solutions $\{P_i\}_{i \in \Sigma}$ à l'inégalité (1.55) pour le choix $\Pi = I_N$. De surcroît, si les matrices $\{A_i\}_{i \in \Sigma}$ sont quadratiquement stables, l'inégalité

$$A_i^T \left(\sum_{j=1}^N \pi_{ji} P_j \right) A_i - P_i = A_i^T \left(\sum_{j=1}^N \pi_{ji} \right) P A_i - P = A_i^T P A_i - P < 0 \quad (1.59)$$

admet nécessairement une solution $P = P_i, \forall i \in \Sigma$. Cela implique que dans le cas de la stabilité quadratique, le choix de la loi de commutation est arbitraire pour stabiliser le système linéaire à commutations.

Afin de résoudre les inégalités (1.55), deux situations se présentent. Dans la première situation, la matrice $\Pi \in \mathcal{M}_d$ est fixée. Il en découle que les inégalités (1.55) sont linéaires en les seules variables $\{P_i\}_{i \in \Sigma}$ et sont donc des inégalités matricielles linéaires, qui ne posent pas de problème numérique. Dans la seconde situation, la matrice $\Pi \in \mathcal{M}_d$ est une variable, au même titre que les matrices P_i . Les inégalités (1.55) sont alors des inégalités matricielles bilinéaires, plus délicates à résoudre. Une approche numérique de résolution consiste alors à fixer une structure de la matrice de Metzler pour en réduire le nombre de paramètres (si possible à 1), comme dans [GCB08] et d'utiliser une procédure de recherche en ligne pour ce paramètre. En posant le paramètre identique pour toutes les composantes de la diagonale de la matrice Π , on obtient le théorème suivant :

Théorème 9 [GC06] *Supposons qu'il existe un ensemble de matrices $\{P_i\}_{i \in \Sigma}$ symétriques et définies positives et un scalaire γ tel que $0 \leq \gamma < 1$ tel que l'inégalité de Lyapunov-Metzler modifiée*

$$A_i^T (\gamma P_i + (1 - \gamma) P_j) A_i - P_i < 0_{n_x}, \quad \forall (i, j) \in \Sigma^2, i \neq j, \quad (1.60)$$

soit vérifiée, alors la loi de commutation donnée par (1.56) stabilise asymptotiquement l'origine du système (1.6).

Preuve 5 *Choisissons une matrice de Metzler $\Pi \in \mathcal{M}_d$ vérifiant*

$$\pi_{ii} = \gamma; \quad \sum_{j \neq i=1}^N \pi_{ji} = 1 - \gamma, \quad \forall i \in \Sigma. \quad (1.61)$$

Comme $\pi_{ji} \geq 0, \forall (i, j) \in \Sigma^2, j \neq i$, multiplions l'inégalité (1.60) par π_{ji} et sommions pour tout $j \neq i$.

$$\begin{aligned} & \sum_{j \in \Sigma, j \neq i} \pi_{ji} (A_i^T (\gamma P_i + (1 - \gamma) P_j) A_i - P_i) \\ &= (1 - \gamma) (A_i^T \gamma P_i A_i - P_i) + (1 - \gamma) A_i^T \left(\sum_{j \in \Sigma, j \neq i} \pi_{ji} P_j \right) A_i \\ &= (1 - \gamma) \left(A_i^T \left(\sum_{j=1}^N \pi_{ji} P_j \right) A_i - P_i \right) < 0. \end{aligned} \quad (1.62)$$

Cela implique la condition (1.55) du théorème 8 et termine la preuve.

Les conditions (1.60) sont plus conservatives que les conditions (1.55). Néanmoins elles permettent en fixant la valeur de γ d'obtenir des LMIs et en fixant les variables $\{P_i\}_{i \in \Sigma}$ de faire une recherche en ligne du paramètre γ .

Notons aussi une condition portant sur l'existence d'une solution aux BMIs (1.55) par rapport aux variables Π et $\{P_i\}_{i \in \Sigma}$.

Théorème 10 [GC06] Supposons qu'il existe un vecteur $z \in \Omega_N$, où Ω_N est le simplexe défini par (1.53) et une matrice P symétrique et définie positive tels que

$$\sum_{i=1, \dots, N} z_i (A_i^T P A_i - P) < 0, \quad (1.63)$$

alors l'inégalité de Lyapunov Metzler (1.55) admet une solution.

Preuve 6 Supposons que l'inégalité (1.63) soit vérifiée. Montrons alors que l'inégalité (1.55) est vérifiée pour $P_i = A_i^T P A_i + \epsilon P$ et $\Pi = [z \ \dots \ z]$, avec $\epsilon > 0$ suffisamment faible.

Si l'inégalité stricte (1.63) est vérifiée, alors il existe un scalaire $\epsilon > 0$ suffisamment faible tel que

$$\sum_{i=1, \dots, N} z_i (A_i^T P A_i - P) < -\epsilon I_{n_x}. \quad (1.64)$$

On a alors,

$$\sum_{j=1, \dots, N} \pi_{ji} P_j = \sum_{j=1, \dots, N} z_j A_j^T P A_j + \epsilon I_{n_x} \leq P, \quad \forall i = 1, \dots, N. \quad (1.65)$$

De ce fait,

$$A_i^T \left(\sum_{j=1, \dots, N} \pi_{ji} P_j \right) A_i \leq A_i^T P A_i < P_i, \quad \forall i = 1, \dots, N. \quad (1.66)$$

La preuve se termine en notant que P_i , donnée par $P_i = A_i^T P A_i + \epsilon P$, est définie positive et symétrique.

1.6 Stabilisation des systèmes linéaires à commutations

Après avoir rappelé les principaux résultats sur la stabilité des systèmes linéaires à commutations de la forme (1.6)-(1.7), ainsi que leur stabilisation par la loi de commutation, considérons maintenant les systèmes linéaires à commutations de la forme (1.4)-(1.5). Les problèmes suivant de la stabilisation à l'aide de la loi de commande u_k se posent alors naturellement.

Problème 4 Déterminer une loi de commande u_k (fonction ou non de la loi de commutation) stabilisant le système (1.4)-(1.5), quelle que soit la loi de commutation σ .

Problème 5 Déterminer une loi de commande conjointe (u_k, σ) stabilisant le système (1.4)-(1.5).

Le problème 5 est plus délicat que le problème 4 et ne sera pas traité ici dans le contexte de cette thèse. On peut néanmoins se référer à la récente publication [DGD10] dans le cadre du temps continu. Le principal résultat de stabilisation des systèmes linéaires à commutations est repris de [DRI02] et porte sur les retours d'état commutés. Il est formalisé par le théorème suivant.

Théorème 11 [DRI02] Le système linéaire à commutations (1.4)-(1.5) peut être stabilisé, quelle que soit la loi de commutation, à l'aide d'un retour d'état

$$u_k = K_{\sigma(k)} x_k, \quad (1.67)$$

s'il existe des matrices définies positives S_i et R_i et des matrices $G_i, \forall i \in \Sigma$, tel que les inégalités matricielles linéaires

$$\begin{bmatrix} G_i + G_i^T - S_i & \star \\ A_i G_i + B_i R_i & S_j \end{bmatrix} > 0, \quad \forall (i, j) \in \Sigma^2 \quad (1.68)$$

sont satisfaites. Le gain commuté du retour d'état est alors donné par $K_i = R_i G_i^{-1}$ et la matrice de Lyapunov poly-quadratique par $P_i = S_i^{-1}, \forall i \in \Sigma$.

Preuve 7 Supposons que l'inégalité (1.68) est vérifiée, S_j est alors définie positive et $G_i + G_i^T - S_i > 0_{n_x}$ implique que G_i est de rang plein. En développant $(G_i - S_i)^T S_i^{-1} (G_i - S_i) \geq 0_{n_x}$, on obtient

$$\begin{bmatrix} G_i^T S_i^{-1} G_i & \star \\ A_i G_i + B_i R_i & S_j \end{bmatrix} > 0, \quad \forall (i, j) \in \Sigma^2. \quad (1.69)$$

En posant $K_i G_i = R_i$, on obtient, avec un changement de base $\text{diag}(G_i^{-1}; S_j^{-1})$,

$$\begin{bmatrix} S_i^{-1} & \star \\ S_j^{-1} (A_i + B_i K_i) & S_j^{-1} \end{bmatrix} > 0, \quad \forall (i, j) \in \Sigma^2. \quad (1.70)$$

Le changement de variable $P_i = S_i^{-1}, \forall i \in \Sigma$ permet d'obtenir à l'aide d'un complément de Schur

$$(A_i + B_i K_i)^T P_j (A_i + B_i K_i) - P_i < 0_{n_x}, \quad (1.71)$$

qui est l'inégalité de Lyapunov du système (1.4)-(1.5) en boucle fermée.

Remarque 11 *Si la valeur courante de la loi de commutation n'est pas disponible, le même théorème peut s'appliquer en imposant $R_i = R$ et $G_i = G$, $\forall i \in \Sigma$ dans les inégalités (1.68). Néanmoins ces conditions étant plus conservatives, les chances de résoudre celles-ci sont évidemment moins grandes.*

D'autres classes de loi de commande que le retour d'état ont été étudiées dans la littérature, en particulier le retour de sortie dynamique [GCB08].

1.7 Conclusion

Dans ce chapitre, les systèmes à commutations en temps discret ont été formellement définis et les principaux outils pour l'analyse de la stabilité de ces systèmes ont été rappelés dans le cadre d'une loi de commutation *a priori* inconnue ainsi que pour la stabilisation de ceux-ci par une loi de commutation particulière, déterminée à l'aide d'une fonction de Lyapunov composée ou composite. La synthèse d'une commande par retour d'état commuté stabilisante est proposée pour les systèmes linéaires à commutations. Ces différentes conditions, permettant l'analyse de stabilité ou la synthèse de lois de commande, peuvent généralement se mettre sous la forme d'inégalités matricielles linéaires. Ces différents éléments constituent les outils de base qui sont généralisés pour répondre au questionnement initial de la thèse de traiter les aspects de performances pour les systèmes linéaires à commutations en temps discret.

Chapitre 2

Analyse des performances

2.1 Introduction

Le chapitre précédent a été l'occasion de présenter les résultats existants sur l'analyse de la stabilité des systèmes à commutations en temps discret. Dans ce chapitre, nous allons étudier un système autonome linéaire à commutations en temps discret défini pour tout $k \in \mathbb{N}$ par :

$$x_{k+1} = A_{\sigma(k)}x_k, \quad (2.1)$$

$$z_k = C_{\sigma(k)}x_k \quad (2.2)$$

avec $\sigma(k) \in \Sigma = \{1, \dots, N\}$ et où $x_k \in \mathbb{R}^{n_x}$ représente l'état du système et $z_k \in \mathbb{R}^{m_z}$, la sortie contrôlée de celui-ci.

Plus particulièrement, nous allons nous intéresser dans ce chapitre à l'aspect des performances. Les performances d'un système variant dans le temps sont généralement formulées à l'aide d'un critère. Dans la littérature, les critères les plus utilisés pour s'intéresser aux performances d'un système à temps invariant sont le critère quadratique, la norme $\mathcal{H}_2$ et la norme $\mathcal{H}_\infty$. Certains de ces critères peuvent s'étendre aux systèmes à commutations. En effet, le critère quadratique étant temporel, peut être défini dans le cadre des systèmes à commutations. En revanche, les normes $\mathcal{H}_2$ et $\mathcal{H}_\infty$, quant à elles, ne peuvent pas être définies pour les systèmes dépendant du temps. Elles ne peuvent donc pas être définies de ce fait pour les systèmes à commutations. On peut alors se poser d'autres problèmes par rapport à ceux présentés dans le cadre de l'analyse de la stabilité.

Problème 6 *Analyser les performances pour une séquence de commutations donnée.*

Puisque la séquence de commutations est connue, il s'agit d'un problème numérique qui peut, dans le cas général d'un horizon infini, être impossible à résoudre sans imposer des contraintes fortes à la loi de commutation comme considérer une loi de commutation constante ou périodique. On cherche à calculer le critère représentant les performances en connaissant à chaque instant le sous-système actif.

Problème 7 Analyser les performances pour toute séquence de commutations.

La difficulté du problème réside dans le fait que les performances du système dépendent de la séquence de commutations. Même si l'on considère une loi de commutation fixée, il est très difficile de déterminer la valeur exacte des performances dans le cas général (voir le problème 6). Le problème 7 correspond à déterminer un coût garanti, qui n'est autre que la borne supérieure des critères de performance prise sur l'ensemble des lois de commutation.

Problème 8 Construire une loi de commutation qui conduit à la plus grande valeur du critère représentant les performances.

Il s'agit de trouver la séquence de commutation qui mène au pire des cas pour les performances. Ce problème est difficile à résoudre et reste ouvert. Ainsi, pour un horizon fini, il faudrait calculer toutes les séquences de commutations. La charge de calculs augmente très rapidement avec le nombre d'instants considérés. La programmation dynamique peut permettre de réduire le nombre de calculs qui reste néanmoins élevé. En revanche, pour un horizon infini, le problème se complique encore puisque la programmation dynamique ne peut pas être utilisée. Pour un horizon infini, il s'agit alors d'un problème de limite (sur l'ensemble des lois de commutation admissibles). Il n'existe pas nécessairement une loi de commutation qui permet d'atteindre cette valeur limite des performances.

Problème 9 Déterminer l'ensemble des lois de commutation qui permettent de ne pas dépasser un niveau de performances préalablement fixé.

Si le seuil de performances fixé est supérieur au coût garanti alors toute séquence de commutation répond au problème. En revanche, quand le seuil est inférieur au coût garanti, déterminer les lois de commutation constitue un problème difficile.

Nous allons nous intéresser, dans ce chapitre, au problème 7. On cherche à analyser la stabilité du système à commutations (2.1) et dans le même temps à estimer le coût garanti quelle que soit la loi de commutation. Pour cela, nous allons déterminer un majorant du coût garanti aussi faible que possible. Pour vérifier que la valeur du majorant obtenu est proche du coût garanti, on s'attache à déterminer également un minorant de celui-ci. Cette recherche d'encadrement du coût garanti a déjà été étudiée pour différents systèmes. Dans [RJ00], les auteurs s'intéressent à ce problème pour les systèmes affines par morceaux. Ce problème a également été abordé dans le cadre de la synthèse de contrôleurs soumis à des *jitters* (giges d'échantillonnage) pour des systèmes linéaires à temps continu dans [SB09]. La recherche de validation d'un majorant du coût garanti par la détermination d'un minorant a également été présentée en filtrage robuste [SK06, GK08] pour des systèmes à paramètres incertains en temps continu et en temps discret. Les auteurs ont développé des méthodes pour concevoir des filtres robustes minimisant un critère de type $\mathcal{H}_2$ et ont déterminé un encadrement de ce critère. Néanmoins, les résultats présentés dans ce contexte ne peuvent pas s'étendre aux systèmes à commutations du fait de

la dépendance en temps de la loi de commutation. Pour les systèmes à commutations, le problème 8 a été abordé dans [GCB08]. La commande du système est assurée par la loi de commutation qui est recherchée grâce à la résolution d'inégalités de Lyapunov-Metzler de manière à assurer la stabilité du système étudié et à déterminer un encadrement d'un critère de type $\mathcal{H}_2$ correspondant au coût garanti pour cette loi de commutation.

2.2 Définition des performances

L'étude des performances du système à commutations (2.1) passe par l'évaluation d'un critère lié au système. Dans la littérature concernant les systèmes à temps invariant, plusieurs possibilités existent pour mesurer les performances d'un système comme, entre autres, le critère quadratique [Duc04], la norme $\mathcal{H}_2$ et la norme $\mathcal{H}_\infty$ [ZDG96]. La norme $\mathcal{H}_2$ représente l'énergie des variables de sortie en réponse à une impulsion de Dirac, elle est équivalente au critère quadratique. L'utilisation du critère quadratique, de par sa simplicité, est largement répandue. La norme $\mathcal{H}_\infty$ correspond au plus grand gain possible entre l'énergie d'entrée et l'énergie en sortie mais est plus difficile à évaluer. Les systèmes à commutations, du fait des commutations, dépendent du temps. Les normes $\mathcal{H}_2$ et $\mathcal{H}_\infty$ que l'on peut définir pour les systèmes à temps invariant n'existent plus pour les systèmes à commutations [Ger10]. Pour s'en rendre compte, prenons l'exemple présenté dans [Ger10] adapté au temps discret. On définit pour tout $k \in \mathbb{N}$ les systèmes suivants :

$$x_{k+1} = A_1 x_k + B_1 u_k, \quad (2.3)$$

$$z_k = C_1 x_k \quad (2.4)$$

et

$$x_{k+1} = A_2 x_k + B_2 u_k, \quad (2.5)$$

$$z_k = C_2 x_k \quad (2.6)$$

où $(A_1; B_1; C_1) = (0, 99; 0, 01; 1)$ et $(A_2; B_2; C_2) = (0, 99; 0, 001; 10)$, $x_k \in \mathbb{R}$, $u_k \in \mathbb{R}$ et $z_k \in \mathbb{R}$.

Ces deux systèmes ont la même fonction de transfert qui est la suivante :

$$H(z) = \frac{0, 01}{z - 0, 99}. \quad (2.7)$$

Considérons le système à commutations suivant :

$$x_{k+1} = A_{\sigma(k)} x_k + B_{\sigma(k)} u_k, \quad (2.8)$$

$$z_k = C_{\sigma(k)} x_k \quad (2.9)$$

dont les sous-systèmes sont les systèmes (2.3) et (2.5) et sa loi de commutation est définie par :

$$\sigma(k) = \begin{cases} 1, & \forall k \in [40j; 19 + 40j], \quad j \in \mathbb{N} \\ 2, & \forall k \in [20 + 40j; 39 + 40j], \quad j \in \mathbb{N} \end{cases} \quad (2.10)$$

Comme ces deux sous-systèmes ont la même fonction de transfert, on pourrait penser que le système à commutations peut également être représenté par cette fonction transfert. Cependant, il n'en est rien puisque un système à commutations a un comportement plus complexe que chaque sous-système seul. Prenons la réponse à une impulsion de Dirac à temps discret des systèmes (2.3) et (2.5) représentée sur la figure 2.1 et celle du système à commutations (2.8) sur la figure 2.2. Même si les deux sous-systèmes ont la même fonction de transfert, la réponse du système à commutations (2.5) n'est pas identique à celle des systèmes (2.3) et (2.5) seuls et dépend clairement de la loi de commutation. On ne peut pas, par conséquent, définir de normes $\mathcal{H}_2$ et $\mathcal{H}_\infty$ pour ce système.

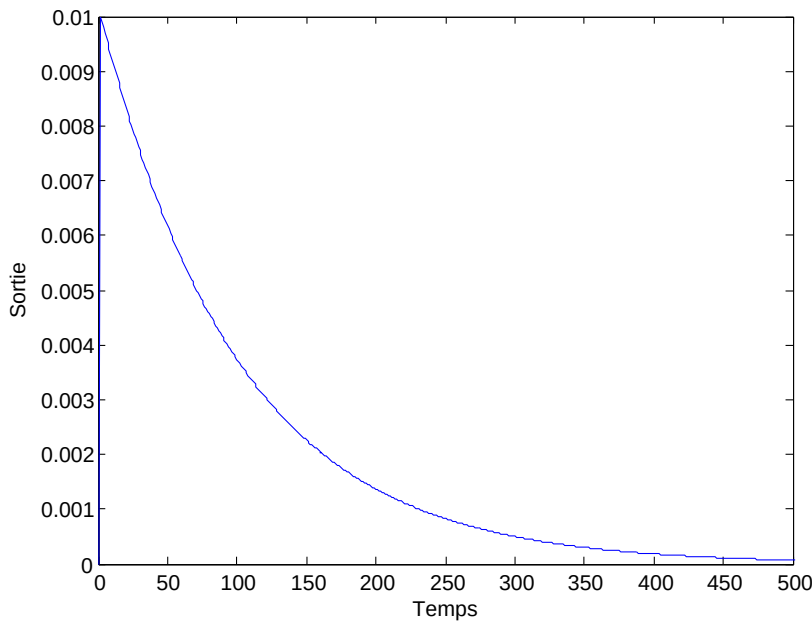


FIGURE 2.1 – Réponse du système (2.3) à une impulsion de Dirac en fonction du temps.

Cependant, pour mesurer les performances de systèmes à commutations, on peut, au lieu de par exemple travailler avec la norme $\mathcal{H}_2$ du système, s'intéresser à la norme 2 des variables de sortie comme dans [GCB08] où le système étudié comporte une entrée exogène et possède une condition initiale nulle. On cherche à réaliser notre étude pour toute condition initiale. Nous avons alors fait le choix de nous intéresser à l'évaluation des performances à travers un critère quadratique. Le problème étudié peut également être traité en considérant un gain $\mathcal{L}_2$ [JCTD11]. On considère le critère quadratique suivant :

$$J(\{\sigma(k)\}, x_0) = \sum_{k=0}^{+\infty} (z_k^T z_k) = \sum_{k=0}^{+\infty} (x_k^T C_{\sigma(k)}^T C_{\sigma(k)} x_k). \quad (2.11)$$

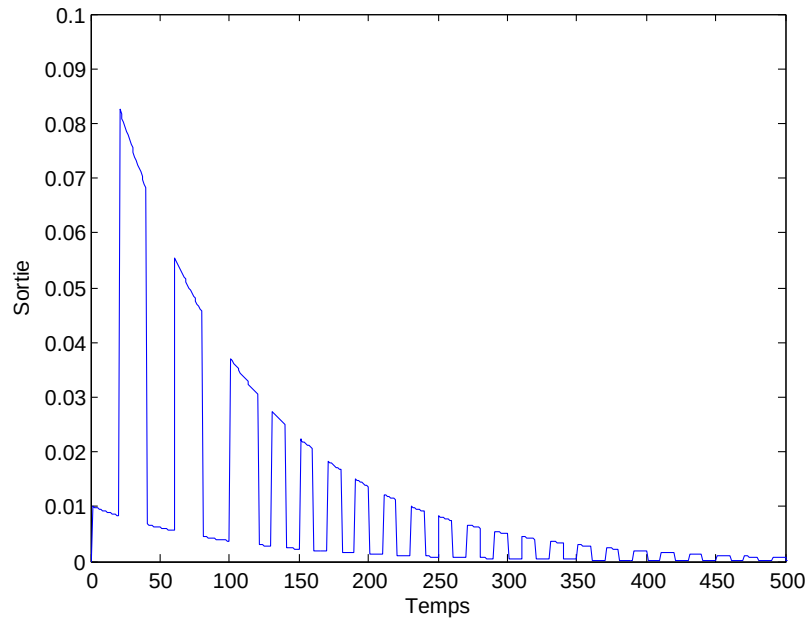


FIGURE 2.2 – Réponse du système à commutations à une impulsion de Dirac en fonction du temps.

Ce critère dépend de la séquence de commutations et de la condition initiale. Ainsi, à chaque séquence de commutations, il existe une valeur du critère correspondant. Il ne semble pas possible de déterminer numériquement les performances du système pour l'ensemble de ces valeurs. On va donc étudier ce problème en s'intéressant à la pire valeur des critères. Celle-ci correspond à la borne supérieure du critère quadratique pour toutes les séquences de commutations possibles. Il s'agit du coût garanti qui se définit comme suit

$$\hat{J}(x_0) = \sup_{\{\sigma(k) \in \Sigma\}_{k \in \mathbb{N}}} J(\{\sigma(k)\}, x_0). \quad (2.12)$$

Pour toute séquence de commutations, le coût garanti $\hat{J}(x_0)$ est quadratique en x_0 .

Le coût garanti étant défini comme une borne supérieure sur un ensemble infini de lois de commutation, il n'existe pas nécessairement de lois de commutation associée à la valeur de ce coût garanti. L'horizon du critère étant infini et les lois de commutation étant des fonctions du temps, la programmation dynamique ne permet pas de résoudre notre problème. Il ne semble alors pas possible d'obtenir la valeur exacte du coût garanti. Nous allons déterminer un majorant aussi faible que possible du coût garanti. Puis, pour s'assurer que l'écart entre la vraie valeur du coût garanti et le majorant déterminé est faible, nous allons chercher un minorant du plus grand coût que l'on puisse obtenir sur une classe particulière de loi de commutations. Ce minorant sera alors également un minorant du coût garanti. Cela complètera donc l'encadrement souhaité.

2.3 Majorant du coût garanti

Dans cette section, nous nous intéresserons à la détermination d'un majorant du coût garanti. Le majorant est déterminé grâce à la résolution d'un problème d'optimisation convexe sous des contraintes LMI. On détermine un ensemble de fonctions de Lyapunov qui dépendent du paramètre de commutation $\sigma(k)$ et dont la valeur à l'instant initial est supérieure au coût garanti $\hat{J}(x_0)$. En considérant la structure particulière du coût garanti, nous avons cherché des fonctions de Lyapunov de forme quadratique par rapport à la condition initiale en x_0 . On obtient alors un majorant du coût garanti. Néanmoins, ce majorant dépend de la direction de la condition initiale. Pour obtenir un résultat plus général, on souhaite s'affranchir de cette direction. Pour cela, on détermine un majorant des fonctions de Lyapunov obtenues précédemment. On obtiendra alors une inégalité de la forme suivante

$$\hat{J}(x_0) \leq V(x_0, \sigma(0)) \leq \beta \|x_0\|_2^2. \quad (2.13)$$

Nous allons dans ce chapitre travailler avec les hypothèses suivantes :

Hypothèse 1 Les paires (A_i, C_i) sont observables pour tout $i \in \Sigma$.

Cette hypothèse permet d'assurer la proposition suivante :

Proposition 1 Sous l'hypothèse 1, si le coût garanti $\hat{J}(x_0)$ a une valeur finie pour toute condition initiale x_0 , alors le système (2.1) est asymptotiquement stable.

Preuve 8 Si le coût garanti $\hat{J}(x_0)$ a une valeur finie pour toute condition initiale, on peut en déduire que le critère associé pour chaque mode figé $i \in \Sigma$ est aussi de valeur finie. Ces critères sont définis à l'aide d'une série qui est alors convergente. Les termes de la série tendent vers zéro, et l'on a alors

$$C_i x_k = 0, \quad (2.14)$$

$$C_i x_{k+1} = C_i A_i x_k = 0, \quad (2.15)$$

$$C_i x_{k+2} = C_i A_i^2 x_k = 0, \quad (2.16)$$

$$\vdots$$

$$C_i x_{k+n_x-1} = C_i A_i^{n_x-1} x_k = 0. \quad (2.17)$$

On obtient alors

$$\begin{bmatrix} C_i \\ C_i A_i \\ \vdots \\ C_i A_i^{n_x-1} \end{bmatrix} x_k = \mathcal{C}(C_i, A_i) x_k = 0. \quad (2.18)$$

On reconnaît alors la matrice d'observabilité de Kalman, qui est de rang plein sous l'hypothèse 1. L'état tend donc bien vers l'origine. Le système (2.1) est stable.

Hypothèse 2 Les matrices A_i pour $i \in \Sigma$ sont de type Schur, c'est-à-dire à valeurs propres de module strictement inférieur à 1.

La stabilité du système à commutations (2.1) doit être assurée pour toute séquence de commutations. Si un des sous-systèmes est instable alors on ne peut pas garantir la stabilité du système et le coût devient infini.

On souhaite obtenir un majorant le plus proche possible du coût garanti. On résout alors un problème d'optimisation sous deux ensembles de contraintes LMI. Il s'en suit le théorème suivant :

Théorème 12 Soit le système défini par (2.1). Pour tout $i \in \Sigma$, s'il existe des matrices $G_i \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, $S_i \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ tel que $S_i = S_i^T$ et un scalaire β , tels que les LMI

$$\begin{bmatrix} G_i + G_i^T - S_i & \star & \vdots & \star \\ \vdots & A_i G_i & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & S_j & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & I_{m_z} \end{bmatrix} > 0_{2n_x + m_z}, \quad \forall (i, j) \in \Sigma^2 \quad (2.19)$$

et

$$\begin{bmatrix} \beta I_{n_x} & \star \\ I_{n_x} & S_i \end{bmatrix} > 0_{2n_x}, \quad \forall i \in \Sigma, \quad (2.20)$$

soient faisables alors le majorant recherché est solution du problème d'optimisation suivant :

$$\begin{aligned} \min \quad & \beta \\ \text{sous les contraintes} \quad & G_i, S_i, \beta, \end{aligned} \quad (2.21)$$

et l'inégalité suivante est vérifiée :

$$\hat{J}(x_0) \leq V(x_0, \sigma(0)) \leq \beta \|x_0\|_2^2 \quad (2.22)$$

où $V(x_0, \sigma(0)) = x_0^T S_{\sigma(0)}^{-1} x_0$.

Remarque 12 Définissons la fonction $\bar{V}$ telle que :

$$\bar{V} : \begin{cases} \mathbb{R}^{n_x} & \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ x_0 & \longmapsto \bar{V}(x_0) = \max_{i \in \Sigma} V(x_0, i). \end{cases} \quad (2.23)$$

Cette fonction correspond à la plus grande valeur des fonctions de Lyapunov pour les différents modes. Les majorations données par (2.22) peuvent être complétées par :

$$\hat{J}(x_0) \leq V(x_0, \sigma(0)) \leq \bar{V}(x_0) \leq \beta \|x_0\|_2^2.$$

Pour analyser la stabilité et les performances du système à commutations (2.1), on résout un problème d'optimisation convexe sous deux ensembles de contraintes LMI. Le premier ensemble qui correspond aux LMI (2.19) permet l'analyse de la stabilité du système et mène à l'obtention de fonctions de Lyapunov de forme quadratique dont la valeur à l'instant initial est supérieure au coût garanti. On obtient alors l'inégalité suivante :

$$\hat{J}(x_0) \leq V(x_0, \sigma(0)).$$

Malheureusement, ce majorant dépend de la direction de la condition initiale. Le deuxième ensemble de LMI (2.20) permet de s'affranchir de la direction de la condition initiale et mène à l'inégalité suivante :

$$\hat{J}(x_0) \leq V(x_0, \sigma(0)) \leq \beta \|x_0\|_2^2.$$

Remarque 13 Le premier bloc en pointillés de la LMI (2.19) qui est le suivant :

$$\begin{bmatrix} G_i + G_i^T - S_i & \star \\ A_i G_i & S_j \end{bmatrix} > 0_{2n_x} \quad (2.24)$$

correspond à l'analyse de la stabilité du système à commutations (2.1) [DRI02].

Remarque 14 La faisabilité de l'inégalité (2.19) est équivalente à celle de

$$\begin{bmatrix} P_i & \star & \star \\ P_j A_i & P_j & \star \\ C_i & 0_{m_z \times n_x} & I_{m_z} \end{bmatrix} > 0_{2n_x + m_z} \quad (2.25)$$

en la variable P_i . La démonstration de l'équivalence entre les conditions (2.19) et (2.25) est similaire à celle présentée dans [DRI02] pour l'analyse de stabilité. L'introduction de variables supplémentaires G_i est initialement apparue dans [OBG99] dans le cas de systèmes linéaires incertains invariant dans le temps en temps discret. Ces variables sont utiles pour des problèmes de conception de lois de commande contraintes comme cela a été démontré dans [DRI02]. Nous avons fait le choix de travailler avec la condition (2.19) plutôt que la condition (2.25) puisque nous nous intéresserons dans la suite à la conception de lois de commande. Pour obtenir une majorante solution du problème d'optimisation (2.21) en utilisant comme contrainte l'inégalité (2.25), la seconde contrainte (2.20) doit être remplacée par l'inégalité suivante :

$$P_i - \beta I_{n_x} < 0_{n_x}. \quad (2.26)$$

Preuve 9 Quand l'inégalité (2.19) est vérifiée, on a $G_i + G_i^T - S_i > 0$ et $S_i > 0$, ce qui implique que G_i est de rang plein. En développant $(S_i - G_i)^T S_i^{-1} (S_i - G_i)$, on a $G_i^T S_i^{-1} G_i \geq G_i + G_i^T - S_i > 0$. Alors l'inégalité (2.19) conduit à

$$\begin{bmatrix} G_i^T S_i^{-1} G_i & (A_i G_i)^T & (C_i G_i)^T \\ A_i G_i & S_j & 0_{n_x \times m_z} \\ C_i G_i & 0_{m_z \times n_x} & I_{m_z} \end{bmatrix} > 0_{2n_x + m_z}. \quad (2.27)$$

En pré-multipliant cette inégalité par $\text{diag}\{G_i^{-T}, S_j^{-1}, I_{m_z}\}$ et en la post-multipliant par sa transposée, on obtient l'inégalité suivante

$$\begin{bmatrix} S_i^{-1} & \star & \star \\ S_j^{-1} A_i & S_j^{-1} & \star \\ C_i G_i & 0_{m_z \times n_x} & I_{m_z} \end{bmatrix} > 0_{2n_x + m_z}. \quad (2.28)$$

Le changement de variables $P_i = S_i^{-1}$ permet d'écrire

$$\begin{bmatrix} P_i & \star & \star \\ P_j A_i & P_j & \star \\ C_i & 0_{m_z \times n_x} & I_{m_z} \end{bmatrix} > 0_{2n_x + m_z}. \quad (2.29)$$

Il vient alors

$$\begin{bmatrix} P_{\sigma(k)} & \star & \star \\ P_{\sigma(k+1)} A_{\sigma(k)} & P_{\sigma(k+1)} & \star \\ C_{\sigma(k)} & 0_{m_z \times n_x} & I_{m_z} \end{bmatrix} > 0_{2n_x + m_z}. \quad (2.30)$$

L'utilisation judicieuse de deux compléments de Schur [BEFB94] mène à l'inégalité suivante :

$$A_{\sigma(k)}^T P_{\sigma(k+1)} A_{\sigma(k)} - P_{\sigma(k)} < -C_{\sigma(k)}^T C_{\sigma(k)}, \quad (2.31)$$

On considère ensuite une fonction de Lyapunov qui dépend des paramètres [DRI02]. Une fonction de Lyapunov dépendante du paramètre de commutation est définie comme suit :

$$V(x_k, \sigma(k)) = x_k^T P_{\sigma(k)} x_k.$$

En pré-multipliant l'inégalité (2.31) par x_k^T et en la post-multipliant par x_k , on a :

$$x_k^T C_{\sigma(k)}^T C_{\sigma(k)} x_k \leq V(x_k, \sigma(k)) - V(x_{k+1}, \sigma(k+1)). \quad (2.32)$$

On somme toutes ces dernières inégalités et on obtient

$$\sum_{k=0}^{+\infty} x_k^T C_{\sigma(k)}^T C_{\sigma(k)} x_k \leq V(x_0, \sigma(0)) = x_0^T P_{\sigma(0)} x_0, \quad (2.33)$$

parce que le système est stable c'est-à-dire $\lim_{k \rightarrow +\infty} V(x_k, \sigma(k)) = 0$.

Pour s'affranchir de la direction des vecteurs x_0 , on utilise un complément de Schur pour la LMI (2.20). Il vient alors

$$P_{\sigma(0)} < \beta I_{2n_x}. \quad (2.34)$$

En pré-multipliant la dernière inégalité par x_0^T et en la post-multipliant par sa transposée, il s'en suit

$$x_0^T P_{\sigma(0)} x_0 \leq x_0^T \beta I_{2n_x} x_0. \quad (2.35)$$

Ce qui conduit, pour tout $\sigma(0) \in \Sigma$, à l'inégalité

$$x_0^T P_{\sigma(0)} x_0 \leq \beta \|x_0\|_2^2. \quad (2.36)$$

Théorème 13 Si les LMI (2.24) sont faisables alors le système à commutations (2.1) est exponentiellement stable et la valeur du coût garanti est finie.

Lorsqu'un système est instable, le critère n'a pas de valeur finie. Cependant, si un système est asymptotiquement stable, cela ne permet pas de garantir que le critère converge. Pour être certain d'avoir un critère à valeur finie, il faut en plus de la stabilité, garantir que le critère converge suffisamment rapidement. Le système doit donc être stable et converger rapidement. La stabilité quadratique ou exponentielle d'un système permet ainsi d'assurer que le critère est à valeur finie.

Preuve 10 Si les LMI (2.24) sont faisables alors l'inégalité suivante est vérifiée

$$L_{ij} = A_i^T P_j A_i - P_i < 0_{n_x}, \quad \forall (i, j) \in \Sigma^2. \quad (2.37)$$

On note

$$\epsilon_{ij} = \frac{-\lambda_{\max}(L_{ij})}{2}, \quad \forall (i, j) \in \Sigma^2.$$

L'inégalité suivante est alors vérifiée :

$$A_i^T P_j A_i - P_i < -\epsilon_{ij} I_{n_x}, \quad \forall (i, j) \in \Sigma^2 \quad (2.38)$$

On recherche ensuite la plus petite valeur des ϵ_{ij} :

$$\epsilon = \min_{(i,j) \in \Sigma^2} \epsilon_{ij}.$$

On a donc $\forall (i, j) \in \Sigma^2$, $-\epsilon_{ij} \leq -\epsilon$ et comme le nombre de modes est fini on a également $\epsilon > 0$, ce qui conduit à

$$A_i^T P_j A_i - P_i < -\epsilon I_{n_x} < 0_{n_x}, \quad \forall (i, j) \in \Sigma^2 \quad (2.39)$$

De même, on a $C_i^T C_i > 0_{n_x}$. On note ξ la plus grande valeur propre des $C_i^T C_i$ pour tout $i \in \Sigma$:

$$\xi = \max_{i \in \Sigma} \lambda_{\max}(C_i^T C_i).$$

Il s'en suit l'inégalité suivante

$$\forall i \in \Sigma, \quad -\xi I_{n_x} \leq -C_i^T C_i < 0_{n_x}.$$

On pose $\tilde{P}_i = \frac{\xi}{\epsilon} P_i$. On multiplie l'inégalité (2.39) par $\frac{\xi}{\epsilon}$ et on obtient

$$A_i^T \tilde{P}_j A_i - \tilde{P}_i < -\xi I_{n_x}. \quad (2.40)$$

On a alors également

$$A_i^T \tilde{P}_j A_i - \tilde{P}_i < -C_i^T C_i. \quad (2.41)$$

Cette inégalité correspond à l'inégalité (2.31).

Remarque 15 Si les LMI (2.19) sont faisables alors les LMI (2.24) le sont également. En effet, les LMI (2.19) permettent d'assurer la stabilité du système (2.1) et de déterminer un majorant fini du coût garanti. De même, la faisabilité des LMI (2.24) implique celle des LMI (2.19). Les LMI (2.24) assurent la stabilité du système (2.1) et permettent d'affirmer que le coût garanti est à valeur finie. Il est donc possible d'obtenir un majorant à partir des fonctions de Lyapunov.

On a ainsi déterminé un majorant aussi petit que possible du coût garanti dans la classe de fonctions de Lyapunov considérée et non pas la valeur de ce coût garanti. Cependant, on ne sait pas si ce majorant et ce coût garanti sont proches ou non. En effet, nous avons déterminé des fonctions de Lyapunov qui étaient cherchées parmi une classe particulière puisqu'elles étaient choisies sous forme quadratique avec les matrices de Lyapunov fonction du paramètre de commutation. Cette restriction peut donc être la cause d'un certain conservatisme et les valeurs du majorant $\beta \|x_0\|_2^2$ et du coût garanti $\hat{J}(x_0)$ peuvent ne pas être proches l'une de l'autre. Il est donc pertinent de s'intéresser à l'écart existant entre le majorant obtenu par le théorème 12 et le coût garanti $\hat{J}(x_0)$. La section suivante s'intéresse ainsi à la détermination d'un minorant du coût garanti.

2.4 Minorant du coût garanti

Le théorème 12 permet l'obtention d'un majorant, $\beta \|x_0\|_2^2$, du coût garanti $\hat{J}(x_0)$ mais ne permet pas de conclure quant à sa pertinence. Nous allons, dans cette section, nous intéresser à la validation (connue dans la littérature anglaise sous le terme *certification* [GK08]) du majorant obtenu dans la section précédente en déterminant un minorant le plus grand possible du coût garanti.

Le coût garanti $\hat{J}(x_0)$ correspond à la plus grande valeur des critères (2.11) pour toute séquence de commutations. Chaque critère obtenu à chaque séquence de commutations constitue donc un minorant. On a donc l'inégalité suivante :

$$J(\{\sigma(k)\}, x_0) \leq \hat{J}(x_0), \quad \forall \sigma(k) \in \Sigma.$$

Cependant, il est difficile de déterminer la valeur exacte du critère (2.11) pour une séquence quelconque de commutations. L'idée est alors de choisir une séquence de commutations particulière qui mène à la détermination de la valeur exacte du critère. Nous avons ainsi choisi de travailler avec une séquence de commutations à un seul mode actif qui est simple à traiter puisque l'on se ramène au cas des systèmes linéaires à temps invariant (LTI - en anglais *Linear Time Invariant*). Nous allons tout d'abord nous intéresser à la détermination d'un minorant pour toute condition initiale puis d'un minorant pour une condition initiale particulière choisie de manière à maximiser le minorant.

2.4.1 Validation du majorant

Pour déterminer un minorant, on choisit une séquence de commutations particulière. La séquence la plus simple est celle où un seul mode est actif, comme s'il était figé. On se ramène alors au cas des systèmes LTI, c'est-à-dire au système associé au mode $i \in \Sigma$

$$x_{k+1} = A_i x_k, \quad (2.42)$$

$$z_k = C_i x_k \quad (2.43)$$

et au critère

$$J_i(x_0) = x_0^T \left(\sum_{k=0}^{+\infty} (A_i^T)^k C_i^T C_i A_i^k \right) x_0. \quad (2.44)$$

Sous l'hypothèse (2), la matrice A_i est stable, la série $\sum_{k=0}^{+\infty} (A_i^T)^k C_i^T C_i A_i^k$ converge et est bien définie. Sous l'hypothèse (1), on peut montrer que cette série matricielle est définie positive. Effectivement, soit $x \in \mathbb{R}^{n_x}$ tel que $x^T \left(\sum_{k=0}^{+\infty} (A_i^T)^k C_i^T C_i A_i^k \right) x = 0$, alors on a $C_i A_i^k x = 0, \forall k \in \mathbb{N}$. Par l'hypothèse (1), la paire (C_i, A_i) est observable et on a $x = 0$.

La valeur exacte du critère quadratique peut facilement être obtenue en résolvant l'équation de Lyapunov suivante :

$$C_i^T C_i - W_i^* + A_i^T W_i^* A_i = 0_{n_x}, \quad \forall i \in \Sigma, \quad (2.45)$$

où, comme la paire (C_i, A_i) est observable et A_i est stable, il existe une et une seule solution, $W_i^* \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, de cette équation qui soit symétrique ($W_i^* = (W_i^*)^T$) et définie positive ($W_i^* > 0_{n_x}$). C'est-à-dire

$$W_i^* = \sum_{k=0}^{+\infty} (A_i^T)^k C_i^T C_i A_i^k > 0_{n_x}. \quad (2.46)$$

La solution de l'équation de Lyapunov (2.45) peut être déterminée numériquement grâce à la fonction *dlyap* de Matlab. Celle-ci résout l'équation (2.45) grâce à un algorithme qui utilise une décomposition de Schur [Bar77]. La solution du problème peut être également trouvée en résolvant un problème d'optimisation donné par la proposition suivante.

Proposition 2 *Le problème d'optimisation*

$$\begin{aligned} \min_{W_i = W_i^T} \quad & \text{Tr}(W_i) \\ \text{sous les contraintes :} \end{aligned} \quad (2.47)$$

$$W_i > 0_{n_x}, \quad (2.48)$$

et

$$A_i^T W_i A_i - W_i + C_i^T C_i \leq 0_{n_x} \quad (2.49)$$

où $W_i \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ est symétrique, définie positive mène à la solution W_i^* de l'équation de Lyapunov (2.45).

Preuve 11 Comme pour tout $i \in \Sigma$ A_i est stable et que la paire (A_i, C_i) est observable, l'équation de Lyapunov (2.45) a une solution unique W_i^* qui est symétrique et définie positive [LR95]. On a alors

$$C_i^T C_i = W_i^* - A_i^T W_i^* A_i. \quad (2.50)$$

On remplace $C_i^T C_i$ par son expression (2.50) dans (2.49) et on obtient :

$$A_i^T (W_i - W_i^*) A_i - (W_i - W_i^*) \leq 0_{n_x}. \quad (2.51)$$

Comme pour tout $i \in \Sigma$, A_i est stable, on a

$$W_i - W_i^* \geq 0_{n_x}. \quad (2.52)$$

En prenant la trace de l'inégalité (2.52), on obtient

$$\text{Tr}(W_i) \geq \text{Tr}(W_i^*). \quad (2.53)$$

La plus petite trace de W_i est donc celle de W_i^* qui est alors solution du problème d'optimisation.

Le critère quadratique (2.11) s'écrit pour une séquence de commutations constante $J_i(x_0)$ où $i \in \Sigma$ indique le mode actif. Il est alors donné par :

$$J_i(x_0) = x_0^T W_i^* x_0, \quad \forall i \in \Sigma, \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}^{n_x}. \quad (2.54)$$

Pour chaque mode actif, on peut ainsi calculer un critère qui est également un minorant du coût garanti. On aura donc autant de minorants que de modes. On a alors l'inégalité suivante :

$$x_0^T W_i^* x_0 \leq \hat{J}(x_0), \quad \forall i \in \Sigma, \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}^{n_x}. \quad (2.55)$$

On introduit une fonction correspondant à la plus grande valeur du critère $J_i(x_0)$ pour les différents modes :

$$\bar{W} : \begin{cases} \mathbb{R}^{n_x} & \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ x_0 & \longmapsto \bar{W}(x_0) = \max_{i \in \Sigma} x_0^T W_i^* x_0 = \max_{i \in \Sigma} J_i(x_0). \end{cases} \quad (2.56)$$

On a ainsi un minorant du coût garanti tel que

$$x_0^T W_i^* x_0 \leq \bar{W}(x_0) \leq \hat{J}(x_0), \quad \forall i \in \Sigma, \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}^{n_x}. \quad (2.57)$$

Cherchons, comme pour le majorant, à nous affranchir de la direction de la condition initiale. Pour déterminer un minorant indépendant de la direction de la condition initiale et valable pour toute condition initiale, on s'intéresse à la détermination de la plus petite valeur propre des matrices W_i^* , solutions de l'équation de Lyapunov (2.45) que l'on note $\lambda_{\min}(W_i^*)$. On obtient alors l'inégalité suivante :

$$\lambda_{\min}(W_i^*) \|x_0\|_2^2 \leq \bar{W}(x_0), \quad \forall i \in \Sigma, \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}^{n_x}. \quad (2.58)$$

Pour toute condition initiale, le minorant recherché correspond à la plus grande des valeurs propres sur l'ensemble des valeurs propres minimales trouvées pour les différents modes. On obtient alors la valeur δ_m suivante

$$\delta_m = \max_{i \in \Sigma} \lambda_{\min}(W_i^*). \quad (2.59)$$

Il s'en suit alors l'encadrement

$$\delta_m \|x_0\|_2^2 \leq \hat{J}(x_0) \leq \beta \|x_0\|_2^2. \quad (2.60)$$

En considérant toute condition initiale possible, on obtient un minorant conservatif du coût garanti. Pour améliorer ce résultat, il faudrait s'intéresser à des séquences de commutations plus complexes, c'est-à-dire plus riches (on pourrait penser en particulier aux lois de commutation périodiques) en comportement afin d'approcher le plus possible les variétés de comportement des systèmes linéaires à commutations avec des lois de commutations arbitraires. Malheureusement, calculer la valeur exacte des critères (2.11) s'avérerait également plus compliqué.

2.4.2 Amélioration de la validation du majorant

Le minorant déterminé pour toute condition initiale permet d'obtenir un encadrement du coût garanti mais ne permet pas de valider le majorant. On cherche à déterminer un minorant plus élevé pour pouvoir valider l'écart entre le majorant $\beta \|x_0\|_2^2$ et le coût garanti $\hat{J}(x_0)$. Pour chaque valeur de la condition initiale x_0 , la valeur de $\bar{W}(x_0)$ correspondante est un minorant du coût garanti. En s'intéressant à une condition initiale particulière, il est possible d'améliorer la valeur du minorant trouvé. De ce fait, on réduirait l'écart entre le minorant et le majorant pour une direction, ce qui pourrait mettre en avant l'impossibilité d'une amélioration importante du majorant $\beta \|x_0\|_2^2$.

Cette condition initiale n'est pas choisie au hasard mais de manière à maximiser la valeur du minorant. On détermine un minorant indépendant de la direction de la condition initiale à partir de l'ensemble des critères quadratiques obtenu pour une séquence de commutations constante. Pour déterminer le minorant le plus grand possible, on recherche la plus grande valeur propre, notée δ_M , pour l'ensemble des matrices W_i^* solutions de l'équations de Lyapunov (2.45)

$$\delta_M = \max_{i \in \Sigma} \lambda_{\max}(W_i^*). \quad (2.61)$$

où $\lambda_{\max}(W_i^*)$ correspond à la plus grande valeur propre de W_i^* .

On détermine ensuite le mode correspondant, noté l correspondant à cette valeur propre :

$$l = \arg \max_{i \in \Sigma} \lambda_{\max}(W_i^*).$$

On obtient alors le vecteur propre de W_l^* que l'on note $x_{\max}$ associé à la valeur propre δ_M déterminée par (2.61), il mène à l'inégalité suivante :

$$\delta_M \leq \frac{\hat{J}(x_{\max})}{\|x_{\max}\|_2^2} \leq \beta.$$

Remarque 16 Le minorant δ_M peut également être obtenu en considérant la plus grande valeur de $\bar{W}$:

$$\delta_M = \max_{x_0 \in \mathbb{R}^{n_x}} \frac{\bar{W}(x_0)}{\|x_0\|_2^2}. \quad (2.62)$$

Le calcul de β et de δ_M permet ainsi de savoir si la valeur du majorant $\beta \|x_0\|_2^2$ est proche de celle du coût garanti $\hat{J}(x_0)$. Si tel est le cas, alors on peut conclure que $\beta \|x_0\|_2^2$ est un bon majorant du coût garanti, sinon il faut chercher un autre majorant ou un autre minorant.

Ce majorant est déterminé à partir d'une classe particulière de fonctions de Lyapunov. Une classe plus étendue pourrait donc permettre d'améliorer le majorant. Une classe qui pourrait ainsi être considérée est celle des fonctions de Lyapunov dépendant du chemin [LD06]. Les fonctions de Lyapunov recherchées ne dépendent plus d'un mode mais d'une séquence finie de modes. Le minorant, quant à lui, est obtenu en prenant en compte une séquence particulière et simple de commutations qui est une séquence à un seul mode actif. Utiliser une séquence plus complexe pourrait mener à un meilleur minorant.

2.5 Encadrement du coût garanti pour une condition initiale donnée

Dans les sections précédentes, nous avons déterminé un encadrement du coût garanti $\hat{J}(x_0)$ sans avoir d'information sur la condition initiale. Dans le cas particulier où l'on connaît la condition initiale, il est possible d'en tenir compte dans les contraintes qui permettent de déterminer un majorant du coût garanti dans le théorème 12. Celui-ci peut se réécrire dans ce contexte de la manière suivante

Corollaire 1 *Soit le système défini par (2.1). Pour tout $i \in \Sigma$, s'il existe des matrices $G_i \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, $S_i \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ tel que $S_i = S_i^T$ et un scalaire $\mu(x_0)$, tels que les LMI*

$$\begin{bmatrix} G_i + G_i^T - S_i & \star & \star \\ A_i G_i & S_j & \star \\ C_i G_i & 0_{m_z \times n_x} & I_{m_z} \end{bmatrix} > 0_{2n_x + m_z}, \quad \forall (i, j) \in \Sigma^2 \quad (2.63)$$

et

$$\begin{bmatrix} \mu(x_0) & x_0^T \\ x_0 & S_i \end{bmatrix} > 0_{2n_x}, \quad \forall i \in \Sigma, \quad (2.64)$$

soient faisables alors le majorant recherché est solution du problème d'optimisation suivant :

$$\begin{aligned} & \min \mu(x_0) \\ & G_i, S_i, \mu(x_0), \end{aligned} \quad (2.65)$$

sous les contraintes (2.63) et (2.64)

et l'inégalité suivante est vérifiée :

$$\hat{J}(x_0) \leq V(x_0, \sigma(0)) \leq \mu(x_0) \quad (2.66)$$

où $V(x_0, \sigma(0)) = x_0^T S_{\sigma(0)}^{-1} x_0$.

Ce majorant ainsi obtenu est meilleur que celui déterminé pour toute condition initiale. Cependant, l'inconvénient du majorant obtenu par le corollaire 1 est qu'à chaque fois que la condition initiale changera, la valeur du majorant changera aussi. Il faudra donc à chaque changement de condition initiale résoudre à nouveau le problème d'optimisation.

On souhaite également déterminer un minorant du coût garanti. Le minorant δ_M est déterminé pour une condition initiale particulière et ne peut pas être utilisé pour définir un encadrement du coût garanti lorsque l'on tient compte de la condition initiale. En effet, le majorant déterminé en tenant compte de la condition initiale, $\mu(x_0)$, peut être inférieur au minorant δ_M qui est valable uniquement pour une condition initiale donnée, $x_{\max}$. δ_M n'est donc pas un minorant du coût garanti $\hat{J}(x_0)$ quand la condition initiale est connue. Dans ce cas particulier, un minorant peut être obtenu en considérant la fonction $\bar{W}$. Pour une condition initiale donnée, $\bar{W}(x_0)$ est la plus grande valeur du critère $J_i(x_0)$ pour les différents modes. On obtient ainsi l'encadrement suivant :

$$\bar{W}(x_0) \leq \hat{J}(x_0) \leq \mu(x_0). \quad (2.67)$$

De la même manière que pour le majorant, à chaque changement de condition initiale il faudra relancer les calculs.

2.6 Exemples numériques

Nous allons, à présent, illustrer les résultats présentés dans les sections précédentes à travers des exemples numériques. On considère un système linéaire à commutations autonome en temps discret dont les matrices sont :

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0,3 & 0,1 \\ -0,3 & -0,2 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0,07 & -0,2 \\ -1 & 0,4 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 0,5 & -0,02 \\ -0,8 & 0,6 \end{bmatrix}$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad C_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

On cherche un majorant aussi petit que possible du coût garanti en appliquant le théorème 12. On obtient alors $\beta = 7,1412$ et on a l'inégalité suivante :

$$\hat{J}(x_0) \leq \underbrace{\beta}_{7,1412} \|x_0\|_2^2, \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}^{n_x}.$$

On obtient également les variables G_i et S_i pour $i \in \{1, 2, 3\}$ suivantes :

$$G_1 = \begin{bmatrix} 0,309 & 0,351 \\ 0,351 & 0,871 \end{bmatrix}, \quad G_2 = \begin{bmatrix} 0,160 & -0,00361 \\ 0,00355 & 0,196 \end{bmatrix},$$

$$G_3 = \begin{bmatrix} 3,179 & -4,421 \\ -4,421 & 6,058 \end{bmatrix}, \quad S_1 = \begin{bmatrix} 0,260 & 0,249 \\ 0,249 & 0,659 \end{bmatrix},$$

$$S_2 = \begin{bmatrix} 0,157 & 0,00291 \\ 0,00291 & 0,196 \end{bmatrix}, \quad S_3 = \begin{bmatrix} 2,194 & -2,561 \\ -2,561 & 3,560 \end{bmatrix}.$$

Notons que la matrice G_2 n'est pas symétrique.

Comme les conditions (2.19) et (2.25) sont équivalentes, on aurait pu s'intéresser à la résolution du problème d'optimisation (2.21) en remplaçant la contrainte (2.19) par (2.25). Le majorant ainsi obtenu est $\beta = 7,1420$ qui correspond à celui obtenu avec la contrainte (2.19) et les variables S_i pour $i \in \{1, 2, 3\}$ sont les suivantes :

$$S_1 = \begin{bmatrix} 0,273 & 0,277 \\ 0,277 & 0,717 \end{bmatrix}, \quad S_2 = \begin{bmatrix} 0,158 & 0,00278 \\ 0,00278 & 0,196 \end{bmatrix},$$

$$S_3 = \begin{bmatrix} 2,665 & -3,149 \\ -3,149 & 4,335 \end{bmatrix}.$$

On détermine, ensuite, des minorants du coût garanti. On s'intéresse alors à une séquence de commutations où un seul mode est actif et on obtient en résolvant l'équation (2.45) un minorant pour toute condition initiale qui est

$\delta_m \|x_0\|_2^2$ avec $\delta_m = 0,0013$. On détermine ensuite un minorant pour une condition initiale particulière, $\delta_M \|x_{\max}\|_2^2$ avec $\delta_M = 6,1574$.

On a alors les encadrements suivants :

$$\begin{aligned} \forall x_0 \in \mathbb{R}^{n_x}, \quad \underbrace{\delta_m}_{0,0013} &\leq \frac{\hat{J}(x_0)}{\|x_0\|_2^2} \leq \underbrace{\beta}_{7,1412}, \\ \exists x_{\max} \in \mathbb{R}^{n_x}, \quad \underbrace{\delta_M}_{6,1574} &\leq \frac{\hat{J}(x_{\max})}{\|x_{\max}\|_2^2} \leq \underbrace{\beta}_{7,1412}. \end{aligned}$$

La valeur du minorant déterminé pour toute condition initiale est éloignée de celle du majorant et ne permet donc pas de conclure quant à la pertinence du majorant déterminé. Néanmoins, si, comme pour le majorant, on souhaite que le minorant déterminé soit vrai pour toute condition initiale, on ne peut pas obtenir une meilleure valeur. Elle permet toutefois d'assurer que le coût garanti est positif. Nous ne calculerons plus dans la suite les valeurs δ_m qui ne présentent pas d'intérêt pour notre encadrement.

En revanche, la valeur du minorant δ_M obtenue pour une condition initiale particulière est proche de celle du majorant. On peut donc conclure que le majorant déterminé est pertinent et que sa valeur est proche de la valeur du coût garanti $\hat{J}(x_0)$.

Nous présentons sur la figure 2.3 pour une condition initiale

$$x_0 = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix}$$

avec α variant dans l'intervalle $[0; \pi]$, le majorant, $\beta \|x_0\|_2^2$, obtenu ainsi que les fonctions de Lyapunov pour les trois modes et la fonction $\bar{V}$ qui correspond au maximum des différentes fonctions de Lyapunov. Comme le coût $J_i(x_0)$ est quadratique, nous avons $J_i(x_0) = J_i(-x_0)$ et l'étude peut se restreindre à des valeurs de α sur l'intervalle $[0, \pi]$ au lieu de l'intervalle $[0, 2\pi]$.

Le majorant $\beta \|x_0\|_2^2$ est cherché de manière à être indépendant de la direction de la condition initiale et être valable quelle que soit la condition initiale. D'après la figure 2.3, on constate que ce majorant est très proche de la plus grande valeur de la fonction $\bar{V}$.

Pour la même condition initiale, on représente, à présent, sur la figure 2.4 le minorant, δ_M , obtenu pour une condition initiale particulière ainsi que les coûts pour chaque mode en considérant un seul mode actif et la fonction $\bar{W}$.

La figure 2.4 permet de constater que le minorant δ_M correspond à la plus grande valeur de la fonction $\bar{W}$. On remarque également que le coût J_2 est pour toute condition initiale plus grand que les deux autres coûts. Par conséquent, la fonction $\bar{W}$ et le coût J_2 sont identiques pour cet exemple.

Nous allons présenter sur la figure 2.5 et la figure 2.6 le majorant et le minorant pour une condition initiale particulière obtenus ainsi que les fonctions $\bar{W}$ et $\bar{V}$.

Pour toute valeur de α , la valeur du coût garanti est comprise dans la partie grisée qui est délimitée par les fonctions $\bar{V}$ et $\bar{W}$. Le majorant $\beta \|x_0\|_2^2$ et le

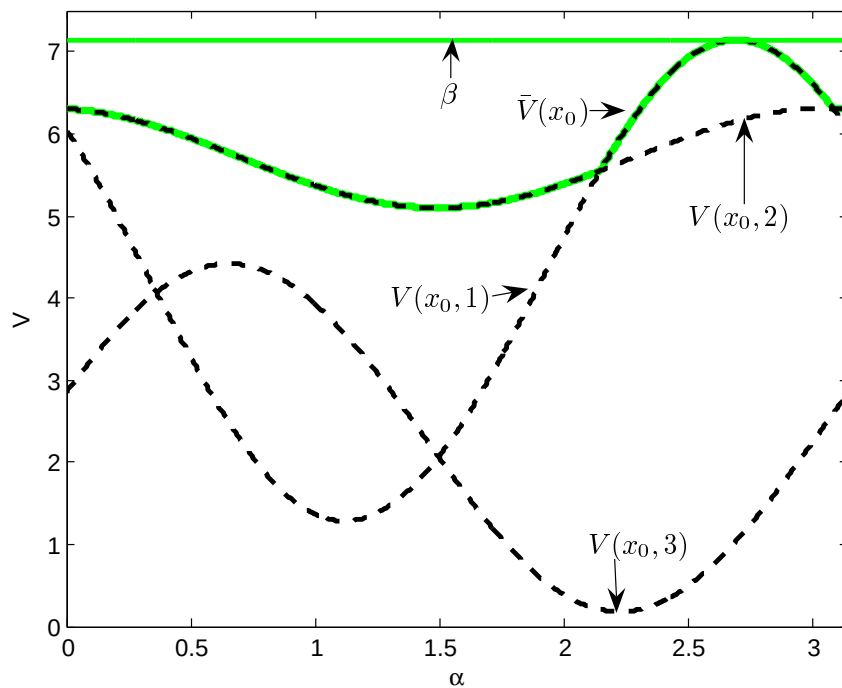


FIGURE 2.3 – Valeurs du majorant β indépendant de la condition initiale, des fonctions de Lyapunov pour les différents modes $V(x_0, 1)$, $V(x_0, 2)$ et $V(x_0, 3)$ et de la fonction $\bar{V}(x_0)$ en fonction de la condition initiale x_0 (caractérisé par l'angle α).

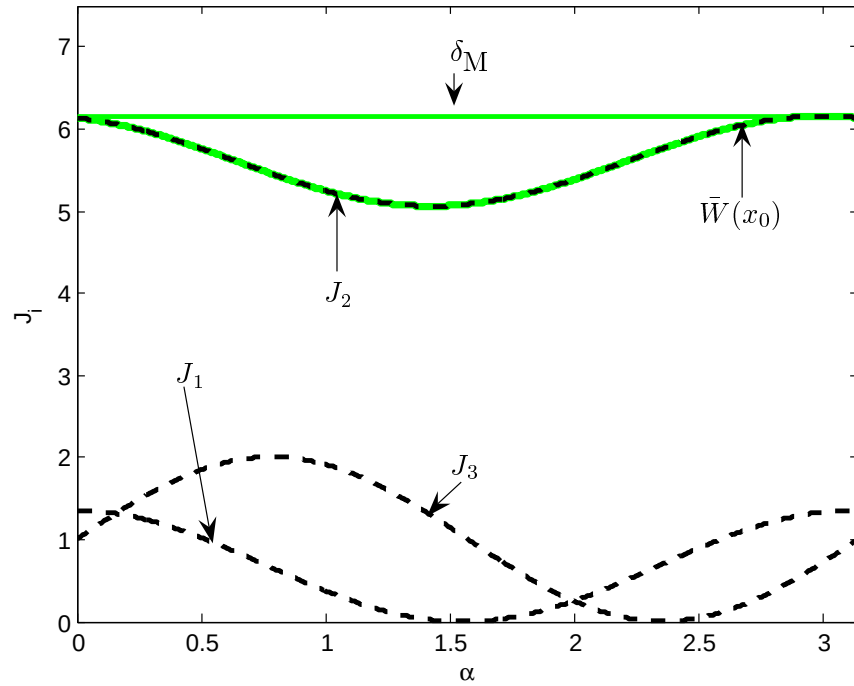


FIGURE 2.4 – Valeurs du minorant δ_M pour une condition initiale particulière, des coûts $J_1(x_0)$, $J_2(x_0)$ et $J_3(x_0)$ pour les différents modes et de la fonction $\bar{W}(x_0)$ à chaque condition initiale x_0 .

minorant pour une condition initiale particulière $\delta_M \|x_0\|_2^2$ permettent d’obtenir un encadrement de la plus grande valeur du coût garanti.

Intéressons-nous au cas particulier où la condition initiale est connue. La figure 2.7 représente les valeurs du majorant $\mu(x_0)$ pour les différentes valeurs de α ainsi que la fonction $\bar{V}$ obtenue avec le théorème 12 et la fonction $\bar{W}$.

On constate que lorsqu’on utilise le corollaire 1, le majorant $\mu(x_0)$ est inférieur ou égal à la valeur de $\bar{V}(x_0)$ pour toute valeur de α . On améliore donc le majorant. Néanmoins, pour obtenir toutes les valeurs du majorant $\mu(x_0)$, il faut résoudre le problème d’optimisation du corollaire 1 pour chaque valeur de x_0 , ce qui s’avère compliqué puisqu’il y en a une infinité. La façon d’obtenir ce majorant n’est donc pas utilisable en pratique.

Cet exemple a permis d’illustrer les résultats présentés dans ce chapitre. Nous avons ainsi déterminé un majorant du coût garanti et validé ce majorant en déterminant un minorant du coût garanti proche du majorant. Néanmoins, notre approche ne peut pas toujours mener à la validation du majorant. Pour s’en apercevoir, nous allons considérer le système précédent avec

$$A_1(a) = a \begin{bmatrix} 0,3 & 0,1 \\ -0,3 & -0,2 \end{bmatrix}$$

pour $a \in [1; 4,3426]$.

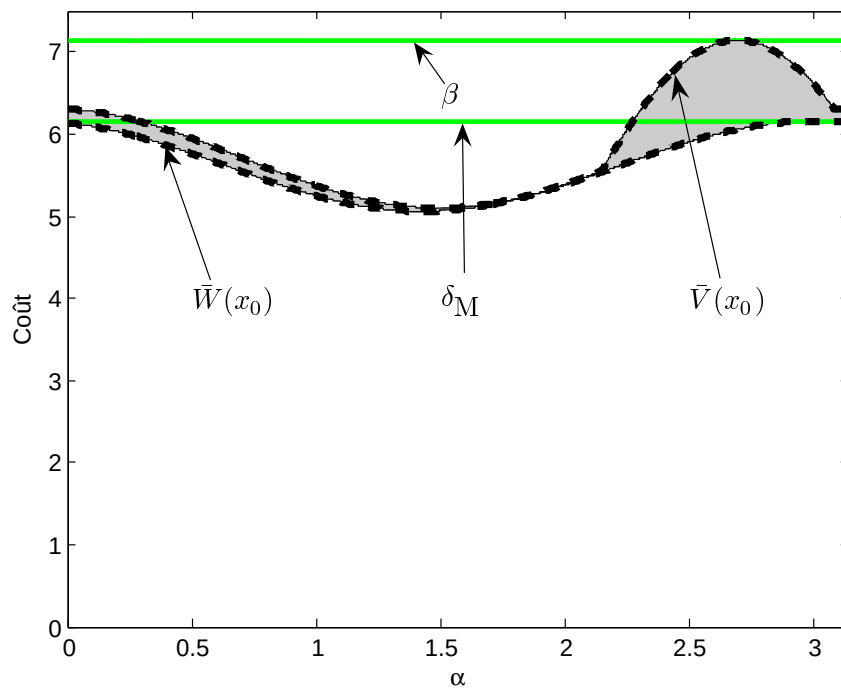


FIGURE 2.5 – Valeurs du majorant β , du minorant δ_M pour une condition initiale particulière, des fonctions $\bar{V}(x_0)$ et $\bar{W}(x_0)$ en fonction de la condition initiale x_0 .

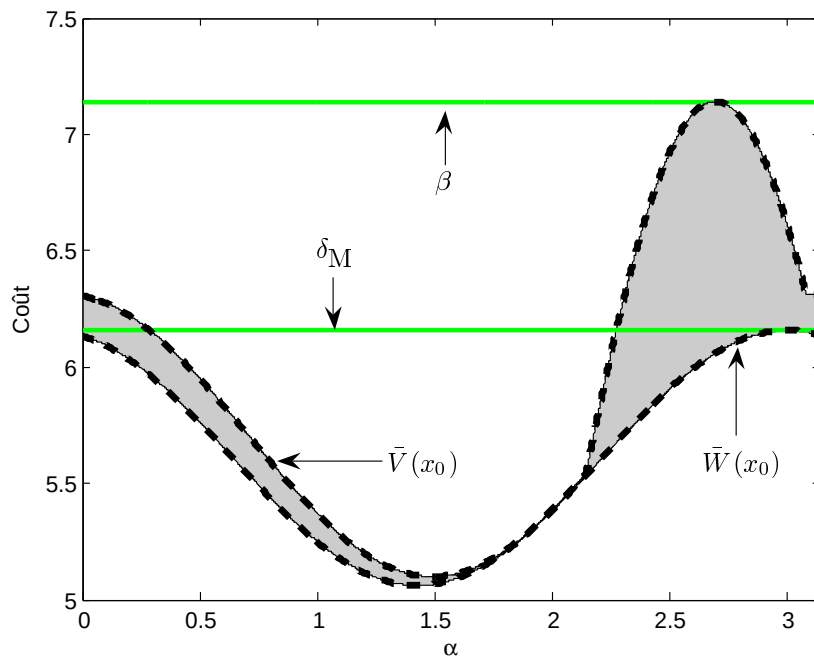


FIGURE 2.6 – Zoom de la figure 2.5. Valeurs du majorant β , du minorant δ_M pour une condition initiale particulière, des fonctions $\bar{V}(x_0)$ et $\bar{W}(x_0)$ en fonction de la condition initiale x_0 .

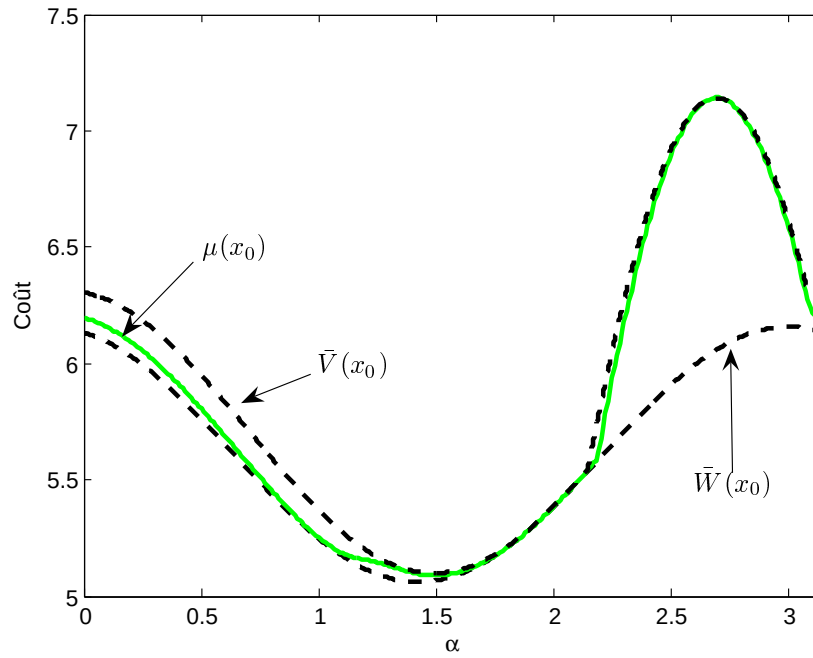


FIGURE 2.7 – Valeurs du majorant $\mu(x_0)$ en trait continu, de la fonction $\bar{V}(x_0)$ obtenue avec le théorème 12 et du minorant $\bar{W}(x_0)$ en tirets, en fonction de la condition initiale x_0 .

On s'intéresse à la détermination du majorant $\beta \|x_0\|_2^2$ et du minorant $\delta_M \|x_0\|_2^2$ pour les différentes valeurs de a . On obtient alors les résultats présentés sur la figure 2.8.

On constate alors que la valeur de β augmente avec a jusqu'à ce que le système devienne instable et qu'il ne soit plus possible d'obtenir un majorant, ce qui se produit pour $a = 4,3419$. Pour $a \in [1; 4,2879]$, la valeur du minorant δ_M reste constante. Quand on regarde la figure 2.4, on constate que quelque soit la valeur de x_0 , la valeur du coût pour le mode 2 est toujours bien supérieure aux valeurs des coûts pour les deux autres modes. En augmentant la valeur de a , même si le coût du mode 1 augmente, il reste inférieur au coût du mode 2 jusqu'à $a = 4,2879$ et la valeur du minorant δ_M ne change pas. Cependant, quand on continue à augmenter la valeur de a au-delà de $a = 4,2879$, la valeur de δ_M change. La plus grande valeur des coûts est alors obtenue par le mode 1 et non plus par le mode 2. A partir de $a = 4,3426$, le mode 1 devient instable.

La figure 2.8 permet de se rendre compte que pour $a \leq 2$, on obtient un bon encadrement du coût garanti. En revanche, pour des valeurs de a plus grandes, l'écart entre le majorant et le minorant augmente et on ne peut alors rien conclure. Le tableau 2.1 récapitule les valeurs de a à partir desquelles le système est instable et le majorant n'a donc plus de valeur finie, le mode 1 devient instable et le minorant est obtenu par le mode 1.

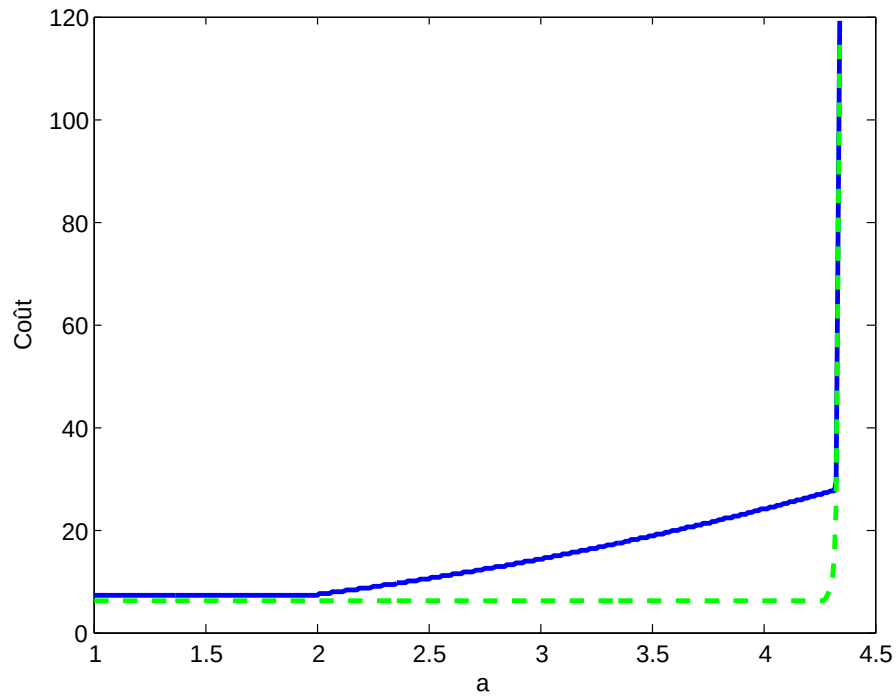


FIGURE 2.8 – Majorant β en trait continu et minorant δ_M en tirets pour différentes valeurs de a .

a	1	4, 2879	4, 3419	4, 3426
β	finie	finie	infinie	infinie
δ_M	mode 2	mode 1	mode 1	
A_1	stable	stable	stable	instable
W_1	>0	>0	>0	<0

TABLE 2.1 – Propriétés de plusieurs variables selon la valeur de a

2.7 Conclusion

Pour des systèmes linéaires autonomes à commutations en temps discret, nous avons mené une analyse de performances. Ces performances ont été évaluées par un critère quadratique. Comme la valeur du critère change pour chaque séquence de commutations, nous avons choisi d'étudier ce problème en nous intéressant au coût garanti qui correspond à la borne supérieure des critères quadratiques. Nous avons présenté le problème permettant de déterminer un majorant du coût garanti indépendant de la direction initiale. Il s'agit d'un problème d'optimisation sous deux ensembles de contraintes LMI.

Pour valider l'écart qui existe entre la valeur exacte du coût garanti que l'on ne connaît pas et la valeur du majorant obtenu, nous avons ensuite cherché à déterminer un minorant du coût garanti en s'intéressant à une séquence particulière de commutations, une séquence de commutations à un seul mode actif. Celui-ci est obtenu de deux façons. Un premier minorant est obtenu pour toute condition initiale. Ce minorant est très conservatif et ne permet pas de conclure quant à la pertinence du majorant déterminé. Un deuxième minorant est recherché pour une condition initiale particulière choisie de manière à le maximiser. Celui-ci permet d'apprécier l'écart entre le coût garanti et le majorant.

Dans le chapitre suivant, nous allons nous intéresser à la synthèse de plusieurs lois de commande qui assurent la stabilité de systèmes linéaires à commutations en temps discret et qui mène à l'obtention d'un majorant aussi petit que possible du coût garanti.

Chapitre 3

Synthèse de lois de commande

3.1 Introduction

L'analyse de la stabilité des systèmes à commutations est un vaste sujet qui a conduit à de nombreuses études [Bra94, LM99, LA09, SG05] et pour lequel des outils ont été développés tels que les fonctions de Lyapunov multiples ou les fonctions de Lyapunov dépendantes des paramètres [Bra98, DB01, DRI02]. Pour les systèmes linéaires à commutations, ces approches mènent à des conditions suffisantes données sous forme de LMI [BEFB94]. Nous avons mené, précédemment, une analyse de performance des systèmes linéaires autonomes à commutations en temps discret. Le problème auquel on s'intéresse dans le cas de systèmes non autonomes à commutations est le suivant :

Problème 10 *Déterminer la loi de commande qui stabilise le système et minimise le majorant des critères représentant les performances pour toute séquence de commutations.*

Dans ce chapitre, nous allons nous intéresser à ce problème en réalisant la synthèse de lois de commande sous différentes hypothèses qui mènent à la stabilité d'un système linéaire à commutations et à l'évaluation d'un coût garanti pour toute séquence de commutations.

Le système considéré est un système linéaire à commutations en temps discret, défini comme suit :

$$x_{k+1} = A_{\sigma(k)}x_k + B_{\sigma(k)}u_k, \quad (3.1)$$

$$z_k = C_{\sigma(k)}x_k, \quad (3.2)$$

avec $\sigma(k) \in \Sigma = \{1, \dots, N\}$.

La loi de commutation $\sigma(k)$ est une loi arbitraire mais on suppose que sa valeur est connue en temps réel. $x_k \in \mathbb{R}^{n_x}$ représente l'état du système, $u_k \in \mathbb{R}^{r_u}$, la commande et $z_k \in \mathbb{R}^{m_z}$, la sortie.

Comme nous l'avons vu dans le chapitre précédent, nous nous intéressons au problème des performances à travers l'étude d'un critère quadratique.

Celui-ci dépend de la séquence de commutations, de l'état initial et de la séquence de commandes.

$$J(\{\sigma(k)\}, x_0, \{u_k\}) = \sum_{k=0}^{+\infty} (z_k^T z_k + u_k^T R u_k). \quad (3.3)$$

La matrice de pondération $R \in \mathbb{R}^{r_u \times r_u}$ de la commande est symétrique et définie positive, $R = R^T > 0$. Le critère est donc convexe par rapport à la commande et est implicitement fonction de la séquence de commutations.

Pour chaque séquence de commutations, on obtient ainsi une valeur différente du critère. Il est alors impossible de s'intéresser à l'aspect performance à travers toutes les valeurs du critère que l'on peut obtenir. Par conséquent, on s'intéresse à ce problème en travaillant avec la plus grande valeur obtenue pour toutes les séquences de commutations nommée coût garanti et qui correspond à la borne supérieure du critère et s'écrit :

$$\hat{J}(x_0, \{u_k\}) = \sup_{\{\sigma(k) \in \Sigma\}_{k \in \mathbb{N}}} J(\{\sigma(k)\}, x_0, \{u_k\}). \quad (3.4)$$

Nous cherchons ainsi à déterminer des commandes qui assurent la stabilité du système à commutations (3.1) et qui minimisent le coût garanti (3.4). Le problème que l'on souhaite résoudre est donc le suivant :

$$\min_{u_k \in \mathbb{R}^{r_u}} \hat{J}(x_0, \{u_k\}). \quad (3.5)$$

Trouver une loi de commande de manière à minimiser un critère constitue un problème de commande optimale. Pour le cas de systèmes LTI, ce problème a déjà été largement abordé [AM89, Duc04]. Ainsi, pour un horizon infini, une solution peut être trouvée en résolvant une équation algébrique de Riccati [LR95]. Cependant, dans le cadre de notre étude, du fait des commutations, les systèmes étudiés dépendent du temps. Il est alors impossible d'appliquer les résultats obtenus pour les systèmes LTI. Des travaux ont donc été menés pour étendre les outils utilisés aux SDH et aux systèmes à commutations. Ainsi, une version du principe du maximum de Pontryaguine a été donnée pour ce cadre dans [Sus00, PS00, RIK03]. Une autre approche s'appuyant sur le théorème d'optimalité de Bellman et l'équation d'Hamilton Jacobi Bellman a été proposée dans [BBS98]. Une adaptation de la programmation dynamique pour les SDH a été proposée dans [BB07, AGE09]. Néanmoins ces résultats ne permettent pas une mise en pratique évidente. En effet, ils sont difficiles à résoudre numériquement à cause des commutations. Devant la difficulté à recourir à ces techniques, nous avons fait le choix de travailler avec des classes particulières de lois de commande ou de lois paramétriques. Ainsi, nous allons, dans les sections suivantes, nous attacher à concevoir différents contrôleurs qui tiennent compte de l'aspect performance. Tout d'abord, nous travaillerons avec l'hypothèse que tous les états sont connus. Nous concevrons alors un contrôleur par retour d'état commuté. Puis, nous envisagerons le cas où seules les sorties sont connues. Dans ce cadre, pour réaliser une commande,

une première approche est de concevoir un retour d'état reconstruit par observateur. On s'attachera donc à la réalisation d'un observateur commuté. Nous traiterons ensuite le cas du retour de sortie dynamique dans sa forme générale. La synthèse de ces différents correcteurs sera étudiée pour assurer la stabilité du système en boucle fermée et tenir compte de l'aspect performance.

3.2 Synthèse d'un contrôleur par retour d'état.

Dans cette section, nous nous intéressons au cas où tout l'état du système est connu. Nous allons alors nous attacher à la conception d'une loi de commande par retour d'état qui stabilise le système (3.1) et qui tient compte de l'aspect performance grâce à la détermination d'un majorant du coût garanti aussi petit que possible et indépendant de la direction de la condition initiale.

Pour cela, on détermine tout d'abord la loi de commande par retour d'état définie comme suit

$$u_k = K_{\sigma(k)} x_k \quad (3.6)$$

avec $u_k \in \mathbb{R}^{r_u}$.

Le problème que l'on cherche alors à résoudre est de déterminer les gains K_i , pour $i = \sigma(k) \in \Sigma$, de manière à assurer la stabilité du système (3.1) et à minimiser la borne supérieure (3.4). Il s'écrit de la manière suivante :

$$\min_{K_i \in \mathbb{R}^{r_u \times n_x}} \hat{J}(x_0, \{u_k\}). \quad (3.7)$$

Comme nous l'avons vu dans le chapitre précédent, pour connaître la valeur du coût garanti, il faudrait connaître la séquence de commutations qui mène à cette valeur. Or, cela est impossible. Par conséquent, on s'intéresse à ce problème en cherchant à minimiser un majorant de cette borne supérieure.

Le théorème suivant permet de déterminer le plus petit majorant possible du coût garanti (3.4) indépendant de la direction de la condition initiale. Il conduit également à la détermination des gains du retour d'état correspondants tels que le système soit stable.

Théorème 14 *Soit le système défini par (3.1). Pour tout $i \in \Sigma$, s'il existe des matrices $G_i \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, $Y_i \in \mathbb{R}^{r_u \times n_x}$, $S_i \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ tel que $S_i = S_i^T$ et un scalaire β , tels que le majorant du coût garanti soit solution du problème d'optimisation :*

$$\begin{aligned} & \min \beta \\ & G_i, S_i, Y_i, \beta, \\ & \text{sous les contraintes :} \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$\begin{bmatrix} G_i + G_i^T - S_i & \star & \star & \star \\ A_i G_i + B_i Y_i & S_j & \star & \star \\ C_i G_i & 0_{m_z \times n_x} & I_{m_z} & \star \\ R^{1/2} Y_i & 0_{r_u \times n_x} & 0_{r_u \times m_z} & I_{r_u} \end{bmatrix} > 0_{2n_x + r_u + m_z}, \quad \forall (i, j) \in \Sigma^2 \quad (3.9)$$

et

$$\begin{bmatrix} \beta I_{n_x} & \star \\ I_{n_x} & S_i \end{bmatrix} > 0_{2n_x}, \quad \forall i \in \Sigma, \quad (3.10)$$

alors les gains du retour d'état $K_i = Y_i G_i^{-1}$ stabilisent le système et vérifient

$$\hat{J}(x_0, \{u_k\}) \leq V(x_0, \sigma(0)) \leq \beta \|x_0\|_2^2, \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}^{n_x}.$$

Pour déterminer les gains du retour d'état qui stabilisent le système et permettent d'obtenir le plus petit majorant du coût garanti, nous résolvons un problème d'optimisation sous des contraintes LMI. Les contraintes se composent de deux ensembles de LMI. Le premier qui correspond aux LMI (3.9) assure la stabilisation du système et mène à un majorant sous forme d'une fonction de Lyapunov qui dépend des commutations dont la valeur à l'instant initial est supérieure au coût garanti. L'inconvénient de ce majorant est le fait qu'il dépende de la direction de la condition initiale. Ainsi, le deuxième ensemble de contraintes (3.10) permet d'obtenir un majorant de la valeur à l'instant initial de la fonction de Lyapunov qui sera indépendant de la direction de la condition initiale.

Preuve 12 Quand la LMI (3.9) est vérifiée, on a $G_i + G_i^T - S_i > 0$ et $S_i > 0$, ce qui implique que G_i est de rang plein. En développant $(S_i - G_i)^T S_i^{-1} (S_i - G_i)$, on obtient l'inégalité suivante

$$G_i^T S_i^{-1} G_i \geq G_i + G_i^T - S_i > 0_{n_x}. \quad (3.11)$$

La LMI (3.9) mène alors à l'inégalité suivante

$$\begin{bmatrix} G_i^T S_i^{-1} G_i & \star & \star & \star \\ A_i G_i + B_i Y_i & S_j & \star & \star \\ C_i G_i & 0_{m_z \times n_x} & I_{m_z} & \star \\ R^{1/2} Y_i & 0_{r_u \times n_x} & 0_{r_u \times m_z} & I_{r_u} \end{bmatrix} > 0_{2n_x + r_u + m_z}, \quad (3.12)$$

En écrivant $K_i = Y_i G_i^{-1}$ et en pré-multipliant l'inégalité (3.12) par $\text{diag}\{G_i^{-T}, S_j^{-1}, I_{m_z}, I_{r_u}\}$ et en la post-multipliant par sa transposée, il vient

$$\begin{bmatrix} S_i^{-1} & \star & \star & \star \\ S_j^{-1} (A_i + B_i K_i) & S_j^{-1} & \star & \star \\ C_i & 0_{m_z \times n_x} & I_{m_z} & \star \\ R^{1/2} K_i & 0_{r_u \times n_x} & 0_{r_u \times m_z} & I_{r_u} \end{bmatrix} > 0_{2n_x + r_u + m_z}. \quad (3.13)$$

Le changement de variables $P_i = S_i^{-1}$ nous permet d'écrire l'inégalité suivante

$$\begin{bmatrix} P_i & \star & \star & \star \\ P_j (A_i + B_i K_i) & P_j & \star & \star \\ C_i & 0_{m_z \times n_x} & I_{m_z} & \star \\ R^{1/2} K_i & 0_{r_u \times n_x} & 0_{r_u \times m_z} & I_{r_u} \end{bmatrix} > 0_{2n_x + r_u + m_z}. \quad (3.14)$$

Par conséquent, en notant $i = \sigma(k) \in \Sigma$ et $j = \sigma(k+1) \in \Sigma$, on a

$$\begin{bmatrix} \mathcal{P}_{\sigma(k)} & \star & \star & \star \\ \mathcal{P}_{\sigma(k+1)} A_{cl,\sigma(k)} & \mathcal{P}_{\sigma(k+1)} & \star & \star \\ C_{\sigma(k)} & 0_{m_z \times n_x} & I_{m_z} & \star \\ R^{1/2} K_{\sigma(k)} & 0_{r_u \times n_x} & 0_{r_u \times m_z} & I_{r_u} \end{bmatrix} > 0_{2n_x + r_u + m_z}, \quad (3.15)$$

où $A_{cl,\sigma(k)} = (A_{\sigma(k)} + B_{\sigma(k)} K_{\sigma(k)})$ et $\mathcal{P}_{\sigma(k)} = P_i$ pour $i = \sigma(k) \in \Sigma$.

En utilisant, successivement, deux compléments de Schur (pour plus de détails, voir [BEFB94]) on obtient l'inégalité suivante

$$A_{cl,\sigma(k)}^T \mathcal{P}_{\sigma(k+1)} A_{cl,\sigma(k)} - \mathcal{P}_{\sigma(k)} < -Q_{\sigma(k)}, \quad (3.16)$$

où

$$Q_{\sigma(k)} = C_{\sigma(k)}^T C_{\sigma(k)} + K_{\sigma(k)}^T R K_{\sigma(k)}. \quad (3.17)$$

En pré-multipliant cette inégalité par x_k^T et en la post-multipliant par x_k , on a

$$x_k^T Q_{\sigma(k)} x_k \leq V(x_k, \sigma(k)) - V(x_{k+1}, \sigma(k+1)). \quad (3.18)$$

On considère ensuite une fonction de Lyapunov qui dépend des paramètres [DRI02]. Une fonction de Lyapunov dépendante du paramètre de commutation est définie comme suit :

$$V(x_k, \sigma(k)) = x_k^T \mathcal{P}_{\sigma(k)} x_k. \quad (3.19)$$

En sommant toutes ces inégalités, il vient

$$\hat{J}(x_0, \{u_k\}) = \sum_{k=0}^{+\infty} x_k^T Q_{\sigma(k)} x_k \leq V(x_0, \sigma(0)) = x_0^T \mathcal{P}_{\sigma(0)} x_0, \quad (3.20)$$

parce que le système est stable. On a donc un majorant du coût garanti qui est la valeur à l'instant initial d'une fonction de Lyapunov qui dépend du paramètre de commutation. Pour s'affranchir de la direction de la condition initiale, un complément de Schur est appliqué à la LMI (3.10). Il vient alors

$$\mathcal{P}_{\sigma(0)} < \beta I_{n_x}.$$

En pré-multipliant cette dernière inégalité par x_0^T et en la post-multipliant par sa transposée, il vient

$$x_0^T \mathcal{P}_{\sigma(0)} x_0 \leq x_0^T \beta I_{n_x} x_0. \quad (3.21)$$

Ce qui conduit, pour tout $\sigma(0) \in \Sigma$, à l'inégalité

$$x_0^T P_i x_0 \leq \beta \|x_0\|_2^2. \quad (3.22)$$

On a alors un majorant de la valeur à l'instant initial de la fonction de Lyapunov qui est indépendant de la direction de la condition initiale x_0 .

Dans le théorème 14, la loi de commutation est arbitraire mais sa valeur est connue en temps réel et ainsi les gains du retour d'état peuvent dépendre du paramètre de commutation. Si on considère à présent que cette valeur ne peut pas être connue en temps réel, ces gains ne pourront plus dépendre du paramètre de commutation. On détermine alors un gain identique pour toutes les valeurs du paramètre de commutation. Il en découle le corollaire suivant

Corollaire 2 Soit le système défini par (3.1). S'il existe des matrices $G \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, $Y \in \mathbb{R}^{r_u \times n_x}$, pour tout $i \in \Sigma$, $S_i \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ tel que $S_i = S_i^T$ et un scalaire β , tels que le majorant du coût garanti soit solution du problème d'optimisation :

$$\min_{G, S_i, Y, \beta} \beta \quad (3.23)$$

sous les contraintes :

$$\begin{bmatrix} G + G^T - S_i & \star & \star & \star \\ A_i G + B_i Y & S_j & \star & \star \\ C_i G & 0_{m_z \times n_x} & I_{m_z} & \star \\ R^{1/2} Y & 0_{r_u \times n_x} & 0_{r_u \times m_z} & I_{r_u} \end{bmatrix} > 0_{2n_x + r_u + m_z}, \quad \forall (i, j) \in \Sigma^2$$

et

$$\begin{bmatrix} \beta I_{n_x} & \star \\ I_{n_x} & S_i \end{bmatrix} > 0_{2n_x}, \quad \forall i \in \Sigma,$$

alors le gain du retour d'état $K = YG^{-1}$ stabilise le système et vérifie

$$\hat{J}(x_0, \{u_k\}) \leq \beta \|x_0\|_2^2, \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}^{n_x}.$$

Le résultat obtenu sera alors plus conservatif puisque le gain du retour d'état est le même pour toutes les valeurs du paramètre de commutation.

Une loi de commande par retour d'état a été conçue dans cette section de manière à assurer la stabilité du système (3.1) et à minimiser le coût garanti. Cette commande a été conçue grâce à l'hypothèse que tous les états sont connus. Nous allons ensuite nous intéresser à la conception d'une loi de commande quand cette hypothèse n'est plus valable.

3.3 Synthèse d'un contrôleur par retour d'état reconstruit par observateur.

Connaître tous les états du système permet de déterminer facilement une loi de commande. Malheureusement, dans la pratique, il est rare que ce cas se présente. On doit donc généralement se contenter des informations fournies par la sortie. Puisque nous n'avons pas accès aux différents états, nous allons les reconstruire grâce à un observateur. Pour concevoir notre contrôleur, nous allons alors procéder en deux étapes. Tout d'abord, on considère que tous les états sont connus et on détermine ainsi les gains du retour d'état qui stabilisent

le système et mènent à un majorant du coût garanti aussi petit que possible. Puis, on fait l'hypothèse que seules les sorties sont connues. On conçoit alors un observateur pour reconstruire l'état du système de manière à obtenir un majorant du coût garanti aussi petit que possible. Les gains du retour d'état reconstruit par observateur sont déterminés grâce au théorème 14, dans cette section, les seules inconnues sont les gains de l'observateur.

On définit tout d'abord l'observateur comme suit

$$\begin{aligned}\hat{x}_{k+1} &= (A_{\sigma(k)} + B_{\sigma(k)}K_{\sigma(k)})\hat{x}_k + L_{\sigma(k)}(z_k - \hat{z}_k), \\ \hat{z}_k &= C_{\sigma(k)}\hat{x}_k,\end{aligned}\tag{3.24}$$

avec $K_{\sigma(k)}$ les gains du retour d'état obtenus en appliquant le théorème 14.

On peut alors définir l'erreur de l'observateur de la manière suivante

$$\epsilon_k = x_k - \hat{x}_k.$$

On réécrit alors le système en fonction de l'état et de l'erreur

$$x_{k+1} = (A_{\sigma(k)} + B_{\sigma(k)}K_{\sigma(k)})x_k - B_{\sigma(k)}K_{\sigma(k)}\epsilon_k,\tag{3.25}$$

$$\epsilon_{k+1} = (A_{\sigma(k)} - L_{\sigma(k)}C_{\sigma(k)})\epsilon_k.\tag{3.26}$$

Nous allons travailler avec un système augmenté qui contient l'état du système et l'erreur

$$\tilde{x}_k = \begin{bmatrix} x_k \\ \epsilon_k \end{bmatrix}, \quad \tilde{x}_k \in \mathbb{R}^{2n_x}.$$

L'équation correspondante du système en boucle fermée de ce système est

$$\tilde{x}_{k+1} = \tilde{A}_{\sigma(k)}\tilde{x}_k = \tilde{A}_i\tilde{x}_k, \quad \text{où } i = \sigma(k) \in \Sigma,\tag{3.27}$$

avec

$$\tilde{A}_{\sigma(k)} = \begin{bmatrix} A_{\sigma(k)} + B_{\sigma(k)}K_{\sigma(k)} & -B_{\sigma(k)}K_{\sigma(k)} \\ 0_{n_x} & A_{\sigma(k)} - L_{\sigma(k)}C_{\sigma(k)} \end{bmatrix}.\tag{3.28}$$

L'expression du critère J peut être réécrite en prenant en compte l'état augmenté $\tilde{x}_k$ et par conséquent, elle va dépendre des séquences de paramètres de commutation $\{\sigma(k)\}$, de la condition initiale x_0 , de l'erreur à l'instant initial ϵ_0 et de la séquence de commandes.

$$J(\{\sigma(k)\}, x_0, \epsilon_0, \{u_k\}) = \sum_{k=0}^{+\infty} (\tilde{x}_k^T Q_{\sigma(k)} \tilde{x}_k),\tag{3.29}$$

avec

$$Q_{\sigma(k)} = Q_i \quad \text{où } i = \sigma(k) \in \Sigma.\tag{3.30}$$

et

$$Q_i = \check{C}_i^T \check{C}_i\tag{3.31}$$

avec

$$\check{C}_i = \begin{bmatrix} C_i & 0_{m_z \times n_x} \\ R^{1/2}K_i & -R^{1/2}K_i \end{bmatrix}.\tag{3.32}$$

Par conséquent, la borne supérieure du critère pour toute séquence possible des paramètres de commutation qui correspond au coût garanti s'écrit comme une fonction de la condition initiale x_0 , de l'erreur initiale ϵ_0 et de la séquence de commandes

$$\hat{J}(x_0, \epsilon_0, \{u_k\}) = \sup_{\{\sigma(k) \in \Sigma\}_{k \in \mathbb{N}}} J(\{\sigma(k)\}, x_0, \epsilon_0, \{u_k\}). \quad (3.33)$$

On cherche donc à déterminer les gains de l'observateur L_i , pour $i = \sigma(k) \in \Sigma$ de manière à assurer la stabilité du système (3.1) et à minimiser le coût garanti (3.33). Le problème s'écrit alors de la manière suivante

$$\min_{L_i \in \mathbb{R}^{n_x \times m_z}} \hat{J}(x_0, \epsilon_0, \{u_k\}).$$

Comme précédemment, il est impossible de connaître la valeur exacte du coût garanti et on s'intéresse alors au problème en cherchant à minimiser un majorant du coût garanti. Comme pour le retour d'état, on cherche ce majorant indépendant de la direction de la condition initiale. La condition initiale de l'état augmenté est composée de celles de l'état du système et de l'erreur de l'observateur. On doit donc chercher un majorant qui tient compte de ces deux conditions initiales. Nous avons fait le choix de chercher un majorant de la forme $\beta_1 \|x_0\|_2^2 + \beta_2 \|\epsilon_0\|_2^2$. En effet, un majorant différent est déterminé pour chaque condition initiale. Si nous avons choisi un majorant de la forme $\beta(\|x_0\|_2^2 + \|\epsilon_0\|_2^2)$, nous aurions imposé que β_1 et β_2 soient égaux et si l'un des deux est plus élevé que l'autre, le résultat aurait été plus conservatif.

Le théorème suivant permet d'obtenir le plus petit majorant possible du coût garanti indépendant de la direction des conditions initiales liées à l'état du système et à l'erreur de l'observateur ainsi que les gains de l'observateur pour que le système soit stable pour des gains du retour d'état fixés.

Théorème 15 Soit le système défini par (3.1). On suppose, pour $i \in \Sigma$, l'existence de matrices $\check{G}_i = \begin{bmatrix} \check{G}_{11,i} & 0_{n_x} \\ \check{G}_{21,i} & \check{G}_{22,i} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n_x \times 2n_x}$, $\check{T}_i = \begin{bmatrix} 0_{n_x \times m_z} \\ T_i \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n_x \times m_z}$, de matrices symétriques $\check{P}_i \in \mathbb{R}^{2n_x \times 2n_x}$ et de scalaires β_1 et β_2 , tels que le majorant du coût garanti soit solution du problème d'optimisation :

$$\min_{\check{G}_i, \check{P}_i, \check{T}_i, \beta_1, \beta_2} \beta_1 + \beta_2 \quad (3.34)$$

sous les contraintes :

$$\begin{bmatrix} \check{P}_i & \star & \star \\ \check{G}_i \check{A}_{i,0} - \check{T}_i C_i & \check{G}_i + \check{G}_i^T - \check{P}_j & \star \\ \check{C}_i & 0_{(m_z+r_u) \times 2n_x} & I_{(r_u+m_z)} \end{bmatrix} > 0_{4n_x+m_z+r_u}, \quad \forall (i, j) \in \Sigma^2 \quad (3.35)$$

et

$$\begin{bmatrix} \beta_1 I_{n_x} & 0_{n_x} \\ 0_{n_x} & \beta_2 I_{n_x} \end{bmatrix} - \check{P}_i > 0_{2n_x}, \quad \forall i \in \Sigma \quad (3.36)$$

avec

$$\check{A}_{i;0} = \begin{bmatrix} A_i + B_i K_i & -B_i K_i \\ 0_{n_x} & A_i \end{bmatrix}.$$

Alors les gains de l'observateur qui stabilisent le système sont :

$$\check{W}_i = \begin{bmatrix} 0_{n_x \times m_z} \\ L_i \end{bmatrix} = \check{G}_i^{-1} \check{T}_i. \quad (3.37)$$

Le majorant du coût garanti est :

$$\hat{J}(x_0, \epsilon_0, \{u_k\}) \leq V(x_0, \epsilon_0, \sigma(0)) \leq \beta_1 \|x_0\|_2^2 + \beta_2 \|\epsilon_0\|_2^2, \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}^{n_x}, \quad \forall \epsilon_0 \in \mathbb{R}^{n_x}.$$

Comme pour le retour d'état, on résout un problème d'optimisation sous deux ensembles de contraintes LMI. Le premier assure la stabilité du système et permet d'obtenir un majorant du coût garanti sous la forme d'une fonction de Lyapunov qui dépend de l'état initial, de l'erreur initiale et de la séquence de commutations. Puis on a déterminé un majorant indépendant de la direction des conditions initiales. Ce majorant est la somme d'un majorant qui est lié à l'état initial du système et d'un majorant lié à l'erreur initiale de l'observateur.

Preuve 13 La preuve du théorème 15 est similaire à celle du théorème 14 dans le cadre d'un retour d'état. Ainsi, la LMI (3.35) correspond à la LMI (3.9) et la LMI (3.36) à la LMI (3.10).

On travaille néanmoins ici avec un état augmenté $x_k \in \mathbb{R}^{2n_x}$ au lieu de l'état $x_k \in \mathbb{R}^{n_x}$. La variable de Lyapunov considérée ici est $\check{P}_i$ au lieu de P_i pour le retour d'état. La matrice en boucle fermée qui était $A_i + B_i K_i$ dans le cadre du retour d'état est dans ce cas $\check{A}_i$.

La structure particulière des variables $\check{G}_i$ et $\check{T}_i$, et donc de $\check{W}_i$, est due au fait que l'on cherche uniquement les gains de l'observateur pour reconstruire l'état du système (3.1) à partir de l'erreur du système.

Remarque 17 Une autre approche envisagée aurait été de considérer comme variables du problème d'optimisation (3.34) à la fois les gains du retour d'état et les gains de l'observateur. Malheureusement cette façon de procéder mène à des inégalités matricielles qui ne sont pas linéaires et qui sont donc très difficiles à résoudre avec les outils actuels de la littérature ou en faisant intervenir des égalités comme contraintes [CT99]. Une autre approche qui a été envisagée est l'utilisation du principe de séparation. En effet, il a été démontré dans [DRI04] que celui-ci pouvait être étendu au cas des systèmes à commutations en temps discret, en ce qui concerne la stabilité de l'association contrôleur-observateur. Toutefois, dans notre cas, nous ne cherchons pas uniquement à assurer la stabilité d'un système à commutations mais également à minimiser un majorant du coût garanti. Il n'existe pas de théorème de séparation dans ce cadre. Les gains du retour d'état et de l'observateur doivent être déterminés de manière à garantir la stabilité et à minimiser une même variable qui est le majorant du coût garanti.

Dans le théorème 15, la loi de commutation est arbitraire mais sa valeur est connue en temps réel. Par conséquent, les gains de l'observateur peuvent dépendre du paramètre de commutation. Si on considère à présent que cette valeur ne peut pas être connue en temps réel, ces gains devront être indépendants du paramètre de commutation. On détermine alors un gain identique pour toutes les valeurs du paramètre de commutation. Il en découle le corollaire suivant

Corollaire 3 Soit le système défini par (3.1). On suppose l'existence de matrices $\check{G} = \begin{bmatrix} \check{G}_{11} & 0_{n_x} \\ \check{G}_{21} & \check{G}_{22} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n_x \times 2n_x}$, $\check{T} \in \mathbb{R}^{2n_x \times m_z}$, pour $i \in \Sigma$, de matrices symétriques $\check{P}_i \in \mathbb{R}^{2n_x \times 2n_x}$ et de scalaires β_1 et β_2 , tels que le majorant du coût garanti soit solution du problème d'optimisation :

$$\min_{\check{G}, \check{P}_i, \check{T}, \beta_1, \beta_2} \beta_1 + \beta_2 \quad (3.38)$$

sous les contraintes :

$$\begin{bmatrix} \check{P}_i & \star & \star \\ \check{G}\check{A}_{i;0} - \check{T}C_i & \check{G} + \check{G}^T - \check{P}_j & \star \\ \check{C}_i & 0_{(m_z+r_u) \times 2n_x} & I_{(r_u+m_z)} \end{bmatrix} > 0_{4n_x+m_z+r_u}, \quad \forall (i, j) \in \Sigma^2$$

et

$$\begin{bmatrix} \beta_1 I_{n_x} & 0_{n_x} \\ 0_{n_x} & \beta_2 I_{n_x} \end{bmatrix} - \check{P}_i > 0_{2n_x}, \quad \forall i \in \Sigma$$

avec

$$\check{A}_{i;0} = \begin{bmatrix} A_i + B_i K_i & -B_i K_i \\ 0_{n_x} & A_i \end{bmatrix}.$$

Alors les gains de l'observateur qui stabilisent le système sont :

$$\check{W} = \begin{bmatrix} 0_{n_x \times m_z} \\ L \end{bmatrix} = \check{G}^{-1} \check{T}. \quad (3.39)$$

Le majorant du coût garanti est :

$$\hat{J}(x_0, \epsilon_0, \{u_k\}) \leq \beta_1 \|x_0\|_2^2 + \beta_2 \|\epsilon_0\|_2^2, \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}^{n_x}, \quad \forall \epsilon_0 \in \mathbb{R}^{n_x}.$$

Le résultat obtenu sera alors plus conservatif puisque le gain du retour d'état et le gain de l'observateur sont identiques pour toutes les valeurs du paramètre de commutation.

3.4 Synthèse d'un contrôleur par retour de sortie dynamique.

Dans cette section, reprenant les résultats de [MJDI10b, MJDI10a], nous travaillons toujours avec l'hypothèse que seules les sorties sont connues. Dans la

section précédente, nous nous sommes intéressés à la conception d'une commande qui utilise le retour d'état. Cependant, d'autres commandes sont possibles comme le retour de sortie dynamique. Dans [GCB08], les auteurs se sont intéressés à la conception de ce type de contrôleur. Ils proposent de concevoir un contrôleur par retour de sortie dynamique qui stabilise un système linéaire à commutations en temps discret et continu et qui mène à la détermination d'un majorant d'un critère de type $\mathcal{H}_2$ grâce à des inégalités de Lyapunov-Metzler pour une séquence de commutation donnée. Nous abordons ici le problème de synthèse de ce type de contrôleur de manière à stabiliser le système (3.1) et obtenir un majorant aussi petit que possible du coût garanti en utilisant un changement de variables pyramidal pour obtenir des contraintes sous forme de LMI.

Nous allons, tout d'abord, présenter le contrôleur du même ordre que celui du système, que l'on souhaite concevoir pour le système à commutations (3.1) et pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\zeta_{k+1} = A_{\sigma(k)}^K \zeta_k + B_{\sigma(k)}^K z_k, \quad (3.40)$$

$$u_k = C_{\sigma(k)}^K \zeta_k + D_{\sigma(k)}^K z_k. \quad (3.41)$$

avec les matrices du contrôleur

$$A_{\sigma(k)}^K = A_i^K \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}, \quad (3.42)$$

$$B_{\sigma(k)}^K = B_i^K \in \mathbb{R}^{n_x \times m_z}, \quad (3.43)$$

$$C_{\sigma(k)}^K = C_i^K \in \mathbb{R}^{r_u \times n_x}, \quad (3.44)$$

$$D_{\sigma(k)}^K = D_i^K \in \mathbb{R}^{r_u \times m_z} \quad (3.45)$$

où $i = \sigma(k) \in \Sigma$ et où $\zeta_k \in \mathbb{R}^{n_x}$ est l'état du contrôleur. Pour $k < 0$, nous faisons l'hypothèse que $\zeta_k = 0$. La valeur initiale ζ_0 peut être choisie arbitrairement.

L'expression en boucle fermée du système avec le contrôleur (3.40) est

$$x_{cl,k+1} = \mathbb{A}_{\sigma(k)} x_{cl,k} \quad (3.46)$$

avec

$$x_{cl,k} = \begin{bmatrix} x_k \\ \zeta_k \end{bmatrix}, \quad (3.47)$$

$$\mathbb{A}_{\sigma(k)} = \mathbb{A}_i \in \mathbb{R}^{2n_x \times 2n_x} \quad \text{où} \quad i = \sigma(k) \in \Sigma. \quad (3.48)$$

et

$$\mathbb{A}_i = \begin{bmatrix} A_i + B_i D_i^K C_i & B_i C_i^K \\ B_i^K C_i & A_i^K \end{bmatrix}, \quad \forall i \in \Sigma. \quad (3.49)$$

L'expression du critère J peut être réécrite en prenant en compte l'état augmenté $x_{cl,k}$ et par conséquent, elle va dépendre des séquences de paramètres de commutation $\{\sigma(k)\}$, de la condition initiale x_0 et de l'état initial du contrôleur (3.40) :

$$J(\{\sigma(k)\}, x_0, \zeta_0) = \sum_{k=0}^{+\infty} (x_{cl,k}^T Q_{\sigma(k)}^T Q_{\sigma(k)} x_{cl,k}), \quad (3.50)$$

avec

$$\mathbb{Q}_{\sigma(k)} = \mathbb{Q}_i \quad \text{où} \quad i = \sigma(k) \in \Sigma. \quad (3.51)$$

et

$$\mathbb{Q}_i = \begin{bmatrix} R^{1/2} D_i^K C_i & R^{1/2} C_i^K \\ C_i & 0_{m_z \times n_x} \end{bmatrix}. \quad (3.52)$$

Par conséquent, la borne supérieure des critères pour toute séquence possible des paramètres de commutation correspondant au coût garanti s'écrit comme une fonction de la condition initiale x_0 et de l'état initial du contrôleur ζ_0

$$\hat{J}(x_0, \zeta_0) = \sup_{\{\sigma(k) \in \Sigma\}_{k \in \mathbb{N}}} J(\{\sigma(k)\}, x_0, \zeta_0). \quad (3.53)$$

Dans cette section, on cherche à déterminer les matrices du contrôleur (3.40) A_i^K , B_i^K , C_i^K et D_i^K , pour $i = \sigma(k) \in \Sigma$ de manière à assurer la stabilité du système (3.1) et à minimiser le coût garanti (3.53) en déterminant un majorant de celui-ci le plus faible possible. Le problème que l'on souhaite résoudre est donc le suivant :

$$\min_{A_i^K, B_i^K, C_i^K, D_i^K} \hat{J}(x_0, \zeta_0). \quad (3.54)$$

Le théorème suivant permet d'obtenir le plus petit majorant possible du coût garanti (3.53) indépendant des directions des conditions initiales, dans la classe considérée, ainsi que les matrices du contrôleur qui stabilisent le système.

Théorème 16 Soit un système défini par (3.1). Supposons l'existence des matrices $X \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, $Y \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, $T \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, $M \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ et pour $i \in \Sigma$, l'existence des matrices $\hat{A}_i \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, $\hat{B}_i \in \mathbb{R}^{n_x \times m_z}$, $\hat{C}_i \in \mathbb{R}^{r_u \times n_x}$, $\hat{D}_i \in \mathbb{R}^{r_u \times m_z}$, des matrices symétriques $\hat{S}_i \in \mathbb{R}^{2n_x \times 2n_x}$ et un scalaire β_s tels que le majorant du coût garanti soit solution du problème d'optimisation :

$$\min_{X, Y, T, M, \hat{A}_i, \hat{B}_i, \hat{C}_i, \hat{D}_i, \hat{S}_i, \beta_s} \beta_s \quad (3.55)$$

sous les contraintes :

$$M + M^T > 0_{n_x}, \quad (3.56)$$

$$\begin{bmatrix} \Xi_1 - \hat{S}_i & \Xi_{2;i}^T & \Xi_{3;i}^T \\ \Xi_{2;i} & \hat{S}_j & 0_{2n_x \times (r_u + m_z)} \\ \Xi_{3;i} & 0_{(r_u + m_z) \times 2n_x} & I_{r_u + m_z} \end{bmatrix} > 0_{4n_x + r_u + m_z}, \quad \forall (i, j) \in \Sigma^2 \quad (3.57)$$

et

$$\begin{bmatrix} \beta_s I_{2n_x} & \begin{bmatrix} Y & I_{n_x} \\ M & 0_{n_x} \end{bmatrix} \\ \star & \hat{S}_i \end{bmatrix} > 0_{4n_x}, \quad \forall i \in \Sigma^2 \quad (3.58)$$

où

$$\Xi_1 = \begin{bmatrix} Y + Y^T & I_{n_x} + T \\ I_{n_x} + T^T & X + X^T \end{bmatrix}, \quad (3.59)$$

$$\Xi_{2;i} = \begin{bmatrix} Y^T A_i + \hat{B}_i C_i & \hat{A}_i \\ A_i + B_i \hat{D}_i C_i & A_i X_i + B_i \hat{C}_i \end{bmatrix}, \quad (3.60)$$

$$\Xi_{3;i} = \begin{bmatrix} R^{1/2} \hat{D}_i C_i & R^{1/2} \hat{C}_i \\ C_i & C_i X_i \end{bmatrix}. \quad (3.61)$$

La matrice $M \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ vérifiant $M + M^T > 0_{n_x}$ est inversible, il est possible de poser $N = (M)^{-1}(T - Y^T X)$. Alors le contrôleur par retour de sortie dynamique dont les matrices sont données par

$$A_i^K = M^{-T}(\hat{A}_i - Y^T(A_i + B_i D_i^K C_i)X - Y^T B_i C_i^K N - M_i^T B_i^K C_i X)N^{-1}, \quad (3.62)$$

$$B_i^K = M^{-T}(\hat{B}_i - Y^T B_i D_i^K), \quad (3.63)$$

$$C_i^K = (\hat{C}_i - D_i^K C_i X)N^{-1}, \quad (3.64)$$

$$D_i^K = \hat{D}_i, \quad (3.65)$$

stabilise le système et mène à un majorant du coût garanti tel que

$$\hat{J}(x_0, \zeta_0) \leq V(x_0, \zeta_0, \sigma(0)) \leq \beta_s(\|x_0\|_2^2 + \|\zeta_0\|_2^2), \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}^{n_x}, \quad \forall \zeta_0 \in \mathbb{R}^{n_x}. \quad (3.66)$$

La preuve du théorème 16 reprend certaines techniques utilisées dans la preuve du théorème 14 dans le cadre d'un contrôleur par retour d'état. Néanmoins la structure particulière de la LMI (3.57) a également nécessité l'utilisation de techniques qui n'ont pas été présentées précédemment. Dans un souci de clarté, nous avons fait le choix de présenter la preuve du théorème 16 dans son intégralité.

Preuve 14 L'objectif est ici d'effectuer un changement de variables et une transformation de congruence par l'intermédiaire de matrices particulières $\mathbb{G}_i$ et $\mathbb{S}_i$. Une technique classique proposée par [SGC97] est adaptée pour qu'elle soit compatible avec la dépendance en temps du système, comme les lois de commutation dépendent du temps. La décomposition est appliquée aux matrices $\mathbb{G}_i$ et non aux matrices $\mathbb{S}_i$. Avec cette technique, travailler avec des matrices $\mathbb{G}_i$ qui dépendent du mode actif est incompatible avec la dépendance en temps du paramètre de commutation. Pour passer outre cette difficulté, on impose que les matrices $\mathbb{G}_i$ soient indépendantes du mode, c'est-à-dire $\mathbb{G}_i = \mathbb{G}$. Décomposons la matrice $\mathbb{G}$ et son inverse $\mathbb{G}^{-1}$ de la façon suivante :

$$\mathbb{G} = \begin{bmatrix} X & \bullet \\ N & \bullet \end{bmatrix}, \quad \mathbb{G}^{-1} = \begin{bmatrix} Y & \bullet \\ M & \bullet \end{bmatrix}, \quad (3.67)$$

où la notation « $\bullet$ » signifie que le bloc n'est pas important pour la suite du problème. Ces blocs peuvent éventuellement être déterminés en utilisant la contrainte

$$\mathbb{G}\mathbb{G}^{-1} = I_{2n_x}.$$

On définit alors la matrice de projection

$$\Pi = \begin{bmatrix} Y & I_{n_x} \\ M & 0_{n_x} \end{bmatrix} \quad (3.68)$$

qui est inversible si M est inversible. Cette définition de matrice de projection permet d'écrire les relations suivantes :

$$\mathbb{G}\Pi = \begin{bmatrix} Y & I_{n_x} \\ M & 0_{n_x} \end{bmatrix}, \quad \Pi^T(\mathbb{G} + \mathbb{G}^T)\Pi = \Xi_1. \quad (3.69)$$

En introduisant aussi $\mathbb{S}_i$ tel que $\hat{S}_i = \Pi^T \mathbb{S}_i \Pi$, on a

$$\mathbb{Q}_i \mathbb{G} \Pi = \Xi_{3;i}; \quad \Pi^T \mathbb{A}_i \mathbb{G} \Pi = \Xi_{2;i}. \quad (3.70)$$

En pré-multipliant la LMI (3.57) par $\text{diag}\{\Pi^{-T}, \Pi^{-T}, I_{r_u+m_z}\}$ et en la post-multipliant par sa transposée, il vient

$$\begin{bmatrix} \Pi^{-T} \Xi_1 \Pi^{-1} & \Pi^{-T} \Xi_{2;i} \Pi^{-1} & \Pi^{-T} \Xi_{3;i} \\ \Pi^{-T} \Xi_{2;i} \Pi^{-1} & \Pi^{-T} \hat{S}_i \Pi^{-1} & 0_{2n_x \times (r_u+m_z)} \\ \Xi_{3;i} \Pi^{-1} & 0_{(r_u+m_z) \times 2n_x} & I_{r_u+m_z} \end{bmatrix} > 0_{4n_x+r_u+m_z}.$$

En écrivant $\hat{S}_i$ de la manière suivante $\hat{S}_i = \Pi^T S_i \Pi$ et en remplaçant $\hat{S}_j$ par son expression, il vient $\Pi^{-T} \Xi_1 \Pi^{-1} - \Pi^{-T} \hat{S}_i \Pi^{-1} = \mathbb{G} + \mathbb{G}^T - \mathbb{S}_i$. En utilisant les expressions des matrices du contrôleur et la structure de $\mathbb{G}$, on obtient la LMI suivante :

$$\begin{bmatrix} \mathbb{G} + \mathbb{G}^T - \mathbb{S}_i & (\mathbb{A}_i \mathbb{G})^T & (\mathbb{Q}_i \mathbb{G})^T \\ \mathbb{A}_i \mathbb{G} & \mathbb{S}_j & 0_{2n_x \times (r_u+m_z)} \\ \mathbb{Q}_i \mathbb{G} & 0_{r_u+m_z \times 2n_x} & I_{r_u+m_z} \end{bmatrix} > 0_{4n_x+r_u+m_z} \quad (3.71)$$

Quand l'inégalité précédente est vérifiée, on a $\mathbb{G} + \mathbb{G}^T - \mathbb{S}_i > 0$ et $\mathbb{S}_i > 0$, ce qui implique que $\mathbb{G}$ est de rang plein. En développant $(\mathbb{S}_i - \mathbb{G})^T \mathbb{S}_i^{-1} (\mathbb{S}_i - \mathbb{G})$, on a $\mathbb{G}^T \mathbb{S}_i^{-1} \mathbb{G} \geq \mathbb{G} + \mathbb{G}^T - \mathbb{S}_i > 0$. Alors l'inégalité précédente conduit à

$$\begin{bmatrix} \mathbb{G}^T \mathbb{S}_i^{-1} \mathbb{G} & (\mathbb{A}_i \mathbb{G})^T & (\mathbb{Q}_i \mathbb{G})^T \\ \mathbb{A}_i \mathbb{G} & \mathbb{S}_j & 0_{2n_x \times r_u+m_z} \\ \mathbb{Q}_i \mathbb{G} & 0_{r_u+m_z \times 2n_x} & I_{r_u+m_z} \end{bmatrix} > 0_{4n_x+r_u+m_z}. \quad (3.72)$$

En pré-multipliant cette inégalité par $\text{diag}\{\mathbb{G}^{-T}, \mathbb{S}_j^{-1}, I_{r_u+m_z}\}$ et en la post-multipliant par sa transposée, il vient avec le changement de variable $\mathbb{P}_i = \mathbb{S}_i^{-1}$

$$\begin{bmatrix} \mathbb{P}_i^{-1} & \star & \star \\ \mathbb{P}_j^{-1} \mathbb{A}_i & \mathbb{P}_j^{-1} & \star \\ \mathbb{Q}_i & 0_{r_u+m_z \times 2n_x} & I_{r_u+m_z} \end{bmatrix} > 0_{4n_x+r_u+m_z}. \quad (3.73)$$

Par conséquent, en notant $i = \sigma(k) \in \Sigma$ et $j = \sigma(k+1) \in \Sigma$, on a l'inégalité suivante :

$$\begin{bmatrix} \mathbb{P}_{\sigma(k)} & \star & \star \\ \mathbb{P}_{\sigma(k+1)} (\mathbb{A}_{\sigma(k)}) & \mathbb{P}_{\sigma(k+1)} & \star \\ \mathbb{Q}_{\sigma(k)} & 0_{r_u+m_z \times 2n_x} & I_{r_u+m_z} \end{bmatrix} > 0_{4n_x+r_u+m_z}. \quad (3.74)$$

On utilise successivement deux compléments de Schur [BEFB94] qui mène à l'inégalité suivante :

$$\mathbb{A}_{\sigma(k)}^T \mathbb{P}_{\sigma(k+1)} \mathbb{A}_{\sigma(k)} - \mathbb{P}_{\sigma(k)} < -\mathbb{Q}_{\sigma(k)}^T \mathbb{Q}_{\sigma(k)}, \quad (3.75)$$

En pré-multipliant cette inégalité par $x_{cl,k}^T$ et en la post-multipliant par $x_{cl,k}$, on obtient l'inégalité :

$$x_{cl,k}^T \mathbb{Q}_{\sigma(k)}^T \mathbb{Q}_{\sigma(k)} x_{cl,k} \leq V(x_{cl,k}, \sigma(k)) - V(x_{cl,k+1}, \sigma(k+1)). \quad (3.76)$$

Une fonction de Lyapunov dépendant du paramètre, [DRI02], est définie comme suit :

$$V(x_{cl,k}, \sigma(k)) = x_{cl,k}^T \mathbb{P}_{\sigma(k)} x_{cl,k}$$

avec

$$\mathbb{P}_{\sigma(k)} = \mathbb{P}_i \quad \text{où} \quad i = \sigma(k) \in \Sigma$$

et $\mathbb{P}_i = \mathbb{S}_i^{-1}$.

On somme toutes ces inégalités, ce qui conduit à :

$$\hat{J}(x_0, \zeta_0) = \sum_{k=0}^{+\infty} x_{cl,k}^T \mathbb{Q}_{\sigma(k)}^T \mathbb{Q}_{\sigma(k)} x_{cl,k} \leq V(x_{cl,0}, \sigma(0)) = x_{cl,0}^T \mathbb{P}_{\sigma(0)} x_{cl,0}, \quad (3.77)$$

parce que le système est stable.

De plus, en remplaçant $\hat{S}_i$ par son expression et en pré-multipliant la contrainte LMI (3.58) par $\text{diag}\{I_{n_x}, \Pi^{-T}\}$ et en post-multipliant par sa transposée, il vient

$$\begin{bmatrix} \beta_s I_{2n_x} & \Pi \\ \star & \mathbb{S}_i \end{bmatrix} > 0_{4n_x}, \quad (3.78)$$

qui mène à

$$\begin{bmatrix} \beta_s I_{2n_x} & I_{2n_x} \\ \star & \hat{\mathbf{S}}_i \end{bmatrix} > 0_{4n_x}. \quad (3.79)$$

En utilisant un complément de Schur, il s'en suit, pour tout $\sigma(0) \in \Sigma$, l'inégalité

$$\hat{J}(x_0, \zeta_0) \leq x_{cl,0}^T \mathbb{P}_{\sigma(0)} x_{cl,0} \leq \beta_s (\|x_0\|_2^2 + \|\zeta_0\|_2^2). \quad (3.80)$$

Le théorème 16 permet de déterminer le plus petit majorant possible du coût garanti. Le majorant ainsi obtenu est indépendant de la direction de la condition initiale de l'état augmenté.

Remarque 18 A l'inverse des lois de commande précédentes, il est impossible de déterminer par cette méthode un contrôleur par retour de sortie dynamique indépendant du paramètre de commutation. En effet, les matrices du contrôleur dépendent des matrices du système. Nous avons fait le choix de résoudre ce problème en le linéarisant grâce à un changement de variables pyramidal mais d'autres techniques existent pour aborder ce problème comme le lemme de projection [GA97] ou le lemme de Finsler [SIG97] qui permettent de transformer une BMI en LMI en éliminant certaines variables. Ces techniques peuvent peut-être mener à la détermination d'un contrôleur par retour de sortie dynamique robuste.

3.5 Exemple

La synthèse des lois de commande présentée dans les précédentes sections est illustrée à l'aide d'un exemple numérique. On considère un système linéaire à commutations en temps discret dont les matrices sont :

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0,5 & -0,2 \\ -1 & 0,6 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 0,07 & -2 \\ -1 & 0,4 \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0,1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

La condition initiale est $x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

On s'intéresse tout d'abord au contrôleur par retour d'état. On applique le théorème 14 à ce système et les gains du retour d'état obtenus sont :

$$K_1 = \begin{bmatrix} -0,83935 & -0,058216 \end{bmatrix}, \quad (3.81)$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} -0,17209 & 1,8909 \end{bmatrix}. \quad (3.82)$$

On obtient ainsi l'inégalité suivante :

$$\hat{J}(\{u_k\}, x_0) \leq V(x_0, \sigma(0)) \leq \beta \|x_0\|_2^2 \quad (3.83)$$

avec $\beta = 11,1026$.

L'application du corollaire 2 donne le gain $K = \begin{bmatrix} 0,12451 & 1,7818 \end{bmatrix}$ et le majorant $\beta = 14,9632$.

Afin de visualiser nos résultats, nous présentons sur la figure 3.1 pour une condition initiale

$$x_0 = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix}$$

avec α variant dans l'intervalle $[0; \pi]$ (grâce à la forme quadratique du critère, on peut utiliser une symétrie), les majorants obtenus selon les différentes hypothèses sur la condition initiale et la loi de commutation ainsi que les valeurs de la fonction de Lyapunov en fonction de α et pour les deux modes.

Le majorant β est cherché de manière à être indépendant de la direction de la condition initiale. Pour cela, on détermine un majorant aussi petit que possible de la valeur de la fonction de Lyapunov à l'instant initial. D'après la figure 3.1, on constate que le majorant, indépendant de la condition initiale, obtenu est proche de la plus grande valeur des fonctions de Lyapunov pour les deux modes. Quand on détermine un gain de retour d'état statique, le majorant

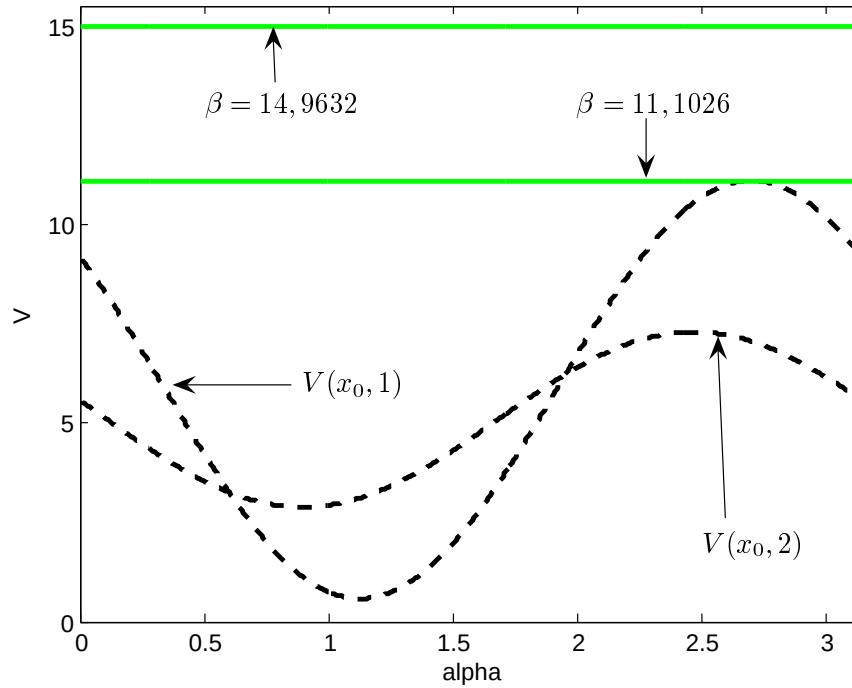


FIGURE 3.1 – Valeurs des majorants et des fonctions de Lyapunov pour les différents modes.

déterminé est supérieur. Déterminer un seul gain de retour d'état conduit donc à un résultat plus conservatif que de déterminer un retour d'état dépendant du paramètre de commutation.

On s'intéresse ensuite au contrôleur par retour de sortie dynamique. On applique le théorème 16 et on obtient les matrices du contrôleur suivantes :

$$\begin{aligned} A_1^K &= \begin{bmatrix} -9854,5 & -525,38 \\ -336880 & 18024 \end{bmatrix}, & B_1^K &= \begin{bmatrix} 13,979 \\ 266,52 \end{bmatrix} \\ C_1^K &= \begin{bmatrix} -0,00202 & 0,00029 \end{bmatrix}, & D_1^K &= -1,0621, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_2^K &= \begin{bmatrix} -10259 & 543,95 \\ -349360 & 18684 \end{bmatrix}, & B_2^K &= \begin{bmatrix} 14,293 \\ 283,13 \end{bmatrix} \\ C_2^K &= \begin{bmatrix} -0,00014 & -0,00757 \end{bmatrix}, & D_2^K &= -0,4982. \end{aligned}$$

On obtient alors l'inégalité suivante

$$\hat{J}(x_0, \zeta_0) \leq \beta_s (\|x_0\|_2^2 + \|\zeta_0\|_2^2).$$

avec $\beta_s = 51,1030$.

Sur la figure 3.2, la valeur du majorant indépendant de la condition initiale est donnée ainsi que les fonctions de Lyapunov pour les deux modes du système à commutations. On constate alors que la valeur du majorant est proche de la plus grande valeur des fonctions de Lyapunov pour les deux modes.

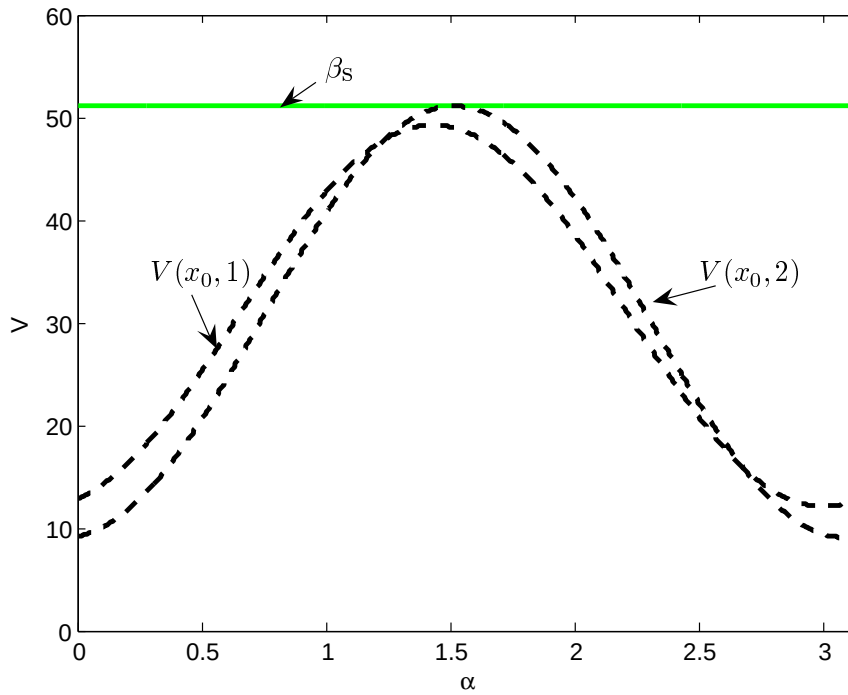


FIGURE 3.2 – Valeurs du majorant β_s et des fonctions de Lyapunov à l’instant initial pour les différents modes.

3.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons élaboré différentes lois de commande qui mènent à la stabilité d’un système linéaire à commutations mais également à la détermination d’un majorant, le plus petit possible, du coût garanti correspondant.

Dans la première section, nous avons travaillé avec l’hypothèse que tous les états étaient connus. Nous avons alors conçu un contrôleur par retour d’état. Les gains du retour d’état et le majorant ont été obtenus grâce à la résolution d’un problème d’optimisation sous des contraintes LMI. Ces contraintes se composent de deux ensembles de LMI. Le premier ensemble permet d’assurer la stabilité du système et de déterminer un majorant sous la forme d’une fonction de Lyapunov dont la valeur à l’instant initial est supérieure au coût garanti. Le second ensemble de LMI permet de déterminer un majorant de la valeur à l’instant initial de la fonction de Lyapunov qui est indépendant de la direction de la condition initiale.

Dans la seconde section, nous nous sommes intéressés au cas où seules les sorties étaient connues. Une approche retour de sortie fondé sur un observateur a été proposée. Comme pour la section précédente, la résolution d’un problème d’optimisation sous des contraintes LMI permet d’obtenir des gains de l’observateur qui stabilisent le système et le plus petit majorant possible du coût garanti.

Dans la section suivante, en considérant toujours que seules les sorties sont

connues, nous nous sommes intéressés à la conception d'un contrôleur par retour de sortie dynamique. Comme précédemment, les matrices du contrôleur et le majorant sont déterminés grâce à la résolution d'un problème d'optimisation sous des contraintes LMI.

Dans le chapitre suivant, nous allons montrer une application possible de nos résultats pour les systèmes contrôlés en réseaux.

Chapitre 4

Application aux systèmes contrôlés en réseau

4.1 Introduction

Avec le développement des technologies de communication, les Systèmes Contrôlés en Réseau (SCR) sont de plus en plus utilisés [ÅW97]. Ce sont des systèmes distribués spatialement qui se composent d'un contrôleur, d'un procédé, d'actionneurs, de capteurs et d'un réseau de communication partagé de bande passante limitée [HNX07]. Les données des capteurs sont envoyées grâce au réseau au contrôleur qui détermine la commande. Celle-ci est envoyée aux actionneurs via le réseau sous forme de trames (voir figure 4.1). Néanmoins, des difficultés supplémentaires apparaissent lors de l'utilisation de ce type de système. En effet, l'information peut être transmise avec un retard, les données peuvent ne pas être transmises ou la période d'échantillonnage peut ne pas être constante.

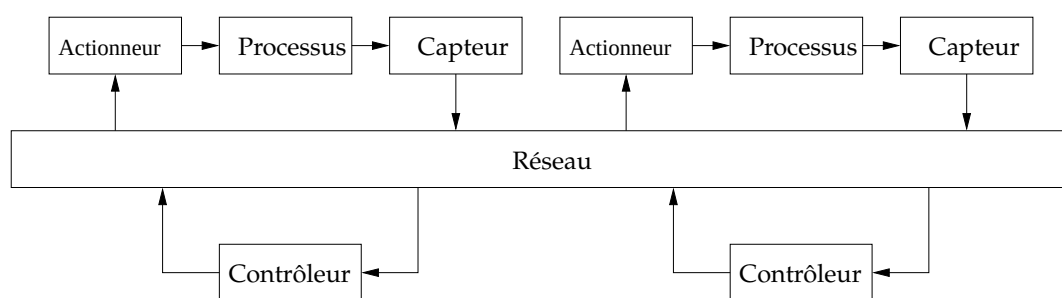


FIGURE 4.1 – Architecture générale de systèmes contrôlés en réseau.

Tout d'abord dans ce chapitre, la structure des SCR, ainsi que l'origine de ses différentes caractéristiques (quantification, divers temps de retard, pertes de données, ...) seront précisées, afin de poser les hypothèses claires sur les SCR que nous proposons de traiter. Nous n'ambitionnons pas de traiter l'ensemble

des difficultés associées aux SCR avec notre approche "système à commutations". Nous nous attacherons aussi dans ce chapitre à montrer comment les résultats des chapitres précédents sur la certification des performances d'un système à commutations permettent d'étudier les performances des SCR dans le cadre des SCR soumis à des retards multiples de la période d'échantillonnage et bornés.

Dans la littérature, les SCR à temps discret, avec des retards multiples de la période d'échantillonnage et bornés sont étudiés, en particulier pour les problèmes de stabilité, à l'aide principalement de deux approches [GKC03, Ric03, Het07] : l'approche Lyapunov-Krasovskii ou de Lyapunov-Razumikhin et l'approche "système à commutations". Avec l'approche de Lyapunov-Krasovskii, des conditions suffisantes de type LMI sont utilisées pour assurer qu'une majoration (à l'aide des inégalités de Moon [GLW07], ou de Cauchy-Schwartz) de la différence des fonctions de Lyapunov-Krasovskii est négative. Les majorations introduites sont alors la source d'un conservatisme qui peut être important. L'approche "système à commutations" consiste à reformuler le problème de l'analyse de stabilité des SCR en celui de l'analyse de stabilité d'un système à commutations équivalent [TNK05, ZSCH05]. Ce système à commutations équivalent est constitué d'un état augmenté regroupant les états retardés ainsi que des entrées retardées. Notons qu'il a été prouvé dans [HDI08], l'équivalence entre l'existence d'une fonction de Lyapunov-Krasovskii et une fonction de Lyapunov poly-quadratique pour les systèmes à commutations. L'inconvénient de cette approche est que la taille du système équivalent est plus grande que le système original et que l'augmentation de taille est fonction des bornes supérieures des différents retards. Un compromis dans le choix des approches doit être fait. Pour toutes ces raisons, le choix de l'approche "système à commutations" sera fait pour étudier la certification des performances pour les SCR dans la suite de ce chapitre.

4.2 Les Systèmes Contrôlés en Réseau

Les SCR présentent de nombreux avantages qui ont suscité leur intérêt. Néanmoins, ils ont soulevé d'autres problèmes dus à l'utilisation du réseau qui a des ressources limitées et est soumis à des pertes d'informations ou à une transmission d'information avec des retards variant dans le temps.

4.2.1 Problématiques

Les problèmes posés par les SCR sont à la fois liés à la théorie de la communication et celle de la commande comme le souligne l'étude [ZBP01]. Des recherches ont donc été menées en considérant les problèmes du point de vue du réseau et du point de vue de la commande [Wit05]. Dans le premier cas, il s'agit de la commande de réseau et dans le second de la commande via le réseau.

Dans la commande de réseau, on cherche à concevoir un réseau qui répond

au mieux à la qualité de service exigée par l'application. Il s'agit de gérer le mieux possible les ressources de communication afin de répondre aux besoins de l'application de commande en minimisant les retards et les probabilités de pertes de messages. On peut citer comme réseaux utilisés pour les SCR, DeviceNet [Law97], Ethernet [Tan96], FireWire [And98], mais il ne s'agit là que de quelques exemples. Nous ne nous pencherons pas davantage sur ce domaine.

Pour la commande via le réseau, on s'intéresse à la conception de commandes qui permettent de gérer au mieux les problèmes provoqués par l'utilisation du réseau. Ces problèmes peuvent être la présence de retards variables, la perte ou la désorganisation de trames qui peuvent conduire à de mauvaises performances ou même à l'instabilité des systèmes [RD07]. De nombreuses recherches dans ce domaine se sont intéressées aux problèmes dus aux retards. Une modélisation a été proposée sous la forme de systèmes à retards où les retards sont ceux induits par le réseau [RD07, WYB02]. Des recherches ont également été menées pour traiter le problème de la perte de messages [HNX07, SR08, YWC04]. Le réseau est alors considéré comme une donnée du problème, il s'agit de déterminer un contrôleur pour ces systèmes. C'est de ce point de vue que nous nous sommes intéressés au problème des SCR.

Les deux approches que sont la commande de réseau et la commande via le réseau sont complémentaires et des travaux se sont intéressés à la combinaison de ces deux approches. On parle alors de modélisation intégrée ou co-design [TRN09, ZHV06, Bra07]. Il s'agit de prendre en compte simultanément les informations concernant le réseau (retards, pertes de trames, fiabilité, ...) et celles concernant le système commandé (stabilité, robustesse, ...).

4.2.2 Difficultés des systèmes contrôlés en réseau

Le réseau ne délivre pas l'information en temps continu mais à chaque période d'échantillonnage et possède une capacité limitée. Ces caractéristiques sont la cause de plusieurs difficultés dont il faut tenir compte dans le choix de l'utilisation de ce type de systèmes. Nous allons exposer les problèmes auxquels on peut être confronté pour des systèmes à temps discret.

4.2.2.1 Quantification

Pour qu'un signal puisse être envoyé via un réseau celui-ci doit être numérisé. Pour cela, on doit procéder à la quantification du signal. Le signal analogique est ainsi codé grâce à un nombre fini de valeurs. Quantifier un signal revient donc à approximer sa valeur instantanée par sa valeur discrète la plus proche. Le signal quantifié que reçoit le contrôleur n'est donc pas exactement le signal du procédé.

4.2.2.2 Temps de transmission

Une contrainte importante dans les SCR est la présence de retards. Certains de ces retards peuvent être induits par le réseau. Les retards induits par

le réseau surviennent à chaque utilisation de celui-ci. Ceux-ci sont donc au nombre de deux. L'information du contrôleur aux actionneurs est affectée d'un retard d_k et celle des capteurs au contrôleur d'un retard τ_k . Selon les protocoles utilisés, ces retards peuvent être constants, variables ou même aléatoires. Ils peuvent être dus à la capacité limitée du réseau, à un taux d'occupation important de celui-ci mais également à une mauvaise synchronisation des différents éléments du système. La figure 4.2 présente l'architecture d'un système commandé en réseau soumis à ces retards : le système est le processus d'état $\tilde{x}_k$, les données transmises au contrôleur par le réseau sont les données y_k et la commande générée par le contrôleur est notée u_k .

4.2.2.3 Temps de traitement de l'information

Les retards dus au réseau ne sont pas les seuls retards présents. Ainsi, des retards peuvent également se produire pour traiter les informations arrivant aux divers éléments comme les capteurs, les actionneurs et le contrôleur.

Le capteur prélève des mesures sur le système et prépare ensuite un message qui sera envoyé au contrôleur à travers le réseau. Pour cela, une conversion analogique/numérique des données doit être réalisée puis le message doit être préparé pour pouvoir être envoyé sous forme de trame. Le temps de cette tâche entraîne un retard t_{capteur} .

Quand le contrôleur reçoit un message provenant du capteur, il élabore à partir de celui-ci une nouvelle commande qui sera envoyée ensuite à l'actionneur. Ceci entraîne un retard $t_{\text{contrôleur}}$ dû au temps de calcul de la nouvelle commande et au temps de codage pour envoyer cette commande par le réseau.

Quand l'actionneur reçoit le message du contrôleur, il doit le décoder puis réaliser une conversion numérique/analogique du message pour pouvoir appliquer la commande au procédé. Ceci provoque un retard au niveau de l'actionneur noté $t_{\text{actionneur}}$. La figure 4.2 présente les différents retards liés au traitement de l'information.

4.2.2.4 Pertes de données

Un autre problème posé par les SCR est le fait que les données peuvent être perdues pendant qu'elles transitent sur le réseau. La perte de trames est due aux erreurs de transmission ou à l'engorgement du réseau. Ce problème a été étudié selon deux approches. Les pertes de trames peuvent être modélisées comme des phénomènes stochastiques [SS01, SS05]. Une autre possibilité est de considérer une approche déterministe [ZBP01] qui tient compte dans la conception du contrôleur du taux moyen qui correspond à la valeur moyenne du nombre de pertes de trames consécutives. Dans [NH05, YHP04], des contrôleurs sont conçus en tenant compte du pire cas de pertes de trames.

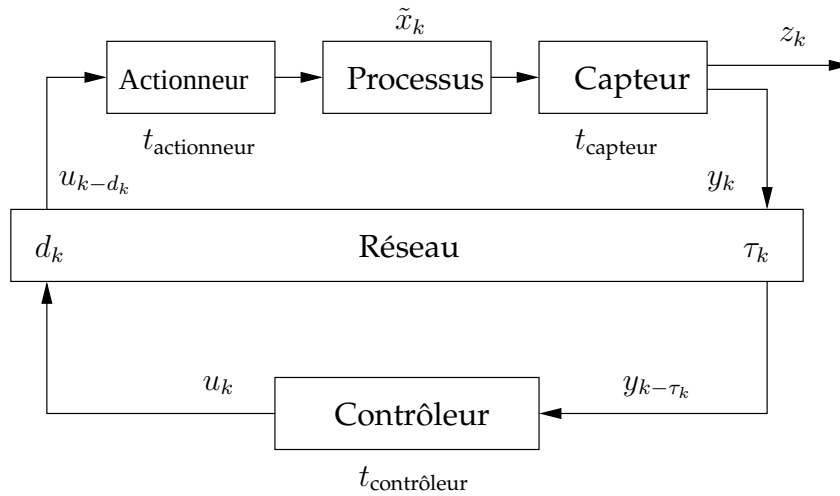


FIGURE 4.2 – Retards dus à l'utilisation du réseau dans un système commandé en réseau d_k et τ_k ainsi que les retards $t_{\text{actionneur}}$, t_{capteur} et $t_{\text{contrôleur}}$ dus au traitement de l'information dans un système commandé en réseau.

4.2.2.5 Période d'échantillonnage non périodique

La période d'échantillonnage peut pour plusieurs raisons qui sont décrites dans [Clo08] ne pas être constante. Ainsi, les capteurs du système peuvent être programmés pour attendre un certain temps après avoir envoyé des données au contrôleur, il en résulte que les données ne sont pas envoyées au contrôleur à une période d'échantillonnage constante. Le contrôleur peut également être conçu de manière à utiliser différentes périodes d'échantillonnage selon la charge du réseau. Si l'occupation du réseau est importante alors le contrôleur utilise des périodes d'échantillonnage plus grande que lorsque l'occupation du réseau est faible. Le fait d'avoir des périodes d'échantillonnage différentes peut également être dû à l'utilisation de systèmes dont les capteurs et les actionneurs agissent non pas à chaque période d'échantillonnage mais à chaque événement. Quelques travaux se sont intéressés à ce problème [Sal05, Fuj08, CHvdW⁺10].

Les différentes difficultés inhérentes aux SCR peuvent, à l'exception des problèmes liés à la quantification, être modélisés par des retards. En effet, les temps de transmission et de traitement de l'information sont des retards qui affectent la commande ou le signal. Les pertes de données peuvent être représentées comme des retards infinis et la période d'échantillonnage non périodique correspond à un retard qui varie dans le temps. Dans ce chapitre nous nous sommes donc intéressés au seul problème des retards. Nous allons ensuite nous pencher sur les différentes hypothèses concernant ces retards pour lesquelles les SCR ont été étudiés.

4.2.3 Hypothèses concernant les retards induits par le réseau

Ces retards peuvent être pris en compte avec le modèle des systèmes à retards. Ce type de systèmes a fait l'objet d'une littérature abondante [GKC03, NVDD98, Ric03, RD07, Seu06, SMRL07]. Des conditions de stabilité ont donc été développées en utilisant notamment des fonctions de Lyapunov-Krasovskii. En temps discret, le problème posé par ces retards a été traité pour différentes hypothèses. Les cas de retards inférieurs à la période d'échantillonnage, de retards multiples de la période d'échantillonnage et bornés et enfin de retards supérieurs à la période d'échantillonnage ont donc été abordés.

4.2.3.1 Retards inférieurs à la période d'échantillonnage

Le premier cas à avoir été traité est celui de retards inférieurs à la période d'échantillonnage. Ainsi, dans [LR90], une solution est proposée en ajoutant des mémoires tampons avant les actionneurs et le contrôleur. Ces tampons, ou en anglais *buffers*, ajoutent au retard variant dans le temps un retard complémentaire de façon à ce que la somme de ces deux retards soit un retard constant. Ce retard constant est alors nécessairement plus grand que la borne supérieure du retard variant dans le temps pour des raisons de causalité.

Grâce à ces mémoires tampons, on se ramène donc à un système invariant dans le temps, avec un retard constant. Le choix de ce retard constant peut, s'il est trop grand dégrader les performances, voire déstabiliser l'association processus-contrôleur-réseau. Dans [LR90], un contrôleur optimal LQG est ensuite conçu.

Nilsson [Nil98, NBW98] a également conçu ce type de contrôleur pour différentes hypothèses concernant les retards. Il a ainsi étudié des retards constants, aléatoires et indépendants et enfin aléatoires mais régis par une loi de type chaîne de Markov qui génère des distributions de probabilité sur l'occurrence des retards. Dans le cadre de retards inférieurs à la période d'échantillonnage, la recherche d'un coût garanti des performances de SCR a été étudiée dans [JHD10].

4.2.3.2 Retards multiples de la période d'échantillonnage

Pour des retards multiples de la période d'échantillonnage et bornés, une approche utilisée est de ramener l'étude des systèmes à retard à celle de systèmes à commutations équivalents. Pour cela un nouvel état est construit qui comprend l'état du système et des variables retardées supplémentaires [TNK05, ZSCH05]. Cette hypothèse sur les retards est le cas que nous traiterons pour appliquer les résultats présentés dans les chapitres précédents pour des systèmes à commutations. De plus, l'équivalence entre l'approche des fonctionnelles de Lyapunov-Krasovskii pour assurer la stabilité des systèmes à retards et l'approche des systèmes à commutations a été démontrée dans [HDI08]. L'idée principale est d'utiliser une fonction de Lyapunov qui dépend des retards variant dans le temps, ce qui correspond à la fonction de Lyapunov-Krasovskii la plus générale.

4.3 Point de vue des systèmes commutés pour les SCR.

Le cadre physique des SCR étant posé en donnant une description de la nature des différents retards et des hypothèses afférentes, le reste du chapitre sera consacré à l'étude de ce type de système et de ses performances à l'aide des systèmes à commutations, en supposant que les différents retards sont des multiples de la période d'échantillonnage – c'est-à-dire commensurables – et bornés. Tout d'abord une modélisation des SCR mieux adaptée à notre étude sera mise en avant. Ensuite une discussion sur les classes des commandes possibles sera proposée et illustrée à l'aide des applications des théorèmes des chapitres précédents. Ce chapitre s'appuie particulièrement sur les articles [MJDI09b, MJDI08, MJDI09a].

4.3.1 Modélisation du système

Considérons la structure représentée sur la figure 4.2. Le processus est un système à temps discret $k \in \mathbb{N}$, d'état $\tilde{x}_k \in \mathbb{R}^n$, d'entrée retardée $u_{k-d_k} \in \mathbb{R}^{r_u}$ et de sortie de performance $z_k \in \mathbb{R}^{m_z}$. La commande u_k est appliquée au système avec un retard d_k . Comme indiqué précédemment, il est supposé que le retard d_k est multiple de la période d'échantillonnage (supposée unitaire sans perte de généralité) et borné. A chaque instant $k \in \mathbb{N}$, on a

$$d_k \in \mathcal{D} = \llbracket d_{\min}; d_{\max} \rrbracket, \quad (4.1)$$

où $d_{\min}$ et $d_{\max} \in \mathbb{N}$ sont respectivement les retards minimal et maximal entre le contrôleur et l'actionneur tels que $0 \leq d_{\min} \leq d_{\max}$.

Le processus est représenté par l'équation aux différences suivante :

$$\tilde{x}_{k+1} = \tilde{A}\tilde{x}_k + \tilde{B}u_{k-d_k}, \quad (4.2)$$

$$z_k = \tilde{C}\tilde{x}_k, \quad (4.3)$$

où, à chaque instant $k \in \mathbb{N}$, $\tilde{x}_k \in \mathbb{R}^n$, $u_{k-d_k} \in \mathbb{R}^{r_u}$ et $z_k \in \mathbb{R}^{m_z}$ sont respectivement l'état, la commande retardée appliquée au système et la sortie du système. Afin de définir complètement ce système, il faut indiquer les valeurs des commandes pour les instants négatifs jusqu'à la valeur du retard maximal, c'est-à-dire

$$u_{-i} = \phi^u(-i), \quad \forall i, 1 \leq i \leq d_{\max}. \quad (4.4)$$

Pour clarifier l'étude, sans perte de généralité, le choix d'une commande causale sera imposé, soit

$$u_{-i} = \phi^u(-i) = 0, \quad \forall i, 1 \leq i \leq d_{\max}. \quad (4.5)$$

Intéressons nous désormais à la structure de la loi de commande. Le contrôleur reçoit à l'instant k une donnée $y_k \in \mathbb{R}^{m_y}$ qui a été transmise par le processus à l'instant $k - \tau_k$, c'est-à-dire que le contrôleur reçoit à l'instant k la donnée $y_{k-\tau_k}$ vérifiant la relation

$$y_k = C^y \tilde{x}_k, \quad (4.6)$$

soit

$$y_{k-\tau_k} = C^y \tilde{x}_{k-\tau_k}. \quad (4.7)$$

Le retard τ_k correspond au temps de transmission via le réseau du processus au contrôleur, qui est supposé être multiple de la période d'échantillonnage et borné. A chaque instant, $k \in \mathbb{N}$, on a

$$\tau_k \in \mathcal{T} = \llbracket \tau_{\min}; \tau_{\max} \rrbracket, \quad (4.8)$$

où $\tau_{\min}$ et $\tau_{\max}$ sont respectivement les retards minimal et maximal entre le processus et le contrôleur, tels que $0 \leq \tau_{\min} \leq \tau_{\max}$.

Afin de définir précisément les valeurs y_k reçues par le contrôleur, il est nécessaire de fixer les valeurs aux temps négatifs de l'état du processus, c'est-à-dire

$$\tilde{x}_{-j} = \phi^{\tilde{x}}(-j), \quad \forall j, 0 \leq j \leq \tau_{\max}. \quad (4.9)$$

Ici aussi pour clarifier la présentation, un état causal est sélectionné, c'est-à-dire que les états d'instant strictement négatif sont nuls $\phi^{\tilde{x}}(-j) = 0, \forall j, 1 \leq j \leq \tau_{\max}$. On note de plus l'état initial du processus par $\phi(0) = x_0$.

A priori, les données qui pourraient être envisagées pour la synthèse de la commande sont le temps k , la donnée $y_k \in \mathbb{R}^{m_y}$, la valeur des retards d_k et τ_k ainsi que les précédentes valeurs de commande en acceptant le caractère auto-régressif de cette loi. On peut ainsi formaliser la loi de commande par la relation

$$u_k = \eta(k, d_k, \tau_k, y_k, \{u_{k-j}\}_{j=1, \dots, d_{\max}}). \quad (4.10)$$

La boucle fermée peut alors s'écrire, dans ce cadre très générique :

$$\tilde{x}_{k+1} = \tilde{A}\tilde{x}_k + \tilde{B}\eta(k - d_k, d_{k-d_k}, \tau_{k-d_k}, C^y \tilde{x}_{k-d_k-\tau_{k-d_k}}, \{u_{k-d_k-j}\}_{j=1, \dots, d_{\max}}). \quad (4.11)$$

Les relations génériques (4.10) et (4.11) appellent plusieurs commentaires :

- Le processus n'ayant pas de dépendance directe en le temps k , on peut se restreindre aux lois de commandes elles-mêmes indépendantes explicitement du temps k (premier argument de la fonction η définie par la relation (4.10)).
- L'information sur l'état du système arrivant à l'instant k au niveau de l'actionneur est retardée de $d_k + \tau_{k-d_k}$ et non de $d_k + \tau_k$. Néanmoins le domaine d'existence de ce retard est bien $\llbracket d_{\min} + \tau_{\min}; d_{\max} + \tau_{\max} \rrbracket$.
- Tous les retards intervenant dans la relation de boucle fermée (4.11) sont *a priori* inconnus. Même si le retard τ_k peut être déterminé suivant la technologie utilisée par le contrôleur, cela n'a pas de sens que la loi de commande soit fonction explicite des différents retards d_k et τ_k (deuxième et troisième argument de la fonction η définie par la relation (4.10)). Il est néanmoins possible de tenter d'estimer le retard d_k et de faire dépendre la loi de commande de cette estimée en suivant l'approche proposée dans [HDRJ11].

Ces commentaires impliquent que la loi de commande définie par la relation (4.10) est trop générique, le choix est fait de se limiter à la forme suivante :

$$u_k = K^y C^y \tilde{x}_{k-\tau_k} + \sum_{j=1}^{d_{\max}} K^{u,j} u_{k-j}. \quad (4.12)$$

Notons que les matrices de gain K^y , $K^{u,j}$, ($j = 1, \dots, d_{\max}$) sont bien indépendantes des valeurs des retards d_k et τ_k , ainsi que du temps.

Afin de reformuler les expressions de la dynamique du processus (4.2) et la définition de la loi de commande (4.12), nous introduisons un vecteur d'état augmenté x_k concaténant les états retardés pouvant arriver au contrôleur ainsi que les commandes retardées pouvant arriver sur l'actionneur du processus, de la manière suivante.

$$x_k = \begin{bmatrix} \tilde{x}_k \\ \vdots \\ \tilde{x}_{k-\tau_{\max}} \\ u_{k-1} \\ \vdots \\ u_{k-d_{\max}} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n_x}, \quad (4.13)$$

où la dimension n_x est donnée par $n_x = (\tau_{\max} + 1)n + d_{\max}r_u$. Nous pouvons reconnaître dans cette forme étendue proposée dans [TU07] une expression généralisant l'expression n'utilisant qu'un seul retard d_k ou τ_k utilisée dans [TNK05, HDI08]. Notons néanmoins que dans l'article [TU07], les deux retards τ_k et d_k ne peuvent pas être nuls car $\tau_{\min}$ et $d_{\min}$ sont fixés à 1 de façon à simplifier les expressions.

Les relations (4.2) et (4.12) peuvent être réécrites afin d'obtenir le comportement dynamique du système complet en tenant compte de l'état augmenté x_k . De cette manière, la relation (4.2) devient

$$x_{k+1} = A(d_k)x_k + B(d_k)u_k, \quad (4.14)$$

où

$$A(d) = \begin{bmatrix} A^x & A^{xu}(d) \\ 0_{d_{\max}r_u \times (1+\tau_{\max})n} & A^u \end{bmatrix}, \quad \forall d \in \llbracket d_{\min}, d_{\max} \rrbracket, \quad (4.15)$$

avec

$$A^x = \begin{bmatrix} \tilde{A} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ I_n & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & I_n & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & I_n & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(1+\tau_{\max})n \times (1+\tau_{\max})n}, \quad (4.16)$$

$$A^u = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ I_{r_u} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & I_{r_u} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & I_{r_u} & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{d_{\max}r_u \times d_{\max}r_u}, \quad (4.17)$$

$$A^{xu}(d) = I_{(1+\tau_{\max})n \times n} \tilde{B}E(d); \quad (4.18)$$

$$\begin{cases} E(0) = 0_{r_u \times d_{\max} r_u}; \\ E(d) = \begin{bmatrix} 0_{r_u \times (d-1)r_u} & I_{r_u} & 0_{r_u \times (d_{\max}-d)r_u} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{r_u \times d_{\max} r_u}; \quad \forall d \in \llbracket d_{\min}, d_{\max} \rrbracket. \end{cases} \quad (4.19)$$

et

$$B(0) = \begin{bmatrix} \tilde{B} \\ 0_{n\tau_{\max} \times r_u} \\ I_{r_u} \\ 0_{(d_{\max}-1)r_u \times r_u} \end{bmatrix}; \quad (4.20)$$

$$B(d) = \begin{bmatrix} 0_{n(\tau_{\max}+1) \times r_u} \\ I_{r_u} \\ 0_{(d_{\max}-1)r_u \times r_u} \end{bmatrix}; \quad \forall d \in \llbracket d_{\min}, d_{\max} \rrbracket. \quad (4.21)$$

Notons que les matrices $B(0)$ et $E(0)$ ne sont utiles que dans le cas où $d_{\min} = 0$. Il faut aussi remarquer que le paramètre d_k implique uniquement une modification de la position de la matrice $\tilde{B}$ dans les matrices $A(d_k)$ et $B(d_k)$. Pour $d_k \leq 1$, la matrice $B(d_k)$ est indépendante de d_k . La sortie de performance z_k s'exprime en fonction de l'état augmenté x_k par

$$z_k = \tilde{C}\tilde{x}_k = Cx_k, \quad (4.22)$$

avec

$$C = \begin{bmatrix} \tilde{C} & 0_{m_z \times (n_x - n)} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m_z \times n_x}. \quad (4.23)$$

La relation (4.12) devient alors

$$u_k = K(\tau_k)x_k = \begin{bmatrix} K^y C^y F(\tau_k) & K^u \end{bmatrix} x_k, \quad (4.24)$$

avec

$$K^u = \begin{bmatrix} K^{u,1} & K^{u,2} & \dots & K^{u,d_{\max}} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{r_u \times d_{\max} r_u}, \quad (4.25)$$

$$K^y \in \mathbb{R}^{r_u \times m_y} \quad (4.26)$$

et

$$F(\tau) = \begin{bmatrix} 0_{n \times \tau n} & I_n & 0_{n \times (\tau_{\max} - \tau)n} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times (\tau_{\max} + 1)n}; \quad \forall \tau \in \llbracket \tau_{\min}, \tau_{\max} \rrbracket. \quad (4.27)$$

On remarque que la loi de commande (4.24) correspond bien à un retour d'état sur le système augmenté, d'état x_k , avec certains gains nuls. En appliquant cette loi de commande, on obtient alors le comportement en boucle fermée suivant :

$$x_{k+1} = (A(d_k) + B(d_k)K(\tau_k))x_k, \quad (4.28)$$

$$z_k = Cx_k. \quad (4.29)$$

Remarque 19 Remarquons qu'avec la représentation (4.28) de la boucle fermée, qui est fondée directement sur la réécriture des relations (4.10) et (4.11) fait apparaître les paramètres d_k et τ_k . Le retard global $d_k + \tau_{k-d_k}$ mis en évidence dans l'expression de la boucle fermée (4.11) n'apparaît pas directement, à cause du choix du vecteur

augmenté x_k indiqué par l'expression (4.13). Ce retard global $d_k + \tau_{k-d_k}$ aurait pu apparaître en choisissant l'état augmenté suivant, qui est d'une taille différente de celle de x_k si $n \neq r_u$.

$$\begin{bmatrix} \tilde{x}_k \\ \tilde{x}_{k-1} \\ \vdots \\ \tilde{x}_{k-d_{\max}-\tau_{\max}} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n(d_{\max}+\tau_{\max}+1)}. \quad (4.30)$$

Néanmoins ce choix équivalent n'est pas effectué ici, parce qu'il mène à des expressions plus compliquées à écrire et qui perdent leur nature et interprétation physiques.

Cette dynamique en boucle fermée comporte deux paramètres d_k et τ_k , qui peuvent être assimilés à deux lois de commutations. Le retard d_k (respectivement τ_k peut prendre $(d_{\max} - d_{\min} + 1)$ (respectivement $(\tau_{\max} - \tau_{\min} + 1)$) valeurs. Au final on compte un total de $(d_{\max} - d_{\min} + 1)(\tau_{\max} - \tau_{\min} + 1)$ modes possibles. De façon à reprendre le formalisme d'un système à commutations à une seule loi de commutation, nous construisons la loi de commutation suivante, qui permet une renumérotation des modes.

$$\sigma(k) = 1 + (d_k - d_{\min}) + (\tau_k - \tau_{\min})(d_{\max} - d_{\min} + 1). \quad (4.31)$$

La loi de commutation définie par la relation (4.31) appartient à l'ensemble

$$\sigma(k) \in \{1, \dots, N\}, \quad (4.32)$$

avec $N = (d_{\max} - d_{\min} + 1)(\tau_{\max} - \tau_{\min} + 1)$, le nombre total de modes. Utiliser la loi de commutation (4.31) n'implique pas de perte d'information. En effet il est possible de retrouver la valeur des retards d_k et τ_k à partir de la valeur du mode actif $\sigma(k)$. On note

$$\begin{cases} d_k = d_{\min} + r(\sigma(k) - 1, (d_{\max} - d_{\min} + 1)), \\ \tau_k = \tau_{\min} + q(\sigma(k) - 1, (d_{\max} - d_{\min} + 1)), \end{cases} \quad (4.33)$$

où $r(\sigma(k) - 1, (d_{\max} - d_{\min} + 1))$ et $q(\sigma(k) - 1, (d_{\max} - d_{\min} + 1))$ sont respectivement le reste et le quotient de la division de $(\sigma(k) - 1)$ par $(d_{\max} - d_{\min} + 1)$.

Le système (4.28) peut alors se mettre sous la forme des systèmes à commutations que nous avons traité dans les chapitres précédents, c'est-à-dire sous la forme

$$x_{k+1} = A_{\sigma(k)}x_k + B_{\sigma(k)}K_{\sigma(k)}u_k \quad (4.34)$$

$$z_k = Cx_k, \quad (4.35)$$

où la matrice C est indépendante du paramètre de commutation et avec la correspondance

$$\begin{cases} A_{\sigma(k)} = A(r(\sigma(k) - 1, (d_{\max} - d_{\min} + 1))), \\ B_{\sigma(k)} = B(r(\sigma(k) - 1, (d_{\max} - d_{\min} + 1))), \\ K_{\sigma(k)} = K(q(\sigma(k) - 1, (d_{\max} - d_{\min} + 1))). \end{cases} \quad (4.36)$$

4.3.2 Modélisation des performances

Le système étant maintenant modélisé, attachons nous à obtenir une modélisation compatible pour les performances du système. Supposons, comme dans les chapitres précédents, que le critère de performance est fondé sur l'énergie de la sortie de performance z_k du système, ainsi que l'énergie pondérée de la commande u_k de ce système, C'est-à-dire

$$J(\{\sigma(k)\}, x_0, \{u_k\}) = \sum_{k=0}^{\infty} (z_k^T z_k + u_k^T R u_k), \quad (4.37)$$

avec $R = R^T > 0$.

La sortie de performance z_k peut s'exprimer en fonction de l'état augmenté x_k , à l'aide de la relation (4.22). Cela implique que le critère peut aussi s'exprimer en fonction de l'état augmenté par

$$J(\{\sigma(k)\}, x_0, \{u_k\}) = \sum_{k=0}^{\infty} (x_k^T C^T C x_k + u_k^T R u_k). \quad (4.38)$$

On notera que ce critère est bien une fonction implicite de la loi de commutation représentant les différents couples de retards. La matrice $C^T C$ pondérant le terme quadratique en l'état augmenté du système est alors bien indépendante de la loi de commutation. Il en est de même pour la matrice R pondérant le terme quadratique en u_k . Un autre choix aurait pu être possible en faisant intervenir les états et commandes retardés, par exemple en considérant le critère

$$J(\{\sigma(k)\}, x_0, \{u_k\}) = \sum_{k=0}^{\infty} (\tilde{x}_{k-\tau_k}^T \tilde{C}^T \tilde{C} \tilde{x}_{k-\tau_k} + u_{k-d_k}^T R u_{k-d_k}), \quad (4.39)$$

dont le coût instantané peut s'exprimer de la manière suivante

$$\begin{aligned} & \tilde{x}_{k-\tau_k}^T \tilde{C}^T \tilde{C} \tilde{x}_{k-\tau_k} + u_{k-d_k}^T R u_{k-d_k} \\ &= x_k^T \left(\begin{bmatrix} F^T(\tau_k) \\ 0_{d_{\max} r_u \times n} \end{bmatrix} \tilde{C}^T \tilde{C} \begin{bmatrix} F(\tau_k) & 0_{n \times d_{\max} r_u} \end{bmatrix} \right) x_k \\ &+ x_k^T \left(\begin{bmatrix} 0_{n(1+\tau_{\max}) \times r_u} \\ E^T(d_k) \end{bmatrix} R \begin{bmatrix} 0_{r_u \times n(1+\tau_{\max})} & E(d_k) \end{bmatrix} \right) x_k + \delta_{d_k} u_k^T R u_k, \end{aligned} \quad (4.40)$$

avec $\delta_{(\cdot)}$ la fonction indicatrice de Dirac à temps discret.

Avec ce choix de critère, les matrices de pondérations dépendent directement de la loi de commutation $\sigma(k)$ à cause de la présence des valeurs de τ_k et d_k ; ce que notre approche pourrait traiter à la vue des chapitres précédents. Néanmoins ce choix mène à une difficulté de notation importante qui va à l'encontre de notre volonté de montrer que notre approche permet de traiter la certification des performances des SCR. Aussi d'autres arguments nous poussent à ne pas considérer un tel critère :

- Certains termes (état et/ou entrée) n'apparaîtront pas dans le critère, à cause de la variation des retards τ_k et d_k . En d'autres termes les fonctions $k \mapsto k - d_k$ et $k \mapsto k - \tau_k$ n'auront pas la totalité de l'ensemble $\mathbb{N}$ comme image.
- De la même manière certains termes (état et/ou entrée) pourraient apparaître plusieurs fois dans le critère J .
- Le critère n'est plus convexe par rapport à la séquence des commandes u_k comme la pondération $\delta_{d_k} R$ peut s'annuler (pour les retards nuls $d_k = 0$).

4.3.3 Obtention d'une loi de commande certifiant les performances

Pour aller plus loin, supposons que le processus transmet au contrôleur l'ensemble des informations portant sur l'état $\tilde{x}_k$, retardé d'un retard τ_k en d'autres termes,

$$y_k = \tilde{x}_{k-\tau_k}. \quad (4.41)$$

La matrice C^y vérifie alors $C^y = I_n$ et les dimensions satisfont $m_y = n$. La loi de commande correspond donc à un retour d'état x_k partiel, donné par

$$u_k = K^y \tilde{x}_{k-\tau_k} + \sum_{j=1}^{d_{\max}} K^{u,j} u_{k-j}. \quad (4.42)$$

Nous allons détailler la structure des matrices qui sont les variables d'optimisation du théorème 14 de façon à les adapter à la structure du retour d'état partiel (4.42). Pour tout $i \in \{1, \dots, N\}$, on a, en reprenant les notations du théorème 14,

$$K_i = Y_i G_i^{-1}. \quad (4.43)$$

La matrice Y_i doit avoir la même structure que la matrice K_i , c'est-à-dire,

$$Y_i = \begin{bmatrix} Y^y F(q(i-1, (d_{\max} - d_{\min} + 1))) & Y^u \end{bmatrix}, \quad (4.44)$$

avec $Y^y \in \mathbb{R}^{r_u \times n}$ et $Y^u \in \mathbb{R}^{r_u \times d_{\max} r_u}$. Aussi les matrices G_i doivent respecter une structure particulière.

$$G_i = \begin{bmatrix} G_i^x & G_i^{xu} \\ 0_{d_{\max} r_u \times n(1+\tau_{\max})} & G^u \end{bmatrix}, \quad (4.45)$$

avec

$$G_i^x = F'(\tau) G^y F(\tau) + (I_{n(1+\tau_{\max})} - F'(\tau) F(\tau)) \bar{G}_i^x, \quad (4.46)$$

$$G_i^{xu} = (I_{n(1+\tau_{\max})} - F'(\tau) F(\tau)) \bar{G}_i^{xu}, \quad (4.47)$$

$$\tau = q(i-1, (d_{\max} - d_{\min} + 1)). \quad (4.48)$$

Avec de telles structures, nous avons alors

$$K^y = Y^y (G^x)^{-1}, \quad (4.49)$$

$$K^u = Y^u (G^u)^{-1}. \quad (4.50)$$

Encore une fois la loi de commutation correspond uniquement aux positions des variables dans les matrices utilisées. Les gains K^y et K^u ne dépendent pas explicitement de la loi de commutation.

Remarque 20 *Le raisonnement est toujours valable si C^y est différent de l'identité, à la condition que C^y soit de rang plein en ligne. Dans ce cas, à une transformation près, détaillée dans [BB05], il est possible de supposer C^y de la forme*

$$C^y = \begin{bmatrix} I_{m_y} & 0_{m_y \times (n-m_y)} \end{bmatrix}. \quad (4.51)$$

Il est alors toujours possible de considérer un retour partiel de l'état x_k , même si ce retour partiel est différent de celui qui a été explicité.

4.3.4 Illustration académique

Afin d'illustrer et de détailler notre approche, nous choisissons tout d'abord un exemple académique simple scalaire, puis nous l'appliquons à un système de dimension 2.

4.3.4.1 Exemple scalaire

Considérons le système à temps continu scalaire suivant.

$$A_s = \begin{bmatrix} -1 \end{bmatrix}; \quad B_s = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}; \quad C_s = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}. \quad (4.52)$$

On discrétise le système avec une période d'échantillonnage donnée par $T = 1s$, ce qui mène aux matrices :

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0.3679 \end{bmatrix}; \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} 0.6321 \end{bmatrix}; \quad \tilde{C} = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}. \quad (4.53)$$

On pose $R = 0, 1$ comme pondération de l'entrée u_k dans le critère quadratique J . En choisissant $d_{\min} = \tau_{\min} = 0$ et $d_{\max} = 2$ et $\tau_{\max} = 3$, la dimension n_x vaut $n_x = 6$ et le nombre de sommets est égal à $N = 12$. En appliquant le théorème 14, avec les contraintes (4.44) et (4.45), on obtient numériquement les résultats suivants : $\beta = 4,802$;

$$Y_1 = Y_5 = Y_9 = \begin{bmatrix} -0.0072 & 0 & 0 & 0 & -0.0231 & -0.0221 \end{bmatrix}; \quad (4.54)$$

$$Y_2 = Y_6 = Y_{10} = \begin{bmatrix} 0 & -0.0072 & 0 & 0 & -0.0231 & -0.0221 \end{bmatrix}; \quad (4.55)$$

$$Y_3 = Y_7 = Y_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -0.0072 & 0 & -0.0231 & -0.0221 \end{bmatrix}; \quad (4.56)$$

$$Y_4 = Y_8 = Y_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -0.0072 & -0.0231 & -0.0221 \end{bmatrix}. \quad (4.57)$$

Pour les matrices G_i , nous ne précisons pas les $N = 12$ matrices. Indiquons les matrices G_1 , G_5 et G_9 afin de montrer leur structure en comparaison avec les matrices Y_1 , Y_5 et Y_9 :

$$G_1 = \begin{bmatrix} 0.4484 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.1046 & 0.5932 & 0.0782 & 0.0000 & -0.0113 & 0.0021 \\ 0.0160 & 0.0793 & 0.9448 & -0.0000 & 0.0040 & -0.0017 \\ -0.0355 & 0.0448 & 0.1377 & 13.5348 & 0.0006 & 0.0287 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2076 & -0.0591 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0002 & 0.4334 \end{bmatrix}; \quad (4.58)$$

$$G_5 = \begin{bmatrix} 0.4484 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.1197 & 0.5213 & 0.1311 & -0.0000 & -0.0560 & 0.0177 \\ 0.0509 & 0.1311 & 0.7460 & -0.0000 & -0.0239 & 0.0071 \\ 0.0499 & 0.1444 & 0.1246 & 125.1244 & -0.0235 & 2.0694 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2076 & -0.0591 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0002 & 0.4334 \end{bmatrix}; \quad (4.59)$$

$$G_9 = \begin{bmatrix} 0.4484 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.1061 & 0.5316 & 0.0724 & -0.0000 & -0.0317 & 0.0318 \\ 0.0598 & 0.0724 & 0.7118 & -0.0000 & -0.0019 & -0.1357 \\ -0.0595 & 0.0005 & 0.0983 & 55.1080 & 0.0442 & 0.0954 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2076 & -0.0591 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0002 & 0.4334 \end{bmatrix}; \quad (4.60)$$

Notons que les matrices Y_i sont au nombre uniquement de $\tau_{\max} + 1$ à cause des structures imposées (4.44). En revanche, les $N = 12$ matrices G_i sont bien toutes distinctes, à cause de la structure (4.45), c'est-à-dire que l'on reconnaît le bloc $G^y = 0, 4484$ seul sur une ligne et le bloc $G^u = \begin{bmatrix} 0.2076 & -0.0591 \\ -0.0002 & 0.4334 \end{bmatrix}$ en bas sur la diagonale. Les autres lignes (les lignes 3, 4 et 5 pour les matrices G_1 , G_5 et G_9) dépendent du sommet $i \in \Sigma$ considéré et comme nous allons le voir, n'interviendront pas dans la synthèse des gains des correcteurs. Autoriser ces lignes à dépendre du sommet $i \in \Sigma$ permet de pas accroître le conservatisme des LMIs. Ainsi on obtient bien les matrices de gains suivantes, qui ont exactement les mêmes structures que les matrices Y_i .

$$K_1 = K_5 = K_9 = \begin{bmatrix} -0.0162 & 0 & 0 & 0 & -0.1112 & -0.0662 \end{bmatrix}; \quad (4.61)$$

$$K_2 = K_6 = K_{10} = \begin{bmatrix} 0 & -0.0162 & 0 & 0 & -0.1112 & -0.0662 \end{bmatrix}; \quad (4.62)$$

$$K_3 = K_7 = K_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -0.0162 & 0 & -0.1112 & -0.0662 \end{bmatrix}; \quad (4.63)$$

$$K_4 = K_8 = K_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -0.0162 & -0.1112 & -0.0662 \end{bmatrix}. \quad (4.64)$$

Le majorant $\beta = 4,802$ peut être comparé au minorant obtenu $\delta_M = 1,2700$. On peut noter que l'écart reste important comme δ_M représente environ le tiers de β . Il faut noter que notre application de la commande des SCR pose des contraintes de variables d'optimisation très fortes. On notera aussi que les matrices K_i ont des valeurs assez faibles.

Considérons maintenant pour $d_{\max} = 2$ les effets d'une variation de $\tau_{\max}$ (toujours avec $d_{\min} = \tau_{\min} = 0$). On obtient alors le tableau Tab. 4.1.

$\tau_{\max}$	1	2	3	4	5	6
β	3.5670	4.2127	4.8017	5.4610	6.1006	6.6529
δ_M	1.2679	1.2704	1.2700	1.2708	1.2702	1.2698

TABLE 4.1 – Valeurs de β et de δ_M pour différents $\tau_{\max}$, avec $d_{\min} = \tau_{\min} = 0$ et $d_{\max} = 2$.

On peut noter qu'aux erreurs numériques près, on a bien une croissance de la valeur de β , néanmoins la valeur de δ_M reste très peu sensible à la valeur de $\tau_{\max}$. Le minorant δ_M ne peut servir correctement de validation que pour les faibles valeurs de la borne $\tau_{\max}$ des retards τ_k .

De la même manière, étudions la variation inverse. Considérons $\tau_{\max} = 1$ et faisons varier $d_{\max}$ (à $d_{\min} = \tau_{\min} = 0$). On obtient le tableau Tab. 4.1.

$d_{\max}$	1	2	3	4	5	6
β	2.5887	3.5670	5.4546	7.5059	9.5568	11.5822
δ_M	1.2354	1.2679	1.2824	1.2877	1.2898	1.2906

TABLE 4.2 – Valeurs de β et de δ_M pour différents $d_{\max}$, avec $d_{\min} = \tau_{\min} = 0$ et $\tau_{\max} = 1$.

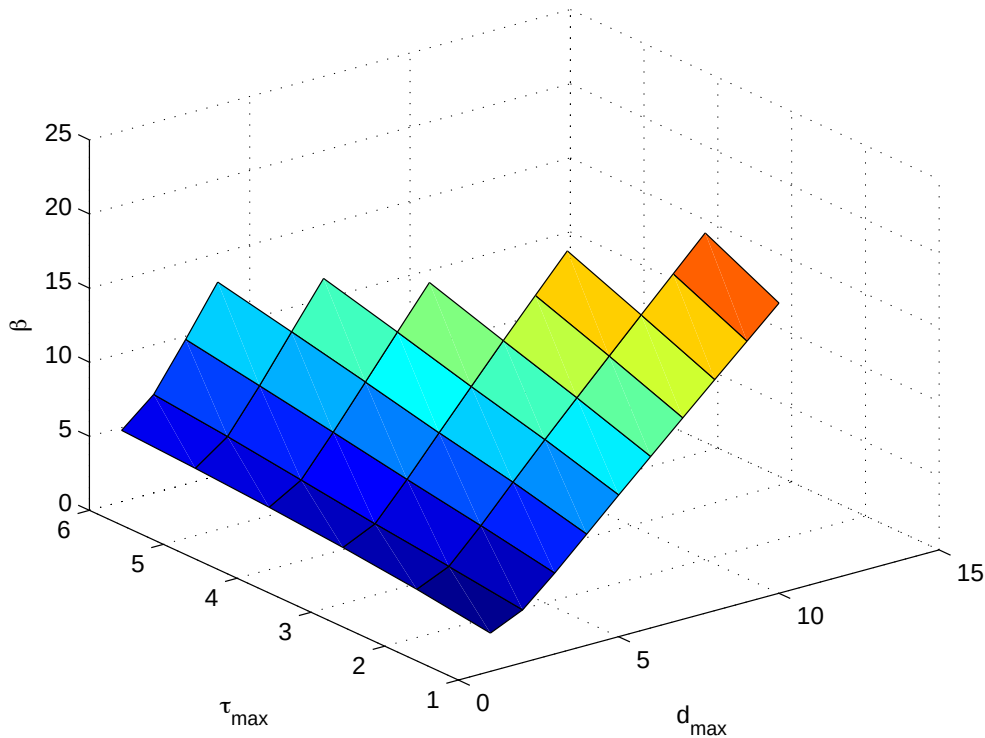
L'interprétation sur les variations de δ_M sont identiques à ceci près que la croissance de δ_M est plus sensible à la variation de $d_{\max}$ qu'à la variation de $\tau_{\max}$. De façon à obtenir une meilleure certification des performances dans ce cadre, il faudra recourir à une classe plus riche de séquences de commutations pour fabriquer les minorants δ_M de chaque mode.

On peut aussi représenter les variations de β pour différents couples $(d_{\max}, \tau_{\max})$. On obtient ainsi le tableau Tab. 4.3 et la figure Fig. 4.4.

$d_{\max} \backslash \tau_{\max}$	1	2	3	4	5	6
1	2,589	3,251	3,782	4,211	4,539	4,8172
2	3,567	4,213	4,802	5,461	6,101	6,653
3	5,455	6,382	7,214	8,097	8,951	9,781
4	7,506	8,726	9,767	10,903	11,993	13,065
5	9,557	11,014	12,307	13,688	15,010	∞
6	11,582	13,253	14,816	16,442	∞	∞
7	13,593	15,467	17,273	∞		
8	15,595	17,664	19,701	∞		
9	17,591	19,851	∞			
10	19,582	22,031	∞			
11	21,570	∞				

TABLE 4.3 – Valeurs du majorant β pour différentes valeurs de $\tau_{\max}$ et $d_{\max}$. On note ∞ quand le problème d'optimisation est infaisable.

On peut remarquer l'évidente croissance de β à $\tau_{\max}$ fixé en fonction de $d_{\max}$ ainsi qu'à $d_{\max}$ fixé en fonction de $\tau_{\max}$. Effectivement, nous avons une inclusion dans les contraintes en faisant croître $d_{\max}$ et $\tau_{\max}$. Néanmoins quand ces bornes supérieures des deux retards atteignent une certaine valeur, on perd la stabilisabilité de l'ensemble avec nos contraintes, ou bien le problème d'optimisation devient trop contraint pour fournir une solution. Notons que les rôles


 FIGURE 4.4 – Valeur du majorant β pour différentes valeurs de $\tau_{\max}$ et $d_{\max}$.

des deux retards d_k et τ_k étant différents, nous n'avons évidemment pas de symétrie par rapport à l'axe $d_{\max} = \tau_{\max}$.

4.3.4.2 Exemple de dimension 2

Considérons le système à temps continu scalaire suivant.

$$A_s = \begin{bmatrix} -1.5 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}; \quad B_s = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad C_s = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.65)$$

On discrétise le système avec une période d'échantillonnage donnée par $T = 0,5s$, ce qui mène aux matrices :

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0.4724 & 0.2090 \\ 0 & 0.3679 \end{bmatrix}; \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} 0.0714 \\ 0.3161 \end{bmatrix}; \quad \tilde{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.66)$$

On considère $R = 0.1$ la pondération de la commande u_k dans le critère quadratique. En choisissant $d_{\min} = \tau_{\min} = 0$ et $d_{\max} = 2$ et $\tau_{\max} = 3$, la dimension n_x vaut $n_x = 10$ et le nombre de sommets est égal à $N = 12$. En appliquant le théorème 14, avec les contraintes (4.44) et (4.45), on obtient numériquement les résultats suivants : $\beta = 5,7095$;

$$K_1 = K_5 = K_9 = \begin{bmatrix} -0.0148 & 0.0054 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.1072 & -0.1173 \end{bmatrix};$$

$$\begin{aligned}
K_2 = K_6 = K_{10} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -0.0148 & 0.0054 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.1072 & -0.1173 \end{bmatrix}; \\
K_3 = K_7 = K_{11} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0148 & 0.0054 & 0 & 0 & -0.1072 & -0.1173 \end{bmatrix}; \\
K_4 = K_8 = K_{12} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0148 & 0.0054 & -0.1072 & -0.1173 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Les matrices $K_i, \forall i \in \Sigma$ vérifient bien les structures attendues.

Nous représentons sur le tableau Tab. 4.4 certaines valeurs de β pour différents couples $(d_{\max}, \tau_{\max})$, avec $d_{\min} = \tau_{\min} = 0$. Toutes les valeurs possibles ne sont pas représentées pour éviter les problèmes d'optimisation avec des contraintes LMIs de très grande taille associées à un très grand nombre de variables. Ces valeurs sont aussi représentées graphiquement sur la figure Fig. 4.5.

$d_{\max} \backslash \tau_{\max}$	1	2	3	4	5	6
1	3.4380	4.5014	5.4905	6.3090	7.0172	7.7591
2	3.6058	4.6816	5.7095	6.5638	7.4018	
3	3.7948	4.8676	5.9223	6.8331		
4	4.0608	5.1171	6.1900			
5	4.5163	5.5313	6.5940			
6	5.1916	6.2245				
7	6.0282					

TABLE 4.4 – Valeurs du majorant β pour différentes valeurs de $\tau_{\max}$ et $d_{\max}$.

Encore une fois, on peut remarquer la croissance de β à $\tau_{\max}$ fixé en fonction de $d_{\max}$ et la croissance de β à $d_{\max}$ fixé en fonction de $\tau_{\max}$.

Pour terminer, notons qu'il n'est pas possible d'étendre directement les résultats obtenus dans le cadre de la commande par retour de sortie dynamique. Effectivement le correcteur obtenu dépend nécessairement de la loi de commutation de part la structure pyramidale utilisée. Afin d'utiliser un retour de sortie dynamique à contrôleur indépendant de la loi de commutation, il faudrait appliquer les techniques du type lemme d'élimination dépendant de la loi de commutation. Un retour statique de sortie indépendante de la loi de commutation est possible en appliquant la remarque 20.

4.4 Conclusion

Ce chapitre proposait de montrer comment une application du type "système commandé via un réseau" (SCR) peut se formaliser à l'aide des systèmes à commutations et comment il est alors possible de traiter l'aspect performance de ces SCR grâce aux résultats des chapitres précédents.

Les SCR sont des systèmes dont les informations sont échangées par le procédé et le contrôleur via un réseau. Si ce type de systèmes présente de nombreux avantages, il présente également des difficultés supplémentaires liées à

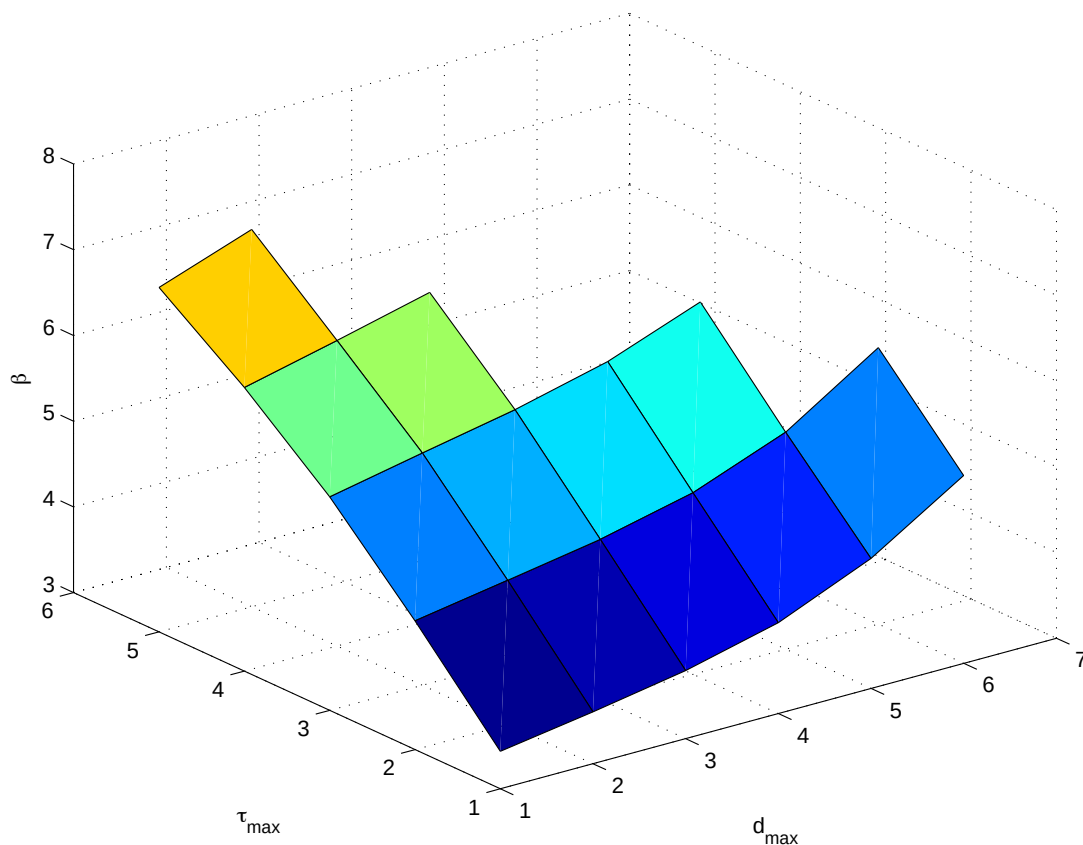


FIGURE 4.5 – Valeur du majorant β pour différentes valeurs de $\tau_{\max}$ et $d_{\max}$.

l'utilisation d'un réseau. On peut citer en particulier la perte de données, la quantification, les bruits de mesure, les temps de calcul des différents organes et la présence de retards de transmission du réseau. Une présentation simple des différents phénomènes a été proposée.

Naturellement notre approche ne permet pas de traiter l'ensemble des difficultés liées aux SCR. Un certain nombre d'hypothèses ont été faites pour mettre l'accès sur la gestion des retards variants dans le temps correspondant aux transmissions du système au contrôleur ainsi que du contrôleur au système. Nous avons considéré les retards multiples de la période d'échantillonnage et bornés. Aussi par des considérations réalistes d'impossibilité pour le contrôleur de connaître les valeurs instantanées des deux retards, nous supposons que le contrôleur est robuste à ces deux retards, c'est-à-dire qu'il n'en dépend pas.

Nous détaillons comment il est alors possible d'obtenir néanmoins une modélisation dans le cadre des systèmes à commutations à l'aide d'un état augmenté contenant les états retardés du système et du contrôleur. Les deux retards sont considérés comme des lois de commutations indépendantes qui sont renumérotées en une seule loi de commutation portant sur l'ensemble des sommets.

Ainsi les différents théorèmes des chapitres précédents sur la commande

par retour d'état et la certification de performance ont pu être adaptés dans le cas d'un retour d'état partiel. Une discussion sur l'influence des bornes maximales sur le niveau de performance et sa certification a été proposée. Nous montrons néanmoins que l'ensemble de nos résultats (en particulier la commande par retour de sortie dynamique) ne sont pas applicables dus au conservatisme imposé par les différentes structures des variables d'optimisation pour traiter cette application aux SCR.

Chapitre 5

Conclusion générale et perspectives

5.1 Conclusion générale

Dans ce mémoire, la thématique des performances pour les systèmes dynamiques à commutations à temps discret a été abordée. Effectivement l'analyse de stabilité et la stabilisation de ce type de système occupe une large place dans la littérature et a atteint une maturité permettant de se poser la question de l'aspect des performances. Cette thématique étant particulièrement vaste, une étude exhaustive était hors de propos. Cette thèse s'est donc attachée à traiter un cadre très précis, afin de pouvoir mener une étude cohérente comportant la définition claire d'un problème de garantie de performance, l'analyse du niveau de performance garanti et enfin la synthèse de loi de commande améliorant le niveau de performance garanti.

Pour ce faire, après un rappel de l'état de l'art de la stabilité et la stabilisation des systèmes dynamiques à commutations en temps discret, il est indiqué que certaines techniques, telle l'utilisation du rayon spectral joint, ne sont pas aisément adaptables à l'étude des performances. Tout au long de cette thèse, les techniques liées aux fonctions de Lyapunov dépendant de la loi de commutation ont été considérées et nous nous sommes attachés à montrer le lien fort avec l'aspect stabilité de nos résultats.

Parmi les différentes natures des critères de performance, le cadre des performances quadratiques a été sélectionné, tant pour des raisons théoriques (compatibilité avec la dépendance en temps) que pratiques (apparition fréquente dans de nombreux champs applicatifs). Loin de traiter de façon exhaustive la question des performances pour les systèmes à commutations à temps discret, quelques pistes d'études ont été formalisées. Le problème de la garantie du niveau de performance pour une loi de commutation arbitraire inconnue a été choisi parmi les problèmes énoncés.

L'une des contributions majeures de cette thèse est de proposer une étude du niveau de performance garanti pour les systèmes dynamiques à commutations qui sont autonomes, pour une loi de commutation arbitraire. La détermination analytique ou numérique du coût garanti, quelque soit la loi de commutation est un problème particulièrement difficile. Afin de contourner cette difficulté, une validation de la valeur du coût garanti est proposée en deux

étapes : la détermination d'un majorant, puis celle d'un minorant de ce coût garanti. Le majorant est recherché à l'aide d'une fonction de Lyapunov dépendant de la loi de commutation. Un problème d'optimisation convexe, contraint par des LMIs est ainsi proposé. Une discussion souligne le lien entre ces LMIs et celles liées à la stabilité. Des minorants du coût garanti peuvent être déterminés à l'aide du calcul exact du critère associé à des lois de commutation particulières. Afin d'illustrer cette synthèse de minorant, la classe des lois de commutation figée, c'est-à-dire forçant un et un seul mode est considérée. Une discussion critique est proposée sur des exemples numériques simples.

Cette analyse des performances pour les systèmes dynamiques à commutations à temps discret est un prérequis pour traiter la synthèse de commande pour ces systèmes en tenant compte de l'aspect performance. Plusieurs cadres ont été étudiés ici : celui où tout l'état est connu et celui où seul la sortie est connue. Dans le premier cadre, la synthèse d'un contrôleur par retour d'état, avec un gain dépendant du mode actif a été proposé sous la forme d'un problème d'optimisation convexe, sous contraintes LMIs. Dans le cas où seule la sortie du système est connue par le contrôleur, un retour d'état estimé, fondé sur un observateur est proposé, ainsi qu'un contrôleur par retour dynamique de sortie. Une discussion est proposée sur des exemples numériques académiques.

Enfin une illustration de nos résultats a été proposée à l'aide d'une application possible aux systèmes commandés en réseau qui constituent un cas pratique, de plus en plus étudié. En effet, l'utilisation d'un réseau pour transmettre des données offre des avantages mais également des inconvénients comme la présence de retards. Une approche est de ramener l'étude de systèmes à retards qui peuvent modéliser un système contrôlé en réseau à un système à commutations quand les retards considérés sont multiples de la période d'échantillonnage et bornés. L'état du système à commutations considéré comprend l'état du système à retard, les états retardés ainsi que les commandes retardées.

5.2 Perspectives

Cette thèse a proposé un questionnement structuré à propos de l'aspect performance pour les systèmes à commutations. Même si un certain nombre de réponses ont été apportées, tout au long du fil conducteur de ce questionnement, la thématique des performances pour les systèmes à commutations reste encore largement ouverte. Il est possible d'esquisser quelques perspectives pour la continuation de ce travail.

- Tout d'abord, dans la phase d'analyse des performances pour les systèmes autonomes, un majorant du coût garanti a été sélectionné dans la classe des fonctions de Lyapunov dépendant d'un paramètre variant dans le temps. Il est possible de considérer une classe plus grande (contenant celle-ci) afin de réduire l'écart entre le coût garanti et ce majorant. Par exemple, considérer la classe des fonctions de Lyapunov dépendant

du chemin, introduites dans [Lee06] ne poserait pas de difficulté théorique. En revanche, les notations deviendront plus compliquées, le nombre de variables et aussi d'inégalités linéaires à traiter seront plus importants, pour une diminution du majorant pas nécessairement significative.

- Toujours dans le cadre de l'analyse des performances pour les systèmes autonomes, un minorant du coût garanti a été proposé, afin de valider l'écart entre le majorant et le coût garanti. Ce minorant est déterminé à l'aide du calcul exact du critère pour des lois de commutation particulières. Pour mener le calcul à ses fins, seules les lois de commutation constantes ou figées ont été utilisées. Afin d'améliorer la valeur du minorant, il est envisageable de considérer des lois de commutation plus riches, comme les lois périodiques, ou bien les lois de commutation soumises à une contrainte de temps de maintien. Evidemment, pour ces lois dépendantes du temps, le calcul exact des critères associés est plus compliqué et nécessite des outils appropriés, comme les fonctions de Lyapunov périodiques pour les lois de commutation périodiques.
- Les systèmes à commutations traités dans cette thèse sont de type certains, dans le sens où leurs modes sont parfaitement connus. Il est possible de considérer que les modes contiennent des incertitudes, qui au choix pourraient être modélisées par une norme bornée [Pet87], ou bien par une représentation polytopique [Het07]. Dans les deux situations, les conditions peuvent être exprimées en termes d'inégalités linéaires matricielles, même si leur nombre peut être considérablement accru.
- Le choix a été fait d'étudier les performances garanties pour un système à commutations, quelles que soient les lois de commutations. Ce choix est de type prudent et peut mener à des majorants excessifs, principalement pour des applications comportant des contraintes sur leur loi de commutation (périodique ou vérifiant un temps de maintien minimal). Il est possible d'étendre l'approche développée dans cette thèse à ces deux cas particuliers, en s'inspirant par exemple de [GC06] pour les lois de commutation vérifiant un temps de maintien minimal ou bien de [Far06] pour les lois de commutation périodiques.

Bibliographie

- [AGE09] V. Azhmyakov, R.G. Guerra, and M. Egerstedt. Hybrid LQ-optimization using dynamic programming. In *American Control Conference*, pages 3617–3623. Saint-Louis, USA, 2009.
- [AK03] P. J. Antsaklis and X. D. Koutsoukos. *Software-Enabled Control : Information Technologies for Dynamical Systems*, chapter Hybrid Dynamical Systems : Review and Recent Progress. Wiley-IEEE Press, 2003.
- [AM89] B.D.O. Anderson and J.B. Moore. *Optimal control : linear quadratic methods*. Prentice-Hall International Editions, 1989.
- [And98] D. Anderson. *FireWire System Architecture*. Addison-Wesley, 1998.
- [ÅW97] K.J. Åström and B. Wittenmark. *Computer-Controlled Systems*. Prentice Hall, 1997.
- [Bar77] A.Y. Barraud. A numerical algorithm to solve $A^T X A - X = Q$. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 22 :883–885, 1977.
- [BB05] G. I. Bara and M. Boutayeb. Static output feedback stabilization with H_∞ performance for linear discrete-time systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 50(2) :250–254, February 2005.
- [BB07] F. Borrelli and M. Baotié. Dynamic programming for constrained optimal control of discrete-time linear hybrid systems. *Automatica*, 41 :1709–1721, 2007.
- [BBS98] M.S. Branicky, V.S. Borkar, and S.K.Mitter. A unified framework for hybrid control : Model and optimal control theory. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 43(1) :35–41, 1998.
- [BEFB94] S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. SIAM Studies in Applied Mathematics, 1994.
- [BN05] V. D. Blondel and Y. Nesterov. Computationally efficient approximations of the joint spectral radius. *SIAM Journal of Matrix Analysis*, 27(1) :256–272, 2005.
- [BNT04] V. Blondel, Y. Nesterov, and J. Theys. *Approximations of the rate of growth of switched linear systems*, volume 2993 of *Hybrid Systems : Computation and Control, HSCC*, chapter of Lecture Notes

- in Computer Science, pages 173–186. Sprinder-Verlag, Heidelberg, 2004.
- [Bra94] M.S. Branicky. Stability of switched and hybrid systems. In *33rd Conference on Decision and Control*, pages 3498–3503. Lake Buena Vista, Florida, USA, 1994.
- [Bra98] M.S. Branicky. Multiple Lyapunov functions and other analysis tools for switched and hybrid systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 43 :475–582, 1998.
- [Bra07] B. Brahimi. *Proposition d’une approche intégrée basée sur les réseaux de Petri de Haut Niveau pour simuler et évaluer les systèmes contrôlés en réseau*. PhD thesis, Université Henri Poincaré, Nancy, France, 2007.
- [CHvdW⁺10] M.B.G. Cloosterman, L. Hetel, N. van de Wouw, W.P.M.H. Heemels, J. Daafouz, and H. Nijmeijer. Controller synthesis for networked control systems. *Automatica*, 46 :1584–1594, 2010.
- [Clo08] M.B.G. Cloosterman. *Control over Communication Networks : Modeling, Analysis and Synthesis*. PhD thesis, Eindhoven University of Technology, 2008.
- [CT99] C.A.R. Cruisus and A. Trofino. Sufficient LMI conditions for output feedback control problems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 44(5) :1053–1057, 1999.
- [DB01] J. Daafouz and J. Bernussou. Parameter dependent Lyapunov functions for discrete time systems with time varying parametric uncertainties. *Systems & Control Letters*, 43 :355–359, August 2001.
- [DGD10] G. S. Deaecto, J. C. Geromel, and J. Daafouz. On $\mathcal{H}_\infty$ control design of continuous-time switched linear systems. In *Proceedings of the 49th IEEE Conference on Decision and Control*, Atlanta, GA, USA, 2010.
- [DRI02] J. Daafouz, P. Riedinger, and C. Iung. Stability analysis and control synthesis for switched systems : A switched Lyapunov function approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 47 :1883–1887, 2002.
- [DRI04] J. Daafouz, P. Riendinger, and C. Iung. Observer-based switched control design with pole placement for discrete-time switched systems. *International Journal of Hybrid Systems*, 3 :263–282, 2004.
- [Duc04] G. Duc. *La commande optimale des systèmes dynamiques*, chapter Systèmes linéaires. Hermès-Lavoisier, Paris, 2004.
- [Far06] C. Farges. *Méthodes d’analyse et de synthèse robustes pour les systèmes linéaires périodiques*. PhD thesis, Université Paul Sabatier - Toulouse III, 2006.
- [Fuj08] H. Fujioka. Stability analysis for a class of networked/embedded control systems : output feedback case. In *17th World Congress*, pages 4210–4215. Seoul, Korea, 2008.

-
- [GA97] P. Gahinet and P. Apkarian. A linear matrix inequality approach to $\mathcal{H}_\infty$ control. *International Journal of Robust and Non-linear Control*, 4 :421–448, 1997.
 - [GC06] J. C. Geromel and P. Colaneri. Stability and stabilization of discrete-time switched systems. *International Journal of Control*, 79(7) :719–728, July 2006.
 - [GCB08] J.C. Geromel, P. Colaneri, and P. Bolzern. Dynamic output feedback control of switched linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 53 :720–733, 2008.
 - [Ger10] J.C. Geromel. Sur la stabilité, commande et optimisation des systèmes dynamiques hybrides. In *Conférence Internationale Francophone d’Automatique*. Nancy, France, 2010.
 - [GK08] J.C. Geromel and R.H. Korogui. $\mathcal{H}_2$ robust filter design with performance certificate via convex programming. *Automatica*, 44 :937–948, 2008.
 - [GKC03] K. Gu, V.L. Kharitonov, and J. Chen. *Stability of Time-Delay Systems*. Control Engineering. Birkhäuser, 2003.
 - [GLW07] H. Gao, J. Lam, and Z. Wang. Discrete bilinear stochastic systems with time-varying delay : Stability analysis and control synthesis. *Chaos, Solitons and Fractals*, 34(2) :294–404, 2007.
 - [Hah67] W. Hahn. *Stability of Motion*. Sprinder-Verlag, 1967.
 - [HDI08] L. Hetel, J. Daafouz, and C. Iung. Equivalence between the Lyapunov-Krasovskii functional approach for discrete delay systems and the stability conditions for switched systems. *Journal on Nonlinear Analysis : Hybrid Systems*, 2(3) :697–705, August 2008.
 - [HDRJ11] L. Hetel, J. Daafouz, J.-P. Richard, and M. Jungers. Delay-dependant sampled-data control based on delay estimates. *Systems & Control Letters*, 60 :146–150, 2011.
 - [Het07] L. Hetel. *Stabilité et commande robuste des systèmes linéaires commutés*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Lorraine, 2007.
 - [HJ85] R. A. Horn and C. R. Johnson. *Matrix analysis*. Cambridge University Press, 1985.
 - [HNX07] J. Hespanha, P. Naghshtabrizi, and Y. Xu. A survey of recent results in networked control systems. *IEEE Special Issue on Technology of Networked Control Systems*, 95(1) :138–162, January 2007.
 - [HR88] Y. Halevi and A. Ray. Integrated communication and control systems : Part 1-analysis. *Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, 110 :367–373, 1988.
 - [Hu07] T. Hu. Switching law construction for discrete-time systems via composite quadratic functions. In *Proceedings of the 2007 American Control Conference*, New York City, USA, 2007.

- [JCTD11] M. Jungers, E.B. Catselan, S. Tarbouriech, and J. Daafouz. Finite $\mathcal{L}_2$ -induced gain and λ -contractivity of discrete-time switching systems including modal nonlinearities and actuator saturations. *Nonlinear Analysis : Hybrid Systems, in Press*, 2011.
- [JHD10] M. Jungers, L. Hetel, and J. Daafouz. Guaranteed cost of control of networked control systems with small time-varying delays. In *Proceedings of the 19th International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems*. Budapest, Hongrie, 2010.
- [Joh02] M. Johansson. *Piecewise Linear Control Systems : A computational Approach*. Number 284 in Lecture Notes in Control and Information Sciences. Springer-Verlag, 2002.
- [LA09] H. Lin and P. J. Antsaklis. Stability and stabilizability of switched linear systems : A survey of recent results. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 54(2) :308–322, 2009.
- [Law97] W. Lawrenz. *CAN System Engineering : From theory to practical applications*. Springer-Verlag, 1997.
- [LD06] J.W. Lee and G.E. Dullerud. Uniform stabilization of discrete-time switched and markovian jump linear systems. *Automatica*, 42 :205–218, 2006.
- [LD07] J. W. Lee and G. E. Dullerud. Uniformly stabilizing sets of switching sequences for switched linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 52 :868–874, 2007.
- [Lee06] J.-W. Lee. On uniform stabilization of discrete-time linear parameter-varying control systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 51(10) :1714–1721, 2006.
- [Lib03] D. Liberzon. *Switching in Systems and Control*. Systems and Control : Foundations and Applications. Birkhäuser, 2003.
- [LLL09] J. Lunze and F. Lamnabhi-Lagarigue, editors. *Handbook of Hybrid Systems Control : Theory, Tools, Applications*. Cambridge, 2009.
- [LM99] D. Liberzon and A.S. Morse. Basic problems in stability and design of switched systems. *IEEE Control Systems Magazine*, 19 :59–70, 1999.
- [LR90] R. Luck and A. Ray. An observer-based compensator for distributed delays. *Automatica*, 26(5) :903–908, 1990.
- [LR95] P. Lancaster and L. Rodman. *Algebraic Riccati equations*. Oxford science publications, 1995.
- [MJDI08] J. Melin, M. Jungers, J. Daafouz, and C. Iung. Sur l’analyse de performance et l’approche SdH pour les systèmes commandés en réseau. In *Conférence Internationale Francophone en Automatique, (CIFA)*. Bucarest, Roumanie, September 2008.

-
- [MJDI09a] J. Melin, M. Jungers, J. Daafouz, and C. Iung. On analysis of performance for digitally controlled and time-varying delayed systems. In *European Control Conference (ECC'09)*, pages 4181–4186, Budapest, Hongrie, 2009.
 - [MJDI09b] J. Melin, M. Jungers, J. Daafouz, and C. Iung. On performance analysis of time delay systems using a switched system approach. In *3rd IFAC Conference on Analysis and Design of Hybrid Systems (ADHS)*, pages 192–197. Zaragoza, Spain, September 2009.
 - [MJDI10a] J. Melin, M. Jungers, J. Daafouz, and C. Iung. Analyse de performances et synthèse d'un contrôleur par retour de sortie dynamique pour les systèmes à commutation. In *Conférence Internationale Francophone en Automatique, (CIFA)*. Nancy, France, Juin 2010.
 - [MJDI10b] J. Melin, M. Jungers, J. Daafouz, and C. Iung. Performance analysis and design of dynamic output feedback control for switched systems. *International Journal of Control*, 84(2) :253–260, February 2010.
 - [MSD07] P. Mason, M. Sigalotti, and J. Daafouz. On stability analysis of linear discrete-time switched systems using quadratic Lyapunov functions. In *46th IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, pages 5629 – 5633, 2007.
 - [NBW98] J. Nilsson, B. Bernhardsson, and B. Wittenmark. Stochastic analysis and control of real-time control systems with random time delay. *Automatica*, 34(1) :57–64, 1998.
 - [NH05] P. Naghshtabrizi and J.P. Hespanha. Designing an observer-based controller for a network control system. In *Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 848–853, 2005.
 - [Nil98] J. Nilsson. *Real-time control systems with delays*. Department of Automatic Control, Lund Institute of Technology, Lund, Sweden, 1998.
 - [NVDD98] S.I. Niculescu, E.I. Verriest, L. Dugard, and J.M. Dion. *Stability and Control of Time-Delay Systems*, volume Lecture Notes in Control and Inform. Sci. 228, chapter Stability and Robust Stability of Time-Delay Systems : A Guided Tour, pages 1–71. Springer, 1998.
 - [OBG99] M.C. De Oliveira, J. Bernussou, and J.C. Geromel. A new discrete time robust stability condition. *System & Control Letters*, 36 :261–265, 1999.
 - [Pet87] I. R. Petersen. A stabilization algorithm for a class of uncertain linear systems. *Systems & Control Letters*, 8 :351–357, 1987.

- [PS00] B. Piccoli and H.J. Sussmann. Regular synthesis and sufficiency conditions for optimality. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 39 :359–410, 2000.
- [RD07] J.P. Richard and T. Divoux. *Systèmes commandés en réseau*. Hermès-Lavoisier, Paris, 2007.
- [RH88] A. Ray and Y. Halevi. Integrated communication and control systems : Part 2-design considerations. *Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, 110 :374–381, 1988.
- [Ric03] J.P. Richard. Time delay systems : An overview of some recent advances and open problems. *Automatica*, 39(1) :1667–1694, 2003.
- [RIK03] P. Riedinger, C. Iung, and F. Kratz. An optimal control approach for hybrid systems. *European Journal of Control*, 9 :444–458, 2003.
- [RJ00] A. Rantzer and M. Johansson. Piecewise linear quadratic optimal control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 45 :629–637, 2000.
- [Sal05] A. Sala. Computer control under time-varying sampling period : an LMI gridding approach. *Automatica*, 41(12) :2077–2082, 2005.
- [SB09] J. Skaf and S. Boyd. Analysis and synthesis of state-feedback controllers with timing jitter. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 54 :652–657, 2009.
- [Seu06] A. Seuret. *Commande et observation des systèmes à retards variables : théorie et applications*. PhD thesis, Ecole Centrale de Lille, France, 2006.
- [SG05] Z. Sun and S. S. Ge. Analysis and synthesis of switched linear control systems. *Automatica*, 41 :181–195, 2005.
- [SGC97] C. Scherer, P. Gahinet, and M. Chilali. Multiobjective output-feedback control via LMI optimization. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 42(7) :896–911, 1997.
- [SIG97] R.E. Skelton, T. Iwasaki, and K. Grigoriadis. *A unified algebraic approach to linear control design*. Taylor and Francis, 1997.
- [SK06] C.W. Scherer and I.E. Köse. Robust $\mathcal{H}_2$ estimation with dynamic ICQs : A convex solution. In *45th Conference on Decision and Control*, pages 4746–4751. San Diego, CA, USA, 2006.
- [SMRL07] A. Seuret, F. Michat, J.-P. Richard, and F. Lepage. *Systèmes commandés en réseau*, chapter Prise en compte des retards de réseau dans la conception de commande. Traités IC2, Information, Commande, Communication. Hermès-Lavoisier, Paris, Février 2007.
- [SR08] A. Seuret and J.P. Richard. Control of a remote system over network including delays and packet dropout. In *IFAC World Congress*, pages 6336–6341. Seoul, Korea, 2008.

-
- [SS01] P.J. Seiler and R. Sengupta. Analysis of communication losses in vehicle control problems. In *American Control Conference*, pages 1491–1496. Arlington, Virginia, USA, 2001.
- [SS05] P.J. Seiler and R. Sengupta. An $\mathcal{H}_\infty$ approach to networked control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 50(3) :356–364, 2005.
- [Sus00] H.J. Sussmann. *New theories of set-valued differentials and new versions of the maximum principle of optimal control theory*. Nonlinear Control in the Year 2000. Springer-Verlag, 2000.
- [SWM⁺07] R. Shorten, F. Wirth, O. Mason, K. Wulff, and C. King. Stability criteria for switched and hybrid systems. *SIAM Review*, 49(7) :545–592, 2007.
- [Tan96] A.S. Tanenbaum. *Computer Networks*. Prentice-Hall, 1996.
- [TB97] J. Tsitsiklis and V. Blondel. The Lyapunov exponent and joint spectral radius of pairs of matrices are hard – when not impossible – to compute and to approximate. *Mathematics of Control, Signals, and Systems*, 10 :31–40, 1997.
- [TNK05] A. Tzes, G. Nikolakopoulos, and I. Koutroulis. Development and experimental verification of a mobile client-centric networked controlled system. *European Journal of Control*, 11(3) :229–241, 2005.
- [TRN09] M. Tabbara, A. Rantzer, and D. Nesić. On controller and capacity allocation co-design for networked control systems. *Systems & Control Letters*, 58(9) :672–676, 2009.
- [TU07] M. Tai and K. Uchida. Gain scheduled output feedback of discrete-time networked control systems. In *16th IEEE International Conference on Control Applications*, pages 59–64. Singapore, 2007.
- [Wit05] E. Witrant. *Stabilisation des systèmes commandés par réseaux*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Grenoble, Grenoble, France, 2005.
- [WYB02] G. Walsh, H. Ye, and L. Bushnell. Stability analysis of network control systems. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 10(3) :438–446, 2002.
- [YHP04] D. Yue, Q.L. Han, and C. Peng. State-feedback controller design of networked control systems. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 40 :640–644, 2004.
- [YWC04] M. Yu, L. Wang, and T. Chu. An LMI approach to networked control system with data packet dropout and transmission delays. In *MTNS’04 Proceedings of Mathematical Theory Networks and Systems*. Louvain, Belgique, 2004.

- [YXTD04] Y. Yang, D. Xu, M. Tan, and X. Dai. Stochastic stability analysis and control of networked control systems with random varying long time-delays. In *Proceedings of the 5th World Congress on Intelligent Control and Automation*, pages 1391–1395. Hangzhou, China, 2004.
- [Zay01] J. Zaytoon. *Systèmes dynamiques hybrides*. Hermes Science Publications, Paris, 2001.
- [ZBP01] W. Zhang, M.S. Branicky, and S.M. Phillips. Stability of networked control systems. *IEEE Control Systems Magazine*, February 2001.
- [ZDG96] K. Zhou, J. Doyle, and K. Glover. *Robust and Optimal Control*. Prentice-Hall, 1996.
- [Zha01] G. Zhai. Quadratic stability of discrete-time switched systems via state and output feedback. In *Proceedings of the 40th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 2165–2166. Orlando, Florida, USA, 2001.
- [ZHV06] L. Zhang and D. Hristu-Varsakelis. Communication and control co-design for networked control systems. *Automatica*, 42(7) :953–958, 2006.
- [ZSCH05] L. Zhang, Y. Shi, T. Chen, and B. Huang. A new method for stabilization of networked control systems with random delays. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 50 :1177–1181, 2005.

Résumé

Titre : Synthèse de lois de commande pour les systèmes à commutation avec contraintes de performances.

Résumé : Les systèmes à commutations constituent un cas particulier des systèmes dynamiques hybrides. Ils sont composés d'une famille de systèmes et d'une loi de commutation qui détermine quel mode est activé à chaque instant. Ces systèmes représentent une large gamme de systèmes concrets. L'étude de la stabilité de ceux-ci a déjà été longuement abordée. Les travaux de cette thèse portent sur l'analyse de performance des systèmes à commutations linéaires en temps discret et sur la synthèse de différentes lois de commande pour ces systèmes en tenant compte de contraintes de performances. L'analyse de stabilité de ces systèmes a été étendue pour tenir compte de l'aspect performance qui a été modélisée par un critère quadratique. La valeur du critère dépendant des commutations, l'analyse porte sur le coût garanti des performances. Grâce à la résolution d'un problème d'optimisation sous des contraintes sous la forme d'inégalités matricielles linéaires, un majorant du coût garanti est déterminé. Une approche est proposée pour évaluer la qualité du majorant trouvé. Un deuxième point abordé est la conception de contrôleurs qui tiennent compte de l'aspect performance. Des méthodes de synthèse de différents contrôleurs (retour d'état, retour d'état reconstruit par observateur et retour de sortie dynamique) sont proposées dans ce cadre. Enfin, nos résultats ont été appliqués au cas des systèmes contrôlés en réseau.

Mots clés : Systèmes à commutation, LMI, analyse de performance, retour d'état, retour dynamique de sortie, systèmes contrôlés en réseau.

Abstract

Title : Control Laws Synthesis for Switched Systems with Constraints Performance.

Résumé : Switched systems are a specific case of dynamical hybrid systems. They are made up of a family of subsystems and of a switching law which defines the activated subsystem at each instant. These systems depict a wide range of real systems. Stability's study has been intensely studied. This Ph.D. thesis deals with performance analysis for discrete-time switched linear systems and synthesis of different control laws by taking into account performance constraints. Stability's analysis for these systems was spread in order to taking into account performance aspect, modeled by a quadratic criterion. As the value of the criterion depends on commutations, the analysis is done for the guaranteed cost of performances. By solving an optimization problem under constraints in the form of linear matrices inequalities, an upper bound of the guaranteed cost is found. An approach is proposed to certificate the upper bound. Another tackled point is the synthesis of controllers which take into account performance aspect. Methods of synthesis of different controllers (state feedback, state feedback based on observer and dynamic output feedback) are proposed. Last, our results are applied to networked controlled systems.

KeyWords : Switched Systems, LMI, Performance Analysis, State Feedback, Dynamic Output Feedback, Networked Controlled Systems.

AUTORISATION DE SOUTENANCE DE THESE
DU DOCTORAT DE L'INSTITUT NATIONAL
POLYTECHNIQUE DE LORRAINE

o0o

VU LES RAPPORTS ETABLIS PAR :

Monsieur Hervé GUEGUEN, Professeur, SUPELEC, CESSON-SEVIGNE

Madame Sophie TARBOURIECH, Directrice de Recherche, LAAS, TOULOUSE

Le Président de l'Institut National Polytechnique de Lorraine, autorise :

Madame MÉLIN Julie

à soutenir devant un jury de l'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE LORRAINE,
une thèse intitulée :

"Synthèse de lois de commande pour les systèmes à commutations avec contraintes de performances."

en vue de l'obtention du titre de :

DOCTEUR DE L'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE LORRAINE

en : « **Automatique, Traitement du Signal et des Images, Génie Informatique** »

Fait à Vandœuvre, le 12 mai 2011

Le Président de l'I.N.P.L.,

F. LAURENT

