



AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

Institut National Polytechnique de Lorraine
Ecole doctorale Ressources, Procédés, Produits, Environnement
Ecole Nationale Supérieure d'Electricité et de Mécanique
Laboratoire Environnement Minéralurgie UMR 7569 CNRS

THESE

Présentée en vue de l'obtention du grade de

Docteur de l'Institut National Polytechnique de Lorraine

Spécialité : Génie Electrique

Par

Clément LORIN
Ingénieur ENSEM

Théorie de la microgravité magnétique. Conception, dimensionnement et contrôle de dispositifs d'environnement microgravitationnel.

Soutenue publiquement le :
7 novembre 2008

Directeur de thèse
Pr. Alain MAILFERT

Président de jury :

Daniel BEYSENS, directeur de recherche CEA (Grenoble) et ESPCI (Paris)

Rapporteurs :

Jérôme DELAMARE, professeur INPG (Grenoble)

Jean FAUCHER, professeur INPT (Toulouse)

Examineurs:

Jean-Luc DUCHATEAU, directeur de recherche CEA (Cadarache)

Alain MAILFERT, professeur INPL (Nancy)

Ezio TODESCO, chef de section CERN (Genève)

Frédéric VILLIERAS, directeur de recherche CNRS (Nancy)

Remerciements :

Je tiens tout d'abord à remercier profondément mon directeur de thèse, Monsieur Alain Mailfert, pour m'avoir proposé un sujet passionnant. A la croisée des domaines du magnétisme et du spatial ce sujet m'a fait rêver durant trois années. Par son optimisme, son enthousiasme, Alain Mailfert a su me transmettre son engouement pour la recherche. Je tiens également à lui faire savoir que j'ai fortement apprécié nos randonnées en montagne. Je souhaite qu'il y en ait d'autres !

Mes remerciements vont également à Monsieur Daniel Beysens pour m'avoir fait l'honneur de présider mon jury et pour m'avoir donné de son précieux temps en acceptant de travailler avec moi. Je le remercie tout simplement de m'avoir fait confiance.

Je souhaite remercier Monsieur Denis Chatain de m'avoir inlassablement ouvert les portes du Service des Basses Températures du CEA-Grenoble afin que je puisse participer aux campagnes de manipulations. Je le remercie sincèrement pour la gentillesse qu'il a manifestée à mon égard durant ces trois années.

Je remercie Monsieur Jacques Yvon, directeur du Laboratoire Environnement Minéralurgie, de m'avoir accueilli au sein de cette institution.

Messieurs Jérôme Delamare et Jean Faucher ont accepté d'être les rapporteurs de ce mémoire de thèse et de faire partie de mon jury, je les en remercie.

Je remercie également Messieurs Jean-Luc Duchateau et Ezio Todesco qui ont accepté de juger mon travail en participant à mon jury de thèse. J'espère travailler un jour à leurs côtés.

Monsieur Frédéric Villiéras m'a aidé et encouragé au moment de ma soutenance de thèse dont il a accepté de faire partie du jury, je l'en remercie.

Je remercie mes parents, que cette thèse soit la concrétisation de leur éducation.

Pour leur assistance morale, leur comportement jovial, leur amitié, je remercie :

Félicie d'être ma grande soeur, Jérémy et Michaël pour ces vingt cinq dernières années, Thibaut pour le bab', Florent pour les sangliers, Julien L. pour l'informatique, Nicolas pour ses passes sur l'aile, Mélanie pour le chalet à Pelvoux, Ophélie pour son anglais, Julien D. pour la natation et canal+, Virginie pour son franc parlé, Julien H. pour le fromage, Damien pour ses vannes, Marc pour sa folie, Julie pour ses idées politiques, Adeline pour son rire, Camille A. pour sa vélocité pongistique, Thomas pour l'Ukraine, Sylvain pour mon légionnaire, Camille L. pour ses boutons, Sarah pour me remettre en question, Alexandre pour ses reprises de volée, Caroline pour sa bonne humeur, Guillaume pour le bab'...

J'exprime tout mon amour à Pauline pour avoir supporté mes sautes d'humeur fonction des aléas de la recherche, j'espère qu'elle sera encore à mes côtés quand l'heure de la retraite aura sonné...

Je remercie mon cousin Maxime d'être perpétuellement à mes côtés me permettant de surmonter toutes les épreuves.

Sommaire :

Chapitre I : Introduction..... 10

I-1) La micropesanteur	11
I-1.1) Quelles problématiques spatiales ?	11
I-1.1.1) En physique	11
I-1.1.2) En biologie	13
I-1.2) Quels moyens d'accès à la micropesanteur ?	13
I-1.3) Conclusion de la section I-1	14
I-2) Quelle lévitation magnétique ?.....	16
I-2.1) Lévitation par champs statiques	16
I-2.1.1) Matériaux magnétiques	16
I-2.1.2) Forces magnétiques	16
I-2.1.2.1) Stabilité.....	17
I-2.1.2.2) Lévitation paramagnétique et diamagnétique.....	17
I-2.1.2.3) Lévitation ferromagnétique	18
I-2.2) Conclusion de la section I-2	19
I-3) Les grandeurs fondamentales	20
I-3.1) La force magnétique.....	20
I-3.2) Le vecteur inhomogénéité	21
I-3.3) Le potentiel magnéto-gravitationnel	22
I-4) Problématique.....	23
Références bibliographiques :	25

Chapitre II : Outils théoriques et méthode..... 27

II-1) Le potentiel magnéto-gravitationnel Σ_L et son application à l'interprétation d'expériences	28
II-1.1) Définition	28
II-1.2) Expériences	29
II-1.2.1) Hydrogène.....	29
II-1.2.1.1) Longueur capillaire effective	30
II-1.2.1.2) Observations	31
II-1.3) Conclusion de la section II-1	38
II-2) Méthode générale d'analyse harmonique des champs de forces	39
II-2.1) Impossibilité de décomposition harmonique du vecteur G.....	39
II-2.2) Méthode générale.....	40
II-2.2.1) Expression de G fonction des harmoniques du champ magnétique.....	40
II-2.2.2) Conditions d'homogénéité	41
II-2.3) Conclusion de la section II-2	43
Références bibliographiques :	44

Chapitre III : Géométrie cylindrique..... 45

III-1) Electro-aimant « classique ».....	48
III-1.1) Analyse théorique	48
III-1.1.1) Etude analytique de la forme des pôles	50
III-1.1.2) Cas $n=3/2$	51
III-1.1.3) Saturation.....	52
III-1.1.4) Influence du circuit magnétique	53
III-1.2) Simulation.....	55
III-1.2.1) Cas 1	55
III-1.2.2) Cas 2	57
III-1.2.3) Re-dimensionnement zone de travail	58
III-1.3) Conclusion de la section III-1	59
III-2) Méthode harmonique en géométrie cylindrique	60

III-2.1) Définition de la géométrie	60
III-2.2) Détermination de la forme générale du vecteur G	60
III-2.3) Détermination de G pour trois familles d'harmoniques	63
III-2.3.1) Mise en équation des trois conditions d'homogénéité.....	63
III-2.3.1.1) Première famille de solutions	63
III-2.3.1.2) Deuxième famille de solutions	63
III-2.3.1.3) Troisième famille de solutions	64
III-2.3.2) Calcul des harmoniques, de G et de Σ_L pour chaque famille	64
III-2.3.2.1) Première famille de solutions – cas circulaire	64
III-2.3.2.2) Deuxième famille de solutions – cas horizontal	67
III-2.3.2.3) Troisième famille de solutions – cas « vertical »	68
III-2.4) Détermination de la nappe de courant	70
III-2.4.1) Densité surfacique ($A.m^{-1}$)	70
III-2.4.2) Densité volumique ($A.m^{-2}$)	70
III-2.5) Visualisation des résultats par simulation numérique	72
III-2.5.1) Choix des paramètres de simulation	72
III-2.5.2) Simulations cas horizontal et vertical et troncature à 3 harmoniques	72
III-2.5.3) Simulations cas circulaire et invariance par déphasage α des harmoniques.....	74
III-2.5.3.1) Cas circulaire	74
III-2.5.3.2) Invariance : vecteur homogénéité fixe et lignes de champ tournantes	75
III-2.5.3.3) Deux premiers harmoniques du champ fixes, ϵ tournant	76
III-2.5.3.4) Conclusion	78
III-2.6) Lévitatie de l'oxygène et de l'hydrogène par les technologies actuelles	79
III-2.6.1) Relations théoriques entre les différentes grandeurs	79
III-2.6.2) Applications numériques	80
III-2.6.2.1) Multipôles J-PARC.....	80
III-2.6.2.2) Dispositifs dérivés des dipôles LHC	81
III-2.7) Conclusion de la section III-2.....	83
III-3) Compensation magnétique et force centrifuge	85
III-3.1) Positionnement du problème	85
III-3.1.1) Géométrie	85
III-3.1.2) Force centrifuge	86
III-3.2) Force magnétique engendrée par un champ quadrupolaire, et force centrifuge en apesanteur	86
III-3.3) Force magnétique permettant de simuler sur terre une force centrifuge existant en apesanteur sur des matériaux paramagnétiques.....	87
III-3.3.1) Expressions de G et de ϵ	88
III-3.3.2) Relation entre champ magnétique et fréquence de rotation.....	89
III-3.3.3) Décalage du centre de la rotation simulée	92
III-3.3.3.1) Forme de $\epsilon_{\text{equi}}\Sigma_L$	92
III-3.3.3.2) Forme du vecteur inhomogénéité ϵ	93
III-3.3.3.3) Simulations de rotation	94
III-3.3.3.4) Applications numériques	95
III-3.4) Association de forces magnétique et centrifuge permettant d'obtenir sur la terre la compensation parfaite de la pesanteur pour les corps diamagnétiques	95
III-3.4.1) Compensation exacte de pesanteur sur matériaux diamagnétiques.....	95
III-3.4.2) Simulation, au sol, de rotation, en apesanteur, sur les matériaux diamagnétiques	97

III-3.5) Conclusion de la section III-3	97
III-4) Conclusion du chapitre III	99
Références bibliographiques :	101

Chapitre IV : Géométrie axisymétrique

102

IV-1) Méthode harmonique en géométrie sphérique axisymétrique.....	105
IV-1.1) Définition de la géométrie	105
IV-1.2) Détermination de la forme générale du vecteur G	105
IV-1.3) Détermination de trois (plus une) familles d'harmoniques	107
IV-1.3.1) Mise en équation des trois (plus une) conditions d'homogénéité	108
IV-1.3.1.1) Cas « vertical »	108
IV-1.3.1.2) Cas « horizontal ».....	108
IV-1.3.1.3) Cas « sphérique »	108
IV-1.3.2) Résolution des systèmes d'équations, et obtention des familles d'harmoniques	109
IV-1.3.2.1) Cas « vertical »	109
IV-1.3.2.2) Cas « horizontal ».....	110
IV-1.3.2.3) Cas « sphérique »	110
IV-1.3.2.4) Cas elliptique	111
IV-1.4) Détermination de la nappe de courant	112
IV-1.4.1) Densité surfacique de courant	112
IV-1.4.2) Densité volumique.....	112
IV-1.5) Visualisation des résultats par simulation numérique	114
IV-1.5.1) Simulation avec 3 harmoniques des différentes configurations de lévitation	114
IV-1.5.2) Validation de la troncature à 3 harmoniques	115
IV-1.6) Conclusion de la section IV-1	117
IV-2) Inserts	118
IV-2.1) Généralités sur les inserts	118
IV-2.1.1) Quels matériaux ?	118
IV-2.1.2) Modélisation des inserts	118
IV-2.1.3) Insert pour la lévitation.....	119
IV-2.2) Solénoïde 10T avec insert	120
IV-2.2.1) Hydrogène	120
IV-2.2.2) Eau	122
IV-2.2.3) Hélium	123
IV-2.3) Conclusion de la section IV-2	125
IV-3) Dimensionnement d'une station de lévitation : application à l'oxygène	126

IV-3.1) Contraintes et méthode	126
IV-3.2) Large Oxygen Levitation Apparatus (LOLA)	127
IV-3.2.1) Premier bobinage : « B_1 »	127
IV-3.2.2) Second bobinage : « G_1 »	129
IV-3.2.3) Troisième bobinage : Σ_L	130
IV-3.2.4) Présentation de la station	131
IV-3.2.5) Résultats numériques	134
IV-3.2.5.1) Variation spatiale de l'accélération	134
IV-3.2.5.2) Variation temporelle de l'accélération	136
IV-3.2.6) Précision de positionnement	138
IV-3.2.6.1) Méthode	138
IV-3.2.6.2) Impact sur la décomposition harmonique	139
IV-3.2.6.3) Impact sur la zone à 1%	139
IV-3.3) Station de lévitation d'oxygène plus performante	140
IV-3.3.1) Premier bobinage : « B_1 »	140
IV-3.3.2) Second bobinage : « G_1 »	141
IV-3.3.3) Troisième bobinage : « Σ_L »	142
IV-3.3.4) Présentation de la station	143
IV-3.3.5) Variation spatiale de l'accélération	145
IV-3.4) Conclusion et perspectives de la section IV-3	148
IV-4) Conclusion du chapitre IV	150
Références bibliographiques :	151

Chapitre V : Compensation magnétique dynamique

V-1) Compensation magnétique transitoire : OLGA	154
V-1.1) Interaction mutuelle	154
V-1.2) Dimensionnement d'une alimentation spécifique	157
V-1.3) Qualification de l'alimentation Bouhnik	160
V-1.4) Evolution de la gravité résiduelle	161
V-1.5) Impact des mandrins et de la cellule	163
V-1.5.1) Mandrins	164
V-1.5.2) Cellule	165
V-1.5.2.1) En cuivre	166
V-1.5.2.2) En saphir	167
V-1.5.2.3) En inox	167
V-1.6) Conclusion de la section V-1	168
V-2) Transitoire avec décomposition harmonique	169

V-2.1) Deux harmoniques : géométrie cylindrique.....	169
V-2.1.1) Variation de A_1 ou A_2 et évolution de la zone de compensation exacte	169
V-2.1.1.1) Modification de l'harmonique A_1	170
V-2.1.1.2) Modification de l'harmonique A_2	170
V-2.1.2) Variation de A_1 ou A_2 et évolution de la zone de compensation variable	171
V-2.1.2.1) Modification de l'harmonique A_1	171
V-2.1.2.2) Modification de l'harmonique A_2	172
V-2.2) Deux harmoniques : géométrie axisymétrique	173
V-2.2.1) Variation de C_1 ou C_2 et évolution de la zone de compensation exacte	173
V-2.2.1.1) Modification de l'harmonique C_1	173
V-2.2.1.2) Modification de l'harmonique C_2	174
V-2.2.2) Variation de C_1 ou C_2 et évolution de la zone de compensation variable	175
V-2.2.2.1) Modification de l'harmonique C_1	175
V-2.2.2.2) Modification de l'harmonique C_2	176
V-2.2.2.3) Modification simultanée des 2 harmoniques	176
V-2.3) Conclusion de la section V-2	177
Références bibliographiques :	178

Conclusion et perspectives 180

Annexes 186

Annexe A : Oxygène diphasique proche du point critique et interprétation de l'interface en terme d'équipotentiels magnéto-gravitationnelles $\text{équi}\Sigma_L$ au sein de OLGA	188
Annexe B : Expression du gradient à l'intérieur d'un sphéroïde (ellipsoïde de révolution) allongé en fonction des harmoniques sphéroïdaux.....	193
Annexe C : Problème de conception et modification de la décomposition harmonique	200
Annexe D : Effets des problèmes de conception sur la taille de la zone de lévitation à 1%..	202
Annexe E : Décomposition du sous-ensemble créant le champ dipolaire	207
Annexe F : Dimensionnement du sous-ensemble créant le champ quadrupolaire.....	213
Annexe G : Décomposition harmonique d'un solénoïde à section rectangulaire suivant un point de son axe de symétrie.	220
Annexe H : Dimensionnement du sous-ensemble créant le champ hexapolaire.....	230
Annexe I : Théorèmes en géométrie cylindrique	237

Nomenclature..... 268

Bibliographie Personnelle..... 274

Chapitre I : Introduction

Sommaire

I-1) La micropesanteur	11
I-1.1) Quelles problématiques spatiales ?	11
I-1.1.1) En physique	11
I-1.1.2) En biologie	13
I-1.2) Quels moyens d'accès à la micropesanteur ?	13
I-1.3) Conclusion de la section I-1	14
I-2) Quelle lévitation magnétique ?	16
I-2.1) Lévitation par champs statiques	16
I-2.1.1) Matériaux magnétiques	16
I-2.1.2) Forces magnétiques	16
I-2.1.2.1) Stabilité.....	17
I-2.1.2.2) Lévitation paramagnétique et diamagnétique.....	17
I-2.1.2.3) Lévitation ferromagnétique	18
I-2.2) Conclusion de la section I-2	19
I-3) Les grandeurs fondamentales	20
I-3.1) La force magnétique	20
I-3.2) Le vecteur inhomogénéité	21
I-3.3) Le potentiel magnéto-gravitationnel	22
I-4) Problématique.....	23
Références bibliographiques :	25

Le terme de microgravité s'emploie en principe seulement lorsque la résultante des forces uniquement gravitationnelles auxquelles est soumis un corps est très faible par rapport à la pesanteur à la surface de la Terre. En raison de l'existence de différents corps célestes, la microgravité ne peut exister qu'en certaines régions de l'espace. Le terme de micropesanteur est utilisé par ailleurs lorsque la résultante de l'ensemble des forces d'origines gravitationnelle et inertielle, auxquelles est soumis un corps, est très faible par rapport à la pesanteur à la surface de la Terre [ARR1]. La micropesanteur se rencontre par exemple dans un satellite en orbite autour d'une planète. Dans cet ouvrage, la définition de microgravité sera galvaudée et le sens du terme de micropesanteur sera prêté à celui de microgravité. Nous préciserons plus loin (p.16) l'utilisation du terme de lévitation.

I-1) La micropesanteur

Expérimenter en micropesanteur revient en quelque sorte à pénétrer dans un monde étrange où les phénomènes physiques habituellement rencontrés sur Terre semblent s'être totalement déréglés. Nombre de phénomènes sont complètement modifiés voire annihilés par l'absence de gravité faisant apparaître des mécanismes initialement sous-jacents et imperceptibles. Sans faire une liste exhaustive de tous les phénomènes transformés par l'absence de pesanteur, quelques-uns vont être présentés ci-dessous.

I-1.1) Quelles problématiques spatiales ?

I-1.1.1) En physique

En apesanteur, le comportement des fluides en présence d'un gradient de température change puisque le transport de chaleur par mouvement convectif disparaît. A l'approche des conditions de micropesanteur la taille des bulles, dans un fluide en ébullition, augmente considérablement à cause de la prédominance de la tension de surface par rapport à l'accélération (Fig. 1). La vitesse ascendante des bulles est ralentie et leur détachement de la paroi est de moins en moins fréquent. Il en résulte une ébullition sous forme de film. En effet, le détachement des bulles de grandes dimensions du plan chauffant ne s'effectuant plus, ce dernier est isolé de la phase liquide par un film de vapeur : c'est la crise d'ébullition, qui se produit pour des flux thermiques plus faibles que sur Terre. Il est important de comprendre les transferts de masse et de chaleur associés à ce comportement.

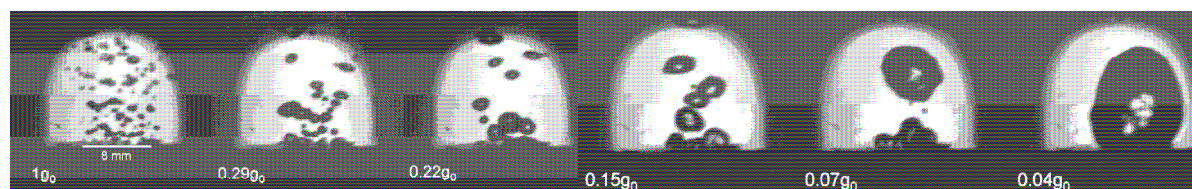


FIG. 1. Illustration de la diminution de gravité sur la taille des bulles (gravité terrestre= g_0). Résultats obtenus par compensation magnétique de la pesanteur par le Service des Basses Températures du CEA au sein de la station OLGA avec de l'oxygène diphasique [PIC1].

Comme autre exemple, la combustion, lieu de gradients thermiques élevés, est gouvernée sous gravité terrestre par les phénomènes conductifs et convectifs. Il suffit d'observer la silhouette effilée d'une flamme de bougie sur Terre (Fig. 2a). Par contre, en microgravité, les transferts radiatifs deviennent prédominants, la forme d'une flamme en est complètement modifiée et devient quasiment sphérique (Fig. 2b). Mais si le combustible à la forme d'une plaque plane,

la flamme aura tendance à s'allonger le long de celle-ci en condition de micropesanteur. Il convient aussi de bien caractériser les suies dont le rôle radiatif est considérable.

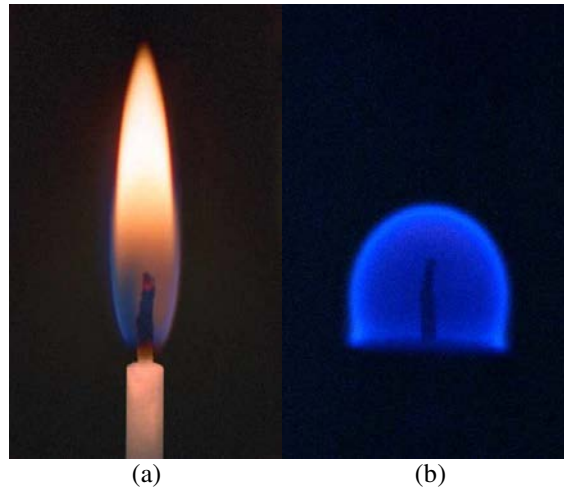


FIG. 2. Forme d'une flamme (a) sur Terre et (b) en apesanteur dans la navette spatiale Columbia [NAS1]

La combustion des brouillards a montré en microgravité des phénomènes remarquables de propagation par pulsations (Fig. 3).

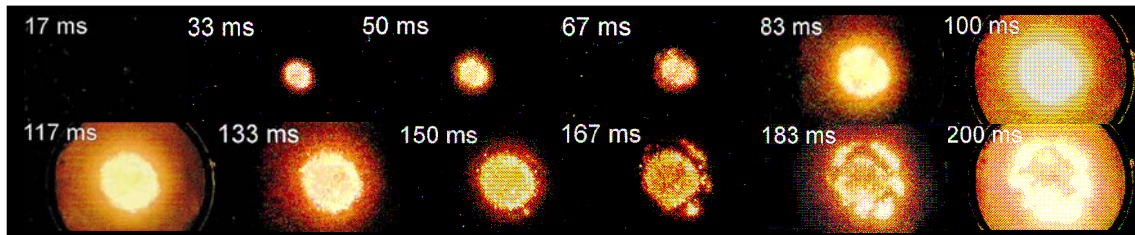


FIG. 3. Propagation pulsatoire, en microgravité, de la combustion d'un brouillard de polyméthylméthacrylate réalisée dans la tour à chute libre de 500m du Japan Microgravity Center à Hokkaido [HAN1]

Dans les émulsions, par exemple de type eau dans huile, la coalescence des gouttes d'eau est principalement due, sur Terre, au phénomène de sédimentation. En absence de pesanteur ces émulsions gagnent en stabilité. Mais une coalescence ralentie des gouttes existe toujours. Elle est due à d'autres mécanismes, éclipsés sur Terre par cette sédimentation. L'absence de pesanteur met à jour des phénomènes habituellement cachés par ceux produits par la gravité. Un autre exemple de phénomènes cachés est celui de l'effet piston [ZAP1]. A l'approche du point critique certaines grandeurs s'évanouissent, tel que la diffusivité thermique, et d'autres divergent, comme le coefficient de compressibilité. Ainsi un fluide critique, contenu dans une cellule en condition d'apesanteur et chauffé par une paroi, se dilate fortement au niveau de celle-ci, dans la couche limite thermique au contact de la paroi. Une onde de pression se propage alors au sein de la cellule induisant une compression adiabatique de la totalité du fluide, qui après un temps caractéristique de relaxation "court", aura chauffé l'ensemble du fluide. La diffusivité thermique étant quasi-nulle et la convection inexistante, on aurait pu s'attendre à une élévation très "lente" de la température du fluide. Ce phénomène est totalement escamoté sur Terre par une violente convection due à la divergence du coefficient de dilatation isochore pour les fluides critiques.

I-1.1.2) En biologie

Les problèmes de compréhension du comportement de la matière en absence de pesanteur impliquent des difficultés encore plus grandes quant à la maîtrise du comportement du vivant dans ces mêmes conditions puisque le vivant est le siège de multiples phénomènes physiques ou physico-chimiques. Dans le domaine des sciences de la vie [APP1], les expérimentations, en micropesanteur, doivent apporter des connaissances sur la biologie gravitationnelle. Celle-ci concerne l'étude des systèmes végétaux, en particulier la transduction et traduction du signal gravitropique et ainsi la morphogenèse végétale en microgravité. Les modifications ou non des mécanismes physiologiques sont également un sujet préoccupant, dans le développement prénatal et postnatal, au niveau du système sensorimoteur et des fonctions cognitives, sur l'altération des tissus osseux et musculaire, ou bien encore à propos des systèmes cardio-vasculaire et pulmonaire [ZAP2].

I-1.2) Quels moyens d'accès à la micropesanteur ?

A l'heure actuelle, divers moyens existent en recherche spatiale pour réaliser des expériences en microgravité. Les différentes plates-formes, en service, offrant un accès aux conditions de micropesanteur sont principalement dédiées aux expériences s'intégrant dans un contexte de mission interplanétaire. Ces plates-formes comprennent les stations orbitales comme actuellement la station spatiale internationale ISS (Fig. 4), ou par le passé la station Mir (Fig.5) et, avant celle-ci, Skylab (Fig. 6). Les conditions de micropesanteur y sont extrêmement intéressantes en terme de temps et d'accélérations résultantes ($10^{-4}g$ à $10^{-6}g$ selon le type de vol). Mais l'accès y est restreint et le coût des missions très élevé.



FIG. 4. Station Spatiale Internationale (ISS)



FIG. 5. MIR (Paix en russe)



FIG. 6. Skylab

Il existe également des fusées sondes permettant des temps d'expérimentation de l'ordre de la quinzaine de minutes telles que les fusées MAXUS (Fig. 7) ou les navettes spatiales avec une accélération résiduelle d'environ $10^{-4}g$. Les campagnes de vol sont rares et le prix également élevé ; la figure 2 a été réalisée durant ce type de vol. Les tours à chute libre peu nombreuses permettent certaines expérimentations rapide, par exemple pour la combustion (Fig. 3), mais n'offre pas des temps de microgravité suffisamment long, seulement quelques secondes, pour nombre d'expérimentations. Les vols paraboliques en avion (KC 135, A300 ou II-76 respectivement sur les figures 8, 9 et 10) permettent aussi un accès à la micropesanteur avec des temps de microgravité d'environ 25s avec une accélération résiduelle de l'ordre de $10^{-2}g$.



FIG. 7. Fusée sonde : MAXUS I



FIG. 8. KC-135 zéro-G (Boeing 707)

I-1.3) Conclusion de la section I-1

L'énumération faite ne constitue pas une liste exhaustive des problématiques spatiales liées à la microgravité, mais elle révèle l'étendue des recherches relatives à ce domaine. On voit que la demande scientifique, pour accéder aux plates-formes de mise en condition de micropesanteur, est largement supérieure aux capacités d'accueil de celles-ci. Le coût des campagnes de vols de fusées sondes est important, l'accès à la station spatiale internationale

également limité et très coûteux. Les tours à chute libre ne permettent pas des temps d'expérimentations suffisamment long, ce qui est également le cas des vols paraboliques. C'est dans ce contexte d'accès à l'espace ou tout du moins aux conditions de microgravité que notre étude vient se positionner. La lévitation par champ magnétique apparue comme une curiosité scientifique [BEA1][BER1] a ouvert la voie aux études biologiques ou physiques en apesanteur [CHA1][WUN1]. Elle ne remplace pas les plates formes existantes. Elle complète cet éventail grâce à ses atouts tels qu'un temps d'expérimentation quasi illimité, des contraintes en termes de sécurité et d'accès aux conditions de micropesanteur faibles et un coût de fonctionnement peu élevé. Son utilisation semble parfaitement adaptée aux expériences de microgravité sur les fluides cryogéniques dans des conditions normales ou critiques, dont un exemple est montré figure 1.



FIG. 9. Airbus zéro-G (A300)



FIG. 10. Ilyushin-76 MDK zéro-G (II-76)

I-2) Quelle lévitation magnétique ?

Il existe différents types de lévitations par champs magnétiques, c'est à dire que différents phénomènes physiques peuvent conduire à la lévitation d'objets, tous ne conduisant pas à des conditions de micropesanteur. Aussi, nous présentons uniquement la lévitation magnétique par champs statiques permettant de simuler des conditions locales de micropesanteur, c'est à dire dont la force magnétique compense pour chaque molécule la force gravitationnelle. La lévitation électrodynamique par courants de Foucault, utilisée par exemple pour certains transports ferroviaires [DON], ne permet qu'une compensation globale et non locale de la pesanteur, certains préféreront parler de sustentation. Nous n'aborderons pas cette technique peu adaptée à l'objectif de simulation d'apesanteur. De même nous ne parlerons pas de la lévitation des supraconducteurs, qui n'existent pas à l'état fluide.

I-2.1) Lévitation par champs statiques

La compréhension de ce type de lévitation passe par la connaissance phénoménologique des matériaux magnétiques, car les comportements variés des matériaux soumis à un champ magnétique produisent des effets totalement différents. Nous allons succinctement décrire trois des principaux types de matériaux magnétiques que sont les diamagnétiques, les paramagnétiques et les ferromagnétiques. Il existe d'autres phénomènes comme l'hélimagnétisme, l'antiferromagnétisme, le ferrimagnétisme... se rapprochant du ferromagnétisme car résultant d'effets collectifs des moments magnétiques [TRE1].

I-2.1.1) Matériaux magnétiques

-Le diamagnétisme caractérise des matériaux ou molécules dont les atomes ne sont pas porteurs de moment magnétiques permanent. L'aimantation induite par application d'un champ magnétique est très faible et opposée à celui-ci. Ces matériaux sont « repoussés » par les champs magnétiques forts.

-Le paramagnétisme caractérise des matériaux possédant des atomes ou molécules avec des moments magnétiques n'interagissant pas entre eux. Lorsqu'un champ magnétique est appliqué, une aimantation apparaît de même sens que ce dernier. Ces matériaux sont « attirés » par les champs magnétiques forts.

-Le ferromagnétisme décrit les matériaux possédant des atomes avec des moments magnétiques interagissant entre eux, ainsi une aimantation existe spontanément en deçà d'une certaine température dite de Curie. Cependant le matériau de taille suffisante est divisé en domaines de Weiss. Chaque domaine a une aimantation globale, mais d'un domaine à l'autre l'aimantation varie. Ainsi d'un point de vue macroscopique le matériau peut paraître désaimanté. Ce type de matériau, soumis à un champ magnétique, acquiert une aimantation macroscopique, car les domaines de Weiss s'alignent avec le champ. En fait les parois se déplacent pour ne laisser place, en champ fort, qu'à un seul domaine aimanté dans le même sens que le champ auquel il est soumis. Ces matériaux sont fortement attirés par les champs magnétiques.

I-2.1.2) Forces magnétiques

Avant de poursuivre il faut préciser que la force magnétique engendrée s'applique directement sur chacun des atomes ou chacune des molécules du matériau soumis au champ magnétique. Pour atteindre les conditions de micropesanteur il faut que la force magnétique s'oppose à la force de gravité. L'équilibre entre force magnétique et de pesanteur s'effectue en chaque point du matériau. Cet équilibre peut être considéré comme local aux échelles où le matériau est considéré comme continu.

Les fortes valeurs de champ vont attirer les para- et ferro-magnétiques alors qu'elles vont repousser les diamagnétiques. Cette remarque amène à se poser la question de la stabilité de la lévitation par champ magnétique statique en fonction des matériaux considérés.

I-2.1.2.1) Stabilité

La première personne ayant étudié ces problèmes de stabilité est Samuel Earnshaw au milieu du XIX^{ème} siècle. En réalité, il travaillait à l'époque sur l'interaction des forces agissant au sein d'un système de particules « détachées » représentant « l'éther luminifère ». L'objectif était de montrer sous quelles conditions ces particules restent uniformément dispersées et peuvent vibrer de manière isotrope pour propager la lumière. Mais en introduction de son papier [EAR1], qu'il aurait pu, selon ses propos, appeler *"An investigation of the Nature of the Molecular Forces, which regulate the Internal Constitution of Bodies"*, il précise que son étude ne se restreint pas uniquement à la constitution de l'éther mais s'étend à tous les corps puisque sa démarche analytique ne tient compte d'aucune particularité de l'éther. *"For, in this attempt to discover the laws of molecular action of the ether, amongst the experimental properties, assumed as the basis of analytical investigation, are, I believe, none which are peculiar to the luminiferous ether."* Ces travaux ont lieu dans la période pré-relativiste une trentaine d'années avant les travaux en 1873 de James Clerk Maxwell et avant la découverte par Joseph John Thomson de l'électron (*"corpuscule"* comme il le nomme lui même) en 1897 [THO1]. Le travail de S. Earnshaw est devenu célèbre grâce à J.C. Maxwell qui le cite dans son traité sur l'électricité et le magnétisme [MAX1], *"Earnshaw's Theorem. An electrified body placed in a field of electric force cannot be in stable equilibrium"* [BAS1]. Effectivement, Samuel Earnshaw montre que pour une distribution fixée de particules chargées aucune position stable ne peut être trouvée pour une autre particule, si les forces d'interactions entre celles-ci sont inversement proportionnelles au carré de la distance. C'est à dire qu'aucune combinaison de forces électrique, magnétique et gravitationnelle statiques ne peut fournir à une particule chargée une position d'équilibre stable. En tout point où la combinaison des forces est nulle, le potentiel ne peut être qu'à un maximum. De ce théorème découle l'impossibilité d'effectuer avec des matériaux para- et ferro-magnétique de la lévitation stable. Ce résultat ne s'applique pas aux matériaux diamagnétiques.

I-2.1.2.2) Lévitation paramagnétique et diamagnétique

On ne considère pas dans ce paragraphe la lévitation des supraconducteurs, dont certains (1^{ère} espèce), sous certaines conditions de température et de champ, sont considérés comme des diamagnétiques parfaits de susceptibilité magnétique $\chi_m = -1$. Le paragraphe suivant fait état de l'évolution de la lévitation para- et dia-magnétique pour les matériaux à l'état normal.

La première expérience de lévitation sur des matériaux faiblement magnétiques est réalisée par Werner Braunbeck en 1939. Il accomplit la lévitation de petits morceaux de graphite (carbone pyrolytique) et de bismuth à l'intérieur d'un électroaimant [BRA1]. Puis cette expérience est de nouveau réalisée par Boerdjik en 1956 simplement à l'aide d'aimants

classiques [BOE1]. Les matériaux lévités sont les plus forts diamagnétiques existants hors matériaux supraconducteurs. Il faut ensuite attendre 1991, pour que Beaugnon et Tournier lévitent d'autres matériaux [BEA1]. Les matériaux sont placés à l'intérieur d'un électroaimant solénoïdale hybride (supraconducteur/résistif) dans une cellule cylindrique de 5 cm de diamètre à la température ambiante. Le solénoïde utilisé délivrant jusqu'à 28T est celui appartenant au Laboratoire des Champs Magnétiques Intenses de Grenoble. Ainsi à l'aide de ce dispositif, des matériaux tels que l'antimoine, le bois, le plastique, l'éthanol, l'acétone et surtout l'eau ont été mis en état de micropesanteur magnétique. Cette expérience a réellement ouvert la voie de la lévitation magnétique. Depuis, le nombre d'expériences dans ce domaine s'est considérablement accru. Une troisième expérience, celle de Berry et Geim en 1997, a marqué l'évolution de la lévitation magnétique. Au moyen d'une bobine de Bitter générant un champ de plus de 16T, ils réalisent la lévitation magnétique du premier être vivant, une grenouille [BER1].

Par la suite, la technique de lévitation par champs magnétiques a été appliquée à l'étude de plusieurs phénomènes en conditions d'apesanteur, par exemple la cristallisation d'eau avec phénomène de surfusion jusqu'à -10°C [MOT1][TAG1]. Elle a également été utilisée pour la solidification de verre [KIT1] ou de plastique [TAK1]. Elle est souvent utilisée dans le domaine de la croissance cristalline pour s'affranchir des problèmes liés à la pesanteur. Différents matériaux ont été cristallisés sous conditions d'apesanteur magnétique, tel que le chlorure d'ammonium [MOT2][HAM1] ou le lysozyme [MAK1] que l'on trouve dans le blanc d'œuf. Mais la microgravité magnétique a surtout permis de simuler et comprendre le comportement en apesanteur de fluides utilisés dans l'espace comme propergols. Par exemple, l'effet de vibrations à hautes fréquences sur la cinétique de transition de phase de l'hydrogène liquide près de son point critique a été étudié en micropesanteur magnétique [BEY1][CHA1], ou bien simplement le comportement de l'hydrogène liquide près de son point critique [WUN1]. Le comportement thermique de l'oxygène liquide/gaz en condition de micropesanteur magnétique a été observé, et la crise d'ébullition a même pu être simulée sur Terre [PIC1]. La lévitation magnétique d'hélium superfluide à 1,5K a également été accomplie, et également l'étude au sol de la cinétique de coalescence des bulles en micropesanteur [WEI1][WEI2]. Des travaux originaux ont été opérés sur la conception de lévitateurs magnétiques afin de réaliser des cibles de deutérium-tritium parfaitement sphériques pour la fusion par confinement inertiel [CHA2][QUE1]. La convection thermique « naturelle » dans ces fluides étant un phénomène dû à la pesanteur, la compensation de pesanteur partielle ou totale permet aussi de modifier voire contrôler la convection [BRA2][KHA1][QUE2]. Il faut ajouter à tous ces travaux expérimentaux d'autres plus théoriques portant sur la conception de dispositifs dédiés à la lévitation magnétique [KIY1][BIR1][OZA1], ou sur la compréhension et la connaissance théorique de la force magnétique elle-même [QUE3][GEI1].

L'utilisation de champs magnétiques a par ailleurs permis de réaliser la flottation dans un liquide paramagnétique de matériaux tels que l'or, le platine ou le diamant [CAT1][CAT2][MUR1][DUN1]. La lévitation de l'eau a ainsi pu être réalisée dans une atmosphère pressurisée en air ou oxygène à l'aide d'un solénoïde ne produisant pas plus de 10T [IKE1]. Mais dans ces expériences la lévitation n'est pas locale, car, à la force magnétique volumique vient s'ajouter à la surface du matériau lévité une force qui est le pendant magnétique de la poussée d'Archimède pour la gravité. Cette partie montre l'étendue des domaines pour lesquels la lévitation magnétique permet un accès aux conditions de micropesanteur et donc tout l'intérêt de continuer à travailler sur celle-ci.

I-2.1.2.3) Lévitation ferromagnétique

Certaines technologies à l'heure actuelle utilisent ce principe de lévitation avec des matériaux ferromagnétiques en lui donnant un caractère stable grâce à des boucles de régulations du champ magnétique. Un exemple est le train allemand Transrapid développé par les firmes Siemens et Thyssenkrupp. Ce train circule à Shangaï depuis le 1^{er} janvier 2004, où il relie la gare à l'aéroport en atteignant une vitesse commerciale de pointe de 431km/h. Bien sûr la lévitation sur l'ensemble du train s'effectue de manière globale et non locale : les voyageurs restent soumis à leur propre poids, compensé par la force de réaction du plancher du wagon en lévitation !

I-2.2) Conclusion de la section I-2

Il existe différentes sortes de lévitations magnétiques. La lévitation statique produite par une force volumique permet de simuler l'apesanteur en tout point du matériau. La lévitation électrodynamique qui n'est pas réalisée à l'aide d'une force volumique, mais avec une force appliquée en surface sur la profondeur de pénétration du champ magnétique dans le matériau, ne peut permettre en aucun cas de simuler la microgravité en tout point d'un matériau. Les problèmes de stabilité intrinsèques à la nature des matériaux et la lévitation ferromagnétique ne sont pas traités dans cet ouvrage où le fluide à léviter est toujours contenu dans une cellule close. Notre travail de thèse englobe l'ensemble de la lévitation para- et dia-magnétique car il repose en grande partie sur l'étude de la force magnétique qui s'exerce sur les matériaux fluides. Les applications faites de ces études concernent plus particulièrement les fluides cryogéniques que sont l'oxygène et l'hydrogène diphasiques.

I-3) Les grandeurs fondamentales

I-3.1) La force magnétique

La densité de force magnétique (N.m^{-3}) interne aux matériaux linéaires paramagnétiques et diamagnétiques s'exprime sous la forme :

$$\frac{\overrightarrow{df}}{dV} = \overrightarrow{\text{grad}} \left(N \frac{d\mu}{dN} \frac{H_0^2}{2} \right) \quad (\text{I-1})$$

où N est le nombre de molécules par unité de volume, μ la perméabilité du matériau linéaire (H.m^{-1}) et $\mathbf{H}_0$ le champ local (A.m^{-1}). La variation de perméabilité par nombre de molécules, $\frac{d\mu}{dN}$, est égale à la variation de susceptibilité par nombre de molécules, $\frac{d\chi_m}{dN}$, à la susceptibilité du vide près μ_0 . De plus la susceptibilité χ_m varie linéairement avec le nombre de molécules par unité de volume pour les matériaux considérés et pour des champs magnétiques « suffisamment faibles ». Ainsi l'expression de la densité de force vaut :

$$\frac{\overrightarrow{df}}{dV} = \frac{1}{2} \mu_0 \chi_m \overrightarrow{\text{grad}}(H_0^2) \quad (\text{I-2})$$

Il faut faire l'hypothèse que $\overrightarrow{\text{grad}}(H_0^2) = \overrightarrow{\text{grad}}(H^2)$, où $\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu_0$ est le champ magnétique en absence de matériau, pour obtenir l'expression classiquement utilisée :

$$\frac{\overrightarrow{df}}{dV} = \frac{1}{2\mu_0} \chi_m \overrightarrow{\text{grad}}(B^2) \quad (\text{I-3})$$

où $\mathbf{B}$ est l'induction magnétique (T) de la distribution de champ en absence de substance magnétique. Les fluides considérés sont linéaires et isotropes.

Nos études théoriques porteront sur le vecteur $\mathbf{G}$ ($\text{T}^2.\text{m}^{-1}$) car la force magnétique lui est directement proportionnelle :

$$\overrightarrow{G} = \overrightarrow{\text{grad}}(B^2) \quad (\text{I-4})$$

L'autre force à considérer dans la compensation magnétique de pesanteur est le poids dû à la gravité. A l'échelle du laboratoire et donc celle des manipulations, la gravité peut être considérée comme constante, puisque, si on considère un volume sphérique d'un litre, la variation relative de gravité entre le centre et les extrémités de ce litre est de l'ordre de 10^{-8} . Il serait aberrant de tenir compte de cette faible variation, car nombre de phénomènes, environnant les manipulations, pourraient être la cause d'accélération bien supérieures. Ceci justifie pleinement le fait que l'on puisse considérer la gravité comme un champ de vecteur constant. Ainsi, on obtient la compensation parfaite de la pesanteur lorsque la somme des forces de pesanteur et magnétique volumiques est égale à zéro. Le vecteur $\mathbf{G}$ vérifiant cette égalité est notée $\mathbf{G}_1$:

$$\vec{G}_I = \frac{-2\mu_o \rho}{\chi_m} \cdot \vec{g} \quad (\text{I-5})$$

où ρ est la masse volumique du matériau à léviter (kg.m^{-3}). Selon que les matériaux sont paramagnétiques ($\chi_m > 0$) ou diamagnétiques ($\chi_m < 0$), le vecteur $\mathbf{G}_I$ doit être opposé ou de même sens que la gravité. Dans le tableau I est reportée la valeur de sa norme G_I pour quelques fluides. Les valeurs sont fournies à température donnée car masse volumique et susceptibilité magnétique évoluent de manières différentes en fonction de celle-ci.

Fluides	Caractéristiques	G_I ($\text{T}^2.\text{m}^{-1}$)
O ₂	90K, liquide, para	8
NO	118K, liquide, para	516
H ₂	20K, liquide, dia	986
H ₂ O	293K, liquide, dia	2717
N ₂	78K, gazeux, dia	4578
Xe	293K, gazeux, dia	5661

Tableau I : Valeurs de G_I permettant la compensation exacte de pesanteur

I-3.2) Le vecteur inhomogénéité

Des travaux antérieurs à cette thèse et effectués au sein de notre équipe ont prouvé qu'il était strictement impossible d'obtenir un champ de vecteur $\mathbf{G}$ uniforme dans un volume tridimensionnel [QUE3]. La déduction généralement faite de ce théorème, sous l'hypothèse que la gravité est constante, est qu'il est impossible de compenser la pesanteur dans un domaine 3D. Cette remarque peut porter à discussion car est-il possible de trouver une distribution de matière créant un champ de force gravitationnelle constant ? De plus si la précision sur la force magnétique était, tout comme le poids, de 10^{-8} sur un volume de 1L, pourrait-on encore parler d'impossibilité de compensation exacte de la gravité grâce à ce théorème ? Comme nous allons le voir par la suite, il est impossible d'obtenir de telles précisions sur le vecteur $\mathbf{G}$. Ainsi, il semble raisonnable de parler, dans l'état actuel des choses, d'impossibilité de compensation exacte de pesanteur.

De cette conclusion naît le besoin d'exprimer et de jauger la précision de la compensation magnétique de pesanteur. Un vecteur inhomogénéité relative de la compensation, nommé ϵ , avait alors été mis en place lors des mêmes précédents travaux :

$$\vec{\epsilon} = \frac{\vec{G} - \vec{G}_I}{G_I} \quad (\text{I-6})$$

où G_I est la valeur algébrique de $\mathbf{G}_I$.

Ce vecteur représente l'écart relatif entre la compensation effective $\mathbf{G}$ au point considéré et la compensation exacte $\mathbf{G}_I$. La norme de ce vecteur est généralement exprimée en pourcentage. Le vecteur ϵ est directement lié à l'accélération résultante $\mathbf{g}^*$ au sein du fluide lévité :

$$\vec{g}^* = g \cdot \vec{\epsilon} \quad (\text{I-7})$$

L'accélération résultante au sein d'une station orbitale ou d'une fusée sonde est de l'ordre de $10^{-4}g$, pour un vol parabolique en avion d'environ $10^{-2}g$. Dans notre étude l'objectif est d'obtenir des accélérations égales ou inférieures à $10^{-2}g$, mais également de les contrôler et ainsi de les connaître contrairement au cas des autres plates-formes d'accès aux conditions d'apesanteur. Il faut que la norme du vecteur ε soit inférieure à 10^{-2} . Cette compensation magnétique est ainsi dite compensation à 1% près.

I-3.3) Le potentiel magnéto-gravitationnel

La dernière grandeur intéressante à connaître lors de manipulations utilisant la lévitation magnétique est le potentiel magnéto-gravitationnel désigné par Σ_L . Comme les forces magnétiques et de pesanteur dérivent toutes deux d'un potentiel, le vecteur inhomogénéité dérive également d'un potentiel puisqu'il est leur somme à une constante près dépendant du matériau. Les equipotentielle magnéto-gravitationnelles permettent une visualisation rapide de l'homogénéité du système, leur expression est la suivante :

$$\Sigma_L = \frac{|\vec{B}|^2}{G_I} - h \quad (I-8)$$

où h est la hauteur (m) au point considéré. Si un fluide statique, proche de son point critique, c'est à dire avec une tension de surface proche de zéro, est soumis uniquement à la gravité et à la force magnétique, alors sa surface libre est décrite par une équipotentielle $\text{équi}\Sigma_L$. L'accélération résultante est dans tous les cas perpendiculaire aux $\text{équi}\Sigma_L$. Cette grandeur est très importante à maîtriser lors des expériences sur les fluides critiques comme nous le montrons dans la suite de ce travail de thèse. Elle s'apparente à une énergie potentielle globale au facteur ρg près. Ce potentiel magnéto-gravitationnel sera au cœur de la thèse, en particulier car l'analyse que nous ferons des différentes sources de champ s'appuiera sur des considérations liées à ce potentiel Σ_L .

I-4) Problématique

Nous avons constaté avant de commencer ce travail de thèse que la plupart des travaux de recherche portant sur la lévitation magnétique étaient expérimentaux. La lévitation magnétique n'était pas l'objet d'étude en soi de ces travaux, mais plutôt un « outil » permettant d'atteindre des conditions de microgravité afin d'observer d'autres phénomènes. Afin de développer « l'outil » lévitation magnétique et comprendre ses possibilités et ses limites nous avons développé l'analyse des champs de forces résiduelles. Ces champs de forces avaient été définis précédemment [QUE4]. Il a été mis en évidence au cours de la thèse qu'il était avantageux d'introduire et de manipuler le potentiel Σ_L (I-8) associé à ces champs de forces.

L'autre élément de la problématique initiale était de trouver des méthodes de conception de sources de champ permettant de créer des champs de forces obéissant à certains critères rustiques (1% dans un volume donné par exemple). On a mis en évidence que le cahier des charges pouvait inclure des critères beaucoup plus précis (distributions spatiales des forces résultantes).

Plus précisément les questions posées étaient :

- Les expériences de lévitation magnétique réalisées sur de l'hydrogène proche de son point critique ont montré des déformations importantes du fluide. Ces déformations restent à être interprétées. Comment relier ces déformations aux configurations de champs magnétiques ? Quels paramètres interviennent et caractérisent ces déformations ? Est-il possible de les contrôler ?
- Les champs de forces magnétiques générés jusqu'à maintenant sont obtenus par des configurations de champs magnétiques prédéfinies. Est-il possible de mettre au point une méthode de détermination directe ? Autrement dit, est-il possible de se fixer des conditions sur les champs de forces et d'obtenir ensuite les distributions de champs magnétiques capables de les générer ? Des choix d'homogénéités peuvent-ils être faits puis transcrits sur la distribution du champ magnétique ?
- Les travaux effectués jusqu'ici concernent uniquement la combinaison de la force gravitationnelle et de la force magnétique. Est-il imaginable et réalisable d'introduire d'autres forces afin d'établir de nouvelles possibilités et perspectives pour la lévitation magnétique ?
- Les expériences de lévitation magnétique s'occupent seulement de la compensation de gravité, c'est à dire d'une compensation statique. Est-ce que des simulations dynamiques de phases d'accélération ou de décélération autour de ce point de compensation sont envisageables ?

Au-delà de la maîtrise et de la connaissance de la force résiduelle, nous avons en repensant l'approche mathématique de la lévitation magnétique réussi à en faire un atout pour certains types d'expériences. Nous avons établi une puissante méthode analytique. Cette méthode générale permet un ajustement des harmoniques du champ magnétique afin de générer des accélérations résultantes variées. Nous avons aussi approfondi l'utilisation de la grandeur nommée potentiel magnéto-gravitationnel offrant une visualisation intéressante de l'interface gaz/liquide pour les expérimentations portant sur les fluides diphasiques proches de leur point critique. La conception de dispositifs de lévitation magnétique au sol a été réalisée en

s'appuyant sur la méthode d'analyse harmonique. Ces dispositifs présentent une grande souplesse d'utilisation pour la réalisation d'expériences de compensation variable de gravité.

Références bibliographiques :

- [APP1] Appel à propositions de recherche scientifique spatiale 2008-2009, (le 18/03/2008)
www.cnes.fr/automne_modules_files/standard/public/p117_df817654616aa0e6b72cadeab97203d3Text
e_AO2008-2009.doc
- [ARR1] Arrêté du 20 Février 1995, (Journal Officiel du 29 mars 1995)
- [BAS1] R. Bassani, **Earnshaw (1805-1888) and Passive Magnetic Levitation**, Meccanica 41, pp375-389,
(2006)
- [BEA1] Beaunon, E. and Tournier, R. **Levitation of organic materials**, Nature, 7, p470 (1991)
- [BER1] Berry, M.V. and Geim, A. K. **Of flying frogs and levitrons**, European Journal of Physics , 18, pp302-
313 (1997)
- [BEY1] Beysens, D. et al. **High-frequency driven capillary flows speed up the gas-liquid transition in zero-
gravity conditions**, Physical Review Letters, 95, 034502 (2005)
- [BIR1] Bird, M.D. and Eyssa, Y.M. **Special purpose high field resistive magnets**, IEEE Transactions on
Applied Superconductivity, 10, 1, pp451-454, (2000)
- [BOE] A. H. Boerdijk, **Levitation by static magnetic fields**, Philips Technical Review, 18, pp125-127,
(1956/57).
- [BRA1] W. Braunbeck, **Freies Schweben diamagnetischer Körper im Magnetfeld**, Zeitschrift für Physik,
112, pp764-769, (1939).
- [BRA2] Braithwaite, D. et al. **Magnetically controlled convection in paramagnetic fluid**, Nature, 354, pp134-
136 (1991)
- [CAT1] Catherall, A.T. et al. **Floating gold in cryogenic oxygen**, Nature, 422, pp579 (2003)
- [CAT2] Catherall, A.T. et al. **Cryogenically enhanced magneto-Archimedes levitation**, New Journal of
Physics, 7, 118 (2005)
- [CHA1] Chatain, D. et al. **Study of fluid behaviour under gravity compensated by a magnetic field**,
Microgravity Science and Technology, 18, pp196-199 (2006)
- [CHA2] Chatain, D. et al. **Using magnetic levitation to produce cryogenic targets for inertial fusion energy:
experiment and theory**, Cryogenics, 42, pp253-261 (2002)
- [DON] Donald, M.R. and Yigang, C. **Review of dynalmic stability of repulsive-force maglev suspension
systems**, IEEE Transactions on Magnetics, 38, 2, pp1383-1390, (2002)
- [DUN1] Dunne, P.A. et al. **Levitation in paramagnetic fluids**, Journal of Magnetism and Magnetic Materials,
316, pp273-276 (2007)
- [EAR1] S. Earnshaw, **On the nature of the molecular forces which regulate the constitution of the
luminiferous ther**, Trans. Cambridge Philosophical Society, vol 7, part I, pp 97-112 (mars 1839)
- [GEI1] Geim A. K., Simon M.D., Boamfa M.I., Heflinger L.O., **Magnet levitation at your fingertips**, Nature,
400, pp323-324 (1999)
- [HAM1] Hamai, M. et al. **Crystal growth of ammonium chloride in magnetic levitation conditions**, Journal
of Crystal Growth, 209 , pp1013-1017 (2003)
- [HAN1] Hanai H., Maruta K., Kobayashi H., Niioka T., **Pulsating flame propagation of PMMA particle
cloud in microgravity**, Symposium on Combustion, 27, 2, pp2675-2681 (1998)
- [IKE1] Ikezoe, Y. et al. **Making water levitate**, Nature, 393, pp749-750 (1998)
- [KHA1] Khaldi, F. and Gillon, P. **Etude expérimentale et numérique de la convection thermomagnétique
dans un fluide non électroconducteur**, Comptes rendus de l'Académie des Sciences Series IIB
Mechanics , 329, 5, pp357-362(2001)
- [KIT1] Kitamura, N. et al. **Glass spheres produced by magnetic levitation method**, Journal of Non-
Crystalline Solids, pp624-629 (2001)
- [KIY1] Kiyoshi, T. et al. **Superconducting magnets for generating uniform magnetic force field**, IEEE
Transactions on Applied Superconductivity, 9, 2, pp362-365 (1999)
- [MAK1] Maki, S. et al. **High-quality crystallization of lysozyme by magneto-Archimedes levitation in a
superconducting magnet**, Journal of Crystal Growth, 261 , pp557-565 (2004)
- [MAX1] J.C. Maxwell, **A Treatise on Electricity and Magnetism**, pp139-141, Clarendon, Oxford, (1873).
- [MOT1] Motokawa, M. et al. **Magnetic levitation experiments in Tohoku University**, Physica B, pp618-620
(1998)
- [MOT2] Motokawa, M. et al. **Crystal growth and materials processing in the magnetic levitation condition**,
Journal of Magnetism and Magnetic Materials, 226-230 pp2090-2093 (2001)
- [MUR1] Muralidhar, M. et al. **Magnetic levitation in liquid oxygen and its application**, Physica C, pp739-743
(2004)
- [NAS1] www.sti.nasa.gov/tto/spinoff1999/ard4.htm (30/09/2008)

- [OZA1] Ozaki, O. et al. **Design study of superconducting magnets for uniform and high magnetic force field generation**, IEEE Transactions on Applied Superconductivity, 11, 1, pp2252-2255, (2001)
- [PIC1] Pichavant, G. et al. **Magnetic compensation of gravity: experiments with oxygen**, submitted to Microgravity Science and Technology, (2008)
- [QUE1] Quettier, L., Mailfert, A. **New design of a superconducting magnet for generation of quasi-uniform magnetic force field**, IEEE Transactions on Applied Superconductivity, 13, 2, pp 1608-1611 (2003)
- [QUE2] Quettier, L. et al. **Microgravity: Superconducting coils for crystal growth. Influence of the levitation force on naturel convection in the fluid**, European Physical Journal Applied Physics , 22, pp69-73 (2003)
- [QUE3] Quettier, L. et al. **Magnetic compensation of gravity forces in liquid/gas mixtures: surpassing intrinsic limitations of a superconducting magnet by using ferromagnetic inserts**, European Physical Journal Applied Physics, 32, pp167-175 (2005)
- [QUE4] Quettier, L. **Contribution méthodologique à la conception de systèmes supraconducteurs de lévitation magnétique**, Thèse INPL, (2003)
- [TAG1] Tagami, M. et al. **Solidification of levitating water in a gradient strong magnetic field**, Journal of Crystal Growth , 203, pp594-598 (1999)
- [TAK1] Takahashi, K. et al. **Materials processing in magnetic levitation furnaces**, Science and Technology of Advanced Materials, 7, pp346-349 (2006)
- [THO1] Thomson J.J., **Conduction of Electricity through Gases**, 1ère Ed. , page 131 (1903)
- [TRE1] Trémolet de Lacheisserie E., **Magnétisme I-Fondements**, chapitre 3 et 4, ISBN 2.86883.463.9
- [WEI1] Weilert M. A., Whitaker D. L., Maris H. J., and Seidel G. M., **Magnetic Levitation and Noncoalescence of Liquid Helium** *Physical Review Letters*, 77, 4840 (1996).
- [WEI2] Weilert M. A., Whitaker D. L., Maris H. J., and Seidel G. M., **Magnetic Levitation of Liquid Helium** *Journal of Low Temperature*, 106, (1997).
- [WUN1] Wunenberger, R. et al. **Magnetic compensation of gravity forces in (-p) hydrogen near its critical point: Application to weightless conditions**, Physical Review E, 62, 1, pp469-476 (2000)
- [ZAP1] Zappoli B. et al, **Anomalous heat transport by the piston effect in supercritical fluids under zero gravity**, Physical review A, 41, 4, pp2264-2267 (1990).
- [ZAP2] Zappoli B., **Les sciences de la matière en micropesanteur**, Mécanique&Industries 5, 533-540 (2004).

Chapitre II : Outils théoriques et méthode

Sommaire

II-1) Le potentiel magnéto-gravitationnel Σ_L et son application à l'interprétation d'expériences	28
II-1.1) Définition	28
II-1.2) Expériences	29
II-1.2.1) Hydrogène	29
II-1.2.1.1) Longueur capillaire effective	30
II-1.2.1.2) Observations	31
• Sans compensation magnétique	31
• Compensation magnétique à $T=T_c-10\text{mK}$	32
• Compensation magnétique à $T=T_c-500\text{mK}$	37
• Longueur capillaire	37
II-1.3) Conclusion de la section II-1	38
II-2) Méthode générale d'analyse harmonique des champs de forces	39
II-2.1) Impossibilité de décomposition harmonique du vecteur G	39
II-2.2) Méthode générale	40
II-2.2.1) Expression de G fonction des harmoniques du champ magnétique.....	40
II-2.2.2) Conditions d'homogénéité	41
II-2.3) Conclusion de la section II-2	43
Références bibliographiques :	44

II-1) Le potentiel magnéto-gravitationnel Σ_L et son application à l'interprétation d'expériences

Nous avons vu que la force magnétique ne pouvait être constante et uniforme dans un domaine tridimensionnel de l'espace, empêchant ainsi la compensation de pesanteur au moyen de seules forces magnétiques. Cette inhomogénéité de la compensation entraîne, lors des expériences de compensation magnétique de gravité sur des fluides, des déformations de ces derniers. Ces déformations peuvent être mises à profit lors de ces expériences, mais doivent être, avant tout, comprises et maîtrisées. Ainsi, dans cette section, nous définissons mathématiquement le potentiel magnéto-gravitationnel. Puis nous montrons qu'il est mis en évidence par certaine expérience de compensation magnétique de pesanteur sur des fluides proche des conditions critiques.

Cette section a pour but de souligner l'importance des équipotentiels magnéto-gravitationnelles dans les expériences de lévitation magnétique de fluides critiques. Nous montrerons plus loin comment ce paramètre peut être pris en compte en vue du dimensionnement des dispositifs de lévitation par champs magnétiques, qu'ils soient dédiés à l'étude de fluides proches de leur point critique ou à d'autres applications.

II-1.1) Définition

Le vecteur inhomogénéité de la compensation est proportionnel à la résultante des forces magnétique et de pesanteur toutes deux dérivant d'une énergie. On peut dissocier le terme magnétique du terme gravitationnel :

$$\vec{\varepsilon} = \frac{\vec{G}}{G_I} - \frac{\vec{G}_I}{G_I} \quad (\text{II-1})$$

d'où il vient directement en remplaçant G_I par son expression :

$$\vec{\varepsilon} = \overrightarrow{\text{grad}} \frac{B^2}{G_I} - \overrightarrow{\text{grad}} z \quad (\text{II-2})$$

On obtient ainsi immédiatement l'expression du potentiel magnéto-gravitationnel dont dérive le vecteur inhomogénéité ($\vec{\varepsilon} = \overrightarrow{\text{grad}} \Sigma_L$):

$$\Sigma_L = \frac{B^2}{G_I} - z \quad (\text{II-3})$$

ce potentiel est défini à une constante près. Il est exprimé en mètre, B est l'induction magnétique [T], G_I est la norme du vecteur compensation exacte [T^2/m] et z est la cote ou hauteur, au point considéré.

Cette section présente une interprétation possible des interfaces gaz/liquide pour des fluides proches de leur point critique lors d'expériences de compensation de pesanteur par champs magnétiques. L'interprétation se fait à l'aide des équipotentiels magnéto-gravitationnelles

($\text{équi}\Sigma_L$) définies présentement. Celles-ci de par leur expression simple et la précision des résultats présentés par la suite, leur confèrent un intérêt tout particulier.

II-1.2) Expériences

La force résultante, lors d'expériences de lévitation magnétique, n'a pas un impact évident lorsqu'on effectue la lévitation de matériaux non déformables. Mais lorsque l'on souhaite faire léviter des fluides diphasiques, cette inhomogénéité de la compensation apparaît très clairement par l'intermédiaire de la déformation de l'interface gaz/liquide. Des expériences réalisées à l'aide de la bobine HYLDE (HYdrogen Levitation DEvice) au sein du Service des Basses Températures du CEA Grenoble sur de l'hydrogène diphasique proche de son point critique vont permettre de révéler cette inhomogénéité de la compensation. La déformation interfaciale de ce fluide est une des représentations physiques du potentiel magnéto-gravitationnel. En Annexe A nous utilisons les $\text{équi}\Sigma_L$ afin de prévoir les déformations interfaciales de l'oxygène diphasique proche de son point critique. Ces expériences sont, aujourd'hui, programmées au sein de la station OLGA (Oxygen Low Gravity Apparatus).

Pour obtenir parfaitement l'interface gaz/liquide il faudrait tenir compte des forces capillaires [CHA1]. Or la tension de surface s'évanouit (et donc les forces capillaires) lorsque les liquides sont approchés de leur point critique. Les $\text{équi}\Sigma_L$ décrivent alors exactement l'interface gaz/liquide. Dans ce cas particulier des conditions critiques les forces résultantes dérivent d'un potentiel et vont permettre de mettre en évidence le potentiel magnéto-gravitationnel pour tous les dispositifs créant un champ magnétique.

L'intérêt de cette grandeur réside dans la simplicité de son expression (II-3) qui permet son calcul. De plus elle peut être largement utilisée puisque plusieurs travaux importants ont été réalisés sur de l'hydrogène liquide proche de son point critique [BEY1][WUN1], et d'autres sont actuellement en cours sur de l'oxygène diphasique « critique ». Il faut, pour appliquer cette méthode de détermination interfaciale des fluides diphasiques, être dans des régimes dits « de gravité » ([GEN1] page 39), c'est à dire que la longueur capillaire doit être très inférieure à la zone de confinement du liquide comme nous allons le voir. Deux paramètres influent de façon opposée pour atteindre le régime de « gravité » :

- **la température**, car lorsque la température se rapproche du point critique la longueur capillaire s'évanouit,
- **le champ magnétique**, car la compensation magnétique de pesanteur permet de diminuer la gravité apparente et ainsi d'augmenter la longueur capillaire à température donnée.

Nous allons maintenant passer à l'interprétation d'expériences faites sur l'hydrogène, dont le point critique est $T_c=33\text{K}$ et $P_c=12,98\text{ bar}$.

II-1.2.1) Hydrogène

Nous considérons que le liquide est à l'équilibre avec sa vapeur. La forme de l'interface finale minimise les énergies capillaire et potentielle pour un volume de liquide donné. Quand les forces capillaires deviennent suffisamment négligeables à l'approche du point critique, l'interface décrit une équipotentielle magnéto-gravitationnelle.

II-1.2.1.1) Longueur capillaire effective

La précision de détermination de la forme de l'interface peut être exprimée en terme de longueur capillaire effective. Elle est dite effective car elle tient compte de la compensation magnétique de pesanteur par l'intermédiaire de la norme de l'inhomogénéité ϵ :

$$l_c = \sqrt{\frac{\sigma}{g\epsilon(\rho_L - \rho_V)}} \quad (\text{II-4})$$

cette longueur doit être très petite par rapport à l'échelle de longueur de la cellule L pour que l'interprétation en terme d'équi Σ_L soit réalisable. Dans cette expression, σ représente la tension de surface liquide/gaz et, ρ_L et ρ_V les masses volumiques respectivement du liquide et de la vapeur. Le comportement en température de ces deux grandeurs (tension de surface (N.m^{-1}) et masse volumique (kg.m^{-3})) est décrit par des lois puissance :

$$\sigma = \sigma_0 \tau^{1.26} \quad (\text{II-5})$$

$$\frac{\rho_L - \rho_V}{\rho_c} = 2\beta\tau^{0.325} \quad (\text{II-6})$$

où $\tau = \frac{T_c - T}{T_c}$ où T est la température et T_c la température au point critique, ρ_c est la masse volumique critique, σ_0 et β sont des valeurs particulières (cf. Tableau I). Alors l'expression (II-4) peut être écrite de la manière suivante :

$$l_c = \sqrt{\frac{\sigma_0}{2\beta\epsilon g \rho_c}} \tau^{0.468} \quad (\text{II-7})$$

Pour que la condition $l_c \ll L$ soit satisfaite, la température doit être comprise entre T_c et la température seuil T_o , c'est à dire vérifier la relation suivante :

$$T_c - T \ll (T_c - T_o) = T_c \left(\sqrt{\frac{2\beta\epsilon g \rho_c}{\sigma_0}} L \right)^{2.14} \quad (\text{II-8})$$

Les expériences de compensation magnétique décrites dans la suite ont été réalisées sur de l'hydrogène dont les paramètres utiles sont reportés dans le tableau I. Il est intéressant de voir que pour ces expériences avec une cellule de dimensions millimétriques $L=1\text{mm}$ remplie d' H_2 , le seuil de température correspondant à une inhomogénéité de l'ordre de 0,02g est de $T_o = T_c - 80\text{mK}$. Le réglage en température lors des expériences dans la station HYLDE atteignait le millième de Kelvin en terme de précision.

$\rho_c^{a)}$ (Kg.m ⁻³)	$T_c^{a)}$ (K)	$p_c^{a)}$ (MPa)	$\eta^{b)}$ (Pa.s)	$\sigma_0^{d)}$ (N.m ⁻¹)	$\beta^{a)}$
31,4	33,0	1,298	$2,7 \cdot 10^{-6}$	$5,7 \cdot 10^{-3}$	1,61

Tableau I : Données critiques sur le p-H₂ [WUN1], viscosité η du p-H₂ [DIL1] et tension de surface de référence σ_o [MOL1].

II-1.2.1.2) Observations

La station HYLDE est décrite en détail dans la référence [WUN1]. La cellule remplie d'hydrogène est de forme axisymétrique de faible épaisseur (Fig.1), avec l'axe de révolution orthogonal à celui-ci du solénoïde HYLDE. Son épaisseur e est de 2mm, son diamètre Φ est de 8mm. La cellule est en cuivre avec deux fenêtres en saphir. L'étanchéité entre ces deux parties est assurée par écrasement de joints en indium. La cellule est placée dans la partie haute du solénoïde HYLDE développant 10T au point où la norme du vecteur $\mathbf{G}$ est maximale. Le bobinage supraconducteur est réalisé en NbTi refroidi pour cette expérience à 2,17K. La compensation a lieu pour un courant d'environ $I=64A$. La régulation en température se fait au millième de Kelvin. La résolution optique est de 10 μ m et la profondeur de champ de 500 μ m. La mise au point est faite sur la fenêtre de sortie de la lumière, celle la plus proche de la caméra.

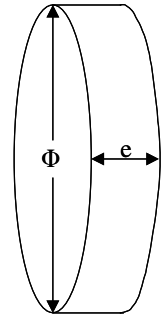


FIG. 1. Cellule de confinement de l'hydrogène diphasique

- *Sans compensation magnétique*

Quand il n'y a pas de compensation magnétique de la pesanteur ($I=0A$), le ménisque est incurvé si on est loin de la température critique T_c (Fig. 2a) avec une courbure représentant la longueur capillaire ($l_c < L$). A l'approche du point critique T_c le ménisque s'aplatit et tend à disparaître ($l_c \ll L$), il est situé au milieu de la cellule (Fig. 2b). En effet le volume de vapeur V_g est égal à celui du liquide V_l lorsqu'on se situe à proximité du point critique.

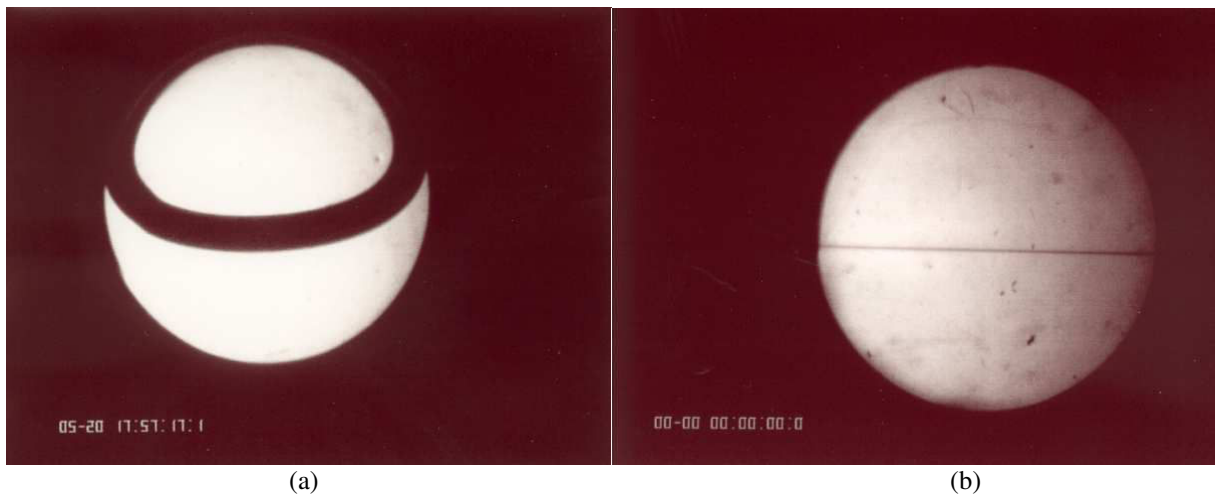


FIG. 2. Deux différents aspects de l'interface sans compensation magnétique de pesanteur.
(a) $T_c - T = 13$ K, $l_c = 1,55$ mm et (b) $T_c - T = 3$ mK, $l_c = 0,03$ mm.

- **Compensation magnétique à $T=T_c-10\text{mK}$**

Sur les figures 3a, 4a, 5a et 6a sont reportées plusieurs photographies de l'interface gaz/liquide pour différentes valeurs de compensation magnétique de la pesanteur (courants différents). Les interfaces prennent des formes complexes difficiles à interpréter à première vue à moins d'utiliser le concept des équipotentielles magnéto-gravitationnelles $\text{équi}\Sigma_L$. Pour déterminer les différentes formes interfaciales possible, nous utilisons l'équation (II-3) et un logiciel d'éléments finis commercial COMSOL Multiphysics™. On modélise avec ce logiciel la bobine HYLDE et la position de la cellule cylindrique dans laquelle on visualise différentes $\text{équi}\Sigma_L$. Pour chaque valeur de courant ($I=62,1\text{A}$, $I=63,5\text{A}$, $I=63,75\text{A}$, $I=63,9\text{A}$), on effectue une simulation numérique nous donnant le vecteur inhomogénéité ε et quelques $\text{équi}\Sigma_L$ à partir des équations II-1 et II-3. Les résultats sont obtenus en géométrie 2D axisymétrique et donc dans un plan contenant l'axe du solénoïde.

Une visualisation en 3D des $\text{équi}\Sigma_L$ peut être obtenue par des surfaces axisymétriques, dont l'intersection avec le plan contenant l'axe fournit les courbes des simulations numériques (Fig. 3b, 4b, 5b et 6b). L'interface gaz/liquide ne correspond bien entendu qu'à une seule des équipotentielles magnéto-gravitationnelles, celle partageant la cellule en deux volumes égaux ($V_g/V_l=1$) puisqu'on est au point critique. Dans les photographies de la cellule (Fig 3a, 4a, 5a et 6a), les lignes représentent la projection du ménisque dans la direction d'observation. La longueur capillaire est petite dans chaque cas, $l_c < 500\text{ }\mu\text{m}$ pour $\varepsilon=1,2\%$ valeur moyenne du cas $I=63,9\text{A}$ où la longueur capillaire est la plus grande. Ainsi, la forme de l'interface liquide/gaz sur le hublot de la cellule apparaît comme une ligne noire nette au niveau du hublot de sortie (plan focal) et comme une ligne floue au niveau du hublot d'entrée de la lumière (pas dans le plan focal). Ces deux lignes peuvent être visualisées comme l'intersection d'une $\text{équi}\Sigma_L$ avec les hublots d'entrée (ligne floue) et de sortie (ligne nette).

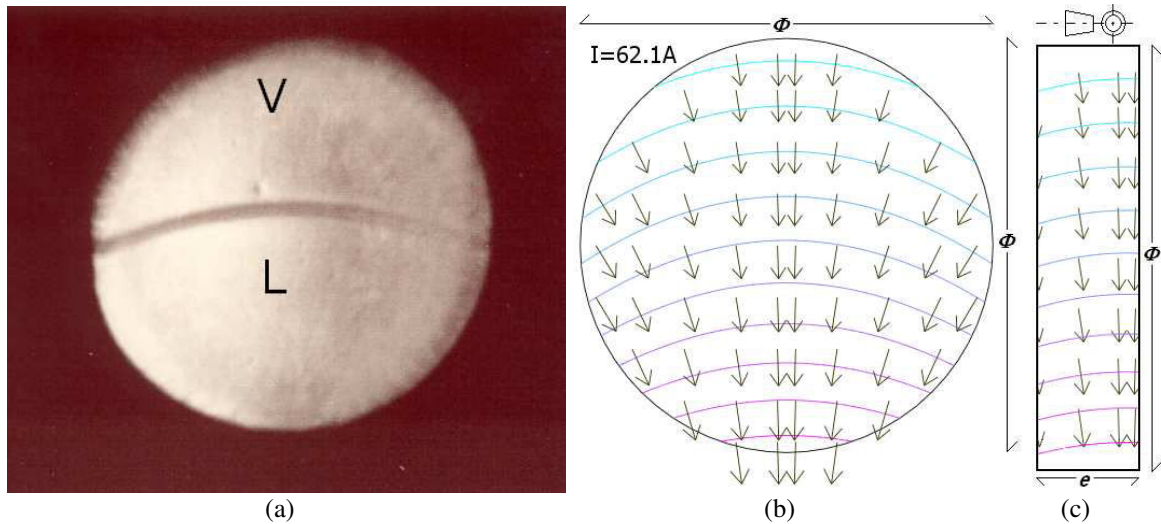


FIG. 3. $T-T_c=10\text{mK}$ et compensation effective au centre $g^*=0,055g$ ($I=62,1\text{A}$), photo cellule avec interface (a) et simulation de plusieurs $\text{équi}\Sigma_L$ dans un plan contenant l'axe magnétique de face (b) et côté droit (c).

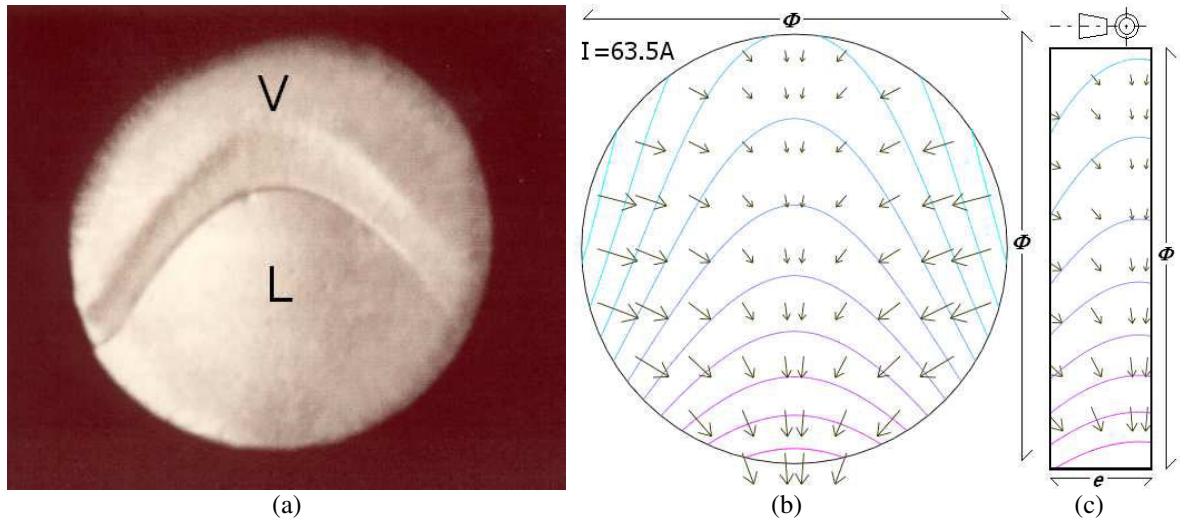


FIG. 4. $T-T_c=10\text{mK}$ et compensation effective au centre $g^*=0,0125g$ ($I=63,5\text{A}$), photo cellule avec interface (a) et simulation de plusieurs $\text{équi}\Sigma_L$ dans un plan contenant l'axe magnétique de face (b) et côté droit (c).

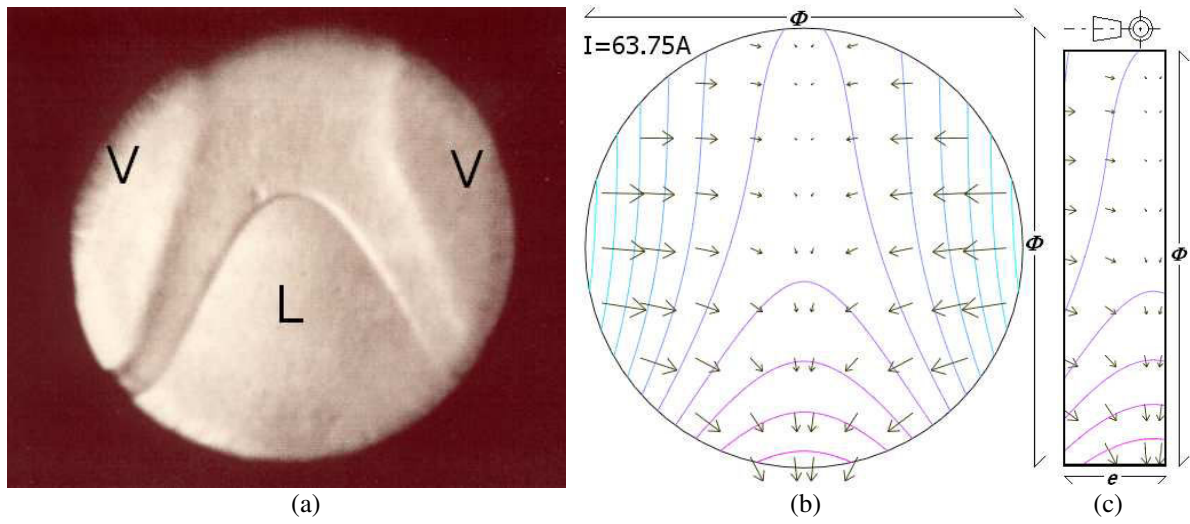


FIG. 5. $T-T_c=10\text{mK}$ et compensation effective au centre $g^*=0,005g$ ($I=63,75\text{A}$), photo cellule avec interface (a) et simulation de plusieurs $\text{équi}\Sigma_L$ dans un plan contenant l'axe magnétique de face (b) et côté droit (c).

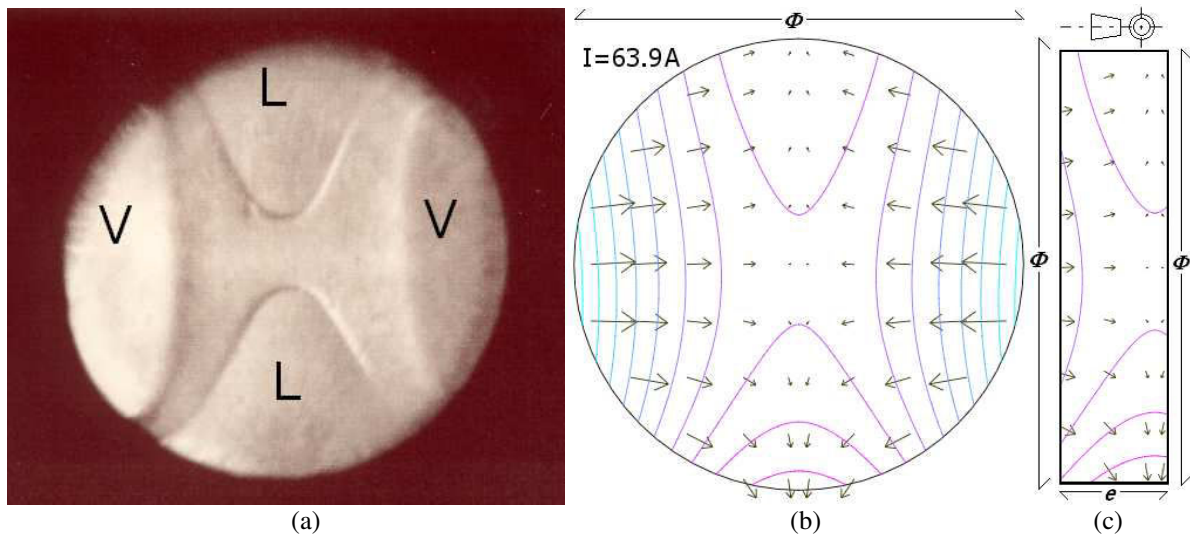


FIG. 6. $T-T_c=10\text{mK}$ et compensation effective au centre $g^*=0g$ ($I=63,9\text{A}$), photo cellule avec interface (a) et simulation de plusieurs $\text{équi}\Sigma_L$ dans un plan contenant l'axe magnétique de face (b) et côté droit (c).

Une comparaison détaillée entre les résultats expérimentaux et les simulations numériques montre que la cellule remplie d' H_2 n'est pas correctement centrée sur l'axe magnétique du solénoïde, comme décrit sur la figure 8. Par des considérations géométriques simples, il est possible de montrer que l'axe de révolution du système magnétique, lequel coïncide automatiquement avec l'axe de révolution des $\text{equi}\Sigma_L$ (croix verte), est éloigné selon l'axe x d'une distance d'environ $850 \mu\text{m}$ du centre de la cellule (croix rouge). Il existe également un léger décalage selon l'axe y . La surface grisée représente la partie où la lumière arrivant sur la caméra a traversé à la fois du liquide et du gaz (Fig. 7).

Les expérimentateurs, auteurs de ces résultats, ont confirmé après coup la possibilité d'un tel décalage [CHA2].

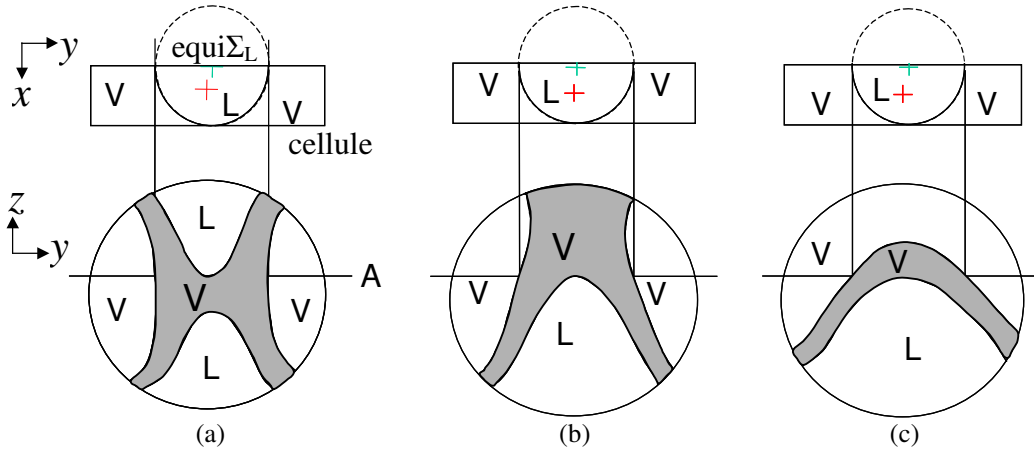


FIG. 7. Mise en évidence du décalage de la cellule par rapport à l'axe magnétique du solénoïde pour trois des quatre photos (a) $I=63,9\text{A}$, (b) $I=63,75\text{A}$ et (c) $I=63,5\text{A}$.

Remarque : Le cas $I=62,1\text{A}$ n'est pas étudié car la proximité des lignes nette et floue ne permet une précision suffisante dans les tracés géométriques.

Si la cellule est correctement positionnée, pour le cas de compensation totale (au moins au centre de la cellule), l'interface correspondant à l' $\text{equi}\Sigma_L$ serait celle tracée sur la figure 8. Sur cette figure les deux lignes symétriques au centre devraient être nettes (hublot de sortie) et les deux autres floues (hublot d'entrée).

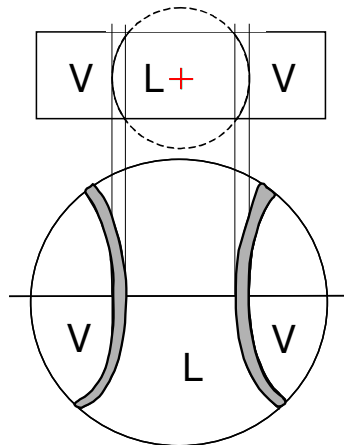


FIG. 8. Interface reconstituée théoriquement pour une cellule correctement positionnée ($I=63,9\text{A}$)

Sachant que l'interface liquide/gaz est portée par l' $\text{equi}\Sigma_L$ scindant la cellule en deux volumes égaux, nous allons vérifier si notre interprétation corrobore ce fait. Nous allons estimer le volume total de liquide pour chacune des compensations, celui-ci devant représenter la moitié

du volume de la cellule V_c ($r=4\text{mm}$, $e=2\text{mm}$): $V_c = \pi r^2 e \approx 100.5\text{mm}^3$. Le volume de liquide doit être de l'ordre de 50mm^3 .

Nous calculons par des considérations géométriques simples la surface de liquide S_l dans la cellule pour différentes hauteurs z . Ainsi, il ne reste plus qu'à intégrer cette fonction $S_l(z)$ sur la hauteur totale de la cellule afin d'obtenir le volume total de liquide au sein de cette dernière. Nous allons illustrer ces propos avec la cellule où la compensation magnétique est exacte au centre ($I=63,9\text{A}$). Les différentes hauteurs, plans horizontaux pour lesquels la surface de liquide est déterminée, sont numérotées de 1 à 12 sur la vue de face de la cellule (Fig. 9). Le rectangle bleu représente l'intersection de l'intérieur de la cellule avec le plan horizontal désiré respectivement n°5, n°6 et n°11 pour les figures 9a, 9b, 9c. Le disque rose est délimité par un cercle qui est l'intersection du plan considéré (n°5, n°6 ou n°11) avec l'interface gaz/liquide ou l'équi Σ_L qui la porte. On obtient de cette manière, dans la partie violacée, la surface de liquide au sein de la cellule pour un plan donné, c'est à dire pour une hauteur donnée. On peut donc reporter la surface en fonction de la hauteur (Fig. 10, 11 et 12) et intégrer sur la hauteur totale de la cellule.

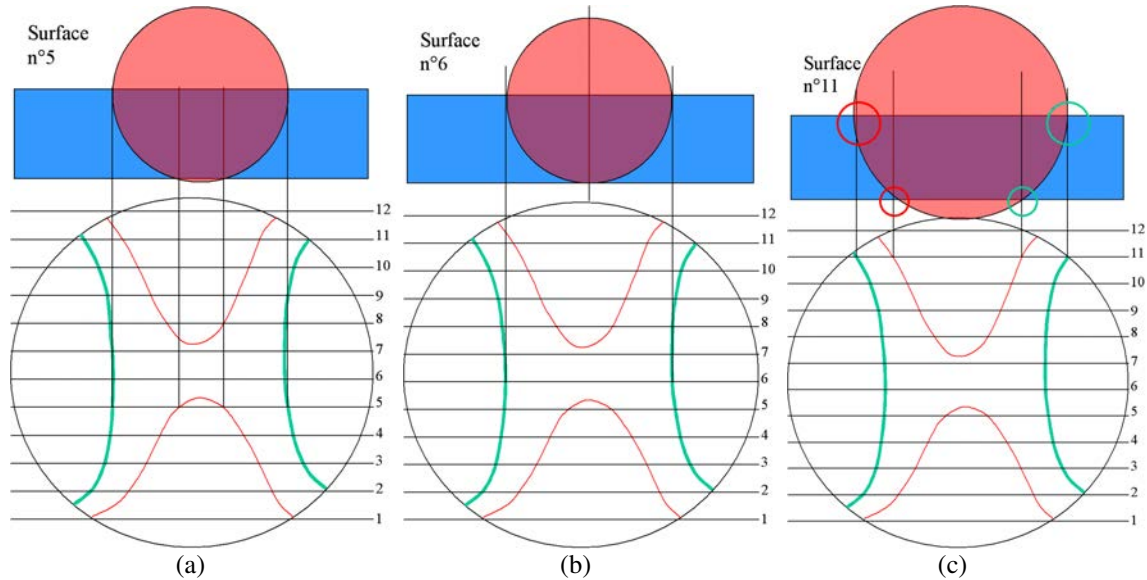


FIG. 9. Tracés de la surface de liquide S_l pour trois hauteurs différentes z dans le cas de la compensation exacte de pesanteur au centre de la cellule ($I=63,9\text{A}$)

Remarque : Nous avons choisi de représenter ces trois intersections avec les plans n°5, n°6 et n°11 car elles représentent les trois différents cas de tracés rencontrés lors de ce travail. Rappelons que pour définir un cercle il faut 3 points. Le tracé de la surface n°5 se fait facilement, nous avons suffisamment de données (4 points bien positionnés pour définir un cercle) pour reproduire l'intersection du plan n°5 avec l'interface (équi Σ_L) et ainsi obtenir la surface de liquide au sein de la cellule. Le tracé de la surface n°6 ne peut se faire qu'en connaissant le centre des équi Σ_L (2 points seulement pour définir un cercle), nous conservons donc le centre obtenu pour la surface n°5, ce qui permet ensuite de tracer la surface. Le tracé de la surface n°11 pose un autre problème puisque le système ne semble pas axisymétrique (aucun cercle ne passe par les 4 points), ceci implique que l'équi Σ_L tracée ne coupe pas exactement la face avant de la cellule à l'endroit souhaité (voir cercles rouges de la figure 9c). Lorsqu'un tel problème se présente, nous faisons alors le choix de caler l'équi Σ_L sur la partie droite de la figure (voir cercles verts de la figure 9c) et conserver le même centre pour les équi Σ_L que les tracés précédents.

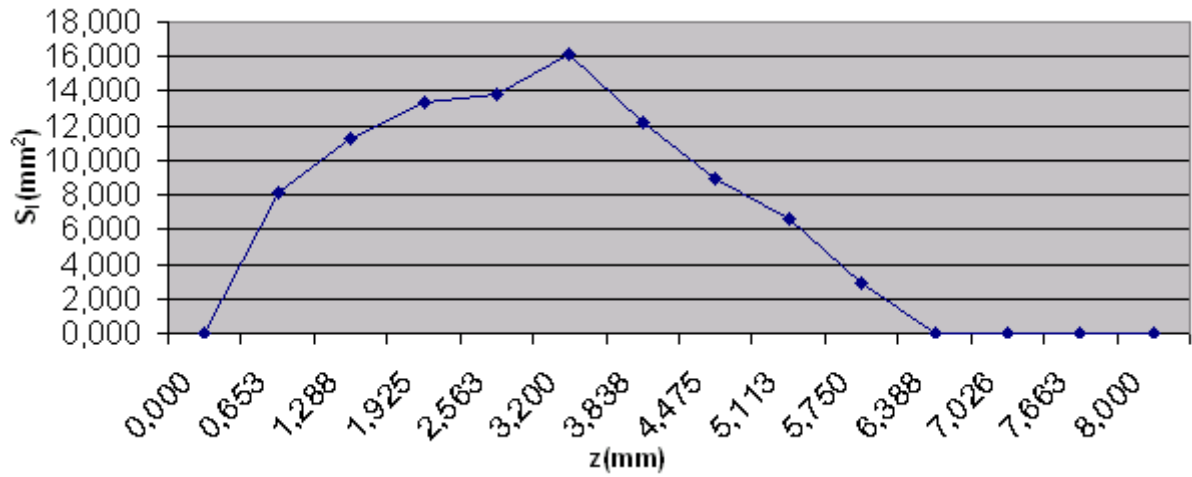


FIG. 10. $S_l(z)$ pour $I=63,5A$

On obtient par intégration sur la hauteur de la cellule entre 0mm et 8mm, un volume de liquide $V_l = 56,8\text{mm}^3$ ce qui représente **56,5% du volume de la cellule.**

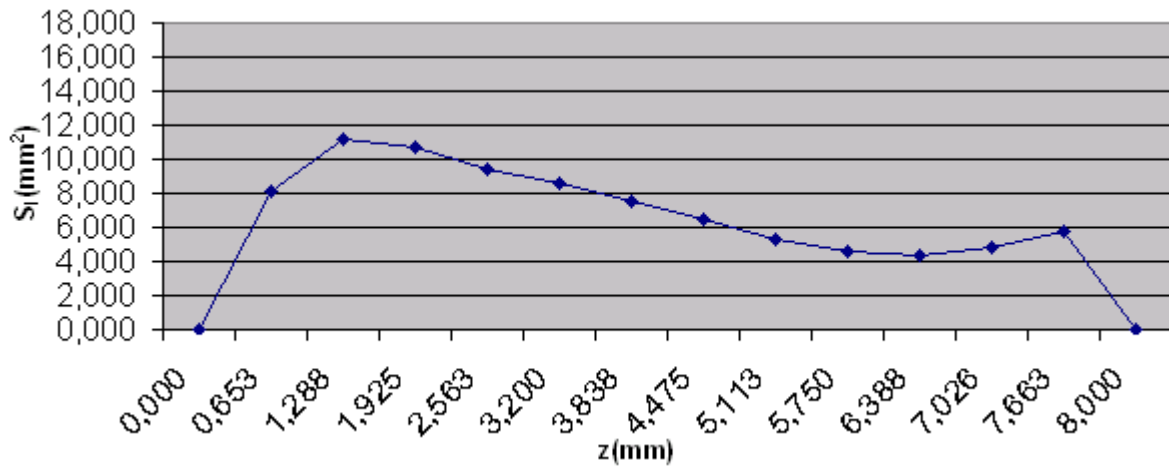


FIG. 11. $S_l(z)$ pour $I=63,75A$

On obtient par intégration $V_l = 54,5\text{mm}^3$ ce qui représente **54,2% du volume de la cellule.**

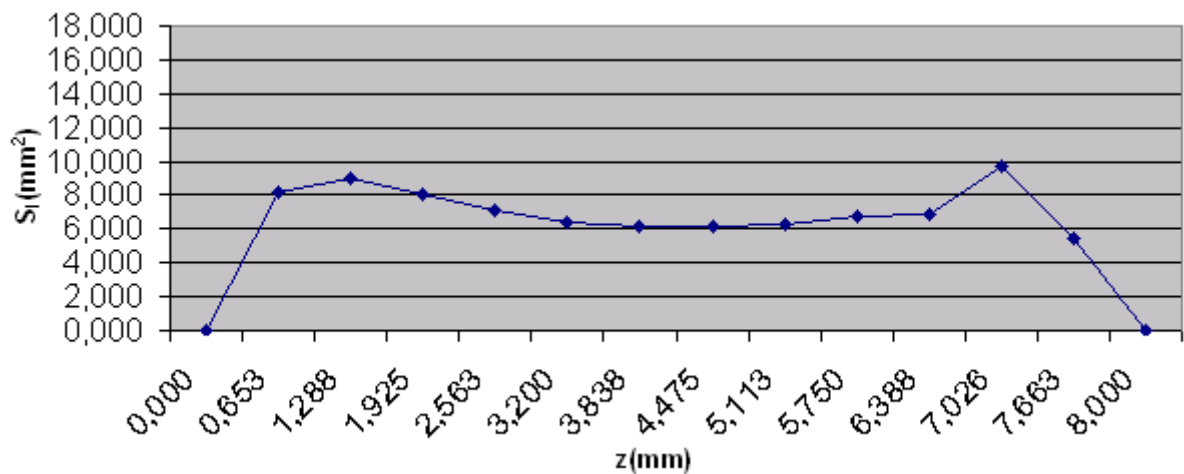


FIG. 12. $S_l(z)$ pour $I=63,9A$

On obtient $V_l = 51,4\text{mm}^3$ ce qui représente **51,2% du volume de la cellule**.

Remarque : Le cas $I=62,1\text{A}$ n'est pas étudié car la proximité des lignes nette et floue ne permet une précision suffisante dans les tracés géométriques.

Malgré la discrétisation et la simplicité des considérations géométriques utilisées, ces résultats sont en bon accord avec le ratio escompté (50 %).

- **Compensation magnétique à $T=T_c-500\text{mK}$**

Une série d'expériences similaires a été réalisée à la température $T_c-500\text{mK}$. L'interprétation des formes de ménisques en terme d'équi Σ_L n'est plus valide car les forces de capillarité ne sont plus négligeables en comparaison des forces magnéto-gravitationnelles résultantes. Quand le courant varie autour de la valeur de compensation (Fig. 13), la phase vapeur apparaît comme une bulle légèrement aplatie sur le haut de la cellule (Fig. 13a). Puis lorsque la compensation magnétique de pesanteur augmente, et que la gravité réduite g^* tend vers zéro, la bulle devient de plus en plus sphérique et se décale vers le côté gauche de la cellule (Fig. 13b et 13b). Cette situation décentrée est inévitable car la position de la bulle de gaz au centre est instable. L'hydrogène étant un diamagnétique, le liquide a tendance à se positionner au centre, où a lieu la compensation de pesanteur exacte et où le champ est le plus faible.

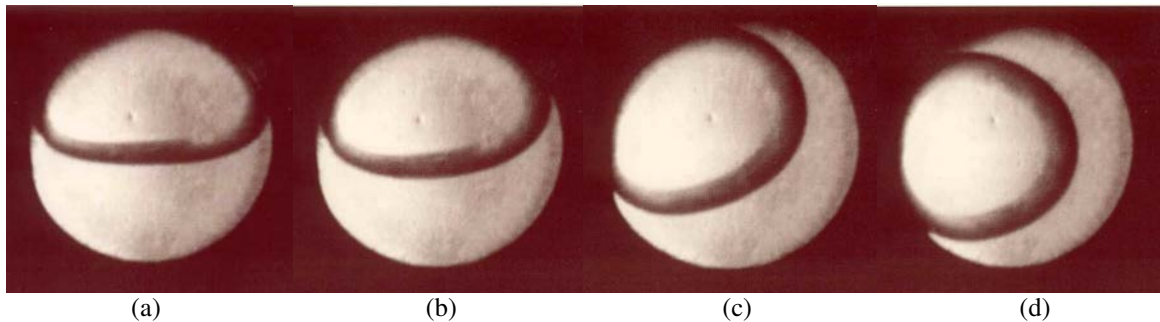


FIG. 13. Photographies de la cellule à $T_c-500\text{mK}$, avec un courant de (a) $I = 62,1\text{A}$ et $g^* = 0,055g$, (b) $I=63,5\text{A}$ et $g^* = 0,0125g$, (c) $I = 63,75\text{A}$ et $g^* = 0,005g$, (d) $I = 63,9\text{A}$ et $g^* = 0g$.

- **Longueur capillaire**

A titre de confirmation de ces hypothèses, la longueur capillaire a été simulée numériquement à l'intérieur de la cellule pour les températures $T_c - 10\text{ mK}$ et $T_c - 500\text{ mK}$ quand la compensation parfaite est atteinte au centre de la cellule (Fig. 14). Sur la figure 14a pour $T_c - 10\text{ mK}$ on obtient $l_c < 0,2\text{mm}$ dans la quasi-totalité de la cellule. Cette valeur est 10 fois inférieure à l'épaisseur de la cellule, ainsi les forces capillaires sont négligeables et l'interprétation en terme de potentiel magnéto-gravitationnel Σ_L de l'interface gaz/liquide est valable. Par contre, dans la figure 14b pour $T_c - 500\text{ mK}$, on obtient $0,6\text{mm} < l_c < 2\text{mm}$ dans l'ensemble de la cellule, ceci n'est plus négligeable en comparaison des dimensions de la cellule.

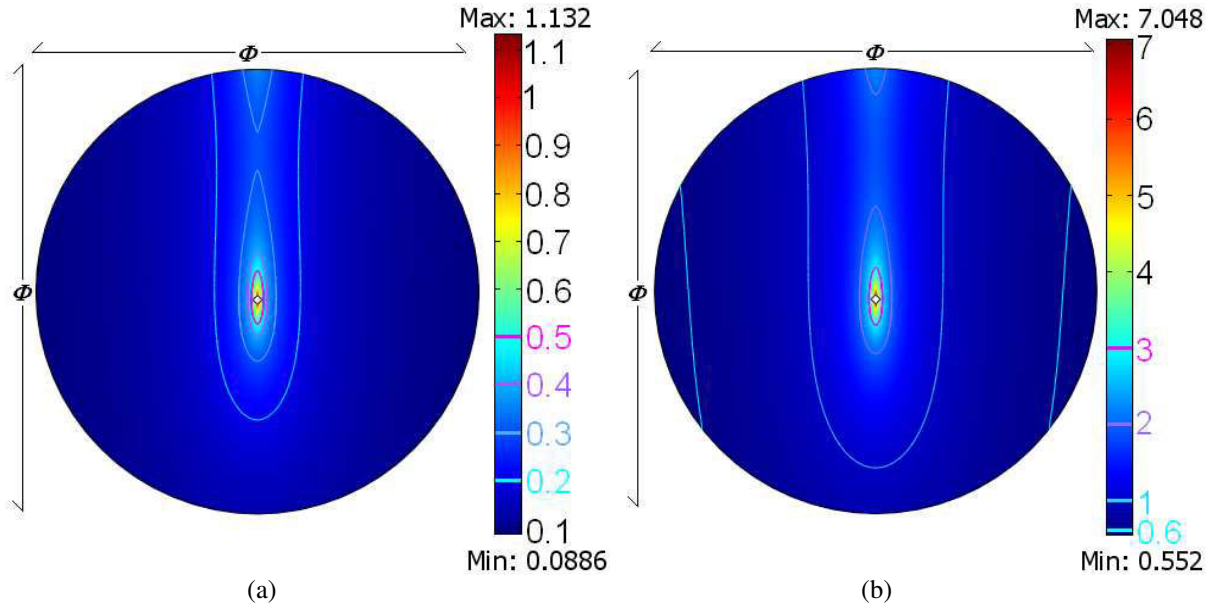


FIG. 14. Carte de la longueur capillaire (mm) au sein de la cellule à
 (a) $T_c = 10$ mK et (b) $T_c = 500$ mK
 pour $I = 63,9$ A (compensation exacte $g^* = 0$ m.s⁻²)

II-1.3) Conclusion de la section II-1

Cette partie souligne l'importance du potentiel magnéto-gravitationnel Σ_L dans les expériences utilisant la compensation magnétique de pesanteur. Nous montrons que l'interprétation de l'interface gaz/liquide près des conditions critiques est possible à l'aide des $\text{équi}\Sigma_L$, nos propos se sont appuyés sur le cas de l'hydrogène. La complexité des formes du ménisque est bien le résultat de l'inhomogénéité de la compensation par champs magnétiques. Ces expériences révèlent ce potentiel qui permet de parfaitement caractériser les problèmes d'inhomogénéités. Ainsi nous pouvons à l'aide de ce potentiel anticiper la forme de l'interface gaz/liquide pour de futures expériences sur des fluides proches du point critique par exemple sur l'oxygène (Annexe A) ou les mélanges oxygène-azote.

Une réflexion est à approfondir sur la réalisation d'une cellule d'épaisseur fine avec un large diamètre remplie de fluide près de son point critique. Cette cellule serait une sorte de sonde permettant d'obtenir une cartographie des équipotentielles magnéto-gravitationnelles. Elle pourrait permettre de révéler certains problèmes de conception de manière fine et qualifier ou non un dispositif de lévitation magnétique au moment de sa réception.

Cette partie permet de montrer clairement le besoin de connaître cette grandeur dans une station de lévitation magnétique en vue de l'expérimentation sur des fluides proches des conditions critiques.

II-2) Méthode générale d'analyse harmonique des champs de forces

II-2.1) Impossibilité de décomposition harmonique du vecteur $\mathbf{G}$

Le champ magnétique vérifie l'équation de Laplace dans le vide. Il peut ainsi y être décomposé en harmoniques spatiaux. Selon le système de coordonnées choisi ces harmoniques sont dits cylindriques, zonaux, sphériques, ellipsoïdaux... Cette approche harmonique est très utile pour les physiciens car chacun des harmoniques a des caractéristiques particulières. Dans le domaine de l'imagerie par résonance magnétique, les concepteurs souhaitent obtenir un champ uniforme, c'est à dire constitué seulement du premier harmonique, les harmoniques de rangs supérieurs devant être tous nuls. Dans le domaine des accélérateurs de particules, le champ magnétique est utilisé pour courber la trajectoire des particules ou pour focaliser le faisceau de particules. La courbure de la trajectoire est réalisée à l'aide d'un champ uniforme constitué uniquement du premier harmonique (champ dipolaire). Quant à la focalisation, elle est obtenue par un champ non uniforme constitué uniquement du deuxième harmonique (champ quadrupolaire). Il est évidemment impossible d'obtenir des systèmes réels générant des champs purs, uniquement constitués d'un seul harmonique. Mais les concepteurs s'efforcent de construire des systèmes de plus en plus précis en terme de décomposition harmonique, où les harmoniques indésirables de rangs différents de celui désiré sont toujours plus faibles. Il est même possible d'annuler par des configurations astucieuses de bobinages certains de ces harmoniques indésirables.

La décomposition en harmoniques est donc depuis bien longtemps maîtrisée et surtout utilisée dans les domaines relatifs aux champs magnétiques. Nous nous sommes alors interrogés sur la possibilité de décomposition en harmonique de la force magnétique et plus particulièrement du vecteur $\mathbf{G}$. De précédents travaux ont déjà montré que la force magnétique ne peut être uniforme dans un domaine tridimensionnel. Si le vecteur $\mathbf{G}$ était décomposable en harmoniques, il vérifierait l'équation de Laplace est ainsi, il pourrait être constant dans un domaine tridimensionnel. Pour se convaincre du fait que le vecteur $\mathbf{G}$ ne vérifie pas l'équation de Laplace, il suffit de le montrer pour un cas particulier, par exemple celui d'un sextupole. A l'intérieur d'un sextupole, l'induction magnétique en coordonnées polaires est de la forme :

$$\vec{B} = \begin{pmatrix} B_3 \cdot r^2 \cdot \sin(3\theta) \\ B_3 \cdot r^2 \cdot \cos(3\theta) \end{pmatrix} \quad (\text{II-9})$$

D'où l'on tire facilement le carré de sa norme et son gradient, c'est à dire le vecteur $\mathbf{G}$:

$$\vec{G} = \begin{pmatrix} 4B_3^2 \cdot r^3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{II-10})$$

Le Laplacien vectoriel vaut ainsi :

$$\overrightarrow{\Delta G} = \begin{vmatrix} 32B_3^2 \cdot r \\ 0 \end{vmatrix} \quad (\text{II-11})$$

Ce contre exemple permet ainsi d'affirmer que la force magnétique ne peut être décomposable en harmoniques.

Cette remarque, nous amène, non pas à décomposer le vecteur $\mathbf{G}$ en harmoniques, mais à l'exprimer à l'aide des harmoniques du champ magnétique. L'objectif sous-jacent est de connaître l'effet de chacun des harmoniques sur les distributions de forces magnétiques. Ainsi la conception de lévitateurs magnétiques demandant des qualités de champs importantes avec une grande précision pourra se faire en utilisant l'analyse harmonique des bobinages.

II-2.2) Méthode générale

II-2.2.1) Expression de $\mathbf{G}$ fonction des harmoniques du champ magnétique

Nous avons développé une méthode générale de détermination du champ de vecteurs $\mathbf{G}$ qui fournit beaucoup de souplesse. Elle consiste à partir d'une décomposition en harmoniques du potentiel magnétique scalaire V dont dérive le champ d'induction magnétique $\mathbf{B}$ dans l'espace utile supposé sans courant et de perméabilité égale à celle du vide. Nous en déduisons la décomposition en harmoniques du champ magnétique, par des méthodes bien connues de séparation de variables. Puis nous calculons la valeur de $\mathbf{G}$ en fonction de ces harmoniques. Les conditions fixées sur $\mathbf{G}$ ou $\mathbf{\varepsilon}$ (vecteur inhomogénéité de la compensation), selon les anisotropies des compensations désirées, sont donc directement transcrites sur les harmoniques de champ. La détermination des sources de champ correspondantes s'obtient pour finir par résolution du problème inverse de la magnétostatique, s'appuyant sur la détermination des harmoniques spatiaux de différentes catégories de courants sources. Nous en parlerons dans les chapitres III et IV sur des exemples concrets. Rappelons tout de même maintenant que les problèmes inverses de la magnétostatique comportent toujours une infinité de solutions, cette « infinité » pouvant être réduite par la prise en compte de contraintes diverses.

L'équation de Laplace du potentiel magnétique scalaire est résolue dans un système de coordonnées, ce système étant associé à la géométrie étudiée (cylindrique chapitre III, axisymétrique chapitre IV). La résolution se fait par la méthode classique de séparation des variables. Le potentiel magnétique scalaire dans chacun des domaines, intérieur ou extérieur (sans courant), limités par une surface fermée portant les courants supposés superficiels, s'obtient sous forme d'une décomposition harmonique. L'expression du potentiel scalaire, en tout point de l'espace hormis la surface contenant les courants, conduit aux expressions du champ magnétique et de l'induction, sous forme d'une somme d'harmoniques.

Ainsi, en géométrie cylindrique, l'expression du champ magnétique, suivant $\mathbf{e}_r$ et $\mathbf{e}_\theta$, en fonction des harmoniques cylindriques du champ de part et d'autre d'un cercle de rayon R_0 vaut :

$$\overrightarrow{H_{int_n}}(r, \theta) = \begin{vmatrix} -n \cdot r^{n-1} \cdot A_n \cdot \sin(n\theta + \alpha_n) \\ -n \cdot r^{n-1} \cdot A_n \cdot \cos(n\theta + \alpha_n) \end{vmatrix}, r < R_0 \quad (\text{II-12})$$

$$\overrightarrow{H_{ext_n}}(r,\theta)=\begin{cases} n.r^{-(n+1)}.A'_n.\sin(n\theta+\alpha'_n) \\ -n.r^{-(n+1)}.A'_n.\cos(n\theta+\alpha'_n) \end{cases}, r>R_0 \quad (\text{II-13})$$

En géométrie axisymétrique, l'expression du champ magnétique en coordonnées sphériques suivant $\mathbf{e}_r$ et $\mathbf{e}_\theta$ et en fonction des harmoniques sphériques s'exprime, de part et d'autre d'une sphère de rayon R_0 , sous la forme :

$$\overrightarrow{H_{int_n}}(r,\theta)=\begin{cases} -n.C_n.r^{n-1}.P_n(\cos\theta) \\ -C_n.r^{n-1}.P'_n(\cos\theta) \end{cases} \quad (\text{II-14})$$

$$\overrightarrow{H_{ext_n}}(r,\theta)=\begin{cases} (n+1).\frac{C'_n}{r^{n+2}}.P_n(\cos\theta) \\ -\frac{C'_n}{r^{n+2}}.P'_n(\cos\theta) \end{cases} \quad (\text{II-15})$$

Ces expressions seront exploitées plus loin respectivement dans les chapitres III et IV.

Un calcul fastidieux permet d'obtenir le carré de l'induction magnétique sous la forme de sommes de produits de séries dont les termes sont les harmoniques du champ magnétique. Le calcul du gradient $\mathbf{G}$ s'effectue en considérant que les séries sont uniformément convergentes et ainsi qu'il est possible de dériver terme à terme par rapport à la variable considérée.

L'étape suivante de la méthode consiste à rechercher quelles conditions réalistes peuvent être fixées à la distribution du vecteur $\mathbf{G}$, c'est-à-dire à la distribution de $\mathbf{\varepsilon}$, qui puissent conduire à la détermination algébrique des coefficients des différents harmoniques du champ $\mathbf{H}$.

II-2.2.2) Conditions d'homogénéité

Dans nos études le domaine tridimensionnel dans lequel les grandeurs relatives à la lévitation sont calculées ($\mathbf{G}$, $\mathbf{\varepsilon}$, Σ_L) peut se ramener à un domaine bidimensionnel par invariance suivant une des coordonnées (translation-chapitre III ou rotation-chapitre IV). La gravité est prise classiquement suivant la verticale et dirigée vers le bas. Les conditions d'homogénéité sont déterminées à l'intérieur du domaine réduit. La géométrie du domaine 2D réduit choisi possède de plus une symétrie par rapport à un plan vertical et également à un plan horizontal, ce qui nous amène à considérer l'homogénéité ou plutôt le vecteur inhomogénéité suivant ces axes de symétrie. Une condition est tout d'abord fixée sur $\mathbf{G}$. Il doit, en tout point de l'axe de symétrie vertical, ne posséder qu'une composante verticale, condition tacite pour un système invariant par rotation où la symétrie axiale est portée par l'axe vertical.

Le vecteur inhomogénéité suivant l'axe vertical $\mathbf{\varepsilon}_1$ ne possède qu'une seule composante verticale ε_{1y} d'après la condition fixée sur $\mathbf{G}$. Suivant l'axe horizontal $\mathbf{\varepsilon}_2$ possède par contre deux composantes une verticale ε_{2y} et une horizontale ε_{2x} (Fig. 15).

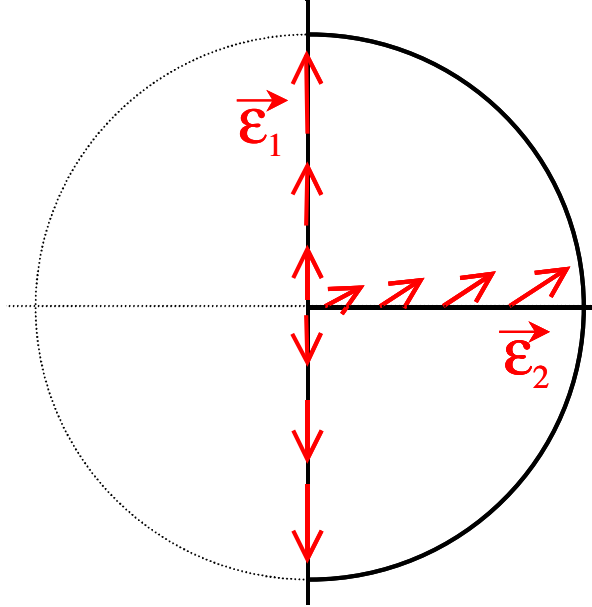


FIG. 15. Inhomogénéité sur les axes vertical et horizontal du domaine 2D réduit

Nous pouvons imposer une infinité de conditions d'homogénéité, mais nous nous sommes limités dans ce travail à trois d'entre elles que l'on peut considérer comme des cas limites particulièrement intéressants. Cette méthode permet non pas de fixer la valeur de l'inhomogénéité qui dépend directement de la valeur de l'induction au centre du domaine, mais uniquement de maîtriser sa forme (direction et sens). Les trois conditions consistent respectivement à annuler strictement ou faire tendre vers zéro le vecteur inhomogénéité suivant l'axe vertical ($\epsilon_1 \rightarrow 0$), à annuler strictement ou faire tendre vers zéro le vecteur inhomogénéité suivant l'axe horizontal ($\epsilon_2 \rightarrow 0$) ou à égaliser le vecteur inhomogénéité suivant les axes vertical et horizontal ($\epsilon_{1y} = \epsilon_{2x}$).

Le vecteur inhomogénéité prend alors différentes configurations que nous qualifions de verticale, horizontale ou centrale dans le domaine réduit (Fig. 16). Selon les invariances dues à la géométrie du système, le résultat sur l'accélération dans le domaine tridimensionnel n'est pas le même.

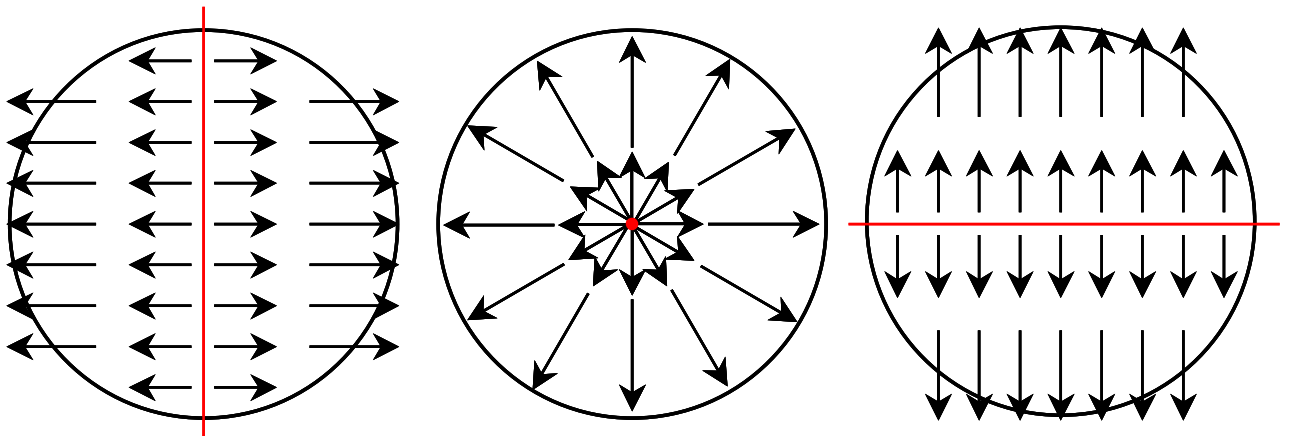


FIG. 16. Différentes configurations d'accélération résultantes obtenues dans le domaine 2D réduits

La compensation de pesanteur est exacte sur les parties en rouge des trois configurations d'accélération résultantes (Fig. 16.).

Dans la géométrie cylindrique, la compensation recherchée sera exacte en tout point des plans vertical (configuration verticale) ou horizontal (configuration horizontale), ou suivant l'axe

horizontal de la configuration (configuration circulaire). Un ensemble de théorèmes données en Annexe I démontrera l'exactitude de ces résultats.

Dans la géométrie axisymétrique, la configuration recherchée sera exacte en tout point de l'axe de la structure (configuration verticale) ou en tout point du plan médian orthogonal à l'axe (configuration horizontale) ou seulement au point central (configuration sphérique).

II-2.3) Conclusion de la section II-2

Au commencement de ce travail de thèse, le domaine de la lévitation magnétique avait été défini par l'impossibilité d'obtenir un vecteur $\mathbf{G}$ uniforme dans un domaine tridimensionnel et par le vecteur inhomogénéité $\mathbf{\epsilon}$. Mais les relations entre l'inhomogénéité de la compensation et la configuration de sources étaient insuffisamment établies. Il fallait donc mettre en place des outils et méthodes spécifiques à la lévitation magnétique. La méthode exposée ici est le cœur de cet ouvrage. Nous montrons dans la suite de ce travail doctoral qu'elle fournit dans différentes géométries d'excellents résultats. Au lieu de travailler sur l'expression de la force magnétique, cette démarche à l'avantage de transcrire les contraintes directement sur le champ magnétique, dont la connaissance est bien plus approfondie, par l'intermédiaire de ses harmoniques. Elle permet à la fois une souplesse théorique dans la configuration de la force magnétique par des conditions imposées au vecteur inhomogénéité, mais surtout une simplification pratique dans la conception de dispositif de lévitation magnétique de par la compréhension de l'effet des harmoniques du champ sur la force magnétique. Les chapitres III et IV sont une application théorique directe de la méthode aux cas des géométries cylindrique et axisymétrique. Dans l'annexe B, elle est en partie appliquée aux coordonnées sphéroïdales. Dans le chapitre IV, elle est mise à profit pratiquement pour la conception d'un léviteur magnétique d'oxygène liquide. Cette méthode est centrale dans ce travail de thèse.

Références bibliographiques :

- [BEY1] Beysens D., et al. **High-frequency driven capillary flows speed up the gas-liquid transition in zero-gravity conditions**, Physical Review Letters, 95, 034502 (2005)
- [CHA1] Chatain, D. et al. **Using magnetic levitation to produce cryogenic targets for inertial fusion energy: experiment and theory**, Cryogenics, 42, pp253-261 (2002)
- [CHA2] Chatain, D., communication personnelle.
- [DIL1] Diller D.E., **Measurements of the viscosity of parahydrogen**, *Journal of Chemical Physics* **42**, 2089 (1965)
- [GEN1] De Gennes P-G., et al. **Gouttes, bulles, perles et ondes**, Ed. Belin (2002) ISBN 2-7011-3024-7
- [MOL1] Moldover M.R., **Interfacial tension of fluids near critical points and two-scale-factor universality**, Physical Review A, 31, 1022, (1985)
- [WUN1] Wunnenberger R., et al. **Magnetic compensation of gravity forces in (-p) hydrogen near its critical point: Application to weightless conditions**, Physical Review E, 62, 1, pp469-476 (2000)

Chapitre III : Géométrie cylindrique

Sommaire

III-1) Electro-aimant « classique »	48
III-1.1) Analyse théorique	48
III-1.1.1) Etude analytique de la forme des pôles	50
III-1.1.2) Cas $n=3/2$	51
III-1.1.3) Saturation	52
III-1.1.4) Influence du circuit magnétique	53
III-1.2) Simulation.....	55
III-1.2.1) Cas 1	55
III-1.2.2) Cas 2	57
III-1.2.3) Re-dimensionnement zone de travail	58
III-1.3) Conclusion de la section III-1	59
III-2) Méthode harmonique en géométrie cylindrique	60
III-2.1) Définition de la géométrie	60
III-2.2) Détermination de la forme générale du vecteur G.....	60
III-2.3) Détermination de G pour trois familles d'harmoniques	63
III-2.3.1) Mise en équation des trois conditions d'homogénéité.....	63
III-2.3.1.1) Première famille de solutions	63

III-2.3.1.2) Deuxième famille de solutions	63
III-2.3.1.3) Troisième famille de solutions	64
III-2.3.2) Calcul des harmoniques, de G et de Σ_L pour chaque famille	64
III-2.3.2.1) Première famille de solutions – cas circulaire	64
III-2.3.2.2) Deuxième famille de solutions – cas horizontal	67
III-2.3.2.3) Troisième famille de solutions – cas « vertical »	68
III-2.4) Détermination de la nappe de courant	70
III-2.4.1) Densité surfacique ($A.m^{-1}$)	70
III-2.4.2) Densité volumique ($A.m^{-2}$)	70
III-2.5) Visualisation des résultats par simulation numérique	72
III-2.5.1) Choix des paramètres de simulation	72
III-2.5.2) Simulations cas horizontal et vertical et troncature à 3 harmoniques	72
III-2.5.3) Simulations cas circulaire et invariance par déphasage α des harmoniques.....	74
III-2.5.3.1) Cas circulaire	74
III-2.5.3.2) Invariance : vecteur homogénéité fixe et lignes de champ tournantes	75
III-2.5.3.3) Deux premiers harmoniques du champ fixes, ε tournant	76
III-2.5.3.4) Conclusion	78
III-2.6) Lévitatie de l'oxygène et de l'hydrogène par les technologies actuelles	79
III-2.6.1) Relations théoriques entre les différentes grandeurs	79
III-2.6.2) Applications numériques	80
III-2.6.2.1) Multipôles J-PARC.....	80
III-2.6.2.2) Dispositifs dérivés des dipôles LHC	81
III-2.7) Conclusion de la section III-2.....	83
III-3) Compensation magnétique et force centrifuge	85
III-3.1) Positionnement du problème	85
III-3.1.1) Géométrie	85
III-3.1.2) Force centrifuge	86
III-3.2) Force magnétique engendrée par un champ quadrupolaire, et force centrifuge en apesanteur	86
III-3.3) Force magnétique permettant de simuler sur terre une force centrifuge existant en apesanteur sur des matériaux paramagnétiques.....	87
III-3.3.1) Expressions de G et de ε	88
III-3.3.2) Relation entre champ magnétique et fréquence de rotation.....	89
III-3.3.3) Décalage du centre de la rotation simulée	92
III-3.3.3.1) Forme de $\text{équi}\Sigma_L$	92
III-3.3.3.2) Forme du vecteur inhomogénéité ε	93
III-3.3.3.3) Simulations de rotation	94
III-3.3.3.4) Applications numériques	95
III-3.4) Association de forces magnétique et centrifuge permettant d'obtenir sur la terre la compensation parfaite de la pesanteur pour les corps diamagnétiques	95
III-3.4.1) Compensation exacte de pesanteur sur matériaux diamagnétiques.....	95
III-3.4.2) Simulation, au sol, de rotation, en apesanteur, sur les matériaux diamagnétiques	97
III-3.5) Conclusion de la section III-3.....	97
III-4) Conclusion du chapitre III	99
Références bibliographiques :	101

La plupart des dispositifs de lévitation magnétique étudiés ou réalisés jusqu'ici présente une configuration axisymétrique, i.e. 2D invariante par rotation [BEA1] [BER1] [BRA1] [IKE1] [BEY1] [WUN1]. Ces expériences de lévitation magnétique mettent en jeu des champs magnétiques égaux ou supérieurs à 10T. Il est donc nécessaire d'utiliser soit des électroaimants conducteurs à champ très intense, refroidis à l'eau, soit des électroaimants supraconducteurs, soit des systèmes hybrides associant ces deux techniques. Dans le cas le plus intéressant économiquement de l'utilisation de supraconducteurs seuls, la réalisation de systèmes de lévitation très performants obéit à des contraintes proches de celles imposées à la conception des bobines de champ dans les dispositifs d'Imagerie par Résonance Magnétique (IRM).

Le développement de grands bobinages supraconducteurs a été rendu nécessaire également par celui des accélérateurs de particules tels que le Relativistic Heavy Ion Collider (RHIC) ou le Large Hadron Collider (LHC) [ROS1][ANE1][ROS2]. Les grands accélérateurs nécessitent pour le guidage du faisceau de particules des bobinages « multipolaires » type dipôle, quadrupôle, etc... en géométrie cylindrique, i.e. 2D invariante par translation sur une grande partie de leur longueur [ROS3][FEL1][SAR1].

Rares sont les études ou projets de dispositifs de lévitation magnétique en géométrie 2D-cylindrique utilisant des bobinages de type accélérateurs de particules. Quelques études théoriques effectuées dans notre équipe de recherche portent sur la lévitation magnétique du deutérium ou de l'eau dans cette géométrie cylindrique [QUE1] [VIN1], sans qu'elles aient pu conduire à des réalisations effectives.

Le présent chapitre est consacré à l'approfondissement des connaissances sur les possibilités offertes par la lévitation magnétique en géométrie 2D-cylindrique. L'étude de la modification d'un électroaimant classique (non supraconducteur) utilisant une culasse magnétique est d'abord présentée. Ce travail traite du dimensionnement de pôles magnétiques et des possibilités ainsi offertes en terme de lévitation magnétique par l'utilisation d'un dispositif ne demandant aucune installation particulière de refroidissement. Puis une seconde partie, plus conséquente, traitera de l'application aux coordonnées cylindriques de la méthode générale d'analyse harmonique. Cette seconde partie introduira également d'étonnants résultats produits par la combinaison de champs de forces d'origine gravitationnelle, magnétique mais aussi centrifuge.

III-1) Electro-aimant « classique »

Nous proposons de dimensionner des pôles à géométrie cylindrique pour l'électroaimant présenté sur la figure 1, dans la zone de l'entrefer. Ce dispositif comporte deux bobinages de 250 spires ($N=500$) répartis de part et d'autre de l'entrefer et parcourus par un courant nominal de 60A ($I=60A$). Il comporte une culasse magnétique en fer doux.

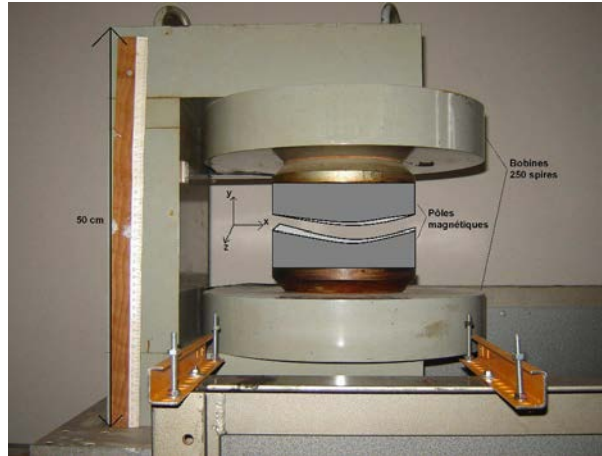


FIG. 1. Vue « d'artiste » des pôles de l'électroaimant

L'objectif est d'obtenir l'effet des différentes grandeurs liées à l'électroaimant (Nombre d'Ampère.tours, taille de l'entrefer, forme des pôles) sur celles liées à la lévitation magnétique au sein de l'entrefer (induction $\mathbf{B}$, gradient $\mathbf{G}$, homogénéité ϵ). Dans un premier temps nous effectuons une approche analytique sous certaines hypothèses. Ensuite nous complétons par des simulations numériques tenant compte de la saturation et de la longueur finie des pôles du dispositif.

Pour ce faire, nous utilisons le potentiel magnétique complexe $\zeta(z) = -\lambda \cdot \bar{z}^n$, avec comme objectif de définir une zone de travail assez large, où peut régner un vecteur $\mathbf{G}$ suffisamment important et le plus homogène possible.

III-1.1) Analyse théorique

Nous travaillons dans le repère xOy comme défini sur la figure 2. Et nous cherchons à lier le vecteur inhomogénéité à la forme des pôles et à la taille de l'entrefer. Nous introduisons tout d'abord le potentiel magnétique complexe, puis en déduisons le champ magnétique et le gradient, pour finalement exprimer les composantes ϵ_x et ϵ_y en fonctions de certains paramètres définissant la forme des pôles.

Nous partons de la définition mathématique du potentiel magnétique complexe $\zeta(z)$ [DUR1], où λ et n sont des nombres réels :

$$\zeta(\bar{z}) = -\lambda \cdot \bar{z}^n = F + i \cdot V \quad (\text{III-1})$$

et

$$\bar{z} = r \cdot e^{j\theta} = x + jy \quad (\text{III-2})$$

avec j l'unité imaginaire, $F = \frac{A_z}{\mu_0}$ où A_z est l'unique composante du potentiel vecteur dans la géométrie considérée et V le potentiel magnétique scalaire, dont une équipotentielle peut être définie de la manière suivante :

$$V = -\lambda r^n \sin(n\theta) \quad (\text{III-3})$$

Le champ magnétique se déduit de l'équation précédente et s'exprime en coordonnées cylindriques :

$$\vec{H} = -\text{grad}(\vec{V}) = \begin{cases} H_r = n \cdot \lambda \cdot r^{n-1} \cdot \sin(n\theta) \\ H_\theta = n \cdot \lambda \cdot r^{n-1} \cdot \cos(n\theta) \\ H_z = 0 \end{cases} \quad (\text{III-4})$$

L'expression du vecteur $\vec{G}$ prend la forme :

$$\vec{G} = \mu_0^2 \cdot \lambda^2 \cdot n^2 \cdot (2n-2) \cdot r^{(2n-3)} \cdot \vec{e}_r \quad (\text{III-5})$$

Rappelons la définition du vecteur ϵ , signifiant la précision relative de la compensation, et cherchons à approximer les composantes de ce vecteur :

$$\bar{\epsilon} = \frac{|\vec{G} - \vec{G}_I|}{|\vec{G}_I|} \quad (\text{III-6})$$

où $\vec{G}$ désigne le vecteur compensation effective en un point et $\vec{G}_I$ le vecteur compensation exacte au point O. Ainsi, pour une zone circulaire de rayon R autour du point O de compensation exacte, une approximation de la composante verticale du vecteur ϵ (Fig. 2) est obtenue par :

$$\epsilon_y = \frac{R}{G_I} \cdot \left. \frac{dG}{dy} \right|_O \quad (\text{III-7})$$

Pour la zone cylindrique de rayon R autour du point O, l'équation fondamentale qui lie le gradient, l'induction et les composantes du vecteur inhomogénéité s'écrit [QUE2]:

$$B_I = \sqrt{\frac{G_r \cdot R}{2(\epsilon_x + \epsilon_y)}} \quad (\text{III-8})$$

Cette relation permet d'estimer la composante horizontale du vecteur ϵ :

$$\varepsilon_x = \frac{G_I R}{2.B_I^2} - \varepsilon_y \quad (\text{III-9})$$

Des équations précédentes, on tire les ratios entre les composantes du vecteur inhomogénéité ε et le rayon R de la zone utile :

$$\frac{\varepsilon_y}{R} = \frac{2n-3}{r} \text{ et } \frac{\varepsilon_x}{R} = \frac{2-n}{r} \quad (\text{III-10})$$

III-1.1.1) Etude analytique de la forme des pôles

Les équipotentiels magnétiques V vont représenter les limites de l'entrefer, c'est à dire que les pôles auront la forme de ces équipotentiels (Fig. 2). La hauteur à laquelle est définie la forme du pôle inférieur vaut δ_0 . Le pôle supérieur est défini pour une hauteur de $\delta_0 + \delta$, avec δ la taille d'entrefer.

On se place dans l'hypothèse où l'on néglige les chutes de potentiel magnétique dans le fer. Nous allons fixer arbitrairement l'une des équipotentiels V_I par rapport à l'équipotentielle $V=0$, avec une première valeur de δ_0 , soit en $\theta = \frac{\pi}{2}$ (selon l'axe y Fig. 2):

$$-V_I = \lambda. \delta_0^n \quad (\text{III-11})$$

En choisissant l'axe y comme axe de symétrie et sachant que l'axe x est défini en $\theta=0$, on fait subir une rotation dans le sens trigonométrique, pour $n>1$, de l'ensemble des équipotentiels d'un angle :

$$\theta_{min} = \frac{\pi}{2.n}(n-1) \quad (\text{III-12})$$

Sinon l'axe de symétrie des équipotentiels serait défini par l'angle $\frac{\pi}{2} - \theta_{min}$.

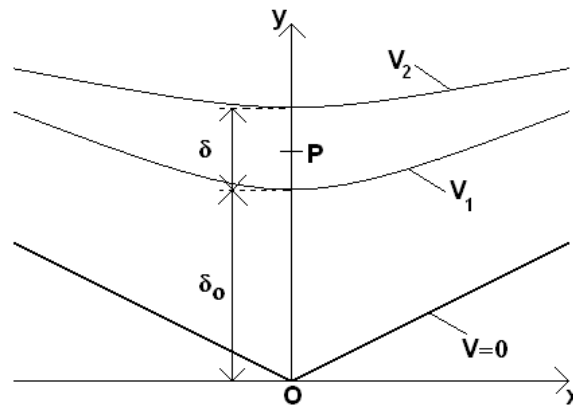


FIG. 2. Position du problème

Si on se donne la valeur des ampères.tours NI , entre les deux équipotentiellles V_1 et V_2 , et δ la taille de l'entrefer entre ces deux équipotentiellles, il vient en $\theta=\frac{\pi}{2}$ (selon l'axe y):

$$V_2=V_1-NI=-\lambda(\delta_o+\delta)^n \quad (\text{III-13})$$

Et on trouve, en faisant le rapport de (III-13) par (III-11):

$$\frac{V_2}{V_1}=\frac{(\delta_o+\delta)^n}{\delta_o^n} \quad (\text{III-14})$$

D'où l'on déduit la taille de l'entrefer δ en fonction des autres paramètres :

$$\delta=\delta_o[(1+\frac{NI}{\lambda.\delta_o^n})^{\frac{1}{n}}-1] \quad (\text{III-15})$$

la taille de l'entrefer diminue lorsque δ_o augmente ($n>1$) à NI et λ donnés.

En se plaçant au centre de l'entrefer au point $P(0,\delta_o+\frac{\delta}{2})$, et en prenant comme valeur de R (rayon de la zone utile) la moitié de l'entrefer, les inhomogénéités s'écrivent, pour $n=3/2$:

$$\varepsilon_x=\frac{1}{2.\delta_o+\delta} \text{ et } \varepsilon_y=0 \quad (\text{III-16) et (III-17)}$$

III-1.1.2) Cas $n=3/2$

Pour une valeur de $G=G_1$ donnée et $n=3/2$, nous obtenons d'après (III-5) :

$$\lambda=\frac{2}{3.\mu_o}\sqrt{G_1} \quad (\text{III-18})$$

ainsi V_1 est fixé, ce qui fixe V_2 par la relation (III-13).

Soit pour ε_x :

$$\varepsilon_x=\frac{1}{\left[(\delta_o^{\frac{3}{2}}+\frac{NI}{\lambda})^{\frac{2}{3}}+\delta_o\right]} \quad (\text{III-19})$$

Cette relation montre que ε_x décroît lorsque δ_o ou NI croît. Par contre ε_x croît avec λ , c'est à dire avec G_1 .

Dans ce cas, des relations (III-4) et (III-5), il vient :

$$B^2=|G|_r \quad (\text{III-20})$$

III-1.1.3) Saturation

Pour une valeur donnée de l'entrefer minimal, dans le cas de $n=3/2$ et G constant, la relation (III-20) permet de définir une valeur limite de l'induction magnétique B_{lim} à une distance r_{max} au niveau de l'entrefer selon :

$$B < B_{lim} = \sqrt{G \cdot r_{max}}, \text{ soit : } r_{max} < \frac{B_{lim}^2}{G} \quad (\text{III-21})$$

r_{max} diminue avec B_{lim} à G donné. Là aussi, pour raison de sur-saturation du circuit magnétique, seules les petites valeurs de limites sont plus réalistes.

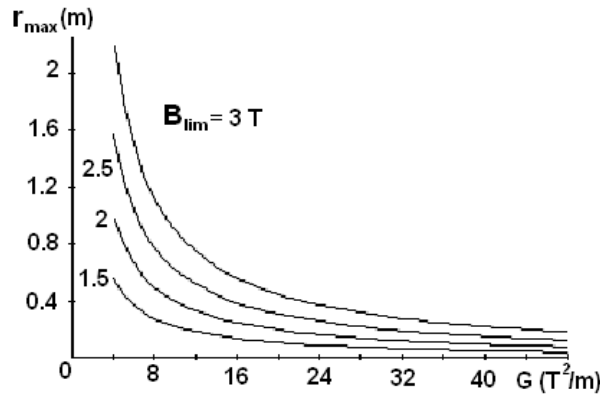


FIG. 3. r_{max} fonction de G et B_{lim} pour $n=3/2$

Et en s'imposant une valeur r_{max} , on a pour $n=3/2$:

$$\frac{\varepsilon_x}{R} = \frac{G}{2 \cdot B_{lim}^2} \quad (\text{III-22})$$

La grandeur $\frac{\varepsilon_x}{R}$ varie linéairement en fonction de G pour une induction de saturation donnée. Cette grandeur est d'autant plus faible que B_{lim} est grand (Fig.4).

La taille de la zone de travail dans l'entrefer, délimitée par δ_o et r_{max} , dépend tout d'abord des valeurs souhaitées de G et de $\frac{\varepsilon_x}{R}$. Mais, elle est également liée à B_{lim} , puisque cette valeur doit être relativement faible ($< 2T$ pour du fer) pour ne pas trop saturer la partie ferromagnétique du circuit, ce qui aurait pour effet de rendre caduque l'assimilation de la surface des pôles à des équipotentielles magnétiques, et de perturber la distribution harmonique du champ.

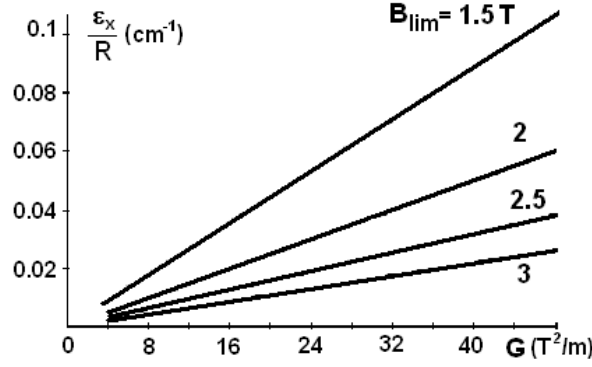


FIG. 4. $\frac{\epsilon_x}{R}$ fonction de G et B_{lim} pour $n=3/2$

III-1.1.4) Influence du circuit magnétique

Le circuit magnétique est constitué de la culasse, des pôles et de l'entrefer (Fig.5). Les réluctances de la culasse R_{fer} et des pôles R_{pole} sont très saturables.

D'après le schéma magnétique équivalent de la figure 5, la différence de potentiel magnétique ΔV aux bornes de l'entrefer est :

$$\Delta V = NI \frac{R_e}{R_{fer} + R_e + R_{pole}} \quad (III-23)$$

où R_e est la réluctance de l'entrefer.

L'expression (III-13) s'exprime en réalité sous la forme (III-23). Les simulations numériques effectuées par la suite tiennent compte de la saturation des matériaux. Nous présentons simplement, dans cette section, les calculs permettant d'obtenir les grandeurs utilisées dans l'expression (III-23).

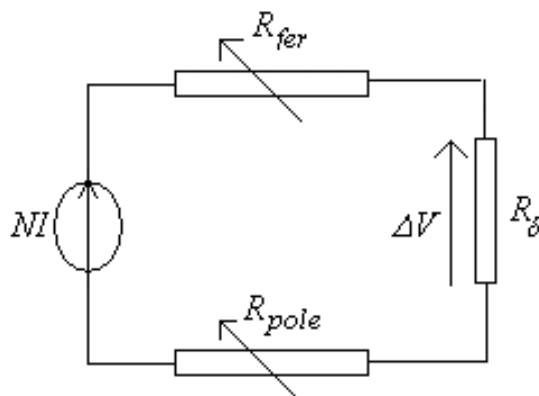


FIG. 5. Schéma magnétique équivalent

La réluctance de la culasse est très facile à calculer selon :

$$R_{fer} = \frac{l_{fer}}{\mu_0 \cdot \mu_{fer} \cdot l_p \cdot e_p} \quad (III-24)$$

où μ_{fer} est la perméabilité relative du fer, l_{fer} est la longueur moyenne du circuit ferromagnétique, e_p son épaisseur et l_p sa largeur.

Par contre pour déterminer celles de l'entrefer et des pôles, il faut d'abord déterminer la largeur de pôles e_{pole} d'après la figure 6 :

$$e_{pole} = 2 \cdot r_{max} \cos \theta_1 \quad (III-25)$$

Cette donnée permet de calculer la réluctance des pôles selon la relation :

$$R_{pole} = \frac{l_{pole}}{\mu_o \cdot \mu_{pole} \cdot l_p \cdot e_{pole}} \quad (III-26)$$

où μ_{pole} est la perméabilité relative des pôles, l_{pole} est la longueur moyenne des pôles, e_p leur épaisseur et l_p leur largeur.

En première approximation, nous négligeons les franges au niveau de l'entrefer (cette hypothèse n'est vérifiée que si la largeur de l'entrefer minimale est petite devant les autres dimensions des pôles). Estimons le flux $d\phi$ traversant l'élément dl selon une longueur l_p des pôles (Fig.6), soit :

$$d\phi = \mu_o \cdot \vec{H} \cdot \vec{n} \cdot ds \quad (III-27)$$

avec $ds = l_p \cdot dl$ et comme $\vec{H} // \vec{n}$:

$$d\phi = \mu_o \|\vec{H}\| l_p \cdot dl \quad (III-28)$$

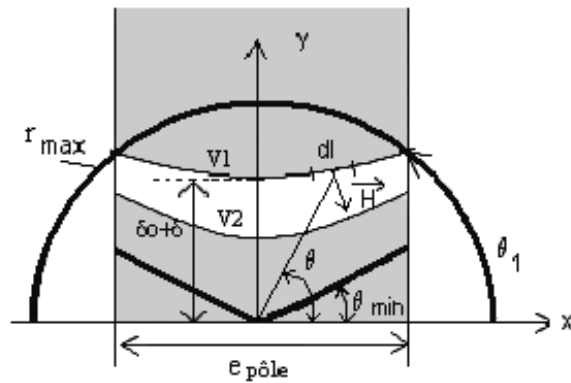


FIG. 6. Eléments de calcul du flux d'entrefer

Estimons l'élément dl au niveau de l'équipotentielle supérieure, soit :

$$dl = dl(\theta) = \sqrt{r^2(\theta) + \left(\frac{dr(\theta)}{d\theta}\right)^2} \cdot d\theta \quad (III-29)$$

Après calcul, on obtient :

$$dl(\theta) = r(\theta) \cdot \frac{l}{\sin(n(\theta - \theta_{\min}))} d\theta \quad (\text{III-30})$$

D'où le flux traversant la surface du pôle supérieur :

$$\phi = 2 \int_{\theta_1}^{\frac{\pi}{2}} d\phi \quad (\text{III-31})$$

soit :

$$\phi = 2\mu_0 l_p (-V_1) \left[\cot g(n(\theta - \theta_{\min})) \right]_{\theta_1}^{\frac{\pi}{2}} \quad (\text{III-32})$$

Dans ce cas, il vient pour la perméance (réductance inverse) d'entrefer :

$$\Lambda_e = 2\mu_0 l_p \tan(n(\frac{\pi}{2} - \theta_1)) \quad (\text{III-33})$$

III-1.2) Simulation

Le but de la simulation numérique est, dans ce cas, d'obtenir des résultats plus proche de la réalité que le précédent calcul analytique exécuté sous certaines conditions. Les grandeurs telles que l'induction **B**, le vecteur **G** ou l'inhomogénéité **ε** de la compensation vont être obtenues au sein de la zone de travail contenue dans l'entrefer. Les pôles prennent des dimensions réelles contrairement aux calculs théoriques où ils sont supposés infiniment longs, nous avons travaillé en fait sur les équipotentielle et non les pôles.

Le logiciel de simulations numériques utilisé est un logiciel d'éléments finis du commerce COMSOL MultiphysicsTM.

La valeur du gradient $G_I = 8 \text{ T}^2/\text{m}$ est fixée de sorte qu'elle corresponde à celle de l'oxygène liquide (90K, 1Atm). Pour les deux structures de pôles qui vont être étudiées, nous devons alors appliquer 6330 At entre les pôles, soit entre V_1 et V_2 (cas 1), soit entre V_0 et V_1 (cas 2) (Fig. 2), et nous nous limitons à $B_{lim} = 0,7 \text{ T}$. Les pôles ont dans les deux cas les mêmes dimensions suivant les axes x et y.

Nous observons l'évolution des composantes du vecteur inhomogénéité **ε**, suivant la taille de l'entrefer, au sein de la zone cylindrique représentant une coupe de la cellule d'oxygène placée dans l'entrefer. Nous considérons qu'au centre de cette cellule la compensation est exacte.

III-1.2.1) Cas 1

La figure 7 fournit la carte de l'induction obtenue grâce à une simulation par éléments finis. L'entrefer a une épaisseur de 12,5mm. Le cercle représente une coupe de la cellule d'oxygène de forme cylindrique à base circulaire. Les tracés des composantes ϵ_x et ϵ_y du vecteur inhomogénéité **ε** sont donc réalisés à l'intérieur de ce dernier.

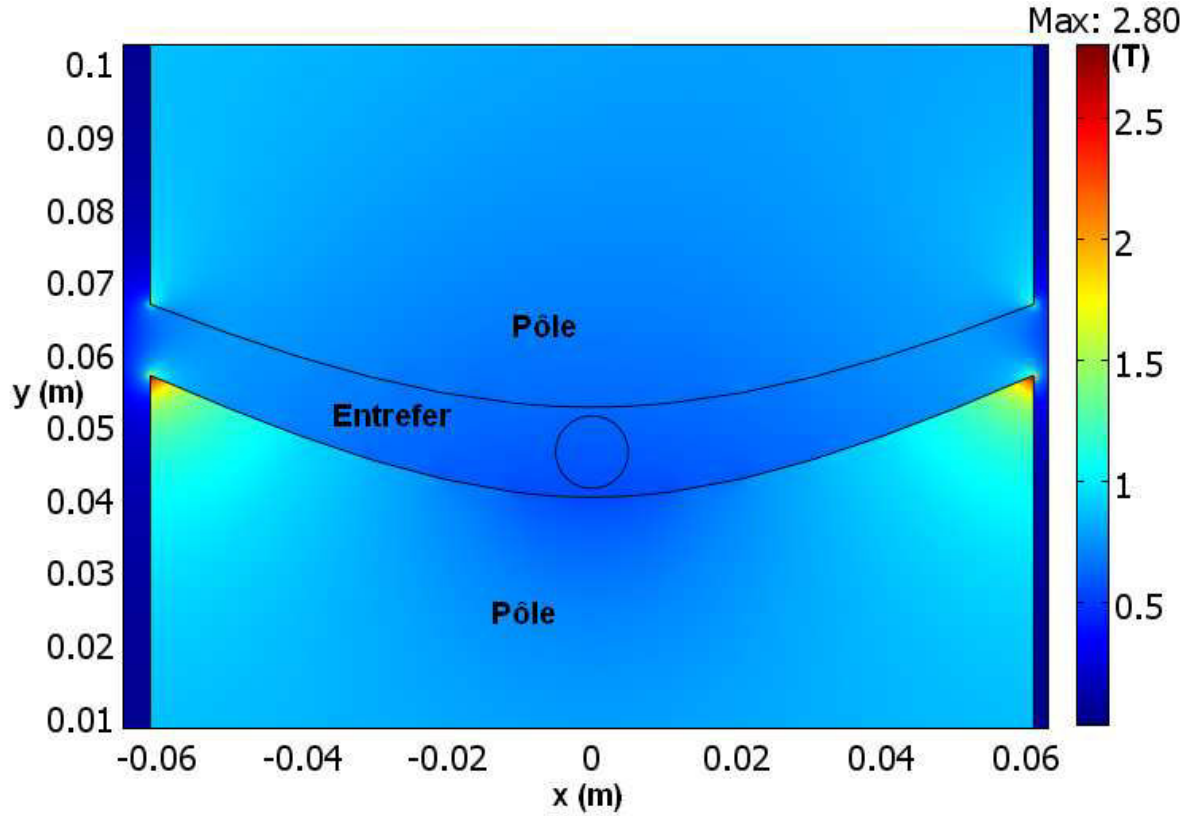


FIG. 7. Induction dans un entrefer de 12,5mm avec $R=5\text{mm}$.

La figure 8 présente la norme de l'induction B au centre de l'entrefer. La chute de force magnéto motrice (f.m.m.) pour obtenir ces valeurs est de l'ordre de 7%, ceci en prenant une induction d'entrefer $B_e=0,59\text{T}$. Cette valeur confirme l'intérêt du paragraphe 1.1.4. Notons également que l'induction dans cette zone est inférieure à B_{lim} .

Sur les figures 9 et 10 sont respectivement reportées les composantes verticale et horizontale du vecteur inhomogénéité. Les deux composantes sont antisymétriques par rapport à l'axe $x=0$. On constate que la composante horizontale varie entre $\pm 11\%$. Quant à la composante verticale, elle est légèrement plus faible et comprise entre -9% et 6% .

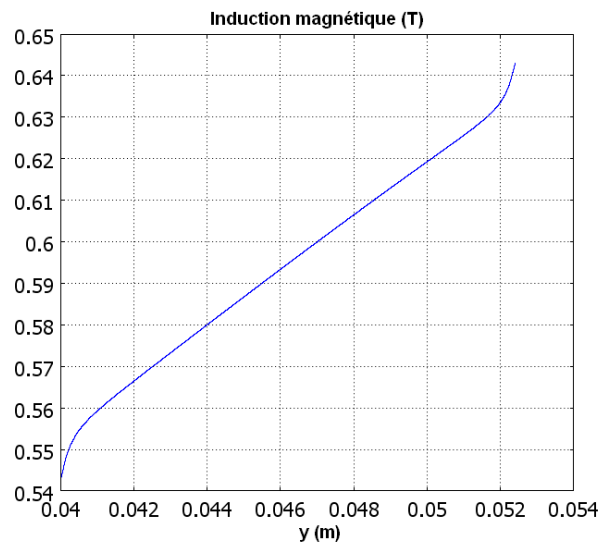
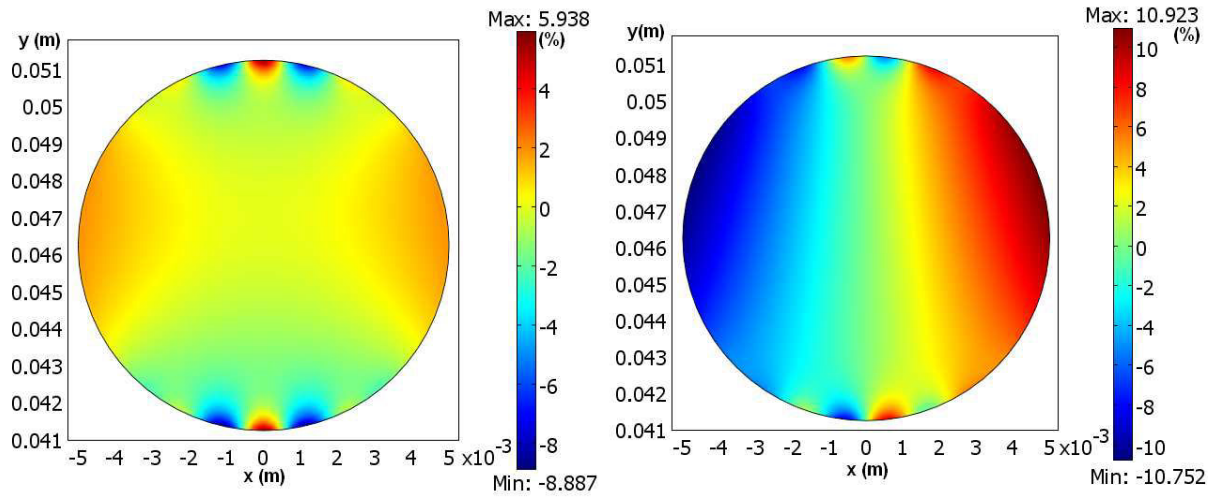
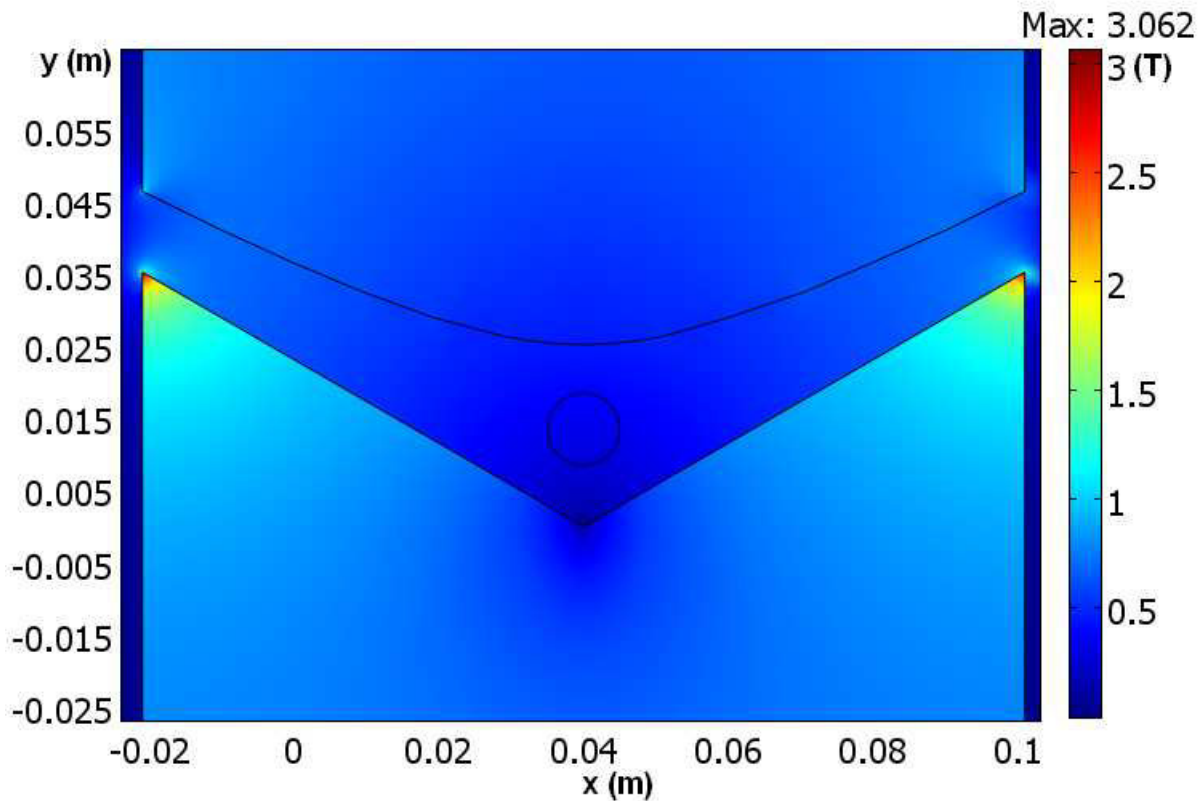


FIG. 8. Induction suivant l'axe vertical au centre de l'entrefer



III-1.2.2) Cas 2

Dans ce cas, l'équipotentielle inférieure est prise égale à zéro. Et la taille de l'entrefer est augmentée d'après la relation (III-15) puisque $\delta_0=0$. L'entrefer fait maintenant 25mm d'épaisseur. La figure 11 donne la carte d'induction magnétique dans cet entrefer.



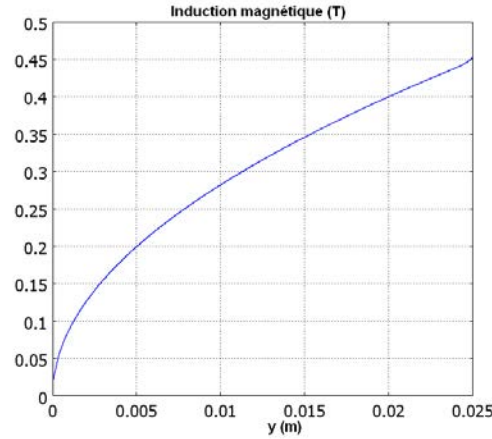


FIG. 12. Induction suivant l'axe y dans l'entrefer

La figure 12 présente l'induction dans l'entrefer. La chute de f.m.m. pour obtenir ces valeurs est seulement d'environ 3% (cf 1.1.4), en prenant comme induction d'entrefer moyenne $B_e = 0,31$ T. L'induction dans cette zone est inférieure à B_{lim} .

La valeur de la composante verticale ε_y de l'inhomogénéité est légèrement meilleure (Fig. 13). Par contre la composante horizontale ε_x donnée par la figure 14 est nettement dégradée par rapport au cas 1, puisqu'elle varie entre $\pm 37\%$. Ce résultat est totalement prévu par (III-16).

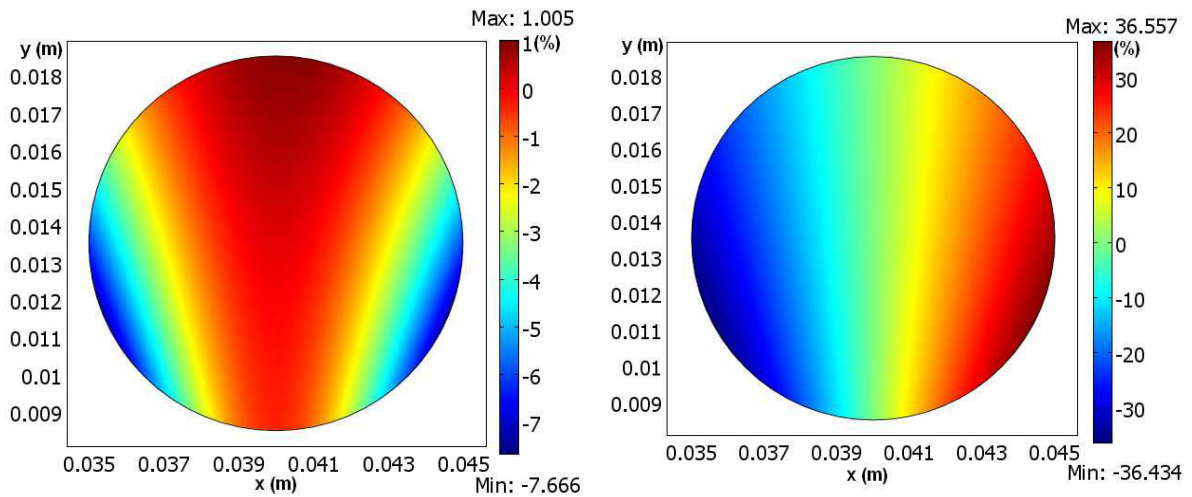


FIG. 13. ε_y dans la zone de travail avec $R=5$ mm / FIG. 14. ε_x dans la zone de travail avec $R=5$ mm

III-1.2.3) Re-dimensionnement zone de travail

Dans le cas où l'on souhaite travailler avec les mêmes conditions que dans le cas 2 (valeur d'induction et chute de f.m.m. faible) et avec les mêmes valeurs d'inhomogénéité ε_x et ε_y que dans le cas 1, quelles sont les dimensions de la zone de lévitation cylindrique à base circulaire susceptible d'accueillir de l'oxygène liquide?

La taille de l'entrefer doit rester la même que dans le cas 2 (25mm), ce qui implique d'après la relation (III-10) que si on veut conserver la même homogénéité il faut que la zone de travail ait un rayon de 1,7mm. La carte d'induction est celle de la figure 11.

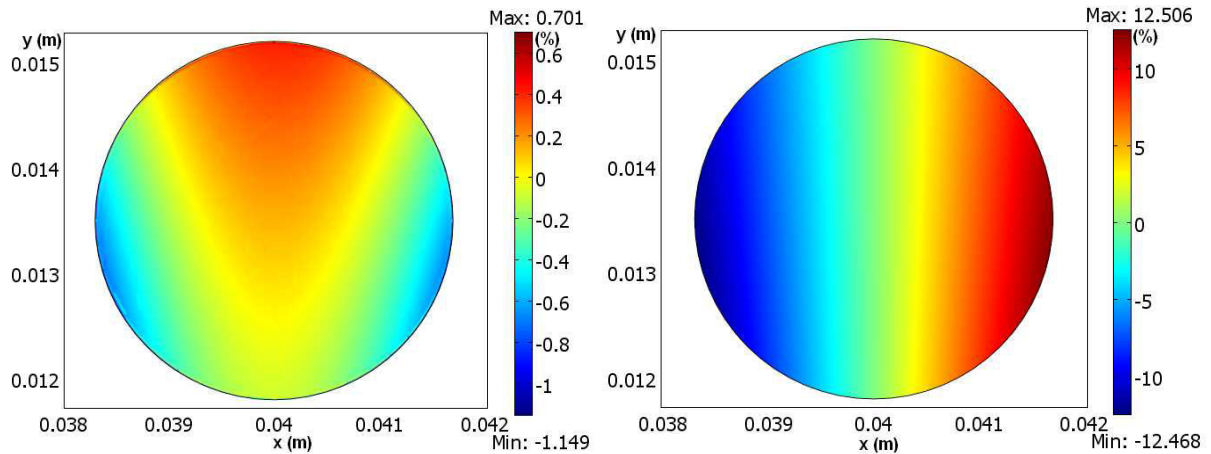


FIG. 15. ε_y dans la zone de lévitation / FIG. 16. ε_x dans la zone de lévitation

La figure 15 montre que la composante verticale de $\mathbf{G}$ est homogène à quasiment 99% dans la cellule. La figure 16 montre que ε_x obtenue par la simulation a quasiment les mêmes valeurs extrêmes que celles présentées à la figure 10. Les faibles différences résultent du fait que la formule (III-10) est obtenue à partir d'un développement limité.

III-1.3) Conclusion de la section III-1

La lévitation de fluides demande de faibles valeurs d'inhomogénéités. La valeur généralement fixée se situe aux alentours de 1%. Pour obtenir de très petites valeurs de ε_x , les pôles doivent être réalisés en accord avec le cas 1 : c'est à dire avec δ_0 le plus grand possible. Mais la taille de l'entrefer et donc de la zone de travail décroissent dans le même rapport.

En appliquant 6330At dans cet électroaimant classique, nous montrons que la lévitation d'oxygène liquide (à 90K) est accessible du fait de sa forte susceptibilité. La compensation verticale peut dans une zone de 3,4 mm de diamètre être inférieure à 1%, mais la compensation horizontale reste d'environ 10%.

En utilisant les résultats théoriques de la première partie et en appliquant sur un électroaimant équivalent 31800At, il devrait être possible de réaliser la lévitation d'oxygène liquide à 90K avec des inhomogénéités inférieures à 1% dans une zone de 2cm d'épaisseur. Du fait de la taille importante de l'entrefer, la dégradation des valeurs d'inhomogénéité due à la largeur finie des pôles doit être bien évaluée. Mais l'électroaimant étudié ne permet pas d'atteindre plus de 30000At et, de plus, la largeur des pôles est limitée à 12cm.

Pour les plus hautes valeurs de G le diamètre de la zone de travail diminue à ε_x donné. Par exemple $G=50T^2/m$ à 1% donne une zone de travail de 3,2mm de diamètre. En conséquence, seules quelques substances inorganiques peuvent être lévitées magnétiquement dans de tels dispositifs.

Il serait théoriquement possible avec un électroaimant classique de compenser la gravité sur de l'eau ($2717T^2/m$) mais les zones de travail deviennent très petites. Par exemple, on ne peut sur ce type d'électroaimant avoir mieux pour de l'eau qu'une inhomogénéité de 10% dans une zone de 580μm de diamètre !

Dans la suite, les dispositifs que nous considérerons, destinés à réaliser la lévitation de fluides dans des zones de travail conséquentes, utiliseront des bobines supraconductrices afin de créer des inductions plus importantes que celles des électro-aimants classiques.

III-2) Méthode harmonique en géométrie cylindrique

Dans cette seconde partie, nous appliquons la méthode de décomposition harmonique au cas des coordonnées cylindriques (invariantes par translation), ou plus particulièrement aux coordonnées polaires puisque nous nous plaçons dans un espace 2D invariant par translation. Cette méthode a été développée, afin de contrôler et de maîtriser les configurations d'accélération résiduelles. Elle permet de comprendre l'effet de chacun des harmoniques du champ magnétique sur la compensation magnétique de pesanteur. Elle peut trouver son intérêt quelque soit la nature des sources de champs (électro-aimants avec culasse, bobinages supraconducteurs de types multipolaires). Cette méthode est particulièrement bien adaptée aux multipôles d'accélérateurs.

Des simulations numériques, de compensation magnétique de pesanteur pour l'oxygène liquide, illustrent les résultats théoriques et permettent de visualiser les possibilités offertes par cette méthode.

Mais tout d'abord rappelons les grandeurs et expressions fondamentales (force magnétique, accélération résiduelle et équipotentielles magnéto-gravitationnelles) définies dans le début de cet ouvrage.

III-2.1) Définition de la géométrie

Définissons avant tout la géométrie du système. Le problème considéré possède une invariance par translation suivant l'axe z , le système est donc indépendant de cette variable.

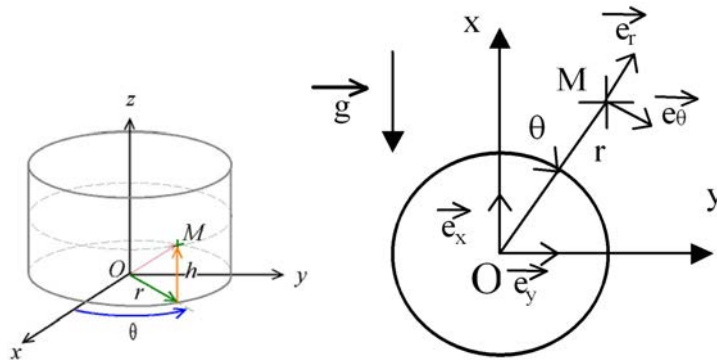


FIG. 17. Coordonnées cylindriques 2D

La pesanteur est supposée dirigée suivant l'axe x (Fig. 17):

$$\vec{g} = -g \cdot \vec{e}_x \quad (\text{III-34})$$

Les expressions de la force magnétique, du vecteur inhomogénéité relative $\mathbf{\epsilon}$ de la compensation et du potentiel magnéto-gravitationnel Σ_L sont celles du chapitre I (cf. expressions (I-3), (I-6) et (I-8)). La compensation magnétique sera choisie exacte au centre du dispositif ($r=0$) pour un vecteur $\mathbf{G}=\mathbf{G}_1$ défini par l'expression (I-5). La norme de l'induction au centre du système est prise égale à B_I .

III-2.2) Détermination de la forme générale du vecteur $\mathbf{G}$

Le domaine considéré ne contenant pas de courant, le champ magnétique dérive d'un potentiel scalaire V qui se mesure en ampère :

$$\vec{H} = -\overrightarrow{\text{grad}V} \quad (\text{III-35})$$

Le potentiel scalaire V vérifie, en dehors de tout courant, l'équation de Laplace et peut donc être décomposé en harmoniques cylindriques :

$$V(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} (A''_n \cdot r^n + B''_n \cdot r^{-n}) \cdot (C''_n \sin(n\theta) + D''_n \cos(n\theta)) \quad (\text{III-36})$$

Où A''_n , B''_n , C''_n et D''_n sont des constantes déterminées en fonction des conditions aux limites ($r=0$ et $r \rightarrow \infty$). Ainsi, on détermine un potentiel intérieur et un potentiel extérieur à un cylindre (cercle en 2D) de rayon R_0 . Ce potentiel scalaire peut être créé par une nappe superficielle de courant répartie sur ce cylindre de rayon R_0 :

$$V_{\text{int}}(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n \cdot (C'_n \sin(n\theta) + D'_n \cos(n\theta)), \quad r < R_0 \quad (\text{III-37})$$

$$V_{\text{ext}}(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} r^{-n} \cdot (C'_n \sin(n\theta) + D'_n \cos(n\theta)), \quad r > R_0 \quad (\text{III-38})$$

où $C_n = A''_n \cdot C''_n$, $D_n = A''_n \cdot D''_n$, $C'_n = B''_n \cdot C''_n$ et $D'_n = B''_n \cdot D''_n$, ce qui donne, d'après (III-35), l'expression en coordonnées polaires (Fig. 17) des harmoniques cylindriques du champ de part et d'autre du cercle de rayon R_0 :

$$\vec{H}_{\text{int}_n}(r, \theta) = \begin{cases} -n \cdot r^{n-1} \cdot A'_n \cdot \sin(n\theta + \alpha'_n) \\ -n \cdot r^{n-1} \cdot A'_n \cdot \cos(n\theta + \alpha'_n) \end{cases}, \quad r < R_0 \quad (\text{III-39})$$

$$\vec{H}_{\text{ext}_n}(r, \theta) = \begin{cases} n \cdot r^{-(n+1)} \cdot A'_n \cdot \sin(n\theta + \alpha'_n) \\ -n \cdot r^{-(n+1)} \cdot A'_n \cdot \cos(n\theta + \alpha'_n) \end{cases}, \quad r > R_0 \quad (\text{III-40})$$

où A'_n , A'_n , α'_n et α'_n sont des constantes fixées par les conditions d'homogénéité désirées sur le vecteur $\mathbf{G}$, l'indice n est relatif au n -ième harmonique. A partir des expressions du champ magnétique (III-39) et (III-40), nous calculons le vecteur $\mathbf{G}$, qui représente la force magnétique. On cherche tout d'abord l'expression du carré de la norme de l'induction magnétique à l'intérieur du cylindre. Nous ne nous intéressons qu'aux grandeurs intérieures, comme dans le cas de la conception de multipôles d'accélérateurs de particules, tels que les dipôles, quadrupôles ou encore sextupôles, où le champ magnétique dans la zone utile est réalisé par des bobinages extérieurs à cette zone. Il existe également un vecteur $\mathbf{G}$ extérieur, a priori sans intérêt pour la microgravité.

Remarque : Toutes les grandeurs seront désormais des grandeurs intérieures au système sauf contre-indication, nous ne précisons plus « int » en indice : $X_{\text{int}} \rightarrow X$

$$B^2(r, \theta) = \mu_0^2 \left(\sum_{n=0}^{\infty} n r^{n-1} \mathcal{A}_n \sin(n\theta + \alpha_n) \sum_{p=0}^{\infty} p r^{p-1} \mathcal{A}_p \sin(p\theta + \alpha_p) + \sum_{n=0}^{\infty} n r^{n-1} \mathcal{A}_n \cos(n\theta + \alpha_n) \sum_{p=0}^{\infty} p r^{p-1} \mathcal{A}_p \cos(p\theta + \alpha_p) \right) \quad (\text{III-41})$$

L'expression du champ de vecteur $\mathbf{G}$ dérive de l'expression précédente (III-41). La relation (III-41) permet ainsi de connaître l'expression de $\mathbf{G}$ en coordonnées polaires (Fig. 17) en tout point du domaine directement en fonction des harmoniques du champ.

$$\vec{G}(r, \theta) = 2\mu_0^2 \left[\sum_{n=0}^{\infty} n r^{n-1} \mathcal{A}_n \sin(n\theta + \alpha_n) \sum_{p=0}^{\infty} p(p-1) r^{p-2} \mathcal{A}_p \sin(p\theta + \alpha_p) + \sum_{n=0}^{\infty} n r^{n-1} \mathcal{A}_n \cos(n\theta + \alpha_n) \sum_{p=0}^{\infty} p(p-1) r^{p-2} \mathcal{A}_p \cos(p\theta + \alpha_p) \right. \\ \left. - \sum_{n=0}^{\infty} n r^{n-1} \mathcal{A}_n \sin(n\theta + \alpha_n) \sum_{p=0}^{\infty} p^2 r^{p-2} \mathcal{A}_p \cos(p\theta + \alpha_p) - \sum_{n=0}^{\infty} n r^{n-1} \mathcal{A}_n \cos(n\theta + \alpha_n) \sum_{p=0}^{\infty} p^2 r^{p-2} \mathcal{A}_p \sin(p\theta + \alpha_p) \right] \quad (\text{III-42})$$

Une condition est imposée au vecteur $\mathbf{G}$, il est uniquement porté par $\mathbf{e}_r$ en $\theta=0$, c'est-à-dire que sa composante tangentielle G_θ sur l'axe $\theta=0$ doit être nulle, $G_\theta(r, 0)=0$. Cette égalité se traduit en fonction des harmoniques de champ par :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} n p^2 r^{n+p-3} \mathcal{A}_n \mathcal{A}_p \sin(\alpha_n - \alpha_p) = 0 \quad (\text{III-43})$$

une solution triviale apparaît $\forall (n, p) \in \mathbb{N}^2, \alpha_n = \alpha_p = \alpha$

Selon (III-39), la forme du champ magnétique intérieur au domaine devient :

$$\vec{H}_n(r, \theta) = \begin{cases} -n r^{n-1} \mathcal{A}_n \sin(n\theta + \alpha) \\ -n r^{n-1} \mathcal{A}_n \cos(n\theta + \alpha) \end{cases} \quad (\text{III-44})$$

La norme de l'induction au centre O vaut B_I (Fig. 17), d'où la valeur du premier harmonique :

$$\mathcal{A}_1 = \frac{B_I}{\mu_0} = H_I \quad (\text{III-45})$$

Le carré de la norme de l'induction ne dépend pas du déphasage α , s'il est le même pour tous les harmoniques. Ainsi $\mathbf{G}$ est indépendant de α , cette propriété importante sera illustrée plus loin par des simulations numériques.

$$\vec{G}(r, \theta) = 2\mu_0^2 \left[\sum_{n=0}^{\infty} n r^{n-1} \mathcal{A}_n \sin(n\theta) \sum_{p=0}^{\infty} p(p-1) r^{p-2} \mathcal{A}_p \sin(p\theta) + \sum_{n=0}^{\infty} n r^{n-1} \mathcal{A}_n \cos(n\theta) \sum_{p=0}^{\infty} p(p-1) r^{p-2} \mathcal{A}_p \cos(p\theta) \right. \\ \left. - \sum_{n=0}^{\infty} n r^{n-1} \mathcal{A}_n \sin(n\theta) \sum_{p=0}^{\infty} p^2 r^{p-2} \mathcal{A}_p \cos(p\theta) - \sum_{n=0}^{\infty} n r^{n-1} \mathcal{A}_n \cos(n\theta) \sum_{p=0}^{\infty} p^2 r^{p-2} \mathcal{A}_p \sin(p\theta) \right] \quad (\text{III-46})$$

La forme générale du gradient est ainsi déterminée dans le cas d'une géométrie cylindrique. Pour obtenir cette forme, on suppose que tous les harmoniques de champ ont le même déphasage α . La famille des harmoniques de champ $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui conduit à $G_\theta(r, 0) = 0$ ne sera pas unique, nous allons présenter trois familles possibles de solutions identiques à celles indiquées section 2.2 du chapitre II. Ces familles dépendent directement des conditions d'homogénéité fixées sur le gradient. Ces conditions d'homogénéité sont imposées sur le vecteur inhomogénéité, et sont ensuite transcrites sur les dérivées successives du gradient.

III-2.3) Détermination de G pour trois familles d'harmoniques

L'étude a été restreinte aux trois conditions d'homogénéité indiquées au chapitre II, c'est-à-dire des conditions portant sur le vecteur $\mathbf{e}$, fournissant respectivement trois familles d'harmoniques, mais une infinité d'autres familles existent, décrivant des conditions d'homogénéité intermédiaires.

La première famille d'harmoniques déterminée permet d'obtenir un vecteur inhomogénéité central dont la norme varie linéairement avec le rayon [LOR1], la dernière partie de ce chapitre lui est consacrée. La seconde famille d'harmoniques permet de créer un gradient $\mathbf{G}$ constant suivant un plan horizontal défini par $x=0$ (Fig. 17), pour cette distribution le vecteur inhomogénéité est nul suivant ce plan. La dernière famille étudiée dans ce papier permet d'obtenir un gradient $\mathbf{G}$ constant suivant un plan vertical défini par $y=0$ (Fig. 17), dans cette configuration le vecteur inhomogénéité est nul suivant ce plan.

III-2.3.1) Mise en équation des trois conditions d'homogénéité

Le vecteur $\mathbf{G}$ répond toujours aux deux conditions fixées précédemment, i.e., il compense parfaitement la pesanteur au point O, donc en tout point de l'axe Oz (axe du cylindre), et il est colinéaire à $\mathbf{e}_r$ suivant l'axe $\theta=0$.

III-2.3.1.1) Première famille de solutions

Le vecteur inhomogénéité est central, la composante orthoradiale, i.e. normale à un rayon, $\varepsilon_\theta(r, \theta)$ doit être nulle. Cette condition se traduit par la relation (III-47) tirée de l'expression du vecteur inhomogénéité :

$$G_\theta(r, \theta) = - G_l \cdot \sin \theta \quad (\text{III-47})$$

III-2.3.1.2) Deuxième famille de solutions

Le vecteur $\mathbf{G}$ doit être le plus uniforme possible suivant le plan $\theta = \frac{\pi}{2}$, ainsi il faut faire tendre $\varepsilon_r(r, \frac{\pi}{2})$ et $\varepsilon_\theta(r, \frac{\pi}{2})$ vers zéro, ce qui se traduit par la double condition (III-48) :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left. \frac{\partial^n G_r(r, \frac{\pi}{2})}{\partial r^n} \right|_{r=0} = \left. \frac{\partial^n G_\theta(r, \frac{\pi}{2})}{\partial r^n} \right|_{r=0} = 0 \quad (\text{III-48})$$

Cette double condition peut être imposée car la fonction $Gr(r, \frac{\pi}{2})$ est un polynôme impair en r et la fonction $G_\theta(r, \frac{\pi}{2})$ est un polynôme pair en r .

III-2.3.1.3) Troisième famille de solutions

Le vecteur $\mathbf{G}$ doit être le plus uniforme possible suivant le plan $\theta=0$, ainsi il faut faire tendre $\varepsilon_r(r, 0)$ vers zéro, ce qui se traduit par la condition (III-49) :

$$\forall n \in N, \left. \frac{\partial^n Gr(r, 0)}{\partial r^n} \right|_{r=0} = 0 \quad (\text{III-49})$$

Pour déterminer les harmoniques pour chacune des trois familles de solutions, il faut connaître les expressions de $Gr(r, 0)$, $Gr(r, \frac{\pi}{2})$, et $G_\theta(r, \frac{\pi}{2})$. A partir de la forme générale du gradient (III-46), il suffit de remplacer les cosinus et les sinus par leur valeur en $\theta=0$ ou $\theta=\frac{\pi}{2}$. Le second harmonique se déduit en fonction du premier à partir de l'expression de $Gr(r, 0)$. Ce deuxième harmonique fixe la valeur du gradient au centre O du dispositif (fig.17) :

$$A_2 = \frac{G_I}{4\mu o^2 A_I} \quad (\text{III-50})$$

En remplaçant le premier harmonique par sa valeur (III-45), on obtient :

$$A_2 = \frac{G_I}{4\mu o B_I} \quad (\text{III-51})$$

Les valeurs de A_I et A_2 sont valables quelque soit la famille d'harmoniques considérée, elles ne dépendent en aucun cas des conditions d'homogénéité mais uniquement des valeurs, au centre, d'une part du champ magnétique et d'autre part du gradient du carré du champ magnétique.

III-2.3.2) Calcul des harmoniques, de G et de Σ_I pour chaque famille

III-2.3.2.1) Première famille de solutions – cas circulaire

- *Les coefficients harmoniques*

Les valeurs des deux premiers harmoniques sont connues, (III-45) et (III-51). On déduit $G_\theta(r, \theta)$ à partir de (III-46) et la condition (III-47) peut ainsi s'écrire :

$$2.\mu o^2 \cdot \sum_{\substack{n,p=1 \\ n+p \geq 3}}^{\infty} n.p^2 . A_n A_p . \sin((n-p). \theta) . r^{n+p-3} = -G_I . \sin \theta \quad (\text{III-52})$$

La valeur du troisième harmonique est obtenue en prenant la dérivée de l'expression (III-52) en $r=0$ (lorsque $n+p=4$):

$$A_3 = 0 \quad (\text{III-53})$$

Une récurrence (voir Annexe I : Théorème 3) permet d'obtenir l'ensemble des harmoniques de rangs supérieurs (tous nuls) et ainsi pour le cas circulaire :

$$\begin{cases} A_1 = \frac{B_l}{\mu_0} \\ A_2 = \frac{G_l}{4\mu_0 B_l} \\ \forall n \geq 3, A_n = 0 \end{cases} \quad (\text{III-54})$$

- **Gradient G et potentiel complexe associé du champ magnétique ζ**

Les harmoniques de champ de rangs supérieurs à deux étant nuls, le gradient s'écrit :

$$\bar{G}(r, \theta) = \left[G_l \cos \theta + G_l \left(\frac{G_l}{2B_l^2} \right) r \right] \bar{e}_r - G_l \sin \theta \bar{e}_\theta \quad (\text{III-55})$$

ou,

$$\bar{G} = G_l \left(\frac{G_l}{2B_l^2} \right) r \bar{e}_r + G_l \bar{e}_x \quad (\text{III-56})$$

Le vecteur inhomogénéité peut s'écrire à partir de l'expression (III-56) :

$$\bar{\varepsilon}(r, \theta) = \left(\frac{G_l}{2B_l^2} \right) r \bar{e}_r \quad (\text{III-57})$$

ou bien,

$$\bar{\varepsilon}(x, y) = \left(\frac{G_l}{2B_l^2} \right) x \bar{e}_x + \left(\frac{G_l}{2B_l^2} \right) y \bar{e}_y \quad (\text{III-58})$$

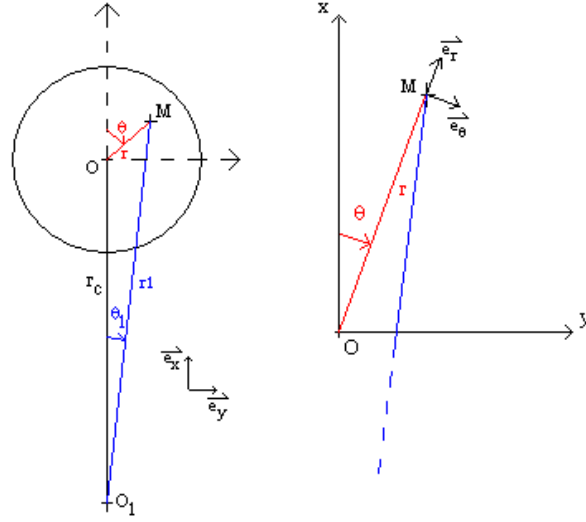


FIG. 18. Zone utile dans le domaine du potentiel magnétique complexe et définition des coordonnées polaires

Il est possible de démontrer (voir Annexe I : Théorème 5) que cette expression (III-55) du vecteur $\mathbf{G}$ est associé à un potentiel magnétique complexe ζ [DUR1], lié à un autre repère centré en O_1 (Fig. 18), de la forme :

$$\bar{\zeta} = -\beta_c \cdot \bar{z}^2 \quad (\text{III-59})$$

où la valeur de β_c vaut :

$$\beta_c = \frac{G_l}{4\mu_0 B_l} = \Lambda_2 \quad (\text{III-60})$$

et la longueur OO_1 (fig. 18), notée r_c , dépend de l'induction B_l et du gradient G_l au point O.

$$r_c = 2 \frac{B_l^2}{G_l} \quad (\text{III-61})$$

Pour ce potentiel magnétique complexe, le gradient a pour expression :

$$\bar{G} = \frac{G_l}{r_c} r_l \cdot \bar{e}_{r_l} \quad (\text{III-62})$$

Le vecteur $\mathbf{G}$ doit ensuite être exprimé dans le repère centré en O avec les coordonnées de ce repère (r, θ) , ainsi celui-ci prend la forme suivante :

$$\bar{G} = \left[G_l \cdot \cos \theta + G_l \cdot \frac{r}{r_c} \right] \cdot \bar{e}_r - G_l \cdot \sin \theta \cdot \bar{e}_\theta \quad (\text{III-63})$$

expression identique à l'expression (III-55). Un vecteur inhomogénéité purement radial, voir (III-57) peut ainsi être obtenu avec l'utilisation du potentiel magnétique complexe (III-59). Ce

potentiel complexe peut être obtenu pratiquement par un bobinage quadrupolaire pur, la zone utile étant située hors de l'axe magnétique du quadrupôle.

- ***Equipotentiellles magnéto-gravitationnelles Σ_L***

L'expression des équipotentiellles magnéto-gravitationnelles peut aisément être obtenue, en calculant l'expression du carré de l'induction magnétique :

$$\Sigma_L = \frac{B_l^2}{G_l} + \frac{G_l}{4B_l^2} \cdot r^2 \quad (\text{III-64})$$

Les equipotentiellles « magnéto-gravitationnelles », équi Σ_L , sont des cercles centrés en O (Fig. 18). La différence de potentiel « magnéto-gravitationnel », entre l'origine (compensation exacte) et un point de rayon r , croît comme le carré du rayon r^2 .

III-2.3.2.2) Deuxième famille de solutions – cas horizontal

- ***Les coefficients harmoniques***

D'après la condition (III-48), les coefficients pairs sont fournis par l'annulation des termes du polynômes $G_\theta(r, \frac{\pi}{2})$ et les coefficients impairs sont fournis par l'annulation des termes du polynôme $G_r(r, \frac{\pi}{2})$. Par récurrence sur les coefficients pairs et ensuite sur les coefficients impairs, il est possible de démontrer (voir Annexe I : Théorème 1) que les coefficients harmoniques s'écrivent sous la forme :

$$\forall n \in \mathbb{N}, A_n = \frac{G_l^{n-1}}{2^{n-1} n! B_l^{2n-3} \mu_0} \quad (\text{III-65})$$

Les relations (III-45) et (III-51) vérifient bien la condition pour $n=1$ et $n=2$.

- ***Gradient G et potentiel complexe associé du champ magnétique ζ***

La forme du gradient se détermine en réinjectant dans l'expression (III-46) l'expression des harmoniques (III-65), puis en exprimant ce gradient en fonction des vecteurs $\mathbf{e}_x$ et $\mathbf{e}_y$. Des calculs fastidieux (voir Annexe I : Théorème 4) permettent de démontrer que :

$$G_x = \sum_{K=3}^{\infty} \frac{G_l^{K-2}}{B_l^{2K-6}} \cdot \frac{x^{K-3}}{(K-3)!} \quad (\text{III-66})$$

et,

$$G_y = 0 \quad (\text{III-67})$$

L'expression (III-66) fait apparaître le développement en série entière de la fonction exponentielle, le gradient s'écrit sous la forme :

$$\bar{G} = G_I \cdot \exp\left(\frac{G_I}{B_I^2} \cdot x\right) \cdot \bar{e}_x \quad (\text{III-68})$$

Il est possible de montrer que cette expression du vecteur $\mathbf{G}$ est associée à un potentiel magnétique complexe ζ , lié au même repère, centré en O (Fig. 18), de la forme :

$$\bar{\zeta} = -\beta_h \cdot \exp\left(\frac{2\pi}{\lambda} \cdot \bar{z}\right) \quad (\text{III-69})$$

où β_h (en Ampère) et λ (en mètre) sont des constantes fonction des valeurs de l'induction B_I et du gradient G_I au point O.

$$\mu_0 \cdot \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \beta_h = B_I \quad (\text{III-70})$$

$$\lambda = \frac{4\pi B_I^2}{G_I} \quad (\text{III-71})$$

L'expression du gradient obtenue (III-72) est bien similaire à l'expression (III-68) :

$$\bar{G} = G_I \cdot \exp\left(\frac{G_I}{B_I^2} \cdot x\right) \cdot \bar{e}_x \quad (\text{III-72})$$

La constante λ (III-71) dépend des deux premiers harmoniques :

$$\lambda = \frac{A_1}{A_2} \cdot \pi \quad (\text{III-73})$$

Ce potentiel magnétique complexe (III-69) peut être obtenu pratiquement par une répartition sinusoïdale de courant, de longueur d'onde λ (III-71), suivant le plan horizontal $x=0$ (Fig. 17).

- ***Equipotentiellles magnéto-gravitationnelles Σ_L***

Les $\text{équi}\Sigma_L$ prennent pour expression :

$$\Sigma_L = \frac{B_I^2}{G_I} \cdot \exp\left(\frac{G_I}{B_I^2} \cdot x\right) - x \quad (\text{III-74})$$

ce qui implique que les équipotentiellles magnéto-gravitationnelles sont des plans horizontaux d'équation $x=\text{constante}$ (Fig. 17).

III-2.3.2.3) Troisième famille de solutions – cas « vertical »

- ***Les coefficients harmoniques***

A partir de la condition (III-49) et d'une démonstration par récurrence (voir Annexe I : Théorème 2), on montre que les coefficients harmoniques s'écrivent sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} A_1 = \frac{B_l}{\mu_0} \\ A_2 = \frac{G_l}{4\mu_0 B_l} \\ \forall n \geq 3, A_n = \frac{(-1)^n (2n-5)! G_l^{n-1}}{2^{2n-4} n! (n-3)! \mu_0 B_l^{2n-3}} \end{array} \right. \quad (\text{III-75})$$

- **Gradient $\bar{G}$ et potentiel complexe associé du champ magnétique ζ**

Un vecteur $\mathbf{G}$ répondant à la condition (III-49) [VIN1] peut être obtenu à partir d'un potentiel magnétique complexe de la forme :

$$\bar{\zeta} = -\beta_v \bar{z}^{\frac{3}{2}} \quad (\text{III-76})$$

Ce potentiel magnétique complexe, lié au repère (O_1, r_1, θ_1) , permet d'obtenir un vecteur $\mathbf{G}$, dans le repère (O, r, θ) , de la forme :

$$\bar{G} = G_0 \left(\cos\theta + \frac{r}{r_v} \right) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{r_v} \right)^n (-1)^n P_n(\cos\theta) \bar{e}_r - G_0 \sin\theta \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{r_v} \right)^n (-1)^n P_n(\cos\theta) \bar{e}_\theta \quad (\text{III-77})$$

avec comme valeur de r_v (Fig. 18) :

$$r_v = \frac{B_l^2}{G_l} \quad (\text{III-78})$$

Nous supposons qu'en introduisant les harmoniques (III-75) dans l'expression du gradient (III-46), le gradient s'exprime sous la forme (III-77), avec :

$$\beta_h = \frac{2\sqrt{G_l}}{3\mu_0} \quad (\text{III-79})$$

Ceci n'est qu'une conjecture car nous n'avons pas réussi à démontrer explicitement ce résultat.

Nous avons néanmoins vérifié (par calcul formel) que les termes, jusqu'au rang $n=20$, du polynôme obtenu de cette manière sont identiques à ceux du polynôme de l'expression (III-77).

- **Equipotentielles magnéto-gravitationnelles Σ_L**

La forme des équipotentielles magnéto-gravitationnelles devient extrêmement simple, en calculant l'expression du carré de l'induction et en exprimant les Σ_L dans le repère (O_1, r_1, θ_1) , on obtient :

$$\Sigma_L = r_1 (1 - \cos \theta_1) + r_v \quad (\text{III-80})$$

III-2.4) Détermination de la nappe de courant

Dans cette partie, nous résolvons un problème inverse de magnéto-statique [VIN2]. Ce problème consiste à trouver une répartition de courant surfacique ou volumique produisant à l'intérieur d'un volume, circonscrit aux courants, la répartition de champ désirée. Ce type de problème possède une infinité de solutions, il faut donc se fixer des conditions supplémentaires. On impose aux distributions cherchées d'être superficielles et situées sur un cylindre à base circulaire de rayon R_0 donné. La nappe de courant ainsi obtenue est unique à un courant constant près. Mais pour un problème physique où ce courant constant est nul, le problème a une solution unique.

III-2.4.1) Densité surfacique ($A.m^{-1}$)

A partir de la connaissance des harmoniques de champ, les trois nappes de courant théoriques réparties sur un cylindre de rayon R_0 vont être déterminées. Ces trois répartitions de courant permettent de créer les trois distributions de force précédentes à l'intérieur du cylindre de rayon R_0 .

L'utilisation de la continuité de la composante normale du champ $\mathbf{H}_{Nintn} = \mathbf{H}_{Nextn}$ en $r = R_0$, l'égalité du champ tangentiel intérieur et extérieur en $r = R_0$ aux courants près $\mathbf{H}_{Tintn} - \mathbf{H}_{Textn} = \mathbf{n} \times \mathbf{K}_n = \mathbf{e}_r \times \mathbf{K}_n$ où $\mathbf{n}$ est le vecteur normal sortant et $\mathbf{K}_n$ l'harmonique de rang n de la densité surfacique de courant ($A.m^{-1}$) et l'utilisation des expressions du champ (III-39) et (III-40) avec $\alpha'_n = \alpha_n = \alpha$, permettent d'obtenir tous les harmoniques du courant :

$$\vec{K}_n(R_0, \theta) = 2nR_0^{n-1} \cdot A_n \cos(n\theta + \alpha) \vec{e}_z \quad (\text{III-81})$$

III-2.4.2) Densité volumique ($A.m^{-2}$)

Une répartition volumique, où l'on considère que le courant ne dépend pas du rayon mais seulement de θ , est déterminée. Aussi l'expression du courant (III-81) donne un champ tangentiel en $r = R_0$ de la forme :

$$H_{Tintn}(R_0, \theta) = -n \cdot A_n \cdot R_0^{n-1} \cdot \cos(n\theta + \alpha) \quad (\text{III-82})$$

Soit la répartition surfacique de courant en $r = R_1$, $\vec{K}'_n(R_1, \theta) = 2n \cdot R_1^{n-1} \cdot A''_n \cdot \cos(n\theta + \alpha) \cdot \vec{e}_z$ qui doit me créer en $r = R_0$ un champ tangentiel $\mathbf{H}'_{Tintn}(R_0, \theta) = \mathbf{H}_{Tintn}(R_0, \theta)$, il suffit pour cela que $A''_n = A_n$.

Puisque l'on considère que la densité de courant volumique ne dépend pas du rayon, posons :

$$J_n(R_l, \theta) dR_l = j_n(R_l) \cdot \cos(n\theta + \alpha) \quad (\text{III-83})$$

Si on égalise les éléments de courants, puis que l'on réintroduit le champ tangentiel nous obtenons :

$$J_n(R_l, \theta) dR_l = dK'_n(R_l, \theta) = -2 \cdot \left(\frac{R_l}{R_0}\right)^{n-1} \cdot dH_{T_{intn}}(R_0, \theta) \quad (\text{III-84})$$

en intégrant sur la couronne (Fig. 19) d'un rayon intérieur a jusqu'à un rayon extérieur b nous obtenons le champ tangentiel en un rayon $r=R_0$ produit par l'ensemble de la couche volumique de courant :

$$H_{T_{intn}}(R_0, \theta) = -\frac{1}{2} \cdot \int_a^b J_n(R_l, \theta) \cdot \left(\frac{R_0}{R_l}\right)^{n-1} \cdot dR_l \quad (\text{III-85})$$

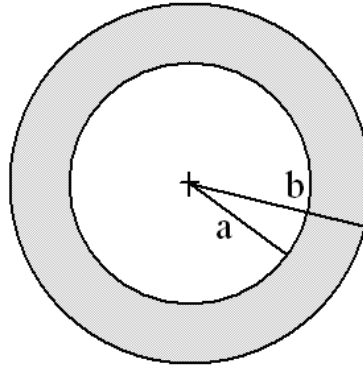


FIG. 19. Couronne de conducteur

or nous connaissons le lien entre la densité de courant (III-81) et le champ tangentiel (III-82) d'où :

$$K_n(R_0, \theta) = \int_a^b J_n(R_l, \theta) \cdot \left(\frac{R_0}{R_l}\right) \cdot dR_l \quad (\text{III-86})$$

nous désirons avoir $j_n(R_l) = \text{cst}(n)$, ainsi pour la densité volumique de courant :

$$J_n(\theta) = \frac{K_n(R_0, \theta)}{R_0^{n-1}} \cdot \frac{1}{\int_a^b \frac{1}{R_l^{n-1}} dR_l} \quad (\text{III-87})$$

d'où la forme générale $J_n(\theta) = \frac{K_n(\theta)}{R_0^{n-1}} \cdot \frac{1}{\frac{1}{b^{n-2}} - \frac{1}{a^{n-2}}}$ quelque soit le rang n de l'harmonique sauf pour

$n=2$ où l'intégrale prend une forme particulière $J_2(\theta) = \frac{K_2(\theta)}{R_0} \cdot \frac{1}{\ln(\frac{b}{a})}$.

L'expression de chacun des harmoniques est fournie ci-dessous :

$$\begin{cases} \forall n \in N^* - \{2\}, J_n(\theta) = 2n A_n \cdot \frac{I}{\frac{1}{b^{n-2}} - \frac{1}{a^{n-2}}} \cdot \cos(n\theta + \alpha) \\ J_2(\theta) = \frac{G_I}{\mu_0 B_I} \cdot \frac{I}{\ln(\frac{b}{a})} \cdot \cos(2\theta + \alpha) \end{cases} \quad (\text{III-88})$$

Les simulations numériques, présentées par la suite, sont réalisées en utilisant une densité surfacique de courant de la forme (III-81) avec les familles $(A_n)_{n \in N}$ associées à chacune des configurations d'homogénéité (III-54), (III-65) et (III-75).

III-2.5) Visualisation des résultats par simulation numérique

III-2.5.1) Choix des paramètres de simulation

Dans cette partie, sont numériquement simulées les trois distributions d'accélération résultantes. La densité de courant surfacique, correspondant à chacun des cas, est répartie sur un cylindre de rayon arbitrairement fixé à 50 cm.

Les répartitions du vecteur inhomogénéité ε sont obtenues à l'intérieur d'un cylindre de 40cm de rayon concentrique à celui qui porte la densité surfacique de courant. La valeur du gradient G_I qu'il nous faut compenser dépend du fluide à léviter. Comme nos recherches ont principalement porté sur l'oxygène et que la méthode (générale) a été développée dans l'optique de faire léviter 1 litre d'oxygène liquide avec une inhomogénéité inférieure à 1%, nous prendrons donc celui-ci comme exemple $G_I = 8 \text{ T}^2/\text{m}$ (à 90K). La forte susceptibilité de l'oxygène permet d'obtenir des résultats tout à fait remarquables sur la valeur de l'inhomogénéité, l'intérêt porte également et surtout sur les différentes configurations d'accélération résultantes susceptibles d'être obtenues. Les supraconducteurs en NbTi à 1,8K permettent d'atteindre des inductions supérieures à 10 T. Cette limite technologique nous fait choisir pour les simulations une induction au centre du système d'une valeur $B_I = 8 \text{ T}$.

Dans les simulations (Fig. 20, 21, 24-26, 27-32) sont représentées :

- le vecteur inhomogénéité ε (flèches noires),
- la norme de ε en % (barre de couleur),
- les $\text{équi}\Sigma_L$ (lignes bleutées).

III-2.5.2) Simulations cas horizontal et vertical et troncature à 3 harmoniques

Cette partie permet de visualiser les résultats théoriques précédents (Fig. 20 et 21). Les simulations sont effectuées en utilisant dans l'expression du courant (81) uniquement les trois

premiers harmoniques des familles (III-54), (III-65) et (III-75). Des tracés de résultats analytiques montrent que la troncature à 3 harmoniques du champ n'affecte pas significativement la répartition de la force magnétique (Fig. 22 et 23).

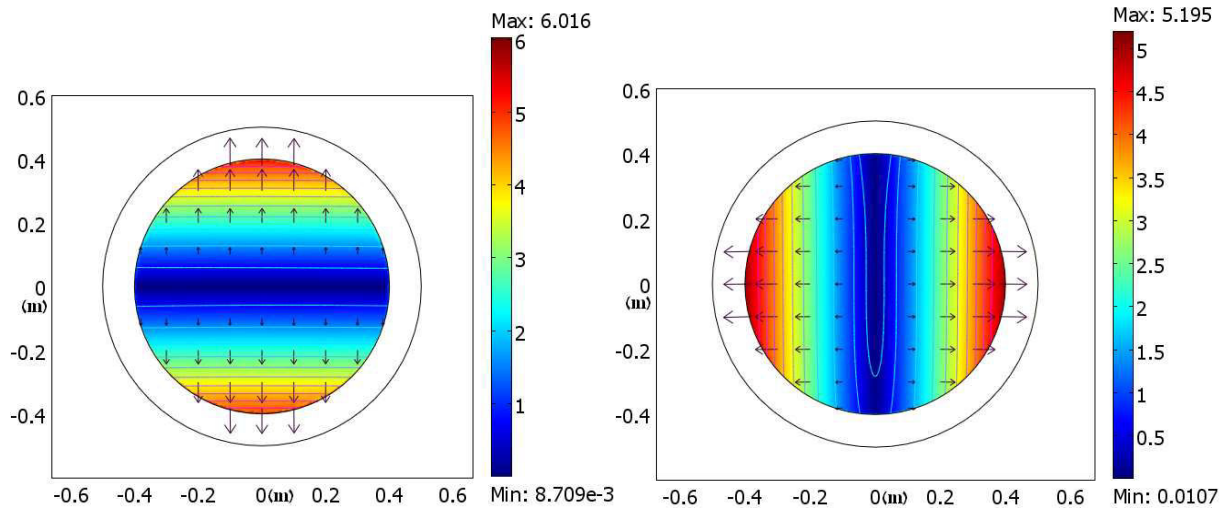


FIG. 20. et 21. Simulation avec seulement les trois premiers harmoniques des cas horizontal (gauche) et «vertical » (droite).

Ces simulations sont réalisées avec les bonnes valeurs des 3 premiers harmoniques tirées des relations (III-65) et (III-75), les harmoniques de rangs supérieurs sont tous mis à zéro. On comprend mieux avec ces figures l'emploi des qualificatifs « horizontal » et « vertical » pour ces deux familles de coefficients harmoniques.

La troncature au troisième harmonique est maintenant comparée avec une troncature au dixième harmonique pour chacun des cas vertical et horizontal afin de vérifier que l'impact sur la répartition du vecteur $\mathbf{G}$ est faible. La comparaison se fait en calculant et traçant (fig. 22 et 23) la norme du vecteur $\mathbf{G}_{diff}$. Le vecteur $\mathbf{G}_{diff}$ représente la différence entre le vecteur $\mathbf{G}_{10h}$, expression (III-46) avec les dix premiers harmoniques tirés de (III-65) et (III-75) et le vecteur $\mathbf{G}_{3h}$, expression (III-46) avec les trois premiers harmoniques tirés également de (III-65) et (III-75). L'échelle verticale fournit la norme du vecteur $\mathbf{G}_{diff}$ (T^2/m) tracée à l'intérieur du cylindre de 40cm de rayon (échelle des axes horizontaux).

On constate que la variation du gradient entre une troncature au troisième harmonique et au dixième harmonique est faible. Dans le cas vertical, elle est inférieure à 1‰ par rapport à la valeur de G_I recherchée au centre. Dans le cas horizontal, elle est inférieure à 0,4‰ de G_I .

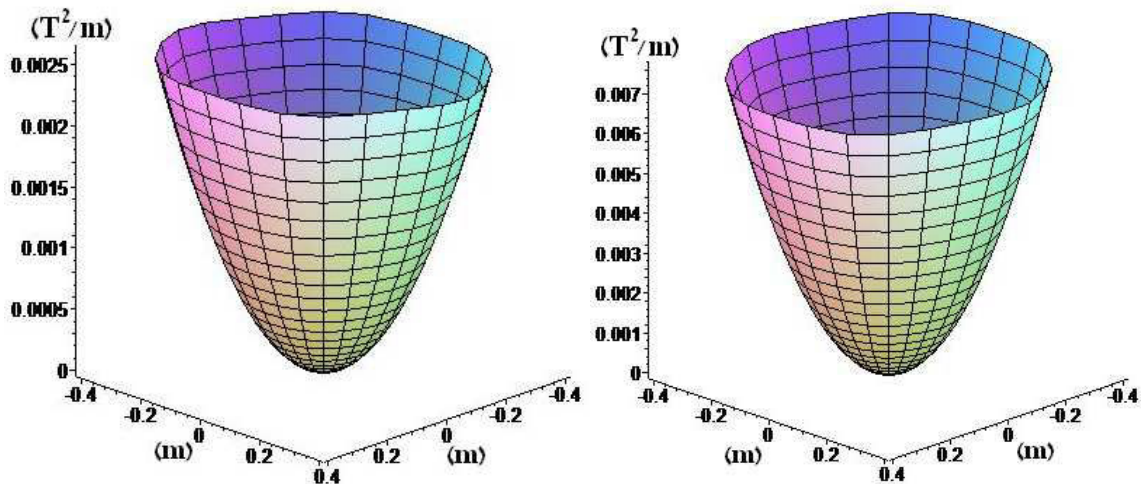


FIG. 22. et 23. Tracés de G_{diff} pour les cas horizontal (gauche) et vertical (droite)

Considérer uniquement les trois premiers harmoniques est donc suffisant pour le dimensionnement d'un système de lévitation performant. Les deux premiers harmoniques sont équivalents quelque soit le cas, le réglage des équipotentielles (et donc de la distribution du vecteur inhomogénéité au sein du système) se fera uniquement par le réglage du courant créant le troisième harmonique grâce à un éventuel sextupole [LOR2].

Cette géométrie de bobinages est celle utilisée dans les accélérateurs de particules. Un système de lévitation pour l'oxygène liquide est envisageable, il pourrait être constitué d'un assemblage de bobinages co-axiaux combinant un dipôle, un quadrupole et un sextupole. En cas de conception d'un dispositif réel il faudrait avant tout maîtriser l'impact des têtes de bobines au niveau de la répartition du champ magnétique et des éventuelles modifications engendrées sur la répartition des forces magnétiques.

III-2.5.3) Simulations cas circulaire et invariance par déphasage α des harmoniques

Dans un premier temps, une simulation du cas circulaire est effectuée. Puis la simulation du cas horizontal, avec 10 harmoniques, illustre l'invariance du vecteur $\mathbf{G}$ par déphasage d'un même angle α de tous les harmoniques de champ. Ce résultat illustre la relation (III-50) où $\mathbf{G}$ ne dépend pas de α . Les remarques effectuées sur cette invariance sont évidemment valables également pour les cas circulaire et vertical.

III-2.5.3.1) Cas circulaire

La simulation du cas circulaire fournit bien le vecteur inhomogénéité central prévu par les calculs. La valeur maximale de la norme (pour une même surface, ici, un disque de 40 cm de diamètre) est plus petite que pour les cas verticaux et horizontaux (Fig. 20 et 21). La norme de ε est par simulation inférieure à 3,3%, alors que l'expression (III-61) donne une valeur de 2,5%. Cette écart est du à l'imprécision sur les bords du domaine de la simulation numérique.

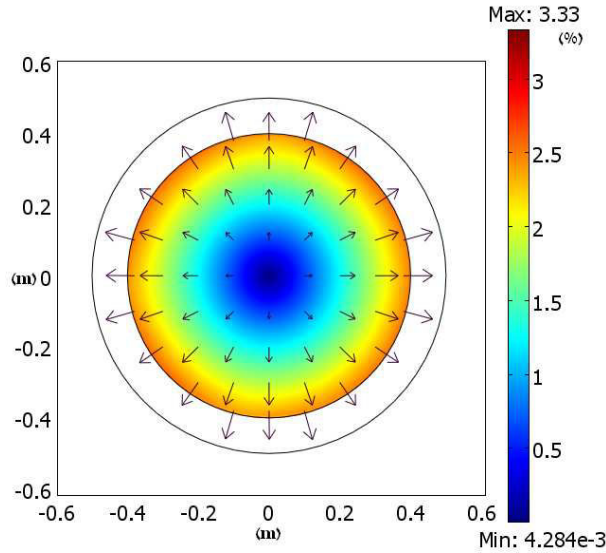


FIG. 24. Simulation numérique cas circulaire (2 harmoniques)

Le cas circulaire est particulièrement intéressant, puisque la force résultante obtenue, qui est colinéaire et proportionnelle au vecteur inhomogénéité ϵ , varie linéairement avec le rayon. Elle permet donc de simuler sur Terre une force centrifuge exercée dans l'espace, par exemple la force centrifuge à laquelle est soumis l'oxygène liquide dans les réservoirs spatiaux [LOR1]. D'autres particularités de cette configuration sont détaillées dans la troisième partie de ce chapitre.

III-2.5.3.2) Invariance : vecteur homogénéité fixe et lignes de champ tournantes

Lorsqu'on effectue des expériences de micro-gravité par champ magnétique, il peut être intéressant de connaître et maîtriser l'orientation du champ magnétique par rapport au système à étudier. En introduisant le même déphasage α dans tous les harmoniques, le calcul montre que le vecteur $\mathbf{G}$ et donc le vecteur inhomogénéité ne varient pas, alors que le champ magnétique est spatialement décalé de cet angle α .

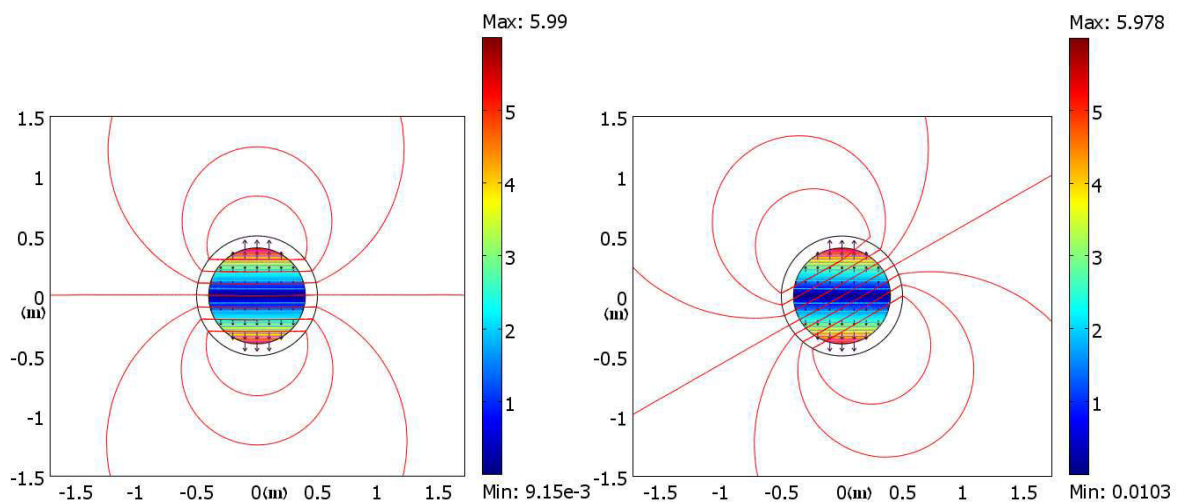


FIG. 25. et 26. Déphasage d'un angle $\alpha=0$ (gauche) et $\alpha=\frac{\pi}{6}$ (droite)

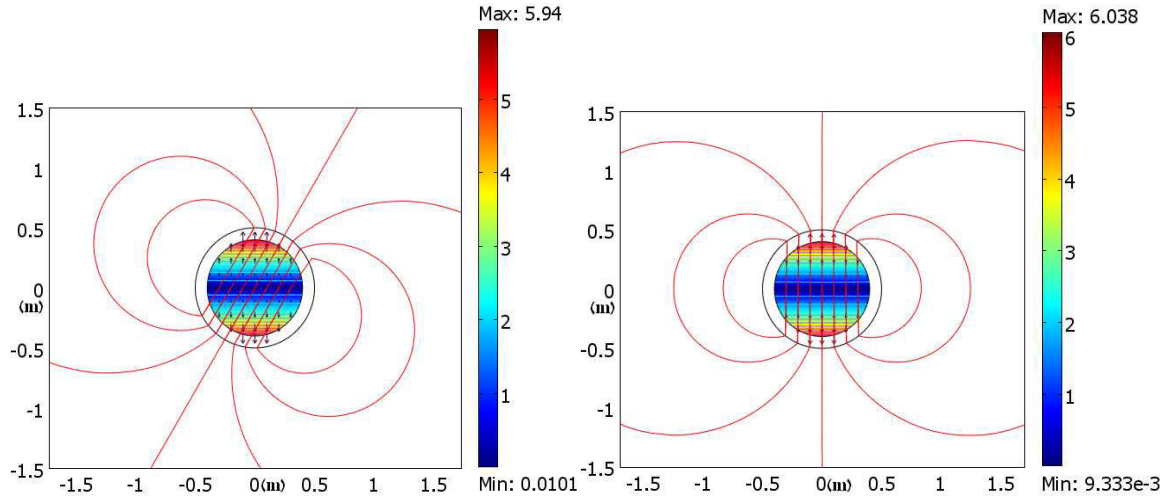


FIG. 27. et 28. Déphasage d'un angle $\alpha = \frac{\pi}{3}$ (gauche) et $\alpha = \frac{\pi}{2}$ (droite)

Les simulations numériques des figures 25 à 28 confirment que les lignes de champ peuvent être modifiées, par rotation d'un angle α , tout en laissant invariante la configuration du vecteur inhomogénéité.

III-2.5.3.3) Deux premiers harmoniques du champ fixes, ε tournant

Ce cas n'est pas l'inverse du cas précédent même si visuellement les simulations numériques pourraient le laisser penser.

La gravité est toujours dirigée suivant Oy. On peut en maintenant fixes les deux premiers harmoniques du champ faire tourner dans l'espace la distribution de l'accélération résultante, en modifiant seulement la phase spatiale α du troisième harmonique. Ce résultat sera valable en première approximation, dans le cas d'une lévitation où le rayon de la zone de travail est assez petit devant B_I^2 / G_I :

$$\frac{G_I}{B_I^2} \cdot R_0 \leq 1 \quad (\text{III-89})$$

ce qui peut être réalisé facilement pour l'oxygène puisque G_I est relativement faible comparé à des matériaux diamagnétiques comme l'hydrogène ou l'eau.

L'approche analytique de ce problème s'effectue en partant du calcul du vecteur inhomogénéité pour le cas horizontal avec trois harmoniques. D'après (III-41) et (III-65), on obtient :

$$\vec{\varepsilon}(r, \theta) = \begin{pmatrix} \frac{G_I}{2B_I^2} [\cos(2\theta + \alpha) + 1] r + \frac{3}{8} \frac{G_I^2}{B_I^4} \cos(\theta + \alpha) \cdot r^2 + \frac{G_I^3}{B_I^6} \cdot r^3 \\ -\frac{G_I}{2B_I^2} \sin(2\theta + \alpha) \cdot r + \frac{3}{8} \frac{G_I^2}{B_I^4} \sin(\theta + \alpha) \cdot r^2 \end{pmatrix} \quad (\text{III-90})$$

avec α le déphasage appliqué à l'harmonique 3.

Avec les valeurs de $B_I = 8\text{T}$ et $G_I = 8\text{T}^2/\text{m}$ cette relation devient :

$$\bar{\epsilon}(r,\theta) = \begin{cases} \frac{1}{16} [\cos(2\theta+\alpha)+1]r + \frac{1}{512} \cos(\theta+\alpha) \cdot r^2 + \frac{1}{8192} \cdot r^3 \\ \frac{-1}{16} \sin(2\theta+\alpha) \cdot r + \frac{-1}{512} \sin(\theta+\alpha) \cdot r^2 \end{cases} \quad (\text{III-91})$$

Le rayon r étant inférieur à 40cm (rayon maximal de la zone de travail), nous pouvons linéariser l'expression précédente :

$$\bar{\epsilon}(r,\theta) \approx \begin{cases} \frac{1}{16} [\cos(2\theta+\alpha)+1]r \\ \frac{-1}{16} \sin(2\theta+\alpha) \cdot r \end{cases} \quad (\text{III-92})$$

Le calcul de la norme du vecteur inhomogénéité à partir de cette approximation fournit :

$$|\bar{\epsilon}| \approx \frac{\sqrt{2}}{16} \cdot r \cdot \sqrt{\cos(2\theta+\alpha)+1} \quad (\text{III-93})$$

La norme doit être nulle suivant des droites (des plans puisque nous travaillons en géométrie cylindrique) d'équation :

$$\theta = \frac{\pi - \alpha}{2} = \varphi \quad (\text{III-94})$$

Ce résultat est confirmé par les simulations (Fig. 29-32) où α est le déphasage du troisième harmonique et φ est l'angle suivant lequel la norme est nulle. En réalité la norme n'est pas exactement nulle suivant ces plans, en raison de la contribution des termes en r^2 et r^3 dans l'expression exacte des composantes du vecteur inhomogénéité ϵ .

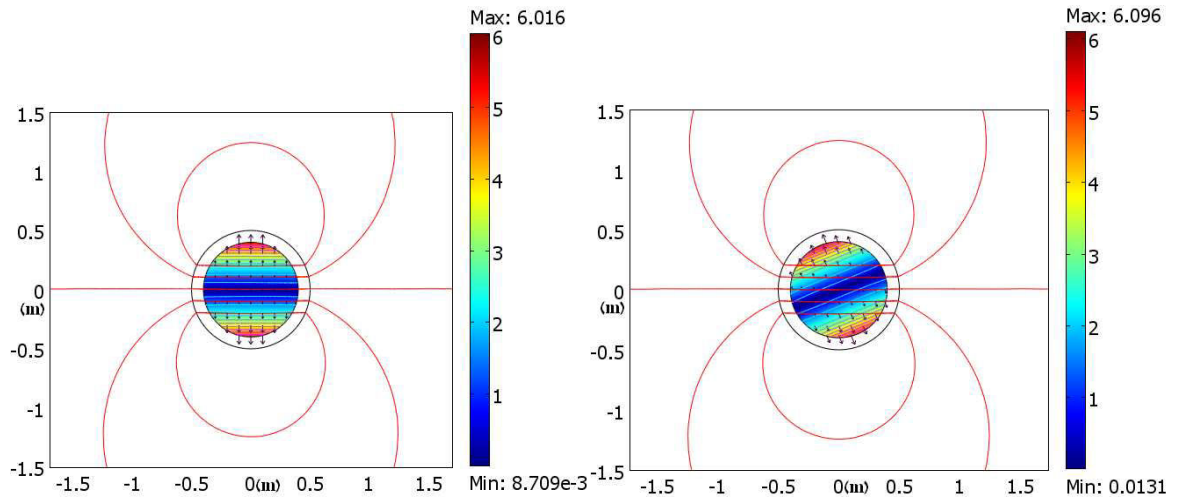


FIG. 29. et 30. Couple $\alpha=0$ et $\varphi=\frac{\pi}{2}$ (gauche) et couple $\alpha=\frac{\pi}{4}$ et $\varphi=\frac{3\pi}{8}$ (droite)

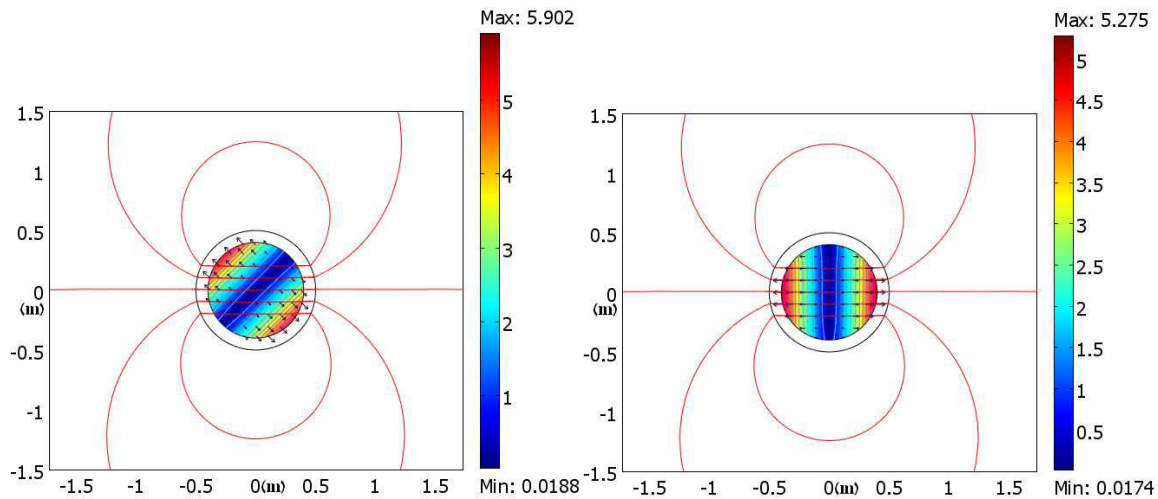


FIG. 31. et 32. Couple $\alpha=\frac{\pi}{2}$ et $\varphi=\frac{\pi}{4}$ (gauche) et couple $\alpha=\pi$ et $\varphi=0$ (droite)

Il semble donc possible de cette façon de passer de manière continue du cas horizontal au cas vertical, sans passer par le cas circulaire. La réalisation pratique de cette technique nécessite la mise en place d'un dispositif spécial de création de l'harmonique 3 : par exemple rotation mécanique du bobinage affecté à l'harmonique 3, ou (plus réaliste) création de cet harmonique au moyen de deux bobinages fixes, décalés dans l'espace de $\pi/6$, et traversés par des courants d'amplitude judicieusement choisie.

L'autre méthode pour passer du cas horizontal au cas vertical consiste à faire varier la valeur du troisième harmonique de sa valeur du cas vertical [$n=3$ dans (III-75)] à sa valeur opposée [$n=3$ dans (III-65)] en passant par zéro, c'est à dire que la distribution de l'inhomogénéité passe alors par le cas circulaire, que nous allons étudier plus en détail dans la suite de ce chapitre [LOR1] [LOR4].

III-2.5.3.4) Conclusion

- 1) La direction du champ et la direction de la force de gravité sont indépendantes, c'est à dire que l'on peut compenser la gravité au moyen d'une induction de direction quelconque,
- 2) Les résultats en ϵ tournant ouvrent des potentialités inexploitées de création de champs de forces internes dans un fluide en lévitation magnétique. Ces forces ont une distribution qui peut être aisément modifiée par variation du courant dans le système de bobinage créant le troisième harmonique du champ.

III-2.6) Lévitation de l'oxygène et de l'hydrogène par les technologies actuelles

Dans cette section va être vérifiée la faisabilité technologique de dispositifs de lévitation d'oxygène ou d'hydrogène. Deux technologies de multipôles, les dipôles du LHC [ROS2] et les aimants combinés dipôle+quadrupôle de J-PARC (Japan - Proton Accelerator Research Complex) [NAK1][NAK2], vont servir de base à cette vérification. Les résultats théoriques précédents, combinaison d'un simple champ dipolaire avec un champ quadrupolaire (cas circulaire), sont mis en relation avec ces systèmes préexistants. Le but est de savoir si la réalisation de dispositifs de lévitation d'oxygène et d'hydrogène peut fortement s'appuyer sur des études déjà accomplies. Nous nous appuierons sur les connaissances des concepteurs et spécialistes des multipôles d'accélérateurs [TOD1]. Une hypothèse est faite pour réaliser cette étude ; on considère que deux multipôles sont technologiquement équivalents si leur champ magnétique maximum s'exerçant sur le conducteur (« peak field ») et leur ouverture (diamètre de la zone centrale à base circulaire) sont semblables.

III-2.6.1) Relations théoriques entre les différentes grandeurs

Le « peak field » B_p (T) est lié au champ dipolaire B_1 et au « gradient » de champ quadrupolaire B_2 par un coefficient λ adimensionnel :

$$B_p = \lambda.(B_1 + B_2.r) \quad (\text{III-95})$$

Remarque : Pour un dipôle seul ($B_p = \lambda B_1$) les concepteurs cherchent à faire tendre λ vers 1 en jouant sur les caractéristiques géométriques. Pour un quadrupôle pur on ne peut espérer une valeur inférieure à 1,1 de ce coefficient [TOD1][ROS3].

où $B_1 = \mu_o.A_1$ est le terme dipolaire (T), $B_2 = 2.\mu_o.A_2$ est le terme quadrupolaire (T/m), r représente la demi-ouverture de l'aimant (m).

Dans le cas de la lévitation magnétique en géométrie cylindrique où seuls les deux premiers harmoniques interviennent (cas circulaire) on peut relier l'inhomogénéité ε , B_1 , G_1 le gradient magnétique (T²/m) et R le rayon de la zone utile par une relation dérivant de l'expression vectorielle (III-57) :

$$\varepsilon = \frac{G_1}{2.B_1^2}.R \quad (\text{III-96})$$

Le rayon de la zone utile R est relié à celui de la demi-ouverture r par un coefficient k inférieur à 1 ($R = kr$). En effet, le liquide lévité est contenu dans une cellule ainsi les rayons R et r ne peuvent être confondus. Ce coefficient permet d'ajuster également l'ouverture de l'aimant en fonction des choix d'homogénéité de la compensation magnétique. De plus, le gradient de lévitation vaut $G_1 = 2B_1B_2$ (T²/m). Ainsi la formule (III-96) prend la forme suivante :

$$\varepsilon = \frac{B_2}{B_1}.k.r \quad (\text{III-97})$$

Si on élimine r entre les expressions (III-97) et (III-95) on obtient directement l'harmonique 1 exprimé en fonction du « peak field » :

$$B_l = \frac{B_p}{\lambda \cdot (1 + \frac{\epsilon}{k})} \quad (\text{III-98})$$

Puisque $G_l = 2B_l B_2$, on peut également obtenir B_2 en fonction du « peak field » :

$$B_2 = \frac{G_l \lambda}{2B_p} \cdot (1 + \frac{\epsilon}{k}) \quad (\text{III-99})$$

On obtient R en réinjectant la valeur de B_l dans la formule (III-96) :

$$R = \frac{2 \cdot B_p^2}{\lambda^2 \cdot G_l} \cdot \frac{\epsilon}{(1 + \frac{\epsilon}{k})^2} \quad (\text{III-100})$$

A partir de cette relation, on obtient le volume par unité de longueur de multipôle, ou surface lévité. Cette surface est tracée en fonction de l'inhomogénéité pour de l'oxygène et de l'hydrogène pour différents dispositifs multipolaires (Fig. 33b, 34b, 35b et 36b).

Les volumes que les concepteurs d'expériences de lévitation (CEA/SBT) souhaitent léviter sont cylindriques à base circulaire et de rapport hauteur sur diamètre variant de 1 à 3. Ainsi sur la base d'un rapport unitaire (cylindre « cubique »), le volume vaut $V = 2\pi R^3$. Le volume lévitable en fonction uniquement de l'inhomogénéité ϵ , du gradient de lévitation G_l et du « peak field » B_p est alors donné par la formule suivante :

$$V = 16\pi \left[\frac{B_p^2}{\lambda^2 \cdot G_l} \cdot \frac{\epsilon}{(1 + \frac{\epsilon}{k})^2} \right]^3 \quad (\text{III-101})$$

La variation $V(\epsilon)$ est représentée sur les figures 33a, 34a, 35a et 36a.

III-2.6.2) Applications numériques

III-2.6.2.1) Multipôles J-PARC

Les deux articles [NAK1][NAK2] concernent la conception d'aimants combinant un dipôle et un quadrupôle pour un accélérateur de particules. Les valeurs principales du dispositif sont :

- Le champ dipolaire : $B_l = 2,59$ T
- Le gradient de champ quadrupolaire : $B_2 = 18,7$ T/m
- Le champ maximum sur le conducteur ou « peak field » : $B_p = 4,7$ T
- L'ouverture de l'aimant ou diamètre interne du dispositif : 173,4 mm ($r = 86,7$ mm)

A partir de ces grandeurs, on détermine le coefficient λ . On remplace dans la formule (III-95) les variables B_p , B_I , B_2 et r par leurs valeurs, on obtient alors $\lambda=1,12$ pour ce dispositif. Cette valeur de λ sera conservée pour toutes les applications numériques.

Il apparaît dans les formules (III-98), (III-99), (III-100) et (III-101) le rapport $\frac{\varepsilon}{k}$. Pour un fluide donné, si on fixe l'ouverture du dispositif alors ce rapport l'est aussi.

Pour de l'oxygène liquide (8T²/m) le rapport $\frac{\varepsilon}{k}$ vaut 0,02 car l'ouverture du dispositif est de $r=86,7\text{mm}$. Ainsi l'inhomogénéité doit être inférieure à 2% car $k<1$. Dans ces conditions la figure 33a représente la variation du volume d'oxygène en fonction de ε .

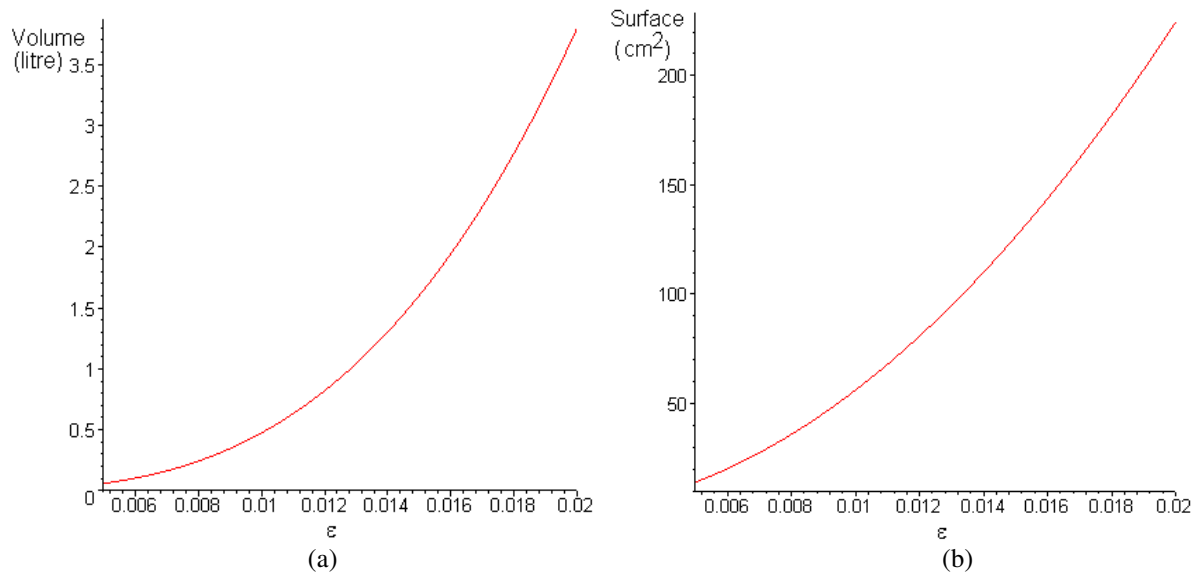


FIG. 33. (a) Volume « cubique » et (b) volume par unité de longueur d'oxygène lévitable en fonction de l'inhomogénéité pour un dispositif avec B_p et ouverture équivalents à ceux de l'aimant du Japan Proton Accelerator Research Complex (J-PARC)[NAK1][NAK2]

Le champ dipolaire de ce dispositif vaut $B_I=4,11\text{T}$ et le « gradient » de champ quadrupolaire vaut $B_2=0,97\text{T/m}$ avec une ouverture $r=86,7\text{mm}$ et un « peak field » $B_p=4,7\text{T}$. Le litre d'oxygène lévité est atteint avec une inhomogénéité de 1,3% et le volume pour 1% d'inhomogénéité est de 470 cm³. Ce type de dispositif semble parfaitement convenir à la lévitation d'oxygène liquide.

III-2.6.2.2) Dispositifs dérivés des dipôles LHC

Il est possible d'atteindre des inhomogénéités bien meilleures, à volume d'oxygène fixé, au sein de dispositifs dérivés des dipôles du LHC. Ces dipôles créent un champ de 8,33T dans une ouverture $r=56\text{mm}$ [ROS2], nous prendrons un « peak field » $B_p=8,5\text{T}$. Pour de l'oxygène liquide, le rapport $\frac{\varepsilon}{k}$ vaut maintenant 0,004. Ainsi l'inhomogénéité doit être inférieure à 0,4% car $k<1$.

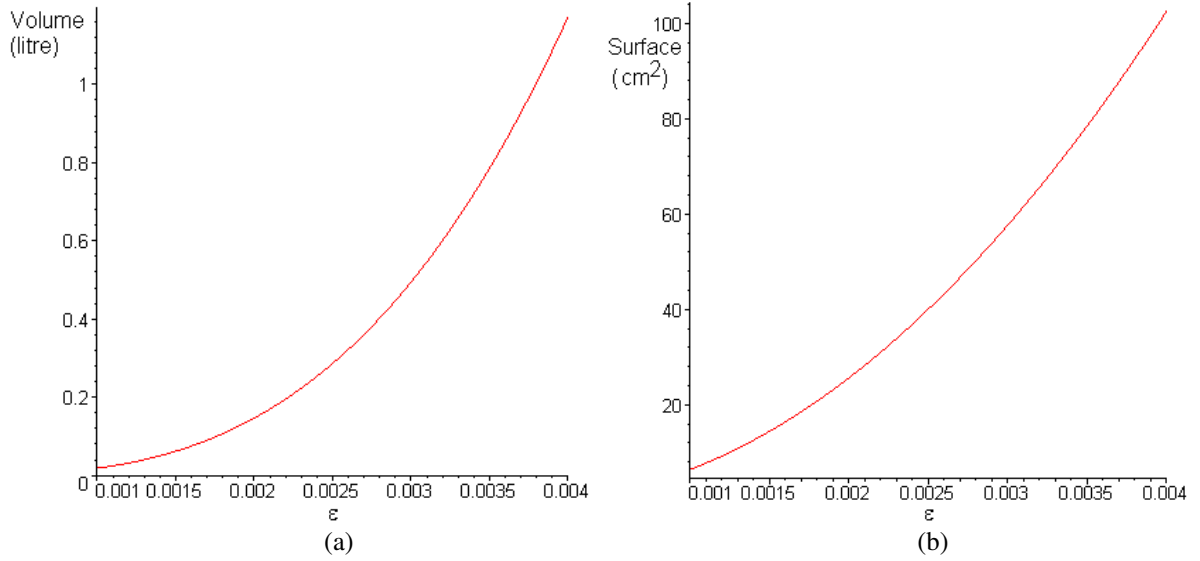


FIG. 34. (a) Volume « cubique » et (b) volume par unité de longueur d'oxygène lévitable en fonction de l'inhomogénéité pour un dispositif avec B_p et ouverture équivalents à ceux des dipôles du LHC

Le champ dipolaire de ce dispositif vaut $B_I=7,55\text{T}$ et le champ quadrupolaire vaut $B_2=0,53\text{T/m}$ avec une ouverture $r=56\text{mm}$ et un « peak field » $B_p=8,5\text{T}$. Le litre d'oxygène lévité est atteint avec une inhomogénéité de 0,38%. Ce type de dispositif permettrait d'obtenir d'excellentes inhomogénéités pour de l'oxygène liquide pour des volumes de l'ordre du litre du fait de son fort ratio $\frac{B_I}{B_2}$.

Pour de l'hydrogène liquide ($1000\text{T}^2/\text{m}$) et un $B_p=8,5\text{T}$ on ne peut obtenir un rapport $\frac{\varepsilon}{k}$ permettant d'avoir une ouverture de $r=56\text{mm}$. L'ouverture maximale accessible est de $r=28,80\text{mm}$ pour un rapport $\frac{\varepsilon}{k}$ de 1. On ne peut considérer le dispositif encore équivalent au dipôle du LHC selon la définition susmentionnée. Les volumes d'hydrogène lévités sont ici donnés en mm^3 .

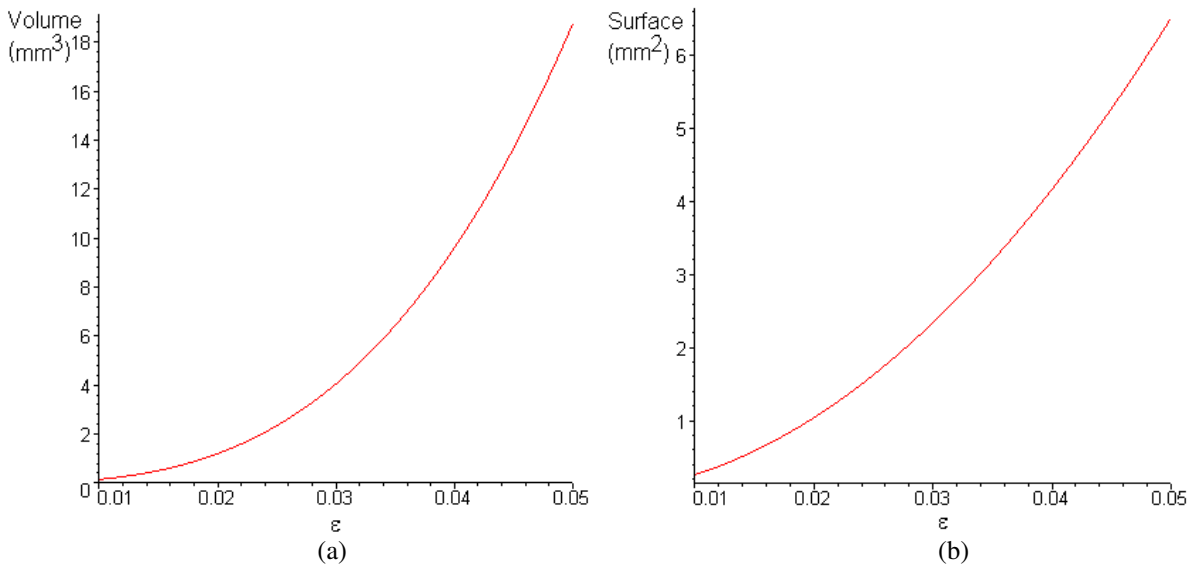


FIG. 35. (a) Volume « cubique » et (b) volume par unité de longueur d'hydrogène lévitable en fonction de l'inhomogénéité pour un dispositif avec B_p équivalent à celui des dipôles du LHC et une ouverture de 28,80mm

Le champ dipolaire de ce dispositif vaut $B_1=3,79\text{T}$ et le « gradient » de champ quadrupolaire vaut $B_2=131,76\text{T/m}$ avec une ouverture $r=28,80\text{mm}$ et un « peak field » $B_p=8,5\text{T}$. Les volumes sont faibles car l'ouverture du dispositif est trop grande. Pour augmenter le volume d'hydrogène lévité, il faudrait pouvoir encore diminuer la taille de l'ouverture du système et ainsi augmenter le ratio B_1/B_2 . Des problèmes d'encombrement sont alors à prendre en compte.

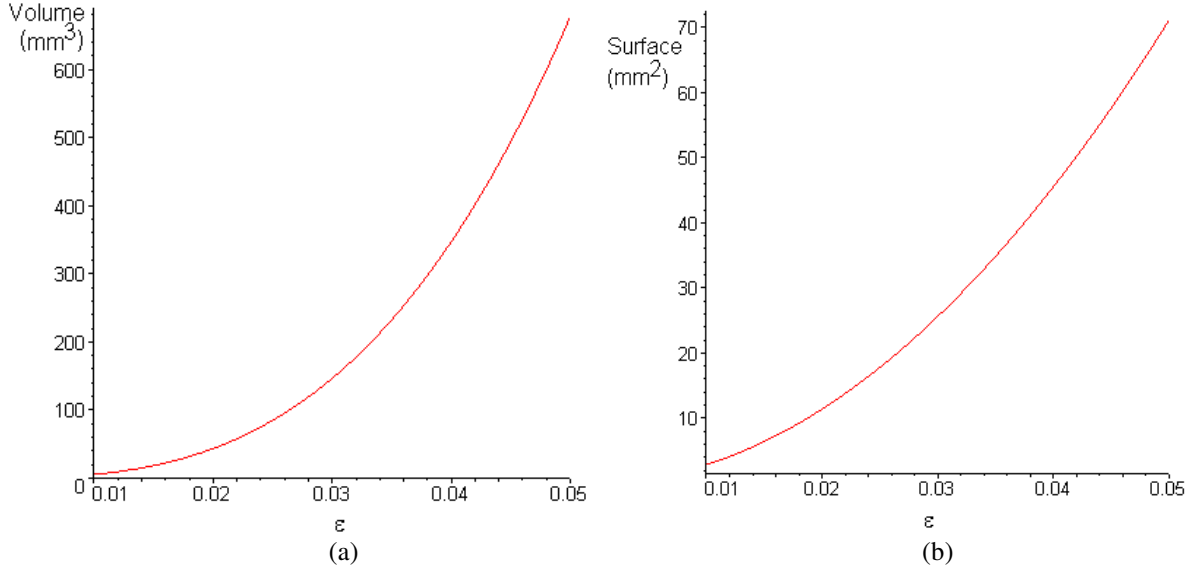


FIG. 36. (a) Volume « cubique » et (b) volume par unité de longueur d'hydrogène lévitable en fonction de l'inhomogénéité pour un dispositif avec B_p équivalent aux dipôles du LHC avec ouverture de 9,52mm

Le champ dipolaire de ce dispositif vaut $B_1=6,90\text{T}$ et le champ quadrupolaire vaut $B_2=72,47\text{T/m}$ avec une ouverture $r=9,52\text{mm}$ et un « peak field » $B_p=8,5\text{T}$. Le ratio B_1/B_2 de ce dispositif ayant augmenté, les volumes lévités sont plus importants. Avec une inhomogénéité de 1%, 4% et 5%, le volume « cubique » est respectivement de $5,5\text{mm}^3$, 347mm^3 et 677mm^3 . Rappelons que dans la station HYLDE de 10T du SBT, 100mm^3 d'hydrogène avaient été lévités avec une inhomogénéité de 4% (cf. chapitre II).

III-2.7) Conclusion de la section III-2

Nous déterminons, dans cette partie, à l'aide de la méthode générale appliquée aux coordonnées cylindriques et plus particulièrement polaires (géométrie 2D) la forme générale du vecteur $\mathbf{G}$, i.e., l'expression générale de la force magnétique en fonction des harmoniques du champ magnétique. Une judicieuse mise en équation des conditions d'homogénéité souhaitées, sur la force magnétique, permet la détermination des différents harmoniques de champ. Ensuite un calcul simple donne de manière unique la nappe de courant, disposée sur un cylindre de rayon fixé, qui amène aux distributions de champ magnétique désirées. Puis des simulations numériques de lévitation d'oxygène liquide à 90K, permettent de visualiser les différentes configurations d'accélération résultantes obtenues par la méthode précédemment décrite. On constate que l'utilisation des trois premiers harmoniques du champ suffit à une bonne description des configurations.

Trois phénomènes liés au déphasage ou à la variation en amplitude des harmoniques sont présentés :

Le déphasage identique de tous les harmoniques de champ magnétique fait varier la carte du champ magnétique sans modifier celle de la force magnétique. Cette propriété est démontrée théoriquement.

La faible valeur du rayon de la zone de travail devant le rapport B_2/B_1 ou G_1/B_1^2 permet de passer, par simple déphasage du troisième harmonique, de la configuration verticale à la configuration horizontale pour les équipotentielles magnéto-gravitationnelles, sans passer par la configuration circulaire ; les distributions de la force magnétique subissent alors une rotation spatiale.

La variation de l'amplitude du troisième harmonique d'une valeur à son opposée, permet une modification des configurations d'accélération du cas vertical au cas horizontal en passant, lorsque l'amplitude est nulle, par le cas circulaire.

Ces résultats mettent en évidence l'effet du troisième harmonique sur la création de champs de forces magnétiques en géométrie cylindrique. Ils sont étendus plus loin aux géométries axisymétriques [LOR2][LOR3]. Ils balayent les multiples possibilités qu'offre en terme de dynamique l'association de champs magnétiques et de la gravité. Les calculs présentés amènent à une optimisation des champs de forces magnétiques pour la compensation de pesanteur, mais ils ouvrent aussi d'importantes possibilités de simulations expérimentales des champs de forces variés rencontrés dans les engins spatiaux en apesanteur. La méthode présentée, basée sur le contrôle du vecteur $\mathbf{\varepsilon}$, permet d'obtenir de très nombreuses configurations d'accélération résultantes. Elle est appliquée, ici, à trois cas fournissant d'intéressants résultats. Par exemple un fluide en rotation en apesanteur est soumis à un champ de forces purement centrifuges, qui peut être exactement reproduit sur Terre sous l'action de la gravité et de champs magnétiques, c'est le cas circulaire [LOR1], nous allons y revenir dans la partie suivante. Les cas verticaux ou horizontaux semblent bien adaptés à la simulation sur terre de propriétés d'échanges thermiques dans des fluides mono- ou diphasiques.

Les résultats sont obtenus en géométrie cylindrique, ce qui permet, à l'image des multipôles d'accélérateurs (LHC, RHIC...), de réaliser des dispositifs de longueur importante, et d'obtenir des volumes lévités considérables. Le lien créé, par la méthode générale, entre les harmoniques du champ magnétique et l'accélération résultante facilitera certainement la conception théorique de dispositifs magnétiques permettant de réaliser la simulation expérimentale dynamique de phénomènes pouvant se rencontrer en apesanteur. D'ailleurs ces dispositifs pourront s'appuyer sur les technologies préexistantes, par exemple les multipôles J-PARC, offrant des possibilités de lévitation intéressantes.

III-3) Compensation magnétique et force centrifuge

Nous allons examiner les possibilités offertes par la combinaison de forces magnétiques, de forces de pesanteur, et, originalité, de forces centrifuges, sur des fluides homogènes. Ces fluides peuvent être diamagnétiques comme l'eau ou l'hydrogène, ou paramagnétiques comme l'oxygène menant, selon leurs propriétés magnétiques, à des résultats différents.

Après avoir rappelé la géométrie du système considéré et l'expression de la force centrifuge volumique, nous montrons qu'une distribution de champ magnétique quadrupolaire fournit une force magnétique qui varie proportionnellement à la distance à l'axe. Donc en conditions de micro-pesanteur (vol spatial réel, sans rotation) un fluide paramagnétique soumis à ce champ aura un comportement mécanique similaire à celui produit par la force centrifuge due à une rotation uniforme. Un fluide diamagnétique subira une force centripète, semblable à la force que subirait en rotation uniforme un matériau (imaginaire !) à masse négative.

Puis nous étudions la compensation de pesanteur au sol en utilisant la distribution de champ magnétique conduisant au vecteur $\mathbf{\epsilon}$ orthoaxial et axisymétrique dans la zone de travail (cas circulaire précédemment décrit). Nous démontrons la possibilité de simuler, au moyen d'expériences fixes au sol, le comportement de fluides paramagnétiques ou diamagnétiques en conditions d'apesanteur et soumis en outre à une force centrifuge (rotation uniforme d'un engin spatial par exemple). L'oxygène liquide sera pris comme exemple.

Nous étudions ensuite, au sol, l'effet de cette même distribution de champs magnétiques sur des substances diamagnétiques uniquement, à l'intérieur d'une cellule en rotation uniforme. On peut alors annuler strictement la somme des forces, magnétique, de pesanteur et centrifuge. Le fluide peut ainsi se trouver, dans des expériences au sol, en conditions de simulation parfaite de l'apesanteur en tout point de la zone de travail. Les valeurs des paramètres conduisant à ces conditions seront données pour l'hydrogène liquide.

III-3.1) Positionnement du problème

III-3.1.1) Géométrie

Les combinaisons de forces sont étudiées dans un domaine (zone de travail) cylindrique circulaire à axe horizontal (Fig. 37). Nous utilisons soit les coordonnées cartésiennes 2D (x,y) soit les coordonnées cylindriques 2D invariant par translation (r,θ) définies sur la figure 37. Le repère est défini par son origine O, centre du disque, et l'axe Ox est choisi en sens contraire de la gravité $\mathbf{g}$. La zone de travail représentée par le cylindre horizontal (Fig. 37) contient le fluide dia- ou para-magnétique étudié.

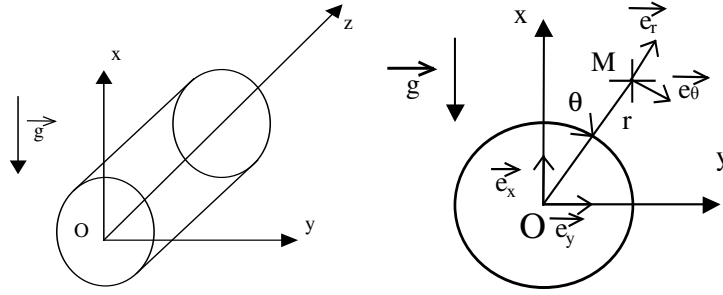


FIG. 37. Définition de la géométrie, coordonnées polaires et gravité

Pour assurer les conditions de compensation de la pesanteur, les sources de champ magnétique sont des bobines multipôlares (dipôles et quadrupoles uniquement) d'axe Oz, qui peuvent être supraconductrices, similaires aux bobines de guidage du faisceau de particules des accélérateurs [DEV1].

III-3.1.2) Force centrifuge

On suppose en outre que la zone de travail peut être animée d'un mouvement de rotation uniforme autour de l'axe Oz. La force centrifuge volumique appliquée en chaque point du fluide est alors proportionnelle à la distance à l'axe Oz :

$$\frac{d\vec{F}_c}{dV} = \rho \omega^2 r \vec{e}_r \quad (\text{III-102})$$

où ω la vitesse angulaire de rotation (rad/s) et ρ la masse volumique (kg/m^3).

III-3.2) Force magnétique engendrée par un champ quadrupolaire, et force centrifuge en apesanteur

Dans cette partie nous allons déterminer le champ magnétique quadrupolaire permettant de simuler dans un engin spatial (microgravité) sans rotation une force magnétique équivalente à une force centrifuge.

Nous partons de l'expression en coordonnées polaires d'un champ quadrupolaire :

$$\vec{H} = \begin{pmatrix} -r.A_2.\sin(2\theta) \\ -r.A_2.\cos(2\theta) \end{pmatrix} \quad (\text{III-103})$$

où A_2 est l'harmonique 2 de la décomposition en harmonique cylindrique d'un champ magnétique, appelé en physique des accélérateurs de particules « gradient du quadrupole ». La valeur de ce gradient est déterminée par l'ouverture du quadrupole et par les courants parcourant les bobinages. Les valeurs de A_2 obtenues dans les quadrupoles d'accélérateurs [ROS3] (Rayon d'ouverture de l'ordre de 50mm) sont d'environ : 200 T/m. On déduit de (III-103) :

$$\left| \vec{B} \right|^2 = \mu_0^2 . r^2 . A_2^2 \quad (\text{III-104})$$

D'où le vecteur $\mathbf{G}$ en coordonnées polaires (Fig. 37) :

$$\vec{G} = \begin{pmatrix} 2\mu\omega^2 r A_2^2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{III-105})$$

La force volumique magnétique obtenue avec ce vecteur $\mathbf{G}$ (III-105), est équivalente à une force volumique centrifuge à la vitesse angulaire de rotation ω du fluide (III-102), quand la relation suivante (force magnétique = force centrifuge) est satisfaite :

$$\frac{1}{2\mu\omega} \chi_m (2r \mu \omega^2 A_2^2 \vec{e}_r) = \rho \omega^2 r \vec{e}_r \quad (\text{III-106})$$

Cette condition ne peut être remplie que pour un matériau paramagnétique car la susceptibilité doit être positive. La constante A_2 est réglable par la valeur des courants du bobinage quadrupolaire. Elle est proportionnelle à la vitesse de rotation simulée :

$$A_2 = \omega \sqrt{\frac{\rho}{\mu\omega \chi_m}} \quad (\text{III-107})$$

Les composantes polaires du champ magnétique créées par le quadrupole doivent être :

$$\vec{H} = \begin{pmatrix} -r \omega \sqrt{\frac{\rho}{\mu\omega \chi_m}} \sin(2\theta) \\ -r \omega \sqrt{\frac{\rho}{\mu\omega \chi_m}} \cos(2\theta) \end{pmatrix} \quad (\text{III-108})$$

Ainsi, la rotation dans l'espace, à la fréquence de 0,01Hz, d'un réservoir de rayon 0,1m contenant de l'oxygène liquide à 90K peut être simulée par la création d'un champ magnétique quadrupolaire de valeur maximale 4mT (valeur du champ sur l'enveloppe du réservoir). Dans cette configuration de champs magnétiques, le potentiel des forces magnétiques est constant sur tout cylindre à base circulaire d'axe Oz.

Notons que des choix de multipôles d'ordre plus élevé (sextupôle, octupôle, etc.) permettent de créer des forces dont les équipotentielles sont aussi des cylindres à base circulaire, mais avec des variations suivant r du potentiel magnétique scalaire de puissance plus élevée (respectivement r^3 pour un sextupôle, r^4 pour un octupôle, etc.). On constate ainsi que les champs magnétiques donnent un outil de gestion des fluides en apesanteur, mais leur création nécessite des sources embarquées (bobinages ou aimants permanents) dont le poids doit être évalué.

III-3.3) Force magnétique permettant de simuler sur terre une force centrifuge existant en apesanteur sur des matériaux paramagnétiques

On va maintenant étudier la simulation au sol, dans une installation immobile, de la force centrifuge qui s'applique à un fluide contenu dans un réservoir cylindrique, en rotation

uniforme et dans l'espace. Cette simulation ne fait intervenir que les forces magnétiques obtenues par des sources de champ fixes, et bien sûr la pesanteur. Les forces magnétiques créent, en tout point du domaine, à la fois une compensation parfaite de la pesanteur, et des forces ayant la distribution de forces centrifuges. Ce calcul s'applique uniquement à des fluides (ou autres matériaux homogènes) paramagnétiques, et il a une solution exacte. Cette étude peut s'étendre aux matériaux diamagnétiques mais avec un système plus complexe, nous y reviendrons dans la suite.

III-3.3.1) Expressions de G et de ϵ

Nous allons considérer une source de champ magnétique à géométrie cylindrique d'axe Oz, composée de l'association d'un champ dipolaire et d'un champ quadripolaire de même axe (cas circulaire). Cette source peut être réalisée à l'aide de bobinages dérivés des multipôles J-PARC par exemple. La zone de travail contenant le fluide paramagnétique est située à l'intérieur de l'ouverture interne des bobinages.

Le champ magnétique (III-44) comprenant uniquement les deux premiers harmoniques, A_1 et A_2 , a pour valeur en tout point à l'intérieur de la zone de travail en coordonnées polaires:

$$\vec{H} = \begin{pmatrix} -A_1 \sin(\theta) - 2r A_2 \sin(2\theta) \\ -A_1 \cos(\theta) - 2r A_2 \cos(2\theta) \end{pmatrix} \quad (\text{III-109})$$

On obtient :

$$|\vec{B}|^2 = \mu_0^2 (A_1^2 + 4r^2 A_2^2 + 4r A_1 A_2 \cos(\theta)) \quad (\text{III-110})$$

D'où la valeur du vecteur $\mathbf{G}$:

$$\vec{G} = 8r\mu_0^2 A_2^2 \vec{e}_r + 4\mu_0^2 A_1 A_2 \vec{e}_\theta \quad (\text{III-111})$$

On prend maintenant en compte la pesanteur et la condition de compensation exacte pour le milieu considéré ($G_r = 2\mu_0 \frac{\rho}{\chi_m} g$).

La compensation exacte de pesanteur est fixée à l'origine ce qui implique $|\vec{G}(r=0)| = G_1$ et d'après (III-111), on retrouve l'expression (III-50) de l'harmonique A_2 :

$$A_2 = \frac{G_1}{4\mu_0^2 A_1} \quad (\text{III-112})$$

En fixant l'induction au centre du dispositif $B(r=0) = B_1$, on retrouve les expressions (III-45) et (III-51) des deux premiers harmoniques. On constate que pour cette valeur, le vecteur $\mathbf{G}$ donné par (III-111) est la somme d'un vecteur constant, qui annule exactement en tout point la pesanteur, et d'un vecteur purement radial, indépendant de θ et qui varie linéairement avec le rayon r, comme une force centrifuge.

$$\vec{G} = \frac{G_I^2}{2B_I^2} \cdot r \cdot \vec{e}_r + G_I \cdot \vec{e}_x \quad (\text{III-113})$$

En écrivant le vecteur inhomogénéité à l'aide de l'expression du gradient (III-113), on retrouve exactement l'expression (III-57) de ce vecteur inhomogénéité $\vec{\epsilon}$.

$$\vec{\epsilon} = -\frac{G_I}{2B_I^2} \cdot r \cdot \vec{e}_r \quad (\text{III-114})$$

La force centrifuge qui serait appliquée dans l'espace par rotation uniforme d'un réservoir, peut être ainsi simulée sur terre par combinaison de la pesanteur et de la force magnétique que nous avons identifiée, résultant de la superposition d'un champ dipolaire et d'un champ quadrupolaire de même axe horizontal Oz. Rappelons que cette configuration peut également être obtenue par une zone de travail décentrée par rapport à un quadrupole pur (cf. 2.3.2.1).

III-3.3.2) Relation entre champ magnétique et fréquence de rotation

Nous allons calculer la vitesse angulaire (ou pulsation) de la force centrifuge ainsi simulée. Cette pulsation est fonction des paramètres B_I et G_I . L'égalité des forces volumiques réelles sur terre (magnétique et de pesanteur), ou simulée (centrifuge) donne :

$$\frac{\chi_m}{2\mu_0} \vec{G} + \rho \cdot \vec{g} = \rho \cdot \omega^2 \cdot r \cdot \vec{e}_r \quad (\text{III-115})$$

En utilisant la relation (I-5) :

$$\frac{\chi_m}{2\mu_0} \vec{G} - \frac{\chi_m}{2\mu_0} \vec{G}_I = \rho \cdot \omega^2 \cdot r \cdot \vec{e}_r \quad (\text{III-116})$$

On fait apparaître le vecteur inhomogénéité et son expression (III-114) fournit :

$$\frac{\chi_m}{2\mu_0} \left(\frac{G_I^2}{2B_I^2} \cdot r \right) \vec{e}_r = \rho \cdot \omega^2 \cdot r \cdot \vec{e}_r \quad (\text{III-117})$$

Et enfin:

$$\frac{\chi_m \cdot G_I^2}{4\mu_0 \rho} = \omega^2 B_I^2 \quad (\text{III-118})$$

La susceptibilité doit être positive pour que la relation (III-118) soit vérifiée, et donc cette méthode ne peut être appliquée qu'aux matériaux paramagnétiques homogènes, tels que l'oxygène liquide. Il est remarquable que l'équilibre des forces soit réalisé pour toute valeur de r , c'est à dire qu'il ne dépend pas du rayon de la zone de travail. Les limites de celui-ci ne dépendent que des valeurs de B_I et G_I , c'est-à-dire des limites de la technologie de création des champs dipolaires ou quadrupolaires.

En tenant compte de la condition de compensation parfaite, on remplace G_I par son expression, et on obtient comme valeur du produit $B_I \omega$ une constante caractéristique de chaque matériau :

$$B_I \cdot \omega = g \cdot \sqrt{\mu_0 \frac{\rho}{\chi_m}} \quad (\text{III-119})$$

Soit en introduisant la fréquence de rotation f en Hertz (= tr/s).

$$B_I \cdot f = \frac{g}{2\pi} \cdot \sqrt{\mu_0 \frac{\rho}{\chi_m}} \quad (\text{III-120})$$

Le tableau suivant donne les valeurs obtenues pour quelques substances paramagnétiques :

Substances (P = 1 bar)	G_I (T ² /m)	$B_I \cdot f$ (T.Hz)
O₂ (90K)	+8	1
KO₂ (293K)	+43	2,3
NO (118K)	+516	8
Nb (293K)	+876	10,4
Al (293K)	+3211	20

Tableau I : Produit caractéristique induction par fréquence pour des paramagnétiques

Les valeurs de G_I sont obtenues à partir des susceptibilités molaires relevées dans le «Handbook of chemistry and physics 98». Le niobium et l'aluminium sont des solides aux températures indiquées, ils sont reportés ici car la lévitation magnétique peut aussi être employée pour des substances granulaires.

La valeur maximale du champ B_I créée par le bobinage dipolaire donne pour chaque matériau la valeur minimale de la fréquence de rotation qui peut être simulée. Avec les valeurs réalisables à l'heure actuelle (par exemple $B_I = 8,3\text{T}$ pour les dipôles supraconducteurs du LHC, avec des améliorations possibles à 14T), ce tableau montre qu'il est possible de simuler pour de nombreux matériaux les forces centrifuges obtenues par des fréquences de rotation minimales de l'ordre de 1Hz. La fréquence maximale qui peut être simulée est pour chaque matériau proportionnelle au coefficient A_2 , le gradient du champ quadrupolaire à $2\mu_0$ près.

Les fréquences minimale et maximale de rotation simulables sont tirées des relations (III-120) et (III-112) :

$$f_{\min} = \frac{1}{2\pi B_{I_{\max}}} \sqrt{\frac{G_I g}{2}} \quad (\text{III-121})$$

$$f_{\max} = \frac{2 \cdot \mu_0 \cdot A_{2\max}}{\pi} \sqrt{\frac{g}{2 \cdot G_I}} \quad (\text{III-122})$$

Une valeur limite de G_I est donnée par l'expression suivante dérivant directement de (III-111) :

$$G_{I_{max}} < 4 \cdot \mu_0 \cdot \Lambda_{2_{max}} \cdot B_{I_{max}} \quad (\text{III-123})$$

Le tableau donne les valeurs minimale et maximale des fréquences pour les substances précédentes et la technologie du LHC :

Substances (P = 1 bar)	fmin (Hz)/ $B_{I_{max}}=8,3\text{T}$	fmax (Hz)/ $\mu_0 \cdot \Lambda_{2_{max}}=100\text{T/m}$
O₂ (90K)	0,12	49,85
KO₂ (293K)	0,28	21,50
NO (118K)	0,96	6,21
Nb (293K)	1,26	4,76
Al (293K)	2,41	2,49

Tableau II : Plage des fréquences simulables d'après les expressions (III-121) et (III-122) où $G_{I_{max}} < 3320\text{T}^2/\text{m}$

La figure 38 donne la variation de l'induction B_I nécessaire pour simuler dans l'oxygène liquide à 90 K différentes fréquences de rotation. On constate que la fréquence obtenue pour $B_I=8\text{T}$ est de 0,125 Hz. Dans une telle expérience de simulation magnétique effectuée au sol dans une cellule statique, l'oxygène est donc soumis aux mêmes forces que s'il était dans l'espace animé d'un mouvement de rotation uniforme d'un huitième de tour par seconde (=7,5 tours/min). Le gradient de champ du quadrupole nécessaire est de 0,5T/m

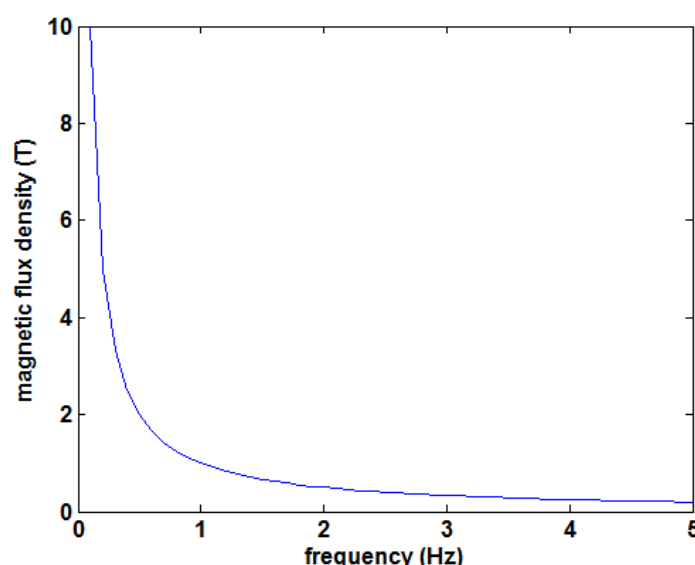


FIG. 38. Variation $B_I(f)$ pour l'oxygène liquide

Nous n'avons pas étudié les possibilités technologiques de réaliser les bobines supraconductrices nécessaires, bien que les valeurs des paramètres retenues pour l'induction du dipole et le gradient de champ du quadrupole nous semblent technologiquement réalisables.

Nous avons dans cette section obtenu la simulation d'une rotation sur les matériaux paramagnétiques dont le centre était également celui du dispositif (axe Oz de la zone de travail cylindrique). Ce résultat est dû au fait que le dispositif compense en son centre exactement la gravité sur le paramagnétique considéré. Nous allons maintenant voir le cas où la compensation ne se fait pas au centre du dispositif.

III-3.3.3) Décalage du centre de la rotation simulée

III-3.3.3.1) Forme de $\text{équi}\Sigma_L$

Quelle est la forme des $\text{équi}\Sigma_L$ associées au matériau pour lequel la compensation exacte est atteinte pour $G=G_I$ par rapport à un dispositif où le gradient au centre de celui-ci vaut $G=G_o$ (c'est à dire que la compensation exacte n'a pas lieu au centre du dispositif) et le champ magnétique au centre $B=B_I$?

Nous avons vu que dans le cas où $G_I=G_o$ alors les $\text{équi}\Sigma_L$ sont des cercles de centre le point de compensation exacte (cf 2.3.2.1). Il faut en premier lieu calculer le carré de la norme de l'induction. On introduit alors la valeur du gradient du carré du champ magnétique au centre du dispositif, $G_o=4\mu_o^2 A_I A_2$, dans l'expression (III-110) du carré de l'induction, on obtient ainsi :

$$B^2 = B_I^2 + \frac{G_o^2}{4B_I^2} r^2 + G_o \cdot r \cdot \cos\theta \quad (\text{III-124})$$

En introduisant cette expression (III-124), transcrite en coordonnées cartésiennes (x,y) , dans celle du potentiel Σ_L , et en faisant attention au fait que le fluide considéré lévite pour un $G=G_I \neq G_o$ la valeur au centre du système, on obtient pour celui-ci :

$$\Sigma_L = \frac{B_I^2}{G_I} + \frac{G_o^2}{2B_I^2 G_I} (x^2 + y^2) + \frac{G_o}{G_I} \cdot x - x \quad (\text{III-125})$$

Nous allons chercher la forme des $\text{équi}\Sigma_L$ pour le matériau (G_I) considéré. Il suffit d'exprimer à partir de l'expression précédente le potentiel sous la forme :

$$\Sigma_L = \frac{B_I^2}{G_o^2} \left(\frac{2 \cdot G_o - G_I}{G_o^2} \right) + \frac{G_o^2}{4G_I B_I^2} \left[y^2 + \left(x + \frac{2B_I^2}{G_o^2} (G_o - G_I) \right)^2 \right] \quad (\text{III-126})$$

Ainsi les équipotentielles $\text{équi}\Sigma_L$ sont des cercles de centre, le point C (Fig. 39), de coordonnées x_c et y_c , par rapport au centre du dispositif point O :

$$\begin{cases} x_c = \frac{2B_I^2}{G_o^2} \cdot (G_I - G_o) \\ y_c = 0 \end{cases} \quad (\text{III-127})$$

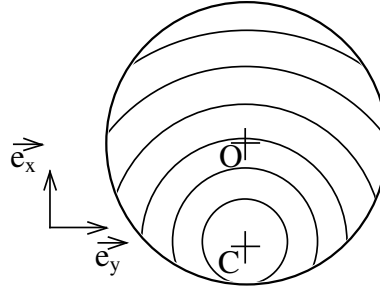


FIG. 39. Zone de travail circulaire avec équipotentielle en forme de cercles de centre C associées au matériau de gradient G_I

Le point O représente le centre du dispositif au sein duquel le champ magnétique a deux composantes, une dipolaire A_1 et une autre quadripolaire A_2 .

Les équipotentielles magnéto-gravitationnelles, pour une valeur de $G=G_I$, dans ce dispositif, où la compensation ne se fait pas au centre, sont bien des cercles, c'est à dire que le vecteur inhomogénéité ε est un vecteur radial.

III-3.3.3.2) Forme du vecteur inhomogénéité ε

Est ce que le vecteur inhomogénéité est toujours proportionnel au rayon dans le repère centré sur C ? Autrement dit, est ce qu'une force centrifuge dans l'espace peut encore être simulée, sur Terre, par combinaison de la gravité et d'une force magnétique ?

Les vecteurs et dimensions associées au repère centré en O seront notés X, et celles associées au repère centré sur C seront notées X'. Il nous faut pour calculer le vecteur inhomogénéité connaître l'expression du vecteur $\vec{G}$ en tout point du dispositif, celui-ci a une expression simple obtenue à partir de la relation (III-124) :

$$\vec{G} = \frac{G_o^2}{2B_I^2} \cdot r \cdot \vec{e}_r + G_o \cdot \vec{e}_x \quad (\text{III-128})$$

Le vecteur inhomogénéité doit être exprimé dans le repère ayant pour centre le point C centre des équipotentielles. On exprime alors le vecteur $\vec{G}$, tout d'abord, en coordonnées cartésiennes dans le repère centré en O, puis ensuite on effectue un changement de centre en passant de O à C, ceci nous fournit le résultat suivant :

$$\vec{G} = G_I \cdot \vec{e}_x' + \frac{G_o^2}{2 \cdot B_I^2} \cdot r' \cdot \vec{e}_r' \quad (\text{III-129})$$

La forme obtenue est similaire à celle exprimée dans le repère O. On obtient compensation exacte pour un matériau G_I au centre des équi Σ_L , et la composante radiale de ce vecteur va également permettre de reproduire une force centrifuge. La forme du vecteur inhomogénéité se déduit de (III-129) de manière triviale :

$$\vec{\varepsilon} = \frac{G_o^2}{2 \cdot B_o^2 \cdot G_I} \cdot r' \cdot \vec{e}_r' \quad (\text{III-130})$$

Ce vecteur est bien radial et est proportionnel au rayon, nous allons pouvoir maintenant calculer la pulsation de la rotation qui peut être simulée.

III-3.3.3.3) Simulations de rotation

Quelle force centrifuge peut être exercée par combinaison d'une force magnétique et de la pesanteur sur un matériau paramagnétique? Et quelle rotation peut être simulée dans un dispositif donné (B_l, G_o) ou (A_l, A_2) pour un matériau donné G_l ?

On suppose que la somme de la force magnétique et de la pesanteur est égale à une force de type centrifuge, ce qui permet d'écrire :

$$\frac{\chi}{2\mu_o} \tilde{G} + \rho \tilde{g} = \rho \omega^2 r' \tilde{e}_r' \quad (\text{III-131})$$

En remplaçant $\mathbf{G}$ et $\mathbf{g}$ par leurs expressions en fonction des paramètres A_l et A_2 , on obtient la valeur de la pulsation :

$$\omega = 2\mu_o \cdot A_2 \sqrt{\frac{2g}{G_l}} \quad (\text{III-132})$$

Quelles valeurs de A_l et A_2 sont nécessaires pour que le dispositif puisse permettre de simuler une force centrifuge de pulsation ω à une distance R du centre de rotation pour un matériau lévitant pour $G=G_l$?

On sait que la pulsation s'exprime en fonction de A_2 (III-132), nous savons que le centre de rotation, qui est le centre des équivalents Σ_L , se trouve à une distance x_c du centre du dispositif (III-127), c'est à dire que la distance R est égale à x_c , ensuite la taille de la zone d'observation dépend de la taille du dispositif, c'est à dire de la valeur de A_2 .

$$\omega^2 = \frac{G_o^2 g}{2 \cdot B_l^2 G_l} \quad (\text{III-133})$$

$$R = \frac{2B_l^2}{G_o^2} (G_l - G_o) \quad (\text{III-134})$$

Le produit du carré de la pulsation par le rayon, c'est à dire l'accélération centrifuge, donne :

$$\omega^2 R = g \left(\frac{G_l - G_o}{G_l} \right) \quad (\text{III-135})$$

On obtient facilement la valeur de A_2 grâce à l'expression (III-132) :

$$A_2 = \frac{\omega}{2\mu_o} \sqrt{\frac{G_l}{2g}} \quad (\text{III-136})$$

L'expression (III-134) permet d'obtenir A_l en fonction de A_2 et de la distance R au centre de rotation :

$$A_l = \frac{G_l}{4\mu_o^2 A_2} - 2.R.A_2 \quad (\text{III-137})$$

III-3.3.3.4) Applications numériques

On veut maintenant simuler le comportement de l'oxygène liquide ($G_l = 8 \text{ T}^2/\text{m}$), au niveau de la paroi d'un réservoir de $R=3 \text{ m}$ de rayon en rotation en apesanteur à $f=0,2\text{Hz}$.

On obtient d'après (III-136) la valeur de $A_2=319275 \text{ A/m}^2$, ce qui équivaut à un gradient de champ au centre de $2\mu_o A_2 = 0,802 \text{ T/m}$, puis on détermine avec (III-137) la valeur de $A_l=2051188 \text{ A/m}$, ce qui équivaut à une induction au centre de $B_l = \mu_o A_l = 2,58 \text{ T}$.

Si on suppose que l'induction sur les conducteurs doit être inférieure à $B_p=12\text{T}$ avec $\lambda=1,2$ ($(2\mu_o.A_2.r+\mu_o.A_l)*1.2 \leq 12\text{T}$), on peut estimer le rayon limite de la zone de travail à $9,25\text{m}$, ce qui implique que ce dispositif semble être réalisable pour cette application numérique.

Le fait de décaler la zone de travail ne permet pas d'augmenter la plage de fréquence des rotations simulables pour un matériau déterminé. Par contre ce dispositif peut être comparé à une loupe qui se déplacerait au dessus d'un dispositif en rotation géant (par exemple un réservoir de fusée) et permettrait d'observer le comportement du fluide à une distance quelconque du centre de rotation.

Notre dispositif respecterait les limites technologiques imposées par les technologies supraconductrices.

III-3.4) Association de forces magnétique et centrifuge permettant d'obtenir sur la terre la compensation parfaite de la pesanteur pour les corps diamagnétiques

III-3.4.1) Compensation exacte de pesanteur sur matériaux diamagnétiques

Il est établi qu'il est impossible de compenser exactement la pesanteur en tout point de la zone de travail cylindrique considérée, au moyen de seules forces magnétiques [QUE2]. Le vecteur inhomogénéité de la compensation, dans le cas de champs magnétiques obtenus par superposition d'un champ dipolaire et d'un champ quadrupolaire, est un vecteur central de norme proportionnelle à r . Ce vecteur est dirigé vers l'extérieur pour des fluides paramagnétiques (oxygène) mais vers l'intérieur pour des fluides diamagnétiques (hydrogène).

Il semble donc possible de compenser exactement la pesanteur dans tout le domaine cylindrique concerné, grâce à l'association de forces magnétiques bien choisies et de forces centrifuges provenant d'une rotation à vitesse constante de la zone de travail.

Le calcul des conditions sur le champ magnétique et sur la rotation nécessaires se déduit immédiatement de nos résultats précédents. Il suffit d'annuler la somme des forces magnétique, de pesanteur et centrifuge pour le fluide concerné. L'équation d'équilibre est la suivante :

$$\frac{\chi_m}{2\mu_0} \vec{G} + \rho \cdot \vec{g} + \rho \cdot \omega^2 \cdot \vec{r} = \vec{0} \quad (\text{III-138})$$

Ce qui nous conduit *in fine* à l'expression :

$$\frac{-\chi_m \cdot G_1^2}{4\mu_0 \rho} = \omega^2 B_1^2 \quad (\text{III-139})$$

La condition (III-108) est donc la condition de compensation exacte de la pesanteur dans un domaine cylindrique d'axe Oz horizontal, en rotation autour de son axe à la pulsation de rotation ω , et soumis à un champ magnétique dont nous avons défini la distribution. La relation ne peut être vérifiée que si la susceptibilité magnétique est négative, et donc cette méthode ne peut être appliquée qu'aux fluides diamagnétiques (hydrogène liquide par exemple)

En tenant compte de la forme de G_1 , on obtient :

$$B_1 \cdot \omega = g \cdot \sqrt{-\mu_0 \frac{\rho}{\chi_m}} \quad (\text{III-140})$$

Soit :

$$B_1 \cdot f = \frac{g}{2\pi} \cdot \sqrt{-\mu_0 \frac{\rho}{\chi_m}} \quad (\text{III-141})$$

Le produit $B_1 f$, où f est la fréquence de rotation en Hertz (= tr/s), est une constante ne dépendant que des caractéristiques du matériau diamagnétique considéré. Les relations précédentes (III-139), (III-140) et (III-141) pour les matériaux diamagnétiques sont équivalentes aux relations (III-118), (III-119) et (III-120) pour les matériaux paramagnétiques.

Le tableau III donne les valeurs du produit $B_1 f$ pour des substances diamagnétiques :

Substances (P=1 bar)	G_1 (T ² /m)	$B_1 \cdot f$ (T.Hz)
Pyrolytic carbon (293K)	-136	4,1
H₂ (20K,l)	-993	11,1
Water (293K,l)	-2725	18,4
Xe (293K,g)	-5661	26,6
Hg (293K)	-11749	38,2
Au (293K)	-13804	41,4

Tableau III : Produit caractéristique induction par fréquence pour des diamagnétiques

La figure 40 donne la variation $B_I(f)$ pour l'hydrogène liquide. Avec par exemple un champ dipolaire de 8T, la fréquence de rotation de la zone de travail est 1,4Hz, le gradient de champ du quadropole associé est de 62T/m. Ces valeurs semblent technologiquement réalisables avec des bobines supraconductrices. Par contre la zone de travail sera petite puisque $(2\mu_o.A_2.r+\mu_o.A_1)^*1.2 \leq 12T$ et donc r doit être inférieure à 3,2 cm. Ceci est une première approximation.

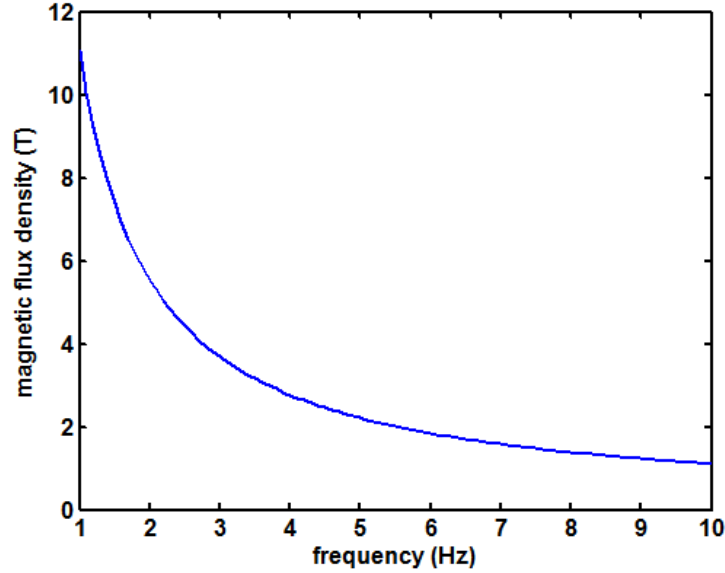


FIG. 40. Variation $B_I(f)$ pour la compensation de pesanteur dans l'hydrogène liquide.

III-3.4.2) Simulation, au sol, de rotation, en apesanteur, sur les matériaux diamagnétiques

Si, lorsque la condition (III-139) est respectée, on augmente la vitesse de rotation pour la faire passer de ω à $\omega_I = \omega + \Delta\omega$, sans modifier le champ magnétique, alors l'équation (III-138) devient :

$$\frac{\chi_m}{2\mu_o} \vec{G} + \rho \vec{g} + \rho \omega_1^2 \cdot \vec{r} \cdot \vec{e}_r = \frac{\chi_m}{2\mu_o} \vec{G} + \rho \vec{g} + \rho \omega^2 \cdot \vec{r} \cdot \vec{e}_r + \rho (2 \cdot \omega \Delta\omega + \Delta\omega^2) \cdot \vec{r} \cdot \vec{e}_r = \rho (2 \cdot \omega \Delta\omega + \Delta\omega^2) \cdot \vec{r} \cdot \vec{e}_r \quad (\text{III-142})$$

La force résultante simulée est une force centrifuge pure de vitesse de rotation ω_2 :

$$\omega_2 = \sqrt{2 \cdot \omega \Delta\omega + \Delta\omega^2} \quad (\text{III-153})$$

On peut donc également simuler exactement sur Terre le comportement des fluides diamagnétiques en apesanteur soumis à une rotation pure, mais le système n'est plus statique comme il l'est pour les matériaux paramagnétiques, puisqu'il doit être mis en rotation.

III-3.5) Conclusion de la section III-3

Nous avons dans cette section examiné les possibilités théoriques de compensation de la pesanteur offertes par l'association de forces magnétiques créées dans des dispositifs cylindriques et de forces centrifuges. Les zones d'expérimentation dans lesquelles sont disposés les fluides dia ou para magnétiques sont cylindriques d'axe horizontal. Cette structure permet d'utiliser des sources de champ de technologie voisine de celle des bobinages d'accélérateurs de particules (dipôles ou quadrupoles)

Les principaux résultats théoriques obtenus concernent :

- La simulation exacte au moyen d'expériences statiques, au sol, du comportement de fluides paramagnétiques (oxygène liquide) contenus dans l'espace (apesanteur vraie) dans des réservoirs en rotation uniforme sur eux-mêmes, avec un centre de rotation éventuellement hors de la zone de travail.
- La simulation exacte au moyen d'expériences dynamiques, au sol, du comportement de fluides diamagnétiques (hydrogène liquide) contenus dans l'espace (apesanteur vraie) dans des réservoirs en rotation uniforme sur eux-mêmes.
- La compensation exacte au sol de la pesanteur, pour des fluides diamagnétiques (hydrogène liquide), au moyen de forces magnétiques associées à des forces centrifuges dues à la rotation uniforme de la cellule contenant le fluide. Ce résultat permet d'outrepasser le résultat théorique antérieur interdisant au sol la compensation magnétique parfaite de la pesanteur dans un domaine tridimensionnel.
- La création éventuelle dans l'espace (apesanteur vraie) au moyen de sources de champ magnétique embarquées, de champs de forces magnétiques semblables à un champ de forces centrifuges pour des fluides paramagnétiques ou centripètes pour des fluides diamagnétiques.
- La détermination de sources de champ produisant les forces magnétiques nécessaires. Les caractéristiques principales de ces sources ont été établies en relation avec les fréquences de rotation effectives ou simulées dans les différents cas considérés.

Cet ensemble de résultats, présentés pour la lévitation de fluides, est particulièrement adapté à l'étude des propergols liquides utilisés dans l'espace.

Quoique nos résultats semblent rigoureux et que les dispositifs (en particulier supraconducteurs) semblent réalisables, aucune expérimentation n'a été effectuée qui permettrait la validation de cette approche, sans doute totalement nouvelle.

III-4) Conclusion du chapitre III

La lévitation de fluides demande pour représenter les conditions spatiales de faibles valeurs d'inhomogénéités. La valeur généralement fixée se situe aux alentours de 1%. Pour obtenir de telles homogénéités dans des volumes suffisants la valeur de l'induction doit généralement être de plusieurs teslas et ainsi l'utilisation de matériaux supraconducteurs est nécessaire.

Nous avons tout de même dans la première partie de ce chapitre regardé les possibilités de lévitation qu'un électroaimant non supraconducteur, à culasse ferromagnétique, peut fournir en jouant sur les dimensions de ses pôles ferromagnétiques. Il semble possible grâce à ce type de dispositif d'obtenir des zones de travail de l'ordre du cm^3 pour des matériaux avec une susceptibilité magnétique assez élevée comme l'oxygène liquide ($8\text{T}^2/\text{m}$). Par contre les faibles valeurs d'induction interdisent son utilisation pour des matériaux faiblement magnétiques comme l'eau ($2717\text{T}^2/\text{m}$). En conséquence, seules quelques substances inorganiques peuvent être lévitées magnétiquement dans de tels dispositifs.

Dans la deuxième partie, nous avons développé la méthode générale d'analyse harmonique, et obtenu l'expression générale de la force magnétique (vecteur $\mathbf{G}$) en fonction des harmoniques du champ magnétique. Les différentes conditions d'homogénéité ont permis de déterminer les familles harmoniques répondant à chacune des différentes configurations spatiales de l'accélération résultante désirée. Nous avons également relié ces décompositions harmoniques au potentiel magnétique complexe associé, et déterminé les équipotentielles magnéto-gravitationnelles engendrées. Ensuite un calcul simple a permis de donner de manière unique la nappe de courant, disposée sur un cylindre de rayon fixé, qui amène aux distributions de champ magnétique désirées. Ces différentes configurations ont été visualisées par simulation numériques sur de l'oxygène liquide à 90K. Seuls les trois premiers harmoniques du champ sont nécessaires pour une bonne description des configurations d'accélération résultantes. Le champ magnétique ressemblant fortement à celui d'un dipôle à cause de la prédominance du premier harmonique, il semble intéressant de pouvoir contrôler l'orientation du champ magnétique par rapport à la force magnétique, pour, lors d'expériences, dissocier l'impact du champ de celui de la force. Cette propriété est démontrée théoriquement et est générée par un déphasage identique de l'ensemble des harmoniques. Sous certaines conditions (rayon de la zone de travail faible devant le rapport G_1/B_1^2), le déphasage de l'harmonique 3 uniquement engendre le passage de la configuration verticale à la configuration horizontale pour les équipotentielles magnéto-gravitationnelles, sans passer par la configuration circulaire ; les distributions de la force magnétique subissent alors une rotation spatiale. Pratiquement ce système de déphasage de l'harmonique 3, peut être réalisé de manière statique par une combinaison de bobinage créant un harmonique 3 tournant comme il est couramment utilisé dans la conception de machines électriques. La variation en amplitude (sans déphasage) de ce troisième harmonique permet une modification des configurations d'accélération du cas vertical au cas horizontal en passant lorsque l'amplitude est nulle par le cas circulaire. Ces résultats mettent en évidence l'impact du troisième harmonique sur la création de champs de force magnétiques. Cette partie a permis de balayer les multiples possibilités qu'offre en terme de dynamique l'association de champs magnétiques et de la gravité.

Nous avons dans la dernière section examiné les possibilités théoriques de compensation de la pesanteur offertes par l'association de forces magnétiques, de pesanteur et éventuellement de forces centrifuges. Cette structure permet d'utiliser des sources de champ de technologie voisine de celle des bobinages d'accélérateurs de particules (dipôles ou quadripôles). Cette géométrie rend possible la simulation exacte au moyen d'expériences statiques, au sol, du

comportement de fluides paramagnétiques (oxygène liquide) contenus dans l'espace (apesanteur vraie) dans des réservoirs en rotation uniforme sur eux-mêmes, avec un centre de rotation éventuellement hors de la zone de travail. La simulation exacte au moyen d'expériences dynamiques, au sol, du comportement de fluides diamagnétiques (hydrogène liquide) contenus dans l'espace (apesanteur vraie) dans des réservoirs en rotation uniforme sur eux-mêmes est également réalisable. Il est aussi possible de compenser exactement au sol la pesanteur, pour des fluides diamagnétiques (hydrogène liquide), au moyen de forces magnétiques associées à des forces centrifuges dues à la rotation uniforme de la cellule contenant le fluide. Ce résultat permet d'outrepasser le résultat théorique antérieur interdisant au sol la compensation magnétique parfaite de la pesanteur dans un domaine tridimensionnel. Pour les systèmes embarqués dans l'espace, il est possible de créer au moyen de sources de champ, des champs de forces magnétiques semblables à un champ de forces centrifuges pour des fluides paramagnétiques ou centripètes pour des fluides diamagnétiques. Et nous avons aussi déterminé les sources de champ produisant les forces magnétiques nécessaires. Les caractéristiques principales de ces sources ont été établies en relation avec les fréquences de rotation effectives ou simulées dans les différents cas considérés. Cet ensemble de résultats, présentés pour la lévitation de fluides, est donc particulièrement bien adapté à l'étude des propergols liquides utilisés dans l'espace.

La lévitation magnétique, dans des géométries de type cylindriques invariantes par translation, avait été jusque maintenant très peu étudiée. Nos travaux [LOR4] montrent qu'elle offre un nombre considérable de possibilités d'expérimentation, ce qui devrait attirer l'attention des expérimentateurs sur de tels dispositifs utilisant des technologies maîtrisées par les concepteurs d'accélérateurs de particules.

Références bibliographiques :

- [ANE1] Anerella, M. et al. **The RHIC magnet system**, Nuclear Instruments and Methods in Physics Research A, 499, pp280-315 (2003)
- [BEA1] Beaunon, E. and Tournier, R. **Levitation of organic materials**, Nature, 7, p470 (1991)
- [BER1] Berry, M.V. and Geim, A. K. **Of flying frogs and levitrons**, European Journal of Physics , 18, pp302-313 (1997)
- [BEY1] Beysens, D. et al. **High-frequency driven capillary flows speed up the gas-liquid transition in zero-gravity conditions**, Physical Review Letters, 95, 034502 (2005)
- [BRA1] Braithwaite, D. et al. **Magnetically controlled convection in paramagnetic fluid**, Nature, 354, pp134-136 (1991)
- [DEV1] Devred A., Gourlay S. A., Yamamoto A., **Future Accelerator Magnet Needs**, IEEE Transactions on Applied Superconductivity, vol 15 (2), pp. 1192-1199, 2005.
- [DUR1] Durand, E. **Magnétostatique**, Masson et C^{ie}, Paris, p52 (1968)
- [FEL1] Felice, H. et al. **Design and test of a Nb₃Sn subscale dipole magnet for training studies**, IEEE Transactions on Applied Superconductivity, 17, 2, pp1144-1148 (2007)
- [IKE1] Ikezoe, Y. et al. **Making water levitate**, Nature, 393, pp749-750 (1998)
- [LOR1] Lorin, C. and Mailfert, M. **Magnetic compensation of gravity and centrifugal forces**, Microgravity Science and Technology, (2008)
- [LOR2] Lorin, C., Mailfert, M. and Chatain, D. **Computation of a Large Oxygen Magnetic Levitation Apparatus**, CEFC 2008 submitted to Microgravity Science and Technology, (2008)
- [LOR3] Lorin, C. and Mailfert, M. **Magnetic compensation of gravity by using superconducting axisymmetric coils: Spherical Harmonics Method**, Journal of Physics: Conference Series, 97, 012199 (2008)
- [LOR4] Lorin, C. and Mailfert, A. **Magnetic levitation in two-dimensional geometry with translational invariance**, Journal of Applied Physics, **104**, 103904, (2008)
- [NAK1] Nakamoto T. et al. **Design of superconducting combined function magnets for the 50 GeV proton beam line for the J-PARC neutrino experiment**, IEEE Transactions on applied superconductivity, 14, pp616-619, (2004)
- [NAK2] Nakamoto T. et al. **Development of a prototype of superconducting combined function magnet for the 50 GeV proton beam line for the J-PARC neutrino experiment**, IEEE Transactions on applied superconductivity, 15, pp1144-1147, (2005)
- [QUE1] Quettier, L. et al. **New design of a superconducting magnet for generation of quasi-uniform magnetic force field** IEEE Transactions on Applied Superconductivity, 13, 2, pp1608 – 1611 (2003)
- [QUE2] Quettier, L. et al. **Magnetic compensation of gravity forces in liquid/gas mixtures: surpassing intrinsic limitations of a superconducting magnet by using ferromagnetic inserts**, European Physical Journal Applied Physics, 32, pp167-175 (2005)
- [ROS1] Rossi, L. **State-of-the-art superconducting accelerator magnets**, IEEE Transactions on Applied Superconductivity, 12, 1, pp219-227 (2002)
- [ROS2] Rossi, L. **The LHC main dipoles and quadrupoles toward series production**, IEEE Transactions on Applied Superconductivity, 13, 2, pp1221-1228 (2003)
- [ROS3] Rossi, L. and Todesco, E. **Electromagnetic design of superconducting quadrupoles**, Physical review special topics Accelerators and Beams, 9, 102401, (2006)
- [SAR1] Sarma, P.R. **Ideal coil shape for combined function superconducting magnets**, Journal of Physics D : Applied Physic, 40, pp3056-3059, (2007)
- [TOD1] Discussion privée avec Ezio Todesco du CERN (20/06/2008).
- [VIN1] Vincent-Viry O. et al. **Micro-gravity: current distributions creating a uniform force field**, *Eur. Phys. J. AP* 13, 121-123 (2001)
- [VIN2] Vincent-Viry O. **Contribution méthodologique à la synthèse de sources en magnétostatique, applications au stockage d'énergie et à la levitation magnétique**, Thèse INPL, (2002)
- [WUN1] Wunenberger, R. et al. **Magnetic compensation of gravity forces in (-p) hydrogen near its critical point: Application to weightless conditions**, Physical Review E, 62, 1, pp469-476 (2000)

Chapitre IV : Géométrie axisymétrique

Sommaire

IV-1) Méthode harmonique en géométrie sphérique axisymétrique.....	105
IV-1.1) Définition de la géométrie	105
IV-1.2) Détermination de la forme générale du vecteur G	105
IV-1.3) Détermination de trois (plus une) familles d'harmoniques	107
IV-1.3.1) Mise en équation des trois (plus une) conditions d'homogénéité	108
IV-1.3.1.1) Cas « vertical »	108
IV-1.3.1.2) Cas « horizontal »	108
IV-1.3.1.3) Cas « sphérique »	108

IV-1.3.2) Résolution des systèmes d'équations, et obtention des familles d'harmoniques	109
IV-1.3.2.1) Cas « vertical »	109
IV-1.3.2.2) Cas « horizontal »	110
IV-1.3.2.3) Cas « sphérique »	110
IV-1.3.2.4) Cas elliptique	111
IV-1.4) Détermination de la nappe de courant	112
IV-1.4.1) Densité surfacique de courant	112
IV-1.4.2) Densité volumique	112
IV-1.5) Visualisation des résultats par simulation numérique	114
IV-1.5.1) Simulation avec 3 harmoniques des différentes configurations de lévitation	114
IV-1.5.2) Validation de la troncature à 3 harmoniques	115
IV-1.6) Conclusion de la section IV-1	117
IV-2) Inserts	118
IV-2.1) Généralités sur les inserts	118
IV-2.1.1) Quels matériaux ?	118
IV-2.1.2) Modélisation des inserts	118
IV-2.1.3) Insert pour la lévitation	119
IV-2.2) Solénoïde 10T avec insert	120
IV-2.2.1) Hydrogène	120
IV-2.2.2) Eau	122
IV-2.2.3) Hélium	123
IV-2.3) Conclusion de la section IV-2	125
IV-3) Dimensionnement d'une station de lévitation : application à l'oxygène	126
IV-3.1) Contraintes et méthode	126
IV-3.2) Large Oxygen Levitation Apparatus (LOLA)	127
IV-3.2.1) Premier bobinage : « B_1 »	127
IV-3.2.2) Second bobinage : « G_1 »	129
IV-3.2.3) Troisième bobinage : Σ_L	130
IV-3.2.4) Présentation de la station	131
IV-3.2.5) Résultats numériques	134
IV-3.2.5.1) Variation spatiale de l'accélération	134
IV-3.2.5.2) Variation temporelle de l'accélération	136
IV-3.2.6) Précision de positionnement	138
IV-3.2.6.1) Méthode	138
IV-3.2.6.2) Impact sur la décomposition harmonique	139
IV-3.2.6.3) Impact sur la zone à 1%	139
IV-3.3) Station de lévitation d'oxygène plus performante	140
IV-3.3.1) Premier bobinage : « B_1 »	140
IV-3.3.2) Second bobinage : « G_1 »	141
IV-3.3.3) Troisième bobinage : « Σ_L »	142
IV-3.3.4) Présentation de la station	143
IV-3.3.5) Variation spatiale de l'accélération	145
IV-3.4) Conclusion et perspectives de la section IV-3	148
IV-4) Conclusion du chapitre IV	150
Références bibliographiques :	151

Les systèmes utilisés jusqu'ici pour simuler les conditions d'apesanteur par champs magnétiques et répertoriés dans la littérature possèdent tous une symétrie de révolution. Ils sont généralement constitués d'un simple solénoïde (supraconducteur [IKE1], résistif [BRO1][BRO2], ou hybride [KIT1]), avec une zone de lévitation située pour les matériaux paramagnétiques comme l'oxygène [PIC1] dans la partie inférieure du solénoïde. Quant aux matériaux diamagnétiques, qui regroupent la majorité des matériaux, dont font partie l'eau [BEA1] ou l'hydrogène [WUN1][CHA1], la lévitation est réalisée dans la partie haute du solénoïde.

Il semble donc tout à fait justifié d'approfondir les connaissances sur la lévitation magnétique faite à l'aide de dispositifs axisymétriques afin d'en améliorer les capacités. Dans ce chapitre, la méthode générale de décomposition harmonique sera appliquée au cas d'une géométrie invariante par rotation associée à un système de coordonnées sphériques. Cette section permettra de bien saisir l'effet des différents harmoniques sphériques (zonaux en géométrie axisymétrique) sur la force magnétique. Ensuite nous détaillerons l'étude d'un insert axisymétrique situé dans un champ magnétique suffisamment fort pour le saturer. Cet insert doit permettre d'atteindre des compensations de pesanteur sur des matériaux faiblement magnétiques (diamagnétiques) avec des bobines délivrant des champs magnétiques de l'ordre de 10T, ce qui reste bien inférieur aux valeurs d'inductions habituellement nécessaires à la lévitation de tels matériaux. Enfin, nous présenterons deux dimensionnements magnétiques de stations de lévitation constituées d'un ensemble de bobines. Ces dispositifs permettent de compenser la pesanteur sur un litre de d'oxygène près de son point critique avec une homogénéité de la compensation supérieure à 99%. Comme nous le verrons, une grande souplesse d'utilisation est permise par ces lévitateurs magnétiques. La conception de ces dispositifs d'un genre nouveau est basée sur la décomposition harmonique que nous allons maintenant développer.

IV-1) Méthode harmonique en géométrie sphérique axisymétrique

La méthode d'analyse harmonique appliquée à la géométrie cylindrique, dans le chapitre III de cet ouvrage, est maintenant utilisée en géométrie axisymétrique pour comprendre l'effet des différents harmoniques de champ magnétique sur la force magnétique.

IV-1.1) Définition de la géométrie

Le problème considéré possède une symétrie axiale, c'est à dire une invariance par rotation autour de l'axe défini par $\theta=0$ ou $\theta=\pi$ (axe Ox), autrement dit, le système est indépendant de la variable φ . La gravité $\mathbf{g}$ est définie comme étant dirigée suivant l'axe x , dans le sens des x décroissants :

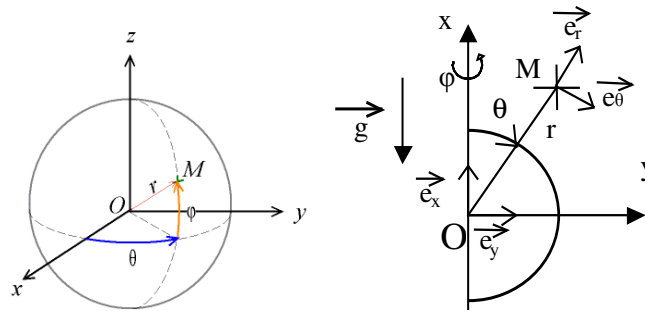


FIG. 1. Coordonnées sphériques et géométrie du système

Les expressions de la force magnétique, du vecteur inhomogénéité relative $\mathbf{\varepsilon}$ de la compensation et du potentiel magnéto-gravitationnel Σ_L sont celles du chapitre I (cf. expressions (I-3), (I-6) et (I-8)). La compensation magnétique sera choisie exacte au centre du dispositif ($r=0$) pour un vecteur $\mathbf{G}=\mathbf{G}_1$ défini également au chapitre I (I-5). La norme de l'induction au centre du système est prise égale à B_1 .

IV-1.2) Détermination de la forme générale du vecteur $\mathbf{G}$

La résolution de l'équation de Laplace donne une forme générale pour le potentiel scalaire, en dehors de tout courant. Ce potentiel scalaire peut être généré par une nappe de courant répartie sur une sphère de rayon $r=R_0$. En considérant les conditions aux limites ($r=0$ et $r \rightarrow \infty$), le potentiel scalaire prend une forme différente de part et d'autre de la sphère de rayon $r=R_0$ parcourue par les courants surfaciques. Le potentiel scalaire s'exprime à l'aide des polynômes de Legendre d'ordre 0 et de degré n , $P_n^0(\cos\theta)=P_n(\cos\theta)$:

$$V_{int}(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty} C_n \cdot r^n \cdot P_n(\cos\theta), \quad r < R_0 \quad (IV-1)$$

$$V_{ext}(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_n}{r^{n+1}} \cdot P_n(\cos\theta), \quad r > R_0 \quad (IV-2)$$

où C'_n et C_n sont des constantes déterminées en fonction des conditions aux limites. Puisque le champ magnétique dérive de ce potentiel, il est obtenu en calculant son gradient. On en déduit immédiatement les harmoniques de champ en faisant intervenir les polynômes de Legendre d'ordre 1 et de degré n , $P'_n(\cos\theta)$. Les harmoniques s'expriment en fonction des vecteurs unitaires $\mathbf{e}_r$ et $\mathbf{e}_\theta$ définis figure 1:

$$\overrightarrow{H_{int\ n}}(r,\theta) = \begin{pmatrix} -n.C'_n.r^{n-1}.P_n(\cos\theta) \\ -C'_n.r^{n-1}.P'_n(\cos\theta) \end{pmatrix} \quad (IV-3)$$

$$\overrightarrow{H_{ext\ n}}(r,\theta) = \begin{pmatrix} (n+1).\frac{C'_n}{r^{n+2}}.P_n(\cos\theta) \\ -\frac{C'_n}{r^{n+2}}.P'_n(\cos\theta) \end{pmatrix} \quad (IV-4)$$

La norme de l'induction au centre O (Fig. 1) vaut B_I , ainsi, on obtient immédiatement la valeur du premier coefficient harmonique :

$$C_I = \frac{B_I}{\mu_0} \quad (IV-5)$$

son expression est similaire à celle du cas cylindrique (III-45).

A partir des expressions du champ magnétique (IV-3) et (IV-4), nous calculons le vecteur $\mathbf{G}$, qui représente la force magnétique. Il s'obtient en calculant tout d'abord l'expression du carré de la norme de l'induction magnétique à l'intérieur de notre sphère. Nous ne nous intéressons qu'aux grandeurs intérieures, comme dans le cas de la conception de bobinages d'IRM, où le champ magnétique dans la zone utile est réalisé par des bobinages extérieurs à cette zone. Il existe également un vecteur $\mathbf{G}$ extérieur, mais celui-ci n'est pas intéressant pour la microgravité.

Le carré de la norme de l'induction prend alors la forme suivante :

$$B^2(r,\theta) = \mu_0^2 \sum_{n=1}^{\infty} n.C'_n.r^{n-1}.P_n(\cos\theta) \sum_{p=1}^{\infty} p.C_p.r^{p-1}.P_p(\cos\theta) + \mu_0^2 \sum_{n=1}^{\infty} C'_n.r^{n-1}.P'_n(\cos\theta) \sum_{p=1}^{\infty} C_p.r^{p-1}.P'_p(\cos\theta) \quad (IV-6)$$

On peut calculer le champ de vecteur $\mathbf{G}$ porté par $\mathbf{e}_r$ et $\mathbf{e}_\theta$ en tout point intérieur à la sphère, qui dérive de cette grandeur :

$$\overrightarrow{G}(r,\theta) = 2\mu_0^2 \left[\sum_{n=1}^{\infty} n.C'_n.r^{n-1}.P_n(\cos\theta) \sum_{p=1}^{\infty} p.(p-1).C_p.r^{p-2}.P_p(\cos\theta) + \sum_{n=1}^{\infty} C'_n.r^{n-1}.\dot{P}_n(\cos\theta) \sum_{p=1}^{\infty} (p-1).C_p.r^{p-2}.\dot{P}_p(\cos\theta) \right] \\ + \left[\sum_{n=1}^{\infty} n.C'_n.r^{n-1}.P_n(\cos\theta) \sum_{p=1}^{\infty} p.C_p.r^{p-2}.\dot{P}_p(\cos\theta) + \sum_{n=1}^{\infty} C'_n.r^{n-1}.\dot{P}_n(\cos\theta) \sum_{p=1}^{\infty} p.C_p.r^{p-2}.\ddot{P}_p(\cos\theta) \right] \quad (IV-7)$$

$$\text{où } \dot{P}_n(\cos\theta) = \frac{dP_n(\cos\theta)}{d\theta} \text{ et } \ddot{P}_n(\cos\theta) = \frac{d^2P_n(\cos\theta)}{d\theta^2}$$

Si on calcule la valeur du vecteur $\mathbf{G}=\mathbf{G}_1$ au centre du dispositif, on obtient :

$$\vec{G}=\vec{G}_1=4\mu o^2.C_1.C_2.\vec{e}_x \quad (\text{IV-8})$$

Cette expression est logique, puisque étant en géométrie axisymétrique, les vecteurs de l'axe sont soit nuls soit portés par $\mathbf{e}_x$.

D'après les expressions (IV-5) et (IV-8), on détermine la valeur du deuxième harmonique :

$$C_2=\frac{G_1}{4\mu o B_1} \quad (\text{IV-9})$$

son expression est similaire à celle du cas cylindrique (III-51).

La force magnétique est maintenant connue en fonction des harmoniques du champ magnétique. Trois familles d'harmoniques vont maintenant être déterminées, menant à trois configurations de forces magnétiques, c'est à dire à trois types d'accéléérations résultantes particulièrement intéressants d'un point de vue pratique.

IV-1.3) Détermination de trois (plus une) familles d'harmoniques

Les conditions d'inhomogénéités définissent les valeurs des harmoniques de champ $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par l'intermédiaire de relations sur des dérivées n-ième du vecteur $\mathbf{G}$. Trois conditions distinctes vont être étudiées, définissant chacune une inhomogénéité, ou accélération résultante différente. Le vecteur accélération résultante sera, soit orthoaxial par rapport à l'axe de révolution du système, c'est à dire central dans chaque plan perpendiculaire à l'axe (Fig. 2a), soit orthogonal par rapport au plan yOz (Fig. 2b), soit central (Fig. 2c) :

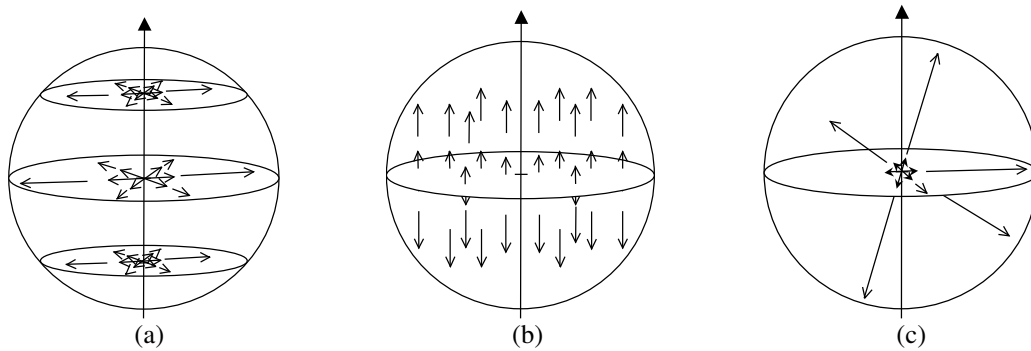


FIG. 2. Distributions schématiques des accélérations résultantes

Nous introduirons également une quatrième configuration dite elliptique par un choix simple d'harmoniques.

IV-1.3.1) Mise en équation des trois (plus une) conditions d'homogénéité

IV-1.3.1.1) Cas « vertical »

Pour obtenir un vecteur accélération résultante orthoaxial (Fig. 2a), nous faisons tendre $\varepsilon_r(r,0)$ vers zéro, sachant que $\varepsilon_\theta(r,0)=0$ par symétrie axiale du système. Le vecteur $\mathbf{G}$ obtenu est ainsi le plus constant possible suivant l'axe $\theta=0$.

Cette condition se traduit par l'annulation des dérivées n-ièmes de $G_r(r,0)$ par rapport à r en $r=0$:

$$\forall n \in N, \left. \frac{\partial^n G_r(r,0)}{\partial r^n} \right|_{r=0} = 0 \quad (\text{IV-10})$$

IV-1.3.1.2) Cas « horizontal »

Pour obtenir un vecteur accélération résultante orthogonal par rapport au plan horizontal (Fig.2b), nous faisons tendre $\varepsilon_r(r,\pi/2)$ et $\varepsilon_\theta(r,\pi/2)$ vers zéro. Cette double condition se traduit par l'annulation des dérivées n-ièmes de $G_r(r,\pi/2)$ et $G_\theta(r,\pi/2)$ par rapport à r en $r=0$:

$$\forall n \in N, \left. \frac{\partial^n G_r(r,\frac{\pi}{2})}{\partial r^n} \right|_{r=0} = \left. \frac{\partial^n G_\theta(r,\frac{\pi}{2})}{\partial r^n} \right|_{r=0} = 0 \quad (\text{IV-11})$$

On peut imposer ces deux conditions simultanément car la fonction $G_r(r,\pi/2)$ est un polynôme impair (IV-14) et la fonction $G_\theta(r,\pi/2)$ est un polynôme pair (IV-15), car $\forall p \in N, P_{2p}(\cos(\frac{\pi}{2}))=0$ et $\forall p \in N, P_{2p+1}(\cos(\frac{\pi}{2}))=0$. Ces deux relations se démontrent assez facilement à partir des relations suivantes : $\forall n \in N, z \in [-1,1], P_{2n+1}(0)=0$ et $(z^2-1) \cdot \frac{d}{dz} P_n(z) = n z P_n(z) - n P_{n-1}(z)$ [ANG1].

IV-1.3.1.3) Cas « sphérique »

Pour obtenir un vecteur accélération résultante central, nous cherchons à égaliser $\varepsilon_r(r,\pi/2)$ et $\varepsilon_r(r,0)$. Cette condition se traduit par l'égalisation des dérivées n-ièmes de $G_r(r,\pi/2)$ et $G_\theta(r,0)$ par rapport à « r » en $r=0$:

$$\forall n \in N, \left. \frac{\partial^n G_r(r,0)}{\partial r^n} \right|_{r=0} = \left. \frac{\partial^n G_r(r,\frac{\pi}{2})}{\partial r^n} \right|_{r=0} \quad (\text{IV-12})$$

Pour déterminer les harmoniques pour chacune des trois familles de solutions, il faut connaître les expressions de $G_r(r,0)$, $G_r(r,\pi/2)$ et $G_\theta(r,\pi/2)$, lesquelles sont obtenues relativement aisément à partir de la relation (7) :

$$Gr(r,0)=2\mu_0^2 \sum_{p,n=0}^{\infty} n.p.(p-1).C_n.C_p.r^{p+n-3} \quad (IV-13)$$

$$Gr(r,\frac{\pi}{2})=2\mu_0^2 \left[\sum_{p,m=0}^{\infty} 4pm.(2p-1).r^{2(p+m)-1}.C_{2p}.C_{2m}.P_{2p}(0).P_{2m}(0)+2p.C_{2p+1}.C_{2m+1}.P_{2m+1}(0).P_{2p+1}(0).r^2 \right] r^{2(p+m)-3} \quad (IV-14)$$

ce polynôme est impair en r .

$$G_{\theta}(r,\frac{\pi}{2})=2\mu_0^2 \cdot \sum_{p,m=0}^{\infty} C_{2m+1}C_{2p}.P_{2m+1}(0) \left[2p.P_{2p}(0)+P_{2p}(0) \right] r^{2(p+m-1)} \quad (IV-15)$$

ce polynôme est pair en r .

IV-1.3.2) Résolution des systèmes d'équations, et obtention des familles d'harmoniques

IV-1.3.2.1) Cas « vertical »

L'application de la relation (IV-10) fournit pour chaque valeur de n une équation. Appliquée aux n premières dérivées, elle permet ainsi d'obtenir un système d'équations, dont la résolution fournira les $n+2$ premiers harmoniques puisque les deux premiers harmoniques sont déjà connus (IV-5) et (IV-9).

Par exemple, lorsque $n=1$, on obtient une relation entre les trois premiers harmoniques du champ, connaissant déjà les deux premiers on obtient le troisième de manière triviale.

Le système obtenu est un système triangulaire. Ceci signifie que l'harmonique de rang n se déduit des harmoniques de rang strictement inférieur à n . On peut ainsi par récurrence obtenir l'ensemble des harmoniques répondant à la condition (IV-10).

Par exemple, si $n=[1,2,3,4]$, on obtient avec les expressions (IV-5) et (IV-9), le système ci-dessous :

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{B_l}{\mu_0} \\ 4\mu_0^2 C_1 C_2 &= G_l \\ 2C_2^2 + 3C_1 C_3 &= 0 \\ 2C_1 C_4 + 3C_3 C_2 &= 0 \\ 9C_3^2 + 16C_2 C_4 + 10C_1 C_5 &= 0 \\ 3C_1 C_6 + 5C_5 C_2 + 6C_3 C_4 &= 0 \end{aligned}$$

En résolvant ce système, on peut déterminer les 6 premiers harmoniques permettant d'avoir un vecteur $\mathbf{G}$ le plus uniforme possible, c'est à dire tendant vers $\mathbf{G}_1$ suivant l'axe de symétrie de la zone de travail sphérique de rayon R_0 :

C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6
$\frac{B_l}{\mu_0}$	$\frac{G_l}{4\mu_0 B_l}$	$\frac{-G_l^2}{24\mu_0 B_l^3}$	$\frac{G_l^3}{64\mu_0 B_l^5}$	$\frac{-G_l^4}{128\mu_0 B_l^7}$	$\frac{7G_l^5}{1536\mu_0 B_l^9}$

Tableau I : Expressions des six premiers harmoniques du cas « vertical »

IV-1.3.2.2) Cas « horizontal »

L'application à la relation (IV-11) de $n=[1,2,3,4]$ et les expressions (IV-5) et (IV-9) fournissent le système suivant :

$$\begin{aligned}
C_1 &= \frac{B_l}{\mu_0} \\
4\mu_0^2 C_1 C_2 &= G_l \\
C_2^2 - 3C_1 C_3 &= 0 \\
6C_1 C_4 &= 0 \\
9C_3^2 - 12C_2 C_4 + 15C_1 C_5 &= 0 \\
45C_1 C_6 - 15C_5 C_2 + 18C_3 C_4 &= 0
\end{aligned}$$

La résolution de ce système donne les valeurs des harmoniques permettant d'avoir un vecteur $\mathbf{G}$ le plus uniforme possible, c'est à dire tendant vers $\mathbf{G}_1$ suivant le plan horizontal passant par le centre de la zone de travail :

C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6
$\frac{B_l}{\mu_0}$	$\frac{G_l}{4\mu_0 B_l}$	$\frac{G_l^2}{48\mu_0 B_l^3}$	0	$\frac{-G_l^4}{3840\mu_0 B_l^7}$	$\frac{-G_l^5}{46080\mu_0 B_l^9}$

Tableau II : Expressions des six premiers harmoniques du cas « horizontal »

IV-1.3.2.3) Cas « sphérique »

L'application à la relation (IV-12) de $n=[1,2,3,4]$ et les expressions (IV-5) et (IV-9) fournissent le système suivant :

$$\begin{aligned}
C_1 &= \frac{B_l}{\mu_0} \\
4\mu_0^2 C_1 C_2 &= G_l \\
C_2^2 + 3C_1 C_3 &= 0 \\
2C_1 C_4 + 3C_2 C_3 &= 0 \\
27C_3^2 + 70C_2 C_4 + 25C_1 C_5 &= 0 \\
30C_1 C_6 + 50C_5 C_2 + 60C_3 C_4 &= 0
\end{aligned}$$

La résolution de ce système donne les valeurs des harmoniques permettant d'avoir un vecteur $\mathbf{\varepsilon}$ dont la norme au sein d'une zone sphérique centrée en $r=0$ est la plus faible possible :

C ₁	C ₂	C ₃	C ₄	C ₅	C ₆
$\frac{B_l}{\mu o}$	$\frac{G_l}{4\mu o B_l}$	$\frac{-G_l^2}{48\mu o B_l^3}$	$\frac{G_l^3}{128\mu o B_l^5}$	$\frac{-41G_l^4}{6400\mu o B_l^7}$	$\frac{23G_l^5}{7680\mu o B_l^9}$

Tableau III : Expressions des six premiers harmoniques du cas « sphérique »

IV-1.3.2.4) Cas elliptique

Nous avons calculé, à partir de (IV-7), le vecteur **G** en tenant compte uniquement des deux premiers harmoniques (IV-5) et (IV-9), les harmoniques de rangs supérieurs étant supposés nuls.

$$\bar{G} = \frac{G_l^2}{8B_l^2} \cdot r \cdot \bar{e}_r + \frac{3G_l^2}{8B_l^2} \cdot x \cdot \bar{e}_x + \bar{G}_l \quad (\text{IV-16})$$

d'où le vecteur inhomogénéité $\bar{\varepsilon}$:

$$\bar{\varepsilon} = \frac{G_l}{8B_l^2} \cdot r \cdot \bar{e}_r + \frac{3G_l}{8B_l^2} \cdot x \cdot \bar{e}_x \quad (\text{IV-17})$$

et l'expression du potentiel magnéto-gravitationnel Σ_L :

$$\Sigma_L = \frac{3G_l}{16B_l^2} r^2 \cdot \cos^2 \theta + \frac{G_l}{16B_l^2} r^2 + \frac{B_l^2}{G_l} \quad (\text{IV-18})$$

ou,

$$\Sigma_L = \frac{4G_l}{16B_l^2} x^2 + \frac{G_l}{16B_l^2} y^2 + \frac{B_l^2}{G_l} \quad (\text{IV-19})$$

On peut montrer aisément que les $\text{équi}\Sigma_L$ ($\Sigma_L = \lambda$) sont des ellipses de centre $r=0$, la valeur des équipotentiels est en tout point supérieure à B_l^2/G_l (IV-19), ainsi l'équation réduite de la conique s'écrit :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{(2a)^2} = 1 \quad (\text{IV-20})$$

le demi-grand axe est égal au double du demi-petit axe ayant pour expression a :

$$a = 2 \frac{B_l}{G_l} \sqrt{\lambda G_l - B_l^2} \quad (\text{IV-21})$$

Dans ce cas, les surfaces $\text{équi}\Sigma_L$ sont des sphéroïdes aplatis.

Nous avons dans cette partie fournie la méthode de calcul des harmoniques des différentes familles, nous avons calculé les 6 premiers harmoniques de chacune d'entre elles. Des simulations numériques vont, dans la suite, illustrer chacune des quatre configurations d'accélération résultantes.

IV-1.4) Détermination de la nappe de courant

Comme dans le chapitre précédent, nous résolvons un problème inverse de magnéto-statique. Ce problème consiste à trouver une répartition de courant surfacique ou volumique produisant à l'intérieur d'un volume, circonscrit aux courants, la répartition de champ désirée. Ce type de problème possède une infinité de solutions, il faut donc se fixer des conditions supplémentaires. On impose aux distributions cherchées d'être superficielles et situées sur une sphère de rayon R_0 donné. La nappe de courant ainsi obtenue est unique.

IV-1.4.1) Densité surfacique de courant

A partir de la connaissance des harmoniques de champ, les quatre nappes de courant théoriques, réparties sur une sphère de rayon R_0 , vont être déterminées. Ces quatre répartitions de courant permettent de créer les différentes distributions de force précédentes à l'intérieur de la sphère de rayon R_0 .

La continuité de la composante normale du champ $\mathbf{H}_{\text{intn}} = \mathbf{H}_{\text{extn}}$ en $r=R_0$, mais aussi, l'égalité du champ tangentiel intérieur et extérieur en $r=R_0$ aux courants près $\mathbf{H}_{\text{Tintn}} - \mathbf{H}_{\text{Textn}} = \mathbf{n} \times \mathbf{K}_n = \mathbf{e}_r \times \mathbf{K}_n$ où $\mathbf{n}$ est le vecteur normal sortant et $\mathbf{K}_n$ l'harmonique de rang n du courant et puis les expressions du champ (IV-3) et (IV-4) permettent d'obtenir tous les harmoniques du courant :

$$\vec{K}_n(R_0, \theta) = \frac{2n+1}{n+1} \cdot R_0^{n-1} \cdot C_n \cdot P_n^l(\cos\theta) \vec{e}_\varphi \quad (\text{IV-22})$$

Le problème de la détermination d'une densité surfacique de courant, idéale, est donc résolu.

IV-1.4.2) Densité volumique

Une répartition volumique donc plus réaliste, où l'on considère que le courant ne dépend pas du rayon mais seulement de θ , peut aussi être déterminée. Ainsi l'expression du courant (IV-22) donne un champ tangentiel intérieur en $r=R_0$ de la forme :

$$\vec{H}_{\text{Tintn}}(R_0, \theta) = C_n \cdot R_0^{n-1} \cdot P_n^l(\cos\theta) \cdot \vec{e}_\theta \quad (\text{IV-23})$$

Nous définissons dans cette partie les vecteurs à l'aide uniquement de leur harmonique de rang « n », ceci afin d'alléger les notations, chaque grandeurs étant évidemment une série des ces harmoniques.

Soit la répartition surfacique de courant pour un rayon $r=R_l$, $\vec{K}'_n(R_l, \theta) = \frac{2n+1}{n+1} \cdot R_l^{n-1} \cdot C'_n \cdot P_n^l(\cos\theta) \cdot \vec{e}_\varphi$ qui doit créer en $r=R_0$ un champ tangentiel $\mathbf{H}'_{\text{Tintn}}(R_0, \theta) = \mathbf{H}_{\text{Tintn}}(R_0, \theta)$, il suffit pour cela que $C_n = C'_n$.

Puisque l'on considère que la densité de courant volumique ne dépend pas du rayon, on peut décomposer la distribution de courant en coquilles d'épaisseur dR_l , posons :

$$J_n(R_l, \theta) dR_l = j_n(R_l) \cdot P_n^l(\cos \theta) \quad (\text{IV-24})$$

où $j_n(R_l)$ est une fonction ne dépendant que de n .

Si on égalise les éléments de courants, puis que l'on réintroduit le champ tangentiel nous obtenons :

$$J_n(R_l, \theta) dR_l = dK'_n(R_l, \theta) = \frac{2n+1}{n+1} \cdot \left(\frac{R_l}{R_0}\right)^{n-1} \cdot dH_{T_{intn}}(R_0, \theta) \quad (\text{IV-25})$$

en intégrant d'un rayon intérieur a jusqu'à un rayon extérieur b (rayons délimitant la coquille portant la densité volumique de courant) nous obtenons le champ tangentiel en un rayon $r=R_0$ produit par l'ensemble de la couche volumique de courant :

$$H_{T_{intn}}(R_0, \theta) = \frac{n+1}{2n+1} \int_a^b J_n(R_l, \theta) \cdot \left(\frac{R_0}{R_l}\right)^{n-1} \cdot dR_l \quad (\text{IV-26})$$

or nous connaissons le lien entre la densité de courant (IV-22) et le champ tangentiel (IV-23) d'où :

$$K_n(R_0, \theta) = \int_a^b J_n(R_l, \theta) \cdot \left(\frac{R_0}{R_l}\right) \cdot dR_l \quad (\text{IV-27})$$

comme $j_n(R_l) = \text{cst}(n)$ la densité volumique de courant s'écrit :

$$J_n(\theta) = \frac{K_n(R_0, \theta)}{R_0^{n-1}} \cdot \frac{1}{\int_a^b \frac{1}{R_l^{n-1}} dR_l} \quad (\text{IV-28})$$

d'où la forme générale $J_n(\theta) = \frac{K_n(\theta)}{R_0^{n-1}} \cdot \frac{1}{\frac{1}{b^{n-2}} - \frac{1}{a^{n-2}}}$ quelque soit le rang n de l'harmonique, sauf pour

$n=2$ où l'intégrale prend une forme particulière $J_2(\theta) = \frac{K_2(\theta)}{R_0} \cdot \frac{1}{\ln(\frac{b}{a})}$.

L'expression de chacun des harmoniques est fournie ci-dessous :

$$\begin{cases} \forall n \in N_{+*} - \{2\}, J_n(\theta) = \frac{2n+1}{n+1} \cdot C_n \cdot \frac{1}{\frac{1}{b^{n-2}} - \frac{1}{a^{n-2}}} \cdot P_n^l(\cos \theta) \\ J_2(\theta) = \frac{5G_l}{8\mu_0 B_l} \cdot \frac{1}{\ln(\frac{b}{a})} \cdot \sin(2\theta) \end{cases} \quad (\text{IV-29})$$

Les simulations numériques, présentées par la suite, sont réalisées en utilisant une densité superficielle de courant de la forme (IV-22) avec les familles $(C_n)_{n \in N}$ associées à chacune des

conditions d'homogénéité « verticale » (IV-10), « horizontale » (IV-11) et « sphérique » (IV-12). La simulation du cas elliptique est également effectuée.

IV-1.5) Visualisation des résultats par simulation numérique

Les simulations sont effectuées en considérant le cas particuliers de l'oxygène liquide à 90K, avec un gradient $G_I=8T^2/m$ et une induction au centre $B_I=10T$. La densité surfacique de courant précédemment obtenue est répartie sur une sphère de rayon $R_0=50cm$, elle est tronquée au troisième harmonique. La troncature sera validée par comparaison de la force magnétique obtenue, c'est à dire du vecteur $\mathbf{G}$, par une densité de courant contenant 3 harmoniques et une autre 6 harmoniques.

IV-1.5.1) Simulation avec 3 harmoniques des différentes configurations de lévitation

Les figures sont obtenues à l'aide d'un logiciel d'éléments finis. Les différentes grandeurs définissant la qualité de la compensation magnétique sont visualisées à l'intérieur d'une sphère de 40 cm de rayon ; en géométrie axisymétrique cette sphère est représentée par un demi cercle. Le distribution spatiale du vecteur inhomogénéité de la compensation magnétique ϵ est illustrée par des flèches noires. La norme de ce vecteur est fournie par un dégradé de couleurs (en %), et les équipotentielles magnéto-gravitationnelles sont tracées en bleu.

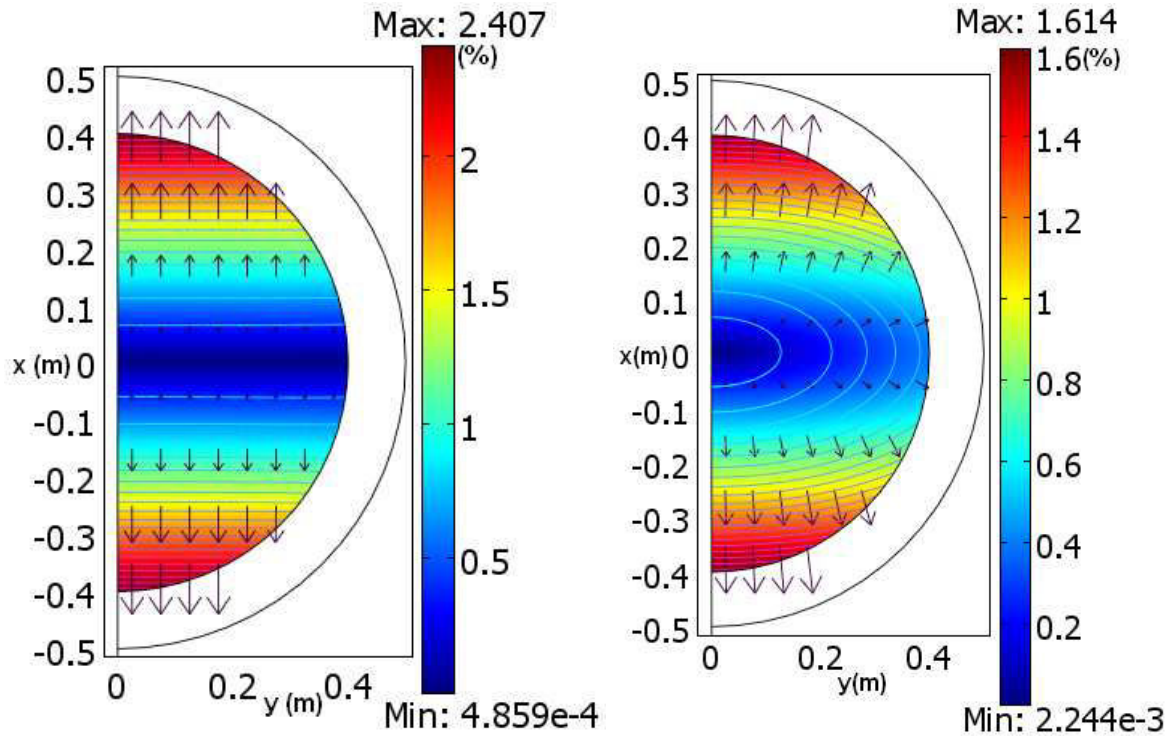


FIG. 3. et 4. Représentations pour des grandeurs relatives à la compensation magnétique de pesanteur, pour les cas horizontal (à gauche) et elliptique (à droite)

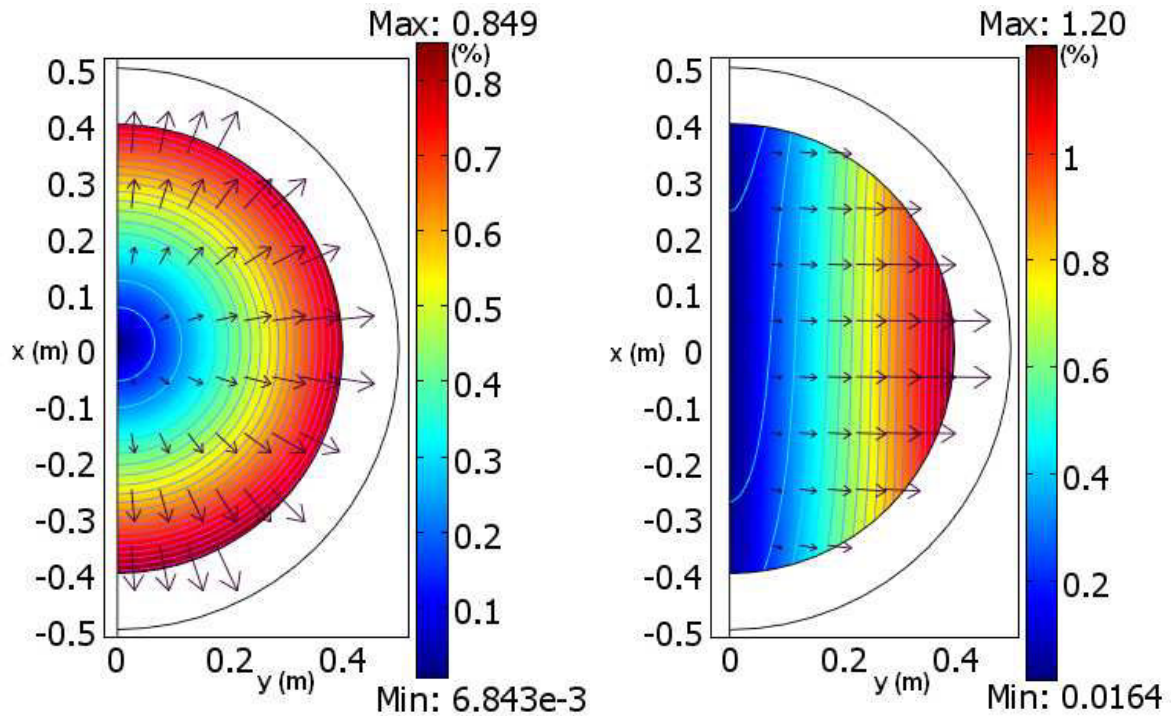


FIG. 5. et 6. Représentations pour des grandeurs relatives à la compensation magnétique de pesanteur, pour les cas sphérique (à gauche) et vertical (à droite)

D'après ces simulations, la lévitation d'un litre d'oxygène avec une inhomogénéité inférieure à 1% semble parfaitement réalisable à l'aide d'inductions largement inférieures à $B_I=10T$. Par exemple, si on considère le cas sphérique, l'ensemble de l'oxygène contenu dans la zone sphérique de 40 cm de rayon (268 litres !) est soumis à une compensation inhomogène à moins de 0,85%. Sur les figures 3, 4 et 5, les équipotentielles magnéto-gravitationnelles apparaissent horizontale, elliptique et sphérique, par contre la figure 6 ne rend pas compte d'une verticalité nette des équipotentielles Σ_L . Nous n'avons pu démontrer analytiquement que les équipotentielles tendaient vers des cas « horizontal » ou « sphérique ». Seul le cas elliptique est démontré rigoureusement.

Ces diverses configurations d'accélération résultantes en microgravité ouvrent des perspectives importantes pour les expérimentateurs. Impossibles à reproduire d'une manière différente, c'est à dire sans force magnétique, ces configurations spatiales de forces résultantes permettent d'imaginer toutes sortes d'expériences sur le comportement des fluides en microgravité.

Utiliser uniquement les trois premiers harmoniques pour constituer la densité de courant semble parfaitement suffisant pour atteindre les diverses configurations d'accélération magnéto-gravitationnelle désirées. Nous allons tout de même évaluer l'impact de cette troncature par rapport à une répartition de courant exacte jusqu'au sixième harmonique.

IV-1.5.2) Validation de la troncature à 3 harmoniques

La troncature au troisième harmonique est maintenant comparée avec une troncature au sixième harmonique pour chacun des cas vertical, horizontal et sphérique afin de vérifier que la dégradation d'une troncature prématurée sur la répartition du vecteur $\mathbf{G}$ est faible. La comparaison se fait en calculant et traçant la norme du vecteur $\mathbf{G}_{diff}$ (Fig. 7, 8 et 9). Le vecteur $\mathbf{G}_{diff}$ représente la différence entre le vecteur $\mathbf{G}_{6h}$, expression (IV-7) avec les six premiers harmoniques tirés des tableaux I, II et III et le vecteur $\mathbf{G}_{3h}$, expression (IV-7) avec les trois

premiers harmoniques. L'échelle verticale fournit la norme du vecteur $\mathbf{G}_{\text{diff}}$ (T^2/m) tracée à l'intérieur de la sphère de 40cm de rayon (échelle des axes horizontaux).

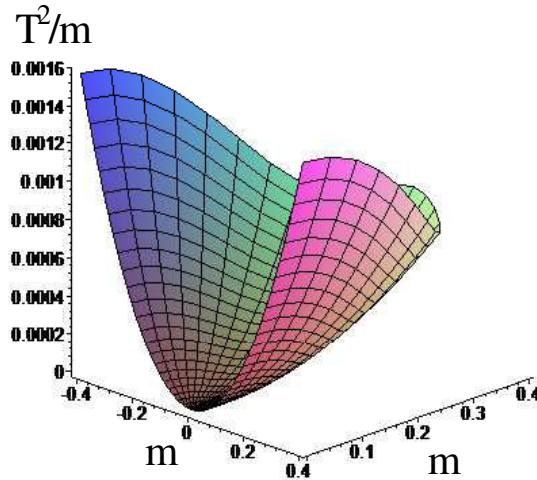


FIG 7. Tracé de la norme du vecteur $\mathbf{G}_{\text{diff}}$, comparant les troncatures à 3 et 6 harmoniques.
Cas sphérique.

Ainsi dans le cas de la configuration dite sphérique, l'écart par rapport à la valeur recherchée au centre G_I est inférieur à 0,02%. Ce résultat justifie l'hypothèse simplificatrice selon laquelle les trois premiers harmoniques sont suffisants pour obtenir une compensation magnétique de la pesanteur avec une accélération résultante contrôlée.

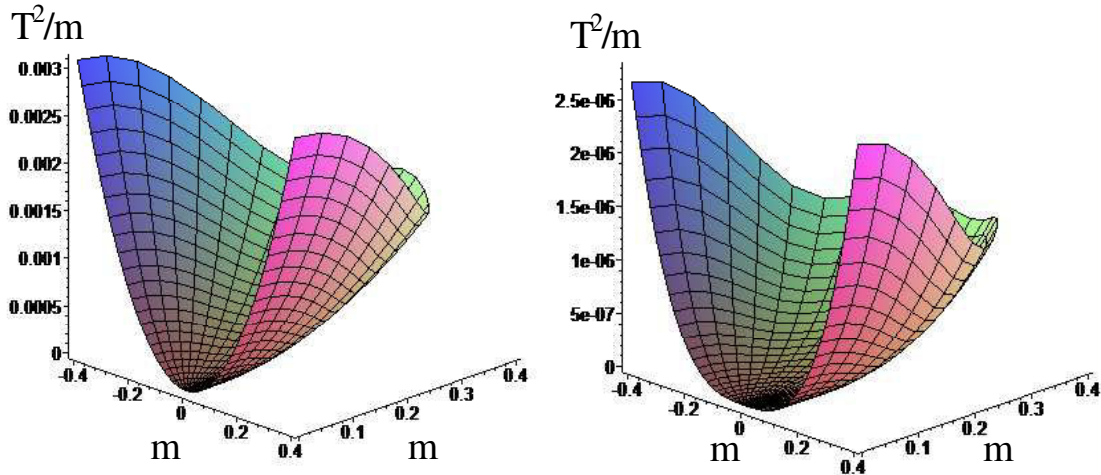


FIG 8. et 9. Tracés de la norme du vecteur $\mathbf{G}_{\text{diff}}$, comparant les troncatures à 3 et 6 harmoniques.
Cas vertical (à gauche) et cas horizontal (à droite).

Ces deux figures montrent que l'écart, par rapport à la valeur de gradient G_I désirée au centre, est inférieur à 0,04% dans le cas vertical, et totalement négligeable pour la configuration horizontale. Ceci est certainement dû au fait que l'harmonique 4 théorique de la configuration horizontale est nul, ainsi la troncature n'est pas réellement réalisée au troisième harmonique mais au quatrième harmonique.

On peut à juste titre affirmer que, comme pour les géométries cylindriques, les trois premiers harmoniques permettent respectivement de fixer l'induction au centre, le gradient au centre et la configuration du vecteur accélération résultante. Nous avons montré que, sans ce troisième

harmonique (uniquement les deux premiers non nuls), la configuration par défaut des $\text{équi}\Sigma_L$, dont le champ de vecteur inhomogénéité $\mathbf{e}$ est orthogonal, sont des sphéroïdes.

IV-1.6) Conclusion de la section IV-1

La méthode générale de détermination des harmoniques a été appliquée au cas de coordonnées sphériques permettant de décrire les géométries axisymétriques. Elle fournit d'excellents résultats comme dans le cas des géométries cylindriques détaillées dans le chapitre précédent. La force magnétique, exprimée à l'aide des harmoniques de champ, peut partiellement être maîtrisée. La modification de la valeur des différents harmoniques offre des configurations d'accélération magnéto-gravitationnelles originales, mais surtout, parfaitement décrites et contrôlées. Il semble que l'utilisation des trois premiers harmoniques de champ donne suffisamment de souplesse. Les deux premiers harmoniques fixent à la fois la valeur de l'induction au centre de la zone de travail et la valeur du gradient contrebalançant la gravité pour le matériau considéré. Puis, chose totalement nouvelle, un choix judicieux du troisième harmonique détermine la configuration des forces résultantes au sein de la zone de travail où le fluide est mis en lévitation. Les simulations au moyen de répartitions de courants théoriques superficielles montrent qu'il est envisageable de réaliser, dans le cas de l'oxygène, une lévitation homogène à plus de 99%, dans des volumes de l'ordre de quelques litres, avec des inductions inférieures à 10T. Le dimensionnement de lévitateurs magnétiques d'oxygène liquide est d'ailleurs décrit dans la troisième partie de ce chapitre. Il serait intéressant d'étudier plus en détail les forces résultantes obtenues dans le cas « vertical », afin de savoir si elles permettent de simuler au sol des centrifugations pures (=rotation en apesanteur)?

La seconde section de ce chapitre sur la lévitation en géométrie axisymétrique est maintenant consacrée aux inserts ferromagnétiques saturés.

IV-2) Inserts

Dans un champ magnétique, les matériaux ferromagnétiques acquièrent une aimantation, notée $\mathbf{M}$, dirigée suivant le champ. Ainsi, au champ magnétique extérieur à l'insert, vient s'ajouter celui généré par l'aimantation du matériau ferromagnétique. On peut par exemple, de cette manière, augmenter le champ magnétique au centre d'un solénoïde par simple ajout de matériau ferromagnétique [SCH1][HOA1] ou bien modifier la configuration du champ magnétique dans lequel est placé l'insert [MAI1][OVV1]. Dans le domaine des multipôles d'accélérateurs de particules, on parle plutôt de culasses ferromagnétiques. Ces dernières entourent les aimants multipolaires, ainsi tout en renforçant la structure mécanique, elles peuvent améliorer, en terme d'amplitude mais également de contenu harmonique, le champ intérieur au multipôle [SCH2][TOD1][ROS1].

IV-2.1) Généralités sur les inserts

IV-2.1.1) Quels matériaux ?

L'aimantation de l'insert, matériau ferromagnétique, est fonction du champ magnétique auquel il est soumis. Si le champ magnétique devient très important, l'aimantation du matériau ferromagnétique atteint une valeur maximale, notée $\mathbf{M}_s$ et appelée aimantation de saturation. Cette saturation dépend des matériaux. Elle est généralement très élevée pour les terres rares (cf. Tableau IV), mais leurs prix excessifs et leurs températures de Curie (perte du ferromagnétisme) souvent faibles, mènent plus facilement à l'utilisation d'inserts en fer-cobalt ou simplement en fer doux (cf. Tableau IV).

Matériaux	$\mu_0 \cdot \mathbf{M}_s$	T _c
Fe	2,16T ¹	1043K ¹
Co	1,72T ¹	1394K ¹
Fe50-Co50	2,35T ²	930K ²
Gd	2,69T ^{1,3}	293K ³
Tb	3,39T ^{1,3}	220K ³
Ho	3,87T ^{1,3}	20K ^{3,4}

Tableau IV : Quelques valeurs d'aimantations de saturation
(¹ [TRE1]; ² [COU1]; ³ [JEN1]; ⁴ [RHO1])

IV-2.1.2) Modélisation des inserts

Les inserts peuvent être modélisés par des courants ampériens volumiques $\mathbf{J}_a$ et surfaciques $\mathbf{K}_a$ [DUR1]. Les courants volumiques permettent de modéliser l'aimantation du matériau et les courants surfaciques modélisent les conditions de continuités à la surface :

$$\vec{J}_a = \text{rot} \vec{M} \quad (\text{IV-30})$$

$$\vec{K}_a = \vec{M} \times \vec{n} \quad (\text{IV-31})$$

où $\mathbf{n}$ est le vecteur normal sortant à la surface.

Une hypothèse simplificatrice est généralement admise lorsqu'on effectue cette modélisation. L'insert est utilisé à saturation car soumis à un champ magnétique fort. Ainsi on considère alors que l'aimantation de l'insert est constante, uniforme et égale à $\mathbf{M}_s$. Ainsi la modélisation se fait uniquement par des courants surfaciques (IV-31).

IV-2.1.3) Insert pour la lévitation

Nous n'allons pas exactement dimensionner un insert pour la lévitation, mais plutôt ajuster les dimensions du type d'insert ayant déjà été utilisé pour la lévitation par des membres de notre équipe. L'objectif est de montrer une nouvelle approche pour l'éventuel dimensionnement de futurs inserts, en utilisant les résultats sur les décompositions harmoniques de la partie précédente.

La figure 10 permet d'avoir une idée de la forme de l'insert. Cette forme axisymétrique a été réalisée et présentée dans de précédents ouvrages [OVV1][QUE1]. L'insert était placé au centre d'un solénoïde (station HYLDE du CEA Grenoble) et supposé soumis à un champ uniforme $\mathbf{B}_0$ d'amplitude 10T.

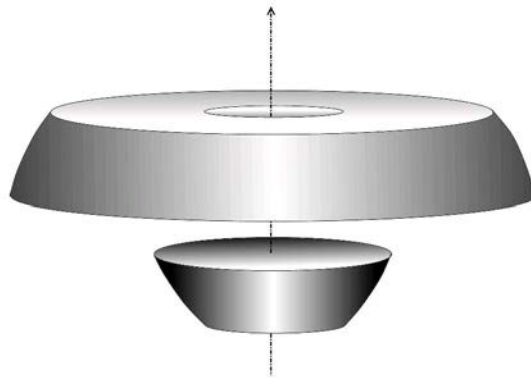


FIG. 10. Vue d'artiste de l'insert en 3D

L'idée est d'obtenir une force magnétique entre les deux parties de l'insert, force résultant de la combinaison d'un champ dipolaire créé par le solénoïde et d'un champ quadrupolaire créé par l'insert (IV-8). D'où le fait que cet insert soit constitué de deux parties.

Effectivement, si on observe l'insert suivant un plan contenant son axe (cf. Fig. 11), on s'aperçoit que les courants surfaciques ampériens, si on ne tient pas compte des courants extérieurs de la partie supérieure, ont une structure quadrupolaire. Les courants de surfaces à répartition quadrupolaire sont repérés par les symboles $\odot \otimes \odot \otimes$.

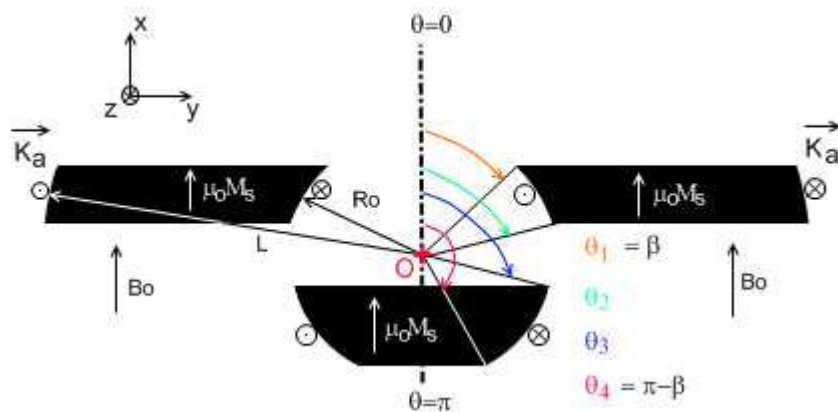


FIG. 11. Paramétrages de l'insert ferromagnétique saturé

IV-2.2) Solénoïde 10T avec insert

Nous avons réalisé un programme permettant de calculer la décomposition harmonique, au point O, produite par cet insert saturé, superposé à un champ magnétique uniforme $\mathbf{B}_0$. Un autre programme permet d'obtenir une optimisation des angles θ_2 et θ_3 lorsque l'ensemble des autres paramètres est fixé ($\theta_1=\beta$, $\theta_4=\pi-\beta$, R_0 , L , B_0). Il suffit alors de choisir les valeurs de l'induction B_1 et du gradient G_1 désirées au point O, centre du dispositif afin que le programme fournisse les valeurs des angles θ_2 et θ_3 associées. L'induction doit évidemment être prise autour de l'induction $\mathbf{B}_0$ car l'insert, générant un champ quasi-quadrupolaire, ne peut produire beaucoup de champ dipolaire supplémentaire. De plus si la valeur du gradient G_1 n'est pas accessible, il faut diminuer la valeur de R_0 pour diminuer la taille du dispositif. Ainsi le champ quadrupolaire peut être plus important et la valeur de G_1 atteinte (IV-8). Les résultats de la partie suivante vont illustrer ces propos.

Nous avons cherché, grâce à la méthode précédemment décrite, à ajuster les dimensions des inserts afin de réaliser la lévitation de matériaux très faiblement magnétiques tels que l'eau ou l'hélium à l'aide d'un solénoïde de seulement 10T. Mais en premier lieu nous ajustons les trois premiers termes de la décomposition harmonique du cas sphérique pour la lévitation de l'hydrogène.

IV-2.2.1) Hydrogène

Dans le tableau V sont reportées les grandeurs définissant l'insert et les conditions de lévitation souhaitées. Avec ces grandeurs (B_1 et G_1) le troisième harmonique de la configuration sphérique doit valoir $-1,52.10^7 \text{ A/m}^3$. En ajustant la valeur de l'angle β par itérations successives, nous avons réussi à approcher ce troisième harmonique à 15% près ($-1,75.10^7 \text{ A/m}^3$).

Induction B_0 du solénoïde	10,00 T
Aimantation de saturation $\mu_0.M_S$ de l'insert	2,16 T
Rayon intérieur R_0 de l'insert	12 mm
Rayon extérieur L de l'insert	40 mm
Angle β fixant θ_1 et θ_4	$\frac{4,55}{20}\pi$ rad
Induction B_1 au point O	10,20 T
Gradient G_1 au point O	-986 T ² /m

Tableau V : Grandeurs relatives à l'insert et aux conditions de lévitation de l'hydrogène

La figure 12 représente les valeurs de la composante verticale du gradient $\mathbf{G}$ selon les axes vertical et horizontal sur une longueur de 4mm. Le choix de cette dimension a été fait par analogie aux expériences sur l'hydrogène réalisés dans la station HYLDE [CHA1][WUN1] au sein d'une cellule de 8mm de diamètre. L'inhomogénéité est de 0,6% suivant l'axe horizontal mais est de presque 8% suivant l'axe vertical.

Les figures 13 et 14 montrent respectivement les composantes verticale et horizontale du gradient $\mathbf{G}$. Ces composantes sont tracées dans le quart supérieur droit de la zone hémisphérique intérieure à l'insert, c'est à dire pour un rayon $r=[0\text{mm},4\text{mm}]$ et un angle $\theta=[0, \pi/2]$. La partie comprise entre $[\pi/2, \pi]$ étant en quasi-totalité occupée par l'insert, nous ne

l'avons par représentée. Quant à la partie supérieure gauche, il ne sert à rien d'y tracer les composantes à cause de la symétrie de révolution du système.

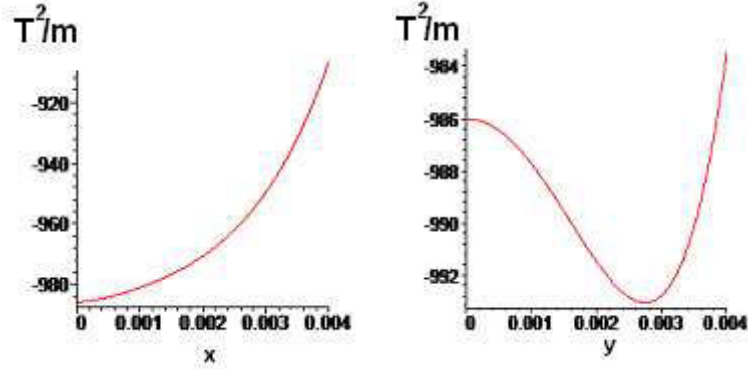


FIG. 12. G_x selon axes vertical et horizontal sur 4mm

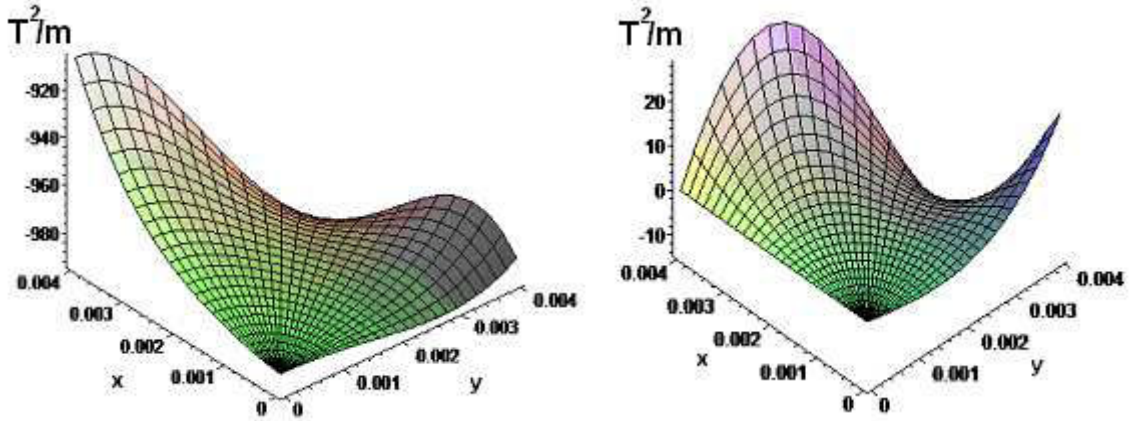


FIG. 13. et 14. G_x et G_y dans le quart supérieur droit de l'insert.

Dans cet exemple, on s'aperçoit qu'il est possible par un balayage sur la valeur de l'angle β d'obtenir une valeur du troisième harmonique proche de celle théorique, et ainsi d'avoir dans une zone proche du centre, un gradient parfaitement configuré (Fig. 15). Sur la figure 15 est tracé le vecteur ϵ sur un rayon de 1mm entourant le point O, la configuration est relativement proche du cas sphérique. Mais la taille de cette zone dépend de la valeur des harmoniques de rang supérieur qui viennent perturber la configuration choisie. Si l'on s'écarte de la zone on observe la perturbation des harmoniques de rangs supérieurs sur le vecteur ϵ (Fig. 16).

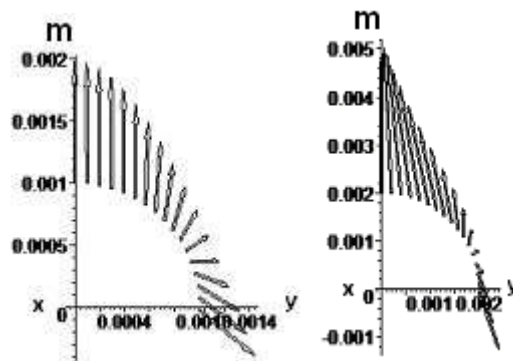


FIG. 15. et 16. Vecteur inhomogénéité ϵ suivant deux rayons respectivement de 1mm et de 2mm entourant la zone de lévitation.

La lévitation de l'hydrogène avait pu être réalisée au sein du solénoïde de 10T de la station HYLDE sans insert ferromagnétique. Par contre la lévitation de l'eau, à laquelle nous allons maintenant nous intéresser, est strictement impossible à réaliser au sein d'un tel dispositif sans y ajouter d'insert.

IV-2.2.2) Eau

Dans le tableau VI sont reportées les grandeurs associées à la lévitation de l'eau. Avec ces grandeurs (B_I et G_I) le troisième harmonique de la configuration sphérique doit valoir $-1,19.10^8 \text{ A/m}^3$. Nous n'avons pas réussi à ajuster avec précision la valeur de l'angle β . Ainsi le troisième harmonique est presque 4 fois trop élevé. D'où une configuration de l'accélération résultante non sphérique même pour les faibles dimensions de zone utile (Fig. 21).

Induction B_0 du solénoïde	10,00 T
Aimantation de saturation $\mu_0.M_S$ de l'insert	2,16 T
Rayon intérieur R_0 de l'insert	10 mm
Rayon extérieur L de l'insert	40 mm
Angle β fixant θ_1 et θ_4	$\frac{2}{20}\pi$ rad
Induction B_I au point O	10,1 T
Gradient G_I au point O	-2717 T^2/m

Tableau VI : Grandeurs relatives à l'insert et aux conditions de lévitation de l'eau

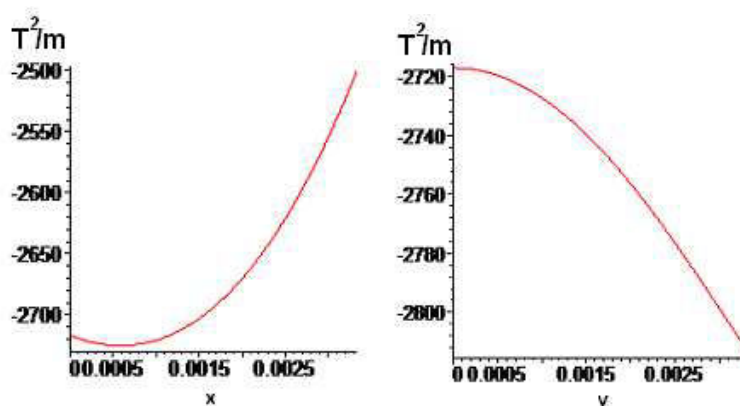


FIG. 17. et 18. G_x selon les axes vertical et horizontal sur 3,6mm

L'inhomogénéité de la composante verticale du gradient suivant l'axe vertical est de 8% et suivant l'axe horizontal de 4%. La zone ne fait plus que 3,6mm de rayon.

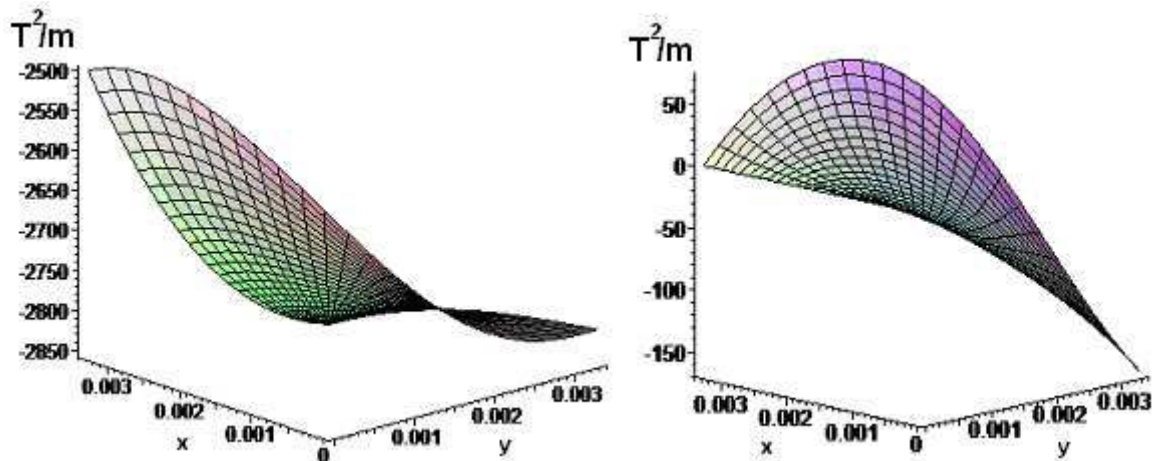


FIG. 19. et 20. G_x et G_y dans le quart supérieur droit de l'insert

La valeur du troisième harmonique n'est pas suffisamment proche de la valeur théorique, le gradient n'est pas très homogène au sein de l'insert (Fig. 21). De plus, il est important d'avoir des valeurs d'harmoniques supérieures faibles pour ne pas perturber la valeur de G .

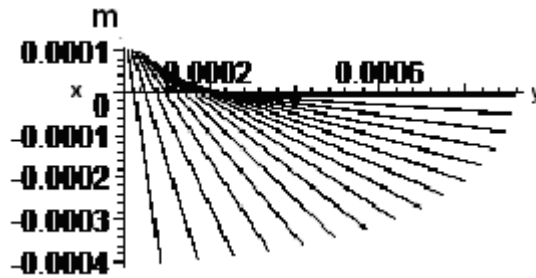


FIG. 21. Vecteur inhomogénéité ϵ sur un rayon de $100\mu\text{m}$ entourant la zone de lévitation

Mais la lévitation de l'eau est tout de même réalisable pour un volume de 97mm^3 (équivalent au volume d'hydrogène lévité dans [CHA1]) avec une inhomogénéité inférieure à 8% dans un solénoïde ne générant qu'un champ de 10T. Il faut savoir que la lévitation de l'eau avait été réalisée avec un solénoïde de 28T dans [BEA1]. Nous allons maintenant nous intéresser au cas de l'hélium.

IV-2.2.3) Hélium

Dans le tableau 7 sont reportées les grandeurs associées à la lévitation de l'hélium. Avec ces grandeurs (B_I et G_I) le troisième harmonique de la configuration sphérique doit valoir $-2,80 \cdot 10^8 \text{A/m}^3$. Nous n'avons pas pu non plus ajuster la valeur de l'angle β . Ainsi le troisième harmonique est également près de 4 fois trop élevé. D'où une configuration de l'accélération résultante non sphérique même pour les faibles dimensions de zone utile (Fig. 26).

Induction B_0 du solénoïde	10,00 T
Aimantation de saturation $\mu_0 \cdot M_s$ de l'insert	2,16 T
Rayon intérieur R_0 de l'insert	7 mm
Rayon extérieur L de l'insert	40 mm
Angle β fixant θ_1 et θ_4	$\frac{\pi}{20}$ rad
Induction B_I au point O	10,1 T
Gradient G_I au point O	-4174 T^2/m

Tableau VII : Grandeurs relatives à l'insert et aux conditions de lévitation de l'eau

Sur les figures 22 et 23, l'inhomogénéité de la composante verticale du gradient est d'environ 10% suivant l'axe vertical et de 6% suivant l'axe horizontal dans une zone de 2,3mm de rayon.

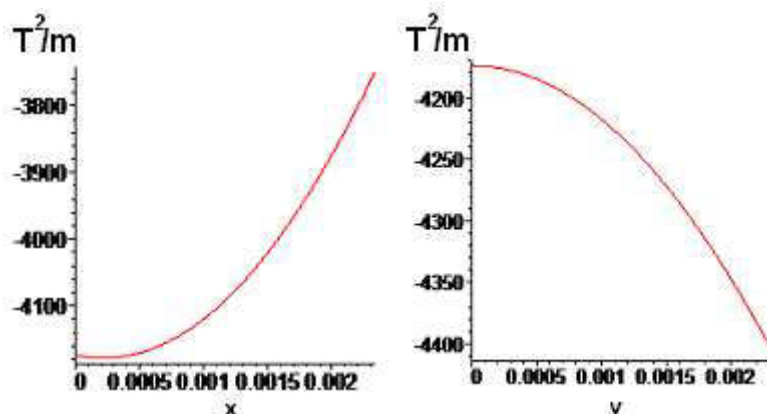


FIG. 22. et 23. G_x selon les axes vertical et horizontal sur 2,3mm

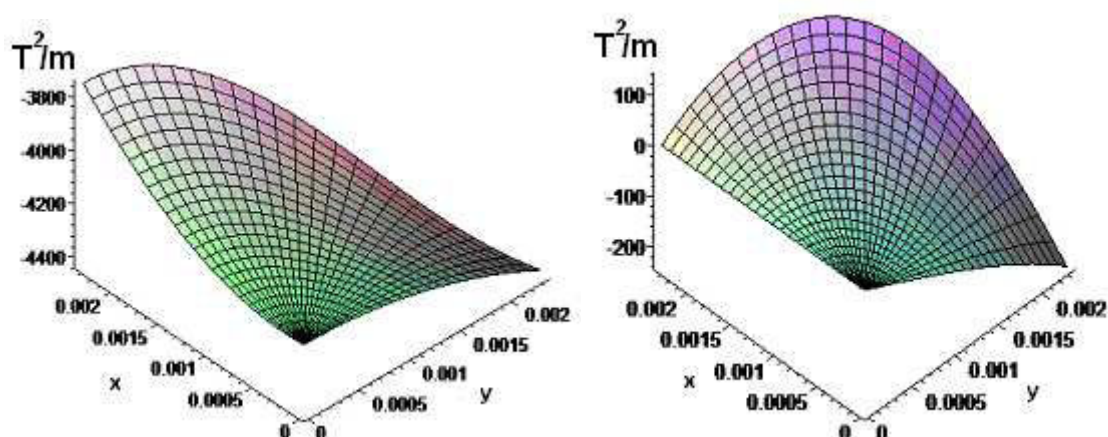


FIG. 24. et 25. G_x et G_y dans le quart supérieur droit de l'insert

Comme dans le cas de l'eau la valeur du troisième harmonique obtenue n'est pas suffisamment proche de celle théorique ainsi l'accélération résultante n'est pas sphérique (Fig. 26).

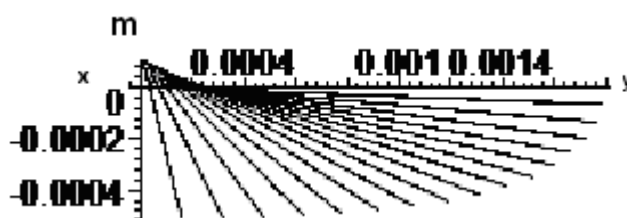


FIG. 26. Vecteur inhomogénéité ϵ sur un rayon de 100 μ m entourant la zone de lévitation

La lévitation de l'hélium est réalisable dans un volume de 26mm³ avec une inhomogénéité de 10% à l'aide d'un insert ferromagnétique placé dans un solénoïde générant seulement 10T.

IV-2.3) Conclusion de la section IV-2

Plusieurs travaux antérieurs relatent l'utilisation d'inserts saturés pour améliorer la qualité du champ ou augmenter son amplitude. Pour les petites tailles, ils sont bien meilleurs en terme de courant de surface équivalent que des bobinages. Il faut savoir que dans les machines électriques de petites dimensions les bobinages sont remplacés, pour un obtenir un champ plus fort, par des aimants. Ce choix d'inserts correspond à la même logique, car un insert saturé peut être considéré comme un aimant.

Cette partie n'a pas pour objectif de fournir un dimensionnement d'insert optimal pour la lévitation par champs magnétiques. Par contre elle permet de balayer les possibilités offertes par la combinaison solénoïde et insert saturé. Nous avons ici exploré la solution de lévitation avec inserts, en utilisant pour évaluer les possibilités notre méthode générale de décomposition harmonique. Cette méthode montre ici ses potentialités.

On montre pour l'hydrogène qu'un réglage des harmoniques est possible au moins jusqu'à l'ordre trois à l'aide de l'insert envisagé. Ainsi l'obtention d'une configuration d'accélération résultante prédéfinie paraît totalement réalisable.

Il est également très intéressant de faire léviter avec un solénoïde de « seulement 10T » des volumes d'eau et même d'hélium de plusieurs dizaines de millimètres cube avec des inhomogénéités inférieures à 10%.

La méthode développée précédemment pour ajuster deux angles de l'insert est intéressante. Cette méthode permet, sous certaines conditions, d'ajuster exactement la valeur du gradient G_z au centre du dispositif, c'est à dire de choisir avec précision le matériau à léviter.

Il serait intéressant de considérer des structures d'inserts avec des formes plus compliquées, permettant un ajustement d'harmoniques de rangs supérieurs. Cette piste, intéressante pour la lévitation de fluides faiblement magnétiques (eau, hélium), sort du cadre de notre étude.

IV-3) Dimensionnement d'une station de lévitation : application à l'oxygène

Après les travaux réalisés par Beaugnon et Tournier, en 1991, dans un simple solénoïde plusieurs laboratoires ont essayé de mettre au point des systèmes de lévitation plus performants en géométrie axisymétrique [KIY1][OZA1][BIR1]. Ces dispositifs ont été dimensionnés pour atteindre la lévitation de l'eau qui est de $2717\text{T}^2/\text{m}$ selon notre définition du vecteur $\mathbf{G}$. Notre étude ne se place pas dans le même cadre puisque nous cherchons à obtenir la lévitation d'oxygène liquide ($8\text{T}^2/\text{m}$ à 90K ou $11\text{T}^2/\text{m}$ proche de son point critique). Par rapport à ces précédents travaux, la méthode développée dans la première partie de ce chapitre permet de mieux comprendre et d'adapter le dimensionnement de dispositifs de lévitation.

L'objectif est de réaliser le dimensionnement magnétique d'un dispositif permettant de reproduire au sol, à l'aide de champs magnétiques, le comportement de l'oxygène en condition d'apesanteur. La compensation parfaite de pesanteur par champ magnétique étant impossible, une contrainte sur l'accélération résiduelle est fixée à $10^{-2}g$, elle correspond à l'accélération résiduelle lors des vols paraboliques. Pour obtenir des similitudes au niveau comportemental avec l'oxygène contenu dans les réservoirs des lanceurs de fusées, le volume levité doit être d'au moins un litre.

Deux approches sont utilisées pour réaliser ces pré-dimensionnements. Une première tend à limiter le nombre de bobinages supraconducteurs. Cette contrainte a été fixée par le CEA pour le projet LOLA. Une seconde s'attache à optimiser les harmoniques produits par les bobinages afin d'obtenir une décomposition au centre la plus proche possible de la théorie, donnant aux forces résiduelles une forme plus proche de l'idéal.

IV-3.1) Contraintes et méthode

Des contraintes techniques imposent que le volume d'un litre soit compris à l'intérieur d'un anticryostat de 12,5 cm de rayon. La cellule contenant l'oxygène liquide est souhaitée de forme cylindrique avec un rapport de la hauteur sur le diamètre variant de 1 à 3, dans lequel la valeur de $12\text{T}^2/\text{m}$ est atteinte et constante à 1% près. L'ensemble de bobinages supraconducteurs doit être réalisé si possible avec du NbTi refroidi à 4,2K. Nous avons choisi de fixer la densité de courant des conducteurs (matrice+supraconducteur) à $60\text{A}/\text{mm}^2$, sachant que l'induction ne dépasse pas 7 teslas sur les conducteurs. Avec une valeur d'induction de 7 teslas nous aurions pu choisir une densité de courant allant jusqu'à $300\text{A}/\text{mm}^2$, le dispositif devant être réalisable par un industriel. Mais l'objectif premier de ce dimensionnement est de voir la faisabilité d'un tel dispositif, sans pour cela effectuer une optimisation de l'ensemble du design.

Le dimensionnement de la première station de lévitation d'oxygène présentée dans ce chapitre est réalisé dans le cadre d'un contrat entre l'INPL (LEM) et le Commissariat à l'Energie Atomique de Grenoble (SBT). Les contraintes définies jusqu'à maintenant sont celles demandées dans le cahier des charges de l'étude. Ces contraintes seront également prises pour le dimensionnement de la deuxième station.

Rappelons les fonctions respectives des trois premiers harmoniques du champ magnétique :

Le premier harmonique représente l'induction du système, il doit être le plus élevé possible. Il est directement relié à l'homogénéité de la compensation obtenue : plus son amplitude est importante, meilleure est l'homogénéité à volume donné. Autrement dit, plus l'induction est importante, plus le volume lévité est grand à homogénéité donnée.

Le second harmonique permet de déformer les lignes de champ dues au premier harmonique et ainsi d'obtenir la valeur de G souhaitée. Il sera d'autant plus faible que l'induction (premier harmonique) sera forte.

Le troisième harmonique permet de déformer les équipotentielles « magnéto-gravitationnelles », lesquelles délimiteraient l'interface gaz/liquide pour un fluide proche de son point critique. Il déforme également la forme de la zone utile, celle où l'inhomogénéité de la compensation n'excède pas 1%.

Aussi chacune des deux stations présentées sera constituée de trois sous ensembles de bobinages. Chacun de ces sous-ensembles sera dédié à la création d'un des harmoniques. Cette méthode de conception a l'avantage de laisser une souplesse d'utilisation. L'harmonique trois est réglable par modification du courant dans le troisième sous ensemble. La forme de la zone utile peut ainsi être ajusté aisément. L'autre avantage est dû au découplage magnétique exact des harmoniques pairs et impairs, permettant plus de souplesse en cas d'expérience en gravité variable où l'on souhaite reproduire des phases d'accélération ou de décélération de l'engin spatial. Ce découplage évite les problèmes de surtension électrique aux bornes des bobinages, surtension due à la mutuelle inductance lors des variations de courant.

IV-3.2) Large Oxygen Levitation Apparatus (LOLA)

Cette partie présente la conception du dimensionnement magnétique d'un dispositif permettant de sustenter un litre d'oxygène liquide à une température proche du point critique $T_c=154,6K$ et avec un gradient $G_l=12 T^2/m$ (à la température critique le gradient de l'oxygène est de $11T^2/m$, le dispositif est donc légèrement surdimensionné) avec une accélération résiduelle inférieure ou égale à $0,1 m/s^2$ dans tout le volume utile, c'est à dire que la compensation doit s'effectuer avec une précision de 1% ($\varepsilon < 0,01$).

IV-3.2.1) Premier bobinage : « B_1 »

Ce bobinage doit créer un champ le plus uniforme possible, il doit créer le premier harmonique, c'est à dire le terme dipolaire de la décomposition harmonique du champ. Le bobinage que nous proposons est tiré de travaux analytiques réalisés par Garrett [GAR1][GAR2]. Ces travaux décrivent une multitudes de dispositifs permettant de générer des champs magnétiques uniformes jusqu'au vingtième ordre près. Pour ce premier dimensionnement, la simplicité recherchée, en terme de conception du dispositif magnétique de lévitation, oblige à choisir un bobinage « B_1 » constitué de seulement trois solénoïdes et créant un champ magnétique uniforme au sixième harmonique près. Les dimensions des bobinages sont déterminées en fonction de la densité de courant volumique et de la valeur du champ magnétique désirés. Pour définir l'induction au centre du dispositif nous nous appuyons sur des travaux antérieurs [QUE2]. Ces travaux permettent d'accéder à une relation,

en géométrie axisymétrique, estimant le champ magnétique minimal (T) à créer pour léviter un volume V (m³) avec une inhomogénéité ε (adimensionnelle) d'un matériau donné (valeur de G_I en T²/m) :

$$V = \frac{4}{3}\pi \left(\frac{4B^2\varepsilon}{G_I} \right)^3 \quad (\text{IV-32})$$

L'application de cette formule à notre étude fournit un champ magnétique minimal de 4,3T. Pour anticiper la dégradation des valeurs théoriques due à la discrétisation par des solénoïdes réels, le champ magnétique est fixé arbitrairement à $B_I=5\text{T}$. La densité de courant volumique est fixée à $J_0=60\text{A/mm}^2$, pour permettre au système d'être réalisé en NbTi refroidi à 4,2K. De ces valeurs d'induction et de densité de courant, nous tirons, des tables de M.W. Garrett, les dimensions de ce premier sous ensemble de bobinages « B₁ ». Les dimensions doivent être tronquées, nous faisons le choix de le faire au millimètre près, encore une fois ce choix laisse une marge de sécurité, car les solénoïdes réalisés sont bobinés pour les plus gigantesques comme le solénoïde CMS, au CERN à Genève, à une fraction de millimètre près, et pour d'autres de taille plus raisonnable généralement à $\pm 50\mu\text{m}$.

Le tableau VIII donne les dimensions (en mètre) de ce bobinage constitué de trois solénoïdes, les coordonnées (0,0) marquent le centre du dispositif de lévitation (Fig. 27). Du fait de sa symétrie par rapport au plan médian $z=0$, ce système de bobines « B₁ » ne génère que des harmoniques impairs.

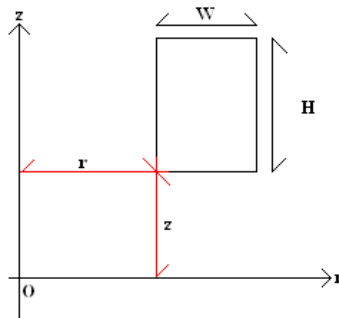


FIG. 27. Dimensions et position d'un bloc

	r	z	W	H	J_0 (A/mm ²)
Bob ₁	0,244	0,300	0,163	0,170	+60
Bob ₂	0,263	-0,247	0,067	0,494	+60
Bob ₃	0,244	-0,470	0,163	0,170	+60

Tableau VIII : Dimensions du premier sous ensemble créant principalement l'harmonique 1

La troncature des dimensions au millimètre près permet de représenter les précisions de réalisation des bobinages réels.

La décomposition harmonique générée par ce premier sous ensemble devrait idéalement n'avoir qu'un seul harmonique C_I . Cet harmonique doit être égale à $\frac{B_I}{\mu_0}$, c'est à dire $C_I=3978874$ A (cf. tableau I, II ou III). Le tableau IX présente la décomposition réelle de ce premier sous ensemble de bobine.

C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6
-------	-------	-------	-------	-------	-------

(A)	(A/m)	(A/m ²)	(A/m ³)	(A/m ⁴)	(A/m ⁵)
3 963 840	0	31 092	0	89 080	0

Tableau IX : Décomposition harmonique du premier sous ensemble B₁

Remarque : Pour comparer l'amplitude des différents harmoniques, il faut ramener ceux-ci sur une même sphère de rayon R_0 , et comparer entre eux les produits $(2n+1)/(n+1)*R_0^{n-1}*C_n$ (homogènes à des champs magnétiques). Si nous nous plaçons sur une sphère de rayon $R_0=22\text{cm}$ (dimension de la sphère la plus grande, centrée en $z=0$ et $r=0$, et contenue dans sa totalité au sein du dispositif entier), l'harmonique 5 est 7 fois inférieur à l'harmonique 3 lui-même plus de 2200 fois inférieur à l'harmonique 1.

Cette décomposition signifie que l'induction au centre du système est de 4,98T au lieu des 5T initialement prévus. Nous passons maintenant au dimensionnement du deuxième sous-ensemble créant l'harmonique 2.

IV-3.2.2) Second bobinage : « G₁ »

Ce sous ensemble de bobinages crée le deuxième harmonique nécessaire à l'obtention des 12T²/m. Il est constitué uniquement de deux solénoïdes pour des raisons de simplicité. Il aurait été encore plus simple de générer ce second harmonique par un solénoïde unique décalé du centre [BIR1]. Ce dernier aurait produit des harmoniques pairs, mais également des harmoniques impairs, ce que nous ne souhaitons absolument pas.

Une approche filiforme est effectuée afin d'obtenir la position (en réalité le rapport hauteur z sur rayon r) d'une paire de spires parcourues par des courant en sens opposés et situées symétriquement de part et d'autre du plan médian $z=0$, de sorte que le quatrième harmonique soit nul, ainsi $\frac{z}{r}=\frac{\sqrt{3}}{2}$. Puis on remplace la spire par une bobine réelle (Fig. 28). A l'aide d'un

programme informatique développé pour cette étude, les dimensions des bobines réelles sont ajustées afin d'obtenir une densité de courant d'exactement 60 A/mm² dans les deux bobinages, et une zone de lévitation de la forme souhaitée. Ce programme informatique MAPLETM a pour paramètres d'entrée : la géométrie du système en axisymétrie (ensemble des solénoïdes à section rectangulaire constituant le dispositif), il fournit ensuite la décomposition en harmoniques zonaux (harmoniques sphériques en axisymétrie), et la densité de courant à injecter dans chaque solénoïde afin d'obtenir la décomposition harmonique du champ magnétique désirée. Par itération on fait converger les dimensions des bobinages de sorte que la densité de courant soit égale à $\pm 60\text{A/mm}^2$ dans les deux solénoïdes.



FIG. 28. Position des bobines par rapport aux spires filiformes

	r	z	W	H	J_0 (A/mm ²)
--	-----	-----	-----	-----	----------------------------

Bob ₄	0,450	0,389	0,077	0,079	+60
Bob ₅	0,450	-0,468	0,077	0,079	-60

Tableau X : Dimensions du second sous ensemble créant principalement l'harmonique 2

L'antisymétrie du système « G₁ » par rapport au plan $z=0$ lui permet de générer uniquement des harmoniques pairs. Il n'y aura ainsi aucun couplage magnétique entre les bobinages « B₁ » et « G₁ », ce qui permettra d'effectuer des variations temporelles de l'accélération.

Nous présentons maintenant dans le tableau XI la décomposition harmonique de ce second sous ensemble de bobines.

C ₁ (A)	C ₂ (A/m)	C ₃ (A/m ²)	C ₄ (A/m ³)	C ₅ (A/m ⁴)	C ₆ (A/m ⁵)
0	482 804	0	18 641	0	-1 422 288

Tableau XI : Décomposition harmonique du second sous ensemble G₁

Le gradient G_1 au centre du dispositif vaut $G_1=4\mu o^2 C_1 C_2=12,09 \text{ T}^2/\text{m}$. Il est légèrement surestimé. Il faudra soit décaler légèrement la zone de lévitation, soit ajuster le courant dans le second sous ensemble. Cette deuxième possibilité est bien adaptée car, avec un conducteur du même type que celui utilisé dans la station OLGA du Service des Basses Températures du CEA Grenoble, une précision de $33\mu\text{A}/\text{mm}^2$ est atteinte avec une alimentation précise au milliampère près.

Remarque sur la précision espérée en densité de courant :

La variation de courant dans l'alimentation d'un système entraîne inévitablement une variation de la densité de courant de ce même système. L'alimentation utilisée par le SBT, dans la station OLGA, est une alimentation stable et précise au mA près. Nous estimons ce qu'un ΔI de 1mA sur le courant d'alimentation entraîne comme ΔJ sur la densité de courant au sein du bobinage extérieur de cette station.

Caractéristiques	Section	Nombre de spires	ΔI	ΔJ
OLGA extérieure	$0,108*0,58=0,06264\text{m}^2$	4132	1mA	$\frac{\Delta I \cdot n}{S}=66\text{A}/\text{m}^2$

Tableau XII : Lien précision en courant/ précision en densité de courant

Une alimentation précise au mA permet une précision de l'ordre de $33\mu\text{A}/\text{mm}^2$ sur la densité dans un tel dispositif. Il est donc possible de diminuer la densité de courant dans le bobinage « G₁ » afin que la densité tombe à $59,56\text{A}/\text{mm}^2$ et que le gradient au centre G_1 soit de $12\text{T}^2/\text{m}$.

IV-3.2.3) Troisième bobinage : Σ_L

Ce bobinage permet de modifier la carte des équipotentielles magnéto-gravitationnelles Σ_L . La démarche utilisée est sensiblement la même que pour le précédent sous ensemble « G₁ », une paire de spires est positionnée symétriquement de part et d'autre du plan médian, $z=0$, mais est parcourue par un même courant (même sens). La symétrie de ce dispositif implique qu'il engendrera uniquement des harmoniques impairs.

Ce bobinage est dimensionné pour annuler l'harmonique 3 résiduel créé par le bobinage « B₁ », puis faire varier la forme des équipotentielles par variation du courant le traversant. La position de la paire de spires est choisie pour minimiser la valeur de l'harmonique 5 créé par ce bobinage « Σ_L ». Il faudrait pour avoir une meilleure précision dans la création de ces

harmoniques, au moins trois bobines. Le fait d'en prendre uniquement deux simplifie le système et fournit malgré tout de bons résultats. Nous examinerons plus loin (IV.3.3.3) les résultats améliorés à attendre d'un bobinage « Σ_L » à cinq bobines.

Le tableau suivant donne les dimensions et positions des deux solénoïdes constituant ce bobinage « Σ_L » :

	r	z	W	H	J_0 (A/mm ²)
Bob ₆	0,180	0,221	0,010	0,010	-60*k
Bob ₇	0,180	-0,231	0,010	0,010	-60*k

Tableau XIII : Dimensions du troisième sous ensemble créant principalement l'harmonique 3

Le coefficient k va varier selon la configuration de l'accélération résiduelle recherchée ; la plage de variation de k est comprise entre 0 et 0,75.

C_1 (A)	C_2 (A/m)	C_3 (A/m ²)	C_4 (A/m ³)	C_5 (A/m ⁴)	C_6 (A/m ⁵)
-8240*k	0	-96320*k	0	-61870*k	0

Tableau XIV : Décomposition harmonique du troisième sous ensemble Σ_L

Le tableau XV récapitule les décompositions harmoniques des trois sous-ensembles en fonction de la valeur du courant injecté dans le troisième sous-ensemble.

k	C_1 (A)	C_2 (A/m)	C_3 (A/m ²)	C_{3th} (A/m ²)	C_4 (A/m ³)	C_5 (A/m ⁴)	C_6 (A/m ⁵)	Forme des équi Σ_L
0,75	3957657	482804	-41147	-38197	18641	42681	-1422288	Verticale
0,5	3959718	482804	-17067	-19098	18641	58147	-1422288	Sphérique
0,1	3963016	482804	+21460	+19098	18641	82893	-1422288	Horizontale

Tableau XV : Récapitulatif des décompositions harmoniques

La colonne nommée C_{3th} fournit la valeur théorique de l'harmonique trois devant conduire à la forme désirée des équipotentielles magnéto-gravitationnelles. Ces valeurs sont tirées des tableaux I, II et III. Il serait possible d'ajuster le courant injecté pour affiner le réglage de la densité de courant volumique car nous nous sommes ici limités dans la précision du courant.

IV-3.2.4) Présentation de la station

La figure 29 montre les trois sous ensemble constitués des 7 solénoïdes précédemment définis. Rappelons que les bobines 1, 2 et 3 constituent le sous ensemble générant principalement l'harmonique 1. Les bobines 4 et 5 produisent l'harmonique deux nécessaire à la lévitation de l'oxygène. La variation du courant au sein de celles-ci permet de réaliser des variations temporelles d'accélération limitées seulement par leur inductance propre. On n'a pas besoin de faire varier le courant dans l'ensemble des bobinages (inductance propre plus importante) pour réaliser une compensation magnétique de pesanteur variable, c'est à dire simuler des phases d'accélération ou décélération. Les bobines 6 et 7 modifient principalement le troisième harmonique afin de réaliser des configurations d'accélération résultantes différentes, ajustables en fonction du type d'expérience souhaité.

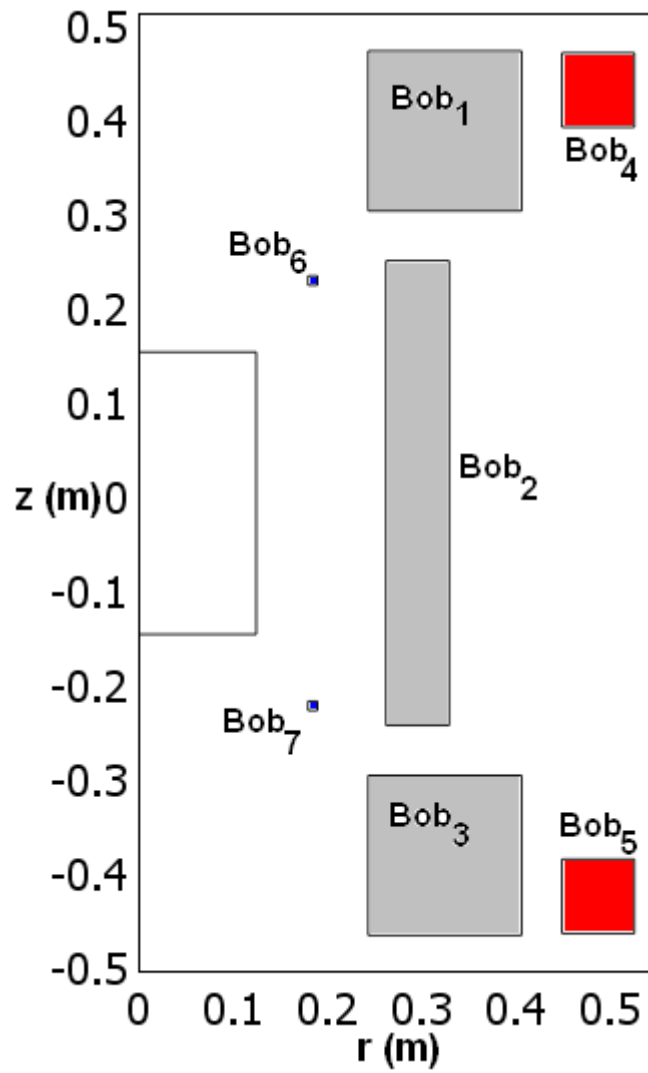


FIG. 29. Positionnement des bobines

Le dimensionnement magnétique est présenté sur la figure 30, la barre de couleur représente l'échelle de l'induction magnétique en Tesla. Les bobinages sont soumis à un champ magnétique maximal de 6,75T et le champ au centre est de 4,98T. Le rectangle central représente par sa dimension radiale l'anticyostat de 12,5 cm de rayon qui contient la cellule d'oxygène liquide.

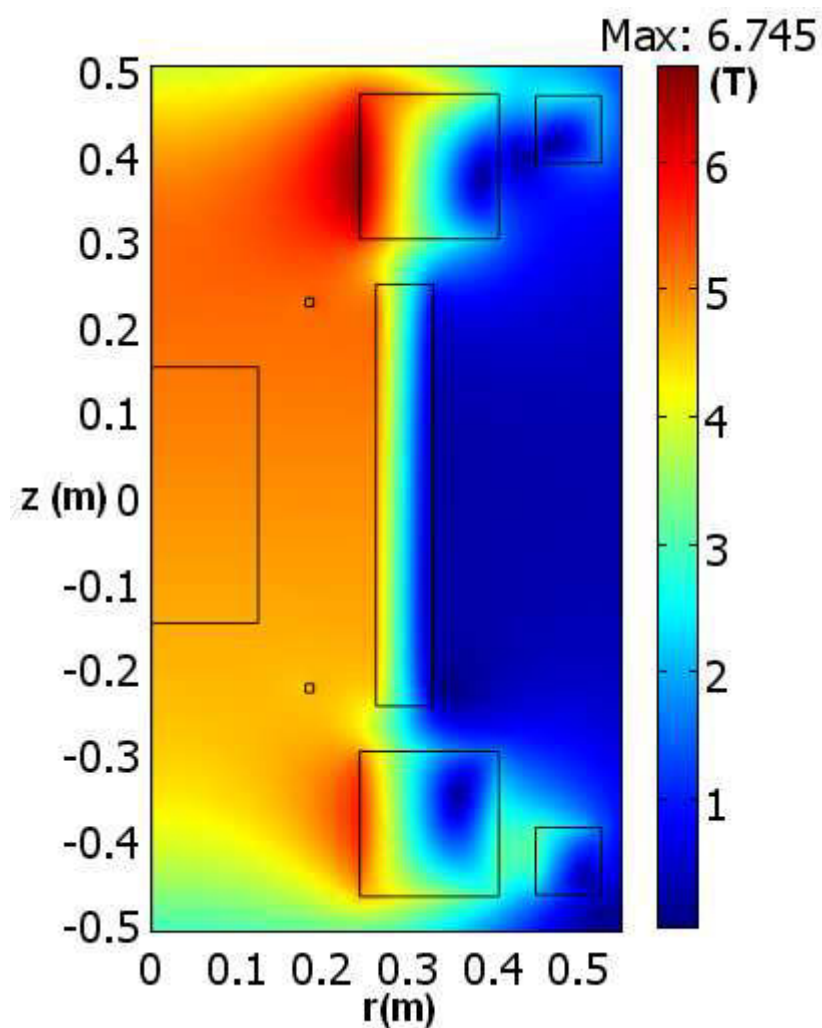


FIG. 30. Dispositif magnétique

Une modélisation du dispositif dans son ensemble a été réalisée. La figure 31 montre le système global avec les enroulements dans la partie inférieure du cryostat dans lesquels se place l'anticryostat contenant la zone utile. Cet anticryostat est réglable en hauteur par une motorisation se trouvant au dessus de l'ensemble. Cette image a été fournie par le SBT du CEA Grenoble.

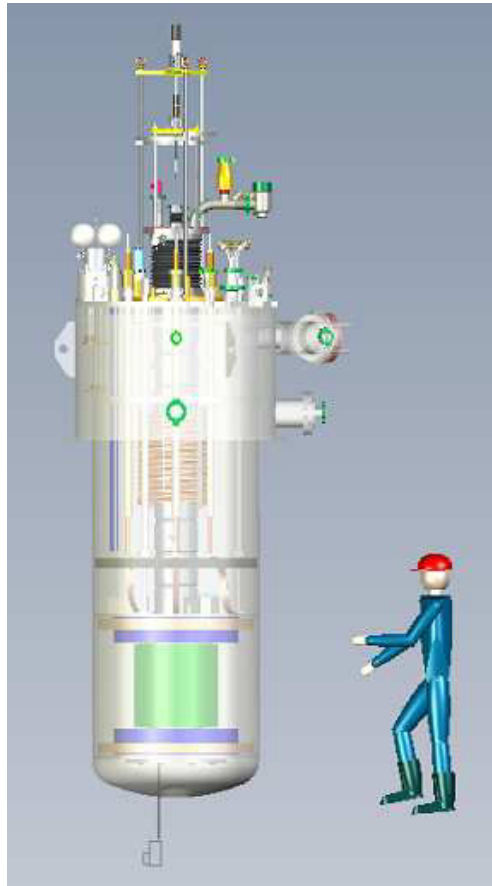


FIG. 31. Dispositif total

IV-3.2.5) Résultats numériques

IV-3.2.5.1) Variation spatiale de l'accélération

En faisant varier le courant uniquement dans le sous-ensemble « Σ_L », il est possible de réaliser une variation spatiale de l'accélération résultante. Les valeurs des coefficients k sont fournies pour chacune des simulations.

La partie gauche des figures 32, 33 et 34 représente la norme du vecteur inhomogénéité de la compensation (en %) à l'intérieur d'un rectangle noir symbolisant une section de l'anticryostat entre une hauteur par rapport au centre variant de -15 à 15 cm. La courbe noire délimite la zone utile à moins de 1% d'inhomogénéité de la compensation magnétique de pesanteur. A l'intérieur des zones utiles, il est possible de placer des cellules cylindriques d'un volume supérieur au litre souhaité. Un rectangle ou une sphère rouge symbolisent pour chacune des configurations la cellule contenant au moins le litre d'oxygène. Sur la partie de droite sont représentées par des lignes bleutées les équipotentielles magnéto-gravitationnelles. Ces dernières montrent la forme de l'interface gaz/liquide que prendrait l'oxygène lors d'expériences proche de son point critique.

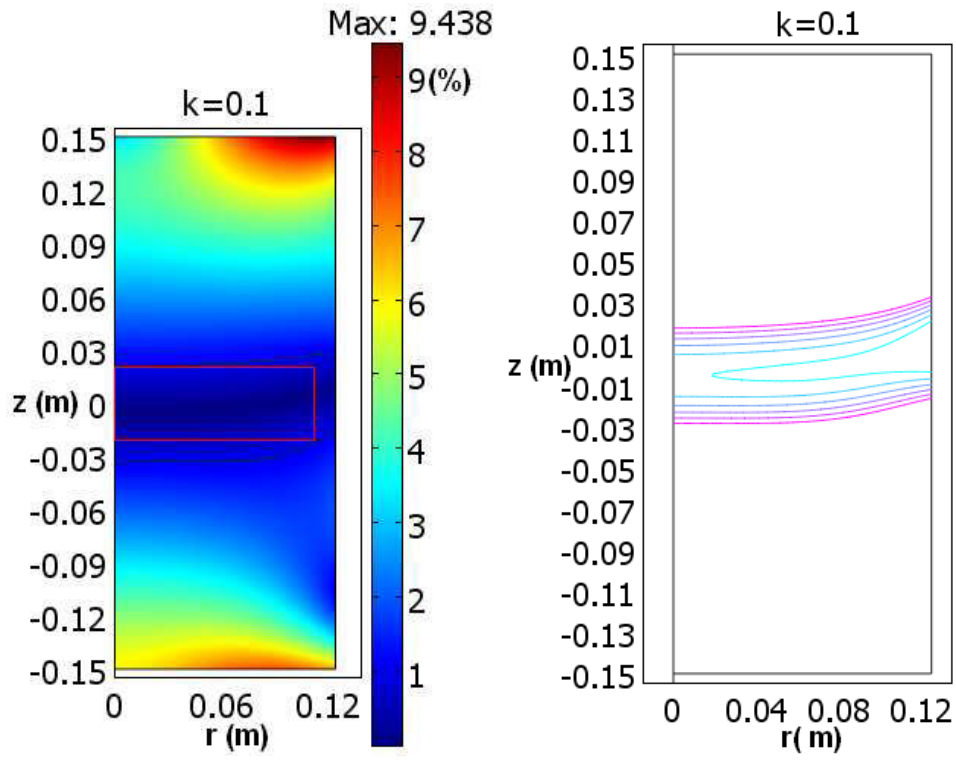


FIG. 32. Configuration horizontale ($k=0,1$)

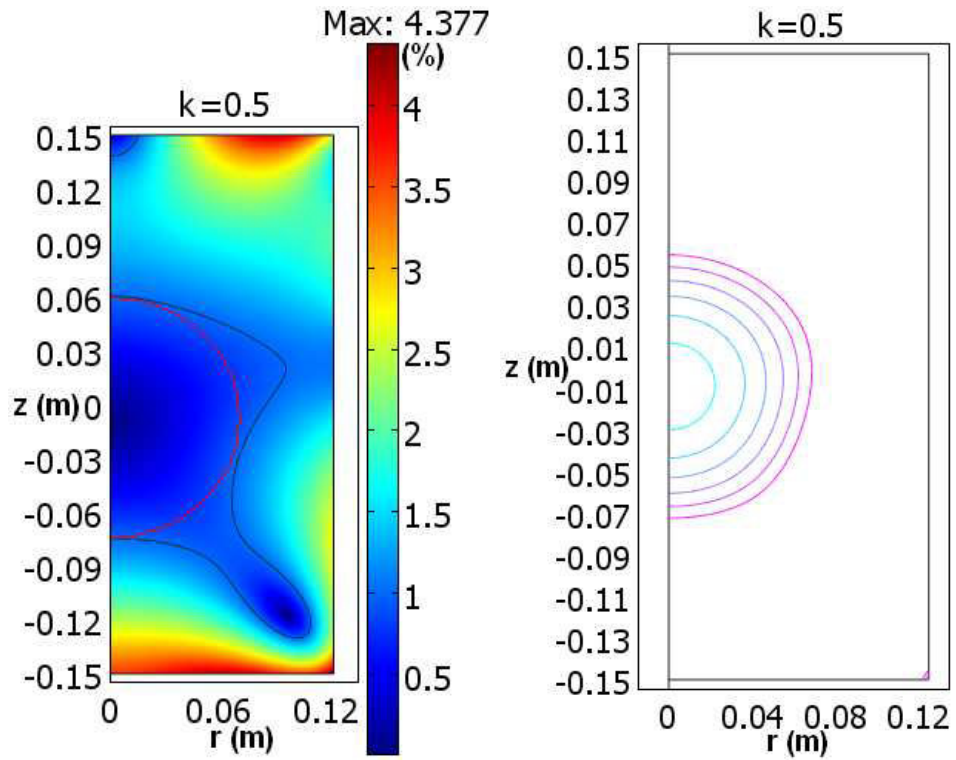


FIG. 33. configuration sphérique ($k=0,5$)

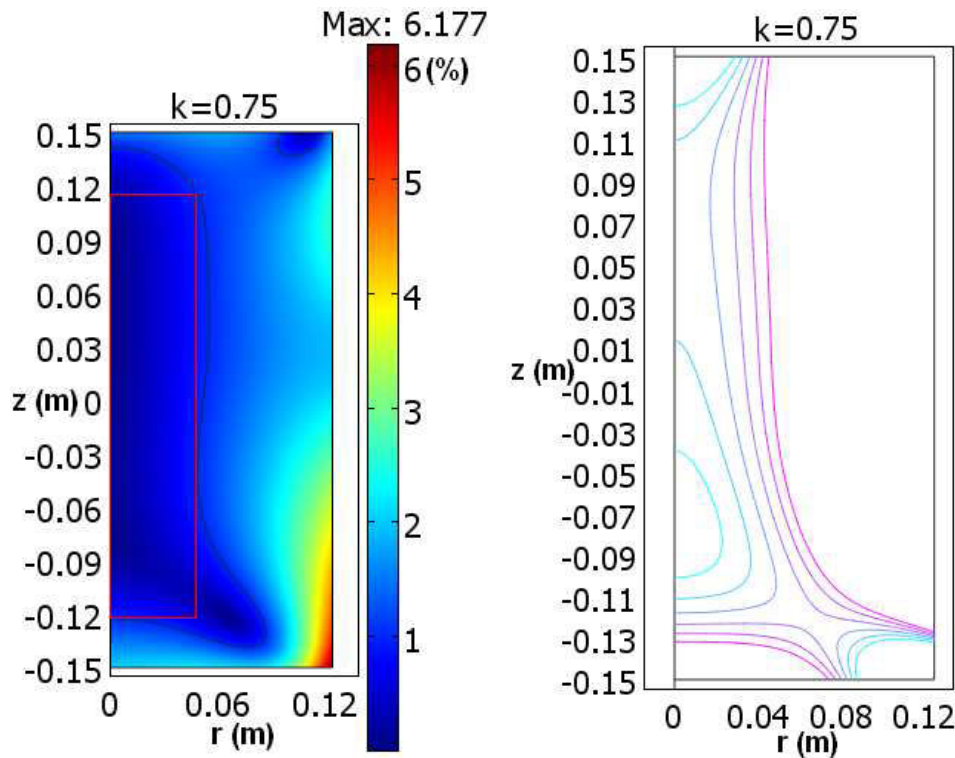


FIG. 34. Configuration verticale ($k=0,75$)

Dans le tableau XVI sont reportés les dimensions et le volume des cellules de forme cylindriques ou sphériques (incluses dans la zone à 1%) dans lesquelles l'oxygène est soumis à une accélération inférieure à $0,1\text{m/s}^2$. Pour la sphère, uniquement le rayon est fourni.

k	Hauteur	Rayon	Volume
0,1	4,7 cm	10 cm	1,47 L
0,5	X	6,7 cm	1,26 L
0,75	23,6 cm	4,9 cm	1,78 L

Tableau XVI : Dimensions et volumes des cellules

Pour le cas sphérique au lieu de placer une sphère dans la zone à 1%, on pourrait disposer un cylindre d'un volume de 1,62L. Les volumes obtenus sont bien supérieurs au litre désiré. De plus il faut rappeler que la station est dimensionnée pour $12T^2/\text{m}$ alors que le gradient de l'oxygène près de son point critique est de $11T^2/\text{m}$.

IV-3.2.5.2) Variation temporelle de l'accélération

Nous abordons ici un problème qui sera approfondi au chapitre V : il s'agit de la simulation au sol de phases d'accélération ou décélération d'un engin spatial, en modifiant les courants dans les bobinages.

Lors d'une variation temporelle de l'accélération de $0g$ (compensation spatiale à 1% près) à $0,5g$, la forme des équipotentielles magnéto-gravitationnelles va se déformer. Dès que l'accélération augmente, le poids devient de nouveau prédominant par rapport à la force magnétique et les équipotentielles Σ_L deviennent alors immédiatement des plans quasi horizontaux. Il paraît donc important pour éviter les mouvements parasites de fluide de partir d'une configuration, à $0g$, où les Σ_L sont déjà horizontales (cf. Fig. 35). Si par contre les expérimentateurs considèrent que l'oxygène liquide doit se trouver sur les parois latérales de

la cellule en début de manipulations, il est préférable de partir d'une configuration, à 0g, où les Σ_L sont verticales.

La variation temporelle est produite par une variation des courants d'alimentations du sous-ensemble de bobinage « G_1 ». Le découplage magnétique de ce bobinage - ne créant que des harmoniques pairs - par rapport aux deux autres « B_1 » et « Σ_L » - créant uniquement des harmoniques impairs - évite tout problème lié à l'inductance mutuelle lors de la variation des courants. Les facteurs limitant le temps de décharge sont l'inductance propre du sous-ensemble de bobinages « G_1 » et la résistance de décharge, laquelle est dimensionnée en fonction de la tension maximale de transition « quench ». L'inductance propre de ces bobines « G_1 » dépend du type de brins supraconducteurs choisi par l'industriel fabricant le dispositif. Dans notre cas, une variation de 0g à 0,5g est obtenue en environ 5s, figure 35, où sont représentées les équi Σ_L et l'accélération résultante en pourcentage de g par l'échelle de couleur, au sein de l'anticryostat à différents instants (cf. Tableau XVII).

Temps (s)	0	1,5	3	4,5
Accélération (% de g)	0	20	37	50

Tableau XVII : Accélération résultante fonction du temps

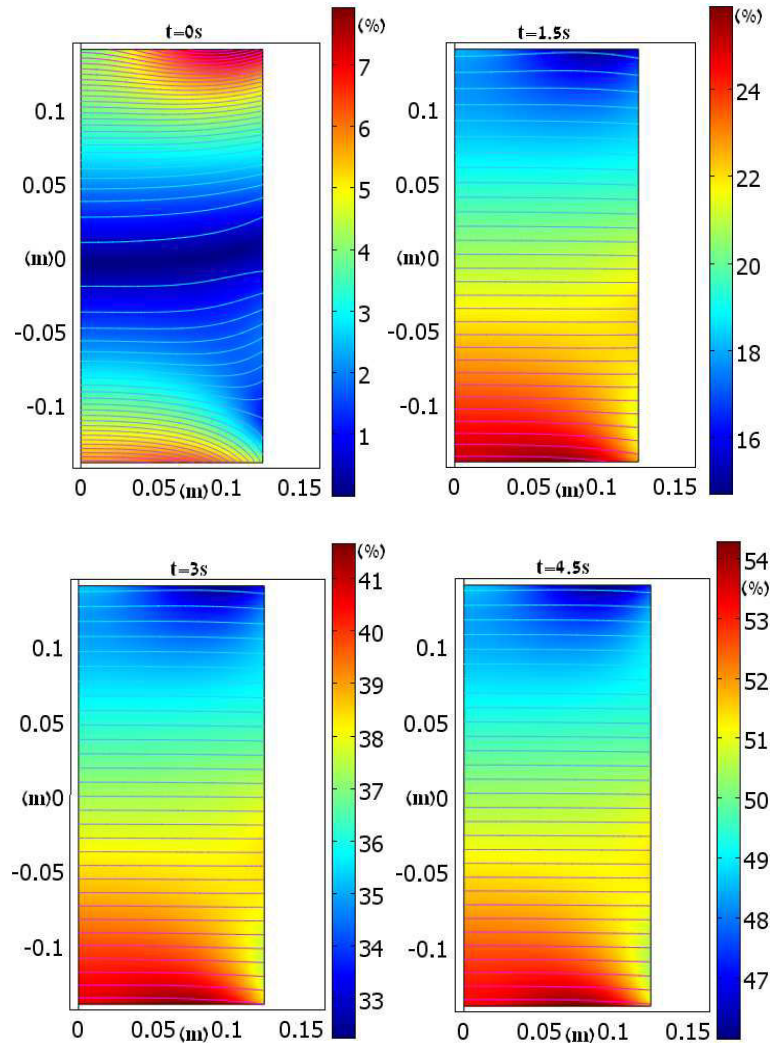


FIG. 35. Variation temporelle de l'accélération résultante, en % de g , dans l'anticryostat et évolution des équipotentiels magnéto-gravitationnelles.

Ce dispositif doit permettre de cette manière de simuler des phases d'accélération, mais également de décélération, en partant d'une surcompensation de la pesanteur et en revenant au final à la compensation exacte.

IV-3.2.6) Précision de positionnement

Cette partie concerne les effets néfastes produits sur la décomposition harmonique désirée par un mauvais positionnement ou une mauvaise conception des bobinages. Il existe de multiples problèmes de positionnement ou de conception. Nous nous limitons dans ce mémoire à deux cas simples fournissant une idée de la précision à atteindre pour de tels dispositifs de lévitation. Soit un des solénoïdes du dispositif LOLA est décalé en hauteur (δ_z), soit il est conçu avec un rayon intérieur différent de celui souhaité (δ_R). Attention, nous ne considérons pas ici le cas d'un décentrage axial du solénoïde, la géométrie reste en tous cas axisymétrique. La précision de la réalisation effective a pour correspondance en terme de simulation la précision des données initiales.

IV-3.2.6.1) Méthode

Le décalage d'un bobinage engendre nécessairement une infinité d'harmoniques non désirés. Pour les deux cas étudié (δ_R ou δ_z), l'écart entre la distribution harmonique du système correctement positionné et celle du système mal positionné s'obtient par le calcul des harmoniques produits par deux bobines, reste de la soustraction des bobines du système bien positionné (en vert) avec le système mal positionné (en rouge) sur la figure 36.

Un bloc représente la section d'un solénoïde par un plan contenant l'axe magnétique (axe de révolution) du système.

Prenons le cas du projet LOLA (Fig. 36), si on veut connaître les harmoniques indésirables créés par le décalage δ_R suivant le rayon du bloc n°1 (d'épaisseur W , de hauteur H et situé à un rayon intérieur R), il suffit de connaître la décomposition harmonique des deux bobines situées respectivement à des rayons R et $R+W$ de même hauteur et d'épaisseur δ_R . Les deux bobines sont évidemment alimentées en sens opposés, la bobine extérieure est dans ce cas alimenté dans le même sens que le bloc n°1.

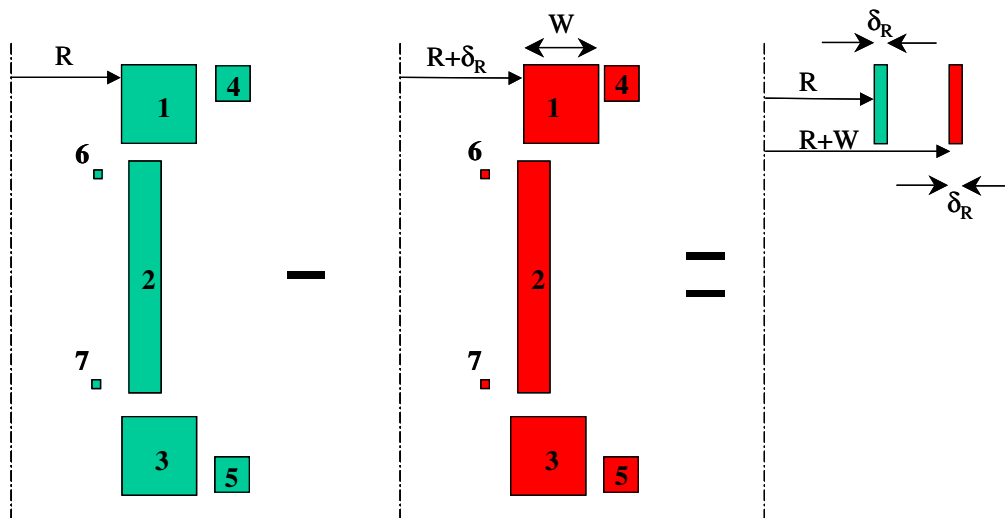


FIG. 36. Bobines générant les harmoniques non désirés lors d'une mauvaise conception du solénoïde 1 : rayon trop grand.

IV-3.2.6.2) Impact sur la décomposition harmonique

En première approximation, les harmoniques créés varient linéairement avec le décalage, c'est à dire avec l'épaisseur des bobines, car la densité de courant portée par les bobines restant constante, le courant total porté par ces bobines croît linéairement avec leur épaisseur. Pour que cette approximation reste valable, il faut que le décalage ne soit pas trop important car la géométrie des bobines deviendrait trop différente et impacterait nécessairement de manière plus significative sur l'évolution des harmoniques.

Dans l'annexe C, on évalue pour chacun des harmoniques et pour différentes valeurs de décalage l'écart entre la décomposition du système correctement conçu et celui du système dégradé. On s'aperçoit que l'approximation linéaire reste valable jusqu'à un décalage d'environ 5mm.

On peut ainsi à partir des résultats fournis dans l'annexe C obtenir pour chacun des blocs et des types de décalages une valeur du ratio entre l'écart par rapport à l'harmonique considéré ΔA_n en pourcentage et le décalage δ en mètre. L'écart se fait par rapport à la décomposition du système théorique.

Bloc, décalage	$\Delta A_1/\delta$	$\Delta A_2/\delta$	$\Delta A_3/\delta$	$\Delta A_4/\delta$	$\Delta A_5/\delta$	$\Delta A_6/\delta$
n°1, δ_R	+40%	-110%	-35000%	-183000%	-67000%	-2400%
n°1, δ_z	-80%	-1600%	-34000%	+8700%	+63000%	+12500%
n°4, δ_R	+3%	-80%	-4200%	-9200%	+90%	+350%
n°4, δ_z	-10 %	-130%	-130%	+10000%	+4800%	+300%
N°6, δ_R	-0,45%	+0,12%	+1000%	+10000%	+7000%	+680%
N°6, δ_z	+0,81%	+29%	+1200%	+860%	-5000%	-1900%

Tableau XVIII : Ecart par rapport à la décomposition harmonique désirée en fonction du décalage

Par exemple, si le bloc n°4 est décalé suivant sa hauteur de 2mm, l'harmonique 4 va alors être augmenté de $+10000\% \times 0,002m \rightarrow +20\%$. Cette approximation reste valable au moins jusqu'à 5mm pour ce qui est de notre géométrie.

IV-3.2.6.3) Impact sur la zone à 1%

Nous allons décaler certains des blocs constituant le dispositif et observer les effets produits sur la zone de travail à 1%. Le décalage s'effectuera suivant le rayon ($R+\delta_R$) ou la hauteur ($z+\delta_z$) avec différentes amplitudes. Un ensemble plus complet de résultats est donné dans l'annexe D.

Lorsque l'on effectue les tracés de la zone de lévitation inhomogène à 1% dans chacun des cas, un seul des bobinages est considéré comme mal conçu ou mal positionné. Lorsque le bloc n°1 est décalé de $\delta_z=5mm$ la zone de lévitation à 1% disparaît totalement du centre du dispositif, c'est à dire qu'elle n'apparaît plus dans la section d'anticryostat considérée. D'après l'ensemble des tracés effectués, il ressort qu'une précision différente de conception selon les solénoïdes doit être prise en compte. Il semble qu'une précision de 100 μm soit tout de même nécessaire sur les bobinages centraux créant principalement l'harmonique 1. De ce résultat, nous allons conserver la précision de 100 μm pour dimensionner un autre dispositif, où le nombre de solénoïdes ne sera plus limité.

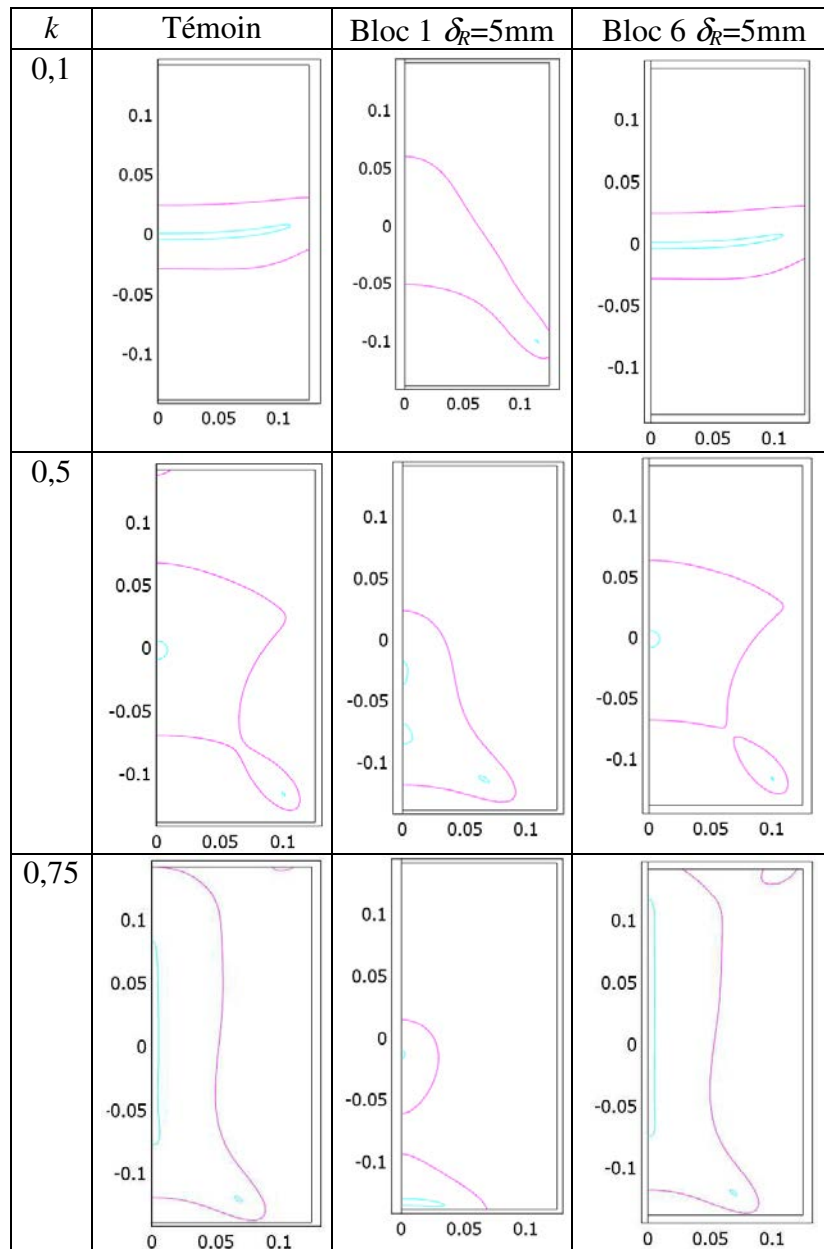


Tableau XIX : Effet des problème de positionnement sur la zone utile à 1%.

IV-3.3) Station de lévitation d'oxygène plus performante

Nous allons concevoir une station plus performante en se libérant des obligations de simplicité, c'est à dire possédant un nombre de bobines plus élevé. On se fixera une précision de dimensionnement non plus au millimètre mais au dixième de millimètre. Le dispositif sera beaucoup plus fin en terme de précision spatiale des accélérations résultantes, menant avec la même induction au centre à des volumes lévités plus conséquents.

IV-3.3.1) Premier bobinage : « B₁ »

La méthode d'obtention est similaire à celle du premier dispositif, mais cette fois-ci, les dimensions sont données au dixième de millimètre près.

	r	z	W	H	J_0 (A/mm ²)
Bab ₁	0,2441	0,2998	0,1628	0,1696	+60
Bab ₂	0,2628	-0,2474	0,0674	0,4948	+60
Bab ₃	0,2441	-0,4694	0,1628	0,1696	+60

Tableau XX : Dimensions du premier sous ensemble créant principalement l'harmonique 1

La décomposition harmonique générée par ce premier sous ensemble est bien meilleure que dans le précédent dimensionnement. Elle est obtenue par calcul formel (Annexe E). Le tableau XXI présente la décomposition réelle de ce premier sous ensemble de bobine.

C_1 (A)	C_2 (A/m)	C_3 (A/m ²)	C_4 (A/m ³)	C_5 (A/m ⁴)	C_6 (A/m ⁵)
3 979 120	0	-159	0	4363	0

Tableau XXI : Décomposition harmonique du premier sous ensemble B₁

Cette décomposition signifie que l'induction au centre du système sera bien de 5,00T. Si l'on compare comme dans la partie précédente les harmoniques sur une sphère de rayon $R_0=22\text{cm}$, les harmoniques 3 et 5 sont du même ordre de grandeurs et plus de 300 000 fois inférieurs au premier harmonique.

IV-3.3.2) Second bobinage : « G₁ »

Ce sous ensemble de bobinages crée le deuxième harmonique nécessaire à l'obtention des 12T²/m. Il est constitué de six solénoïdes pour des raisons de précision.

Comme pour le projet LOLA, une approche filiforme est effectuée afin d'obtenir la position (en réalité le rapport hauteur z sur rayon r) de trois paires de spires parcourues par des courant en sens opposés et situées symétriquement de part et d'autre du plan médian $z=0$. Une paire est positionnée de sorte que le quatrième harmonique soit nul, pour les deux autres paires de spires, elles sont positionnées de sorte qu'elle ne produisent pas de sixième harmonique. Nous obtenons ainsi trois paires de solénoïdes, permettant de fixer trois conditions qui sont de produire un harmonique 2 de la bonne valeur et d'annuler les harmoniques 4 et 6.

Le dimensionnement de ces solénoïdes s'effectue de la manière suivante. On part sur une section carrée des solénoïdes de petites dimensions, on injecte cette géométrie dans notre programme (Annexe F), qui nous fournit la valeur des trois densités de courants permettant de réaliser les trois conditions ($h_2=C_2$, $h_4=0$ et $h_6=0$) grâce à une décomposition des solénoïdes en harmoniques (Annexe G). Puis on réajuste en fonction de la densité de courant la dimension de chacun des blocs, pour que la solution tende vers les 60A/mm² désirés. Par exemple si la densité de courant dans une paire de solénoïdes est de 78A/mm², on va alors multiplier hauteur et épaisseur de ces solénoïdes par $\sqrt{78/60}$. On itère plusieurs fois jusqu'à ce que les densités convergent vers 60A/mm² (Moins d'une dizaine d'itérations est nécessaire). On peut affiner la section des solénoïdes et donc de la densité de courant en jouant en dernier lieu sur une seule des dimensions (hauteur ou épaisseur) des solénoïdes.

Ce procédé nous a permis de dimensionner le sous-ensemble G₁ dont les dimensions sont fournies dans le tableau XXII, le rayon est fixé à 42cm de manière à ce que les solénoïdes soient extérieurs au premier sous-ensemble et que leurs harmoniques néfastes perturbent moins la zone utile. Une paire de bobines possède un rayon de 48 cm pour éviter des problèmes de chevauchement des solénoïdes.

	R	z	W	H	J_0 (A/mm ²)
Bab ₄	0,42	+0,3128	0,0377	0,0377	-60
Bab ₅	0,48	+0,4157	0,0952	0,0952	+60
Bab ₆	0,42	+0,1115	0,0144	0,0143	+60
Bab ₇	0,42	-0,1258	0,0144	0,0143	-60
Bab ₈	0,48	-0,5109	0,0952	0,0952	-60
Bab ₉	0,42	-0,3505	0,0377	0,0377	+60

Tableau XXII : Dimensions du second sous ensemble créant principalement l'harmonique 2

L'antisymétrie du système « G_1 » par rapport au plan $z=0$ lui permet de générer uniquement des harmoniques pairs, il n'y aura ainsi aucun couplage magnétique entre les bobinages « B_1 » et « G_1 », ce qui permettra également d'effectuer des variations temporelles de l'accélération.

Nous présentons maintenant dans le tableau XXIII la décomposition harmonique de ce second sous ensemble de bobine.

C_1 (A)	C_2 (A/m)	C_3 (A/m ²)	C_4 (A/m ³)	C_5 (A/m ⁴)	C_6 (A/m ⁵)
0	476 968	0	173	0	217

Tableau XXIII : Décomposition harmonique du second sous ensemble G_1

Si l'on compare avec le projet LOLA, le système est bien meilleur en terme de décomposition harmonique. Le gradient G_1 au centre du dispositif vaut $G_1 = 4 \cdot \mu_0^2 \cdot C_1 \cdot C_2 = 11.988 \text{ T}^2/\text{m}$. Il est légèrement sous-estimé. Il faudra ajuster légèrement le courant dans le second sous ensemble (60,06 A/mm² au lieu de 60 A/mm²). Cette deuxième possibilité est bien adaptée car avec un conducteur du même type que celui utilisé dans la station OLGa une précision de 33 $\mu\text{A}/\text{mm}^2$ est atteinte avec une alimentation précise au milliampère près.

IV-3.3.3) Troisième bobinage : « Σ_1 »

Le même principe de dimensionnement que pour le sous-ensemble « G_1 » est effectué (Annexe H). Il sera constitué de 5 solénoïdes, dont 1 central et 2 paires de solénoïdes positionnées symétriquement de part et d'autre du plan médian, $z=0$. Chaque paire de solénoïdes est alimentée par un même courant (même sens). La symétrie de ce dispositif implique qu'il engendrera uniquement des harmoniques impairs. Les conditions à remplir pour ce dispositif sont de produire un harmonique 3 de la bonne valeur tout en minimisant les harmoniques 1 et 5 générés. La méthode itérative précédemment décrite est appliquée et fournit les dimensions reportées dans le tableau XXIV. Le rayon est également fixé à 42 cm, ceci peut éventuellement faciliter la mise en place de la structure de maintien mécanique du système.

	r	z	W	H	J_0 (A/mm ²)
Bab ₁₀	0,42	+0,2495	0,0169	0,0169	-60*k
Bab ₁₁	0,42	+0,0625	0,0279	0,0278	+60*k
Bab ₁₂	0,42	-0,0168	0,0335	0,0336	-60*k
Bab ₁₃	0,42	-0,0903	0,0279	0,0278	+60*k
Bab ₁₄	0,42	-0,2664	0,0169	0,0169	-60*k

Tableau XXIV : Dimensions du troisième sous-ensemble créant principalement l'harmonique 3

Le tableau suivant donne la décomposition harmonique de ce sous-ensemble de bobinage :

C_1 (A)	C_2 (A/m)	C_3 (A/m ²)	C_4 (A/m ³)	C_5 (A/m ⁴)	C_6 (A/m ⁵)
$-21*k$	0	$-38\ 153*k$	0	$20*k$	0

Tableau XXV : Décomposition harmonique du troisième sous ensemble Σ_L

La décomposition est bien meilleure que dans le cas du projet LOLA.

Le tableau XXVI récapitule les décompositions harmoniques des trois sous-ensembles en fonction de la valeur du courant injecté dans le troisième sous-ensemble, on y a ajouté le cas où le courant dans le troisième sous-ensemble est nul, c'est à dire, ici, le cas elliptique.

k	C_1 (A)	C_2 (A/m)	C_3 (A/m ²)	C_{3th} (A/m ²)	C_4 (A/m ³)	C_5 (A/m ⁴)	C_6 (A/m ⁵)	Forme des équi Σ_L
1	3979099	476968	-38312	-38197	173	4383	217	Verticale
0,5	3979109	476968	-19235	-19098	173	4373	217	Sphérique
0	3979120	476968	-159	0	173	4363	217	Elliptique
-0,5	3979131	476968	+18917	$+19098$	173	4353	217	Horizontale

Tableau XXVI : Récapitulatif des décompositions harmoniques

Ces résultats semblent relativement bons ce qui va maintenant être prouvé par simulation numérique.

IV-3.3.4) Présentation de la station

La figure 37 présente le système dans sa totalité. Les solénoïdes grisés constituent le sous-ensemble générant principalement l'harmonique 1. Les solénoïdes en rouge constituent le deuxième sous-ensemble, générant l'harmonique 2 nécessaire à la lévitation. Et les solénoïdes bleus créent principalement le troisième harmonique, permettant par un variation de sous courant de passer d'une configuration d'accélération résultante à une autre.

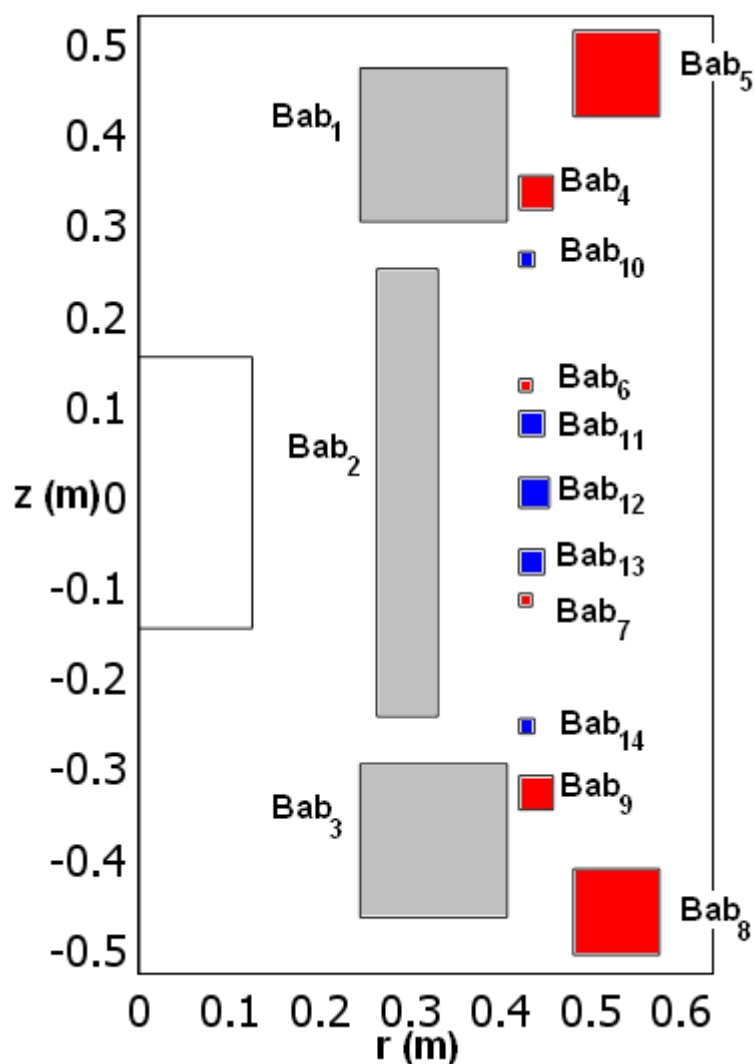


FIG. 37. Positionnement des bobines

Le dimensionnement magnétique est présenté sur la figure 38, la barre de couleur représente l'échelle de l'induction magnétique en Tesla. Les bobinages sont soumis à un champ magnétique maximal de 6,74T et le champ au centre sera de 5,00T. Le rectangle central représente toujours par sa dimension radiale l'anticryostat de 12,5 cm de rayon qui contiendra la cellule d'oxygène liquide.

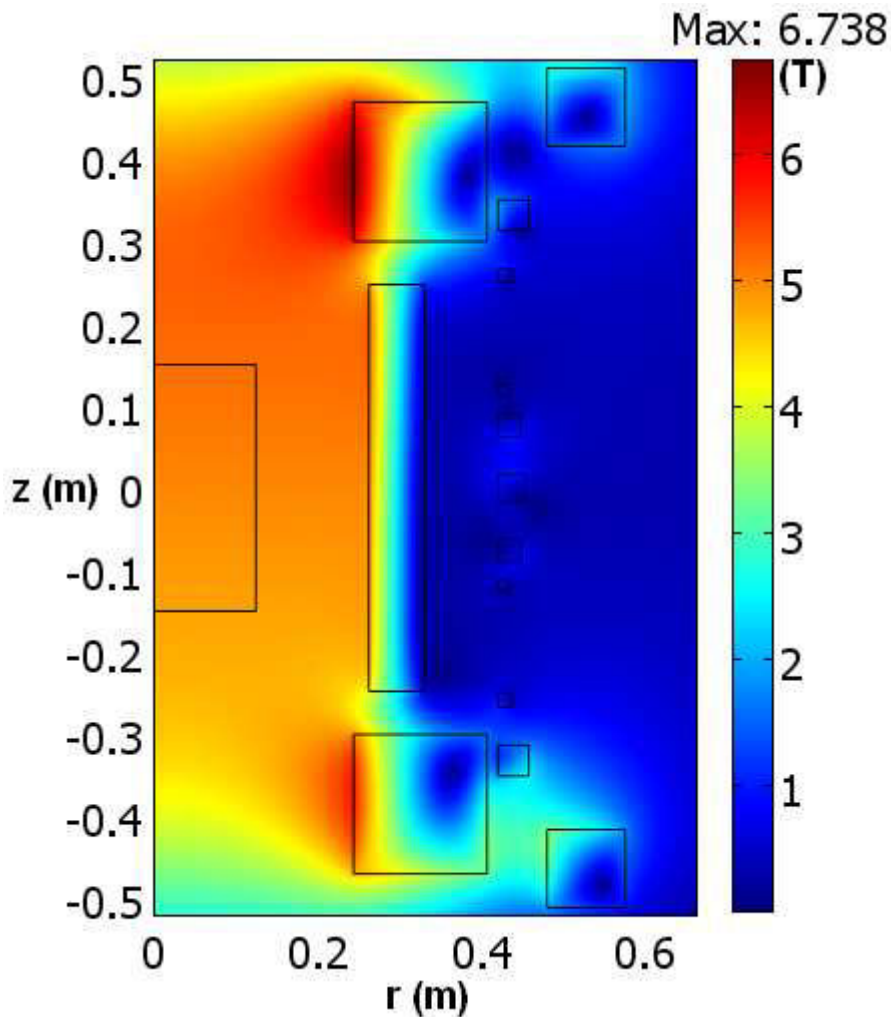


FIG. 38. Dispositif magnétique

IV-3.3.5) Variation spatiale de l'accélération

Les valeurs du coefficients k sont fournies pour chacune des simulations. Il sont différents de ceux du premier dimensionnement. Mais ils reflètent plus les rapports entre les amplitudes des harmoniques 3 des différentes configurations du fait de la meilleure décomposition produite par ce dispositif.

La partie gauche des figures 39, 40, 41 et 42 représente la norme du vecteur inhomogénéité de la compensation (en %) à l'intérieur d'un rectangle noir symbolisant une section de l'anticryostat entre -15 et 15 cm. La courbe noire délimite la zone utile à moins de 1% d'inhomogénéité de la compensation magnétique de pesanteur. A l'intérieur des zones utiles, il est possible de placer des cellules cylindriques d'un volume supérieur au litre souhaité. Un rectangle, une sphère ou une ellipse rouge symbolisent pour chacune des configurations la cellule contenant au moins le litre d'oxygène. Sur la partie de droite sont représentées par des lignes bleutées les équipotentielles magnéto-gravitationnelles. Ces dernières montrent la forme de l'interface gaz/liquide que prendrait l'oxygène lors d'expériences proche de son point critique.

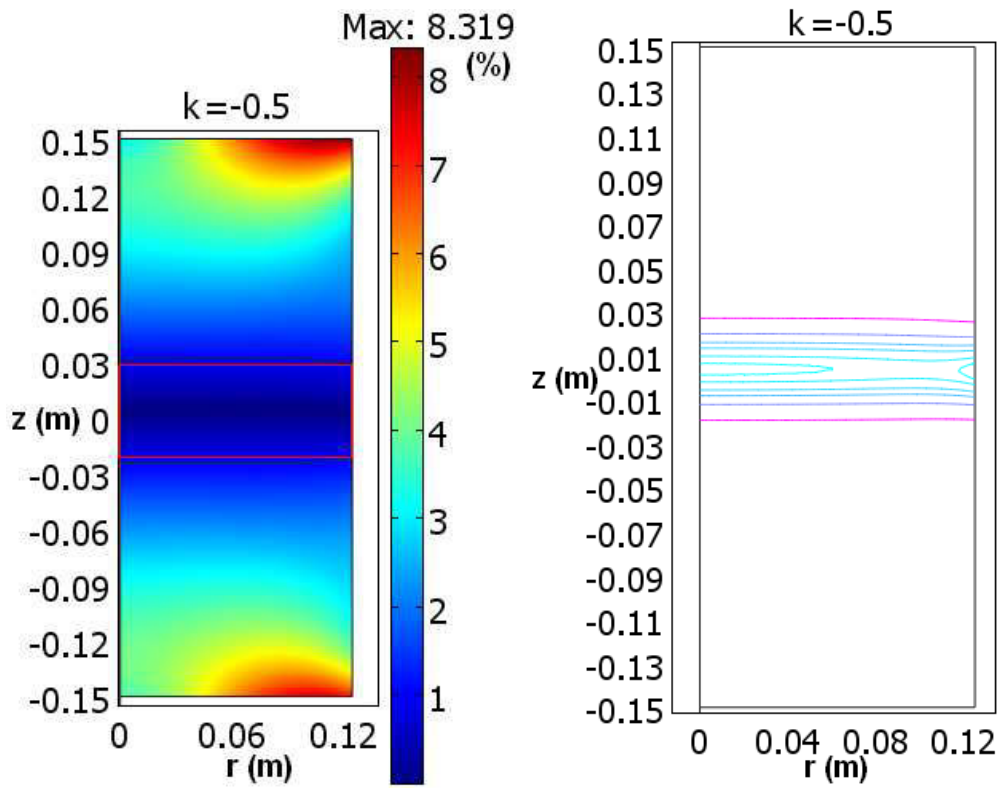


FIG. 39. Configuration horizontale ($k=-0,5$)

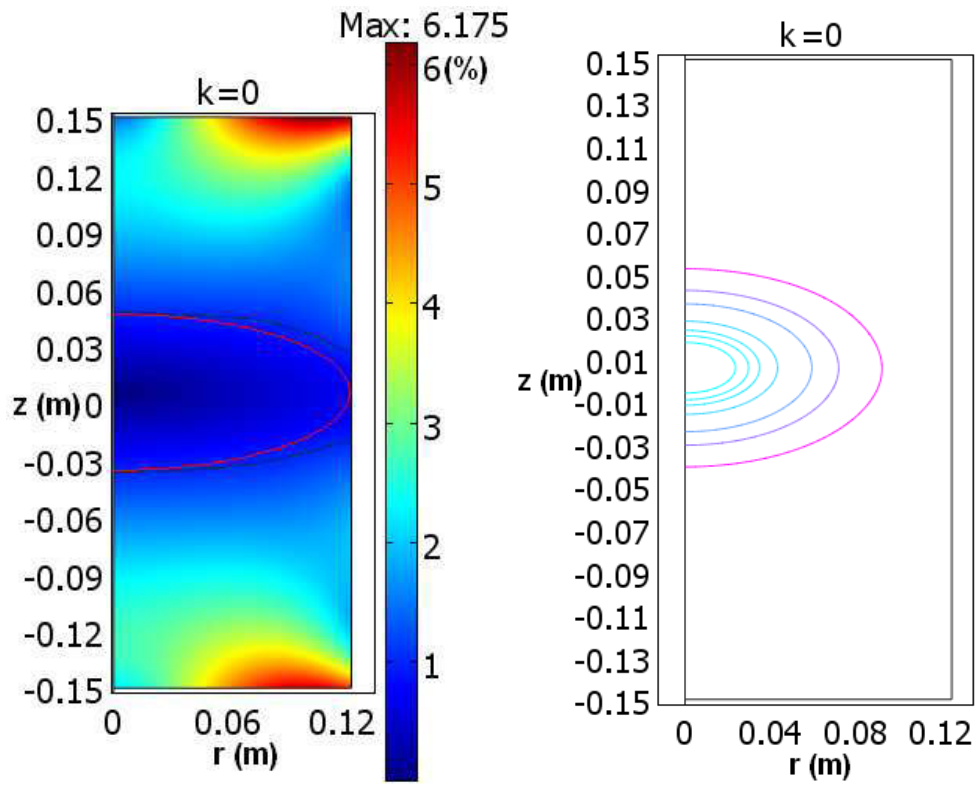


FIG. 40. Configuration elliptique ($k=0$)

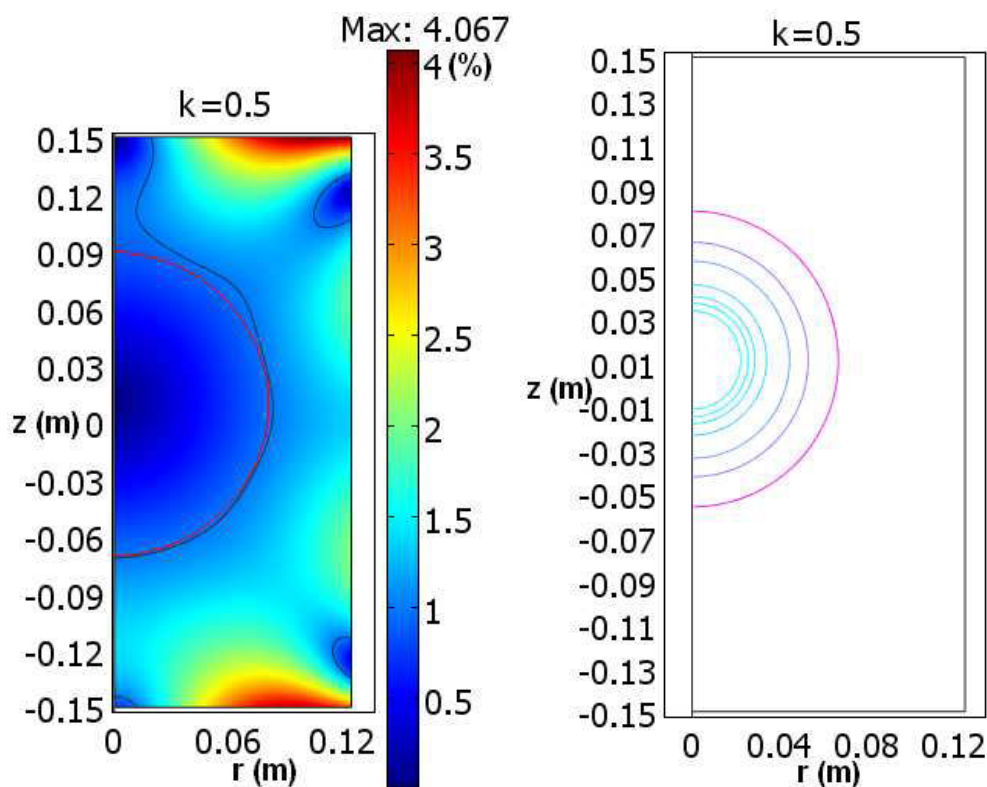


FIG. 41. Configuration sphérique ($k=0,5$)

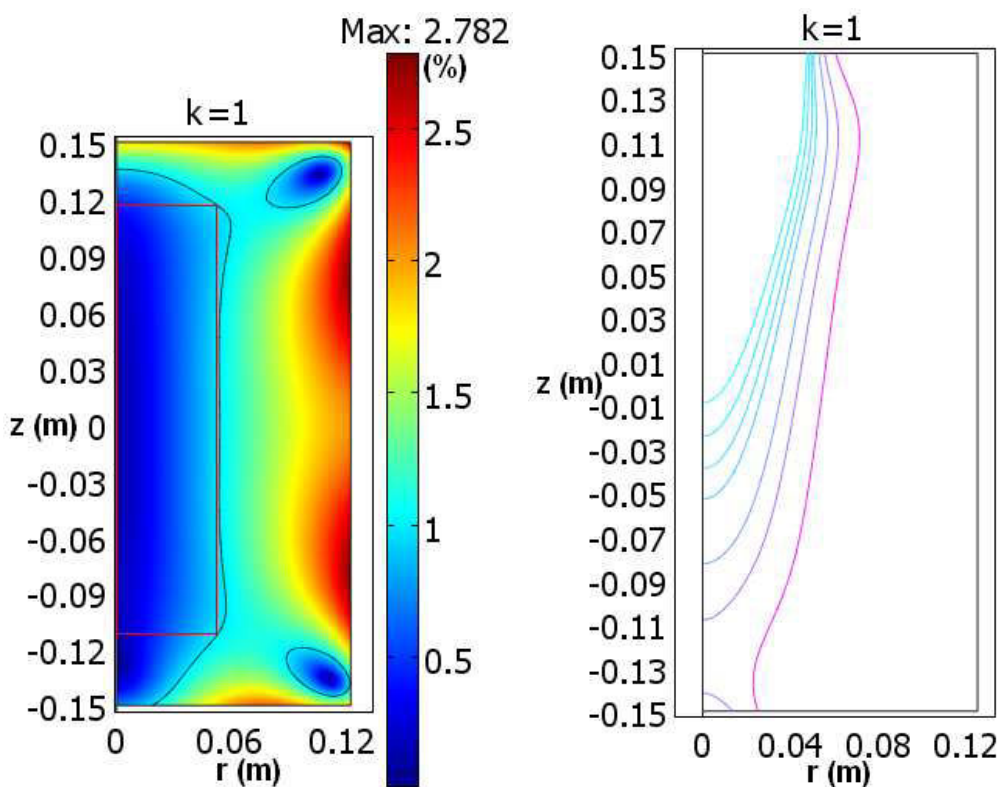


FIG. 42. Configuration verticale ($k=1$)

Dans le tableau XXVII sont reportés les dimensions et le volume des cellules de forme cylindrique ou sphériques (incluses dans la zone à 1%) dans lesquelles l'oxygène est donc soumis à une accélération inférieure à $0,1\text{m/s}^2$.

$k=1$, vertical : 2,07L (cylindre)
 $k=0,5$, sphérique : 2,14L (sphère)
 $k=0$, elliptique : 2,68L (ellipsoïde)
 $k=-0,5$, horizontal : 2,50L (cylindre)

k	Hauteur	Rayon	Volume
1	5,1 cm	12,5 cm	2,50 L
0,5	X	8 cm*	2,14 L
0	4,1 cm*	12,5 cm*	2,68 L
-0,5	22,6 cm	5,4 cm	2,07 L

Tableau XXVII : Dimensions et volumes des cellules

* : les valeurs pour l'ellipsoïde de révolution sont celles des demi-axes. Pour la sphère, uniquement la valeur du rayon est fournie.

Les volumes obtenus sont bien supérieurs au litre désiré, de plus il faut rappeler que la station est dimensionnée pour $12T^2/m$ alors que le gradient de l'oxygène près de son point critique est de $11T^2/m$. Les volumes obtenus avec une induction sont plus proches de l'estimation (IV-32) qui donne comme ordre de grandeur 2,4L avec une induction de 5T et un gradient de $12T^2/m$.

Nous ne fournissons pas de simulations de compensation variable de la gravité qui aboutissent aux mêmes résultats pour l'évolution des Σ_L .

IV-3.4) Conclusion et perspectives de la section IV-3

Les stations de lévitation dimensionnées répondent entièrement aux conditions de lévitation précédemment définies. Elles permettent de léviter un litre d'oxygène liquide avec une accélération résiduelle inférieure à $0,1m.s^{-2}$.

L'ajout du sous-ensemble « Σ_L » offre un réglage simple de l'accélération spatiale au sein de la cellule. Mais au-delà, il permet l'étude de propriétés ou de comportements de fluides dans des conditions de forces volumiques impossibles à créer autrement.

Le découplage magnétique du sous-ensemble « G_1 » avec le reste de la station, c'est à dire des harmoniques pairs (bobinage « G_1 ») et impairs (bobinage « B_1 » et « Σ_L »), offre la possibilité d'étudier le comportement de l'oxygène liquide lors de phases d'accélération ou de décélération en apesanteur.

Ces dispositifs possèdent une importante souplesse d'utilisation, de plus ils sont réalisables en un matériau supraconducteur maîtrisé par les industriels, le NbTi refroidi à 4,2K.

Un des problèmes soulevés lors du projet LOLA par un tel dispositif est celui de la métrologie. Une des idées proposées est de réaliser une cellule critique dont l'interface gaz/liquide permettrait une cartographie fine des équipotentielles magnéto-gravitationnelles et donc du champ magnétique. Cette idée n'a pas été développée jusqu'à maintenant.

La méthode décrite dans ce chapitre, et appliquée à la conception de dispositif de lévitation d'oxygène liquide, peut également être mise en œuvre pour d'autres fluides tels que l'hydrogène liquide ou l'eau. Ces matériaux ont une susceptibilité magnétique encore plus faible que l'oxygène, il serait certainement nécessaire, pour réaliser une telle station, d'utiliser des supraconducteurs en Nb_3Sn avec un refroidissement plus important à 1,8K, pour atteindre des inductions supérieures et ainsi des volumes lévités, et une homogénéité de compensation intéressants.

Au moment de la rédaction de cet ouvrage une étude est d'ailleurs en cours sur la réalisation d'une station de lévitation dédiée à l'hydrogène liquide ($986\text{T}^2/\text{m}$)

IV-4) Conclusion du chapitre IV

Ce chapitre est relatif aux géométries 2D axisymétriques. Dans une première partie la méthode générale de détermination des harmoniques du champ magnétique a été appliquée. Cette décomposition en harmoniques montre encore une fois que la force magnétique peut être parfaitement maîtrisée et que les limitations sont uniquement d'ordre technologique. La compréhension du lien entre les différents harmoniques et les grandeurs relatives à la compensation magnétique de pesanteur accroît de façon considérable les possibilités qu'offre la lévitation magnétique. Effectivement les diverses configurations d'accélération résultantes, inexplorées jusque maintenant, permettent d'envisager de toutes nouvelles expériences. La réalisation de ces différentes configurations peut se faire uniquement par les trois premiers harmoniques. L'amplitude des deux premiers harmoniques fixe l'induction et le gradient en un point, tandis qu'un choix judicieux du troisième harmonique détermine la configuration de l'accélération résiduelle au sein de la zone de travail. Ces résultats théoriques sont à lier à des travaux plus pratiques, chose que nous avons effectué dans les seconde et dernière parties de ce chapitre.

L'utilisation d'insert a été étudiée au sein d'un solénoïde équivalent à la station HYLDE du SBT/CEA Grenoble. Dans ce solénoïde à 10T, seule pouvait être atteinte la lévitation d'hydrogène. L'ajout théorique d'insert a montré que des volumes de plusieurs dizaines de millimètres cube d'eau ou même d'hélium pourraient être lévités avec des inhomogénéités de la compensation inférieures à 10%. Rappelons qu'au sein de ce solénoïde la lévitation de 100mm^3 d'hydrogène avec une inhomogénéité de 5% avait été considéré comme un succès. L'objectif de cette partie n'était pas d'optimiser un design d'insert, mais uniquement d'entr'apercevoir les possibilités en terme de lévitation que permettent ceux-ci. Sous certaines conditions la méthode décrite permet d'ajuster précisément la valeur du gradient G_1 au centre du dispositif, c'est à dire de choisir le matériau à léviter.

Ce chapitre est clôturé par le dimensionnement de deux stations magnétiques dédiées à la lévitation de l'oxygène. Le principe de dimensionnement utilisé, s'appuyant sur l'étude théorique des harmoniques, est tout à fait nouveau et la souplesse d'utilisation qui en découle est très intéressante en terme de variabilité spatiale et temporelle de la compensation. Chacun des harmoniques est créé par un sous-ensemble de bobinages. Et le réglage indépendant de leur courant d'alimentation offre cette flexibilité au niveau expérimental comme l'étude de propriétés ou de comportements de fluides dans des conditions de forces volumiques impossibles à créer autrement, ou bien encore en conditions d'accélération ou de décélération. Il est possible au sein de ces dispositifs de léviter avec des accélérations résiduelles inférieures à $0,1 \text{ m/s}^2$ des volumes supérieurs au litre. Ces volumes sont suffisants pour permettre par similitude de transposer les résultats obtenus aux réservoirs des lanceurs spatiaux. Ces dispositifs sont de surcroît réalisables dans des matériaux supraconducteurs classiques parfaitement maîtrisés par l'industrie tel que le NbTi refroidi à 4,2K. La méthode décrite dans cette dernière partie pour des lévitateurs d'oxygène peut parfaitement être transposée pour d'autres fluides tels que l'hydrogène liquide ou l'eau. Du fait de leur susceptibilité moindre, les résultats en terme de volume ou inhomogénéité seront automatiquement moins bons. Il serait certainement nécessaire, pour réaliser de telles stations, d'utiliser des supraconducteurs en Nb_3Sn avec un refroidissement plus important à 1,8K, pour atteindre des inductions supérieures et ainsi des volumes lévités, et une homogénéité de compensation suffisamment intéressants.

Références bibliographiques :

- [ANG1] Angot, A. **Compléments de mathématiques à l'usage des ingénieurs de l'électrotechnique et des télécommunications**, ISBN 2-225-34254-, 6ème éd., pp445-451 (1982)
- [BEA1] Beaunon, E and Tournier, R. **Levitation of organic materials**, *Nature*, 349, p470 (1991)
- [BIR1] Bird, M.D. et al. **Special purpose high field resistive magnets**, *IEEE Transactions on Applied Superconductivity*, 10, 1, pp451-454, (2000)
- [BRO1] Brooks, J.S. et al. **Diamagnetism and magnetic force: a new laboratory for granular materials and chaotic/deterministic dynamics**, *Physica B*, 294-295, pp721-728 (2001)
- [BRO2] Brooks, J.S. et al. **Dynamical behavior of granular matter in low gravity (diamagnetic levitation)**, *Journal of magnetism and magnetic materials*, 226-230, pp2084-2089 (2001)
- [CHA1] Chatain, D. et al., **Study of fluid behaviour under gravity compensated by a magnetic field**, *Microgravity Science and Technology*, 18, 3-4, pp196-199 (2006)
- [COU1] Couderchon, G. , **Alliages fer-nickel et fer-cobalt – Propriétés magnétiques**, Sciences de l'ingénieur, D 2 130-20.
- [DUR1] Durand, E., **Magnétostatique**, Tome I, Masson, Paris, p135 (1968)
- [GAR1] Garrett, M.W. **Axially symmetric systems for generating and measuring magnetic fields**, *Journal of Applied Physics*, 22, 9, pp1091-1107 (1951)
- [GAR2] Garrett, M.W. **Thick cylindrical coil systems for strong magnetic field with field or gradient homogeneities of the 6th to 20th order**, *Journal of Applied Physics*, 38, 6, pp2563-2586 (1967)
- [HOA1] Hoard, R.W. and al. **Field enhancement of a 12.5-T magnet using holmium poles**, *IEEE Transactions on Magnetics*, 21, 2, pp448-450 (1985)
- [IKE1] Ikezoe, Y. et al. **Making water levitate**, *Nature*, 393, pp749-750 (1998)
- [JEN1] Jensen, J. and Mackintosh, A.R., **Rare Earth Magnetism: Structures and Excitations**, Clarendon press, Oxford, p57 (1991)
- [KIT1] Kitamura, N. and al **Glass spheres produced by magnetic levitation method**, *Journal of non-crystalline solids*, 293-295, pp624-629 (2001)
- [KIY1] Kiyoshi, T. et al. **Superconducting magnets for generating uniform magnetic force field**, *IEEE Transactions on Applied Superconductivity*, 9, 2, pp362-365 (1999)
- [LOR1] Lorin, C. and Mailfert, A. **Magnetic compensation of gravity by using superconducting axisymmetric coils: Spherical Harmonics Method**, *IEEE/CSC & ESAS European Superconductivity News Forum*, No. 4, to appear in *Journal of Physics: Conference Series* (2008)
- [MAI1] Mailfert, A. and al., **Supersaturated synchronous machine description and modelisation**, *Journal de Physique*, 45, pp725-728, (1984)
- [OVV1] Vincent-Viry, O. and al., **Ferromagnetic inserts foe magnetic force field generation**, *IEEE Transactions on Magnetics*, 40, 3, pp1606-1609, (2004)
- [OZA1] Ozaki, O. et al. **Design study of superconducting magnets for uniform and high magnetic force field generation**, *IEEE Transactions on Applied Superconductivity*, 11, 1, pp2252-2255, (2001)
- [PIC1] Pichavant, G. and al. **Magnetic compensation of gravity: experiments with oxygen**, *Microgravity Science and Technology*, (2008)
- [QUE1] Quettier L., Félice H., Mailfert A., Chatain D. and Beysens D., **Magnetic compensation of gravity forces in liquid/gas mixtures: surpassing intrinsic limitations of a superconducting magnet by using ferromagnetic inserts**, *European Physical Journal Applied Physics*, vol. 32, pp. 167-175, 2005.
- [QUE2] Quettier, L. , **Contribution méthodologique à la conception de systèmes supraconducteurs de lévitation magnétique**, Thèse INPL, (2003)
- [RHO1] Rhodes, B.L., Legvold, S. and Spedding, F.H., **Magnetic Properties of Holmium and Thulium Metals**, *Physical Review*, 109, 5, pp1547-1550, (1958)
- [ROS1] Rossi, L. and Todesco, E., **Electromagnetic design of superconducting dipoles based on sector coils**, *Physical Review special topics – accelerators and beams*, 10, 112401 (2007)
- [SCH1] Schauer, W and Arendt, F. **Field enhancement in superconducting solenoids by Holmium flux concentrators**, *Cryogenics*, 23, 10, pp562-564 (1983)
- [SCH2] Schwerg, N. and Vollinger, C. , **Analytical models for the calculation of the iron yoke contribution in superconducting accelerator magnets**, *Departmental report CERN/AT 2007-33 (MCS)*, (2007)
- [TOD1] Todesco, E. and al., **Optimization of the even normal multipole components in the main dipole of the large hadron collider**, *EPAC proceedings*, 3-7 June 2002, La Villette, Paris, France.
- [TRE1] Trémolet de Lacheisserie, E. , **Magnétisme I**, ISBN 2.86883.463.9, EDP Sciences, p468 (2000)
- [WUN1] Wunenberger, R. et al., **Magnetic compensation of gravity forces in (-p) hydrogen near its critical point: Application to weightless conditions**, *Physical Review E*, 62, 1, pp469-476, (2000)

Chapitre V : Compensation magnétique dynamique

Sommaire

V-1) Compensation magnétique transitoire : OLGA	154
V-1.1) Interaction mutuelle	154
V-1.2) Dimensionnement d'une alimentation spécifique.....	157
V-1.3) Qualification de l'alimentation Bouhnik	160
V-1.4) Evolution de la gravité résiduelle	161
V-1.5) Impact des mandrins et de la cellule.....	163
V-1.5.1) Mandrins	164
V-1.5.2) Cellule.....	165
V-1.5.2.1) En cuivre	166
V-1.5.2.2) En saphir	167
V-1.5.2.3) En inox	167
V-1.6) Conclusion de la section V-1	168
V-2) Transitoire avec décomposition harmonique.....	169
V-2.1) Deux harmoniques : géométrie cylindrique.....	169
V-2.1.1) Variation de A_1 ou A_2 et évolution de la zone de compensation exacte	169
V-2.1.1.1) Modification de l'harmonique A_1	170
V-2.1.1.2) Modification de l'harmonique A_2	170
V-2.1.2) Variation de A_1 ou A_2 et évolution de la zone de compensation variable	171
V-2.1.2.1) Modification de l'harmonique A_1	171
V-2.1.2.2) Modification de l'harmonique A_2	172
V-2.2) Deux harmoniques : géométrie axisymétrique	173
V-2.2.1) Variation de C_1 ou C_2 et évolution de la zone de compensation exacte	173
V-2.2.1.1) Modification de l'harmonique C_1	173
V-2.2.1.2) Modification de l'harmonique C_2	174
V-2.2.2) Variation de C_1 ou C_2 et évolution de la zone de compensation variable	175
V-2.2.2.1) Modification de l'harmonique C_1	175
V-2.2.2.2) Modification de l'harmonique C_2	176
V-2.2.2.3) Modification simultanée des 2 harmoniques	176
V-2.3) Conclusion de la section V-2	177
Références bibliographiques :	178

Jusqu'à présent, les expériences de compensation magnétique de pesanteur ont été réalisées de manière statique. Les expérimentateurs cherchent soit à accomplir la lévitation d'une substance en compensant exactement la pesanteur, soit à obtenir une gravité apparente différente de celle existant sur la surface terrestre, par exemple une gravité d'environ 0,38g ou 0,17g pour simuler le comportement des matériaux respectivement sur la planète Mars ou au niveau de la surface sélène [VAL1]. Aucun travail n'a été réalisé pour simuler magnétiquement une compensation dynamique de la pesanteur, c'est à dire simuler par champs magnétiques des phases d'accélération ou de décélération au voisinage de la compensation exacte. L'objectif de ces simulations, souhaitées par les CNES, est de comprendre le comportement de fluides initialement en état de microgravité et soumis à d'infimes variations d'accélération dans des engins spatiaux (respectivement des fluides soumis à d'infimes décélérations et finalement en état de microgravité). Ce chapitre est scindé en deux parties. La première concerne la faisabilité de telles expérimentations au sein de la station OLGA du Service des Basses Températures du CEA Grenoble. Ensuite nous examinons de manière plus théorique la compensation variable de gravité en nous appuyant sur la méthode générale d'expression du vecteur $\mathbf{G}$ en fonction des harmoniques du champ magnétique.

V-1) Compensation magnétique transitoire : OLGA

La station OLGA (Oxygen Low Gravity Apparatus), opérationnelle, permet grâce à deux bobines supraconductrices en Nb-Ti coaxiales, de créer aisément un gradient suffisant pour sustenter l'oxygène liquide ($G_I = 8,16 \text{ T}^2/\text{m}$ à 90 K). Les bobines peuvent être alimentées en série ou indépendamment. Chacune des bobines peut effectuer seule la compensation. Le dispositif expérimental est constitué d'un anti-cryostat dans lequel est placée la cellule expérimentale contenant le fluide, d'un banc d'injection de O_2 , d'un cryostat contenant les bobines.

La compensation magnétique variable recherchée consiste à simuler le passage d'une fraction de g à zéro- g et vice-versa, et ainsi de recréer les conditions d'envol, d'arrêt et de redémarrage des propulseurs dans l'espace, en faisant varier rapidement la force magnétique au moyen de courants variables. La méthode choisie consiste à alimenter la bobine extérieure d'OLGA pour qu'elle compense seule la gravité (courant nécessaire d'environ 240A), la bobine intérieure étant en même temps alimentée pour obtenir une accélération résultante de $-0,5g$ (courant d'environ 170A). On décharge cette dernière bobine, de manière à ce que le liquide soit soumis en fin de décharge à l'accélération résultante de $0g$ donnée par la seule bobine extérieure.

L'interaction mutuelle des deux bobines constituant la station OLGA est étudiée de manière analytique et numérique. Les problèmes électrotechniques soulevés par la décharge trouvent une solution qui obéit aux conditions imposées, par le dimensionnement d'une alimentation spécifique. Enfin la modélisation par éléments finis du dispositif permet de prédire l'évolution de la gravité résiduelle et de son homogénéité au sein de l'échantillon d'oxygène liquide.

V-1.1) Interaction mutuelle

On modélise dans un premier temps le schéma électrique de la station OLGA grâce au logiciel matlab simulink® :

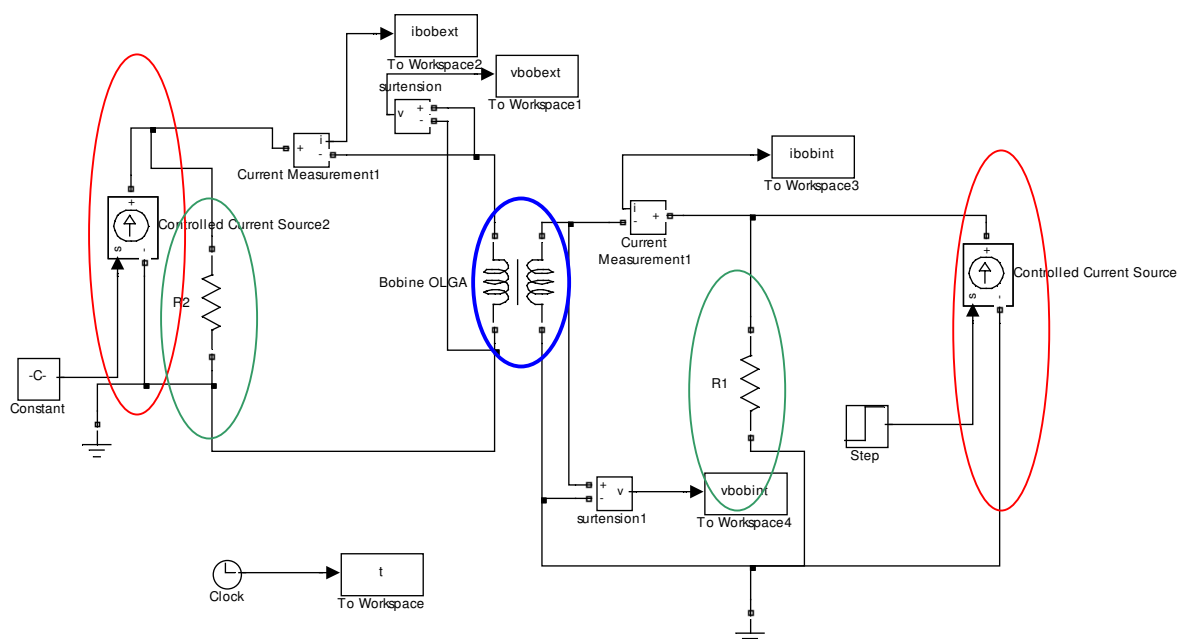


FIG. 1. Montage réalisé sous le logiciel matlab simulink®

Ce schéma comporte deux sources de courant parfaites (cerclées de rouge Fig.1), deux résistances de décharge (vert) en parallèle sur les bobines intérieure et extérieure (bleu). Ces deux bobines, constitutives d'OLGA, sont couplées par construction par une inductance mutuelle dont l'importance est primordiale pour le fonctionnement du dispositif en régime variable. L_1 et L_2 , R_1 et R_2 sont respectivement les inductances propres et les résistances de décharge de la bobine intérieure et de la bobine extérieure.

Les résultats sont comparés avec ceux obtenus par un calcul analytique classique, lequel tient compte de l'interaction mutuelle des deux bobines. Les équations du système s'écrivent :

$$M \frac{di_2(t)}{dt} + L_1 \frac{di_1(t)}{dt} + R_1 i_1(t) = 0 \quad (V-1)$$

$$M \frac{di_1(t)}{dt} + L_2 \frac{di_2(t)}{dt} + R_2 (i_2(t) - I_{20}) = 0 \quad (V-2)$$

Soit sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} L_1 & M \\ M & L_2 \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R_1 & 0 \\ 0 & -R_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ R_2 I_{20} \end{bmatrix} \quad (V-3)$$

Cette équation est de la forme :

$$\frac{d}{dt} [I] = A [I] \quad (V-4)$$

La solution est en exponentielle de matrice, il faut diagonaliser A grâce à une matrice diagonale D, constituée des valeurs propres de A, et P constituée des vecteurs propres associés :

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = [P] \expm[t \cdot D] [P]^{-1} \cdot \begin{bmatrix} I_{10} \\ I_{20} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ I_{20} \end{bmatrix} \quad (V-5)$$

On obtient ainsi les courants en fonction du temps. Pour obtenir les tensions, il suffit de calculer la tension sur la branche parallèle où se trouvent les résistances de décharge, en tenant compte de ce que l'alimentation du solénoïde intérieur est coupée et que celle du solénoïde extérieur fournit 240A. La figure 2 donne les variations de $i_1(t)$ le courant dans le solénoïde intérieur, de $i_2(t)$ le courant dans le solénoïde extérieur, de $u_1(t)$ la tension aux bornes du solénoïde intérieur, et de $u_2(t)$ la tension aux bornes du solénoïde extérieur.

Les courbes obtenues par calcul analytique (rouges) et par simulation (bleues) coïncident parfaitement. Ce résultat, d'intérêt très secondaire pour notre étude, ne constitue qu'une validation du logiciel SIMULINK.

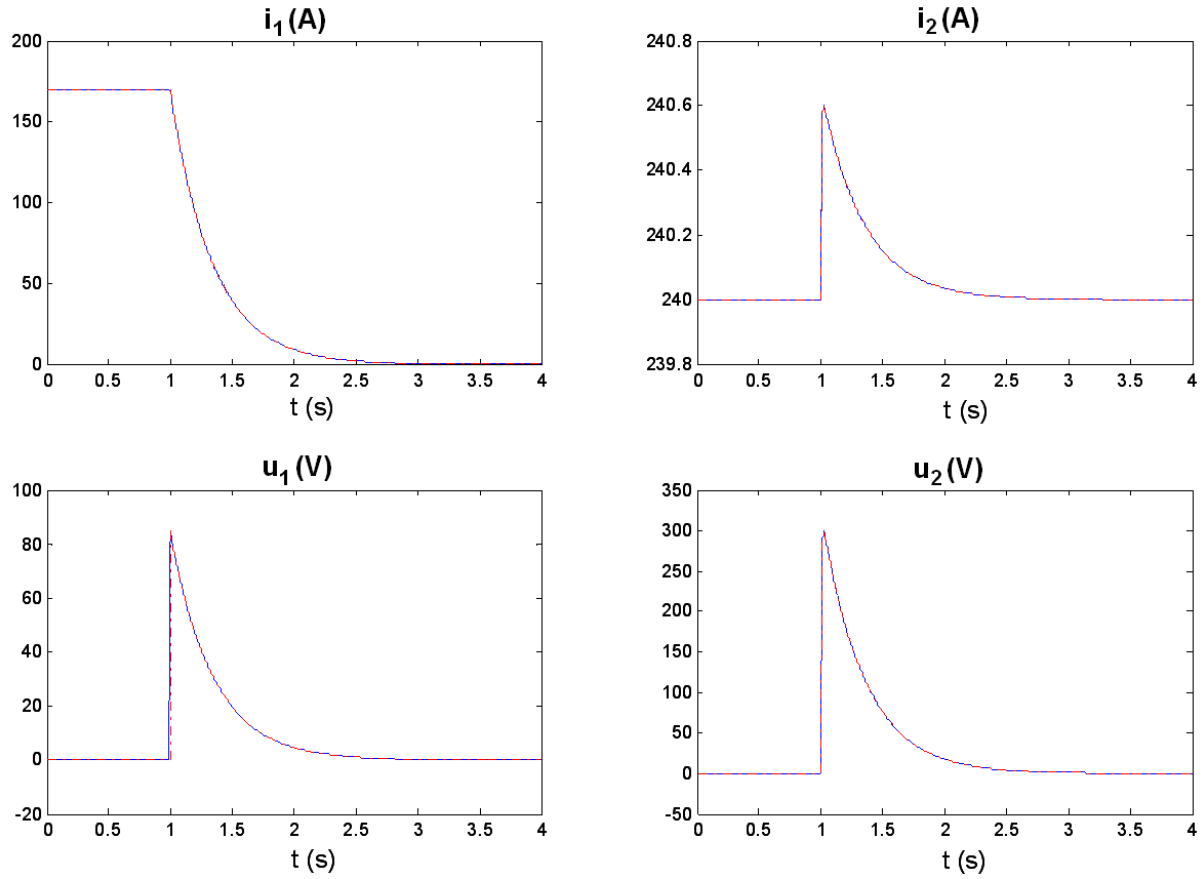


FIG. 2. Superposition simulation numérique et calcul analytique

La décharge en courant du solénoïde intérieur dépend directement de la valeur de la résistance de décharge R_I (circuit R - L) puisque l'inductance propre de la bobine est fixée. Cette remarque est importante car dans le cas de la conception d'un bobinage dédié à la variation temporelle où il faudra obtenir un bobinage avec une inductance propre faible. On souhaite cette décharge la plus rapide possible, donc R_I le plus grand possible (L/R minimum).

Plus cette décharge est rapide (di/dt important), plus la tension apparaissant aux bornes du solénoïde extérieur est importante. Cette surtension se retrouve aux bornes de R_2 , et le courant de surintensité dans le solénoïde extérieur varie en raison inverse de R_2 (la source de courant est considérée comme parfaite, donc toujours traversée par 240A).

Dans ces calculs, les valeurs des résistances ($R_I=0,5\Omega$ et $R_2=500\Omega$) ont été choisies pour satisfaire des critères pour le solénoïde extérieur de surtension limitée (inférieure à 350 V, de fait 300 V après simulation), et de surintensité limitée (inférieure à 1A), tout en conservant une décharge rapide (inférieure à 2 secondes)

La valeur de surtension de la bobine extérieure (300 V), si elle est inférieure à la valeur donnée comme critique par les concepteurs de la bobine, doit néanmoins être prise en considération en raison des risques qu'elle peut présenter à l'extérieur du cryostat pour les expérimentateurs. En outre, même si cette valeur est admissible au niveau de l'isolation de la bobine elle-même, nous n'avons pas d'élément pour juger de l'apparition éventuelle de décharges électriques dans le système d'amenée de courants (décharges de Paschen)

La surintensité transitoire qui est créée dans le solénoïde extérieur va perturber légèrement (selon sa valeur) le gradient créé. Pour un choix des résistances comme celui présenté ci-dessus, les perturbations sur le courant semblent acceptables puisque inférieures à 1A.

Ce dimensionnement ne tient pas compte des phénomènes de quench (transition à l'état non supraconducteur) des bobines, transitions qui peuvent se produire lors des expériences de

décharge. Néanmoins le quench de la bobine intérieure ne devrait pas avoir lieu car le courant traversant celle-ci est éloigné du courant critique. Le quench de la bobine extérieure est également peu probable puisque la surintensité dans cette bobine est faible et que le courant initial est très inférieur au courant critique.

V-1.2) Dimensionnement d'une alimentation spécifique

Afin d'éviter tous risques de surtension excessive au moment d'un éventuel quench, il a été décidé par les expérimentateurs de conserver en permanence une résistance de décharge de 1Ω aux bornes du solénoïde extérieur. Les déterminations précédentes doivent donc être reprises avec les valeurs des paramètres qui figurent sur le schéma de la figure 3. Cette fois l'alimentation est réglée en courant de manière à maintenir constant le courant dans le solénoïde extérieur au cours de la décharge du solénoïde intérieur (dans le cas du paragraphe 1 précédent, c'est le courant dans l'alimentation qui était supposé constant, le courant dans le solénoïde variait transitoirement de 0,6 A « seulement » en raison de la valeur de 500Ω de la résistance mise en parallèle)

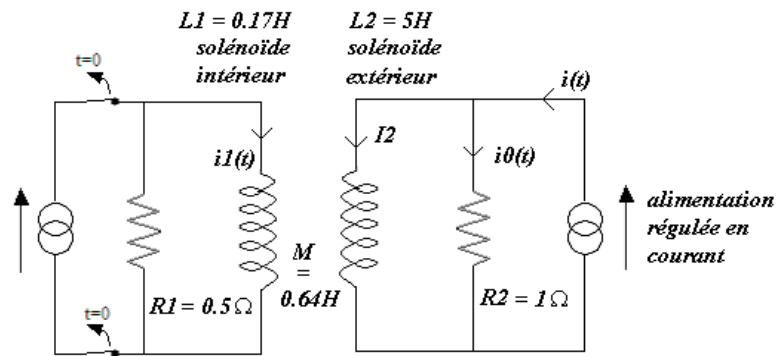


FIG. 3. Schéma du montage, indiquant le sens des courants

L'alimentation du solénoïde extérieur est réglée de sorte que le courant I_2 dans ce solénoïde soit toujours constant, égal à 240A. L'objectif est de calculer les différents courants $i_1(t)$, $i_0(t)$, $i(t)$ pendant la décharge du solénoïde intérieur. La décharge du solénoïde intérieur commence au temps $t=0$. On fera l'hypothèse supplémentaire que l'ouverture du circuit d'alimentation intérieur est instantanée, sans arc ni phénomène transitoire. Cette hypothèse, non physique dans l'absolu, ne peut que surestimer la valeur du courant que doit fournir l'alimentation extérieure, sous réserve qu'elle soit bien réglée. Les courants initiaux $i(t=0)$, $i_0(t=0)$, $i_1(t=0)$ et $I_2(t=0)$ sont respectivement égaux à 240A, 0A, 170A et 240A.

Les équations du système sont maintenant :

$$M \cdot \frac{di_1(t)}{dt} + L_2 \cdot \frac{dI_2(t)}{dt} + R_2 \cdot (I_2(t) - i(t)) = 0 \quad (V-6)$$

$$L1 \cdot \frac{di_1(t)}{dt} + M \cdot \frac{dI_2(t)}{dt} + R_1 \cdot i_1(t) = 0 \quad (V-7)$$

$$i(t) = i_0(t) + I_2(t) \quad (V-8)$$

elles se simplifient en :

$$M \cdot \frac{di_l(t)}{dt} - R_2 \cdot i_0(t) = 0 \quad (V-6')$$

$$L_l \cdot \frac{di_l(t)}{dt} + R_l \cdot i_l(t) = 0 \quad (V-7')$$

$$i(t) = i_0(t) + I_2 \quad (V-8')$$

L'équation (V-7') fournit le courant $i_l(t)$:

$$i_l(t) = I_{l0} \cdot \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \text{ avec } \tau = \frac{L_l}{R_l} \text{ et } I_{l0} = 170A \quad (V-9)$$

On injecte ce courant dans l'équation (V-6') pour obtenir $i_0(t)$:

$$i_0(t) = -I_{l0} \cdot \frac{M}{L_l} \cdot \frac{R_l}{R_2} \cdot \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \text{ avec } \tau = \frac{L_l}{R_l} \text{ et } I_{l0} = 170A \quad (V-10)$$

L'équation (V-8') permet d'obtenir le courant fourni par l'alimentation $i(t)$:

$$i(t) = I_2 - I_{l0} \cdot \frac{M}{L_l} \cdot \frac{R_l}{R_2} \cdot \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \text{ avec } \tau = \frac{L_l}{R_l}, I_{l0} = 170A \text{ et } I_2 = 240A \quad (V-11)$$

Avec les valeurs des paramètres fournies dans le schéma précédent (Fig. 3), on obtient la variation du courant $i(t)$ (Fig. 4).

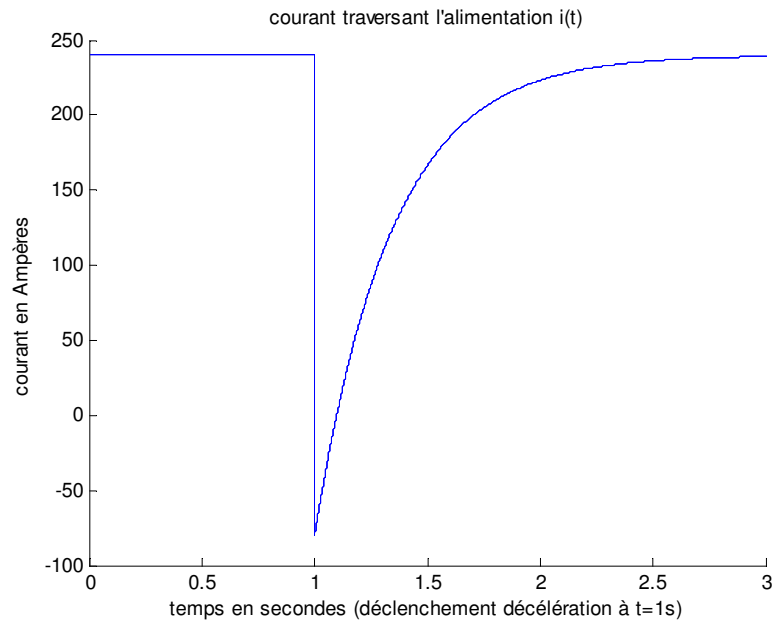


FIG. 4. Courant à fournir par l'alimentation du solénoïde extérieur

On constate que le courant change de signe au cours de son évolution, donc l'alimentation correspondante devra être réversible en courant. Si l'on souhaite éviter ce problème, il faut jouer sur les paramètres libres du montage, lesquels sont les deux résistances. Les valeurs d'inductances propres et mutuelle sont figées, les courants I_2 (compensation exacte $\rightarrow 0g$) et I_{I0} (surcompensation $\rightarrow -0,5g$) ne peuvent pas non plus être modifiés.

Si on souhaite que le courant ne change pas de sens, il faut que : $\frac{R_1}{R_2} < \frac{I_2}{I_{I0}} \cdot \frac{L_1}{M} = 0,375$.

On souhaite une décharge très rapide du solénoïde intérieur donc une constante de temps la plus petite possible, c'est-à-dire R_1 ayant la plus grande valeur réalisable, d'où R_2 la plus grande également. Si on souhaite pour des problèmes de surtension lors d'un quench limiter la valeur de la résistance R_2 à 1Ω (la surtension sera alors de $240 V$ pour le courant de $240 A$), il faut que R_1 soit de $0,375 \Omega$. Cette valeur de la résistance R_1 implique une constante de temps d'environ $450ms$ au lieu de $340ms$ avec la valeur de $0,5 \Omega$. Le temps de décharge à 99% passe de $5 \cdot 340ms = 1,7s$ à $5 \cdot 450ms = 2,25s$.

Dans la figure 5, on fixe le rapport des résistances $R_1/R_2 = 0,375$ et on fait varier R_1 . Les valeurs choisies pour R_1 sont $0,525 \Omega$ (noir) puis $0,5 \Omega$ (vert), $0,4 \Omega$ (jaune), $0,375 \Omega$ (bleu) et $0,3 \Omega$ (rouge). Pour éviter l'inversion du sens du courant, les valeurs correspondantes de R_2 sont respectivement de $1,4 \Omega$, $1,34 \Omega$, $1,07 \Omega$, 1Ω et $0,8 \Omega$. Les temps de décharge sont respectivement de $324 ms$, $340 ms$, $425 ms$, $454 ms$ et $567 ms$.

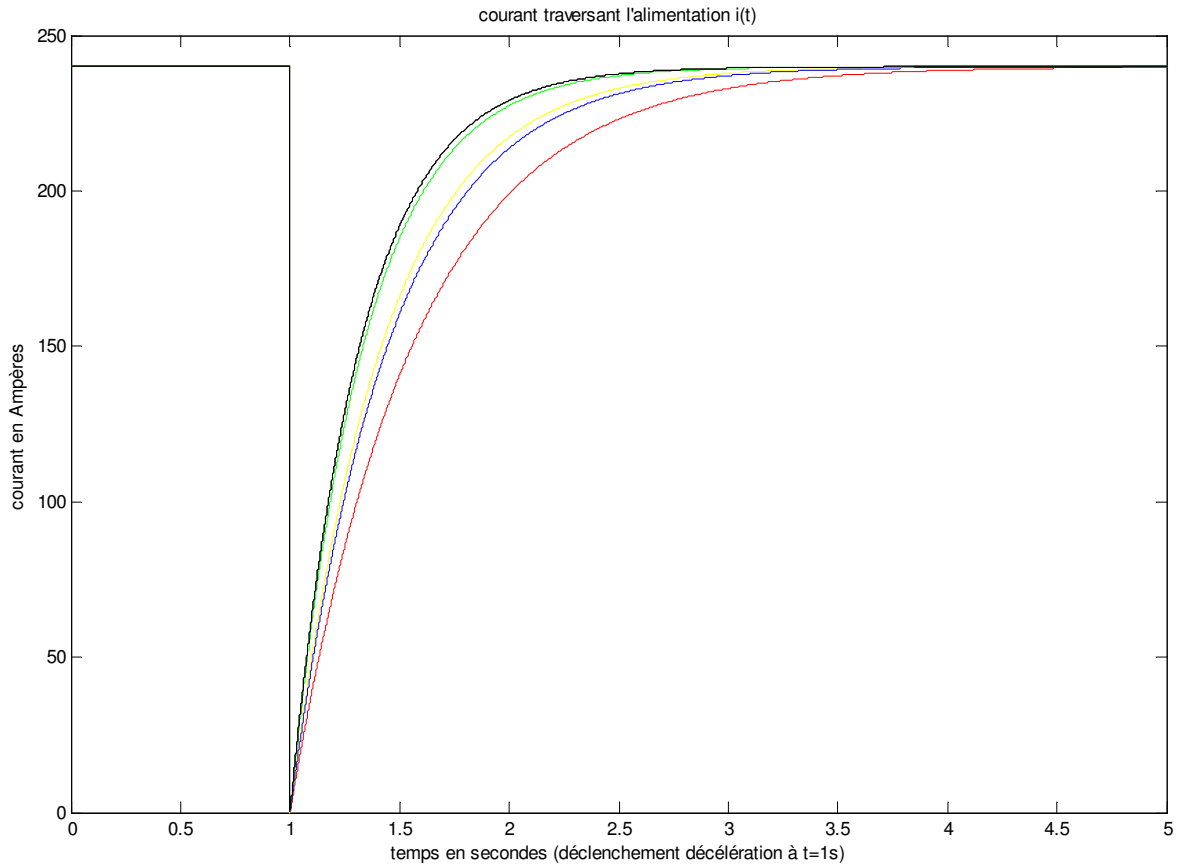


FIG. 5. Courant devant traverser l'alimentation selon les rapports de résistances.

Remarque : Nos travaux estimant les possibilités de telles expérimentations se sont limités au cas d'une alimentation avec un temps de réponse instantané et une régulation supposée parfaite. Un travail plus approfondi a été réalisé par Daniel Communal du SBT/INAC où celui-ci considère un temps de réponse de l'alimentation d'une vingtaine de millisecondes et une régulation à 30ms ou 60ms du courant dans l'alimentation afin que le courant dans la bobine externe soit respectivement stabilisé à 0,5% ou 1% près des 240A initialement souhaités [COM1].

V-1.3) Qualification de l'alimentation Bouhnik

Le CEA/SBT a passé commande d'une telle alimentation à la société Bouhnik. Le cahier des charges spécifie que la stabilité du courant dans la bobine extérieure de la station OLGA doit être inférieure à $\pm 5 \cdot 10^{-4}$, c'est-à-dire inférieure à $\pm 120\text{mA}$ pour 240A, lors d'un fonctionnement en continu. Lors de la décharge de la bobine intérieure de 170A à 0A, la variation de courant dans la bobine extérieure doit être inférieure à $5 \cdot 10^{-3}$, c'est-à-dire inférieure à 1,2A pour 240A.

Nous avons participé aux essais de qualification de l'alimentation lors de sa réception au SBT. Les essais ont été effectués au fonctionnement nominal correspondant à un courant de 240A dans la bobine extérieure (stabilisé par l'alimentation Bouhnik) et à une décharge de 170A à 0A du courant dans la bobine intérieure. Quatre grandeurs ont été relevées lors de ces manipulations afin de vérifier si l'alimentation répondait aux critères exigés (Fig. 6):

- Le courant dans la bobine extérieure : i_2 (en A)
- La tension aux bornes de l'alimentation Bouhnik : $-u_2$ (en V)
- Le courant débité par l'alimentation Bouhnik : i (en A)
- L'induction en un point de l'axe magnétique où celle-ci est maximale : B (en T)

La décharge commence à $t \approx 0,50\text{s}$ (Fig. 6), l'acquisition des données se fait sur une période de 5s. D'après les résultats théoriques précédents 99% de la décharge sont obtenus après 1,57s. Les tracés sont ainsi réalisés sur une période de 2s.

La stabilité en continu de l'alimentation est estimée en mesurant les variations du courant dans la bobine extérieure, $i_2(t)$, dans l'intervalle de temps précédent la décharge. Les valeurs oscillent entre 239,75A et 239,88A, d'où une stabilité de $\pm 2,7 \cdot 10^{-4}$. La stabilité en continu vérifie les spécifications désirées.

Lors de la décharge, le courant $i_2(t)$ atteint une valeur de 240,55A pour une valeur initiale de 239,80A, ainsi la variation est de l'ordre de $+3,1 \cdot 10^{-3}$. La stabilité en transitoire vérifie également les spécifications souhaitées. Le courant débité par l'alimentation Bouhnik, $i(t)$, passe en négatif et atteint -70,8A. Ce courant avoisine les -80A théoriques (Fig. 4) que devrait délivrer une alimentation parfaite avec un temps de réponse nul.

Pour évaluer le temps de transition de $12\text{T}^2/\text{m}$ ($= -0,5\text{g}$) à $8\text{T}^2/\text{m}$ ($= 0\text{g}$), la mesure de l'induction en un point de l'axe magnétique de OLGA a été effectuée. L'induction, $B(t)$, varie de 1,94T à 1,64T avec une constante de temps d'environ 370ms légèrement supérieure aux 340ms théoriques.

La tension aux bornes de l'alimentation Bouhnik, $-u_2(t)$, atteint -306V durant cet essai. Cette tension est l'inverse de celle aux bornes de la bobine. Cette tension est proche des -320V théoriques d'une alimentation parfaite avec un temps de réponse nul.

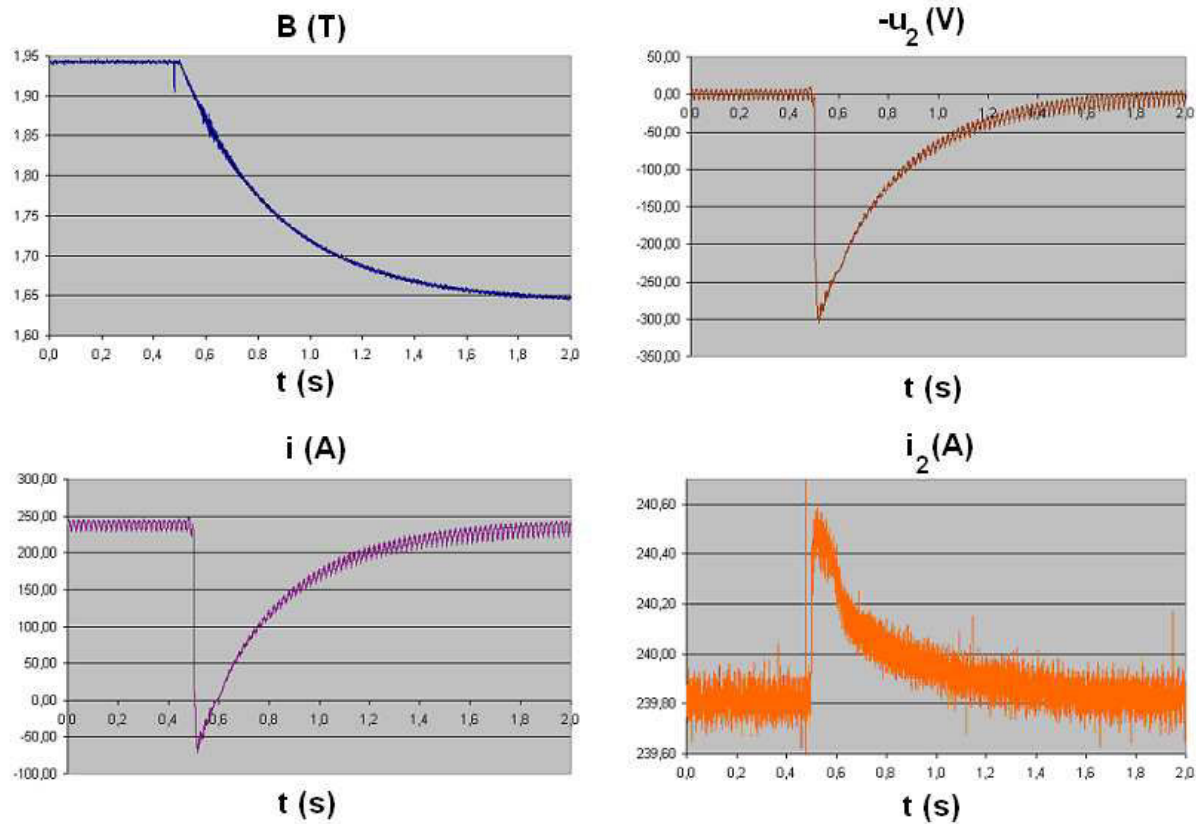


FIG. 6. Relevés des grandeurs durant la décharge

Remarque : Des problèmes a priori minimes sont encore à résoudre car l'alimentation ne fournit pas exactement sa valeur de consigne. Par exemple, pour une valeur de consigne de 240A l'alimentation fournit un courant de 239,80A alors qu'elle devrait fournir une valeur proche au dixième d'ampère près. La stabilité autour de cette valeur est bonne.

A la fin de ces essais l'alimentation a été qualifiée. La stabilité en continu de l'alimentation est effectivement inférieure à $5 \cdot 10^{-4}$ ($\pm 2,7 \cdot 10^{-4}$). La stabilité en transitoire est correcte car inférieure à $5 \cdot 10^{-3}$ ($3,1 \cdot 10^{-3}$). Ces essais permettent également de montrer que l'alimentation est capable de fournir un courant de 240A et une tension de -306V. La constante de temps de la décharge est de 370ms, elle est légèrement supérieure au cas théorique (340ms). Ainsi le temps de décharge à 95% (99%) est de 1,11s (1,74s), suffisamment court pour cadrer avec les spécifications imposées par le CNES.

V-1.4) Evolution de la gravité résiduelle

De la partie précédente, nous déduisons que le courant dans le solénoïde extérieur peut être considéré comme constant, et que le courant injecté dans le solénoïde intérieur peut être assimilé à une simple décroissance exponentielle :

$$i_l(t) = I_l \cdot \exp\left(-\frac{t}{\tau_l}\right) \text{ avec } \tau_l = \frac{L_l}{R_l} \quad (\text{V-12})$$

On peut donc maintenant évaluer la variation au cours du temps des paramètres qui définissent la compensation de gravité, c'est-à-dire les valeurs du vecteur $\mathbf{G}$ et du vecteur inhomogénéité $\mathbf{\varepsilon}$. Les dimensions du porte-échantillon sont celles fixées par la figure 7. Le porte-échantillon est positionné sur l'axe et sa hauteur est définie de manière à ce que $\mathbf{G}$ soit maximum au centre de la cellule et dirigé vers le haut (l'oxygène liquide LO_2 est un paramagnétique). Dans cette géométrie axisymétrique, le vecteur inhomogénéité possède une composante longitudinale, notée ε_z , et une composante radiale, notée ε_r . Au moyen d'un logiciel d'éléments finis, on peut déterminer, à tout instant de la décharge, la valeur de l'accélération résultante et ainsi l'homogénéité de la compensation magnétique dans la cellule contenant l'oxygène liquide.

Pour respecter précisément la variation d'accélération entre -0,5g et 0g ($G_l = 8,16 \text{ T}^2/\text{m}$ à 90K pour l'oxygène), avec le logiciel d'éléments finis utilisé on trouve qu'il faut un courant $I_2 = 237 \text{ A}$ dans le solénoïde extérieur et un courant initial $I_{l0} = 181 \text{ A}$ dans le bobinage intérieur permettant la variation d'accélération par sa décharge.

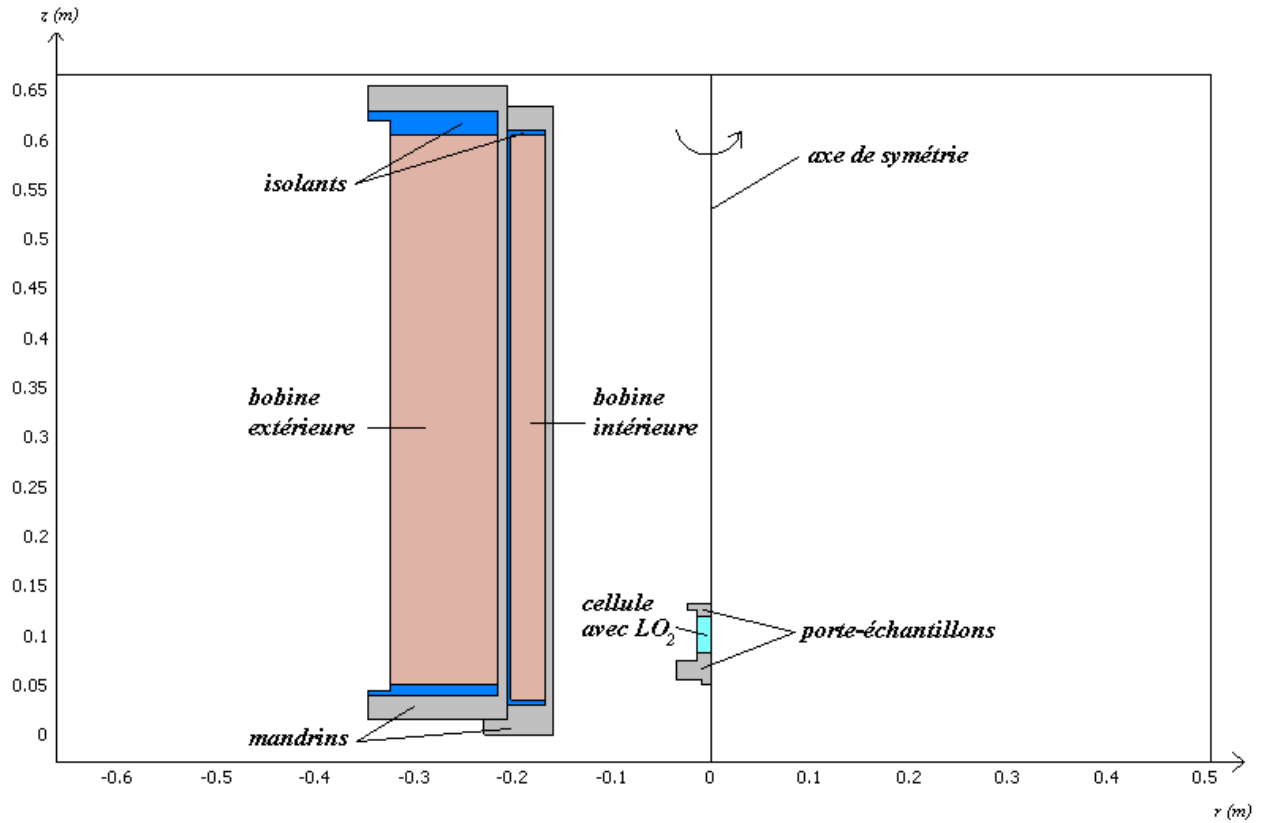


FIG. 7. Géométrie de la station OLGA d'un point de vue magnétique

Le tableau suivant montre l'évolution des inhomogénéités au sein de la cellule lors de la décharge du solénoïde intérieur. La valeur notée G_l est prise au centre de la cellule et on associe la valeur de l'accélération équivalente g^* . Le temps $t=0$ correspond au début de la décharge :

G_I (T ² /m)	g^*	Temps	Valeurs extrêmes de ε_z (%)	Valeurs extrêmes de ε_r (%)
12,137	-0,490g	10 ms	[0,3 ; -2,8]	[0 ; -5,0]
11,400	-0,400g	82 ms	[0,3 ; -2,0]	[0 ; -4,1]
10,580	-0,300g	175 ms	[0,3 ; -1,8]	[0 ; -4,0]
9,742	-0,200g	310 ms	[0,3 ; -1,6]	[0 ; -4,0]
8,930	-0,100g	545 ms	[0,2 ; -1,5]	[0 ; -4,0]
8,175	-0,002g	2000 ms	[0,3 ; -1,3]	[0 ; -3,9]

Tableau I : Décroissance de l'accélération apparente et inhomogénéité de celle-ci

L'inhomogénéité longitudinale passe de 3,1% à 1,6% durant la décharge ; quant à l'inhomogénéité radiale, elle reste d'environ 4%. On peut donc considérer les inhomogénéités comme pratiquement constantes au cours de la décharge.

La figure 8 représente, à différents instants de la décharge, les équipotentielles à l'intérieur de la cellule destinée à contenir le fluide étudié. Ces tracés d'équipotentielles, $\text{équi}\Sigma_L$, donnent des renseignements précis sur la répartition des forces résiduaire. Les résultats montrent clairement que des perturbations quant aux mouvements du liquide sont à attendre de l'évolution des équipotentielles magnéto-gravitationnelles au cours de la décharge.

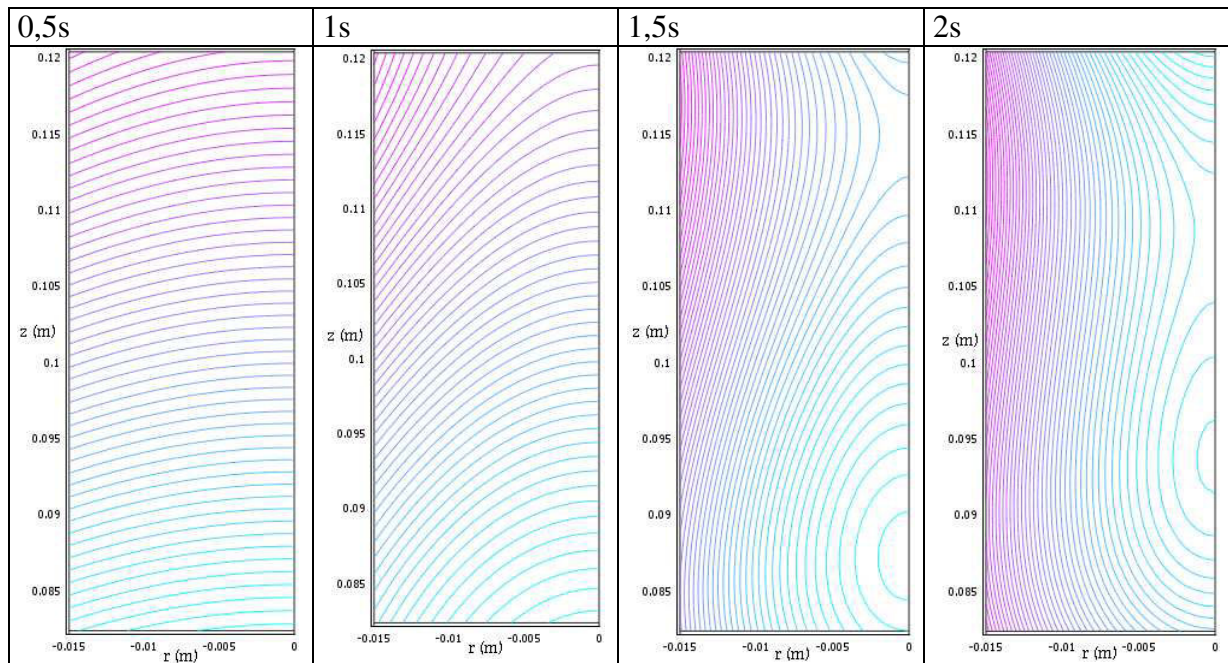


FIG. 8. Equipotentielles magnéto-gravitationnelles durant la décharge au sein de la cellule de LO₂

V-1.5) Impact des mandrins et de la cellule

Avant de réaliser ces simulations quelques vérifications s'imposaient. Effectivement, un problème vient s'ajouter lorsque l'on effectue des expériences comme celle-ci de compensation magnétique variable dans le temps. La variation de flux au sein de la bobine extérieure crée une surtension à ces bornes, ce problème a été traité précédemment. Mais toute partie conductrice, même passive tel qu'un simple morceau de métal, sujette à cette variation de flux va être parcourue par des courants créant un champ magnétique s'opposant à la variation de flux. Nous allons ainsi dans cette partie évaluer l'effet des deux principales parties conductrices au voisinage de l'expérience que sont les mandrins, aidant au maintien

mécanique du dispositif, et bien évidemment la cellule d'oxygène constituée schématiquement et initialement de deux disques métalliques de cuivre et d'un cylindre de saphir (Fig. 9)[PIC1].

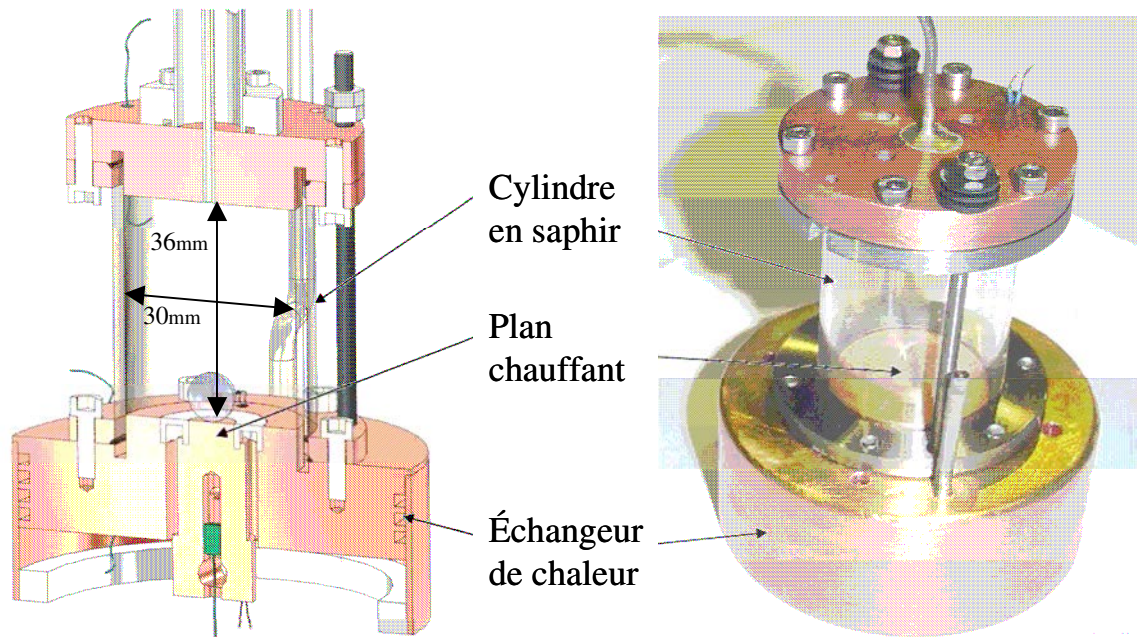


FIG. 9. Cellule d'oxygène initialement conçue d'un volume de 25cm^3

Les mandrins des bobines OLGA sont en inox dont la résistivité est de $50 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$ (4,2K), les deux parties principales du porte échantillon devaient être réalisées, quant à elle, en cuivre avec une résistivité de $6 \cdot 10^{-9} \Omega \cdot \text{m}$ (90K).

V-1.5.1) Mandrins

Du fait de leur résistivité élevée et de leur éloignement les mandrins semblent n'avoir quasiment aucun impact sur la variation temporelle de G sur l'axe (Fig. 10). On constate un léger décalage dans les premiers instants, avant la demi-seconde, puis une superposition parfaite durant la suite de la décharge. On peut considérer que les perturbations seront négligeables lors des expériences.

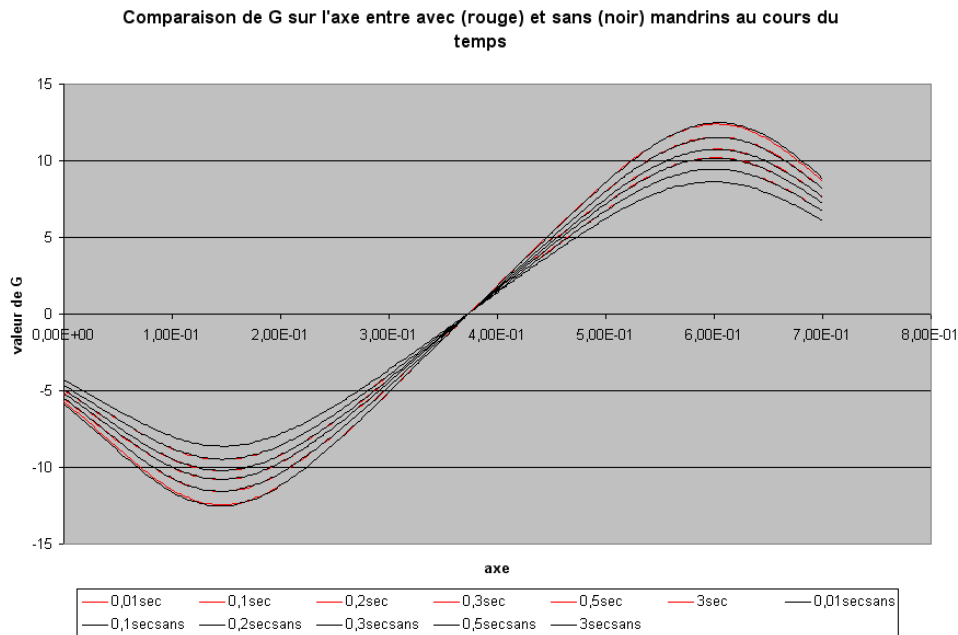


FIG. 10. G sur l'axe au cours du temps avec (rouge) et sans (noir) mandrins (Comsol Multiphysics®).

Remarque : les simulations numériques, pour observer l'effet des mandrins, sont évidemment réalisées sans le porte-échantillon.

V-1.5.2) Cellule

La cellule ou porte-échantillon devait être initialement conçu en cuivre. Or des courants de Foucault, dus à la variation rapide de l'induction au sein du cuivre, induisent des perturbations sur G lesquelles pourraient fausser le comportement de LO_2 dans la cellule lors des manipulations. Nous allons comparer au cours du temps, précisément lors de la décharge du solénoïde extérieur, les valeurs de G sur l'axe au sein de la cellule pour trois matériaux avec des résistivités différentes :

- Cuivre $6.10^{-9} \Omega.m$ (90K)
- Saphir $>10^{13} \Omega.m$ (<770K)
- Inox $50.10^{-8} \Omega.m$ (4,2K)

Le saphir a été choisi parce que les courants de Foucault sont inexistantes, du fait de sa faible conductivité, de plus le pourtour de la cellule est en saphir (Fig. 9), la dilatation différentielle serait plus faible. Les mandrins en inox ne perturbant quasiment pas le gradient sur l'axe, un essai a été réalisé avec ce matériau, les résultats sont d'ailleurs assez concluants (Fig. 14).

Remarque : Pour les temps inférieurs au millième de seconde l'impact n'est pas négligeable pour l'inox contrairement au saphir. Mais les constantes de temps mécaniques devraient être supérieures au millième de seconde...

La simulation est réalisée en déchargeant le courant selon l'équation (V-9), donc avec une constante de temps d'environ 340ms, on représente sur le tracé 3D environ 87% de la décharge c'est à dire une durée de 700ms (Fig. 12a, 13a et 14a). Quant aux tracés 2D, ils sont effectués à différents instants de la décharge, 0,01s (bleu foncé), 0,02s (vert), 0,03s (rouge), 0,1s (bleu turquoise), 0,5s (violet), 3s (jaune) (Fig. 12b, 13b et 14b). Une figure explicative permet de mieux appréhender les graphiques 3D :

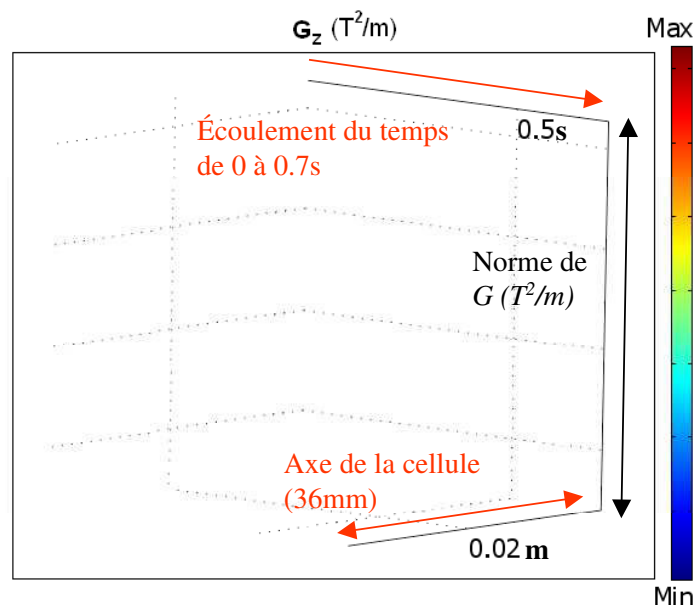


FIG.11. Explication des axes des graphiques 3D des figures 12a, 13a et 14a.

V-1.5.2.1) En cuivre

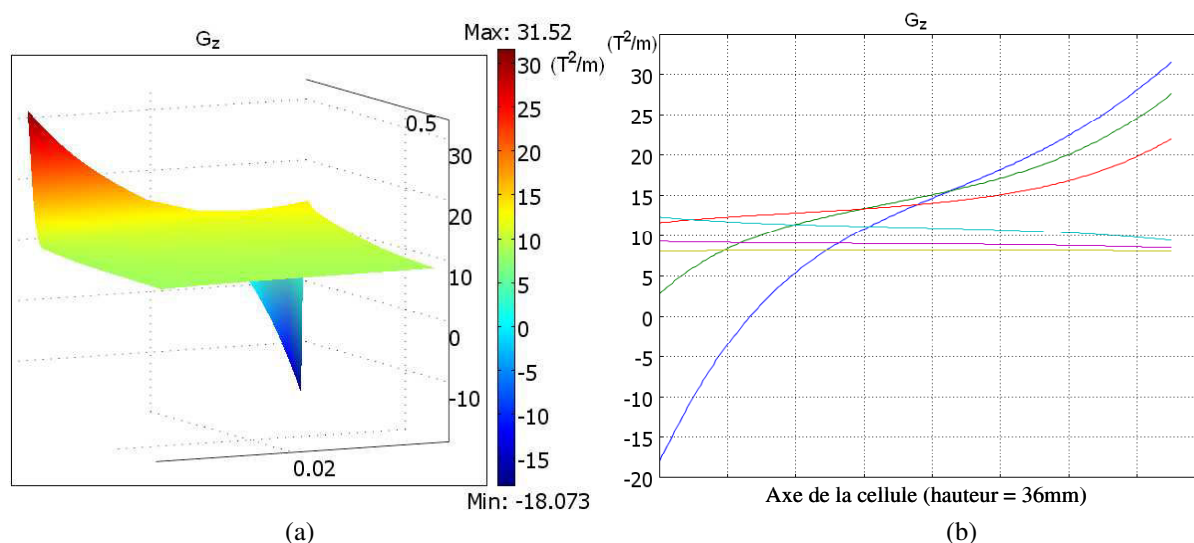


FIG. 12. Evolution du gradient au cours du temps sur l'axe de la cellule en continu (a) et à différents instants (b) (0,01s (bleu foncé), 0,02s (vert), 0,03s (rouge), 0,1s (bleu turquoise), 0,5s (violet), 3s (jaune)), pour un porte-échantillon en cuivre

L'objectif de ces manipulations est de passer d'une valeur de gradient de $12T^2/m$ ($\approx -0,5g$) à $8T^2/m$ ($\approx 0g$), il apparaît nettement que les courants induits dans les parties en cuivre de la cellule vont perturber de manière significative l'évolution du gradient. L'augmentation du gradient jusqu'à presque $32T^2/m$ ($\approx 3g$) dans la partie inférieure de la cellule alors que le gradient dans la partie supérieure de la cellule sera de $-18T^2/m$ ($\approx 3g$) risque d'engendrer un éclaboussement au sein de cette dernière. De plus la résistivité du cuivre choisie est celle connue à 90K, or elle est bien plus faible à 4,2K, ce qui générerait des courants encore plus conséquents, d'où des perturbations plus importantes ! Les expérimentateurs ont donc décidé de construire une cellule dans un autre matériau.

V-1.5.2.2) En saphir

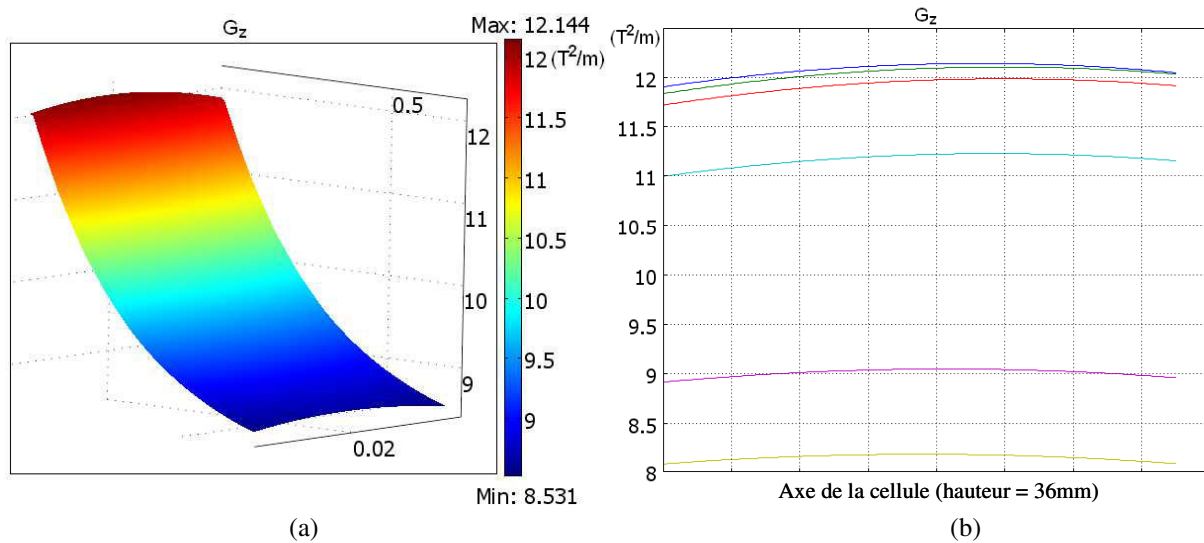


FIG. 13. Evolution du gradient au cours du temps sur l'axe de la cellule en continu (a) et à différents instants (b) (0,01s (bleu foncé), 0,02s (vert), 0,03s (rouge), 0,1s (bleu turquoise), 0,5s (violet), 3s (jaune)), pour un porte-échantillon en saphir

L'évolution du gradient semble idéale dans la cellule. Mais le coût prohibitif du saphir rend impossible la construction d'une cellule réalisée entièrement dans ce matériau. Nous nous sommes donc reportés sur un matériau moins coûteux et ayant une résistivité, semble-t-il, aux vues des essais sur les mandrins, suffisamment forte pour éviter ces perturbations : l'inox.

V-1.5.2.3) En inox

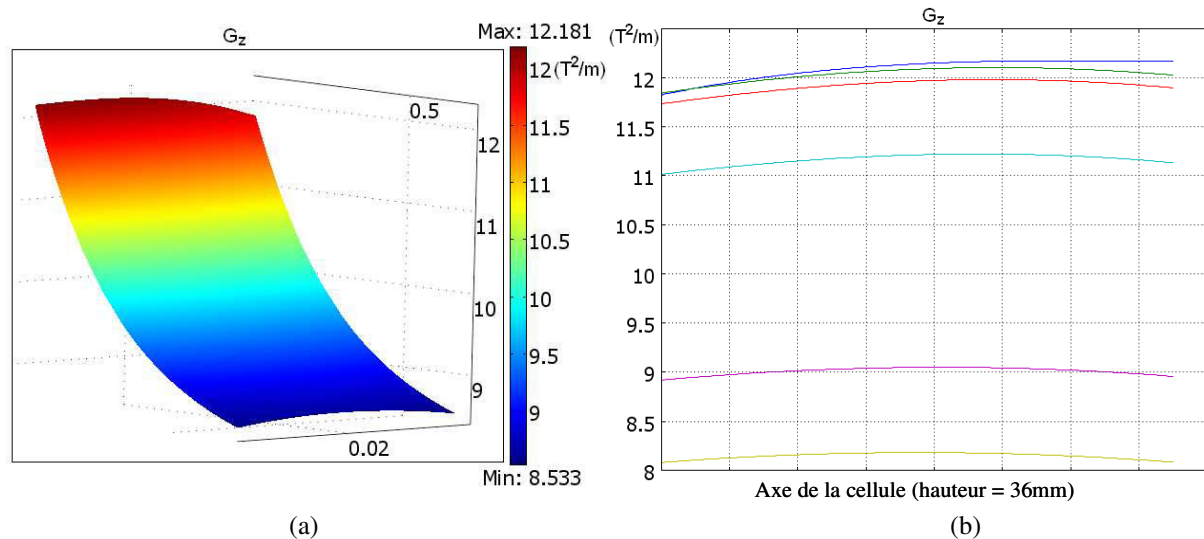


FIG. 14. Evolution du gradient au cours du temps sur l'axe de la cellule en continu (a) et à différents instants (b) (0,01s (bleu foncé), 0,02s (vert), 0,03s (rouge), 0,1s (bleu turquoise), 0,5s (violet), 3s (jaune)), pour un porte-échantillon en inox

L'évolution du gradient dans la cellule semble très correcte avec une cellule faite dans cet inox. Il a donc été décidé par les expérimentateurs que la nouvelle cellule serait réalisée avec ce matériau.

V-1.6) Conclusion de la section V-1

Cette partie permet de mettre en avant les points délicats de ce type d'expérience, où l'on souhaite faire des compensations magnétiques partielles et dynamiques de la pesanteur. Les problèmes de mutuelle inductance entre bobines n'ayant pas d'importance en statique posent beaucoup de problèmes en régime variable. On s'aperçoit que toute l'électrotechnique entourant les bobines OLGA joue un rôle considérable. Il faut de toute évidence posséder une alimentation régulée en courant pour atteindre l'objectif fixé, qui est de passer de 0,5g à 0g en un temps de l'ordre de quelques dixièmes de seconde. Soit une régulation sur une valeur fixe, comme présentée dans ce rapport, soit une régulation sur le courant du solénoïde extérieur. Les régulations doivent pouvoir annihiler au cours de la décharge la surintensité produite dans le solénoïde extérieur par la mutuelle inductance avec une variation maximale de quelques dixièmes d'Ampères.

Au moyen d'un tel système, qui pourra être utilisé également si l'on souhaite simuler des cycles composés de variations d'accélération, les campagnes d'expérimentation prévues au CEA/SBT devraient permettre d'observer et de comprendre par des essais réalisés au sol les comportements dynamiques et thermiques des fluides lors des phases de gravité variable rencontrées dans les lanceurs spatiaux.

Les problèmes occasionnés par les courants variables ne s'arrêtent pas à l'alimentation, ils portent également sur tous les courants de Foucault que les champs variables vont induire dans les parties métalliques de maintien mécanique, mandrins pour les bobines et porte échantillons pour la cellule de LO₂. Il apparaît que les mandrins des bobines OLGA n'influent pas de manière significative sur la variation temporelle de **G** sur l'axe.

Rajoutons pour terminer que les résultats théoriques obtenus en utilisant des matériaux comme l'acier inoxydable supposent que celui-ci soit parfaitement amagnétique. La sensibilité du vecteur **G** aux champs magnétiques parasites conduit à s'interroger sur les propriétés effectives des matériaux employés.

V-2) Transitoire avec décomposition harmonique

Dans cette partie nous allons étudier le transitoire à l'aide des harmoniques du champ magnétique. Les résultats, dans le cas axisymétrique, peuvent être directement transposés à la station de lévitation dimensionnée dans le chapitre précédent puisque cette dernière est conçue de sorte que chacun des harmoniques est créé par un bobinage dédié. Ainsi faire varier la valeur d'un harmonique revient à modifier la valeur du courant dans le bobinage en question.

Dans une première partie nous étudions les variations lorsque seuls les deux premiers harmoniques sont utilisés. Nous effectuons ceci pour les deux types de géométrie, cylindrique et axisymétrique. L'objectif est d'observer l'évolution d'une zone d'homogénéité déterminée pendant la variation d'un des deux harmoniques.

V-2.1) Deux harmoniques : géométrie cylindrique

Nous allons commencer, pour reprendre le plan général de la thèse, par la géométrie cylindrique. La géométrie considérée est la même que celle du chapitre III, et l'expression du gradient (III-111) peut être exprimée sous la forme équivalente :

$$\vec{G} = 8\mu o^2 \Lambda_2^2 \cdot (x \cdot \vec{e}_x + y \cdot \vec{e}_y) + 4\mu o^2 \Lambda_1 \Lambda_2 \cdot \vec{e}_x \quad (V-13)$$

La valeur du gradient pour le point de compensation exacte vaut :

$$\vec{G}_I = 4 \cdot \mu o^2 \cdot \Lambda_1 \cdot \Lambda_2 \cdot \vec{e}_x \quad (V-14)$$

Nous allons dans un premier temps observer l'évolution de la zone de compensation « exacte » au cours de la variation de l'un ou l'autre des deux harmoniques.

V-2.1.1) Variation de Λ_1 ou Λ_2 et évolution de la zone de compensation exacte

Le but est de connaître la forme de la zone de lévitation dont l'inhomogénéité est fixée par la norme du vecteur $\vec{\epsilon}$.

Ce vecteur inhomogénéité peut être exprimé sous la forme :

$$\vec{\epsilon} = \frac{\vec{G}}{4\mu o^2 \cdot \Lambda_1 \Lambda_2} - \vec{e}_x \quad (V-15)$$

en rappelant que le vecteur $\vec{e}_x$ correspond au vecteur unitaire définissant la verticale ascendante.

V-2.1.1.1) Modification de l'harmonique Λ_1

Nous allons modifier la valeur de l'harmonique Λ_1 en la multipliant par un coefficient k , représentant, en quelque sorte, la variation du courant dans un éventuel bobinage générant l'harmonique 1.

Le gradient $\mathbf{G}$ prend alors la forme suivante :

$$\vec{G} = 8\mu\omega^2 \Lambda_2^2 \cdot (x \cdot \vec{e}_x + y \cdot \vec{e}_y) + 4\mu\omega^2 k \cdot \Lambda_1 \Lambda_2 \cdot \vec{e}_x \quad (\text{V-16})$$

et d'après (V-15) le vecteur inhomogénéité ε celle-ci :

$$\vec{\varepsilon} = \left[(k-1) + \frac{2\Lambda_2}{\Lambda_1} \cdot x \right] \cdot \vec{e}_x + \frac{2\Lambda_2}{\Lambda_1} \cdot y \cdot \vec{e}_y \quad (\text{V-17})$$

Il suffit ensuite de prendre la norme du vecteur inhomogénéité, notée ε , de l'élever au carré et de mettre l'équation sous forme réduite :

$$[x-x_c]^2 + y^2 = R^2 \quad \text{avec} \quad x_c = -\frac{(1-k) \cdot \Lambda_1}{2\Lambda_2} \quad \text{et} \quad R = \frac{\varepsilon \cdot \Lambda_1}{2 \cdot \Lambda_2} \quad (\text{V-18})$$

On déduit de cette équation que le centre de compensation exacte lorsque le coefficient $k=1$ (aucune variation de l'harmonique Λ_1) est le centre du repère (0,0) et que la zone de compensation avec une inhomogénéité inférieure à ε décrit un disque de rayon $R = \frac{\varepsilon \cdot \Lambda_1}{2 \cdot \Lambda_2}$.

Lorsque l'on modifie la valeur du premier harmonique par un coefficient k , le point de compensation exacte se décale linéairement selon la verticale et prend pour coordonnées $(x_c, 0)$. Nonobstant la zone de compensation reste circulaire et conserve ses dimensions.

V-2.1.1.2) Modification de l'harmonique Λ_2

Nous allons modifier la valeur de l'harmonique Λ_2 en la multipliant par un coefficient k , représentant, en quelque sorte, la variation du courant dans un éventuel bobinage générant l'harmonique 2.

Le gradient $\mathbf{G}$ prend alors la forme suivante :

$$\vec{G} = 8\mu\omega^2 \cdot k^2 \Lambda_2^2 \cdot (x \cdot \vec{e}_x + y \cdot \vec{e}_y) + 4\mu\omega^2 k \cdot \Lambda_1 \Lambda_2 \cdot \vec{e}_x \quad (\text{V-19})$$

et d'après (V-15) le vecteur inhomogénéité ε celle-ci :

$$\vec{\varepsilon} = \left[(k-1) + \frac{2k^2 \Lambda_2}{\Lambda_1} \cdot x \right] \cdot \vec{e}_x + \frac{2k^2 \Lambda_2}{\Lambda_1} \cdot y \cdot \vec{e}_y \quad (\text{V-20})$$

Il suffit ensuite de prendre la norme du vecteur inhomogénéité, notée ε , de l'élever au carré et de mettre l'équation sous forme réduite :

$$[x-x_c]^2+y^2=R^2 \text{ avec } x_c=\frac{(1-k).A_1}{2k^2.A_2} \text{ et } R=\frac{\varepsilon.A_1}{2k^2.A_2} \quad (V-21)$$

Lorsque l'on modifie la valeur du second harmonique par un coefficient k , le point de compensation exacte se décale selon la verticale et prend pour coordonnées $(x_c,0)$. La forme de la zone de compensation conserve sa forme circulaire par contre, cette fois-ci, la surface du disque de compensation à $\varepsilon\%$ est divisée par un facteur k^4 . Cette remarque est très importante, non pas directement pour le transitoire, mais dans le cas d'un dimensionnement de dispositif de lévitation magnétique. En effet, diminuer la valeur du gradient, même si cela décale le point de compensation exacte, permet d'augmenter les dimensions de la zone utile de lévitation !

V-2.1.2) Variation de A_1 ou A_2 et évolution de la zone de compensation variable

L'approche est différente de la précédente. Puisque nous faisons du transitoire, l'objectif est de faire varier la valeur du gradient au centre du dispositif au point $(0,0)$, point de compensation exact initial. Nous regardons donc l'évolution de la zone de compensation réduite centrée sur $(0,0)$ et dont l'inhomogénéité est donnée par la norme du vecteur ε . Il faut tout d'abord reprendre l'expression du gradient $\vec{G}$ au centre du dispositif (V-14) et voir son évolution lorsque l'un des deux harmoniques varie. Ceci est trivial, le gradient varie linéairement avec le coefficient k :

$$\vec{G}_I = 4.\mu_0^2 .k.A_1.A_2.\vec{e}_x \quad (V-22)$$

on va alors entreprendre la même démarche que précédemment mais en conservant cette valeur de gradient comme référence. Valeur de gradient représentant la compensation réduite. D'ailleurs cette compensation réduite est directement proportionnelle au coefficient k . Aussi si le coefficient k prend pour valeur 0,83 ou 0,62, on obtient au centre une gravité apparentée respectivement à celle de la Lune ou de Mars.

L'expression du vecteur inhomogénéité, qui ne décrit plus la même chose que précédemment, est donc modifiée selon le gradient de référence choisi :

$$\vec{\varepsilon} = \frac{\vec{G}}{4\mu_0^2 .k.A_1.A_2} - \vec{e}_x \quad (V-23)$$

V-2.1.2.1) Modification de l'harmonique A_1

Nous allons donc modifier la valeur du premier harmonique seul en la multipliant par un coefficient k représentant la variation du courant dans un éventuel bobinage spécifique à la production de cet harmonique.

Le gradient $\vec{G}$ prend alors la forme suivante :

$$\vec{G} = 8\mu_0^2 A_2^2 .(x.\vec{e}_x + y.\vec{e}_y) + 4\mu_0^2 k.A_1.A_2.\vec{e}_x \quad (V-24)$$

et d'après (V-23) le vecteur inhomogénéité ε celle-ci :

$$\vec{\varepsilon} = \frac{2A_2}{k.A_1} . x . \vec{e}_x + \frac{2A_2}{k.A_1} . y . \vec{e}_y \quad (V-25)$$

Il suffit ensuite de prendre la norme du vecteur inhomogénéité, notée ε , de l'élever au carré et de mettre l'équation sous forme réduite :

$$x^2 + y^2 = R^2 \quad \text{avec} \quad R = \frac{\varepsilon k.A_1}{2.A_2} \quad (V-26)$$

Nous sommes donc bien situé au centre, chose rassurante, puisque c'est le but de cette partie. La surface du disque où la compensation réduite est inhomogène à $\varepsilon\%$ près est multipliée par le coefficient k^2 . Ceci signifie que lorsque l'on souhaite augmenter la force de compensation magnétique il vaut mieux le faire en augmentant l'harmonique 1.

V-2.1.2.2) Modification de l'harmonique A_2

Nous allons donc modifier la valeur du deuxième harmonique seul en la multipliant par un coefficient k représentant la variation du courant dans un éventuel bobinage spécifique à la production de cet harmonique.

Le gradient $\vec{G}$ prend alors la forme suivante :

$$\vec{G} = 8\mu\omega^2 k^2 A_2^2 . (x . \vec{e}_x + y . \vec{e}_y) + 4\mu\omega^2 k . A_1 A_2 . \vec{e}_x \quad (V-27)$$

et d'après (V-23) le vecteur inhomogénéité ε celle-ci :

$$\vec{\varepsilon} = \frac{2.k.A_2}{A_1} . x . \vec{e}_x + \frac{2.k.A_2}{A_1} . y . \vec{e}_y \quad (V-28)$$

Il suffit ensuite de prendre la norme du vecteur inhomogénéité, notée ε , de l'élever au carré et de mettre l'équation sous forme réduite :

$$x^2 + y^2 = R^2 \quad \text{avec} \quad R = \frac{\varepsilon.A_1}{2.k.A_2} \quad (V-29)$$

Nous sommes également situé au centre. La surface du disque où la compensation réduite est inhomogène à $\varepsilon\%$ près est divisée par le coefficient k^2 . Ceci signifie que lorsque l'on souhaite diminuer la force de compensation magnétique il vaut mieux le faire en diminuant l'harmonique 2.

V-2.2) Deux harmoniques : géométrie axisymétrique

Nous allons maintenant étudier la géométrie axisymétrique. Cette dernière a déjà été définie dans la partie 1.1) du chapitre IV. Le champ magnétique (IV-3) est constitué uniquement des deux premiers harmoniques, et s'exprime en fonction des vecteurs unitaires $\mathbf{e}_r$ et $\mathbf{e}_\theta$:

$$\vec{H}(r, \theta) = \begin{bmatrix} -C_1 P_1(\cos \theta) - 2 C_2 r P_2(\cos \theta) \\ -C_1 P_1'(\cos \theta) - C_2 r P_2'(\cos \theta) \end{bmatrix} \quad (\text{V-30})$$

avec $P_1(\cos \theta) = \cos \theta$, $P_2(\cos \theta) = \frac{1}{2}(3\cos^2 \theta - 1)$, $P_1'(\cos \theta) = -\sin \theta$ et $P_2'(\cos \theta) = -3\sin \theta \cos \theta$.

On obtient ainsi facilement le carré de l'induction magnétique et son gradient $\vec{G}$ que l'on peut exprimer dans en fonction des coordonnées cartésiennes :

$$\vec{G} = 4\mu_0^2 C_1 C_2 \cdot \vec{e}_x + 8\mu_0^2 C_2^2 \cdot x \cdot \vec{e}_x + 2\mu_0^2 C_2^2 \cdot y \cdot \vec{e}_y \quad (\text{V-31})$$

La valeur du gradient pour le point de compensation exacte (IV-8) vaut :

$$\vec{G}_I = 4\mu_0^2 C_1 C_2 \cdot \vec{e}_x \quad (\text{V-32})$$

Nous allons dans un premier temps observer l'évolution de la zone de compensation « exacte » au cours de la variation d'un des deux harmoniques.

V-2.2.1) Variation de C_1 ou C_2 et évolution de la zone de compensation exacte

Le but est de décrire la forme et la position de la zone de lévitation dont l'inhomogénéité est fixée par la norme du vecteur $\vec{\epsilon}$. L'inhomogénéité s'exprime selon l'équation (V-15) en remplaçant respectivement A_1 (A_2) par C_1 (C_2).

V-2.2.1.1) Modification de l'harmonique C_1

Nous allons modifier la valeur de l'harmonique C_1 en la multipliant par un coefficient k , représentant, en quelque sorte, la variation du courant dans le bobinage générant l'harmonique 1 de la station LOLA par exemple.

Le gradient $\vec{G}$ prend alors la forme suivante :

$$\vec{G} = 4\mu_0^2 \cdot k \cdot C_1 C_2 \cdot \vec{e}_x + 8\mu_0^2 C_2^2 \cdot x \cdot \vec{e}_x + 2\mu_0^2 C_2^2 \cdot y \cdot \vec{e}_y \quad (\text{V-33})$$

et d'après (V-15) le vecteur inhomogénéité $\vec{\epsilon}$ celle-ci :

$$\vec{\epsilon} = \left[(k-1) + \frac{2C_2}{C_1} \cdot x \right] \cdot \vec{e}_x + \frac{C_2}{2C_1} \cdot y \cdot \vec{e}_y \quad (\text{V-34})$$

Il suffit ensuite de prendre la norme du vecteur inhomogénéité, notée ε , de l'élevé au carré et de mettre l'équation sous forme réduite :

$$\left[\frac{x-x_c}{b} \right]^2 + \left[\frac{y}{a} \right]^2 = 1 \text{ avec } a = \frac{2.\varepsilon.C_1}{C_2}, b = \frac{\varepsilon.C_1}{2.C_2} \text{ et } x_c = \frac{(1-k).C_1}{2C_2} \quad (\text{V-35})$$

On déduit de cette équation que le centre de compensation exacte lorsque le coefficient $k=1$ (aucune variation de l'harmonique Λ_1) est le centre du repère (0,0) et que la zone de compensation avec une inhomogénéité inférieure à ε décrit une ellipse (ellipsoïde en 3D) de demi-petit axe b et de demi-grand axe $a=4b$, d'où une excentricité valant $\frac{\sqrt{15}}{4}$.

En 3D, l'axe de symétrie étant porté par l'axe x , le troisième demi-axe est équivalent au demi-grand axe a . Ainsi, le volume de l'ellipsoïde vaut $V = \frac{4}{3}\pi a^2 b$

Lorsque l'on modifie la valeur du premier harmonique par un coefficient k , le point de compensation exacte se décale linéairement selon la verticale et prend pour coordonnées $(x_c, 0)$. Cependant la forme de la zone de compensation conserve son aspect ellipsoïdal et ses dimensions.

V-2.2.1.2) Modification de l'harmonique C_2

Nous allons modifier la valeur de l'harmonique C_2 en la multipliant par un coefficient k , représentant, en quelque sorte, la variation du courant dans le bobinage générant l'harmonique 2 de la station LOLA par exemple.

Le gradient $\vec{G}$ prend alors la forme suivante :

$$\vec{G} = 4\mu\omega^2.k.C_1.C_2.\vec{e}_x + 8\mu\omega^2.k^2.C_2^2.x.\vec{e}_x + 2\mu\omega^2.k^2.C_2^2.y.\vec{e}_y \quad (\text{V-36})$$

et d'après (V-15) le vecteur inhomogénéité $\vec{\varepsilon}$ celle-ci :

$$\vec{\varepsilon} = \left[(k-1) + \frac{2.k^2.C_2}{C_1}.x \right] \vec{e}_x + \frac{k^2.C_2}{2.C_1}.y.\vec{e}_y \quad (\text{V-37})$$

Il suffit ensuite de prendre la norme du vecteur inhomogénéité, notée ε , de l'élevé au carré et de mettre l'équation sous forme réduite :

$$\left[\frac{x-x_c}{b} \right]^2 + \left[\frac{y}{a} \right]^2 = 1 \text{ avec } a = \frac{2.\varepsilon.C_1}{k^2.C_2}, b = \frac{\varepsilon.C_1}{2.k^2.C_2} \text{ et } x_c = \frac{(1-k).C_1}{2.k^2.C_2} \quad (\text{V-38})$$

Lorsque l'on modifie la valeur du second harmonique par un coefficient k , le point de compensation exacte se décale linéairement selon la verticale et prend pour coordonnées $(x_c, 0)$. La forme de la zone de compensation conserve son aspect ellipsoïdal, mais ses dimensions changent son volume est divisé par le coefficient k^6 . Ainsi, si on diminue le courant dans le bobinage créant l'harmonique 2, la zone se décale effectivement mais son volume croît...ceci n'a pas été mis à profit dans le dimensionnement de la station LOLA.

Mais cette remarque, importante, peut être utile en vue du dimensionnement d'un lévitateur magnétique dédié à l'hydrogène liquide !

V-2.2.2) Variation de C_1 ou C_2 et évolution de la zone de compensation variable

Cette partie est utile pour comprendre l'évolution de la zone de gravité réduite au sein de la station LOLA au cours de la décharge, par exemple, des bobinages créant l'harmonique 2. Nous étudions les deux cas (variation de C_1 ou C_2), mais dans la réalité la décharge du bobinage générant le second harmonique, à la vue de ces dimensions moindre et donc d'une inductance propre moins importante, devrait se faire plus rapidement.

L'expression du gradient dont nous allons suivre la distribution de l'homogénéité est celui situé au centre (0,0) à l'instant initial. Ce dernier, lorsqu'on ne fait varier qu'un seul des deux harmoniques, est linéaire par rapport au coefficient k , c'est à dire par rapport au courant traversant tel ou tel bobinage :

$$\vec{G}_I = 4.\mu o^2 .k.C_1.C_2.\vec{e}_x \quad (V-39)$$

L'expression de l'inhomogénéité est équivalente à l'équation (V-25) en remplaçant respectivement A_1 (A_2) par C_1 (C_2).

V-2.2.2.1) Modification de l'harmonique C_1

Nous allons modifier la valeur de l'harmonique C_1 en la multipliant par un coefficient k , représentant, en quelque sorte, la variation du courant dans le bobinage générant l'harmonique 1 de la station LOLA.

Le gradient $\vec{G}$ prend alors la forme suivante :

$$\vec{G} = 4\mu o^2 .k.C_1.C_2.\vec{e}_x + 8\mu o^2 C_2^2 .x.\vec{e}_x + 2\mu o^2 C_2^2 .y.\vec{e}_y \quad (V-40)$$

et d'après (V-23) le vecteur inhomogénéité $\vec{\varepsilon}$ celle-ci :

$$\vec{\varepsilon} = \frac{2C_2}{k.C_1} .x.\vec{e}_x + \frac{C_2}{2.k.C_1} .y.\vec{e}_y \quad (V-41)$$

Il suffit ensuite de prendre la norme du vecteur inhomogénéité, notée ε , de l'élever au carré et de mettre l'équation sous forme réduite :

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \text{ avec } a = \frac{2.\varepsilon.k.C_1}{C_2}, b = \frac{\varepsilon.k.C_1}{2.C_2} \quad (V-42)$$

Le centre de l'ellipsoïde est bien évidemment (0,0). La forme de la zone de compensation reste ellipsoïdale au cours de la décharge du bobinage créant l'harmonique 1, mais son volume est multiplié par k^3 . C'est à dire qu'il diminue au cours de celle-ci puisque k , ou le courant, au choix, diminue.

V-2.2.2.2) Modification de l'harmonique C_2

Nous allons modifier la valeur de l'harmonique C_2 en la multipliant par un coefficient k , représentant, en quelque sorte, la variation du courant dans le bobinage générant l'harmonique 2 de la station LOLA.

Le gradient $\mathbf{G}$ prend alors la forme suivante :

$$\vec{G} = 4\mu\omega^2 \cdot k \cdot C_1 C_2 \cdot \vec{e}_x + 8\mu\omega^2 \cdot k^2 \cdot C_2^2 \cdot x \cdot \vec{e}_x + 2\mu\omega^2 \cdot k^2 \cdot C_2^2 \cdot y \cdot \vec{e}_y \quad (\text{V-43})$$

et d'après (V-23) le vecteur inhomogénéité $\mathbf{\varepsilon}$ celle-ci :

$$\vec{\varepsilon} = \frac{2kC_2}{C_1} \cdot x \cdot \vec{e}_x + \frac{kC_2}{2C_1} \cdot y \cdot \vec{e}_y \quad (\text{V-44})$$

Il suffit ensuite de prendre la norme du vecteur inhomogénéité, notée ε , de l'élever au carré et de mettre l'équation sous forme réduite :

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \quad \text{avec} \quad a = \frac{2 \cdot \varepsilon \cdot C_1}{k \cdot C_2}, \quad b = \frac{\varepsilon \cdot C_1}{2 \cdot k \cdot C_2} \quad (\text{V-45})$$

Le centre de l'ellipsoïde est bien évidemment (0,0). La forme de la zone de compensation reste ellipsoïdale au cours de la décharge du bobinage créant l'harmonique 2, de plus son volume est divisé par k^3 . C'est à dire qu'il augmente au cours de celle-ci puisque k , ou le courant, au choix, diminue.

V-2.2.2.3) Modification simultanée des 2 harmoniques

Nous allons modifier les valeurs des deux harmoniques C_1 et C_2 en les multipliant chacun par un coefficient k , représentant la variation du courant dans l'ensemble des bobinages de la station LOLA.

Le gradient $\mathbf{G}$ prend alors la forme suivante :

$$\vec{G} = 4\mu\omega^2 \cdot k^2 \cdot C_1 C_2 \cdot \vec{e}_x + 8\mu\omega^2 \cdot k^2 \cdot C_2^2 \cdot x \cdot \vec{e}_x + 2\mu\omega^2 \cdot k^2 \cdot C_2^2 \cdot y \cdot \vec{e}_y \quad (\text{V-46})$$

et d'après (V-23) le vecteur inhomogénéité $\mathbf{\varepsilon}$ celle-ci :

$$\vec{\varepsilon} = \frac{2C_2}{C_1} \cdot x \cdot \vec{e}_x + \frac{C_2}{2C_1} \cdot y \cdot \vec{e}_y \quad (\text{V-47})$$

Il suffit ensuite de prendre la norme du vecteur inhomogénéité, notée ε , de l'élever au carré et de mettre l'équation sous forme réduite :

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \quad \text{avec} \quad a = \frac{2 \cdot \varepsilon \cdot C_1}{C_2}, \quad b = \frac{\varepsilon \cdot C_1}{2C_2} \quad (\text{V-48})$$

Le centre de l'ellipsoïde est bien évidemment (0,0). La forme de la zone de compensation reste ellipsoïdale et son volume à inhomogénéité donnée reste constant.

V-2.3) Conclusion de la section V-2

Cette partie permet de comprendre en terme d'homogénéité, les possibilités offertes par une station de lévitation magnétique telle que celles dimensionnées dans cette thèse. Le découplage des harmoniques présente un intérêt considérable car il permet tout d'abord d'éviter tous les problèmes de mutuelle rencontrés dans la partie précédente. Et de plus les bobinages créant l'harmonique 2 peuvent, seuls, être déchargés pour simuler une variation d'accélération, ainsi le temps de décharge est limité uniquement par leur inductance propre, et non pas par l'inductance propre du système global si l'on devait décharger l'ensemble des bobinages. La décharge du bobinage générant l'harmonique 2 permet de conserver une inhomogénéité inférieure (et même de l'améliorer) à celle initiale puisque le volume à inhomogénéité donnée varie comme l'inverse du cube du courant traversant ces bobinages. Si on faisait varier les deux harmoniques simultanément avec un même rapport le volume à inhomogénéité donnée resterait constant.

En plus cette partie met en avant le fait que la diminution du courant traversant le bobinage dédié à l'harmonique 2 décale la zone de lévitation vers le haut, mais surtout que son volume à inhomogénéité donnée augmente comme l'inverse du courant à la puissance 6 ! Cette remarque n'a pas été mise à profit pour la réalisation d'un léviteur d'oxygène liquide. Mais elle devra être approfondie en vue du dimensionnement d'une station dédiée à la lévitation de l'hydrogène liquide.

Si les expérimentateurs souhaitent faire des expériences de microgravité variable proche du point critique, il faut voir comment évoluent les équipotentielle magnéto-gravitationnelles au cours du temps de décharge et considérant cette fois-ci les trois premiers harmoniques. Nous pouvons seulement dire que les différentes configurations obtenues dans cette thèse en particulier celles horizontale et verticale sont plus ou moins appropriées à différents types d'expériences. Partir d'une configuration où les équipotentielle magnéto-gravitationnelles sont des plans horizontaux évite *a priori* tous mouvements de fluide au cours de la décharge. Par contre si l'on veut reproduire le comportement d'un fluide en apesanteur dans un réservoir, où les forces de capillarité l'ont entraîné sur les bords du réservoir, et soumis ensuite à une accélération, il semble plus intéressant de partir d'une configuration verticale où le fluide est alors au point de compensation « exacte » réparti sur les bords de la cellule.

Références bibliographiques :

- [VAL1] Valles J.M., Maris H.J., Seidel G.M., Tang J., Yao W. **Magnetic levitation-based Martian and Lunar gravity simulator**, Advances in Space Research, 36, pp114-118 (2005)
- [COM1] Communal D., Chatain D., Cariteau B. **Dimensionnement de l'alimentation électrique de la station OLGA pour l'étude de l'oxygène sous accélération variable magnétique**, SBT CT 07-38 (2007)
- [PIC1] Pichavant G., Cariteau B., Chatain D., Nikolayev V., Beysens D. **Magnetic compensation of gravity : experiments with oxygen**, to appear in Microgravity Science and Technology (2008)

Conclusion et perspectives

Ce travail a permis un notable approfondissement des approches théoriques de la lévitation par champs magnétiques. Nous montrons par exemple, par l'introduction et l'utilisation approfondie du « potentiel magnéto-gravitationnel » Σ_L , que la détermination des configurations de l'interface gaz/liquide de fluides près des conditions critiques est possible. Notre approche a ainsi permis d'interpréter des expériences effectuées antérieurement sur l'hydrogène. Les interfaces obtenues lors de ces expériences ont pu être retrouvées par le calcul de Σ_L par éléments finis. La prise en compte de ce potentiel magnéto-gravitationnel est indispensable dans tous les dispositifs de compensation magnétique de la pesanteur sur des fluides.

Une méthode générale d'analyse de la force magnétique en terme d'harmoniques de champs a ensuite été développée. Cette méthode, dite générale car elle peut être appliquée à tous types de géométries, est intéressante pour deux principales raisons :

- Elle permet de maîtriser et contrôler les distributions de champs de forces magnétiques et les équipotentielles magnéto-gravitationnelles associées, par ajustement des différents harmoniques. Il est ainsi possible d'obtenir des distributions de champs magnétiques répondant à des conditions particulières d'homogénéité de la compensation magnétique.
- Elle permet, d'un point de vue pratique, de s'appuyer, pour la réalisation de lévitateurs magnétiques, sur les nombreux travaux concernant d'une part la conception d'aimants multipolaires d'accélérateurs de particules (géométries « cylindriques ») ou d'autre part la conception de bobinages d'IRM (géométries axisymétriques).

Dans ce travail de thèse la méthode d'analyse harmonique est appliquée aux géométries cylindrique et axisymétrique, c'est à dire respectivement invariantes par translation et rotation. Dans les deux géométries, il est montré que l'utilisation des trois premiers harmoniques de champ donne suffisamment de souplesse pour générer les distributions de forces magnétiques désirées. En effet les deux premiers harmoniques fixent à la fois la valeur de l'induction au centre de la zone de travail et la valeur du gradient contrebalançant la gravité pour le matériau considéré. Puis, résultat nouveau que nous avons établi, un choix judicieux du troisième harmonique détermine la configuration des forces résultantes au sein de la zone de travail où le fluide est mis en lévitation. Ainsi une simple variation de l'amplitude de ce troisième harmonique permet le passage d'une configuration spatiale de champ de force à une autre.

Pour le cas particulier d'une géométrie cylindrique, le travail souligne les effets du déphasage des trois premiers harmoniques, ce qui permet des dynamiques originales des distributions de forces magnétiques. Pour certaines de ces distributions, les potentiels magnétiques complexes associés aux champs magnétiques ont été identifiés. Pour cette même géométrie, nous avons montré que l'utilisation des deux premiers harmoniques seuls permet la simulation exacte au moyen d'expériences statiques, au sol, du comportement de fluides paramagnétiques (oxygène liquide) contenus dans l'espace (apesanteur vraie) dans des réservoirs en rotation uniforme, avec un axe de rotation éventuellement hors de la zone de travail. La mise en œuvre d'un dispositif appliquant ce résultat semble technologiquement accessible. Un autre résultat étonnant correspond à la compensation exacte au sol de la pesanteur, pour des fluides diamagnétiques (hydrogène liquide), au moyen de forces magnétiques associées à des forces centrifuges dues à une rotation uniforme de la cellule contenant le fluide. Ce résultat permet d'outrepasser le résultat théorique antérieur interdisant au sol la compensation magnétique

parfaite de la pesanteur dans un domaine tridimensionnel. Bien sûr la réalisation pratique d'un tel dispositif dynamique demandera quelques précautions.

L'application de la méthode d'analyse harmonique à la géométrie axisymétrique a amené au design magnétique d'une station de lévitation d'oxygène liquide, travail effectué pour le CEA Grenoble et le CNES (station LOLA). Les deux versions de cette station présentées dans ce mémoire permettent la lévitation de volumes d'oxygène supérieurs au litre avec des inhomogénéités inférieures au %. Elles permettent, en plus, grâce à une conception particulière, la variation spatiale mais également temporelle du champ de forces magnétiques.

L'utilisation d'inserts ferromagnétiques en association des bobinages supraconducteurs n'est pas nécessaire pour la lévitation de fluides fortement magnétiques comme l'oxygène. Par contre elle peut s'avérer intéressante voire indispensable dans le cas de fluides très faiblement magnétiques comme l'hydrogène, l'eau ou l'hélium. Les volumes lévités devenant très petits pour des inhomogénéités de quelques %, l'utilisation de matériaux ferromagnétiques saturés devient meilleure en terme de densité de courant équivalente que celle de bobinages. L'application de la méthode d'analyse harmonique pour ce genre de dispositif avec insert a été effectuée dans un cas particulier d'insert, mais sa généralisation demande encore beaucoup de travail. La réalisation d'une station de lévitation d'hydrogène est actuellement en cours d'étude, elle demandera certainement l'étude approfondie de cette problématique de l'utilisation ou non d'insert.

Notre travail a permis de mettre en évidence les points délicats d'expériences de compensation magnétique dynamique ou partielle de la pesanteur. Des expériences en transitoire simulant le passage de 0,5g à 0g sur de l'oxygène liquide devraient être prochainement effectuées au CEA Grenoble. Ces expériences font suite à l'étude présentée dans ce manuscrit sur la caractérisation d'une alimentation régulée en courant permettant d'éviter les problèmes de surtension dus aux mutuelles inductances inhérentes à la constitution des bobinages de la station OLGA. Pour finir, des possibilités de compensation magnétique variable sont étudiées à l'aide de l'analyse harmonique. Ces possibilités peuvent être mises directement en œuvre dans les stations de lévitation LOLA. Il sera intéressant de prolonger cette étude en déterminant l'évolution des équipotentielles magnéto-gravitationnelles en transitoire.

Bien que de nombreux points aient pu être éclaircis à propos de la compensation magnétique de pesanteur et des distributions de champs associées, il reste à accomplir un travail important de conception optimale des sources de champ. En effet les distributions de champs conduisant à des conditions de lévitation déterminées sont maintenant connues, mais l'optimisation des bobinages de lévitateurs magnétiques, fonction de critères économiques ou technologiques, reste encore à accomplir. Reste également en suspens l'optimisation des formes d'inserts ferromagnétiques pour améliorer les conditions de compensation de la gravité pour des fluides faiblement magnétiques tels que l'eau ou l'hydrogène.

Des expériences de convection thermique de fluides soumis aux différents champs de forces définis dans cette thèse pourraient être mises en œuvre, et conduire à d'étonnants comportements de ces fluides. La prise en compte de la variation avec la température de la susceptibilité des fluides paramagnétiques (oxygène) pourra également être un sujet d'étude et conduire, en conjonction avec des champs de force bien définis, à des expériences nouvelles de transfert thermique.

Enfin, les résultats que nous avons obtenus pourront être utilisés pour créer des forces de diverses distributions sur des matériaux faiblement magnétiques (fluides ou granulaires par exemple) dans d'autres domaines que la compensation magnétique de pesanteur, comme il est fait état dans ce manuscrit à propos de la simulation de rotation en micropesanteur de fluides paramagnétiques. Rappelons en particulier que les techniques de séparation magnétique de matériaux granulaires utilisent des champs de force obéissant à la même équation que celle que nous avons traitée tout au long de ce mémoire. L'application (et l'extension) de nos résultats aux techniques de la séparation magnétique est donc un domaine à explorer.

Annexes

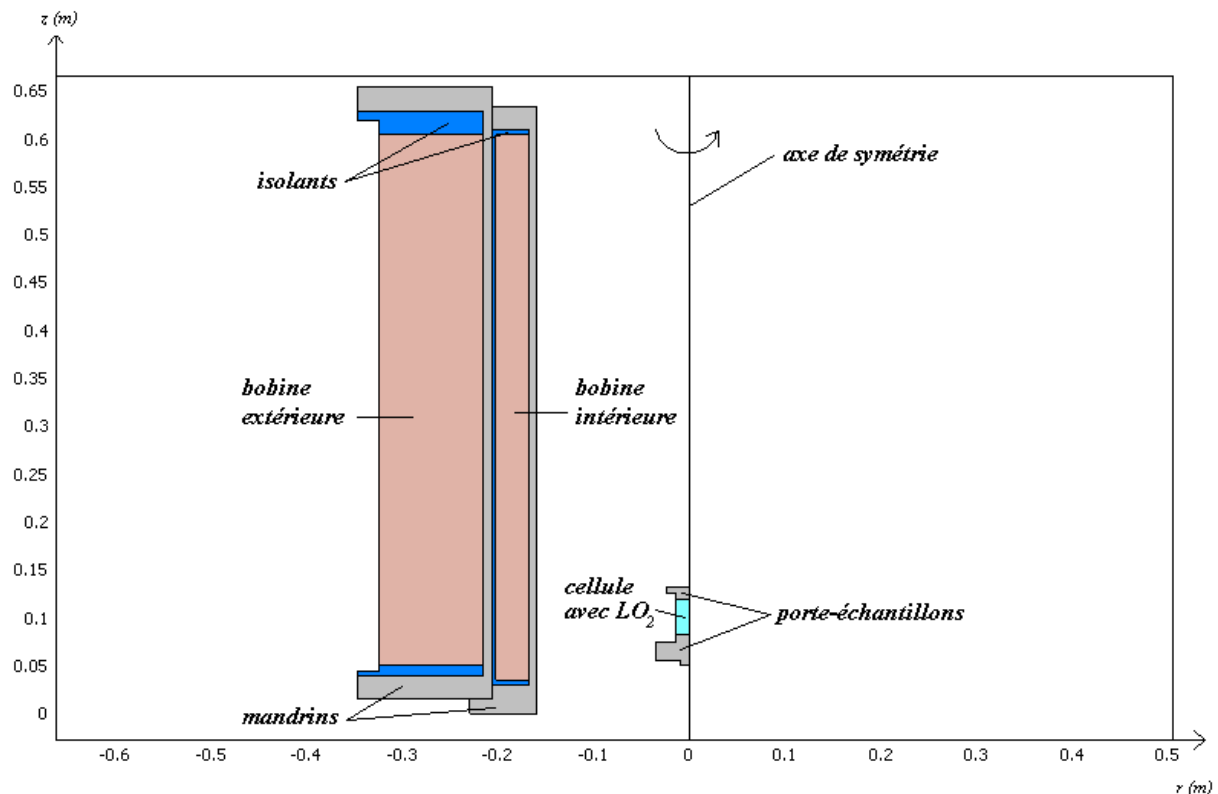
Annexe A

Annexe A : Oxygène diphasique proche du point critique et interprétation de l'interface en terme d'équipotentiels magnéto-gravitationnelles équiΣ_L au sein de OLGA

Cette annexe a pour objectif d'anticiper les expériences sur l'oxygène proche de son point critique programmées dans la station OLGA (Oxygen Low Gravity Apparatus) du Service des Basses Températures du CEA Grenoble.

Des manipulations sur l'oxygène liquide ont déjà eu lieu permettant d'obtenir des résultats sur les différents régimes d'ébullition [PIC1]. L'oxygène liquide en équilibre avec sa vapeur était alors à pression atmosphérique et à une température de 90K, avec un gradient de $8T^2/m$ sous ces conditions.

De prochaines expériences vont être réalisées au sein de cette station sur de l'oxygène proche de son point critique, $P_c=50,43$ bar et $T_c=154,6$ K, avec un gradient de $11T^2/m$ à cette température. Sur la figure suivante est décrit le bobinage de la station OLGA avec la cellule d'oxygène liquide, la géométrie est axisymétrique. OLGA est constituée de mandrins (gris) assurant le soutien mécanique des bobinages supraconducteurs (saumon). La cellule d'oxygène est située dans la partie inférieure du dispositif, car il est paramagnétique. Elle a une forme cylindrique de 30mm de diamètre et 36mm de hauteur, de même axe de révolution que l'axe magnétique du solénoïde.



Pour cette expérience, seule l'utilisation du bobinage extérieur de la bobine OLGA sera nécessaire. Cette expérience n'ayant pas encore eu lieu, on va estimer la densité de courant à

injecter dans ce bobinage afin d'atteindre la compensation exacte de pesanteur au centre de la cellule (11T²/m), et en déduire une estimation du courant d'après les caractéristiques du bobinage.

Pour un gradient de 8T²/m, la densité de courant nécessaire était de 16,28A/mm² dans le bobinage. Or le vecteur **G** varie comme le carré du courant, la densité de courant nécessaire à l'obtention de 11T²/m est d'environ :

$$16.28 * \sqrt{\frac{11}{8}} = 19.09 \text{ A/mm}^2$$

De plus, la bobine est constituée de 4132 spires et a une section rectangulaire de 599,4 cm². Le courant à injecter est de l'ordre de :

$$\frac{19.09 * 10^6 * 599.4 * 10^{-4}}{4132} = 277 \text{ A}$$

Les simulations numériques vont permettre d'ajuster ces valeurs de courant et d'anticiper l'interface gaz/liquide de l'oxygène lorsque la température est proche du point critique. Il faut avant tout estimer également dans quelle gamme de température l'utilisation du potentiel Σ_L est valable.

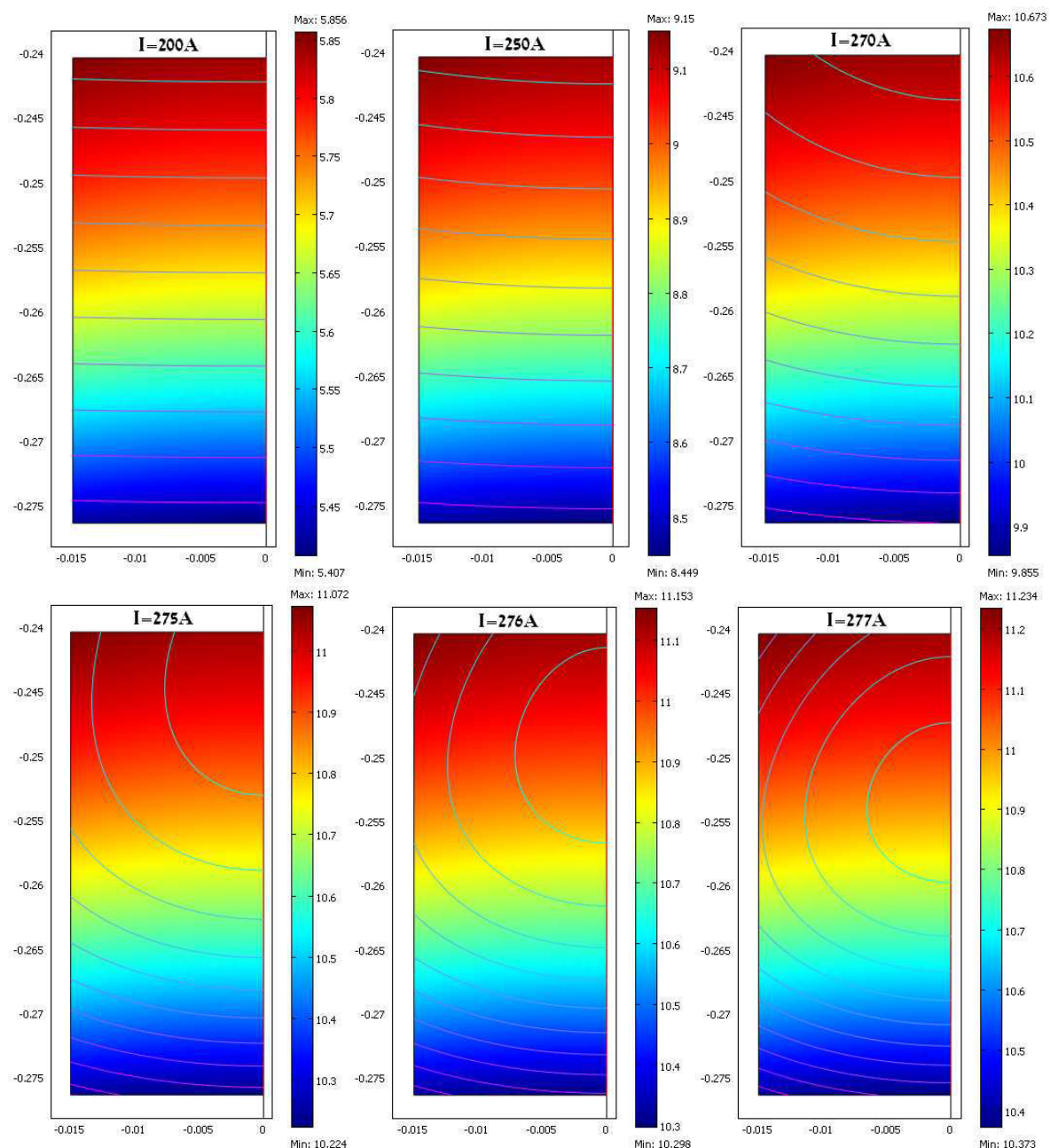
Si on utilise la formule (12) du chapitre I, la température de l'oxygène durant ces expériences devra être comprise entre T_c et la température seuil T_o :

$$T_c - T < (T_c - T_o) = T_c \left(\sqrt{\frac{2\beta\epsilon g \rho_c}{\sigma_0}} L \right)^{2.14}$$

où $T_c = 154,6\text{K}$, $\beta = 1,81$ [WEB1], $\sigma_0 = 0,04\text{N.m}^{-1}$ [TAK1], $\rho_c = 436,1\text{kg.m}^{-3}$, $L = 1\text{cm}$, $\epsilon = 1\%$, $g = 9,81\text{m.s}^{-2}$ pour l'oxygène.

Ainsi les expériences devront être réalisées pour $T_c - T < T_c - 56\text{K}$.

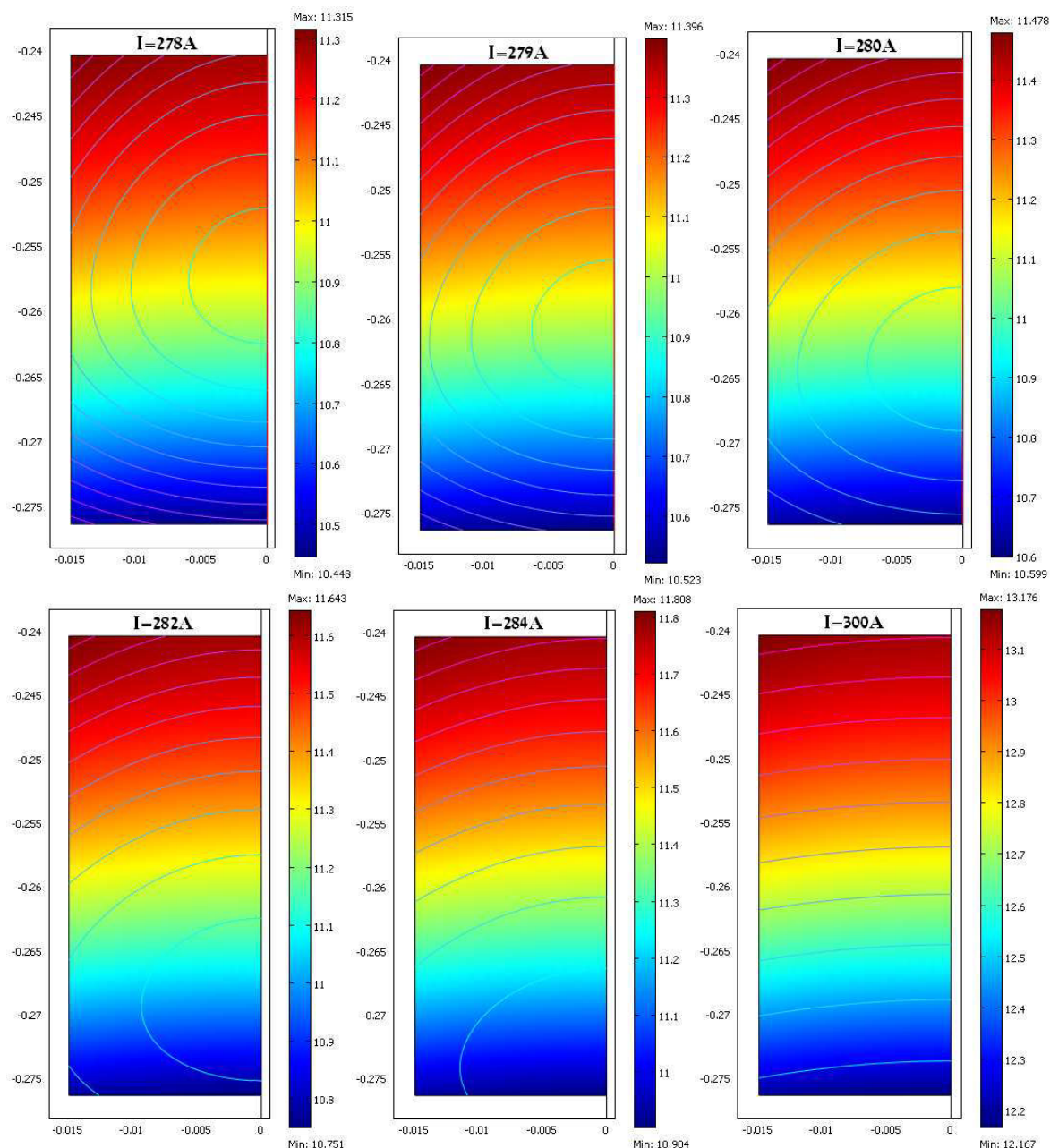
Les figures suivantes représentent toutes les simulations numériques pour un courant variant de 200A à 300A, la barre de couleur représente la valeur de la composante selon z du gradient en T²/m à l'intérieur de la cellule. L'axe de révolution du système est situé sur la droite de chaque cellule. Quelques équipotentielles magnéto-gravitationnelles sont tracées, celle devant porter l'interface gaz/liquide scinde le volume de la cellule en deux parties égales ($V_g/V_l = 1$).



L'effet du champ magnétique est visuellement imperceptible jusqu'à environ 200A. La partie liquide de l'oxygène se trouve vers le bas et le gaz au dessus, puis les $\text{équi}\Sigma_L$ semblent s'incurver de plus en plus vers le bas, c'est à dire que le liquide semble monter le long des parois, pour ensuite prendre une forme ovoïde aux alentours de 275A au moment où le point de compensation exacte ($Gz=11T^2/m$) arrive par le haut au sein de la cellule.

Le volume de gaz étant le même que le volume de liquide à proximité du point critique, il n'apparaît pas immédiatement une bulle de gaz mais plutôt une langue de gaz partant de la partie supérieure de la cellule.

Le point de compensation se décalant vers le bas de la cellule, les $\text{équi}\Sigma_L$ font de même en ayant une forme ovoïde de plus en plus sphérique, on peut à ce moment supposer que la bulle de gaz est formée.



Pour un courant de 278A, le point de compensation exacte est situé au centre de la cellule avec des Σ_L presque sphériques.

Puis en augmentant le courant le point de compensation continue de descendre suivant l'axe de la cellule et la forme des Σ_L s'aplatit de plus en plus, la bulle de gaz peut éventuellement toucher les bords latéraux de la cellule.

Aux alentours de 285A, il y a surcompensation en chaque point de la cellule. L'augmentation du courant entraîne un aplanissement des Σ_L , on revient au cas initial sauf que le haut de la cellule est devenu le bas et vice versa.

[PIC1] Pichavant G., Cariteau B., Chatain D., Nikolayev V., Beysens D., **Magnetic compensation of gravity: experiments with oxygen**, to appear in Microgravity Sciences and Technology (2008)

[TAK1] Takeda M., Nishigaki K., **Measurements of the surface tension of liquid oxygen in high magnetic fields**, Journal of the Physical Society of Japan, **61**, n°10, pp3631-3635, (1992)

[WEB1] Weber L.A., **A modified benedict-webb-rubin equation of state for gaseous and liquid oxygen**, NASA center report NASA-CR-157861, (1978).

Annexe B

Annexe B : Expression du gradient à l'intérieur d'un sphéroïde (ellipsoïde de révolution) allongé en fonction des harmoniques sphéroïdaux.

1) Le système de coordonnées :

Nous devons d'abord définir les coordonnées (μ, ν, φ) que nous utilisons (Fig. 1) [DUR1] . Ces coordonnées sont dites sphéroïdales allongées.

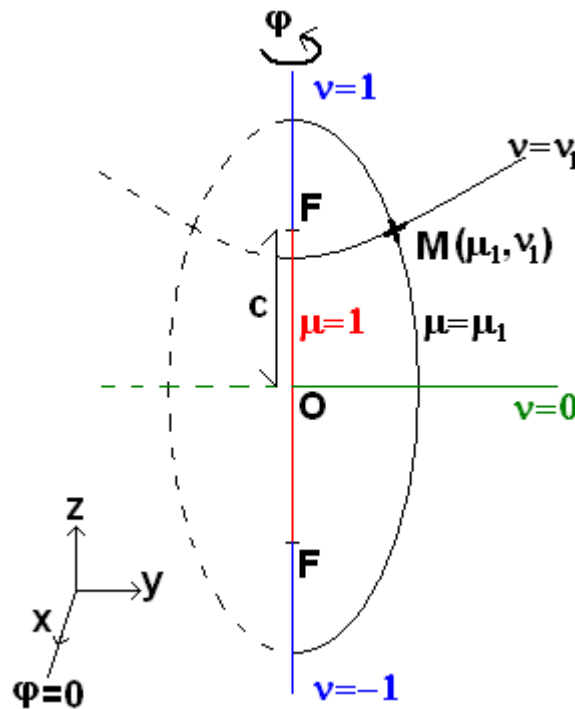


FIG. 1. Coordonnées sphéroïdales et coordonnées cartésiennes

Les coordonnées cartésiennes s'expriment en fonction des coordonnées sphéroïdales de la manière suivante :

$$\begin{aligned} x &= c \sqrt{(\mu^2 - 1)(1 - \nu^2)} \cos \varphi \\ y &= c \sqrt{(\mu^2 - 1)(1 - \nu^2)} \sin \varphi \\ z &= c \mu \nu \end{aligned}$$

où c est la distance entre le centre et un foyer ($c = OF$), si a et b sont respectivement les demi-petit et demi-grand axes alors $c = \sqrt{b^2 - a^2}$.

Les iso- μ sont des ellipsoïdes de révolution (sphéroïdes) et les iso- ν sont des hyperboloïdes à une nappe. Les iso- μ et les iso- ν sont cofocales.

2) L'expression du champ magnétique et du gradient :

L'expression mathématique du potentiel scalaire vérifiant l'équation de Laplace en coordonnées sphéroïdales allongées en dehors de tout courant est :

$$V(\mu, \nu, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left[A \cdot P_n^m(\mu) + B \cdot Q_n^m(\mu) \right] * \left[A' \cdot P_n^m(\nu) + B' \cdot Q_n^m(\nu) \right] * [C \cdot \sin(m\varphi) + D \cdot \cos(m\varphi)]$$

Ce potentiel scalaire peut être généré par une nappe de courant répartie sur un ellipsoïde de valeur $\mu = \mu_1$. En considérant les conditions aux limites ($\mu = 1$ ($Q_n^m(1) = \infty$) et $\mu \rightarrow \infty$ ($P_n^m(\infty) = \infty$)), le potentiel scalaire prend une forme différente de part et d'autre de l'ellipsoïde $\mu = \mu_1$ parcouru par les courants surfaciques. De plus notre système est invariant par rotation donc $m=0$ dans l'expression précédente. Le potentiel scalaire intérieur s'exprime à l'aide des polynômes de Legendre d'ordre 0 et de degré n , $P_n^0(\cdot) = P_n(\cdot)$. Quant au potentiel extérieur il s'exprime en plus à l'aide des polynômes de Legendre de deuxième espèce $Q_n^0(\cdot) = Q_n(\cdot)$.

$$V_{int} = \sum_{n=0}^{\infty} E_n \cdot P_n(\mu) \cdot P_n(\nu)$$

$$V_{ext} = \sum_{n=0}^{\infty} E'_n \cdot Q_n(\mu) \cdot P_n(\nu)$$

D'où le champ magnétique qui dérive de ces potentiels :

$$\vec{H}_{int_n}(\mu, \nu) = \begin{cases} \frac{-E_n}{c\sqrt{\mu^2 - \nu^2}} \cdot P_n^l(\mu) \cdot P_n^l(\nu) \\ \frac{-E_n}{c\sqrt{\mu^2 - \nu^2}} \cdot P_n(\mu) \cdot P_n^l(\nu) \end{cases}$$

$$\vec{H}_{ext_n}(\mu, \nu) = \begin{cases} \frac{-E'_n}{c\sqrt{\mu^2 - \nu^2}} \cdot Q_n^l(\mu) \cdot P_n^l(\nu) \\ \frac{-E'_n}{c\sqrt{\mu^2 - \nu^2}} \cdot Q_n(\mu) \cdot P_n^l(\nu) \end{cases}$$

On peut à partir du champ obtenir facilement la norme du carré de l'induction magnétique :

$$B_{int}^2(\mu, \nu) = \left[\frac{\mu_0}{c\sqrt{\mu^2 - \nu^2}} \right]^2 \left[\sum_{n=1}^{\infty} E_n \cdot P_n^l(\mu) \cdot P_n^l(\nu) + \sum_{p=1}^{\infty} E_p \cdot P_p^l(\mu) \cdot P_p^l(\nu) + \sum_{n=1}^{\infty} E_n \cdot P_n(\mu) \cdot P_n^l(\nu) + \sum_{p=1}^{\infty} E_p \cdot P_p(\mu) \cdot P_p^l(\nu) \right]$$

D'où on dire l'expression un peu lourde du gradient $\mathbf{G}$:

$$\bar{G}(\mu, \nu) = \frac{2\mu\omega^2}{c^3 \cdot \Delta^3} \left[\sum_{n=2}^{\infty} E_n \cdot P_n^2(\mu) \cdot P_n^2(\nu) \cdot \sum_{p=1}^{\infty} E_p \cdot P_p^1(\mu) \cdot P_p^1(\nu) + \sum_{n=1}^{\infty} E_n \cdot P_n^1(\mu) \cdot P_n^1(\nu) \cdot \sum_{p=1}^{\infty} E_p \cdot P_p(\mu) \cdot P_p^1(\nu) + \frac{\mu(1-\nu^2)}{\sqrt{\mu^2-1} \cdot \Delta} \left[\sum_{n=1}^{\infty} E_n \cdot P_n^1(\mu) \cdot P_n(\nu) \right]^2 + \frac{-\mu \cdot \sqrt{\mu^2-1}}{\Delta} \left[\sum_{n=1}^{\infty} E_n \cdot P_n(\mu) \cdot P_n^1(\nu) \right]^2 \right. \\ \left. + \sum_{n=2}^{\infty} E_n \cdot P_n(\mu) \cdot P_n^2(\nu) \cdot \sum_{p=1}^{\infty} E_p \cdot P_p(\mu) \cdot P_p^1(\nu) + \sum_{n=1}^{\infty} E_n \cdot P_n^1(\mu) \cdot P_n^1(\nu) \cdot \sum_{p=1}^{\infty} E_p \cdot P_p^1(\mu) \cdot P_p(\nu) + \frac{\nu(1-\mu^2)}{\sqrt{1-\nu^2} \cdot \Delta} \left[\sum_{n=1}^{\infty} E_n \cdot P_n(\mu) \cdot P_n^1(\nu) \right]^2 + \frac{\nu \cdot \sqrt{1-\nu^2}}{\Delta} \left[\sum_{n=1}^{\infty} E_n \cdot P_n^1(\mu) \cdot P_n(\nu) \right]^2 \right]$$

où $\Delta = \sqrt{\mu^2 - \nu^2}$

Le gradient sur l'axe entre les deux foyers $\mathbf{G}(\mu=1, \nu)$ a une expression beaucoup plus simple :

$$\bar{G}(\mu=1, \nu) = \frac{2\mu\omega^2}{c^3 \cdot (1-\nu^2)^{3/2}} \cdot \sum_{n=2}^{\infty} E_n \cdot P_n^2(\nu) \cdot \sum_{p=1}^{\infty} E_p \cdot P_p^1(\nu) \bar{e}_\nu$$

3) L'expression du courant superficiel

La continuité de la composante normale en $\mu=\mu_1$ où se trouve la nappe de courant donne :

$$E'_n = E_n \cdot \frac{P_n^1(\mu_1)}{Q_n^1(\mu_1)}$$

La nappe de courant peut être obtenue à partir des composantes tangentielles du champ, on obtient ainsi :

$$\vec{K}_n(\mu_1, \nu) = \frac{K_n}{c} \cdot \frac{1}{Q_n^1(\mu_1) \sqrt{\mu_1^2 - 1}} \cdot \frac{P_n^1(\nu)}{\sqrt{\mu_1^2 - \nu^2}} \vec{e}_\phi$$

4) Les tracés analytiques

Les tracés ont été réalisés en fixant au centre du système une induction $B_1=10\text{T}$ et un gradient $G_1=8\text{T}^2/\text{m}$. Le sphéroïde sur lequel est réparti le courant possède un demi grand axe $b=50\text{cm}$ et un demi petit $a=25\text{cm}$, c'est à dire sur l'iso- $\mu=\mu_1$ où $\mu_1 = \frac{b}{b^2-a^2} = 1.15470$. La distance entre

l'origine et un foyer de ce sphéroïde vaut $c = \frac{b}{\mu_1} = 43.30\text{cm}$.

Nous avons cherché à obtenir un vecteur accélération résultante le plus homogène possible suivant l'axe z, c'est à dire suivant $\mu=1$. Le vecteur $\mathbf{G}$ obtenu est ainsi le plus constant possible suivant l'axe vertical (Fig. 1). Cette condition se traduit par l'annulation des dérivées n-ièmes de $G_r(r,0)$ par rapport à « r » en $r=0$:

$$\forall n \in N, \left. \frac{\partial^n G(l, v)}{\partial v^n} \right|_{v=0} = 0$$

Mais lorsque l'on effectue ce calcul, contrairement aux cas des coordonnées cylindriques ou sphériques, le système obtenu n'est pas triangulaire. C'est à dire que ne peut pas obtenir la valeur exacte d'un harmonique si on ne va pas jusqu'à l'infini.

Prenons un exemple simple pour illustrer ceci. On travaille tout d'abord avec un gradient constitué des deux premiers harmoniques (2 inconnues K_1 et K_2), nous cherchons à avoir $B_1=10T$ au centre et $G_1=8T^2/m$ au centre (2 équations), si l'on résout :

$$K_1 = \frac{-B_1 c}{\mu_0} \text{ et } K_2 = \frac{-G_1 c^2}{6 \mu_0 B_1}$$

Si maintenant le gradient est constitué des trois premiers harmoniques (3 inconnues K_1 , K_2 et K_3) et que l'on cherche à obtenir les mêmes valeurs au centre d'induction et de gradient mais qu'en plus la dérivée première du gradient soit nulle au centre (3 équations), on obtient :

$$K_1 = \frac{-c(-G_1^2 c^2 + 40 B_1^4)}{40 B_1^3 \mu_0}, K_2 = \frac{-G_1 c^2}{6 \mu_0 B_1} \text{ et } K_3 = \frac{G_1^2 c^3}{60 B_1^3 \mu_0}$$

La valeur de l'harmonique 1 a été modifiée, le système n'étant pas triangulaire. Nous n'avons pas pu définir les harmoniques de manière exacte.

Traçons tout de même le gradient sur l'axe $\mu=1$, lorsque le gradient est respectivement constitué de 2, 3, 4 et 5 harmoniques. On fournit également la valeur des harmoniques pour les deux derniers cas :

-Pour le cas où le gradient est constitué de 4 harmoniques, leurs valeurs sont :

$$K_1 = \frac{-c(-G_1^2 c^2 + 40 B_1^4)}{40 B_1^3 \mu_0}, K_2 = \frac{-G_1 c^2 (56 B_1^4 + 3 G_1^2 c^2)}{336 B_1^5 \mu_0}, K_3 = \frac{G_1^2 c^3}{60 B_1^3 \mu_0} \text{ et } K_4 = \frac{-G_1^3 c^4}{280 B_1^5 \mu_0}$$

-Pour le cas où le gradient est constitué de 5 harmoniques, leurs valeurs sont :

$$K_1 = \frac{c(15 G_1^4 c^4 + 112 G_1^2 c^2 B_1^4 - 4480 B_1^8)}{4480 B_1^7 \mu_0}, K_2 = \frac{-G_1 c^2 (56 B_1^4 + 3 G_1^2 c^2)}{336 B_1^5 \mu_0}, K_3 = \frac{G_1^2 c^3 (5 G_1^2 c^2 + 24 B_1^4)}{1440 B_1^7 \mu_0}$$

$$, K_4 = \frac{-G_1^3 c^4}{280 B_1^5 \mu_0} \text{ et } K_5 = \frac{G_1^4 c^5}{1008 B_1^7 \mu_0}$$

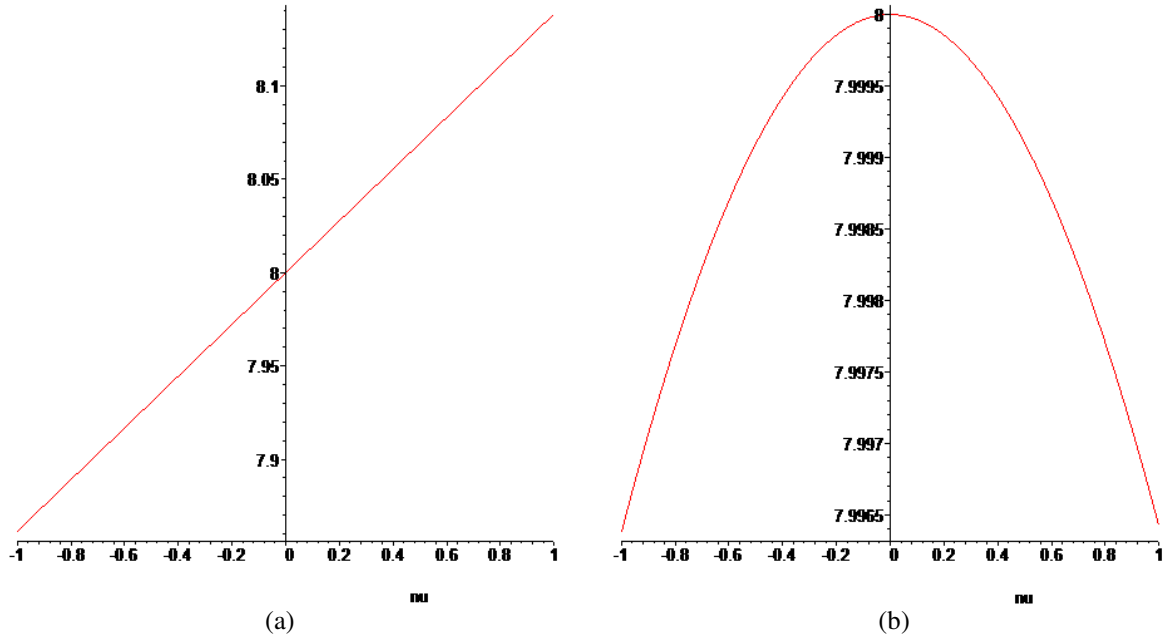


FIG. 2. Tracés du gradient sur l'axe vertical entre les deux foyers pour (a) 2 harmoniques et (b) 3 harmoniques.

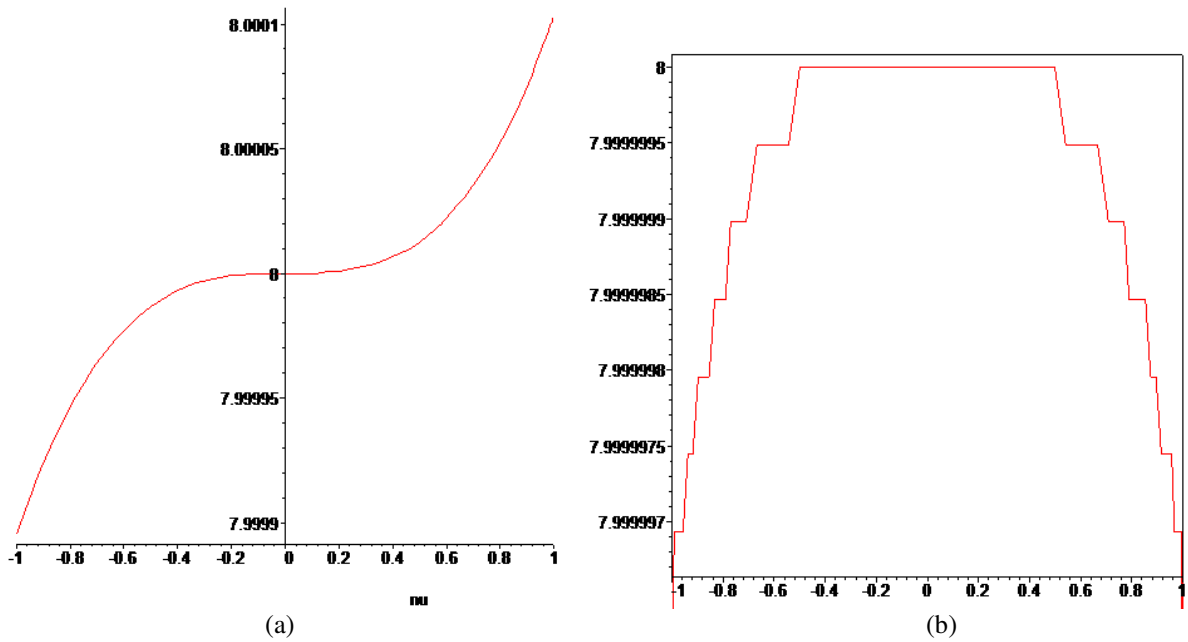
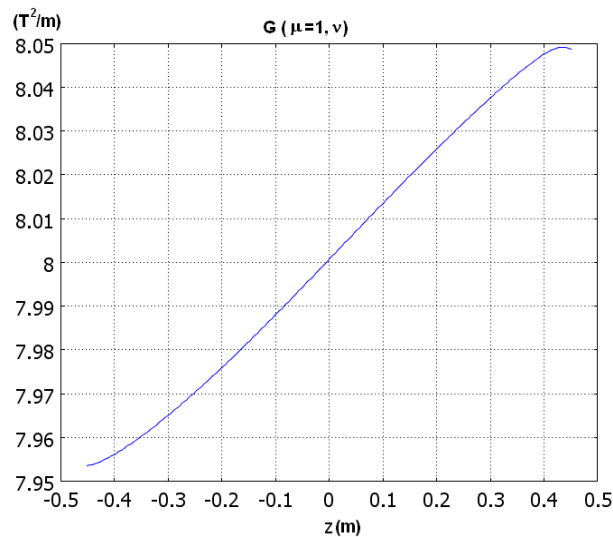


FIG. 3. Tracés du gradient sur l'axe vertical entre les deux foyers pour (a) 4 harmoniques et (b) 5 harmoniques.

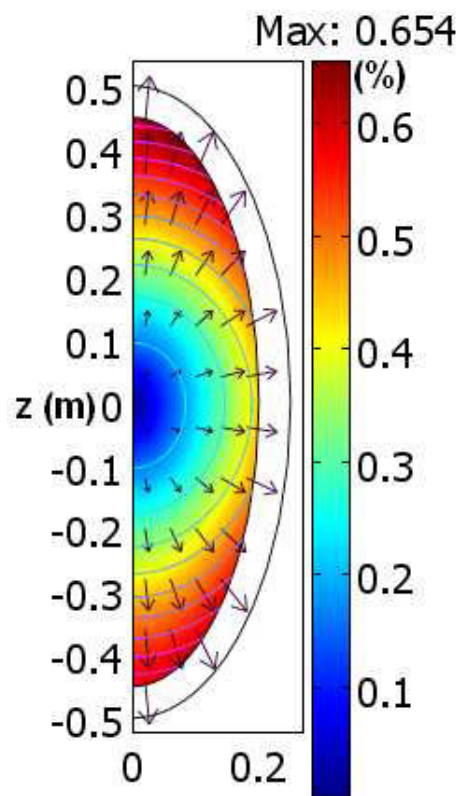
On s'aperçoit que la méthode fonctionne correctement, et que le gradient obtenu est de plus en plus constant suivant l'axe $\mu=1$ lorsqu'on augmente le nombre d'harmoniques.

5) Les simulations numériques

Nous avons sur un sphéroïde, de mêmes dimensions que précédemment, réparti une distribution de courant tronquée au sixième harmonique. Nous avons dans un premier temps tracé le gradient suivant l'axe vertical. Les foyers se trouvent respectivement à $-43,3\text{cm}$ et $43,3\text{cm}$, c'est à dire que les extrémités du tracé ne sont pas comprises sur l'axe $\mu=1$ mais sur les axes $v=-1$ et $v=1$ (Fig. 1).



On s'aperçoit que les résultats sont faux et fortement dégradés par rapport à ceux que l'on a obtenus par calcul analytique. Nous avons tout de même tracé le vecteur inhomogénéité et sa norme au sein du sphéroïde ainsi que les équipotentiels magnéto-gravitationnelles :



On aurait pu s'attendre à obtenir des équipotentiels magnéto-gravitationnelles verticales, il est étonnant qu'elles soient plus ou moins circulaires.

Nous n'avons pas pu interpréter et expliquer ces différences.

[DUR1] : E. Durand, **Electrostatique**, Tome II, MASSON et C^{IE}, pp405-406, (1966)

Annexe C

Annexe C : Problème de conception et modification de la décomposition harmonique

Pour le projet LOLA une étude du décalage des blocs a été ébauchée. Un bloc représente la section des solénoïdes du dispositif dans un plan contenant l'axe magnétique.

La ligne témoin du tableau fournit le contenu harmonique « idéal » du système non décalé. La valeur de « k » dépend de la configuration d'accélération résultante désirée. Les autres lignes fournissent l'écart par rapport à la valeur témoin (c'est à dire le contenu harmonique des bobines d'épaisseur δ_R respectivement δ_Z de la Fig. 36 chapitre III).

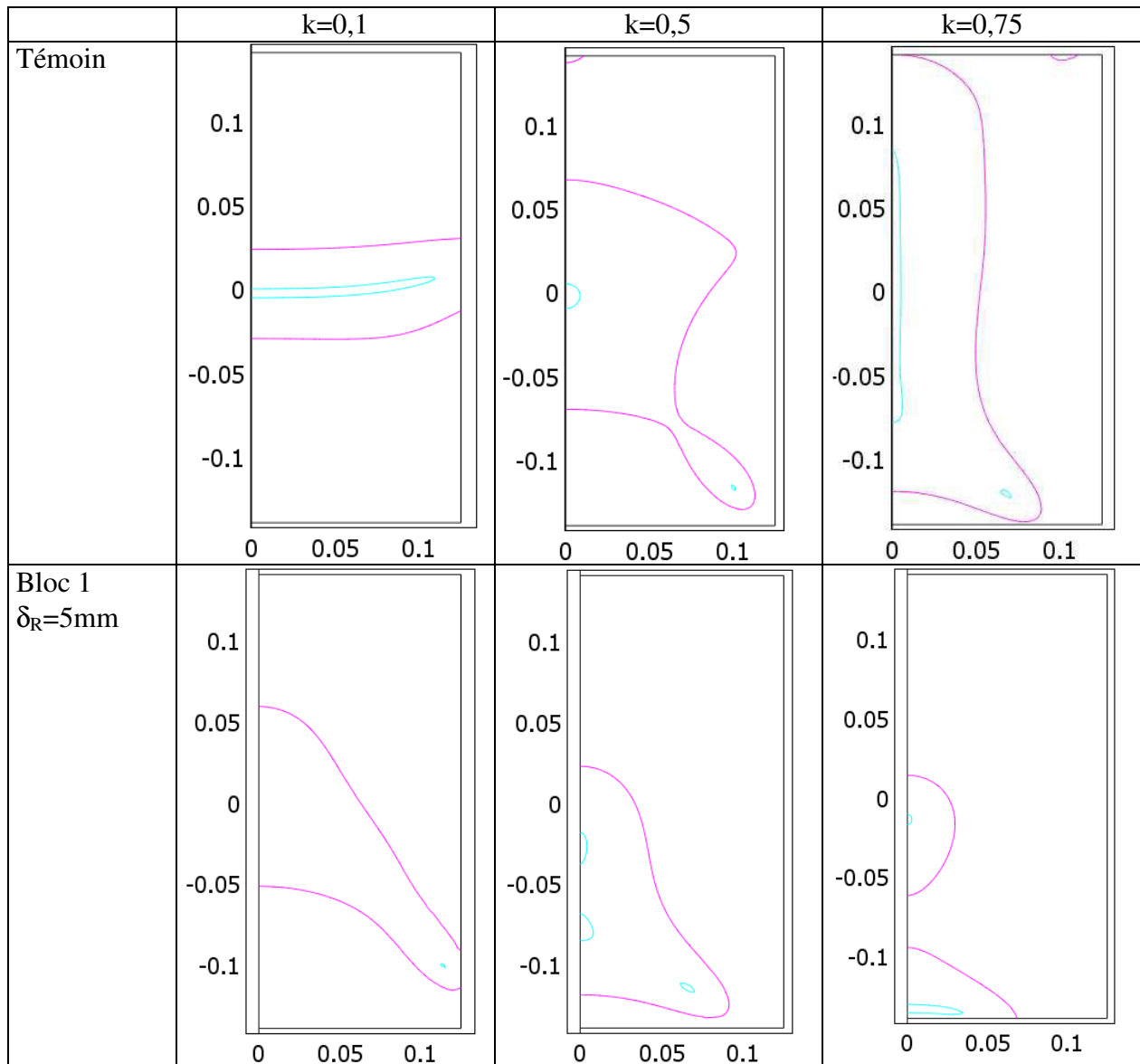
(k=0,1 ou 0,5 ou 0,75 respectivement pour les cas horizontal, sphérique ou vertical):

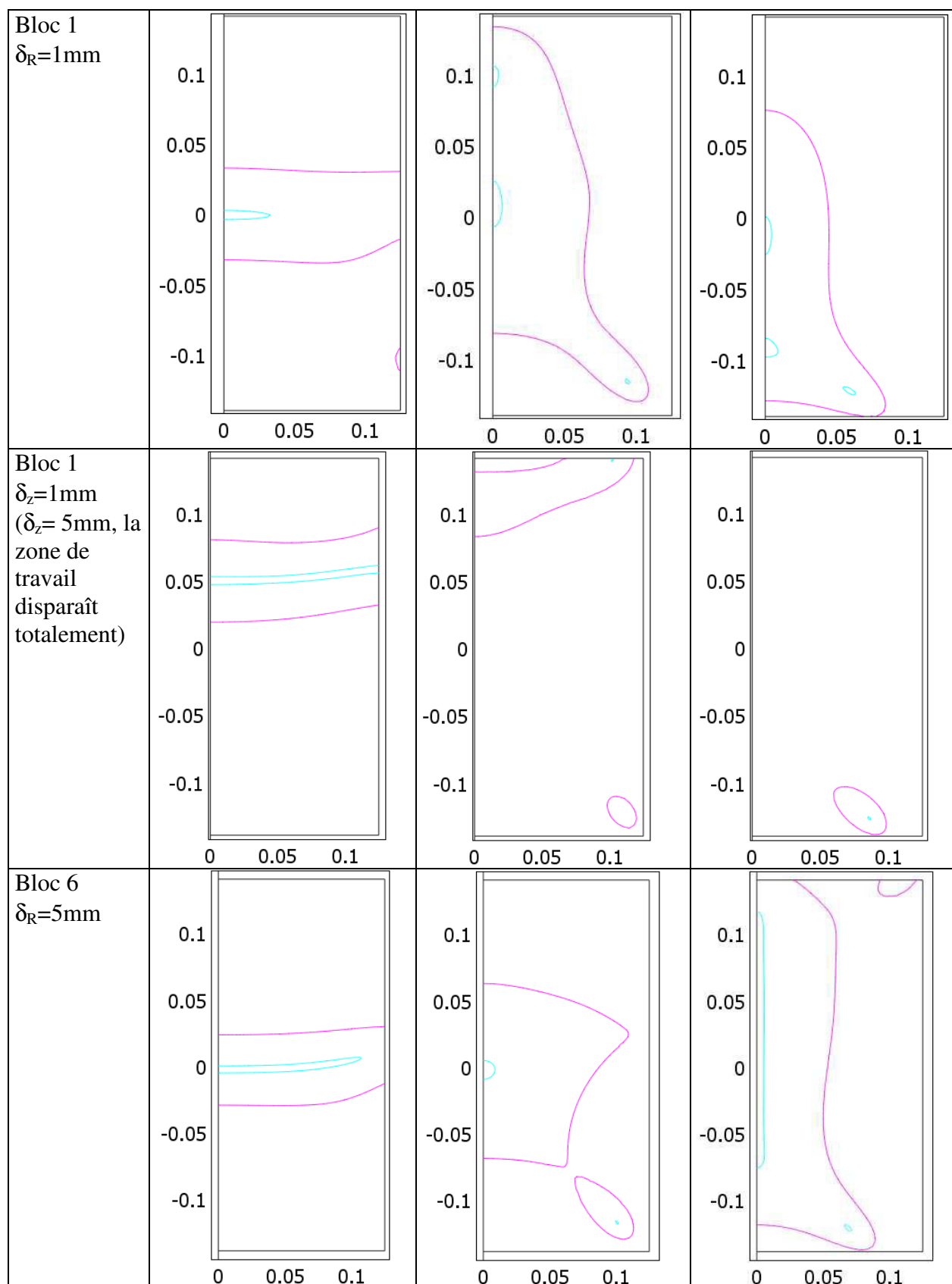
	C1 (A)	C2 (A/m)	C3 (A/m ²)	C4 (A/m ³)	C5 (A/m ⁴)	C6 (A/m ⁵)
Témoin	3963840 -8243*k	482804	31092 -96319*k	18641	89080 -61865*k	-1422288
Bloc 1 $\delta_R=5\text{mm}$	7504 (0,18%)	-3137 (0,64%)	-54902 (176%)	-169098 (907%)	-290249 (325%)	-146070 (10,3%)
Bloc 1 $\delta_R=1\text{mm}$	1521 (0,04%)	-563 (0,11%)	-10932 (35%)	-34169 (183%)	-59765 (67%)	-33370 (2,34%)
Bloc 1 $\delta_R=100\mu\text{m}$	153 (0,004%)	-54 (0,011%)	-1092 (3,5%)	-3424 (18,3%)	-6015 (6,8%)	-3430 (0,24%)
Bloc 1 $\delta_Z=1\text{mm}$	-3122 (0,08%)	-7670 (1,6%)	-10637 (34%)	1620 (8,7%)	56040 (63%)	177890 (12,5%)
Bloc 1 $\delta_Z=100\mu\text{m}$	-313 (0,008%)	-768 (0,16%)	-1063 (3,4%)	175 (0,94%)	5652 (6,3%)	17890 (1,25%)
Bloc 4 $\delta_R=5\text{mm}$	477 (0,012%)	-2055 (0,43%)	-6515 (21%)	-8324 (44,6%)	710 (0,79%)	25050 (1,76%)
Bloc 4 $\delta_R=100\mu\text{m}$	9 (0,0003%)	-40 (0,008%)	-131 (0,42%)	-171 (0,92%)	8 (0,009%)	510 (0,035%)
Bloc 4 $\delta_Z=5\text{mm}$	-2398 (0,06%)	-3297 (0,68%)	-278 (0,9%)	9068 (48,7%)	21016 (24%)	21270 (1,49%)
Bloc 4 $\delta_Z=100\mu\text{m}$	-49 (0,001%)	-66 (0,013%)	-4 (0,013%)	186 (1%)	427 (0,48%)	420 (0,03%)
Bloc 6 $\delta_R=5\text{mm}$	-86*k (0,002%*k)	17*k (0,0035%*k)	1603*k (5,15%*k)	9193*k (49,3%*k)	29768*k (33%*k)	41130*k (2,89%*k)
Bloc 6 $\delta_R=100\mu\text{m}$	-1,8*k (0,0005%*k)	0,06*k (0,0015%*k)	31*k (0,1%*k)	187*k (1%*k)	628*k (0,7%*k)	971*k (0,068%*k)
Bloc 6 $\delta_Z=5\text{mm}$	160*k (0,004%*k)	708*k (0,15%*k)	1896*k (6,1%*k)	1035*k (5,6%*k)	-20302*k (22,8%*k)	-130238*k (9,15%*k)
Bloc 6 $\delta_Z=100\mu\text{m}$	3,2*k (0,008%*k)	14*k (0,035%*k)	38*k (0,12%*k)	16*k (0,086%*k)	-445*k (0,5%*k)	-2768*k (0,19%*k)

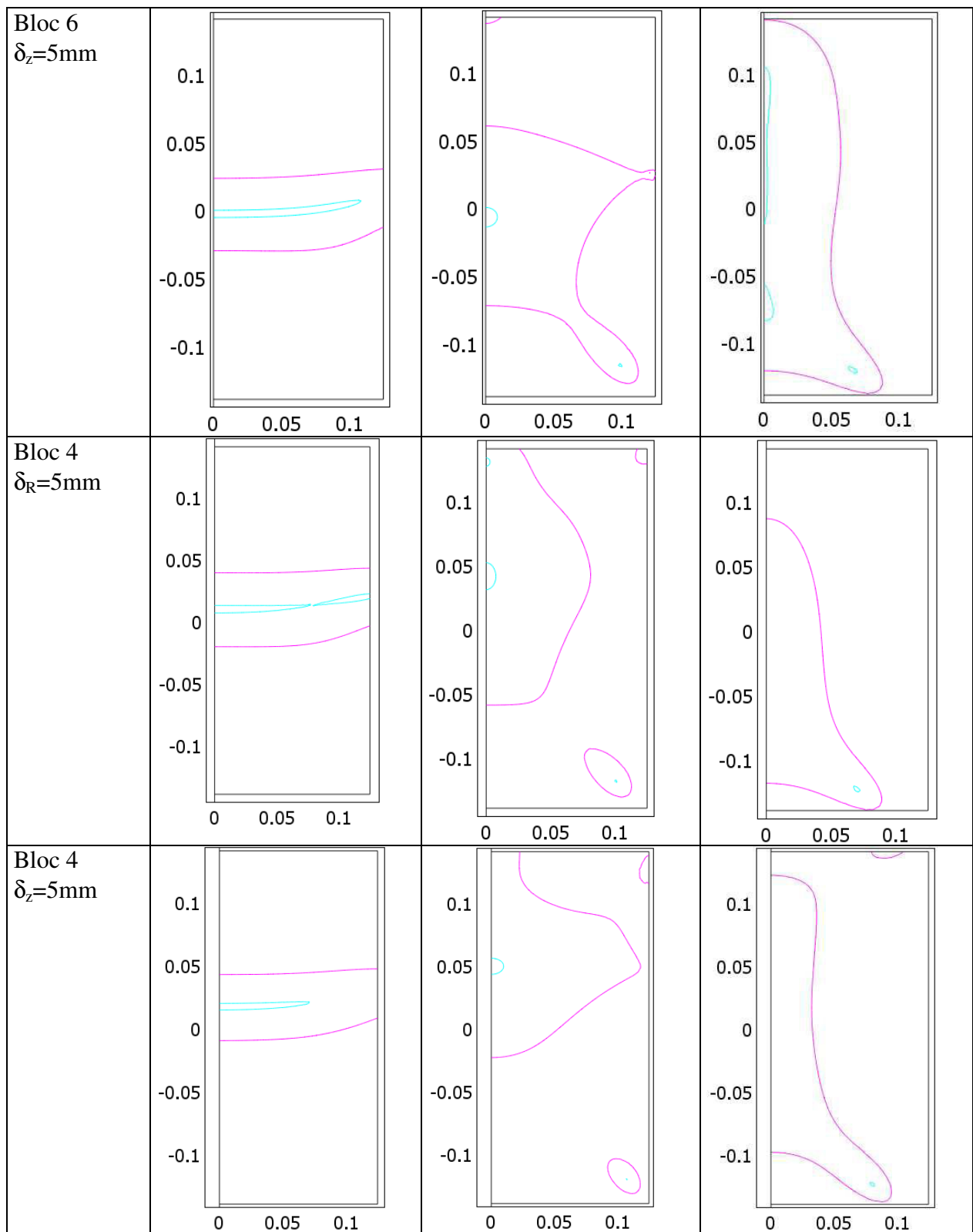
Annexe D

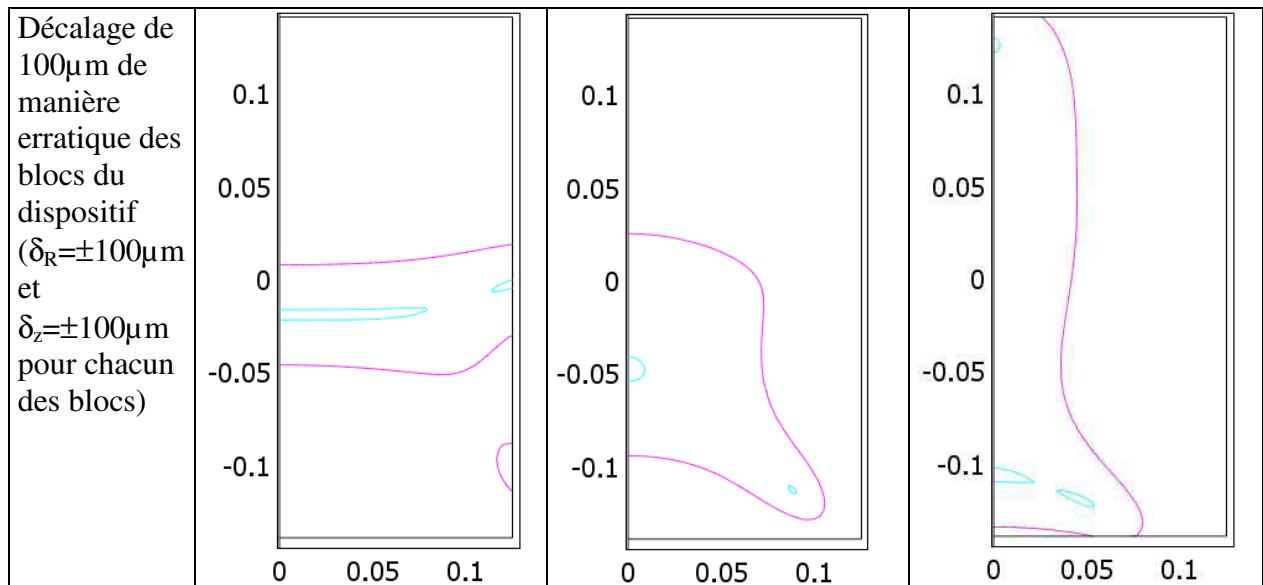
Annexe D : Effets des problèmes de conception sur la taille de la zone de lévitation à 1%

Nous allons décaler certains des blocs constituant le dispositif LOLA et observer les effets produits sur la zone de travail à 1%. Le décalage s'effectuera suivant le rayon ($R+\delta_R$) ou la hauteur ($z+\delta_z$) avec différentes amplitudes. Le rectangle représente une section de hauteur 30 cm de l'anticryostat de 12,5 cm de rayon. En violet est représentée la zone à 1% et en bleu la zone à 1‰. L'axe de révolution du système est situé sur la gauche des figures.









La dernière ligne du tableau présente la zone utile lorsque les blocs sont placés avec une précision de $100\mu\text{m}$ (en hauteur et en rayon).

Le volume de la cellule de forme cylindrique contenue dans la zone utile à 1% est respectivement pour $k=0,1$; $k=0,5$ et $k=0,75$ de 1,76L, 1,43L et 1L volumes à comparer au cas idéal 1,47L ; 1,62L et 1,78L. On peut considérer que le système n'est pas trop dégradé car les volumes restent supérieurs au litre désiré.

Annexe E

Annexe E : Décomposition du sous-ensemble créant le champ dipolaire

Un programme Maple® de décomposition en harmoniques zonaux est fourni dans cette annexe. Il décompose un dispositif constitué de trois solénoïdes. Les dimensions de ce dispositif sont obtenues à partir de l'article de M.W. Garrett de 1967 paru dans *Journal of Applied Physics* intitulé « *Thick cylindrical coil systems for strong magnetic fields with field or gradient homogeneities of the 6th to 20th order* », en choisissant les valeurs de la densité de courant et de l'induction au centre du système. Il doit permettre d'obtenir un champ magnétique constant au sixième ordre près.

Programme commenté :

Initialisation des variables

```
restart;
```

Choix du domaine de définition des polynômes de Legendre

```
_EnvLegendreCut := 1..infinity;
```

```
P:=(n,x)->LegendreP(n,0,x):
```

On détermine le rang N auquel se terminera la décomposition harmonique

```
N:=6:
```

La densité de courant injecté dans chacun des bobinages

```
J0:=-60e6:
```

On fixe le nombre total de solénoïdes du système *nb_tot*. La variable *nb_sup* représente le nombre de solénoïdes dans la partie supérieure du dispositif (entre 0 et $\pi/2$), ici puisqu'il y a trois solénoïdes dont un central, *nb_sup*=1.

```
nb_tot:=3:
```

```
nb_sup:=1:
```

On définit les polynômes de Legendre d'ordre 1 et de degré n

```
for i from 1 to N do
```

```
P[1,i]:=unapply(expand((sin(theta)*diff(simplify(LegendreP(i,0,cos(theta))),theta))),theta);
```

```
end do;
```

Ici sont définies les valeurs en rapport avec l'article de M. W. Garrett, les dimensions dans cet article sont réduites par une longueur *r0* qui est définie en fonction de l'induction *B* et de la densité de courant *J*.

```
B:=5:
```

```
J:=60e6:
```

```
r0:=4.9086*B/(4*3.14159265358*1e-7*J):
```

```
r1:=0.272775:
```

```
D2:=0.5*r0:
```

```
B2:=0.52108*r0:
```

```
D1:=0.828187*0.5^2*r0:
```

```
B1:=0.76002*r0:
```

```
Z1:=0.5*0.76002*r0:
```

```
Z2:=1.18141*r0:
```

```
A1:=0.910934*r0:
```

```
A2:=r0:
```

Définitions à partir des valeurs précédentes du positionnement rayon *r* et hauteur *z*, et de la géométrie du solénoïde épaisseur *W* et hauteur *H* (fig. 32 chapitre III) des parties supérieures

et inférieures du dispositif (respectivement les bobines Bab1 et Bab3 du chapitre III section 3.3.1)

```
r(1,1):=evalf(A2-D2/2,'4');
r(2,1):=evalf(A2-D2/2,'4');
z(1,1):=evalf(Z2-B2/2,'4');
z(2,1):=evalf(Z2-B2/2,'4');
W(1,1):=evalf(D2,'4');
W(2,1):=evalf(D2,'4');
H(1,1):=evalf(B2,'4');
H(2,1):=evalf(B2,'4');
```

Partie centrale du dispositif (Bab2 chapitre III section 3.3.1)

```
HH:=evalf(2*B1,'4');
Rint:=evalf(A1-D1/2,'4');
Rext:=evalf(A1+D1/2,'4');
Ra:=sqrt(Rint^2+HH^2/4);
Rb:=sqrt(Rext^2+HH^2/4);
```

$r(1,1) := 0.2441$

$z(1,1) := 0.2998$

$W(1,1) := 0.1628$

$H(1,1) := 0.1696$

$HH := 0.4948$

$Rint := 0.2628$

$Rext := 0.3302$

Définitions des rayons utilisés par la suite pour calculer les angles permettant de décomposer le dispositif en harmoniques sphériques (zonaux)

```
for i from 1 to 2*nb_sup do
R1(i,1):=sqrt(r(i,1)^2+z(i,1)^2);
R2(i,1):=sqrt(r(i,1)^2+(z(i,1)+H(i,1))^2);
R3(i,1):=sqrt((r(i,1)+W(i,1))^2+z(i,1)^2);
R4(i,1):=sqrt((r(i,1)+W(i,1))^2+(z(i,1)+H(i,1))^2);
end do;
```

Calcul des angles limites pour les solénoïdes Bab1 et Bab3 (cf. annexe "Décomposition harmonique d'un solénoïde à section rectangulaire suivant un point de son axe de symétrie").

La décomposition est calculée à partir de ces angles.

```
for i from 1 to nb_sup do
alpha1[i]:=arcsin(r(i,1)/Ro);
beta1[i]:=arccos(z(i,1)/Ro);
end do;
for i from nb_sup+1 to nb_tot do
alpha1[i]:=Pi/2+arcsin(z(i,1)/Ro);
beta1[i]:=Pi/2+arccos(r(i,1)/Ro);
end do;
for i from 1 to nb_sup do
alpha2[i]:=arccos((z(i,1)+H(i,1))/Ro);
beta2[i]:=arccos(z(i,1)/Ro);
end do;
for i from nb_sup+1 to nb_tot do
```

```

alpha2[i]:=Pi/2+arcsin(z(i,1)/Ro);
beta2[i]:=Pi/2+arcsin((z(i,1)+H(i,1))/Ro);
end do:
for i from 1 to nb_sup do
alpha2bis[i]:=arcsin(r(i,1)/Ro);
beta2bis[i]:=arcsin((r(i,1)+W(i,1))/Ro);
end do:
for i from nb_sup+1 to nb_tot do
alpha2bis[i]:=Pi/2+arccos((r(i,1)+W(i,1))/Ro);
beta2bis[i]:=Pi/2+arccos(r(i,1)/Ro);
end do:
for i from 1 to nb_sup do
alpha3[i]:=arccos((z(i,1)+H(i,1))/Ro);
beta3[i]:=arcsin((r(i,1)+W(i,1))/Ro);
end do:
for i from nb_sup+1 to nb_tot do
alpha3[i]:=Pi/2+arccos((r(i,1)+W(i,1))/Ro);
beta3[i]:=Pi/2+arcsin((z(i,1)+H(i,1))/Ro);
end do:

```

Calcul des angles pour le solénoïde central

```

theta1a:=arcsin(Rint/Ro):
theta1b:=Pi/2:
theta2a:=arccos(HH/(2*Ro)):
theta2b:=Pi/2:
theta2bisa:=arcsin(Rint/Ro):
theta2bisb:=arcsin(Rext/Ro):
theta3a:=arccos(HH/(2*Ro)):
theta3b:=arcsin(Rext/Ro):

```

On crée la décomposition pour un solénoïde de la fonction créneau du courant, il y a une valeur du coefficient "b" différente selon les domaines R1 R2 (R1 R3) ou R2 R3 (R3 R2) ou R3 R4 (R2 R4) si $R2 < R3$ ($R3 < R2$) d'où les valeurs de b1, b2 et b3.

```

b1:=(n,i) -> int(P[1,n](x),x=alpha1[i]..beta1[i]):
b2:=(n,i) -> int(P[1,n](x),x=alpha2[i]..beta2[i]):
b2bis:=(n,i) -> int(P[1,n](x),x=alpha2bis[i]..beta2bis[i]):
b3:=(n,i) -> int(P[1,n](x),x=alpha3[i]..beta3[i]):

```

Du fait de la symétrie du solénoïde central certaines simplifications dans la décomposition harmonique peuvent être faites.

```

for p from 0 to N do
bc1[2*p]:=0;
bc1[2*p+1]:=2*int(P[1,2*p+1](x),x=theta1a..theta1b);
end do:
for p from 0 to N do
bc2[2*p]:=0;
bc2[2*p+1]:=2*int(P[1,2*p+1](x),x=theta2a..theta2b);
end do:
for p from 0 to N do
bc2bis[2*p]:=0;
bc2bis[2*p+1]:=2*int(P[1,2*p+1](x),x=theta2bisa..theta2bisb);
end do:
for p from 0 to N do
bc3[2*p]:=0;

```

```
bc3[2*p+1]:=2*int(P[1,2*p+1](x),x=theta3a..theta3b);
end do;
```

On va ensuite intégrer selon le rayon Ro, il y a une condition car le calcul se fait différemment si $R2 < R3$ que si $R2 > R3$, il existe un b2 et un b2bis.

```
for n from 1 to N do
for i from 1 to 2*nb_sup do
if (R2(i,1) < R3(i,1)) then
DD(n,i):=(int(b1(n,i)/Ro^(n-1),Ro=R1(i,1)..R2(i,1))+int(b2(n,i)/Ro^(n-1),Ro=R2(i,1)..R3(i,1))+int(b3(n,i)/Ro^(n-1),Ro=R3(i,1)..R4(i,1)))/(2*n);
else
DD(n,i):=(int(b1(n,i)/Ro^(n-1),Ro=R1(i,1)..R3(i,1))+int(b2bis(n,i)/Ro^(n-1),Ro=R3(i,1)..R2(i,1))+int(b3(n,i)/Ro^(n-1),Ro=R2(i,1)..R4(i,1)))/(2*n);
end if;
end do;
```

Pour le solénoïde central, la condition est différente, elle dépend de Ra et Rext (cf. annexe « Décomposition harmonique d'un solénoïde à section rectangulaire suivant un point de son axe de symétrie.»)

```
if(Rext > Ra) then
DD(n,nb_tot):=(int(bc1[n]/Ro^(n-1),Ro=Rint..Ra)+int(bc2[n]/Ro^(n-1),Ro=Ra..Rext)+int(bc3[n]/Ro^(n-1),Ro=Rext..Rb))/(2*n);
else
DD(n,nb_tot):=(int(bc1[n]/Ro^(n-1),Ro=Rint..Rext)+int(bc2bis[n]/Ro^(n-1),Ro=Rext..Ra)+int(bc3[n]/Ro^(n-1),Ro=Ra..Rb))/(2*n);
end if;
end do;
```

Matrice fournissant l'amplitude des N=6 premiers harmoniques zonaux (lignes) des trois solénoïdes (colonnes) aux courants près.

```
Mat:=Matrix(N,nb_tot,DD);
```

$$Mat := \begin{bmatrix} -0.01154783780 & -0.01154783780 & -0.04322300964 \\ -0.02603244180 & 0.02603244180 & 0. \\ -0.04262242752 & -0.04262242752 & 0.08524751055 \\ -0.04415137284 & 0.04415137284 & 0. \\ 0.006167633150 & 0.006167633150 & -0.01240799370 \\ 0.1576536770 & -0.1576536770 & 0. \end{bmatrix}$$

On crée le vecteur courant (valeur de la densité dans les trois solénoïdes) 60 A/mm².

```
jj:=(i)-> J0;
JJJ:= Matrix(nb_tot,1,jj);
```

$jj := i \rightarrow J0$

$$JJJ := \begin{bmatrix} -0.60 \cdot 10^8 \\ -0.60 \cdot 10^8 \\ -0.60 \cdot 10^8 \end{bmatrix}$$

Obtention des N=6 premiers coefficients C1, C2, C3, C4, C5 et C6 pour le sous-ensemble B1:

with(LinearAlgebra):

CCobtenu:=evalf(Mat.JJJ, '6');

Vérification de la valeur de l'induction au centre du dispositif ($B1=\mu_0 \cdot C1$):

Bcentre:=(4*evalf(Pi, '7')*1e-7)*CCobtenu[1,1];

$$CCobtenu := \begin{bmatrix} 0.3979120 \cdot 10^7 \\ 0. \\ -159.330999999999988 \\ 0. \\ 4363.640000000000034 \\ 0. \end{bmatrix}$$

$$Bcentre := 5.000310216$$

Annexe F

Annexe F : Dimensionnement du sous-ensemble créant le champ quadrupolaire

Ce programme Maple® permet de dimensionner un dispositif générant un champ quadrupolaire constant au 6^{ème} ordre près à partir d'un ensemble de six solénoïdes à section rectangulaire.

Programme commenté

Initialisation de toutes les variables

```
restart;
```

Domaine de définition polynômes de Legendre

```
_EnvLegendreCut := 1..infinity;
```

```
P:=(n,x)->LegendreP(n,0,x):
```

On se fixe nb_tot le nombre de solénoïdes = 6 (car on utilise trois paires de solénoïdes) et le nombre d'harmonique $N=6$ de la décomposition.

```
N:=6:
```

```
nb_tot:=6:
```

```
nb_sup:=3:
```

On définit le polynôme $P_i^l(\cos\theta) = P_{l,i}(\theta)$ à partir de $P_i^0(\cos\theta) = \text{LegendreP}(i,0,\cos\theta)$.

```
for i from 1 to N do
```

```
P[1,i]:=unapply(expand((sin(theta)*diff(simplify(LegendreP(i,0,cos(theta))),theta))),theta);
```

```
end do;
```

On entre les valeurs des différents rayons de chacun des solénoïdes (ceux-ci sont déterminés après plusieurs essais de manière à ce que le système obtenu ait des dimensions réalisables pratiquement, et que les harmoniques de rangs supérieurs au 6^{ème} ne perturbent pas la lévitation).

```
r(1,1):=0.42;
```

```
r(2,1):=0.48;
```

```
r(3,1):=0.42;
```

```
r(4,1):=r(3,1):
```

```
r(5,1):=r(2,1):
```

```
r(6,1):=r(1,1):
```

```
r(1,1) := 0.42
```

```
r(2,1) := 0.48
```

```
r(3,1) := 0.42
```

En fonction du rayon r on connaît la hauteur z des solénoïdes (fig. 2 chapitre III), ce rapport est calculé de sorte que si les solénoïdes étaient des spires filiformes, les paires de solénoïdes Bab4 Bab9 et Bab6 Bab7 ne créent pas d'harmonique 6 et que la paire de solénoïdes Bab5 Bab8 ne crée pas d'harmonique 4 (cf. 3.3.2 chapitre III)

```
evalf(r(1,1)*((sqrt(sqrt(15)+5)/4)), '5');
```

```
z(1,1):=0.3128;
```

```
evalf(r(2,1)*sqrt(3/4), '5');
```

```
z(2,1):=0.4157;
```

```
evalf(r(3,1)*((sqrt(-sqrt(15)+5)/4)), '5');
```

```
z(3,1):=0.1115;
```

```

z(4,1):=z(3,1):
z(5,1):=z(2,1):
z(6,1):=z(1,1):

```

```
0.31277
```

```
z(1,1):=0.3128
```

```
0.41570
```

```
z(2,1):=0.4157
```

```
0.11147
```

```
z(3,1):=0.1115
```

Epaisseurs des différents solénoïdes, ajustées en fonction de la densité de courant désirée (ici 60A/mm²) par itérations successives.

```

W(1,1):=0.0377;
W(2,1):=0.0952;
W(3,1):=0.0144;
W(4,1):=W(3,1):
W(5,1):=W(2,1):
W(6,1):=W(1,1):

```

```
W(1,1):=0.0377
```

```
W(2,1):=0.0952
```

```
W(3,1):=0.0144
```

Hauteurs des différents solénoïdes, les sections sont choisies carrées H=W mais un ajustement est éventuellement réalisé pour gagner en précision sur la densité de courant.

```

H(1,1):=W(1,1)+0.000;
H(2,1):=W(2,1)-0.000;
H(3,1):=W(3,1)-0.0001;
H(4,1):=H(3,1):
H(5,1):=H(2,1):
H(6,1):=H(1,1):

```

```
H(1,1):=0.0377
```

```
H(2,1):=0.0952
```

```
H(3,1):=0.0143
```

Les différents rayons sont définis à partir des dimensions précédentes, ils permettent d'obtenir les différents secteurs d'intégration.

```

for i from 1 to N do
R1(i,1):=sqrt(r(i,1)^2+z(i,1)^2):
R2(i,1):=sqrt(r(i,1)^2+(z(i,1)+H(i,1))^2):
R3(i,1):=sqrt((r(i,1)+W(i,1))^2+z(i,1)^2):
R4(i,1):=sqrt((r(i,1)+W(i,1))^2+(z(i,1)+H(i,1))^2):
end do:

```

On calcule les différents angles, permettant la décomposition des densités de courants (intersection d'une sphère avec la section d'un solénoïde) en polynôme de Legendre P_{1,n}(theta) (cf. annexe « Décomposition harmonique d'un solénoïde à section rectangulaire suivant un point de son axe de symétrie. »)

```
for i from 1 to nb_sup do
```

```

alpha1[i]:=arcsin(r(i,1)/Ro);
beta1[i]:=arccos(z(i,1)/Ro);
end do:
for i from nb_sup+1 to nb_tot do
alpha1[i]:=Pi/2+arcsin(z(i,1)/Ro);
beta1[i]:=Pi/2+arccos(r(i,1)/Ro);
end do:
for i from 1 to nb_sup do
alpha2[i]:=arccos((z(i,1)+H(i,1))/Ro);
beta2[i]:=arccos(z(i,1)/Ro);
end do:
for i from nb_sup+1 to nb_tot do
alpha2[i]:=Pi/2+arcsin(z(i,1)/Ro);
beta2[i]:=Pi/2+arcsin((z(i,1)+H(i,1))/Ro);
end do:
for i from 1 to nb_sup do
alpha2bis[i]:=arcsin(r(i,1)/Ro);
beta2bis[i]:=arcsin((r(i,1)+W(i,1))/Ro);
end do:
for i from nb_sup+1 to nb_tot do
alpha2bis[i]:=Pi/2+arccos((r(i,1)+W(i,1))/Ro);
beta2bis[i]:=Pi/2+arccos(r(i,1)/Ro);
end do:
for i from 1 to nb_sup do
alpha3[i]:=arccos((z(i,1)+H(i,1))/Ro);
beta3[i]:=arcsin((r(i,1)+W(i,1))/Ro);
end do:
for i from nb_sup+1 to nb_tot do
alpha3[i]:=Pi/2+arccos((r(i,1)+W(i,1))/Ro);
beta3[i]:=Pi/2+arcsin((z(i,1)+H(i,1))/Ro);
end do:

```

On crée la décomposition pour un bloc de la fonction créneau du courant, il y a une valeur de "b" différente selon les domaines R1 R2 (R1 R3) ou R2 R3 (R3 R2) ou R3 R4 (R2 R4) d'où les b1 b2 b3 (b1 b2bis b3)

```

b1:=(n,i) -> int(P[1,n](x),x=alpha1[i]..beta1[i]):
b2:=(n,i) -> int(P[1,n](x),x=alpha2[i]..beta2[i]):
b2bis:=(n,i) -> int(P[1,n](x),x=alpha2bis[i]..beta2bis[i]):
b3:=(n,i) -> int(P[1,n](x),x=alpha3[i]..beta3[i]):

```

On va ensuite intégrer selon le rayon Ro, il y a une condition car le calcul se fait différemment selon que $R2 < R3$ ou $R2 > R3$, d'où l'existence d'un b2 et d'un b2bis selon le cas. Ceci nous permet d'obtenir les différents coefficients compris dans le champ magnétique créé par cet ensemble de solénoïdes. En réalité on est en train d'intégrer l'élément de champ créé par un élément de densité de courant volumique, en quelque sorte un courant surfacique

```

for n from 1 to N do
for i from 1 to nb_tot do
if (R2(i,1) < R3(i,1)) then
DD(n,i):=(int(b1(n,i)/Ro^(n-1),Ro=R1(i,1)..R2(i,1))+int(b2(n,i)/Ro^(n-1),Ro=R2(i,1)..R3(i,1))+int(b3(n,i)/Ro^(n-1),Ro=R3(i,1)..R4(i,1)))/(2*n);
else

```

```

DD(n,i):=(int(b1(n,i)/Ro^(n-
1),Ro=R1(i,1)..R3(i,1))+int(b2bis(n,i)/Ro^(n-
1),Ro=R3(i,1)..R2(i,1))+int(b3(n,i)/Ro^(n-
1),Ro=R2(i,1)..R4(i,1)))/(2*n);
end if;
end do;
end do;

```

On définit la matrice contenant les coefficients de la décomposition, pour chacun des *nb_tot* solénoïdes, on a la décomposition en N harmoniques. On peut ensuite en injectant une densité de courant différente dans chacun des blocs obtenir la décomposition de l'ensemble du système. Ou en choisissant la décomposition que l'on veut, on peut obtenir la densité de courant à mettre dans chacun des solénoïdes.

```
Mat:=Matrix(N,nb_tot,DD);
```

```

Mat:=
[ -0.0008223084105  -0.003645488477  -0.0002155828139  -0.0002155828139  -0.003645488477  -0.0008223084105
  -0.001351434148  -0.005130995310  -0.0001951657010  0.0001951657010  0.005130995310  -0.001351434148
  -0.001109517054  -0.004332625146  0.0003519809276  0.0003519809276  -0.004332625146  -0.001109517054
  0.0008490770520  -0.0001859482988  0.001033581143  -0.001033581143  0.0001859482988  -0.0008490770520
  0.004423640500  0.006269300365  -0.0002199605711  -0.0002199605711  0.006269300365  0.004423640500
  0.006641652075  0.01108920432  -0.004449362846  0.004449362846  -0.01108920432  -0.006641652075 ]

```

On choisit les valeurs d'induction et de gradient désirées, la valeur de l'induction doit concorder avec celle créée au centre du dispositif par le sous-ensemble B1, c'est à dire le dispositif de Garrett créant le champ dipolaire.

```

B0:=5;
G0:=12;
pi:=evalf('Pi',6):
mu0:=4*pi*1e-7:

```

On rentre le vecteur densité de courant que l'on souhaite

```

J[1]:=J1:
J[2]:=J2:
J[3]:=J3:
J[4]:=-J3:
J[5]:=-J2:
J[6]:=-J1:
jj:=(i)-> J[i]:
JJJ:= Matrix(nb_tot,1,jj):

```

```
B0 := 5
```

```
G0 := 12
```

```
with(LinearAlgebra):
```

Valeur des harmoniques avec les densités de courant mises dans chacun des solénoïdes.

```
CCobtenu:=evalf(Mat.JJJ,'6');
```

$$CCobtenu := \begin{bmatrix} 0. \\ -0.00270286 J1 - 0.0102620 J2 - 0.000390332 J3 \\ 0. \\ 0.00169815 J1 - 0.000371896 J2 + 0.00206716 J3 \\ 0. \\ 0.0132833 J1 + 0.0221784 J2 - 0.00889872 J3 \end{bmatrix}$$

Rappel de la valeurs des deux premiers harmoniques de la décomposition identique à toutes les configurations. La valeur de l'harmonique 3 correspond à celle de la configuration verticale, c'est pour cette configuration qu'elle est maximale en valeur absolue.

C[1] := B0/mu0 :

C[2] := 1/4 * G0/mu0/B0 :

C[3] := -1/24 * G0^2/B0^3/mu0 :

On résout maintenant un système de trois inconnues (les trois densités de courants) à trois équations :

1) l'harmonique 2 "coef2" de la décomposition de la géométrie entrée dans le programme doit être égal à l'harmonique 2 idéal C[2]

2) l'harmonique 4 "coef4" de la décomposition de la géométrie entrée dans le programme doit être égal à 0.

3) l'harmonique 6 "coef6" de la décomposition de la géométrie entrée dans le programme doit être égal à 0.

coef2 := unapply(10^6 * CCobtenu[2, 1], J1, J2, J3) ;

coef4 := unapply(10^6 * CCobtenu[4, 1], J1, J2, J3) ;

coef6 := unapply(10^6 * CCobtenu[6, 1], J1, J2, J3) ;

equa := {coef2(J1, J2, J3) = C[2], coef4(J1, J2, J3) = 0, coef6(J1, J2, J3) = 0} ;

sol := solve(equa) ;

coef2 := (J1, J2, J3) → -2702.860000 J1 - 10262.00000 J2 - 390.3320000 J3

coef4 := (J1, J2, J3) → 1698.150000 J1 - 371.8960000 J2 + 2067.160000 J3

coef6 := (J1, J2, J3) → 13283.30000 J1 + 22178.40000 J2 - 8898.720000 J3

sol := { J3 = -60.08977577, J2 = -60.04437470, J1 = 59.99759627 }

Si les densités de courants ne sont pas proches de la densité désirée, on réajuste les dimensions des bobinages en début de programme, par exemple on multiplie la hauteur H(1,1) par la racine carré du rapport densité de courant obtenue sur désirée, c'est à dire $\sqrt{J1/60} * H(1,1)$ respectivement $\sqrt{J2/60} * H(2,1)$ et $\sqrt{J3/60} * H(3,1)$

Ici, on vérifie la valeur des harmoniques obtenue par la géométrie précédemment définie et avec la densité de courant désirée (exacte).

J1 := 60e6 ;

J2 := -60e6 ;

J3 := -60e6 ;

CCobtenu[2, 1] ;

CCobtenu[4, 1] ;

CCobtenu[6, 1] ;

J1 := 0.60 10⁸

J2 := -0.60 10⁸

$$J3 := -0.60 \cdot 10^8$$

$$476968.320$$

$$173.160$$

$$217.20$$

On vérifie la valeur du gradient (T^2/m) obtenue au centre en combinant la valeur de l'harmonique, c'est à dire de l'induction obtenue par le solénoïde de Garrett (5,0003T) et celle de l'harmonique 2 obtenue par ce bobinage ($G1=4\mu_o \cdot C2 \cdot B1$):

$$4 * (4 * \text{evalf}(\text{Pi}, '7') * 1e-7) * \text{CCobtenu}[2, 1] * 5.000310216;$$

$$11.98826642$$

Annexe G

Annexe G : Décomposition harmonique d'un solénoïde à section rectangulaire suivant un point de son axe de symétrie.

Dans cette annexe est décrite la méthode utilisée pour obtenir la décomposition harmonique sur un point de l'axe de symétrie d'un solénoïde à section rectangulaire. Cette annexe est indispensable à la compréhension des programmes informatiques de décomposition harmoniques basés sur cette démarche.

Une première partie décrit le calcul pour un solénoïde situé au-dessus ou au-dessous du point de décomposition (point d'origine O). Puis une seconde où le point de décomposition est le centre du solénoïde. Et finalement, en combinant les résultats trouvés, on définit la décomposition d'un ensemble de solénoïdes.

1) Pour un solénoïde (bloc) supérieur ou inférieur au point de décomposition

Pour définir la géométrie d'un bloc (voir figure 1 de l'annexe), il suffit de connaître :

- la position de son point A (sommet le plus proche du centre O)
- sa hauteur (H)
- sa largeur (W)

à partir de ces données on peut calculer les 4 rayons (R_1, R_2, R_3 et R_4).

On se servira par la suite des valeurs R_1, R_2, R_3, R_4, W et H .

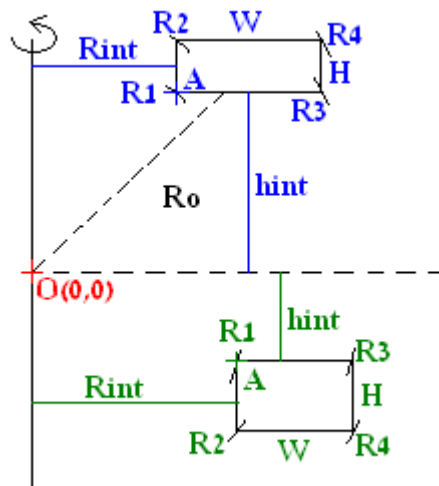
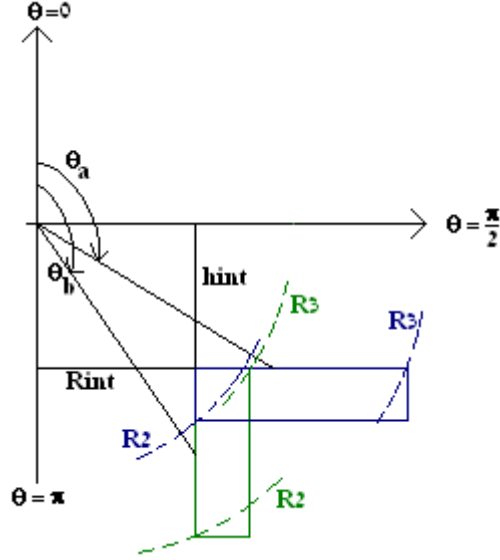


Figure 1

Calcul des angles pour le bloc supérieur :



Le domaine 1 : $R_1 < R_o < R_2$ si $R_2 < R_3$ ou $R_1 < R_o < R_3$ si $R_2 > R_3$:

$$(1) \begin{cases} \theta_{1a} = \frac{\pi}{2} + \arcsin\left(\frac{h_{int}}{R_o}\right) \\ \theta_{1b} = \frac{\pi}{2} + \arccos\left(\frac{R_{int}}{R_o}\right) \end{cases}$$

Le domaine 2 : $R_2 < R_o < R_3$ si $R_2 < R_3$:

$$(2) \begin{cases} \theta_{2a} = \frac{\pi}{2} + \arcsin\left(\frac{h_{int}}{R_o}\right) \\ \theta_{2b} = \frac{\pi}{2} + \arcsin\left(\frac{h_{int}+H}{R_o}\right) \end{cases}$$

Le domaine 2bis : $R_3 < R_o < R_2$ si $R_2 > R_3$:

$$(2bis) \begin{cases} \theta_{2bisa} = \frac{\pi}{2} + \arccos\left(\frac{R_{int}+W}{R_o}\right) \\ \theta_{2bisb} = \frac{\pi}{2} + \arccos\left(\frac{R_{int}}{R_o}\right) \end{cases}$$

Le domaine 3 : $R_3 < R_o < R_4$ si $R_2 < R_3$ ou $R_2 < R_o < R_4$ si $R_2 > R_3$:

$$(3) \begin{cases} \theta_{3a} = \frac{\pi}{2} + \arccos\left(\frac{R_{int}+W}{R_o}\right) \\ \theta_{3b} = \frac{\pi}{2} + \arcsin\left(\frac{h_{int}+H}{R_o}\right) \end{cases}$$

On calcule ensuite la décomposition des éléments de courant ∂K en harmoniques c'est à dire en $P_n^1(\cos\theta)$ où n représente le rang de l'harmonique :

$$\partial K_n = J \cdot \partial Ro \cdot b_n \cdot \frac{2n+1}{2n \cdot (n+1)} \cdot P_n^1(\cos \theta)$$

Le coefficient $\frac{2n+1}{2n \cdot (n+1)}$ sert à normer la décomposition en $P_n^1(\cos \theta)$. Une décomposition en polynômes de Legendre d'ordre m est normé par le coefficient $\frac{2n+1}{2} \cdot \frac{(n-m)!}{(n+m)!}$

On détermine donc tous les coefficients b_n :

$$b_n = \int_{\theta_a}^{\theta_b} \sin \theta \cdot P_n^1(\cos \theta) \cdot d\theta$$

c'est à dire qu'il faut calculer pour chacun des domaines 1, 2, 2bis et 3 la valeur des coefficients notés respectivement $b_n^1, b_n^2, b_n^{2bis}, b_n^3$:

Domaine 1 :

$$b_n^1 = \int_{\theta_{1a}}^{\theta_{1b}} \sin \theta \cdot P_n^1(\cos \theta) \cdot d\theta$$

Domaine 2 et 2bis :

$$b_n^2 = \int_{\theta_{2a}}^{\theta_{2b}} \sin \theta \cdot P_n^1(\cos \theta) \cdot d\theta \quad b_n^{2bis} = \int_{\theta_{2bisa}}^{\theta_{2bisb}} \sin \theta \cdot P_n^1(\cos \theta) \cdot d\theta$$

Domaine 3 :

$$b_n^3 = \int_{\theta_{3a}}^{\theta_{3b}} \sin \theta \cdot P_n^1(\cos \theta) \cdot d\theta$$

nous connaissons la décomposition de l'élément de couche de courant, il faut déterminer l'élément de champ qu'il va créer puis intégrer sur l'ensemble de la bobine :

$$\partial H_{int_n} = \begin{cases} -J \cdot \frac{b_n}{2} \cdot \left(\frac{r}{Ro}\right)^{n-1} \cdot \partial Ro \cdot P_n^0(\cos \theta) \\ J \cdot \frac{b_n}{2n} \cdot \left(\frac{r}{Ro}\right)^{n-1} \cdot \partial Ro \cdot P_n^1(\cos \theta) \end{cases}$$

on obtient ainsi par intégration le champ :

$$H_{int_n} = \begin{cases} \int_{R1}^{R4} -J \cdot \frac{b_n}{2} \cdot \left(\frac{r}{Ro}\right)^{n-1} \cdot \partial Ro \cdot P_n^0(\cos \theta) \\ \int_{R1}^{R4} J \cdot \frac{b_n}{2n} \cdot \left(\frac{r}{Ro}\right)^{n-1} \cdot \partial Ro \cdot P_n^1(\cos \theta) \end{cases}$$

or la valeur des b_n est différente suivant la valeur du rayon et deux cas existent,

$$\begin{aligned} \text{si } R_2 < R_3 : \quad H_{intn} &= \begin{bmatrix} \frac{-J}{2} \cdot r^{n-1} \cdot P_n^0(\cos\theta) \left[\int_{R_1}^{R_2} \frac{b_n^1}{Ro^{n-1}} \cdot \partial Ro + \int_{R_2}^{R_3} \frac{b_n^2}{Ro^{n-1}} \cdot \partial Ro + \int_{R_3}^{R_4} \frac{b_n^3}{Ro^{n-1}} \cdot \partial Ro \right] \\ \frac{J}{2n} \cdot r^{n-1} \cdot P_n^1(\cos\theta) \left[\int_{R_1}^{R_2} \frac{b_n^1}{Ro^{n-1}} \cdot \partial Ro + \int_{R_2}^{R_3} \frac{b_n^2}{Ro^{n-1}} \cdot \partial Ro + \int_{R_3}^{R_4} \frac{b_n^3}{Ro^{n-1}} \cdot \partial Ro \right] \end{bmatrix} \\ \text{si } R_2 > R_3 : \quad H_{intn} &= \begin{bmatrix} \frac{-J}{2} \cdot r^{n-1} \cdot P_n^0(\cos\theta) \left[\int_{R_1}^{R_3} \frac{b_n^1}{Ro^{n-1}} \cdot \partial Ro + \int_{R_3}^{R_2} \frac{b_n^{2bis}}{Ro^{n-1}} \cdot \partial Ro + \int_{R_2}^{R_4} \frac{b_n^3}{Ro^{n-1}} \cdot \partial Ro \right] \\ \frac{J}{2n} \cdot r^{n-1} \cdot P_n^1(\cos\theta) \left[\int_{R_1}^{R_3} \frac{b_n^1}{Ro^{n-1}} \cdot \partial Ro + \int_{R_3}^{R_2} \frac{b_n^{2bis}}{Ro^{n-1}} \cdot \partial Ro + \int_{R_2}^{R_4} \frac{b_n^3}{Ro^{n-1}} \cdot \partial Ro \right] \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Ces expressions du champ sont uniquement valables pour $r < R_1$.

Nous pouvons poser selon les cas :

$$D_n = \left[\int_{R_1}^{R_3} \frac{b_n^1}{Ro^{n-1}} \cdot \partial Ro + \int_{R_3}^{R_2} \frac{b_n^{2bis}}{Ro^{n-1}} \cdot \partial Ro + \int_{R_2}^{R_4} \frac{b_n^3}{Ro^{n-1}} \cdot \partial Ro \right] \quad \text{ou} \quad D_n = \left[\int_{R_1}^{R_2} \frac{b_n^1}{Ro^{n-1}} \cdot \partial Ro + \int_{R_2}^{R_3} \frac{b_n^2}{Ro^{n-1}} \cdot \partial Ro + \int_{R_3}^{R_4} \frac{b_n^3}{Ro^{n-1}} \cdot \partial Ro \right]$$

ce qui donne pour le champ intérieur ($r < R_1$) :

$$H_{intn} = \begin{bmatrix} \frac{-J}{2} \cdot r^{n-1} \cdot D_n \cdot P_n^0(\cos\theta) \\ \frac{J}{2n} \cdot r^{n-1} \cdot D_n \cdot P_n^1(\cos\theta) \end{bmatrix}$$

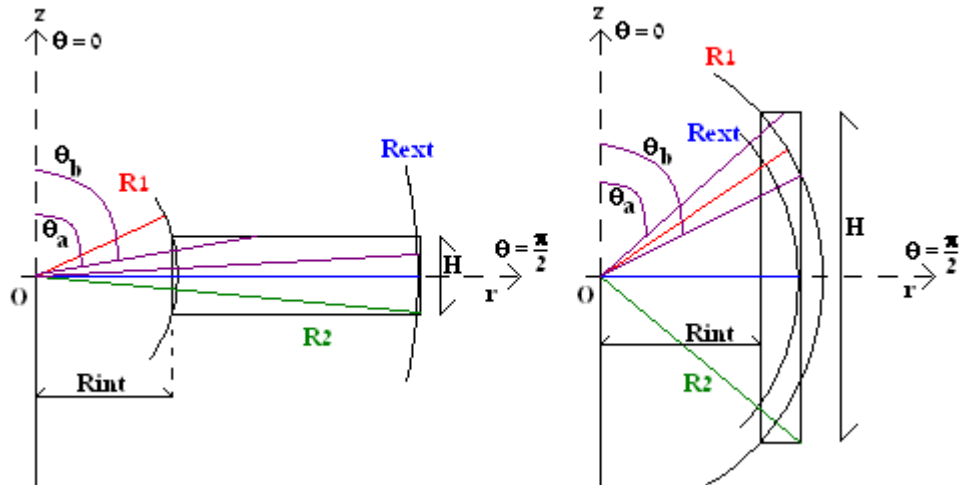
D'où l'expression du courant surfacique équivalent sur une sphère de rayon $Ro < R_1$ donnant cette répartition de champ à l'intérieur de cette sphère :

$$K_n(\theta) = \frac{2n+1}{n+1} \cdot Ro^{n-1} \cdot \frac{J}{2n} \cdot D_n \cdot P_n^1(\cos\theta)$$

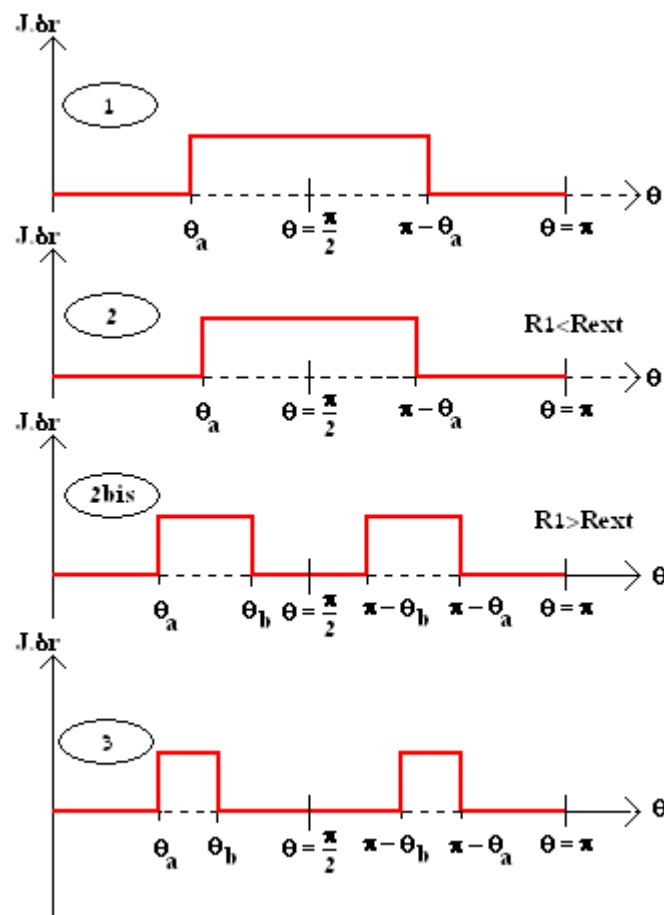
2) Pour un bloc central

Nous allons maintenant effectuer ces mêmes calculs pour le bloc central supposé symétrique par rapport à l'axe $\theta = \frac{\pi}{2}$, s'il n'est pas symétrique le calcul est plus complexe puisque de multiples cas sont à prendre en compte sauf si on décompose le bloc en deux sous blocs séparés par l'axe $\theta = \frac{\pi}{2}$ qu'on applique la méthode décrite précédemment pour chacun des sous blocs et qu'on ajoute les deux décompositions obtenues pour trouver la décomposition du bloc entier.

Voici les deux cas qui peuvent se présenter pour le bloc central, soit comme sur la figure de gauche $R_1 < R_{ext}$, soit sur la figure de droite $R_1 > R_{ext}$.



Nous pouvons représenter les différentes couches de courants par domaine que l'on doit décomposer en polynômes de Legendre d'ordre 1 ;



Le domaine 1 : $R_{int} < R_o < R_1$ si $R_1 < R_{ext}$ ou $R_{int} < R_o < R_{ext}$ si $R_1 > R_{ext}$:

$$(1) \begin{cases} \theta_{1a} = \arcsin\left(\frac{R_{int}}{R_o}\right) \\ \theta_{1b} = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Le domaine 2 : $R_1 < R_o < R_{ext}$ si $R_1 < R_{ext}$:

$$(2) \begin{cases} \theta_{2a} = \arccos\left(\frac{H}{2.Ro}\right) \\ \theta_{2b} = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Le domaine 2bis : $R_{ext} < R_o < R_1$ si $R_1 > R_{ext}$:

$$(2bis) \begin{cases} \theta_{2bisa} = \arcsin\left(\frac{R_{int}}{Ro}\right) \\ \theta_{2bisb} = \arcsin\left(\frac{R_{ext}}{Ro}\right) \end{cases}$$

Le domaine 3 : $R_{ext} < R_o < R_2$ si $R_1 < R_{ext}$ ou $R_1 < R_o < R_2$ si $R_1 > R_{ext}$:

$$(3) \begin{cases} \theta_{3a} = \arccos\left(\frac{H}{2.Ro}\right) \\ \theta_{3b} = \arcsin\left(\frac{R_{ext}}{Ro}\right) \end{cases}$$

Pour le calcul des coefficients b_n on peut montrer par le calcul* que les coefficients pairs sont nuls et que les coefficients impairs sont le double des coefficients impairs produits par un des deux sous-blocs :

Domaine 1 :

$$b_{2p+1}^1 = 2 \cdot \int_{\theta_{1a}}^{\theta_{1b}} \sin\theta \cdot P_{2p+1}^1(\cos\theta) \cdot d\theta$$

Domaine 2 et 2bis :

$$b_{2p+1}^2 = 2 \cdot \int_{\theta_{2a}}^{\theta_{2b}} \sin\theta \cdot P_{2p+1}^1(\cos\theta) \cdot d\theta \quad b_{2p+1}^{2bis} = 2 \cdot \int_{\theta_{2bisa}}^{\theta_{2bisb}} \sin\theta \cdot P_{2p+1}^1(\cos\theta) \cdot d\theta$$

Domaine 3 :

$$b_{2p+1}^3 = 2 \cdot \int_{\theta_{3a}}^{\theta_{3b}} \sin\theta \cdot P_{2p+1}^1(\cos\theta) \cdot d\theta$$

et le coefficient D_n s'écrit :

$$D_n = \left[\int_{R_{int}}^{R_1} \frac{b_n^1}{Ro^{n-1}} \cdot \partial Ro + \int_{R_1}^{R_{ext}} \frac{b_n^2}{Ro^{n-1}} \cdot \partial Ro + \int_{R_{ext}}^{R_2} \frac{b_n^3}{Ro^{n-1}} \cdot \partial Ro \right]$$

ou $D_n = \left[\int_{R_{int}}^{R_{ext}} \frac{b_n^1}{Ro^{n-1}} \cdot \partial Ro + \int_{R_{ext}}^{R_1} \frac{b_n^{2bis}}{Ro^{n-1}} \cdot \partial Ro + \int_{R_1}^{R_2} \frac{b_n^3}{Ro^{n-1}} \cdot \partial Ro \right]$

ce qui donne pour le champ intérieur ($r < R_1$) :

$$H_{intn} = \begin{cases} -\frac{J}{2} \cdot r^{n-1} \cdot D_n \cdot P_n^0(\cos\theta) \\ \frac{J}{2n} \cdot r^{n-1} \cdot D_n \cdot P_n^1(\cos\theta) \end{cases}$$

D'où l'expression du courant surfacique équivalent sur une sphère de rayon $R_0 < R_1$ donnant cette répartition de champ à l'intérieur de cette sphère :

$$K_n(\theta) = \frac{2n+1}{n+1} \cdot R_0^{n-1} \cdot \frac{J}{2n} \cdot D_n \cdot P_n^1(\cos\theta)$$

3) Pour un ensemble de blocs

Comme on connaît la densité équivalente créée par le bloc « i » sur la sphère R_0 , harmonique par harmonique, dont l'expression pour l'harmonique « n » est :

$$K_{n,i}(\theta) = \frac{2n+1}{2n \cdot (n+1)} \cdot J_i \cdot D_{n,i} \cdot R_0^{n-1} \cdot P_n^1(\cos\theta)$$

il suffit de sommer bloc par bloc, c'est à dire pour l'harmonique « n » :

$$\sum_{i=1}^{nb_bloc} K_{n,i}(\theta) = \sum_{i=1}^{nb_bloc} \frac{2n+1}{2n \cdot (n+1)} \cdot J_i \cdot D_{n,i} \cdot R_0^{n-1} \cdot P_n^1(\cos\theta)$$

nb_bloc est le nombre de blocs total. Puis d'égaliser à l'harmonique de la densité de courant théorique $\frac{2n+1}{n+1} \cdot R_0^{n-1} \cdot C_n \cdot P_n^1(\cos\theta)$, où les valeurs des différents coefficients C_n sont parfaitement connues, d'où l'égalité suivante :

$$\begin{aligned} \frac{2n+1}{n+1} \cdot C_n &= \frac{2n+1}{n+1} \cdot \sum_{i=1}^{nb_bloc} \frac{D_{n,i}}{2n} \cdot J_i \\ \Rightarrow C_n &= \sum_{i=1}^{nb_bloc} \frac{D_{n,i}}{2n} \cdot J_i \end{aligned}$$

qui nous donne une relation matricielle :

$$C = D \cdot J$$

avec C le vecteur colonne d'élément C_n , D la matrice d'élément $\frac{D_{n,i}}{2n}$ de la n ème ligne et i ème colonne et J le vecteur colonne d'élément J_i .

On doit choisir un nombre de blocs équivalent au nombre d'harmoniques que l'on souhaite créer, la matrice D est ainsi carrée (normalement non singulière) donc inversible. On obtient ainsi directement les courants à injecter dans les différents blocs pour obtenir la répartition de champ souhaitée à l'intérieur de la sphère comprise dans l'ensemble des blocs :

$$J = D^{-1} \cdot C$$

* :

Soit le coefficient b_n :

$$b_n = \int_{\theta a}^{\theta b} \sin \theta . P_n^1(\cos \theta) . d\theta + \int_{\pi - \theta b}^{\pi - \theta a} \sin \theta . P_n^1(\cos \theta) . d\theta$$

je fais le changement de variable $\theta \rightarrow \pi - \theta$ donc :

$$\pi - \theta a \rightarrow \theta a$$

$$\pi - \theta b \rightarrow \theta b$$

$$\sin \theta \rightarrow \sin(\pi - \theta) = \sin \theta$$

$$\cos \theta \rightarrow \cos(\pi - \theta) = -\cos \theta$$

$$d\theta \rightarrow -d\theta$$

$$P_n^1(\cos \theta) \rightarrow P_n^1(-\cos \theta) = (-1)^{n+1} . P_n^1(\cos \theta)$$

ce qui me donne :

$$\begin{aligned} b_n &= \int_{\theta a}^{\theta b} \sin \theta . P_n^1(\cos \theta) . d\theta + \int_{\theta b}^{\theta a} \sin \theta . [(-1)^{n+1} . P_n^1(\cos \theta)] . [-d\theta] \\ &\Leftrightarrow b_n = \int_{\theta a}^{\theta b} \sin \theta . P_n^1(\cos \theta) . d\theta + (-1)^{n+1} . \int_{\theta a}^{\theta b} \sin \theta . P_n^1(\cos \theta) . d\theta \end{aligned}$$

d'où les deux cas :

$$b_{2p+1} = 2 . \int_{\theta a}^{\theta b} \sin \theta . P_{2p+1}^1(\cos \theta) . d\theta \quad \text{et} \quad b_{2p} = 0$$

Annexe H

Annexe H : Dimensionnement du sous-ensemble créant le champ hexapolaire

Ce programme Maple® est quasi-similaire à celui permettant le dimensionnement du sous-ensemble G1. Il comporte en plus un solénoïde central (comme pour la décomposition du sous-ensemble B1) et en moins une paire de solénoïdes.

Programme commenté :

Initialisation des variables:

```
restart;  
_EnvLegendreCut := 1..infinity:  
P:=(n,x)->LegendreP(n,0,x):  
N:=6:
```

Le nombre total de solénoïdes et le nombre de solénoïdes supérieurs sont définis.

```
nb_tot:=5;  
nb_sup:=2;
```

On définit le polynôme $P_i^l(\cos\theta) = P_{l,i}(\theta)$ à partir de $P_i^0(\cos\theta) = \text{LegendreP}(i,0,\cos\theta)$.

```
for i from 1 to N do  
P[1,i]:=unapply(expand((sin(theta)*diff(simplify(LegendreP(i,0  
,cos(theta))),theta))),theta);  
end do:
```

$nb_tot := 5$

$nb_sup := 2$

On entre les valeurs des différents rayons de chacun des solénoïdes (ceux-ci sont déterminés après plusieurs essais de manière à ce que le système obtenu ait des dimensions réalisables pratiquement, et que les harmoniques de rangs supérieurs au 6^{ème} ne perturbent pas la lévitation).

```
r(1,1):=0.42;  
r(2,1):=r(1,1):  
r(3,1):=r(1,1):  
r(4,1):=r(1,1):
```

$r(1,1) := 0.42$

En fonction du rayon r on connaît la hauteur z des solénoïdes (fig. 2 chapitre III), ce rapport est calculé de sorte que si les solénoïdes étaient des spires filiformes, les paires de solénoïdes Bab10 Bab14 et Bab11 Bab13 ne créent pas d'harmonique 5 (cf. 3.3.3 chapitre III)

```
evalf(r(1,1)*((sqrt(sqrt(7)+3)/4)), '5'):  
z(1,1):=0.2495;  
evalf(r(2,1)*((sqrt(-sqrt(7)+3)/4)), '5'):  
z(2,1):=0.0625;  
z(3,1):=z(2,1):  
z(4,1):=z(1,1):
```

$z(1,1) := 0.2495$

$z(2,1) := 0.0625$

Epaisseurs des différents solénoïdes, ajustées en fonction de la densité de courant désirée (ici 60A/mm²) par itérations successives

```

W(1,1):=0.0169;
W(2,1):=0.0279;
W(3,1):=W(2,1);
W(4,1):=W(1,1);

W(1,1):= 0.0169
W(2,1):= 0.0279

```

Hauteur des différents solénoïdes

```

H(1,1):=W(1,1)-0.000;
H(2,1):=W(2,1)-0.0001;
H(3,1):=H(2,1);
H(4,1):=H(1,1);

H(1,1):= 0.0169
H(2,1):= 0.0278

```

On entre les dimensions du solénoïde central, sa hauteur totale, son rayon intérieur

```

HH:=0.0336;
Rint:=0.42;

On peut ajuster l'épaisseur en fonction de la densité de courant obtenue à la fin du
programme.
Rext:=Rint+HH-0.0001;
Ra:=sqrt(Rint^2+HH^2/4);
Rb:=sqrt(Rext^2+HH^2/4);

HH:= 0.0336
Rint:= 0.42
Rext:= 0.4535

```

Les différents rayons sont définis à partir des dimensions définies précédemment, ils permettent d'obtenir les différents secteurs d'intégration.

```

for i from 1 to 2*nb_sup do
R1(i,1):=sqrt(r(i,1)^2+z(i,1)^2);
R2(i,1):=sqrt(r(i,1)^2+(z(i,1)+H(i,1))^2);
R3(i,1):=sqrt((r(i,1)+W(i,1))^2+z(i,1)^2);
R4(i,1):=sqrt((r(i,1)+W(i,1))^2+(z(i,1)+H(i,1))^2);
end do:

```

On calcule les différents angles, permettant la décomposition des densités de courants (intersection d'une sphère avec un bloc) en polynôme de Legendre $PI,n(theta)$ pour les paires de solénoïdes.

```

for i from 1 to nb_sup do
alpha1[i]:=arcsin(r(i,1)/Ro);
beta1[i]:=arccos(z(i,1)/Ro);
end do:
for i from nb_sup+1 to nb_tot do
alpha1[i]:=Pi/2+arcsin(z(i,1)/Ro);
beta1[i]:=Pi/2+arccos(r(i,1)/Ro);
end do:
for i from 1 to nb_sup do
alpha2[i]:=arccos((z(i,1)+H(i,1))/Ro);

```

```

beta2[i]:=arccos(z(i,1)/Ro);
end do:
for i from nb_sup+1 to nb_tot do
alpha2[i]:=Pi/2+arcsin(z(i,1)/Ro);
beta2[i]:=Pi/2+arcsin((z(i,1)+H(i,1))/Ro);
end do:
for i from 1 to nb_sup do
alpha2bis[i]:=arcsin(r(i,1)/Ro);
beta2bis[i]:=arcsin((r(i,1)+W(i,1))/Ro);
end do:
for i from nb_sup+1 to nb_tot do
alpha2bis[i]:=Pi/2+arccos((r(i,1)+W(i,1))/Ro);
beta2bis[i]:=Pi/2+arccos(r(i,1)/Ro);
end do:
for i from 1 to nb_sup do
alpha3[i]:=arccos((z(i,1)+H(i,1))/Ro);
beta3[i]:=arcsin((r(i,1)+W(i,1))/Ro);
end do:
for i from nb_sup+1 to nb_tot do
alpha3[i]:=Pi/2+arccos((r(i,1)+W(i,1))/Ro);
beta3[i]:=Pi/2+arcsin((z(i,1)+H(i,1))/Ro);
end do:

```

On calcule les angles pour le solénoïde central

```

theta1a:=arcsin(Rint/Ro):
theta1b:=Pi/2:
theta2a:=arccos(HH/(2*Ro)):
theta2b:=Pi/2:
theta2bisa:=arcsin(Rint/Ro):
theta2bisb:=arcsin(Rext/Ro):
theta3a:=arccos(HH/(2*Ro)):
theta3b:=arcsin(Rext/Ro):

```

On crée la décomposition pour un bloc de la fonction créneau du courant, il y a une valeur de "b" différente selon les domaines R1 R2 (R1 R3) ou R2 R3 (R3 R2) ou R3 R4 (R2 R4) d'où les b1 b2 b3 (b1 b2bis b3)

```

b1:=(n,i) -> int(P[1,n](x),x=alpha1[i]..beta1[i]):
b2:=(n,i) -> int(P[1,n](x),x=alpha2[i]..beta2[i]):
b2bis:=(n,i) -> int(P[1,n](x),x=alpha2bis[i]..beta2bis[i]):
b3:=(n,i) -> int(P[1,n](x),x=alpha3[i]..beta3[i]):

```

On effectue également cette décomposition pour le solénoïde central, la symétrie de ce dernier permet des simplifications de calcul (pas d'harmoniques pairs).

```

for p from 0 to N do
bc1[2*p]:=0;
bc1[2*p+1]:=2*int(P[1,2*p+1](x),x=theta1a..theta1b);
end do:
for p from 0 to N do
bc2[2*p]:=0;
bc2[2*p+1]:=2*int(P[1,2*p+1](x),x=theta2a..theta2b);
end do:
for p from 0 to N do
bc2bis[2*p]:=0;
bc2bis[2*p+1]:=2*int(P[1,2*p+1](x),x=theta2bisa..theta2bisb);
end do:

```

```

end do;
for p from 0 to N do
bc3[2*p]:=0;
bc3[2*p+1]:=2*int(P[1,2*p+1](x),x=theta3a..theta3b);
end do;

```

On va ensuite intégrer selon le rayon R_0 , il y a une condition car le calcul se fait différemment selon que $R_2 < R_3$ ou $R_2 > R_3$, d'où l'existence d'un b_2 et un b_{2bis} , ceci nous permet d'obtenir les différents coefficients compris dans le champ magnétique créé par cet ensemble de solénoïdes. En réalité on est en train d'intégrer l'élément de champ créé par un élément de densité de courant volumique, en quelque sorte un courant surfacique.

```

for n from 1 to N do
for i from 1 to 2*nb_sup do
if (R2(i,1) < R3(i,1)) then
Décomposition des paires de solénoïdes:
DD(n,i):=(int(b1(n,i)/Ro^(n-
1),Ro=R1(i,1)..R2(i,1))+int(b2(n,i)/Ro^(n-
1),Ro=R2(i,1)..R3(i,1))+int(b3(n,i)/Ro^(n-
1),Ro=R3(i,1)..R4(i,1)))/(2*n);
else
DD(n,i):=(int(b1(n,i)/Ro^(n-
1),Ro=R1(i,1)..R3(i,1))+int(b2bis(n,i)/Ro^(n-
1),Ro=R3(i,1)..R2(i,1))+int(b3(n,i)/Ro^(n-
1),Ro=R2(i,1)..R4(i,1)))/(2*n);
end if;
end do;
if(Rext > Ra) then

```

Décomposition du solénoïde central:

```

DD(n,nb_tot):=(int(bc1[n]/Ro^(n-
1),Ro=Rint..Ra)+int(bc2[n]/Ro^(n-
1),Ro=Ra..Rext)+int(bc3[n]/Ro^(n-1),Ro=Rext..Rb))/(2*n);
else
DD(n,nb_tot):=(int(bc1[n]/Ro^(n-
1),Ro=Rint..Rext)+int(bc2bis[n]/Ro^(n-
1),Ro=Rext..Ra)+int(bc3[n]/Ro^(n-1),Ro=Ra..Rb))/(2*n);
end if;
end do;

```

On définit la matrice contenant les coefficients de la décomposition. Pour chacun des nb_tot solénoïdes on a la décomposition harmonique, on peut ensuite en injectant une densité de courant différente dans chacun des solénoïdes obtenir la décomposition de l'ensemble du système. Ou bien, en choisissant la décomposition que l'on veut, on peut obtenir la densité de courant à mettre dans chacun des solénoïdes.

```
Mat:=Matrix(N,nb_tot,DD);
```

```

Mat :=
[ -0.0002095789672  -0.0008535459800  -0.0008535459800  -0.0002095789672  -0.001288286306
  -0.0003241949660  -0.0005036561965  0.0005036561965  0.0003241949660  0.
  -0.0001382765122  0.001867236832  0.001867236832  -0.0001382765122  0.003375137392
  0.0006145184650  0.003014325292  -0.003014325292  -0.0006145184650  0.
  0.001555320374  -0.005076414895  -0.005076414895  0.001555320374  -0.01326309887
  0.0009751195400  -0.01607757791  0.01607757791  -0.0009751195400  0. ]

```

On choisit la valeur du troisième harmonique que l'on souhaite obtenir, on prend celle du cas vertical qui est la plus grande en valeur absolue ce qui signifie que pour les autres cas la densité de courant sera forcément inférieure.

```
B0:=5;
G0:=12;
pi:=evalf('Pi',6):
mu0:=4*pi*1e-7:
C[1]:=B0/mu0:
C[2]:=1/4*G0/mu0/B0:
C[3]:= -1/24*G0^2/B0^3/mu0:
```

On rentre le vecteur densité de courant souhaité

```
J[1]:=J1:
J[2]:=J2:
J[3]:=J2:
J[4]:=J1:
J[5]:=J3:
jj:=(i)-> J[i]:
JJJ:= Matrix(nb_tot,1,jj):
```

$B0 := 5$

$G0 := 12$

Obtention des courants dans chacun des blocs.

```
with(LinearAlgebra):
```

Valeur des harmoniques avec les densités de courant dans chacun des solénoïdes.

```
CCobtenu:=evalf(Mat.JJJ,'6');
```

$$CCobtenu := \begin{bmatrix} -0.000419158 J1 - 0.00170709 J2 - 0.00128829 J3 & 0. \\ -0.000276554 J1 + 0.00373448 J2 + 0.00337514 J3 & 0. \\ 0.00311064 J1 - 0.0101528 J2 - 0.0132631 J3 & 0. \end{bmatrix}$$

On résout maintenant un système de trois inconnues (les trois densités de courants) à trois équations :

- 1) l'harmonique 1 "coef1" de la décomposition de la géométrie entrée dans le programme doit être égal à 0
- 2) l'harmonique 3 "coef3" de la décomposition de la géométrie entrée dans le programme doit être égal à l'harmonique 3 idéal du cas vertical C[3].
- 3) l'harmonique 5 "coef5" de la décomposition de la géométrie entrée dans le programme doit être égal à 0.

```
coef1:=unapply(10^6*CCobtenu[1,1],J1,J2);
coef3:=unapply(10^6*CCobtenu[3,1],J1,J2);
coef5:=unapply(10^6*CCobtenu[5,1],J1,J2);
equa:={coef1(J1,J2)=0,coef3(J1,J2)=C[3],coef5(J1,J2)=0}:
sol:=solve(equa);
```

$coef1 := (J1, J2) \rightarrow -419.1580000 J1 - 1707.090000 J2 - 1288.290000 J3$

$coef3 := (J1, J2) \rightarrow -276.5540000 J1 + 3734.480000 J2 + 3375.140000 J3$

$coef5 := (J1, J2) \rightarrow 3110.640000 J1 - 10152.80000 J2 - 13263.10000 J3$

$sol := \{ J3 = 60.04424007, J2 = -60.05033563, J1 = 60.01778185 \}$

Si les densités de courants ne sont pas proches de la densité désirée on réajuste les dimensions des bobinages en début de programme, par exemple on multiplie la hauteur $H(1,1)$ par la racine carré du rapport densité de courant obtenue sur désirée, c'est à dire $\sqrt{J1/60} \cdot H(1,1)$ respectivement $\sqrt{J2/60} \cdot H(2,1)$ et $\sqrt{J3/60} \cdot HH$

Ici, on vérifie la valeur des harmoniques obtenue par la géométrie précédemment définie et avec la densité de courant désirée (exacte).

J1:=60e6;
J2:=-60e6;
J3:=60e6;
CCobtenu[1,1];
CCobtenu[3,1];
CCobtenu[5,1];

$J1 := 0.60 \cdot 10^8$

$J2 := -0.60 \cdot 10^8$

$J3 := 0.60 \cdot 10^8$

-21.480

-38153.640

20.40

Annexe I

Annexe I : Théorèmes en géométrie cylindrique

Les trois premiers théorèmes démontrés ci-dessous donnent les expressions des différentes familles d'harmoniques correspondant aux trois types de configurations de forces résultantes dans le cas d'une géométrie cylindrique. Les deux autres parties traitent de la forme du gradient pour les configurations horizontale et circulaire :

- **Le théorème 1 permet d'obtenir la forme générale des harmoniques du champ magnétique créant une configuration de forces résultantes dite horizontale.**
- **Le théorème 2 permet d'obtenir la forme générale des harmoniques du champ magnétique créant une configuration de forces résultantes dite verticale.**
- **Le théorème 3 permet d'obtenir la forme générale des harmoniques du champ magnétique créant une configuration de forces résultantes dite circulaire.**
- **Le théorème 4 montre que dans le cas d'une configuration horizontale, le gradient s'exprime sous forme d'une série qui converge vers une forme exponentielle.**
- **Le théorème 5 montre que la configuration circulaire peut être obtenue à partir du champ qui dérive d'un potentiel magnétique complexe de la forme $W=\lambda z^2$, c'est à dire avec un quadrupôle.**

Théorème 1 : Obtention de la forme générale des harmoniques du champ magnétique créant une configuration de forces résultantes dite horizontale

Dans un premier temps nous allons montrer dans le cas horizontal que les harmoniques du champ magnétique peuvent s'écrire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, C_n = \frac{G_1^{n-1}}{2^{n-1} n! B_1^{2n-3} r_0}$$

Une récurrence sur 2rangs doit être effectuée car les coefficients d'indice impair sont obtenus à partir d'une équation et les coefficients d'indice pair à partir d'une autre équation. En effet, les coefficients pairs s'obtiennent par annulation des dérivées successives de $G_\theta(r, \frac{\pi}{2})$ selon r , et les coefficients impairs sont obtenus par annulation des dérivées successives de $G_r(r, \frac{\pi}{2})$ selon r .

Nous commençons la démonstration par les coefficients impairs. Exprimons tout d'abord $G_r(r, \frac{\pi}{2})$:

$$\begin{aligned} \frac{G_r(r, \frac{\pi}{2})}{2r_0^2} &= \sum_{k=0}^{\infty} (2k+1) \cdot r^{2k} \cdot C_{2k+1} \cdot (-1)^k \cdot \sum_{m=0}^{\infty} 2m \cdot (2m+1) \cdot r^{2m-1} \cdot C_{2m+1} \cdot (-1)^m \\ &\quad + \sum_{k=0}^{\infty} 2k \cdot r^{2k-1} \cdot C_{2k} \cdot (-1)^k \cdot \sum_{m=0}^{\infty} 2m \cdot (2m-1) \cdot r^{2m-2} \cdot (-1)^m \end{aligned}$$

$$\text{car } \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } n=2k \\ (-1)^k & \text{si } n=2k+1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} (-1)^k & \text{si } n=2k \\ 0 & \text{si } n=2k+1 \end{cases}$$

On exprime $G_r(r, \frac{\pi}{2})$ avec une seule sommation double (sur 2 indices), avant cela on effectue un changement d'indice sous le troisième signe somme afin de mettre en facteur par la suite $r^{2(m+k)-1}$:

$$\frac{G_r(r, \frac{\pi}{2})}{2r_0^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-) \cdot \sum_{m=0}^{\infty} (-) + \sum_{k=0}^{\infty} (2k+2) \cdot r^{2k+1} \cdot C_{2k+2} \cdot (-1)^{k+1} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} (-)$$

$$\frac{G_r(r, \frac{\pi}{2})}{2r^2} = \sum_{k,m=0}^{\infty} (2k+1) \cdot C_{2k+1} \cdot 2m \cdot (2m+1) \cdot C_{2m+1} \cdot (-1)^{m+k} \cdot r^{2(k+m)-1} \\ + \sum_{k,m=0}^{\infty} (2k+2) \cdot C_{2k+2} \cdot 2m \cdot (2m-1) \cdot C_{2m} \cdot (-1)^{m+k+1} \cdot r^{2(k+m)-1}$$

il faut que toutes les dérivées de $G_r(r, \frac{\pi}{2})$ par rapport à r soient nulles en $r=0$, d'où il faut que les coefficients, pour chaque valeur de $k+m$, en facteur de $r^{2(k+m)-1}$ soient tous nuls.

On pose $m+k=N$ ($m=N-k$), comme chaque dérivée doit être nulle en $r=0$:

$$\sum_{k=0}^{N-1} (2k+1) \cdot C_{2k+1} \cdot (2N-2k) \cdot (2N-2k+1) \cdot C_{2N-2k+1} - \sum_{k=0}^{N-1} (2k+2) \cdot C_{2k+2} \cdot (2N-2k) \cdot (2N-2k-1) \cdot C_{2N-2k} = 0$$

On sort de cette expression le terme C_{2N+1} qui est obtenu lorsque $k=0$:

$$C_1 \cdot 2N \cdot (2N+1) \cdot C_{2N+1} - 2C_2 \cdot 2N \cdot (2N-1) \cdot C_{2N} + \sum_{k=1}^{N-1} (-) - \sum_{k=1}^{N-1} (-) = 0$$

$$C_{2N+1} = \frac{1}{2N \cdot (2N+1) \cdot C_1} \cdot \left[2C_2 \cdot 2N \cdot (2N-1) \cdot C_{2N} - \sum_{k=1}^{N-1} (2k+1) \cdot C_{2k+1} \cdot (2N-2k) \cdot (2N-2k+1) \cdot C_{2N-2k+1} \right. \\ \left. + \sum_{k=1}^{N-1} (2k+2) \cdot C_{2k+2} \cdot (2N-2k) \cdot (2N-2k-1) \cdot C_{2N-2k} \right]$$

On suppose que $\forall n \leq 2N$, $C_n = \frac{G_1^{n-1}}{2^{n-1} \cdot n! \cdot B_1^{2n-3} \cdot \gamma_0}$

montrons alors que $C_{2N+1} = \frac{G_1^{(2N+1)-1}}{2^{(2N+1)-1} \cdot (2N+1)! \cdot B_1^{2(2N+1)-3} \cdot \gamma_0}$

$$C_{2N+1} = 2 \cdot \frac{C_2}{C_1} \cdot \frac{2N-1}{2N+1} \cdot C_{2N} - \frac{1}{2N(2N+1)} C_1 \sum_{k=1}^{N-1} (2k+1)(2N-2k)(2N-2k+1) \cdot \frac{G_1^{2k}}{2^{2k}(2k+1)! B_1^{4k-1} \gamma_0} \cdot \frac{G_1^{2N-2k}}{2^{2N-2k}(2N-2k+1)! B_1^{4N-4k-1} \gamma_0} \\ + \frac{1}{2N(2N+1)} C_1 \sum_{k=1}^{N-1} (2k+2)(2N-2k)(2N-2k-1) \cdot \frac{G_1^{2k+1}}{2^{2k+1}(2k+2)! B_1^{4k+1} \gamma_0} \cdot \frac{G_1^{2N-2k-1}}{2^{2N-2k-1}(2N-2k)! B_1^{4N-4k-3} \gamma_0}$$

On remplace également C_1, C_2 et C_{2N} par leurs expressions:

$$C_{2N+1} = 2 \cdot \frac{G_1}{4B_1^2} \cdot \frac{2N-1}{2N+1} \cdot \frac{G_1^{2N-1}}{2^{2N-1}(2N)! B_1^{4N-3} \gamma_0} \\ - \frac{1}{2N(2N+1)} \cdot \frac{\gamma_0}{B_1} \cdot \sum_{k=1}^{N-1} (2k+1)(2N-2k)(2N-2k+1) \cdot \frac{G_1^{2N}}{2^{2N}(2k+1)!(2N-2k+1)! B_1^{4N-2} \gamma_0^2} \\ + \frac{1}{2N(2N+1)} \cdot \frac{\gamma_0}{B_1} \cdot \sum_{k=1}^{N-1} (2k+2)(2N-2k)(2N-2k-1) \cdot \frac{G_1^{2N}}{2^{2N} B_1^{4N-2} (2k+2)!(2N-2k)! \gamma_0^2}$$

On peut mettre en facteur le terme $\frac{G_1^{2N}}{2^{2N} B_1^{4N-1} \gamma_0}$

$$C_{2N+1} = \frac{G_1^{2N}}{2^{2N} B_1^{4N-1} \gamma_0} \left[\frac{2N-1}{(2N+1)!} - \frac{1}{2N(2N+1)} \sum_{k=1}^{N-1} \frac{(2k+1)(2N-2k)(2N-2k+1)}{(2k+1)!(2N-2k+1)!} \right. \\ \left. + \frac{1}{2N(2N+1)} \sum_{k=1}^{N-1} \frac{(2k+2)(2N-2k)(2N-2k-1)}{(2k+2)!(2N-2k)!} \right]$$

On peut maintenant mettre en facteur le terme $\frac{1}{(2N+1)!}$:

$$C_{2N+1} = \frac{G_1^{(2N+1)-1}}{2^{(2N+1)-1} (2N+1)! B_1^{2(2N+1)-3} \gamma_0} \left[(2N-1) - (2N-1)! \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{2k!(2N-2k-1)!} + (2N-1)! \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{(2k+1)!(2N-2k-2)!} \right]$$

il faut démontrer que ce terme est égal à 1.

Montrer que le terme en facteur à droite dans l'équation précédente est égal à 1 revient à montrer que:

$$\sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{(2k+1)!(2N-2k-2)!} - \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{(2k)!(2N-2k-1)!} = \frac{2(1-N)}{(2N-1)!} \quad (A)$$

$$\sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{(2k+1)!(2N-2k-2)!} - \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{(2k)!(2N-2k-1)!}$$

$\downarrow$ soit $n = 2k+1$ $\downarrow$ soit $n = 2k$

$$= \sum_{n=3,5,7,\dots}^{2N-1} \frac{1}{n!(2N-1-n)!} - \sum_{n=2,4,6,\dots}^{2N-2} \frac{1}{n!(2N-1-n)!}$$

on peut regrouper les deux expressions sous un seul signe de sommation.

$$= \sum_{n=2}^{2N-1} \frac{(-1)^{n+1}}{n!(2N-1-n)!}$$

on démarre la sommation à $n=1$ il faut retrancher le terme que l'on a ajouté.

$$\left[\sum_{n=1}^{2N-1} \frac{(-1)^{n+1}}{n!(2N-1-n)!} \right] - \frac{1}{(2N-2)!}$$

$$\left[\sum_{n=1}^{2N-1} (-1)^{n+1} \frac{C_{2N-1}^n}{(2N-1)!} \right] - \frac{1}{(2N-2)!} \quad \text{car} \quad C_p^n = \frac{p!}{n!(p-n)!}$$

$$= \frac{1}{(2N-1)!} \left[C_{2N-1}^0 + \sum_{n=0}^{2N-1} (-1)^{n+1} C_{2N-1}^n \right] - \frac{1}{(2N-2)!}$$

on démarre la sommation à $n=0$ il faut retrancher le terme que l'on a ajouté.

or on sait que :

$$\sum_{n=0}^{2N-1} (-1)^{n+1} C_{2N-1}^n = \sum_{n=0}^{2N-1} (-1)^{n+1} (1)^{2N-1-n} C_{2N-1}^n = -(-1+1)^{2N-1} = 0$$

$$\text{car} \quad \sum_{k=0}^N C_N^k x^k y^{N-k} = (x+y)^N$$

de plus : $C_{2N-1}^0 = 1$

Ainsi l'expression précédente vaut:

$$\frac{1}{(2N-1)!} \left[1 + 0 \right] - \frac{1}{(2N-2)!}$$

$$= \frac{1}{(2N-1)!} \left(1 - (2N-1) \right)$$

$$= \frac{2(1-N)}{(2N-1)!}$$

Nous avons donc montré que l'égalité (A) était vérifiée, ce qui nous permet d'affirmer que :

$$\text{Si } \forall n \leq 2N, C_n = \frac{G_i^{n-1}}{2^{n-1} n! B_i^{2n-3} \gamma_0} \quad \text{alors} \quad C_{2N+1} = \frac{G_i^{(2N+1)-1}}{2^{(2N+1)-1} (2N+1)! B_i^{2(2N+1)-3} \gamma_0} \quad (\text{I})$$

Nous allons démontrer pour les coefficients pairs une formule de récurrence analogue. La démarche est similaire, les calculs seront un peu moins détaillés.

Calculons tout d'abord la valeur de $G_0(r, \frac{\pi}{2})$ en $r=0$:

$$\frac{G_0(r, \frac{\pi}{2})}{2\gamma_0^2} = \sum_{k,m=0}^{\infty} (2(m-k)-1)(2k+1)(2m)(-1)^{m+k} \cdot C_{2k+1} \cdot C_{2m} \cdot r^{2(k+m-1)}$$

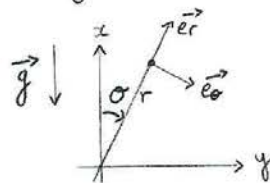
Le seul terme restant dans $G_0(0, \frac{\pi}{2})$ est celui pour lequel $k+m=1$, or si $m=0$ le terme est également nul, d'où il ne reste que le terme avec $k=0$ et $m=1$:

$$\begin{aligned} G_0(0, \frac{\pi}{2}) &= 2\gamma_0^2 \cdot (2(1-0)-1)(2 \times 0+1)(2 \times 1)(-1)^{1+0} \cdot C_{2 \times 0+1} \cdot C_{2 \times 1} \\ &= 2\gamma_0^2 \cdot 2 \times (-1) \times C_2 \times C_1 \\ &= -4\gamma_0^2 \cdot \frac{G_i}{4B_i \gamma_0} \cdot \frac{B_i}{\gamma_0} \\ &= -G_i \end{aligned}$$

On obtient ainsi :

$$G_0(0, \frac{\pi}{2}) = -G_1$$

cette composante du vecteur $\vec{G}$ compense la gravité à l'origine, le signe négatif provient du repère choisi :



Il faut que toutes les dérivées de $G_0(r, \frac{\pi}{2})$ soient égales à zéro en $r=0$, si on pose $k+m=N$ ($m=N-k$) alors pour $N > 1$:

$$\sum_{k=0}^{N-1} [2(N-2k)-1] (2k+1) (2N-2k) (-1)^N \cdot C_{2k+1} \cdot C_{2N-2k} = 0$$

(le cas $N=1$ est le cas précédent, c'est le terme constant du polynôme $G_0(r, \frac{\pi}{2})$, il n'intervient pas dans les calculs des dérivées successives.)

On peut simplifier l'expression précédente par $(-1)^N$, puis on sort le terme C_{2N} que l'on obtient pour $k=0$:

$$(2N-1)(2N) C_1 C_{2N} + \sum_{k=1}^{N-1} (2N-4k-1)(2k+1)(2N-2k) \cdot C_{2k+1} \cdot C_{2N-2k} = 0$$

Le coefficient C_{2N} s'écrit ainsi en fonction des coefficients de rangs inférieurs :

$$C_{2N} = -\frac{1}{2N(2N-1)C_1} \sum_{k=1}^{N-1} (2N-4k-1)(2k+1)(2N-2k) \cdot C_{2k+1} \cdot C_{2N-2k}$$

$$\text{On suppose que } \forall n \leq 2N-1, \quad C_n = \frac{G_1^{n-1}}{2^{n-1} \cdot n! B_1^{2n-3} \cdot \gamma_0}$$

$$\text{montrons alors que, } C_{2N} = \frac{G_1^{2N-1}}{2^{2N-1} \cdot (2N)! B_1^{2(2N)-3} \cdot \gamma_0}$$

On remplace dans C_{2N} les coefficients par leurs expressions :

$$C_{2N} = - \frac{1}{2N \cdot (2N-1) \cdot \frac{B_1}{\gamma_0}} \cdot \sum_{k=1}^{N-1} (2N-4k-1) \cdot (2k+1) \cdot (2N-2k) \cdot \frac{G_1^{2k}}{2^{2k} \cdot (2k+1)! \cdot B_1^{4k-1} \cdot \gamma_0} \cdot \frac{G_1^{2N-2k-1}}{2^{2N-2k-1} \cdot (2N-2k)! \cdot B_1^{4N-4k-3} \cdot \gamma_0}$$

$$C_{2N} = - \frac{G_1^{2N-1}}{2^{2N-1} \cdot B_1^{4N-3} \cdot \gamma_0} \cdot \sum_{k=1}^{N-1} \frac{(2N-4k-1)}{(2N-1) \cdot (2N) \cdot (2k)! \cdot (2N-2k-1)!}$$

$$C_{2N} = \frac{G_1^{2N-1}}{2^{2N-1} \cdot (2N)! \cdot B_1^{4N-3} \cdot \gamma_0} \cdot \left[- (2N-2)! \cdot \sum_{k=1}^{N-1} \frac{(2N-4k-1)}{2k! \cdot (2N-2k-1)!} \right]$$

on met en facteur $\frac{1}{(2N)!}$

Il faut démontrer que ce terme est égal à 1.

Ce qui revient à démontrer l'égalité suivante :

$$\sum_{k=1}^{N-1} \frac{2N-4k-1}{(2k)! \cdot (2N-2k-1)!} = \frac{1}{(2N-2)!} \quad (B)$$

$$\sum_{k=1}^{N-1} \frac{2N-4k-1}{(2k)! \cdot (2N-2k-1)!}$$

$$= \sum_{k=1}^{N-1} \frac{2N-2k-1}{(2k)! \cdot (2N-2k-1)!} - \sum_{k=1}^{N-1} \frac{2k}{(2k)! \cdot (2N-2k-1)!}$$

$$= \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{(2k)! \cdot (2N-2k-2)!} - \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{(2k-1)! \cdot (2N-2k-1)!}$$

soit $n=2k$

soit $n=2k-1$

$$= \sum_{n=2,4,6,\dots}^{2N-2} \frac{1}{n! \cdot (2N-2-n)!} - \sum_{n=1,3,5,\dots}^{2N-3} \frac{1}{n! \cdot (2N-2-n)!}$$

On peut mettre sous le même signe de sommation les deux termes :

$$= \sum_{n=1}^{2N-2} \frac{(-1)^n}{n! (2N-2-n)!}$$

On démarre la sommation pour $n=0$, il faut soustraire le terme ajouté :

$$= -\frac{1}{(2N-2)!} + \sum_{n=0}^{2N-2} \frac{(-1)^n}{n! (2N-2-n)!}$$

$$= -\frac{1}{(2N-2)!} + \sum_{n=0}^{2N-2} \frac{(-1)^n \cdot C_{2N-2}^n}{(2N-2)!}$$

$$\left. \begin{array}{l} \end{array} \right\} \text{ car } C_p^n = \frac{p!}{n! (p-n)!}$$

On met en facteur le terme $-\frac{1}{(2N-2)!}$

$$= -\frac{1}{(2N-2)!} \cdot \left[1 - \underbrace{\sum_{n=0}^{2N-2} (-1)^n \cdot (1)^{(2N-2)-n} \cdot C_{2N-2}^n}_{= (-1+1)^{2N-2} = 0} \right]$$

car la formule du binôme de Newton donne :

$$\sum_{k=0}^N C_N^k \cdot x^k \cdot y^{N-k} = (x+y)^N$$

$$= -\frac{1}{(2N-2)!}$$

Nous avons donc montré que l'égalité (B) était vérifiée, ce qui nous permet d'affirmer que :

$$\text{Si } \forall n \leq 2N-1, \quad C_n = \frac{G_i^{n-1}}{2^{n-1} \cdot n! \cdot B_i^{2n-3} \cdot p_0} \quad \text{alors} \quad C_{2N} = \frac{G_i^{2N-1}}{2^{2N-1} \cdot (2N)! \cdot B_i^{2(2N)-3} \cdot p_0} \quad (\text{II})$$

Des conditions (I) et (II), on déduit que :

$$\text{Si } \forall n \leq N, C_n = \frac{G_1^{n-1}}{2^{n-1} n! B_1^{2n-3} \mu_0} \quad \text{alors } C_{N+1} = \frac{G_1^{(N+1)-1}}{2^{(N+1)-1} (N+1)! B_1^{2(N+1)-3} \mu_0}$$

De plus la relation est vraie aux rangs $n=1$ et $n=2$ puisque :

$$C_1 = \frac{B_1}{\mu_0} \quad \text{et} \quad C_2 = \frac{G_1}{4 B_1 \mu_0}$$

Ainsi la relation est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Dans le cas horizontal, les harmoniques du champ magnétique peuvent s'exprimer sous la forme explicite :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, C_n = \frac{G_1^{n-1}}{2^{n-1} n! B_1^{2n-3} \mu_0}$$

Théorème 2 : Obtention de la forme générale des harmoniques du champ magnétique créant une configuration de forces résultantes dite « verticale »

Nous allons démontrer dans le cas "vertical" que les harmoniques du champ magnétique peuvent s'écrire:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, C_n = \begin{cases} \frac{B_1}{\mu_0} & \text{pour } n=1 \\ \frac{G_1}{4\mu_0 B_1} & \text{pour } n=2 \\ \frac{(-1)^n \cdot (2n-5)!}{2^{2n-4} \cdot n! \cdot (n-3)!} \cdot \frac{G_1^{n-1}}{B_1^{2n-3} \cdot \mu_0} & \text{pour } n \geq 3 \end{cases} \quad (\text{forme explicite})$$

Ces coefficients s'obtiennent par annulation des dérivées successives de $G_r(r,0)$ par rapport à r en $r=0$.

Exprimons tout d'abord $G_r(r,0)$:

$$G_r(r,0) = 2\mu_0^2 \cdot \sum_{n,p=0}^{\infty} n \cdot p \cdot (p-1) \cdot C_n \cdot C_p \cdot r^{n+p-3}$$

On pose $n+p=K$, ainsi on peut écrire:

$$G_r(r,0) = 2\mu_0^2 \cdot \sum_{K=3}^{\infty} \left[\sum_{n=1}^{K-2} n \cdot (K-n) \cdot (K-n-1) \cdot C_n \cdot C_{K-n} \right] \cdot r^{K-3}$$

Les coefficients C_1 et C_2 sont connus, nous devons calculer les coefficients C_3 et C_4 afin d'amorcer la démonstration par récurrence, mais également pour sortir les coefficients C_1 et C_2 de la sommation car il ne peuvent être remplacés par la forme explicite.

Les coefficients doivent annuler les dérivées successives de $G_r(r,0)$ par rapport à r en $r=0$, donc ils vérifient l'équation:

$$\sum_{n=1}^{K-2} n \cdot (K-n) \cdot (K-n-1) \cdot C_n \cdot C_{K-n} = 0 \quad \text{pour } K \geq 3 \quad (A)$$

On obtient le coefficient C_3 pour $k=4$:

$$C_3 = -\frac{4C_2^2}{6C_1} \quad \text{ou} \quad C_3 = -\frac{1}{24} \cdot \frac{G_1^2}{\mu_0 B_1^3}$$

On obtient le coefficient C_4 pour $k=5$:

$$C_4 = -\frac{3}{2} \cdot \frac{C_2 C_3}{C_1} \quad \text{ou} \quad C_4 = \frac{1}{64} \cdot \frac{G_1^3}{\mu_0 B_1^4}$$

On suppose la forme explicite vraie jusqu'au rang $n=k-2$, montrons qu'elle est vraie au rang $k-1$, c'est à dire calculons le coefficient C_{k-1} . On part de la relation (A) et on exprime C_{k-1} après avoir sorti les coefficients C_1 et C_2 de la sommation.

$$\left(\sum_{n=3}^{k-3} n \cdot (k-n) \cdot (k-n-1) \cdot C_n \cdot C_{k-n} \right) + \underbrace{(k-1) \cdot (k-2) \cdot C_1 \cdot C_{k-1}}_{n=1} + \underbrace{2(k-2)(k-3) C_2 C_{k-2}}_{n=2} + \underbrace{(k-2) \cdot 2 \cdot 1 \cdot C_{k-2} \cdot C_2}_{n=k-2} = 0$$

$$C_{k-1} = \frac{-1}{(k-1)(k-2) C_1} \left[2 \cdot (k-2)^2 \cdot C_2 \cdot C_{k-2} + \sum_{n=3}^{k-3} n \cdot (k-n) \cdot (k-n-1) \cdot C_n \cdot C_{k-n} \right]$$

$$C_{k-1} = \frac{-2 \cdot (k-2)}{(k-1)} \cdot \frac{C_2}{C_1} \cdot C_{k-2} - \sum_{n=3}^{k-3} \frac{n \cdot (k-n) \cdot (k-n-1)}{(k-1)(k-2) \cdot C_1} \cdot C_n \cdot C_{k-n}$$

On remplace donc cette expression les coefficients C_n pour $3 \leq n \leq k-2$ par leur forme explicite :

$$C_{k-1} = \frac{-2(k-2)}{(k-1)} \cdot \frac{G_1}{4B_1^2} \cdot \frac{(-1)^{k-2} (2k-9)!}{2^{2k-8} (k-2)!(k-5)!} \cdot \frac{G_1^{k-3}}{B_1^{2k-7} \mu_0}$$

$$- \sum_{n=3}^{k-3} \frac{n \cdot (k-n) \cdot (k-n-1)}{(k-1)(k-2) \cdot \frac{B_1}{\mu_0}} \cdot \frac{(-1)^n (2n-5)!}{2^{2n-4} n! (n-3)! B_1^{2n-3} \mu_0} \cdot \frac{(-1)^{k-n} (2k-2n-5)!}{2^{2k-2n-4} (k-n)!(k-n-3)! B_1^{2k-2n-3} \mu_0} \cdot G_1^{k-n-1}$$

On factorise l'expression :

$$C_{k-1} = \frac{(-1)^{k-1} (2k-7)! G_1^{k-2}}{2^{2k-6} (k-1)! (k-4)! B_1^{2k-5} p} \left[\frac{2(k-4)(k-2)}{(2k-8)(2k-7)} + \sum_{n=3}^{k-3} \frac{4n(k-n)(k-n-1)}{(k-1)(k-2)} \cdot \frac{(2n-5)!(2k-2n-5)!(k-1)!(k-4)!}{(2k-7)! n! (n-3)! (k-n)! (k-n-3)!} \right]$$

Il faut que ce terme soit égal à 1.

Nous allons démontrer cette égalité ; après simplification le terme de droite en fait s'écrit :

$$\frac{(k-2)}{(2k-7)} + \sum_{n=3}^{k-3} \frac{4(2n-5)!(2k-2n-5)!(k-3)!(k-4)!}{(2k-7)!(n-1)!(n-3)!(k-n-2)!(k-n-3)!} \stackrel{?}{=} 1$$

Ceci revient à montrer que :

$$\sum_{n=3}^{k-3} \frac{4(2n-5)!(2k-2n-5)!(k-3)!(k-4)!}{(2k-8)!(n-1)!(n-3)!(k-n-2)!(k-n-3)!} \stackrel{?}{=} k-5$$

On effectue deux changements d'indice : $k-5 = p$
 $n = m+3$

$$\sum_{m=0}^{p-1} \frac{4(2m+1)!(2p-2m-1)!(p+2)!(p+1)!}{(2p+2)!(m+2)! m! (p-m)!(p-m-1)!} \stackrel{?}{=} p$$

$$\sum_{m=0}^{p-1} \frac{(2m+1)!(2p-2m)!}{(m+2)! m! (p-m)!(p-m)!} \stackrel{?}{=} \frac{(2p+1)!}{(p+2)!(p+1)!}$$

Nous n'avons pas réussi par des calculs analytiques à démontrer directement cette égalité. Nous avons dû faire appel au logiciel de calcul formel MAPLE®. Lorsqu'on entre le terme de gauche dans ce logiciel celui-ci nous retourne l'expression suivante :

$$\sum_{m=0}^{p-1} \frac{(2m+1)!(2p-2m)!}{(m+2)! m! (p-m)!(p-m)!} = -\frac{(2p+1)!}{(p+2)! p!} + \frac{(2p+1)(2p)!}{(p+2)(p!)^2}$$

Si on simplifie le terme de droite, on obtient :

$$-\frac{(2p+1)!}{(p+2)! p!} + \frac{(2p+1)(2p)!}{(p+2)(p!)^2} = \frac{(2p+1)!}{(p+2)!(p-1)!} \left[-\frac{1}{p} + \frac{p+1}{p} \right] = \frac{(2p+1)!}{(p+2)!(p-1)!}$$

Ainsi l'égalité est vérifiée.

Ceci signifie que :

13

$$C_{k-1} = \frac{(-1)^{k-1} (2k-7)! G_1^{k-2}}{2^{2k-6} (k-1)! (k-4)! B_1^{2k-5} \mu_0}$$

Donc, si la formule explicite est vraie pour $3 \leq n \leq k-2$ alors elle est vraie au rang $k-1$, or la formule est vraie pour $n=3$ ainsi elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1, 2\}$.

Dans le cas "vertical", les harmoniques du champ magnétique peuvent s'écrire :

$$C_1 = \frac{B_1}{\mu_0}$$

$$C_2 = \frac{G_1}{4\mu_0 B_1}$$

$$\forall n \geq 3, C_n = (-1)^n \cdot \frac{(2n-5)! G_1^{n-1}}{2^{2n-4} n! (n-3)! B_1^{2n-3} \mu_0}$$

Théorème 3 : Obtention de la forme générale des harmoniques du champ magnétique créant une configuration de forces résultantes dite circulaire

Nous allons montrer dans le cas circulaire que les harmoniques 14 du champ magnétique peuvent s'écrire:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, C_n = \begin{cases} \frac{B_1}{\mu_0} & \text{pour } n=1 \\ \frac{G_1}{4\mu_0 B_1} & \text{pour } n=2 \\ 0 & \text{pour } n \geq 3 \end{cases}$$

Dans le cas circulaire, pour que le vecteur inhomogénéité soit central, il faut que $E_\theta(r, \theta) = 0$, ce qui se traduit par :

$$E_\theta(r, \theta) = \frac{G_\theta(r, \theta) + G_1 \cdot \sin \theta}{G_1} = 0$$

Il faut donc que $G_\theta(r, \theta) = -G_1 \cdot \sin \theta$

Exprimons tout d'abord $G_\theta(r, \theta)$:

$$G_\theta(r, \theta) = 2\mu_0^2 \left[\sum_{n=0}^{\infty} n \cdot C_n \cdot \sin(n\theta) \cdot r^{n-1} \times \sum_{p=0}^{\infty} p^2 \cdot r^{p-2} \cdot C_p \cdot \cos(p\theta) - \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot r^{n-1} \cdot C_n \cdot \cos(n\theta) \times \sum_{p=0}^{\infty} p^2 \cdot r^{p-2} \cdot C_p \cdot \sin(p\theta) \right]$$

En utilisant la formule : $\sin(n\theta) \cdot \cos(p\theta) - \cos(n\theta) \cdot \sin(p\theta) = \sin((n-p)\theta)$ on peut écrire $G_\theta(r, \theta)$ sous la forme :

$$G_\theta(r, \theta) = 2\mu_0^2 \cdot \sum_{n,p=0}^{\infty} n \cdot p^2 \cdot C_n \cdot C_p \cdot [\sin((n-p)\theta)] \cdot r^{n+p-3}$$

On pose $n+p = k$, d'où :

$$G_\theta(r, \theta) = 2\mu_0^2 \cdot \sum_{k=3}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{k-1} n \cdot (k-n)^2 \cdot C_n \cdot C_{k-n} \cdot \sin((2n-k)\theta) \right) \cdot r^{k-3}$$

Nous allons sortir de la sommation le terme correspondant à $k=3$:

$$G_\theta(r, \theta) = 2\mu_0^2 \left(1 \times 2^2 C_1 C_2 \sin(-\theta) + 2 \times 1^2 \times C_2 C_1 \sin(\theta) \right) + 2\mu_0^2 \sum_{k=4}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{k-1} n \cdot (k-n)^2 C_n C_{k-n} \sin((2n-k)\theta) \right) r^{k-3}$$

$$G_\theta(r, \theta) = -4\mu_0^2 C_1 C_2 \sin\theta + 2\mu_0^2 \sum_{k=4}^{\infty} \left(- \right) r^{k-3} \quad (A)$$

Or on sait que $G_\theta(r, \theta) = -G_1 \sin\theta$ d'où l'égalité suivante en $r=0$:

$$-4\mu_0^2 C_1 C_2 \sin\theta = -G_1 \sin\theta$$

On sait que $C_1 = \frac{B_1}{\mu_0}$, ainsi:

$$C_2 = \frac{G_1}{4\mu_0 B_1}$$

Il nous faut maintenant obtenir les coefficients pour $n \geq 3$.

On souhaite avoir $G_\theta(r, \theta) = -G_1 \sin\theta$, ce qui implique d'après la relation (A):

$$\sum_{k=4}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{k-1} n \cdot (k-n)^2 C_n C_{k-n} \sin((2n-k)\theta) \right) r^{k-3} = 0$$

Pour que ce polynôme soit nul il faut que chacun de ses termes soit nul:

$$\forall k \in [4, \infty[, \sum_{n=1}^{k-1} n \cdot (k-n)^2 C_n C_{k-n} \sin((2n-k)\theta) = 0 \quad (B)$$

Ceci implique pour $k=4$:

$$1 \cdot 3^2 \times C_1 C_3 \sin(-2\theta) + 0 + 3 \times 1^2 \times C_3 C_1 \sin(2\theta) = 0$$

$$-6C_1 C_3 \sin(2\theta) = 0 \quad \text{or } C_1 \neq 0$$

$$\text{d'où } C_3 = 0$$

Démontrons le cas général par récurrence.

16

On suppose que :

$$\forall k \in [3, K-2], C_k = 0$$

montrons alors que $C_{K-1} = 0$

Soit la relation (B) :

$$\sum_{n=1}^{K-1} n \cdot (K-n)^2 \cdot C_n \cdot C_{K-n} \cdot \sin((2n-K)\theta) = 0$$

Sortons de la sommation le coefficient C_{K-1} qui apparaît dans les termes $n=1$ et $n=K-1$. D'où pour $K \geq 5$:

$$1 \cdot (K-1)^2 \cdot C_1 \cdot C_{K-1} \cdot \sin((2-K)\theta) + (K-1) \cdot 1 \cdot C_1 \cdot C_{K-1} \cdot \sin((K-2)\theta)$$

$$+ \underbrace{\sum_{n=2}^{K-2} n \cdot (K-n)^2 \cdot C_n \cdot C_{K-n} \cdot \sin((2n-K)\theta)}_{\text{d'après la supposition faite cette somme est nulle}} = 0$$

d'après la supposition faite
cette somme est nulle

ainsi,

$$[(K-1)^2 - (K-1)] \cdot C_1 \cdot C_{K-1} \cdot \sin((2-K)\theta) = 0 \quad \text{or } C_1 \neq 0$$

ainsi il faut que $C_{K-1} = 0$.

Si pour $k \in [3, K-2], C_k = 0$ alors $C_{K-1} = 0$, or la proposition est vraie pour $k=3$ ainsi elle est vraie $\forall k \geq 3$.

Dans le cas circulaire, les harmoniques du champ magnétique peuvent s'écrire sous la forme :

$$C_1 = \frac{B_1}{F_0}$$

$$C_2 = \frac{G_1}{4\mu_0 B_1}$$

$$\forall n \geq 3, C_n = 0$$

Théorème 4 : Dans la configuration horizontale, convergence du gradient vers une forme exponentielle

Nous allons montrer dans le cas horizontal, en connaissant maintenant la valeur des coefficients C_n , que le gradient peut se mettre sous une forme exponentielle.

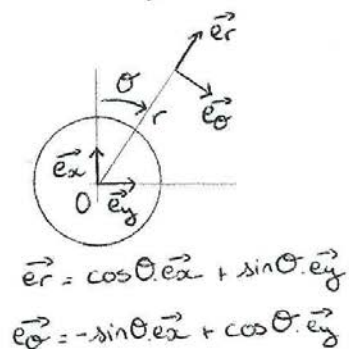
Nous partons de l'expression du gradient $\vec{G}(r, \theta)$ exprimée dans le repère $(0, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$. Nous effectuons ensuite un changement de référentiel $(0, \vec{e}_x, \vec{e}_y)$. Puis chacune des composantes du vecteur $\vec{G} = G_x \vec{e}_x + G_y \vec{e}_y$ va être exprimée en injectant l'expression des coefficients C_n .

Soit :

$$\begin{aligned} \vec{G}(r, \theta) = & 2\gamma_0^2 \left[\sum_{n=0}^{\infty} n \cdot r^{n-1} \cdot C_n \cdot \sin(n\theta) \cdot \sum_{p=0}^{\infty} p \cdot (p-1) \cdot r^{p-2} \cdot C_p \cdot \sin(p\theta) \right] \cdot \vec{e}_r \\ & + 2\gamma_0^2 \left[\sum_{n=0}^{\infty} n \cdot r^{n-1} \cdot C_n \cdot \cos(n\theta) \cdot \sum_{p=0}^{\infty} p \cdot (p-1) \cdot r^{p-2} \cdot C_p \cdot \cos(p\theta) \right] \cdot \vec{e}_r \\ & + 2\gamma_0^2 \left[\sum_{n=0}^{\infty} n \cdot r^{n-1} \cdot C_n \cdot \sin(n\theta) \cdot \sum_{p=0}^{\infty} p^2 \cdot r^{p-2} \cdot C_p \cdot \cos(p\theta) \right] \cdot \vec{e}_\theta \\ & - 2\gamma_0^2 \left[\sum_{n=0}^{\infty} n \cdot r^{n-1} \cdot C_n \cdot \cos(n\theta) \cdot \sum_{p=0}^{\infty} p^2 \cdot r^{p-2} \cdot C_p \cdot \sin(p\theta) \right] \cdot \vec{e}_\theta \end{aligned}$$

On va écrire la composante selon $\vec{e}_x$:

$$\begin{aligned} \frac{G_x(r, \theta)}{2\gamma_0^2} = & \sum_{n,p=0}^{\infty} n \cdot p \cdot (p-1) \cdot C_n \cdot C_p \cdot \sin(n\theta) \cdot \sin(p\theta) \cdot \cos\theta \cdot r^{n+p-3} \\ & + \sum_{n,p=0}^{\infty} n \cdot p \cdot (p-1) \cdot C_n \cdot C_p \cdot \cos(n\theta) \cdot \cos(p\theta) \cdot \cos\theta \cdot r^{n+p-3} \\ & + \sum_{n,p=0}^{\infty} n \cdot p^2 \cdot C_n \cdot C_p \cdot \sin(n\theta) \cdot \cos(p\theta) \cdot (-\sin\theta) \cdot r^{n+p-3} \\ & - \sum_{n,p=0}^{\infty} n \cdot p^2 \cdot C_n \cdot C_p \cdot \cos(n\theta) \cdot \sin(p\theta) \cdot (-\sin\theta) \cdot r^{n+p-3} \end{aligned}$$



On pose $n+p=k$, on peut mettre $G_x(r, \theta)$ sous la forme:

$$G_x(r, \theta) = 2r_0^2 \cdot \sum_{k=2}^{\infty} \left(\sum_{p=1}^{k-1} (k-p) \cdot p \cdot (p-1) \cdot C_{k-p} \cdot C_p \cdot \sin((k-p)\theta) \cdot \sin(p\theta) \cdot \cos\theta \right. \\ \left. + (k-p) \cdot p \cdot (p-1) \cdot C_{k-p} \cdot C_p \cdot \cos((k-p)\theta) \cdot \cos(p\theta) \cdot \cos\theta \right. \\ \left. - (k-p) \cdot p^2 \cdot C_{k-p} \cdot C_p \cdot \sin((k-p)\theta) \cdot \cos(p\theta) \cdot \sin\theta \right. \\ \left. + (k-p) \cdot p^2 \cdot C_{k-p} \cdot C_p \cdot \cos((k-p)\theta) \cdot \sin(p\theta) \cdot \sin\theta \right) \cdot r^{k-3}$$

On cherche maintenant l'expression du coefficient associé au terme de degré " $k-3$ " du polynôme en " r "

$$G_x(r, \theta) = \sum_{k=3}^{\infty} A_{k-3}(\theta) \cdot r^{k-3}$$

$$A_{k-3}(\theta) = 2r_0^2 \cdot \sum_{p=1}^{k-1} p \cdot (k-p) \cdot C_{k-p} \cdot C_p \cdot \left[\sin((k-p)\theta) \cdot \sin(p\theta) \cdot \cos(\theta) \cdot (p-1) \right. \\ \left. + \cos((k-p)\theta) \cdot \cos(p\theta) \cdot \cos(\theta) \cdot (p-1) \right. \\ \left. - \sin((k-p)\theta) \cdot \cos(p\theta) \cdot \sin(\theta) \cdot p \right. \\ \left. + \cos((k-p)\theta) \cdot \sin(p\theta) \cdot \sin(\theta) \cdot p \right]$$

On remplace les coefficients $C_n = \frac{G_1^{n-1}}{2^{n-1} \cdot n! \cdot B_1^{2n-3} \cdot r_0}$

$$A_{k-3}(\theta) = 2r_0^2 \cdot \sum_{p=1}^{k-1} p \cdot (k-p) \cdot \frac{G_1^{k-p-1}}{2^{k-p-1} \cdot (k-p)! \cdot B_1^{2k-2p-3} \cdot r_0} \cdot \frac{G_1^{p-1}}{2^{p-1} \cdot p! \cdot B_1^{2p-3} \cdot r_0} \cdot [-]$$

$$A_{k-3}(\theta) = 2r_0^2 \cdot \sum_{p=1}^{k-1} \frac{G_1^{k-2}}{2^{k-2} \cdot B_1^{2k-6} \cdot r_0^2} \cdot \frac{(k-p) \cdot p}{(k-p)! \cdot p!} \cdot \left[(p-1) \cdot \cos\theta \cdot [\sin((k-p)\theta) \sin(p\theta) + \cos((k-p)\theta) \cos(p\theta)] \right. \\ \left. - p \cdot \sin\theta \cdot [\sin((k-p)\theta) \cos(p\theta) - \cos((k-p)\theta) \sin(p\theta)] \right]$$

On obtient :

$$A_{k-3}(\theta) = \frac{G_1^{k-2}}{2^{k-3} \cdot B_1^{2k-6}} \cdot \sum_{p=1}^{k-1} \frac{1}{(k-p-1)! \cdot (p-1)!} \cdot \left[(p-1) \cdot \cos\theta \cdot \cos((k-2p)\theta) - p \cdot \sin\theta \cdot \sin((k-2p)\theta) \right]$$

III

On va décomposer la fonction $A_{k-3}(\theta)$ en deux autres, et on va montrer que leur somme vaut : $A_{k-3}(\theta) = \frac{\cos^k(\theta)}{(k-3)!} \cdot \frac{G_1^{k-2}}{B_1^{2k-6}}$

$$A_{k-3}(\theta) = (f_1(\theta) + f_2(\theta)) \cdot \frac{G_1^{k-2}}{B_1^{2k-6}}$$

On pose :

$$f_1(\theta) = \frac{1}{2^{k-3}} \cdot \sum_{p=2}^{k-1} \frac{1}{(k-p-1)!(p-1)!} \cdot [(p-1) \cdot \cos \theta \cdot \cos((k-2p)\theta)]$$

$$f_2(\theta) = -\frac{1}{2^{k-3}} \cdot \sum_{p=1}^{k-1} \frac{p}{(k-p-1)!(p-1)!} \cdot \sin \theta \cdot \sin((k-2p)\theta)$$

On commence par simplifier $f_2(\theta)$:

$$f_2(\theta) = -\sum_{p=1}^{k-1} \frac{p \cdot \sin \theta \cdot \sin((k-2p)\theta)}{(p-1)!(k-p-1)! 2^{k-3}}$$

$$f_2(\theta) = -\sum_{p=2}^{k-1} \frac{(p-1) \cdot \sin \theta \cdot \sin((k-2p)\theta)}{(p-1)!(k-p-1)! 2^{k-3}} - \sum_{p=1}^{k-1} \frac{\sin \theta \cdot \sin((k-2p)\theta)}{(p-1)!(k-p-1)! 2^{k-3}}$$

$$f_2(\theta) = -\sin \theta \cdot \left[\sum_{p=2}^{k-1} \frac{\sin((k-2p)\theta)}{(p-2)!((k-3)-(p-2))! 2^{k-3}} + \sum_{p=1}^{k-1} \frac{\sin((k-2p)\theta)}{(p-1)!((k-2)-(p-1))! 2^{k-3}} \right]$$

On sait que : $\frac{1}{(p-2)!((k-3)-(p-2))!} = \frac{C_{k-3}^{p-2}}{(k-3)!}$ et $\frac{1}{(p-1)!((k-2)-(p-1))!} = \frac{C_{k-2}^{p-1}}{(k-2)!}$

De plus on pose $n = p-2$ pour la sommation de gauche et $n = p-1$ pour la sommation de droite.

Ainsi :

$$f_2(\theta) = -\sin\theta \left[\sum_{n=0}^{k-3} \frac{C_{k-3}^n \cdot \sin((k-2n-4)\theta)}{2^{k-3}} + \sum_{n=0}^{k-2} \frac{C_{k-2}^n \cdot \sin((k-2n-2)\theta)}{2^{k-3}} \right]$$

Remarque : Pour un nombre complexe, la somme des parties imaginaires est égale à la partie imaginaire de la somme.

Utilisons l'égalité suivante : $\sin(N\theta) = \text{Im}\{e^{iN\theta}\}$

$$f_2(\theta) = -\sin\theta \left[\text{Im} \left\{ \sum_{n=0}^{k-3} \frac{C_{k-3}^n}{2^{k-3-n}} \cdot \frac{(e^{i\theta})^{k-3-n}}{2^n} \cdot e^{-i\theta} \right\} + \text{Im} \left\{ 2 \sum_{n=0}^{k-2} \frac{C_{k-2}^n}{2^{k-2-n}} \cdot \frac{(e^{i\theta})^{k-2-n}}{2^n} \right\} \right]$$

$$f_2(\theta) = -\sin\theta \left[\text{Im} \left\{ \frac{e^{-i\theta}}{(k-3)!} \cdot \sum_{n=0}^{k-3} C_{k-3}^n \cdot \left(\frac{e^{i\theta}}{2}\right)^{k-3-n} \cdot \left(\frac{e^{-i\theta}}{2}\right)^n \right\} + \text{Im} \left\{ 2 \sum_{n=0}^{k-2} C_{k-2}^n \left(\frac{e^{i\theta}}{2}\right)^{k-2-n} \cdot \left(\frac{e^{-i\theta}}{2}\right)^n \right\} \right]$$

Rappelons la formule du binôme de Newton : $\sum_{k=0}^N C_N^k \cdot x^k \cdot y^{N-k} = (x+y)^N$

Ainsi :

$$f_2(\theta) = -\sin\theta \left[\text{Im} \left\{ \frac{e^{-i\theta}}{(k-3)!} \cdot \left(\frac{e^{i\theta}}{2} + \frac{e^{-i\theta}}{2}\right)^{k-3} \right\} + 2 \cdot \text{Im} \left\{ \left(\frac{e^{i\theta}}{2} + \frac{e^{-i\theta}}{2}\right)^{k-2} \right\} \right]$$

$$f_2(\theta) = -\sin\theta \left[\text{Im} \left\{ \frac{e^{-i\theta}}{(k-3)!} \cdot \cos^{k-3}\theta \right\} + \underbrace{2 \cdot \text{Im} \left\{ \cos^{k-2}\theta \right\}}_{=0} \right]$$

$$f_2(\theta) = -\sin\theta \left[\frac{-\sin\theta \cdot \cos^{k-3}\theta}{(k-3)!} \right]$$

$$f_2(\theta) = \sin^2\theta \cdot \frac{\cos^{k-3}\theta}{(k-3)!}$$

Nous allons maintenant effectuer un calcul analogue sur la fonction

$f_1(\theta)$:

$$f_1(\theta) = \frac{1}{2^{k-3}} \sum_{p=2}^{k-1} \frac{(p-1)}{(k-p-1)!(p-1)!} \cos \theta \cdot \cos((k-2p)\theta)$$

$$f_1(\theta) = \frac{1}{2^{k-3}} \sum_{p=2}^{k-1} \frac{1}{(k-p-1)!(p-2)!} \cos \theta \cdot \cos((k-2p)\theta)$$

On sait que : $\frac{(k-3)!}{(p-2)!((k-3)-(p-2))!} = C_{k-3}^{p-2}$

d'où :

$$f_1(\theta) = \cos \theta \cdot \sum_{p=2}^{k-1} \frac{1}{2^{k-3}} \cdot \frac{C_{k-3}^{p-2}}{(k-3)!} \cdot \cos((k-2p)\theta)$$

On pose $h = p-2$, on utilise également l'égalité : $\cos(N\theta) = \operatorname{Re}\{e^{iN\theta}\} = \operatorname{Re}\{e^{i\theta N}\}$
où $\operatorname{Re}\{\bar{z}\}$ représente la partie réelle du complexe $\bar{z}$.

$$f_1(\theta) = \frac{\cos \theta}{(k-3)!} \sum_{h=0}^{k-3} \frac{C_{k-3}^h}{2^{k-3}} \operatorname{Re}\{(e^{i\theta})^{k-2h-4}\}$$

Remarque : La somme des parties réelles est égale à la partie réelle de la somme.

$$f_1(\theta) = \frac{\cos \theta}{(k-3)!} \operatorname{Re}\left\{ \sum_{h=0}^{k-3} C_{k-3}^h \cdot \frac{(e^{i\theta})^{k-3-h}}{2^{k-3-h}} \cdot \frac{(e^{-i\theta})^h}{2^h} \cdot e^{-i\theta} \right\}$$

$$f_1(\theta) = \frac{\cos \theta}{(k-3)!} \operatorname{Re}\left\{ e^{-i\theta} \sum_{h=0}^{k-3} C_{k-3}^h \cdot \left(\frac{e^{i\theta}}{2}\right)^{k-3-h} \cdot \left(\frac{e^{-i\theta}}{2}\right)^h \right\}$$

Utilisons la formule du binôme de Newton : $\sum_{k=0}^N C_N^k x^k y^{N-k} = (x+y)^N$

d'où :

$$f_1(\theta) = \frac{\cos \theta}{(k-3)!} \operatorname{Re} \left\{ e^{-i\theta} \left(\frac{e^{i\theta}}{2} + \frac{e^{-i\theta}}{2} \right)^{k-3} \right\}$$

$$f_1(\theta) = \frac{\cos \theta}{(k-3)!} \operatorname{Re} \left\{ e^{-i\theta} \cdot \cos^{k-3} \theta \right\}$$

$$f_1(\theta) = \frac{\cos \theta}{(k-3)!} \cos^{k-2} \theta$$

$$f_1(\theta) = \frac{\cos^{k-3} \theta}{(k-3)!} \cos^2 \theta$$

On peut maintenant obtenir la fonction $A_{k-3}(\theta)$:

$$A_{k-3}(\theta) = (f_1(\theta) + f_2(\theta)) \times \frac{G_1^{k-2}}{\beta_1^{2k-6}}$$

$$A_{k-3}(\theta) = \left(\frac{\cos^{k-3} \theta}{(k-3)!} \cos^2 \theta + \frac{\cos^{k-3} \theta}{(k-3)!} \sin^2 \theta \right) \cdot \frac{G_1^{k-2}}{\beta_1^{2k-6}}$$

$$A_{k-3}(\theta) = \frac{\cos^{k-3} \theta}{(k-3)!} \cdot \frac{G_1^{k-2}}{\beta_1^{2k-6}}$$

Ainsi on obtient la composante de $\vec{G}$ suivant $\vec{e}_x$:

$$G_x(r, \theta) = \sum_{k=3}^{\infty} A_{k-3}(\theta) \cdot r^{k-3}$$

$$G_x(r, \theta) = \sum_{k=3}^{\infty} \frac{G_1^{k-2}}{\beta_1^{2k-6}} \cdot \frac{\cos^{k-3} \theta}{(k-3)!} \cdot r^{k-3}$$

or on a : $x = r \cdot \cos \theta$ d'où $x^{k-3} = r^{k-3} \cdot \cos^{k-3} \theta$

d'où

$$G_x(x) = \sum_{k=3}^{\infty} \frac{G_1^{(k-3)+1}}{B_1^{2(k-3)} \cdot (k-3)!} \cdot x^{k-3}$$

on pose $n = k-3$

$$G_x(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{G_1^{n+1}}{B_1^{2n} \cdot n!} \cdot x^n$$

$$G_x(x) = G_1 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{G_1}{B_1^2} \cdot x \right)^n \cdot \frac{1}{n!}$$

On sait que: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\bar{z}^n}{n!} = \exp(\bar{z})$ où $\bar{z}$ est un nombre complexe.

Ainsi on obtient l'expression de la composante de $\vec{G}$ suivant $\vec{e}_x$:

$$G_x(x) = G_1 \cdot \exp\left(\frac{G_1}{B_1^2} \cdot x\right)$$

Nous allons maintenant, par un calcul analogue, chercher l'expression de la composante de $\vec{G}$ suivant $\vec{e}_y$.

$$\begin{aligned} \frac{G_y(r, \theta)}{2\pi r^2} &= \left[\sum_{n=0}^{\infty} n \cdot r^{n-1} \cdot C_n \cdot \sin(n\theta) \cdot \sum_{p=0}^{\infty} p \cdot (p-1) \cdot r^{p-2} \cdot C_p \cdot \sin(p\theta) \right] \cdot (\sin\theta) \\ &+ \left[\sum_{n=0}^{\infty} n \cdot r^{n-1} \cdot C_n \cdot \cos(n\theta) \cdot \sum_{p=0}^{\infty} p \cdot (p-1) \cdot r^{p-2} \cdot C_p \cdot \cos(p\theta) \right] \cdot (\sin\theta) \\ &+ \left[\sum_{n=0}^{\infty} n \cdot r^{n-1} \cdot C_n \cdot \sin(n\theta) \cdot \sum_{p=0}^{\infty} p^2 \cdot r^{p-2} \cdot C_p \cdot \cos(p\theta) \right] \cdot (\cos\theta) \\ &+ \left[- \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot r^{n-1} \cdot C_n \cdot \cos(n\theta) \cdot \sum_{p=0}^{\infty} p^2 \cdot r^{p-2} \cdot C_p \cdot \sin(p\theta) \right] \cdot (\cos\theta) \end{aligned}$$

On met en facteur r^{n+p-3}

VIII

$$\frac{G_y(r, \theta)}{2\mu_0^2} = \sum_{n,p=0}^{\infty} \left[n \cdot p \cdot (p-1) \cdot C_n \cdot C_p \cdot (\sin(n\theta) \cdot \sin(p\theta) + \cos(n\theta) \cdot \cos(p\theta)) \cdot \sin\theta \right. \\ \left. + n \cdot p^2 \cdot C_n \cdot C_p \cdot (\sin(n\theta) \cdot \cos(p\theta) - \sin(p\theta) \cdot \cos(n\theta)) \cdot \cos\theta \right] \cdot r^{n+p-3}$$

On pose $n+p=k$:

$$\frac{G_y(r, \theta)}{2\mu_0^2} = \sum_{k=3}^{\infty} \left(\sum_{p=1}^{k-1} (k-p) \cdot p \cdot C_n \cdot C_p \cdot ((p-1) \cdot \cos((k-2p)\theta) \cdot \sin\theta + p \cdot \sin((k-2p)\theta) \cdot \cos\theta) \right) \cdot r^{k-3}$$

$$G_y(r, \theta) = \sum_{k=3}^{\infty} B_{k-3}(\theta) \cdot r^{k-3}$$

On cherche l'expression de $B_{k-3}(\theta)$ en remplaçant les coefficients C_n

par leur expression : $\forall n \in \mathbb{N}^*, C_n = \frac{G_1^{n-1}}{2^{n-1} \cdot n! \cdot \beta_1^{2n-3} \cdot \mu_0}$

$$B_{k-3}(\theta) = \sum_{p=1}^{k-1} (k-p) \cdot p \cdot \frac{G_1^{n+p-2}}{2^{n+p-3} (k-p)! \cdot p! \cdot \beta_1^{2(n+p)-6}} \cdot [(p-1) \cos((k-2p)\theta) \cdot \sin\theta + p \sin((k-2p)\theta) \cdot \cos\theta]$$

$$B_{k-3}(\theta) = \sum_{p=1}^{k-1} (k-p) \cdot p \cdot \frac{G_1^{k-2}}{2^{k-3} (k-p)! \cdot p! \cdot \beta_1^{2k-6}} \cdot [(p-1) \cos((k-2p)\theta) \cdot \sin\theta + p \sin((k-2p)\theta) \cdot \cos\theta]$$

On écrit $B_{k-3}(\theta)$ sous la forme :

$$B_{k-3}(\theta) = (f_1'(\theta) + f_2'(\theta)) \cdot \frac{G_1^{k-2}}{\beta_1^{2k-6}}$$

où

$$f_1'(\theta) = \frac{1}{2^{k-3}} \sum_{p=2}^{k-1} \frac{1}{(k-p-1)!} \cdot \frac{1}{(p-1)!} \cdot (p-1) \cdot \cos((k-2p)\theta) \cdot \sin\theta$$

$$f_2'(\theta) = \frac{1}{2^{k-3}} \sum_{p=1}^{k-1} \frac{1}{(k-p-1)!} \cdot \frac{1}{(p-1)!} \cdot p \cdot \sin((k-2p)\theta) \cdot \cos\theta$$

Simplifions l'expression $f_1'(\theta)$:

$$f_1'(\theta) = \frac{1}{2^{k-3}} \sum_{p=2}^{k-1} \frac{1}{(k-p-1)!} \cdot \frac{1}{(p-2)!} \cdot \cos((k-2p)\theta) \cdot \sin \theta$$

car $C_{k-3}^{p-2} = \frac{(k-3)!}{(p-2)!((k-3)-(p-2))!}$

$$f_1'(\theta) = \sin \theta \cdot \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{2^{k-3}} \sum_{p=2}^{k-1} \frac{C_{k-3}^{p-2}}{(k-3)!} \cdot (e^{i\theta})^{k-2p} \right\}$$

et $\cos N\theta = \operatorname{Re} \{ (e^{i\theta})^N \}$

On pose $h = p-2$,

$$f_1'(\theta) = \frac{\sin \theta}{(k-3)!} \operatorname{Re} \left\{ \sum_{h=0}^{k-3} C_{k-3}^h \cdot \left(\frac{e^{i\theta}}{2} \right)^{k-3-h} \cdot \left(\frac{e^{-i\theta}}{2} \right)^h \cdot e^{-i\theta} \right\}$$

$$f_1'(\theta) = \frac{\sin \theta}{(k-3)!} \operatorname{Re} \left\{ e^{-i\theta} \cdot \left(\frac{e^{i\theta}}{2} + \frac{e^{-i\theta}}{2} \right)^{k-3} \right\}$$

binôme de Newton

$$f_1'(\theta) = \frac{\sin \theta}{(k-3)!} \cdot \cos^{k-2} \theta$$

On simplifie maintenant $f_2'(\theta)$ de la même manière :

$$f_2'(\theta) = \sum_{p=1}^{k-1} \frac{1}{(k-p-1)!} \cdot \frac{1}{(p-1)!} \cdot p \cdot \frac{\sin((k-2p)\theta)}{2^{k-3}} \cdot \cos \theta$$

$$f_2'(\theta) = \cos \theta \left[\sum_{p=2}^{k-1} \frac{(p-1)}{(k-p-1)! (p-1)!} \cdot \frac{\sin((k-2p)\theta)}{2^{k-3}} + \sum_{p=1}^{k-1} \frac{1}{(k-p-1)!} \cdot \frac{1}{(p-1)!} \cdot \frac{\sin((k-2p)\theta)}{2^{k-3}} \right]$$

$$f_2'(\theta) = \cos \theta \cdot \left[\sum_{p=2}^{k-1} \frac{C_{k-3}^{p-2}}{2^{k-3} (k-3)!} \cdot \sin((k-2p)\theta) + \sum_{p=1}^{k-1} \frac{C_{k-2}^{p-1}}{2^{k-3} (k-2)!} \cdot \sin((k-2p)\theta) \right]$$

On pose pour la sommation de gauche $h=p-2$
et pour la sommation de droite $h=p-1$

On utilise également : $\sin(N\theta) = \text{Im}\{e^{i\theta N}\}$

$$f_2'(\theta) = \cos\theta \cdot \left[\sum_{h=0}^{k-3} \frac{C_{k-3}^h}{(k-3)!} \cdot \text{Im}\left\{ \frac{(e^{i\theta})^{k-2h-4}}{2^{k-3}} \right\} + \sum_{h=0}^{k-2} \frac{C_{k-2}^h}{(k-2)!} \cdot \text{Im}\left\{ \frac{(e^{i\theta})^{k-2h-2}}{2^{k-3}} \right\} \right]$$

$$f_2'(\theta) = \cos\theta \cdot \left[\frac{1}{(k-3)!} \cdot \text{Im}\left\{ \sum_{h=0}^{k-3} C_{k-3}^h \cdot \left(\frac{e^{i\theta}}{2}\right)^{k-3-h} \cdot \left(\frac{e^{-i\theta}}{2}\right)^h \cdot e^{-i\theta} \right\} \right. \\ \left. + \frac{2}{(k-2)!} \cdot \text{Im}\left\{ \sum_{h=0}^{k-2} C_{k-2}^h \cdot \left(\frac{e^{i\theta}}{2}\right)^{k-2-h} \cdot \left(\frac{e^{-i\theta}}{2}\right)^h \right\} \right]$$

↓ binôme de Newton

$$f_2'(\theta) = \frac{\cos\theta}{(k-3)!} \cdot \left[\text{Im}\left\{ e^{-i\theta} \cdot \left(\frac{e^{i\theta}}{2} + \frac{e^{-i\theta}}{2}\right)^{k-3} \right\} + \frac{2}{(k-2)!} \cdot \text{Im}\left\{ \left(\frac{e^{i\theta}}{2} + \frac{e^{-i\theta}}{2}\right)^{k-2} \right\} \right]$$

$$f_2'(\theta) = \frac{\cos\theta}{(k-3)!} \cdot \left[\text{Im}\left\{ e^{-i\theta} \cdot \cos^{k-3}\theta \right\} + \frac{2}{(k-2)!} \cdot \text{Im}\left\{ \cos^{k-2}\theta \right\} \right]$$

0

$$f_2'(\theta) = -\frac{\sin\theta}{(k-3)!} \cdot \cos^{k-2}\theta$$

$$f_2'(\theta) = -f_1'(\theta)$$

$$\text{d'où : } f_2'(\theta) + f_1'(\theta) = 0$$

$$\text{c'est à dire : } B_{k-3}(\theta) = 0$$

Ainsi la composante selon $\vec{e}_y$ de $\vec{G}$ est nulle, et on peut écrire que :

$$\vec{G} = G_1 \cdot \exp\left(\frac{G_1}{B_1^2} \cdot x\right) \cdot \vec{e}_x$$

Théorème 5 : Obtention d'une configuration circulaire à partir d'un potentiel magnétique complexe de la forme $W = \lambda z^2$

Cette démonstration utilise les notations de la fig. 18 du chapitre III. XI

On exprime le vecteur $\vec{G}$ créé par un potentiel magnétique complexe de la forme $\bar{W} = \lambda \bar{z}^2$ et centré en O_1 . λ est une constante et $\bar{z}$ la coordonnée complexe associée au repère centré en O_1 . On cherche à exprimer ce vecteur $\vec{G}$ à l'aide des coordonnées associées à un repère centré en O , et tel que l'induction au point O vaille B_1 et le gradient G_1 .

L'objectif est de montrer que le vecteur $\vec{G}$ créé par un quadrupôle pur ($\bar{W} = \lambda \bar{z}^2$) à une distance $r_c = OO_1$ de son axe est égal au gradient $\vec{G}$ produit par une combinaison dipôle + quadrupôle sur son axe. (cf. expression (III-55)).

Soit le potentiel magnétique complexe : $\bar{W} = \lambda \bar{z}^2$

Le potentiel scalaire s'écrit alors : $V = -\lambda r^2 \sin 2\theta$

Comme nous sommes situés dans un domaine sans courant, on obtient le champ magnétique : $\vec{H} = -\text{grad } V$

On obtient alors le carré de l'induction et du gradient dans le repère $(O, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$:

$$B^2 = (2\lambda\mu_0)^2 r_1^2 \quad \text{et} \quad \vec{G} = (2\lambda\mu_0)^2 \cdot 2 \cdot r_1 \cdot \vec{e}_r$$

où r_1 est la coordonnée radiale du système de coordonnées associées au repère $(O, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ et $\vec{e}_r$ le vecteur unitaire radial.

On sait qu'au point O : $B^2 = B_1^2$ et $|\vec{G}| = G_1$, on obtient alors la distance entre les centres des deux repères $OO_1 = r_c$

$$\frac{B_1^2}{G_1} = \frac{(2\lambda\mu_0)^2 \cdot r_c^2}{(2\lambda\mu_0)^2 \cdot 2r_c} = \frac{r_c}{2} \quad \text{d'où} \quad \boxed{OO_1 = r_c = 2 \frac{B_1^2}{G_1}}$$

On obtient alors la valeur de λ :

$$\lambda = \frac{G_1}{4\mu_0 B_1}$$

On s'aperçoit que λ est égale à l'harmonique 2 de notre décomposition en harmoniques centrée en O .

$$\text{Soit } \vec{G} = (2\lambda\mu_0)^2 \cdot 2 \cdot r_1 \cdot \vec{e}_{r_1}$$

$$\text{alors } \vec{G} = \frac{G_1}{r_c} \cdot r_1 \cdot \vec{e}_{r_1}$$

on peut exprimer $\vec{G}$ avec les vecteurs $\vec{e}_x$ et $\vec{e}_y$ (ces vecteurs sont les mêmes quelque soit le repère)

$$\vec{G} = \frac{G_1}{r_c} \cdot r_1 \cdot \cos \theta_1 \cdot \vec{e}_x + \frac{G_1}{r_c} \cdot r_1 \cdot \sin \theta_1 \cdot \vec{e}_y$$

(r_1, θ_1) système de coordonnées polaires du repère centré en O_1 .

on exprime θ_1 en fonction des coordonnées polaires (r, θ) associées au repère centré en O .

$$\theta_1 = \text{Arctan} \left(\frac{r \cdot \sin \theta}{r_c + r \cdot \cos \theta} \right)$$

$$\text{On pose } X_c = \frac{r \cdot \sin \theta}{r_c + r \cdot \cos \theta} \text{ et sachant que } \cos(\text{Arctan}(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\text{et } \sin(\text{Arctan}(x)) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

alors le gradient $\vec{G}$ devient:

$$\vec{G} = \frac{G_1}{r_c} \cdot \frac{r_1}{\sqrt{1+X_c^2}} \cdot \vec{e}_x + \frac{G_1}{r_c} \cdot \frac{r_1 \cdot X_c}{\sqrt{1+X_c^2}} \cdot \vec{e}_y$$

On peut également exprimer le rayon r , en fonction de (r, θ) : XIII

$$r_1 = \sqrt{(r_c + r \cos \theta)^2 + (r \sin \theta)^2} = \sqrt{r_c^2 + 2r r_c \cos \theta + r^2}$$

et en exprimant $\vec{e}_x$ et $\vec{e}_y$ en fonction de $\vec{e}_r$ et $\vec{e}_\theta$:

$$\vec{e}_x = \cos \theta \cdot \vec{e}_r - \sin \theta \cdot \vec{e}_\theta$$

$$\vec{e}_y = \cos \theta \cdot \vec{e}_\theta + \sin \theta \cdot \vec{e}_r$$

On peut exprimer le vecteur $\vec{G}$, produit par le potentiel magnétique complexe $\bar{W} = \lambda \bar{z}^2$, dans le repère centré en O :

$$\vec{G} = \frac{G_1}{r_c} \sqrt{r_c^2 + 2r r_c \cos \theta + r^2} \cdot \left[\left(\frac{\cos \theta}{\sqrt{1 + \chi_c^2}} + \frac{\sin \theta \cdot \chi_c}{\sqrt{1 + \chi_c^2}} \right) \cdot \vec{e}_r + \left(\frac{\cos \theta \cdot \chi_c}{\sqrt{1 + \chi_c^2}} - \frac{\sin \theta}{\sqrt{1 + \chi_c^2}} \right) \cdot \vec{e}_\theta \right]$$

Si on développe les termes:

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \chi_c^2}} = \frac{r_c + r \cos \theta}{\sqrt{r_c^2 + 2r r_c \cos \theta + r^2}} \quad \text{et} \quad \frac{\chi_c}{\sqrt{1 + \chi_c^2}} = \frac{r \sin \theta}{\sqrt{r_c^2 + 2r r_c \cos \theta + r^2}}$$

en qu'on les remplace par leurs expressions dans $\vec{G}$, on obtient finalement:

$$\vec{G} = \left(G_1 \cos \theta + G_1 \cdot \frac{r}{r_c} \right) \vec{e}_r - G_1 \sin \theta \cdot \vec{e}_\theta$$

comme $r_c = 2 \frac{B_1^2}{G_1}$ on trouve alors l'expression souhaitée (III-(55)) :

$$\vec{G} = \left[G_1 \cos \theta + G_1 \cdot \left(\frac{G_1}{2B_1^2} \right) \cdot r \right] \vec{e}_r - G_1 \sin \theta \cdot \vec{e}_\theta$$

qu'on peut mettre aussi sous la forme :

$$\vec{G} = G_1 \cdot \left(\frac{G_1}{2B_1^2} \right) \cdot r \cdot \vec{e}_r + G_1 \cdot \vec{e}_x \quad \text{car} \quad \vec{e}_x = \cos \theta \cdot \vec{e}_r - \sin \theta \cdot \vec{e}_\theta$$

Nomenclature

Les vecteurs fléchés dans les formules sont reportés en gras dans la nomenclature.

Lettres romaines :

a	Demi-grand axe
a	Rayon intérieur des conducteurs
A	Matrice
A_z	Composante du potentiel vecteur suivant Oz
A''_n	Constante relative à l'harmonique de rang n du potentiel scalaire
b	Demi-petit axe
b	Rayon extérieur des conducteurs
$\mathbf{B}$	Vecteur induction magnétique
B	Norme de $\mathbf{B}$
B_e	Norme de l'induction d'entrefer
B_{lim}	Valeur limite de l'induction magnétique à une distance r_{max} de l'origine
B_n	Harmonique de rang n de l'induction tel que $B_n = n\mu_o A_n$
B''_n	Constante relative à l'harmonique de rang n du potentiel scalaire
$\mathbf{B}_o$	Induction uniforme extérieur à l'insert
B_p	Induction maximum sur le conducteur ou « Peak field »
B_I	Norme de l'induction au centre du repère
$B_{I_{max}}$	Norme de l'induction maximale au centre du repère
C	Centre des équipotentiels magnéto-gravitationnelles et point de compensation exacte
C_n	Amplitude de l'harmonique de rang n du champ intérieur, géométrie axisymétrique
C_{nth}	Amplitude de l'harmonique de rang n théorique
C'_n	Amplitude de l'harmonique de rang n du champ extérieur, géométrie axisymétrique
C''_n	Constante relative à l'harmonique de rang n du potentiel scalaire
$d\Phi$	Elément de flux
ds	Elément de surface
dl	Elément de longueur
D	Matrice
D_n	Constante relative à l'harmonique de rang n du potentiel scalaire intérieur au courant
D'_n	Constante relative à l'harmonique de rang n du potentiel scalaire extérieur au courant
D''_n	Constante relative à l'harmonique de rang n du potentiel scalaire
e	Epaisseur cellule d'hydrogène
e_p	Epaisseur de la culasse
e_{pole}	Epaisseur des pôles
$\mathbf{e}_r$	Vecteur unitaire radial en coordonnées cylindriques ou sphériques
$\mathbf{e}_r'$	Vecteur unitaire radial en coordonnées cylindriques du repère centré en C
$\mathbf{e}_x$	Vecteur unitaire suivant Ox
$\mathbf{e}_x'$	Vecteur unitaire vertical du repère centré en C
$\mathbf{e}_y$	Vecteur unitaire suivant Oy
$\mathbf{e}_z$	Vecteur unitaire selon l'axe d'invariance par translation Oz coordonnées cylindriques
$\mathbf{e}_\theta$	Vecteur unitaire orthoradial en coordonnées cylindriques ou sphériques
$\mathbf{e}_\varphi$	Vecteur unitaire orthoradial d'invariance par rotation en coordonnées sphériques
$\mathbf{f}$	Force magnétique
f	Fréquence de rotation
f_{min}	Fréquence de rotation minimale
f_{max}	Fréquence de rotation maximale
F	Partie réelle du potentiel magnétique complexe
F_c	Force centrifuge
$\mathbf{g}$	Vecteur accélération gravitationnelle terrestre
g	Module de $\mathbf{g}$

$\mathbf{g}^*$	Vecteur accélération résultante
$\mathbf{G}$	Vecteur $\overrightarrow{grad}(B^2)$
G	Norme de $\mathbf{G}$
$\mathbf{G}_{diff}$	Vecteur différence entre $\mathbf{G}_{10h}$ et $\mathbf{G}_{3h}$
G_{diff}	Norme de $\mathbf{G}_{diff}$
G_r	Composante suivant r de $\mathbf{G}$
G_x	Composante suivant Ox de $\mathbf{G}$
G_y	Composante suivant Oy de $\mathbf{G}$
G_θ	Composante suivant θ de $\mathbf{G}$
$\mathbf{G}_o$	Vecteur $\mathbf{G}$ au centre du dispositif
$\mathbf{G}_1$	Valeur de $\mathbf{G}$ compensant exactement la gravité
G_1	Norme de $\mathbf{G}_1$
G_{1max}	Norme de $\mathbf{G}_1$ maximale
$\mathbf{G}_{3h}$	Vecteur $\mathbf{G}$ tronqué au troisième harmonique
$\mathbf{G}_{6h}$	Vecteur $\mathbf{G}$ tronqué au sixième harmonique
$\mathbf{G}_{10h}$	Vecteur $\mathbf{G}$ tronqué au dixième harmonique
h	Hauteur
H	Hauteur solénoïde station LOLA
$\mathbf{H}$	Vecteur champ magnétique
$\mathbf{H}_o$	Vecteur champ magnétique dans le matériau
$\mathbf{H}_{intn}$	Vecteur du champ magnétique intérieur associé à l'harmonique de rang n
$\mathbf{H}_{extn}$	Vecteur du champ magnétique extérieur associé à l'harmonique de rang n
$\mathbf{H}_{Nintn}$	Harmonique de rang n du vecteur champ magnétique normal intérieur
$\mathbf{H}_{Nextn}$	Harmonique de rang n du vecteur champ magnétique normal extérieur
$\mathbf{H}_{Tint}$	Vecteur champ magnétique tangentiel intérieur
$\mathbf{H}_{Tintn}$	Harmonique de rang n du vecteur champ magnétique tangentiel intérieur
$\mathbf{H}_{Textn}$	Harmonique de rang n du vecteur champ magnétique tangentiel extérieur
$\mathbf{H}'_{Tintn}$	Harmonique de rang n du vecteur champ magnétique tangentiel intérieur créé par $\mathbf{K}'_n$
$\mathbf{H}_{Text}$	Vecteur champ magnétique tangentiel extérieur
H_1	Norme du champ magnétique au centre du repère
i	Courant théorique délivré par l'alimentation
i_o	Courant dans la résistance de décharge du solénoïde extérieur station OLGA
i_1	Courant solénoïde intérieur station OLGA
i_2	Courant solénoïde extérieur station OLGA
I_{10}	Courant initial solénoïde intérieur station OLGA
I_2	Courant constant solénoïde extérieur station OLGA
I_{20}	Courant initial solénoïde extérieur station OLGA
j_n	Fonction associée à J_n ne dépendant uniquement de n
$\mathbf{J}_a$	Courant ampérien volumique
J_n	Harmonique n de la densité volumique de courant ne dépendant pas du rayon
J_0	Densité de courant station LOLA
k	Rapport entre le rayon de la zone utile et celui de l'ouverture de l'aimant
k	Coefficient de réglage des harmoniques
$\mathbf{K}_a$	Courant ampérien surfacique
$\mathbf{K}_n$	Harmonique de rang n du vecteur densité superficielle de courant en R_0
K_n	Composante unique de l'harmonique de rang n du vecteur densité superficielle de courant
$\mathbf{K}'_n$	Harmonique de rang n du vecteur densité superficielle de courant en R_1
l_c	Longueur capillaire
l_{fer}	Longueur moyenne du circuit ferromagnétique

l_p	Largeur de la culasse
$l_{p\hat{o}le}$	Longueur moyenne des pôles
L	Longueur moyenne de la zone utile ou zone de lévitation
L	Rayon extérieur de l'insert
L_1	Inductance propre bobinage intérieur station OLGA
L_2	Inductance propre bobinage extérieur station OLGA
M	Inductance mutuelle station OLGA
$\mathbf{M}$	Vecteur aimantation
$\mathbf{M}_s$	Vecteur aimantation de saturation
$\mathbf{n}$	Vecteur normal sortant
N	Nombre de molécules par unité de volume
N	Nombre de spires de l'électro-aimant
N	Ensemble des entiers
N^*	Ensemble des entiers strictement positifs
O	Origine du repère
O_1	Origine du repère pour le potentiel magnétique complexe
P	Matrice
P	Point au centre de l'entrefer
P_c	Pression critique
$P_n()$	Polynôme de Legendre de degré n
$P_n^m()$	Polynôme de Legendre associé d'ordre m et de degré n
$Q_n()$	Polynôme de Legendre de seconde espèce de degré n
$Q_n^m()$	Polynôme de Legendre associé de seconde espèce d'ordre m et de degré n
r	Rayon coordonnées cylindriques ou sphériques
r	Rayon de l'ouverture des aimants multipolaires
r'	Rayon coordonnées cylindriques repère centré en C
r_c	Longueur OO_1 cas circulaire
r_{max}	Rayon pour lequel l'induction atteint sa valeur limite B_{lim}
r_v	Longueur OO_1 cas vertical
R	Rayon zone utile ou zone de lévitation
R	Rayon égal à x_c , distance au centre de la rotation simulée
R_e	Réductance de l'entrefer
R_{fer}	Réductance de la culasse
R_0	Rayon du cylindre ou de la sphère portant la densité de courant surfacique
R_{pole}	Réductance des pôles
R_1	Rayon d'intégration pour obtenir la densité volumique de courant
R_1	Résistance de décharge bobinage intérieur station OLGA
R_2	Résistance de décharge bobinage extérieur station OLGA
S_l	Surface de liquide dans cellule d'hydrogène à une hauteur z donnée
t	Temps
T	Température
T_c	Température critique
T_o	Température seuil en deçà de laquelle l'interprétation des interfaces gaz/liquide en terme d'équipotentielles magnéto-gravitationnelle n'est plus valide
V	Volume
V	Partie imaginaire du potentiel magnétique complexe
V_c	Volume cellule d'hydrogène
V_{ext}	Potentiel scalaire extérieur
V_g	Volume de gaz

V_{int}	Potentiel scalaire intérieur
V_l	Volume de liquide
V_I	Equipotentielle définissant la forme du pôle inférieur
V_2	Equipotentielle définissant la forme du pôle supérieur
W	Epaisseur bobine station LOLA
x	Abscisse
x_c	Abscisse du point C
y	Ordonnée
y_c	Ordonnée du point C
z	Cote
$\bar{z}$	Coordonnée complexe

Lettres grecques :

α	Angle de déphasage commun à tous les harmoniques
α_n	Angle relatif à l'harmonique de rang n du champ intérieur
α_p	Angle relatif à l'harmonique de rang p du champ intérieur
α'_n	Angle relatif à l'harmonique de rang n du champ extérieur
β	Coefficient des lois puissance de comportement des densités fonction de la température
β	Angle insert
β_c	Coefficient de $\zeta(z)$ pour la configuration circulaire
β_h	Coefficient de $\zeta(z)$ pour la configuration horizontale
β_v	Coefficient de $\zeta(z)$ pour la configuration « verticale »
δ	Taille de l'entrefer
δ	Décalage
δ_R	Décalage suivant le rayon
δ_z	Décalage suivant la hauteur
δ_o	Hauteur du pôle inférieur par rapport à l'origine
$\Delta \mathbf{G}$	Laplacien vectoriel de $\mathbf{G}$
ΔI	Variation de courant
ΔJ	Variation de densité de courant
ΔV	Différence de potentiel
ΔA_n	Variation en % par rapport aux harmoniques désirés
$\Delta \omega$	Variation de rotation
$\boldsymbol{\varepsilon}$	Vecteur inhomogénéité de la compensation magnétique de pesanteur
ε_r	Composante radial de $\boldsymbol{\varepsilon}$
ε_x	Composante de $\boldsymbol{\varepsilon}$ suivant Ox
ε_y	Composante de $\boldsymbol{\varepsilon}$ suivant Oy
ε_z	Composante de $\boldsymbol{\varepsilon}$ suivant Oz
ε_θ	Composante orthoradial de $\boldsymbol{\varepsilon}$
$\boldsymbol{\varepsilon}_1$	Vecteur $\boldsymbol{\varepsilon}$ suivant l'axe vertical
ε_{1x}	Composante horizontale de $\boldsymbol{\varepsilon}_1$
ε_{1y}	Composante verticale de $\boldsymbol{\varepsilon}_1$
$\boldsymbol{\varepsilon}_2$	Vecteur $\boldsymbol{\varepsilon}$ suivant l'axe horizontal
ε_{2y}	Composante verticale de $\boldsymbol{\varepsilon}_2$
$\zeta(\)$	Potentiel magnétique complexe
η	Viscosité du para-hydrogène
θ	Angle coordonnées cylindriques ou sphériques

θ_{min}	Angle de rotation des équipotentiels
θ_n	Angle insert
λ	Coefficient du potentiel magnétique complexe
λ	Longueur d'onde dépendant des deux premiers harmoniques
λ	Rapport entre le champ maximum réel et le champ maximum idéal sur le conducteur
Λ_n	Amplitude de l'harmonique de rang n (champ intérieur au courant)
Λ'_n	Amplitude de l'harmonique de rang n (champ extérieur au courant)
Λ''_n	Amplitude de l'harmonique de rang n du courant $\overrightarrow{K'_n}$
Λ_{2max}	Amplitude de l'harmonique 2 maximale
μ_0	Perméabilité magnétique du vide
μ_{fer}	Perméabilité de la culasse
$\mu_{pôle}$	Perméabilité des pôles
ρ	Masse volumique
ρ_V	Masse volumique du gaz
ρ_L	Masse volumique du liquide
ρ_c	Masse volumique critique
σ	Tension de surface liquide/gaz
σ_o	Coefficient des lois puissance de comportement de la tension de surface fonction de la température
Σ_L	Potentiel magnéto-gravitationnel
τ	Ecart relatif entre la température T et la température critique T_c
τ	Constante de temps
Φ	Diamètre cellule d'hydrogène
φ	Angle définissant le plan de compensation exacte après linéarisation
φ	Angle d'invariance par rotation en coordonnées sphériques
χ_m	Susceptibilité magnétique
ω	Vitesse angulaire de rotation ou pulsation
ω_1	Vitesse de rotation du dispositif égale à $\omega + \Delta\omega$
ω_2	Vitesse de rotation en micropesanteur simulée sur le diamagnétique
∞	Infini
$\bullet$	
$P_n(\cos\theta) = \frac{dP_n(\cos\theta)}{d\theta}$	
$\bullet\bullet$	
$P_n(\cos\theta) = \frac{d^2P_n(\cos\theta)}{d\theta^2}$	

Bibliographie Personnelle

Articles

Lorin C., Rasoanarivo I., Sido N., Mailfert A., Colteu A., - *Design and optimization by $\mathbb{Z}^n$ complex function of magnet electric poles in order to obtain magnetic levitation* - IEEE Industrial Electronics, IECON 2006 - 32nd Annual Conference on, pp1035-1041, (2006)

Lorin C., Mailfert A., - *Magnetic compensation of gravity by using superconducting axisymmetric coils: Spherical harmonics method* – Journal of Physics : Conferences Series, 97, 012199, (2008)

Lorin C., Mailfert A., - *Magnetic compensation of gravity and centrifugal forces* – Microgravity Science and Technology, DOI: 10.1007/s12217-008-9056-x (2008)

Lorin C., Mailfert A., - *Magnetic levitation in two-dimensional geometry with translational invariance* – Journal of Applied Physics, **104**, 103904, (2008)

Présentations orales internationales

Lorin C., Mailfert A., - *Magnetic compensation of gravity and centrifugal forces* - European Low Gravity Research Association (4-7 septembre 2007), Florencia, Italy

Lorin C., Mailfert A., - *Magnetic gravity compensation by a 2D-system of superconducting coils* - New Achievements in Materials and Environmental Sciences (7-8 novembre 2007), Metz, France

Mailfert A., **Lorin C.**, Chatain D., Communal D., - *Compensation magnétique variable de la pesanteur* - Electrotechnique du Futur 07 (6-7 septembre 2007), Toulouse, France

Séminaires

Mailfert A., Sido N., **Lorin C.**, Rasoanarivo I., - *Lévitiation magnétique : que peut-on faire léviter avec un électroaimant non supraconducteur?* – GDR n°2799 Micropesanteur Fondamentale et Appliquée (17-19 octobre 2005) Carry-le-Rouet, France(Oral presentation, Mailfert A.)

Lorin C., Mailfert A., - *Lévitiation magnétique: Configurations de bobines supraconductrices permettant la lévitation de grands volumes d'oxygène liquide (LOx)* – GDR n°2799 Micropesanteur Fondamentale et Appliquée (4-6 décembre 2006) Fréjus, France (Oral presentation, Lorin C.)

Lorin C., Mailfert A., - *Lévitiation magnétique: Dimensionnement de LOLA (Large Oxygen Levitation Apparatus)* – GDR n°2799 Micropesanteur Fondamentale et Appliquée (26-28 novembre 2007) Fréjus, France (Oral presentation, Lorin C.)

Lorin C., Mailfert A., - *The use of ferromagnetic inserts in superconducting coils* - CERN Seminar groupe Aimants Cryostats Supraconducteurs (19 juin 2007), Genève, Suisse (Oral presentation, Mailfert A. & Lorin C.)

Lorin C., Mailfert A., - *Magnetic microgravity for simulating space conditions by means of multipolar windings as exist in particle accelerators* - CERN Seminar groupe Aimants Cryostats Supraconducteurs (20 juin 2008), Genève, Suisse (Oral presentation, Lorin C.)

Poster internationaux

Lorin C., Rasoanarivo I., Sido N., Mailfert A., Colteu A., - *Design and optimization by $\mathbb{Z}^n$ complex*

function of magnet electric poles in order to obtain magnetic levitation -32nd IEEE Annual Conference on Industrial Electronics, IECON 2006 (6-10 november 2006), Paris, France

Lorin C., Mailfert A., - *Magnetic compensation of gravity by using superconducting axisymmetric coils: Spherical harmonics method* - European Conference on Applied Superconductivity 2007 (16-20 september 2007), Brussels, Belgium

Lorin C., Mailfert A., Chatain D., - *Computation of a Large Oxygen Magnetic Levitation Apparatus* – IEEE/Conference on Electromagnetic Field Computation 2008 (11-15 may 2008), Athens, Greece

Posters nationaux

Lorin C., Borgnolutti F., Mailfert A., Chatain D., Rasoanarivo I.,- *Compensation magnétique partielle de la pesanteur utilisant des bobines supraconductrices* - 8èmes Journées de Cryogénie et de Supraconductivité 2006 (17-19 may 2006), Aussois, France

Lorin C., Mailfert A., - *Harmoniques cylindriques de champ dans la compensation magnétique de pesanteur* - Société Française de Physique 2007 (9-13 july 2007), Grenoble, France



Figure 0

Il existe deux principes fondamentaux en physique. Le premier principe concerne les chats et s'exprime de la manière suivante : tout chat vivant lancé en l'air ou lâché d'une quelconque altitude retombera invariablement sur ses quatre pattes. Ce principe a été découvert par Elmer Mitchell. L'histoire raconte qu'Elmer Mitchell se serait écrié au moment de cette importante découverte : « Qui l'eut cru ? ». Le second principe est connu de tous les gens... de tous les scientifiques ! Ce principe est le suivant : toute tartine, recouverte sur une et une seule tranche de confiture, lancée en l'air ou lâchée d'une quelconque altitude retombera invariablement face confiture au sol. Il semblerait que ce soit un certain Edward Murphy qui ait découvert ce second principe. Ainsi un système chat+tartine bien agencé (voir figure 0) peut se retrouver en état d'apesanteur. Effectivement aucun des deux principes ne pouvant être violé, le système chat+tartine flotte en l'air. Le système se met parfois en rotation accélérée pour des raisons encore inexpliquées à l'heure actuelle. Lorsque la rotation atteint une certaine pulsation, la force centrifuge devient trop importante et la confiture est arrachée à la tartine. Le système chat+tartine retombe alors côté chat ! Une pulsation critique peut être définie fonction principalement de la viscosité de la confiture (Notre équipe a travaillé sur un contrat *Bonne Maman*). Si, au lieu d'être lâché, le système chat+tartine est lancé en l'air, il va décrire une trajectoire rectiligne uniforme due à la vitesse initiale du lancé. Lorsque le système atteint une certaine altitude, c'est à dire une certaine température, le chat finit malheureusement par mourir de froid. Le système tombe alors du côté tartine ! Les altitudes maximales ont été atteintes avec des chats de race persane, les altitudes minimales avec des chats de race sphynx. Le premier scientifique à avoir réalisé cette expérience fut Erwin Schrödinger. Erwin Schrödinger fit la regrettable (surtout pour son chat) erreur de lancer le système au lieu de le lâcher, il ne retrouva jamais son chat. Il ne sut jamais si son chat était mort et/ou vivant. Grâce à cette première expérience « loupée », Erwin Schrödinger imagina une autre expérience plus célèbre qui lui permit de réfuter un certain courant de pensée. Quelques années après, en effectuant la même expérience avec la même regrettable erreur, Elmer Mitchell perdit également son chat...

AUTORISATION DE SOUTENANCE DE THESE
DU DOCTORAT DE L'INSTITUT NATIONAL
POLYTECHNIQUE DE LORRAINE

o0o

VU LES RAPPORTS ETABLIS PAR :

**Monsieur Jérôme DELAMARE, Professeur, ENSIEG, Lab. d'Electrotechnique de Grenoble,
Saint Martin d'Hères**

Monsieur Jean FAUCHER, Professeur, Laboratoire PLAsma et Conversion d'Energie, Toulouse

Le Président de l'Institut National Polytechnique de Lorraine, autorise :

Monsieur LORIN Clément

NANCY BRABOIS
2, AVENUE DE LA
FORET-DE-HAYE
BOITE POSTALE 3
F - 54501
VANDŒUVRE CEDEX

à soutenir devant un jury de l'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE LORRAINE,
une thèse intitulée :

**"Théorie de la microgravité magnétique. Conception, dimensionnement et contrôle de
dispositifs d'environnement microgravitationnel"**

en vue de l'obtention du titre de :

DOCTEUR DE L'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE LORRAINE

Spécialité : « Génie électrique »

Fait à Vandoeuvre, le 28 octobre 2008

Le Président de l'IN.P.L.,

F. LAURENT



Résumé

Cette thèse traite de la compensation magnétique de pesanteur. Tout d'abord, des expériences de lévitation magnétique de fluides sont interprétées à l'aide d'un potentiel magnéto-gravitationnel Σ_L . Puis, l'utilisation d'une méthode générale d'analyse de la force magnétique grâce aux harmoniques du champ magnétique est développée. Elle souligne l'importance et le rôle de chacun des trois premiers harmoniques du champ magnétique sur les configurations de forces résultantes inhérentes à la compensation magnétique de pesanteur. En géométrie cylindrique (invariante par translation) diverses combinaisons de forces d'origines magnétique, gravitationnelle et centrifuge offrent des perspectives nouvelles pour la lévitation magnétique. Une combinaison judicieuse des forces magnétiques et centrifuges permet de compenser exactement la pesanteur sur des matériaux diamagnétiques. En géométrie axisymétrique (invariante par rotation), le dimensionnement de stations de lévitation d'oxygène, techniquement réalisables (NbTi@4,2K), est présenté. Ces stations permettent de léviter des volumes d'oxygène supérieurs à 1 litre avec des inhomogénéités inférieures à 1%. La constitution de ces stations rend possible les variations spatiales et temporelles des configurations d'accélération résultantes. Enfin, la compensation magnétique dynamique de gravité, à l'aide d'une station de lévitation réelle, est étudiée afin de simuler des phases d'accélération ou de décélération d'engins spatiaux.

Mots clefs

Lévitation magnétique, compensation de gravité, microgravité, analyse harmonique, force magnétique, potentiel magnéto-gravitationnel, conception de bobinages

Summary

The thesis deals with magnetic gravity compensation. First of all magnetic levitation experiments are explained with the help of a magneto-gravitational potential Σ_L . Next, a general analysis method of the magnetic force is developed which employs magnetic field harmonics. The method underlines both the significance and role of the first three magnetic field harmonics on the resulting forces inherent in magnetic gravity compensation. In cylindrical geometry – with translational invariance – various combination of magnetic, gravitational and centrifugal forces open new possibilities for the magnetic levitation. A suitable combination of both magnetic and centrifugal forces allows exactly compensating gravity on diamagnetic materials. In axisymmetric geometry – with rotational invariance – designs of feasible oxygen magnetic levitation stations are introduced (NbTi@4,2K). Levitation of oxygen volumes more than one litre with inhomogeneities less than 1% can be accomplished within these magnetic levitation facilities. The constitution of the stations makes possible both spatial and temporal variations of the resulting acceleration configurations. At last the dynamic magnetic compensation of gravity with a real coil system is studied so as to simulate both acceleration and deceleration of spaceships.

Keywords

Magnetic levitation, gravity compensation, microgravity, harmonic analysis, magnetic force, magneto-gravitational potential, magnet design.