



AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

THÈSE

présentée en vue de l'obtention du grade de

**DOCTEUR DE L'INSTITUT NATIONAL
POLYTECHNIQUE DE LORRAINE**

Spécialité : Mécanique et Énergétique

par

Ali EL SHRIF

**CONTRÔLE OPTIMAL PAR SIMULATION
AUX GRANDES ECHELLES D'UN ECOULEMENT
DE CANAL TURBULENT.**

Direction de Thèse : Salaheddine Skali-Lami - Laurent Cordier

Soutenue le 10 juillet 2008 devant la Commission d'Examen

— **JURY** —

C. AIRIAU	Professeur UPS - IMFT, Toulouse	Rapporteur
J.-P. BRANCHER	Professeur INPL - LEMTA, Nancy	Examineur
P. COMTE	Professeur ENSMA - LEA, Poitiers	Rapporteur
L. CORDIER	Chargé de recherche CNRS - LEA, Poitiers	Co-directeur de thèse
A. KOURTA	Professeur Polytech Orléans - PRISME	Examineur
S. SKALI LAMI	Maître de conférences (HDR) ESSTIN - LEMTA, Nancy	Directeur de thèse
S. TARDU	Maître de conférences (HDR) UJF - LEGI, Grenoble	Examineur

“Without an inexpensive method for reducing the cost of flow computations, it is unlikely that the solution of optimization problems involving the three dimensional, unsteady Navier-Stokes system will become routine.”

Max Gunzburger (2000).

Remerciements

L'étude présentée ici a été effectuée au Laboratoire d'Energétique et de Mécanique Théorique et Appliquée (LEMTA) de l'Institut National Polytechnique de Lorraine (INPL) sous la direction de Messieurs S. Skali-Lami et L. Cordier.

J'aimerais remercier tout spécialement S. Skali-Lami maître de conférences à l'ESSTIN et chercheur au LEMTA pour avoir assuré la direction de cette étude. Je tiens également à remercier L. Cordier, chargé de recherche au CNRS et travaillant actuellement au Laboratoire d'Etudes Aérodynamiques de Poitiers, pour m'avoir confié cette étude lorsqu'il était maître de conférences à l'EEIGM (INPL) et chercheur au LEMTA. Je le remercie encore pour ses conseils, ses encouragements ainsi que de m'avoir fait bénéficier de ses compétences scientifiques qui m'ont été d'une aide inestimable pour la réalisation de ce travail. Je le remercie également pour l'aide accordée durant la rédaction de ce mémoire. La nature de ma thèse m'a transmis la conviction en la capacité de l'homme d'être capable en partant de modèles théoriques de simuler les phénomènes physiques et de les contrôler.

J'adresse mes respectueux remerciements à Monsieur J.-P. Brancher, Professeur au LEMTA. J'ai été très sensible à l'honneur qu'il m'a fait en acceptant de présider le jury de cette thèse. Je tiens aussi à exprimer ma profonde reconnaissance à Monsieur P. Comte, Professeur ENSMA (LEA université de Poitiers), et à Monsieur C. Airiau, Professeur UPS (IMFT Toulouse), qui m'ont fait le privilège de rapporter sur ce travail. Je les remercie profondément pour toutes les remarques et les suggestions qu'ils m'ont formulées et qui m'ont été d'une très grande utilité.

J'adresse aussi mes remerciements à Monsieur S. Tardu, Maître de conférences à l'UJF - LEGI Grenoble, et à Monsieur A. Kourta, Professeur à Polytech Orléans (PRISME) d'avoir accepté de faire partie du jury, d'avoir jugé ce travail et communiqué leurs remarques pertinentes.

Mes remerciements sont aussi adressés à Monsieur O. Botella, maître de conférences (LEMTA - Nancy) pour l'aide qu'il m'a accordé durant la phase de programmation. Je remercie mes collègues chercheurs pour leur gentillesse et les moments agréables que nous avons pu savourer ensemble, soit dans l'ordre alphabétique R. Arieby, M. Bergmann, F. Candelier, A. Esmael, M. Haboussi, Y. Lebranchu, J. Moujel, N. Rolland et S. Ramezani.

Je ne voudrais pas manquer d'effectuer la tâche impossible qui est de remercier toutes les secrétaires du laboratoire, notamment Mme Catherine Denis et Mme Edith Lang pour

leur efficacité et leur gentillesse.

Je tiens aussi à remercier le gouvernement Lybien pour l'aide financière qu'il m'a accordé en m'octroyant une bourse. Enfin, je remercie toute ma famille pour son aide inestimable, en particulier Muna car sans son soutien, sa patience et son dévouement, ce travail n'aurait pas pu être achevé.

EL SHRIF Ali. Nancy, Juillet 2008.

Table des matières

1	Introduction	1
1.1	Le contrôle d'écoulement	1
1.2	Contrôle passif et contrôle actif	2
1.3	Contrôle d'écoulement et réduction de modèles	4
1.4	Réduction de modèle par simulation aux grandes échelles	5
1.5	Contrôle optimal	6
1.6	Configuration de l'étude	7
1.7	Organisation du document	9
2	Simulation aux Grandes Echelles du canal turbulent non contrôlé	13
2.1	Configuration d'étude	14
2.2	Equations de Navier-Stokes	15
2.2.1	Mise en équations	15
2.2.2	Adimensionnement du problème	16
2.2.2.1	Adimensionnement des équations de Navier-Stokes	16
2.2.2.2	Grandeurs en unités de paroi	17
2.3	Simulations aux grandes échelles (LES)	17
2.3.1	Principe général	17
2.3.2	Opérateur de filtrage et séparation d'échelles	19
2.3.3	Equations filtrées	21
2.3.4	Fermeture par hypothèse de Boussinesq	22
2.3.5	Modèle de Smagorinsky	23
2.3.6	Procédure dynamique	24
2.4	Méthodes de résolution numérique	28
2.4.1	Récapitulation du modèle LES	28
2.4.2	Discrétisation temporelle	29
2.4.2.1	Discussion sur la stabilité du schéma numérique	29
2.4.2.2	Schéma d'intégration temporelle	29
2.4.2.3	Linéarisation	31
2.4.2.4	Méthode à pas fractionnaire	32
2.4.3	Discrétisation spatiale	34
2.4.3.1	Maillage	34
2.4.3.2	Localisation des inconnues	35
2.4.3.3	Filtres discrets	37
2.4.3.4	Discrétisation des dérivées spatiales	39
2.4.3.5	Résolution de l'équation de Poisson	41
2.4.4	Condition initiale et conditions aux limites	42
2.4.4.1	Condition initiale	42
2.4.4.2	Conditions aux limites	42

2.4.4.3	Gestion de la périodicité	42
2.4.4.4	Terme de forçage	43
2.5	Simulations numériques à $Re_\tau = 180$	45
2.5.1	Caractéristiques des simulations	47
2.5.1.1	Résolutions spatiale et temporelle	47
2.5.1.2	Calcul des statistiques	49
2.5.1.3	Génération numérique de la transition	50
2.5.1.4	Caractérisation d'un régime turbulent pleinement développé	51
2.5.1.5	Discussion sur les coûts CPU	55
2.5.2	Propriétés moyennes	55
2.5.2.1	Vitesse moyenne	55
2.5.2.2	Propriétés caractéristiques de l'écoulement moyen	57
2.5.3	Eléments du tenseur de Reynolds	57
2.5.3.1	Intensités turbulentes	57
2.5.3.2	Contrainte de Reynolds	58
2.5.3.3	Bilan des contraintes de Reynolds	60
2.5.4	Moments d'ordre supérieur	61
2.5.4.1	Coefficients de dissymétrie	62
2.5.4.2	Coefficients d'aplatissement	65
2.5.5	Corrélations spatiales en deux points	67
2.5.5.1	Définition et propriétés	67
2.5.5.2	Justification de la taille du domaine numérique	67
2.5.5.3	Première analyse structurelle	69
2.5.6	Spectres d'énergie	71
2.5.7	Structures cohérentes	72
2.6	Conclusion	77
3	Contrôle par opposition	79
3.1	Généralités	79
3.1.1	Principe du contrôle par opposition	79
3.1.2	Mise en œuvre par DNS	80
3.1.3	Discussions	81
3.2	Résultats de contrôle par opposition obtenus par LES	85
3.2.1	Paramètres des simulations	85
3.2.2	Influence de la position du plan de détection	86
3.2.3	Influence du nombre de Reynolds	89
3.2.4	Efficacité énergétique	95
3.3	Conclusion	96
4	Théorie du contrôle optimal	99
4.1	Introduction	99
4.2	Contrôle d'écoulement et optimisation sous contraintes	101
4.2.1	Formulation du problème	101
4.2.2	Discussion sur la fonctionnelle objectif : régularisation du problème d'optimisation	102
4.3	Optimisation non linéaire	103
4.3.1	Méthode des multiplicateurs de Lagrange	103
4.3.1.1	Formulation avec prise en compte implicite des contraintes	104
4.3.1.2	Construction du système optimal	104

4.3.1.3	Résolution numérique par méthode itérative du système optimal	107
4.3.2	Approche du gradient par les sensibilités	108
4.3.3	Approche du gradient par l'équation adjointe	109
4.3.4	Résolution numérique : commutativité des étapes de discrétisation et de différentiation	110
4.3.4.1	Discrétisation - Différentiation	111
4.3.4.2	Différentiation - discrétisation	113
4.3.4.3	Discussion	114
4.4	Application à l'équation de Burgers	114
4.4.1	Définition du problème d'optimisation et système optimal	114
4.4.2	Discrétisations spatiale et temporelle	117
4.4.2.1	Discrétisation de l'équation de Burgers	119
4.4.2.2	Discrétisation de l'équation de Burgers adjointe	119
4.4.3	Evaluation du nouveau contrôle	119
4.4.4	Résultats pour l'équation de la chaleur et l'équation de Burgers . . .	120
4.4.4.1	Equation de la chaleur	121
4.4.4.2	Equation de Burgers	124
5	Contrôle optimal d'un écoulement de canal turbulent	131
5.1	Choix de la fonctionnelle coût	131
5.2	Systèmes optimaux	133
5.2.1	Système optimal basé sur les équations de Navier-Stokes résolues par DNS	134
5.2.1.1	Variation de $\mathcal{I}$	136
5.2.1.2	Variation de $\mathcal{J}$	137
5.2.1.3	Système optimal	138
5.2.2	Système optimal basé sur les équations de Navier-Stokes résolues par LES	139
5.2.2.1	Variation de $\mathcal{I}$	139
5.2.2.2	Variation de $\mathcal{J}$	142
5.2.2.3	Système optimal	142
5.3	Discussions sur la résolution du système optimal	145
5.3.1	Algorithme de résolution	145
5.3.1.1	Algorithme de minimisation	146
5.3.1.2	Critère de convergence	146
5.3.1.3	Résolution numérique des équations adjointes	147
5.3.2	Procédure de contrôle instantané	147
5.4	Résultats de contrôle optimal pour $Re_\tau = 100$	150
5.4.1	Caractéristiques des simulations	150
5.4.2	Influence du choix de la fonctionnelle coût	152
5.4.3	Influence de la longueur de la période d'optimisation	156
5.4.4	Influence du coût du contrôle	161
5.5	Résultats de contrôle optimal pour $Re_\tau = 180$	163
5.5.1	Généralités	163
5.5.2	Influence du choix de la fonctionnelle coût	166
5.5.3	Influence de la longueur de la période d'optimisation	169
5.6	Comparaison entre contrôle optimal et contrôle par opposition	171
5.7	Conclusion	178

Conclusion et perspectives	181
A Schéma hybride Runge-Kutta/Crank-Nicolson	187
A.1 Méthode de Runge-Kutta d'ordre 3 à stockage limité (RK3W)	187
A.2 Schéma semi-implicite Runge-Kutta/Crank-Nicolson	190
B Mise sous forme LU de l'algorithme de projection	193
C Discrétisation numérique des équations de Navier-Stokes	195
C.1 Distribution des nœuds	195
C.2 Discrétisation de l'équation de quantité de mouvement	196
C.2.1 Termes diffusifs	196
C.2.2 Termes convectifs	198
C.3 Discrétisation de l'équation de Poisson	198
C.3.1 Opérateur de divergence	199
C.3.2 Opérateur Laplacien	199
D Analyse de Fourier. Schéma de DF d'ordre 2	201
E Rappels sur l'écoulement de Poiseuille	203
E.1 Mise en équation	203
E.1.1 Conditions aux limites sur U_c	203
E.1.2 Conditions aux limites sur u_τ	204
F Terme de forçage	207
F.1 Mise en équation	207
F.2 Débit volumique et vitesse débitante	208
F.3 Algorithme de point fixe	209
G Système optimal. Equation de Burgers linéarisée.	213
G.1 Définition du problème d'optimisation	213
G.2 Résolution analytique du problème d'optimisation	215
G.2.1 Problème direct	215
G.2.2 Problème adjoint	215
G.2.3 Conditions d'optimalité	218
H Système optimal. Equation de Burgers.	221
H.1 Variation de la fonctionnelle $\mathcal{I}$ par rapport à la variable d'état u	221
H.2 Variation de la fonctionnelle $\mathcal{J}$ par rapport à la variable d'état u	222
H.3 Système optimal	223
I Système optimal. Canal turbulent simulé par DNS.	225
I.1 Formulaire d'analyse tensorielle	225
I.2 Variation de la fonctionnelle $\mathcal{I}$	226
I.2.1 Contribution du terme de temps $\mathcal{I}'_t$	226
I.2.2 Contribution du terme convectif $\mathcal{I}'_c$	226
I.2.3 Contribution du terme de pression $\mathcal{I}'_p$	227
I.2.4 Contribution du terme de continuité $\mathcal{I}'_{Cont}$	227
I.2.5 Contribution du terme diffusif $\mathcal{I}'_\nu$	227
I.2.6 Bilan des contributions	228
I.2.7 Simplification des termes $\mathcal{I}'_\Gamma$ et $\mathcal{I}'_T$	229

I.2.7.1	Simplification du terme $\mathcal{I}'_\Gamma$	229
I.2.7.2	Simplification du terme $\mathcal{I}'_T$	229
I.3	Système optimal	230
I.3.1	Cas de la fonctionnelle coût (5.13)	230
I.3.2	Cas de la fonctionnelle coût (5.14)	231
J	Système optimal. Canal turbulent simulé par LES .	233
J.1	Variation de la fonctionnelle $\mathcal{I}$	233
J.1.1	Contribution du terme de temps $\mathcal{I}'_t$	234
J.1.2	Contribution du terme convectif $\mathcal{I}'_c$	234
J.1.3	Contribution du terme de pression $\mathcal{I}'_P$	235
J.1.4	Contribution du terme de continuité $\mathcal{I}'_{Cont}$	235
J.1.5	Contribution du terme diffusif $\mathcal{I}'_\nu$	236
J.1.6	Contribution du terme diffusif $\mathcal{I}'_{\nu'}$	237
J.1.6.1	Evaluation de $\delta\nu$	237
J.1.6.2	Premières transformations	238
J.1.6.3	Evaluation de $\mathcal{I}'_{S'}$	239
J.1.6.4	Evaluation de $\mathcal{I}'_{C'}$	239
J.1.6.5	Expression du terme diffusif $\mathcal{I}'_{\nu'}$	245
J.1.7	Bilan des contributions	245
J.1.8	Simplification des termes $\mathcal{I}'_\Gamma$ et $\mathcal{I}'_T$	246
J.1.8.1	Simplification du terme $\mathcal{I}'_\Gamma$	246
J.1.8.2	Simplification du terme $\mathcal{I}'_T$	246
J.2	Variation de la fonctionnelle coût $\mathcal{J}$	247
J.3	Système optimal	247
J.3.1	Cas de la fonctionnelle coût (5.4)	247
J.3.2	Cas de la fonctionnelle coût (5.5)	249
K	Résolution numérique de l'équation adjointe du système LES	251
K.1	Discretisation temporelle	251
K.2	Méthode à pas fractionnaire	253

Table des figures

1.1	Comparaison de l'écoulement autour d'une balle lisse et d'une balle de golf.	3
1.2	Différentes formes de riblets utilisées en contrôle d'écoulement.	3
1.3	Schéma de principe du contrôle actif en boucle fermée.	4
2.1	Représentation schématique du canal plan.	14
2.2	Spectre d'énergie pour un écoulement turbulent.	18
2.3	Illustration du double filtrage nécessaire à la procédure dynamique proposée par Germano <i>et al.</i> (1991).	25
2.4	Illustration des différents types de localisation des inconnues.	36
2.5	Maillage décalé vitesse pression utilisé pour la discrétisation spatiale.	36
2.6	Gestion de la périodicité.	43
2.7	Evolution temporelle du débit volumique pour les deux méthodes de forçage (gradient de pression fixé, débit fixé). Cas d'un écoulement non contrôlé simulé par LES à $Re_\tau = 180$ (résolution de $64 \times 65 \times 64$).	45
2.8	Evolution temporelle du débit volumique pour les deux méthodes de forçage (gradient de pression fixé, débit fixé). Cas d'un écoulement contrôlé par opposition et simulé par LES à $Re_\tau = 180$ (résolution de $64 \times 65 \times 64$).	46
2.9	Valeur du pas d'espace dans la direction normale à la paroi en fonction de la distance à la paroi inférieure. Cas des simulations numériques d'écoulements non contrôlés à $Re_\tau = 180$	48
2.10	Evolution temporelle de l'énergie cinétique avant et après excitation.	51
2.11	Evolution temporelle de l'énergie cinétique turbulente moyenne et de l'énergie cinétique dans le plan $y^+ = 15$ pour la simulation S_3 . La ligne verticale en pointillés correspond au temps de début d'accumulation des statistiques.	52
2.12	Evolution temporelle de la traînée totale moyenne pour la simulation S_3 . La ligne verticale en pointillés correspond au temps de début d'accumulation des statistiques.	52
2.13	Profils de la contrainte totale de cisaillement en unités de paroi sur toute la hauteur du canal. Comparaison entre les résultats des simulations S_1 , S_2 et S_3 et du profil analytique en turbulence pleinement développée.	54
2.14	Profil de vitesse moyenne longitudinale en unité de paroi.	56
2.15	Ecart type de la composante de vitesse longitudinale.	59
2.16	Ecart type de la composante de vitesse normale.	59
2.17	Ecart type de la composante de vitesse transversale.	59
2.18	Contraintes de Reynolds et contraintes visqueuses réduites par la contrainte totale.	59
2.19	Bilan des termes provenant de l'équation de transport des contraintes de Reynolds $\langle u'_1 u'_2 \rangle$ pour la simulation S_1	62
2.20	Coefficient de dissymétrie pour la composante u	63

2.21	Coefficient de dissymétrie pour la composante v	63
2.22	Coefficient de dissymétrie pour la composante w	63
2.23	Quadrant des fluctuations de vitesse.	63
2.24	Coefficient d'aplatissement pour la composante u	66
2.25	Coefficient d'aplatissement pour la composante v	66
2.26	Coefficient d'aplatissement pour la composante w	66
2.27	Auto-corrélations spatiales de vitesse suivant la direction longitudinale ($y^+ = 10$).	68
2.28	Auto-corrélations spatiales de vitesse suivant la direction longitudinale ($y^+ = 172$).	68
2.29	Auto-corrélations spatiales de vitesse suivant la direction transversale ($y^+ = 10$).	68
2.30	Auto-corrélations spatiales de vitesse suivant la direction transversale ($y^+ = 172$).	68
2.31	Détermination de l'espacement entre deux stries de fluide et du diamètre d'un tourbillon longitudinal. Les corrélations spatiales ont été calculées à $y^+ = 10$	70
2.32	Spectres d'énergie suivant la direction longitudinale à $y^+ = 10$. Comparaison simulation S_3 et MKM99.	71
2.33	Spectres d'énergie suivant la direction transversale à $y^+ = 10$. Comparaison simulation S_3 et MKM99.	71
2.34	Spectres d'énergie suivant la direction longitudinale à $y^+ = 10$ (simulation S_3).	73
2.35	Spectres d'énergie suivant la direction longitudinale à $y^+ = 172$ (simulation S_3).	73
2.36	Spectres d'énergie suivant la direction transversale à $y^+ = 10$ (simulation S_3).	73
2.37	Spectres d'énergie suivant la direction transversale à $y^+ = 172$ (simulation S_3).	73
2.38	Visualisation pour la simulation S_1 des structures cohérentes par le critère $\mathcal{D}$. Les régions de l'écoulement où le critère $\mathcal{D} > \mathcal{D}_{\text{seuil}}$ avec $\mathcal{D}_{\text{seuil}} = 5 \times 10^{-5}$ sont représentées. L'écoulement va de la gauche vers la droite.	77
3.1	Principe schématique du contrôle par opposition.	80
3.2	Visualisation des structures cohérentes obtenues à $Re_\tau = 180$ par DNS (configuration S_1). On compare l'écoulement non contrôlé (a) à l'écoulement associé au contrôle par opposition (b) lorsque $y_d^+ = 14, 56$. Les structures cohérentes sont repérées par le critère $\mathcal{D}$ avec $\mathcal{D}_{\text{seuil}} = 5 \times 10^{-5}$	82
3.3	Isovaleurs de la vorticité longitudinale ω_x obtenues à $Re_\tau = 180$ par DNS (configuration S_1). On compare l'écoulement non contrôlé (a) à l'écoulement associé au contrôle par opposition (b) lorsque $y_d^+ = 14, 56$. Les mêmes isovaleurs sont utilis�es dans les deux cas.	83
3.4	Evolutions temporelles de la traînée totale moyenne obtenues par DNS � $Re_\tau = 180$. Comparaisons des cas sans contrôle et contrôle par opposition avec $y_d^+ = 14, 56$	84
3.5	Traînée totale moyenne obtenues par LES � $Re_\tau = 180$ pour un contrôle par opposition. Plusieurs positions du plan de détection y_d^+ sont compar�es. Dans ces simulations numériques, le contrôle a été actionné à partir de $t^+ = 200$	87

3.6	Evolutions temporelles de la traînée totale moyenne obtenues par LES à $Re_\tau = 180$. Comparaisons des cas sans contrôle et contrôle par opposition avec $y_d^+ = [y_d^+]_{\max} = 15, 6$	88
3.7	Profil de $\langle v'^2 \rangle$ obtenu pour le contrôle par opposition pour $y_d^+ = [y_d^+]_{\max} = 15, 6$. Résultats LES à $Re_\tau = 180$	89
3.8	Variation de la traînée totale moyenne en temps en fonction de la position du plan de détection y_d^+ . Résultats LES pour différentes valeurs du nombre de Reynolds Re_τ . Le cas $Re_\tau = 80$ n'est pas représenté car pour ce nombre de Reynolds une seule valeur de y_d^+ a été testée.	90
3.9	Comparaisons des évolutions temporelles de la traînée totale moyenne obtenues par contrôle par opposition pour différentes valeurs du nombre de Reynolds Re_τ . Les simulations sont réalisées par LES pour la position du plan de détection $[y_d^+]_{\max}$ qui correspond au maximum de réduction de traînée.	92
3.10	Variation du pourcentage de réduction de traînée totale moyenne en temps $\Delta \langle \mathbb{D} \rangle_T$ en fonction de Re_τ . Les symboles $\bullet$ correspondent à des simulations réalisées par LES pour la position du plan de détection $[y_d^+]_{\max}$ qui correspond au maximum de réduction de traînée. Les symboles $\blacksquare$ sont les valeurs en régime laminaire.	93
3.11	Comparaisons des profils de $\langle v'^2 \rangle$ obtenus sans contrôle et pour le contrôle par opposition. Résultats LES pour différentes valeurs du nombre de Reynolds Re_τ . Pour le contrôle par opposition, les simulations sont réalisées pour la position du plan de détection $[y_d^+]_{\max}$ qui correspond au maximum de réduction de traînée.	94
3.12	Efficacité énergétique $\mathcal{P}_{\mathbb{D}}/\mathcal{P}_{ \Phi }$ en fonction de la position du plan de détection y_d^+ pour différentes valeurs du nombre de Reynolds Re_τ	97
4.1	Les différentes approches de résolution du système optimal.	112
4.2	Système optimal de l'équation de Burgers obtenu par l'approche différentiation discrétisation.	118
4.3	Comparaison pour différentes méthodes de gradient conjugué de l'évolution en fonction du nombre d'itération n du coût $\mathcal{J}$ pour l'équation de Burgers contrôlée ($\ell = 0, 01$) avec initialisation et consigne données par l'équation (4.45).	121
4.4	Résultats du contrôle distribué de l'équation de la chaleur ($\ell = 0$).	122
4.5	Profils convergés du contrôle distribué $\Phi(x, t)$ pour l'équation de la chaleur ($\ell = 0$).	123
4.6	Evolution en fonction du nombre d'itération n du coût $\mathcal{J}$. Equation de la chaleur ($\ell = 0$).	123
4.7	Comparaison pour $\ell = 0$ et $\ell = 0, 01$ de l'évolution du coût $\mathcal{J}$ en fonction du nombre d'itération n . Equation de la chaleur.	124
4.8	Résultats du contrôle distribué de l'équation de Burgers ($\ell = 0, 01$). Initialisation et consigne données par l'équation (4.43).	126
4.9	Profils convergés du contrôle distribué $\Phi(x, t)$ pour l'équation de Burgers ($\ell = 0, 01$). Initialisation et consigne données par l'équation (4.43).	127
4.10	Evolution en fonction du nombre d'itération n du coût $\mathcal{J}$. Equation de Burgers ($\ell = 0, 01$). Initialisation et consigne données par l'équation (4.43).	127
4.11	Résultats du contrôle distribué de l'équation de Burgers ($\ell = 0, 01$). Initialisation et consigne données par l'équation (4.45).	128

4.12	Profils convergés du contrôle distribué $\Phi(x, t)$ pour l'équation de Burgers ($\ell = 0, 01$). Initialisation et consigne données par l'équation (4.45).	128
4.13	Evolution en fonction du nombre d'itération n du coût $\mathcal{J}$. Equation de Burgers ($\ell = 0, 01$). Initialisation et consigne données par l'équation (4.45). .	129
5.1	Système optimal pour les équations de Navier-Stokes simulées par DNS. Approche différentiation discrétisation. $\kappa = \pm 1$	140
5.2	Système optimal pour les équations de Navier-Stokes simulées par LES. Approche différentiation discrétisation. $\kappa = \pm 1$	144
5.3	Représentation schématique du processus de résolution du système optimal pour les équations de Navier-Stokes simulées par LES. Optimisation sur $[0; T_o]$.	145
5.4	Résolution du système optimal sur un intervalle de longueur T_o par contrôle instantané ($t_0 = 0$).	148
5.5	Représentation schématique du processus de résolution du système optimal pour les équations de Navier-Stokes simulées par LES. Optimisation sur $[0; T_o]$ par contrôle instantané.	149
5.6	Valeur du pas d'espace dans la direction normale à la paroi en fonction de la distance à la paroi inférieure. Cas de la simulation numérique de contrôle optimal à $Re_\tau = 100$	151
5.7	Comparaison pour $Re_\tau = 100$ de l'évolution temporelle de la traînée totale moyenne pour différentes fonctionnelles coût ($T^+ = 25, 5$).	153
5.8	Comparaison pour $Re_\tau = 100$ de l'évolution temporelle du coût du contrôle pour différentes fonctionnelles coût ($T^+ = 25, 5$).	154
5.9	Comparaison en échelle logarithmique pour $Re_\tau = 100$ de l'évolution temporelle de l'énergie cinétique totale pour différentes fonctionnelles coût ($T^+ = 25, 5$).	155
5.10	Comparaison pour $Re_\tau = 100$ de l'évolution temporelle de la traînée totale moyenne pour différentes valeurs de périodes d'optimisation T^+ ($\mathcal{J} = \mathcal{J}_{TKE(ter)}$).	156
5.11	Comparaison en échelle logarithmique pour $Re_\tau = 100$ de l'évolution temporelle de l'énergie cinétique totale pour différentes valeurs de périodes d'optimisation T^+ ($\mathcal{J} = \mathcal{J}_{TKE(ter)}$).	157
5.12	Comparaison en échelle logarithmique pour $Re_\tau = 100$ de l'évolution temporelle de la fonctionnelle coût $\mathcal{J}_{TKE(ter)}$ pour différentes valeurs de périodes d'optimisation T^+	158
5.13	Comparaison pour $Re_\tau = 100$ de l'évolution temporelle du coût du contrôle pour différentes valeurs de périodes d'optimisation T^+ ($\mathcal{J} = \mathcal{J}_{TKE(ter)}$). . .	160
5.14	Comparaison pour $Re_\tau = 100$ et $\mathcal{J} = \mathcal{J}_{TKE(ter)}$ de l'évolution temporelle de la traînée totale moyenne pour différentes valeurs du paramètre de pénalisation ℓ ($T^+ = 25, 5$).	162
5.15	Comparaison en échelle logarithmique pour $Re_\tau = 100$ et $\mathcal{J} = \mathcal{J}_{TKE(ter)}$ de l'évolution temporelle de l'énergie cinétique totale pour différentes valeurs du paramètre de pénalisation ℓ ($T^+ = 25, 5$).	162
5.16	Comparaison pour $Re_\tau = 100$ et $\mathcal{J} = \mathcal{J}_{TKE(ter)}$ de l'évolution temporelle de la fonction coût pour différentes valeurs du paramètre de pénalisation ℓ ($T^+ = 25, 5$).	162
5.17	Comparaison pour $Re_\tau = 100$ et $\mathcal{J} = \mathcal{J}_{TKE(ter)}$ de l'évolution temporelle du coût du contrôle pour différentes valeurs du paramètre de pénalisation ℓ ($T^+ = 25, 5$).	162

5.18	Comparaison pour $Re_\tau = 100$ et $\mathcal{J} = \mathcal{J}_{TKE(reg)}$ de l'évolution temporelle de la traînée totale moyenne pour différentes valeurs du paramètre de pénalisation ℓ ($T^+ = 25, 5$).	164
5.19	Comparaison en échelle logarithmique pour $Re_\tau = 100$ et $\mathcal{J} = \mathcal{J}_{TKE(reg)}$ de l'évolution temporelle de l'énergie cinétique totale pour différentes valeurs du paramètre de pénalisation ℓ ($T^+ = 25, 5$).	164
5.20	Comparaison pour $Re_\tau = 100$ et $\mathcal{J} = \mathcal{J}_{TKE(reg)}$ de l'évolution temporelle de la fonction coût pour différentes valeurs du paramètre de pénalisation ℓ ($T^+ = 25, 5$).	164
5.21	Comparaison pour $Re_\tau = 100$ et $\mathcal{J} = \mathcal{J}_{TKE(reg)}$ de l'évolution temporelle du coût du contrôle pour différentes valeurs du paramètre de pénalisation ℓ ($T^+ = 25, 5$).	164
5.22	Comparaison pour $Re_\tau = 100$ et $\mathcal{J} = \mathcal{J}_{drag}$ de l'évolution temporelle de la traînée totale moyenne pour différentes valeurs du paramètre de pénalisation ℓ ($T^+ = 25, 5$).	165
5.23	Comparaison en échelle logarithmique pour $Re_\tau = 100$ et $\mathcal{J} = \mathcal{J}_{drag}$ de l'évolution temporelle de l'énergie cinétique totale pour différentes valeurs du paramètre de pénalisation ℓ ($T^+ = 25, 5$).	165
5.24	Comparaison pour $Re_\tau = 100$ et $\mathcal{J} = \mathcal{J}_{drag}$ de l'évolution temporelle de la fonction coût pour différentes valeurs du paramètre de pénalisation ℓ ($T^+ = 25, 5$).	165
5.25	Comparaison pour $Re_\tau = 100$ et $\mathcal{J} = \mathcal{J}_{drag}$ de l'évolution temporelle du coût du contrôle pour différentes valeurs du paramètre de pénalisation ℓ ($T^+ = 25, 5$).	165
5.26	Comparaison pour $Re_\tau = 180$ de l'évolution temporelle de la traînée totale moyenne pour différentes fonctionnelles coût ($T^+ = 25, 2$).	168
5.27	Comparaison en échelle logarithmique pour $Re_\tau = 180$ de l'évolution temporelle de l'énergie cinétique totale pour différentes fonctionnelles coût ($T^+ = 25, 2$).	168
5.28	Comparaison pour $Re_\tau = 180$ de l'évolution temporelle du coût du contrôle pour différentes fonctionnelles coût ($T^+ = 25, 2$).	169
5.29	Visualisation des structures cohérentes obtenues à $Re_\tau = 180$ par LES. On compare l'écoulement non contrôlé (a) aux résultats du contrôle optimal pour $\mathcal{J}_{TKE(ter)}$ (b), $\mathcal{J}_{TKE(reg)}$ (c) et $\mathcal{J}_{drag}$ (d). Les structures cohérentes sont repérées par le critère $\mathcal{D}$ avec $\mathcal{D}_{seuil} = 2 \times 10^{-6}$	170
5.30	Comparaison pour $Re_\tau = 180$ de l'évolution temporelle de la traînée totale moyenne pour différentes valeurs de périodes d'optimisation T^+ ($\mathcal{J} = \mathcal{J}_{TKE(ter)}$).	172
5.31	Comparaison en échelle logarithmique pour $Re_\tau = 180$ de l'évolution temporelle de l'énergie cinétique totale pour différentes valeurs de périodes d'optimisation T^+ ($\mathcal{J} = \mathcal{J}_{TKE(ter)}$).	172
5.32	Comparaison pour $Re_\tau = 180$ de l'évolution temporelle du coût du contrôle pour différentes valeurs de périodes d'optimisation T^+ ($\mathcal{J} = \mathcal{J}_{TKE(ter)}$).	173
5.33	Comparaisons pour $Re_\tau = 100$ et $Re_\tau = 180$ des évolutions temporelles de la traînée totale moyenne obtenues pour le contrôle par opposition et par contrôle optimal. Le contrôle par opposition correspond à la position optimale du plan de détection pour le nombre de Reynolds donné ; le contrôle optimal à la minimisation de $\mathcal{J}_{TKE(ter)}$ avec pour $Re_\tau = 100$: $T^+ = 25, 5$ et pour $Re_\tau = 180$: $T^+ = 25, 2$ et $T^+ = 54$	174

5.34	Comparaisons en échelle logarithmique pour $Re_\tau = 100$ et $Re_\tau = 180$ des évolutions temporelles de l'énergie cinétique totale obtenues pour le contrôle par opposition et par contrôle optimal. Le contrôle par opposition correspond à la position optimale du plan de détection pour le nombre de Reynolds donné; le contrôle optimal à la minimisation de $\mathcal{J}_{TKE(ter)}$ avec pour $Re_\tau = 100 : T^+ = 25,5$ et pour $Re_\tau = 180 : T^+ = 25,2$ et $T^+ = 54$	175
5.35	Comparaisons pour $Re_\tau = 100$ et $Re_\tau = 180$ des évolutions temporelles du coût du contrôle obtenues pour le contrôle par opposition et par contrôle optimal. Le contrôle par opposition correspond à la position optimale du plan de détection pour le nombre de Reynolds donné; le contrôle optimal à la minimisation de $\mathcal{J}_{TKE(ter)}$ avec pour $Re_\tau = 100 : T^+ = 25,5$ et pour $Re_\tau = 180 : T^+ = 25,2$	176
5.36	Comparaison pour $Re_\tau = 180$ des profils de $\langle v'^2 \rangle$ obtenus pour le contrôle par opposition et par contrôle optimal. Le contrôle par opposition correspond à la position optimale du plan de détection et le contrôle optimal à la minimisation de $\mathcal{J}_{TKE(ter)}$ pour $T^+ = 25,2$	177
C.1	Cellule $[i, j, k]$ du maillage cartésien avec positionnement des nœuds.	196
C.2	Répartition des nœuds dans le domaine de calcul.	197
G.1	Système optimal de l'équation de Burgers linéarisée.	219

Liste des tableaux

2.1	Grandeurs caractéristiques des simulations LES d'écoulements non contrôlés à $Re_\tau = 180$	47
2.2	Comparaison pour les simulations S_1 , S_2 et S_3 du temps CPU (en seconde) nécessaire pour réaliser une seule itération. Le temps CPU est estimé par moyenne sur 1000 itérations.	55
2.3	Propriétés moyennes de l'écoulement.	57
2.4	Comparaison pour différents triplets de valeurs propres du hessien de pression des critères Q et λ_2 . On note "CT" dans le tableau lorsque un cœur de tourbillon a été détecté par le critère ; rien sinon.	76
3.1	Grandeurs caractéristiques des simulations LES d'écoulements contrôlés par opposition.	86
3.2	Pourcentage de réduction de traînée totale moyenne en temps $\Delta\langle\mathbb{D}\rangle_T$ et efficacité énergétique $\mathcal{P}_\mathbb{D}/\mathcal{P}_{ \Phi }$ obtenus par contrôle par opposition pour différentes valeurs de y_d^+ . Les simulations sont réalisées par LES pour $Re_\tau = 180$	90
3.3	Valeurs de $[y_d^+]_{\max}$ en fonction du nombre de Reynolds Re_τ	91
3.4	Pourcentage de réduction de traînée totale moyenne en temps $\Delta\langle\mathbb{D}\rangle_T$ et efficacité énergétique $\mathcal{P}_\mathbb{D}/\mathcal{P}_{ \Phi }$ obtenus par contrôle par opposition pour plusieurs valeurs du nombre de Reynolds Re_τ . Les simulations sont réalisées par LES pour la position du plan de détection $[y_d^+]_{\max}$ qui correspond au maximum de réduction de traînée.	96
5.1	Grandeurs caractéristiques des simulations de contrôle optimal par LES réalisées à $Re_\tau = 100$	151

Liste des symboles

Lettres grecques

α	Coefficient intervenant dans le terme de forçage
α_k	Coefficients à l'itéré k du schéma RK3W ($k = 1, 2, 3$)
β	Coefficient intervenant dans le terme de forçage
β_k	Coefficients à l'itéré k du schéma RK3W ($k = 1, 2, 3$)
Δt	Pas de temps
$\Delta x, \Delta y, \Delta z$	Pas d'espace dans les directions $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$
Δy_w	Taille de la plus petite maille dans la direction $\mathbf{e}_y$
δ	Demi hauteur du canal
δ_{ij}	Symbole de Kronecker
ϵ_{ijk}	Symbole de Levi-Civita
ϵ_{ij}	Terme de pseudo-dissipation du bilan des contraintes de Reynolds
$\eta = \frac{\hat{\Delta}}{\Delta}$	Rapport entre la longueur de filtre test et la longueur de filtre de maille
η_k	Coefficients à l'itéré k du schéma RK3W ($k = 1, 2, 3$)
$\frac{\delta}{\delta x}, \frac{\delta}{\delta y}, \frac{\delta}{\delta z}$	Opérateurs de différence finie discrets dans les directions $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$
γ	Coefficient permettant de resserrer le maillage dans la direction $\mathbf{e}_y$
$\Gamma_2^\pm$	Frontières supérieure et inférieure du domaine de calcul
κ	Constante de Von Kármán pour le profil de vitesse initiale
λ_2	Critère de Jeong et Hussain (1995)
μ	Viscosité dynamique
ν	Viscosité cinématique
ν_T	Viscosité sous-maille ou turbulente
Ω	Domaine de calcul
ω_x	Composante de vorticité longitudinale
Ω_{ij}	Partie anti-symétrique du tenseur des gradients de vitesse
$\overline{\Delta}$	Longueur de filtre de maille

$\overline{\Delta}_x, \overline{\Delta}_y, \overline{\Delta}_z,$	Longueur de filtre de maille dans les directions $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$
$\overline{\Pi}$	Pression modifiée
Φ	Variable de contrôle
ρ	Masse volumique
τ_{ij}^d	Partie déviateur du tenseur des contraintes sous-maille
τ_ν	Contrainte visqueuse
τ_r	Contrainte de Reynolds
τ_t	Contrainte totale de cisaillement
τ_w	Tenseur des contraintes à la paroi
τ_{ij}	Tenseur des contraintes sous-maille
$\hat{\Delta}$	Longueur de filtre test

Lettres latines

(x_i, y_j, z_k)	Coordonnées du point (i, j, k) du maillage
$\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$	Vecteurs unitaires dans les directions x, y, z
$\mathbf{r}$	Vecteur second membre de la forme discrétisée en temps des équations de Navier-Stokes
$\mathbf{u}$	Vecteur vitesse
$\mathbf{u}^+ = \frac{\mathbf{u}}{u_\tau} = \tilde{\mathbf{u}}$	Champ de vitesse adimensionné en unité de paroi
$\mathbf{u}^k$	Vecteur vitesse à l'itéré k du schéma RK3W ($k = 1, 2, 3$)
$\mathbf{x}$	Vecteur position
$\mathbf{x}^+ = \frac{\mathbf{x}}{\nu/u_\tau} = Re_\tau \tilde{\mathbf{x}}$	Vecteur position adimensionné en unité de paroi
$\Delta\langle\mathbb{D}\rangle_T$	Variation du pourcentage de réduction de traînée totale moyenne en temps
ℓ	Terme de coût de contrôle
ℓ_{drag}	Coefficient de prise en compte de la traînée dans la fonctionnelle coût
ℓ_{reg}	Coefficient de prise en compte du terme d'énergie cinétique turbulente régularisée dans la fonctionnelle coût
ℓ_{ter}	Coefficient de prise en compte du terme d'énergie cinétique turbulente au temps terminal dans la fonctionnelle coût
$[y_d^+]_{\max}$	Position du plan de détection correspondant au maximum de réduction de traînée
$\mathbb{D}$	Traînée totale moyenne instationnaire
$\mathbf{G}$	Opérateur de gradient discret pour la méthode à pas fractionnaire
$\mathbf{n}$	Vecteur unitaire extérieur normal aux parois
$\mathcal{C}(\Phi)(t)$	Coût du contrôle instantané

$\mathcal{D}$	Critère de Chong <i>et al.</i> (1990)
$\mathcal{D}_{\text{seuil}}$	Valeur seuil pour le critère de Chong <i>et al.</i> (1990)
$\mathcal{J}$	Fonctionnelle coût
$\mathcal{J}_{\text{drag}}$	Fonctionnelle coût basée sur la traînée de frottement à la paroi
$\mathcal{J}_{TKE(\text{reg})}$	Fonctionnelle coût basée sur l'énergie cinétique turbulente intégrée sur tout le domaine et sur tout l'intervalle d'optimisation
$\mathcal{J}_{TKE(\text{ter})}$	Fonctionnelle coût basée sur l'énergie cinétique turbulente intégrée sur tout le domaine et calculée au temps terminal de l'intervalle d'optimisation
$\mathcal{P}_{\Phi}$	Puissance dépensée pour le contrôle Φ
$\mathcal{P}_{\mathbb{D}}$	Puissance économisée par l'action du contrôle
$\sqrt{\langle u_i'^2 \rangle}$	Ecarts type de la composante i ($i = 1, 2, 3$) du champ de vitesse
$\tilde{\mathbf{u}}^k$	Vecteur vitesse intermédiaire à l'itéré k du schéma RK3W ($k = 1, 2, 3$) pour la méthode à pas fractionnaire
A^+	Constante de Van Driest
A_i	Termes traités explicitement dans le schéma RK3W
A_{ij}	Terme d'advection du bilan des contraintes de Reynolds ou tenseur des gradients de vitesse
B_i	Termes traités implicitement dans le schéma RK3W
C ou C_s	Constante de Smagorinsky
C_f	Coefficient de frottement moyen
C_K	Constante de Kolmogorov
D	Opérateur de divergence discret pour la méthode à pas fractionnaire
D_{ij}	Terme de diffusion moléculaire du bilan des contraintes de Reynolds
$E(k)$	Energie turbulente pour le nombre d'onde k
$E_{ij}^{(l)}(y, k_l)$	Spectre d'énergie défini comme la transformée de Fourier de $R_{ij}^{(l)}(y, r)$
F_i	Terme de forçage dans la direction i ($i = 1, 2, 3$)
F_{u_i}	Coefficient d'aplatissement pour la composante i ($i = 1, 2, 3$) du champ de vitesse
$G(\mathbf{x})$	Noyau du filtre LES
k	Nombre d'onde
k_c	Nombre d'onde de coupure
k_x'', k_z''	Nombres d'onde modifiés dans les directions $\mathbf{e}_x$ et $\mathbf{e}_z$ pour un opérateur de différence finie du second ordre pour la dérivée seconde
k_x, k_z	Nombres d'onde dans les directions $\mathbf{e}_x$ et $\mathbf{e}_z$
L_i	Dimension du domaine de calcul ($i = 1, 2, 3$)

L_x, L_y, L_z	Dimension du domaine de calcul
L_{ij}	Contribution au tenseur des contraintes sous-maille des échelles comprises entre $\overline{\Delta}$ et $\widehat{\Delta}$
$L_{ref} = \delta$	Longueur de référence
n_i	Composantes du vecteur unitaire extérieur normal aux parois ($i = 1, 2, 3$)
N_t	Nombre de pas de temps
N_x, N_y, N_z	Nombre des points du maillage dans les directions $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$
N_{ij}	Terme de corrélation avec la fluctuation de pression du bilan des contraintes de Reynolds
P	Premier invariant du tenseur des gradients de vitesse
p ou P	Pression
P_{ij}	Terme de production par le mouvement moyen du bilan des contraintes de Reynolds
Q	Second invariant du tenseur des gradients de vitesse
Q_v	Débit volumique
R	Troisième invariant du tenseur des gradients de vitesse
r_i	Composante i ($i = 1, 2, 3$) du second membre de la forme discrétisée en temps des équations de Navier-Stokes
$R_{ij}^{(l)}(\mathbf{x}, r, t)$	Corrélations spatiales en deux points séparés d'une distance r dans la direction $\mathbf{e}_l$ ($l = 1, 2, 3$) de deux composantes du champ de vitesse u'_i et u'_j
Re_τ	Nombre de Reynolds basé sur la vitesse de frottement à la paroi ($Re_\tau = \frac{u_\tau \delta}{\nu}$)
Re_b	Nombre de Reynolds basé sur la vitesse débitante
Re_c	Nombre de Reynolds basé sur la vitesse au centre du canal
S_{ij}	Tenseur des taux de vitesse de déformation
S_{u_i}	Coefficient de dissymétrie pour la composante i ($i = 1, 2, 3$) du champ de vitesse
T	Longueur du sous-intervalle d'optimisation dans la méthode de contrôle instantané
t	Temps
$t^+ = \frac{t}{\nu/u_\tau^2} = Re_\tau \tilde{t}$	Temps adimensionné en unité de paroi
T_o	Période d'optimisation
T_s	Temps de simulation
T_{ij}	Contribution au tenseur des contraintes sous-maille des échelles inférieures à $\widehat{\Delta}$

T_{ij}	Terme de transport turbulent du bilan des contraintes de Reynolds
TKE	Energie cinétique turbulente moyenne instationnaire
u, v, w	Composantes du champ de vitesse dans les directions $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$
u_τ	Vitesse de frottement à la paroi
U_b	Vitesse débitante
U_c	Vitesse au centre du canal
u_i	Composantes du champ de vitesse ($i = 1, 2, 3$)
$u_{i,n}$	Composantes du champ de vitesse u_i ($i = 1, 2, 3$) au pas de temps n
$u_{ref} = u_\tau$	Vitesse de référence
x, y, z	Coordonnées cartésiennes
x_i	Coordonnées cartésiennes ($i = 1, 2, 3$)
y_d^+	Position du plan de détection

Indices et abréviation

$()'$	Variation ou fluctuation d'une variable
$()^+$	Variables adimensionnées en grandeurs de paroi
$()^*$	Variables adjointes
$()_{max}$	Valeur maximale
$\langle \rangle$	Opérateur de moyenne
$\langle \rangle_T$	Opérateur de moyenne temporelle
$\langle \rangle_{XZ}$	Opérateur de moyenne dans les directions homogènes statistiquement $\mathbf{e}_x$ et $\mathbf{e}_z$
$\overline{()}$	Variables filtrées par le filtre de maille
$\tilde{()}$	Variables adimensionnées par les grandeurs de référence u_{ref} et L_{ref}
$\hat{()}$	Variables filtrées par le filtre test ou transformée de Fourier dans les directions $\mathbf{e}_x$ et $\mathbf{e}_z$
CFL	Courant-Friedrich-Levy (critère de stabilité numérique)
DNS	Direct Numerical Simulation ou Simulation Numérique Directe
LEBUs	Large Eddy BreakUp devices
LES	Large Eddy Simulation ou Simulation aux Grandes Echelles
MEMS	Micro Electro Mechanical Systems
MKM 99	(Moser <i>et al.</i> , 1999)
POD	Proper Orthogonal Decomposition ou décomposition orthogonale aux valeurs propres
RANS	Reynolds Averaged Navier-Stokes ou Equations de Navier-Stokes en moyenne de Reynolds
RK3W	Schéma de Runge-Kutta Wray

Chapitre 1

Introduction

Sommaire

1.1	Le contrôle d'écoulement	1
1.2	Contrôle passif et contrôle actif	2
1.3	Contrôle d'écoulement et réduction de modèles	4
1.4	Réduction de modèle par simulation aux grandes échelles	5
1.5	Contrôle optimal	6
1.6	Configuration de l'étude	7
1.7	Organisation du document	9

1.1 Le contrôle d'écoulement

Optimiser l'aérodynamique interne et externe d'un avion par *contrôle des écoulements* a toujours été un enjeu majeur pour le développement du transport aéronautique. En effet, puisqu'une grande partie de l'énergie dépensée lors d'un vol est investie pour vaincre le frottement de l'air sur les parois (ailes, fuselages, dérive), réduire par contrôle (actif ou passif) la traînée permettrait d'augmenter l'autonomie en vol, ou encore de diminuer la masse au décollage, ce qui réduirait d'autant les coûts opérationnels. Mais les bénéfices potentiels du contrôle d'écoulement ne sont pas limités au domaine économique, réduction de l'émission de gaz polluant, de la nuisance sonore, ou encore gain de manœuvrabilité sont largement aussi attendus.

Les expérimentations sur le contrôle d'écoulement ont été initiées il y a près de 70 ans par Prandtl (1935) qui mit en évidence la réduction de la traînée derrière un cylindre lorsque de l'aspiration était appliquée sur une moitié de ce corps. Depuis cette date, les travaux expérimentaux, que ce soit sur maquette de laboratoire ou sur configuration réelle, n'ont jamais cessés (lire Gad-el-Hak, 2000 pour une présentation quasi-exhaustive des tech-

niques de contrôle et Joslin, 1998 pour une revue des activités de recherche liées au contrôle laminaire ou *Laminar Flow Control*). Les approches théoriques du contrôle d'écoulement n'ont pas, quant à elles, eu le même développement. Certes, Schlichting dès 1942, apporta une première contribution en s'intéressant aux effets de l'aspiration sur une couche limite, mais le caractère fortement pluridisciplinaire, par nature, de ce champ d'activité a longtemps retardé son développement. Depuis une dizaine d'années, la théorie du contrôle, les approches mathématiques liées aux équations de Navier-Stokes, les méthodes numériques pour la simulation en Mécanique des Fluides et la résolution de problèmes d'optimisation ont atteint un niveau de maturité suffisant pour pouvoir reconsidérer¹ les problèmes classiques proposés par le contrôle d'écoulement de manière plus moderne, ce qui offre même pour parodier Bewley : "une nouvelle Renaissance" (Bewley, 2001).

1.2 Contrôle passif et contrôle actif

Les différentes méthodes de contrôle d'écoulement utilisées dans la littérature (Gad-el-Hak, 2000) peuvent être classées en deux catégories : *le contrôle passif* et *le contrôle actif*, deux terminologies dont on va maintenant préciser le sens.

Essentiellement, *le contrôle passif* utilise des caractéristiques géométriques ou physiques de l'écoulement afin d'agir sur celui-ci : modification de la forme des profils d'aile par exemple (le problème est alors ramené à un problème d'optimisation de forme, voir Mohammadi et Pironneau 2001), changement des propriétés du fluide (variation de la viscosité avec la température par exemple),... Avec cette stratégie de contrôle, l'état de l'écoulement est modifié sans apport d'énergie externe. Un exemple élémentaire de ce type de contrôle est la balle de golf représentée sur la figure 1.1. Les alvéoles présentes sur la balle font que la couche limite devient turbulente ce qui s'accompagne d'une réduction de traînée (figure 1.1(b)). Par ailleurs, le décollement est ainsi retardé et la largeur du sillage fortement réduite. Parmi les autres techniques de contrôle passif qui jouent sur la modification de la surface de contact entre l'écoulement et les parois, on trouve les riblets (voir figure 1.2) et les *LEBUs* ou Large-eddy breakup devices (Bushnell et Hefner, 1990). L'application de ces techniques entraîne la décroissance de la cohérence des structures énergétiques dans la couche limite turbulente (Choi *et al.*, 1993) et la diminution de la traînée visqueuse. Des expériences réalisées sur des prototypes d'ailes d'avion ont montré que l'application des

1. N'oublions pas de manière plus matérielle, mais néanmoins tout aussi déterminante, les progrès réalisés par l'informatique.

riblets peut produire une réduction de traînée de l'ordre de 6% (Lee et Jang, 2005).

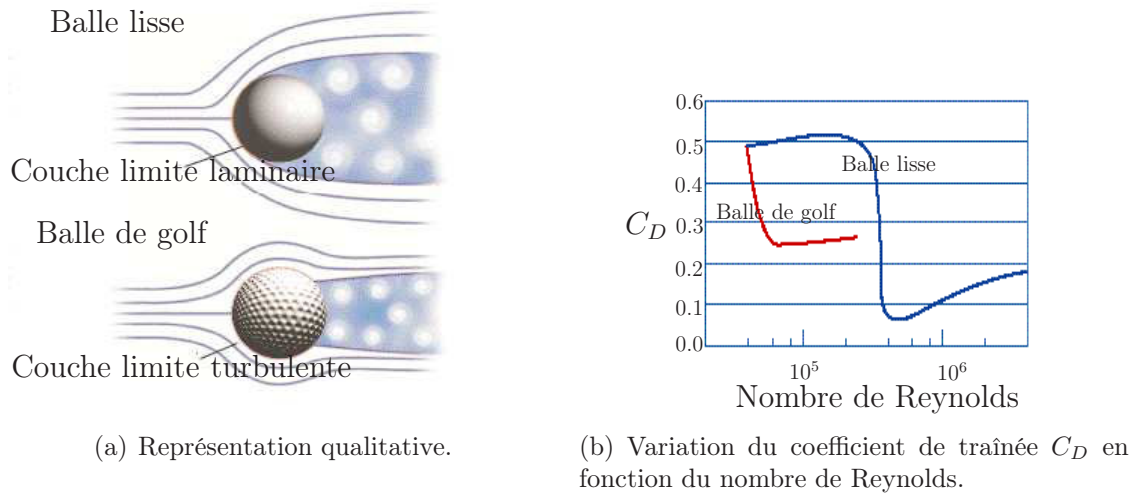


FIGURE 1.1 – Comparaison de l'écoulement autour d'une balle lisse et d'une balle de golf.

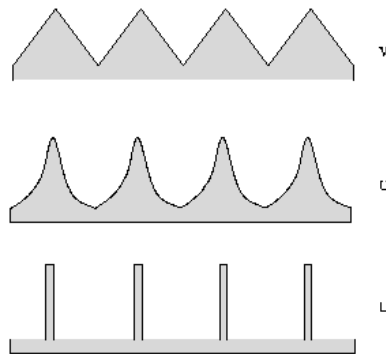


FIGURE 1.2 – Différentes formes de riblets utilisées en contrôle d'écoulement.

Le *contrôle actif*, quant à lui, utilise des informations relatives à l'écoulement (pression, vitesse, frottement pariétal,...) via des capteurs pour adapter son action (chauffage/refroidissement, soufflage/aspiration, vibrations,...) au comportement instantané de l'écoulement (voir figure 1.3 pour un schéma de principe du contrôle actif en boucle fermée pour une configuration de couche limite). On peut différencier deux types de contrôle actif, un premier en boucle ouverte et un autre en boucle fermée. En boucle ouverte, le contrôle se fait par le biais d'un *capteur*, d'un *contrôleur* et d'un *actionneur* :

- Un capteur, placé en amont de l'actionneur, envoie des informations (pression, cisaillement à la paroi,...) au contrôleur.

- Le contrôleur utilise les informations issues du capteur pour commander l'actionneur qui permet d'agir sur l'écoulement.

En boucle fermée, un second capteur est placé en aval de l'actionneur pour fournir au contrôleur des informations concernant le résultat du contrôle afin qu'il puisse optimiser son action.

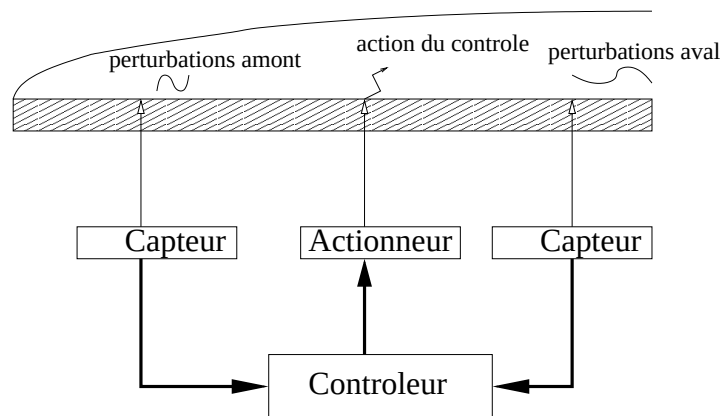


FIGURE 1.3 – Schéma de principe du contrôle actif en boucle fermée.

Le contrôle en boucle fermée est certainement l'approche la plus intéressante car elle permet une adaptation aux modifications de l'état de l'écoulement. Dans la plupart des cas rencontrés dans la littérature, les techniques de contrôle en boucle fermée sont appliquées dans des expériences numériques et non en soufflerie. Ceci est dû aux difficultés des expérimentateurs d'accéder aux caractéristiques spatio-temporelles de la turbulence au sein de l'écoulement. Or, ces informations sont indispensables pour tout schéma de contrôle actif qui exige une connaissance instantanée de l'état de l'écoulement.

1.3 Contrôle d'écoulement et réduction de modèles

Formellement, les problèmes de contrôle actif d'écoulements et d'optimisation de formes aérodynamiques se ramènent à minimiser une fonction objectif $\mathcal{J}$ (coefficient de traînée, concentration de polluant, bruit émis,...) en fonction de N paramètres $\mathbf{c} = (c_1, c_2, \dots, c_N)$ (vitesse de soufflage/aspiration, flux de chaleur, paramètres de formes,...) sous certaines contraintes (équations de Navier-Stokes, contraintes géométriques,...). Les différentes méthodes de résolution existantes peuvent grossièrement être classées en deux catégories, les méthodes de type descente qui nécessitent au minimum une approximation du gradient de la fonction objectif, et les méthodes stochastiques dont le principe consiste à étudier l'évolution d'une population d'individus au cours de générations successives (algorithme

génétique, méthode du simplexe, ...). La première approche est connue pour sa rapidité de convergence et sa précision, mais malheureusement, elle ne converge *a priori* que vers un minimum local de la fonction objectif. Par ailleurs, elle nécessite le calcul du gradient de la fonction objectif qui est une tâche complexe en soi (Gunzburger, 1997a). Une fois le gradient connu, la résolution se fait généralement au moyen de procédures itératives, au cours desquelles on amène progressivement l'écoulement vers l'état souhaité. Ce type de méthodes nécessite donc un nombre important de résolution des équations d'état du système et est donc extrêmement coûteux à mettre en œuvre, même pour des configurations académiques comme celle qui sera considérée dans le cadre de la présente étude, et cela autant au niveau mémoire, qu'en temps d'exécution. La seconde méthode présente l'avantage de converger *a priori* vers un minimum global de la fonction objectif. Cependant, elle s'accompagne, par principe, de temps de calcul tellement importants, qu'elle en fait une approche inutilisable en pratique, à moins de la coupler avec d'autres méthodes (algorithme de gradient, réseaux de neurones) et d'utiliser des machines de calcul parallèles pour évaluer les différents individus d'une population à une génération donnée.

Les méthodes numériques classiquement utilisées en optimisation semblent donc inadaptées au contrôle d'écoulement, *a fortiori* si l'on considère d'utiliser une stratégie de contrôle actif en boucle fermée. Il est donc nécessaire d'avoir recours à des modèles d'ordre réduit permettant de décrire l'essentiel de la dynamique du système à contrôler pour des coûts de calcul négligeables. La méthode consiste ensuite à remplacer dans certaines phases du processus d'optimisation, le modèle détaillé de l'écoulement par des modèles approchés de dynamique. En pratique, il faut souvent trouver le bon compromis entre coût numérique du modèle et précision de la description de la dynamique. Idéalement, on aimerait qu'il existe des critères numériques permettant de nous guider dans le choix minimal du modèle réduit à utiliser pour permettre à la boucle d'optimisation de converger. Malheureusement, ces critères n'existent pas encore dans la littérature.

1.4 Réduction de modèle par simulation aux grandes échelles

La plupart des travaux entrepris sur le contrôle actif des écoulements turbulents est actuellement réalisée par simulations numériques directes (DNS). Or, le nombre de degrés de liberté nécessaires en DNS pour décrire correctement la dynamique d'un système devient rapidement très important avec l'augmentation du nombre de Reynolds de l'écoulement.

Pour une simulation tridimensionnelle, par exemple, la résolution requise en maillage est proportionnelle à $Re^{9/4}$ où Re représente le nombre de Reynolds. Pour le contrôle d'écoulement, la DNS est donc plus adaptée à la compréhension de la physique de l'écoulement contrôlé et des mécanismes de réduction de traînée (Hammond *et al.*, 1998, par exemple) qu'à l'optimisation de l'efficacité du contrôle. Une alternative naturelle consiste donc à remplacer la résolution numérique directe des équations de Navier-Stokes par une méthode de résolution approchée telle que la simulation aux grandes échelles ou *Large Eddy Simulation* (LES). Dans cette approche, on s'efforce de simuler numériquement l'évolution instantanée des tourbillons de grandes échelles, tandis que les petites structures turbulentes sont modélisées. L'approche LES permet de simuler des écoulements à des nombres de Reynolds modérés tout en réduisant considérablement la mémoire et le temps de calcul nécessaires (Collis *et al.*, 2000). En simulation de la turbulence, la LES se positionne de manière intermédiaire entre le coût prohibitif des DNS et la précision de représentation dynamique obtenue généralement à l'aide des modèles RANS (Reynolds Averaged Navier-Stokes equations). En effet, par LES, il est possible de prévoir des caractéristiques instantanées de l'écoulement et de résoudre des structures de l'écoulement avec une précision comparable à celle de la DNS (Kravchenko et Moin, 1997; Morinishi *et al.*, 1998), tandis que les méthodes de RANS fournissent uniquement des résultats moyens.

Par conséquent, la simulation aux grands échelles semble être un bon candidat pour décrire à un coût numérique limité l'essentiel de la dynamique d'un écoulement turbulent. En ce sens, la LES pourrait être un outil efficace pour appliquer des schémas de contrôle actif en boucle fermée aux écoulements turbulents à haut nombre de Reynolds et pour des configurations complexes de type écoulements industriels.

1.5 Contrôle optimal

L'objectif du mémoire est de développer et de mettre en œuvre pour une configuration modèle, une méthodologie de contrôle d'écoulement pouvant être utilisée par la suite pour contrôler un écoulement quelconque. Une manière dite moderne (Gunzburger, 1997a; Bewley, 2002) d'aborder le contrôle d'écoulement consiste à le formuler comme un problème de contrôle optimal (voir chapitre 4). Dans cette approche, on cherche à déterminer l'état d'un système (écoulement) ainsi que le contrôle qu'il faut appliquer (mouvement de la paroi par exemple) de manière à avoir une grandeur caractéristique de ce système (traînée visqueuse, portance, ...) qui soit minimale ou maximale sous les contraintes des équations

d'état (équations de Navier-Stokes). Ce problème revient à résoudre un système d'équations aux dérivées partielles (équations d'état, équations adjointes et conditions d'optimalité) appelé système optimal sur un horizon de temps T_o . Pour les applications pratiques, en particulier pour un écoulement turbulent tridimensionnel, la taille de ce système est telle qu'il est impossible de le résoudre directement. Une procédure itérative est donc nécessaire. Soit n l'indice d'itération, on résout d'abord les équations d'état pour un contrôle donné $c^{(n)}$. On détermine alors les variables d'état $\phi^{(n)}$ (par exemple la vitesse et la pression décrites par les équations de Navier-Stokes), ce qui permet de résoudre les équations adjointes et d'évaluer les variables adjointes $\xi^{(n)}$ qui sont associées à chacune des contraintes du système. Connaissant les variables d'état $\phi^{(n)}$ et les variables adjointes $\xi^{(n)}$, une dernière étape consiste à utiliser les conditions d'optimalité pour évaluer, via une méthode de gradient, les variables de contrôle à l'itéré $n + 1$. Par nature, cette procédure itérative est donc coûteuse² en temps CPU car elle demande un certain nombre de résolutions des équations d'état et des équations adjointes. La difficulté principale de ce type d'approche provient cependant du fait que les équations adjointes sont définies en temps rétrograde. Pour les résoudre, il est donc nécessaire de sauvegarder l'évolution en temps croissant sur T_o des variables d'état et de contrôle sur tout le domaine spatial. Cette procédure est donc extrêmement coûteuse à mettre en œuvre pour ce qui est de l'occupation mémoire. En pratique, nous allons donc suivre une procédure dite de contrôle instantané suggérée par Bewley (2001) et Protas et Wesfreid (2002). Cette méthode consiste à découper l'intervalle d'optimisation T_o en N intervalles de longueur T et à appliquer la procédure itérative précédente sur chacun des sous-intervalles. Dans cette approche, le contrôle optimal obtenu à la fin d'un sous-intervalle d'optimisation est utilisé pour initialiser le contrôle dans le sous-intervalle suivant. Cependant, il n'existe à ce jour aucune preuve au sens mathématique du terme, que le contrôle optimal obtenu par ce biais à la fin de l'horizon d'optimisation T_o corresponde à celui qui aurait été obtenu si on avait pu appliquer la procédure itérative directement sur l'horizon $[0 : T_o]$.

1.6 Configuration de l'étude

Dans ce mémoire, nous cherchons à réduire de manière significative l'énergie cinétique et la traînée dans un écoulement de canal turbulent à des nombres de Reynolds modérés.

2. En comparaison des équations d'état et des équations adjointes, les conditions d'optimalité ne sont pas coûteuses à évaluer numériquement.

Le contrôle consiste à appliquer une procédure de soufflage/aspiration à débit nul au niveau des parois du canal. L'écoulement est considéré comme incompressible et le fluide est supposé visqueux et Newtonien (voir section 2.1 pour plus de détails). L'intérêt de cette configuration d'écoulement est multiple. Tout d'abord, c'est un écoulement suffisamment simple pour pouvoir être simulé numériquement à l'aide de codes à vocation académique et cela même en configuration contrôlé. Par ailleurs, c'est une configuration représentative d'écoulements confinés existant dans de nombreuses applications industrielles. Enfin, les phénomènes physiques sont suffisamment riches pour aider à mieux comprendre les mécanismes joués par le contrôle.

Un autre intérêt de cette configuration est qu'elle a déjà fait l'objet de nombreuses études numériques qui pourront nous servir par la suite comme élément de référence. Parmi les travaux existants en configuration non contrôlé, on distingue la simulation numérique directe par méthode spectrale réalisée par Kim *et al.* (1987) pour un écoulement de canal turbulent à $Re_\tau = 180$ et, plus récemment, celles réalisées par Moser *et al.* (1999) pour des écoulements turbulents à des nombres de Reynolds allant jusqu'à $Re_\tau = 590$. A la section 2.5, les statistiques issues de ces travaux seront utilisées pour valider nos simulations³ DNS et LES en écoulement non contrôlé.

Pour ce qui est du contrôle de l'écoulement de canal, différentes stratégies de contrôle actif ont déjà été mises en œuvre dans la littérature. Historiquement, la première méthode dite de *contrôle par opposition* a été proposée par Choi *et al.* (1994). Cette stratégie heuristique de contrôle consiste à appliquer de manière instantanée en paroi un soufflage/aspiration de vitesse normale opposée à celle mesurée dans un plan de détection situé à une distance proche de la paroi. Ce contrôle revient à créer un mur artificiel entre la paroi et le plan de détection permettant ainsi de neutraliser l'évolution des tourbillons longitudinaux. Pour un écoulement de canal turbulent à $Re_\tau = 100$ simulé par DNS, Choi *et al.* ont obtenu par cette méthode une réduction de traînée de l'ordre de 20% en plaçant le plan de détection à $y^+ = 10$ de la paroi. L'inconvénient de cette stratégie de contrôle est qu'il est nécessaire de connaître de manière parfaite la vitesse normale de l'écoulement au cœur du canal ce qui est irréaliste en pratique. Pour s'affranchir de cette contrainte, Lee *et al.* (1997) ont choisi

3. Les simulations numériques ont été réalisées avec un code de calcul DNS/LES développé au sein de l'équipe contrôle d'écoulement du LEMTA. Des problèmes d'instabilités numériques ont été rencontrés avec la version originale du code lorsque le contrôle a été appliqué. Nous avons donc introduit un traitement implicite des termes convectifs dans la direction normale à la paroi. Un code LES adjoint a ensuite été développé en utilisant les mêmes méthodes numériques que pour le code direct.

de construire un réseau de neurones (Personnaz et Rivals, 2003) afin de relier les grandeurs mesurables aux parois à la vitesse normale dans le canal. Cette méthode leur a permis également d'obtenir de l'ordre de 20% de réduction de traînée dans le cas d'un écoulement de canal à $Re_\tau = 100$. Plus récemment, Bewley (1999) et Chang (2000) ont appliqué respectivement par DNS et LES la théorie du contrôle optimal à l'écoulement de canal. Pour $Re_\tau = 100$, correspondant à un écoulement sous-critique, ils ont obtenu plus de 50% de réduction relative de traînée et sont parvenus à relaminariser complètement l'écoulement. Dans le cas $Re_\tau = 180$, les coûts numériques liés à l'utilisation de la DNS n'ont pas permis à Bewley d'obtenir la pleine convergence de la procédure optimale. Cependant, ses résultats ont montré qu'environ 40% de réduction de traînée pouvaient être encore obtenu, ce qui a été confirmé peu de temps après par Chang à l'aide de ses résultats LES. Notons toutefois que pour $Re_\tau = 180$, la procédure de contrôle optimal n'est pas parvenue à relaminariser l'écoulement.

Compte tenu de ce contexte, ce mémoire propose d'utiliser une simulation LES de l'écoulement de canal comme modèle réduit de dynamique en vue de résoudre un problème de contrôle optimal. Une autre possibilité aurait été de construire un modèle réduit de dynamique de type POD (Cordier et Bergmann, 2002a,b) comme cela a été réalisé dans Bergmann *et al.* (2005) et Bergmann et Cordier (2008) pour contrôler par rotation instationnaire le sillage laminaire d'un cylindre circulaire. Faute de temps, cette approche n'a pu être développée dans ce mémoire.

1.7 Organisation du document

Outre cette introduction et le chapitre de conclusion générale et de perspectives, ce mémoire est constitué de quatre chapitres principaux et onze annexes. Il est organisé de la manière suivante :

Après avoir précisé la configuration d'étude et rappelé les équations de Navier-Stokes, le **chapitre 2** commence par une description du principe des méthodes de simulation aux grandes échelles. Par la suite, on précise le modèle de Smagorinsky (Smagorinsky, 1963) qui est utilisé pour représenter le comportement des échelles sous-maillages et présente la procédure dynamique (Germano *et al.*, 1991) employée pour évaluer de manière instationnaire la constante de Smagorinsky. Le chapitre continue avec une présentation détaillée de l'ensemble des méthodes numériques utilisées pour simuler l'écoulement de canal. Enfin, dans

une dernière section, nous présentons des résultats de simulations numériques par DNS et LES à $Re_\tau = 180$ afin de démontrer que l'on parvient à capturer de manière correcte la dynamique non contrôlée de l'écoulement.

Le **chapitre 3** est consacré à l'application d'une première stratégie de contrôle dit par opposition (Choi *et al.*, 1994). L'objectif principal est d'évaluer la capacité du code numérique développé précédemment à représenter la dynamique contrôlée du canal. Nous commençons alors par une description générale de la méthode et réalisons par DNS une analyse structurelle succincte afin de mettre en évidence l'influence du contrôle sur la dynamique de proche paroi. Enfin, nous réalisons par LES des simulations numériques contrôlées de l'écoulement de canal pour plusieurs valeurs du nombre de Reynolds et différentes positions du plan de détection. Nous étudions alors de manière spécifique l'influence de ces paramètres sur l'efficacité énergétique de la procédure.

Dans le **chapitre 4**, nous formulons de manière très générale les problèmes de contrôle d'écoulement comme des problèmes d'optimisation sous contraintes. Nous présentons ensuite en détail la méthode des multiplicateurs de Lagrange dont l'utilisation permet de transformer le problème d'optimisation sous contraintes initial en un problème d'optimisation sans contrainte. Nous discutons ensuite des différentes approches possibles pour développer les équations du système optimal et en particulier de la difficulté liée à la commutativité des étapes de discrétisation et de différentiation. Nous terminons par l'application de tout le formalisme développé à un problème modèle gouverné par les équations de Burgers non linéaires.

Après avoir discuté du choix de la fonctionnelle coût à retenir dans la procédure de contrôle optimal, le **chapitre 5** débute par la présentation détaillée des équations du système optimal lorsque les équations de Navier-Stokes résolues par DNS ou LES sont utilisées comme équations d'état. Nous continuons par une discussion sur les difficultés liées à la mise en œuvre du contrôle optimal, puis présentons la méthode dite de contrôle instantané (Bewley, 1999; Chang, 2000) qui permet d'alléger certaines des contraintes numériques intrinsèques à l'approche. Par la suite, nous présentons des résultats de contrôle optimal pour deux nombres de Reynolds : $Re_\tau = 100$ et $Re_\tau = 180$. Nous examinons alors l'influence du choix de la fonctionnelle coût, de la durée de la longueur de la période d'optimisation et du coût du contrôle sur la réduction de traînée turbulente aux parois. Pour terminer, nous réalisons une comparaison des résultats obtenus par contrôle par opposition et par contrôle optimal.

Les annexes A à D décrivent certaines méthodes numériques utilisées lors de la résolution des équations de Navier-Stokes :

- Dans l’annexe A, nous détaillons le schéma hybride Runge-Kutta/Crank Nicolson utilisé tout au long du mémoire pour intégrer en temps les équations d’état du système optimal (modèles DNS et LES) et les équations adjointes.
- L’annexe B décrit la mise sous forme LU de l’algorithme de projection utilisé pour assurer l’incompressibilité.
- L’annexe C donne la discrétisation spatiale des différents termes des équations de Navier-Stokes (DNS et LES).
- Enfin, dans l’annexe D, nous réalisons une analyse de Fourier d’un schéma de différences finies centrées d’ordre 2. En particulier, nous introduisons le concept de nombre d’onde modifié qui est utilisé lors de la résolution de l’équation de Poisson.

Dans l’annexe E, nous réalisons des rappels sur les équations de base qui gouvernent l’écoulement de Poiseuille. Nous y redémontrons les relations donnant le débit volumique Q_v en fonction de l’adimensionalisation choisie pour l’analyse. L’annexe F est consacrée à une description détaillée de la méthode initialement introduite par Deschamps (1988) pour imposer au cours des simulations numériques un débit volumique constant.

Les annexes G à J donnent tous les détails des développements analytiques nécessaires pour obtenir les équations du système optimal dans l’approche différentiation/discrétisation. Les annexes G et H sont respectivement consacrées aux équations de Burgers linéarisées et non linéaires. L’annexe I concerne le développement du système optimal pour le canal turbulent dans le cas où un modèle DNS est utilisé. Enfin, l’annexe J est dédiée au canal turbulent pour le modèle LES.

Pour clore ce manuscrit, l’annexe K décrit les méthodes numériques utilisées pour résoudre les équations adjointes LES.

Chapitre 2

Simulation aux Grandes Echelles du canal turbulent non contrôlé

Sommaire

2.1	Configuration d'étude	14
2.2	Equations de Navier-Stokes	15
2.2.1	Mise en équations	15
2.2.2	Adimensionnement du problème	16
2.3	Simulations aux grandes échelles (LES)	17
2.3.1	Principe général	17
2.3.2	Opérateur de filtrage et séparation d'échelles	19
2.3.3	Equations filtrées	21
2.3.4	Fermeture par hypothèse de Boussinesq	22
2.3.5	Modèle de Smagorinsky	23
2.3.6	Procédure dynamique	24
2.4	Méthodes de résolution numérique	28
2.4.1	Récapitulation du modèle LES	28
2.4.2	Discretisation temporelle	29
2.4.3	Discretisation spatiale	34
2.4.4	Condition initiale et conditions aux limites	42
2.5	Simulations numériques à $Re_\tau = 180$	45
2.5.1	Caractéristiques des simulations	47
2.5.2	Propriétés moyennes	55
2.5.3	Eléments du tenseur de Reynolds	57
2.5.4	Moments d'ordre supérieur	61
2.5.5	Corrélations spatiales en deux points	67
2.5.6	Spectres d'énergie	71
2.5.7	Structures cohérentes	72
2.6	Conclusion	77

2.1 Configuration d'étude

Dans ce mémoire, nous considérons l'écoulement dans un canal plan de demi-hauteur δ (voir figure 2.1). Le repère lié au canal a pour origine le centre de celui-ci. Par conséquent, les parois inférieure et supérieure sont situées respectivement à $y = -\delta$ et $y = \delta$. En outre, on suppose (Pope, 2000) que le canal est long ($L_x \gg \delta$) et qu'il possède un grand rapport d'aspect $L_z \gg \delta$. L'écoulement moyen est donc prédominant dans la direction Ox , et la vitesse moyenne varie essentiellement dans la direction normale Oy . Puisque $L_z \gg \delta$, les statistiques de l'écoulement peuvent être considérées comme indépendantes de z suffisamment loin des parois transversales ($z = \pm L_z/2$).

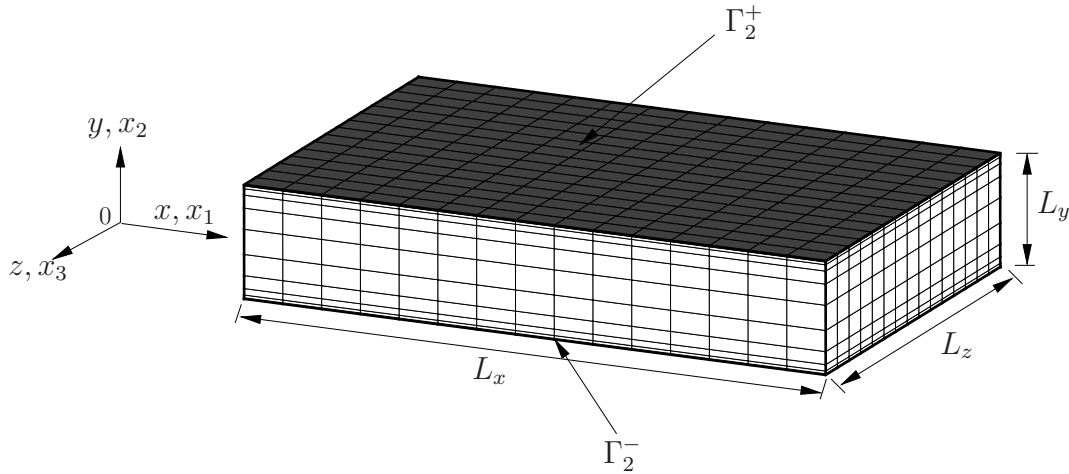


FIGURE 2.1 – Représentation schématique du canal plan.

Le champ de vitesse du fluide, fonction de la position $\mathbf{x}$ et du temps t , sera noté $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ ou plus simplement $\mathbf{u}$. Les composantes du vecteur vitesse seront notées indifféremment (u_1, u_2, u_3) ou (u, v, w) respectivement dans les directions longitudinale (Ox ou $\mathbf{e}_x$), normale (Oy ou $\mathbf{e}_y$) et transversale (Oz ou $\mathbf{e}_z$). De même, les composantes du vecteur position $\mathbf{x}$ seront notées de manière indifférente (x_1, x_2, x_3) ou (x, y, z) . Le champ de vitesse du fluide peut être décomposé en une vitesse moyenne et fluctuante de la manière suivante :

$$u_i = \langle u_i \rangle + u'_i$$

avec $\langle u_i \rangle$ une moyenne spatio-temporelle de u_i et u'_i la fluctuation de vitesse du fluide. La vitesse moyenne transversale est nulle ($\langle w \rangle = 0$). On montre alors (Pope, 2000) qu'en écoulement non contrôlé¹ on a également $\langle v \rangle = 0$.

Dans cette étude, nous nous intéresserons au cas de l'écoulement turbulent pleinement développé c'est à dire au cas où la turbulence est statistiquement établie et stationnaire (les différents moments statistiques dépendent alors uniquement de la direction $\mathbf{e}_y$). Dans ce cas, l'écoulement de canal présente une symétrie statistique par rapport au plan médian ($y = 0$) : les statistiques de (u, v, w) au point y sont identiques à celles de $(u, -v, w)$ au point $-y$.

2.2 Equations de Navier-Stokes

2.2.1 Mise en équations

Dans ce mémoire, le fluide est supposé homogène, newtonien et incompressible, de masse volumique ρ et de viscosité dynamique μ ($\nu = \mu/\rho$ est la viscosité cinématique associée). Le fluide occupe un domaine spatial Ω défini par $\Omega = [-L_x/2, L_x/2] \times [-\delta, \delta] \times [-L_z/2, L_z/2]$ et sa pression est notée $p(\mathbf{x}, t)$. Dans ces hypothèses, les équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement s'écrivent, en référentiel galiléen, sous la forme² :

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad \text{dans } \Omega, \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial (u_i u_j)}{\partial x_j} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} - \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} - F_i \delta_{i1} = 0 \quad \text{dans } \Omega, \quad (2.2)$$

où $F_i \delta_{i1} = F_1$ est un terme de forçage qui joue le rôle d'un gradient de pression moyen afin d'assurer un débit constant. Le rôle de ce terme sera précisé dans la section 2.4.4.4.

Dans le cas du canal turbulent non contrôlé, la présence des parois solides est prise en compte en imposant des conditions d'adhérence et de non pénétration pour le fluide situé à la paroi. Nous munissons donc les équations précédentes des conditions aux limites suivantes :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad \text{pour } y = \pm \delta. \quad (2.3)$$

Enfin, une dernière condition sera imposée, liée à la périodicité de l'écoulement dans les directions supposées statistiquement homogènes *i.e.* les directions longitudinale et trans-

1. *i.e.* lorsqu'il y a adhérence du fluide aux parois
 2. Il y a sommation implicite sur les indices répétés.

versale $\mathbf{e}_x$ et $\mathbf{e}_z$. Cette condition s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{x} + L_x \mathbf{e}_x, t) &= \mathbf{u}(\mathbf{x}, t), \\ \mathbf{u}(\mathbf{x} + L_z \mathbf{e}_z, t) &= \mathbf{u}(\mathbf{x}, t). \end{aligned} \quad (2.4)$$

2.2.2 Adimensionnement du problème

Deux choix de couples d'échelles caractéristiques de longueur et de vitesse vont être réalisés successivement. Le premier est lié directement à l'adimensionnement des équations de Navier-Stokes (2.1) et (2.2). Le second est relatif aux propriétés de la couche limite turbulente.

2.2.2.1 Adimensionnement des équations de Navier-Stokes

Pour adimensionner les variables, nous prenons pour longueur caractéristique L_{ref} la demi-hauteur du canal δ et pour vitesse caractéristique u_{ref} la vitesse moyenne de frottement³ à la paroi u_τ définie par

$$u_\tau = \sqrt{\frac{\langle \tau_w \rangle}{\rho}},$$

où $\langle \tau_w \rangle$, contrainte pariétale moyenne à la paroi, est donnée par l'expression

$$\langle \tau_w \rangle = -\mu \frac{\partial \langle u_1 \rangle}{\partial y} n_2 \Big|_{\Gamma_2^\pm}$$

avec n_2 normale extérieure aux parois supérieure et inférieure du canal $\Gamma_2^\pm$ (voir figure 2.1).

Les variables sans dimensions sont donc :

$$\tilde{\mathbf{u}} = \frac{\mathbf{u}}{u_\tau} \quad ; \quad \tilde{p} = \frac{p}{\rho u_\tau^2} \quad ; \quad \tilde{\mathbf{x}} = \frac{\mathbf{x}}{\delta} \quad ; \quad \tilde{t} = \frac{t}{t_{ref}} = \frac{t u_{ref}}{L_{ref}} = \frac{t u_\tau}{\delta}.$$

Il est désormais possible d'écrire les équations sans dimension décrivant le mouvement du fluide dans le domaine Ω :

$$\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial \tilde{x}_i} = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega, \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial \tilde{t}} + \frac{\partial (\tilde{u}_i \tilde{u}_j)}{\partial \tilde{x}_j} + \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}_i} - \frac{1}{Re_\tau} \frac{\partial^2 \tilde{u}_i}{\partial \tilde{x}_j^2} - \tilde{F}_i \delta_{i1} = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega, \quad (2.6)$$

où

$$Re_\tau = \frac{u_\tau \delta}{\nu}$$

3. D'autres choix de vitesse caractéristique sont naturellement possibles comme celui de la vitesse débitante U_b ou celui de la vitesse au centre du canal U_c (voir définitions à la section 2.5.1.1). Le choix de la vitesse de frottement u_τ comme vitesse de référence est cependant celui qui est le plus souvent rencontré dans la littérature, cela pour des raisons qui deviendront plus précises à la section 2.4.4.4.

est le nombre de Reynolds de frottement. Finalement, compte tenu de (2.5), on a également

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}_i}{\partial \tilde{x}_j^2} = 2 \frac{\partial \tilde{S}_{ij}}{\partial \tilde{x}_j}$$

où $\tilde{S}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial \tilde{x}_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial \tilde{x}_i} \right)$ est le tenseur des taux de vitesse de déformation.

Les équations (2.5) et (2.6) munies des conditions aux limites suivantes :

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{u}}(\tilde{\mathbf{x}}) &= \mathbf{0} \quad \text{pour} \quad \tilde{y} = \pm 1, \\ \tilde{\mathbf{u}}(\tilde{\mathbf{x}} + \tilde{L}_x \mathbf{e}_x, \tilde{t}) &= \tilde{\mathbf{u}}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{t}), \\ \tilde{\mathbf{u}}(\tilde{\mathbf{x}} + \tilde{L}_z \mathbf{e}_z, \tilde{t}) &= \tilde{\mathbf{u}}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{t}), \end{aligned} \tag{2.7}$$

sont celles résolues en DNS.

2.2.2.2 Grandeurs en unités de paroi

Afin de décrire la dynamique de la couche limite turbulente, il est d'usage (par exemple Chassaing, 2000) d'introduire un nouvel adimensionnement noté $(\cdot)^+$ où les grandeurs physiques sont adimensionnées par les échelles de longueur et de vitesse ν/u_τ et u_τ .

En unités de paroi ou unités visqueuses, les longueurs, vitesses et temps réduits sont définis respectivement par :

$$\mathbf{u}^+ = \frac{\mathbf{u}}{u_\tau} = \tilde{\mathbf{u}} \quad ; \quad \mathbf{x}^+ = \frac{\mathbf{x}}{\nu/u_\tau} = Re_\tau \tilde{\mathbf{x}} \quad ; \quad t^+ = \frac{t}{\nu/u_\tau^2} = Re_\tau \tilde{t}.$$

Afin d'alléger les notations, nous n'utiliserons plus par la suite le symbole $\tilde{\cdot}$ pour représenter les variables adimensionnées par δ et u_τ .

2.3 Simulations aux grandes échelles (LES)

2.3.1 Principe général

En simulation numérique directe, toutes les échelles spatio-temporelles de l'écoulement sont conservées, de la plus grande à la plus petite. En revanche, en simulation des grandes échelles, on choisit de résoudre les équations jusqu'à une échelle donnée (échelles résolues), puis on modélise l'action des petites échelles (échelles non résolues). En première approximation⁴, la plus petite échelle résolue est alors imposée par la taille de la maille choisie

4. Pour être plus précis, la taille effective du filtre ne correspond pas à la taille de la maille imposée. Il faut en effet tenir compte des contributions provenant d'erreurs numériques, d'erreurs de troncature et d'erreurs d'arrondi (Sagaut, 2005).

lors de la discrétisation spatiale. Dans l'espace spectral, cela se traduit par la définition d'un nombre d'onde de coupure k_c , délimitant les échelles résolues, des petites échelles de la turbulence modélisées par un modèle sous-maille. La séparation d'échelles induite par la LES est décrite schématiquement sur la figure 2.2. D'un point de vue mathématique, cette séparation d'échelles va se traduire par l'application d'un opérateur de filtrage (voir section 2.3.2).

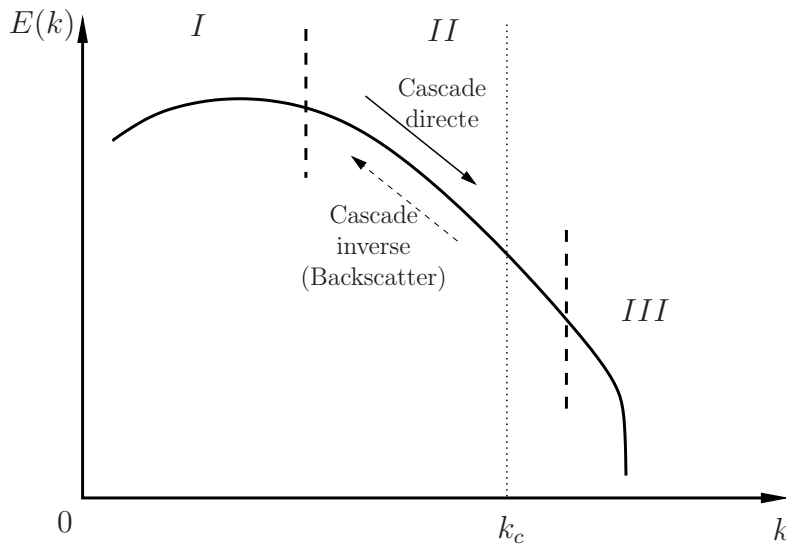


FIGURE 2.2 – Spectre d'énergie pour un écoulement turbulent.

Il reste à évoquer où positionner le nombre d'onde de coupure k_c dans le spectre d'énergie. Pour cela, nous allons considérer un cas de turbulence homogène isotrope. Le spectre d'énergie se décompose alors en trois parties (voir figure 2.2) : la zone de production (*I*), la zone inertielle (*II*) et la zone de dissipation (*III*). La zone de production correspond à l'injection d'énergie au niveau des très grandes échelles. La zone inertielle est une zone dans laquelle l'énergie est transférée intégralement des plus grandes échelles vers des échelles plus petites. Cette zone est supposée complètement découplée des effets visqueux. Soit ϵ le taux de dissipation, on montre (Bailly et Comte-Bellot, 2003, par exemple) que le spectre d'énergie s'écrit :

$$E(k) = C_K \epsilon^{\frac{2}{3}} k^{-\frac{5}{3}}$$

où C_K est la constante de Kolmogorov⁵. Dans la zone de dissipation, les structures turbulentes sont entièrement détruites par les forces visqueuses.

Dans une simulation des grandes échelles, la coupure intervient en règle générale dans la zone inertielle. Les échelles dissipatives sont donc peu ou pas du tout résolues. La LES est

5. La valeur numérique de cette constante est $C_K = 1,44 \pm 0,06$.

donc basée sur le postulat que les petites structures ont un caractère plus universel que les grandes structures ce qui devrait les rendre plus facile à modéliser. De manière schématique, si la coupure intervient trop tôt dans le spectre, la partie sous-maille modélisée devient prépondérante et la simulation tend vers la RANS : on ne résout que le champ moyen et toutes les autres échelles sont alors modélisées. En revanche, si la coupure intervient dans le voisinage de la zone de dissipation, la partie sous-maille est alors négligeable et la simulation tend alors vers la DNS pour laquelle toutes les échelles sont résolues.

2.3.2 Opérateur de filtrage et séparation d'échelles

D'un point de vue mathématique, la séparation d'échelles liée à la LES est représentée par un opérateur de filtrage (ou plus simplement filtre) qui agit comme un filtre passe-haut en échelle, i.e. passe-bas en fréquence, à la solution exacte. Nous supposons comme dans la majorité des cas, que la description de l'écoulement au moyen d'un seul filtrage spatial est pertinente⁶. Pour toute variable spatio-temporelle $\phi(\mathbf{x}, t)$, le champ résolu $\bar{\phi}(\mathbf{x}, t)$ est alors défini comme le produit de convolution entre ϕ et le noyau du filtre G , soit :

$$\bar{\phi}(\mathbf{x}, t) = G * \phi = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(\boldsymbol{\xi}, t) G(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi}, \quad (2.8)$$

où le filtre G est caractérisé par son échelle de coupure en espace $\bar{\Delta}$.

Dés lors, on peut définir la fluctuation ou terme sous-maille (noté ϕ') par la relation :

$$\phi'(\mathbf{x}, t) = \phi(\mathbf{x}, t) - \bar{\phi}(\mathbf{x}, t). \quad (2.9)$$

Pour les manipulations à réaliser par la suite sur les équations de Navier-Stokes (voir section 2.3.3), on impose en théorie⁷ que le filtre vérifie des propriétés de linéarité et de commutativité avec les opérateurs de dérivation, c'est à dire

quelles que soient ϕ et ψ deux variables aléatoires et λ une constante

1. $\overline{\phi + \psi} = \bar{\phi} + \bar{\psi}$
2. $\overline{\lambda \phi} = \lambda \bar{\phi}$

6. Précisons à ce sujet qu'imposer un filtrage en espace induit automatiquement un filtrage implicite en temps. En effet, soit $k_c = \pi/\bar{\Delta}$ l'échelle de coupure dans l'espace spectral associée à l'échelle de coupure en espace $\bar{\Delta}$ du filtre, on peut montrer (Sagaut, 2005) que supprimer les échelles spatiales qui correspondent aux nombres d'onde supérieurs à k_c induit la disparition des fréquences temporelles supérieures à $\omega_c = \frac{2\pi}{\bar{\Delta}} \sqrt{k_c E(k_c)}$ où $E(k)$ est le spectre d'énergie de la solution exacte.

7. En effet, contrairement à la moyenne statistique utilisée en RANS (*Reynolds Averaged Navier-Stokes*) l'opérateur de filtrage LES ne commute pas a priori avec les opérateurs de dérivation. Ghosal (1999) a cependant montré que l'erreur commise lors d'une telle commutation restait petite par rapport aux erreurs engendrées par les schémas numériques.

$$3. \frac{\overline{\partial \phi}}{\partial s} = \frac{\partial \overline{\phi}}{\partial s} \quad \text{avec } s = \mathbf{x}, t$$

Remarque : Le point 2 devant être vérifiée quelle que soit la variable aléatoire ϕ , cela revient en particulier (pour $\phi = 1$) à imposer la conservation des constantes, soit

$$\overline{\lambda} = \lambda \iff \int_{-\infty}^{+\infty} G(\xi) d\xi = 1.$$

Cependant, ces trois propriétés ne sont pas suffisantes pour définir un opérateur de Reynolds⁸, l'opérateur de filtrage LES vérifie donc a priori les conditions :

$$\overline{\overline{\phi}} \neq \overline{\phi} \quad \text{et} \quad \overline{\phi'} \neq 0$$

ce qui constitue une différence fondamentale par rapport aux méthodes de type RANS où ces deux conditions sont vérifiées.

Il existe différents filtres G . Les trois plus couramment utilisés sont le filtre porte (2.12), le filtre gaussien (2.13) et le filtre boîte (2.14). Soit $\overline{\Delta}$, la longueur de coupure du filtre, ils s'écrivent dans le cas monodimensionnel (Sagaut, 2005) :

- filtre porte (spectral cut-off filter, sharp cut-off filter)

$$G(x - \xi) = \frac{\sin\left(\frac{\pi(x - \xi)}{\overline{\Delta}}\right)}{\frac{\pi(x - \xi)}{\overline{\Delta}}} \quad (2.12)$$

- filtre gaussien (gaussian filter)

$$G(x - \xi) = \left(\frac{\gamma}{\pi \overline{\Delta}^2}\right)^{1/2} \exp\left(\frac{-\gamma(x - \xi)^2}{\overline{\Delta}^2}\right) \quad (2.13)$$

avec γ généralement pris égal à 6.

8. Soient ϕ et ψ deux variables aléatoires et λ une constante, on rappelle (Sagaut, 2005) que $\langle \cdot \rangle$ est un opérateur de Reynolds si il vérifie les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} \langle \phi + \psi \rangle &= \langle \phi \rangle + \langle \psi \rangle \\ \langle \lambda \phi \rangle &= \lambda \langle \phi \rangle \\ \langle \langle \phi \rangle \psi \rangle &= \langle \phi \rangle \langle \psi \rangle \\ \left\langle \frac{\partial \phi}{\partial s} \right\rangle &= \frac{\partial \langle \phi \rangle}{\partial s} \quad s = \mathbf{x}, t \\ \left\langle \int \phi(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} dt \right\rangle &= \int \langle \phi(\mathbf{x}, t) \rangle d\mathbf{x} dt \end{aligned}$$

Par ailleurs, on déduit de ces relations, les propriétés :

$$\langle \langle \phi \rangle \rangle = \langle \phi \rangle \quad (2.10)$$

$$\langle \phi' \rangle = 0 \quad (2.11)$$

– filtre boîte (box filter, top-hat filter)

$$G(x - \xi) = \begin{cases} \frac{1}{\overline{\Delta}} & \text{si } |x - \xi| \leq \frac{\overline{\Delta}}{2}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.14)$$

Dans nos simulations numériques LES, nous utiliserons un filtre boîte. Les grandeurs filtrées définies par (2.8) seront évaluées de manière discrète par la règle de Simpson (voir section 2.4.3.3).

Enfin, pour ce qui est de l'évaluation de la longueur de filtre $\overline{\Delta}$, le choix le plus communément⁹ réalisée est d'utiliser¹⁰ :

$$\overline{\Delta} = (\overline{\Delta}_x \overline{\Delta}_y \overline{\Delta}_z)^{1/3}$$

où $\overline{\Delta}_x$, $\overline{\Delta}_y$ et $\overline{\Delta}_z$ sont les tailles de filtre dans les directions $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$ et $\mathbf{e}_z$. A la section 2.4.3.3, nous adopterons cette formulation en l'adaptant au cas du canal plan.

2.3.3 Equations filtrées

Nous appliquons aux équations (2.5) et (2.6) un filtre LES ayant les propriétés de commutation avec les opérateurs de dérivation $\frac{\partial}{\partial t}$ et $\frac{\partial}{\partial x_i}$ décrites à la section 2.3.2. Les équations de Navier-Stokes filtrées s'écrivent alors :

$$\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_i} = 0 \quad (2.15)$$

$$\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial (\overline{u}_i \overline{u}_j)}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i} - \frac{1}{Re_\tau} \frac{\partial^2 \overline{u}_i}{\partial x_j^2} - \overline{F}_i \delta_{i1} = 0 \quad (2.16)$$

où $\overline{u}_i$ et $\overline{p}$ sont respectivement les composantes de vitesse et de pression filtrées, et où $\overline{F}_i$ est le terme source filtré.

Le filtrage de l'équation de conservation de la quantité de mouvement fait apparaître le terme quadratique en vitesse $\overline{u}_i \overline{u}_j$ qui n'est pas connu. Dans ce mémoire, nous suivons le point de vue de Léonard (Sagaut, 2005) et considérons que tous les termes de l'équation de quantité de mouvement filtrée doivent pouvoir être évalués directement à partir de quantités filtrées. Par conséquent, nous écrivons (2.16) sous la forme

$$\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial (\overline{u}_i \overline{u}_j)}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} - \frac{1}{Re_\tau} \frac{\partial^2 \overline{u}_i}{\partial x_j^2} - \overline{F}_i \delta_{i1} = 0 \quad (2.17)$$

9. Une autre définition parfois utilisée pour la longueur de filtre est (Germano *et al.*, 1991) :

$$\overline{\Delta} = (\overline{\Delta}_x^2 + \overline{\Delta}_y^2 + \overline{\Delta}_z^2)^{1/2}.$$

10. La longueur de coupure $\overline{\Delta}$ étant déterminée à partir de la taille de maille du problème discret, on dit que le filtre est implicite.

où

$$\tau_{ij} = \overline{u_i u_j} - \overline{u_i} \overline{u_j} \quad (2.18)$$

représente le tenseur des contraintes sous-maille qui reste à modéliser. Ces contraintes de sous-maille jouent le même rôle que celui joué par les contraintes de Reynolds dans le cas des modèles RANS (*Reynolds averaged Navier-Stokes*). Il est à noter d'ailleurs que si le filtre choisi est un opérateur de Reynolds alors le tenseur τ_{ij} dégénère en $\overline{u'_i u'_j}$ soit l'expression du tenseur de Reynolds que l'on aurait obtenu par RANS¹¹.

2.3.4 Fermeture par hypothèse de Boussinesq

Afin de résoudre l'équation filtrée (2.17), il est nécessaire de proposer une fermeture pour le tenseur de sous-maille τ_{ij} . Pour cela, nous allons utiliser l'hypothèse de Boussinesq qui traduit que les échelles sous-maille ont un rôle diffusif analogue à celui joué par la viscosité moléculaire ν . La structure mathématique de la relation de fermeture sera donc semblable à celle de la diffusion moléculaire, ν étant remplacée par une viscosité sous-maille ou viscosité turbulente, notée ν_T . Par conséquent, nous choisissons d'écrire que le déviateur¹² du tenseur des contraintes τ_{ij} est proportionnelle au tenseur des taux de vitesse de déformation résolue, soit :

$$\tau_{ij}^d = \tau_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \tau_{kk} = -2 \nu_T \overline{S}_{ij}. \quad (2.19)$$

Il est important de noter que le tenseur sphérique complémentaire $\frac{1}{3} \delta_{ij} \tau_{kk}$ a été introduit afin de lever la contradiction¹³ qu'il y aurait eu en contractant la relation de fermeture sans ce terme. D'un point de vue pratique, cette partie sphérique n'est pas modélisée mais

11. En effet, en remplaçant le champ de vitesse total par la somme du champ de vitesse résolue et du champ de vitesse non résolue, nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} \overline{u_i u_j} &= \overline{(\overline{u_i} + u'_i)(\overline{u_j} + u'_j)} \\ &= \overline{\overline{u_i} \overline{u_j}} + \overline{\overline{u_i} u'_j} + \overline{u'_i \overline{u_j}} + \overline{u'_i u'_j} \end{aligned}$$

d'où

$$\tau_{ij} = \overline{u_i u_j} - \overline{u_i} \overline{u_j} = \underbrace{\overline{\overline{u_i} \overline{u_j}} - \overline{u_i} \overline{u_j}}_{L_{ij}} + \underbrace{\overline{\overline{u_i} u'_j} + \overline{u'_i \overline{u_j}}}_{C_{ij}} + \underbrace{\overline{u'_i u'_j}}_{R_{ij}}$$

où L est le tenseur de Léonard, C le tenseur des tensions croisés et R le tenseur de Reynolds sous-maille. Or, si le filtre est un opérateur de Reynolds alors $L_{ij} = C_{ij} = 0$ d'où $\tau_{ij} = R_{ij}$.

12. tenseur à trace nulle

13. En effet, la condition d'incompressibilité impose que la trace du tenseur des taux de vitesse de déformation résolue soit nulle. Sans la partie sphérique, prendre la trace de la relation de fermeture entraînerait que $\tau_{ii} = \overline{u_i u_i} - \overline{u_i} \overline{u_i} = 0$, ce qui signifierait que toutes les échelles sont résolues, ce qui est naturellement faux en LES.

plutôt ajoutée à la pression statique filtrée $\bar{p}$ pour former une pression modifiée $\bar{\Pi}$ définie comme :

$$\bar{\Pi} = \bar{p} + \frac{1}{3} \delta_{ij} \tau_{kk}.$$

Par conséquent, en utilisant un modèle de viscosité turbulente, les équations de Navier-Stokes filtrées (2.17) deviennent :

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{u}_i \bar{u}_j)}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{\Pi}}{\partial x_i} - 2 \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\frac{1}{Re_\tau} + \nu_T \right) \bar{S}_{ij} \right] - \bar{F}_i \delta_{i1} = 0. \quad (2.20)$$

Il ne reste plus qu'à modéliser dans cette expression la viscosité sous-maille ν_T . Cette viscosité sous-maille dépend du temps et de l'espace. L'analyse dimensionnelle montre que ν_T est proportionnelle au produit d'une longueur caractéristique l_{sm} et d'une échelle de vitesse caractéristique u_{sm} . L'échelle de longueur l_{sm} la plus naturelle pour les simulations de grandes échelles est la taille moyenne de la maille $\bar{\Delta}$. L'échelle caractéristique de vitesse u_{sm} est fonction du modèle de viscosité sous-maille utilisé. Les plus simples à mettre à œuvre sont ceux de la famille des modèles scalaires ou modèle à zéro équation (aucune équation de transport supplémentaire) : modèle de Smagorinsky, modèle d'échelles mixtes, modèle de fonction de structure (Chassaing, 2000). Dans ce mémoire, notre choix s'est porté sur le modèle de Smagorinsky (Smagorinsky, 1963), le premier modèle proposé.

2.3.5 Modèle de Smagorinsky

Dans ce cas, la détermination de l'échelle caractéristique de vitesse u_{sm} est basée sur une hypothèse d'équilibre local entre la production et la dissipation de l'énergie cinétique turbulente. Sous cette hypothèse, et en tenant compte de la symétrie du tenseur des contraintes sous-maille, la dissipation visqueuse de l'énergie cinétique sous-maille s'écrit (Montreuil, 2000) :

$$\epsilon_{sm} = 2\nu_T \bar{S}_{ij} \bar{S}_{ij}. \quad (2.21)$$

Or, d'un point de vue de l'analyse dimensionnelle, nous avons les relations :

$$\epsilon_{sm} \sim \frac{u_{sm}^3}{\bar{\Delta}} \quad \text{et} \quad \nu_T \sim \bar{\Delta} u_{sm}.$$

On déduit donc de (2.21) que

$$\frac{u_{sm}^3}{\bar{\Delta}} \sim \bar{\Delta} u_{sm} (2\bar{S}_{ij} \bar{S}_{ij}) \quad \text{soit} \quad u_{sm} \sim \bar{\Delta} (2\bar{S}_{ij} \bar{S}_{ij})^{1/2}. \quad (2.22)$$

La viscosité sous-maille est alors déterminée par :

$$\nu_T = (C_s \bar{\Delta})^2 |\bar{S}| \quad (2.23)$$

où $|\overline{S}| = (2\overline{S}_{ij}\overline{S}_{ij})^{1/2}$ est la norme du tenseur du taux des vitesses de déformation de l'écoulement résolu et où C_s est la constante de Smagorinsky qui reste à déterminer.

Dans le cas de la turbulence homogène isotrope, on montre (Sagaut, 2005, par exemple) que la constante C_s est donnée par :

$$C_s \simeq \frac{1}{\pi} \left(\frac{2}{3C_K} \right)^{3/4}$$

soit numériquement, $C_s \simeq 0,18$ en prenant pour la constante de Kolmogorov $C_K \simeq 1,4$. Dans le cas d'un écoulement en canal plan, la constante de Smagorinsky est ramenée à la valeur 0,1 (Deardorff, 1970).

Bien que le modèle de Smagorinsky soit très populaire, il possède des défauts importants (Métais, 2003) :

- Il est trop diffusif et peut inhiber dans un certain nombre de cas la transition laminaire/turbulent. En effet, dans le cas d'un canal plan, c'est près des zones de paroi que naît la turbulence. Or, le comportement de la viscosité sous-maille dans la zone de proche paroi est incorrect. Le rapport ν_T/ν devrait être proportionnel à $(y^+)^3$ alors qu'il varie en $(y^+)^2$. Ce comportement s'explique par le fait que l'échelle caractéristique de vitesse u_{sm} obtenue dans (2.22) est uniquement fonction de grandeurs résolues. Or, dans le cas d'un écoulement de canal plan, c'est justement dans la zone de proche paroi que l'on retrouve les plus grandes variations spatiales d'où le résultat. Pour corriger ce défaut, il est souvent fait à une fonction d'amortissement de type Van Driest, soit

$$\overline{\Delta} = (\Delta x \Delta y \Delta z)^{1/3} (1 - \exp(-y^+/A^+))$$

où typiquement $A^+ \simeq 25$. Cette formulation, utilisée par Moin et Kim (1982) pour simuler un écoulement de canal turbulent, donne un profil de vitesse moyen et des statistiques de la turbulence en bon accord avec les données expérimentales.

- Il ne prend pas en compte le transfert d'énergie par cascade inverse (backscatter).

2.3.6 Procédure dynamique

Comme nous venons de le discuter à la section précédente, un des défauts du modèle de Smagorinsky est d'avoir à choisir de manière plus ou moins arbitraire une valeur pour la constante C_s . Afin de mieux adapter le modèle de Smagorinsky à la nature locale de l'écoulement, Germano *et al.* ont proposé en 1991 un algorithme permettant d'ajuster de

manière automatique la constante de Smagorinsky en chaque point et en chaque pas de temps. Cette procédure fait intervenir un double filtrage (voir figure 2.3). On définit donc :

- un premier filtre noté $\overline{G}$, de longueur de filtre $\overline{\Delta}$ et de nombre d'onde associé $k_c = \pi/\overline{\Delta}$. Ce filtre est dit de grille et correspond à celui utilisé jusqu'à présent. La grandeur filtrée associée est $\overline{(\cdot)}$.
- un second filtre noté $\widehat{G}$, de longueur de filtre $\widehat{\Delta}$ et de nombre d'onde associé $k_{c\eta} = k_c/\eta$. Le paramètre η est pris égal à 2 par la majorité des auteurs. Nous adopterons donc cette valeur dans nos développements. Ce filtre est dit de test. La grandeur filtrée associée est $\widehat{(\cdot)}$.

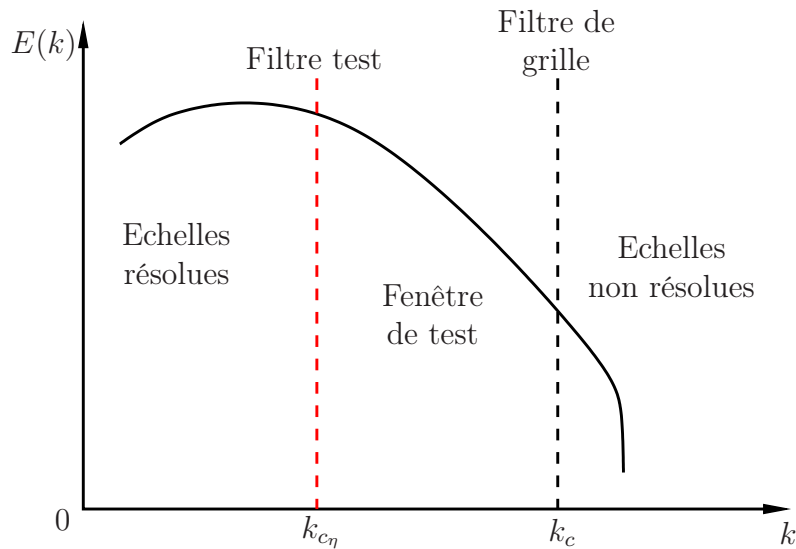


FIGURE 2.3 – Illustration du double filtrage nécessaire à la procédure dynamique proposée par Germano *et al.* (1991).

Nous appliquons d'abord le filtre $\widehat{G}\overline{G}$ à l'équation (2.6). Nous obtenons¹⁴ :

$$\frac{\partial \widehat{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial (\widehat{u}_i \widehat{u}_j)}{\partial x_j} = -\frac{\partial \widehat{p}}{\partial x_i} + \frac{2}{Re_\tau} \frac{\partial \widehat{S}_{ij}}{\partial x_j} - \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} \quad (2.24)$$

où $T_{ij} = \widehat{\overline{u_i u_j}} - \widehat{u}_i \widehat{u}_j$ correspond à la contribution au tenseur des contraintes sous-maille des échelles inférieures à $\widehat{\Delta}$.

Nous appliquons ensuite le filtre test à l'équation de Navier-Stokes filtrée (2.17). Nous trouvons :

$$\frac{\partial \widehat{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial (\widehat{u}_i \widehat{u}_j)}{\partial x_j} = -\frac{\partial \widehat{p}}{\partial x_i} + \frac{2}{Re_\tau} \frac{\partial \widehat{S}_{ij}}{\partial x_j} - \frac{\partial \widehat{\tau}_{ij}}{\partial x_j} - \frac{\partial L_{ij}}{\partial x_j} \quad (2.25)$$

où

$$L_{ij} = \widehat{\overline{u_i u_j}} - \widehat{u}_i \widehat{u}_j$$

14. Dans cette section, nous considérons que $F_1 = 0$.

est le terme de Léonard. Ce terme correspond à la contribution au tenseur des contraintes sous-maille des échelles comprises entre $\overline{\Delta}$ et $\widehat{\Delta}$. Contrairement aux tenseurs T et τ , le tenseur L peut être calculé directement à partir du champ résolu.

En comparant les expressions (2.24) et (2.25), nous obtenons l'identité de Germano, soit :

$$L_{ij} = T_{ij} - \widehat{\tau}_{ij}. \quad (2.26)$$

Le modèle dynamique repose sur l'hypothèse que les deux tenseurs sous-maille T et τ peuvent être modélisés au moyen du même modèle¹⁵, celui de Smagorinsky dans notre cas. Nous avons donc :

$$T_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} T_{kk} = -2 C_s^2 \widehat{\Delta}^2 \mid \widehat{S} \mid \widehat{S}_{ij} \quad (2.27)$$

et

$$\tau_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \tau_{kk} = -2 C_s^2 \overline{\Delta}^2 \mid \overline{S} \mid \overline{S}_{ij}. \quad (2.28)$$

Posons pour simplifier $\beta_{ij} = \mid \overline{S} \mid \overline{S}_{ij}$. En admettant que $\widehat{-2 C_s^2 \beta_{ij}} = -2 C_s^2 \widehat{\beta}_{ij}$ c'est à dire en considérant que C_s est constante sur un intervalle au moins égal à la longueur de coupure du filtre test, l'identité de Germano (2.26) devient :

$$L_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} L_{kk} = -2 C_s^2 \left(\widehat{\Delta}^2 \mid \widehat{S} \mid \widehat{S}_{ij} - \overline{\Delta}^2 \mid \overline{S} \mid \overline{S}_{ij} \right)$$

soit

$$L_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} L_{kk} = (C_s \overline{\Delta})^2 M_{ij} \quad (2.29)$$

en posant

$$M_{ij} = 2 \left(\widehat{\mid \overline{S} \mid \overline{S}_{ij}} - \eta^2 \mid \widehat{S} \mid \widehat{S}_{ij} \right) \quad \text{avec} \quad \eta = \frac{\widehat{\Delta}}{\overline{\Delta}} = 2.$$

En principe, on peut donc déterminer C_s à partir de (2.29) car tous les autres termes peuvent être évalués à partir du champ de vitesse filtrée $\overline{u}_i$. L'inconvénient est que le problème est surdéterminé¹⁶ (cinq équations pour une inconnue). Germano *et al.* puis Lilly ont alors chacun proposé une méthode de résolution.

15. En effet, la procédure décrite par la suite pour le modèle de Smagorinsky est en réalité applicable à tous les modèles qui font apparaître explicitement une constante arbitraire C_d fonction du temps et de l'espace (Sagaut, 2005).

16. L'égalité tensorielle (2.29) correspond à 9 égalités scalaires. Or, $\overline{S}_{ij}$ est symétrique d'où au maximum 6 équations indépendantes. Enfin, puisque l'écoulement est incompressible ($\overline{S}_{ii} = 0$), il ne reste plus que 5 équations indépendantes.

Méthode proposée par Germano *et al.* (1991) Afin de déterminer une valeur unique de la constante, Germano *et al.* ont proposé de contracter (2.29) avec le tenseur des contraintes résolues. En tenant compte du fait que $\delta_{ij}\bar{S}_{ij} = \bar{S}_{ii} = 0$, on obtient :

$$C_s^2 = \frac{1}{\bar{\Delta}^2} \frac{L_{ij} \bar{S}_{ij}}{M_{ij} \bar{S}_{ij}}.$$

Toutefois, des problèmes d'indétermination peuvent se poser lorsque le tenseur $\bar{S}_{ij}$ s'annule. Pour éviter cette difficulté, Germano *et al.* suggèrent de réaliser une moyenne, notée $\langle \cdot \rangle_{XZ}$ par la suite, dans les directions d'homogénéité, soit :

$$C_s^2 = \frac{1}{\bar{\Delta}^2} \frac{\langle L_{ij} \bar{S}_{ij} \rangle_{XZ}}{\langle M_{ij} \bar{S}_{ij} \rangle_{XZ}}.$$

Méthode proposée par Lilly (1992) Puisque (2.29) est une équation tensorielle, Lilly propose de la vérifier au sens des moindres carrés. Le paramètre C_s^2 sera donc calculé de manière à minimiser l'erreur commise, qui est évaluée au moyen du résidu Q_{ij} :

$$Q_{ij} = L_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} L_{kk} - (C_s \bar{\Delta})^2 M_{ij}.$$

Minimiser Q_{ij} par rapport à C_s^2 revient à imposer

$$\frac{\partial Q_{ij}^2}{\partial C_s^2} = 0$$

soit

$$Q_{ij} M_{ij} = 0 \quad \text{ou encore} \quad L_{ij} M_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} M_{ij} L_{kk} - (C_s \bar{\Delta})^2 M_{ij} M_{ij} = 0.$$

Puisque $\delta_{ij} M_{ij} = 0$, on obtient :

$$C_s^2 = \frac{1}{\bar{\Delta}^2} \frac{L_{ij} M_{ij}}{M_{ij} M_{ij}}.$$

Le numérateur $L_{ij} M_{ij}$ peut avoir des valeurs positives et négatives. La constante C_s^2 peut donc être négative, ce qui est interprété dans certains cas comme la faculté pour le modèle de prendre en compte les phénomènes de remontée d'énergie des petites échelles vers les grandes échelles (backscatter). Or, ce comportement n'est pas sans poser des problèmes d'un point de vue numérique. En effet, si la constante reste négative trop longtemps, l'effet anti-dissipatif créé provoquera une instabilité numérique et le schéma divergera. Par ailleurs, il se peut que le dénominateur tende vers zéro et dans ce cas la constante C_s^2 ne sera plus bornée. Pour éviter cela, la solution proposée est de moyenner le numérateur et dénominateur de C_s^2 dans les directions de l'écoulement homogènes statistiquement. En utilisant les mêmes notations que précédemment, on obtient :

$$C_s^2 = \frac{1}{\bar{\Delta}^2} \frac{\langle L_{ij} M_{ij} \rangle_{XZ}}{\langle M_{ij} M_{ij} \rangle_{XZ}}. \quad (2.30)$$

Par la suite, pour simplifier les notations, nous noterons C le terme C_s^2 .

2.4 Méthodes de résolution numérique

2.4.1 Récapitulation du modèle LES

Lorsque le modèle dynamique de Germano Lilly est utilisé, nous avons montré à la section 2.3 que les équations de Navier-Stokes filtrées s'écrivent¹⁷ :

1. l'équation de conservation de la masse pour la grandeur filtrée :

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0. \quad (2.31)$$

2. l'équation de conservation de la quantité de mouvement pour les grandeurs filtrées :

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{u}_i \bar{u}_j)}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{\Pi}}{\partial x_i} - 2 \frac{\partial}{\partial x_j} (\nu \bar{S}_{ij}) - \bar{F}_i \delta_{i1} = 0, \quad (2.32)$$

avec

$$\nu = \frac{1}{Re_\tau} + \nu_T.$$

Par ailleurs, la viscosité turbulente est donnée par l'expression :

$$\nu_T(y, t) = C \bar{\Delta}^2 |\bar{S}| = \frac{\langle L_{ij} M_{ij} \rangle_{XZ}}{\langle M_{ij} M_{ij} \rangle_{XZ}} |\bar{S}| \quad (2.33)$$

où

$$L_{ij} = \widehat{\bar{u}_i \bar{u}_j} - \widehat{\bar{u}_i} \widehat{\bar{u}_j} \quad (2.34)$$

et

$$M_{ij} = 2 \left(|\widehat{\bar{S}}| \widehat{\bar{S}_{ij}} - \eta^2 |\widehat{\bar{S}}| \widehat{\bar{S}_{ij}} \right) \quad \text{avec} \quad \eta = \frac{\widehat{\Delta}}{\Delta}. \quad (2.35)$$

Pour traiter la contrainte d'incompressibilité lié à (2.31), une méthode de projection approchée (Chorin, 1968; Temam, 1969) du type à pas fractionnaire a été utilisée (voir section 2.4.2.4 pour la description). Les méthodes utilisées pour les discrétisations spatiale et temporelle du système d'équations (2.31) et (2.32) vont maintenant être détaillées.

Pour simplifier les notations, nous n'utiliserons plus dans ce chapitre le symbole $\bar{\cdot}$ pour représenter une grandeur filtrée.

17. En supposant que $\nu_T = 0$ dans (2.32), on retrouve bien aux notations prêtes, l'équation de Navier-Stokes (2.6).

2.4.2 Discrétisation temporelle

Les équations de Navier-Stokes filtrées (2.31) et (2.32) sont discrétisées en temps par un schéma mixte Runge-Kutta/Crank-Nicolson (Akselvoll, 1995; Bewley, 1999; Chang, 2000). Ce schéma semi-implicite fait l'objet de l'annexe A.

2.4.2.1 Discussion sur la stabilité du schéma numérique

En supposant que tous les termes des équations de Navier-Stokes sont traités de manière explicite, une approximation du pas de temps maximal autorisé d'un point de vue de la stabilité numérique est donnée par :

$$\Delta t \leq \left\{ \frac{|u|}{\Delta x} + \frac{|v|}{\Delta y} + \frac{|w|}{\Delta z} + 2\nu \left(\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} + \frac{1}{\Delta z^2} \right) \right\}^{-1}. \quad (2.36)$$

Dans cette expression, les trois premiers termes du membre de droite sont liés aux termes convectifs et les trois derniers aux termes diffusifs. On comprend donc qu'en général, il soit d'usage de traiter tous les termes diffusifs de manière implicite et tous les termes convectifs de manière explicite. En effet, l'implicitation des termes diffusifs est due à la restriction importante du pas de temps provoquée par la contribution de ces termes près d'une paroi lorsque le maillage spatial est raffiné. Les termes convectifs n'introduisent généralement pas la même restriction car l'amplitude des composantes de vitesse est petite près des parois lorsque des conditions d'adhérence sont imposées. Or, dans ce mémoire, nous nous intéressons au contrôle du canal par aspiration/soufflage aux parois. Par conséquent, les amplitudes de vitesse pourront être importantes localement près des parois et nous devons donc traiter certains termes convectifs de manière implicite. Akselvoll (1995) a d'ailleurs montré que les contributions les plus pénalisantes en terme de restriction de pas de temps provenaient des composantes normales des termes convectifs et diffusifs. En conclusion, nous traiterons par la suite de manière implicite à la fois les termes convectifs et diffusifs contenant des dérivées dans la direction normale aux parois.

2.4.2.2 Schéma d'intégration temporelle

Les termes traités explicitement, notés A_i , sont pris en compte par un schéma Runge-Kutta d'ordre 3 à stockage limité et les termes implicites, notés B_i , par un schéma de Crank-Nicolson (Spalart *et al.*, 1991). Le schéma d'intégration temporelle à trois sous-pas de temps ($k = 1, 2, 3$) s'écrit¹⁸ :

$$\frac{u_i^k - u_i^{k-1}}{\Delta t} = \beta_k \left(B_i^k + B_i^{k-1} \right) + \gamma_k A_i^{k-1} + \eta_k A_i^{k-2} - 2\beta_k \Pi_{,i}^k \quad (2.37)$$

18. Voir annexe A pour plus de détail.

$$\frac{\partial u_i^k}{\partial x_i} = 0 \quad (2.38)$$

Pour $k = 1$, $u_i^{k-1} = u_{i,n}$ et pour $k = 3$, $u_i^k = u_{i,n+1}$ où $u_{i,n}$ représente le champ de vitesse u_i au pas de temps n .

Les coefficients β_k , γ_k et η_k associés au schéma d'intégration temporelle sont déterminés de telle manière que l'avancement en temps soit précis au troisième ordre pour les termes explicites et au second ordre pour les termes implicites. On montre (annexe A) que ces coefficients sont donnés par :

$$\begin{array}{lll} \beta_1 = 4/15 & \beta_2 = 1/15 & \beta_3 = 1/6 \\ \gamma_1 = 8/15 & \gamma_2 = 5/12 & \gamma_3 = 3/4 \\ \eta_1 = 0 & \eta_2 = -17/60 & \eta_3 = -5/12 \end{array}$$

Par construction, ces coefficients vérifient l'égalité :

$$\sum_{k=1}^3 2\beta_k = \sum_{k=1}^3 (\gamma_k + \eta_k) = 1 \quad (2.39)$$

Cette relation sera utilisée dans le chapitre 5 pour interpoler les champs de vitesse entre les trois sous-pas de temps afin de résoudre les équations LES adjointes.

Suite à la discussion de la section 2.4.2.1, tous les termes diffusifs ou convectifs faisant apparaître des dérivées partielles dans la direction normale à la paroi vont être traités de manière implicite. Nous aurons donc pour les termes explicites et implicites :

Termes explicites

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{\partial}{\partial x} (2\nu S_{11} - uu) + \frac{\partial}{\partial z} (2\nu S_{13} - uw) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\nu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\nu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ &\quad - \frac{\partial(uu)}{\partial x} - \frac{\partial(uw)}{\partial z} \\ A_2 &= \frac{\partial}{\partial x} (2\nu S_{21} - uv) + \frac{\partial}{\partial z} (2\nu S_{23} - vw) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\nu \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\nu \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ &\quad - \frac{\partial(uv)}{\partial x} - \frac{\partial(vw)}{\partial z} \\ A_3 &= \frac{\partial}{\partial x} (2\nu S_{31} - uw) + \frac{\partial}{\partial z} (2\nu S_{33} - ww) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu \frac{\partial v}{\partial z} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\nu \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\nu \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \frac{\partial w}{\partial z} \right) \\ &\quad - \frac{\partial(uw)}{\partial x} - \frac{\partial(ww)}{\partial z} \end{aligned}$$

Termes implicites

$$\begin{aligned} B_1 &= -\frac{\partial(uv)}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ B_2 &= -\frac{\partial(vv)}{\partial y} + 2 \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu \frac{\partial v}{\partial y} \right) \\ B_3 &= -\frac{\partial(wv)}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu \frac{\partial w}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

Puisque tous les termes dans les directions longitudinale et transversale sont traités de manière explicite, nous adoptons la définition suivante pour déterminer la valeur du nombre CFL :

$$\text{CFL} = \Delta t \left\{ \frac{|u|}{\Delta x} + \frac{|w|}{\Delta z} + 2\nu \left(\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta z^2} \right) \right\}_{\max} \quad (2.40)$$

La limite théorique de stabilité pour le schéma RK3W est $\sqrt{3}$. Or, pour un pas de temps $\Delta t = 0,002$, le nombre CFL associé à nos simulations numériques du canal plan à $Re_\tau = 180$ n'a jamais dépassé la valeur de 0,3. Par ailleurs, toutes les simulations numériques réalisées avec contrôle, ont été faites pour un nombre CFL de l'ordre de 0,35, soit une valeur bien inférieure à la limite théorique.

2.4.2.3 Linéarisation

Le traitement implicite des termes convectifs comprenant des dérivées dans la direction normale à la paroi entraîne que l'équation (2.37) est non linéaire en v pour $i = 2$. Cette non linéarité apparaît par l'intermédiaire du terme $\frac{\partial(v^k v^k)}{\partial y}$ contenu dans le terme B_2^k . Or, pour $i = 1$ et $i = 3$, l'équation (2.37) est linéaire en v . Ce point facilite grandement la résolution numérique du problème car il suffira de linéariser le terme $\frac{\partial(v^k v^k)}{\partial y}$ pour facilement résoudre l'équation (2.37) pour $i = 2$. Connaissant v^k , il sera alors possible de résoudre l'équation (2.37) pour $i = 1$ et $i = 3$.

En réalisant un développement de Taylor à l'ordre 2, on montre facilement que :

$$\frac{\partial(v^k v^k)}{\partial y} = 2 \frac{\partial(v^{k-1} v^k)}{\partial y} - \frac{\partial(v^{k-1} v^{k-1})}{\partial y} + \mathcal{O}(\Delta t^2).$$

Par conséquent, le terme B_2 s'écrit encore sous la forme :

$$B_2^k = -2 \frac{\partial(v^{k-1} v^k)}{\partial y} + \frac{\partial(v^{k-1} v^{k-1})}{\partial y} + 2 \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu \frac{\partial v^k}{\partial y} \right).$$

Compte tenu du développement de Taylor précédent, ce terme conserve une précision à l'ordre 2 en temps.

2.4.2.4 Méthode à pas fractionnaire

La difficulté de résolution du système discret introduit à la section 2.4.2.2 est liée à la contrainte d'incompressibilité (2.38) et au rôle joué par la pression dans cette condition. En effet, pour un fluide incompressible, la pression peut être interprétée comme un multiplicateur de Lagrange permettant d'imposer dans l'équation de quantité de mouvement la contrainte de divergence nulle. Résoudre le système d'équations (2.37) et (2.38) de manière complètement couplée serait trop coûteux numériquement. Il est donc plus avantageux, en dépit du débat qui règne encore autour des méthodes de projection sur l'ordre de précision en temps et les conditions aux limites à imposer aux variables (Chang *et al.*, 2002), d'utiliser une méthode à pas fractionnaire (Chorin, 1968; Temam, 1969). Ces méthodes consistent à découpler le problème initial en une série de problèmes du type advection-diffusion pour chaque composante de vitesse d'une part et en une équation de Poisson pour la pression ou une pseudo pression d'autre part. L'approche générale est de type prédiction-correction. Dans une première phase, on détermine un champ de vitesse intermédiaire, pas nécessairement à divergence nulle, que l'on utilise ensuite comme terme source dans une équation de Poisson. La solution de cette équation de Poisson sert ensuite à corriger le champ intermédiaire, construisant ainsi un champ à divergence nulle.

Pour commencer, écrivons les équations (2.37) et (2.38) sous forme vectorielle. Celles-ci deviennent :

$$\mathbf{u}^k - \beta_k \Delta t \mathbf{M}(\mathbf{u}^k) + 2 \beta_k \Delta t \mathbf{G}(\Pi^k - \Pi^{k-1}) = \mathbf{r}^{k-1} \quad (2.41)$$

et

$$D(\mathbf{u}^k) = 0 \quad (2.42)$$

où $\mathbf{G}$ représente un opérateur de gradient discret et D un opérateur de divergence discret. $\mathbf{M}$ est un opérateur agissant sur $\mathbf{u}$. Ses composantes sont déterminées par identification avec (2.37). On trouve que :

$$\begin{aligned} M_1(\mathbf{u}^k) &= B_1^k = \left(\frac{\partial}{\partial y} \left(\nu \frac{\partial \cdot}{\partial y} \right) - \frac{\partial (v^k \cdot)}{\partial y} \right) u^k \\ M_2(\mathbf{u}^k) &= B_2^k = 2 \left(\frac{\partial}{\partial y} \left(\nu \frac{\partial \cdot}{\partial y} \right) - \frac{\partial (v^{k-1} \cdot)}{\partial y} \right) v^k \\ M_3(\mathbf{u}^k) &= B_3^k = \left(\frac{\partial}{\partial y} \left(\nu \frac{\partial \cdot}{\partial y} \right) - \frac{\partial (v^k \cdot)}{\partial y} \right) w^k \end{aligned}$$

Les composantes de $\mathbf{r}^{k-1}$ sont déterminées de la même manière. On obtient :

$$\begin{aligned} r_1^{k-1} &= u^{k-1} + \beta_k \Delta t \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\nu \frac{\partial u^{k-1}}{\partial y} \right) - \frac{\partial (u^{k-1} v^{k-1})}{\partial y} \right] \\ &\quad + \gamma_k \Delta t A_1^{k-1} + \eta_k \Delta t A_1^{k-2} - 2 \beta_k \Delta t \Pi_{,x}^{k-1} \\ r_2^{k-1} &= v^{k-1} + \beta_k \Delta t \left(2 \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu \frac{\partial v^{k-1}}{\partial y} \right) \right) \\ &\quad + \gamma_k \Delta t A_2^{k-1} + \eta_k \Delta t A_2^{k-2} - 2 \beta_k \Delta t \Pi_{,y}^{k-1} \\ r_3^{k-1} &= w^{k-1} + \beta_k \Delta t \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\nu \frac{\partial w^{k-1}}{\partial y} \right) - \frac{\partial (v^{k-1} w^{k-1})}{\partial y} \right] \\ &\quad + \gamma_k \Delta t A_3^{k-1} + \eta_k \Delta t A_3^{k-2} - 2 \beta_k \Delta t \Pi_{,z}^{k-1} \end{aligned}$$

Deux remarques s'imposent sur la structure de (2.41) :

1. chaque composante i est linéaire en u_i^k , ce qui facilitera la résolution ;
2. nous avons fait intervenir, non pas le gradient de pression à l'itéré k , mais le gradient de la correction de pression entre deux itérés successifs k et $k-1$. On sait maintenant (Chang *et al.*, 2002, pour une référence récente) que cette forme est essentielle si l'on veut conserver une précision à l'ordre 2 en temps pour la méthode à pas fractionnaire.

En utilisant une factorisation de type LU , il est aisé de montrer (annexe B) que le système d'équations (2.41) et (2.42) se met sous la forme :

$$\tilde{\mathbf{u}}^k - \beta_k \Delta t \mathbf{M}(\tilde{\mathbf{u}}^k) = \mathbf{r}^{k-1} \quad (\text{Prédiction}) \quad (2.43)$$

$$D\mathbf{G} \left(\Pi^k - \Pi^{k-1} \right) = \frac{1}{2\beta_k \Delta t} D\tilde{\mathbf{u}}^k \quad (\text{Equation de Poisson}) \quad (2.44)$$

$$\mathbf{u}^k = \tilde{\mathbf{u}}^k - 2\beta_k \Delta t \mathbf{G} \left(\Pi^k - \Pi^{k-1} \right) \quad (\text{Correction}) \quad (2.45)$$

où $\tilde{\mathbf{u}}$ est une vitesse intermédiaire qui ne vérifie pas nécessairement la condition d'incompressibilité. On montre (Akselvoll, 1995, par exemple) que cette méthode est précise en temps à l'ordre 2 pour la vitesse et à l'ordre 1 pour la pression.

L'algorithme de résolution consiste donc à :

1. Résoudre (2.43) pour déterminer le champ de prédiction $\tilde{\mathbf{u}}^k$;
2. Résoudre (2.44) pour évaluer la pseudo pression Π^k ;
3. Projeter le champ de prédiction $\tilde{\mathbf{u}}^k$ sur un champ de vitesse à divergence nulle *i.e.* résoudre (2.45).

Or, comme cela a déjà été évoqué à la section 2.4.2.3, il faut d'abord déterminer v^k puis u^k et w^k . On commencera donc à résoudre (2.43) pour la composante $\tilde{v}^k$. Une fois la composante $\tilde{v}^k$ déterminée, se pose alors un problème car pour évaluer M_1 et M_3 qui interviennent dans les composantes 1 et 3 de (2.43), il faut connaître v^k et non $\tilde{v}^k$. Cependant, puisque $\Pi^k - \Pi^{k-1} = \mathcal{O}(\Delta t)$, (2.45) permet de conclure que $\mathbf{u}^k = \tilde{\mathbf{u}}^k + \mathcal{O}((\Delta t)^2)$. Nous pourrions donc :

1. utiliser les mêmes conditions aux limites pour $\mathbf{u}^k$ et $\tilde{\mathbf{u}}^k$;
2. remplacer v^k par $\tilde{v}^k$ dans M_1 et M_3 car cela revient à faire une approximation à l'ordre 2 en temps, ce qui reste compatible avec l'ordre total de la méthode de résolution.

Finalement, on est amené à résoudre successivement les équations suivantes :

$$\begin{aligned} \left[1 - 2\beta_k \Delta t \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu \frac{\partial \cdot}{\partial y} \right) + 2\beta_k \Delta t \frac{\partial (v^{k-1} \cdot)}{\partial y} \right] \tilde{v}^k &= r_2^{k-1} \\ \left[1 - \beta_k \Delta t \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu \frac{\partial \cdot}{\partial y} \right) + \beta_k \Delta t \frac{\partial (\tilde{v}^k \cdot)}{\partial y} \right] \tilde{u}^k &= r_1^{k-1} \\ \left[1 - \beta_k \Delta t \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu \frac{\partial \cdot}{\partial y} \right) + \beta_k \Delta t \frac{\partial (\tilde{v}^k \cdot)}{\partial y} \right] \tilde{w}^k &= r_3^{k-1} \\ \frac{\partial^2 (\Pi^k - \Pi^{k-1})}{\partial x_j \partial x_j} &= \frac{1}{2\beta_k \Delta t} \frac{\partial \tilde{u}_i^k}{\partial x_i} \\ u_i^k &= \tilde{u}_i^k - 2\beta_k \Delta t \frac{\partial (\Pi^k - \Pi^{k-1})}{\partial x_i} \end{aligned}$$

Les conditions aux limites à chaque sous-pas de temps k sont évaluées par interpolation linéaire des conditions aux limites aux pas de temps n et $n+1$, soit :

$$u_i^k = u_{i,n} + (u_{i,n+1} - u_{i,n}) \sum_{l=1}^k 2\beta_l.$$

2.4.3 Discrétisation spatiale

2.4.3.1 Maillage

Avant d'aborder à proprement dit la discrétisation des opérateurs de dérivation, il convient de présenter le maillage utilisé. Chaque nœud du maillage de calcul est repéré par ses coordonnées cartésiennes (x_i, y_j, z_k) , les indices i , j et k variant respectivement de 1 à N_x , N_y et N_z . Le maillage est à pas constant (respectivement Δx et Δz) dans les directions homogènes $\mathbf{e}_x$ et $\mathbf{e}_z$. Dans la direction normale à la paroi, la distribution suit

de manière classique une loi en tangente hyperbolique (Bouillon, 2004; Doche, 2006, par exemple). Ainsi, les mailles sont fortement raffinées près des parois et le maillage permet alors de bien décrire les gradients de vitesse très intenses dans la région de proche paroi. Les coordonnées des points dans la direction $\mathbf{e}_y$ sont données par :

$$y_j = \frac{\tanh \left[\gamma \left(-1 + \frac{2(j-1)}{(N_y-1)} \right) \right]}{\tanh(\gamma)} \quad \text{avec } j = 1, \dots, N_y. \quad (2.46)$$

Le paramètre γ caractérise la concentration des points au voisinage de la paroi. Dans toutes les simulations réalisées dans ce mémoire ($Re_\tau = 100$ et $Re_\tau = 180$), il a été pris égal à 2,8. La figure 2.9 illustre la distribution en tangente hyperbolique utilisée.

2.4.3.2 Localisation des inconnues

Plusieurs possibilités existent quant à la localisation des inconnues sur le maillage. Trois stratégies de localisation se présentent (Sagaut, 1995, par exemple) :

- Utiliser une disposition complètement décalée des variables (voir figure 2.4(a)) : chaque variable est définie sur une grille qui lui est propre et qui est décalée par rapport à celles des autres variables ;
- Utiliser une disposition semi-décalée (voir figure 2.4(c)) : toutes les composantes de vitesse sont définies sur la même grille et la pression est définie sur une seconde grille décalée par rapport à la première ;
- Utiliser une disposition collocative des variables (voir figure 2.4(b)) : toutes les composantes de vitesse et la pression sont définies sur une même grille.

Les dispositions décalées présentent l'avantage de permettre l'utilisation de schémas dits compatibles¹⁹ pour l'opérateur Laplacien introduit dans l'équation de Poisson pour la pression (section 2.4.3.5). Ces arrangements de variables évitent l'apparition de modes parasites de pression et de phénomènes de découplage entre les champs de vitesse et de pression. La contrainte d'incompressibilité est alors vérifiée à la précision machine. Notons cependant que cette approche nécessite des phases supplémentaires d'interpolations²⁰ entre les grilles. Cependant, pour des maillages cartésiens, l'interpolation reste assez simple. Nous avons donc retenu l'utilisation d'un maillage décalé dans cette étude (voir figure 2.5).

19. Un schéma pour l'opérateur Laplacien est dit compatible si il est équivalent à l'application successive des opérateurs discrets gradient puis divergence.

20. Afin d'éviter ces phases d'interpolations qui peuvent devenir fastidieuses lorsque l'ordre du schéma est supérieur à 2, certains auteurs (Lamballais, 1996, par exemple) préfèrent utiliser un maillage collocalisé et éviter les oscillations parasites du champ de pression qui peuvent se produire en utilisant des schémas compacts.

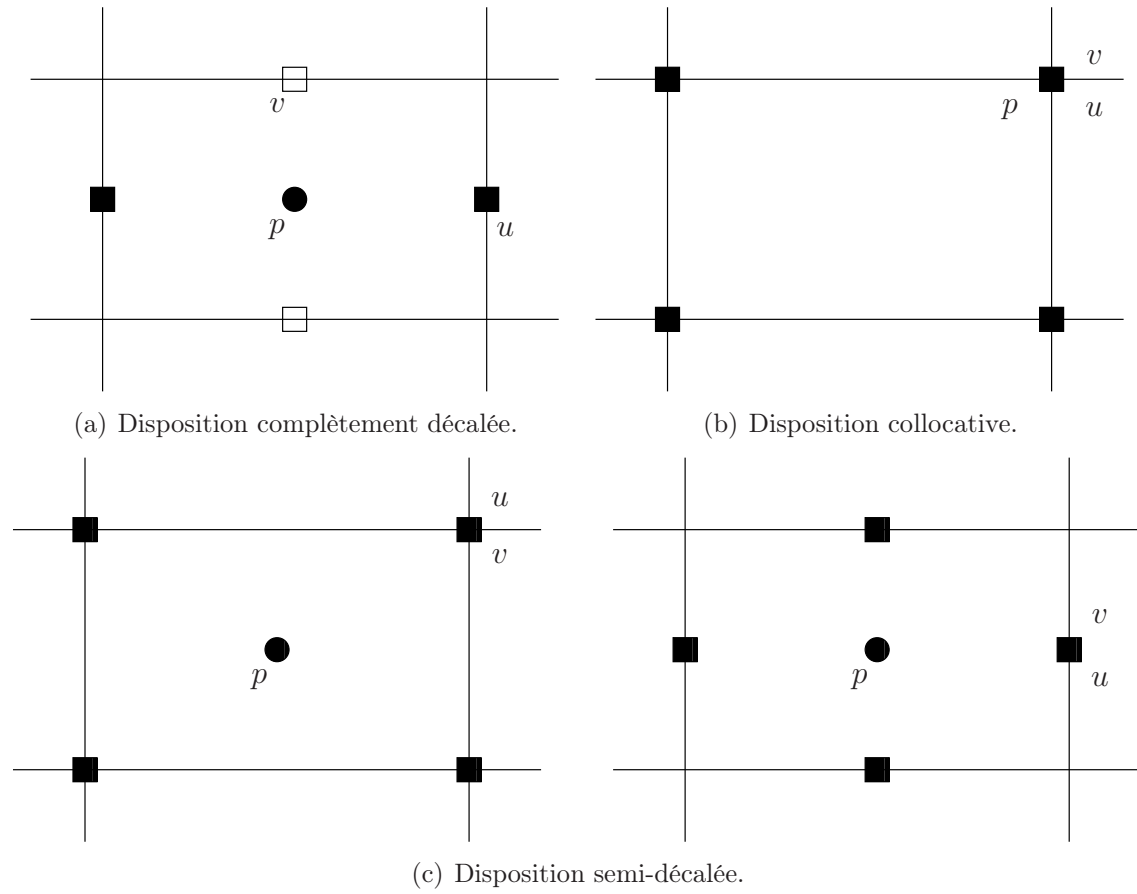


FIGURE 2.4 – Illustration des différents types de localisation des inconnues.

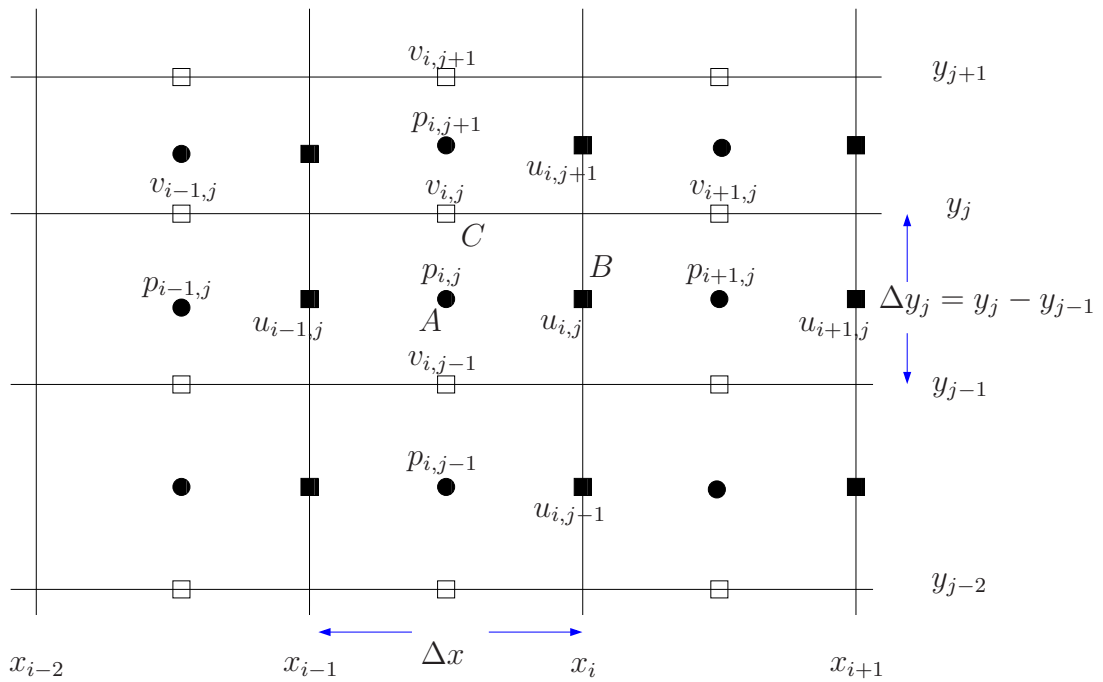


FIGURE 2.5 – Maillage décalé vitesse pression utilisé pour la discrétisation spatiale.

2.4.3.3 Filtres discrets

Le filtre test introduit par la procédure dynamique de Smagorinsky (voir section 2.3.5) nécessite l'utilisation de filtres discrets. En effet, les simulations étant réalisées dans l'espace physique, les produits de convolution deviennent très coûteux à évaluer numériquement. Il est donc nécessaire de mettre en œuvre des filtres discrets à support compact (Najjar et Tafti, 1996; Lund, 1997).

Cas monodimensionnel à pas constant Δx En s'inspirant de Sagaut (1995), on définit une famille $\mathcal{F}^{[a,b]}$ de filtres²¹ discrets centrés possédant un support de 3 points, soit²² :

$$\mathcal{F}^{[a,b]}\phi_i = \frac{1}{2a+b} (a\phi_{i-1} + b\phi_i + a\phi_{i+1}) = \sum_{j=-1}^{j=1} a_j \phi_{i+j}$$

avec

$$a_0 = \frac{b}{2a+b} \quad ; \quad a_1 = a_{-1} = \frac{a}{2a+b}.$$

A ce filtre est associé le noyau de convolution continu :

$$G(x - \xi) = \sum_{j=-1}^{j=1} a_j \delta(x - \xi + j\Delta x) \quad (2.47)$$

où δ est une fonction de Dirac.

Or, pour un filtre défini positif, la largeur du filtre est obtenue par la déviation standard du filtre de convolution associé (Lund, 1997; Sagaut, 2005), soit :

$$\Delta_f = \sqrt{12 \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 G(x) dx}, \quad (2.48)$$

où le facteur 12 a été introduit pour assurer que la largeur d'un filtre boîte est correctement représentée.

En injectant (2.47) dans (2.48), on obtient :

$$\Delta_f = \sqrt{12 \sum_{i=-1}^{i=1} i^2 a_i \Delta x} \quad (2.49)$$

En pratique, les filtres symétriques à trois points les plus employés sont :

$$a_0 = \frac{1}{2} \quad ; \quad a_1 = a_{-1} = \frac{1}{4} \quad (\text{Règle des trapèzes}) \quad (2.50)$$

$$a_0 = \frac{2}{3} \quad ; \quad a_1 = a_{-1} = \frac{1}{6} \quad (\text{Méthode de Simpson}) \quad (2.51)$$

21. Ces filtres sont linéaires et explicites et vérifient les 3 propriétés requises pour un filtre (voir section 2.3.2).

22. Il est facile de démontrer que $\mathcal{F}^{[a,b]} = \mathcal{F}^{[1,c]}$ avec $c = \frac{b}{a}$. On peut donc se ramener à une famille à un paramètre c .

d'où

$$\Delta_f = \sqrt{6} \Delta x \quad \text{pour la règle des trapèzes,} \quad (2.52)$$

$$\Delta_f = 2 \Delta x \quad \text{pour la méthode de Simpson.} \quad (2.53)$$

On rappelle qu'à la section 2.3.6, nous avons retenu pour $\eta = \frac{\hat{\Delta}}{\Delta}$ la valeur de 2. Par conséquent, la règle de quadrature compatible avec η est la règle d'intégration de Simpson (Lund, 1997). Pour un filtre test opérant suivant la direction $\mathbf{e}_x$, la valeur filtrée d'une grandeur u correspond donc à :

$$\hat{u}(i, j, k) = \frac{1}{6} \bar{u}(i-1, j, k) + \frac{2}{3} \bar{u}(i, j, k) + \frac{1}{6} \bar{u}(i+1, j, k). \quad (2.54)$$

Cas multidimensionnel Pour les maillages cartésiens, l'extension au cas multidimensionnel se fait en appliquant un filtre unidimensionnel dans chaque direction d'espace. Soient n la dimension de l'espace et G_i le filtre monodimensionnel dans la $i^{\text{ème}}$ direction de l'espace, l'application peut se faire simultanément ou séquentiellement (Sagaut, 1995). Dans le premier cas, le filtre multidimensionnel G^n s'écrit :

$$G^n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n G_i,$$

alors que dans le second cas, il s'écrit :

$$G^n = \prod_{i=1}^n G_i.$$

Notons que les filtres multidimensionnels construits par ces deux approches à partir du même filtre monodimensionnel ne sont *a priori* pas identiques.

Cas du canal plan Dans le cas des simulations numériques LES réalisées dans ce manuscrit, les opérations de filtrage se font uniquement dans les deux directions homogènes $\mathbf{e}_x$ et $\mathbf{e}_z$ du canal. Pour des raisons de facilité de mise en œuvre, le filtrage multidimensionnel se fera de manière séquentielle. La longueur de filtre $\bar{\Delta}$ sera évaluée comme :

$$\bar{\Delta} = (\bar{\Delta}_x \bar{\Delta}_z)^{1/2} \quad (2.55)$$

où $\bar{\Delta}_x$ et $\bar{\Delta}_z$ sont respectivement les tailles de filtre dans les directions $\mathbf{e}_x$ et $\mathbf{e}_z$. Enfin, la relation (2.54) sera utilisée pour évaluer toutes les quantités filtrées issues de la simulation.

2.4.3.4 Discrétisation des dérivées spatiales

En général (Lamballais, 1996, par exemple), la périodicité dans les directions longitudinales et transversales est exploitée pour évaluer par méthodes pseudo-spectrales (Canuto *et al.*, 2006) les dérivées dans ces directions et un schéma aux différences finies est utilisé dans la direction normale. Dans ce mémoire, nous n'avons pas fait appel aux méthodes spectrales sauf pour la résolution de l'équation de Poisson (voir section 2.4.3.5). Les équations de Navier-Stokes ont été discrétisées à l'aide d'un schéma aux différences finies d'ordre 2. Des interpolations linéaires ont été faites pour évaluer une quantité entre deux nœuds où sont définies les variables. La section C.1 décrit de manière détaillée la distribution des nœuds de calcul pour les variables de vitesse, de pression et de viscosité.

Pour simplifier la présentation, nous allons :

1. considérer une configuration d'écoulement bidimensionnelle à deux composantes ;
2. discrétiser au point B , défini sur la figure 2.5, la composante u des termes diffusifs (voir section C.2.1). L'extension aux termes convectifs et à une configuration tridimensionnelle est immédiate. Les résultats sont donnés à la section C.2.

Soient $\delta/\delta x$ et $\delta/\delta y$ deux opérateurs de différence finie discrets respectivement dans les directions $\mathbf{e}_x$ et $\mathbf{e}_y$, nous obtenons :

– Pour $\frac{\partial}{\partial x} \left(\nu \frac{\partial u}{\partial x} \right)$:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\delta}{\delta x} \left(\nu \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right|_B &= \frac{1}{x_{i+1/2} - x_{i-1/2}} \left[\left(\nu \frac{\delta u}{\delta x} \right)_{i+1/2,j} - \left(\nu \frac{\delta u}{\delta x} \right)_{i-1/2,j} \right] \\ &= \frac{1}{x_{i+1/2} - x_{i-1/2}} \left[\nu_{i+1/2,j} \left(\frac{\delta u}{\delta x} \right)_{i+1/2,j} - \nu_{i-1/2,j} \left(\frac{\delta u}{\delta x} \right)_{i-1/2,j} \right] \end{aligned}$$

avec

$$\left(\frac{\delta u}{\delta x} \right)_{i+1/2,j} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{x_{i+1} - x_i} \quad \text{et} \quad \left(\frac{\delta u}{\delta x} \right)_{i-1/2,j} = \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{x_i - x_{i-1}}.$$

– Pour $\frac{\partial}{\partial y} \left(\nu \frac{\partial u}{\partial y} \right)$:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\delta}{\delta y} \left(\nu \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right|_B &= \frac{1}{y_j - y_{j-1}} \left[\left(\nu \frac{\delta u}{\delta y} \right)_{i,j+1/2} - \left(\nu \frac{\delta u}{\delta y} \right)_{i,j-1/2} \right] \\ &= \frac{1}{y_j - y_{j-1}} \left[\nu_{i,j+1/2} \left(\frac{\delta u}{\delta y} \right)_{i,j+1/2} - \nu_{i,j-1/2} \left(\frac{\delta u}{\delta y} \right)_{i,j-1/2} \right] \end{aligned}$$

avec

$$\left(\frac{\delta u}{\delta y}\right)_{i,j+1/2} = \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{y_{j+1/2} - y_{j-1/2}} \quad \text{et} \quad \left(\frac{\delta u}{\delta y}\right)_{i,j-1/2} = \frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{y_{j-1/2} - y_{j-3/2}}$$

où, par construction du maillage, on a :

$$y_{j-3/2} = \frac{y_{j-2} + y_{j-1}}{2} \quad ; \quad y_{j-1/2} = \frac{y_{j-1} + y_j}{2} \quad ; \quad y_{j+1/2} = \frac{y_j + y_{j+1}}{2}.$$

– Pour $\frac{\partial}{\partial y} \left(\nu \frac{\partial v}{\partial x} \right)$:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\delta}{\delta y} \left(\nu \frac{\delta v}{\delta x} \right) \right|_B &= \frac{1}{y_j - y_{j-1}} \left[\left(\nu \frac{\delta v}{\delta x} \right)_{i,j+1/2} - \left(\nu \frac{\delta v}{\delta x} \right)_{i,j-1/2} \right] \\ &= \frac{1}{y_j - y_{j-1}} \left[\nu_{i,j+1/2} \left(\frac{\delta v}{\delta x} \right)_{i,j+1/2} - \nu_{i,j-1/2} \left(\frac{\delta v}{\delta x} \right)_{i,j-1/2} \right] \end{aligned}$$

avec

$$\left(\frac{\delta v}{\delta x}\right)_{i,j+1/2} = \frac{v_{i+1,j} - v_{i,j}}{x_{i+1/2} - x_{i-1/2}} \quad \text{et} \quad \left(\frac{\delta v}{\delta x}\right)_{i,j-1/2} = \frac{v_{i+1,j-1} - v_{i,j-1}}{x_{i+1/2} - x_{i-1/2}}.$$

Finalement, en tenant compte du fait que le maillage est à pas constant dans la direction $\mathbf{e}_x$, on obtient :

$$\left. \frac{\delta}{\delta x} \left(\nu \frac{\delta u}{\delta x} \right) \right|_B = \frac{1}{(\Delta x)^2} [\nu_{i+1/2,j} u_{i+1,j} - (\nu_{i+1/2,j} + \nu_{i-1/2,j}) u_{i,j} + \nu_{i-1/2,j} u_{i-1,j}] \quad (2.56)$$

$$\left. \frac{\delta}{\delta y} \left(\nu \frac{\delta u}{\delta y} \right) \right|_B = \mathcal{A}_j^{(u)} u_{i,j-1} + \mathcal{B}_j^{(u)} u_{i,j} + \mathcal{C}_j^{(u)} u_{i,j+1} \quad (2.57)$$

où

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_j^{(u)} &= \frac{2 \nu_{i,j-1/2}}{(y_j - y_{j-1})(y_j - y_{j-2})} \\ \mathcal{B}_j^{(u)} &= -\frac{2}{y_j - y_{j-1}} \left[\frac{\nu_{i,j+1/2}}{y_{j+1} - y_{j-1}} + \frac{\nu_{i,j-1/2}}{y_j - y_{j-2}} \right] \\ \mathcal{C}_j^{(u)} &= \frac{2 \nu_{i,j+1/2}}{(y_j - y_{j-1})(y_{j+1} - y_{j-1})} \end{aligned}$$

$$\left. \frac{\delta}{\delta y} \left(\nu \frac{\delta v}{\delta x} \right) \right|_B = \frac{1}{\Delta x (y_j - y_{j-1})} [\nu_{i,j+1/2} (v_{i+1,j} - v_{i,j}) - \nu_{i,j-1/2} (v_{i+1,j-1} - v_{i,j-1})] \quad (2.58)$$

En supposant que la viscosité ν est constante et est égale à l'inverse d'un nombre de Reynolds, les expressions²³ (2.56) et (2.57) sont confondues avec celles déterminées en DNS par Le et Moin (1994).

Finalement, après discrétisation spatiale, les équations (2.43) pour le champ intermédiaire $\tilde{\mathbf{u}}^k$ s'écrivent comme des systèmes matriciels tridiagonaux que l'on peut résoudre facilement.

2.4.3.5 Résolution de l'équation de Poisson

Etant données les périodicités supposées de l'écoulement dans les directions $\mathbf{e}_x$ et $\mathbf{e}_z$, nous pouvons développer chaque variable ϕ en série de Fourier discrète selon x et z , soit²⁴ :

$$\phi(x, y, z) = \sum_{k=-N_x/2}^{N_x/2-1} \sum_{l=-N_z/2}^{N_z/2-1} \widehat{\phi}(k_x, y, k_z) \exp(j(k_x x + k_z z))$$

où les nombres d'onde associés aux variables x et z sont donnés par :

$$k_x = \frac{2\pi}{L_x} k \quad \text{et} \quad k_z = \frac{2\pi}{L_z} l.$$

Il est alors facile de voir qu'une dérivation dans l'espace physique revient à une multiplication dans l'espace spectral, soit pour les dérivées premières en x et en z :

$$\frac{\widehat{\partial \phi}}{\partial x} = j k_x \widehat{\phi} \quad \text{et} \quad \frac{\widehat{\partial \phi}}{\partial z} = j k_z \widehat{\phi},$$

et pour les dérivées secondes en x et en z :

$$\frac{\widehat{\partial^2 \phi}}{\partial x^2} = -k_x^2 \widehat{\phi} \quad \text{et} \quad \frac{\widehat{\partial^2 \phi}}{\partial z^2} = -k_z^2 \widehat{\phi}.$$

Dans l'espace de Fourier, l'équation de Poisson (2.44) s'écrit :

$$\frac{\partial^2 (\delta \widehat{\Pi})}{\partial y^2} - (k_x^2 + k_z^2) \delta \widehat{\Pi} = \frac{1}{2\beta_k \Delta t} \frac{\partial \widehat{u}_i^k}{\partial x_i} \quad (2.59)$$

où $\delta \widehat{\Pi} = \widehat{\Pi}^k - \widehat{\Pi}^{k-1}$.

Finalement, nous allons remplacer dans (2.59) les nombres d'onde k_x et k_z par les nombres d'onde modifiés déterminés à l'annexe D, soit :

$$\frac{\partial^2 (\delta \widehat{\Pi})}{\partial y^2} - (k_x'^2 + k_z'^2) \delta \widehat{\Pi} = \frac{1}{2\beta_k \Delta t} \frac{\partial \widehat{u}_i^k}{\partial x_i} \quad (2.60)$$

23. Le terme (2.58) n'apparaît pas en DNS du fait de la condition d'incompressibilité.

24. Dans cette section, on utilise la notation $\widehat{}$ pour noter les coefficients de Fourier car c'est la notation généralement employée. Cependant, il ne faudra pas confondre avec le filtre test.

où

$$k_x'' = \frac{2[1 - \cos(k_x \Delta x)]}{\Delta x^2} \quad \text{et} \quad k_z'' = \frac{2[1 - \cos(k_z \Delta z)]}{\Delta z^2}.$$

Après discrétisation spatiale au point A (voir section C.3), l'équation (2.60) devient un système tridiagonal que l'on peut résoudre pour chaque couple de nombres d'onde (k_x, k_z) .

2.4.4 Condition initiale et conditions aux limites

2.4.4.1 Condition initiale

Pour la condition initiale du champ de vitesse longitudinale, nous avons considéré une loi due à Spalding (Spalding, 1961). Cette loi assure en pratique (Chassaing, 2000) le raccordement avec les lois de la sous-couche visqueuse et de la région logarithmique ($y^+ \in [7 : 30]$). Le profil de vitesse est donné d'une manière implicite²⁵ par la loi :

$$y^+ = u^+ + \exp(-\kappa C) \left[\exp(\kappa u^+) - 1 - \kappa u^+ - \frac{1}{2} (\kappa u^+)^2 - \frac{1}{6} (\kappa u^+)^3 \right] \quad (2.61)$$

où $\kappa \simeq 0,41$ est la constante de Von Kármán et C une constante généralement prise égale à 5.

Les deux autres composantes de vitesse sont initialisées à zéro. Puis, une perturbation aléatoire est superposée aux trois composantes de la vitesse pour permettre progressivement la transition en régime turbulent (voir à ce sujet la discussion à la section 2.5.1.3).

2.4.4.2 Conditions aux limites

Sur les parois supérieure et inférieure du canal $\Gamma_2^\pm$, des conditions de non glissement sont imposées pour l'écoulement non contrôlé. Le contrôle étant appliqué sous forme de soufflage/aspiration en parois, les conditions aux limites peuvent s'écrire de manière générale sous la forme :

$$\bar{u}_1|_{\Gamma_2^\pm} = 0 \quad \bar{u}_2|_{\Gamma_2^\pm} = -\bar{\Phi} n_2 \quad \bar{u}_3|_{\Gamma_2^\pm} = 0$$

où $\bar{\Phi}$ représente un terme de contrôle frontière. Naturellement, pour un écoulement non contrôlé, nous avons $\bar{\Phi} = 0$.

2.4.4.3 Gestion de la périodicité

L'écoulement est supposé périodique dans les deux directions $\mathbf{e}_x$ et $\mathbf{e}_z$. Cette condition est illustrée sur la figure 2.6. Deux cellules fictives sont créées dans chacune des directions

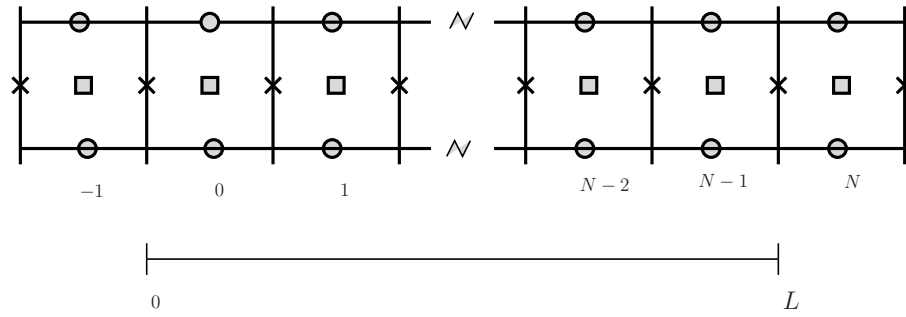


FIGURE 2.6 – Gestion de la périodicité.

périodiques. Ces cellules contiennent les valeurs du champ considéré sur le bord opposé afin d'assurer la périodicité.

L'utilisation de cette condition de périodicité nécessite l'emploi d'un terme de forçage pour compenser la perte de charge dans le canal.

2.4.4.4 Terme de forçage

Le terme de forçage $\overline{F}_1$ apparaissant dans l'équation de quantité de mouvement (2.32) joue le rôle d'un gradient de pression moyen dans la direction longitudinale. Ce terme compense les pertes par frottement aux parois et permet d'atteindre un état quasi-stationnaire. D'un point de vue pratique, deux méthodes existent :

1. fixer le gradient de pression moyen ;
2. fixer la vitesse débitante U_b ou ce qui revient au même le débit volumique Q_v .

Gradient de pression moyen fixé On montre pour un écoulement de Poiseuille (voir annexe E) que le gradient de pression moyen longitudinal est directement relié à la vitesse de frottement à la paroi. Par conséquent, fixer le gradient de pression moyen tout au long de la simulation revient à imposer la vitesse de frottement à la paroi. Dans ces conditions, la vitesse débitante ne peut plus être conservée à sa valeur initiale. La valeur du gradient de pression moyen est choisie en fonction de la nature de la simulation :

1. Soit on s'intéresse à la transition et le terme de forçage prend une valeur déduite de l'écoulement de Poiseuille. Lorsque U_c , vitesse au centre du canal, est prise comme vitesse de référence, le terme de forçage²⁶ est donné par (voir section E.1.1) :

$$\overline{F}_1 = -\frac{2\mu U_c}{\delta^2}.$$

25. L'équation (2.61) est résolue par une méthode de Newton-Raphson.

26. Ici, le terme de forçage est donné en grandeur dimensionnelle car les développements de l'annexe E sont dimensionnés.

Si au contraire c'est la vitesse de frottement à la paroi qui est prise comme grandeur de référence alors (voir section E.1.2) :

$$\overline{F}_1 = -\frac{\rho u_\tau^2}{\delta}.$$

2. Soit on s'intéresse à la turbulence développée et la valeur choisie déterminera précisément le cisaillement à la paroi associé au profil moyen. Une valeur classiquement utilisée pour $\overline{F}_1$ lorsque la vitesse de référence est u_τ est $\overline{F}_1 = -1$ car cette valeur permet en théorie de conserver le débit (voir section F.2).

Vitesse débitante fixée L'autre point de vue consiste à imposer la vitesse débitante (ou le débit volumique) à une valeur donnée et à déterminer à chaque instant le terme de forçage $\overline{F}_1(t)$ pour que cette condition soit vérifiée. Comme précédemment, le débit volumique imposé peut être celui correspondant à un écoulement de Poiseuille ou tout simplement le débit volumique initial. Dans le cas de l'écoulement de Poiseuille, le débit volumique²⁷ sera égal à :

$$Q_v = \frac{4}{3} U_c \delta L_z$$

lorsque U_c est la vitesse de référence, et à

$$Q_v = \frac{2}{3} Re_\tau u_\tau \delta L_z$$

lorsque u_τ est la vitesse de référence.

Afin d'imposer la vitesse débitante constante tout au long de la simulation, nous utilisons une méthode proposée par Deschamps (1988). Selon cette méthode décrite à l'annexe F, la valeur du terme de forçage à l'instant $n + 1$ est donnée par l'algorithme d'asservissement suivant :

$$F_1^{(n+1)} = F_1^{(n)} - \left[\alpha \left(U_b^{(n+1)} - U_b^{(0)} \right) + \beta \left(U_b^{(n)} - U_b^{(0)} \right) \right] \quad (2.62)$$

où $\alpha = \frac{2}{\Delta t}$ et $\beta = -\frac{1}{\Delta t}$. Dans cette équation, $U_b^{(0)}$ est la valeur initiale de la vitesse débitante que l'on doit conserver.

La figure 2.7 montre l'évolution du débit pour les deux types de forçage en cas d'écoulement non contrôlé. On peut constater que les deux méthodes parviennent dans ce cas à maintenir un débit constant. De légères variations autour de la valeur initiale apparaissent

27. Les débits volumiques sont dimensionnés (idem note de bas de page 26).

néanmoins lorsque l'on impose le gradient de pression. Pour le cas d'un écoulement contrôlé par aspiration/soufflage aux parois, la figure 2.8 montre clairement qu'imposer un gradient de pression moyen constant ne permet pas d'assurer la conservation du débit. Dans ce cas, imposer le débit semble la seule méthode viable. Par ailleurs, on sait depuis Deschamps (1988) que l'état de turbulence développée est atteint plus rapidement (jusqu'à dix fois) lorsqu'on impose le débit. C'est donc la méthode que nous avons adoptée dans ce mémoire.

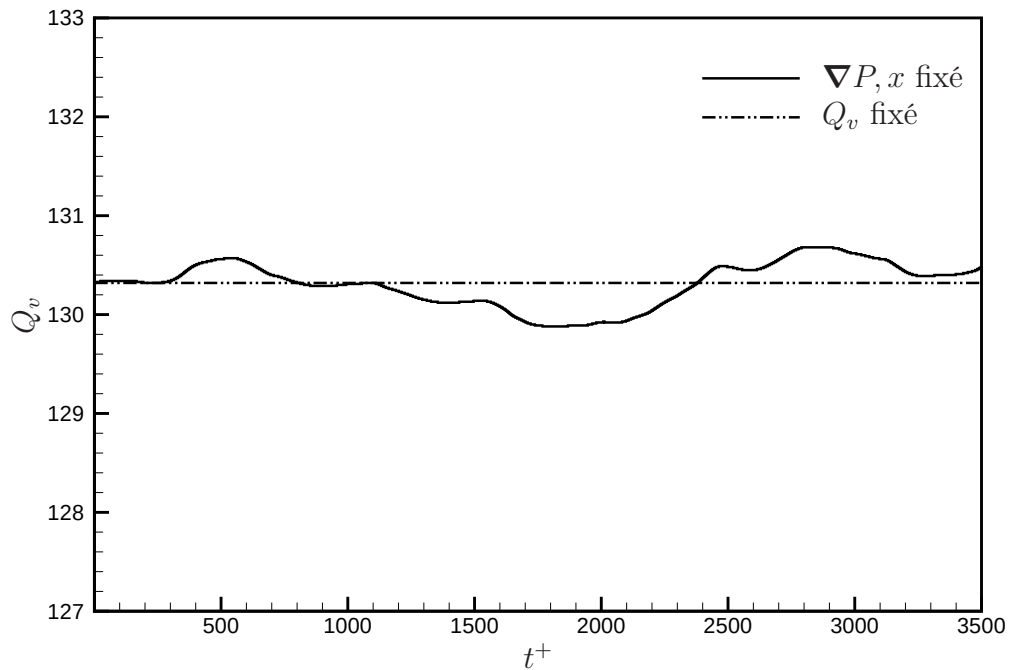


FIGURE 2.7 – Evolution temporelle du débit volumique pour les deux méthodes de forçage (gradient de pression fixé, débit fixé). Cas d'un écoulement non contrôlé simulé par LES à $Re_\tau = 180$ (résolution de $64 \times 65 \times 64$).

2.5 Simulations numériques à $Re_\tau = 180$

Dans cette section, nous allons présenter en détail les résultats obtenus à la fois par simulation numérique directe (DNS) et par simulation aux grands échelles (LES) pour l'écoulement non contrôlé. Après avoir décrit les caractéristiques essentielles des simulations réalisées (§2.5.1), nous présenterons les propriétés moyennes (§2.5.2), les éléments du tenseur de Reynolds (§2.5.3), les moments d'ordre supérieur (§2.5.4), les corrélations spatiales en deux points (§2.5.5), les spectres d'énergie cinétique (§2.5.6) et finalement des

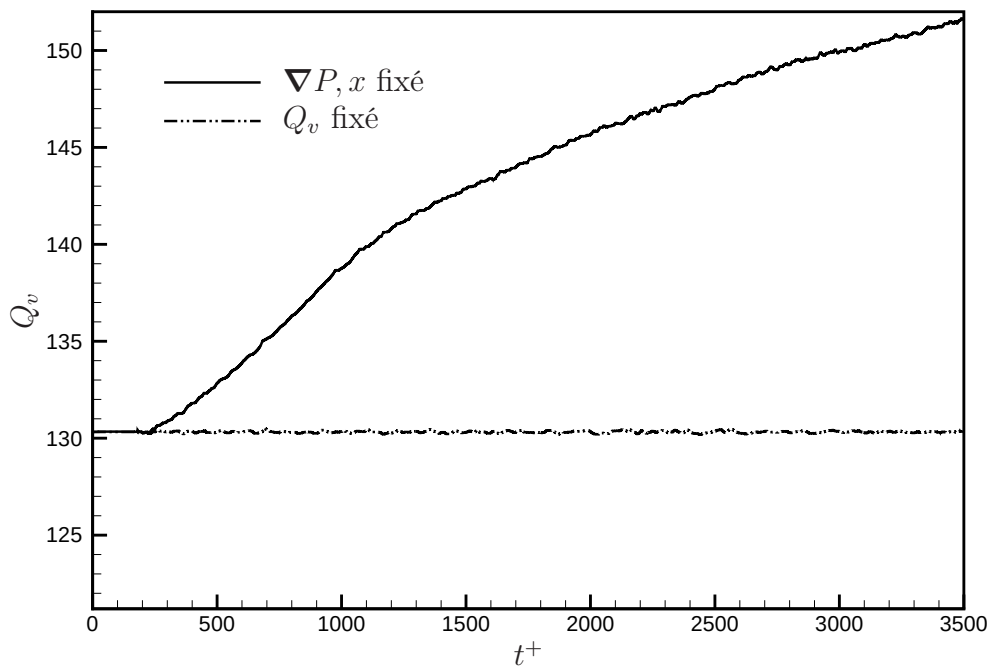


FIGURE 2.8 – Evolution temporelle du débit volumique pour les deux méthodes de forçage (gradient de pression fixé, débit fixé). Cas d'un écoulement contrôlé par opposition et simulé par LES à $Re_\tau = 180$ (résolution de $64 \times 65 \times 64$).

visualisations de structures cohérentes au voisinage de la paroi (§2.5.7). Nous comparerons essentiellement nos résultats avec les travaux réalisés par Kim *et al.* (1987) (noté KMM 87 par la suite) et Moser *et al.* (1999) (noté MKM 99 par la suite) en DNS. Cette étape permettra de valider notre code de résolution numérique et d'évaluer la capacité de celui-ci à reproduire d'une manière exacte la dynamique associée à la turbulence de canal non contrôlé.

2.5.1 Caractéristiques des simulations

2.5.1.1 Résolutions spatiale et temporelle

Les dimensions spatiales retenues pour le canal sont $L_x = 4\pi$, $L_y = 2$ et $L_z = \frac{4}{3}\pi$ (voir figure 2.1). En unité de parois, ces dimensions correspondent respectivement à $L_x^+ = 2236$, $L_y^+ = 2\delta^+ = 360$ et $L_z^+ = 746$. On montrera dans la section 2.5.5 en s'intéressant à la décroissance des corrélations spatiales des fluctuations de vitesse que ces dimensions sont suffisantes pour que toutes les structures de l'écoulement soient représentées. Ces dimensions excèdent d'ailleurs de beaucoup la taille minimum nécessaire au maintien d'une turbulence pleinement développée d'après Jiménez et Moin (1991). En effet, ces auteurs ont montré numériquement que la taille minimum²⁸ qu'il fallait imposer au domaine de calcul pour éviter sa relaminarisation est de $L_x^+ \simeq 250 - 350$ et $L_z^+ \simeq 100$.

TABLE 2.1 – Grandeurs caractéristiques des simulations LES d'écoulements non contrôlés à $Re_\tau = 180$.

	Re_τ	L_x	L_y	L_z	N_x	N_y	N_z	Δx^+	Δy_w^+	Δz^+	Δt^+
S_1 (DNS)	180	4π	2	$\frac{4}{3}\pi$	192	129	160	11,8	0,12	4,7	0,09
S_2 (LES)	180	4π	2	$\frac{4}{3}\pi$	64	73	96	35,3	0,22	7,85	0,36
S_3 (LES)	180	4π	2	$\frac{4}{3}\pi$	64	65	64	35,3	0,25	11,7	0,36
KMM 87 (DNS)	180	4π	2	2π	192	129	160	11,8	0,05	7	—
MKM 99 (DNS)	180	4π	2	$\frac{4}{3}\pi$	128	129	128	17,7	0,05	5,9	—

Le tableau 2.1 donne les grandeurs caractéristiques des simulations DNS et LES que

28. Les dimensions L_x^+ et L_z^+ du canal minimum correspondent respectivement à la longueur approximative minimum d'un vortex et à l'espacement entre deux streaks (courants de haute ou basse vitesse).

nous avons réalisées ainsi que celles des simulations DNS de KMM 87 et MKM 99. Outre les dimensions du domaine (L_x, L_y, L_z) , nous donnons le nombre de points de maillage (N_x, N_y, N_z) et les résolutions en unité de paroi $(\Delta x^+, \Delta y_w^+, \Delta z^+)$ dans chacune des directions. Le maillage dans la direction normale étant raffiné près des parois (voir section 2.4.3.1), Δy_w^+ correspond à la taille de la plus petite maille. La figure 2.9 illustre la distribution en tangente hyperbolique utilisée pour l'ensemble des simulations. Par la suite, le symbole S_1 correspondra à notre simulation DNS et les symboles S_2 et S_3 aux simulations LES réalisées pour deux résolutions différentes. D'après Montreuil (2000), on parle de simulation des grandes échelles à haute résolution lorsque le pas d'espace dans la direction longitudinale est voisin de 35 unités de paroi ($\Delta x^+ \simeq 35$) et que le pas d'espace dans la direction transversale est inférieur à 10 unités de paroi ($\Delta y^+ < 10$). Les deux simulations S_2 et S_3 peuvent donc être caractérisées comme haute résolution.

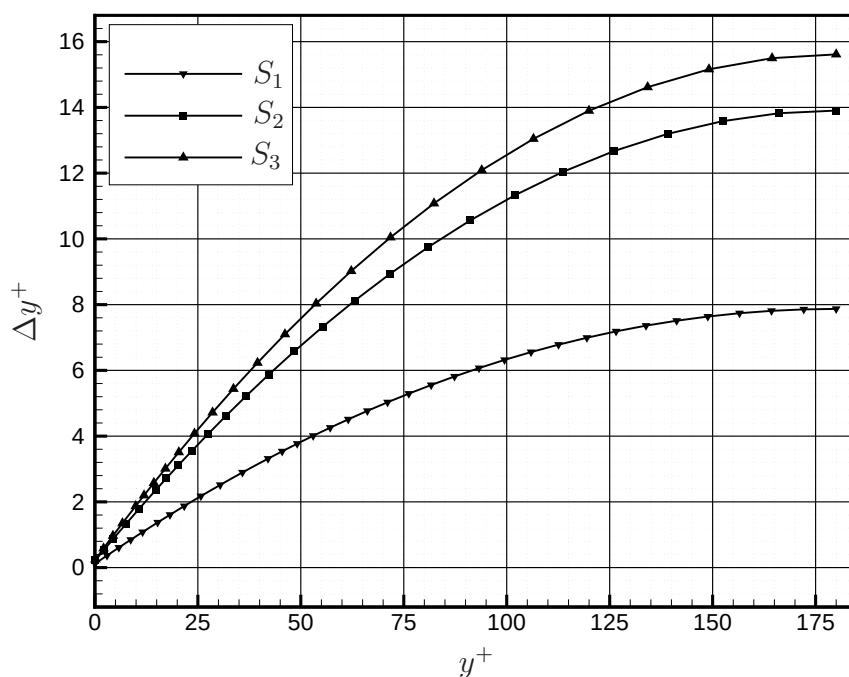


FIGURE 2.9 – Valeur du pas d'espace dans la direction normale à la paroi en fonction de la distance à la paroi inférieure. Cas des simulations numériques d'écoulements non contrôlés à $Re_\tau = 180$.

Les nombres de Reynolds Re_b et Re_c construits respectivement sur les vitesses²⁹ débitante U_b et au centre du canal U_c sont données à la section 2.5.2.2 car ils dépendent de la

²⁹. En grandeurs dimensionnées, les vitesses débitante et au centre du canal sont respectivement

manière dont sont calculées les statistiques après simulation.

2.5.1.2 Calcul des statistiques

Dans le but d'étudier les propriétés des mouvements moyen et fluctuant d'un écoulement turbulent de canal, une description statistique doit être entreprise. Pour ce faire, il est utile d'introduire tout d'abord l'opération de moyenne statistique qui permet d'extraire le mouvement moyen du fluide à partir de plusieurs réalisations du champ de vitesse instantanée. Soit ϕ une variable scalaire, fonction de l'espace et du temps, sa moyenne d'ensemble est définie par :

$$\langle \phi(x, y, z, t) \rangle = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \phi^{(i)}(x, y, z, t),$$

où $\phi^{(i)}$ sont des réalisations indépendantes de ϕ , et N le nombre d'expériences indépendantes qui ont été réalisées. En utilisant les propriétés de la turbulence de canal, *i.e.* la stationnarité et l'homogénéité statistique dans les directions $\mathbf{e}_x$ et $\mathbf{e}_z$, la moyenne d'ensemble peut être assimilée, sous l'hypothèse d'ergodicité, à la moyenne spatio-temporelle suivante :

$$\begin{aligned} \langle \phi \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T \langle \phi \rangle_{XZ}(y, t) dt \\ &= \frac{1}{L_x L_z T} \int_0^{L_x} \int_0^{L_z} \int_0^T \phi(x, y, z, t) dx dz dt \end{aligned} \quad (2.63)$$

où $\langle \cdot \rangle_{XZ}$ est un opérateur de moyenne dans les directions périodiques et T , le temps d'observation de ϕ . Par définition, $\langle \phi \rangle$ est seulement fonction de la distance à la paroi y . Connaissant les caractéristiques moyennes de la variable ϕ , nous pouvons désormais en déduire sa partie fluctuante, $\phi'(x, y, z, t)$, par la relation :

$$\phi(x, y, z, t) = \langle \phi \rangle + \phi'(x, y, z, t).$$

Cette décomposition, dite de Reynolds, impose par conséquent que $\langle \phi' \rangle = 0$. L'étude des moments statistiques d'ordre supérieur à 1 peut alors être effectuée. Les plus usités pour décrire la turbulence sont la déviation standard ou son écart type selon les cas, le facteur de dissymétrie et d'aplatissement. Ces grandeurs sont définies respectivement par :

- $\langle \phi'^2 \rangle$: la variance. Elle mesure la dispersion de la distribution de ϕ autour de sa moyenne et est égale à l'écart type (*root mean square*) au carré.

définies comme

$$U_b = \frac{1}{2\delta} \int_{-\delta}^{\delta} \langle u_1 \rangle dy \quad \text{et} \quad U_c = \langle u_1 \rangle|_{y=0}.$$

- $S_\phi = \langle \phi'^3 \rangle / \langle \phi'^2 \rangle^{3/2}$: le facteur de dissymétrie normalisé (*skewness factor*). Il rend compte du degré de dissymétrie de la distribution de ϕ par rapport à sa moyenne.
- $F_\phi = \langle \phi'^4 \rangle / \langle \phi'^2 \rangle^2$: le facteur d'aplatissement normalisé (*flatness factor*). Ce facteur permet quant à lui de mesurer l'étalement de la distribution de ϕ .

Si la variable aléatoire est gaussienne, par exemple, le facteur de dissymétrie est nul et le facteur d'aplatissement est égal à trois. Dans le cas turbulent, ces coefficients donneront des valeurs différentes. Le calcul des moments statistiques d'ordre trois et quatre nous permettra, pour un échantillonnage suffisant, d'estimer la précision de notre code par simple comparaison avec des données de référence issues de la littérature.

Dans la phase de post-traitement des simulations, l'opérateur (2.63) sera évalué de manière discrète comme :

$$\langle \phi(y) \rangle = \frac{1}{N_x N_z N_t} \sum_{i_t=1}^{N_t} \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{k=1}^{N_z} \phi(x_i, y, z_k, t_{i_t}) \quad (2.64)$$

où N_t est égal au nombre d'échantillons temporels retenus.

2.5.1.3 Génération numérique de la transition

Pour initialiser le profil longitudinal de vitesse, une expression implicite due à Spalding (voir section 2.4.4.1) est utilisée, les deux autres composantes de vitesse étant initialisées à zéro. Une perturbation aléatoire est ensuite superposée à ces champs afin de déclencher la transition laminaire-turbulente au cours de l'intégration en temps.

A partir d'essais numériques réalisés en DNS, nous avons constaté que lorsque la résolution spatiale est élevée (cas de la simulation S_1 par exemple) les perturbations initiales ne sont pas suffisantes pour déclencher la transition. Dans le cas des simulations LES où la résolution du maillage est considérablement plus faible qu'en DNS (le maillage utilisé pour S_3 est jusqu'à quinze fois plus grossier que celui utilisé pour S_1), ce problème n'apparaît pas. Il semble donc que le raffinement du maillage agisse directement sur la stabilité numérique de l'écoulement en jouant sur l'amplification naturelle des erreurs numériques. Ainsi, plus le maillage est grossier et plus les erreurs numériques sont relativement importantes, entraînant la transition de l'écoulement. Un comportement similaire avait été constaté par Arcen (2003).

Dans le cas de la simulation S_1 , nous avons donc été obligé de perturber à nouveau les fluctuations de vitesse au bout de 2000 pas de temps, soit pour $t^+ = 180$ (voir figure 2.10). Précisément, nous avons alors multiplié les fluctuations de vitesse par un coefficient

égal à cinq. Cette procédure permet de perturber fortement l'écoulement et de provoquer la transition vers le régime turbulent qui nous intéresse.

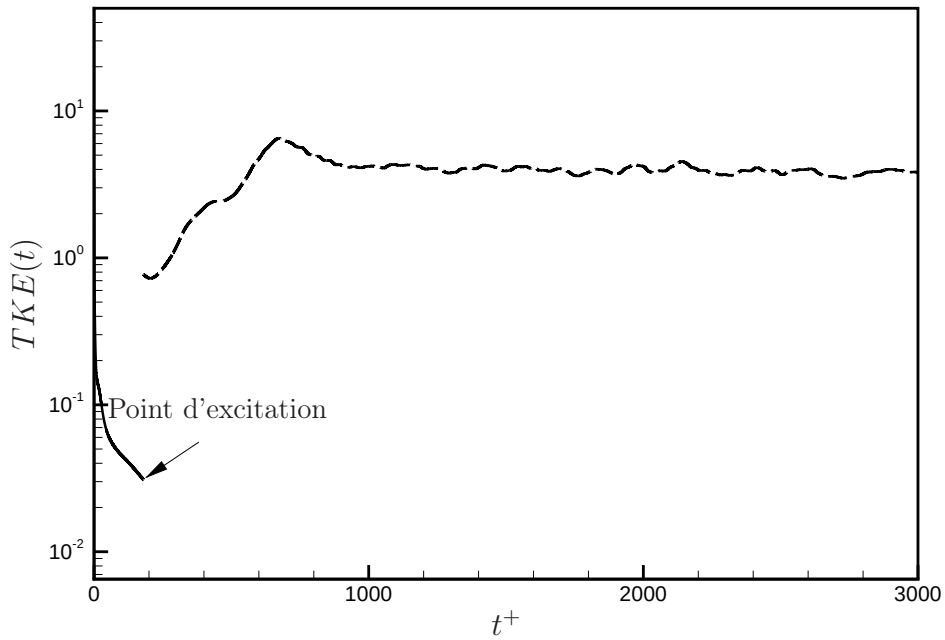


FIGURE 2.10 – Evolution temporelle de l'énergie cinétique avant et après excitation.

2.5.1.4 Caractérisation d'un régime turbulent pleinement développé

D'après Kim *et al.* (1987), un écoulement atteint un régime turbulent statistiquement stationnaire lorsque la contrainte totale de cisaillement τ_t , donnée³⁰ par

$$\tau_t(y) = -\rho \langle u' v' \rangle + \rho \nu \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial y}, \quad (2.65)$$

évolue de manière linéaire, c'est à dire

$$\tau_t(y) = \tau_w \left(1 - \frac{y}{\delta}\right), \quad (2.66)$$

et que l'énergie cinétique turbulente varie de façon quasi-périodique.

Evolutions temporelles de l'énergie cinétique turbulente moyenne et de la traînée moyenne sur les parois En toute rigueur, l'énergie cinétique turbulente

30. en grandeurs dimensionnées

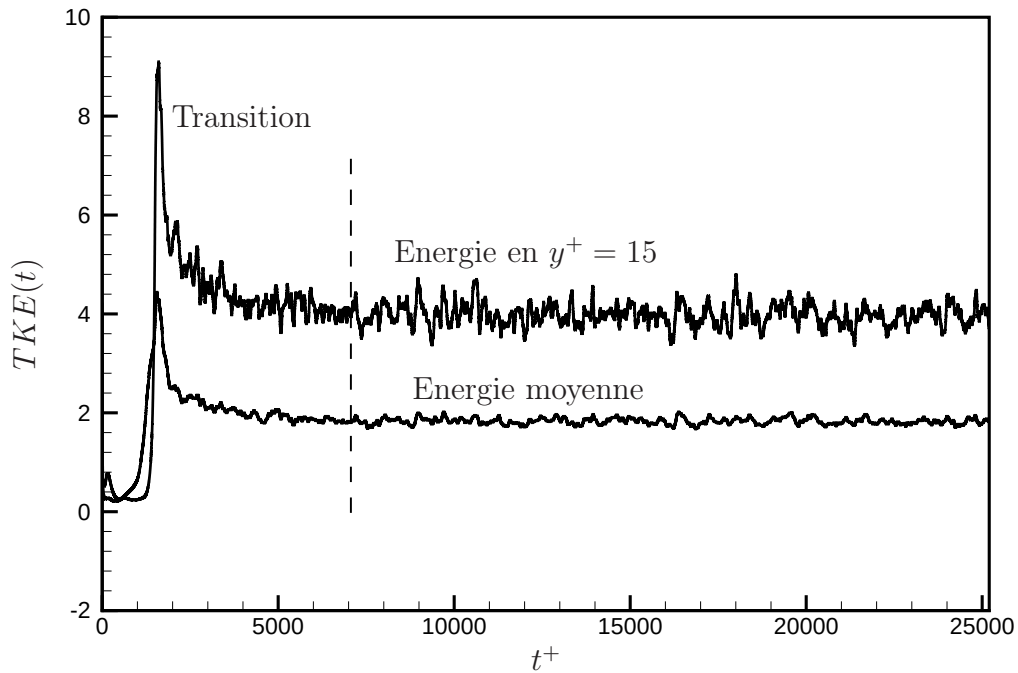


FIGURE 2.11 – Evolution temporelle de l'énergie cinétique turbulente moyenne et de l'énergie cinétique dans le plan $y^+ = 15$ pour la simulation S_3 . La ligne verticale en pointillés correspond au temps de début d'accumulation des statistiques.

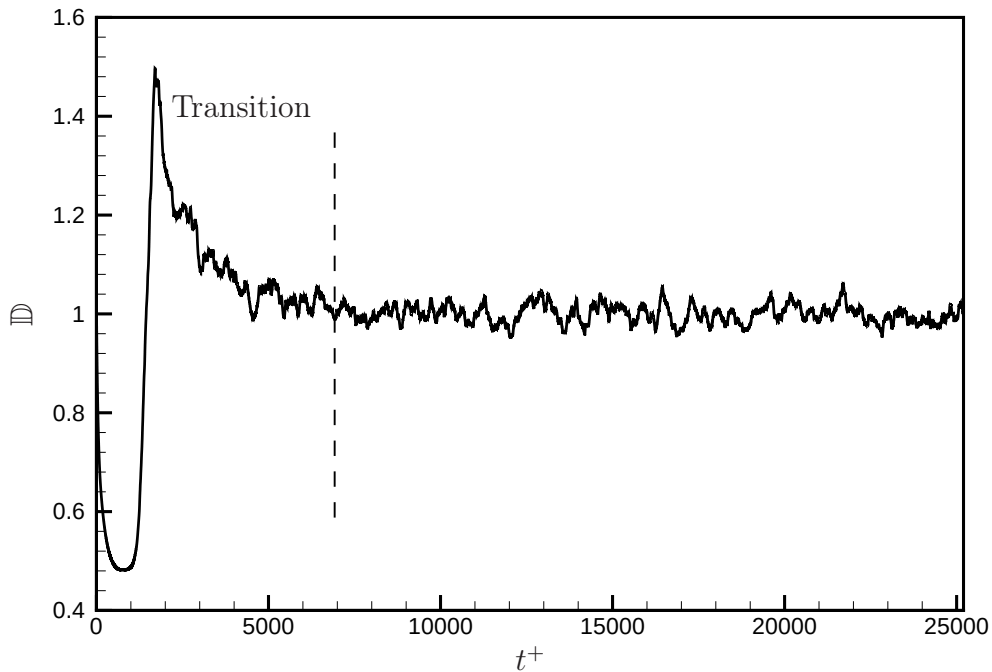


FIGURE 2.12 – Evolution temporelle de la traînée totale moyenne pour la simulation S_3 . La ligne verticale en pointillés correspond au temps de début d'accumulation des statistiques.

devrait être calculée sur des fluctuations de vitesse définies par rapport à l'opérateur de moyenne (2.63). Or, il est impossible au cours de la simulation numérique d'évaluer l'opération de moyenne en temps. Nous avons donc introduit une énergie cinétique turbulente moyenne définie à chaque instant comme :

$$TKE(t) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 E(y, t) dy \quad (2.67)$$

où

$$E(y, t) = \frac{1}{2} \langle u_i'^2 \rangle_{XZ}(y, t)$$

avec

$$u_i'(x, y, z, t) = u_i(x, y, z, t) - \langle u_i \rangle_{XZ}(y, t).$$

A titre d'illustration, la figure 2.11 représente dans le cas S_3 l'évolution temporelle de l'énergie cinétique turbulente moyenne ainsi que l'énergie cinétique dans le plan $y^+ = 15$. On constate qu'à partir de $t^+ \simeq 5000$ l'énergie cinétique turbulente moyenne oscille autour d'une valeur constante égale à 2, ce qui est en bonne correspondance avec les données issues de Moser *et al.* (1999). Afin d'avoir confirmation de l'état statistiquement établi de l'écoulement, nous pouvons déterminer l'évolution temporelle de la traînée moyenne exercée sur les deux parois. Pour cela, il nous faut d'abord introduire la contrainte à la paroi τ_w . Celle-ci est définie³¹ comme :

$$\tau_w = -\frac{1}{Re_\tau} \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{\Gamma_2^\pm} n_2 \quad (2.68)$$

où $\tau_w = \tau_w(\mathbf{x}, t)$ avec $\mathbf{x} \in \Gamma_2^\pm$.

La traînée totale moyenne s'exerçant sur les parois peut donc être déterminée de manière instantanée comme :

$$\mathbb{D}(t) = \frac{1}{2} \left[\langle \tau_w|_{\Gamma_2^+} \rangle_{XZ} + \langle \tau_w|_{\Gamma_2^-} \rangle_{XZ} \right]. \quad (2.69)$$

La figure 2.12 représente l'évolution temporelle de la traînée totale moyenne pour le cas S_3 . On constate qu'à partir de $t^+ \simeq 5000$, la traînée moyenne oscille autour de la valeur unitaire, ce qui correspond effectivement à la valeur que l'on attend en régime établi (voir remarque à la section F.2).

Dans le cas S_3 , nous pouvons donc commencer à accumuler des statistiques au temps $t^+ = 7000$. En raison du coût raisonnable de calcul associé aux simulations par LES, nous avons accumulé les statistiques sur un temps adimensionnel égal à 20000 pour les

31. de manière adimensionnelle

simulations S_2 et S_3 . Pour la simulation DNS, nous avons suivi la même démarche mais l'accumulation des statistiques a été limitée à un temps adimensionnel de 2000.

Contrainte totale de cisaillement En adimensionnant toutes les grandeurs en unités de paroi, les expressions (2.65) et (2.66) de la contrainte totale de cisaillement deviennent :

$$\tau_t^+(y^+) = -\langle u'^+ v'^+ \rangle + \frac{d\langle u^+ \rangle}{dy^+} = 1 - \frac{y^+}{\delta^+}. \quad (2.70)$$

Les contraintes totales obtenues numériquement pour les simulations S_1 , S_2 et S_3 sont comparées avec la forme analytique (2.70) sur la figure 2.13. Le très bon accord entre les contraintes totales calculées numériquement et la forme analytique prouve que les statistiques recueillies proviennent d'un écoulement statistiquement stationnaire et établi.

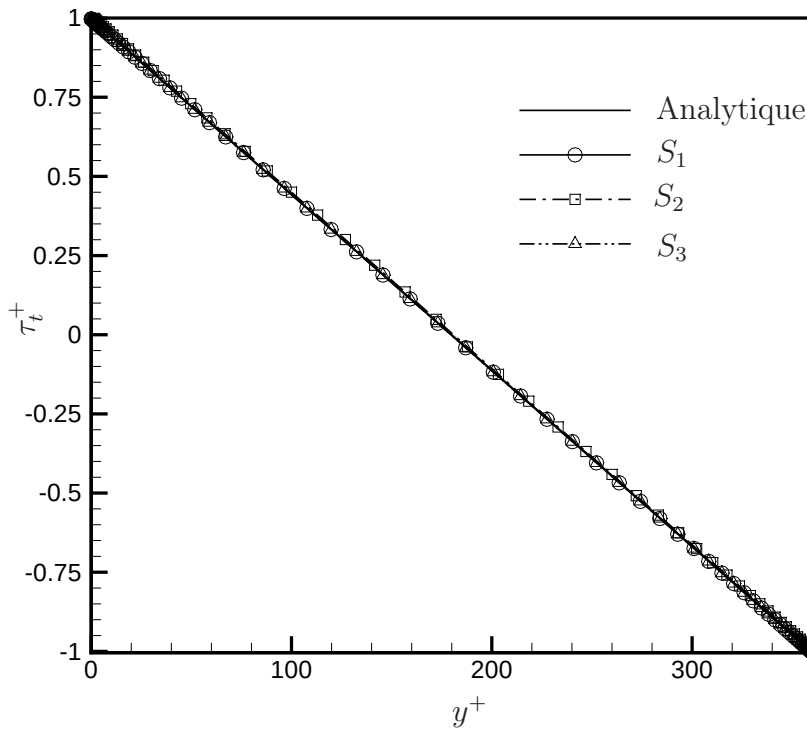


FIGURE 2.13 – Profils de la contrainte totale de cisaillement en unités de paroi sur toute la hauteur du canal. Comparaison entre les résultats des simulations S_1 , S_2 et S_3 et du profil analytique en turbulence pleinement développée.

2.5.1.5 Discussion sur les coûts CPU

L'objectif du mémoire est d'utiliser les simulations LES comme un modèle réduit de l'écoulement afin de déterminer par contrôle optimal les lois de contrôle qui minimisent la traînée moyenne de l'écoulement. Il est donc important de connaître la réduction du coût de calcul liée à l'utilisation d'une simulation LES à la place d'une simulation DNS du même écoulement.

TABLE 2.2 – Comparaison pour les simulations S_1 , S_2 et S_3 du temps CPU (en seconde) nécessaire pour réaliser une seule itération. Le temps CPU est estimé par moyenne sur 1000 itérations.

	S_1	S_2	S_3
	$192 \times 129 \times 160$	$64 \times 73 \times 96$	$64 \times 65 \times 64$
Temps CPU (seconde)	16,92	1,928	1,026
Rapport de temps	1	0,11	0,06

Le tableau 2.2 donne une comparaison par rapport à la simulation DNS S_1 des coûts de calcul liés aux simulations LES S_2 et S_3 . Le temps CPU pour une itération est estimé comme la moyenne du temps nécessaire pour réaliser 1000 itérations. On constate que la simulation S_2 amène 89% de réduction de coût de calcul et que la simulation S_3 conduit à plus de 94% de réduction du temps CPU. Une telle différence de coûts de calcul est donc intéressante pour la résolution du problème de contrôle optimal. Il reste à évaluer la capacité des simulations S_2 et S_3 à décrire d'une manière fine la dynamique originale de l'écoulement. C'est l'objet des sections suivantes.

2.5.2 Propriétés moyennes

2.5.2.1 Vitesse moyenne

La région interne d'une couche limite turbulente est généralement décrite en trois zones :

- Pour $y^+ \leq 5$, c'est la *sous-couche visqueuse* ou sous-couche laminaire. Dans cette zone, les effets de dissipation et la diffusion visqueuse sont en équilibre et dominent largement l'écoulement. Le profil de vitesse est alors linéaire :

$$\langle u^+ \rangle = y^+.$$

- Pour $5 < y^+ \leq 30$, c'est la *sous-couche tampon*. Cette zone peut être vue pour le profil moyen de vitesse comme une zone de raccordement entre la sous-couche visqueuse et la sous-couche logarithmique. Le maximum de production d'énergie

cinétique turbulente situé vers $y^+ \simeq 12$ y est contenu. Au delà de cette distance et jusqu'à la sous-couche logarithmique, la diffusion turbulente devient prépondérante par rapport à la diffusion moléculaire.

- Pour $y^+ > 30$, c'est la *sous-couche logarithmique* ou sous-couche inertielle. Dans cette zone, la vitesse moyenne a un profil logarithmique :

$$\langle u^+ \rangle = \frac{1}{\kappa} \ln(y^+) + B$$

où $\kappa \simeq 0,40$ est la constante de Von Kármán et B une constante qui vaut approximativement 5,5 pour une paroi lisse (Kim *et al.*, 1987).

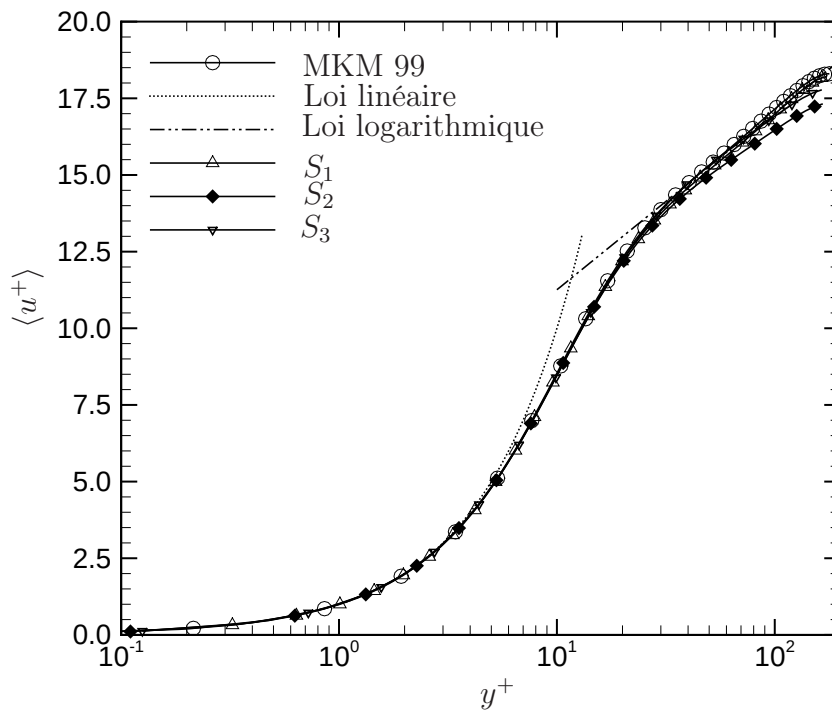


FIGURE 2.14 – Profil de vitesse moyenne longitudinale en unité de paroi.

La figure 2.14 présente en échelle semi-logarithmique les profils de la composante longitudinale de vitesse pour les simulations S_1 , S_2 et S_3 . Dans les régions de sous-couche visqueuse et de sous-couche tampon, les profils issus de nos simulations se superposent parfaitement avec le profil de vitesse moyenne de référence. Dans la région logarithmique, les profils donnés par les simulations S_1 et S_3 montrent un bon accord avec le profil de

MKM 99, tandis que l'on constate une sous-prédiction de la vitesse dans le cas S_2 . Ce résultat est *a priori* inattendu puisque la résolution du maillage utilisée pour S_2 est plus importante que pour S_3 .

2.5.2.2 Propriétés caractéristiques de l'écoulement moyen

Connaissant la vitesse longitudinale moyenne, nous pouvons déterminer les vitesses débitante U_b et au centre du canal U_c , les nombres de Reynolds associés, respectivement Re_b et Re_c , et le coefficient de frottement moyen C_f . Ces valeurs sont données dans le tableau 2.3. Les résultats sont en bon accord avec ceux de Kim *et al.* (1987) qui sont rappelés dans le même tableau.

TABLE 2.3 – Propriétés moyennes de l'écoulement.

	Re_c	Re_b	U_b/u_τ	U_c/u_τ	U_c/U_b	$C_f = \tau_w/(1/2 \rho U_b^2)$
S_1	3278	5610,7	15,585	18,212	1,168	$8,135 \times 10^{-3}$
S_2	3189,4	5549	15,414	17,719	1,150	$8,347 \times 10^{-3}$
S_3	3203,3	5579	15,497	17,796	1,148	$8,258 \times 10^{-3}$
KMM 87	3300	5600	15,63	18,20	1,16	$8,18 \times 10^{-3}$

2.5.3 Eléments du tenseur de Reynolds

Par définition, le tenseur des contraintes de Reynolds $\langle u'_i u'_j \rangle$ est symétrique. La moitié de la trace de ce tenseur représente l'énergie cinétique moyenne par unité de volume. L'écoulement dans un canal étant statistiquement invariant dans la direction $\mathbf{e}_z$, les termes $\langle u'_1 u'_3 \rangle$ et $\langle u'_2 u'_3 \rangle$ sont nuls. Le tenseur de Reynolds est donc composé seulement de cinq composantes. La symétrie de l'écoulement par rapport au plan situé en $y = 0$ implique que la composante $\langle u'_1 u'_2 \rangle$ est une fonction impaire, alors que les composantes formant la diagonale du tenseur de Reynolds sont des fonctions paires.

2.5.3.1 Intensités turbulentes

Les intensités turbulentes ou déviations standards de l'écoulement sont données par la racine carrée des termes diagonaux du tenseur des contraintes de Reynolds. Les figures 2.15, 2.16 et 2.17 représentent pour les simulations S_1 , S_2 et S_3 les profils d'intensité turbulente des composantes de vitesse longitudinale ($\sqrt{\langle u'^2 \rangle}$ ou u_{rms}), normale ($\sqrt{\langle v'^2 \rangle}$ ou v_{rms}) et transversale ($\sqrt{\langle w'^2 \rangle}$ ou w_{rms}). La comparaison avec les données issues de MKM 99

indique pour la simulation S_1 une légère sous-prédiction dans la région logarithmique. La simulation S_3 a, quant à elle, tendance à surestimer la valeur de u_{rms} . Enfin, les résultats obtenus par la simulation S_2 sont en bon accord avec ceux de la simulation de référence sur toute la hauteur du canal. La position du maximum de la composante longitudinale de l'intensité turbulente, située à $y^+ \simeq 12$, correspond bien à celle issue de la simulation de MKM 99. Cette valeur correspond à la position dans le canal où la production de l'énergie cinétique turbulente est également maximum. Les composantes v_{rms} et w_{rms} obtenues par la simulation S_1 sont plutôt en bon accord avec les données de référence, seule une légère surestimation étant à signaler dans la zone du canal comprise entre $y^+ = 30$ et $y^+ = 100$. Pour les simulations LES, ces composantes sont sous-prédites par rapport aux résultats de référence. Il faut cependant noter une nette amélioration dans le cas S_2 où la résolution du maillage est plus fine que dans le cas S_3 .

En conclusion, la simulation S_1 décrit de manière correcte les profils d'intensité turbulente de l'écoulement. Pour les simulations LES S_2 et S_3 , si les profils de déviations standards sont légèrement différents des statistiques de référence, une bonne représentativité globale de l'écoulement est conservée.

2.5.3.2 Contrainte de Reynolds

A la section 2.5.1.4, nous avons représenté la contrainte totale de cisaillement τ_t^+ afin de déterminer si l'écoulement était statistiquement stationnaire et établi (voir figure 2.13). Dans cette section, nous allons nous intéresser aux variations relatives des contributions visqueuse et turbulente de τ_t^+ . En effet, d'après (2.70), la contrainte totale de cisaillement s'écrit encore :

$$\tau_t^+ = \tau_\nu^+ + \tau_r^+$$

avec

$$\tau_\nu^+ = \frac{d\langle u^+ \rangle}{dy^+} \quad \text{contrainte visqueuse,}$$

et

$$\tau_r^+ = -\langle u'^+ v'^+ \rangle \quad \text{contrainte de Reynolds.}$$

Après normalisation par la contrainte totale τ_t^+ , les variations des contraintes visqueuses τ_ν^+ et de Reynolds τ_r^+ sont données sur la figure 2.18. Les résultats sont en bon accord avec ceux donnés par la simulation de référence. C'est dans la zone comprise entre $0 < y^+ < 50$ que l'anisotropie des tensions de Reynolds est la plus importante. En proche paroi

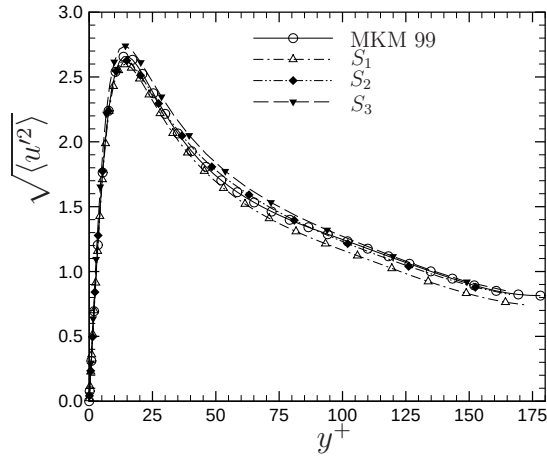


FIGURE 2.15 – Ecart type de la composante de vitesse longitudinale.

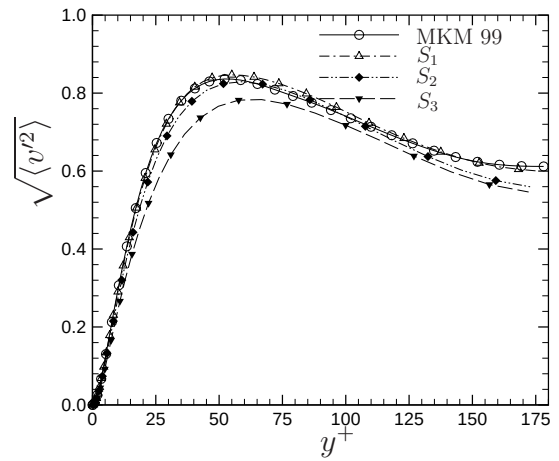


FIGURE 2.16 – Ecart type de la composante de vitesse normale.

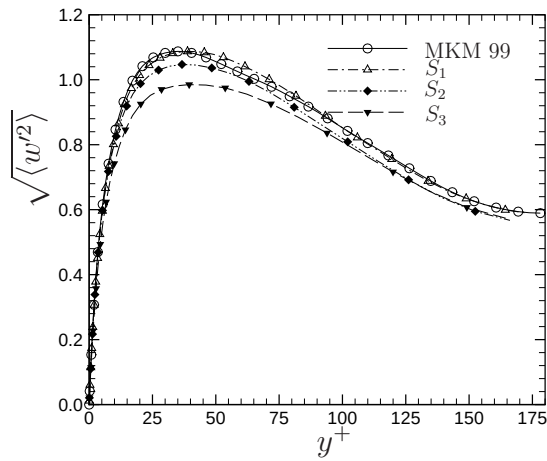


FIGURE 2.17 – Ecart type de la composante de vitesse transversale.

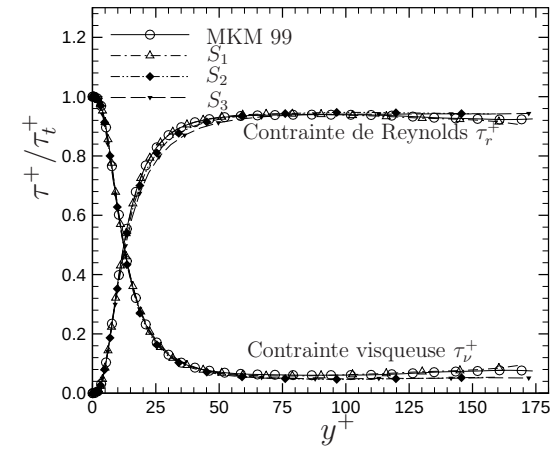


FIGURE 2.18 – Contraintes de Reynolds et contraintes visqueuses réduites par la contrainte totale.

($y^+ < 10$), la contrainte visqueuse prédomine puis devient négligeable dans le reste de l'écoulement.

2.5.3.3 Bilan des contraintes de Reynolds

Après quelques manipulations, les équations de transport des contraintes de Reynolds se déduisent simplement des équations de Navier-Stokes. Ces équations de transport des tensions de Reynolds s'écrivent (Pope, 2000, par exemple) :

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle u'_i u'_j \rangle = A_{ij} + P_{ij} + T_{ij} + D_{ij} + N_{ij} - \epsilon_{ij} \quad (2.71)$$

où

$A_{ij} = -\frac{\partial \langle u'_i u'_j \rangle}{\partial x_k} \langle u_k \rangle$	Terme d'advection
$P_{ij} = -\left(\langle u'_i u'_k \rangle \frac{\partial \langle u_j \rangle}{\partial x_k} + \langle u'_j u'_k \rangle \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_k} \right)$	Terme de production par le mouvement moyen
$T_{ij} = -\frac{\partial}{\partial x_k} \langle u'_i u'_j u'_k \rangle$	Terme de transport turbulent
$D_{ij} = \frac{1}{Re_\tau} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} \langle u'_i u'_j \rangle$	Terme de diffusion moléculaire
$N_{ij} = -\left(\langle u'_i \frac{\partial p'}{\partial x_j} \rangle + \langle u'_j \frac{\partial p'}{\partial x_i} \rangle \right)$	Terme de corrélation avec la fluctuation de pression
$\epsilon_{ij} = \frac{2}{Re_\tau} \langle \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_j}{\partial x_k} \rangle$	Terme de pseudo-dissipation

Etant donné le rôle important de la contrainte croisée $\langle u'_1 u'_2 \rangle$ dans le cycle de production de la turbulence, nous détaillerons uniquement le bilan énergétique de cette composante. Nous allons commencer cependant par faire quelques commentaires sur le comportement général des autres composantes $\langle u'^2_1 \rangle$, $\langle u'^2_2 \rangle$ et $\langle u'^2_3 \rangle$.

Lorsque l'hypothèse de turbulence statistiquement établie et stationnaire est vérifiée, on peut montrer qu'il n'y pas de production par le mouvement moyen pour les composantes normale et transversale des contraintes de Reynolds ($P_{22} = P_{33} = 0$). L'énergie cinétique est donc entièrement produite par l'intermédiaire de la composante longitudinale $\langle u'^2_1 \rangle$. La redistribution d'énergie entre les trois composantes se fait par l'intermédiaire des termes de corrélation avec la fluctuation de pression. Pour $\langle u'^2_1 \rangle$, le terme de production P_{11} est bien une source d'énergie (terme positif) alors que le terme de corrélation avec la fluctuation de pression N_{11} correspond à un puits d'énergie (terme négatif). Pour les composantes $\langle u'^2_2 \rangle$

et $\langle u_3'^2 \rangle$, la source importante d'énergie provient effectivement du terme de redistribution N_{ii} .

Passons maintenant au bilan énergétique de $\langle u_1' u_2' \rangle$. Dans le cas d'un écoulement de canal turbulent stationnaire et homogène suivant $\mathbf{e}_x$ et $\mathbf{e}_z$, le bilan énergétique de $\langle u_1' u_2' \rangle$ s'écrit :

$$A_{12} + P_{12} + T_{12} + D_{12} + N_{12} - \epsilon_{12} = 0$$

où

$$\begin{aligned} A_{12} &= 0 & P_{12} &= -\langle u_2' u_2' \rangle \frac{\partial \langle u_1' \rangle}{\partial y} \\ T_{12} &= -\frac{\partial}{\partial y} \langle u_1' u_2'^2 \rangle & D_{12} &= \frac{1}{Re_\tau} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \langle u_1' u_2' \rangle \\ N_{12} &= -\left(\langle u_1' \frac{\partial p'}{\partial y} \rangle + \langle u_2' \frac{\partial p'}{\partial x} \rangle \right) & \epsilon_{12} &= \frac{2}{Re_\tau} \left(\left\langle \frac{\partial u_1'}{\partial x} \frac{\partial u_2'}{\partial x} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial u_1'}{\partial y} \frac{\partial u_2'}{\partial y} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial u_1'}{\partial z} \frac{\partial u_2'}{\partial z} \right\rangle \right) \end{aligned}$$

La figure 2.19 présente l'évolution des termes énergétiques de la contrainte croisée $\langle u_1' u_2' \rangle$ sur la demi-hauteur du canal après adimensionnalisation des contributions en unités de paroi. Les commentaires qui vont être faits en termes de gain ou de perte d'énergie sont à prendre pour $\langle u_1' u_2' \rangle$. Il faudra inverser les conclusions si on s'intéresse à $-\langle u_1' u_2' \rangle$.

Loin de la paroi, les termes de production (puits d'énergie) et de corrélation vitesse pression (source d'énergie) sont en équilibre total, toutes les autres quantités étant quasiment nulles. Très près de la paroi ($y^+ < 10$), les termes de diffusion moléculaire et de pseudo-dissipation deviennent prépondérants. Cependant, la somme de ces deux termes est quasiment nulle montrant ainsi que la viscosité n'a pas de réelle influence sur la dynamique des contraintes de Reynolds. Enfin, dans la zone intermédiaire ($10 < y^+ < 50$), le terme de production atteint sa valeur maximale de puits d'énergie alors que les termes de transport turbulent et de corrélation vitesse pression atteignent leurs valeurs maximales de source d'énergie. C'est précisément dans cette zone intermédiaire que naissent et évoluent les tourbillons quasi-longitudinaux. Les résultats sont similaires à ceux de Kim *et al.* (1987) et Mansour *et al.* (1988).

2.5.4 Moments d'ordre supérieur

Les statistiques d'ordre élevé, moments d'ordre 3 pour le coefficient de dissymétrie et d'ordre 4 pour le coefficient d'aplatissement, requièrent pour une bonne estimation une simulation numérique très précise ainsi qu'un nombre important de données.

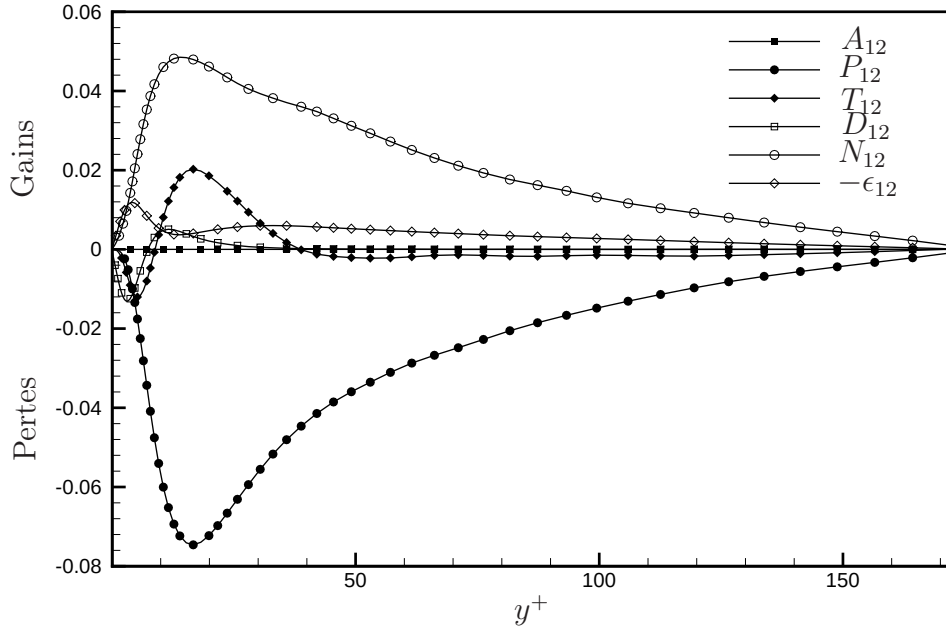


FIGURE 2.19 – Bilan des termes provenant de l'équation de transport des contraintes de Reynolds $\langle u'_1 u'_2 \rangle$ pour la simulation S_1 .

2.5.4.1 Coefficients de dissymétrie

Le coefficient de dissymétrie pour une composante u_i du champ de vitesse est défini (voir section 2.5.1.2) comme :

$$S_{u_i} = \frac{\langle u_i'^3 \rangle}{\langle u_i'^2 \rangle^{\frac{3}{2}}}.$$

Pour une variable aléatoire ϕ de densité de probabilité gaussienne, on a $S_\phi = 0$. L'écart à la valeur nulle mesure donc le manque de symétrie d'une distribution. Lorsque ce coefficient est négatif, cela signifie que la queue de la distribution est allongée vers les valeurs négatives, et par voie de conséquence que la probabilité d'obtenir des valeurs négatives est plus importante que si les données correspondaient à une distribution gaussienne. À l'opposé, lorsque ce coefficient est positif, la queue de la distribution est allongée vers les valeurs positives, et la probabilité d'obtenir des valeurs positives est donc plus importante que pour une distribution gaussienne. Pour un écoulement turbulent, le signe du coefficient de dissymétrie donnera donc une indication sur la direction du mouvement des fluctuations turbulentes.

Les figures 2.20, 2.21 et 2.22 représentent les facteurs de dissymétrie associés respectivement aux fluctuations turbulentes u' , v' et w' . Les résultats issus des simulations S_1 , S_2 et

S_3 y sont comparés aux données provenant de Moser *et al.* (1999). En première remarque, on peut dire que les valeurs de ces coefficients indiquent que les densités de probabilité des fluctuations de vitesse u' et v' sont loin d'être gaussiennes. En raison de la géométrie du

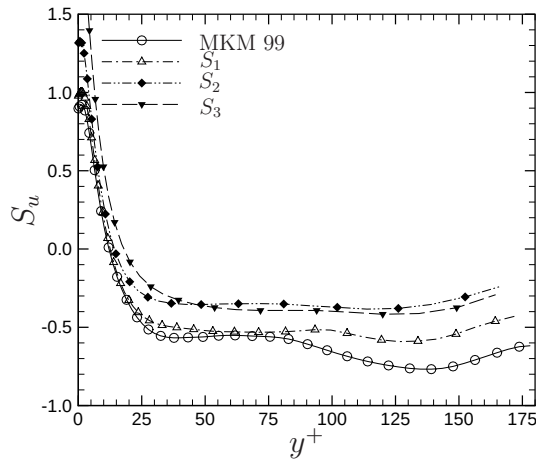


FIGURE 2.20 – Coefficient de dissymétrie pour la composante u .

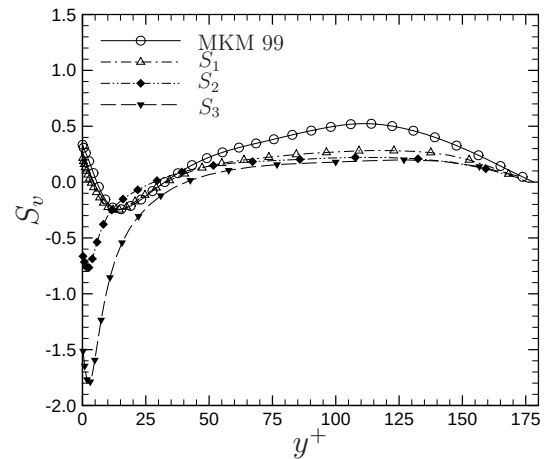


FIGURE 2.21 – Coefficient de dissymétrie pour la composante v .

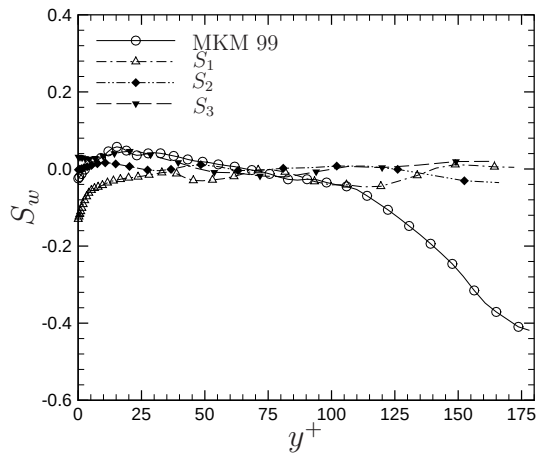


FIGURE 2.22 – Coefficient de dissymétrie pour la composante w .

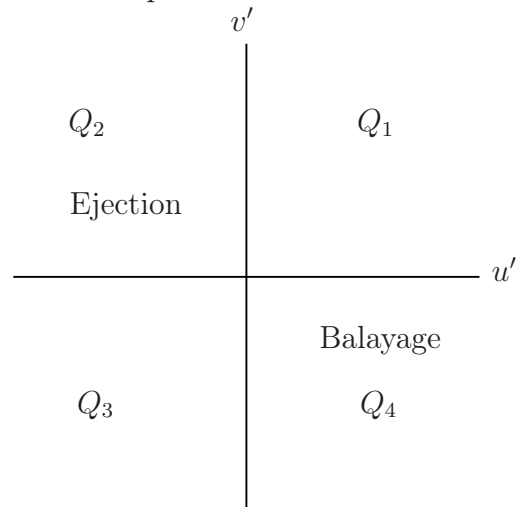


FIGURE 2.23 – Quadrant des fluctuations de vitesse.

canal et de la symétrie de réflexion des équations de Navier-Stokes, le coefficient de dissymétrie de la composante w' devrait être nulle. Si cela n'est pas vérifié, c'est que trop peu de données ont été utilisées pour estimer cette grandeur. On constate sur la figure 2.22 que pour toutes les simulations réalisées, les valeurs de S_w restent très proches de zéro sur l'ensemble de la demi-hauteur du canal. En revanche, à partir de $y^+ = 110$, les résultats de MKM 99 divergent de la valeur zéro. Ceci tend à indiquer que le nombre d'échantillons n'était

pas suffisant pour calculer de manière correcte les statistiques d'ordre élevée. Kim *et al.* qualifient d'ailleurs de "limite" le nombre d'échantillons à leur disposition pour calculer les moments d'ordre supérieur (voir §4.7 de Kim *et al.*, 1987).

Les coefficients de dissymétrie de la composante longitudinale u' sont représentés sur la figure 2.20. On constate que proche de la paroi ($y^+ < 12$), le coefficient S_u est positif pour toutes les simulations ce qui tend à montrer que la probabilité d'obtenir des fluctuations de vitesse longitudinale positives ($u' > 0$) est plus importante que l'inverse ($u' < 0$). Pour le coefficient de dissymétrie de la composante normale, on observe (voir figure 2.21) que près de la paroi le coefficient S_v déterminé à partir des résultats de la simulation S_1 est positif en accord avec les résultats de MKM 99. Pour les deux simulations LES, le résultat est inversé et on trouve que les facteurs de dissymétrie de la composante v' prennent des valeurs assez largement négatives proche de la paroi. Ce comportement est d'ailleurs retrouvé par de nombreuses DNS réalisées avec des schémas aux différences finies (Bouillon, 2004; Doche, 2006; Arcen, 2006). Dans cette zone, il est donc difficile de conclure exactement sur le comportement réel de l'écoulement. Cependant, les signes des coefficients de dissymétrie S_u et S_v en proche paroi sont généralement interprétés comme la trace de l'existence de phénomènes de balayage pendant lesquels du fluide à grande vitesse se dirige vers les parois. Ces événements particuliers sont caractérisés par des fluctuations $u' > 0$ et $v' < 0$. Selon la méthode dite des quadrants (voir figure 2.23), ces événements sont donc de type Q_4 . En se rapprochant du centre du canal, les tendances décrites précédemment s'inversent. En effet, le coefficient de dissymétrie associé à u' devient négatif et le coefficient de dissymétrie de v' devient positif. Dans cette zone de l'écoulement, la probabilité est donc plus élevée d'observer des fluctuations de vitesse $u' < 0$ et $v' > 0$. Ces événements correspondent à un phénomène d'éjection de fluide à basse vitesse loin de la paroi, ce qui est représenté par le quadrant Q_2 sur la figure 2.23. Enfin, on constate que loin de la paroi, les valeurs des coefficients S_u et S_v obtenues à partir de nos simulations sont sous-estimées par rapport aux résultats de MKM 99. Cette tendance démontre que l'intensité des événements d'éjection représentés par nos simulations, et en particulier par les simulations LES, est plus faible que dans le cas de la DNS de référence.

2.5.4.2 Coefficients d'aplatissement

Le coefficient d'aplatissement³² pour une composante u_i du champ de vitesse est défini (voir section 2.5.1.2) comme :

$$F_{u_i} = \frac{\langle u_i'^4 \rangle}{\langle u_i'^2 \rangle^2}.$$

Pour une variable aléatoire ϕ de densité de probabilité gaussienne, on a $F_\phi = 3$. L'écart par rapport à cette valeur mesure par comparaison avec une loi de probabilité gaussienne le caractère pointu ou plat de la distribution des variables. Un coefficient d'aplatissement élevé indique que la distribution est plutôt pointue autour de sa moyenne et possède des queues de distribution plutôt épaisses. Au contraire, un coefficient d'aplatissement faible traduit que la distribution est plutôt étalée autour de sa moyenne et possède des queues de distribution plutôt minces. En termes de fluctuations turbulentes, un coefficient d'aplatissement élevé traduira une forte probabilité d'observer de grandes variations par rapport aux valeurs moyennes. Les coefficients d'aplatissement sont interprétés en turbulence comme une mesure de l'intermittence.

Les coefficients d'aplatissement pour les simulations S_1 , S_2 et S_3 sont représentés sur les figures 2.24, 2.25 et 2.26, respectivement pour les fluctuations u' , v' et w' . Les résultats de Moser *et al.* (1999) sont reportés sur les mêmes figures pour comparaison. Nos résultats sont en bon accord qualitatif avec ceux de MKM 99 sur l'ensemble de la demi-hauteur du canal. En particulier, on retrouve que les coefficients d'aplatissement croissent rapidement près de la paroi traduisant l'importance des phénomènes intermittents dans cette zone. Pour la simulation S_1 , les coefficients d'aplatissement des composantes v' et w' sont légèrement sous-estimés près de la paroi alors qu'il y a dans cette même zone une légère surestimation pour le coefficient de la composante u' . Pour les simulations LES, l'accord quantitatif dans la zone de proche paroi est moins bon. La tendance générale est à la forte surestimation des coefficients d'aplatissement. Ce comportement semble assez général et est souvent retrouvé même en DNS lorsqu'une méthode de différence finie est utilisée pour la discrétisation spatiale (Arcen, 2003, par exemple). On constate tout de même qu'augmenter la résolution du maillage permet de diminuer les écarts avec les valeurs obtenues par la simulation de référence. Notons pour conclure que le coefficient F_w des données de référence présente loin des parois des différences importantes avec l'ensemble de nos résultats de simulation. Cela traduit comme pour le coefficient S_w de MKM 99 que le nombre d'échantillons utilisé pour

³². Le coefficient d'aplatissement est toujours supérieur à 1. De manière plus précise, on peut montrer que $F_{u_i} \geq 1 + (S_{u_i})^2$.

déterminer les moments d'ordre supérieur était certainement insuffisant dans leur cas.

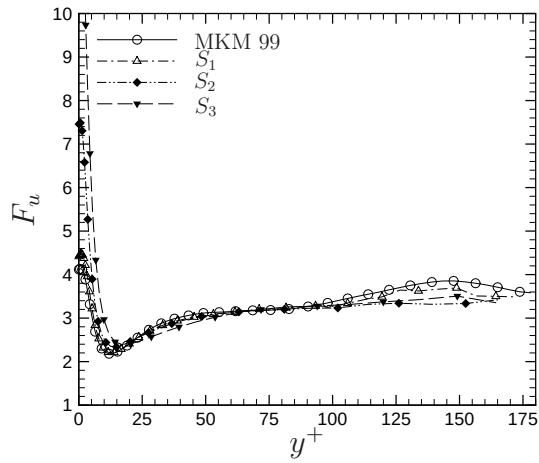


FIGURE 2.24 – Coefficient d'aplatissement pour la composante u .

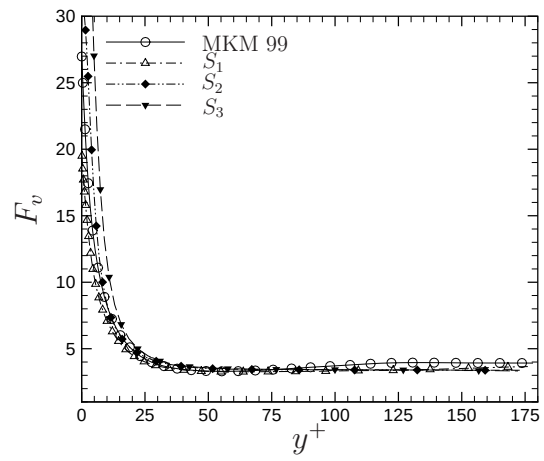


FIGURE 2.25 – Coefficient d'aplatissement pour la composante v .

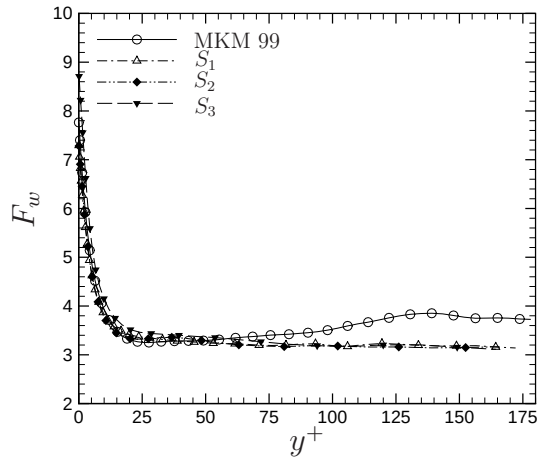


FIGURE 2.26 – Coefficient d'aplatissement pour la composante w .

2.5.5 Corrélations spatiales en deux points

2.5.5.1 Définition et propriétés

Les corrélations spatiales en deux points séparés d'une distance r dans la direction $\mathbf{e}_l$ de deux composantes du champ de vitesse u'_i et u'_j sont données par l'expression³³ :

$$R_{ij}^{(l)}(\mathbf{x}, r, t) = \frac{\langle u'_i(\mathbf{x}, t) u'_j(\mathbf{x} + r\mathbf{e}_l, t) \rangle}{\sqrt{\langle u'^2_i(\mathbf{x}, t) \rangle} \sqrt{\langle u'^2_j(\mathbf{x} + r\mathbf{e}_l, t) \rangle}}. \quad (2.72)$$

En régime turbulent établi, les propriétés moyennes du canal sont invariantes par translation dans les directions homogènes $\mathbf{e}_x$ et $\mathbf{e}_z$, et indépendantes du temps. Par conséquent, le point d'observation $\mathbf{x}$ peut être choisi arbitrairement tel que $\mathbf{x} = (0, y, 0)$ et le temps t peut être supprimé de la liste des paramètres, soit $R_{ij}^{(l)}(\mathbf{x}, r, t) \equiv R_{ij}^{(l)}(y, r)$. Par ailleurs, en terme de corrélations spatiales, la périodicité des champs de vitesse dans les directions $\mathbf{e}_x$ et $\mathbf{e}_z$ revient à dire que $R_{ij}^{(1)}$ est de période L_x^+ et que $R_{ij}^{(3)}$ est de période L_z^+ . Pour étudier les corrélations spatiales, il faut donc *a priori* faire varier la séparation r sur l'ensemble du domaine. En réalité, on peut se limiter à faire varier r de 0 à la demi-longueur du canal pour $R_{ij}^{(1)}$ ou à la demi-largeur du canal pour $R_{ij}^{(3)}$. Pour cela, il suffit de tenir compte du fait que

$$R_{ij}^{(l)}(\mathbf{x}, r, t) = R_{ji}^{(l)}(\mathbf{x}, -r, t) \quad \text{pour } l = 1, 3. \quad (2.73)$$

Cette propriété de symétrie des corrélations spatiales se montrent facilement. En posant $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{x} + r\mathbf{e}_l$, la corrélation (2.72) peut être réécrite :

$$R_{ij}^{(l)}(\mathbf{x}, r, t) = \frac{\langle u'_i(\boldsymbol{\xi} - r\mathbf{e}_l, t) u'_j(\boldsymbol{\xi}, t) \rangle}{\sqrt{\langle u'^2_i(\boldsymbol{\xi} - r\mathbf{e}_l, t) \rangle} \sqrt{\langle u'^2_j(\boldsymbol{\xi}, t) \rangle}} = R_{ji}^{(l)}(\boldsymbol{\xi}, -r, t) \quad \forall l.$$

Finalement, pour déterminer (2.73) à partir de la relation précédente, il suffit d'invoquer l'hypothèse d'invariance des statistiques dans les directions $\mathbf{e}_x$ et $\mathbf{e}_z$.

2.5.5.2 Justification de la taille du domaine numérique

Le premier critère pour une simulation numérique est sa capacité à représenter fidèlement l'ensemble des phénomènes physiques présents dans l'écoulement. Pour cela, il faut en particulier que les dimensions du domaine numérique soient plus grandes que la longueur

33. Nous avons fait le choix de définir les corrélations comme le rapport de la covariance par le produit des écarts types calculés aux positions $\mathbf{x}$ et $\mathbf{x} + r\mathbf{e}_l$. De cette manière, l'inégalité de Schwartz implique que $1 \geq R_{ij}^{(l)} \geq -1$. Il est possible de rencontrer dans la littérature des cas où la covariance est divisée par la variance des fluctuations calculée au point $\mathbf{x}$. L'inconvénient de cette définition est que les corrélations peuvent ne plus être comprises dans l'intervalle $[-1; 1]$.

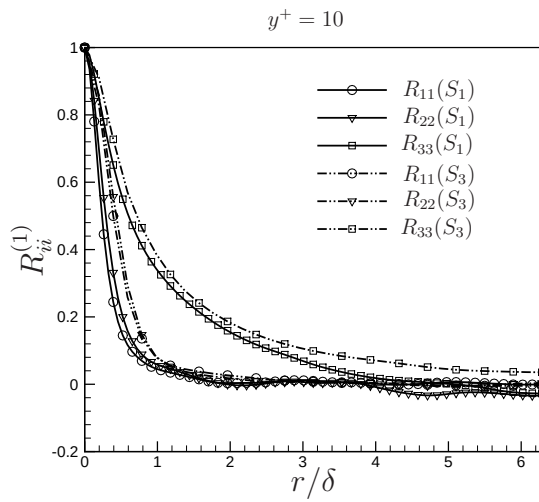


FIGURE 2.27 – Auto-corrélations spatiales de vitesse suivant la direction longitudinale ($y^+ = 10$).

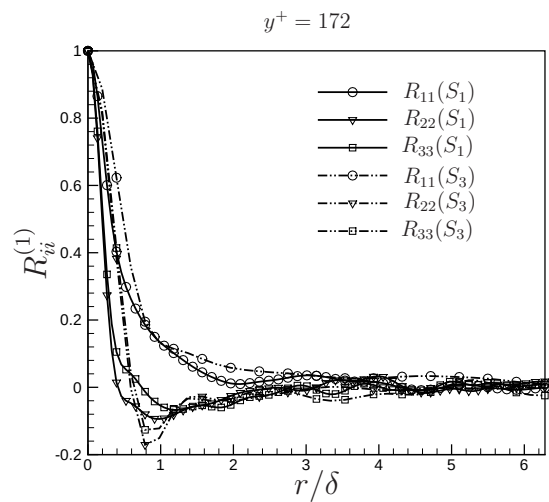


FIGURE 2.28 – Auto-corrélations spatiales de vitesse suivant la direction longitudinale ($y^+ = 172$).

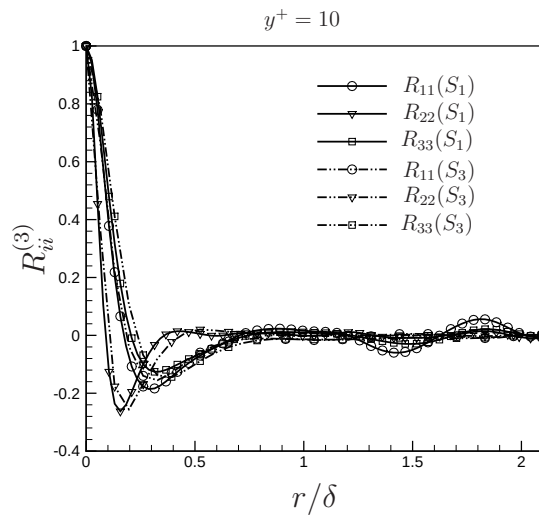


FIGURE 2.29 – Auto-corrélations spatiales de vitesse suivant la direction transversale ($y^+ = 10$).

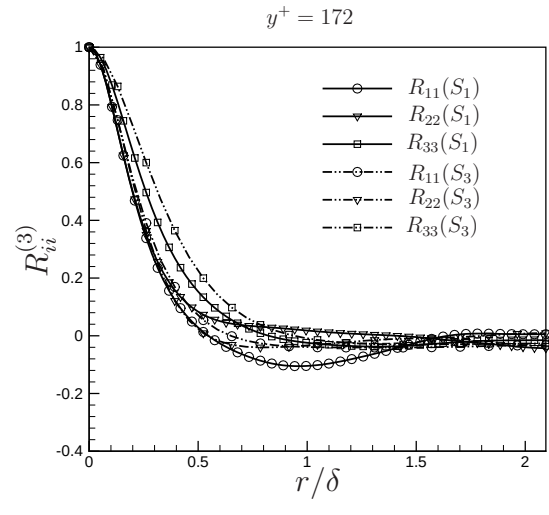


FIGURE 2.30 – Auto-corrélations spatiales de vitesse suivant la direction transversale ($y^+ = 172$).

des plus grands tourbillons existant au sein de l'écoulement. Afin de s'en assurer, une étude de la décroissance des corrélations spatiales des fluctuations de vitesse est généralement menée³⁴. Si la taille du domaine est correctement choisie, les corrélations spatiales tendent vers zéro lorsque la distance entre les deux points augmente.

Les figures 2.27 et 2.28 représentent les corrélations spatiales de vitesse dans la direction longitudinale en un point proche de la paroi ($y^+ = 10$) et en un autre point proche du centre du canal ($y^+ = 172$). Les figures 2.29 et 2.30 représentent les corrélations spatiales de vitesse dans la direction transversale de l'écoulement, et cela aux mêmes points y^+ dans la direction normale que précédemment. Pour simplifier les figures, seules les corrélations spatiales associées aux simulations S_1 et S_3 ont été reportées. Nous constatons sur ces figures que les valeurs des corrélations décroissent de manière continue et tendent vers zéro pour des séparations de l'ordre de la demi-longueur du canal pour $R_{ii}^{(1)}$ et de la demi-largeur du canal pour $R_{ii}^{(3)}$. Les dimensions choisies pour le domaine numérique semblent donc assez large pour garantir qu'une faible partie de l'énergie cinétique se trouve dans des structures turbulentes d'une taille supérieure à la taille du domaine.

2.5.5.3 Première analyse structurelle

Outre l'adéquation du domaine de calcul à la physique de l'écoulement, une analyse des corrélations spatiales donnent des informations sur les échelles caractéristiques de certaines structures présentes au sein de l'écoulement (voir l'exemple analytique dû à Townsend dans Delville et Bonnet, 2003). Une analyse structurelle plus détaillée, basée sur des critères d'identification de structures cohérentes, sera réalisée à la section 2.5.7.

Il est maintenant bien connu (Robinson, 1991, par exemple) que dans la zone tampon de la couche limite turbulente existe des zones alternées de hautes et basses vitesses³⁵ longitudinales. Ces zones forment un réseau de structures cohérentes parallèles et allongées dans le sens de l'écoulement appelées streaks ou stries. Naturellement, cette disposition caractéristique influe sur la forme de la corrélation spatiale des fluctuations de la composante longitudinale de vitesse calculée pour des déplacements transversaux. Par exemple, nous

34. Selon Jiménez (1998), montrer qu'il y a décroissance des corrélations spatiales sur une longueur inférieure à la dimension de la boîte de calcul ne permet pas de prouver que le domaine numérique est de taille suffisante. En effet, Jiménez considère que des corrélations spatiales qui semblent décroître vers zéro peuvent encore contenir dans leurs queues des quantités d'énergie non négligeables. Des études expérimentales et numériques récentes montrent d'ailleurs que de très longues structures longitudinales (rapport d'aspect environ égal à 10) existent en écoulement de paroi.

35. Cette terminologie de haute et basse vitesse est relative à la vitesse moyenne de l'écoulement.

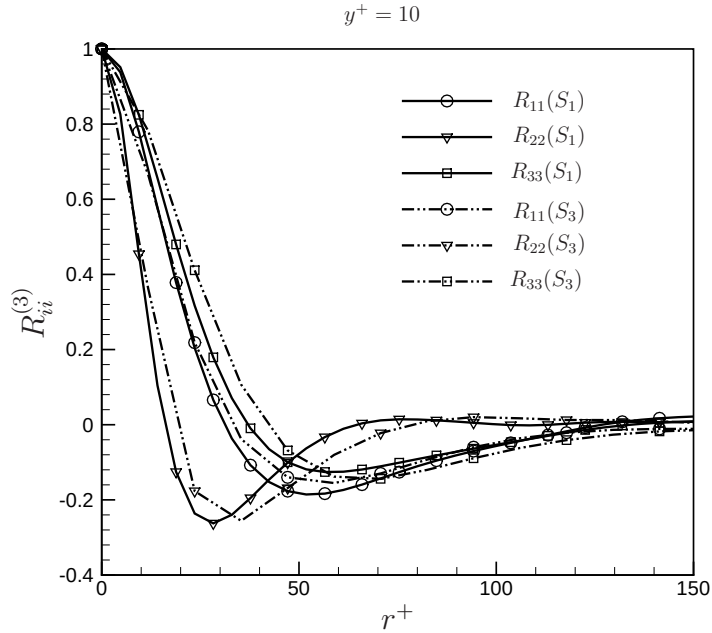


FIGURE 2.31 – Détermination de l’espacement entre deux stries de fluide et du diamètre d’un tourbillon longitudinal. Les corrélations spatiales ont été calculées à $y^+ = 10$.

constatons qu’en augmentant la distance transversale, $R_{11}^{(3)}$, évaluée à $y^+ = 10$, devient négative et a un minimum pour une valeur de déplacement $r^+ \simeq 50$ (voir figure 2.31). La valeur de ce déplacement peut être assimilée à la séparation entre une strie caractérisée par des fluctuations de vitesse longitudinales négatives ou positives à une strie caractérisée par des fluctuations de vitesse de signe opposé. La séparation entre deux stries, ayant des fluctuations de vitesse longitudinales de même signe, λ_z , est alors égale au double de la séparation nécessaire pour atteindre le minimum de $R_{11}^{(3)}$, soit $\lambda_z^+ = 100$ dans notre cas. Cette valeur est en très bon accord avec celles trouvées dans la littérature. En effet, quelle que soit la nature de l’étude, expérimentale ou numérique, on trouve généralement $\lambda_z^+ = 100 \pm 20$ pour $y^+ < 30$ (Kim *et al.*, 1987, par exemple).

Par ailleurs, le minimum négatif de la corrélation spatiale $R_{22}^{(3)}$ observé sur la figure 2.31 témoigne de la présence de structures tourbillonnaires quasi-longitudinales dans l’écoulement. Il est alors possible de faire correspondre le déplacement nécessaire pour que la corrélation spatiale $R_{22}^{(3)}$ atteigne son minimum au diamètre moyen des tourbillons longitudinaux d_t . Nous obtenons $d_t^+ \simeq 25$ pour S_1 et $d_t^+ \simeq 35$ pour S_3 . Ces résultats sont en bon accord pour les résultats DNS avec ceux de Kim *et al.* (1987) puisqu’ils ont obtenu $d_t^+ \simeq 25$

à $y^+ \simeq 10$.

2.5.6 Spectres d'énergie

Les spectres d'énergie cinétique dans les deux directions homogènes servent à examiner les processus de filtrage (filtre test et filtre de maille) réalisés pour la simulation LES. Ces spectres servent également à vérifier si la résolution utilisée est suffisante pour bien décrire le transfert d'énergie entre les différentes structures de l'écoulement.

Les spectres d'énergie cinétique sont définis pour tout y^+ par la transformée de Fourier des tenseurs de corrélation en deux points $R_{ij}^{(l)}$:

$$E_{ij}^{(l)}(y, k_l) = \int_0^{L_l} R_{ij}^{(l)}(y, r) \exp(-jk_l r) dr. \quad (2.74)$$

Les figures 2.32 et 2.33 représentent respectivement les spectres d'énergie cinétique à

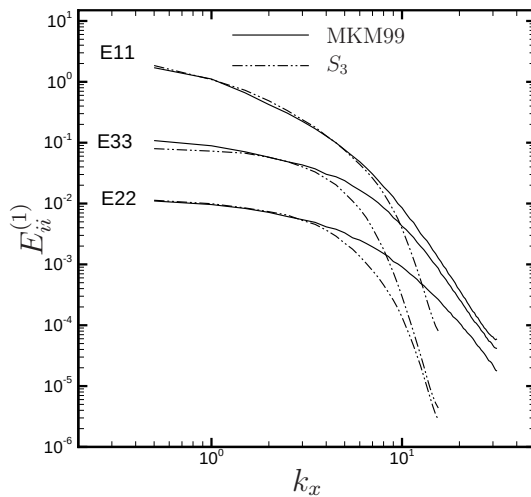


FIGURE 2.32 – Spectres d'énergie suivant la direction longitudinale à $y^+ = 10$. Comparaison simulation S_3 et MKM99.

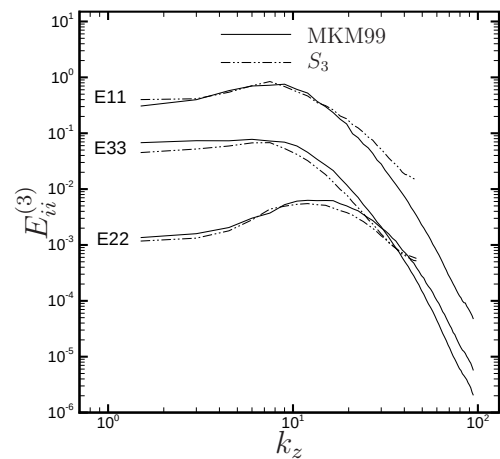


FIGURE 2.33 – Spectres d'énergie suivant la direction transversale à $y^+ = 10$. Comparaison simulation S_3 et MKM99.

$y^+ = 10$ suivant les deux directions homogènes $\mathbf{e}_x$ et $\mathbf{e}_z$. Nous comparons sur ces figures nos résultats obtenus pour la simulation S_3 et les résultats de référence issus de MKM 99. Ces figures confirment que la coupure effectuée par le processus de filtrage est située dans la zone inertielle du spectre et que la résolution utilisée est suffisante pour décrire les différentes zones de cascade d'énergie. Les figures 2.34 et 2.35 représentent pour S_3 les spectres d'énergie dans la direction longitudinale en deux points de l'écoulement : le premier est situé en proximité de la paroi ($y^+ = 10$) et le second est situé près du centre

du canal ($y^+ = 172$). Quant à elles, les figures 2.36 et 2.37 représentent toujours pour S_3 les spectres d'énergie cinétique dans la direction transversale aux mêmes points que précédemment. D'après ces figures, on constate que le phénomène de cascade d'énergie à travers la zone inertielle se déroule d'une manière un peu plus rapide au centre du canal qu'en zone de proche paroi. En effet, on constate une descente rapide de l'asymptote des spectres loin de la paroi, ce qui indique qu'ils sont infectés par des erreurs de troncature qui finissent par introduire une dissipation numérique au niveau des grands nombres d'ondes. Ces erreurs sont beaucoup plus importantes dans la zone loin de la paroi où le maillage est plus grossier.

2.5.7 Structures cohérentes

Le sens à donner aux mots "structures cohérentes" reste encore de nos jours sujet à discussion. De nombreux critères existent déjà dans la communauté (Bonnet et Delville, 2002, pour une revue) et d'autres apparaissent régulièrement dans la littérature (Green *et al.*, 2007, par exemple). Les critères les plus simples à mettre en œuvre consistent à représenter des lignes de courant de l'écoulement et des isovaleurs de pression ou de module de vortacité³⁶ (Lamballais et Bonnet, 2003). D'autres types de critères de détection reposent sur le tenseur des gradients de vitesse A défini par

$$A_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad (2.75)$$

et sur ses invariants. Le polynôme caractéristique du tenseur des gradients de vitesse est donné par :

$$\lambda^3 + P\lambda^2 + Q\lambda + R = 0 \quad (2.76)$$

où les trois invariants P , Q et R sont définis comme

$$\begin{aligned} P &= -\text{tr}(A) = -A_{ii}, \\ Q &= \frac{1}{2} (P^2 - \text{tr}(A^2)) = \frac{1}{2} (P^2 - A_{ij}A_{ji}), \\ R &= -\det(A) = -\frac{1}{3} (P^3 + A_{ik}A_{kn}A_{ni}). \end{aligned}$$

Pour un écoulement incompressible, l'équation de continuité impose que $P = 0$. On aura donc pour le second invariant de A :

$$Q = -\frac{1}{2} A_{ij}A_{ji} = -\frac{1}{2} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i^2}{\partial x_i^2} - \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right).$$

36. La vortacité n'est pas adaptée pour des écoulements de paroi. En effet, le cisaillement présent à la paroi fait que la vortacité y est maximale dans une région où aucun tourbillon ne peut exister.

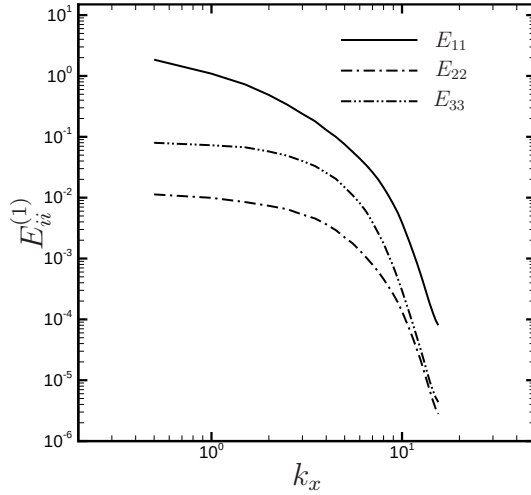


FIGURE 2.34 – Spectres d'énergie suivant la direction longitudinale à $y^+ = 10$ (simulation S_3).

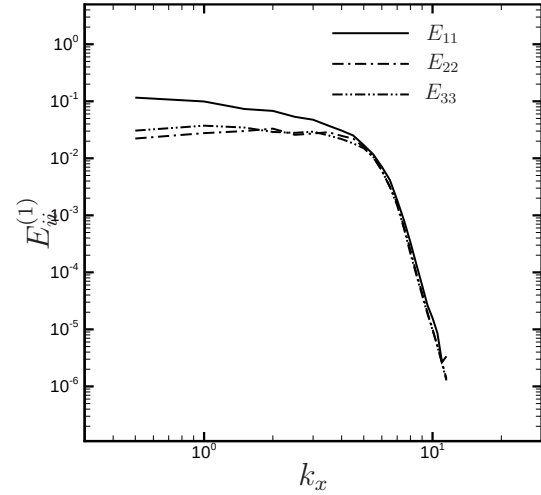


FIGURE 2.35 – Spectres d'énergie suivant la direction longitudinale à $y^+ = 172$ (simulation S_3).

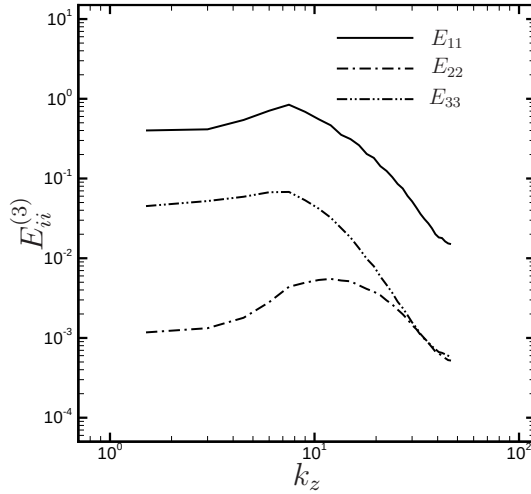


FIGURE 2.36 – Spectres d'énergie suivant la direction transversale à $y^+ = 10$ (simulation S_3).

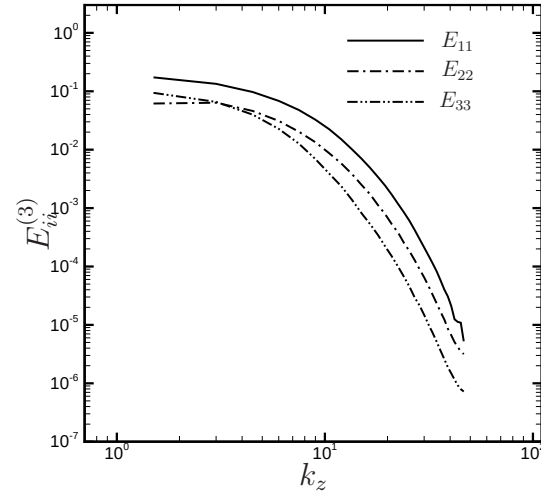


FIGURE 2.37 – Spectres d'énergie suivant la direction transversale à $y^+ = 172$ (simulation S_3).

Nous allons maintenant présenter brièvement les principaux critères utilisés pour visualiser les structures cohérentes au sein d'un écoulement turbulent.

1. Critère Q

Une première méthode d'identification de structures cohérentes est la visualisation des régions positives du second invariant Q du tenseur des gradients de vitesse A_{ij} (Hunt *et al.*, 1988). La valeur de Q est donnée par

$$Q = \frac{1}{2} (\|\Omega\|^2 - \|S\|^2), \quad (2.77)$$

où $\|\Omega\| = \sqrt{\Omega_{ij}\Omega_{ij}}$ et $\|S\| = \sqrt{S_{ij}S_{ij}}$. S et Ω sont respectivement les parties symétriques et anti-symétriques du tenseur A , soit

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad \text{et} \quad \Omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right).$$

Q est relié à la norme de la vorticité $\|\omega\|$ et au laplacien de la pression. En effet, on peut montrer de manière analytique que :

$$\begin{aligned} Q &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \|\omega\|^2 - S_{ij}S_{ij} \right) = -\frac{1}{2} \left(S_{ij} + \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \omega_k \right) \left(S_{ij} + \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \omega_k \right) \\ &= -\frac{1}{2} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_i} \left[u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right] = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} [u_i u_j] = \frac{1}{2\rho} \nabla^2 p \end{aligned}$$

où ϵ_{ijk} est le symbole de Levi-Civita³⁷.

D'après (2.77), on aura une valeur positive de Q dans une région où l'énergie associée à la rotation est supérieure à celle liée à la contrainte de cisaillement. On peut montrer que contrairement au module de la vorticité, $Q = 0$ à la paroi.

2. Critère λ_2

Ce critère a été introduit par Jeong et Hussain (1995) afin de corriger l'incohérence que l'on peut rencontrer en définissant un cœur de tourbillon par des minima de pression. Selon ces auteurs, ces incohérences seraient provoquées par deux phénomènes : (i) le taux de déformation instationnaire, qui peut créer un minimum de pression en l'absence d'un tourbillon, et (ii) les effets visqueux, qui peuvent éliminer le minimum de pression dans un tourbillon.

37. Le symbole de Levi-Civita est défini de la manière suivante :

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{si } (i, j, k) \text{ est } (1, 2, 3), (2, 3, 1) \text{ ou } (3, 1, 2), \\ -1 & \text{si } (i, j, k) \text{ est } (3, 2, 1), (1, 3, 2) \text{ ou } (2, 1, 3), \\ 0 & \text{si } i = j \text{ ou } j = k \text{ ou } k = i. \end{cases}$$

L'hessien de la pression ($\partial^2 p / \partial x_i \partial x_j$) peut contenir des informations sur les minima locaux de pression. Nous allons donc commencer par évaluer une équation pour cette quantité. Pour cela, appliquons l'opérateur de gradient à l'équation de Navier-Stokes, il vient alors :

$$\underbrace{\frac{DS_{ij}}{Dt} + [\Omega_{ik} \Omega_{kj} + S_{ik} S_{kj}]}_{\text{symétrique}} + \underbrace{\frac{D\Omega_{ij}}{Dt} + [\Omega_{ik} S_{kj} + S_{ik} \Omega_{kj}]}_{\text{anti-symétrique}} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 p}{\partial x_i \partial x_j} + \nu \frac{\partial^3 u_i}{\partial x_i \partial x_k \partial x_k}. \quad (2.78)$$

La partie symétrique de cette équation s'écrit encore :

$$\frac{DS_{ij}}{Dt} - \nu \frac{\partial^2 S_{ij}}{\partial x_k^2} + [\Omega_{ik} \Omega_{kj} + S_{ik} S_{kj}] = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 p}{\partial x_i \partial x_j}. \quad (2.79)$$

D'après Jeong et Hussain (1995), un minimum local de pression est caractérisé par l'existence de deux valeurs propres positives du tenseur $\partial^2 p / \partial x_i \partial x_j$. Cela revient, en négligeant le taux de déformation instationnaire et le terme de viscosité (les deux premiers termes de (2.79)) à considérer qu'un minimum local de pression est défini par deux valeurs propres négatives du tenseur

$$\Omega_{ik} \Omega_{kj} + S_{ik} S_{kj}. \quad (2.80)$$

Or, ce tenseur est symétrique. Il admet donc trois valeurs propres réelles que l'on peut ordonner de la manière suivante $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3$. Par conséquent, c'est le signe de λ_2 qui caractérise entièrement les zones de pression minimum. Les régions de l'écoulement où $\lambda_2 < 0$ sont donc associées à des cœurs de tourbillon.

Les critères Q et λ_2 peuvent être rapprochés. En effet, on peut montrer (Jeong et Hussain, 1995, page 77) que :

$$Q = -\frac{1}{2} \text{tr} (\Omega_{ik} \Omega_{kj} + S_{ik} S_{kj}) = -\frac{1}{2} (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3).$$

Le tableau 2.4 montre de manière claire que les deux critères peuvent ne pas être équivalents. Cependant, une étude par Dubief et Delcayre (2000) a montré que l'utilisation du critère λ_2 donne des résultats semblables à ceux obtenus à partir de Q pour un écoulement de canal.

3. Critère $\mathcal{D}$

En 1990, Chong *et al.* ont procédé à la classification de la topologie des lignes de courant en tout point de l'écoulement en se plaçant dans un repère mobile lié au

TABLE 2.4 – Comparaison pour différents triplets de valeurs propres du hessien de pression des critères Q et λ_2 . On note "CT" dans le tableau lorsque un cœur de tourbillon a été détecté par le critère ; rien sinon.

λ_1	λ_2	λ_3	$\sum_i \lambda_i$	$\lambda_2 < 0$	$Q > 0$
+	-	-	-	CT	CT
+	-	-	+	CT	
+	+	-	-		CT
+	+	+	+		

point. Leur démarche consiste à classer les points critiques en fonction du type³⁸ des valeurs propres de l'équation caractéristique (2.76). Les solutions de l'équation caractéristique dépendent du signe du discriminant³⁹ :

$$\mathfrak{D} = -\Delta = 27 R^2 + 4 Q^3.$$

Dans le plan (R, Q) , l'équation $\mathfrak{D} = 0$ définit les frontières qui séparent les régions de l'espace avec des solutions complexes ($\mathfrak{D} > 0$), de celles avec des solutions toutes réelles ($\mathfrak{D} < 0$). Selon Chong *et al.* (1990), les cœurs des tourbillons correspondent à des régions de valeurs propres complexes⁴⁰ *i.e.* $\mathfrak{D} > 0$. Une expression équivalente, souvent rencontrée dans la littérature, est de rechercher les zones où :

$$\mathcal{D} = \frac{\mathfrak{D}}{4} = \frac{27}{4} R^2 + Q^3 > 0.$$

Pour visualiser les contours des structures cohérentes au sein de l'écoulement, nous avons fait le même choix que dans Bewley *et al.* (2001) et adopté le critère $\mathcal{D}$. Cependant, choisir une méthode d'identification des structures cohérentes n'est pas suffisant avec les critères discutés précédemment. En effet, lors de la visualisation d'isosurfaces pour un critère donné, un deuxième problème se pose : le choix de la valeur du seuil (Dubief et Delcayre, 2000, par exemple). Si le seuil choisi est trop faible, les structures cohérentes

38. Selon les valeurs des invariants P , Q et R , les valeurs propres peuvent être : (i) toutes réelles et distinctes ($\Delta > 0$), (ii) toutes réelles dont au moins deux égales ($\Delta = 0$), (iii) une réelle et une paire de valeurs propres complexes conjuguées ($\Delta < 0$).

39. On rappelle que pour le polynôme $P(x) = x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3$, le déterminant est $\Delta = 18 a_1 a_2 a_3 + a_1^2 a_2^2 - 4 a_2^3 - 4 a_1^3 a_3 - 27 a_3^2$. On obtient donc pour (2.76) :

$$\Delta = -27 R^2 + P R (-4 P^2 + 18 Q) + Q^2 P^2 - 4 Q^3$$

d'où $\Delta = -27 R^2 - 4 Q^3$ en supposant $P = 0$ (incompressibilité). Or, l'usage fait que l'on considère plutôt $\mathfrak{D} = -\Delta$ pour discuter des structures cohérentes.

40. Pour les points critiques, les valeurs propres complexes correspondent à des lignes de courant en spirale ou fermées.

peuvent être masquées par l'écoulement ambiant. En augmentant ce seuil, le nombre de structures observables va diminuer. Le seuil doit donc être choisi empiriquement sur des critères subjectifs. A titre d'illustration, la figure 2.38 représente les régions de l'écoulement où le discriminant $\mathcal{D} > \mathcal{D}_{\text{seuil}}$ avec $\mathcal{D}_{\text{seuil}} = 5 \times 10^{-5}$.

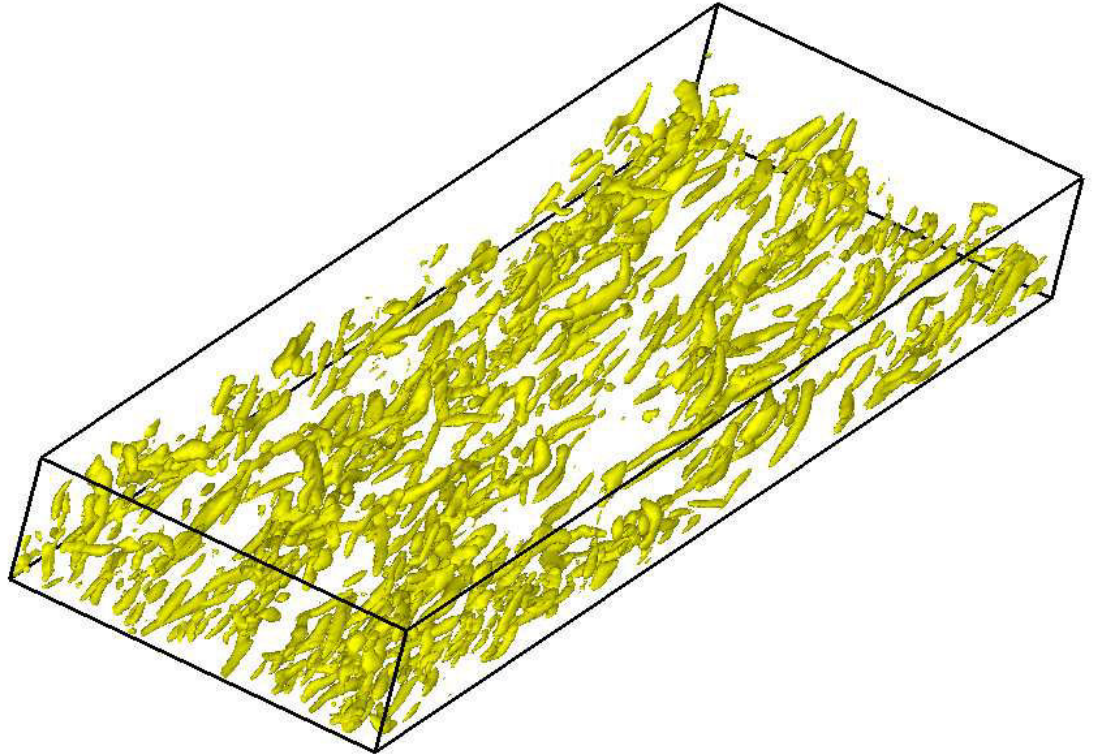


FIGURE 2.38 – Visualisation pour la simulation S_1 des structures cohérentes par le critère $\mathcal{D}$. Les régions de l'écoulement où le critère $\mathcal{D} > \mathcal{D}_{\text{seuil}}$ avec $\mathcal{D}_{\text{seuil}} = 5 \times 10^{-5}$ sont représentées. L'écoulement va de la gauche vers la droite.

2.6 Conclusion

L'écoulement de canal turbulent est très bien résolu par la simulation S_1 réalisée en DNS. Cela est prouvé par la précision de nos statistiques qui sont en très bon accord avec les statistiques issues de KMM87 et MKM99. Les simulations réalisées en utilisant le modèle LES produisent elles aussi des statistiques globalement en bon accord avec les statistiques obtenues par DNS. Le raffinement du maillage associé au cas S_2 améliore nettement l'ordre

de précision des statistiques. Cela montre que nos simulations LES résolvent d'une manière correcte l'écoulement de canal turbulent avec un maillage environ 15 fois plus faible pour S_3 que celui de la simulation DNS.

On peut donc conclure sur l'efficacité de la simulation LES à jouer le rôle d'un modèle réduit de l'écoulement capable de reproduire la dynamique d'un écoulement de canal en régime turbulent. Cette conclusion nous encourage donc à utiliser ce modèle comme une équation d'état gouvernant l'écoulement pour la mise en œuvre de méthodes de contrôle du type contrôle par opposition (chapitre 3) et contrôle optimal (chapitre 5).

Chapitre 3

Contrôle par opposition

Sommaire

3.1 Généralités	79
3.1.1 Principe du contrôle par opposition	79
3.1.2 Mise en œuvre par DNS	80
3.1.3 Discussions	81
3.2 Résultats de contrôle par opposition obtenus par LES .	85
3.2.1 Paramètres des simulations	85
3.2.2 Influence de la position du plan de détection	86
3.2.3 Influence du nombre de Reynolds	89
3.2.4 Efficacité énergétique	95
3.3 Conclusion	96

Les objectifs principaux de ce chapitre sont doubles. Le premier est de démontrer la capacité des outils numériques présentés au chapitre 2 à décrire de manière correcte la dynamique contrôlée d'un écoulement de proche paroi. Le second est d'utiliser au chapitre 5 les résultats du contrôle par opposition comme référence afin de mesurer l'intérêt du contrôle optimal pour le contrôle des écoulements.

3.1 Généralités

3.1.1 Principe du contrôle par opposition

Dans le cas de l'écoulement de canal, une des stratégies de contrôle actif les plus simples à mettre en œuvre est le contrôle dit par opposition. Cette technique a été appliquée pour la première fois par Choi *et al.* (1994) dans le cas d'une simulation DNS. L'idée consiste à imposer à la paroi une vitesse normale de soufflage/aspiration déterminée de

manière instationnaire comme l'opposé de la vitesse normale¹ mesurée dans un plan de détection situé à une distance y_d^+ de la paroi (voir figure 3.1). Pour cette raison, le contrôle par opposition est parfois qualifié de contrôle en boucle fermée, en particulier dans la littérature anglo-saxonne. Cette appellation est sujette à discussion car si le contrôle est effectivement basé sur une mesure de l'écoulement, il n'y a pas dans ce cas particulier de phase d'estimation.

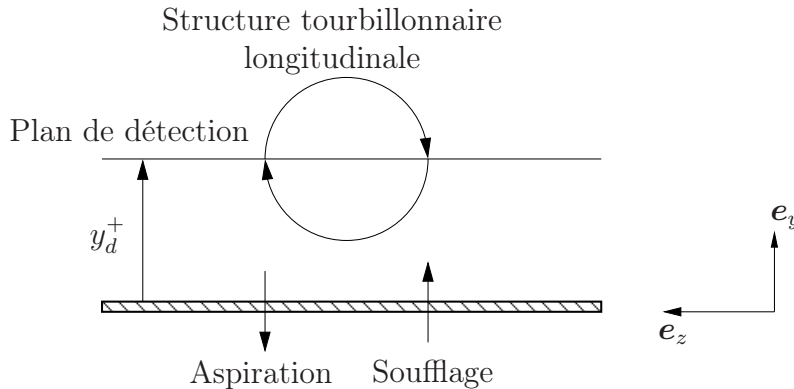


FIGURE 3.1 – Principe schématique du contrôle par opposition.

D'un point de vue physique, cette stratégie de contrôle exploite la présence en proche paroi de tourbillons longitudinaux contra-rotatifs dont le centre est situé en moyenne à $y^+ \simeq 20$ (Robinson, 1991, par exemple). Ces tourbillons agissent directement sur le transport de la quantité de mouvement dans la zone de paroi. En effet, ils apportent à proximité de celle-ci du fluide de haute vitesse issu du centre du canal (phase de balayage) et, de manière symétrique, entraînent au centre du canal du fluide de faible vitesse issu des parois (phase d'éjection). De cette manière, ces structures interviennent directement dans le cycle de production de la turbulence et jouent un rôle important sur la traînée de paroi. En essayant de s'opposer à ces structures longitudinales, le contrôle devrait diminuer le transfert vertical de la quantité de mouvement vers la paroi et ainsi réduire la force de traînée exercée.

3.1.2 Mise en œuvre par DNS

Dans les simulations DNS réalisées à $Re_\tau = 180$ par Choi *et al.* (1994), 20% de réduction de traînée ont été obtenus en positionnant le plan de détection à $y_d^+ = 10$. Plus récemment, Hammond *et al.* (1998) ont obtenu dans des conditions similaires (DNS et même valeur du

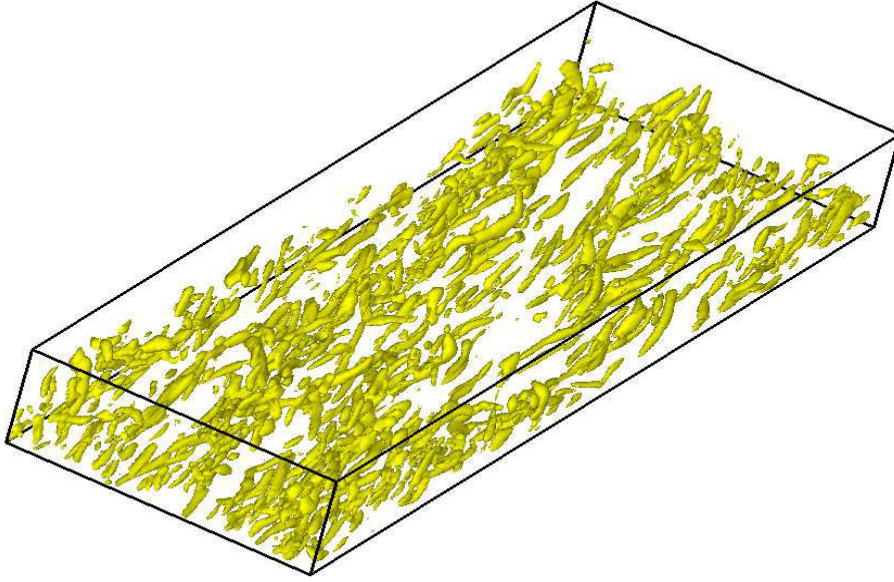
1. On trouve également dans Choi *et al.* (1994) des tests numériques réalisés avec la composante transversale de vitesse. Il s'avère que la réduction de traînée est plus importante dans le cas de la composante normale et c'est donc ce cas qui est maintenant considéré dans la littérature.

nombre de Reynolds) 25% de réduction en choisissant de prendre $y_d^+ = 15$. Afin d'étudier l'influence du contrôle par opposition d'un point de vue de l'organisation structurale de proche paroi, nous avons d'abord réalisé des calculs par DNS. Ces simulations ont été menées avec la configuration S_1 décrite dans le tableau 2.1 et en plaçant le plan de détection à $y_d^+ = 14,56$. Sur la figure 3.2, nous comparons les structures cohérentes de proche paroi obtenues d'une part en écoulement non contrôlé (figure 3.2(a)) et d'autre part en écoulement contrôlé par opposition (figure 3.2(b)). Clairement, l'activité cohérente en proche paroi est fortement réduite lorsque le contrôle est appliqué. Ces résultats sont d'ailleurs confirmés par la figure 3.3 sur laquelle sont représentées les isovaleurs de la vorticité longitudinale ($\omega_x = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}$) en écoulement non contrôlé (figure 3.3(a)) et contrôlé (figure 3.3(b)). Dans le cas contrôlé, on constate en effet une très forte diminution de la concentration des contours de vorticité. Finalement, sur la figure 3.4, nous avons représenté l'évolution temporelle de la traînée totale moyenne qui correspond au contrôle par opposition pour $y_d^+ = 14,56$. On obtient environ 26% de réduction de traînée lorsque la dynamique est en régime établi.

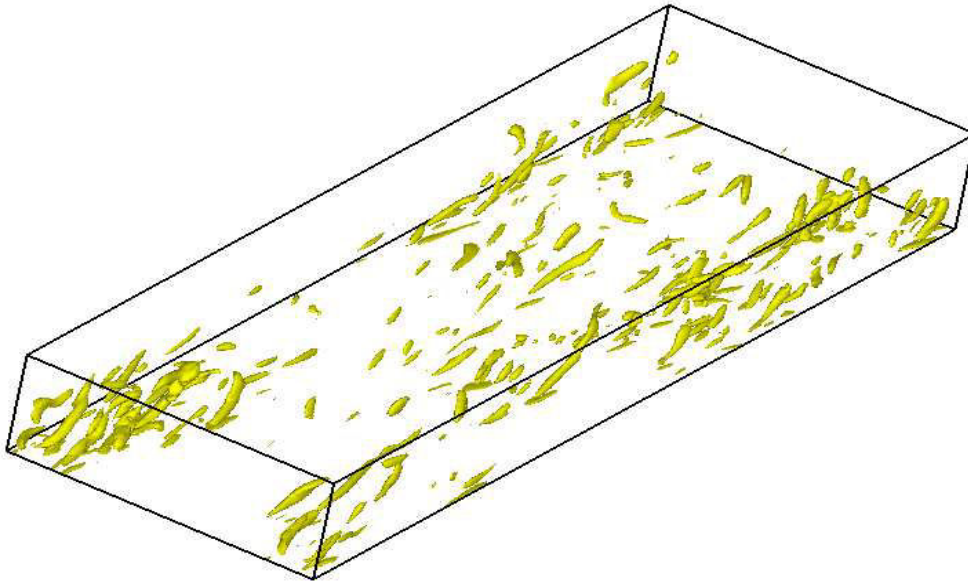
3.1.3 Discussions

Un des inconvénients majeurs pour l'applicabilité du contrôle par opposition est la nécessité de connaître de manière instantanée la vitesse normale sur le plan de détection. Cette contrainte limite les applications du contrôle par opposition aux simulations numériques. Pour s'en affranchir, des travaux spécifiques ont été engagés dès l'introduction de cette stratégie de contrôle (Choi *et al.*, 1994). Depuis, ces travaux n'ont jamais réellement cessé (Vodinh Lorang *et al.*, 2008). Dans tous les cas, l'objectif est d'estimer la composante normale de vitesse sur le plan de détection à partir d'informations connues en paroi. Pour estimer la composante de vitesse normale sur le plan de détection, Choi *et al.* (1994) ont analysé les corrélations entre celle-ci et des quantités mesurables à la paroi (pression, gradient longitudinal de vitesse, développement de Taylor de la composante normale de la vitesse à la paroi). Dans le meilleur des cas, ils ont obtenu seulement 6% de réduction de traînée, soit une valeur comparable à celle obtenue par contrôle passif. Dernièrement, Vodinh Lorang *et al.* (2008) ont développé une approche de type réseau de neurones pour estimer la vitesse normale dans le plan de détection à partir d'informations prises en paroi du canal. Au mieux, cette approche a conduit à 13% de réduction de traînée.

La majorité des travaux sur le contrôle par opposition a été réalisé par DNS pour des nombres de Reynolds modérés. Par ailleurs, ces travaux se sont plutôt concentrés sur

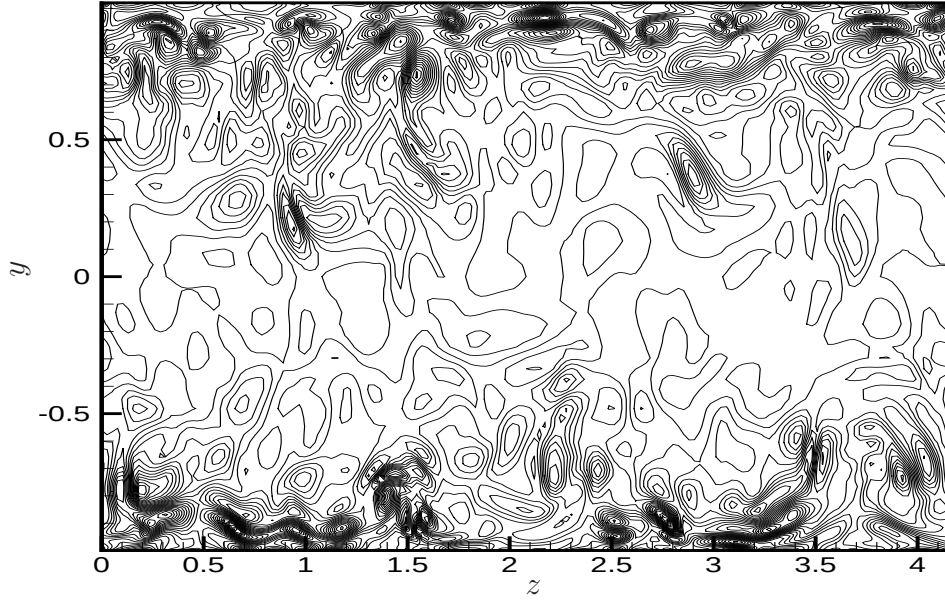


(a) Écoulement non contrôlé.

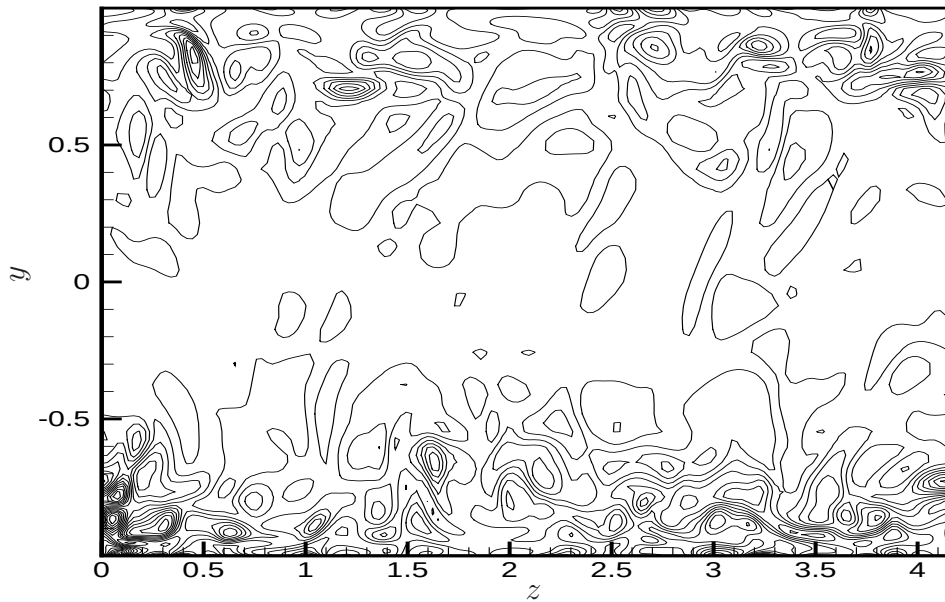


(b) Contrôle par opposition.

FIGURE 3.2 – Visualisation des structures cohérentes obtenues à $Re_\tau = 180$ par DNS (configuration S_1). On compare l'écoulement non contrôlé (a) à l'écoulement associé au contrôle par opposition (b) lorsque $y_d^+ = 14,56$. Les structures cohérentes sont repérées par le critère $\mathcal{D}$ avec $\mathcal{D}_{\text{seuil}} = 5 \times 10^{-5}$.



(a) Écoulement non contrôlé.



(b) Contrôle par opposition.

FIGURE 3.3 – Isovaleurs de la vorticité longitudinale ω_x obtenues à $Re_\tau = 180$ par DNS (configuration S_1). On compare l'écoulement non contrôlé (a) à l'écoulement associé au contrôle par opposition (b) lorsque $y_d^+ = 14, 56$. Les mêmes isovaleurs sont utilisées dans les deux cas.

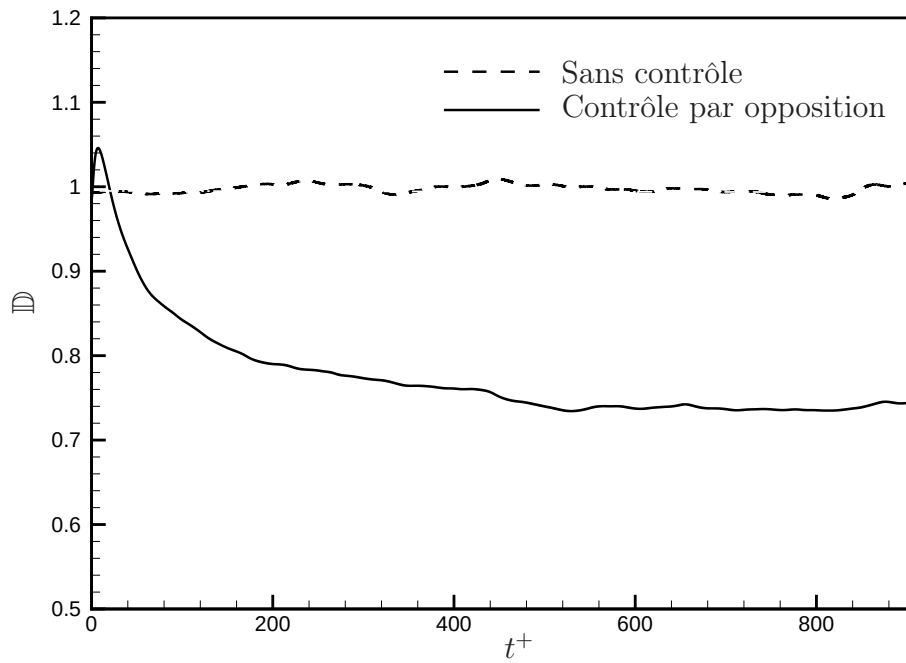


FIGURE 3.4 – Evolutions temporelles de la traînée totale moyenne obtenues par DNS à $Re_\tau = 180$. Comparaisons des cas sans contrôle et contrôle par opposition avec $y_d^+ = 14, 56$.

la compréhension des mécanismes physiques mis en jeu par le contrôle dans la zone de proche paroi. Afin d'étendre cette stratégie à des nombres de Reynolds plus importants et éventuellement à des géométries d'écoulement plus complexes, il convient d'avoir recours à des modèles réduits des équations de Navier-Stokes. Un choix naturel consiste à utiliser la simulation aux grandes échelles. C'est précisément la voie initialement suivie par Chang *et al.* (2002) pour un écoulement de canal et l'approche également retenue dans ce mémoire.

3.2 Résultats de contrôle par opposition obtenus par LES

Dans cette section, nous allons présenter des résultats de contrôle par opposition obtenus par LES pour différents nombres de Reynolds et plusieurs positions du plan de détection. L'objectif initial est d'évaluer la capacité du code de simulation numérique présenté au chapitre 2 à représenter correctement la dynamique du canal associée au contrôle par soufflage/aspiration aux parois. Nous étudierons d'abord l'influence de la position du plan de détection sur le contrôle pour $Re_\tau = 180$ (voir section 3.2.2). Ensuite, nous analyserons en terme de réduction de traînée l'influence du nombre de Reynolds Re_τ lorsque celui-ci varie sur l'intervalle $[80 : 360]$ (voir section 3.2.3). Pour conclure, nous nous intéresserons à l'efficacité énergétique du contrôle par opposition en fonction du nombre de Reynolds et de la position du plan de détection (voir section 3.2.4).

3.2.1 Paramètres des simulations

Les simulations de contrôle par opposition ont été réalisées avec le code LES présenté au chapitre 2. Pour que l'on puisse comparer les résultats, toutes les simulations utilisent les mêmes conditions initiales lorsque le contrôle est activé. Ces conditions initiales correspondent à des profils de vitesse issus de simulations LES d'écoulement non contrôlé. Le débit volumique est maintenu constant tout au long des simulations à l'aide de la méthode présentée à l'annexe F. Des conditions aux limites de non glissement sont appliquées pour les composantes de vitesse longitudinale et transversale. La composante de vitesse normale aux parois est égale à l'opposé de la vitesse normale sur le plan de détection. Le contrôle est appliqué avec un débit massique nul au niveau des parois du canal. En effet, la contrainte d'incompressibilité impose que $\int_{L_x} \int_{L_z} v(x, y, z) dx dz = 0$ sur les parois supérieure et inférieure du canal.

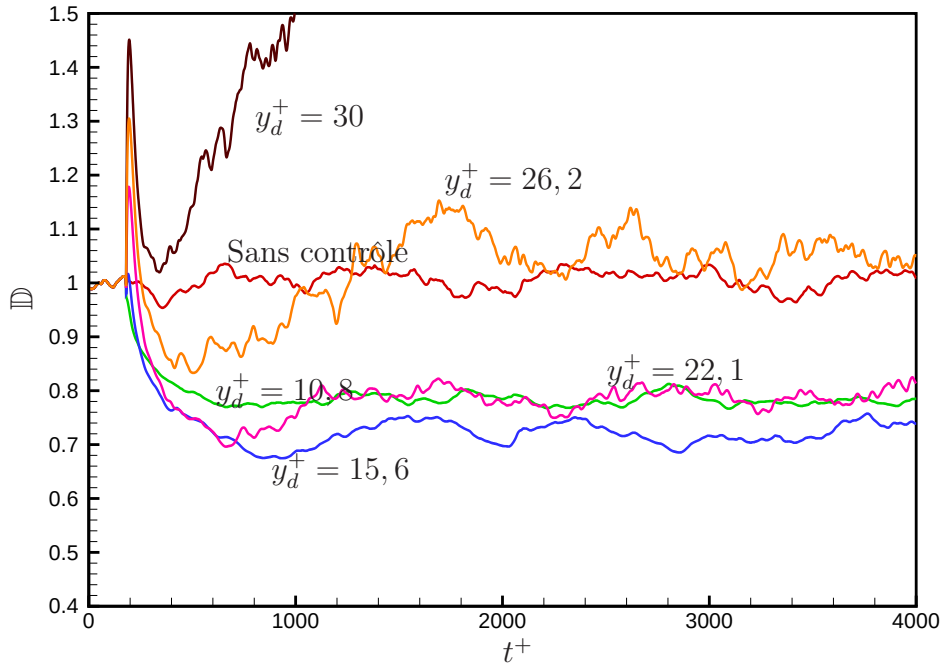
Les simulations de contrôle par opposition sont réalisées pour quatre valeurs de nombre de Reynolds : $Re_\tau = 80, 100, 180, 360$. Les tailles du domaine numérique sont ajustées pour chaque valeur de nombre de Reynolds afin de garantir la résolution de toutes les structures de l'écoulement. Le tableau 3.1 donne pour chaque cas les grandeurs caractéristiques des simulations. Les nombres de Reynolds Re_c et Re_b basés respectivement sur la vitesse au centre du canal et la vitesse débitante correspondent aux écoulements non contrôlés. Pour $Re_\tau = 180$, deux séries de simulations numériques ont été réalisées, ce qui explique que les valeurs des positions du plan de détection ne seront pas toutes identiques entre la section 3.2.2 et les sections suivantes. Enfin, pour $Re_\tau = 80$, 24000 itérations sont réalisées alors que pour les autres valeurs de nombre de Reynolds, seules 16000 itérations sont effectuées. Le tableau 3.1 indique pour chaque valeur de nombre de Reynolds le temps de simulation correspondant T_s^+ .

TABLE 3.1 – Grandeurs caractéristiques des simulations LES d'écoulements contrôlés par opposition.

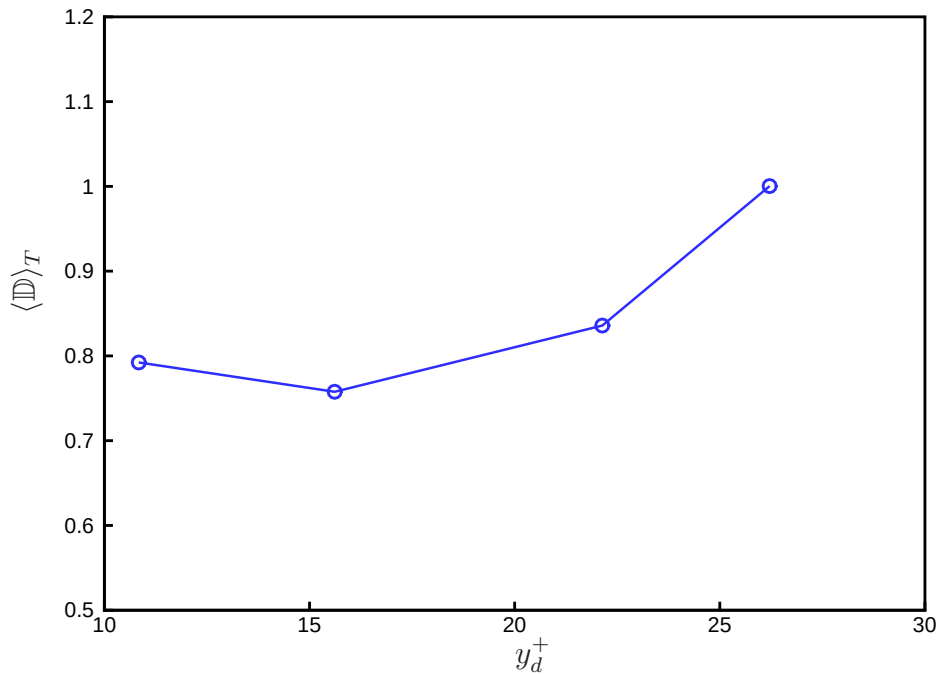
Re_τ	Re_c	Re_b	L_x	L_y	L_z	N_x	N_y	N_z	Δx^+	Δy_w^+	Δz^+	Δt^+	T_s^+
80	1655,2	2612,1	8π	2	3π	64	65	64	31,4	0,11	11,8	0,16	3840
100	1819	3030,3	4π	2	$\frac{4}{3}\pi$	64	65	64	19,6	0,14	6,54	0,20	3200
180	3214,1	5600,2	4π	2	$\frac{4}{3}\pi$	64	65	64	35,3	0,25	11,7	0,36	5760
360	6834,2	12115,9	2π	2	$\frac{3}{4}\pi$	64	97	64	35,3	0,326	13,25	0,72	11520

3.2.2 Influence de la position du plan de détection

Pour $Re_\tau = 180$, nous avons réalisé des simulations de contrôle par opposition pour plusieurs positions du plan de détection ($y_d^+ = 10, 8; 15, 6; 22, 1; 26, 2; 30$). Les évolutions temporelles de la traînée totale moyenne sont représentées sur la figure 3.5(a) et l'évolution de la moyenne temporelle de la traînée totale en fonction de la position du plan de détection est reportée sur la figure 3.5(b). Nous constatons qu'il existe une position du plan de détection, notée par la suite $[y_d^+]_{\max}$, pour laquelle un maximum de réduction de traînée est obtenu. Par ailleurs, lorsque le plan de détection s'éloigne de la paroi au delà de $[y_d^+]_{\max}$, la traînée a tendance à augmenter considérablement. Si nous ne réalisons pas d'interpolation entre les résultats numériques obtenus pour les différentes valeurs de y_d^+ , nous trouvons que $[y_d^+]_{\max} = 15, 6$ pour $Re_\tau = 180$. Cette position du plan de détection correspond à 27% de réduction de traînée par rapport au cas non contrôlé (voir figure 3.6). Cette valeur de



(a) Evolutions temporelles.



(b) Moyenne temporelle.

FIGURE 3.5 – Traînée totale moyenne obtenues par LES à $Re_\tau = 180$ pour un contrôle par opposition. Plusieurs positions du plan de détection y_d^+ sont comparées. Dans ces simulations numériques, le contrôle a été actionné à partir de $t^+ = 200$.

réduction est en parfait accord avec les résultats rapportés dans Hammond *et al.* (1998). En effet, 25% de réduction de traînée avaient alors été obtenus par DNS pour un plan de détection situé à $y_d^+ = 15$.

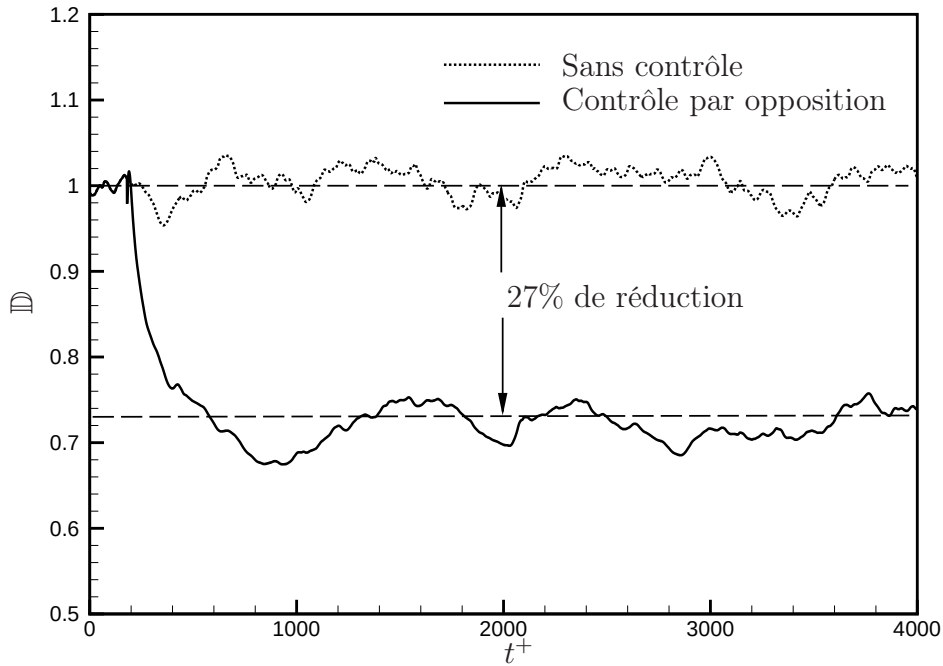


FIGURE 3.6 – Evolutions temporelles de la traînée totale moyenne obtenues par LES à $Re_\tau = 180$. Comparaisons des cas sans contrôle et contrôle par opposition avec $y_d^+ = [y_d^+]_{\max} = 15, 6$.

Le contrôle par opposition contrecarre les phénomènes de balayage et d'éjection présents en proche paroi. D'un point de vue physique, l'action du contrôle peut être vue comme l'introduction d'un mur virtuel situé à une hauteur moitié par rapport à la position du plan de détection. A la surface de ce mur virtuel, les fluctuations de la vitesse normale sont quasiment nulles (voir figure 3.7), ce qui de fait réduit les interactions entre la zone de proche paroi et la partie centrale du canal. Le transfert convectif de la quantité de mouvement à travers ce mur artificiel n'existe plus. Le seul mécanisme qui reste pour assurer le transfert de la quantité de mouvement dans la direction normale est la diffusion visqueuse. Selon Hammond *et al.* (1998), la réduction de traînée engendrée par le contrôle par opposition s'explique par la diminution du transfert vertical de la quantité de mouvement longitudinale près de la paroi.

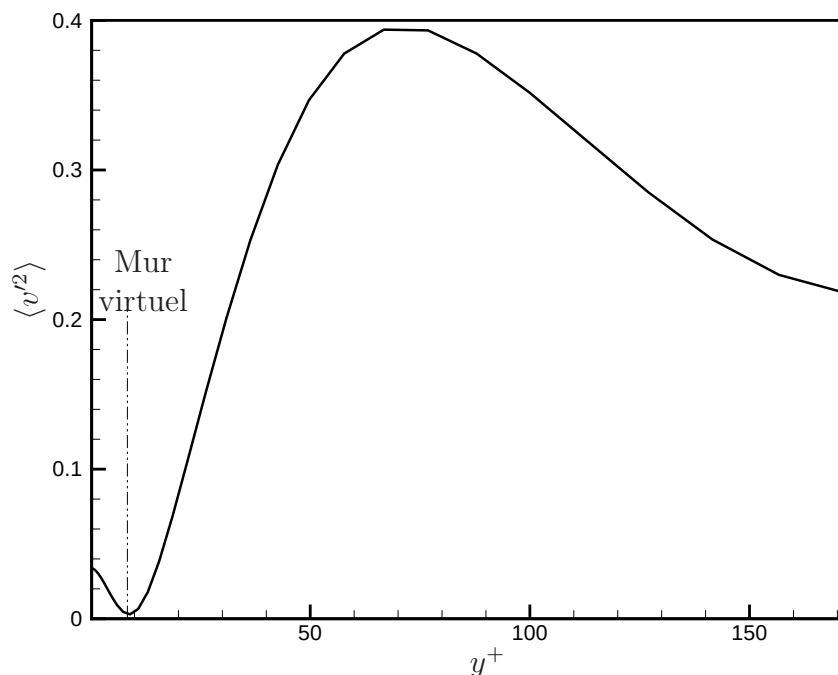


FIGURE 3.7 – Profil de $\langle v'^2 \rangle$ obtenu pour le contrôle par opposition pour $y_d^+ = [y_d^+]_{\max} = 15, 6$. Résultats LES à $Re_\tau = 180$.

3.2.3 Influence du nombre de Reynolds

Afin d'explorer l'influence du nombre de Reynolds sur la stratégie de contrôle par opposition, nous avons réalisé des simulations LES pour quatre valeurs de nombre de Reynolds comprises entre $Re_\tau = 80$ et $Re_\tau = 360$. Pour $Re_\tau = 80$, une seule valeur de position du plan de détection ($y_d^+ = 20, 51$) a été testée car pour cette valeur l'écoulement relaminaise (voir figure 3.9). En supposant que le minimum de traînée que l'on peut obtenir par contrôle correspond à la configuration laminaire, on peut alors considérer en première approximation que pour $Re_\tau = 80$, $y_d^+ = [y_d^+]_{\max} = 20, 51$. Pour les autres valeurs de nombre de Reynolds, quatre valeurs de y_d^+ ont été utilisées. Le tableau 3.2 donne en particulier les valeurs de y_d^+ utilisées pour $Re_\tau = 180$. Comme on peut le voir en comparant avec la figure 3.5, la valeur $y_d^+ = 22, 1$ a ici été remplacée par $y_d^+ = 20, 37$.

La figure 3.8 représente la variation de la traînée totale moyenne en temps en fonction de la position du plan de détection. De manière similaire à ce qui avait déjà été mis en évidence à la section 3.2.2 pour $Re_\tau = 180$, on constate qu'il existe pour chaque valeur du nombre de Reynolds une position du plan de détection pour laquelle la réduction de traînée est maximale. La valeur de $[y_d^+]_{\max}$ est reportée en fonction du nombre de Reynolds Re_τ dans le

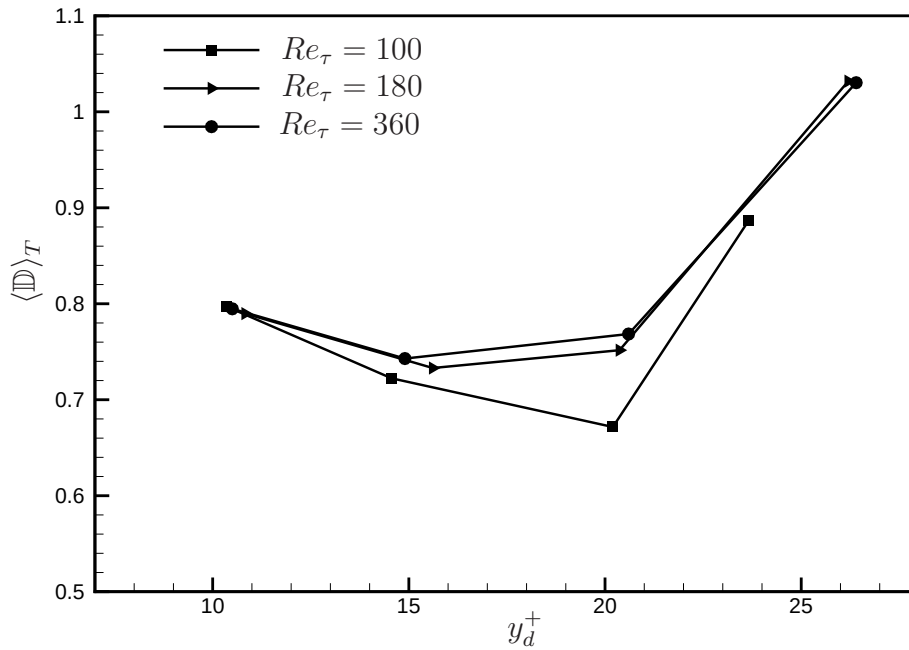


FIGURE 3.8 – Variation de la traînée totale moyenne en temps en fonction de la position du plan de détection y_d^+ . Résultats LES pour différentes valeurs du nombre de Reynolds Re_τ . Le cas $Re_\tau = 80$ n'est pas représenté car pour ce nombre de Reynolds une seule valeur de y_d^+ a été testée.

TABLE 3.2 – Pourcentage de réduction de traînée totale moyenne en temps $\Delta \langle \mathbb{D} \rangle_T$ et efficacité énergétique $\mathcal{P}_\mathbb{D}/\mathcal{P}_{|\Phi|}$ obtenus par contrôle par opposition pour différentes valeurs de y_d^+ . Les simulations sont réalisées par LES pour $Re_\tau = 180$.

y_d^+	$\mathbb{D}$	$\Delta \langle \mathbb{D} \rangle_T$ (en %)	$\mathcal{P}_\mathbb{D}$	$\mathcal{P}_{ \Phi }$	$\mathcal{P}_\mathbb{D}/\mathcal{P}_{ \Phi }$
Sans contrôle	1,0028	-	-	-	-
10,8	0,79	21	353,1	6,83	51,6
15,6	0,73	27	457,05	12,22	37,4
20,37	0,78	22	415,96	20,89	19,9
26,2	1,0003	0,0025	3,37	127	0,027

tableau 3.3. Par ailleurs, la position du plan de détection associée au maximum de réduction de traînée semble correspondre aux régions de production de la turbulence. En effet, on constate sur la figure 3.8 que la position du plan de détection se décale progressivement vers les parois lorsque le nombre de Reynolds augmente. Or, Fischer *et al.* (2001) ont mis en évidence, à partir de bilans énergétiques obtenus par simulations numériques directes d'un écoulement de canal pour des nombres de Reynolds compris entre 100 et 400, que le pic de production de turbulence se décalait vers les parois lorsque le nombre de Reynolds augmentait.

TABLE 3.3 – Valeurs de $[y_d^+]_{\max}$ en fonction du nombre de Reynolds Re_τ .

Re_τ	$[y_d^+]_{\max}$
80	20,51
100	20,2
180	15,6
360	14,94

Les évolutions temporelles de la traînée totale moyenne sont représentées sur la figure 3.9 pour les différents nombres de Reynolds étudiés et cela dans le cas où le plan de détection est positionné en $[y_d^+]_{\max}$. Pour $Re_\tau = 80$, le contrôle a réussi à relaminariser l'écoulement. Jusqu'à 48% de réduction de traînée ont ainsi été obtenus. Pour les valeurs plus grandes du nombre de Reynolds, le contrôle n'a pu parvenir à une relaminarisation de l'écoulement. Cependant, on obtient encore des réductions significatives de traînée moyenne : 32% de réduction pour $Re_\tau = 100$, 27% pour $Re_\tau = 180$, et encore 25% pour $Re_\tau = 360$. Ces résultats mettent en évidence l'influence des effets visqueux sur la réduction de traînée susceptible d'être obtenue par contrôle par opposition. En effet, lorsque le nombre de Reynolds augmente, l'efficacité du contrôle par opposition diminue. On peut visualiser ce comportement de manière encore plus claire sur la figure 3.10 qui représente l'écart à la valeur laminaire de la réduction de traînée maximale calculée pour le contrôle par opposition.

Pour conclure, la figure 3.11 représente pour plusieurs valeurs du nombre de Reynolds les profils de $\langle v'^2 \rangle$ obtenus par le contrôle par opposition lorsque le plan de détection est situé en $[y_d^+]_{\max}$. On constate par comparaison aux résultats issus de simulations non contrôlées que l'action du contrôle par opposition se traduit sous la forme d'un mur virtuel situé approximativement en $[y_d^+]_{\max}/2$. Pour les autres valeurs du nombre de Reynolds,

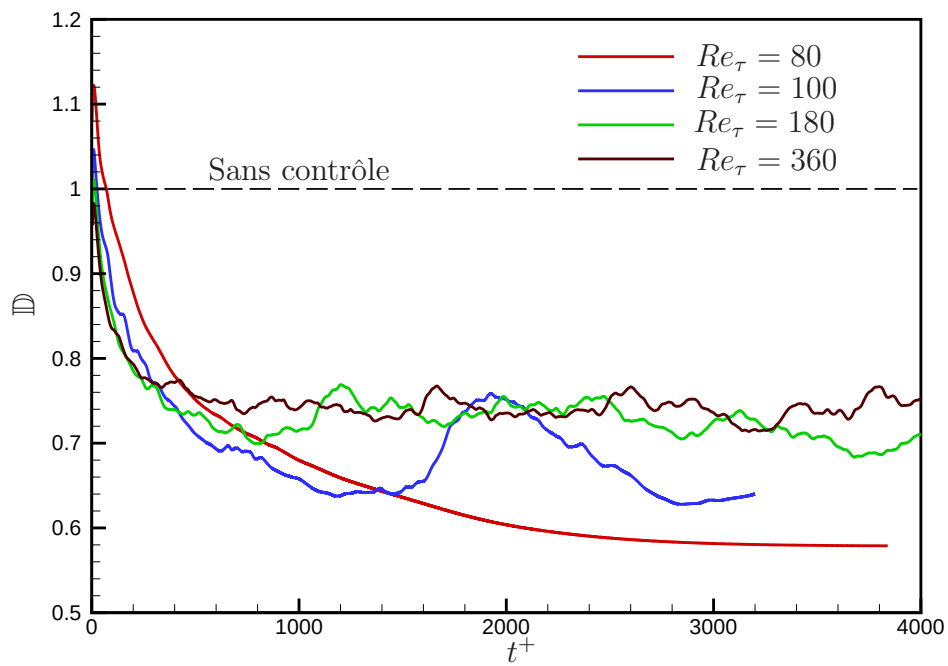


FIGURE 3.9 – Comparaisons des évolutions temporelles de la traînée totale moyenne obtenues par contrôle par opposition pour différentes valeurs du nombre de Reynolds Re_τ . Les simulations sont réalisées par LES pour la position du plan de détection $[y_d^+]_{\max}$ qui correspond au maximum de réduction de traînée.

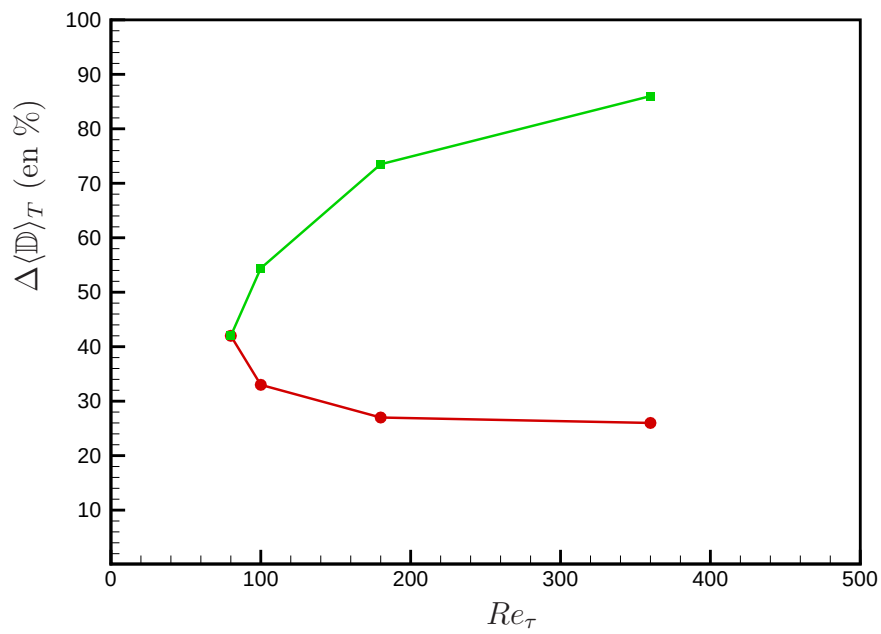


FIGURE 3.10 – Variation du pourcentage de réduction de traînée totale moyenne en temps $\Delta\langle\mathbb{D}\rangle_T$ en fonction de Re_τ . Les symboles ● correspondent à des simulations réalisées par LES pour la position du plan de détection $[y_d^+]_{\max}$ qui correspond au maximum de réduction de traînée. Les symboles ■ sont les valeurs en régime laminaire.

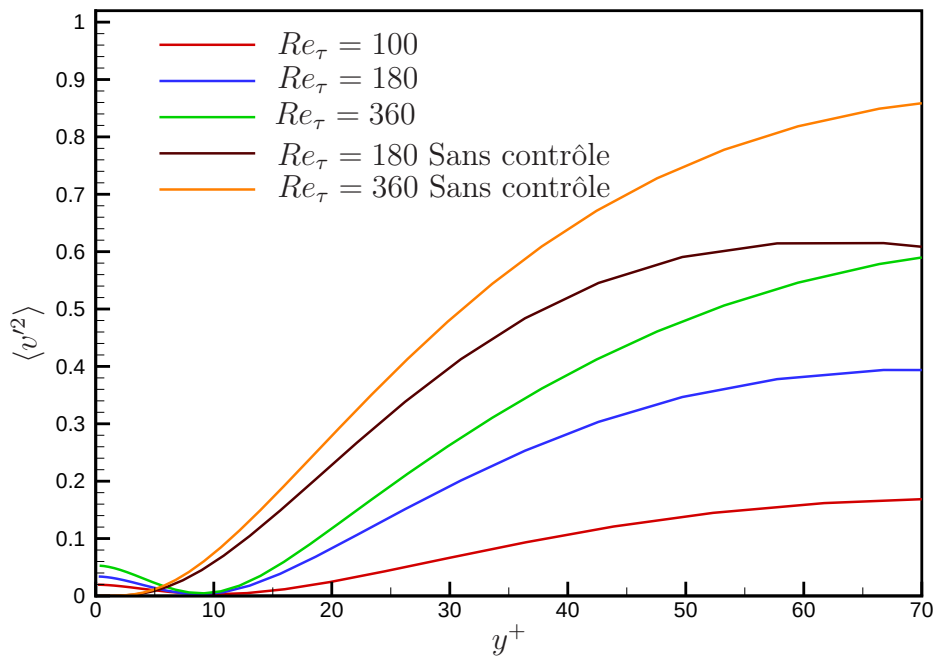


FIGURE 3.11 – Comparaisons des profils de $\langle v'^2 \rangle$ obtenus sans contrôle et pour le contrôle par opposition. Résultats LES pour différentes valeurs du nombre de Reynolds Re_τ . Pour le contrôle par opposition, les simulations sont réalisées pour la position du plan de détection $[y_d^+]_{\max}$ qui correspond au maximum de réduction de traînée.

le comportement est donc similaire à celui qui avait déjà été noté à la section 3.2.2 pour $Re_\tau = 180$.

3.2.4 Efficacité énergétique

Pour évaluer l'efficacité énergétique du contrôle par opposition et donc son intérêt pratique, il faut que la puissance nécessaire à exercer le contrôle $\mathcal{P}_\Phi$ soit plus faible que la puissance économisée par la réduction de traînée $\mathcal{P}_\mathbb{D}$. Or, la puissance dépensée pour le contrôle peut être évaluée (Chang *et al.*, 2002) par la relation :

$$\mathcal{P}_\Phi = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \int_{\Gamma_2^\pm} \Phi \left(\frac{\Phi^2}{2} + P \right) d\Gamma dt \quad (3.1)$$

où $\Gamma_2^\pm$ représente les parois supérieure et inférieure du canal et où $\Phi = -v|_{\Gamma_2^\pm} n_2$ avec n_2 , la normale extérieure. Avec cette définition du contrôle, une valeur positive de Φ correspond à une phase de soufflage dans le canal. Le premier terme de (3.1) représente le flux d'énergie cinétique ajouté ou extrait de l'écoulement du fait des phases de soufflage/aspiration, alors que le second terme décrit la puissance exercée contre la pression sur les parois du canal. Or, il apparait peu vraisemblable que l'on puisse retirer de l'énergie cinétique à l'écoulement par le contrôle. De même, le terme $P\Phi$ n'est pas nécessairement positif. Bewley *et al.* (2001) et Chang *et al.* (2002) ont donc choisi de faire intervenir dans l'estimation de la puissance dépensée pour le contrôle, non plus Φ mais $|\Phi|$. Nous introduisons donc pour évaluer la puissance nécessaire à exercer le contrôle l'expression :

$$\mathcal{P}_{|\Phi|} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \int_{\Gamma_2^\pm} \left(|\Phi| \frac{\Phi^2}{2} + |\Phi| P \right) d\Gamma dt. \quad (3.2)$$

Par ailleurs, la puissance économisée par l'action du contrôle peut être évaluée (Choi *et al.*, 1994; Chang *et al.*, 2002) par la relation :

$$\mathcal{P}_\mathbb{D} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \left[\left(-\frac{\partial P}{\partial x} \Big|_{\text{sc}} + \frac{\partial P}{\partial x} \Big|_{\text{ac}} \right) \int_\Omega u d\Omega \right] dt \quad (3.3)$$

où $\partial P/\partial x|_{\text{sc}}$ et $\partial P/\partial x|_{\text{ac}}$ sont respectivement les gradients de pression dans la direction longitudinale de l'écoulement non contrôlé et contrôlé. Dans (3.3), le terme $\int_\Omega u d\Omega$ correspond à un coefficient prêt au débit volumique Q_v que l'on maintient constant tout au long des simulations (voir annexe F).

Nous avons alors déterminé les puissances $\mathcal{P}_{|\Phi|}$ et $\mathcal{P}_\mathbb{D}$ pour trois valeurs de nombre de Reynolds : $Re_\tau = 100; 180; 360$. Pour cela, nous avons utilisé respectivement les expressions (3.2) et (3.3) avec $t_0 = 0$ et $T = T_s^+$ où T_s^+ est le temps total de simulation (voir

tableau 3.1 pour les valeurs numériques). De cette manière, nous intégrons aussi dans l'estimation des puissances les transitoires liés à l'activation du contrôle. Toutefois, le temps de simulation T_s^+ est suffisamment long pour qu'au final l'effet soit négligeable. La figure 3.12 représente en fonction de la position du plan de détection l'efficacité énergétique définie par le rapport $\mathcal{P}_{\mathbb{D}}/\mathcal{P}_{|\Phi|}$ pour les différentes valeurs de nombre de Reynolds. On constate que l'efficacité énergétique a tendance à décroître lorsque le nombre de Reynolds croît et que le plan de détection s'éloigne de la paroi. Par ailleurs, quelle que soit la valeur du nombre de Reynolds, l'efficacité énergétique maximale se produit pour une position du plan de détection y_d^+ différente (légèrement inférieure en pratique) de celle correspondant au maximum de réduction de traînée $[y_d^+]_{\max}$. Cependant, pour l'ensemble des valeurs de nombre de Reynolds, le rapport $\mathcal{P}_{\mathbb{D}}/\mathcal{P}_{|\Phi|}$ associé au maximum d'efficacité énergétique est suffisamment important pour considérer que l'action du contrôle ne correspond pas à un forçage brutal de l'écoulement. Enfin, pour conclure cette discussion, nous présentons dans le tableau 3.4 l'efficacité énergétique correspondant au maximum de réduction de traînée. On constate que lorsque le nombre de Reynolds augmente, le rapport $\mathcal{P}_{\mathbb{D}}/\mathcal{P}_{|\Phi|}$ a tendance à décroître également pour tendre vers une valeur limite. Ce résultat préliminaire demande toutefois à être consolidé à l'aide de simulations numériques d'écoulements contrôlés réalisées pour des valeurs plus importantes du nombre de Reynolds (Chang *et al.*, 2002).

TABLE 3.4 – Pourcentage de réduction de traînée totale moyenne en temps $\Delta\langle\mathbb{D}\rangle_T$ et efficacité énergétique $\mathcal{P}_{\mathbb{D}}/\mathcal{P}_{|\Phi|}$ obtenus par contrôle par opposition pour plusieurs valeurs du nombre de Reynolds Re_τ . Les simulations sont réalisées par LES pour la position du plan de détection $[y_d^+]_{\max}$ qui correspond au maximum de réduction de traînée.

Re_τ	$\mathbb{D}$	$\Delta\langle\mathbb{D}\rangle_T$ (en %)	$\mathcal{P}_{\mathbb{D}}$	$\mathcal{P}_{ \Phi }$	$\mathcal{P}_{\mathbb{D}}/\mathcal{P}_{ \Phi }$	$[y_d^+]_{\max}$
100	0,67	33	451,0	6,01	75,0	20,2
180	0,73	27	457,05	12,22	37,4	15,6
360	0,74	26	130,6	4,66	28	14,94

3.3 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons analysé en terme de réduction de traînée moyenne et d'efficacité énergétique l'influence de la position du plan de détection y_d^+ et du nombre de Reynolds Re_τ sur une stratégie de contrôle par opposition. Il s'avère que pour un nombre

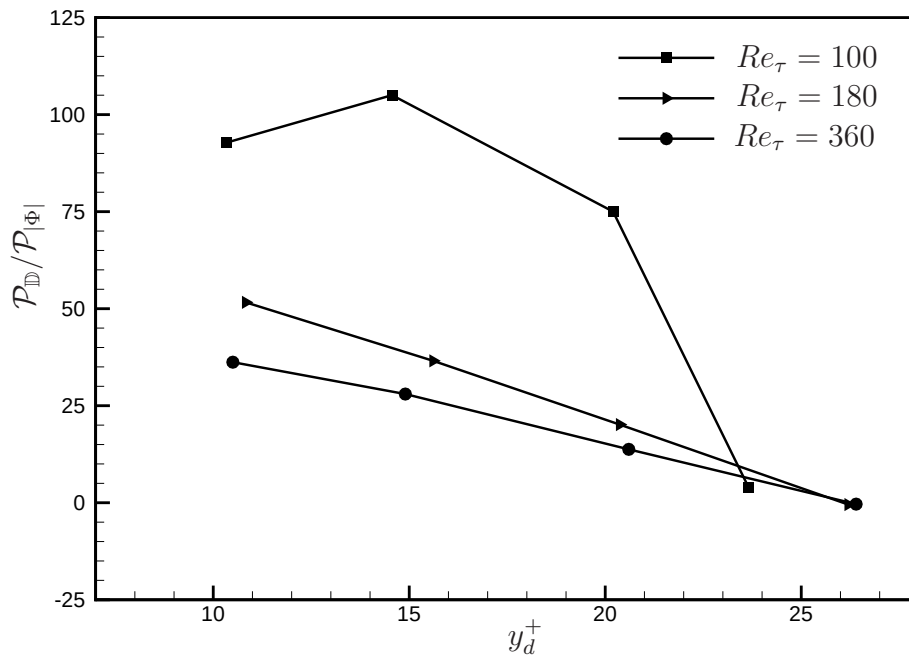


FIGURE 3.12 – Efficacité énergétique $\mathcal{P}_D/\mathcal{P}_{|\Phi|}$ en fonction de la position du plan de détection y_d^+ pour différentes valeurs du nombre de Reynolds Re_τ .

de Reynolds fixé, la position du plan de détection associée au maximum de réduction de traînée semble correspondre aux régions de production de la turbulence. Par ailleurs, nos résultats confirment que la réduction de traînée diminue avec l'augmentation du nombre de Reynolds. En effet, pour $Re_\tau = 80$ la réduction de traînée est égale à 48% et l'écoulement est relaminarisé alors que pour $Re_\tau = 360$ la réduction de traînée n'est que de 25%. Enfin, on constate que l'efficacité énergétique est maximale pour une position du plan de détection différente de celle correspondant au maximum de réduction de traînée.

Ces résultats montrent que la simulation LES présentée au chapitre 2 décrit également de manière satisfaisante la dynamique contrôlée d'un écoulement de proche paroi. En ce sens, le modèle LES pourra donc être utilisé au chapitre 5 comme modèle réduit de l'écoulement dans une procédure de contrôle optimal. En outre, ces résultats de contrôle par opposition seront utilisés à la section 5.6 comme éléments de référence pour analyser l'intérêt du contrôle par opposition pour le contrôle d'écoulement.

Chapitre 4

Théorie du contrôle optimal

Sommaire

4.1	Introduction	99
4.2	Contrôle d'écoulement et optimisation sous contraintes	101
4.2.1	Formulation du problème	101
4.2.2	Discussion sur la fonctionnelle objectif : régularisation du problème d'optimisation	102
4.3	Optimisation non linéaire	103
4.3.1	Méthode des multiplicateurs de Lagrange	103
4.3.2	Approche du gradient par les sensibilités	108
4.3.3	Approche du gradient par l'équation adjointe	109
4.3.4	Résolution numérique : commutativité des étapes de discrétisation et de différentiation	110
4.4	Application à l'équation de Burgers	114
4.4.1	Définition du problème d'optimisation et système optimal	114
4.4.2	Discrétisations spatiale et temporelle	117
4.4.3	Évaluation du nouveau contrôle	119
4.4.4	Résultats pour l'équation de la chaleur et l'équation de Burgers	120

4.1 Introduction

Dans ce mémoire, nous nous intéressons de manière plus particulière aux stratégies de contrôle adaptées aux écoulements en régime turbulent. Pour ce régime, l'hypothèse de petites perturbations classiquement utilisée en stabilité hydrodynamique (Schmid et Henningson, 2001, par exemple) pour linéariser les équations de Navier-Stokes n'est plus valable. L'utilisation de méthodes de contrôle linéaire par feedback dans l'espace des états (Aamo et Fossen, 2002; Kim et Bewley, 2007) n'est donc pas envisageable. Il reste cependant toujours possible de formuler le contrôle d'écoulement comme un problème d'optimisation

et de faire appel aux méthodes d'optimisation non linéaires pour le résoudre (voir § 4.3). Dans cette approche, dite du contrôle optimal, le contrôle d'écoulement est formalisé en terme de minimisation d'une fonctionnelle coût ou fonctionnelle objectif, ce qui présente l'avantage de clairement définir ce que l'on entend par optimisation. C'est précisément la voie suivie à l'origine par Bewley *et al.* (2001) pour contrôler par simulation numérique directe un écoulement de canal turbulent. Depuis, cette approche s'est beaucoup répandue en mécanique des fluides. Citons de manière non exhaustive, les travaux de Protas et Styczek (2002) réalisés pour minimiser la traînée de sillage d'un cylindre circulaire en régime laminaire et, de manière plus récente, ceux de Wei et Freund (2006) dont le but était de réduire le bruit émis par une couche de mélange bidimensionnelle. Dans ce formalisme, la situation est idéalisée car cela revient à considérer que le système physique à contrôler est supposé connu de manière parfaite (observation totale et non bruitée) et ne subit aucune perturbation. La loi de contrôle ainsi déterminée correspondra donc en terme de performance aux meilleurs résultats possibles. En ce sens, le contrôle optimal reste intéressant à étudier car il constitue une solution de référence pour d'autres stratégies de contrôle.

La théorie du contrôle optimal est issue de théorèmes mathématiques (Trélat, 2005) définissant pour une classe de problèmes d'optimisation donnée l'existence et l'unicité de solutions. Pour les équations de Navier-Stokes, des résultats mathématiques pourront être trouvés dans les ouvrages publiés par Borggaard *et al.* (1994); Gunzburger (1995); Sritharan (1998) et dans les articles de Fattorini et Sritharan (1992); Bewley *et al.* (2000a,b). Dans ce chapitre, nous avons choisi de donner une description du contrôle optimal adaptée à des non mathématiciens. Par conséquent, les espaces fonctionnels dans lesquels les problèmes sont posés ne seront jamais donnés.

A la section 4.2, nous définissons le cadre général dans lequel le contrôle d'écoulement peut être interprété comme un problème d'optimisation sous contraintes. Nous y discutons en particulier du choix de la fonctionnelle coût et de la limitation du coût du contrôle qu'il est souvent nécessaire d'imposer pour obtenir un problème bien posé (§4.2.2). Par la suite, la section 4.3 donne une description des méthodes de résolution adaptées aux problèmes d'optimisation non linéaires. Nous conclurons cette section par des commentaires (§4.3.4) sur la commutativité des étapes de discrétisation et de différentiation qu'il est nécessaire de mettre en œuvre d'un point de vue numérique pour minimiser une fonctionnelle. Enfin, pour fixer les idées, la section 4.4 développe, pour un problème modèle constitué par les équations de Burgers monodimensionnelles, les équations du système optimal.

4.2 Contrôle d'écoulement et optimisation sous contraintes

4.2.1 Formulation du problème

Tout problème de contrôle d'écoulement (optimisation de forme, contrôle actif) peut être décrit mathématiquement par les quantités suivantes (Gunzburger, 1997a) :

- *Des variables d'état ϕ* qui définissent les grandeurs caractéristiques du problème. Selon le cas, il pourra s'agir d'un champ de vitesse, de pression, de température ...
- *Des paramètres de contrôle c* . En pratique, selon que le contrôle soit aux frontières ou distribué, ces variables apparaîtront soit comme conditions initiales ou aux limites du problème, soit directement comme terme source dans les équations d'état. Selon le cas, il pourra s'agir d'un champ de vitesse ou d'un flux de température en paroi, ou encore pour un problème d'optimisation de forme (Mohammadi et Pironneau, 2001), ce seront des variables permettant de décrire la forme des frontières du domaine.
- *Une fonctionnelle coût ou objectif $\mathcal{J}$* qui définit les objectifs que l'on souhaite atteindre. Il pourra s'agir de la minimisation d'une traînée, de la maximisation d'une portance ou d'un flux de chaleur, de la stabilisation d'une température, d'un écoulement cible... Cette fonctionnelle $\mathcal{J}$ est fonction des variables d'état ϕ et des paramètres de contrôle c , soit : $\mathcal{J}(\phi, c)$.
- *Des contraintes physiques ($\mathcal{F}$)* qui traduisent l'évolution des variables d'état ϕ en fonction¹ des paramètres de contrôle c en respectant les lois de la physique. Mathématiquement, on note ces contraintes :

$$F(\phi, c) = 0.$$

En mécanique des fluides, elles représentent généralement les équations de Navier-Stokes munies de leurs conditions initiale et aux limites. On verra à la section 4.2.2 qu'une contrainte supplémentaire, traduisant la limitation du coût du contrôle, peut éventuellement leur être ajoutées.

Le problème d'optimisation sous contraintes associé à tout problème de contrôle d'écoulement peut donc s'énoncer de la manière suivante :

Déterminer les variables d'état ϕ et les paramètres de contrôle c , tels que la fonctionnelle objectif $\mathcal{J}$ soit optimale (minimale ou maximale selon le cas) sous les contraintes $\mathcal{F}$.

1. En toute rigueur, il faudrait noter les variables $\phi(c)$ car elles dépendent des variables de contrôle c par l'intermédiaire des contraintes. Cependant, pour alléger les notations, nous noterons les variables uniquement par ϕ .

4.2.2 Discussion sur la fonctionnelle objectif : régularisation du problème d'optimisation

Le choix de la fonctionnelle coût $\mathcal{J}$ est central dans un problème d'optimisation. D'un point de vue mathématique, la grandeur physique à optimiser est représentée à l'aide d'une mesure $\mathcal{M}$ de celle-ci par :

$$\mathcal{J} = \mathcal{M}$$

où $\mathcal{M}$ peut représenter une traînée, une portance, l'énergie d'une perturbation, ... Le choix de cette fonctionnelle, si il peut s'avérer difficile à réaliser, est essentiel en pratique pour que le problème d'optimisation soit bien posé. Par ailleurs, au delà de la difficulté mathématique, on peut imaginer que le contrôle soit d'autant plus facile à mettre en œuvre que la fonctionnelle coût sera basée sur une grandeur pertinente pour la physique du problème.

En général, il n'existe pas de relation explicite entre l'objectif à atteindre et la variable de contrôle. Ceci peut entraîner que le problème d'optimisation soit mal posé et que sa solution soit alors non bornée. Pour résoudre cette difficulté, il faut limiter le coût du contrôle². Soit $\mathcal{M}_c$, une mesure du coût du contrôle, cette limitation peut se faire :

1. En ajoutant une contrainte supplémentaire aux contraintes physiques ($\mathcal{F}$)

Cette contrainte traduit un seuil à ne pas dépasser pour le coût lié au contrôle. Soit $(\mathcal{M}_c)_{max}$ une constante positive arbitraire, cela revient à imposer $\mathcal{M}_c \leq (\mathcal{M}_c)_{max}$. En optimisation, les contraintes d'inégalité font apparaître les conditions d'optimalité dite de Karush-Kuhn-Tucker (Bonnans *et al.*, 2003) qui sont souvent délicates à prendre en compte. On préfère donc généralement retenir des contraintes de type égalité que l'on peut plus facilement imposer via des multiplicateurs de Lagrange (§ 4.3.1). Il suffira donc d'imposer une contrainte supplémentaire du type $\mathcal{M}_c = \mathcal{M}_c^u$ où $\mathcal{M}_c^u > 0$ est un coût imposé par l'utilisateur, pour ne pas avoir à changer la nature du problème d'optimisation à résoudre.

2. En modifiant la fonctionnelle coût $\mathcal{J}$

Une modification possible de la fonctionnelle coût est de considérer que :

$$\mathcal{J} = \mathcal{M} + \ell \mathcal{M}_c$$

2. Notons qu'en dehors d'une justification mathématique, une limitation du coût du contrôle est à favoriser d'un point de vue économique afin de mettre en œuvre pratiquement le contrôle d'écoulement.

où ℓ est une constante réelle positive dont la valeur est fixée par l'utilisateur en fonction de l'importance qu'il souhaite donner au coût du contrôle. Si la valeur du paramètre ℓ est faible alors le coût lié au contrôle n'est pas une priorité dans sa mise en œuvre pratique (faible coût de contrôle). Si au contraire la valeur de ℓ est élevée, alors le coût du contrôle est une priorité (contrôle coûteux à réaliser).

L'approche 1 par contrainte d'inégalité étant plus difficile à mettre en œuvre, on utilisera par la suite une modification de la fonctionnelle $\mathcal{J}$ pour limiter le coût du contrôle. Par ailleurs, cette approche présente l'avantage de faire intervenir de manière naturelle via le paramètre ℓ , un compromis entre l'objectif à atteindre et les moyens mis à disposition pour y parvenir.

4.3 Optimisation non linéaire

Les méthodes actuelles pour résoudre un problème d'optimisation sous contraintes se distinguent en deux classes (Gunzburger, 1997a). La première consiste à transformer le problème d'optimisation avec contraintes en un problème d'optimisation sans contrainte via la méthode des multiplicateurs de Lagrange (section 4.3.1) donnant des conditions d'optimalité du premier ordre. Le contrôle est alors obtenu par résolution d'un système d'équations aux dérivées partielles couplées dit système optimal. La seconde classe de méthodes utilise directement un algorithme d'optimisation (voir fin de la section 4.3.3), ce qui nécessite alors la détermination du gradient de la fonctionnelle objectif, ou au moins d'une approximation de celui-ci. Deux approches peuvent être utilisées pour évaluer ce gradient : l'approche par les sensibilités décrite à la section 4.3.2 et l'approche par l'état adjoint développée à la section 4.3.3.

4.3.1 Méthode des multiplicateurs de Lagrange

Le principe consiste à prendre en compte de manière implicite via des multiplicateurs³ de Lagrange les contraintes du problème. On introduit alors une nouvelle fonctionnelle $\mathcal{L}$, dite fonctionnelle de Lagrange, qui permet de définir un problème d'optimisation sans contrainte. Le bien fondé d'une telle approche peut être rigoureusement démontré à l'aide des théories issues du contrôle optimal (voir Gunzburger, 1997b, pour des éléments de

3. On parle encore de manière abusive de variables adjointes. Une justification sera donnée *a posteriori* au niveau du développement de l'équation adjointe du système optimal.

réponse).

4.3.1.1 Formulation avec prise en compte implicite des contraintes

Soit ξ le vecteur des variables adjointes ou multiplicateurs de Lagrange, on définit une fonctionnelle Lagrangienne $\mathcal{L}$ de la manière suivante :

$$\mathcal{L}(\phi, c, \xi) = \mathcal{J}(\phi, c) - \langle F(\phi, c), \xi \rangle \quad (4.1)$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ représente un produit scalaire dont la définition dépend généralement de la nature du problème. La dimension du vecteur ξ est égale au nombre de contraintes du problème initial. Le nouveau problème d'optimisation sans contrainte s'énonce alors :

Déterminer les variables d'état ϕ , les paramètres de contrôle c et les variables adjointes ξ , tels que la fonctionnelle Lagrangienne $\mathcal{L}$ présente un extremum.

4.3.1.2 Construction du système optimal

La fonctionnelle Lagrangienne $\mathcal{L}$ admet un extremum lorsque $\mathcal{L}$ est rendu stationnaire par rapport à chacun de ses arguments. En effet, le calcul des variations impose alors que $\delta\mathcal{L} = 0$, soit :

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\delta\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial c}\delta c + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\xi}\delta\xi = 0.$$

En supposant par la suite, les variables ϕ , c et ξ indépendantes⁴, les dérivées de Fréchet⁵ de $\mathcal{L}$ doivent être identiquement nulles dans toutes les directions admissibles *i.e.* quelles que soient les variations $\delta\phi$, δc et $\delta\xi$ soit :

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\delta\phi = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial c}\delta c = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\xi}\delta\xi = 0. \quad (4.2)$$

Ces expressions sont une condition nécessaire et suffisante de détermination d'un extremum local de $\mathcal{L}$, en revanche elle ne constitue qu'une condition nécessaire à l'obtention

4. En toute rigueur, cette hypothèse est fautive car en réalité ϕ et c sont liées par l'équation d'état $F(\phi, c) = 0$.

5. Par définition, la dérivée de Fréchet de $\mathcal{L}$ au point x_0 dans la direction δx est donnée par :

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x}\delta x = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\mathcal{L}(x_0 + \epsilon\delta x) - \mathcal{L}(x_0)}{\epsilon} = 0.$$

d'un minimum ou d'un maximum. Ce type de méthode nous assure donc uniquement d'obtenir un extremum local mais non global. On doit donc l'utiliser en gardant à l'esprit qu'il se peut que l'algorithme d'optimisation reste piégé dans un minimum local sans aucun intérêt d'un point de vue physique. Evidemment, il serait préférable d'utiliser des méthodes d'optimisation globale (algorithmes génétiques par exemple) mais celles-ci sont encore trop coûteuses pour qu'elles puissent être utilisées de manière courante en mécanique des fluides.

A partir de la condition (4.2), le système optimal associé au problème est construit en annulant les dérivées de Fréchet successivement dans les directions $\delta\xi$, $\delta\phi$ et δc .

▷ **Direction $\delta\xi$:**

Compte tenu de la définition (4.1) de la fonctionnelle Lagrangienne $\mathcal{L}$, la dérivée de Fréchet de $\mathcal{L}$ dans la direction $\delta\xi$ s'écrit :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \xi} \delta\xi = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\mathcal{J}(\phi, c) - \langle F(\phi, c), \xi + \epsilon \delta\xi \rangle - \mathcal{J}(\phi, c) + \langle F(\phi, c), \xi \rangle}{\epsilon} = 0,$$

soit après simplification,

$$\langle F(\phi, c), \delta\xi \rangle = 0$$

Cette dernière égalité devant être vérifiée quelle que soit $\delta\xi$, on en déduit que

$$F(\phi, c) = 0 \tag{4.3}$$

ce qui correspond aux équations de contraintes du problème d'optimisation.

Ainsi, la dérivation de la fonctionnelle Lagrangienne $\mathcal{L}$ suivant les multiplicateurs de Lagrange redonne les équations de contraintes (**équations d'état**).

▷ **Direction $\delta\phi$:**

Dans ce cas, la dérivée de $\mathcal{L}$ dans la direction $\delta\phi$ s'écrit :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta\phi = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\mathcal{J}(\phi + \epsilon \delta\phi, c) - \langle F(\phi + \epsilon \delta\phi, c), \xi \rangle - \mathcal{J}(\phi, c) + \langle F(\phi, c), \xi \rangle}{\epsilon} = 0.$$

En considérant les développements de Taylor de $\mathcal{J}$ et de F jusqu'à l'ordre $\mathcal{O}(\epsilon)$, la relation précédente devient :

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \phi} \delta\phi - \left\langle \frac{\partial F}{\partial \phi} \delta\phi, \xi \right\rangle + \mathcal{O}(1) \right) = 0$$

soit encore plus simplement

$$\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \phi} \delta \phi - \left\langle \frac{\partial F}{\partial \phi} \delta \phi, \xi \right\rangle = 0$$

On fait alors apparaître dans le premier terme le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$, on trouve alors :

$$\left\langle \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \phi} \delta \phi, 1 \right\rangle - \left\langle \frac{\partial F}{\partial \phi} \delta \phi, \xi \right\rangle = 0$$

soit encore en utilisant les opérateurs adjoints dénotés par $(\cdot)^*$:

$$\left\langle \delta \phi, \left(\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \phi} \right)^* \right\rangle - \left\langle \delta \phi, \left(\frac{\partial F}{\partial \phi} \right)^* \xi \right\rangle = 0$$

Or, cette égalité doit être vérifiée quelle que soit $\delta \phi$, on trouve donc finalement les **équations adjointes** du problème d'optimisation :

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \phi} \right)^* \xi = \left(\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \phi} \right)^* \quad (4.4)$$

Ces équations correspondent aux équations adjointes de l'équation d'état linéarisé autour de l'état. Elles sont donc linéaires par rapport aux variables adjointes, facilitant ainsi leur résolution. Par ailleurs, les multiplicateurs de Lagrange vérifient les équations adjointes des contraintes perturbées par un terme source issu de la fonctionnelle coût ; ceci justifie l'appellation de variables adjointes qu'on leur attribue.

▷ **Direction δc :**

La dérivée de Fréchet de $\mathcal{L}$ dans la direction δc s'écrit :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c} \delta c = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\mathcal{J}(\phi, c + \epsilon \delta c) - \langle F(\phi, c + \epsilon \delta c), \xi \rangle - \mathcal{J}(\phi, c) + \langle F(\phi, c), \xi \rangle}{\epsilon} = 0.$$

Des développements de Taylor de $\mathcal{J}$ et de F jusqu'à l'ordre $\mathcal{O}(\epsilon)$ permettent de déterminer

$$\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial c} \delta c - \left\langle \frac{\partial F}{\partial c} \delta c, \xi \right\rangle = 0$$

soit encore, en faisant apparaître dans le premier terme un produit scalaire

$$\left\langle \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial c} \delta c, 1 \right\rangle - \left\langle \frac{\partial F}{\partial c} \delta c, \xi \right\rangle = 0$$

puis, en introduisant les opérateurs adjoints :

$$\left\langle \delta c, \left(\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial c} \right)^* \right\rangle - \left\langle \delta c, \left(\frac{\partial F}{\partial c} \right)^* \xi \right\rangle = 0.$$

Or, cette égalité doit être vérifiée quelle que soit le terme δc , ce qui permet finalement de déterminer les **conditions d'optimalité** :

$$\left(\frac{\partial F}{\partial c}\right)^* \xi = \left(\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial c}\right)^* \quad (4.5)$$

Ces conditions d'optimalité sont du premier ordre et ne sont vérifiées exactement que lorsqu'un extremum de la fonctionnelle objectif est atteint.

Les conditions nécessaires (4.3), (4.4) et (4.5) forment un système couplé d'équations aux dérivées partielles appelé *système optimal*. Lorsque le système optimal ne comporte pas trop d'inconnues, une méthode de résolution directe dite "one shot method" peut être utilisée pour obtenir sans itération la solution optimale (voir Galletti *et al.*, 2007, par exemple, pour une application à la calibration de modèles réduits POD). Malheureusement, les problèmes d'optimisation en mécanique des fluides comportent beaucoup trop de degrés de liberté (10^7 pour le canal turbulent étudié par simulation numérique directe dans Bewley *et al.* 2001) pour qu'une méthode directe soit utilisée. Il s'avère alors nécessaire d'avoir recours à des méthodes itératives pour lesquelles le contrôle optimal est approché pas à pas jusqu'à convergence. Cette approche est décrite à la section suivante.

4.3.1.3 Résolution numérique par méthode itérative du système optimal

Le système optimal peut être résolu par méthode itérative de la manière suivante. On initialise la résolution avec un contrôle donné $c^{(0)}$. Puis, pour $n = 0, 1, 2, \dots$ et tant qu'un critère de convergence donné n'est pas vérifié, on réalise les phases suivantes :

1. Détermination des variables d'état $\phi^{(n)}$ par résolution de l'équation d'état (4.3)

$$F(\phi^{(n)}, c^{(n)}) = 0.$$

2. Détermination des variables adjointes $\xi^{(n)}$ par résolution de l'équation adjointe (4.4)

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \phi}\right)^{*(n)} \xi^{(n)} = \left(\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \phi}\right)^{*(n)}.$$

3. Détermination de nouveaux paramètres de contrôle $c^{(n+1)}$ par évaluation de la condition d'optimalité (4.5)

$$\left(\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial c}\right)^{*(n)} = \left(\frac{\partial F}{\partial c}\right)^{*(n)} \xi^{(n)}.$$

4. Incrémentation $n = n + 1$ et retour à l'étape 1.

La détermination à l'étape 3 d'un nouveau contrôle peut être effectuée par une méthode itérative de type gradient qui approche pas à pas le contrôle optimal :

$$c^{(n+1)} = c^{(n)} - \omega^{(n)} \left(\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial c} \delta c \right)^{(n)}. \quad (4.6)$$

Le paramètre de relaxation $\omega^{(n)}$ est déterminé à l'aide d'une méthode de recherche linéaire (Nocedal et Wright, 1999).

La deuxième classe de méthodes de résolution d'un problème d'optimisation sous contraintes correspond à l'utilisation d'un algorithme d'optimisation. Par conséquent, on est obligé de déterminer le gradient de la fonctionnelle objectif à optimiser, ou au moins une approximation de celui-ci.

4.3.2 Approche du gradient par les sensibilités

Par application de la règle des dérivées successives d'une fonction composée, on obtient l'expression⁶ suivante :

$$\frac{d\mathcal{J}(\phi, c)}{dc} = \frac{\partial \mathcal{J}(\phi, c)}{\partial \phi} \frac{d\phi}{dc} + \frac{\partial \mathcal{J}(\phi, c)}{\partial c} \quad (4.7)$$

pour le gradient de la fonctionnelle objectif par rapport aux variables de contrôle.

Puisque la fonctionnelle $\mathcal{J}$ dépend explicitement de ϕ et de c (voir §4.2.2), les dérivées partielles $\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \phi}$ et $\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial c}$ seront "faciles" à calculer. En revanche, les variables d'état ϕ dépendant implicitement des variables de contrôle c , les sensibilités $\frac{d\phi}{dc}$ seront plus délicates à évaluer. En pratique, deux approches peuvent cependant être utilisées :

1. Par différences finies

En effet, les sensibilités peuvent être approximées par différences finies de la manière suivante :

$$\left. \frac{d\phi}{dc} \right|_{c^{(n)}} \simeq \frac{\phi(c^{(n)}) - \phi(\tilde{c})}{c^{(n)} - \tilde{c}}$$

où les paramètres de contrôle $\tilde{c}$ sont suffisamment proches des paramètres de contrôle $c^{(n)}$ et où $\phi(\tilde{c})$ est l'état solution de l'équation $F(\phi(\tilde{c}), \tilde{c}) = 0$. L'inconvénient de cette méthode est qu'elle est assez coûteuse numériquement car il est nécessaire de résoudre

6. Si les paramètres de contrôle c sont multiples, il y aura une équation du type (4.7) pour chacun des paramètres de contrôle.

l'équation d'état, qui est souvent non-linéaire, autant de fois qu'il y a de paramètres de contrôle. Par ailleurs, les gradients évalués par cette méthode manquent souvent de précision.

2. Par résolution de systèmes linéaires

Une autre méthode de calcul des sensibilités consiste à utiliser la relation $F(\phi, c) = 0$, donnée par l'équation d'état, et à la différentier. On obtient alors :

$$dF = \frac{\partial F}{\partial \phi} d\phi + \frac{\partial F}{\partial c} dc = 0,$$

soit :

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \phi} \Big|_{c^{(n)}} \right) \frac{d\phi}{dc} \Big|_{c^{(n)}} = - \frac{\partial F}{\partial c} \Big|_{c^{(n)}}. \quad (4.8)$$

Finalement, les sensibilités sont obtenues par résolution de ce système linéaire. L'inconvénient majeur de cette approche est qu'il est nécessaire de résoudre autant ⁷ de systèmes linéaires qu'il y a de paramètres de contrôle. Cette méthode est cependant bien plus performante que l'approche par différences finies : en effet, le calcul des sensibilités se fait de manière exacte par résolution de systèmes linéaires.

4.3.3 Approche du gradient par l'équation adjointe

Le gradient de la fonctionnelle objectif $\mathcal{J}$ par rapport aux variables de contrôle c peut également être obtenu en combinant l'équation adjointe (4.4) et l'expression (4.7) donnant $\frac{d\mathcal{J}}{dc}$.

En effet, l'adjoint de l'équation (4.4) :

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \phi} \right)^* \xi = \left(\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \phi} \right)^*$$

correspond à l'équation :

$$\xi^* \frac{\partial F}{\partial \phi} = \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \phi}. \quad (4.9)$$

En introduisant cette équation dans l'expression (4.7) du gradient de la fonctionnelle par rapport aux variables de contrôle, on obtient :

$$\frac{d\mathcal{J}(\phi, c)}{dc} = \xi^* \frac{\partial F(\phi, c)}{\partial \phi} \frac{d\phi}{dc} + \frac{\partial \mathcal{J}(\phi, c)}{\partial c}.$$

7. On peut cependant réduire le coût de calcul lié à cette méthode en remarquant que seul le terme de droite de l'équation (4.8) dépend d'un paramètre de contrôle particulier. L'opérateur de gauche peut être discrétisé une fois pour toutes, à un itéré donné, puis utilisé pour résoudre tous les systèmes linéaires.

Finalement, en utilisant l'équation (4.8), il devient à un itéré n quelconque :

$$\frac{d\mathcal{J}}{dc}(\phi^{(n)}, c^{(n)}) = - \left(\xi^{(n)} \right)^* \frac{\partial F}{\partial c} \Big|_{c^{(n)}} + \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial c} \Big|_{c^{(n)}}. \quad (4.10)$$

L'avantage de cette méthode par rapport à celle des sensibilités est qu'il faut résoudre une seule fois un système linéaire (le système adjoint 4.9) et cela indépendamment du nombre de paramètres de contrôle. On remarque également que l'adjoint de la condition d'optimalité (4.5) correspond à l'écart à zéro du gradient de la fonctionnelle coût $d\mathcal{J}/dc$. En d'autres termes, quand les conditions d'optimalité sont vérifiées, on a exactement $d\mathcal{J}/dc = 0$.

Connaissant le gradient de la fonctionnelle objectif par rapport aux variables de contrôle c , celui peut être utilisé dans un algorithme d'optimisation à direction de descente.

ALGORITHME D'OPTIMISATION

On initialise la résolution avec un contrôle donné $c^{(0)}$. Puis, pour $n = 0, 1, 2, \dots$ et tant qu'un critère de convergence donné n'est pas vérifié, on réalise les phases suivantes :

1. Détermination du gradient de la fonctionnelle $\mathcal{J}$ par rapport aux variables de contrôle $c : d\mathcal{J}/dc$ par la méthode des sensibilités ou celle de l'équation adjointe.
2. Détermination d'une direction de descente $d^{(n)}$ basée sur le gradient $d\mathcal{J}/dc$.
3. Détermination de nouveaux paramètres de contrôle

$$c^{(n+1)} = c^{(n)} + \omega^{(n)} d^{(n)}$$

où le paramètre $\omega^{(n)}$ est déterminé par recherche linéaire.

4. Incrémentation $n = n + 1$ et retour à l'étape 1.

4.3.4 Résolution numérique : commutativité des étapes de discrétisation et de différentiation

En mécanique de fluides, le système optimal (équations d'état, équations adjointes, conditions d'optimalité) déterminé à la section 4.3.1.2 est habituellement⁸ un système d'équations aux dérivées partielles qu'il est nécessaire de résoudre numériquement. Par conséquent, les équations doivent être discrétisées en temps et en espace avant d'être résolues. En pratique, on est alors confronté au choix suivant :

8. Une exception notable est le cas considéré par Bergmann (2004) où l'équation d'état du système est constitué par un modèle réduit de dynamique construit par POD *i.e.* un système d'équations différentielles ordinaires.

1. soit on utilise les équations d'état et la fonctionnelle coût sous forme continue pour déterminer les équations adjointes du problème et les conditions d'optimalité, équations qu'il reste à discrétiser pour les résoudre (**différentiation - discrétisation**),
2. soit on discrétise immédiatement les équations d'état et la fonctionnelle objectif, équations discrétisées que l'on utilise pour déterminer les équations adjointes et les conditions d'optimalité discrétisées (**discrétisation - différentiation**).

Les problèmes de mécanique des fluides étant des problèmes d'évolution en temps et en espace, il existe en fait une pratique intermédiaire (Chang, 2000) dans laquelle on discrétise uniquement en temps les équations d'état et la fonctionnelle coût afin de déterminer un système optimal semi-discret (discret en temps et continue en espace).

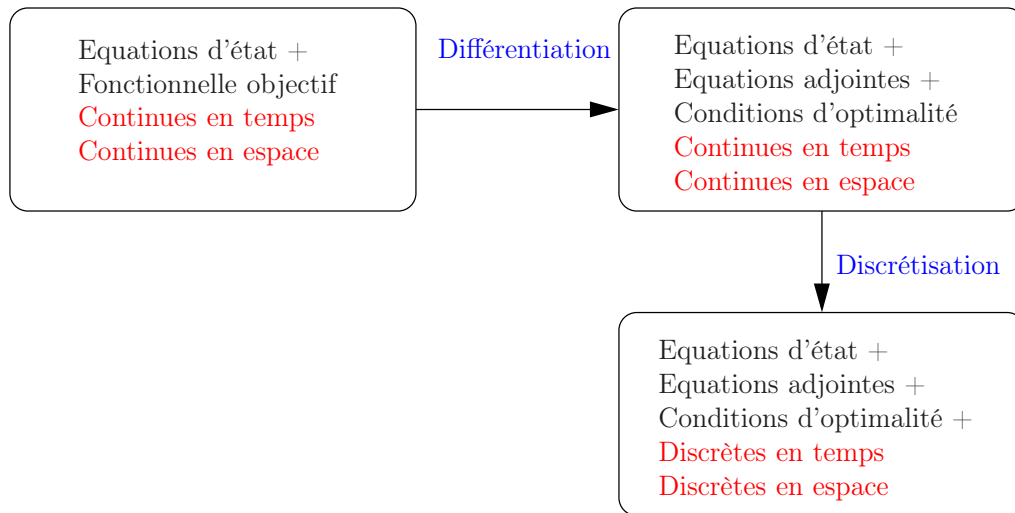
L'ensemble des approches est résumé sur la figure 4.1.

Le problème qui se pose en terme d'optimisation est que les étapes de différentiation - discrétisation et de discrétisation - différentiation ne sont en général pas commutatives (Gunzburger, 1997a, 2000). Elles fournissent donc *a priori* des approximations différentes pour les sensibilités conduisant éventuellement à des gradients qui n'ont aucun sens. Pour essayer d'analyser la question, une étude comparative des trois approches de discrétisation-différentiation a été menée dans El Shrif (2003), en considérant pour équations d'état des modèles simples d'équations aux dérivées partielles (équation de la chaleur et équation de Burgers monodimensionnelle). Cette étude n'a cependant pas mis en évidence de réelles différences quant au contrôle optimal obtenu. Pour cette raison, et parce que cette approche semi-discrete est peu employée en pratique, elle ne sera plus discutée par la suite.

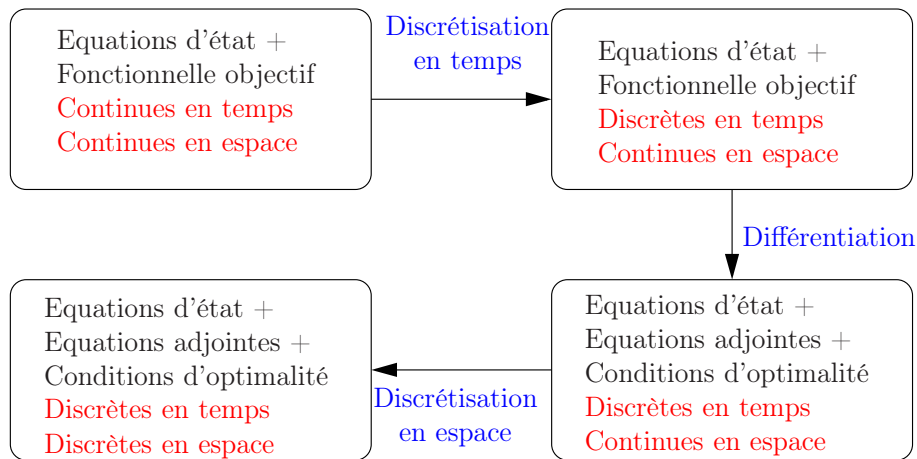
Les sections suivantes présentent de manière succincte les approches de discrétisation - différentiation et discrétisation - différentiation en insistant plus particulièrement sur leurs avantages et inconvénients respectifs. Une discussion plus approfondie pourra être trouvée dans Gunzburger (1997c).

4.3.4.1 Discrétisation - Différentiation

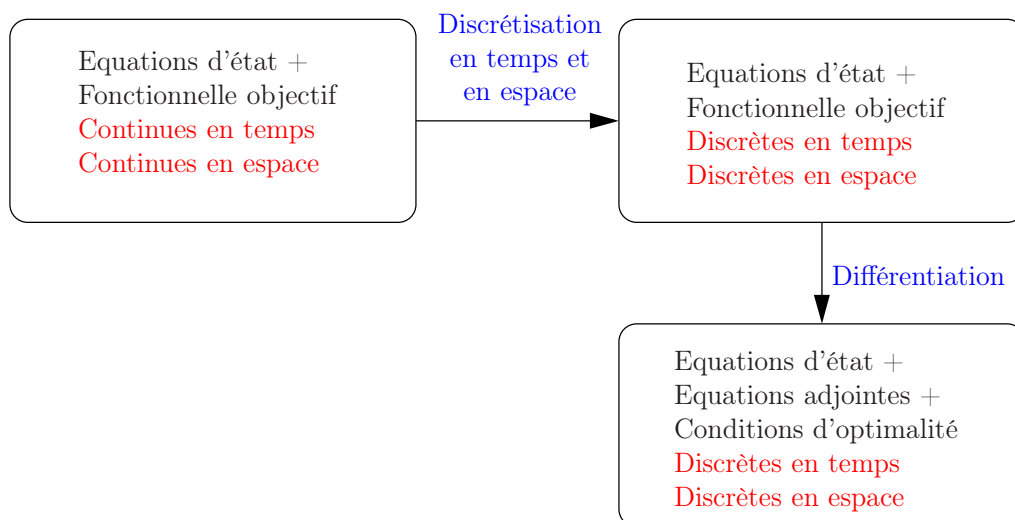
Cette approche consiste à discrétiser en premier lieu les équations d'état du système à optimiser puis d'utiliser les expressions discrètes obtenues pour déterminer, via les mé-



(a) Approche par différentiation-discrétisation.



(b) Approche semi-discrète : discrétisation en temps puis différentiation.



(c) Approche par discrétisation-différentiation.

FIGURE 4.1 – Les différentes approches de résolution du système optimal.

thodes d'optimisation non linéaire présentées précédemment, les équations du système optimal discret. Des exemples d'application de cette approche sont donnés dans El Shrif (2003) et Chang (2000). L'intérêt de cette approche est qu'elle fournit les sensibilités exactes (aux erreurs d'arrondis près) de la solution discrète du problème d'optimisation. Cependant, ce travail de différentiation peut devenir rapidement contraignant lorsque les équations du système d'état ne sont pas simples (équation de Navier-Stokes par exemple) et les schémas de discrétisation temporelle et spatiale complexes. Par ailleurs, la différentiation doit être réalisée pour chacun des paramètres de contrôle, compliquant encore les choses. On comprend donc aisément l'attrait que peuvent avoir dans certains cercles les méthodes de différentiation automatique. Ces méthodes consistent à appliquer, à un code de résolution des équations d'état écrit en fortran, C ou C++, un logiciel de différentiation automatique (ADIFOR, TAMC, FastOpt, Tapenade pour les plus connus) qui produit en sortie un autre code, écrit dans le même langage, calculant les sensibilités exactes de la solution discrétisée. Le travail de différentiation, qui devait être jusqu'ici réalisé à la main, est remplacé par une procédure automatique où l'utilisateur n'intervient plus, laissant ce soin au logiciel choisi. Cette méthode, qui paraît attractive, nécessite cependant un temps CPU beaucoup plus élevé que les méthodes de différentiation - discrétisation discutées par la suite. Par ailleurs, ces logiciels, qui sont encore au stade de développement (Di Césaré, 2000), restent délicats à mettre en œuvre, expliquant le peu d'application en mécanique des fluides. A notre connaissance, seuls Hinze et Slawing (2003) ont comparé, pour les équations de Navier-Stokes, les gradients obtenus par une méthode adjointe à ceux déterminés par différentiation automatique.

4.3.4.2 Différentiation - discrétisation

Dans cette autre approche, les équations d'état écrites sous forme continue sont directement différenciées. On obtient alors un système optimal que l'on discrétise⁹ pour déterminer les sensibilités. Cette approche, qui semble la plus naturelle, est par ailleurs souvent plus simple à utiliser en pratique. Pour ces raisons, c'est l'approche qui est généralement utilisée pour résoudre numériquement un problème d'optimisation sous contraintes.

9. Il est en général conseillé d'utiliser les mêmes schémas de discrétisation que ceux mis en œuvre pour résoudre les équations du système d'état (El Shrif, 2003, par exemple).

4.3.4.3 Discussion

Naturellement, les deux approches ci-dessus produisent des approximations des sensibilités exactes. Toutefois, si les sensibilités discrètes obtenues en différentiant les équations d'état discrétisées sont les sensibilités exactes des variables d'état discrètes, les sensibilités discrètes obtenues en discrétisant les équations du système optimal ne sont les gradients d'aucune quantité physique, continue ou discrète. Par conséquent, il est possible que l'approche par différentiation - discrétisation produise des gradients inconsistants pour la fonctionnelle objectif. Cependant, c'est l'approche la plus simple à mettre en œuvre et elle est en cela majoritairement utilisée dans la littérature (Bewley *et al.*, 2001, par exemple). C'est donc cette approche, que l'on peut qualifier de standard, qui a été adoptée tout au long de ce mémoire, que ce soit pour l'exemple illustratif de la section suivante, ou que ce soit au chapitre 5 pour aborder le contrôle du canal turbulent.

4.4 Application à l'équation de Burgers

Dans cette section, nous considérons une première application de la théorie du contrôle optimal à l'équation de Burgers. Le cas, encore plus simple, de l'équation de Burgers linéarisée est traité à l'annexe G. Pour des raisons de simplicité de développements, nous avons suivi uniquement l'approche différentiation - discrétisation. L'approche discrétisation - différentiation est abordée dans El Shrif (2003).

4.4.1 Définition du problème d'optimisation et système optimal

L'équation de Burgers s'écrit sous forme conservative :

$$\mathcal{L}_B(u) = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial u^2}{\partial x} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \Phi = 0 \quad (4.11)$$

où Φ représente un terme de contrôle distribué.

L'équation (4.11) sera résolue dans le domaine Ξ défini par :

$$\Xi = \{(x, t) \mid (x, t) \in [0, L] \times [t_0, t_0 + T_o]\}$$

et sera munie des conditions aux limites et initiale suivantes :

$$\begin{aligned} u(0, t) &= \phi_L \\ u(L, t) &= \phi_R \\ u(x, 0) &= u_0(x) \end{aligned} \quad (4.12)$$

où ϕ_L et ϕ_R représentent des termes de contrôle frontière.

Par la suite, le système optimal sera développé formellement en conservant les termes de contrôle frontière. Cependant, les applications de la section 4.4.4 seront réalisées à l'aide du seul contrôle distribué Φ (*i.e.* en supposant que $\phi_L = \phi_R = 0$).

Dans cette application, la fonctionnelle coût est définie par :

$$\begin{aligned} \mathcal{J} = & \frac{\omega_1}{2} \int_{t_0}^{t_0+T_o} \int_0^L (u - \hat{u})^2 dx dt + \frac{\omega_2}{2} \int_0^L [u(x, t_0 + T_o) - \bar{u}(x)]^2 dx + \\ & \frac{\ell}{2} \int_{t_0}^{t_0+T_o} \int_0^L \Phi^2 dx dt + \frac{\ell_1}{2} \int_{t_0}^{t_0+T_o} \phi_L^2 dt + \frac{\ell_2}{2} \int_{t_0}^{t_0+T_o} \phi_R^2 dt \end{aligned} \quad (4.13)$$

Dans cette fonctionnelle, les fonctions¹⁰ $\hat{u}(x, t)$ et $\bar{u}(x)$ représentent d'une part la consigne à atteindre sur tout le domaine et à tout instant et d'autre part la consigne à atteindre au temps $t_0 + T_o$. Cette fonctionnelle est de type énergétique et fait apparaître sur la première ligne l'énergie de l'écart aux consignes et sur la seconde ligne le coût du contrôle : contrôle distribué et contrôles frontières.

On cherche donc à minimiser la fonctionnelle $\mathcal{J}$ définie par (4.13) sous les contraintes des équations d'état (4.11) et des conditions initiales et aux limites (4.12).

Ce problème d'optimisation sous contraintes rentre donc dans le cadre de la section 4.2 et la méthode des multiplicateurs de Lagrange présentée à la section 4.3.1 peut être utilisée.

Afin de transformer ce problème d'optimisation sous contraintes en un problème d'optimisation sans contraintes, on introduit la variable adjointe (le multiplicateur de Lagrange) $u^*(x, t)$ de la variable d'état $u(x, t)$, en définissant le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ par :

$$\mathcal{I}(u, \Phi) = \langle \mathcal{L}_B(u), u^* \rangle = \int_{t_0}^{t_0+T_o} \int_0^L \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial u^2}{\partial x} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \Phi \right) u^* dx dt \quad (4.14)$$

10. Dans la section 4.4.4, on considérera pour simplifier que $\hat{u}(x, t) = \bar{u}(x) = u_0(x)$, $\forall t \in [t_0, t_0 + T_o]$.

La variation de $\mathcal{I}$ par rapport à la variable u est, par définition¹¹, égale à la dérivée de Fréchet au point (u, Φ) dans les directions $(\delta u, \delta \Phi)$ de $\mathcal{I}$, soit :

$$\mathcal{I}' = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\mathcal{I}(u + \epsilon \delta u, \Phi + \epsilon \delta \Phi) - \mathcal{I}(u, \Phi)}{\epsilon} \quad (4.15)$$

Après quelques étapes de calcul indiquées à la section H.1, on trouve que :

$$\begin{aligned} \mathcal{I}' = & \langle \delta u, \mathcal{L}_B^*(u^*) \rangle + \int_0^L [\delta u u^*]_{t_0+T_0}^L dx + \int_{t_0}^{t_0+T_0} [u \delta u u^*]_0^L dt \\ & - \nu \int_{t_0}^{t_0+T_0} \left[\frac{\partial(\delta u)}{\partial x} u^* \right]_0^L dt + \nu \int_{t_0}^{t_0+T_0} \left[\delta u \frac{\partial u^*}{\partial x} \right]_0^L dt - \int_{t_0}^{t_0+T_0} \int_0^L \delta \Phi u^* dx dt \end{aligned} \quad (4.16)$$

où

$$\mathcal{L}_B^*(u^*) = -\frac{\partial u^*}{\partial t} - u \frac{\partial u^*}{\partial x} - \nu \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^2} \quad (4.17)$$

est l'équation adjointe de l'équation de Burgers.

De même, la variation de $\mathcal{J}$ par rapport à la variable d'état u est, par définition, donnée par :

$$\mathcal{J}' = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\mathcal{J}(u + \epsilon \delta u, \Phi + \epsilon \delta \Phi, \phi_R + \epsilon \delta \phi_R, \phi_L + \epsilon \delta \phi_L) - \mathcal{J}(u, \Phi, \phi_R, \phi_L)}{\epsilon} \quad (4.18)$$

i.e. après quelques développements présentés en section H.2 :

$$\begin{aligned} \mathcal{J}' = & \omega_1 \int_{t_0}^{t_0+T_0} \int_0^L \delta u (u - \hat{u}) dx dt + \omega_2 \int_0^L \delta u(x, t_0 + T_0) [u(x, t_0 + T_0) - \bar{u}(x)] dx \\ & + \ell \int_{t_0}^{t_0+T_0} \int_0^L \Phi \delta \Phi dx dt + \ell_1 \int_{t_0}^{t_0+T_0} \phi_L \delta \phi_L dt + \ell_2 \int_{t_0}^{t_0+T_0} \phi_R \delta \phi_R dt \end{aligned} \quad (4.19)$$

La théorie des multiplicateurs de Lagrange impose¹² que

$$\mathcal{J}' = \mathcal{I}' \quad (4.20)$$

et celà, quelles que soient les variations $\delta u, \delta \Phi, \delta \phi_L, \delta \phi_R$.

On montre à la section H.3 que celà conduit à l'équation adjointe suivante pour le problème optimal

$$\mathcal{L}_B^*(u^*) = -\frac{\partial u^*}{\partial t} - u \frac{\partial u^*}{\partial x} - \nu \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^2} = \omega_1 (u - \hat{u}) \quad (4.21)$$

11. Plus précisément, on considère que lorsque la variable d'état u varie de δu , la variable de contrôle distribué Φ varie de $\delta \Phi$.

12. Ici, nous suivons une démarche équivalente mais différente de celle qui a été présentée à la section 4.3.1 pour introduire le système optimal. En effet, au lieu de déterminer successivement les dérivées directionnelles dans les directions des variables d'état puis dans les directions des variables de contrôle, nous calculons en même temps les dérivées directionnelles dans les deux directions puis imposons que $\mathcal{J}' = \mathcal{I}'$ où $\mathcal{L} = \mathcal{J} - \mathcal{I}$.

Cette équation adjointe est munie des conditions aux limites

$$u^*(0, t) = 0 \quad u^*(L, t) = 0 \quad (4.22)$$

et de la condition terminale suivante :

$$u^*(x, t_0 + T_o) = \omega_2 (u(x, t_0 + T_o) - \bar{u}(x)) \quad (4.23)$$

Après prise en compte de l'équation adjointe et des conditions aux limites de l'équation d'état, on montre que les gradients de la fonctionnelle coût $\mathcal{J}$ par rapport aux variables de contrôle (les conditions d'optimalité) sont donnés par les équations :

$$\nabla_{\Phi} \mathcal{J} = \ell \Phi + u^* \quad (4.24)$$

$$\nabla_{\phi_L} \mathcal{J} = \ell_1 \phi_L + \nu \frac{\partial u^*}{\partial x}(0, t) \quad (4.25)$$

$$\nabla_{\phi_R} \mathcal{J} = \ell_2 \phi_R - \nu \frac{\partial u^*}{\partial x}(L, t) \quad (4.26)$$

La figure 4.2 présente en résumé le système optimal : équation d'état, équation adjointe et conditions d'optimalité obtenues dans l'approche par différentiation discrétisation. Pour obtenir numériquement une solution à ce problème d'équations aux dérivées partielles, il reste à discrétiser en temps et en espace ce système d'équations.

4.4.2 Discrétisations spatiale et temporelle

Pour résoudre numériquement l'équation de Burgers (4.27) et l'équation adjointe (4.31), on utilisera un schéma de discrétisation dit **FTCS** pour *Forward Time, Centered Space*, soit un schéma décalé amont en temps et de différences finies centrées d'ordre 2 en espace. L'intérêt principal de ce schéma numérique est sa facilité de mise en œuvre.

EQUATION D'ÉTAT :

$$\mathcal{L}_B(u) = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial u^2}{\partial x} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \Phi = 0 \quad (4.27)$$

$$u(0, t) = \phi_L \quad (\text{CL}) \quad (4.28)$$

$$u(L, t) = \phi_R \quad (\text{CL}) \quad (4.29)$$

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad (\text{CI}) \quad (4.30)$$

EQUATION ADJOINTE :

$$\mathcal{L}_B^*(u^*) = -\frac{\partial u^*}{\partial t} - u \frac{\partial u^*}{\partial x} - \nu \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^2} = \omega_1 (u - \hat{u}) \quad (4.31)$$

$$u^*(0, t) = 0 \quad (\text{CL}) \quad (4.32)$$

$$u^*(L, t) = 0 \quad (\text{CL}) \quad (4.33)$$

$$u^*(x, t_0 + T_o) = \omega_2 (u(x, t_0 + T_o) - \bar{u}(x)) \quad (\text{CT}) \quad (4.34)$$

CONDITIONS D'OPTIMALITÉ :

$$\nabla_{\Phi} \mathcal{J} = \ell \Phi + u^* \quad (4.35)$$

$$\nabla_{\phi_L} \mathcal{J} = \ell_1 \phi_L + \nu \frac{\partial u^*}{\partial x}(0, t) \quad (4.36)$$

$$\nabla_{\phi_R} \mathcal{J} = \ell_2 \phi_R - \nu \frac{\partial u^*}{\partial x}(L, t) \quad (4.37)$$

FONCTIONNELLE COÛT :

$$\mathcal{J} = \frac{\omega_1}{2} \int_{t_0}^{t_0+T_o} \int_0^L (u - \hat{u})^2 dx dt + \frac{\omega_2}{2} \int_0^L [u(x, t_0 + T_o) - \bar{u}(x)]^2 dx + \frac{\ell}{2} \int_{t_0}^{t_0+T_o} \int_0^L \Phi^2 dx dt + \frac{\ell_1}{2} \int_{t_0}^{t_0+T_o} \phi_L^2 dt + \frac{\ell_2}{2} \int_{t_0}^{t_0+T_o} \phi_R^2 dt \quad (4.38)$$

FIGURE 4.2 – Système optimal de l'équation de Burgers obtenu par l'approche différentiation discrétisation. CL : condition limite, CI : condition initiale, CT : condition terminale.

4.4.2.1 Discrétisation de l'équation de Burgers

La discrétisation en temps¹³ et en espace, sur un maillage de pas constant $(\Delta t, \Delta x)$, de l'équation de Burgers (4.27) conduit alors, en notant $u_j^n = u(j\Delta x, n\Delta t)$, à l'équation¹⁴ :

$$u_j^{n+1} = u_j^n (1 - 2s) + s (u_{j+1}^n + u_{j-1}^n) - \frac{\Delta t}{2\Delta x} u_j^n (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) + \Phi_j^n \quad (4.40)$$

avec $s = \nu \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$.

Connaissant les conditions initiale et aux limites du problème d'état, cette équation est immédiate à résoudre.

4.4.2.2 Discrétisation de l'équation de Burgers adjointe

La discrétisation temporelle et spatiale de l'équation de Burgers adjointe (4.31) mène à l'équation¹⁵ :

$$u_j^{*n+1} = u_j^{*n} (1 + 2s) - s (u_{j+1}^{*n} + u_{j-1}^{*n}) - \frac{\Delta t}{2\Delta x} u_j^n (u_{j+1}^{*n} - u_{j-1}^{*n}) - \omega_1 (u_j^n - \hat{u}_j^n) \Delta t \quad (4.41)$$

que l'on doit résoudre en temps décroissant (l'équation de Burgers adjointe est une équation parabolique en temps inverse) *i.e.* en considérant $\Delta t < 0$.

4.4.3 Evaluation du nouveau contrôle

Connaissant les gradients de la fonctionnelle coût $\mathcal{J}$ par rapport aux paramètres de contrôle (équations 4.35, 4.36 et 4.37), le contrôle nécessaire pour satisfaire les conditions d'optimalité est évalué par un algorithme de gradient. Bewley *et al.* (2001), dans une étude comparable à la nôtre, a montré qu'il était préférable d'utiliser la méthode du gradient conjugué (lire Shewchuk, 1994, pour une introduction à ces techniques de résolution) qu'un algorithme de gradient simple pour résoudre un problème de contrôle optimal. Par

13. De manière évidente, la discrétisation en temps de l'équation de Burgers par un schéma décalé amont conduit à :

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} + u^n \frac{\partial u^n}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u^n}{\partial x^2} + \Phi^n. \quad (4.39)$$

14. La présence des termes u_{j-1}^n dans le terme de droite conduit normalement à une résolution numérique à deux niveaux de stockage en temps pour les inconnues. Ici, pour pouvoir résoudre l'équation adjointe (4.31), nous devons de toute manière connaître le champ $u(x, t)$ sur tout le domaine Ξ ce qui nous évite toute possibilité d'erreur de résolution pour l'équation d'état.

15. Cette fois encore, la présence des termes u_{j-1}^{*n} dans le terme de droite nécessite une résolution numérique à deux niveaux de stockage en temps pour les inconnues.

conséquent, nous avons fait le même choix que lui et utilisé une méthode de gradient conjugué non linéaire pour résoudre le problème d'optimisation. Précisément, nous avons testé trois types particuliers de gradient conjugué (Nocedal et Wright, 1999) :

1. la méthode de Fletcher-Reeves,
2. la méthode de Polak-Ribiere,
3. et la méthode de Hestenes-Stiefel.

Toutes ces méthodes s'écrivent de la manière suivante¹⁶ :

$$\Phi_{k+1} = \Phi_k + \alpha_k h_k$$

où la direction de descente h_k est évaluée comme $h_{k+1} = -g_{k+1} + \beta_{k+1}h_k$ avec $h_0 = -g_0$ et :

- g_k , gradient déterminé facilement par les équations (4.35), (4.36) et (4.37), une fois les équations adjointes résolues,
- α_k déterminé par une méthode de recherche linéaire.

Ces méthodes diffèrent l'une par rapport à l'autre uniquement par la manière de calculer le coefficient β_k . La figure 4.3 met en évidence que pour le type de problèmes rencontré à la section 4.4.4, la méthode de Hestenes-Stiefel converge le plus rapidement. C'est donc cette méthode qui sera utilisée par la suite. Le coefficient β_k est alors donné par :

$$\beta_{k+1} = \frac{(g_{k+1} - g_k) \cdot g_{k+1}}{(g_{k+1} - g_k) \cdot h_k}$$

Nous avons également testé deux méthodes de recherche linéaire :

1. une méthode de recherche linéaire exacte,
2. la méthode d'Armijo à rebroussement (Gould et Leyffer, 2002).

Afin de limiter le coût de calcul, la méthode d'Armijo à rebroussement a systématiquement été utilisée par la suite.

4.4.4 Résultats pour l'équation de la chaleur et l'équation de Burgers

Contrairement à ce qui est présenté dans Chen et Collis (2003), on se limite ici à contrôler les équations de Burgers (4.11) par contrôle distribué Φ . On étudie successivement deux configurations de complexité croissante : l'équation de la chaleur (§4.4.4.1) et l'équation de Burgers (§4.4.4.2).

16. On précise ici qu'à la section 4.4.4, nous appliquerons seulement un contrôle distribué Φ d'où nos notations.

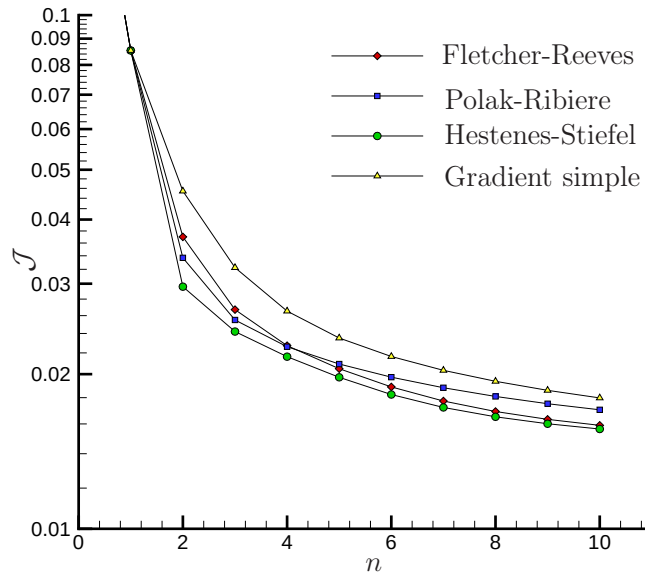


FIGURE 4.3 – Comparaison pour différentes méthodes de gradient conjugué de l'évolution en fonction du nombre d'itération n du coût $\mathcal{J}$ pour l'équation de Burgers contrôlée ($\ell = 0, 01$) avec initialisation et consigne données par l'équation (4.45).

4.4.4.1 Equation de la chaleur

L'équation de la chaleur s'écrit de la manière suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (4.42)$$

Ainsi formulée, cette équation constitue un cas particulier de l'équation de Burgers précédemment étudiée pour lequel il n'existe pas le terme de convection. Le formalisme précédemment développé pour l'équation de Burgers est donc directement applicable à condition de tenir compte de cette remarque.

Dans cette application, nous choisissons pour condition initiale de l'équation d'état (4.42) un profil sinusoïdal de vitesse du type :

$$u_0(x) = \sin(\pi(2x - 1)) \quad (4.43)$$

et nous prenons pour fonctionnelle $\mathcal{J}$ à optimiser la fonctionnelle suivante :

$$\mathcal{J} = \frac{\ell}{2} \int_0^1 \int_0^1 \Phi^2 dx dt + \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 (u - u_0)^2 dx dt + \frac{1}{2} \int_0^1 [u(x, 1) - u_0]^2 dx \quad (4.44)$$

Cette fonctionnelle peut être vue comme un cas particulier de la fonctionnelle (4.13) pour

lequel on aurait imposé :

$$t_0 = 0; T_o = 1; L = 1; \hat{u} = u_0; \bar{u} = u_0; \ell_1 = 0; \ell_2 = 0; \omega_1 = 1; \omega_2 = 1$$

ce qui nous permet d'utiliser tous les résultats des sections 4.4.1 et 4.4.2.

Par la suite deux cas seront envisagés $\ell = 0,01$ et $\ell = 0$ selon que le coût du contrôle soit pris en compte ou non. Enfin, toutes les simulations numériques dont les résultats seront présentés ont été réalisées en retenant un nombre de points de maillage $N_x = 100$ et en choisissant $\Delta t = 0,0025$ pour éviter tout problème de convergence.

Résultats pour $\ell = 0$ La figure 4.4 présente la comparaison des profils $u(x, t = 1)$ solutions de l'équation de la chaleur (4.42) avec la consigne $u_0(x)$ dans le cas où un contrôle n'est pas appliqué ($\Phi = 0$) et dans le cas où le contrôle est appliqué ($\Phi \neq 0$). On constate que dès la première itération du processus d'optimisation la consigne est pratiquement atteinte. Ce résultat est confirmé par la figure 4.6 qui représente l'évolution du coût $\mathcal{J}$ au cours du processus d'optimisation. A titre d'illustration, nous représentons sur la figure 4.5 les profils du contrôle distribué $\Phi(x, t)$ après 3 itérations de la boucle d'optimisation.

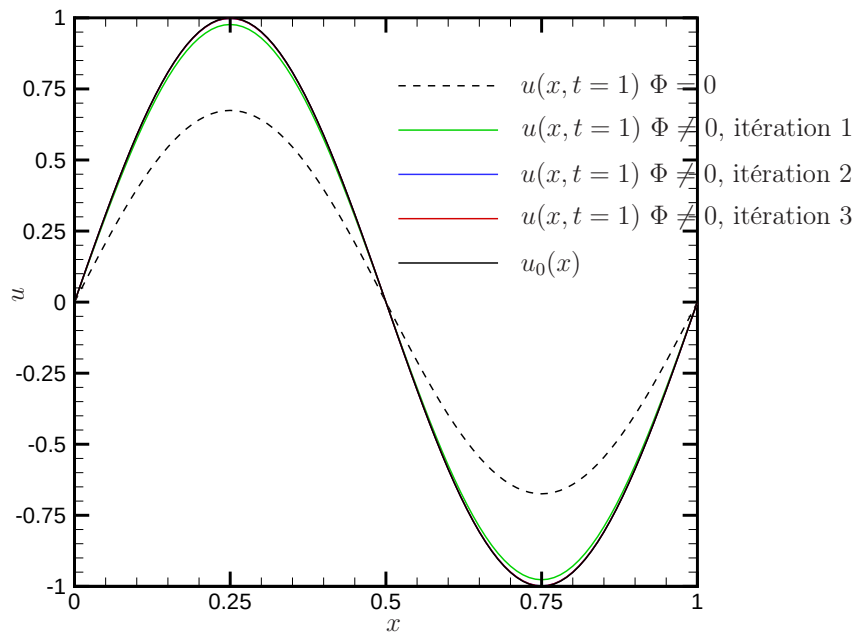


FIGURE 4.4 – Résultats du contrôle distribué de l'équation de la chaleur ($\ell = 0$).

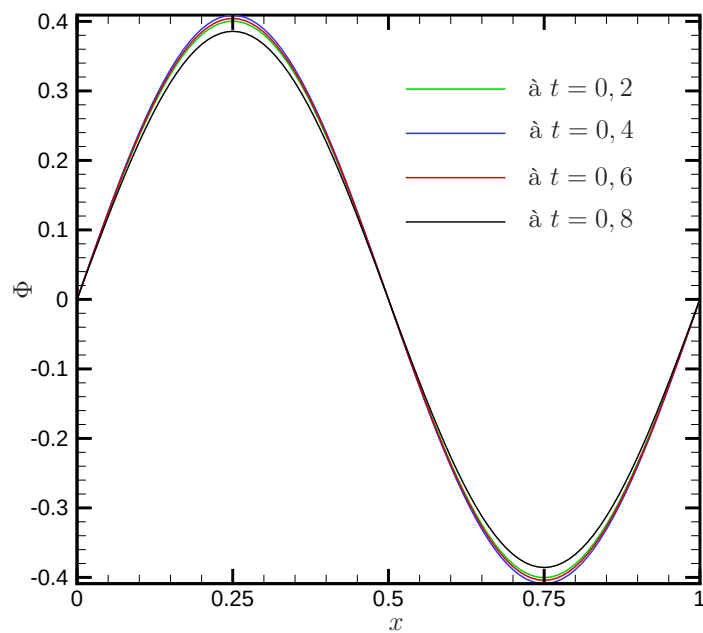


FIGURE 4.5 – Profils convergés du contrôle distribué $\Phi(x, t)$ pour l'équation de la chaleur ($\ell = 0$).

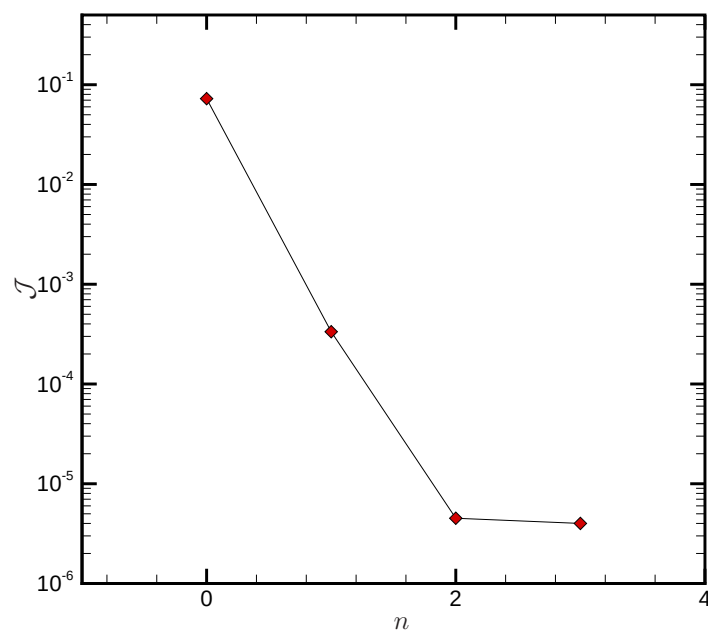


FIGURE 4.6 – Evolution en fonction du nombre d'itération n du coût $\mathcal{J}$. Equation de la chaleur ($\ell = 0$).

Résultats pour $\ell = 0,01$ Dans le cas simplifié de l'équation de la chaleur, la prise en compte du coût du contrôle ne permet pas de faire apparaître de manière claire de nouvelles tendances par rapport aux résultats obtenus sans tenir compte du coût du contrôle ($\ell = 0$). Ce comportement est évident à comprendre en regardant la figure 4.7 qui compare pour $\ell = 0$ et $\ell = 0,01$ l'évolution du coût $\mathcal{J}$ en fonction du nombre d'itération n . En fonction que l'on prenne en compte ou non le coût du contrôle dans la fonctionnelle coût, on obtient qu'au bout d'une itération, $\mathcal{J}$ a un ordre de grandeur très comparable ($\simeq 10^{-3}$). Par ailleurs, cette figure met en évidence une autre caractéristique générale que l'on retrouvera pour l'équation de Burgers : le fait, *a priori* évident, que la prise en compte du coût du contrôle dans la fonctionnelle $\mathcal{J}$ ralentisse sa décroissance. Ainsi, comme on l'attendait, plus la valeur du paramètre ℓ sera importante et plus le coût du contrôle sera considéré comme cher c'est à dire difficile à mettre en œuvre d'un point de vue pratique.

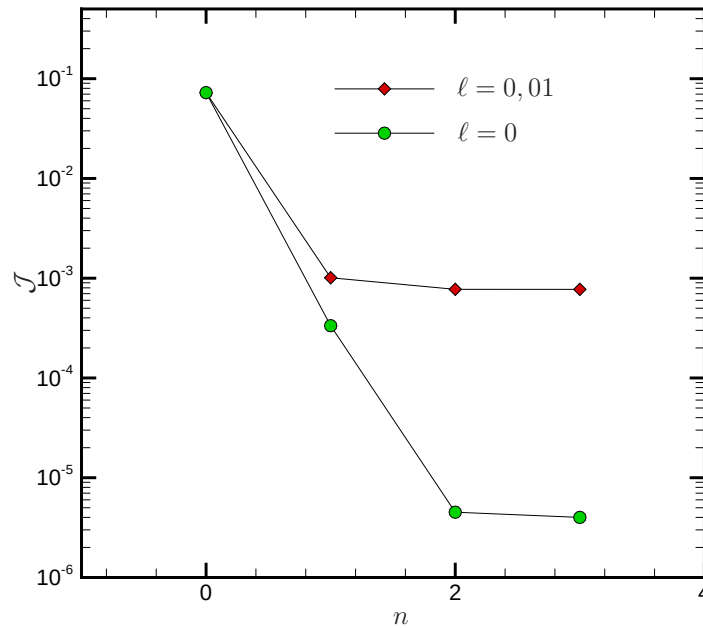


FIGURE 4.7 – Comparaison pour $\ell = 0$ et $\ell = 0,01$ de l'évolution du coût $\mathcal{J}$ en fonction du nombre d'itération n . Equation de la chaleur.

4.4.4.2 Equation de Burgers

Dans cette section, nous allons chercher à minimiser la fonctionnelle coût (4.44) sous contrainte des équations de Burgers. Nous allons considérer deux profils initiaux de vitesse :

1. le premier qui sera le même que celui considéré à la section 4.4.4.1 pour l'équation de la chaleur. L'intérêt de ce profil est qu'il est réputé mettre en évidence par intégration numérique un phénomène de "choc" (ici en $x = 0,5$).
2. le second profil est celui considéré dans les travaux de Chang (2000). Il est donné par :

$$u_0(x) = \sin \left(\pi \frac{\tan(c_s(2x-1))}{\tan(c_s)} \right) \quad (4.45)$$

où c_s est un coefficient permettant de resserrer localement le maillage. Ce coefficient sera pris égal à 1,3 dans nos simulations. L'intérêt de ce profil initial est qu'il nous permettra de comparer nos résultats avec ceux présentés dans Chang (2000) et Chen et Collis (2003).

Les remarques générales faites à la section 4.4.4.1 concernant les différences de comportement de l'équation de la chaleur contrôlée avec ou sans prise en compte du coût du contrôle restent encore valables. Par conséquent, nous ne présenterons par la suite que les résultats des simulations réalisées avec $\ell = 0,01$ et insisterons plutôt sur les différences liées au profil initial de vitesse (confondu dans nos applications avec la consigne).

Les figures 4.8 et 4.11 représentent par comparaison avec u_0 , champ de vitesse initiale et consigne donné respectivement par les équations (4.43) et (4.45), les profils $u(x, t = 1)$, solutions de l'équation de Burgers, dans le cas où un contrôle n'est pas appliqué ($\Phi = 0$) et dans le cas où le contrôle est appliqué ($\Phi \neq 0$). On constate sur ces figures qu'au bout de trois itérations du processus d'optimisation, la solution contrôlée de l'équation de Burgers converge bien vers la consigne¹⁷. Plus précisément, la comparaison de ces figures met en évidence que dans le cas où u_0 est donné par l'équation (4.45), la solution contrôlée de l'équation de Burgers a convergée plus rapidement vers la consigne. Cette impression est confirmée par les figures 4.10 et 4.13 qui représentent l'évolution du coût $\mathcal{J}$ au cours du processus d'optimisation, respectivement dans le cas où u_0 est donné par l'équation (4.43) et où u_0 est donné par l'équation (4.45). En effet, on constate sur ces figures que pour $n = 3$, on a $\mathcal{J} \simeq 1,5 \cdot 10^{-1}$ lorsque u_0 est représenté par l'équation (4.43) et $\mathcal{J} \simeq 3,5 \cdot 10^{-2}$ lorsque u_0 est représenté par l'équation (4.45). Il est connu que la solution des équations de Burgers est plus difficile à obtenir numériquement dans la configuration avec "choc" correspondant au profil (4.43).

17. Pour $n = 20$, on trouve comme on s'y attendait, que la solution contrôlée est pratiquement confondue avec la consigne.

Finalement, nous avons représenté sur les figures 4.9 et 4.12 les profils convergés du contrôle distribué $\Phi(x, t)$ obtenus respectivement lorsque u_0 est donné par les équations (4.43) et (4.45).

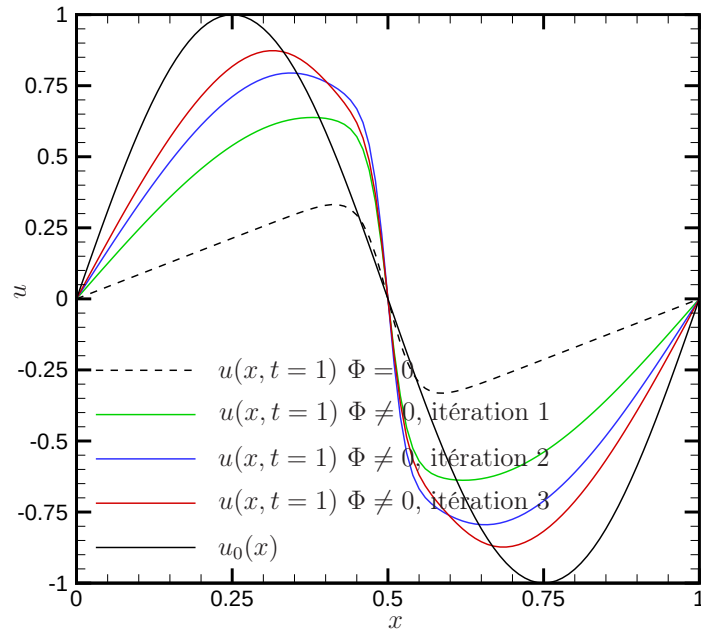


FIGURE 4.8 – Résultats du contrôle distribué de l'équation de Burgers ($\ell = 0, 01$). Initialisation et consigne données par l'équation (4.43).

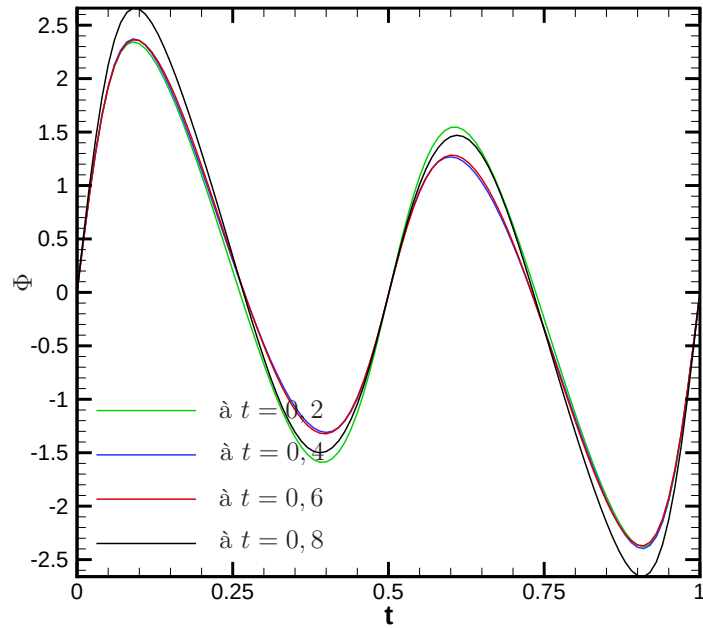


FIGURE 4.9 – Profils convergés du contrôle distribué $\Phi(x, t)$ pour l'équation de Burgers ($\ell = 0, 01$). Initialisation et consigne données par l'équation (4.43).

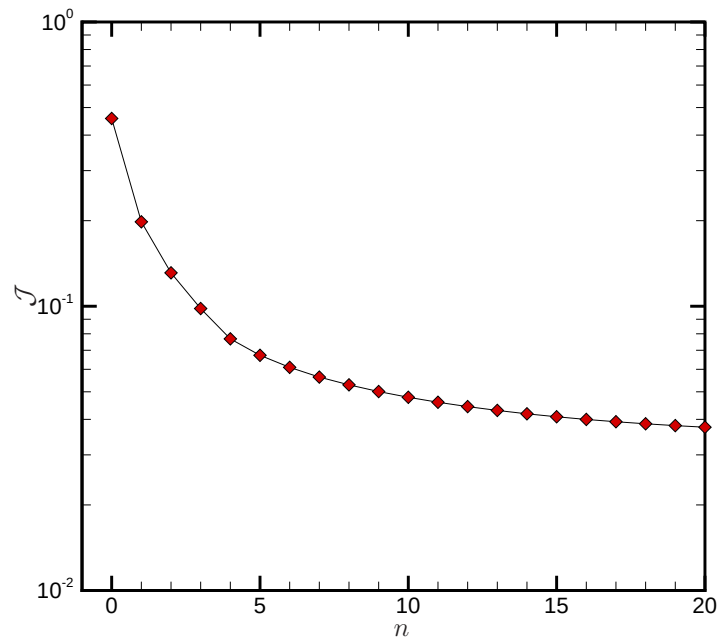


FIGURE 4.10 – Evolution en fonction du nombre d'itération n du coût $\mathcal{J}$. Equation de Burgers ($\ell = 0, 01$). Initialisation et consigne données par l'équation (4.43).

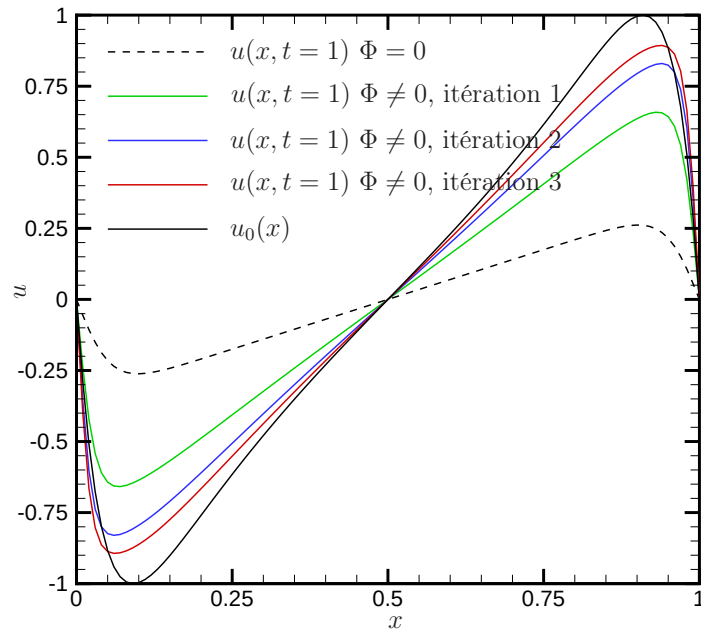


FIGURE 4.11 – Résultats du contrôle distribué de l'équation de Burgers ($\ell = 0,01$). Initialisation et consigne données par l'équation (4.45).

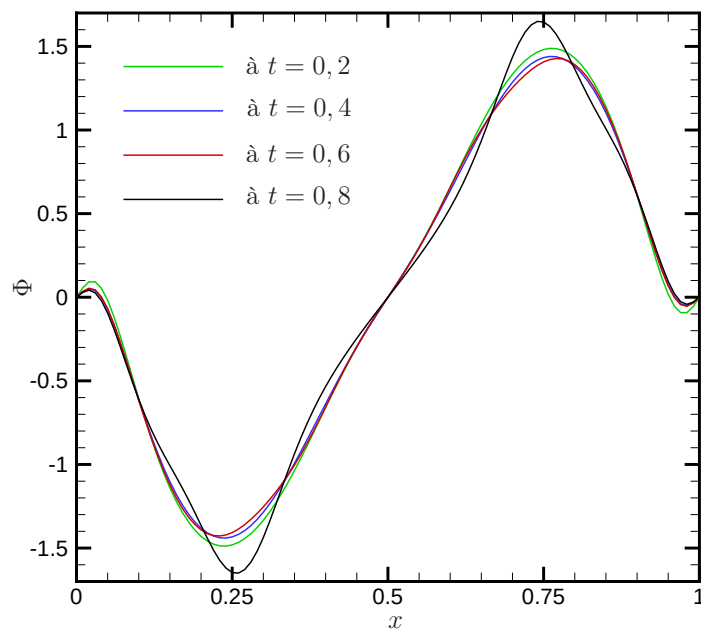


FIGURE 4.12 – Profils convergés du contrôle distribué $\Phi(x, t)$ pour l'équation de Burgers ($\ell = 0,01$). Initialisation et consigne données par l'équation (4.45).

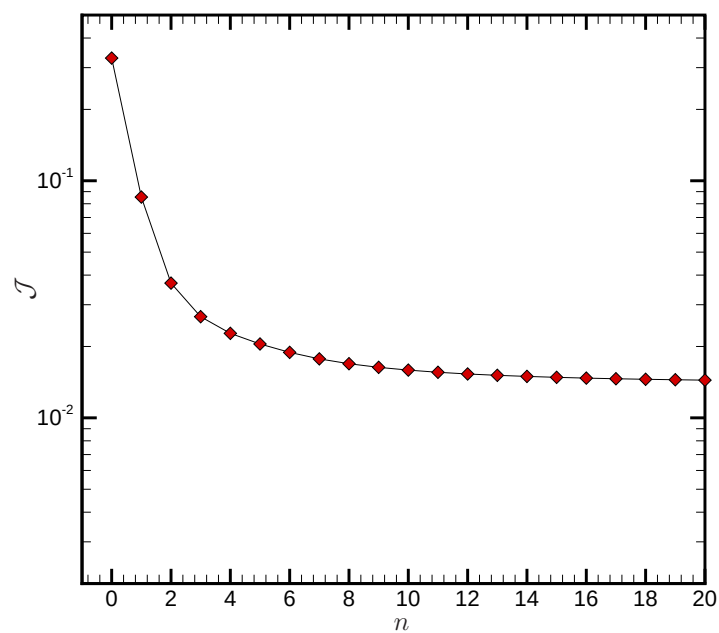


FIGURE 4.13 – Evolution en fonction du nombre d'itération n du coût $\mathcal{J}$. Equation de Burgers ($\ell = 0,01$). Initialisation et consigne données par l'équation (4.45).

Chapitre 5

Contrôle optimal d'un écoulement de canal turbulent

Sommaire

5.1	Choix de la fonctionnelle coût	131
5.2	Systèmes optimaux	133
5.2.1	Système optimal basé sur les équations de Navier-Stokes résolues par DNS	134
5.2.2	Système optimal basé sur les équations de Navier-Stokes résolues par LES	139
5.3	Discussions sur la résolution du système optimal	145
5.3.1	Algorithme de résolution	145
5.3.2	Procédure de contrôle instantané	147
5.4	Résultats de contrôle optimal pour $Re_\tau = 100$	150
5.4.1	Caractéristiques des simulations	150
5.4.2	Influence du choix de la fonctionnelle coût	152
5.4.3	Influence de la longueur de la période d'optimisation . . .	156
5.4.4	Influence du coût du contrôle	161
5.5	Résultats de contrôle optimal pour $Re_\tau = 180$	163
5.5.1	Généralités	163
5.5.2	Influence du choix de la fonctionnelle coût	166
5.5.3	Influence de la longueur de la période d'optimisation . . .	169
5.6	Comparaison entre contrôle optimal et contrôle par op- position	171
5.7	Conclusion	178

5.1 Choix de la fonctionnelle coût

Dans ce mémoire, on cherche à déterminer le contrôle $\overline{\Phi}$ à imposer aux parois supérieure et inférieure du canal $\Gamma_2^\pm$ (voir figure 2.1) pour réduire la traînée de frottement. Cela conduit

donc à définir une fonctionnelle coût basée directement sur la traînée à la paroi¹ :

$$\mathcal{J}_{drag}(\bar{\mathbf{u}}, \bar{\Phi}) = \ell_{drag} \int_{t_0}^{t_0+T_o} \int_{\Gamma_2^\pm} -\nu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} n_2 d\mathbf{x} dt + \frac{\ell}{2} \int_{t_0}^{t_0+T_o} \int_{\Gamma_2^\pm} \bar{\Phi}^2 d\mathbf{x} dt$$

où $n_2 = \pm 1$ est la normale extérieure aux parois $\Gamma_2^\pm$.

Pour des raisons qui deviendront évidentes à la section J.3 lorsque l'on déterminera les conditions aux limites du problème adjoint, il est préférable de réécrire cette fonctionnelle sous la forme² :

$$\mathcal{J}_{drag}(\bar{\mathbf{u}}, \bar{\Phi}) = \ell_{drag} \int_{t_0}^{t_0+T_o} \int_{\Gamma_2^\pm} (-\tau_{12} n_2) d\mathbf{x} dt + \frac{\ell}{2} \int_{t_0}^{t_0+T_o} \int_{\Gamma_2^\pm} \bar{\Phi}^2 d\mathbf{x} dt, \quad (5.1)$$

où $\tau_{12} = 2\nu \bar{S}_{12}$.

Cette fonctionnelle est de type énergétique, le premier terme correspond précisément à la traînée de frottement que l'on cherche à minimiser, le second terme étant une mesure du coût du contrôle. Les coefficients ℓ_{drag} et ℓ permettent de donner un poids relatif aux deux termes de la fonctionnelle selon l'application visée : si le rapport ℓ/ℓ_{drag} est grand, le coût du contrôle est important et on cherche donc à minimiser l'amplitude du contrôle, au contraire si le rapport ℓ/ℓ_{drag} est petit, le coût du contrôle est négligeable et son amplitude peut éventuellement être grande.

Une fonctionnelle coût basée directement sur la traînée n'est cependant peut-être pas le choix le plus pertinent. En effet, puisque c'est la turbulence qui provoque les mouvements de fluide du centre du canal vers les parois, augmentant ainsi la traînée de frottement, il est sans doute plus efficace numériquement de s'intéresser au contrôle de la "cause", l'énergie cinétique turbulente (*Turbulent Kinetic Energy*, TKE), plutôt qu'au contrôle des "effets", la traînée. On introduit donc une nouvelle fonctionnelle :

$$\mathcal{J}_{TKE(reg)}(\bar{\mathbf{u}}, \bar{\Phi}) = \frac{\ell_{reg}}{2} \int_{t_0}^{t_0+T_o} \int_{\Omega} |\bar{\mathbf{u}}(\bar{\Phi})|^2 d\mathbf{x} dt + \frac{\ell}{2} \int_{t_0}^{t_0+T_o} \int_{\Gamma_2^\pm} \bar{\Phi}^2 d\mathbf{x} dt. \quad (5.2)$$

Dans cette formulation du problème, l'objectif est de minimiser en moyenne sur l'intervalle d'optimisation de longueur T_o l'énergie cinétique turbulente de l'écoulement, on

1. On a fait le choix d'utiliser la même notation $\mathcal{J}$ pour la fonctionnelle coût basée sur des grandeurs issues de LES ou de DNS. De même, pour la fonctionnelle $\mathcal{I}$ du problème d'optimisation sans contrainte et pour les équations d'état $\mathcal{L}_i$ et adjointes $\mathcal{L}_i^*$ (voir section 5.2.1). Les autres variables d'état et de contrôle seront différenciées selon le cas LES ou DNS.

2. Pour cela, on tient compte d'une hypothèse de turbulence établie qui permet de justifier que $\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} = 0$.

parle alors de régularisation. Cependant, une stratégie intéressante du point de vue de la recherche du minimum de la traînée, consiste à relâcher légèrement les contraintes du problème et de tolérer une augmentation temporaire de l'énergie cinétique turbulente au cours de l'intervalle d'optimisation. Pour cela, nous introduisons une dernière fonctionnelle qui traduit la minimisation de l'énergie cinétique turbulente à la fin de l'horizon d'optimisation. Cette fonctionnelle est donnée par l'expression :

$$\mathcal{J}_{TKE(ter)}(\bar{\mathbf{u}}, \bar{\Phi}) = \frac{\ell_{ter}}{2} \int_{\Omega} [\bar{u}_i(\bar{\Phi}) \bar{u}_i(\bar{\Phi})]_{t=t_0+T_o} d\mathbf{x} + \frac{\ell}{2} \int_{t_0}^{t_0+T_o} \int_{\Gamma_2^{\pm}} \bar{\Phi}^2 d\mathbf{x} dt. \quad (5.3)$$

Pour faciliter les développements des sections suivantes, il est cependant plus simple de considérer une forme générale de fonctionnelle coût qui regroupe en une expression les fonctionnelles (5.1), (5.2) et (5.3) introduites précédemment. Cette fonctionnelle est définie comme :

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(\bar{\mathbf{u}}, \bar{\Phi}) = & \frac{\ell_{reg}}{2} \int_{t_0}^{t_0+T_o} \int_{\Omega} |\bar{\mathbf{u}}(\bar{\Phi})|^2 d\mathbf{x} dt + \frac{\ell_{ter}}{2} \int_{\Omega} [\bar{u}_i(\bar{\Phi}) \bar{u}_i(\bar{\Phi})]_{t=t_0+T_o} d\mathbf{x} \\ & + \ell_{drag} \int_{t_0}^{t_0+T_o} \int_{\Gamma_2^{\pm}} (-\tau_{12} n_2) d\mathbf{x} dt + \frac{\ell}{2} \int_{t_0}^{t_0+T_o} \int_{\Gamma_2^{\pm}} \bar{\Phi}^2 d\mathbf{x} dt. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Une alternative consiste à remplacer dans la fonctionnelle (5.4) le champ de vitesse $\bar{\mathbf{u}}$ par sa fluctuation³ $\bar{\mathbf{u}}'$ autour de la moyenne. On trouve alors :

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(\bar{\mathbf{u}}', \bar{\Phi}) = & \frac{\ell_{reg}}{2} \int_{t_0}^{t_0+T_o} \int_{\Omega} |\bar{\mathbf{u}}'(\bar{\Phi})|^2 d\mathbf{x} dt + \frac{\ell_{ter}}{2} \int_{\Omega} [\bar{u}'_i(\bar{\Phi}) \bar{u}'_i(\bar{\Phi})]_{t=t_0+T_o} d\mathbf{x} \\ & + \ell_{drag} \int_{t_0}^{t_0+T_o} \int_{\Gamma_2^{\pm}} (-\tau_{12} n_2) d\mathbf{x} dt + \frac{\ell}{2} \int_{t_0}^{t_0+T_o} \int_{\Gamma_2^{\pm}} \bar{\Phi}^2 d\mathbf{x} dt. \end{aligned} \quad (5.5)$$

5.2 Systèmes optimaux

On rappelle (voir §2.4.1) que les équations d'état du système s'écrivent⁴ :

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0 \quad (5.6)$$

3. La notation $(\cdot)'$ introduite pour le champ fluctuant de vitesse ne doit pas être confondue avec la même notation utilisée plus tard pour les variations des fonctionnelles coûts, soit $\mathcal{I}'$ et $\mathcal{J}'$.

4. Le terme de forçage F_1 joue le rôle d'un gradient de pression moyen qui sert à assurer la conservation du débit. Ce gradient de pression moyen peut être constant ou fonction du temps, ce que l'on a choisi de faire (voir §2.4.4.4 pour une description de l'algorithme de forçage). Cependant, pour déterminer le système optimal, nous avons considéré que ce terme était constant. Un point de vue opposé consiste à supposer ce terme comme une variable d'état supplémentaire et à ajouter au système d'état (5.6) et (5.7) une contrainte de type intégral traduisant la conservation du débit. Doche (2006) a considéré en DNS une contrainte du type $\int_{\Omega} u d\mathbf{x} = Cte$. Dans sa thèse, Bewley avait fait remarqué que cette formulation était plus délicate à mettre en œuvre et conduisait essentiellement aux mêmes résultats d'où notre choix de considérer le terme de forçage comme une constante.

$$\mathcal{L}_i(\bar{\mathbf{u}}, \bar{P}) = \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{u}_i \bar{u}_j) - 2 \frac{\partial}{\partial x_j} (\nu \bar{S}_{ij}) + \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} = F_i \delta_{i1} \quad (5.7)$$

avec $\nu = \frac{1}{Re_\tau} + \nu_T$.

Les équations (5.6) et (5.7) sont résolues dans le domaine Ξ défini par :

$$\Xi = \{(\mathbf{x}, t) \mid (\mathbf{x}, t) \in [0 : L_x; -1 : 1; 0 : L_z] \times [t_0, t_0 + T_o]\}$$

et sont munies des conditions aux limites à la paroi :

$$\bar{u}_1|_{\Gamma_2^\pm} = 0 \quad \bar{u}_2|_{\Gamma_2^\pm} = -\bar{\Phi} n_2 \quad \bar{u}_3|_{\Gamma_2^\pm} = 0 \quad (5.8)$$

où $\bar{\Phi}$ représente un terme de contrôle frontière appliqué aux parois supérieure et inférieure du canal. Le contrôle est appliqué sous forme de soufflage/aspiration à débit nul. Il faudra donc imposer à tout instant la contrainte suivante :

$$\int_{\Gamma_2^+} \bar{\Phi} dx dz = \int_{\Gamma_2^-} \bar{\Phi} dx dz = 0 \quad \forall t. \quad (5.9)$$

Pour faciliter la compréhension de la méthode, nous allons d'abord présenter le développement du système optimal dans le cas où l'équation d'état est le système de Navier-Stokes résolu par DNS (section 5.2.1), le cas LES étant traité ensuite (section 5.2.2).

5.2.1 Système optimal basé sur les équations de Navier-Stokes résolues par DNS

Dans le cas des équations de Navier-Stokes résolues par DNS, les équations d'état (5.6) et (5.7) deviennent

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0, \quad (5.10)$$

et

$$\mathcal{L}_i(\mathbf{u}, P) = \frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (u_i u_j) - \frac{1}{Re_\tau} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + \frac{\partial P}{\partial x_i} = F_i \delta_{i1},$$

ou encore

$$\mathcal{L}_i(\mathbf{u}, P) = \frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (u_i u_j) - \frac{2}{Re_\tau} \frac{\partial S_{ij}}{\partial x_j} + \frac{\partial P}{\partial x_i} = F_i \delta_{i1} \quad (5.11)$$

si l'on souhaite conserver la forme générale du terme visqueux rencontrée en LES.

Soient u_i^* et P^* les variables adjointes associées respectivement aux variables d'état u_i et P , on introduit la nouvelle fonctionnelle⁵ :

$$\mathcal{I}(\mathbf{u}, P, \Phi) = \int_{t_0}^{t_0+T_o} \int_{\Omega} \mathcal{L}_i(\mathbf{u}, P) u_i^* d\mathbf{x} dt + \int_{t_0}^{t_0+T_o} \int_{\Omega} \left(\kappa \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right) P^* d\mathbf{x} dt \quad (5.12)$$

où $\kappa = \pm 1$ est introduit ici devant l'équation de continuité afin de généraliser les développements.

On suppose qu'une variation $\delta\Phi$ du contrôle Φ provoque des variations δu_i de u_i , δP de P , $\mathcal{I}'$ de $\mathcal{I}$ et $\mathcal{J}'$ de $\mathcal{J}$, où l'expression $\mathcal{J}$ est déduite directement de (5.4) en supprimant les variables filtrées. On a donc :

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(\mathbf{u}, \Phi) = & \frac{\ell_{reg}}{2} \int_{t_0}^{t_0+T_o} \int_{\Omega} |\mathbf{u}(\Phi)|^2 d\mathbf{x} dt + \frac{\ell_{ter}}{2} \int_{\Omega} [u_i(\Phi) u_i(\Phi)]_{t=t_0+T_o} d\mathbf{x} \\ & + \ell_{drag} \int_{t_0}^{t_0+T_o} \int_{\Gamma_2^{\pm}} (-\tau_{12} n_2) d\mathbf{x} dt + \frac{\ell}{2} \int_{t_0}^{t_0+T_o} \int_{\Gamma_2^{\pm}} \Phi^2 d\mathbf{x} dt \end{aligned} \quad (5.13)$$

ou bien

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(\mathbf{u}', \Phi) = & \frac{\ell_{reg}}{2} \int_{t_0}^{t_0+T_o} \int_{\Omega} |\mathbf{u}'(\Phi)|^2 d\mathbf{x} dt + \frac{\ell_{ter}}{2} \int_{\Omega} [u'_i(\Phi) u'_i(\Phi)]_{t=t_0+T_o} d\mathbf{x} \\ & + \ell_{drag} \int_{t_0}^{t_0+T_o} \int_{\Gamma_2^{\pm}} (-\tau'_{12} n_2) d\mathbf{x} dt + \frac{\ell}{2} \int_{t_0}^{t_0+T_o} \int_{\Gamma_2^{\pm}} \Phi^2 d\mathbf{x} dt \end{aligned} \quad (5.14)$$

en ne retenant que les fluctuations de vitesse.

Par définition, la variation de $\mathcal{I}$ est égale à la dérivée de Fréchet au point $(\mathbf{u}, P, \Phi)$ dans les directions $(\delta\mathbf{u}, \delta P, \delta\Phi)$ de $\mathcal{I}$, soit :

$$\mathcal{I}' = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\mathcal{I}(\mathbf{u} + \epsilon\delta\mathbf{u}, P + \epsilon\delta P, \Phi + \epsilon\delta\Phi) - \mathcal{I}(\mathbf{u}, P, \Phi)}{\epsilon}$$

En introduisant la définition (5.12) de $\mathcal{I}$, on obtient :

$$\begin{aligned} \mathcal{I}' = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} & \left[\int_{t_0}^{t_0+T_o} \int_{\Omega} [\mathcal{L}_i(\mathbf{u} + \epsilon\delta\mathbf{u}, P + \epsilon\delta P) - \mathcal{L}_i(\mathbf{u}, P)] u_i^* d\mathbf{x} dt \right. \\ & \left. + \int_{t_0}^{t_0+T_o} \int_{\Omega} \kappa \left(\frac{\partial}{\partial x_i} (u_i + \epsilon\delta u_i) - \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right) P^* d\mathbf{x} dt \right] \end{aligned}$$

Pour simplifier cette expression, on remplace $\mathcal{L}_i$ par sa définition (5.11). On montre alors facilement que :

5. On rappelle que le terme de forçage F_1 est supposé constant.

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} [\mathcal{L}_i(\mathbf{u} + \epsilon \delta \mathbf{u}, P + \epsilon \delta P) - \mathcal{L}_i(\mathbf{u}, P)] =$$

$$\frac{\partial(\delta u_i)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} [u_i \delta u_j + u_j \delta u_i] - \frac{2}{Re_\tau} \frac{\partial}{\partial x_j} (\delta S_{ij}) + \frac{\partial(\delta P)}{\partial x_i},$$

ce qui permet encore d'écrire $\mathcal{I}'$ sous la forme :

$$\mathcal{I}' = \int_{t_0}^{t_0+T_o} \int_{\Omega} \left(\underbrace{\frac{\partial(\delta u_i)}{\partial t}}_{\mathcal{I}'_t} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j} [u_i \delta u_j + u_j \delta u_i]}_{\mathcal{I}'_c} - \underbrace{\frac{2}{Re_\tau} \frac{\partial}{\partial x_j} (\delta S_{ij})}_{\mathcal{I}'_v} + \underbrace{\frac{\partial(\delta P)}{\partial x_i}}_{\mathcal{I}'_p} \right) u_i^* d\mathbf{x} dt$$

$$+ \int_{t_0}^{t_0+T_o} \int_{\Omega} \underbrace{\kappa \frac{\partial(\delta u_i)}{\partial x_i} P^*}_{\mathcal{I}'_{Cont}} d\mathbf{x} dt.$$

Pour faire apparaître l'équation DNS adjointe $\mathcal{L}_i^*(\mathbf{u}^*, P^*) = 0$, il reste à intégrer par parties l'expression précédente afin d'écrire $\mathcal{I}'$ sous la forme :

$$\mathcal{I}' = \langle \delta u_i, \mathcal{L}_i^*(\mathbf{u}^*, P^*) \rangle + \text{termes de frontière} + \text{termes de contrôle}$$

5.2.1.1 Variation de $\mathcal{I}$

Les transformations à réaliser pour chacun des termes apparaissant dans $\mathcal{I}'$ sont décrites à la section I.2. Après calculs et simplifications, on trouve (§ I.2.6) que :

$$\mathcal{I}' = \mathcal{I}'_{\Omega} + \mathcal{I}'_{\Gamma} + \mathcal{I}'_T$$

avec

$$\mathcal{I}'_{\Omega} = \int_{t_0}^{t_0+T_o} \int_{\Omega} \left[-\frac{\partial u_i^*}{\partial t} - 2 S_{ij}^* u_j - \kappa \frac{\partial P^*}{\partial x_i} - \frac{1}{Re_\tau} \frac{\partial^2 u_i^*}{\partial x_j^2} \right] \delta u_i d\mathbf{x} dt$$

$$+ \int_{t_0}^{t_0+T_o} \int_{\Omega} \left(-\frac{\partial u_i^*}{\partial x_i} \delta P \right) d\mathbf{x} dt,$$

$$\mathcal{I}'_{\Gamma} = \int_{t_0}^{t_0+T_o} \int_{\Gamma} \left[(u_i \delta u_j + u_j \delta u_i) u_i^* n_j + \delta P u_i^* n_i + \kappa P^* \delta u_i n_i \right. \\ \left. - \frac{1}{Re_\tau} \left(\frac{\partial(\delta u_i)}{\partial x_j} u_i^* n_j - \frac{\partial u_i^*}{\partial x_j} \delta u_i \right) \right] d\mathbf{x} dt,$$

et

$$\mathcal{I}'_T = \int_{\Omega} [\delta u_i u_i^*]_{t_0}^{t_0+T_o} d\mathbf{x}.$$

En tenant compte des conditions aux limites imposées sur les frontières $\Gamma_2^{\pm}$ du canal :

$$\begin{array}{lll} n_1 = 0 & n_2 = \mp 1 & n_3 = 0 \\ u_1 = 0 & u_2 = -\Phi n_2 & u_3 = 0 \end{array}$$

le terme $\mathcal{I}'_T$ devient (§ I.2.7.1) :

$$\begin{aligned} \mathcal{I}'_T &= \int_{t_0}^{t_0+T_o} \int_{\Gamma_2^{\pm}} - \left(2 u_2 u_2^* + \frac{1}{Re_{\tau}} \frac{\partial u_2^*}{\partial x_2} + \kappa P^* \right) \delta \Phi d\mathbf{x} dt \\ &+ \int_{t_0}^{t_0+T_o} \int_{\Gamma_2^{\pm}} \left(\delta P u_2^* n_2 - \frac{1}{Re_{\tau}} \frac{\partial (\delta u_i)}{\partial x_2} u_i^* n_2 \right) d\mathbf{x} dt. \end{aligned}$$

De même, en tenant compte cette fois du fait que la condition initiale est connue de manière parfaite ($\delta u_i = 0$ à $t = t_0$), le terme $\mathcal{I}'_T$ s'écrit :

$$\mathcal{I}'_T = \int_{\Omega} [\delta u_i u_i^*]_{t=t_0+T_o} d\mathbf{x}.$$

5.2.1.2 Variation de $\mathcal{J}$

Par définition, la variation de $\mathcal{J}$ est donnée par :

$$\mathcal{J}' = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\mathcal{J}(\mathbf{u} + \epsilon \delta \mathbf{u}, \Phi + \epsilon \delta \Phi) - \mathcal{J}(\mathbf{u}, \Phi)}{\epsilon}$$

où $\mathcal{J}$ est défini par (5.13) ou (5.14) selon que l'on prenne en compte le champ moyen de vitesse ou non.

Les termes qui interviennent dans $\mathcal{J}$ sont au plus quadratiques. La variation de $\mathcal{J}$ est donc donnée de manière immédiate par :

$$\begin{aligned} \mathcal{J}'(\mathbf{u}, \Phi) &= \ell \int_{t_0}^{t_0+T_o} \int_{\Gamma_2^{\pm}} \Phi \delta \Phi d\mathbf{x} dt + \ell_{ter} \int_{\Omega} [u_i \delta u_i]_{t=t_0+T_o} d\mathbf{x} \\ &+ \ell_{reg} \int_{t_0}^{t_0+T_o} \int_{\Omega} u_i \delta u_i d\mathbf{x} dt + \ell_{drag} \int_{t_0}^{t_0+T_o} \int_{\Gamma_2^{\pm}} (-\delta \tau_{12} n_2) d\mathbf{x} dt \end{aligned} \quad (5.15)$$

ou bien

$$\begin{aligned} \mathcal{J}'(\mathbf{u}', \Phi) &= \ell \int_{t_0}^{t_0+T_o} \int_{\Gamma_2^{\pm}} \Phi \delta \Phi d\mathbf{x} dt + \ell_{ter} \int_{\Omega} [u'_i \delta u'_i]_{t=t_0+T_o} d\mathbf{x} \\ &+ \ell_{reg} \int_{t_0}^{t_0+T_o} \int_{\Omega} u'_i \delta u'_i d\mathbf{x} dt + \ell_{drag} \int_{t_0}^{t_0+T_o} \int_{\Gamma_2^{\pm}} (-\delta \tau'_{12} n_2) d\mathbf{x} dt \end{aligned} \quad (5.16)$$

dans le cas des fluctuations de vitesse.

5.2.1.3 Système optimal

La théorie des multiplicateurs de Lagrange impose que :

$$\mathcal{I}' = \mathcal{J}'$$

et cela, quelles que soient les variations δu_i (respectivement $\delta u'_i$), δP et $\delta \Phi$ pour $\mathcal{J}$ définie par (5.13) (respectivement (5.14)).

Cas de la fonctionnelle coût (5.13) On montre (voir section I.3.1) que cela conduit à l'équation adjointe suivante pour le problème optimal :

$$\mathcal{L}_i^*(\mathbf{u}^*, P^*) = -\frac{\partial u_i^*}{\partial t} - 2u_j S_{ij}^* - \kappa \frac{\partial P^*}{\partial x_i} - \frac{1}{Re_\tau} \frac{\partial^2 u_i^*}{\partial x_j^2} - \ell_{reg} u_i = 0$$

Cette équation est munie des conditions aux limites :

$$u_1^*|_{\Gamma_{2\pm}} = \ell_{drag} ; u_2^*|_{\Gamma_{2\pm}} = 0 ; u_3^*|_{\Gamma_{2\pm}} = 0,$$

et de la condition terminale suivante

$$u_i^*(t_0 + T_o) = \ell_{ter} u_i(t_0 + T_o).$$

En outre, les variables adjointes u_i^* vérifient comme les variables d'état la condition d'incompressibilité :

$$\frac{\partial u_i^*}{\partial x_i} = 0$$

Finalement, en prenant en compte les conditions aux limites des variables adjointes, on montre que le gradient de la fonctionnelle coût $\mathcal{J}$ par rapport aux variables de contrôle (la condition d'optimalité) est donné par :

$$\frac{D\mathcal{J}}{D\Phi} = \ell\Phi + \kappa P^*$$

La figure 5.1 présente de manière synthétique le système optimal correspondant au cas des équations de Navier-Stokes simulées par DNS.

Cas de la fonctionnelle coût (5.14) Dans ce cas, on montre (voir section I.3.2) que le système optimal peut être déduit simplement du système optimal précédent. En effet, il suffit de remplacer sur la figure 5.1 :

1. le terme $\ell_{reg} u_i$ par $\ell_{reg} u'_i$ dans l'équation adjointe,

2. le terme $\ell_{ter} u_i(t_0 + T_o)$ par $\ell_{ter} u'_i(t_0 + T_o)$ dans la condition terminale de l'équation adjointe.

Ces deux modifications étant mineures, nous ne redonnons pas de figure résumé.

5.2.2 Système optimal basé sur les équations de Navier-Stokes résolues par LES

Dans cette section, nous allons donner une description de la démarche qui conduit au système optimal pour les équations de Navier-Stokes simulées par LES. Cependant, nous ne donnerons pas les détails des développements que le lecteur pourra trouver intégralement à l'annexe J.

Nous allons suivre une démarche similaire à celle décrite dans la section précédente dans le cas où les équations de Navier-Stokes étaient simulées par DNS. La difficulté principale provient du calcul de la variation de la viscosité ν qui n'est maintenant plus supposée constante. Comparé à la section précédente, il y aura donc un nouveau terme à prendre en compte $\mathcal{I}'_\nu$ (voir § J.1.6) pour évaluer la variation de $\mathcal{I}$.

Soient $\bar{\mathbf{u}}^*$ et $\bar{P}^*$, les variables adjointes associées respectivement aux variables d'état $\bar{\mathbf{u}}$ et $\bar{P}$, on introduit la nouvelle fonctionnelle :

$$\mathcal{I}(\bar{\mathbf{u}}, \bar{P}, \bar{\Phi}) = \int_{t_0}^{t_0+T_o} \int_{\Omega} \mathcal{L}_i(\bar{\mathbf{u}}, \bar{P}) \bar{u}_i^* d\mathbf{x} dt + \int_{t_0}^{t_0+T_o} \int_{\Omega} \left(\kappa \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} \right) \bar{P}^* d\mathbf{x} dt \quad (5.17)$$

où $\mathcal{L}_i(\bar{\mathbf{u}}, \bar{P})$ correspond ici à l'équation LES (5.7). $\kappa = \pm 1$ est introduit ici devant l'équation de continuité afin d'obtenir des expressions plus générales.

On suppose qu'une variation $\delta\bar{\Phi}$ du contrôle $\bar{\Phi}$ provoque des variations $\delta\bar{\mathbf{u}}$ de $\bar{\mathbf{u}}$, $\delta\bar{P}$ de $\bar{P}$, $\mathcal{I}'$ de $\mathcal{I}$ et $\mathcal{J}'$ de $\mathcal{J}$. Par définition, la variation de $\mathcal{I}$ est égale à la dérivée de Fréchet au point $(\bar{\mathbf{u}}, \bar{P}, \bar{\Phi})$ dans les directions $(\delta\bar{\mathbf{u}}, \delta\bar{P}, \delta\bar{\Phi})$ de $\mathcal{I}$, soit :

$$\mathcal{I}' = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\mathcal{I}(\bar{\mathbf{u}} + \epsilon\delta\bar{\mathbf{u}}, \bar{P} + \epsilon\delta\bar{P}, \bar{\Phi} + \epsilon\delta\bar{\Phi}) - \mathcal{I}(\bar{\mathbf{u}}, \bar{P}, \bar{\Phi})}{\epsilon} \quad (5.18)$$

5.2.2.1 Variation de $\mathcal{I}$

Après calculs et simplifications (voir section J.1), on aboutit à (§ J.1.7) :

$$\mathcal{I}' = \mathcal{I}'_{\Omega} + \mathcal{I}'_{\Gamma} + \mathcal{I}'_T$$

EQUATIONS D'ÉTAT :

$$\mathcal{L}_i(\mathbf{u}, P) = \frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (u_i u_j) - \frac{1}{Re_\tau} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + \frac{\partial P}{\partial x_i} = F_i \delta_{i1}$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0$$

$$u_1|_{\Gamma_{2\pm}} = 0; u_2|_{\Gamma_{2\pm}} = -\Phi n_2; u_3|_{\Gamma_{2\pm}} = 0 \quad (\text{CL})$$

$$u_1(\mathbf{x}, 0) = u_0(\mathbf{x}); u_2(\mathbf{x}, 0) = v_0(\mathbf{x}); u_3(\mathbf{x}, 0) = w_0(\mathbf{x}) \quad (\text{CI})$$

EQUATIONS ADJOINTES :

$$\mathcal{L}_i^*(\mathbf{u}^*, P^*) = -\frac{\partial u_i^*}{\partial t} - 2 u_j S_{ij}^* - \kappa \frac{\partial P^*}{\partial x_i} - \frac{1}{Re_\tau} \frac{\partial^2 u_i^*}{\partial x_j^2} - \ell_{reg} u_i = 0$$

$$\frac{\partial u_i^*}{\partial x_i} = 0$$

$$u_1^*|_{\Gamma_{2\pm}} = \ell_{drag}; u_2^*|_{\Gamma_{2\pm}} = 0; u_3^*|_{\Gamma_{2\pm}} = 0 \quad (\text{CL})$$

$$u_i^*(t_0 + T_o) = \ell_{ter} u_i(t_0 + T_o) \quad (\text{CT})$$

CONDITION D'OPTIMALITÉ :

$$\frac{D \mathcal{J}}{D \Phi} = \ell \Phi + \kappa P^*$$

FONCTIONNELLE COÛT :

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(\mathbf{u}, \Phi) = & \frac{\ell}{2} \int_{t_0}^{t_0+T_o} \int_{\Gamma_2^\pm} \Phi^2 d\mathbf{x} dt + \frac{\ell_{ter}}{2} \int_{\Omega} [u_i(\Phi) u_i(\Phi)]_{t=t_0+T_o} d\mathbf{x} \\ & + \frac{\ell_{reg}}{2} \int_{t_0}^{t_0+T_o} \int_{\Omega} |\mathbf{u}(\Phi)|^2 d\mathbf{x} dt + \ell_{drag} \int_{t_0}^{t_0+T_o} \int_{\Gamma_2^\pm} (-\tau_{12} n_2) d\mathbf{x} dt \end{aligned}$$

FIGURE 5.1 – Système optimal pour les équations de Navier-Stokes simulées par DNS. Approche différentiation discrétisation. $\kappa = \pm 1$.

avec

$$\mathcal{I}'_{\Omega} = \int_{t_0}^{t_0+T_o} \int_{\Omega} \left[-\frac{\partial \bar{u}_i^*}{\partial t} - 2\bar{u}_j \bar{S}_{ij}^* - \kappa \frac{\partial \bar{P}^*}{\partial x_i} - 2\nu \frac{\partial \bar{S}_{ij}^*}{\partial x_j} - \left[\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{4C\bar{\Delta}^2}{|\bar{S}|} \bar{S}_{kl} \bar{S}_{kl}^* \bar{S}_{ij} \right) + \frac{\partial E_{ij}}{\partial x_j} + B_i \right] \right] \delta \bar{u}_i d\mathbf{x} dt + \int_{t_0}^{t_0+T_o} \int_{\Omega} \left(-\frac{\partial \bar{u}_i^*}{\partial x_i} \delta \bar{P} \right) d\mathbf{x} dt,$$

$$\mathcal{I}'_{\Gamma} = \int_{t_0}^{t_0+T_o} \int_{\Gamma} \left[(\bar{u}_i \delta \bar{u}_j + \bar{u}_j \delta \bar{u}_i) \bar{u}_i^* n_j + \delta \bar{P} \bar{u}_i^* n_i + \kappa \bar{P}^* \delta \bar{u}_i n_i - 2(\nu \delta \bar{S}_{ij} + \delta \nu \bar{S}_{ij}) \bar{u}_i^* n_j + 2\nu \bar{S}_{ij}^* \delta \bar{u}_i n_j + \frac{4C\bar{\Delta}^2}{|\bar{S}|} \bar{S}_{kl} \bar{S}_{kl}^* \bar{S}_{ij} \delta \bar{u}_i n_j + E_{ij} \delta \bar{u}_i n_j \right] d\mathbf{x} dt$$

et

$$\mathcal{I}'_T = \int_{\Omega} [\delta \bar{u}_i \bar{u}_i^*]_{t_0}^{t_0+T_o} d\mathbf{x}.$$

Pour simplifier les expressions de ces termes, nous avons introduit le tenseur E_{ij} et le vecteur B_i . Ces quantités proviennent de la prise en compte de la variation de la constante de Smagorinsky dynamique C lorsque le contrôle agit. Si un coefficient de Smagorinsky constant est utilisé, ces deux termes seront naturellement nuls. Le tenseur E_{ij} et le vecteur B_i sont définis par les relations :

$$E_{ij} = 4 \left(\widehat{P_{ij}} |\bar{S}| - \eta^2 \widehat{P_{ij} |\bar{S}|} \right) + 8 \left(\widehat{P_{kl}} \frac{\bar{S}_{kl} \bar{S}_{ij}}{|\bar{S}|} - \eta^2 \widehat{P_{kl} \frac{\bar{S}_{ij} \bar{S}_{kl}}{|\bar{S}|}} \right) \quad \text{où} \quad \eta = \widehat{\Delta} / \bar{\Delta}$$

et

$$B_i = 4 \left(\widehat{N_{ij} \bar{u}_j} - \widehat{N_{ij}} \bar{u}_j \right).$$

Les tenseurs P_{ij} et N_{ij} apparaissant respectivement dans E_{ij} et B_i sont quant à eux donnés par les expressions suivantes :

$$N_{ij} = \frac{\langle |\bar{S}| \bar{S}_{mn} \bar{S}_{mn}^* \rangle_{XZ}}{\langle M_{kl} M_{kl} \rangle_{XZ}} M_{ij} \quad (5.19)$$

et

$$P_{ij} = \frac{\langle |\bar{S}| \bar{S}_{mn} \bar{S}_{mn}^* \rangle_{XZ}}{\langle M_{kl} M_{kl} \rangle_{XZ}} \left(L_{ij} - 2C\bar{\Delta}^2 M_{ij} \right). \quad (5.20)$$

Pour déterminer le système optimal, nous procédons comme à la section 5.2.1.1 et simplifions d'abord les expressions de $\mathcal{I}'_{\Gamma}$ et $\mathcal{I}'_T$. Pour $\mathcal{I}'_{\Gamma}$, nous tenons compte des conditions aux limites imposées aux parois inférieure et supérieure $\Gamma_2^{\pm}$ du canal, soit :

$$\begin{array}{lll} n_1 = 0 & n_2 = \mp 1 & n_3 = 0 \\ \overline{u}_1 = 0 & \overline{u}_2 = -\overline{\Phi} n_2 & \overline{u}_3 = 0 \\ \overline{S}_{11} = 0 & \overline{S}_{22} = 0 & \overline{S}_{33} = 0 \end{array}$$

On montre alors (voir § J.1.8.1) que :

$$\begin{aligned} \mathcal{I}'_\Gamma &= \int_{t_0}^{t_0+T_o} \int_{\Gamma_2^\pm} - \left(2 \overline{u}_2 \overline{u}_2^* + 2 \nu \overline{S}_{22}^* + E_{22} + \kappa \overline{P}^* \right) \delta \overline{\Phi} d\mathbf{x} dt \\ &+ \int_{t_0}^{t_0+T_o} \int_{\Gamma_2^\pm} (\delta \overline{P} \overline{u}_2^* n_2 - \delta \tau_{i2} \overline{u}_i^* n_2) d\mathbf{x} dt \end{aligned} \quad (5.21)$$

Pour les mêmes raisons qu'à la section 5.2.1.1 (condition initiale connue de manière exacte), le terme $\mathcal{I}'_T$ s'écrit encore :

$$\mathcal{I}'_T = \int_{\Omega} [\delta \overline{u}_i \overline{u}_i^*]_{t=t_0+T_o} d\mathbf{x}.$$

5.2.2.2 Variation de $\mathcal{J}$

Pour obtenir la variation de $\mathcal{J}$, il suffit ici de reprendre les résultats de la section 5.2.1.2 en se contentant d'adapter les notations. On obtient immédiatement :

$$\begin{aligned} \mathcal{J}'(\overline{\mathbf{u}}, \overline{\Phi}) &= \ell \int_{t_0}^{t_0+T_o} \int_{\Gamma_2^\pm} \overline{\Phi} \delta \overline{\Phi} d\mathbf{x} dt + \ell_{ter} \int_{\Omega} [\overline{u}_i \delta \overline{u}_i]_{t=t_0+T_o} d\mathbf{x} \\ &+ \ell_{reg} \int_{t_0}^{t_0+T_o} \int_{\Omega} \overline{u}_i \delta \overline{u}_i d\mathbf{x} dt + \ell_{drag} \int_{t_0}^{t_0+T_o} \int_{\Gamma_2^\pm} (-\delta \tau_{12} n_2) d\mathbf{x} dt \end{aligned}$$

ou bien

$$\begin{aligned} \mathcal{J}'(\overline{\mathbf{u}}', \overline{\Phi}) &= \ell \int_{t_0}^{t_0+T_o} \int_{\Gamma_2^\pm} \overline{\Phi} \delta \overline{\Phi} d\mathbf{x} dt + \ell_{ter} \int_{\Omega} [\overline{u}'_i \delta \overline{u}'_i]_{t=t_0+T_o} d\mathbf{x} \\ &+ \ell_{reg} \int_{t_0}^{t_0+T_o} \int_{\Omega} \overline{u}'_i \delta \overline{u}'_i d\mathbf{x} dt + \ell_{drag} \int_{t_0}^{t_0+T_o} \int_{\Gamma_2^\pm} (-\delta \tau'_{12} n_2) d\mathbf{x} dt \end{aligned}$$

dans le cas où on base la fonctionnelle sur des fluctuations de vitesse.

5.2.2.3 Système optimal

La théorie des multiplicateurs de Lagrange impose que :

$$\mathcal{I}' = \mathcal{J}'$$

et cela, quelles que soient les variations $\delta \overline{u}_i$ (respectivement $\delta \overline{u}'_i$), $\delta \overline{P}$ et $\delta \overline{\Phi}$ où $\mathcal{J}$ est donnée par (5.4) (respectivement (5.5)).

Cas de la fonctionnelle coût (5.4) On montre (voir section J.3.1) que cela conduit à l'équation adjointe suivante pour le problème optimal :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_i^*(\mathbf{u}^*, P^*) = & -\frac{\partial \bar{u}_i^*}{\partial t} - 2\bar{u}_j \bar{S}_{ij}^* - \kappa \frac{\partial \bar{P}^*}{\partial x_i} - 2\nu \frac{\partial \bar{S}_{ij}^*}{\partial x_j} \\ & - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{4C \bar{\Delta}^2}{|\bar{S}|} \bar{S}_{kl}^* \bar{S}_{kl}^* \bar{S}_{ij}^* \right) - \frac{\partial E_{ij}}{\partial x_j} - B_i - \ell_{reg} \bar{u}_i = 0 \end{aligned}$$

Cette équation est munie des conditions aux limites

$$\bar{u}_1^*|_{\Gamma_{2\pm}} = \ell_{drag}; \bar{u}_2^*|_{\Gamma_{2\pm}} = 0; \bar{u}_3^*|_{\Gamma_{2\pm}} = 0$$

et de la condition terminale suivante

$$\bar{u}_i^*(t_0 + T_o) = \ell_{ter} \bar{u}_i(t_0 + T_o).$$

Par ailleurs, les variables adjointes $\bar{u}_i^*$ vérifient comme les variables d'état la condition d'incompressibilité :

$$\frac{\partial \bar{u}_i^*}{\partial x_i} = 0$$

Finalement, en prenant en compte les conditions aux limites des variables adjointes, on montre que le gradient de la fonctionnelle coût $\mathcal{J}$ par rapport aux variables de contrôle (la condition d'optimalité) est donné par :

$$\frac{D \mathcal{J}}{D \bar{\Phi}} = \ell \bar{\Phi} + E_{22} + \kappa \bar{P}^*$$

La figure 5.2 présente de manière synthétique le système optimal correspondant au cas des équations de Navier-Stokes simulées par LES.

Cas de la fonctionnelle coût (5.5) Dans ce cas, on montre (voir section J.3.2) que le système optimal peut être déduit simplement du système optimal précédent. En effet, il suffit de remplacer sur la figure 5.2 :

1. le terme $\ell_{reg} \bar{u}_i$ par $\ell_{reg} \bar{u}_i'$ dans l'équation adjointe,
2. le terme $\ell_{ter} \bar{u}_i(t_0 + T_o)$ par $\ell_{ter} \bar{u}_i'(t_0 + T_o)$ dans la condition terminale de l'équation adjointe.

A nouveau, ces deux modifications étant mineures, nous ne redonnons pas de figure résumé.

EQUATIONS D'ÉTAT :

$$\mathcal{L}_i(\bar{\mathbf{u}}, \bar{P}) = \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{u}_i \bar{u}_j) - 2 \frac{\partial}{\partial x_j} (\nu \bar{S}_{ij}) + \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} = F_i \delta_{i1}$$

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0$$

$$\bar{u}_1|_{\Gamma_{2\pm}} = 0; \bar{u}_2|_{\Gamma_{2\pm}} = -\bar{\Phi} n_2; \bar{u}_3|_{\Gamma_{2\pm}} = 0 \quad (\text{CL})$$

$$\bar{u}_1(\mathbf{x}, 0) = \bar{u}_0(\mathbf{x}); \bar{u}_2(\mathbf{x}, 0) = \bar{v}_0(\mathbf{x}); \bar{u}_3(\mathbf{x}, 0) = \bar{w}_0(\mathbf{x}) \quad (\text{CI})$$

EQUATIONS ADJOINTES :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_i^*(\bar{\mathbf{u}}^*, \bar{P}^*) = & -\frac{\partial \bar{u}_i^*}{\partial t} - 2 \bar{u}_j \bar{S}_{ij}^* - \kappa \frac{\partial \bar{P}^*}{\partial x_i} - 2 \nu \frac{\partial \bar{S}_{ij}^*}{\partial x_j} \\ & - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{4 C \bar{\Delta}^2}{|\bar{S}|} \bar{S}_{kl} \bar{S}_{kl}^* \bar{S}_{ij} \right) - \frac{\partial E_{ij}}{\partial x_j} - B_i - \ell_{reg} \bar{u}_i = 0 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \bar{u}_i^*}{\partial x_i} = 0$$

$$\bar{u}_1^*|_{\Gamma_{2\pm}} = \ell_{drag}; \bar{u}_2^*|_{\Gamma_{2\pm}} = 0; \bar{u}_3^*|_{\Gamma_{2\pm}} = 0 \quad (\text{CL})$$

$$\bar{u}_i^*(t_0 + T_o) = \ell_{ter} \bar{u}_i(t_0 + T_o) \quad i = 1, 2, 3. \quad (\text{CT})$$

CONDITIONS D'OPTIMALITÉ :

$$\frac{D \mathcal{J}}{D \bar{\Phi}} = \ell \bar{\Phi} + E_{22} + \kappa \bar{P}^*$$

FONCTIONNELLE COÛT :

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(\bar{\mathbf{u}}, \bar{\Phi}) = & \frac{\ell}{2} \int_{t_0}^{t_0+T_o} \int_{\Gamma_2^\pm} \bar{\Phi}^2 d\mathbf{x} dt + \frac{\ell_{ter}}{2} \int_{\Omega} [\bar{u}_i(\bar{\Phi}) \bar{u}_i(\bar{\Phi})]_{t=t_0+T_o} d\mathbf{x} \\ & + \frac{\ell_{reg}}{2} \int_{t_0}^{t_0+T_o} \int_{\Omega} |\bar{\mathbf{u}}(\bar{\Phi})|^2 d\mathbf{x} dt + \ell_{drag} \int_{t_0}^{t_0+T_o} \int_{\Gamma_2^\pm} (-\tau_{12} n_2) d\mathbf{x} dt \end{aligned}$$

FIGURE 5.2 – Système optimal pour les équations de Navier-Stokes simulées par LES. Approche différentiation discrétisation. $\kappa = \pm 1$.

5.3 Discussions sur la résolution du système optimal

A la section 4.3.1.3, nous avons décrit pour un problème d'optimisation sous contraintes générique, l'algorithme itératif utilisé pour résoudre le système optimal. Dans la section 5.3.1, nous allons adapter cette présentation au cas du système optimal pour les équations de Navier-Stokes simulées par LES (voir figure 5.2). De cette manière, la nécessité d'introduire une procédure de contrôle instantané (section 5.3.2) devrait apparaître de manière plus naturelle.

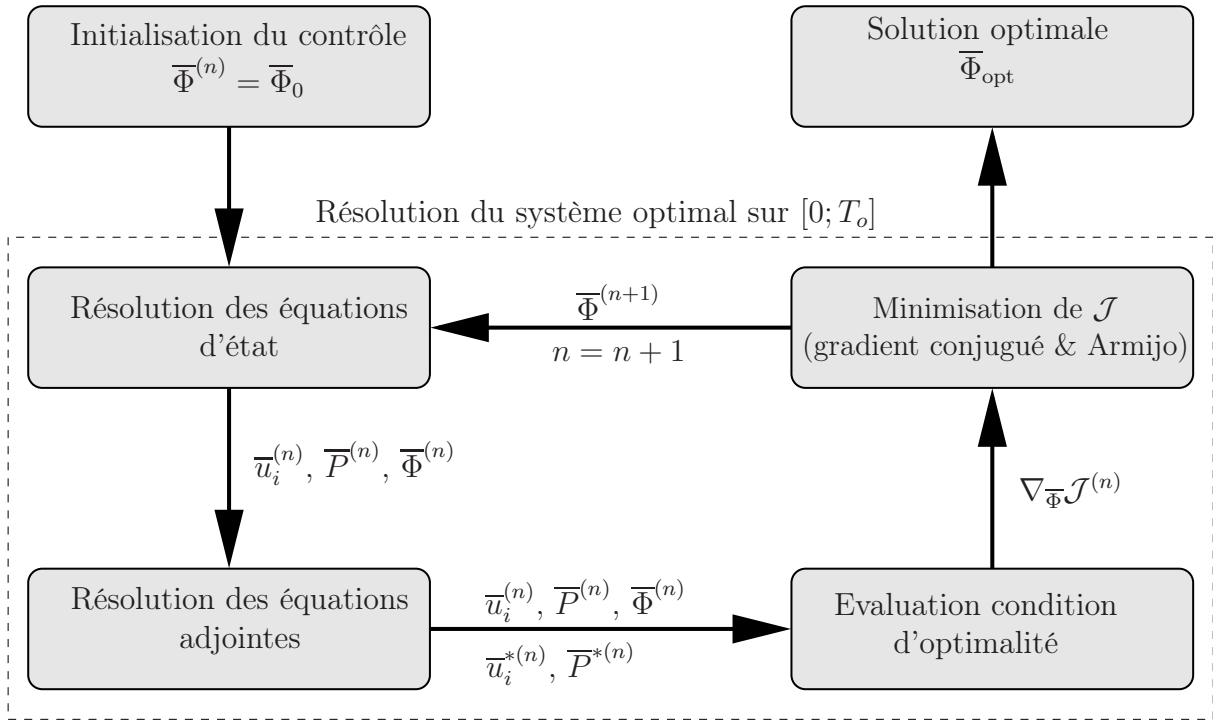


FIGURE 5.3 – Représentation schématique du processus de résolution du système optimal pour les équations de Navier-Stokes simulées par LES. Optimisation sur $[0; T_o]$.

5.3.1 Algorithme de résolution

Le système optimal résumé sur la figure 5.2 peut être résolu par méthode itérative de la manière suivante. On initialise la résolution avec un contrôle donné $\bar{\Phi}_0$. Puis, pour $n = 0, 1, 2, \dots$ et tant qu'un critère de convergence donné n'est pas vérifié, on réalise les phases suivantes :

1. Détermination des variables d'état $\bar{u}_i^{(n)}$ et $\bar{P}^{(n)}$ par résolution en temps croissant sur $[0; T_o]$ de l'équation d'état

$$\mathcal{L}_i(\bar{\mathbf{u}}, \bar{P}) - F_i \delta_{i1} = 0.$$

2. Détermination des variables adjointes $\bar{u}_i^{*(n)}$ et $\bar{P}^{*(n)}$ par résolution en temps décroissant sur $[0; T_o]$ de l'équation adjointe

$$\mathcal{L}_i^*(\mathbf{u}^*, P^*) = 0.$$

3. Détermination de nouveaux paramètres de contrôle $\bar{\Phi}^{(n+1)}$ par évaluation de la condition d'optimalité

$$\frac{D\mathcal{J}}{D\bar{\Phi}} = \ell\bar{\Phi} + E_{22} + \kappa\bar{P}^*. \quad (5.22)$$

4. Incrémentation $n = n + 1$ et retour à l'étape 1.

L'algorithme de résolution est synthétisé sur la figure 5.3.

5.3.1.1 Algorithme de minimisation

Dans notre cas, la détermination à l'étape 3 d'un nouveau contrôle $\bar{\Phi}^{(n+1)}$ est effectuée par un algorithme de gradient conjugué. Plus précisément, nous avons utilisé le même type d'algorithme de gradient conjugué que pour l'équation de Burgers, soit la méthode de Hestenes-Stiefel (voir section 4.4.3 pour une description de la méthode). Afin de limiter le coût de la recherche linéaire, nous n'utilisons pas une méthode de recherche linéaire exacte mais la méthode d'Armijo à rebroussement. L'étape de recherche linéaire est potentiellement très consommatrice en temps de calcul car pour déterminer le pas de descente à un itéré donné, il peut être nécessaire de réaliser plusieurs simulations de l'équation d'état pour différentes valeurs du terme de contrôle.

5.3.1.2 Critère de convergence

L'utilisation de l'algorithme du gradient conjugué nécessite la définition d'un critère de convergence pour arrêter la résolution itérative. Le plus immédiat⁶ consiste à considérer que lorsque la différence entre deux valeurs successives de la fonctionnelle coût $\Delta\mathcal{J} = |\mathcal{J}^{(n+1)} - \mathcal{J}^{(n)}|$ est inférieure à un seuil donné ε alors le minimum local de la fonctionnelle $\mathcal{J}$ a été atteint. Le nombre d'itérations correspondant à cette valeur de ε varie selon le type de fonctionnelle coût, la longueur de la période d'optimisation T_o et les poids relatifs des termes de la fonctionnelle coût. Dans toutes nos simulations, nous avons adopté $\varepsilon = 0,005$ comme critère d'arrêt de la boucle d'optimisation.

6. D'autres critères sont naturellement imaginables : on peut par exemple se fixer un nombre maximal d'itération $iter_{\max}$ (Chang, 2000) ou retenir un mélange des deux précédents critères.

5.3.1.3 Résolution numérique des équations adjointes

Les méthodes numériques utilisées pour résoudre les équations adjointes sont analogues à celles mises en œuvre pour la résolution des équations LES (voir section 2.4). La discrétisation temporelle est faite à l'aide d'un schéma mixte Runge-Kutta/Crank-Nicolson. Une méthode à pas fractionnaire permet de vérifier la condition d'incompressibilité pour le champ de vitesse adjoint. Pour la discrétisation en espace, un schéma aux différences finies d'ordre 2 est utilisé. Enfin, l'équation de Poisson est résolue dans le domaine spectral à l'aide de nombres d'onde modifiés. Plus de détails sur les méthodes numériques sont donnés à l'annexe K.

5.3.2 Procédure de contrôle instantané

Le choix de la dimension de la période d'optimisation T_o sur laquelle est résolu le système optimal a des conséquences très importantes. En effet, Bewley (1999) et Chang (2000) ont montré que T_o devait être de l'ordre de 2000 à 3000 en unité de parois pour parvenir à relaminariser par contrôle optimal un écoulement de canal à $Re_\tau = 100$. Cependant, la résolution du système optimal sur une période d'optimisation aussi grande est délicate numériquement, voire impossible, et cela pour plusieurs raisons :

1. **Difficultés numériques liées à la détermination du gradient de la fonctionnelle coût.** La non linéarité des équations de Navier-Stokes et la croissance exponentielle⁷ des variables adjointes, lors de l'intégration temporelle en temps rétrograde des équations adjointes, font que les erreurs numériques s'accumulent au cours de la résolution. La qualité de l'estimation du gradient de la fonctionnelle coût en est alors affectée et peut conduire à des gradients complètement irréalistes.
2. **Difficultés liées au stockage mémoire.** Les équations adjointes sont résolues en temps rétrograde. Or, à un itéré n quelconque de la procédure itérative de résolution (voir figure 5.3), les équations adjointes dépendent des solutions des équations d'état au même itéré. Par conséquent, il est nécessaire de sauvegarder les évolutions en temps et en espace des variables d'état (vitesse, pression) pour être en mesure de résoudre les équations adjointes. La demande en mémoire vive nécessaire à la

7. De manière à réduire au maximum les efforts de programmation, la tendance générale est d'utiliser le même type de méthodes numériques pour résoudre les équations d'état et les équations adjointes (voir annexe K). En effet, on pense de prime abord que la linéarité des équations adjointes va plutôt simplifier leur résolution. Or, l'expérience montre qu'afin d'éviter (ou au moins limiter) la croissance exponentielle des variables adjointes lors de l'intégration temporelle, il est au contraire nécessaire d'utiliser des méthodes numériques de précision supérieure.

résolution des équations adjointes devient alors rapidement prohibitive.

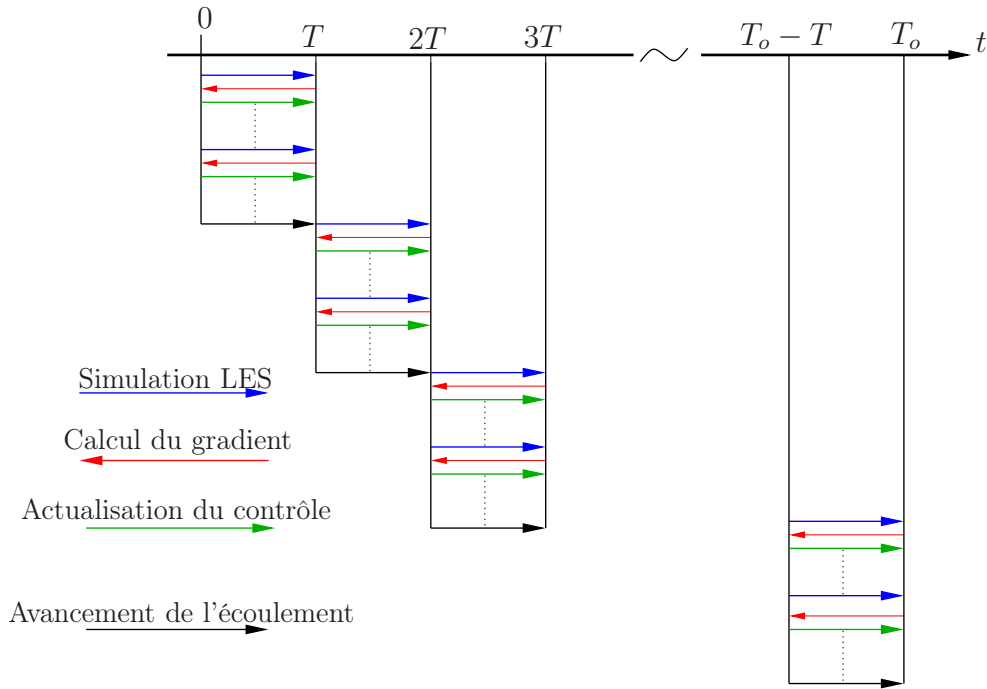


FIGURE 5.4 – Résolution du système optimal sur un intervalle de longueur T_o par contrôle instantané ($t_0 = 0$).

Pour contourner ces difficultés de mise en œuvre pratique, une méthode consiste à remplacer le problème d'optimisation initial défini sur un intervalle de longueur T_o par N ($N > 1$) problèmes d'optimisation équivalents définis sur des intervalles de longueur inférieure T (voir figure 5.4). Pour cela, on commence par créer une subdivision de l'intervalle initial d'optimisation $[0; T_o]$ en N sous-intervalles⁸ $[T_k; T_{k+1}]$ ($k = 0, \dots, N$) de longueur T . Le système optimal est ensuite résolu sur chacun de ces sous-intervalles, après avoir initialisé le contrôle à la solution obtenue sur le sous-intervalle précédent. Cette approche dite du *contrôle instantané* est décrite de manière schématique sur la figure 5.5. On constate en comparant les figures 5.3 et 5.5 que cette procédure revient à ajouter à l'algorithme précédent une boucle extérieure dont l'indice varie sur le numéro de sous-intervalles k . Cette procédure de contrôle instantané a été comparée dans Bewley (1999) à la stratégie mise en place par un joueur d'échec (ou un ordinateur) pour battre son adversaire. En effet, un bon joueur est celui qui peut prévoir sur le plus grand nombre de coups successifs possibles les conséquences des déplacements de ses pièces. En cela, l'ordinateur est évidemment avantage

8. Dans ce mémoire, comme dans l'ensemble des applications rencontrées en mécanique des fluides, les sous-intervalles sont construits sans recouvrement. Une variante consiste à imposer aux sous-intervalles un recouvrement. L'effet de celui-ci sur la convergence du processus reste à analyser.

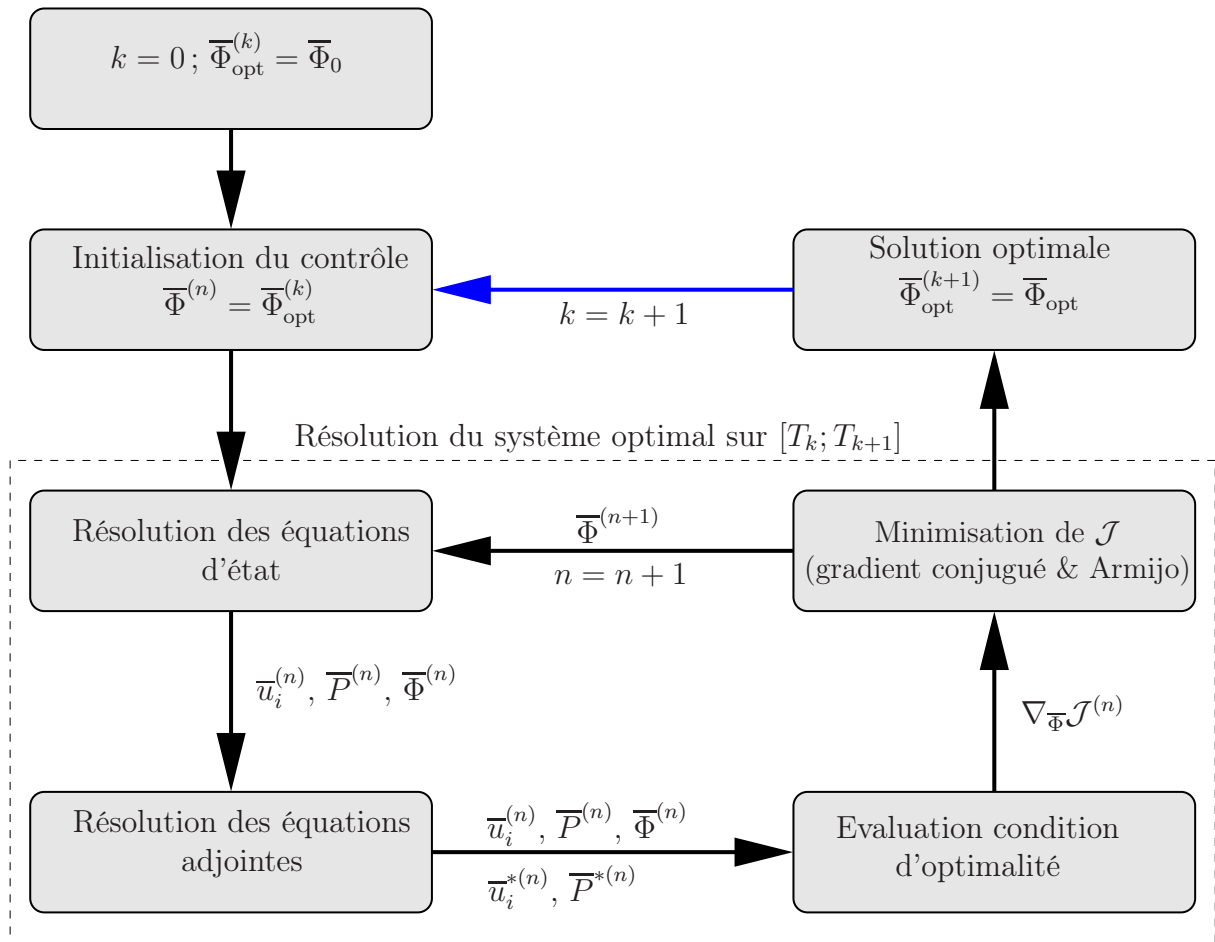


FIGURE 5.5 – Représentation schématique du processus de résolution du système optimal pour les équations de Navier-Stokes simulées par LES. Optimisation sur $[0; T_o]$ par contrôle instantané.

car il peut analyser par pure combinatoire un grand nombre de solutions. Heureusement, l'inventivité qui est jusqu'à présent l'apanage de l'Homme est souvent décisive dans une partie d'échec.

A convergence de la procédure, on souhaite que la solution obtenue par cette approche corresponde à celle qui aurait été obtenue si on avait pu résoudre le système optimal directement sur l'intervalle $[0; T_o]$. Malheureusement, à ce jour, il n'existe aucun résultat mathématique pouvant le prouver. A défaut, une précaution consiste à retenir une longueur d'intervalle T suffisamment importante pour que sur la période concernée toutes les structures importantes pour la physique de l'écoulement aient le temps d'interagir. De cette manière, le gradient de la fonctionnelle coût devrait être construit à partir d'informations pertinentes et ainsi faciliter la convergence numérique. Cependant, allonger la longueur du sous-intervalle d'optimisation T , entraîne une augmentation de la taille mémoire nécessaire à la sauvegarde des variables d'état. Pour limiter les contraintes du stockage mémoire, une procédure d'interpolation est utilisée. Dans ce mémoire, nous sauvegardons les variables d'état toutes les 5 itérations, puis les reconstruisons par interpolation linéaire à l'étape de résolution de l'équation adjointe. L'interpolation des variables d'état entre les sous pas de temps du schéma RK3W se fait en utilisant la relation (2.39).

5.4 Résultats de contrôle optimal pour $Re_\tau = 100$

Dans cette section, nous allons présenter les résultats de contrôle optimal obtenus par LES pour $Re_\tau = 100$. Le choix de cette valeur du nombre de Reynolds se justifie par l'existence dans la littérature de résultats de contrôle optimal par DNS (Bewley *et al.*, 2001) et LES (Chang, 2000) pour cette même valeur. Ainsi, nous pourrions valider de manière qualitative l'ensemble de nos développements (parties analytique et numérique). Par ailleurs, cette valeur du nombre de Reynolds est suffisamment petite pour que l'on puisse réaliser pour des coûts numériques raisonnables un grand nombre de simulations et ainsi analyser l'effet de certains paramètres sur la solution. Nous étudierons en particulier l'influence du choix de la fonctionnelle coût (section 5.4.2), de la longueur de la période d'optimisation (section 5.4.3) et du coût du contrôle (section 5.4.4).

5.4.1 Caractéristiques des simulations

Les simulations de contrôle optimal à $Re_\tau = 100$ ont été effectuées avec la même taille de domaine spatial que celle utilisée pour les simulations sans contrôle de la section 2.5, soit

$(4\pi, 2, 4/3\pi)$. Pour limiter les coûts de calcul, nous avons réduit la résolution par rapport à la simulation S_3 réalisée à la section 2.5 pour $Re_\tau = 180$. Ainsi, le nombre de points de maillage est $48 \times 49 \times 48$, ce qui est largement suffisant pour $Re_\tau = 100$. La figure 5.6 illustre la distribution en tangente hyperbolique utilisée pour les simulations à $Re_\tau = 100$. Enfin, le pas de temps est $\Delta t = 0,003$, soit $\Delta t^+ = 0,3$ en unité de paroi. L'ensemble des paramètres des simulations LES est résumé dans le tableau 5.1.

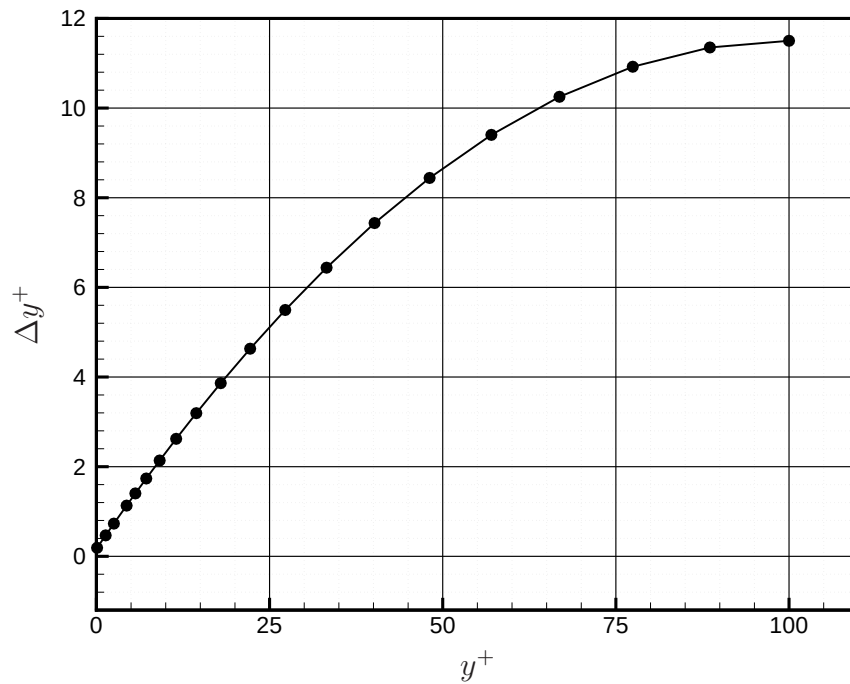


FIGURE 5.6 – Valeur du pas d'espace dans la direction normale à la paroi en fonction de la distance à la paroi inférieure. Cas de la simulation numérique de contrôle optimal à $Re_\tau = 100$.

TABLE 5.1 – Grandeurs caractéristiques des simulations de contrôle optimal par LES réalisées à $Re_\tau = 100$.

Re_τ	Re_c	Re_b	L_x	L_y	L_z	N_x	N_y	N_z	Δx^+	Δy_w^+	Δz^+	Δt^+
100	1817	3030,3	4π	2	$\frac{4}{3}\pi$	48	49	48	26,2	0,19	8,7	0,3

Pour toutes les simulations, la transition laminaire/turbulente est générée de manière similaire à ce qui avait été réalisé en écoulement non contrôlé (voir section 2.5.1.3 pour la procédure). Par ailleurs, sur toutes les figures qui seront présentées dans le reste de

ce chapitre, le temps $t = 0$ correspond de manière arbitraire au début de l'application du contrôle. Enfin, sauf mention contraire, nous considérons le coût du contrôle $\ell = 1$ et noterons⁹ :

- $\mathcal{J} = \mathcal{J}_{drag}$ lorsque $\ell_{drag} = 1$ et $\ell_{reg} = \ell_{ter} = 0$,
- $\mathcal{J} = \mathcal{J}_{TKE(reg)}$ lorsque $\ell_{reg} = 1$ et $\ell_{drag} = \ell_{ter} = 0$,
- $\mathcal{J} = \mathcal{J}_{TKE(ter)}$ lorsque $\ell_{ter} = 0, 1$ et $\ell_{drag} = \ell_{reg} = 0$.

Les résultats seront analysées et comparées :

1. en terme d'énergie cinétique turbulente moyenne instantanée TKE définie par (2.67),
2. en terme de traînée totale moyenne instantanée $\mathbb{D}$ définie par (2.69),
3. et en terme de coût du contrôle instantané $\mathcal{C}(\Phi)$ défini par

$$(\mathcal{C}(\Phi))(t) = \frac{1}{2 L_1 L_3} \int_{\Gamma_2^\pm} \Phi^2(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x}. \quad (5.23)$$

Finalement, il est important de noter que pour $Re_\tau = 100$, l'écoulement est sous-critique ce qui signifie qu'il est stable pour des petites perturbations. Par conséquent, si l'énergie cinétique décroît au dessous d'un certain seuil, l'écoulement relaminarisera et le coût du contrôle tendra vers zéro.

5.4.2 Influence du choix de la fonctionnelle coût

La performance de la procédure de contrôle optimal en terme de réduction de traînée est très sensible au choix de la fonctionnelle coût. Dans cette section, nous allons discuter les résultats obtenus en utilisant successivement les différentes fonctionnelles coût envisagées dans notre étude (voir section 5.4.1). La figure 5.7 représente l'évolution temporelle de la traînée totale moyenne associée aux contrôles optimaux obtenus pour les différentes fonctionnelles. Bewley (1999) et Chang (2000) ayant montré que $T^+ \simeq 25$ était la longueur minimale du sous-intervalle d'optimisation pour que l'écoulement se relaminarise à

9. Pour $\mathcal{J}_{TKE(ter)}$, nous avons considéré $\ell_{ter} = 0, 1$ et non $\ell_{ter} = 1$ comme nous l'avons fait pour les deux autres fonctionnelles coût. Deux raisons à cela : d'une part, ce choix permet de diminuer les coûts de calcul sur chaque sous-intervalle d'optimisation et, d'autre part, les discontinuités de traînée et d'énergie cinétique entre deux sous-intervalles d'optimisation sont ainsi fortement réduites (en particulier pendant les premières boucles d'optimisation). Nous pourrions cependant comparer les différentes formulations de fonctionnelle coût car les figures 5.14, 5.15 et 5.16 montrent que lorsque le rapport ℓ_{ter}/ℓ augmente l'écoulement se laminarise d'autant plus rapidement. On pourrait croire alors qu'il est plus intéressant de prendre, pour une même valeur de ℓ , $\ell_{ter} = 1$ plutôt que $\ell_{ter} = 0, 1$. En fait, ce n'est pas le cas car pour $\ell_{ter} = 1$ le nombre d'itération de la boucle d'optimisation sur chacun des sous-intervalles est beaucoup plus important que pour $\ell_{ter} = 0, 1$ d'où au final un accroissement important du temps de calcul.

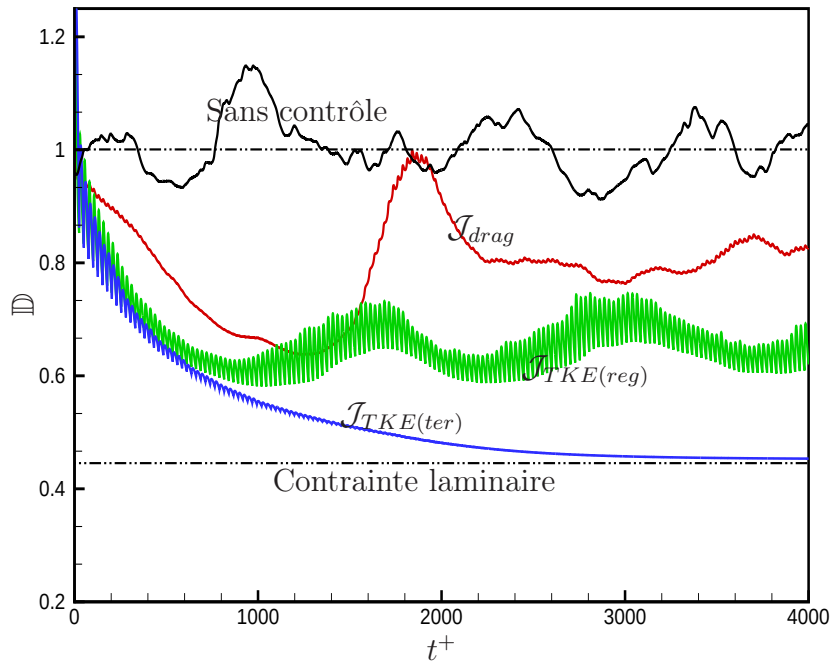


FIGURE 5.7 – Comparaison pour $Re_\tau = 100$ de l'évolution temporelle de la traînée totale moyenne pour différentes fonctionnelles coût ($T^+ = 25, 5$).

$Re_\tau = 100$, nous avons considéré ici, afin de réduire les coûts de calcul, un intervalle de longueur $T^+ = 25, 5$. La figure 5.7 montre clairement que le problème d'optimisation dépend fortement du choix de la fonctionnelle coût. La fonctionnelle objectif la plus efficace en terme de réduction de traînée correspond à l'énergie cinétique terminale. Pour cette fonctionnelle coût, la réduction de traînée est de l'ordre de 57% et l'écoulement se relaminarise¹⁰. Pour les deux autres fonctionnelles coût, les réductions de traînée sont inférieures. En effet, on obtient de l'ordre de 37% de réduction pour la fonctionnelle coût basée sur l'énergie cinétique totale et 25% dans le cas où la fonctionnelle coût est directement la traînée à la paroi. Qualitativement, ces résultats avaient déjà été trouvés par Bewley (1999) et Chang (2000) pour le même type de configuration. Ce comportement peut s'expliquer de plusieurs manières. Le premier niveau d'explication est lié à la physique de la turbulence. L'énergie cinétique turbulente peut être considérée comme le "moteur" des phénomènes présents dans l'écoulement et en particulier de la traînée. Dans ce sens, minimiser l'énergie cinétique turbulente a un effet direct sur la réduction de traînée. Par ailleurs, il semble que l'énergie cinétique soit plus sensible à l'action du contrôle que la traînée. En effet,

10. La contrainte à la paroi τ_w prend une valeur égale à celle qu'elle aurait en régime laminaire.

Bewley (1999) a montré qu'en stoppant brutalement le contrôle dans un canal turbulent à $Re_\tau = 180$, l'énergie cinétique turbulente avait tendance à croître en temps beaucoup plus rapidement que la traînée. Ce phénomène se retrouve dans nos simulations. En consultant

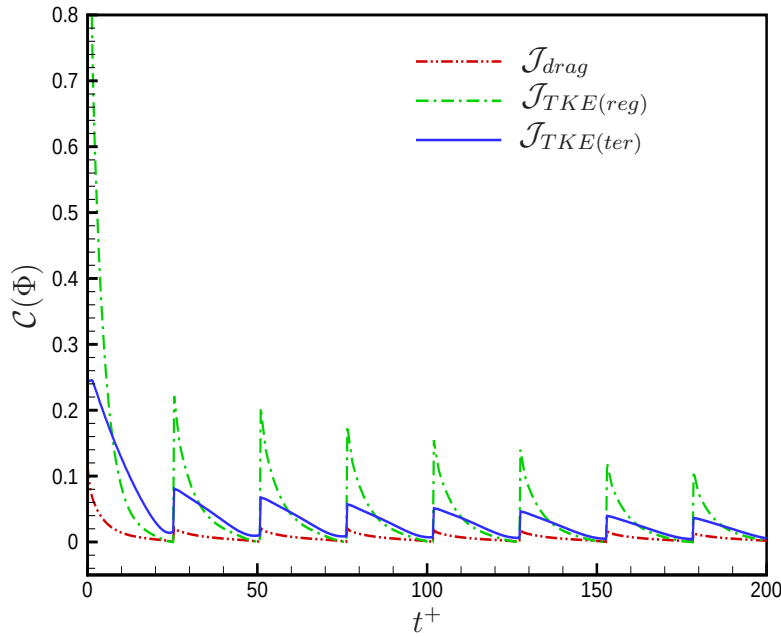


FIGURE 5.8 – Comparaison pour $Re_\tau = 100$ de l'évolution temporelle du coût du contrôle pour différentes fonctionnelles coût ($T^+ = 25, 5$).

la figure 5.8 qui représente l'évolution temporelle du coût du contrôle pour les différentes fonctionnelles, on constate en effet que systématiquement le coût du contrôle associé à la minimisation de la traînée est inférieur aux autres cas. Le second niveau d'explication est lié au niveau de contraintes du problème de minimisation. Lorsque l'on cherche à minimiser l'énergie cinétique turbulente en moyenne sur l'intervalle d'optimisation ($\mathcal{J}_{TKE(reg)}$), cela revient à contraindre de manière beaucoup plus forte l'écoulement que dans le cas où on minimise uniquement l'énergie cinétique turbulente au temps final ($\mathcal{J}_{TKE(ter)}$). Dans le second cas, l'écoulement peut explorer des états physiques qui peuvent conduire temporairement à des augmentations importantes de l'énergie cinétique turbulente. Ce faisant, ces états vont contribuer de manière défavorable à la minimisation de l'énergie cinétique sur tout l'intervalle. Cependant, au final, ils peuvent faciliter l'apparition de nouveaux états associés à des niveaux de traînée très faible. En revenant un instant à l'analogie avec la partie d'échec proposée par Bewley (1999), cela revient à sacrifier sa reine pour mettre

plus tard en échec et mat son adversaire. D'un point de vue du coût du contrôle (figure 5.8), on constate en accord avec le bon sens, que le coût total du contrôle sur un sous-intervalle d'optimisation donné est toujours plus important dans le cas de la minimisation de $\mathcal{J}_{TKE(reg)}$ que dans celui de $\mathcal{J}_{TKE(ter)}$. Formuler le contrôle optimal, en terme de minimisation de l'énergie cinétique turbulente et plus particulièrement de l'énergie cinétique à la fin de l'horizon d'optimisation, est donc plus efficace en terme de réduction de traînée que de considérer une fonctionnelle coût construite directement sur la traînée.

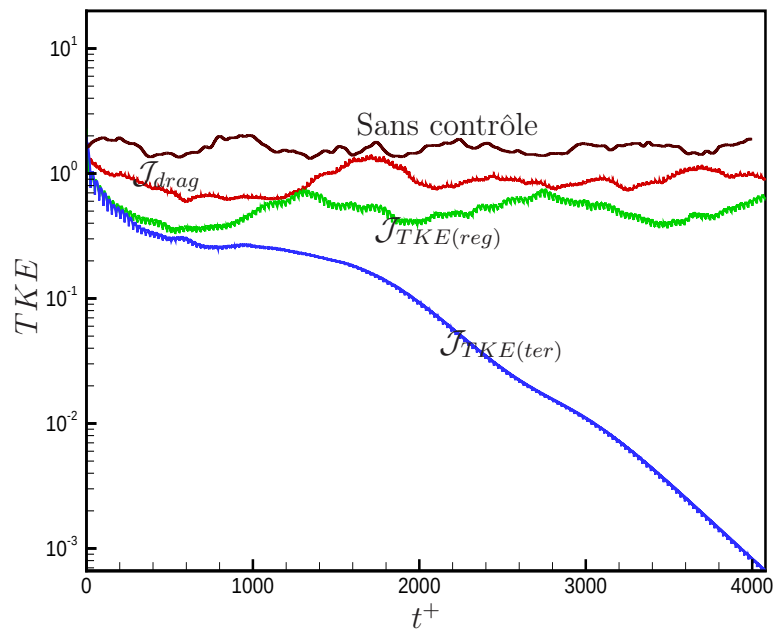


FIGURE 5.9 – Comparaison en échelle logarithmique pour $Re_\tau = 100$ de l'évolution temporelle de l'énergie cinétique totale pour différentes fonctionnelles coût ($T^+ = 25, 5$).

Sur la figure 5.8, on constate par ailleurs que les coûts du contrôle associés à $\mathcal{J}_{TKE(reg)}$ et $\mathcal{J}_{drag}$ ont une valeur nulle à la fin de chaque sous-intervalle d'optimisation. Ce comportement est dû à la condition terminale de l'équation adjointe qui vaut zéro dans ces deux cas (voir figure 5.2). Dans le cas où l'objectif est de minimiser l'énergie cinétique terminale, le contrôle agit de manière plus uniforme sur tout le sous-intervalle d'optimisation. C'est une des raisons qui permet d'expliquer que la formulation sur l'énergie cinétique terminale soit plus performante en terme de réduction de traînée.

La figure 5.9 représente l'évolution temporelle de l'énergie cinétique totale pour les dif-

férentes fonctionnelles coût envisagées. La variation de l'énergie cinétique terminale traduit de manière claire le comportement sous-critique de l'écoulement de canal à $Re_\tau = 100$. On observe en effet que si le contrôle parvient à diminuer l'énergie cinétique en deçà d'une certaine valeur critique alors l'écoulement se relaminarise. Au contraire, si cette valeur critique n'est pas atteinte comme c'est le cas pour les formulations basées sur l'énergie cinétique totale et la traînée, on trouve une saturation, voire une augmentation de l'énergie. Pour $T^+ = 25,5$, la valeur critique est atteinte pour $t^+ \simeq 800$ (voir figures 5.7 et 5.9). Pour des valeurs plus grandes du sous-intervalle d'optimisation T^+ , ce phénomène se produit plus tôt.

5.4.3 Influence de la longueur de la période d'optimisation

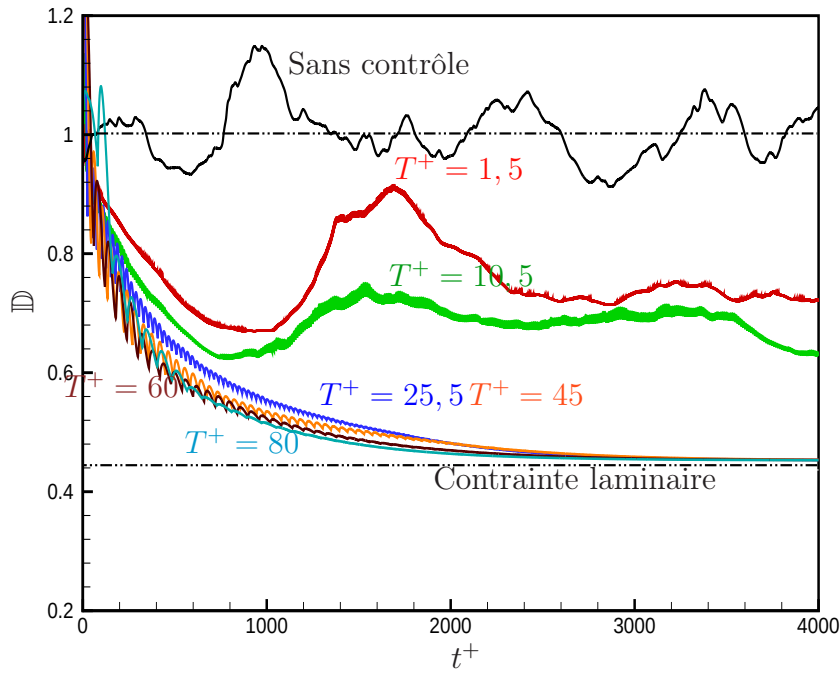


FIGURE 5.10 – Comparaison pour $Re_\tau = 100$ de l'évolution temporelle de la traînée totale moyenne pour différentes valeurs de périodes d'optimisation T^+ ($\mathcal{J} = \mathcal{J}_{TKE(ter)}$).

A la section précédente, nous avons montré que le choix de fonctionnelle coût qui conduisait à la réduction la plus importante de traînée était l'énergie cinétique totale évaluée à la fin du sous-intervalle d'optimisation, soit $\mathcal{J}_{TKE(ter)}$. Dans cette section, nous allons nous restreindre à cette fonctionnelle coût et étudier l'influence de la longueur de la

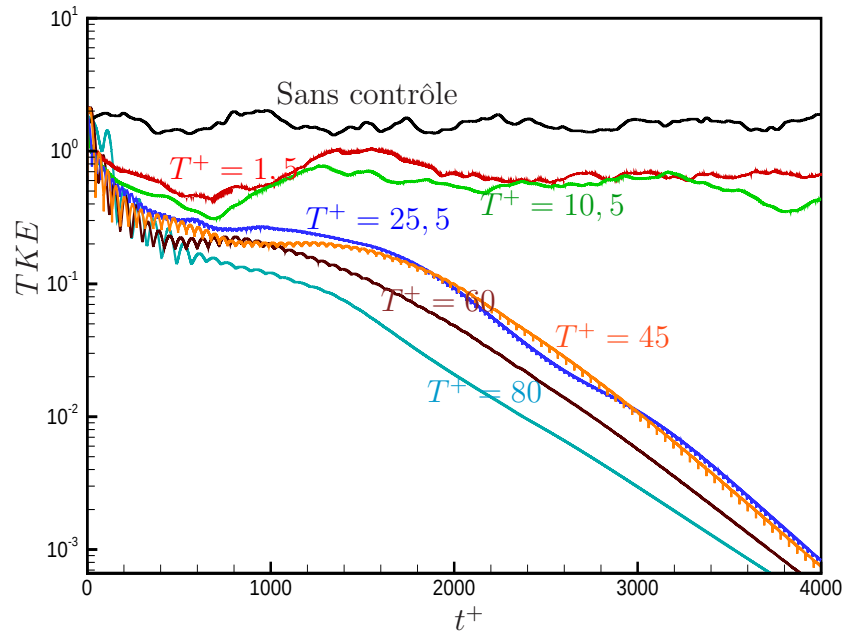


FIGURE 5.11 – Comparaison en échelle logarithmique pour $Re_\tau = 100$ de l'évolution temporelle de l'énergie cinétique totale pour différentes valeurs de périodes d'optimisation T^+ ($\mathcal{J} = \mathcal{J}_{TKE(ter)}$).

période d'optimisation T^+ sur la convergence de la procédure d'optimisation.

Les figures 5.10 et 5.11 représentent, pour différentes valeurs¹¹ de périodes d'optimisation T^+ allant de 1,5 à 80, respectivement l'évolution temporelle de la traînée totale moyenne et de l'énergie cinétique totale. Ces figures montrent que pour $T^+ \geq 25,5$, l'écoulement se relaminarise : la traînée totale moyenne tend vers la valeur en régime laminaire pour $t^+ \simeq 2000$, l'énergie cinétique totale décroît fortement en tendant vers zéro et le coût du contrôle a une valeur proche de zéro sur la plus grande partie de l'intervalle d'optimisation (voir figure 5.13). On constate également sur ces figures que plus la longueur du sous-intervalle d'optimisation est grande, et plus les réductions de traînée et d'énergie cinétique totale sont importantes et rapides. Le même phénomène s'observe d'ailleurs pour l'évolution temporelle de la fonction coût $\mathcal{J}_{TKE(ter)}$ (voir figure 5.12).

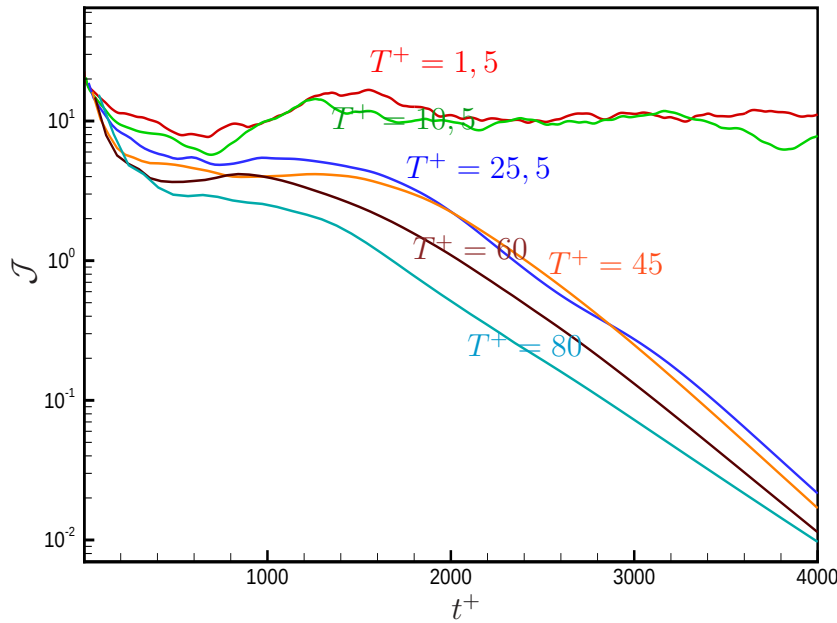


FIGURE 5.12 – Comparaison en échelle logarithmique pour $Re_\tau = 100$ de l'évolution temporelle de la fonctionnelle coût $\mathcal{J}_{TKE(ter)}$ pour différentes valeurs de périodes d'optimisation T^+ .

Sur la figure 5.11, on observe pour $T^+ \leq 10,5$ une augmentation brusque de l'énergie

11. Dans ce mémoire, il nous a été impossible de résoudre le système optimal sur des périodes d'optimisation T^+ de dimension supérieure à 80. Au delà, il y avait divergence lors de l'intégration rétrograde des équations adjointes. Précisons qu'en DNS, Bewley *et al.* (2001) avaient réalisé des résolutions sur des sous-intervalles d'optimisation allant jusqu'à $T^+ = 100$.

cinétique totale vers $t^+ \simeq 700$. Cette augmentation signe de manière claire la différence de comportement au temps long entre les simulations réalisées pour $T^+ \geq 25,5$ (relaminarisation de l'écoulement) et pour $T^+ < 25,5$ (saturation de l'énergie cinétique). Une explication probable est qu'à ce moment précis se produit dans le cycle de production de la turbulence un évènement d'activité turbulente intense qui s'accompagne d'une augmentation brusque de l'énergie cinétique dans l'écoulement. Lorsque les sous-intervalles d'optimisation sont de longueur assez grande, les évènements turbulents qui engendrent ces augmentations soudaines de l'énergie cinétique peuvent être capturés par la boucle d'optimisation et ainsi être pris en compte par le contrôle. Pour $t^+ \simeq 700$, deux mécanismes antagonistes s'opposent, d'un côté il y a une augmentation brutale de l'énergie cinétique et de l'autre une réduction de la traînée ou, selon les cas, directement de l'énergie cinétique via le contrôle aux parois. Le comportement du système à l'état d'équilibre est donc lié directement au mécanisme qui aura réussi à s'imposer.

Pour résumer, les évolutions temporelles de la traînée et de l'énergie cinétique turbulente peuvent être décomposées en trois zones distinctes. Dans la première zone qui s'étend de $t^+ = 0$ à $t^+ = 700$, la traînée totale moyenne et l'énergie cinétique totale décroissent rapidement et cela même pour des sous-intervalles d'optimisation de dimension faible ($T^+ \leq 10,5$). Dans la seconde zone allant de $t^+ = 700$ à $t^+ = 1200$, le contrôle essaie d'équilibrer les mécanismes de production de la turbulence en zone de proche paroi. Dans le cas des périodes d'optimisation courtes ($T^+ = 1,5$ ou $T^+ = 10,5$), le contrôle ne parvient pas à équilibrer la production turbulente en zone de proche paroi. Il y a alors augmentation brusque de l'énergie cinétique turbulente puis saturation de celle-ci pour $t^+ \simeq 1300$. Ce comportement s'explique essentiellement par la dimension du sous-intervalle d'optimisation qui est trop petite pour contenir toutes les échelles caractéristiques des phénomènes turbulents de proche paroi. Dans ces conditions, il manque des informations essentielles d'un point de vue physique pour évaluer de manière efficace le gradient de la fonctionnelle coût. Lorsque la longueur des sous-intervalles d'optimisation augmente ($T^+ \geq 25,5$), on observe d'abord une très légère augmentation de l'énergie cinétique turbulente puis, de manière soudaine, une forte décroissance. L'écoulement étant sous-critique à $Re_\tau = 100$, cette décroissance ne fait que s'accélérer au cours du temps sous l'action du contrôle. La troisième zone, qui commence vers $t^+ = 1200$, détermine le comportement au temps long de l'écoulement. Si le contrôle n'est pas parvenu à s'opposer aux mécanismes de production de la turbulence, alors l'énergie cinétique turbulente et la traînée saturent à des niveaux

supérieurs à la limite laminaire. Dans le cas contraire, il y a non seulement minimisation de la traînée totale moyenne ou de l'énergie cinétique turbulente totale selon le choix de la fonctionnelle coût mais en plus relaminarisation de l'écoulement.

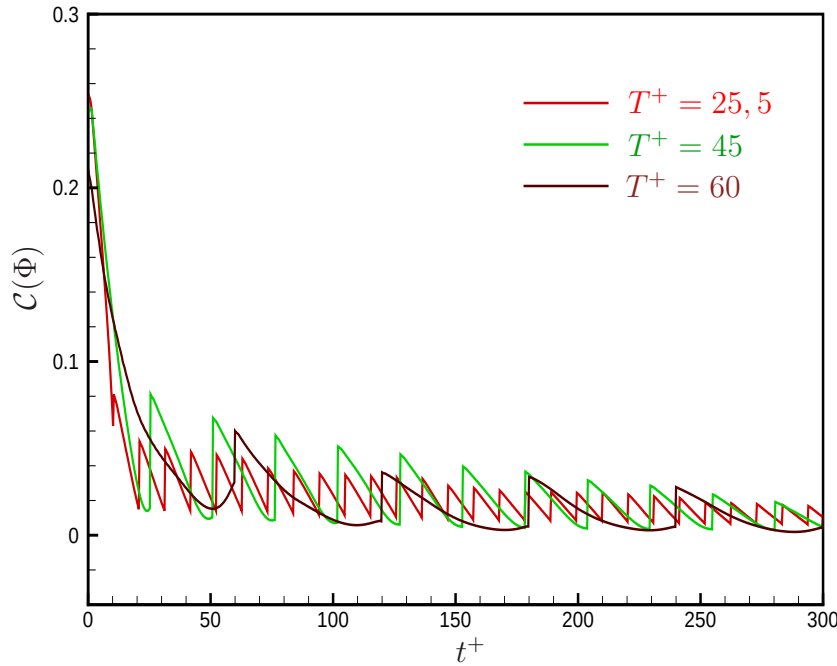


FIGURE 5.13 – Comparaison pour $Re_\tau = 100$ de l'évolution temporelle du coût du contrôle pour différentes valeurs de périodes d'optimisation T^+ ($\mathcal{J} = \mathcal{J}_{TKE(ter)}$).

Les évolutions temporelles de la traînée totale moyenne (figure 5.10), de l'énergie cinétique totale (figure 5.11) et du coût du contrôle (figure 5.13) mettent clairement en évidence une discontinuité au niveau de chaque sous-intervalle d'optimisation. Ce phénomène est directement lié à la procédure de contrôle instantané utilisée. On constate en effet que la traînée totale moyenne et l'énergie cinétique totale subissent d'abord une augmentation élevée au début de chacun des sous-intervalles d'optimisation, avant d'être minimisées à la fin du sous-intervalle. De même, la valeur du coût du contrôle est systématiquement plus grande au début de chaque sous-intervalle d'optimisation qu'à la fin. Finalement, on observe sur la figure 5.13 que plus la longueur du sous-intervalle d'optimisation augmente et moins le coût du contrôle est important.

5.4.4 Influence du coût du contrôle

Dès la définition du problème de contrôle optimal (section 5.1), nous avons introduit dans la fonctionnelle objectif à minimiser $\mathcal{J}$ un terme représentant le coût de la mise en œuvre du contrôle. Dans ce terme, intervient un paramètre de pénalisation ℓ qui mesure le poids respectif du contrôle par rapport aux grandeurs physiques à minimiser (traînée, énergie cinétique). Lorsque la valeur de ℓ est élevée, on considère que le contrôle est cher à exercer, ce qui revient à limiter au maximum son utilisation. Au contraire, lorsque la valeur de ℓ est faible, le contrôle est peu coûteux à mettre en œuvre et on peut donc envisager d'appliquer un contrôle important. Dans cette section, nous allons envisager plusieurs valeurs du paramètre ℓ ($\ell = 0, 5, 1$ et 10) pour analyser son influence sur la procédure de contrôle optimal.

La figure 5.14 représente dans le cas $\mathcal{J}_{TKE(ter)}$ l'évolution temporelle de la traînée totale moyenne pour les différentes valeurs de ℓ . On constate que pour les faibles valeurs du paramètre de pénalisation, l'écoulement relaminarise pour $t^+ \simeq 2000$. Au contraire, lorsque la mise en œuvre du contrôle est coûteuse ($\ell = 10$), des augmentations brusques de la traînée et de l'énergie cinétique (figure 5.15) se produisent pour $t^+ \simeq 1000$ et le contrôle ne parvient pas à relaminariser l'écoulement. On retrouve globalement ce comportement sur la figure 5.16 qui représente l'évolution temporelle de la fonctionnelle coût. En effet, dans les premiers instants, on constate que la minimisation de la fonctionnelle coût se fait pour $\ell = 0, 5$ et $\ell = 1$ d'une manière beaucoup plus rapide que pour $\ell = 10$. Par ailleurs, on retrouve pour $t^+ \simeq 1000$ une augmentation brutale de la valeur de la fonctionnelle coût puis une saturation à un niveau largement supérieur au régime laminaire. Pour clore les commentaires sur le cas $\mathcal{J}_{TKE(ter)}$, la figure 5.21 représente l'évolution temporelle du coût du contrôle pour les différentes valeurs du paramètre de pénalisation ℓ . On constate sur cette figure que le coût du contrôle décroît lorsque la valeur du paramètre de pénalisation croît. Cette tendance est en accord avec le sens donné généralement à ℓ . On retrouve d'ailleurs exactement le même comportement sur les figures 5.21 et 5.25 qui représentent l'évolution temporelle du coût du contrôle respectivement pour $\mathcal{J}_{TKE(reg)}$ et $\mathcal{J}_{drag}$.

Dans le cas où la procédure de contrôle vise à minimiser l'énergie cinétique totale moyenne, le paramètre de pénalisation ℓ joue un rôle assez semblable au cas précédent. Les évolutions temporelles de la traînée totale moyenne (figure 5.18), de l'énergie cinétique totale (figure 5.19) et de la fonctionnelle coût (figure 5.20) présentent deux types de comportement en fonction de la valeur de ℓ (d'un côté $\ell = 0, 5$ et $\ell = 1$, de l'autre

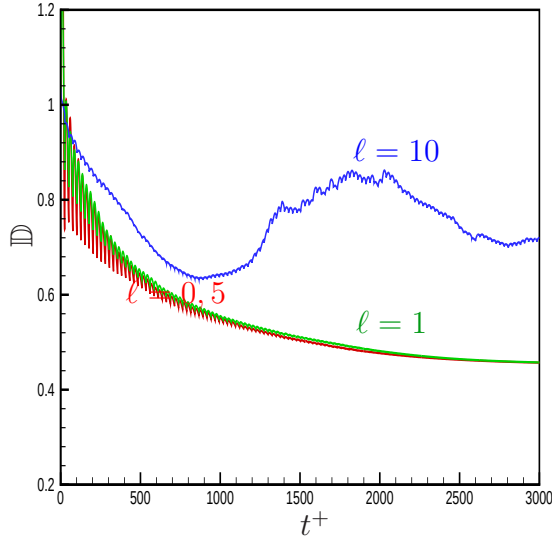


FIGURE 5.14 – Comparaison pour $Re_\tau = 100$ et $\mathcal{J} = \mathcal{J}_{TKE(ter)}$ de l'évolution temporelle de la traînée totale moyenne pour différentes valeurs du paramètre de pénalisation ℓ ($T^+ = 25, 5$).

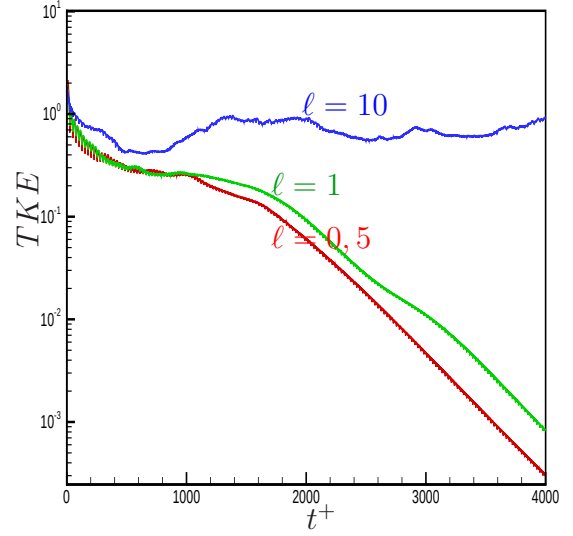


FIGURE 5.15 – Comparaison en échelle logarithmique pour $Re_\tau = 100$ et $\mathcal{J} = \mathcal{J}_{TKE(ter)}$ de l'évolution temporelle de l'énergie cinétique totale pour différentes valeurs du paramètre de pénalisation ℓ ($T^+ = 25, 5$).

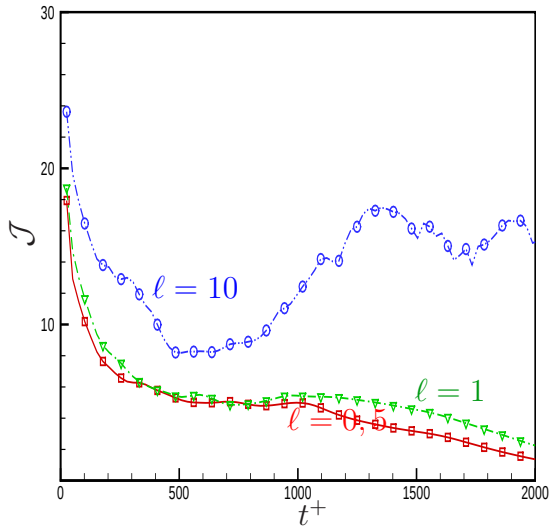


FIGURE 5.16 – Comparaison pour $Re_\tau = 100$ et $\mathcal{J} = \mathcal{J}_{TKE(ter)}$ de l'évolution temporelle de la fonction coût pour différentes valeurs du paramètre de pénalisation ℓ ($T^+ = 25, 5$).

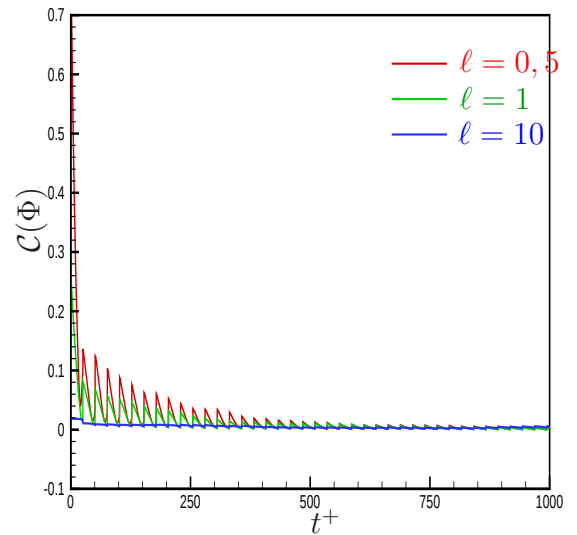


FIGURE 5.17 – Comparaison pour $Re_\tau = 100$ et $\mathcal{J} = \mathcal{J}_{TKE(ter)}$ de l'évolution temporelle du coût du contrôle pour différentes valeurs du paramètre de pénalisation ℓ ($T^+ = 25, 5$).

$\ell = 10$). Essentiellement, les évolutions temporelles se différencient par l'apparition pour $\ell = 10$ d'une augmentation brusque de ces grandeurs vers $t^+ \simeq 1500$. Néanmoins, le comportement est moins marqué que dans le cas précédent car pour $\mathcal{J}_{TKE(reg)}$ l'écoulement ne relaminarise pas. Pour terminer, on constate que quelle que soit la valeur du terme de pénalisation, le coût du contrôle est supérieur au cas où la fonctionnelle coût est l'énergie cinétique au temps terminal.

Considérons maintenant le cas où la fonctionnelle coût à minimiser est la traînée exercée aux parois du canal. Les évolutions temporelles de la traînée totale moyenne (figure 5.22), de l'énergie cinétique totale (figure 5.23) et de la fonctionnelle coût (figure 5.24) présentent des comportements très différents de ceux qu'ils avaient pour $\mathcal{J}_{TKE(ter)}$ et $\mathcal{J}_{TKE(reg)}$. En effet, contrairement aux cas précédents, il n'y a apparemment aucune différence de comportement des résultats en fonction de la valeur de ℓ . Pour noter une différence, il aurait sans doute été nécessaire d'explorer des valeurs de ℓ inférieures à 0,5. Enfin, notons qu'il faut se méfier d'une décroissance trop rapide de la traînée ou de l'énergie cinétique dans les premiers instants de l'application du contrôle. En effet, on pourrait conclure hâtivement de l'évolution temporelle de la traînée totale moyenne jusqu'à $t^+ \simeq 1500$ que la meilleure valeur en terme de décroissance de la traînée est $\ell = 1$ (voir figure 5.22). Or, ce résultat est complètement remis en cause par l'évolution temporelle ultérieure où il semble qu'aucune valeur de ℓ ne soit à privilégier.

5.5 Résultats de contrôle optimal pour $Re_\tau = 180$

Les résultats de la section 5.4 ont permis de valider pour un nombre de Reynolds sous-critique l'ensemble de la procédure de contrôle optimal développée dans ce chapitre. Dans cette section, nous nous intéressons à la possibilité de contrôler par la même approche l'écoulement de canal hors du régime sous-critique. Pour cela, nous nous limitons à $Re_\tau = 180$, soit une valeur modérément faible du nombre de Reynolds. Plus particulièrement, nous étudierons l'influence du choix de la fonctionnelle coût (section 5.5.2) et de la longueur de la période d'optimisation (section 5.5.3) sur la convergence de la boucle d'optimisation.

5.5.1 Généralités

Etant donnés les coûts de calcul importants liés à la résolution du système optimal, l'utilisation d'un modèle détaillé est difficilement envisageable dès que la configuration n'est plus de type académique (faible valeur du nombre de Reynolds et géométrie simple).

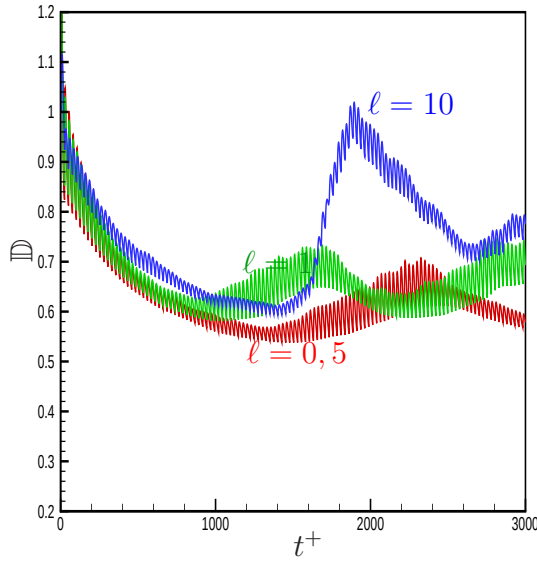


FIGURE 5.18 – Comparaison pour $Re_\tau = 100$ et $\mathcal{J} = \mathcal{J}_{TKE(reg)}$ de l'évolution temporelle de la traînée totale moyenne pour différentes valeurs du paramètre de pénalisation ℓ ($T^+ = 25, 5$).

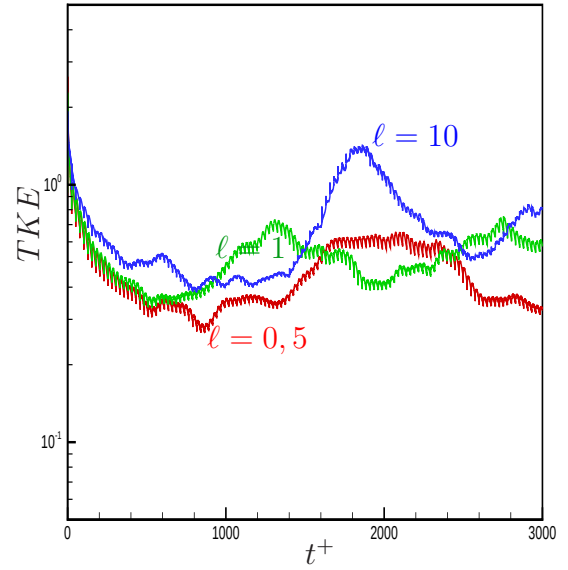


FIGURE 5.19 – Comparaison en échelle logarithmique pour $Re_\tau = 100$ et $\mathcal{J} = \mathcal{J}_{TKE(reg)}$ de l'évolution temporelle de l'énergie cinétique totale pour différentes valeurs du paramètre de pénalisation ℓ ($T^+ = 25, 5$).

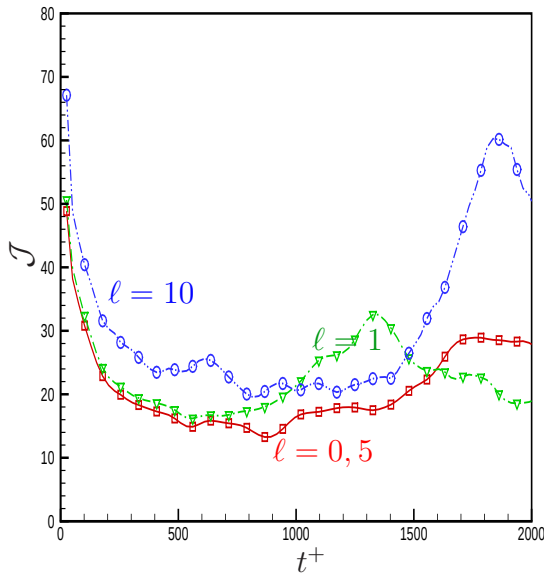


FIGURE 5.20 – Comparaison pour $Re_\tau = 100$ et $\mathcal{J} = \mathcal{J}_{TKE(reg)}$ de l'évolution temporelle de la fonction coût pour différentes valeurs du paramètre de pénalisation ℓ ($T^+ = 25, 5$).

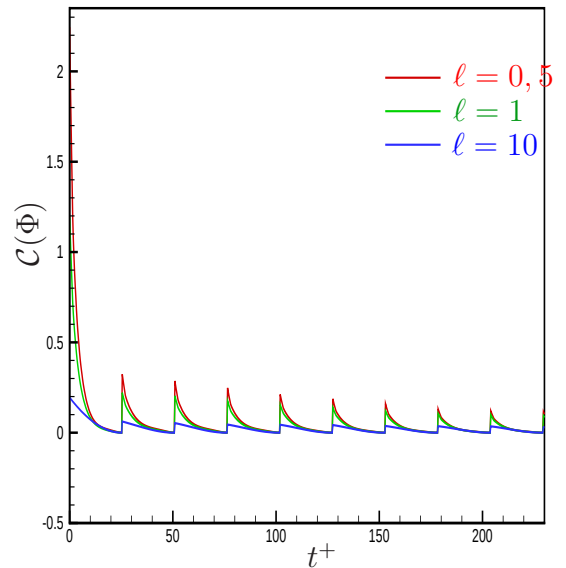


FIGURE 5.21 – Comparaison pour $Re_\tau = 100$ et $\mathcal{J} = \mathcal{J}_{TKE(reg)}$ de l'évolution temporelle du coût du contrôle pour différentes valeurs du paramètre de pénalisation ℓ ($T^+ = 25, 5$).

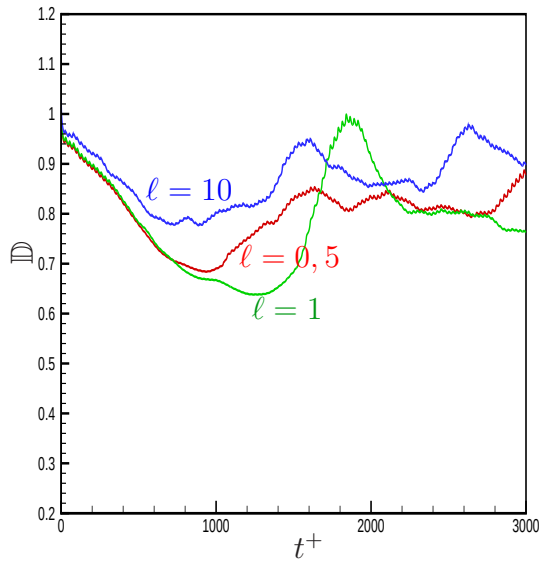


FIGURE 5.22 – Comparaison pour $Re_\tau = 100$ et $\mathcal{J} = \mathcal{J}_{drag}$ de l'évolution temporelle de la traînée totale moyenne pour différentes valeurs du paramètre de pénalisation ℓ ($T^+ = 25, 5$).

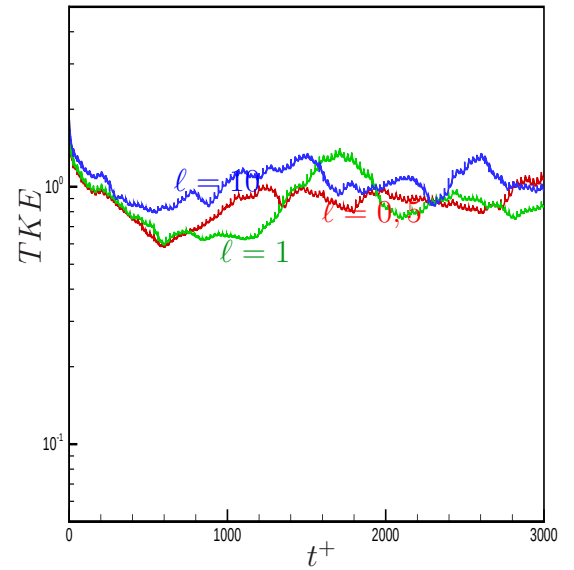


FIGURE 5.23 – Comparaison en échelle logarithmique pour $Re_\tau = 100$ et $\mathcal{J} = \mathcal{J}_{drag}$ de l'évolution temporelle de l'énergie cinétique totale pour différentes valeurs du paramètre de pénalisation ℓ ($T^+ = 25, 5$).

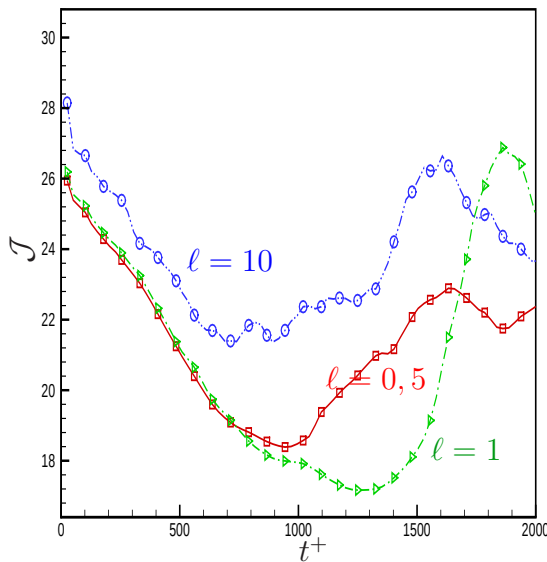


FIGURE 5.24 – Comparaison pour $Re_\tau = 100$ et $\mathcal{J} = \mathcal{J}_{drag}$ de l'évolution temporelle de la fonction coût pour différentes valeurs du paramètre de pénalisation ℓ ($T^+ = 25, 5$).

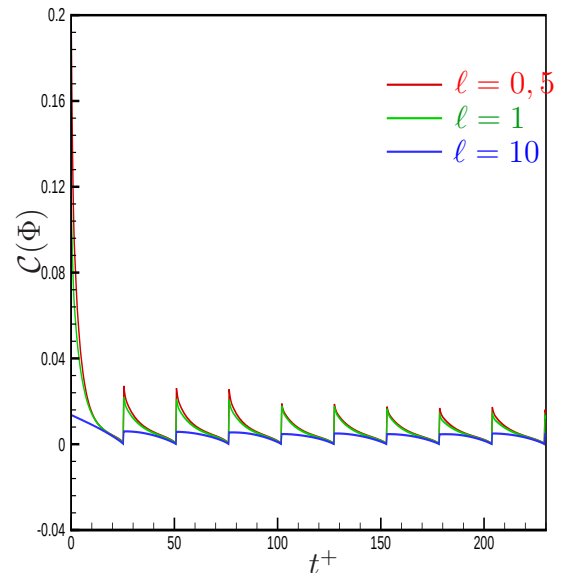


FIGURE 5.25 – Comparaison pour $Re_\tau = 100$ et $\mathcal{J} = \mathcal{J}_{drag}$ de l'évolution temporelle du coût du contrôle pour différentes valeurs du paramètre de pénalisation ℓ ($T^+ = 25, 5$).

Mentionnons à titre d'illustration que dans Bewley *et al.* (2001) les calculs réalisés par DNS sont limités pour $Re_\tau = 180$ à l'intervalle temporel $[0; 480]$ (en unités de paroi). Pour cette valeur du nombre de Reynolds, on est donc très loin de résoudre le système optimal sur des intervalles suffisamment longs pour représenter l'ensemble des phénomènes turbulents. Dans ces conditions, il n'est donc pas certain que le gradient de la fonctionnelle coût soit calculé correctement et que les résultats soient significatifs.

A la section 2.5, nous avons montré que des simulations LES, réalisées sur des maillages jusqu'à quinze fois plus grossiers que pour une simulation DNS prise en référence, pouvaient correctement représenter les caractéristiques essentielles de l'écoulement non contrôlé. Au chapitre 3, nous avons montré de manière complémentaire que la simulation S_3 représentait un bon compromis¹² entre coût de calcul et représentativité des phénomènes pour un écoulement contrôlé par aspiration/soufflage aux parois. Par conséquent, pour les simulations de contrôle optimal à $Re_\tau = 180$ de cette section, nous avons retenu les caractéristiques de la simulation S_3 (voir tableau 2.1). L'écoulement non contrôlé, utilisé en condition initiale de la procédure de contrôle optimal, correspond à $Re_c = 3214,1$ et $Re_b = 5600,2$. Ces valeurs sont légèrement différentes de celles que l'on peut trouver dans le tableau 2.3 pour S_3 car elles correspondent à un temps inférieur pour l'accumulation des statistiques. Par la suite, le contrôle optimal est appliqué pour deux périodes d'optimisation : $T^+ = 25,2$ et $T^+ = 54$. Le pas de temps des simulations est $\Delta t = 0,002$, soit $\Delta t^+ = 0,36$ en unités de paroi. Enfin, nous conservons le même critère de convergence qu'à la section 5.3.1.2 pour l'arrêt de la boucle d'optimisation *i.e.* $\varepsilon = 0,005$.

5.5.2 Influence du choix de la fonctionnelle coût

Les figures 5.26 et 5.27 représentent pour les différents types de fonctionnelle coût envisagés dans ce mémoire, l'évolution temporelle pour $T^+ = 25,2$ de la traînée totale moyenne et de l'énergie cinétique totale respectivement. On constate sur ces figures, que même dans le cas de la fonctionnelle coût basée sur l'énergie cinétique totale au temps terminal, le contrôle ne parvient pas, contrairement au cas où $Re_\tau = 100$ (section 5.4.2), à laminariser l'écoulement. Après une décroissance rapide de la traînée et de l'énergie cinétique dans les premiers instants d'optimisation, ces grandeurs viennent à saturer à des valeurs largement supérieures à la contrainte laminaire. Pour $t^+ \simeq 500$, il semble

12. En effet, la section 2.5 montre que les résultats de simulation en configuration non contrôlée sont en général meilleurs pour la simulation S_2 que pour la simulation S_3 . Toutefois, de manière logique, cette amélioration s'accompagne d'un accroissement significatif du temps CPU (voir tableau 2.2).

que le contrôle ne soit plus en mesure de s'opposer à la production turbulente de proche paroi. Finalement, la traînée totale moyenne atteint un état stationnaire caractérisé par 40% de réduction. Comparativement, la réduction obtenue pour la formulation basée sur l'énergie cinétique totale est 30% et celle obtenue pour la formulation sur la traînée totale moyenne est 20%. Même si la procédure de contrôle optimal basée sur l'énergie cinétique au temps final ne parvient pas à la laminarisation de l'écoulement, c'est tout de même cette fonctionnelle coût qui correspond aux plus importantes réductions de traînée et d'énergie cinétique. Par ailleurs, en comparant les figures 5.26 et 5.27 avec les figures correspondantes à $Re_\tau = 100$ (figures 5.7 et 5.9), on constate que l'amplitude des discontinuités¹³ entre deux sous-intervalles d'optimisation successifs est plus importante. Une tentative d'explication est que la dynamique étant plus complexe à $Re_\tau = 180$ qu'à $Re_\tau = 100$, le nombre d'échelles spatiales et temporelles présent dans le canal est beaucoup plus important, ce qui entraîne une plus forte dépendance de l'écoulement au contrôle.

La figure 5.28 représente l'évolution temporelle du coût du contrôle pour les différentes fonctionnelles coût envisagées. On retrouve sur cette figure exactement le même comportement que celui obtenu pour $Re_\tau = 100$ (voir figure 5.8). En effet, le coût du contrôle associé à la minimisation de la traînée est encore inférieur à celui des deux fonctionnelles basées sur l'énergie cinétique. De même, le coût du contrôle dans le cas où on cherche à minimiser $\mathcal{J}_{TKE(reg)}$ est encore supérieur au cas où l'objectif est de minimiser $\mathcal{J}_{TKE(ter)}$. On retrouve donc pour $Re_\tau = 180$ qu'il est plus intéressant, en terme de réduction de traînée, de formuler le problème de contrôle optimal sur l'énergie cinétique totale au temps terminal que sur les deux autres fonctionnelles coût.

La figure 5.29 représente pour les différentes formulations de la fonctionnelle coût les structures cohérentes de l'écoulement repérées par le critère $\mathcal{D}$ (voir section 2.5.7). Cette figure met clairement en évidence l'effet du contrôle sur la dynamique à grande échelle de l'écoulement. En effet, on constate que la densité des structures cohérentes est fortement diminuée en écoulement contrôlé, et tout particulièrement dans le cas de la fonctionnelle coût basée sur l'énergie cinétique au temps terminal. Ce résultat vient confirmer les liens existants entre les structures cohérentes de proche paroi et les mécanismes d'augmentation de traînée dans cette zone de l'écoulement.

13. On rappelle que ces discontinuités sont intrinsèquement liées à la procédure de contrôle instantané utilisée (voir discussions à la section 5.4.3).

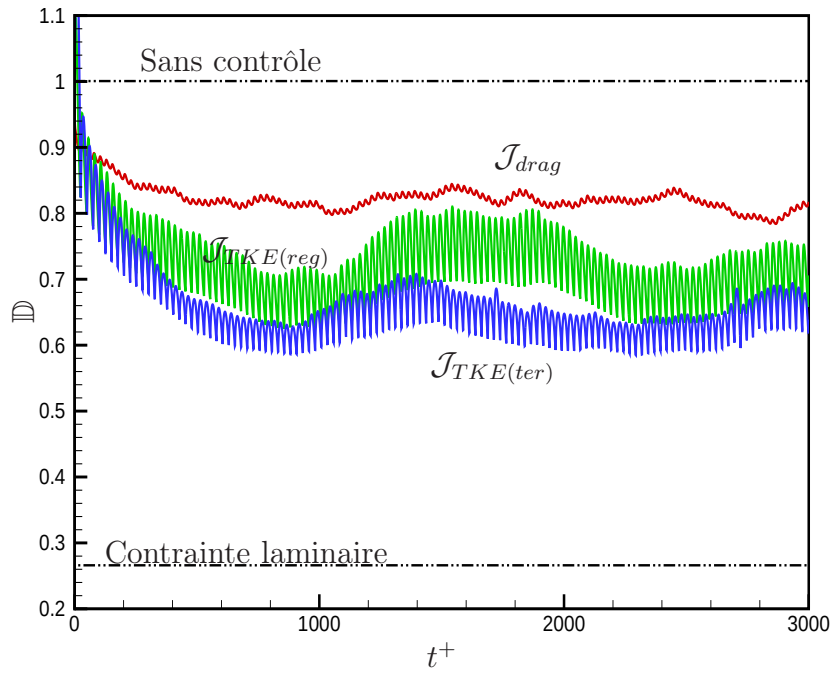


FIGURE 5.26 – Comparaison pour $Re_\tau = 180$ de l'évolution temporelle de la traînée totale moyenne pour différentes fonctionnelles coût ($T^+ = 25, 2$).

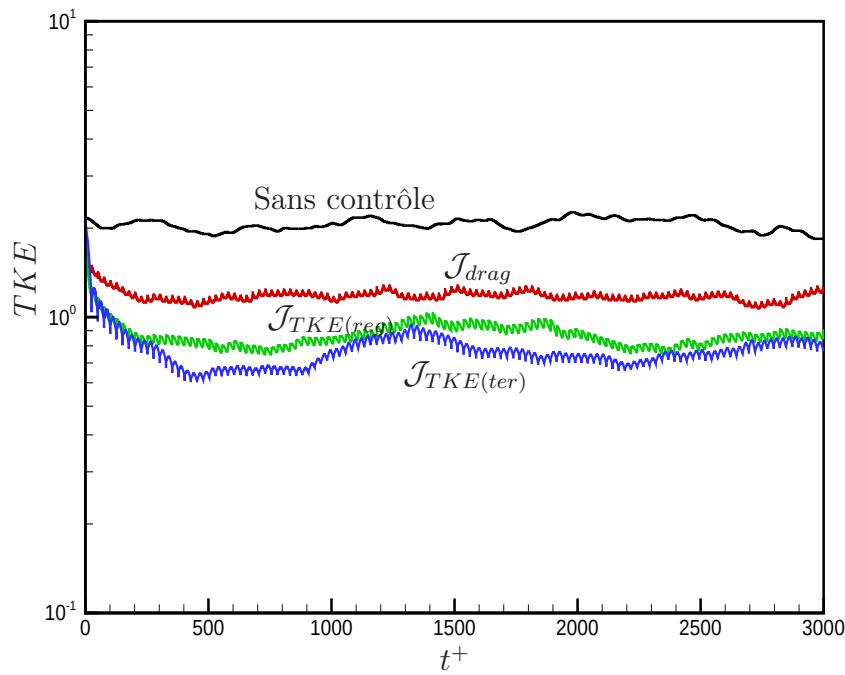


FIGURE 5.27 – Comparaison en échelle logarithmique pour $Re_\tau = 180$ de l'évolution temporelle de l'énergie cinétique totale pour différentes fonctionnelles coût ($T^+ = 25, 2$).

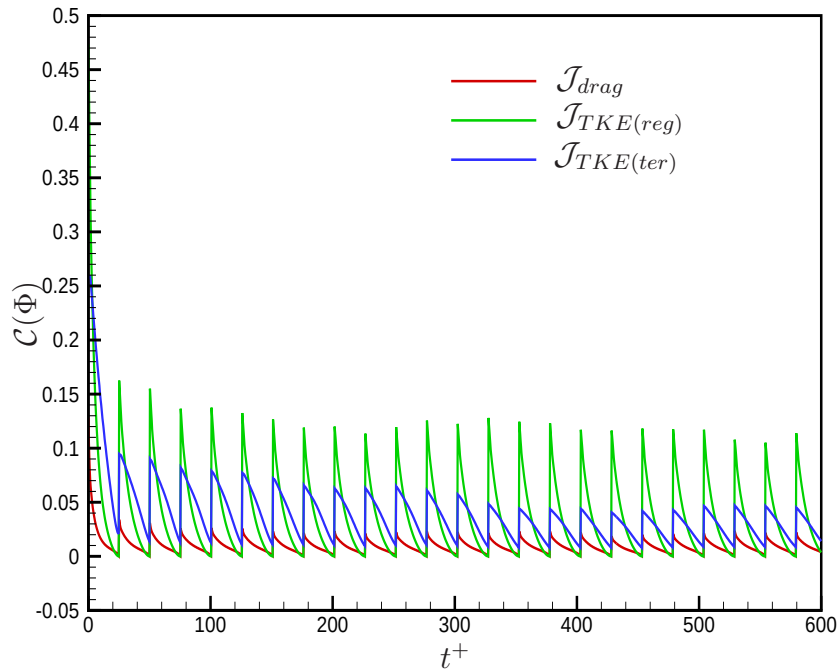


FIGURE 5.28 – Comparaison pour $Re_\tau = 180$ de l'évolution temporelle du coût du contrôle pour différentes fonctionnelles coût ($T^+ = 25, 2$).

5.5.3 Influence de la longueur de la période d'optimisation

Dans cette section, nous allons suivre une démarche similaire à celle suivie précédemment pour $Re_\tau = 100$ (section 5.4.3) et étudier l'influence de T^+ sur les résultats uniquement pour la fonctionnelle coût la plus performante en terme de réduction de traînée *i.e.* $\mathcal{J}_{TKE(ter)}$. Les figures 5.30 et 5.31 représentent pour deux valeurs de T^+ ($T^+ = 25, 2$ et $T^+ = 54$) les évolutions temporelles respectives de la traînée totale moyenne et de l'énergie cinétique. Ces figures mettent en évidence que les résultats de contrôle optimal pour $Re_\tau = 180$ sont moins dépendants¹⁴ de la longueur du sous-intervalle d'optimisation que pour $Re_\tau = 100$. On remarque en effet que, même pour un sous-intervalle d'optimisation de longueur $T^+ = 54$, le contrôle ne parvient pas à laminariser l'écoulement. Sur la figure 5.31, on observe pour $t^+ \simeq 500$ le début d'une lente remontée de l'énergie cinétique qui conduit pour $T^+ = 25, 2$ à une réduction de 37% de la traînée et pour $T^+ = 54$ à une réduction de 50%. Il est délicat de conclure sur la possibilité de laminariser l'écoulement en considérant des sous-intervalles d'optimisation de plus grande longueur. Dans ce mé-

14. Cette conclusion n'est vraie que sur la gamme relativement limitée de valeurs de T^+ que nous avons exploré. Se reporter au commentaire plus loin dans ce même paragraphe.

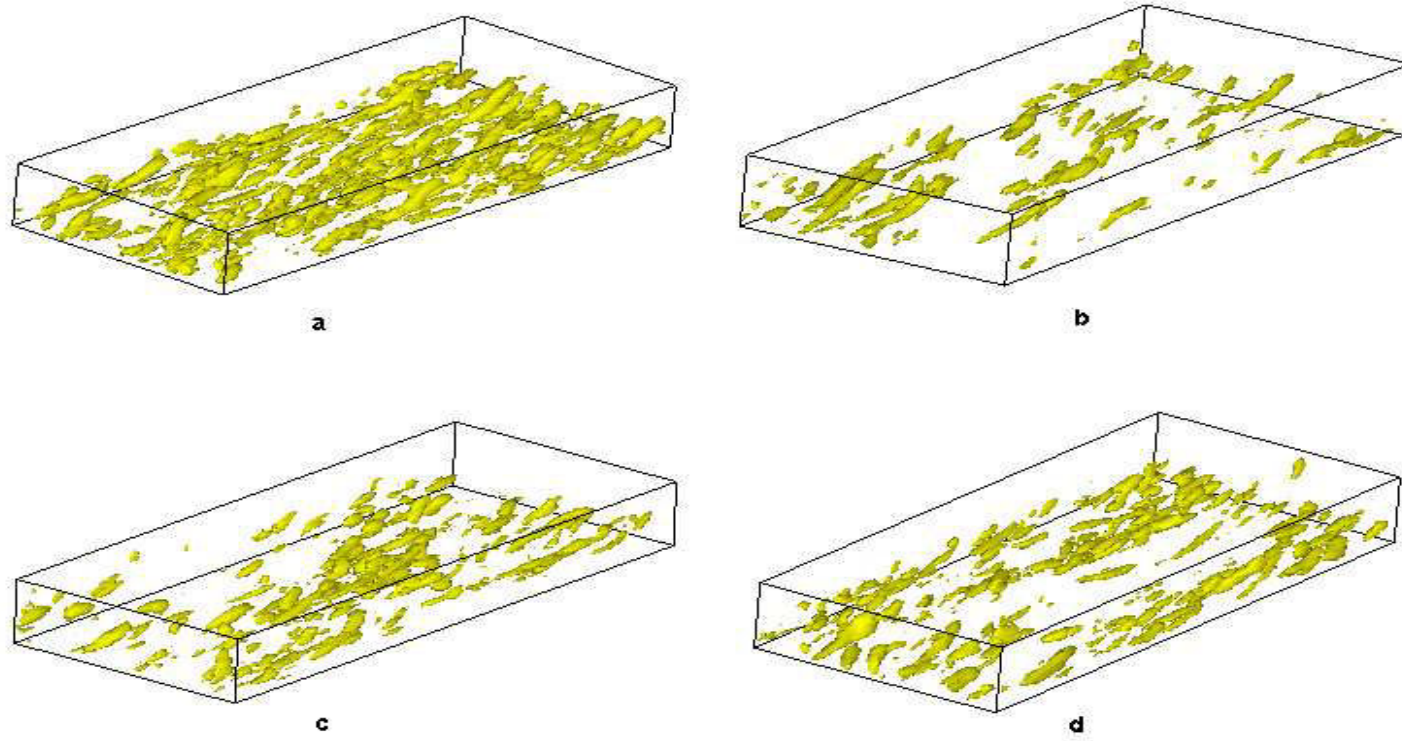


FIGURE 5.29 – Visualisation des structures cohérentes obtenues à $Re_\tau = 180$ par LES. On compare l'écoulement non contrôlé (a) aux résultats du contrôle optimal pour $\mathcal{J}_{TKE(ter)}$ (b), $\mathcal{J}_{TKE(reg)}$ (c) et $\mathcal{J}_{drag}$ (d). Les structures cohérentes sont repérées par le critère $\mathcal{D}$ avec $\mathcal{D}_{seuil} = 2 \times 10^{-6}$.

moire, les coûts de calcul ont limité nos investigations à des intervalles d'optimisation de longueur $T^+ = 54$. Par ailleurs, notons que pour $T^+ = 54$ l'amplitude des discontinuités de traînée et d'énergie cinétique entre deux sous-intervalles d'optimisation est plus élevée que pour $T^+ = 25, 2$. Ce comportement va dans un sens attendu car il semble logique que plus la longueur du sous-intervalle d'optimisation est importante et plus la loi de contrôle est spécifique à l'intervalle considéré.

Finalement, la figure 5.32 représente l'évolution temporelle du coût du contrôle pour les deux valeurs de T^+ considérées. On observe que pour $T^+ = 54$ le coût du contrôle est localement plus élevé que pour $T^+ = 25, 2$. Ce résultat justifie en partie que la réduction de la traînée est plus importante pour le plus grand des deux intervalles d'optimisation.

5.6 Comparaison entre contrôle optimal et contrôle par opposition

Dans cette section, nous allons comparer pour les deux nombres de Reynolds principalement étudiés ($Re_\tau = 100$ et $Re_\tau = 180$) les résultats obtenus, d'une part, via le contrôle par opposition mis en place au chapitre 3 et, d'autre part, par le contrôle optimal développé dans ce chapitre. Pour toutes les figures qui seront discutées par la suite, le contrôle par opposition correspond à la position optimale du plan de détection pour le nombre de Reynolds concerné et le contrôle optimal correspond à la minimisation de $\mathcal{J}_{TKE(ter)}$ avec pour $Re_\tau = 100$: $T^+ = 25, 5$ et pour $Re_\tau = 180$: $T^+ = 25, 2$ et généralement¹⁵ $T^+ = 54$.

La figure 5.33 représente, pour les deux nombres de Reynolds, les évolutions temporelles de la traînée totale moyenne obtenues pour le contrôle par opposition et par contrôle optimal. On observe que pour les deux valeurs du nombre de Reynolds, la réduction de traînée obtenue par contrôle optimal est systématiquement supérieure à celle obtenue par le contrôle par opposition. On note toutefois que le contrôle optimal parvient à relaminariser l'écoulement à $Re_\tau = 100$ alors que la réduction maximale de traînée obtenue à $Re_\tau = 180$ pour $T^+ = 54$ est égale à 50% (à comparer à 27% pour la limite laminaire). D'une certaine manière, ces résultats sont moraux car la quantité d'information nécessaire à la mise en œuvre du contrôle par opposition est très inférieure à celle que nécessite le contrôle optimal. Et encore, on ne prend pas en compte dans ce bilan moral les efforts de développement analytique du système optimal et la lourdeur de la programmation liés à la mise en place

15. La seule exception est la figure 5.35 pour laquelle seuls les résultats de contrôle optimal à $T^+ = 25, 2$ ont été représentés.

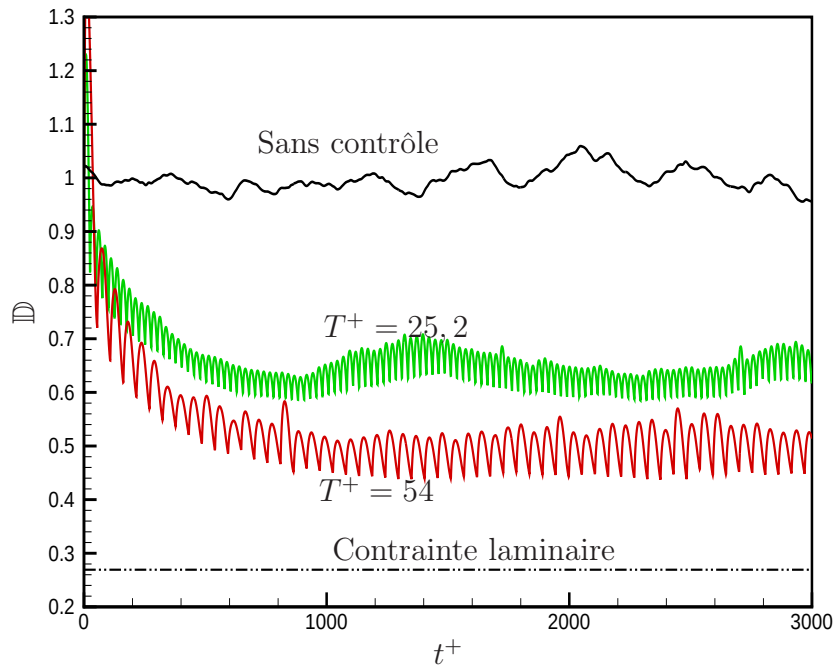


FIGURE 5.30 – Comparaison pour $Re_\tau = 180$ de l'évolution temporelle de la traînée totale moyenne pour différentes valeurs de périodes d'optimisation T^+ ($\mathcal{J} = \mathcal{J}_{TKE(ter)}$).

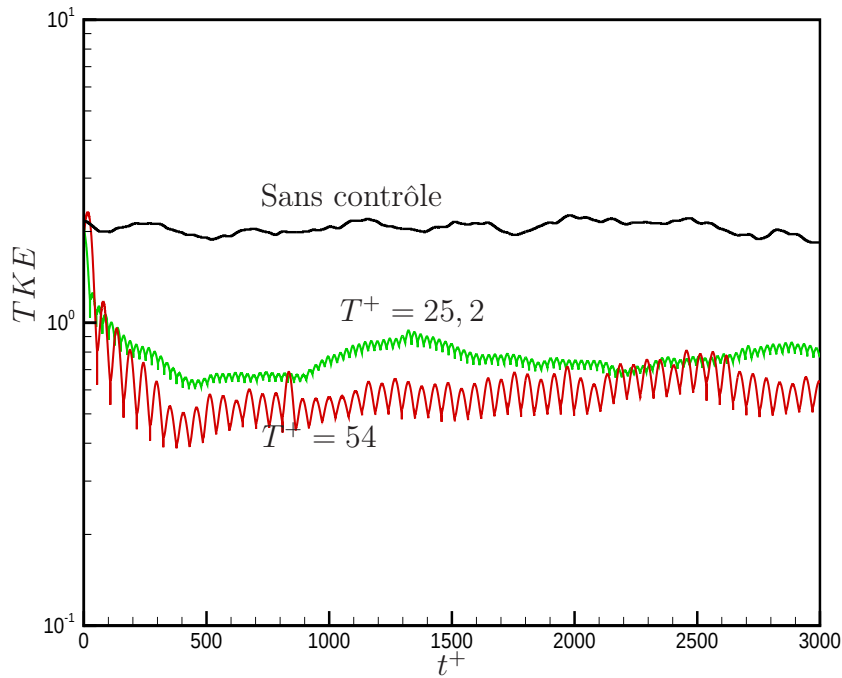


FIGURE 5.31 – Comparaison en échelle logarithmique pour $Re_\tau = 180$ de l'évolution temporelle de l'énergie cinétique totale pour différentes valeurs de périodes d'optimisation T^+ ($\mathcal{J} = \mathcal{J}_{TKE(ter)}$).

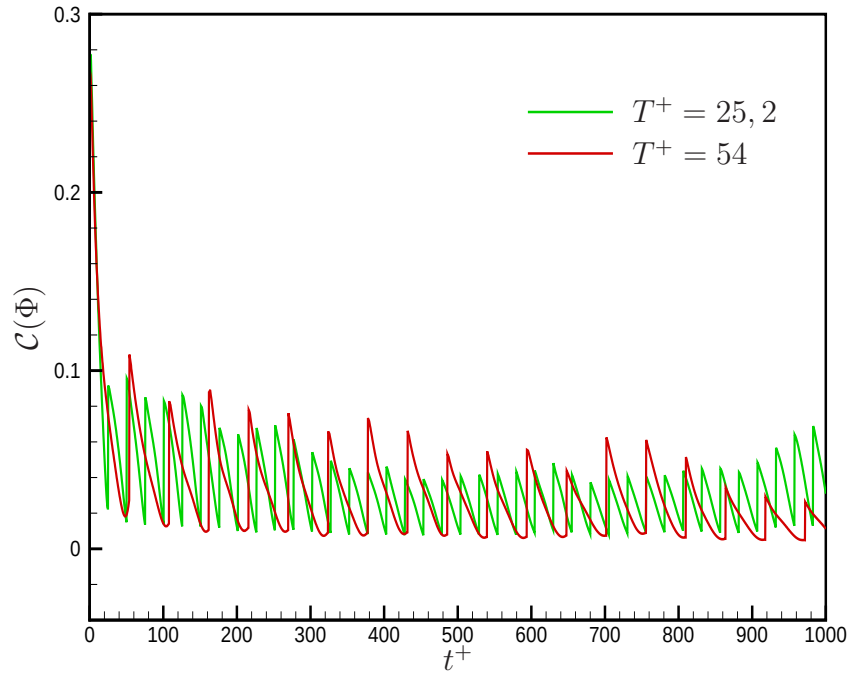


FIGURE 5.32 – Comparaison pour $Re_\tau = 180$ de l'évolution temporelle du coût du contrôle pour différentes valeurs de périodes d'optimisation T^+ ($\mathcal{J} = \mathcal{J}_{TKE(ter)}$).

du contrôle optimal. En outre, par définition, le contrôle optimal correspond au meilleur résultat susceptible d'être obtenu en absence de perturbations subies par le système. Des conclusions semblables peuvent être tirées des évolutions temporelles de l'énergie cinétique totale reportées sur la figure 5.34.

Pour terminer, la figure 5.35 représente pour les deux nombres de Reynolds, les évolutions temporelles du coût du contrôle obtenues par le contrôle par opposition et par contrôle optimal. Pour $Re_\tau = 100$, le coût lié au contrôle par opposition est légèrement supérieur à celui du contrôle optimal mais la tendance globale est la même. En particulier, on obtient dans les deux cas qu'au temps long le coût du contrôle diminue en tendant vers zéro. Pour $Re_\tau = 180$, le coût moyen¹⁶ temporel est similaire pour le contrôle par opposition et pour le contrôle optimal. La réduction de traînée étant plus importante pour le contrôle optimal que pour le contrôle par opposition, on peut donc conclure à la meilleure efficacité en terme énergétique de la procédure de contrôle optimal.

La réduction de traînée en cas de contrôle par opposition s'explique par la création d'un

16. Les phénomènes de discontinuité entre deux sous-intervalles d'optimisation font qu'il est nécessaire pour le contrôle optimal de prendre la moyenne temporelle du coût du contrôle si l'on souhaite réaliser des comparaisons pertinentes.

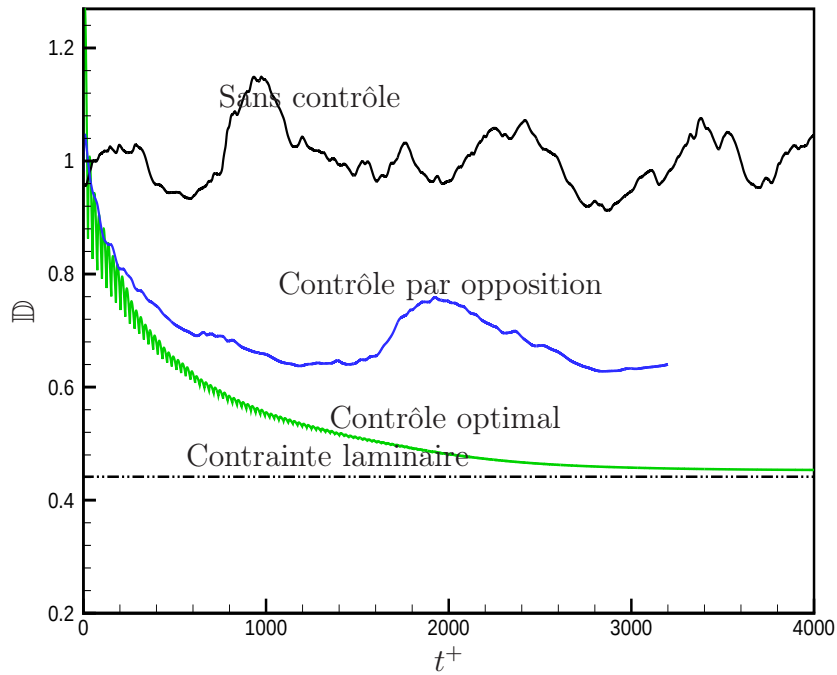
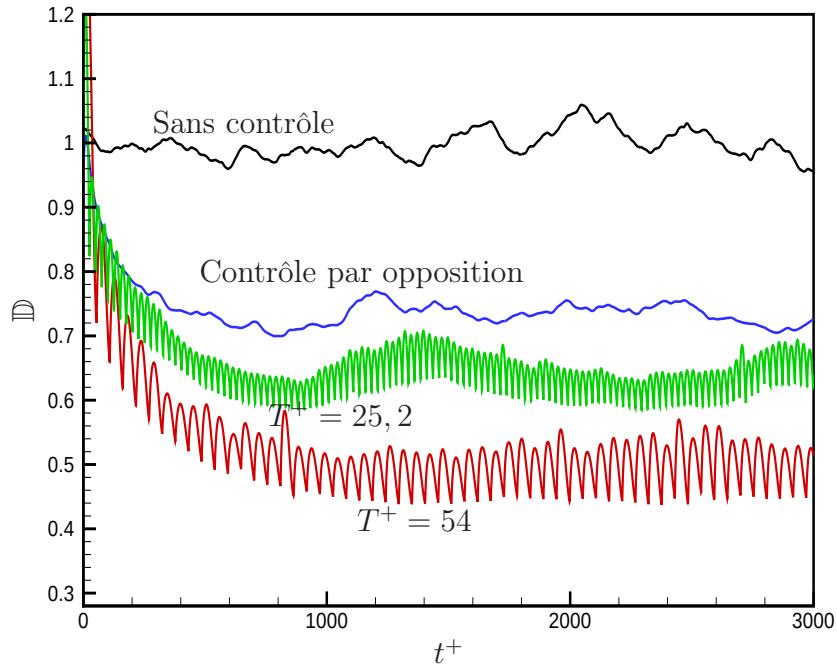
(a) $Re_\tau = 100$.(b) $Re_\tau = 180$.

FIGURE 5.33 – Comparaisons pour $Re_\tau = 100$ et $Re_\tau = 180$ des évolutions temporelles de la traînée totale moyenne obtenues pour le contrôle par opposition et par contrôle optimal. Le contrôle par opposition correspond à la position optimale du plan de détection pour le nombre de Reynolds donné; le contrôle optimal à la minimisation de $\mathcal{J}_{TKE(ter)}$ avec pour $Re_\tau = 100$: $T^+ = 25, 5$ et pour $Re_\tau = 180$: $T^+ = 25, 2$ et $T^+ = 54$.

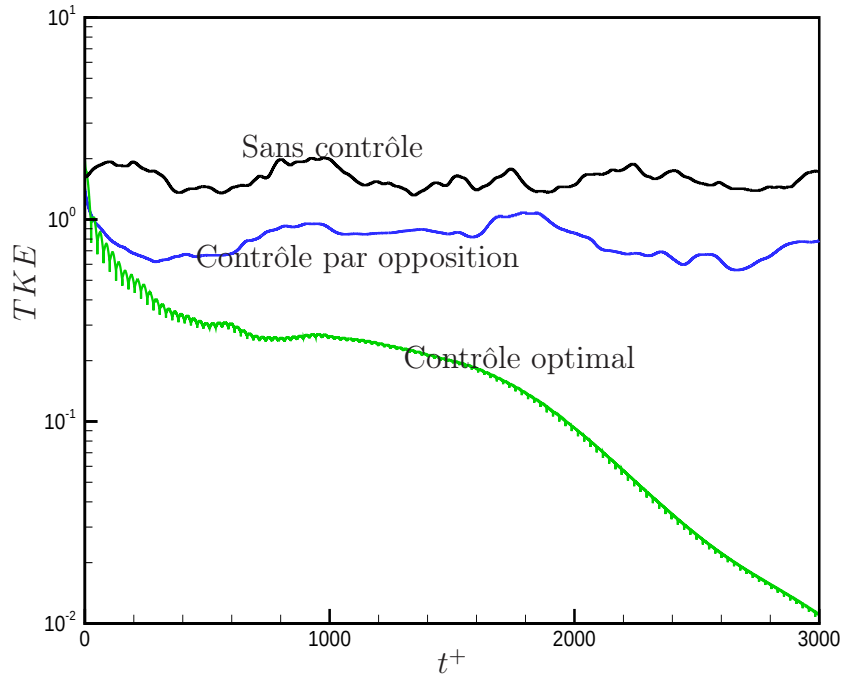
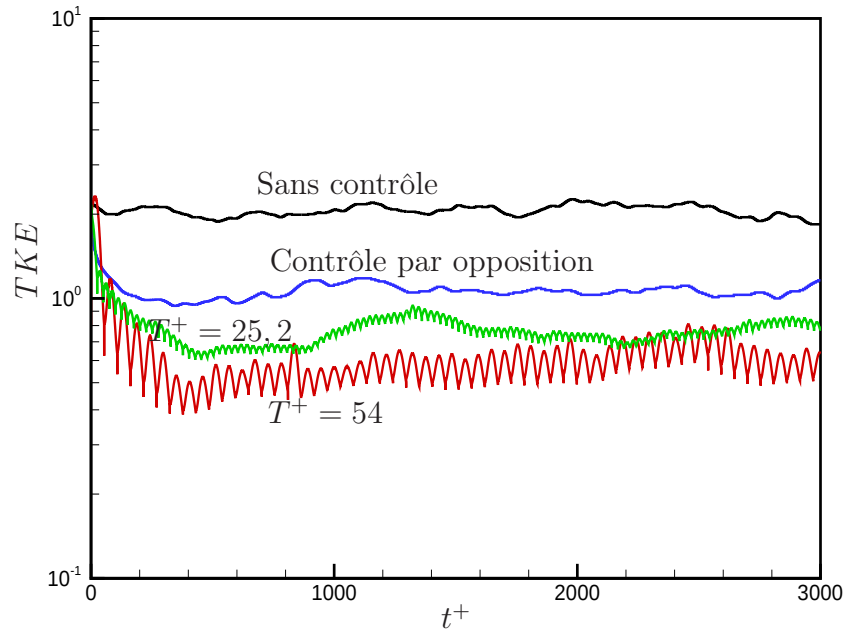
(a) $Re_\tau = 100$.(b) $Re_\tau = 180$.

FIGURE 5.34 – Comparaisons en échelle logarithmique pour $Re_\tau = 100$ et $Re_\tau = 180$ des évolutions temporelles de l'énergie cinétique totale obtenues pour le contrôle par opposition et par contrôle optimal. Le contrôle par opposition correspond à la position optimale du plan de détection pour le nombre de Reynolds donné; le contrôle optimal à la minimisation de $\mathcal{J}_{TKE(ter)}$ avec pour $Re_\tau = 100$: $T^+ = 25,5$ et pour $Re_\tau = 180$: $T^+ = 25,2$ et $T^+ = 54$.

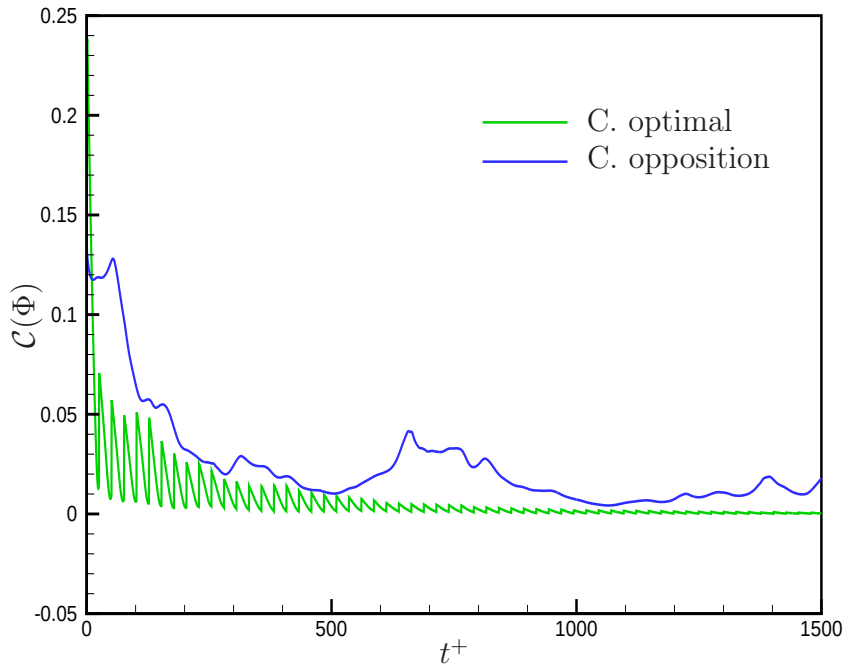
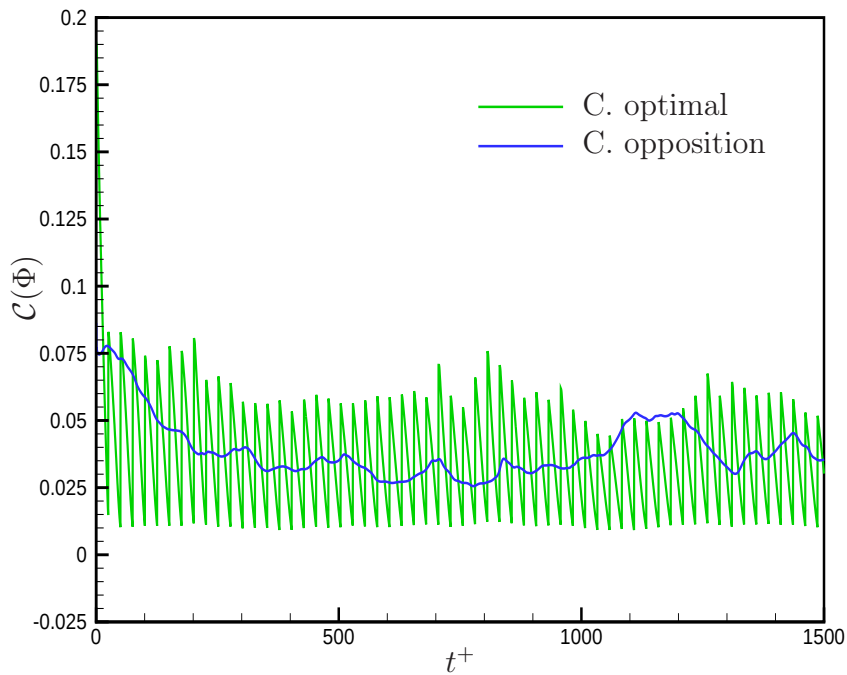
(a) $Re_\tau = 100$.(b) $Re_\tau = 180$.

FIGURE 5.35 – Comparaisons pour $Re_\tau = 100$ et $Re_\tau = 180$ des évolutions temporelles du coût du contrôle obtenues pour le contrôle par opposition et par contrôle optimal. Le contrôle par opposition correspond à la position optimale du plan de détection pour le nombre de Reynolds donné; le contrôle optimal à la minimisation de $\mathcal{J}_{TKE(ter)}$ avec pour $Re_\tau = 100$: $T^+ = 25, 5$ et pour $Re_\tau = 180$: $T^+ = 25, 2$.

mur artificiel entre le plan de détection et la paroi (voir section 3.2.2). Ce mur empêche le transfert vertical de la quantité de mouvement vers la paroi. Il y a alors interruption du cycle de production de la turbulence ce qui a pour effet de réduire la traînée aux parois du canal. La figure 5.36 représente les profils de variance de la vitesse normale $\langle v'^2 \rangle$ pour les deux types de contrôle envisagés. On constate que pour le contrôle optimal, il n'y a apparemment pas de création de mur virtuel, laissant à penser que l'écoulement réagit au contrôle par un mécanisme différent. En fait, Prabhu *et al.* (2001) ont montré dernièrement en analysant par POD des données issues de contrôle optimal que le premier mode POD spatial présentait un mur virtuel pour $y^+ \simeq 20$. Le fait que ce mur virtuel soit situé à une distance supérieure à celui qui apparaît pour le contrôle par opposition explique selon ces auteurs la meilleure efficacité du contrôle optimal pour la réduction de traînée.

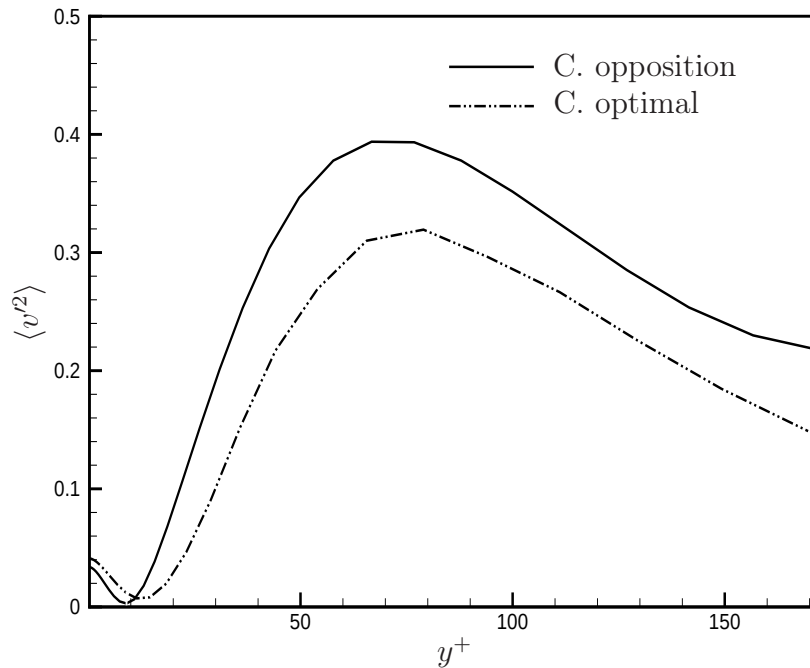


FIGURE 5.36 – Comparaison pour $Re_\tau = 180$ des profils de $\langle v'^2 \rangle$ obtenus pour le contrôle par opposition et par contrôle optimal. Le contrôle par opposition correspond à la position optimale du plan de détection et le contrôle optimal à la minimisation de $\mathcal{J}_{TKE(ter)}$ pour $T^+ = 25, 2$.

5.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons utilisé un modèle LES de l'écoulement de canal comme équation d'état dans une procédure de contrôle optimal. Nous avons ainsi déterminé de manière stationnaire les lois de soufflage/aspiration à imposer aux parois du canal pour minimiser la traînée à $Re_\tau = 100$ et $Re_\tau = 180$. L'influence du choix de la fonctionnelle coût $\mathcal{J}$, de la longueur du sous-intervalle d'optimisation T^+ et de la valeur du paramètre de pénalisation ℓ a été étudiée en terme de vitesse de convergence et de type de solution. L'approche développée conduit à des résultats comparables à ceux obtenus précédemment par Bewley *et al.* (2001) en utilisant un modèle détaillé de l'écoulement généré par DNS. Cependant, l'utilisation d'un modèle approché conduit dans notre cas à une réduction importante des coûts de calcul (CPU et mémoire). Pour $Re_\tau = 180$, nous avons donc pu résoudre le système optimal sur des temps beaucoup plus importants que ce qui avait été fait par Bewley *et al.*. En effet, pour des raisons de coût de calcul, ces auteurs ont dû se limiter à résoudre le système optimal sur un intervalle d'optimisation T_o de longueur égale à 480 alors que dans ce mémoire nous avons pu aller jusqu'à 4000. Toutefois, notre approche ne permet toujours pas de s'affranchir de l'utilisation d'une procédure de contrôle instantané. En l'état, il est donc délicat de statuer de manière définitive sur les solutions optimales que l'on obtient.

Les résultats numériques de ce chapitre viennent confirmer qu'il est plus efficace d'un point de vue énergétique de prendre pour cible le moteur de la turbulence (l'énergie cinétique) plutôt que ses conséquences (la traînée aux parois). En effet, de manière systématique, la réduction de traînée est plus importante lorsque l'on cherche à minimiser l'énergie cinétique au temps terminal plutôt que la traînée aux parois. Notons par ailleurs que dans nos simulations de contrôle optimal, la traînée minimale que nous avons pu obtenir correspond précisément à celle associée au régime laminaire. Ce résultat semble confirmer¹⁷ la conjecture avancée par Bewley et Aamo (2004) qui prétend que la contrainte minimale susceptible d'être atteinte par contrôle d'un écoulement de canal turbulent via une procédure de soufflage/aspiration à débit nul aux parois est celle associée à l'écoulement laminaire.

Contrairement au cas de la configuration sous-critique, la procédure de contrôle optimal n'a pas permis de relaminariser l'écoulement pour $Re_\tau = 180$. Il semble que cela

17. Il serait plus rigoureux de dire que nos résultats ne permettent pas d'infirmer la conjecture proposée par Bewley et Aamo (2004).

soit principalement provoqué par le manque de précision dans l'évaluation du gradient de la fonctionnelle coût. Plusieurs pistes peuvent alors être envisagées. La première consiste à améliorer la précision dans la résolution des équations adjointes. En effet, même si ces équations sont linéaires (contrairement aux équations d'état), les gradients des variables adjointes sont beaucoup plus importants que ceux des variables directes. La seconde amélioration envisageable consiste à remplacer l'approche différentiation-discrétisation considérée dans ce chapitre par l'approche discrétisation-différenciation (voir section 4.3.4). De cette manière, le gradient discrétisé de la fonctionnelle coût correspondrait effectivement au gradient de la fonctionnelle coût discrétisée. Les développements analytiques de cette approche étant beaucoup plus délicats que ceux de l'approche différentiation-discrétisation (El Shrif, 2003), il pourrait être fait usage de différentiation automatique. Enfin, à moyen terme, on peut envisager de remplacer le modèle réduit LES utilisé dans ce mémoire par un modèle réduit de dynamique construit par POD. Bergmann et Cordier (2008) ont montré récemment qu'à condition de prendre en compte de manière particulière la modification de la base POD lorsque le contrôle est appliqué, il était possible de déterminer les paramètres de contrôle qui minimisent le coefficient de traînée.

Conclusion et perspectives

Dans ce mémoire, nous avons appliqué la technique du contrôle optimal à un canal plan en régime turbulent en utilisant une simulation LES comme modèle réduit des équations de Navier-Stokes. Dans un premier temps (chapitre 2), nous avons effectué une simulation DNS ainsi que deux simulations LES à des résolutions différentes afin d'examiner la capacité des simulations LES à reproduire la dynamique de l'écoulement non contrôlé. Les statistiques obtenues par ces simulations sont en bon accord avec celles des données DNS de référence (Kim *et al.*, 1987; Moser *et al.*, 1999). En outre, du fait de la réduction du nombre de degrés de liberté obtenue avec la LES, le temps CPU et la mémoire nécessaires pour une simulation de l'écoulement sont alors beaucoup moins importants qu'en DNS. On obtient en effet jusqu'à 94% de réduction en temps de calcul pour la simulation S_3 . Cela nous a encouragé à utiliser la LES pour développer des stratégies de contrôle pour le canal plan. Dans un deuxième temps, nous avons alors mis en œuvre deux stratégies de contrôle pour réduire par soufflage/aspiration aux parois la traînée et l'énergie cinétique turbulente de l'écoulement.

Dans le chapitre 3, nous avons opté pour une approche dite par contrôle par opposition. La mise en œuvre de ce schéma heuristique a conduit à une réduction de traînée comparable à celle issue des simulations réalisées par Choi *et al.* (1994) en DNS. Profitant des faibles coûts de calcul associés à la LES, nous avons effectué des simulations de contrôle pour différentes valeurs du nombre de Reynolds et plusieurs positions du plan de détection. Cela nous a permis d'analyser l'influence de la position du plan de détection y_d^+ et du nombre de Reynolds Re_τ sur la réduction de traînée moyenne et l'efficacité énergétique. Il s'avère que pour un nombre de Reynolds fixé, la position du plan de détection associée au maximum de réduction de traînée semble correspondre aux régions de production de la turbulence. Par ailleurs, nos résultats confirment que la réduction de traînée diminue avec l'augmentation du nombre de Reynolds. En effet, pour $Re_\tau = 80$, la réduction de traînée est égale à 48 % et l'écoulement est relaminarisé, alors que pour $Re_\tau = 360$, la réduction de traînée n'est

que de 25 %. Cette méthode semble donc très efficace en pratique si on peut construire un modèle capable de fournir des informations sur la composante normale de vitesse au sein de l'écoulement à partir de données disponibles à la paroi. Une première tentative conduisant à 20 % de réduction de traînée pour un canal turbulent à $Re_\tau = 100$ a été réalisée par Lee *et al.* (1997) à l'aide de réseaux de neurones. Dernièrement, Vodinh Lorang *et al.* (2008) ont obtenu, par une technique similaire de réseaux de neurones, 12 % de réduction pour un canal turbulent à $Re_\tau = 180$.

Dans les chapitres 4 et 5, nous avons abordé le contrôle d'écoulement par la théorie du contrôle optimal. Au chapitre 4, nous avons donné une description du contrôle optimal adaptée à son application en mécanique des fluides. Afin d'examiner la validité de cette démarche, nous l'avons d'abord appliquée à un problème modèle gouverné par l'équation de Burgers linéaire puis non linéaire. Pour ces configurations, les consignes à atteindre ont été obtenues en quelques itérations de la boucle de contrôle. Par la suite, dans le chapitre 5, nous avons utilisé la théorie du contrôle optimal pour développer les systèmes optimaux associés au canal plan simulé par DNS ou LES. L'objectif principal consistait à réduire la traînée moyenne au sein de l'écoulement. Pour cela, nous avons considéré une fonctionnelle coût contenant : (i) un terme de traînée, (ii) un terme d'énergie cinétique totale, (iii) un terme d'énergie cinétique évaluée à la fin de la période d'optimisation T_o , (iv) un terme de pénalisation mesurant le coût du contrôle. Nous avons ensuite précisé les méthodes numériques à utiliser pour résoudre les systèmes optimaux obtenus par LES, puis discuté des difficultés pratiques liées à la mise en œuvre de cette méthode de contrôle. Les deux difficultés majeures auxquelles nous avons été confrontées sont la prise en compte de la longueur de la période d'optimisation et le stockage des variables d'état nécessaires pour la résolution de l'équation adjointe. Nous avons constaté que la durée maximale de la période d'optimisation compatible avec nos simulations est de l'ordre de $T_o^+ \approx 80$. Au delà de cette valeur, l'intégration numérique des équations adjointes diverge. Ce constat nous a obligé à utiliser une procédure dite de contrôle instantané (Bewley, 1999; Protas et Styczek, 2002). Cette procédure consiste à diviser la période d'optimisation totale T_o en des sous-périodes de durée $T^+ \leq 80$ sur lesquelles on résout le système optimal en prenant comme condition initiale pour le contrôle la valeur trouvée sur le sous-intervalle précédent. Pour le stockage des variables d'état, le problème a été surmonté en les sauvegardant tous les 5 pas de temps lors de la résolution des équations d'état, puis en les reconstruisant par interpolation linéaire lors de la résolution de l'équation adjointe. De cette manière, l'écoulement de

canal turbulent a été contrôlé avec succès pour deux valeurs du nombre de Reynolds. Pour l'écoulement de canal à $Re_\tau = 100$, le contrôle est parvenu à relaminariser l'écoulement en prenant pour fonctionnelle coût l'énergie cinétique à la fin de la période d'optimisation. Cependant, on a montré numériquement que pour parvenir à ce résultat, il fallait considérer une sous-période d'optimisation de dimension minimale $T^+ = 25,5$. En dessous de cette valeur, les lois de contrôle obtenues par contrôle optimal conduisent éventuellement à une augmentation notable de la traînée. Dans le cas de l'écoulement à $Re_\tau = 180$, on a pu obtenir une réduction de traînée de l'ordre de 50 % avec une dimension de la sous-période d'optimisation $T^+ = 54$ et une fonctionnelle coût basée sur l'énergie cinétique terminale. On peut noter que ce pourcentage est plus élevé que celui obtenu précédemment par le schéma de contrôle par opposition pour le même nombre de Reynolds. Cela n'est pas très étonnant car le contrôle optimal doit conduire par définition à la meilleure réduction possible de la fonctionnelle coût. Par ailleurs, d'un point de vue physique, l'algorithme de contrôle optimal est basée sur une connaissance parfaite et complète de l'écoulement alors que le contrôle par opposition n'est basé que sur la connaissance sur le plan de détection de la composante normale de la vitesse. Deux remarques importantes peuvent être faites à partir des résultats de ces simulations contrôlées :

- En terme de réduction de traînée, il est plus efficace de considérer comme cible du contrôle le moteur de la turbulence (l'énergie cinétique) plutôt que son effet (la traînée).
- La contrainte minimale que l'on peut atteindre en contrôlant un écoulement de canal turbulent via une procédure de soufflage/aspiration à débit nul aux parois est précisément celle associée à l'écoulement laminaire (voir la discussion dans Bewley et Aamo, 2004).

Ces travaux ont mis en évidence l'efficacité du modèle LES comme équation d'état dans une procédure de contrôle optimal pour obtenir à un coût numérique limité des lois de contrôle efficaces en terme de réduction de traînée. La réduction des coûts de calcul (temps CPU et occupation mémoire) liée à l'utilisation du modèle LES est encourageante pour les applications de ce type d'approche dans le domaine de l'ingénierie. Toutefois, appliquer cette procédure sur une période d'optimisation de grande taille $T_o^+ > 100$ reste problématique.

Perspectives

L'inconvénient de la procédure de contrôle instantané qui a été utilisée dans ce mémoire est la présence de discontinuités pour le contrôle au début de chaque sous-période d'optimisation. Ces discontinuités sont indésirables puisqu'elles perturbent l'écoulement dans le sens opposé à celui fixé par le contrôle sur l'intervalle d'optimisation précédent et tendent à accroître son coût. Pour contourner cette difficulté, la démarche consiste à utiliser comme système d'état dans la procédure de contrôle optimal un modèle de dynamique de dimension encore plus faible que celui de la LES. Pour cela, deux approches pourraient être entreprises. La première consiste à construire par POD, un modèle réduit de la dynamique de l'écoulement à partir de données LES. A ce stade, on peut noter que pour déterminer les bases POD, on profitera de la périodicité imposée dans les deux directions homogènes de l'écoulement. En effet, on peut montrer que dans ce cas (Cordier et Bergmann, 2002a), les modes POD dans les deux directions homogènes de l'écoulement correspondent aux modes de Fourier. Le problème tridimensionnel POD est ainsi transformé en un problème monodimensionnel à résoudre pour chaque couple de nombres d'onde associé aux directions homogènes. La base POD ainsi évaluée peut ensuite être utilisée pour construire un modèle d'ordre réduit de la dynamique de l'écoulement non contrôlé (Bergmann *et al.*, 2005). L'application de la théorie du contrôle optimal en utilisant comme équation d'état le modèle réduit construit par POD permettra d'obtenir un système optimal d'ordre réduit dont la résolution pourrait être réalisée sur une période d'optimisation de grande dimension. Il reste alors à prendre en compte, au cours de la résolution du processus d'optimisation, la variation des modes POD induite par l'application du contrôle (Prabhu *et al.*, 2001). Une méthode consiste à coupler la POD à des techniques d'optimisation à région de confiance (*Trust Region POD*) comme cela vient d'être réalisée récemment pour contrôler l'écoulement de sillage en aval d'un cylindre circulaire (Bergmann et Cordier, 2008).

La deuxième approche envisageable est basée sur la théorie du contrôle linéaire (Kim et Bewley, 2007). Les études réalisées sur l'application de la théorie du contrôle linéaire en turbulence (Lim et Kim, 2004, par exemple) ont révélées l'importance des phénomènes linéaires dans le mécanisme qui provoque le déclenchement de la transition vers l'état turbulent et également leur importance dans le cycle de production de la turbulence. L'approche proposée consiste à considérer l'écoulement en régime transitoire et à projeter les équations linéarisées sur une base de modes POD équilibrés ou *Balanced POD* (Rowley, 2005) pour

construire le modèle réduit. Il est démontré dans Rowley et Ilak (2008) que les bases de modes POD équilibrés captent mieux la dynamique contrôlée de l'écoulement qu'une base POD. Ce résultat vient du fait que les modes POD équilibrés correspondent d'un point de vue de la théorie du contrôle à des modes qui sont autant contrôlables qu'observables (Zhou *et al.*, 1996, par exemple). Le modèle réduit ainsi construit peut être utilisé comme équation d'état dans un problème de contrôle linéaire afin de construire une loi de contrôle à faible coût numérique.

Annexe A

Schéma hybride Runge-Kutta/Crank-Nicolson

A.1 Méthode de Runge-Kutta d'ordre 3 à stockage limité (RK3W)

Cette section se propose de démontrer le schéma de Runge-Kutta d'ordre 3 à stockage limité (Williamson, 1980) dit schéma de Wray. Ce schéma sera noté RK3W.

Nous considérons une équation différentielle du type

$$\frac{\partial u}{\partial t} = f(u, t), \quad (\text{A.1})$$

où f peut contenir des opérateurs linéaires et non-linéaires.

Pour commencer, nous supposons que la solution exacte de (A.1) vérifie le développement en série de Taylor suivant ¹ :

$$u_{n+1} = u_n + \Delta t \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_n + \frac{\Delta t^2}{2!} \left. \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right|_n + \frac{\Delta t^3}{3!} \left. \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} \right|_n + \mathcal{O}(\Delta t^4)$$

Puis, nous remplaçons dans cette équation les dérivées partielles de u par rapport à t par leur expression en fonction de f évalué en (u_n, t_n) . Par application des règles de dérivées successives nous obtenons

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_n &= [f]_n = f(u_n, t_n) \\ \left. \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right|_n &= \left[\frac{\partial f}{\partial t} + f \frac{\partial f}{\partial u} \right]_n \\ \left. \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} \right|_n &= \left[\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial u} + 2f \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial t} + f \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + f^2 \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \right]_n \end{aligned}$$

1. où u_{n+1} représente u à l'instant $t_{n+1} = t_n + \Delta t$

d'où

$$u_{n+1} = \left[u + \Delta t f + \frac{\Delta t^2}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial t} + f \frac{\partial f}{\partial u} \right) + \frac{\Delta t^3}{3!} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial u} + 2f \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial t} + f \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + f^2 \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \right) \right]_n + \mathcal{O}(\Delta t^4) \quad (\text{A.2})$$

On considère alors un schéma Runge-Kutta à 3 pas d'ordre 3. Celui-ci s'écrit :

$$u_{n+1} = u_n + \Delta t \sum_{i=1}^3 \tilde{\gamma}_i k_i \quad (\text{A.3})$$

avec

$$k_1 = f(u_n, t_n)$$

$$k_2 = f(u_n + \tilde{\beta}_1 \Delta t k_1, t_n + \tilde{\alpha}_1 \Delta t)$$

$$k_3 = f(u_n + \tilde{\beta}_2 \Delta t k_1 + \tilde{\beta}_3 \Delta t k_2, t_n + \tilde{\alpha}_2 \Delta t)$$

Par utilisation du développement de Taylor bidimensionnel :

$$f(u + \Delta u, t + \Delta t) = \left[f + \Delta u \frac{\partial f}{\partial u} + \Delta t \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{(\Delta u)^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \Delta u \Delta t \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial t} + \frac{(\Delta t)^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \right]_{(y,t)} + \mathcal{O}(\Delta t^3)$$

On trouve :

$$k_1 = [f]_n$$

$$k_2 = \left[f + \tilde{\beta}_1 \Delta t k_1 \frac{\partial f}{\partial u} + \tilde{\alpha}_1 \Delta t \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{(\tilde{\beta}_1 \Delta t k_1)^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \tilde{\beta}_1 \Delta t^2 k_1 \tilde{\alpha}_1 \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial t} + \frac{(\tilde{\alpha}_1 \Delta t)^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \right]_n + \mathcal{O}(\Delta t^3)$$

$$k_3 = \left[f + \left(\tilde{\beta}_2 \Delta t k_1 + \tilde{\beta}_3 \Delta t k_2 \right) \frac{\partial f}{\partial u} + \tilde{\alpha}_2 \Delta t \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\left(\tilde{\beta}_2 \Delta t k_1 + \tilde{\beta}_3 \Delta t k_2 \right)^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \left(\tilde{\beta}_2 \Delta t k_1 + \tilde{\beta}_3 \Delta t k_2 \right) \tilde{\alpha}_2 \Delta t \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial t} + \frac{(\tilde{\alpha}_2 \Delta t)^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \right]_n + \mathcal{O}(\Delta t^3)$$

Ce qui nous permet de réécrire (A.3) sous la forme :

$$\begin{aligned}
 u_{n+1} = & [u + \tilde{\gamma}_1 \Delta t f \\
 & + \tilde{\gamma}_2 \Delta t \{ f + \tilde{\beta}_1 \Delta t f \frac{\partial f}{\partial u} + \tilde{\alpha}_1 \Delta t \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{(\tilde{\beta}_1 \Delta t f)^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \tilde{\alpha}_1 \tilde{\beta}_1 \Delta t^2 f \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial t} + \frac{(\tilde{\alpha}_1 \Delta t)^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \} \\
 & + \tilde{\gamma}_3 \Delta t \{ f + \left(\tilde{\beta}_2 \Delta t f + \tilde{\beta}_3 \Delta t \left[f + \tilde{\beta}_1 \Delta t f \frac{\partial f}{\partial u} + \tilde{\alpha}_1 \Delta t \frac{\partial f}{\partial t} \right] \right) \frac{\partial f}{\partial u} + \tilde{\alpha}_2 \Delta t \frac{\partial f}{\partial t} \\
 & + \frac{(\tilde{\beta}_2 \Delta t f + \tilde{\beta}_3 \Delta t f)^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + (\tilde{\beta}_2 \Delta t f + \tilde{\beta}_3 \Delta t f) (\tilde{\alpha}_2 \Delta t) \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial t} + \frac{(\tilde{\alpha}_2 \Delta t)^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \}]_n \\
 & + \mathcal{O}(\Delta t^3)
 \end{aligned} \tag{A.4}$$

Il reste alors à identifier dans les équations (A.2) et (A.4) les termes de même degré *i.e.*

coefficients en $\Delta t f$:	$\tilde{\gamma}_1 + \tilde{\gamma}_2 + \tilde{\gamma}_3 = 1$
coefficients en $(\Delta t)^2 \frac{\partial f}{\partial t}$:	$\tilde{\gamma}_2 \tilde{\alpha}_1 + \tilde{\gamma}_3 \tilde{\alpha}_2 = \frac{1}{2}$
coefficients en $(\Delta t)^2 f \frac{\partial f}{\partial u}$:	$\tilde{\gamma}_2 \tilde{\beta}_1 + \tilde{\gamma}_3 (\tilde{\beta}_2 + \tilde{\beta}_3) = \frac{1}{2}$
coefficients en $(\Delta t)^3 \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$:	$\tilde{\gamma}_2 \frac{\tilde{\alpha}_1^2}{2} + \tilde{\gamma}_3 \frac{\tilde{\alpha}_2^2}{2} = \frac{1}{6}$
coefficients en $(\Delta t)^3 \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial u}$:	$\tilde{\gamma}_3 \tilde{\beta}_3 \tilde{\alpha}_1 = \frac{1}{6}$
coefficients en $(\Delta t)^3 f \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial t}$:	$\tilde{\gamma}_2 \tilde{\beta}_1 \tilde{\alpha}_1 + \tilde{\gamma}_3 (\tilde{\beta}_2 + \tilde{\beta}_3) \tilde{\alpha}_2 = \frac{1}{3}$
coefficients en $(\Delta t)^3 f \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}$:	$\tilde{\gamma}_3 \tilde{\beta}_3 \tilde{\beta}_1 = \frac{1}{6}$
coefficients en $(\Delta t)^2 f^2 \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}$:	$\tilde{\gamma}_2 \frac{\tilde{\beta}_1^2}{2} + \tilde{\gamma}_3 \frac{(\tilde{\beta}_2 + \tilde{\beta}_3)^2}{2} = \frac{1}{6}$

Une solution assurant l'ordre 3 en temps avec un niveau de stockage limité est donnée par :

$$\begin{aligned}
 \tilde{\beta}_1 &= 8/15, & \tilde{\beta}_2 &= 1/4, & \tilde{\beta}_3 &= 5/12, \\
 \tilde{\alpha}_1 &= 8/15, & \tilde{\alpha}_2 &= 2/3, \\
 \tilde{\gamma}_1 &= 1/4, & \tilde{\gamma}_2 &= 0, & \tilde{\gamma}_3 &= 3/4.
 \end{aligned} \tag{A.5}$$

Pour mettre en évidence que ce schéma correspond un stockage limité, posons :

$$\tilde{\eta}_2 = \tilde{\beta}_2 - \tilde{\beta}_1 = -17/60 \tag{A.6}$$

et

$$\tilde{\eta}_3 = -\tilde{\beta}_3 = -5/12 \tag{A.7}$$

On montre alors facilement que le schéma (A.3) s'écrit de la manière suivante :

– 1^{er} sous-pas :

$$\begin{cases} k_1 = f(u_n, t_n) \\ u^* = u_n + \tilde{\beta}_1 \Delta t k_1 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \frac{u^* - u_n}{\Delta t} = \tilde{\beta}_1 k_1 \quad (\text{A.8})$$

– 2^{ème} sous-pas :

$$\begin{cases} k_2 = f(u^*, t_n + \tilde{\alpha}_1 \Delta t) \\ u^{**} = u^* + \tilde{\eta}_2 \Delta t k_1 + \tilde{\beta}_3 \Delta t k_2 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \frac{u^{**} - u^*}{\Delta t} = \tilde{\eta}_2 k_1 + \tilde{\beta}_3 k_2 \quad (\text{A.9})$$

– 3^{ème} sous-pas :

$$\begin{cases} k_3 = f(u^{**}, t_n + \tilde{\alpha}_2 \Delta t) \\ u_{n+1} = u^{**} + \tilde{\eta}_3 \Delta t k_2 + \tilde{\gamma}_3 \Delta t k_3 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \frac{u_{n+1} - u^{**}}{\Delta t} = \tilde{\eta}_3 k_2 + \tilde{\gamma}_3 k_3 \quad (\text{A.10})$$

A.2 Schéma semi-implicite Runge-Kutta/Crank-Nicolson

Nous considérons maintenant le cas général où la fonction f s'écrit sous la forme :

$$f(u, t) = L(u) + N(u) \quad (\text{A.11})$$

où $L(u)$ est un opérateur linéaire et $N(u)$ un opérateur non-linéaire. Afin de combiner les avantages liés d'une part au bon critère de stabilité de la méthode de Crank-Nicolson et d'autre part au niveau de stockage limité associé au schéma RK3W, un schéma hybride peut être construit (Spalart *et al.*, 1991; Wesseling, 2001). Ce schéma propose de traiter les termes non linéaires $N(u)$ avec le schéma RK3W et les termes linéaires $L(u)$ avec Crank-Nicolson. Ce schéma peut s'écrire de la manière suivante :

– 1^{er} sous-pas :

$$\frac{u^* - u_n}{\Delta t} = \frac{\tilde{\alpha}_1}{2} L(u^* + u_n) + \tilde{\beta}_1 N(u_n) \quad (\text{A.12})$$

– 2^{ème} sous-pas :

$$\frac{u^{**} - u^*}{\Delta t} = \frac{\tilde{\alpha}_2 - \tilde{\alpha}_1}{2} L(u^{**} + u^*) + \tilde{\eta}_2 N(u_n) + \tilde{\beta}_3 N(u^*) \quad (\text{A.13})$$

– 3^{ème} sous-pas :

$$\frac{u_{n+1} - u^{**}}{\Delta t} = \frac{1 - \tilde{\alpha}_2}{2} L(u_{n+1} + u^{**}) + \tilde{\eta}_3 N(u^*) + \tilde{\gamma}_3 N(u^{**}) \quad (\text{A.14})$$

Les coefficients qui apparaissent dans (A.12), (A.13) et (A.14) sont ceux introduits à la section A.1.

Sachant que pour $k = 1$, on a $u^{k-1} = u_n$ et pour $k = 3$, $u^k = u_{n+1}$, ces relations peuvent encore s'écrire :

$$\frac{u^k - u^{k-1}}{\Delta t} = \beta_k L(u^k + u^{k-1}) + \gamma_k N(u^{k-1}) + \eta_k N(u^{k-2}) \quad (\text{A.15})$$

où les coefficients β_k , γ_k et η_k sont obtenus par identification avec les expressions (A.12) à (A.14). On obtient :

$$\begin{aligned}\beta_1 &= \frac{\tilde{\alpha}_1}{2} = 4/15 & \beta_2 &= \frac{\tilde{\alpha}_2 - \tilde{\alpha}_1}{2} = 1/15 & \beta_3 &= \frac{1 - \tilde{\alpha}_2}{2} = 1/6 \\ \gamma_1 &= \tilde{\beta}_1 = 8/15 & \gamma_2 &= \tilde{\beta}_3 = 5/12 & \gamma_3 &= \tilde{\gamma}_3 = 3/4 \\ \eta_1 &= 0, & \eta_2 &= \tilde{\eta}_2 = -17/60 & \eta_3 &= \tilde{\eta}_3 = -5/12\end{aligned}$$

Ces coefficients sont ceux utilisés dans nos simulations (voir section 2.4.2.2). Cette combinaison de schémas (RK3W/CN) avait déjà été adopté par Le et Moin (1991).

Annexe B

Mise sous forme LU de l'algorithme de projection

Dans cette annexe, nous suivons la démarche proposée par Perot (1993, 1995) et ré-écrivons les équations (2.41) et (2.42) sous la forme d'une décomposition LU.

Pour mémoire, les équations (2.41) et (2.42) s'écrivent :

$$\mathbf{u}^k - \beta_k \Delta t \mathbf{M}(\mathbf{u}^k) + 2 \beta_k \Delta t \mathbf{G}(\Pi^k - \Pi^{k-1}) = \mathbf{r}^{k-1}$$

$$D(\mathbf{u}^k) = 0$$

De manière immédiate, ces équations se mettent sous la forme du système matriciel suivant :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} - \beta_k \Delta t \mathbf{M} & 2 \beta_k \Delta t \mathbf{G} \\ D & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}^k \\ \Pi^k - \Pi^{k-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{r}^{k-1} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Puisque $\Pi^k - \Pi^{k-1} = \mathcal{O}(\Delta t)$ (Akselvoll, 1995, par exemple), on peut approximer le système précédent (tout en conservant l'ordre 2 en temps) par l'expression :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} - \beta_k \Delta t \mathbf{M} & (\mathbf{I} - \beta_k \Delta t \mathbf{M}) 2 \beta_k \Delta t \mathbf{G} \\ D & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}^k \\ \Pi^k - \Pi^{k-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{r}^{k-1} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Or, la matrice apparaissant au terme de gauche peut être factorisée de manière exacte par une méthode LU. On obtient alors :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} - \beta_k \Delta t \mathbf{M} & 0 \\ D & -2 \beta_k \Delta t \mathbf{G} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & 2 \beta_k \Delta t \mathbf{G} \\ 0 & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}^k \\ \Pi^k - \Pi^{k-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{r}^{k-1} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Cette dernière expression peut se décomposer en :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} - \beta_k \Delta t \mathbf{M} & 0 \\ D & -2 \beta_k \Delta t \mathbf{G} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{u}}^k \\ \delta \tilde{\Pi}^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{r}^{k-1} \\ 0 \end{pmatrix}$$

d'une part, et

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} & 2 \beta_k \Delta t \mathbf{G} \\ 0 & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}^k \\ \Pi^k - \Pi^{k-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{u}}^k \\ \delta \tilde{\Pi}^k \end{pmatrix}$$

d'autre part.

Finalement, ces deux systèmes matriciels peuvent encore s'écrire sous la forme suivante :

$$\tilde{\mathbf{u}}^k - \beta_k \Delta t \mathbf{M}(\tilde{\mathbf{u}}^k) = \mathbf{r}^{k-1}$$

$$D\mathbf{G} \left(\Pi^k - \Pi^{k-1} \right) = \frac{1}{2\beta_k \Delta t} D\tilde{\mathbf{u}}^k$$

$$\mathbf{u}^k = \tilde{\mathbf{u}}^k - 2\beta_k \Delta t \mathbf{G} \left(\Pi^k - \Pi^{k-1} \right)$$

où $\tilde{\mathbf{u}}^k$ est un champ de vitesse intermédiaire qui ne vérifie pas nécessairement la condition d'incompressibilité. Ces équations correspondent précisément à (2.43), (2.44) et (2.45).

Annexe C

Discrétisation numérique des équations de Navier-Stokes

C.1 Distribution des nœuds

Pour discrétiser les équations de Navier-Stokes sur maillage décalé, nous introduisons des cellules repérées par des indices entiers $[i, j, k]$ (voir figure C.1). Ces cellules sont définies de la manière suivante :

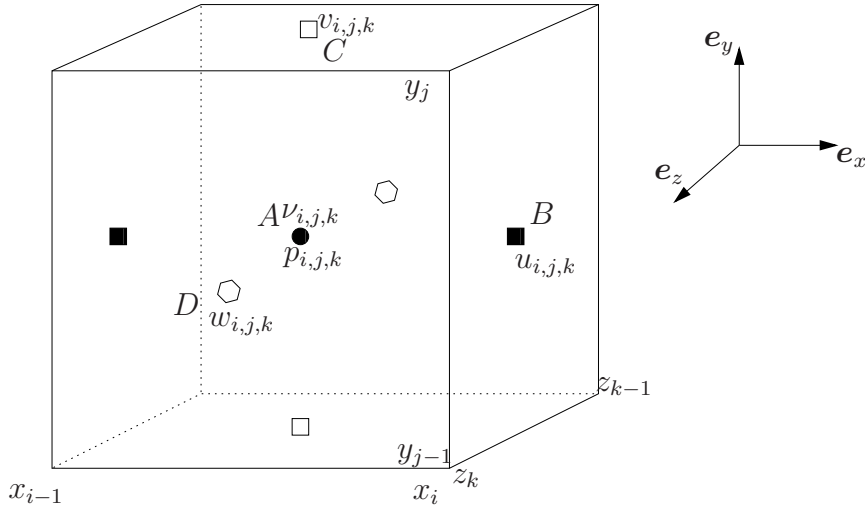
- au centre (point A), les nœuds de pression $p_{i,j,k}$ et de viscosité $\nu_{i,j,k}$;
- au milieu de la face de droite (point B), les nœuds de la composante $u_{i,j,k}$;
- au milieu de la face du dessus (point C), les nœuds de la composante $v_{i,j,k}$;
- au milieu de la face avant (point D), les nœuds de la composante $w_{i,j,k}$.

Par convention, nous appellerons :

1. x_i , la coordonnée selon $\mathbf{e}_x$ du nœud de vitesse $u_{i,j,k}$;
2. y_j , la coordonnée selon $\mathbf{e}_y$ du nœud de vitesse $v_{i,j,k}$;
3. z_k , la coordonnée selon $\mathbf{e}_z$ du nœud de vitesse $w_{i,j,k}$.

Les indices non entiers $[i \pm \frac{1}{2}, j \pm \frac{1}{2}, k \pm \frac{1}{2}]$ seront réservés aux points du maillage où les nœuds de vitesse ne sont pas définis.

Dans chacune des directions, les nombres de nœuds de vitesse et de pression (viscosité) ne sont pas les mêmes. La figure C.2 donne la répartition des variables dans chacun des plans. Nous avons considéré N_x , N_y et N_z cellules dans les directions $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$ et $\mathbf{e}_z$ respectivement.

FIGURE C.1 – Cellule $[i, j, k]$ du maillage cartésien avec positionnement des nœuds.

C.2 Discrétisation de l'équation de quantité de mouvement

Les composantes dans la direction $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$ et $\mathbf{e}_z$ de l'équation de quantité de mouvement seront respectivement discrétisées aux points B , C et D donnés sur la figure C.1. Aux points où les variables sont inconnues, celles-ci seront évaluées par interpolation linéaire.

C.2.1 Termes diffusifs

Les termes diffusifs de l'équation de quantité de mouvement filtrée sont :

– dans la direction $\mathbf{e}_x$

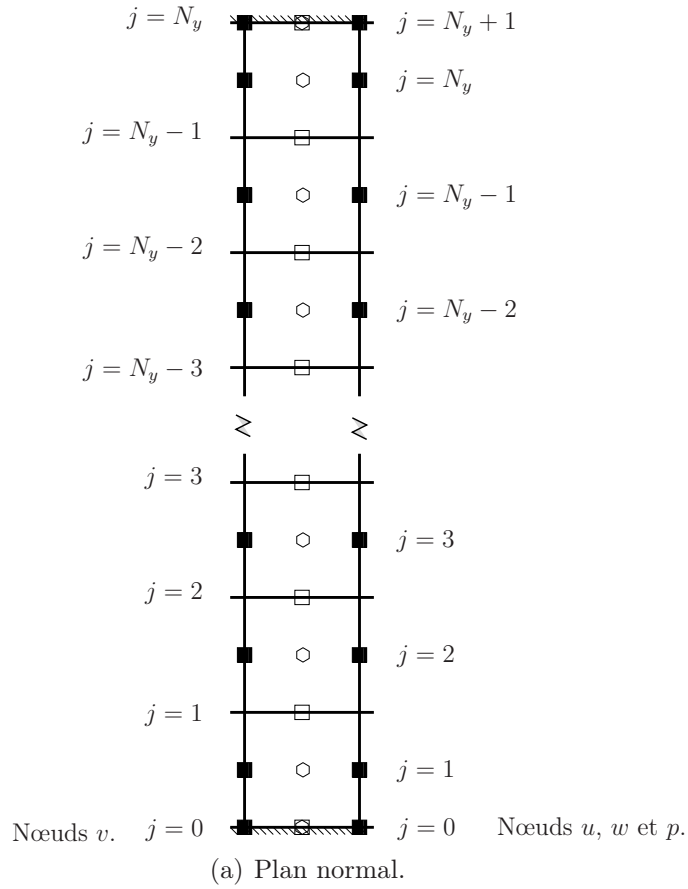
$$L_1 = \frac{\partial}{\partial x} \left(\nu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\nu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad (\text{C.1})$$

– dans la direction $\mathbf{e}_y$

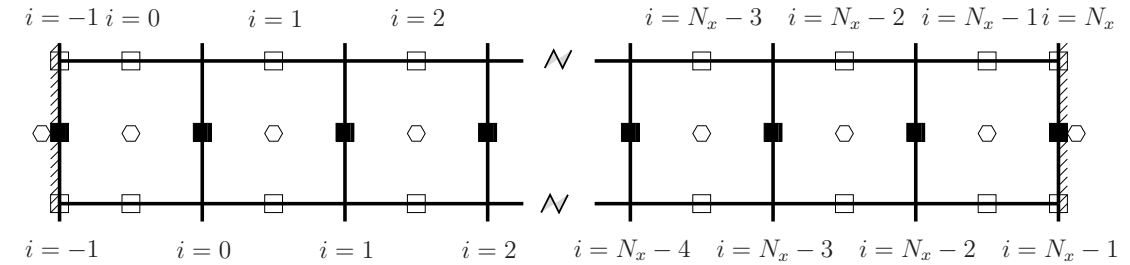
$$L_2 = \frac{\partial}{\partial x} \left(\nu \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\nu \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \frac{\partial w}{\partial y} \right) \quad (\text{C.2})$$

– dans la direction $\mathbf{e}_z$

$$L_3 = \frac{\partial}{\partial x} \left(\nu \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\nu \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \frac{\partial w}{\partial z} \right) \quad (\text{C.3})$$



Nœuds u, w et p .



Nœuds u, v et p .

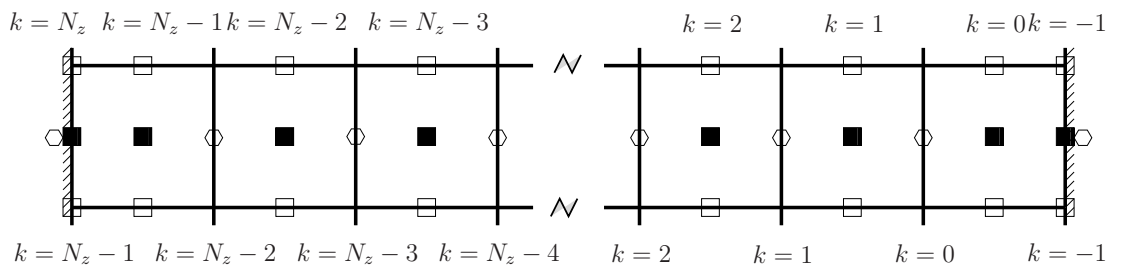


FIGURE C.2 – Répartition des nœuds dans le domaine de calcul.

Les termes diffusifs discrétisés sont :

–

$$\frac{\delta}{\delta x} \left(\nu \frac{\delta u}{\delta x} \right) \Big|_B = \frac{1}{(\Delta x)^2} [\nu_{i+1/2,j} u_{i+1,j} - (\nu_{i+1/2,j} + \nu_{i-1/2,j}) u_{i,j} + \nu_{i-1/2,j} u_{i-1,j}]$$

–

$$\frac{\delta}{\delta y} \left(\nu \frac{\delta u}{\delta y} \right) \Big|_B = \mathcal{A}_j^{(u)} u_{i,j-1} + \mathcal{B}_j^{(u)} u_{i,j} + \mathcal{C}_j^{(u)} u_{i,j+1}$$

où

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_j^{(u)} &= \frac{2 \nu_{i,j-1/2}}{(y_j - y_{j-1})(y_j - y_{j-2})} \\ \mathcal{B}_j^{(u)} &= -\frac{2}{y_j - y_{j-1}} \left[\frac{\nu_{i,j+1/2}}{y_{j+1} - y_{j-1}} + \frac{\nu_{i,j-1/2}}{y_j - y_{j-2}} \right] \\ \mathcal{C}_j^{(u)} &= \frac{2 \nu_{i,j+1/2}}{(y_j - y_{j-1})(y_{j+1} - y_{j-1})} \end{aligned}$$

–

$$\frac{\delta}{\delta y} \left(\nu \frac{\delta v}{\delta x} \right) \Big|_B = \frac{1}{\Delta x (y_j - y_{j-1})} [\nu_{i,j+1/2} (v_{i+1,j} - v_{i,j}) - \nu_{i,j-1/2} (v_{i+1,j-1} - v_{i,j-1})]$$

C.2.2 Termes convectifs

Les termes convectifs de l'équation de quantité de mouvement filtrée sont :

– dans la direction $\mathbf{e}_x$

$$C_1 = \frac{\partial(uu)}{\partial x} + \frac{\partial(uv)}{\partial y} + \frac{\partial(uw)}{\partial z} \quad (\text{C.4})$$

– dans la direction $\mathbf{e}_y$

$$C_2 = \frac{\partial(uv)}{\partial x} + \frac{\partial(vv)}{\partial y} + \frac{\partial(vw)}{\partial z} \quad (\text{C.5})$$

– dans la direction $\mathbf{e}_z$

$$C_3 = \frac{\partial(uw)}{\partial x} + \frac{\partial(vw)}{\partial y} + \frac{\partial(w w)}{\partial z} \quad (\text{C.6})$$

C.3 Discrétisation de l'équation de Poisson

L'équation de Poisson (2.44) s'écrit encore :

$$\frac{\partial^2 (\Pi^k - \Pi^{k-1})}{\partial x_j \partial x_j} = \frac{1}{2 \beta_k \Delta t} \frac{\partial \tilde{u}_i^k}{\partial x_i}$$

soit encore formellement

$$\mathcal{L}(\phi) = \frac{1}{2 \beta_k \Delta t} \mathcal{D}(\tilde{\mathbf{u}}^k)$$

où $\mathcal{D}$ est un opérateur de divergence discret et $\mathcal{L}$ un opérateur Laplacien discret.

L'équation de Poisson est discrétisée au point A (voir figure C.1).

C.3.1 Opérateur de divergence

De manière immédiate, on obtient :

$$\begin{aligned}\mathcal{D}(\mathbf{u}) &= \left. \frac{\delta u}{\delta x} \right|_A + \left. \frac{\delta v}{\delta y} \right|_A + \left. \frac{\delta w}{\delta z} \right|_A \\ &= \frac{1}{\Delta x} (u_{i,j,k} - u_{i-1,j,k}) + \frac{1}{y_j - y_{j-1}} (v_{i,j,k} - v_{i,j-1,k}) + \frac{1}{\Delta z} (w_{i,j,k} - w_{i,j,k-1})\end{aligned}$$

C.3.2 Opérateur Laplacien

Les dérivées selon les variables x et z étant évaluées par méthode pseudo-spectrale, nous allons donner uniquement le terme correspondant à la dérivée en y . On a :

$$\left(\frac{\delta^2 \phi}{\delta y^2} \right) \Big|_A = \mathcal{A}_j^{(\phi)} \phi_{i,j-1,k} + \mathcal{B}_j^{(\phi)} \phi_{i,j,k} + \mathcal{C}_j^{(\phi)} \phi_{i,j+1,k}$$

où

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_j^{(\phi)} &= -\frac{2}{y_j - y_{j-1}} \left[\frac{1}{y_j - y_{j-2}} + \frac{1}{y_{j+1} - y_{j-1}} \right] \\ \mathcal{B}_j^{(\phi)} &= \frac{2}{(y_j - y_{j-1})(y_{j+1} - y_{j-1})} \\ \mathcal{C}_j^{(\phi)} &= \frac{2}{(y_j - y_{j-1})(y_j - y_{j-2})}\end{aligned}$$

Annexe D

Analyse de Fourier d'un schéma de différences finies centrées d'ordre 2

L'objectif de cette annexe est de déterminer le nombre d'onde modifié associé à un schéma aux différences finies centrées d'ordre 2. Nous suivrons pour cela une démarche similaire à celle proposée par Moin (2001).

Soit ϕ une fonction périodique sur un intervalle $[0; L_x]$ *i.e.* $\phi(0) = \phi(L_x)$, cette fonction se décompose en série de Fourier de la manière suivante :

$$\phi(x) = \sum_{k=-n_x/2}^{n_x/2-1} \widehat{\phi}_k \exp(jk_x x) \quad (\text{D.1})$$

où $k_x = \frac{2\pi}{L_x} k$ est le nombre d'onde et $\widehat{\phi}_k$ les coefficients de Fourier.

De (D.1), on déduit l'expression de la dérivée seconde exacte de ϕ . On trouve :

$$\begin{aligned} \phi''(x) &= \sum_{k=-n_x/2}^{n_x/2-1} (jk_x)^2 \widehat{\phi}_k \exp(jk_x x) = \sum_{k=-n_x/2}^{n_x/2-1} -k_x^2 \widehat{\phi}_k \exp(jk_x x) \\ &= \sum_{k=-n_x/2}^{n_x/2-1} \widehat{\phi}_k'' \exp(jk_x x) \end{aligned}$$

où $\widehat{\phi}_k''$ sont les coefficients de Fourier associés à la dérivée seconde calculée de manière exacte. On trouve par identification que :

$$\widehat{\phi}_k'' = -k_x^2 \widehat{\phi}_k.$$

Par analogie, on peut considérer que les coefficients de Fourier associés au calcul de la dérivée seconde par un schéma aux différences finies d'ordre 2, soit $\left(\widehat{\phi}_k''\right)_{fd}$ s'écrivent :

$$\left(\widehat{\phi}_k''\right)_{fd} = -k_x^2 \widehat{\phi}_k$$

où k_x'' est le nombre d'onde modifié que l'on cherche à déterminer.

Le schéma numérique que l'on analyse est le schéma aux différences finies centrées d'ordre 2 donné par :

$$\left. \frac{\delta^2 \phi}{\delta x^2} \right|_i = \phi_i'' = \frac{\phi_{i+1} - 2\phi_i + \phi_{i-1}}{\Delta x^2} + \mathcal{O}(\Delta x^2)$$

Or, d'une part, on a :

$$\phi_i'' = \phi''(x_i) = \sum_{k=-n_x/2}^{n_x/2-1} \left(\widehat{\phi_k''} \right)_{fd} \exp(jk_x x_i) = \sum_{k=-n_x/2}^{n_x/2-1} -k_x'' \widehat{\phi_k} \exp(jk_x x_i) \quad \text{avec} \quad x_i = i \Delta x$$

et, d'autre part, on peut écrire que :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta x^2} (\phi_{i+1} - 2\phi_i + \phi_{i-1}) &= \frac{1}{\Delta x^2} \sum_{k=-n_x/2}^{n_x/2-1} \widehat{\phi_k} [\exp(jk_x x_{i+1}) - 2\exp(jk_x x_i) + \exp(jk_x x_{i-1})] \\ &= \frac{1}{\Delta x^2} \sum_{k=-n_x/2}^{n_x/2-1} \widehat{\phi_k} [\exp(jk_x \Delta x) - 2 + \exp(-jk_x \Delta x)] \exp(jk_x x_i) \\ &= \frac{1}{\Delta x^2} \sum_{k=-n_x/2}^{n_x/2-1} 2\widehat{\phi_k} [\cos(k_x \Delta x) - 1] \exp(jk_x x_i) \end{aligned}$$

soit par identification

$$k_x'' = \frac{2[1 - \cos(k_x \Delta x)]}{\Delta x^2}.$$

Annexe E

Rappels sur l'écoulement de Poiseuille

Sauf mention contraire, toutes les grandeurs sont dimensionnées dans cette annexe.

E.1 Mise en équation

Dans le cas d'un écoulement de Poiseuille, le champ de vitesse se ramène à $\mathbf{u} = (u(y), 0, 0)$ où $y \in [-\delta; \delta]$ est la variable dans la direction normale. Les équations de quantité de mouvement s'écrivent alors :

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

pour la composante longitudinale, et

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} = 0 \quad \implies \quad P = P(x)$$

pour la composante normale.

Deux jeux de conditions aux limites peuvent alors être utilisés. Le premier qui privilégie la vitesse au centre du canal U_c et le second qui privilégie la vitesse de frottement u_τ .

E.1.1 Conditions aux limites sur U_c

On considère alors les conditions aux limites suivantes :

$$\begin{aligned} P(x=0) &= P_0 \\ u(y=\pm\delta) &= 0 \\ u(y=0) &= U_c \end{aligned}$$

Après intégration, on obtient :

$$\begin{aligned} P(x) &= P_0 - \frac{2\mu U_c}{\delta^2} x \\ u(y) &= \left(1 - \frac{y^2}{\delta^2}\right) U_c \end{aligned}$$

Le gradient de pression longitudinal est donc donné par :

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -\frac{2\mu U_c}{\delta^2}.$$

Par ailleurs, on rappelle que la vitesse de frottement est définie par l'expression :

$$u_\tau = \sqrt{\nu \frac{\partial u}{\partial y}(y = \pm\delta)}$$

Par conséquent, le gradient de pression moyen longitudinal est directement relié (via U_c) à la vitesse de frottement à la paroi.

La vitesse débitante U_b est alors égale à :

$$U_b = \frac{1}{2\delta} \int_{-\delta}^{\delta} u(y) dy = \frac{2}{3} U_c$$

et le débit volumique Q_v est donné par :

$$Q_v = L_z \int_{-\delta}^{\delta} u(y) dy = 2\delta U_b L_z = \frac{4}{3} U_c \delta L_z$$

E.1.2 Conditions aux limites sur u_τ

On considère maintenant les conditions aux limites suivantes :

$$\begin{aligned} P(x=0) &= P_0 \\ u(y=\pm\delta) &= 0 \\ \nu \frac{\partial u}{\partial y}(y=-\delta) &= u_\tau^2 \end{aligned}$$

Après intégration, on obtient :

$$\begin{aligned} P(x) &= P_0 - \frac{\rho u_\tau^2}{\delta} x \\ u(y) &= \frac{1}{2} \frac{u_\tau^2 \delta}{\nu} \left(1 - \frac{y^2}{\delta^2}\right) \end{aligned}$$

soit encore en faisant intervenir le nombre de Reynolds $Re_\tau = \frac{u_\tau \delta}{\nu}$:

$$u(y) = \frac{1}{2} Re_\tau \left(1 - \frac{y^2}{\delta^2}\right) u_\tau.$$

Le gradient de pression longitudinal est donc donné par :

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -\frac{\rho u_\tau^2}{\delta}.$$

Ici encore, on retrouve que le gradient de pression moyen longitudinal est lié directement à la vitesse de frottement à la paroi.

La vitesse débitante U_b est alors égale à :

$$U_b = \frac{1}{2\delta} \int_{-\delta}^{\delta} u(y) dy = \frac{1}{3} Re_\tau u_\tau$$

et le débit volumique Q_v est donné par :

$$Q_v = L_z \int_{-\delta}^{\delta} u(y) dy = 2\delta U_b L_z = \frac{2}{3} Re_\tau u_\tau \delta L_z$$

Or, le code de simulation numérique est adimensionné. On obtient alors après adimensionnement :

$$\tilde{Q}_v = \frac{Q_v}{u_\tau \delta^2} = \frac{2}{3} \frac{L_z}{\delta} Re_\tau$$

soit, pour $L_z = \frac{4}{3}\pi\delta$

$$\tilde{Q}_v = \frac{8}{9} \pi Re_\tau$$

soit encore pour $Re_\tau = 180$, $\tilde{Q}_v \simeq 502,65$ ce qui correspond précisément à la valeur déterminée numériquement pour un profil de Poiseuille lorsqu'un forçage à débit constant est imposé (voir section 2.4.4.4).

Annexe F

Terme de forçage

Dans cette annexe, nous présentons la démarche proposée à l'origine par Deschamps (1988) et suivie ensuite par de nombreux auteurs (Lenormand, 1999; Montreuil, 2000; Rambaud, 2001; Von Kaenel, 2003; Benarafa, 2005) pour déterminer le terme de forçage permettant d'imposer le débit volumique constant au cours de la simulation numérique. Les démonstrations que l'on trouve dans ces références sont souvent partielles, voire confuses. Une part de la confusion provient du choix de la convention faite pour le système d'axe. En effet, certains auteurs ont pris comme système d'axe la convention "aérodynamique" ($\mathbf{e}_z$ est la direction normale de l'écoulement), d'autres ont choisi la convention "turbulence" ($\mathbf{e}_z$ est la direction transversale de l'écoulement). Une autre part vient du fait que certains paramètres ne sont pas donnés et que des termes changent de signe au cours des développements. L'objet de l'annexe est de - si possible - lever ces imprécisions.

F.1 Mise en équation

Quelles que soient les grandeurs de référence retenues pour la longueur et la vitesse : (δ, u_τ) , (δ, U_b) ou (δ, U_c) , les équations de Navier-Stokes incompressibles s'écrivent de manière adimensionnée comme :

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0, \quad (\text{F.1})$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial (u_i u_j)}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} - \epsilon_{RHS} F_1 = 0, \quad (\text{F.2})$$

où Re est le nombre de Reynolds construit sur les grandeurs de référence et $\epsilon_{RHS} = \pm 1$ selon le signe imposé en facteur du terme de forçage.

Pour être homogène avec le reste du mémoire, nous choisissons dans tous nos développements la convention "turbulence" pour le système d'axe. L'écoulement étant considéré comme périodique dans un plan $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_z)$, on introduit un opérateur de moyenne dans ce

plan. Par conséquent, on peut développer toute variable ϕ comme :

$$\phi(x_1, x_2, x_3, t) = \langle \phi \rangle_{XZ}(x_2, t) + \phi'(x_1, x_2, x_3, t) \quad (\text{F.3})$$

où

$$\langle \phi \rangle_{XZ}(x_2, t) = \frac{1}{L_1 L_3} \int_0^{L_1} \int_0^{L_3} \phi(x_1, x_2, x_3, t) dx_1 dx_3$$

On peut montrer que quelles que soient deux variables ϕ_1 et ϕ_2 , l'opérateur de moyenne $\langle \cdot \rangle_{XZ}$ vérifie les relations suivantes :

$$\langle \phi_1 + \phi_2 \rangle_{XZ} = \langle \phi_1 \rangle_{XZ} + \langle \phi_2 \rangle_{XZ}$$

$$\langle \alpha \phi_1 \rangle_{XZ} = \alpha \langle \phi_1 \rangle_{XZ} \quad \text{pour } \alpha \text{ indépendant des variables } x_1 \text{ et } x_3$$

$$\langle \langle \phi_1 \rangle_{XZ} \phi_2 \rangle_{XZ} = \langle \phi_1 \rangle_{XZ} \langle \phi_2 \rangle_{XZ}$$

$$\langle \phi_1 \phi_2 \rangle_{XZ} = \langle \phi_1 \rangle_{XZ} \langle \phi_2 \rangle_{XZ} + \langle \phi_1' \phi_2' \rangle_{XZ}$$

$$\langle \frac{\partial}{\partial t} \phi_1 \rangle_{XZ} = \frac{\partial}{\partial t} \langle \phi_1 \rangle_{XZ}$$

$$\langle \frac{\partial}{\partial x_i} \phi_1 \rangle_{XZ} = \frac{\partial}{\partial x_i} \langle \phi_1 \rangle_{XZ} \quad \text{avec } i = 1, 3$$

On écrit ensuite (F.2) pour $i = 1$ en décomposant les variables de vitesse et de pression selon (F.3). On obtient :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} (\langle u_1 \rangle_{XZ} + u_1') + \frac{\partial}{\partial x_1} [(\langle u_1 \rangle_{XZ} + u_1')^2] + \frac{\partial}{\partial x_2} [(\langle u_1 \rangle_{XZ} + u_1') (\langle u_2 \rangle_{XZ} + u_2')] + \\ & \frac{\partial}{\partial x_3} [(\langle u_1 \rangle_{XZ} + u_1') (\langle u_3 \rangle_{XZ} + u_3')] + \frac{\partial}{\partial x_1} (\langle p \rangle_{XZ} + p') - \frac{1}{Re} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} (\langle u_1 \rangle_{XZ} + u_1') - \epsilon_{RHS} F_1 = 0 \end{aligned}$$

On applique alors l'opérateur $\langle \cdot \rangle_{XZ}$ à l'équation précédente. Compte tenu du fait que $\langle u_2 \rangle_{XZ} = \langle u_3 \rangle_{XZ} = 0$ et que $\langle u_1 \rangle_{XZ}$ ne dépend que de la variable x_2 , on trouve après simplifications :

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle u_1 \rangle_{XZ} + \frac{\partial}{\partial x_2} \langle u_1' u_2' \rangle_{XZ} - \frac{1}{Re} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \langle u_1 \rangle_{XZ} - \epsilon_{RHS} F_1 = 0 \quad (\text{F.4})$$

F.2 Débit volumique et vitesse débitante

Le débit volumique Q_v est donné en fonction du temps par l'expression :

$$Q_v(t) = L_3 \int_{-1}^1 \langle u_1 \rangle_{XZ}(x_2) dx_2$$

d'où l'on peut déduire une expression de la vitesse débitante instationnaire par la relation :

$$U_b(t) = \frac{Q_v(t)}{2 L_3}$$

L'objectif est maintenant de déterminer une équation donnant l'évolution temporelle du débit volumique. Pour cela, on intègre (F.4) dans la direction normale, soit :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{-1}^1 \langle u_1 \rangle_{XZ}(x_2) dx_2 + [\langle u'_1 u'_2 \rangle_{XZ}]_{-1}^1 - \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial}{\partial x_2} \langle u_1 \rangle_{XZ} \right]_{-1}^1 - 2 \epsilon_{RHS} F_1 = 0$$

Or, les conditions de non glissement imposées à la paroi imposent que

$$[\langle u'_1 u'_2 \rangle_{XZ}]_{-1}^1 = 0.$$

L'équation précédente devient donc en introduisant le débit volumique Q_v :

$$\begin{aligned} \frac{1}{L_3} \frac{\partial Q_v}{\partial t} &= \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial}{\partial x_2} \langle u_1 \rangle_{XZ} \right]_{-1}^1 - \frac{\partial}{\partial x_2} \langle u_1 \rangle_{XZ} \Big|_{-1} + 2 \epsilon_{RHS} F_1 \\ &= -2 \left[\frac{1}{Re} \frac{\partial}{\partial x_2} \langle u_1 \rangle_{XZ} \Big|_{-1} - \epsilon_{RHS} F_1 \right] \end{aligned}$$

Or, par définition de la contrainte à la paroi, on a :

$$\tau_w = \frac{1}{Re} \frac{\partial}{\partial x_2} \langle u_1 \rangle_{XZ} \Big|_{-1}$$

d'où

$$\frac{1}{L_3} \frac{\partial Q_v}{\partial t} = -2 [\tau_w - \epsilon_{RHS} F_1] \quad (F.5)$$

ou encore pour le débit

$$\frac{\partial U_b}{\partial t} = - [\tau_w - \epsilon_{RHS} F_1] \quad (F.6)$$

Notons alors qu'en choisissant pour vitesse de référence la vitesse de frottement à la paroi u_τ alors $\tau_w = 1$ alors que si on choisit pour vitesse de référence la vitesse débitante U_b ou la vitesse au centre du canal U_c alors $\tau_w = u_\tau^2$. Cette remarque justifie en particulier que pour les codes de simulation numérique utilisant comme vitesse de référence u_τ , on utilise généralement $F_1 = \epsilon_{RHS}$. En effet, dans ce cas, on peut s'attendre d'après (F.5) ou (F.6) à ce qu'il y ait conservation du débit.

F.3 Algorithme de point fixe

En posant $S_\Sigma = 2 L_3$, les équations (F.5) et (F.6) peuvent encore s'écrire comme :

$$\frac{\partial Q_v}{\partial t} = -S_\Sigma [\tau_w - \epsilon_{RHS} F_1] = -g_{Q_v}(t) \quad (F.7)$$

et

$$\frac{\partial U_b}{\partial t} = -[\tau_w - \epsilon_{RHS} F_1] = -g_{U_b}(t) \quad (\text{F.8})$$

où $g_{Q_v}(t) = S_\Sigma g_{U_b}(t)$.

L'objectif est de déterminer une loi permettant de calculer à chaque pas de temps la valeur de F_1 pour conserver le débit ou la vitesse débitante. Pour cela, on va utiliser un algorithme de point fixe. Posons $\widetilde{Q}_v(t) = Q_v(t) - Q_v^{(0)}$ où $Q_v^{(0)}$ est la valeur initiale du débit. (F.7) devient alors :

$$\frac{\partial \widetilde{Q}_v(t)}{\partial t} = -g_{Q_v}(t)$$

En intégrant cette équation par une méthode d'Euler explicite, on obtient :

$$\widetilde{Q}_v^{(n+1)} = \widetilde{Q}_v^{(n)} - \Delta t g_{Q_v}^{(n)} \quad (\text{F.9})$$

où (n) représente ici le numéro de pas de temps et Δt la valeur du pas de temps d'intégration.

Considérons la loi d'évolution discrète suivante pour g_{Q_v} :

$$g_{Q_v}^{(n+1)} = g_{Q_v}^{(n)} + \alpha \widetilde{Q}_v^{(n+1)} + \beta \widetilde{Q}_v^{(n)} \quad (\text{F.10})$$

En introduisant (F.9) dans (F.10), il devient :

$$g_{Q_v}^{(n+1)} = (\alpha + \beta) \widetilde{Q}_v^{(n)} + (1 - \alpha \Delta t) g_{Q_v}^{(n)} \quad (\text{F.11})$$

Il est alors possible d'écrire les lois d'évolution (F.9) et (F.11) sous la forme du système matriciel suivant :

$$\begin{pmatrix} \widetilde{Q}_v \\ g_{Q_v} \end{pmatrix}^{(n+1)} = \begin{pmatrix} 1 & -\Delta t \\ \alpha + \beta & 1 - \alpha \Delta t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{Q}_v \\ g_{Q_v} \end{pmatrix}^{(n)} = A \begin{pmatrix} \widetilde{Q}_v \\ g_{Q_v} \end{pmatrix}^{(n)}$$

Calculons les valeurs propres de la matrice d'amplification A . Le polynôme caractéristique est donné par :

$$P_A(\lambda) = \lambda^2 - \lambda(2 - \alpha \Delta t) + 1 + \beta \Delta t$$

Or, la matrice A est marginalement stable si et seulement si $P_A(\lambda) = 0$ *i.e.* pour

$$\alpha = \frac{2}{\Delta t} \quad \text{et} \quad \beta = -\frac{1}{\Delta t} \quad (\text{F.12})$$

Au pas de temps n , le terme de droite de (F.7) s'écrit :

$$g_{Q_v}^{(n)} = S_\Sigma \left[\tau_w - \epsilon_{RHS} F_1^{(n)} \right]$$

d'où en combinant avec (F.10) il vient :

$$g_{Q_v}^{(n+1)} - g_{Q_v}^{(n)} = -\epsilon_{RHS} S_{\Sigma} \left(F_1^{(n+1)} - F_1^{(n)} \right)$$

i.e. après quelques manipulations :

$$F_1^{(n+1)} = F_1^{(n)} - \frac{\epsilon_{RHS}}{S_{\Sigma}} \left[\alpha \left(Q_v^{(n+1)} - Q_v^{(0)} \right) + \beta \left(Q_v^{(n)} - Q_v^{(0)} \right) \right] \quad (\text{F.13})$$

ou encore pour la vitesse débitante

$$F_1^{(n+1)} = F_1^{(n)} - \epsilon_{RHS} \left[\alpha \left(U_b^{(n+1)} - U_b^{(0)} \right) + \beta \left(U_b^{(n)} - U_b^{(0)} \right) \right] \quad (\text{F.14})$$

Annexe G

Système optimal. Application à l'équation de Burgers linéarisée.

Sommaire

F.1	Mise en équation	207
F.2	Débit volumique et vitesse débitante	208
F.3	Algorithme de point fixe	209

Pour faciliter la compréhension de la théorie du contrôle optimal (voir chapitre 4), on considère ici l'équation de Burgers linéarisée avec terme de forçage à la frontière inférieure du domaine.

G.1 Définition du problème d'optimisation

Soit $\Xi = \{(x, t) \mid (x, t) \in [0, 1] \times [t_0, t_f]\}$ un domaine d'étude, on considère l'équation de Burgers linéarisée écrite sous la forme :

$$\mathcal{L}_B(u) = u_t + U(x)u_x - u_{xx} = 0 \quad (\text{G.1})$$

où $u_t = \frac{\partial u}{\partial t}$, $u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$ et $u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$. $u(x, t)$ est une fonction suffisamment régulière, définie sur Ξ et à valeurs réelles.

L'objectif que l'on se fixe ici est de déterminer la fonction $u_w(t) = u(x = 0, t)$ (*i.e.* la perturbation temporelle à la frontière inférieure du domaine) qui rend la norme $\|\cdot\|$ de u extrémale à la fin de l'intégration temporelle (en $t = t_f$). On considère que la norme $\|\cdot\|$ (fonction de l'instant t considéré) est définie de la manière suivante :

$$\|u(x, t)\|(t) = \left(\int_0^1 u^2(x, t) dx \right)^{1/2}.$$

Le problème d'optimisation se définit de la manière suivante :

- la fonctionnelle coût est donnée par :

$$\mathcal{J}_0 = \left(\int_0^1 u^2 dx \right)_{t=t_f}$$

- la fonction d'état est la fonction u
- le paramètre de contrôle est le terme de forçage u_w
- les contraintes du problème sont l'équation de Burgers ($\mathcal{L}_B$) à laquelle on associe les conditions initiale et aux limites suivantes :

$$u(x, t_0) = u_0(x) \quad (\text{CI}) \quad (\text{G.2})$$

$$u(0, t) = u_w(t) \quad (\text{CL}) \quad (\text{G.3})$$

$$u(1, t) = 0 \quad (\text{CL}) \quad (\text{G.4})$$

où u_0 est une condition initiale donnée.

Pour que le problème d'optimisation soit bien posé, on transforme la fonctionnelle coût en introduisant un terme relatif à la norme de u_w sur $[t_0; t_f]$ d'où :

$$\mathcal{J}_0 = \left(\int_0^1 u^2 dx \right)_{t=t_f} + \ell \int_{t_0}^{t_f} u_w^2 dt \quad (\text{G.5})$$

où ℓ est un paramètre de pondération.

Le problème d'optimisation à résoudre s'énonce alors :

Trouver la fonction u et le paramètre de contrôle u_w tels que la fonctionnelle $\mathcal{J}_0$ présente un minimum.

Afin de transformer ce problème d'optimisation avec contraintes en un problème d'optimisation sans contraintes, on définit à partir du produit scalaire

$$\langle u, v \rangle = \int_{\Xi} u(x, t) v(x, t) dx dt$$

la fonctionnelle Lagrangienne suivante :

$$\mathcal{L}(u, u_w, u^*, \lambda^*) = \mathcal{J}_0(u, u_w) - \mathcal{J}_1(u, u_w, u^*, \lambda^*)$$

où

$$\mathcal{J}_1(u, u_w, u^*, \lambda^*) = \int_{\Xi} u^* (u_t + U(x)u_x - u_{xx}) dx dt + \int_{t_0}^{t_f} \lambda^* (u(0, t) - u_w(t)) dt \quad (\text{G.6})$$

$u^*(x, t)$ et $\lambda^*(t)$ sont les multiplicateurs de Lagrange respectivement associés à l'équation de Burgers linéarisée (G.1) et à la condition aux limites (G.3) traduisant le forçage à la paroi. Les conditions initiale (G.2) et aux limites (G.4) ne sont pas satisfaites via des multiplicateurs de Lagrange. Elles seront donc imposées a posteriori sur toute solution obtenue à partir de la Lagrangienne $\mathcal{L}$. Finalement, le problème d'optimisation se reformule de la manière suivante :

Trouver la fonction u , le paramètre de contrôle u_w et les multiplicateurs de Lagrange u^ et λ^* tels que la fonctionnelle Lagrangienne $\mathcal{L}$ présente un minimum.*

G.2 Résolution analytique du problème d'optimisation

Une condition nécessaire et suffisante pour que la Lagrangienne $\mathcal{L}$ admette un extremum est que la dérivée de Fréchet de $\mathcal{L}$ suivant chacune de ses variables s'annule *i.e.*

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\mathcal{L}(u + \epsilon \delta u, u_w, u^*, \lambda^*) - \mathcal{L}(u, u_w, u^*, \lambda^*)}{\epsilon} = 0 \quad (\text{G.7})$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\mathcal{L}(u, u_w + \epsilon \delta u_w, u^*, \lambda^*) - \mathcal{L}(u, u_w, u^*, \lambda^*)}{\epsilon} = 0 \quad (\text{G.8})$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\mathcal{L}(u, u_w, u^* + \epsilon \delta u^*, \lambda^*) - \mathcal{L}(u, u_w, u^*, \lambda^*)}{\epsilon} = 0 \quad (\text{G.9})$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\mathcal{L}(u, u_w, u^*, \lambda^* + \epsilon \delta \lambda^*) - \mathcal{L}(u, u_w, u^*, \lambda^*)}{\epsilon} = 0 \quad (\text{G.10})$$

G.2.1 Problème direct

Après développement, la relation (G.9) redonne l'équation de Burgers (G.1). Par ailleurs, la relation (G.10) conduit directement à la relation de forçage (G.3). A condition de compléter ces équations avec les conditions initiale (G.2) et aux limites (G.4) qui n'ont pas été explicitement introduites dans la fonctionnelle Lagrangienne $\mathcal{L}$, on retrouve exactement le problème direct.

G.2.2 Problème adjoint

Après introduction des définitions (G.5) et (G.6) des fonctionnelles $\mathcal{J}_0$ et $\mathcal{J}_1$ la relation (G.7) permet d'écrire :

$$0 = 2 \left(\int_0^1 u \delta u dx \right)_{t=t_f} - \int_{t_0}^{t_f} \lambda^* \delta u(0, t) dt$$

$$- \int_{\Xi} u^* \left(\underbrace{(\delta u)_t}_I + \underbrace{U(x)(\delta u)_x}_{II} - \underbrace{(\delta u)_{xx}}_{III} \right) dx dt$$

Afin de faire apparaître l'équation adjointe, il reste à intégrer par parties l'expression précédente.

1. Contribution terme I :

$$\int_{\Xi} u^* (\delta u)_t dx dt = \left[\int_0^1 u^* \delta u dx \right]_{t=t_0}^{t=t_f} - \int_{\Xi} \delta u u_t^* dx dt$$

2. Contribution terme II :

$$\int_{\Xi} u^* U(x) (\delta u)_x dx dt = \left[\int_{t_0}^{t_f} U u^* \delta u dt \right]_{x=0}^{x=1} - \int_{\Xi} (U u^*)_x \delta u dx dt$$

3. Contribution terme III :

$$\int_{\Xi} u^* (\delta u)_{xx} dx dt = \left[\int_{t_0}^{t_f} u^* (\delta u)_x dt \right]_{x=0}^{x=1} - \int_{\Xi} u_x^* (\delta u)_x dx dt$$

où

$$\int_{\Xi} u_x^* (\delta u)_x dx dt = \left[\int_{t_0}^{t_f} \delta u u_x^* dt \right]_{x=0}^{x=1} - \int_{\Xi} \delta u u_{xx}^* dx dt$$

soit en regroupant les termes :

$$\int_{\Xi} (u_t^* + (U u^*)_x + u_{xx}^*) \delta u dx dt + 2 \left(\int_0^1 u \delta u dx \right)_{t=t_f} - \int_{t_0}^{t_f} \lambda^* \delta u(0, t) dt$$

$$- \left[\int_{t_0}^{t_f} ((U u^* + u_x^*) \delta u - u^* (\delta u)_x) dt \right]_{x=0}^{x=1} - \left[\int_0^1 u^* \delta u dx \right]_{t=t_0}^{t=t_f} = 0 \quad (\text{G.11})$$

Cette relation doit être vérifiée quelle que soit la variation δu de u . On peut donc considérer par exemple, des variations δu quelconques sur Ξ sauf sur sa frontière $\partial\Xi$ où

$$\forall (x, t) \in \partial\Xi \quad \delta u(x, t) = 0$$

L'équation (G.11) s'écrit alors :

$$\int_{\Xi} (u_t^* + (U u^*)_x + u_{xx}^*) \delta u dx dt = 0$$

ce qui conduit à l'équation adjointe de l'équation de Burgers

$$\mathcal{L}_B^*(u^*) = u_t^* + (U u^*)_x + u_{xx}^* = 0 \quad \forall (x, t) \in \Xi \quad (\text{G.12})$$

Contrairement à l'équation de Burgers (G.1), cette équation est parabolique dans le sens des t décroissant. Pour que le problème soit bien posé, il faudra donc la munir d'une condition terminale. Par ailleurs, la forme locale de la fonctionnelle objectif ($\|u\|$ en $t = t_f$) entraîne que $\mathcal{L}_B^*$ est indépendante de $\mathcal{J}_0$ et de ce fait du problème d'optimisation.

Compte tenu de l'équation adjointe, la relation (G.11) s'écrit désormais

$$2 \left(\int_0^1 u \delta u dx \right)_{t=t_f} - \int_{t_0}^{t_f} \lambda^* \delta u(0, t) dt - \left[\int_{t_0}^{t_f} ((Uu^* + u_x^*) \delta u - u^* (\delta u)_x) dt \right]_{x=0}^{x=1} - \left[\int_0^1 u^* \delta u dx \right]_{t=t_0}^{t=t_f} = 0 \quad (\text{G.13})$$

Les conditions initiale (G.2) et aux limites (G.4) non incluses dans la fonctionnelle Lagrangienne $\mathcal{L}$ se traduisent en terme de perturbation par :

$$\delta u(x, t_0) = 0 \quad \text{et} \quad \delta u(1, t) = 0$$

ce qui conduit à écrire la relation (G.13) sous la forme :

$$\left(\int_0^1 (2u - u^*) \delta u dx \right)_{t=t_f} + \left(\int_{t_0}^{t_f} u^* (\delta u)_x dt \right)_{x=1} + \left[\int_{t_0}^{t_f} ((Uu^* + u_x^* - \lambda^*) \delta u - u^* (\delta u)_x) dt \right]_{x=0} = 0$$

Cette équation devant être vérifiée quelle que soit la perturbation δu , on peut considérer :

- des fonctions u arbitraires en $t = t_f$ mais identiques le long de $x = 0$ et $x = 1$, on a alors :

$$\delta u(0, t) = 0 \quad \text{et} \quad \delta u(1, t) = 0$$

ce qui conduit à la condition terminale du problème adjoint :

$$u^*(x, t_f) = 2u(x, t_f) \quad (\text{G.14})$$

- des fonctions u partout identiques sur Ξ sauf en $x = 1$, on a alors :

$$\delta u(0, t) = 0 \quad \text{et} \quad (\delta u)_x(0, t) = 0$$

ce qui conduit à une première condition aux limites pour le problème adjoint :

$$u^*(1, t) = 0 \quad (\text{G.15})$$

– des fonctions u partout identiques sur Ξ sauf en $x = 0$, on a alors :

$$(\delta u)_x(1, t) = 0$$

ce qui conduit à une seconde condition aux limites pour le problème adjoint :

$$u^*(0, t) = 0 \quad (\text{G.16})$$

ainsi que la relation

$$u_x^*(0, t) - \lambda^*(t) = 0 \quad (\text{G.17})$$

Le choix d'une fonctionnelle objectif basée en $t = t_f$ génère une condition initiale du problème adjoint non nulle. Si on avait préféré pour $\mathcal{J}_0$ une mesure globale *i.e.* une mesure moyennée le long d'un domaine longitudinal alors un terme source serait apparu dans les équations adjointes.

G.2.3 Conditions d'optimalité

En développant la relation (G.8), on aboutit immédiatement à :

$$2\ell \int_{t_0}^{t_f} u_w \delta u_w dt + \int_{t_0}^{t_f} \lambda^* \delta u_w dt = 0$$

qui doit être vérifiée quelle que soit la perturbation δu_w . Par conséquent, on trouve la relation :

$$2\ell u_w(t) + \lambda^*(t) = 0$$

soit, compte tenue de l'équation (G.17) :

$$-2\ell u_w(t) = u_x^*(0, t) \quad (\text{G.18})$$

qui constitue la condition d'optimalité reliant le problème direct au problème adjoint.

La figure G.1 résume le système optimal dans le cas des équations de Burgers linéarisées.

EQUATION D'ÉTAT :

$$\boxed{\mathcal{L}_B(u) = u_t + U(x)u_x - u_{xx} = 0} \quad (\text{G.19})$$

$$\boxed{u(x, t_0) = u_0(x)} \quad (\text{CI}) \quad (\text{G.20})$$

$$\boxed{u(0, t) = u_w(t)} \quad (\text{CL}) \quad (\text{G.21})$$

$$\boxed{u(1, t) = 0} \quad (\text{CL}) \quad (\text{G.22})$$

EQUATION ADJOINTE :

$$\boxed{\mathcal{L}_B^*(u^*) = u_t^* + (Uu^*)_x + u_{xx}^* = 0 \quad \forall (x, t) \in \Xi} \quad (\text{G.23})$$

$$\boxed{u^*(0, t) = 0} \quad (\text{CL}) \quad (\text{G.24})$$

$$\boxed{u^*(1, t) = 0} \quad (\text{CL}) \quad (\text{G.25})$$

$$\boxed{u^*(x, t_f) = 2u(x, t_f)} \quad (\text{CT}) \quad (\text{G.26})$$

CONDITIONS D'OPTIMALITÉ :

$$\boxed{-2\ell u_w(t) = u_x^*(0, t)} \quad (\text{G.27})$$

FONCTIONNELLE COÛT :

$$\boxed{\mathcal{J}_0 = \left(\int_0^1 u^2 dx \right)_{t=t_f} + \ell \int_{t_0}^{t_f} u_w^2 dt} \quad (\text{G.28})$$

FIGURE G.1 – Système optimal de l'équation de Burgers linéarisée. CL : condition limite, CI : condition initiale, CT : condition terminale.

Annexe H

Système optimal. Application à l'équation de Burgers.

Sommaire

G.1	Définition du problème d'optimisation	213
G.2	Résolution analytique du problème d'optimisation	215
G.2.1	Problème direct	215
G.2.2	Problème adjoint	215
G.2.3	Conditions d'optimalité	218

H.1 Variation de la fonctionnelle $\mathcal{I}$ par rapport à la variable d'état u

En introduisant la définition (4.14) de $\mathcal{I}$ dans (4.15), on obtient :

$$\begin{aligned} \mathcal{I}' = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{t_0}^{t_0+T_0} \int_0^L \frac{1}{\epsilon} \left[\frac{\partial(u + \epsilon \delta u)}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial(u + \epsilon \delta u)^2}{\partial x} - \frac{\partial u^2}{\partial x} \right) \right. \\ \left. - \nu \left(\frac{\partial^2(u + \epsilon \delta u)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) - (\Phi + \epsilon \delta \Phi) + \Phi \right] u^* dx dt \end{aligned}$$

Soit, après simplifications :

$$\mathcal{I}' = \int_{t_0}^{t_0+T_0} \int_0^L \left(\underbrace{\frac{\partial(\delta u)}{\partial t}}_I + \underbrace{\frac{\partial(u \delta u)}{\partial x}}_{II} - \underbrace{\nu \frac{\partial^2(\delta u)}{\partial x^2}}_{III} - \delta \Phi \right) u^* dx dt.$$

Pour faire apparaître l'équation adjointe $\mathcal{L}_B^*(u^*) = 0$ de l'équation de Burgers, il reste à intégrer par parties l'expression précédente afin d'écrire $\mathcal{I}'$ sous la forme :

$$\mathcal{I}' = \langle \delta u, \mathcal{L}_B^*(u^*) \rangle + \text{termes de frontière} + \text{termes de contrôle} \quad (\text{H.1})$$

Après intégration par parties, on trouve pour les différents termes de $\mathcal{I}'$:

1. Contribution terme I :

$$\int_{t_0}^{t_0+T_o} \int_0^L \frac{\partial(\delta u)}{\partial t} u^* dx dt = \int_0^L [\delta u u^*]_{t_0}^{t_0+T_o} dx - \int_0^L \int_{t_0}^{t_0+T_o} \delta u \frac{\partial u^*}{\partial x} dx dt$$

2. Contribution terme II :

$$\int_{t_0}^{t_0+T_o} \int_0^L \frac{\partial(u \delta u)}{\partial x} u^* dx dt = \int_{t_0}^{t_0+T_o} [u \delta u u^*]_0^L dt - \int_{t_0}^{t_0+T_o} \int_0^L \delta u u \frac{\partial u^*}{\partial x} dx dt$$

3. Contribution terme III :

$$\begin{aligned} -\nu \int_{t_0}^{t_0+T_o} \int_0^L \frac{\partial^2(\delta u)}{\partial x^2} u^* dx dt &= -\nu \int_{t_0}^{t_0+T_o} \left[\frac{\partial(\delta u)}{\partial x} u^* \right]_0^L dt \\ &+ \nu \int_{t_0}^{t_0+T_o} \left[\delta u \frac{\partial u^*}{\partial x} \right]_0^L dt - \nu \int_{t_0}^{t_0+T_o} \int_0^L \delta u \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^2} dx dt \end{aligned}$$

soit, en regroupant les termes :

$$\begin{aligned} \mathcal{I}' &= \int_{t_0}^{t_0+T_o} \int_0^L \delta u \left(-\frac{\partial u^*}{\partial t} - u \frac{\partial u^*}{\partial x} - \nu \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^2} \right) dx dt \\ &+ \int_0^L [\delta u u^*]_{t_0}^{t_0+T_o} dx + \int_{t_0}^{t_0+T_o} [u \delta u u^*]_0^L dt - \nu \int_{t_0}^{t_0+T_o} \left[\frac{\partial(\delta u)}{\partial x} u^* \right]_0^L dt \\ &+ \nu \int_{t_0}^{t_0+T_o} \left[\delta u \frac{\partial u^*}{\partial x} \right]_0^L dt - \int_{t_0}^{t_0+T_o} \int_0^L \delta \Phi u^* dx dt \end{aligned}$$

Finalement, par identification avec l'expression (H.1), on trouve que l'équation adjointe de l'équation de Burgers est :

$$\mathcal{L}_B^*(u^*) = -\frac{\partial u^*}{\partial t} - u \frac{\partial u^*}{\partial x} - \nu \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^2}$$

H.2 Variation de la fonctionnelle $\mathcal{J}$ par rapport à la variable d'état u

On applique la même méthode qu'à la section H.1. En introduisant la définition (4.13) de $\mathcal{J}$ dans (4.18), on trouve :

$$\begin{aligned} \mathcal{J}' &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \left[\frac{\omega_1}{2} \int_{t_0}^{t_0+T_o} \int_0^L [(u + \epsilon \delta u - \hat{u})^2 - (u - \hat{u})^2] dx dt \right. \\ &+ \frac{\omega_2}{2} \int_0^L ((u + \epsilon \delta u)(x, t_0 + T_o) - \bar{u}(x))^2 - [u(x, t_0 + T_o) - \bar{u}(x)]^2 dx \\ &+ \frac{\ell}{2} \int_{t_0}^{t_0+T_o} \int_0^L [(\Phi + \epsilon \delta \Phi)^2 - \Phi^2] dx dt + \frac{\ell_1}{2} \int_{t_0}^{t_0+T_o} [(\phi_L + \epsilon \delta \phi_L)^2 - \phi_L^2] dt \\ &\left. + \frac{\ell_2}{2} \int_{t_0}^{t_0+T_o} [(\phi_R + \epsilon \delta \phi_R)^2 - \phi_R^2] dt \right] \end{aligned}$$

soit, après simplifications :

$$\begin{aligned} \mathcal{J}' = & \omega_1 \int_{t_0}^{t_0+T_o} \int_0^L \delta u (u - \hat{u}) dx dt + \omega_2 \int_0^L \delta u(x, t_0 + T_o) [u(x, t_0 + T_o) - \bar{u}(x)] dx \\ & + \ell \int_{t_0}^{t_0+T_o} \int_0^L \Phi \delta \Phi dx dt + \ell_1 \int_{t_0}^{t_0+T_o} \phi_L \delta \phi_L dt + \ell_2 \int_{t_0}^{t_0+T_o} \phi_R \delta \phi_R dt \end{aligned}$$

H.3 Système optimal

Pour déterminer le système optimal *i.e.* les équations adjointes du problème, leurs conditions aux limites et terminale ainsi que les conditions d'optimalité, on considère que quelles que soient les variations δu , $\delta \Phi$, $\delta \phi_R$, $\delta \phi_L$ on a au minimum de la fonctionnelle $\mathcal{J}$ la condition $\mathcal{J}' = \mathcal{I}'$ qui doit être vérifiée, soit compte tenu des équations (4.16) et (4.19) et en considérant $\delta u(t_0) = 0$:

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^{t_0+T_o} \int_0^L (\ell \Phi + u^*) \delta \Phi dx dt + \underbrace{\int_{t_0}^{t_0+T_o} \int_0^L \delta u [\omega_1 (u - \hat{u}) - \mathcal{L}_B^*(u^*)] dx dt}_I \\ & + \ell_1 \int_{t_0}^{t_0+T_o} \phi_L \delta \phi_L dt + \ell_2 \int_{t_0}^{t_0+T_o} \phi_R \delta \phi_R dt - \nu \int_{t_0}^{t_0+T_o} [\delta u \frac{\partial u^*}{\partial x}]_0^L dt \\ & + \underbrace{\int_0^L \delta u(x, t_0 + T_o) [\omega_2 (u(x, t_0 + T_o) - \bar{u}(x)) - u^*(x, t_0 + T_o)] dx}_{II} \\ & + \underbrace{\int_{t_0}^{t_0+T_o} [u \delta u u^*]_0^L dt}_{III} - \nu \underbrace{\int_{t_0}^{t_0+T_o} [\frac{\partial(\delta u)}{\partial x} u^*]_0^L dt}_{IV} = 0 \end{aligned}$$

En appliquant la même démarche que celle présentée à la section 4.4 pour le problème modèle, on trouve que :

- le terme I conduit à l'équation adjointe du problème optimal :

$$\mathcal{L}_B^*(u^*) = -\frac{\partial u^*}{\partial t} - u \frac{\partial u^*}{\partial x} - \nu \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^2} = \omega_1 (u - \hat{u})$$

- le terme II conduit à la condition terminale du problème adjoint :

$$u^*(x, t_0 + T_o) = \omega_2 (u(x, t_0 + T_o) - \bar{u}(x))$$

- les termes III et IV conduisent aux conditions aux limites du problème adjoint, soit :

$$u^*(0, t) = 0 \quad u^*(L, t) = 0$$

En tenant compte de ces conditions particulières, l'équation précédente se simplifie en :

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^{t_0+T_0} \int_0^L (\ell \Phi + u^*) \delta \Phi \, dx \, dt \\ & + \ell_1 \int_{t_0}^{t_0+T_0} \phi_L \delta \phi_L \, dt + \ell_2 \int_{t_0}^{t_0+T_0} \phi_R \delta \phi_R \, dt - \nu \int_{t_0}^{t_0+T_0} [\delta u \frac{\partial u^*}{\partial x}]_0^L \, dt = 0 \end{aligned}$$

La dernière intégrale s'écrit encore :

$$\int_{t_0}^{t_0+T_0} \left(\delta u(L, t) \frac{\partial u^*}{\partial x}(L, t) - \delta u(0, t) \frac{\partial u^*}{\partial x}(0, t) \right) dt$$

Or, compte tenu des conditions aux limites (4.12) des équations d'état, on a :

$$\delta u(L, t) = \delta \phi_R \quad \text{et} \quad \delta u(0, t) = \delta \phi_L$$

soit

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^{t_0+T_0} \int_0^L (\ell \Phi + u^*) \delta \Phi \, dx \, dt \\ & + \int_{t_0}^{t_0+T_0} \left(\ell_1 \phi_L + \nu \frac{\partial u^*}{\partial x}(0, t) \right) \delta \phi_L \, dt \\ & + \int_{t_0}^{t_0+T_0} \left(\ell_2 \phi_R - \nu \frac{\partial u^*}{\partial x}(L, t) \right) \delta \phi_R \, dt = 0 \end{aligned}$$

Finalement, en considérant que cette équation doit être vérifiée quelles que soient les perturbations $\delta \Phi$, $\delta \phi_R$, $\delta \phi_L$, on trouve les gradients de la fonctionnelle coût $\mathcal{J}$ par rapport aux variables de contrôle :

$$\begin{aligned} \nabla_{\Phi} \mathcal{J} &= \ell \Phi + u^* \\ \nabla_{\phi_L} \mathcal{J} &= \ell_1 \phi_L + \nu \frac{\partial u^*}{\partial x}(0, t) \\ \nabla_{\phi_R} \mathcal{J} &= \ell_2 \phi_R - \nu \frac{\partial u^*}{\partial x}(L, t) \end{aligned}$$

Lorsque le minimum de $\mathcal{J}$ est atteint, ces gradients sont nuls. Pour cette raison, on nomme ces équations conditions d'optimalité.

Annexe I

Système optimal. Application à l'écoulement de canal turbulent simulé par DNS.

Sommaire

H.1	Variation de la fonctionnelle $\mathcal{I}$ par rapport à la variable d'état u	221
H.2	Variation de la fonctionnelle $\mathcal{J}$ par rapport à la variable d'état u	222
H.3	Système optimal	223

I.1 Formulaire d'analyse tensorielle

1. Une première formule

Soit Ω un domaine spatial de contour Γ , on peut montrer pour tout champ tensoriel du second ordre $\overline{\overline{A}}$ et pour tout champ vectoriel $\mathbf{U}$ que :

$$\int_{\Omega} \mathbf{U} \cdot \text{div} \left(\overline{\overline{A}}^T \right) d\mathbf{x} = \int_{\Gamma} \overline{\overline{A}} \mathbf{U} \cdot \mathbf{n} d\mathbf{x} - \int_{\Omega} \overline{\overline{A}} : \left(\overline{\overline{\text{grad}}} \mathbf{U} \right)^T d\mathbf{x} \quad (\text{I.1})$$

où $\mathbf{n}$ est la normale extérieure à Γ . On convient ici de noter le produit doublement contracté de deux tenseurs du second ordre $\overline{\overline{A}}$ et $\overline{\overline{B}}$ par :

$$\overline{\overline{A}} : \overline{\overline{B}} = A_{ij} B_{ij}.$$

Sous forme indicielle, l'équation (I.1) s'écrit encore :

$$\boxed{\int_{\Omega} U_i \frac{\partial A_{ji}}{\partial x_j} d\mathbf{x} = \int_{\Gamma} A_{ij} U_j n_i d\mathbf{x} - \int_{\Omega} A_{ij} \frac{\partial U_j}{\partial x_i} d\mathbf{x}} \quad (\text{I.2})$$

Les indices i et j étant muets, on pourra utiliser de manière équivalente l'expression :

$$\boxed{\int_{\Omega} U_j \frac{\partial A_{ij}}{\partial x_i} d\mathbf{x} = \int_{\Gamma} A_{ji} U_i n_j d\mathbf{x} - \int_{\Omega} A_{ji} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} d\mathbf{x}} \quad (\text{I.3})$$

2. Formule de Green

Soient f un champ scalaire et $\mathbf{g}$ un champ vectoriel, on peut montrer que :

$$\boxed{\int_{\Omega} \nabla f \cdot \mathbf{g} d\mathbf{x} = \int_{\Gamma} f \mathbf{g} \cdot \mathbf{n} d\mathbf{x} - \int_{\Omega} f \nabla \cdot \mathbf{g} d\mathbf{x}} \quad (\text{I.4})$$

où $\mathbf{n}$ est la normale extérieure à Γ .

I.2 Variation de la fonctionnelle $\mathcal{I}$

I.2.1 Contribution du terme de temps $\mathcal{I}'_t$

On rappelle que :

$$\mathcal{I}'_t = \int_{t_0}^{t_0+T_0} \int_{\Omega} \frac{\partial(\delta u_i)}{\partial t} u_i^* d\mathbf{x} dt.$$

Après intégration par parties en temps, on obtient :

$$\boxed{\mathcal{I}'_t = \int_{\Omega} [\delta u_i u_i^*]_{t_0}^{t_0+T_0} d\mathbf{x} - \int_{t_0}^{t_0+T_0} \int_{\Omega} \delta u_i \frac{\partial u_i^*}{\partial t} d\mathbf{x} dt.} \quad (\text{I.5})$$

I.2.2 Contribution du terme convectif $\mathcal{I}'_c$

On rappelle que :

$$\mathcal{I}'_c = \int_{t_0}^{t_0+T_0} \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_j} (u_i \delta u_j + u_j \delta u_i) u_i^* d\mathbf{x} dt.$$

1. Appliquons (I.2) avec $A_{ji} = u_i \delta u_j$ et $U_i = u_i^*$, on obtient :

$$\int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_j} (u_i \delta u_j) u_i^* d\mathbf{x} = \int_{\Gamma} u_j \delta u_i u_j^* n_i d\mathbf{x} - \int_{\Omega} u_j \delta u_i \frac{\partial u_j^*}{\partial x_i} d\mathbf{x}$$

2. Appliquons (I.2) avec $A_{ji} = u_j \delta u_i$ et $U_i = u_i^*$, on obtient :

$$\int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_j} (u_j \delta u_i) u_i^* d\mathbf{x} = \int_{\Gamma} u_i \delta u_j u_j^* n_i d\mathbf{x} - \int_{\Omega} u_i \delta u_j \frac{\partial u_j^*}{\partial x_i} d\mathbf{x}$$

Les indices i et j étant muets, on trouve encore après permutation :

$$\begin{aligned} \mathcal{I}'_c = \int_{t_0}^{t_0+T_0} \int_{\Gamma} [u_i \delta u_j u_i^* n_j + u_j \delta u_i u_i^* n_j] d\mathbf{x} dt \\ - \int_{t_0}^{t_0+T_0} \int_{\Omega} \left(u_j \delta u_i \frac{\partial u_j^*}{\partial x_i} + u_j \delta u_i \frac{\partial u_i^*}{\partial x_j} \right) d\mathbf{x} dt \end{aligned} \quad (\text{I.6})$$

soit

$$\mathcal{I}'_c = \int_{t_0}^{t_0+T_o} \int_{\Gamma} [u_i \delta u_j + u_j \delta u_i] u_i^* n_j d\mathbf{x} dt - \int_{t_0}^{t_0+T_o} \int_{\Omega} 2 S_{ij}^* u_j \delta u_i d\mathbf{x} dt \quad (\text{I.7})$$

où

$$S_{ij}^* = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i^*}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^*}{\partial x_i} \right) \quad (\text{I.8})$$

I.2.3 Contribution du terme de pression $\mathcal{I}'_P$

On rappelle que :

$$\mathcal{I}'_P = \int_{t_0}^{t_0+T_o} \int_{\Omega} \frac{\partial(\delta P)}{\partial x_i} u_i^* d\mathbf{x} dt.$$

Après application de la formule de Green (I.4) avec $f = \delta P$ et $\mathbf{g} = \mathbf{u}^*$, on trouve que :

$$\mathcal{I}'_P = \int_{t_0}^{t_0+T_o} \int_{\Gamma} \delta P u_i^* n_i d\mathbf{x} dt - \int_{t_0}^{t_0+T_o} \int_{\Omega} \delta P \frac{\partial u_i^*}{\partial x_i} d\mathbf{x} dt \quad (\text{I.9})$$

I.2.4 Contribution du terme de continuité $\mathcal{I}'_{Cont}$

On rappelle que :

$$\mathcal{I}'_{Cont} = \int_{t_0}^{t_0+T_o} \int_{\Omega} \kappa \frac{\partial(\delta u_i)}{\partial x_i} P^* d\mathbf{x} dt.$$

Après application de la formule de Green (I.4) avec $f = P^*$ et $\mathbf{g} = \delta \mathbf{u}$, on trouve que :

$$\mathcal{I}'_{Cont} = \kappa \left(\int_{t_0}^{t_0+T_o} \int_{\Gamma} P^* \delta u_i n_i d\mathbf{x} dt - \int_{t_0}^{t_0+T_o} \int_{\Omega} \delta u_i \frac{\partial P^*}{\partial x_i} d\mathbf{x} dt \right) \quad (\text{I.10})$$

I.2.5 Contribution du terme diffusif $\mathcal{I}'_{\nu}$

On rappelle que :

$$\mathcal{I}'_{\nu} = \int_{t_0}^{t_0+T_o} \int_{\Omega} -\frac{2}{Re_{\tau}} \frac{\partial}{\partial x_j} (\delta S_{ij}) u_i^* d\mathbf{x} dt.$$

Nous allons simplifier cette expression en tenant compte de l'équation de la conservation de la masse pour les perturbations de vitesse, soit $\frac{\partial(\delta u_j)}{\partial x_j} = 0$. Pour cela, on part de la relation

$$2 \delta S_{ij} = \frac{\partial(\delta u_i)}{\partial x_j} + \frac{\partial(\delta u_j)}{\partial x_i}$$

pour écrire que

$$2 \frac{\partial}{\partial x_j} (\delta S_{ij}) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial(\delta u_i)}{\partial x_j} + \frac{\partial(\delta u_j)}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial^2(\delta u_i)}{\partial x_j^2} + \frac{\partial^2(\delta u_j)}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2(\delta u_i)}{\partial x_j^2}.$$

Par conséquent, nous avons :

$$\mathcal{I}'_\nu = \int_{t_0}^{t_0+T_o} \int_{\Omega} -\frac{1}{Re_\tau} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial(\delta u_i)}{\partial x_j} \right) u_i^* d\mathbf{x} dt.$$

Appliquons (I.2) avec $A_{ji} = \frac{\partial(\delta u_i)}{\partial x_j}$ et $U_i = u_i^*$, on obtient :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial(\delta u_i)}{\partial x_j} \right) u_i^* d\mathbf{x} &= \int_{\Gamma} \frac{\partial(\delta u_j)}{\partial x_i} u_j^* n_i d\mathbf{x} - \int_{\Omega} \frac{\partial(\delta u_j)}{\partial x_i} \frac{\partial u_j^*}{\partial x_i} d\mathbf{x} \\ &= \int_{\Gamma} \frac{\partial(\delta u_i)}{\partial x_j} u_i^* n_j d\mathbf{x} - \underbrace{\int_{\Omega} \frac{\partial(\delta u_i)}{\partial x_j} \frac{\partial u_i^*}{\partial x_j} d\mathbf{x}}_{T_1} \quad i \longleftrightarrow j \end{aligned}$$

Nous allons maintenant modifier l'expression du terme T_1 . Pour cela, appliquons (I.3) avec $A_{ji} = \frac{\partial u_i^*}{\partial x_j}$ et $U_i = \delta u_i$, on obtient :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{\partial(\delta u_i)}{\partial x_j} \frac{\partial u_i^*}{\partial x_j} d\mathbf{x} &= \int_{\Gamma} \frac{\partial u_i^*}{\partial x_j} \delta u_i n_j d\mathbf{x} - \int_{\Omega} \frac{\partial^2 u_j^*}{\partial x_i^2} \delta u_j d\mathbf{x} \\ &= \int_{\Gamma} \frac{\partial u_i^*}{\partial x_j} \delta u_i n_j d\mathbf{x} - \int_{\Omega} \frac{\partial^2 u_i^*}{\partial x_j^2} \delta u_i d\mathbf{x} \quad i \longleftrightarrow j \end{aligned}$$

On en déduit donc que :

$$\boxed{\mathcal{I}'_\nu = -\frac{1}{Re_\tau} \left[\int_{t_0}^{t_0+T_o} \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial(\delta u_i)}{\partial x_j} u_i^* n_j - \frac{\partial u_i^*}{\partial x_j} \delta u_i n_j \right) d\mathbf{x} dt + \int_{t_0}^{t_0+T_o} \int_{\Omega} \frac{\partial^2 u_i^*}{\partial x_j^2} \delta u_i d\mathbf{x} dt \right]} \quad (\text{I.11})$$

I.2.6 Bilan des contributions

On rappelle que :

$$\mathcal{I}' = \mathcal{I}'_t + \mathcal{I}'_c + \mathcal{I}'_\nu + \mathcal{I}'_P + \mathcal{I}'_{Cont}$$

où les différentes contributions ont été calculées aux sections précédentes. Nous allons maintenant regrouper les termes selon le type d'intégrale mis en jeu. Soit :

$$\mathcal{I}' = \mathcal{I}'_\Omega + \mathcal{I}'_\Gamma + \mathcal{I}'_T$$

où

$$\begin{aligned} \mathcal{I}'_\Omega &= \int_{t_0}^{t_0+T_o} \int_{\Omega} \left[-\frac{\partial u_i^*}{\partial t} - 2S_{ij}^* u_j - \kappa \frac{\partial P^*}{\partial x_i} - \frac{1}{Re_\tau} \frac{\partial^2 u_i^*}{\partial x_j^2} \right] \delta u_i d\mathbf{x} dt \\ &+ \int_{t_0}^{t_0+T_o} \int_{\Omega} \left(-\frac{\partial u_i^*}{\partial x_i} \delta P \right) d\mathbf{x} dt \end{aligned} \quad (\text{I.12})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{I}'_{\Gamma} = & \int_{t_0}^{t_0+T_o} \int_{\Gamma} [(u_i \delta u_j + u_j \delta u_i) u_i^* n_j + \delta P u_i^* n_i + \kappa P^* \delta u_i n_i \\ & - \frac{1}{Re_{\tau}} \left(\frac{\partial(\delta u_i)}{\partial x_j} u_i^* n_j - \frac{\partial u_i^*}{\partial x_j} \delta u_i n_j \right)] d\mathbf{x} dt \end{aligned} \quad (\text{I.13})$$

et

$$\mathcal{I}'_T = \int_{\Omega} [\delta u_i u_i^*]_{t_0}^{t_0+T_o} d\mathbf{x}. \quad (\text{I.14})$$

I.2.7 Simplification des termes $\mathcal{I}'_{\Gamma}$ et $\mathcal{I}'_T$

I.2.7.1 Simplification du terme $\mathcal{I}'_{\Gamma}$

Nous allons introduire les conditions aux limites sur les frontières du domaine Γ pour simplifier l'écriture de (I.13). Puisque le contrôle est appliqué par soufflage et aspiration aux parois, les relations suivantes sont imposées sur les bords $\Gamma_2^{\pm}$ du canal :

$$\begin{array}{lll} n_1 = 0 & n_2 = \mp 1 & n_3 = 0 \\ u_1 = 0 & u_2 = -\Phi n_2 & u_3 = 0 \end{array}$$

Nous avons donc pour les différents termes de (I.13) :

$$(u_i \delta u_j + u_j \delta u_i) u_i^* n_j = 2 u_2 \delta u_2 u_2^* n_2 = -2 u_2 u_2^* \delta \Phi$$

$$\delta P u_i^* n_i = \delta P u_2^* n_2$$

$$\kappa P^* \delta u_i n_i = \kappa P^* \delta u_2 n_2 = -\kappa P^* \delta \Phi$$

$$-\frac{1}{Re_{\tau}} \frac{\partial(\delta u_i)}{\partial x_j} u_i^* n_j = -\frac{1}{Re_{\tau}} \frac{\partial(\delta u_i)}{\partial x_2} u_i^* n_2$$

$$\frac{1}{Re_{\tau}} \frac{\partial u_i^*}{\partial x_j} \delta u_i n_j = \frac{1}{Re_{\tau}} \frac{\partial u_i^*}{\partial x_2} \delta u_i n_2 = \frac{1}{Re_{\tau}} \frac{\partial u_2^*}{\partial x_2} \delta u_2 n_2 = -\frac{1}{Re_{\tau}} \frac{\partial u_2^*}{\partial x_2} \delta \Phi$$

d'où

$$\begin{aligned} \mathcal{I}'_{\Gamma} = & \int_{t_0}^{t_0+T_o} \int_{\Gamma_2^{\pm}} - \left(2 u_2 u_2^* + \frac{1}{Re_{\tau}} \frac{\partial u_2^*}{\partial x_2} + \kappa P^* \right) \delta \Phi d\mathbf{x} dt \\ & + \int_{t_0}^{t_0+T_o} \int_{\Gamma_2^{\pm}} \left(\delta P u_2^* n_2 - \frac{1}{Re_{\tau}} \frac{\partial(\delta u_i)}{\partial x_2} u_i^* n_2 \right) d\mathbf{x} dt \end{aligned} \quad (\text{I.15})$$

I.2.7.2 Simplification du terme $\mathcal{I}'_T$

La condition initiale est supposée connue de manière parfaite à t_0 , nous avons donc :

$$\delta u_i = 0 \quad \text{à} \quad t = t_0$$

d'où

$$\mathcal{I}'_T = \int_{\Omega} [\delta u_i u_i^*]_{t=t_0+T_o} d\mathbf{x}. \quad (\text{I.16})$$

I.3 Système optimal

Pour déterminer le système optimal *i.e.* les équations adjointes du problème, leurs conditions aux limites et terminale ainsi que les conditions d'optimalité, on considère que quelles que soient les variations δu_i (respectivement $\delta u'_i$), δP et $\delta \Phi$, on doit vérifier au minimum de la fonctionnelle $\mathcal{J}$ la condition $\mathcal{J}' = \mathcal{I}' = \mathcal{I}'_\Omega + \mathcal{I}'_\Gamma + \mathcal{I}'_T$ où $\mathcal{J}$ est donnée par (5.13) (respectivement (5.14)).

I.3.1 Cas de la fonctionnelle coût (5.13)

Compte tenu des équations (5.15), (I.12), (I.15) et (I.16), cela se traduit par l'égalité :

$$\begin{aligned}
& \underbrace{\ell \int_{t_0}^{t_0+T_o} \int_{\Gamma_2^\pm} \Phi \delta \Phi \, d\mathbf{x} \, dt}_I + \underbrace{\ell_{ter} \int_{\Omega} [u_i \delta u_i]_{t=t_0+T_o} \, d\mathbf{x}}_{II} \\
& + \underbrace{\ell_{reg} \int_{t_0}^{t_0+T_o} \int_{\Omega} u_i \delta u_i \, d\mathbf{x} \, dt}_{III} + \underbrace{\ell_{drag} \int_{t_0}^{t_0+T_o} \int_{\Gamma_2^\pm} (-\delta \tau_{12} n_2) \, d\mathbf{x} \, dt}_{IV} = \\
& - \underbrace{\int_{t_0}^{t_0+T_o} \int_{\Omega} \left[\frac{\partial u_i^*}{\partial t} + 2 u_j S_{ij}^* + \kappa \frac{\partial P^*}{\partial x_i} + \frac{1}{Re_\tau} \frac{\partial^2 u_i^*}{\partial x_j^2} \right] \delta u_i \, d\mathbf{x} \, dt}_V \\
& + \underbrace{\int_{t_0}^{t_0+T_o} \int_{\Omega} \left(-\frac{\partial u_i^*}{\partial x_i} \delta P \right) \, d\mathbf{x} \, dt}_{VI} - \underbrace{\int_{t_0}^{t_0+T_o} \int_{\Gamma_2^\pm} \left(2 u_2 u_2^* + \frac{1}{Re_\tau} \frac{\partial u_2^*}{\partial x_2} + \kappa P^* \right) \delta \Phi \, d\mathbf{x} \, dt}_{VII} \\
& + \underbrace{\int_{t_0}^{t_0+T_o} \int_{\Gamma_2^\pm} \left(\delta P u_2^* n_2 - \frac{1}{Re_\tau} \frac{\partial (\delta u_i)}{\partial x_2} u_i^* n_2 \right) \, d\mathbf{x} \, dt}_{VIII} + \underbrace{\int_{\Omega} [\delta u_i u_i^*]_{t=t_0+T_o} \, d\mathbf{x}}_{IX}
\end{aligned} \tag{I.17}$$

où le terme $\delta \tau_{12}$ qui intervient dans IV est donné ici par $\frac{1}{Re_\tau} \frac{\partial (\delta u_1)}{\partial x_2}$.

– Les termes III et V conduisent à l'équation adjointe :

$$\boxed{\frac{\partial u_i^*}{\partial t} = -2 u_j S_{ij}^* - \kappa \frac{\partial P^*}{\partial x_i} - \frac{1}{Re_\tau} \frac{\partial^2 u_i^*}{\partial x_j^2} - \ell_{reg} u_i}$$

– Le terme VI conduit à la condition d'incompressibilité pour le problème adjoint :

$$\boxed{\frac{\partial u_i^*}{\partial x_i} = 0}$$

- Les termes II et IX conduisent à la condition terminale du problème adjoint :

$$\boxed{u_i^*(t_0 + T_o) = \ell_{ter} u_i(t_0 + T_o) \quad i = 1, 2, 3} \quad (CT)$$

- Les termes IV et $VIII$ conduisent aux conditions aux limites du problème adjoint soit :

$$\boxed{u_1^*|_{\Gamma_{2\pm}} = \ell_{drag} \quad u_2^*|_{\Gamma_{2\pm}} = u_3^*|_{\Gamma_{2\pm}} = 0} \quad (CL)$$

- Les termes I et VII donnent le gradient de la fonctionnelle coût $\mathcal{J}$ par rapport aux variables de contrôle (condition d'optimalité), soit :

$$\frac{D\mathcal{J}}{D\Phi} = \ell\Phi + 2u_2u_2^* + \frac{1}{Re_\tau} \frac{\partial u_2^*}{\partial x_2} + \kappa P^*$$

c'est à dire, compte tenu des conditions aux limites sur le problème adjoint :

$$\boxed{\frac{D\mathcal{J}}{D\Phi} = \ell\Phi + \kappa P^*}$$

I.3.2 Cas de la fonctionnelle coût (5.14)

Dans ce cas, la fonctionnelle coût est basée sur des grandeurs fluctuantes définies par :

$$u'_i(x, y, z, t) = u_i(x, y, z, t) - \langle u_i(x, y, z, t) \rangle_{XZ}(y, t) \quad (I.18)$$

où $\langle \cdot \rangle_{XZ}$ correspond à un opérateur de moyenne selon les deux directions homogènes du canal Ox et Oz . Cet opérateur de moyenne est évaluée de manière discrète comme :

$$\langle u_i(x, y, z, t) \rangle_{XZ}(y, t) = \frac{1}{N_x} \frac{1}{N_z} \sum_{i_x=1}^{N_x} \sum_{i_z=1}^{N_z} u(x_{i_x}, y, z_{i_z}, t)$$

où N_x et N_z sont respectivement le nombre de points de maillage dans les directions Ox et Oz .

La moyenne $\langle u_i \rangle_{XZ}$ étant supposée connue à chaque pas de temps, nous avons donc directement d'après (I.18) :

$$\delta u'_i = \delta u_i \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \quad \text{et} \quad \forall t$$

Les termes II , III et IV de (I.17) provenant de (5.16) s'écrivent donc

$$\begin{aligned} & \ell_{ter} \int_{\Omega} [u'_i \delta u_i]_{t=t_0+T_o} d\mathbf{x} \\ & \ell_{reg} \int_{t_0}^{t_0+T_o} \int_{\Omega} u'_i \delta u_i d\mathbf{x} dt \end{aligned}$$

$$\ell_{drag} \int_{t_0}^{t_0+T_o} \int_{\Gamma_2^\pm} (-\delta\tau'_{12} n_2) d\mathbf{x} dt$$

En procédant comme à la section I.3.1, nous obtenons les mêmes équations pour le système optimal à l'exception :

1. de l'équation adjointe qui devient

$$\boxed{\frac{\partial u_i^*}{\partial t} = -2 u_j S_{ij}^* - \kappa \frac{\partial P^*}{\partial x_i} - \frac{1}{Re_\tau} \frac{\partial^2 u_i^*}{\partial x_j^2} - \ell_{reg} u_i'}$$

2. de la condition terminale de l'équation adjointe qui devient

$$\boxed{u_i^*(t_0 + T_o) = \ell_{ter} u_i'(t_0 + T_o) \quad i = 1, 2, 3} \quad (CT)$$

Annexe J

Système optimal. Application à l'écoulement de canal turbulent simulé par LES.

Sommaire

I.1	Formulaire d'analyse tensorielle	225
I.2	Variation de la fonctionnelle $\mathcal{I}$	226
I.2.1	Contribution du terme de temps $\mathcal{I}'_t$	226
I.2.2	Contribution du terme convectif $\mathcal{I}'_c$	226
I.2.3	Contribution du terme de pression $\mathcal{I}'_p$	227
I.2.4	Contribution du terme de continuité $\mathcal{I}'_{Cont}$	227
I.2.5	Contribution du terme diffusif $\mathcal{I}'_\nu$	227
I.2.6	Bilan des contributions	228
I.2.7	Simplification des termes $\mathcal{I}'_\Gamma$ et $\mathcal{I}'_T$	229
I.3	Système optimal	230
I.3.1	Cas de la fonctionnelle coût (5.13)	230
I.3.2	Cas de la fonctionnelle coût (5.14)	231

J.1 Variation de la fonctionnelle $\mathcal{I}$

En introduisant la définition (5.17) de $\mathcal{I}$ dans (5.18), on obtient :

$$\begin{aligned} \mathcal{I}' = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} & \left[\int_{t_0}^{t_0+T_o} \int_{\Omega} [\mathcal{L}_i(\bar{\mathbf{u}} + \epsilon \delta \bar{\mathbf{u}}, \bar{P} + \epsilon \delta \bar{P}) - \mathcal{L}_i(\bar{\mathbf{u}}, \bar{P})] \bar{u}_i^* d\mathbf{x} dt \right. \\ & \left. + \int_{t_0}^{t_0+T_o} \int_{\Omega} \kappa \left(\frac{\partial}{\partial x_i} (\bar{u}_i + \epsilon \delta \bar{u}_i) - \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} \right) \bar{P}^* d\mathbf{x} dt \right] \end{aligned}$$

Pour simplifier cette expression, on remplace $\mathcal{L}_i$ par sa définition (5.7). On montre alors facilement que :

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} [\mathcal{L}_i(\bar{\mathbf{u}} + \epsilon \delta \bar{\mathbf{u}}, \bar{P} + \epsilon \delta \bar{P}) - \mathcal{L}_i(\bar{\mathbf{u}}, \bar{P})] =$$

$$\frac{\partial(\delta \bar{u}_i)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} [\bar{u}_i \delta \bar{u}_j + \bar{u}_j \delta \bar{u}_i] - 2 \frac{\partial}{\partial x_j} [\delta \nu \bar{S}_{ij}] - 2 \frac{\partial}{\partial x_j} [\nu \delta \bar{S}_{ij}] + \frac{\partial(\delta \bar{P})}{\partial x_i},$$

ce qui permet encore d'écrire $\mathcal{I}'$ sous la forme :

$$\mathcal{I}' = \int_{t_0}^{t_0+T_o} \int_{\Omega} \left(\underbrace{\frac{\partial(\delta \bar{u}_i)}{\partial t}}_{\mathcal{I}'_t} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j} [\bar{u}_i \delta \bar{u}_j + \bar{u}_j \delta \bar{u}_i]}_{\mathcal{I}'_c} - 2 \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j} [\delta \nu \bar{S}_{ij}]}_{\mathcal{I}'_\nu} \right.$$

$$\left. - 2 \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j} [\nu \delta \bar{S}_{ij}]}_{\mathcal{I}'_{\nu'}} + \underbrace{\frac{\partial(\delta \bar{P})}{\partial x_i}}_{\mathcal{I}'_P} \right) \bar{u}_i^* d\mathbf{x} dt + \int_{t_0}^{t_0+T_o} \int_{\Omega} \underbrace{\kappa \frac{\partial(\delta \bar{u}_i)}{\partial x_i} \bar{P}^*}_{\mathcal{I}'_{Cont}} d\mathbf{x} dt.$$

Pour faire apparaître l'équation LES adjointe $\mathcal{L}_i^*(\bar{\mathbf{u}}^*, \bar{P}^*) = 0$, il reste à intégrer par parties l'expression précédente afin d'écrire $\mathcal{I}'$ sous la forme :

$$\mathcal{I}' = \langle \delta \bar{u}_i, \mathcal{L}_i^*(\bar{\mathbf{u}}^*, \bar{P}^*) \rangle + \text{termes de frontière} + \text{termes de contrôle}$$

Nous allons maintenant décrire pour chacun des termes apparaissant dans $\mathcal{I}'$ les transformations à réaliser.

J.1.1 Contribution du terme de temps $\mathcal{I}'_t$

On rappelle que :

$$\mathcal{I}'_t = \int_{t_0}^{t_0+T_o} \int_{\Omega} \frac{\partial(\delta \bar{u}_i)}{\partial t} \bar{u}_i^* d\mathbf{x} dt.$$

Après intégration par parties en temps, on obtient :

$$\boxed{\mathcal{I}'_t = \int_{\Omega} [\delta \bar{u}_i \bar{u}_i^*]_{t_0}^{t_0+T_o} d\mathbf{x} - \int_{t_0}^{t_0+T_o} \int_{\Omega} \delta \bar{u}_i \frac{\partial \bar{u}_i^*}{\partial t} d\mathbf{x} dt.} \quad (\text{J.1})$$

J.1.2 Contribution du terme convectif $\mathcal{I}'_c$

On rappelle que :

$$\mathcal{I}'_c = \int_{t_0}^{t_0+T_o} \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{u}_i \delta \bar{u}_j + \bar{u}_j \delta \bar{u}_i) \bar{u}_i^* d\mathbf{x} dt.$$

1. Appliquons (I.2) avec $A_{ji} = \bar{u}_i \delta \bar{u}_j$ et $U_i = \bar{u}_i^*$, on obtient :

$$\int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{u}_i \delta \bar{u}_j) \bar{u}_i^* d\mathbf{x} = \int_{\Gamma} \bar{u}_j \delta \bar{u}_i \bar{u}_j^* n_i d\mathbf{x} - \int_{\Omega} \bar{u}_j \delta \bar{u}_i \frac{\partial \bar{u}_j^*}{\partial x_i} d\mathbf{x}$$

2. Appliquons (I.2) avec $A_{ji} = \bar{u}_j \delta \bar{u}_i$ et $U_i = \bar{u}_i^*$, on obtient :

$$\int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{u}_j \delta \bar{u}_i) \bar{u}_i^* d\mathbf{x} = \int_{\Gamma} \bar{u}_i \delta \bar{u}_j \bar{u}_j^* n_i d\mathbf{x} - \int_{\Omega} \bar{u}_i \delta \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_j^*}{\partial x_i} d\mathbf{x}$$

Les indices i et j étant muets, on trouve encore après permutation :

$$\begin{aligned} \mathcal{I}'_c = \int_{t_0}^{t_0+T_o} \int_{\Gamma} [\bar{u}_i \delta \bar{u}_j \bar{u}_i^* n_j + \bar{u}_j \delta \bar{u}_i \bar{u}_i^* n_j] d\mathbf{x} dt \\ - \int_{t_0}^{t_0+T_o} \int_{\Omega} \left(\bar{u}_j \delta \bar{u}_i \frac{\partial \bar{u}_j^*}{\partial x_i} + \bar{u}_j \delta \bar{u}_i \frac{\partial \bar{u}_i^*}{\partial x_j} \right) d\mathbf{x} dt \quad (\text{J.2}) \end{aligned}$$

soit

$$\boxed{\mathcal{I}'_c = \int_{t_0}^{t_0+T_o} \int_{\Gamma} [\bar{u}_i \delta \bar{u}_j + \bar{u}_j \delta \bar{u}_i] \bar{u}_i^* n_j d\mathbf{x} dt - \int_{t_0}^{t_0+T_o} \int_{\Omega} 2 \bar{S}_{ij}^* \bar{u}_j \delta \bar{u}_i d\mathbf{x} dt} \quad (\text{J.3})$$

où

$$\bar{S}_{ij}^* = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}_i^*}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j^*}{\partial x_i} \right) \quad (\text{J.4})$$

J.1.3 Contribution du terme de pression $\mathcal{I}'_P$

On rappelle que :

$$\mathcal{I}'_P = \int_{t_0}^{t_0+T_o} \int_{\Omega} \frac{\partial(\delta \bar{P})}{\partial x_i} \bar{u}_i^* d\mathbf{x} dt.$$

Après application de la formule de Green (I.4) avec $f = \delta \bar{P}$ et $\mathbf{g} = \bar{\mathbf{u}}^*$, on trouve que :

$$\boxed{\mathcal{I}'_P = \int_{t_0}^{t_0+T_o} \int_{\Gamma} \delta \bar{P} \bar{u}_i^* n_i d\mathbf{x} dt - \int_{t_0}^{t_0+T_o} \int_{\Omega} \delta \bar{P} \frac{\partial \bar{u}_i^*}{\partial x_i} d\mathbf{x} dt} \quad (\text{J.5})$$

J.1.4 Contribution du terme de continuité $\mathcal{I}'_{Cont}$

On rappelle que :

$$\mathcal{I}'_{Cont} = \int_{t_0}^{t_0+T_o} \int_{\Omega} \kappa \frac{\partial(\delta \bar{u}_i)}{\partial x_i} \bar{P}^* d\mathbf{x} dt.$$

Après application de la formule de Green (I.4) avec $f = \bar{P}^*$ et $\mathbf{g} = \delta \bar{\mathbf{u}}$, on trouve que :

$$\boxed{\mathcal{I}'_{Cont} = \kappa \left(\int_{t_0}^{t_0+T_o} \int_{\Gamma} \bar{P}^* \delta \bar{u}_i n_i d\mathbf{x} dt - \int_{t_0}^{t_0+T_o} \int_{\Omega} \delta \bar{u}_i \frac{\partial \bar{P}^*}{\partial x_i} d\mathbf{x} dt \right)} \quad (\text{J.6})$$

J.1.5 Contribution du terme diffusif $\mathcal{I}'_\nu$

On rappelle que :

$$\mathcal{I}'_\nu = \int_{t_0}^{t_0+T_o} \int_{\Omega} -2 \frac{\partial}{\partial x_j} (\nu \delta \bar{S}_{ij}) \bar{u}_i^* d\mathbf{x} dt.$$

Appliquons (I.2) avec $A_{ji} = \nu \delta \bar{S}_{ij}$ et $U_i = \bar{u}_i^*$, on obtient :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} -2 \frac{\partial}{\partial x_j} (\nu \delta \bar{S}_{ij}) \bar{u}_i^* d\mathbf{x} &= \int_{\Gamma} -2 \nu \delta \bar{S}_{ji} \bar{u}_j^* n_i d\mathbf{x} + \int_{\Omega} 2 \nu \delta \bar{S}_{ji} \frac{\partial \bar{u}_j^*}{\partial x_i} d\mathbf{x} \\ &= \int_{\Gamma} -2 \nu \delta \bar{S}_{ij} \bar{u}_i^* n_j d\mathbf{x} + \underbrace{\int_{\Omega} 2 \nu \delta \bar{S}_{ij} \frac{\partial \bar{u}_i^*}{\partial x_j} d\mathbf{x}}_{T_1} \end{aligned}$$

où on a permuté les indices muets i et j dans la dernière ligne.

En tenant compte de la relation

$$2 \delta \bar{S}_{ij} = \frac{\partial(\delta \bar{u}_i)}{\partial x_j} + \frac{\partial(\delta \bar{u}_j)}{\partial x_i}$$

on peut alors développer le terme T_1 et l'écrire :

$$\int_{\Omega} 2 \nu \delta \bar{S}_{ij} \frac{\partial \bar{u}_i^*}{\partial x_j} d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \nu \left(\frac{\partial(\delta \bar{u}_i)}{\partial x_j} + \frac{\partial(\delta \bar{u}_j)}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \bar{u}_i^*}{\partial x_j} d\mathbf{x}$$

Nous allons maintenant transformer cette dernière expression en faisant apparaître en facteur le terme $\delta \bar{u}_i$.

Appliquons (I.3) avec $A_{ji} = \nu \frac{\partial \bar{u}_i^*}{\partial x_j}$ et $U_i = \delta \bar{u}_i$, on obtient :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nu \frac{\partial \bar{u}_i^*}{\partial x_j} \frac{\partial(\delta \bar{u}_j)}{\partial x_j} d\mathbf{x} &= \int_{\Gamma} \nu \frac{\partial \bar{u}_i^*}{\partial x_j} \delta \bar{u}_i n_j d\mathbf{x} - \int_{\Omega} \nu \delta \bar{u}_j \frac{\partial^2 \bar{u}_j^*}{\partial x_i \partial x_i} d\mathbf{x} \\ &= \int_{\Gamma} \nu \frac{\partial \bar{u}_i^*}{\partial x_j} \delta \bar{u}_i n_j d\mathbf{x} - \int_{\Omega} \nu \delta \bar{u}_i \frac{\partial^2 \bar{u}_i^*}{\partial x_j \partial x_j} d\mathbf{x} \quad (i \longleftrightarrow j) \end{aligned}$$

Appliquons (I.2) avec $A_{ij} = \nu \frac{\partial \bar{u}_i^*}{\partial x_j}$ et $U_j = \delta \bar{u}_j$, on obtient :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nu \frac{\partial \bar{u}_i^*}{\partial x_j} \frac{\partial(\delta \bar{u}_j)}{\partial x_i} d\mathbf{x} &= \int_{\Gamma} \nu \frac{\partial \bar{u}_i^*}{\partial x_j} \delta \bar{u}_j n_i d\mathbf{x} - \int_{\Omega} \nu \delta \bar{u}_i \frac{\partial^2 \bar{u}_j^*}{\partial x_j \partial x_i} d\mathbf{x} \\ &= \int_{\Gamma} \nu \frac{\partial \bar{u}_j^*}{\partial x_i} \delta \bar{u}_i n_j d\mathbf{x} - \int_{\Omega} \nu \delta \bar{u}_i \frac{\partial^2 \bar{u}_j^*}{\partial x_j \partial x_i} d\mathbf{x} \quad (i \longleftrightarrow j) \end{aligned}$$

En combinant maintenant ces deux termes, on trouve :

$$\int_{\Gamma} \nu \left(\frac{\partial \bar{u}_i^*}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j^*}{\partial x_i} \right) \delta \bar{u}_i n_j d\mathbf{x} - \int_{\Omega} \nu \delta \bar{u}_i \left(\frac{\partial^2 \bar{u}_i^*}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\partial^2 \bar{u}_j^*}{\partial x_j \partial x_i} \right) d\mathbf{x}$$

soit encore en tenant compte de (J.4)

$$\int_{\Gamma} 2\nu \bar{S}_{ij}^* \delta \bar{u}_i n_j d\mathbf{x} - \int_{\Omega} 2\nu \delta \bar{u}_i \frac{\partial \bar{S}_{ij}^*}{\partial x_j} d\mathbf{x}$$

Finalement, en regroupant tous les termes, on peut écrire $\mathcal{I}'_{\nu}$ sous la forme :

$$\boxed{\mathcal{I}'_{\nu} = \int_{t_0}^{t_0+T_0} \int_{\Gamma} \left(-2\nu \delta \bar{S}_{ij} \bar{u}_i^* n_j + 2\nu \bar{S}_{ij}^* \delta \bar{u}_i n_j \right) d\mathbf{x} dt - \int_{t_0}^{t_0+T_0} \int_{\Omega} 2\nu \frac{\partial \bar{S}_{ij}^*}{\partial x_j} \delta \bar{u}_i d\mathbf{x} dt} \quad (\text{J.7})$$

J.1.6 Contribution du terme diffusif $\mathcal{I}'_{\nu'}$

On rappelle que :

$$\mathcal{I}'_{\nu'} = \int_{t_0}^{t_0+T_0} \int_{\Omega} -2 \frac{\partial}{\partial x_j} (\delta \nu \bar{S}_{ij}) \bar{u}_i^* d\mathbf{x} dt$$

où

$$\nu = \frac{1}{Re_{\tau}} + C \bar{\Delta}^2 |\bar{S}| \quad \text{avec} \quad |\bar{S}| = (2 \bar{S}_{ij} \bar{S}_{ij})^{\frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad \bar{S}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right).$$

J.1.6.1 Evaluation de $\delta \nu$

Evaluons tout d'abord la variation $\delta \nu$ apparaissant dans $\mathcal{I}'_{\nu'}$. Les variables Re_{τ} et $\bar{\Delta}$ étant constantes, on trouve :

$$\delta \nu = \delta C \bar{\Delta}^2 |\bar{S}| + C \bar{\Delta}^2 \delta |\bar{S}|$$

Or

$$\delta |\bar{S}| = \delta \left(\sqrt{2 \bar{S}_{ij} \bar{S}_{ij}} \right) = \frac{\delta (2 \bar{S}_{ij} \bar{S}_{ij})}{2 |\bar{S}|} = \frac{1}{|\bar{S}|} (\bar{S}_{ij} \delta \bar{S}_{ij} + \delta \bar{S}_{ij} \bar{S}_{ij}) = \frac{2}{|\bar{S}|} \bar{S}_{kl} \delta \bar{S}_{kl}$$

Finalement, on peut écrire $\delta \nu$ sous la forme :

$$\delta \nu = \delta C \bar{\Delta}^2 |\bar{S}| + \frac{2C \bar{\Delta}^2}{|\bar{S}|} \bar{S}_{kl} \delta \bar{S}_{kl}. \quad (\text{J.8})$$

J.1.6.2 Premières transformations

Pour simplifier l'expression de $\mathcal{I}'_{\nu'}$, appliquons (I.2) avec $A_{ji} = -2(\delta\nu \bar{S}_{ij})$ et $U_i = \bar{u}_i^*$, on obtient alors :

$$\begin{aligned}\mathcal{I}'_{\nu'} &= \int_{t_0}^{t_0+T_o} \int_{\Gamma} -2(\delta\nu \bar{S}_{ji}) \bar{u}_j^* n_i d\mathbf{x} dt + \int_{t_0}^{t_0+T_o} \int_{\Omega} 2(\delta\nu \bar{S}_{ji}) \frac{\partial \bar{u}_j^*}{\partial x_i} d\mathbf{x} dt \\ &= \int_{t_0}^{t_0+T_o} \int_{\Gamma} -2(\delta\nu \bar{S}_{ij}) \bar{u}_i^* n_j d\mathbf{x} dt + \underbrace{\int_{t_0}^{t_0+T_o} \int_{\Omega} 2(\delta\nu \bar{S}_{ij}) \frac{\partial \bar{u}_i^*}{\partial x_j} d\mathbf{x} dt}_{T_2} \quad (i \longleftrightarrow j)\end{aligned}$$

Nous allons maintenant simplifier le terme T_2 . Pour cela, nous commençons par permuter les indices muets i et j . Il vient alors :

$$\bar{S}_{ij} \frac{\partial \bar{u}_i^*}{\partial x_j} = \bar{S}_{ji} \frac{\partial \bar{u}_j^*}{\partial x_i} = \bar{S}_{ij} \frac{\partial \bar{u}_j^*}{\partial x_i}$$

en tenant compte de la symétrie de $\bar{S}$ ($\bar{S}_{ji} = \bar{S}_{ij}$). Finalement, on a :

$$\bar{S}_{ij} \frac{\partial \bar{u}_i^*}{\partial x_j} = \frac{1}{2} \bar{S}_{ij} \left(\frac{\partial \bar{u}_i^*}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j^*}{\partial x_i} \right) = \bar{S}_{ij} \bar{S}_{ij}^*$$

ce qui permet d'écrire T_2 sous la forme :

$$2(\delta\nu \bar{S}_{ij}) \bar{S}_{ij}^*.$$

Pour simplifier encore ce terme, on remplace maintenant $\delta\nu$ par son expression (J.8).

On obtient :

$$2(\delta\nu \bar{S}_{ij}) \bar{S}_{ij}^* = 2\delta C \bar{\Delta}^2 |\bar{S}| \bar{S}_{ij} \bar{S}_{ij}^* + \frac{4C\bar{\Delta}^2}{|\bar{S}|} \bar{S}_{ij} \bar{S}_{ij}^* \bar{S}_{kl} \delta\bar{S}_{kl}$$

Le terme $\mathcal{I}'_{\nu'}$ peut donc s'écrire comme

$$\mathcal{I}'_{\nu'} = \int_{t_0}^{t_0+T_o} \int_{\Gamma} -2(\delta\nu \bar{S}_{ij}) \bar{u}_i^* n_j d\mathbf{x} dt + \mathcal{I}'_{C'} + \mathcal{I}'_{S'}$$

où

$$\mathcal{I}'_{C'} = \int_{t_0}^{t_0+T_o} \int_{\Omega} 2\delta C \bar{\Delta}^2 |\bar{S}| \bar{S}_{ij} \bar{S}_{ij}^* d\mathbf{x} dt$$

et

$$\mathcal{I}'_{S'} = \int_{t_0}^{t_0+T_o} \int_{\Omega} \frac{4C\bar{\Delta}^2}{|\bar{S}|} \bar{S}_{ij} \bar{S}_{ij}^* \bar{S}_{kl} \delta\bar{S}_{kl} d\mathbf{x} dt$$

J.1.6.3 Evaluation de $\mathcal{I}'_{S'}$

On commence par permuter en bloc les couples d'indice muets (i, j) et (k, l) . L'intégrale $\mathcal{I}'_{S'}$ devient :

$$\mathcal{I}'_{S'} = \int_{t_0}^{t_0+T_0} \int_{\Omega} \frac{4C\bar{\Delta}^2}{|\bar{S}|} \bar{S}_{kl} \bar{S}_{kl}^* \bar{S}_{ij} \delta \bar{S}_{ij} d\mathbf{x} dt$$

Simplifions maintenant le produit $\bar{S}_{ij} \delta \bar{S}_{ij}$. Par définition, celui-ci devient :

$$\begin{aligned} \bar{S}_{ij} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \delta \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \delta \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) &= \frac{1}{2} \left(\bar{S}_{ij} \frac{\partial \delta \bar{u}_i}{\partial x_j} + \bar{S}_{ij} \frac{\partial \delta \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\bar{S}_{ij} \frac{\partial \delta \bar{u}_i}{\partial x_j} + \bar{S}_{ji} \frac{\partial \delta \bar{u}_i}{\partial x_j} \right) \quad i \longleftrightarrow j \\ &= \frac{1}{2} \left(\bar{S}_{ij} \frac{\partial \delta \bar{u}_i}{\partial x_j} + \bar{S}_{ij} \frac{\partial \delta \bar{u}_i}{\partial x_j} \right) \quad \bar{S}_{ji} = \bar{S}_{ij} \end{aligned}$$

d'où

$$\bar{S}_{ij} \delta \bar{S}_{ij} = \bar{S}_{ij} \frac{\partial \delta \bar{u}_i}{\partial x_j}$$

soit

$$\mathcal{I}'_{S'} = \int_{t_0}^{t_0+T_0} \int_{\Omega} \frac{4C\bar{\Delta}^2}{|\bar{S}|} \bar{S}_{kl} \bar{S}_{kl}^* \bar{S}_{ij} \frac{\partial \delta \bar{u}_i}{\partial x_j} d\mathbf{x} dt.$$

Appliquons (I.3) avec $A_{ji} = \frac{4C\bar{\Delta}^2}{|\bar{S}|} \bar{S}_{kl} \bar{S}_{kl}^* \bar{S}_{ij}$ et $U_i = \delta \bar{u}_i$, on obtient pour $\mathcal{I}'_{S'}$:

$$\int_{t_0}^{t_0+T_0} \int_{\Gamma} \frac{4C\bar{\Delta}^2}{|\bar{S}|} \bar{S}_{kl} \bar{S}_{kl}^* \bar{S}_{ij} \delta \bar{u}_i n_j d\mathbf{x} dt - \int_{t_0}^{t_0+T_0} \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{4C\bar{\Delta}^2}{|\bar{S}|} \bar{S}_{kl} \bar{S}_{kl}^* \bar{S}_{ji} \right) \delta \bar{u}_j d\mathbf{x} dt$$

soit encore en permutant les indices muets i et j dans la dernière intégrale

$$\boxed{\begin{aligned} \mathcal{I}'_{S'} &= \int_{t_0}^{t_0+T_0} \int_{\Gamma} \frac{4C\bar{\Delta}^2}{|\bar{S}|} \bar{S}_{kl} \bar{S}_{kl}^* \bar{S}_{ij} \delta \bar{u}_i n_j d\mathbf{x} dt \\ &\quad - \int_{t_0}^{t_0+T_0} \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{4C\bar{\Delta}^2}{|\bar{S}|} \bar{S}_{kl} \bar{S}_{kl}^* \bar{S}_{ij} \right) \delta \bar{u}_i d\mathbf{x} dt \end{aligned}} \quad (\text{J.9})$$

J.1.6.4 Evaluation de $\mathcal{I}'_{C'}$ Expression de δC

La première étape pour évaluer

$$\mathcal{I}'_{C'} = \int_{t_0}^{t_0+T_0} \int_{\Omega} 2\delta C \bar{\Delta}^2 |\bar{S}| \bar{S}_{ij} \bar{S}_{ij}^* d\mathbf{x} dt$$

consiste à déterminer une expression de δC . Pour cela, on rappelle que la constante C du modèle de Smagorinsky dynamique est définie comme

$$C \bar{\Delta}^2 = \frac{\langle L_{ij} M_{ij} \rangle_{XZ}}{\langle M_{kl} M_{kl} \rangle_{XZ}} \quad (\text{J.10})$$

où

$$L_{ij} = \widehat{\overline{u_i u_j}} - \widehat{\overline{u_i}} \widehat{\overline{u_j}} \quad \text{et} \quad M_{ij} = 2 \left| \widehat{\overline{S}} \right| \widehat{\overline{S_{ij}}} - 2 \eta^2 \left| \widehat{\overline{S}} \right| \widehat{\overline{S_{ij}}} \quad \text{avec} \quad \eta = \frac{\widehat{\overline{\Delta}}}{\widehat{\overline{\Delta}}}.$$

Le calcul de la variation de (J.10) donne immédiatement :

$$\delta C \overline{\Delta}^2 = \frac{1}{\langle M_{kl} M_{kl} \rangle_{XZ}^2} (\langle \delta L_{ij} M_{ij} + L_{ij} \delta M_{ij} \rangle_{XZ} \langle M_{kl} M_{kl} \rangle_{XZ} - \langle 2 M_{kl} \delta M_{kl} \rangle_{XZ} \langle L_{ij} M_{ij} \rangle_{XZ})$$

Or, d'après (J.10)

$$\langle L_{ij} M_{ij} \rangle_{XZ} = C \overline{\Delta}^2 \langle M_{kl} M_{kl} \rangle_{XZ}$$

d'où

$$\delta C \overline{\Delta}^2 = \frac{\langle \delta L_{ij} M_{ij} + (L_{ij} - 2 C \overline{\Delta}^2 M_{ij}) \delta M_{ij} \rangle_{XZ}}{\langle M_{kl} M_{kl} \rangle_{XZ}}$$

en tenant compte du fait que $M_{kl} \delta M_{kl} = M_{ij} \delta M_{ij}$ (permutation d'indices muets).

Enfin, les définitions de L_{ij} et M_{ij} conduisent respectivement à :

$$\delta L_{ij} = \widehat{\overline{\delta u_i u_j}} + \widehat{\overline{u_i \delta u_j}} - \widehat{\overline{\delta u_i}} \widehat{\overline{u_j}} - \widehat{\overline{u_i}} \widehat{\overline{\delta u_j}}$$

et

$$\delta M_{ij} = 2 \delta \left| \widehat{\overline{S}} \right| \widehat{\overline{S_{ij}}} + 2 \left| \widehat{\overline{S}} \right| \widehat{\overline{\delta S_{ij}}} - 2 \eta^2 \delta \left| \widehat{\overline{S}} \right| \widehat{\overline{S_{ij}}} - 2 \eta^2 \left| \widehat{\overline{S}} \right| \widehat{\overline{\delta S_{ij}}}$$

ou encore

$$\delta M_{ij} = \frac{4 \widehat{\overline{S_{ij}}} \widehat{\overline{S_{kl}}} \widehat{\overline{\delta S_{kl}}}}{\left| \widehat{\overline{S}} \right|} + 2 \left| \widehat{\overline{S}} \right| \widehat{\overline{\delta S_{ij}}} - 4 \eta^2 \frac{\widehat{\overline{S_{kl}}} \widehat{\overline{\delta S_{kl}}}}{\left| \widehat{\overline{S}} \right|} \widehat{\overline{S_{ij}}} - 2 \eta^2 \left| \widehat{\overline{S}} \right| \widehat{\overline{\delta S_{ij}}}$$

puisque

$$\delta \left| \widehat{\overline{S}} \right| = \frac{2}{\left| \widehat{\overline{S}} \right|} \widehat{\overline{S_{kl}}} \widehat{\overline{\delta S_{kl}}}.$$

En remplaçant δC par son expression, le terme $\mathcal{I}'_{C'}$ peut alors s'écrire comme :

$$\mathcal{I}'_{C'} = \int_{t_0}^{t_0+T_0} \int_{\Omega} \frac{2 \left| \widehat{\overline{S}} \right| \widehat{\overline{S_{ij}}} \widehat{\overline{S_{ij}^*}}}{\langle M_{kl} M_{kl} \rangle_{XZ}} \left(\langle \delta L_{ij} M_{ij} + (L_{ij} - 2 C \overline{\Delta}^2 M_{ij}) \delta M_{ij} \rangle_{XZ} \right) d\mathbf{x} dt \quad (\text{J.11})$$

Identités simplificatrices

Nous allons maintenant énoncer puis démontrer deux identités intégrales qui seront utilisées par la suite pour simplifier certaines expressions.

1. Démontrons que pour toutes quantités E , F et H fonctions de x, y, z , on vérifie :

$$\boxed{\int_{\Omega} \frac{\langle F \rangle_{XZ}}{\langle E \rangle_{XZ}} H d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \frac{F}{\langle E \rangle_{XZ}} \langle H \rangle_{XZ} d\mathbf{x}} \quad (\text{J.12})$$

Démonstration : On rappelle que par définition

$$\langle F \rangle_{XZ} = \int_x \int_z F(x, y, z) dx dz$$

d'où

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{\langle F \rangle_{XZ}}{\langle E \rangle_{XZ}} H d\mathbf{x} &= \int_y \int_x \int_z \frac{\int_{x'} \int_{z'} F(x', y, z') dx' dz'}{\langle E \rangle_{XZ}} H(x, y, z) dz dx dy \\ &= \int_y \int_{x'} \int_{z'} \frac{F(x', y, z')}{\langle E \rangle_{XZ}} \int_x \int_z H(x, y, z) dz dx dz' dx' dy \\ &= \int_{\Omega} \frac{F}{\langle E \rangle_{XZ}} \langle H \rangle_{XZ} d\mathbf{x} \end{aligned}$$

2. Démontrons que pour toutes quantités E et F fonctions de x, y, z et pour un noyau de filtre G symétrique, on vérifie :

$$\boxed{\int_{\Omega} \hat{F} E d\mathbf{x} = \int_{\Omega} F \hat{E} d\mathbf{x}} \quad (\text{J.13})$$

Démonstration : On rappelle que par définition d'une grandeur filtrée, on a :

$$\hat{F}(\mathbf{x}) = \int_{\Omega'} G(\mathbf{x} - \mathbf{x}') F(\mathbf{x}') d\mathbf{x}'$$

d'où

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \hat{F} E d\mathbf{x} &= \int_{\Omega} E(\mathbf{x}) \int_{\Omega'} G(\mathbf{x} - \mathbf{x}') F(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' d\mathbf{x} \\ &= \int_{\Omega'} F(\mathbf{x}') \int_{\Omega} E(\mathbf{x}) G(\mathbf{x} - \mathbf{x}') d\mathbf{x} d\mathbf{x}' \\ &= \int_{\Omega'} F \hat{E} d\mathbf{x}' \end{aligned}$$

en utilisant la symétrie de G , soit $G(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = G(\mathbf{x}' - \mathbf{x})$.

Premières simplifications de $\mathcal{I}'_{C'}$

En utilisant (J.12) avec

$$E = M_{kl} M_{kl} \quad ; \quad F = \delta L_{ij} M_{ij} + (L_{ij} - 2C \overline{\Delta}^2 M_{ij}) \delta M_{ij} \quad ; \quad H = 2 \mid \overline{S} \mid \overline{S}_{ij} \overline{S}_{ij}^*$$

(J.11) devient

$$\mathcal{I}'_{C'} = \int_{t_0}^{t_0+T_0} \int_{\Omega} 2 \frac{\langle \mid \overline{S} \mid \overline{S}_{ij} \overline{S}_{ij}^* \rangle_{XZ}}{\langle M_{kl} M_{kl} \rangle_{XZ}} \left(\delta L_{ij} M_{ij} + (L_{ij} - 2C \overline{\Delta}^2 M_{ij}) \delta M_{ij} \right) d\mathbf{x} dt.$$

Pour simplifier cette expression, on introduit deux nouveaux tenseurs N_{ij} et P_{ij} définis comme :

$$N_{ij} = \frac{\langle \mid \overline{S} \mid \overline{S}_{mn} \overline{S}_{mn}^* \rangle_{XZ}}{\langle M_{kl} M_{kl} \rangle_{XZ}} M_{ij} \quad (\text{J.14})$$

et

$$P_{ij} = \frac{\langle \mid \overline{S} \mid \overline{S}_{mn} \overline{S}_{mn}^* \rangle_{XZ}}{\langle M_{kl} M_{kl} \rangle_{XZ}} \left(L_{ij} - 2C \overline{\Delta}^2 M_{ij} \right) \quad (\text{J.15})$$

L'expression de $\mathcal{I}'_{C'}$ devient alors :

$$\mathcal{I}'_{C'} = \int_{t_0}^{t_0+T_0} \int_{\Omega} \left(\underbrace{2 N_{ij} \delta L_{ij}}_{L'} + \underbrace{2 P_{ij} \delta M_{ij}}_{M'} \right) d\mathbf{x} dt$$

Détermination de L'

Nous allons montrer que :

$$L' = -B_i \delta \overline{u}_i$$

où le vecteur B_i est défini comme :

$$B_i = 4 \left(\widehat{N_{ij} \overline{u}_j} - \widehat{N_{ij}} \overline{u}_j \right)$$

Démonstration : Remplaçons dans L' , δL_{ij} par son expression. On trouve :

$$2 N_{ij} \delta L_{ij} = 2 N_{ij} \widehat{\delta \overline{u}_i \overline{u}_j} + 2 N_{ij} \widehat{\overline{u}_i \delta \overline{u}_j} - 2 N_{ij} \widehat{\delta \overline{u}_i} \widehat{\overline{u}_j} - 2 N_{ij} \widehat{\overline{u}_i} \widehat{\delta \overline{u}_j}$$

Or, d'après l'identité (J.13), nous avons pour les 4 termes de l'expression précédente :

$$\int_{\Omega} 2 N_{ij} \widehat{\delta \overline{u}_i \overline{u}_j} d\mathbf{x} = \int_{\Omega} 2 \widehat{N_{ij}} \delta \overline{u}_i \overline{u}_j d\mathbf{x}$$

$$\int_{\Omega} 2 N_{ij} \widehat{\overline{u}_i \delta \overline{u}_j} d\mathbf{x} = \int_{\Omega} 2 \widehat{N}_{ij} \overline{u}_i \delta \overline{u}_j d\mathbf{x}$$

$$\int_{\Omega} 2 N_{ij} \widehat{\delta \overline{u}_i \overline{u}_j} d\mathbf{x} = \int_{\Omega} 2 \widehat{N}_{ij} \widehat{\overline{u}_j} \delta \overline{u}_i d\mathbf{x}$$

$$\int_{\Omega} 2 N_{ij} \widehat{\overline{u}_i \delta \overline{u}_j} d\mathbf{x} = \int_{\Omega} 2 \widehat{N}_{ij} \widehat{\overline{u}_i} \delta \overline{u}_j d\mathbf{x}$$

d'où

$$\int_{\Omega} L' d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \left(2 \widehat{N}_{ij} \delta \overline{u}_i \overline{u}_j + 2 \widehat{N}_{ij} \overline{u}_i \delta \overline{u}_j - 2 \widehat{N}_{ij} \widehat{\overline{u}_j} \delta \overline{u}_i - 2 \widehat{N}_{ij} \widehat{\overline{u}_i} \delta \overline{u}_j \right) d\mathbf{x}.$$

Or

$$\begin{aligned} \widehat{N}_{ij} \overline{u}_i \delta \overline{u}_j &= \widehat{N}_{ji} \overline{u}_j \delta \overline{u}_i \quad i \longleftrightarrow j \\ &= \widehat{N}_{ij} \overline{u}_j \delta \overline{u}_i \quad \text{car} \quad \widehat{N}_{ji} = \widehat{N}_{ij} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \widehat{N}_{ij} \widehat{\overline{u}_i} \delta \overline{u}_j &= \widehat{N}_{ji} \widehat{\overline{u}_j} \delta \overline{u}_i \quad i \longleftrightarrow j \\ &= \widehat{N}_{ij} \widehat{\overline{u}_j} \delta \overline{u}_i \quad \text{car} \quad \widehat{N}_{ji} = \widehat{N}_{ij} \end{aligned}$$

d'où

$$\int_{\Omega} L' d\mathbf{x} = \int_{\Omega} 4 \left(\widehat{N}_{ij} \overline{u}_j - \widehat{N}_{ij} \widehat{\overline{u}_j} \right) \delta \overline{u}_i d\mathbf{x} = \int_{\Omega} -B_i \delta \overline{u}_i d\mathbf{x}.$$

Détermination de M'

Nous allons montrer que :

$$M' = E_{ij} \delta \overline{S}_{ij}$$

où le tenseur E_{ij} est défini comme :

$$E_{ij} = 4 \left(\widehat{P}_{ij} \mid \overline{S} \mid - \eta^2 P_{ij} \mid \widehat{\overline{S}} \mid \right) + 8 \left(\widehat{P}_{kl} \frac{\overline{S}_{kl} \overline{S}_{ij}}{\mid \overline{S} \mid} - \eta^2 P_{kl} \frac{\widehat{\overline{S}}_{ij} \widehat{\overline{S}}_{kl}}{\mid \widehat{\overline{S}} \mid} \right)$$

Démonstration : Remplaçons dans M' , δM_{ij} par son expression. On trouve :

$$2 P_{ij} \delta M_{ij} = 8 P_{ij} \frac{\overline{S}_{ij} \widehat{\overline{S}}_{kl} \delta \overline{S}_{kl}}{\mid \overline{S} \mid} + 4 P_{ij} \mid \widehat{\overline{S}} \mid \delta \overline{S}_{ij} - 8 \eta^2 P_{ij} \frac{\widehat{\overline{S}}_{kl} \delta \widehat{\overline{S}}_{kl}}{\mid \widehat{\overline{S}} \mid} \widehat{\overline{S}}_{ij} - 4 \eta^2 P_{ij} \mid \widehat{\overline{S}} \mid \delta \widehat{\overline{S}}_{ij}$$

Or, d'après l'identité (J.13), nous avons pour les 4 termes de l'expression précédente :

$$\int_{\Omega} 8 P_{ij} \frac{\overline{S}_{ij} \widehat{\overline{S}}_{kl} \delta \overline{S}_{kl}}{\mid \overline{S} \mid} d\mathbf{x} = \int_{\Omega} 8 \widehat{P}_{ij} \frac{\overline{S}_{ij} \overline{S}_{kl} \delta \overline{S}_{kl}}{\mid \overline{S} \mid} d\mathbf{x}$$

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} 4 P_{ij} | \widehat{\overline{S}} | \delta \overline{S}_{ij} d\mathbf{x} &= \int_{\Omega} 4 \widehat{P}_{ij} | \overline{S} | \delta \overline{S}_{ij} d\mathbf{x} \\
\int_{\Omega} 8 \eta^2 P_{ij} \frac{\widehat{\overline{S}}_{kl} \delta \widehat{\overline{S}}_{kl}}{| \widehat{\overline{S}} |} \widehat{\overline{S}}_{ij} d\mathbf{x} &= \int_{\Omega} 8 \eta^2 P_{ij} \frac{\widehat{\overline{S}}_{ij} \widehat{\overline{S}}_{kl}}{| \widehat{\overline{S}} |} \delta \overline{S}_{kl} d\mathbf{x} \\
\int_{\Omega} 4 \eta^2 P_{ij} | \widehat{\overline{S}} | \delta \widehat{\overline{S}}_{ij} d\mathbf{x} &= \int_{\Omega} 4 \eta^2 \widehat{P}_{ij} | \widehat{\overline{S}} | \delta \overline{S}_{ij} d\mathbf{x}
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} M' d\mathbf{x} &= \int_{\Omega} 4 \left(\widehat{P}_{ij} | \overline{S} | - \eta^2 P_{ij} | \widehat{\overline{S}} | \right) \delta \overline{S}_{ij} d\mathbf{x} \\
&+ \int_{\Omega} 8 \left(\widehat{P}_{kl} \frac{\overline{S}_{kl} \overline{S}_{ij}}{| \overline{S} |} - \eta^2 P_{kl} \frac{\widehat{\overline{S}}_{kl} \widehat{\overline{S}}_{ij}}{| \widehat{\overline{S}} |} \right) \delta \overline{S}_{ij} d\mathbf{x} \quad (i, j) \longleftrightarrow (k, l) \\
&= \int_{\Omega} E_{ij} \delta \overline{S}_{ij} d\mathbf{x}.
\end{aligned}$$

Simplification de la contribution de M'

Compte tenu de la définition de $\delta \overline{S}_{ij}$, nous pouvons écrire que :

$$E_{ij} \delta \overline{S}_{ij} = \frac{1}{2} \left(E_{ij} \frac{\partial \delta \overline{u}_i}{\partial x_j} + E_{ij} \frac{\partial \delta \overline{u}_j}{\partial x_i} \right)$$

Or $E_{ij} \frac{\partial \delta \overline{u}_j}{\partial x_i} = E_{ji} \frac{\partial \delta \overline{u}_i}{\partial x_j}$ par permutation des indices muets i et j . Par conséquent, on a :

$$E_{ij} \delta \overline{S}_{ij} = E_{ij} \frac{\partial \delta \overline{u}_i}{\partial x_j}$$

en prenant en compte la symétrie de E_{ij} .

Appliquons (I.3) avec $A_{ji} = E_{ij}$ et $U_i = \delta \overline{u}_i$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} E_{ij} \frac{\partial \delta \overline{u}_i}{\partial x_j} d\mathbf{x} &= \int_{\Gamma} E_{ij} \delta \overline{u}_i n_j d\mathbf{x} - \int_{\Omega} \frac{\partial E_{ji}}{\partial x_i} \delta \overline{u}_j d\mathbf{x} \\
&= \int_{\Gamma} E_{ij} \delta \overline{u}_i n_j d\mathbf{x} - \int_{\Omega} \frac{\partial E_{ij}}{\partial x_j} \delta \overline{u}_i d\mathbf{x} \quad i \longleftrightarrow j
\end{aligned}$$

Expression finale de $\mathcal{I}'_{C'}$

Finalement, en regroupant les différentes contributions de $\mathcal{I}'_{C'}$, on parvient à :

$$\boxed{\mathcal{I}'_{C'} = \int_{t_0}^{t_0+T_0} \int_{\Gamma} E_{ij} \delta \overline{u}_i n_j d\mathbf{x} dt - \int_{t_0}^{t_0+T_0} \int_{\Omega} \left(B_i + \frac{\partial E_{ij}}{\partial x_j} \right) \delta \overline{u}_i d\mathbf{x} dt} \quad (\text{J.16})$$

J.1.6.5 Expression du terme diffusif $\mathcal{I}'_{\nu'}$

On rappelle que :

$$\mathcal{I}'_{\nu'} = \int_{t_0}^{t_0+T_o} \int_{\Gamma} -2 (\delta\nu \bar{S}_{ij}) \bar{u}_i^* n_j d\mathbf{x} dt + \mathcal{I}'_{C'} + \mathcal{I}'_{S'}$$

Compte tenu des expressions (J.9) et (J.16) de $\mathcal{I}'_{S'}$ et $\mathcal{I}'_{C'}$, on trouve que le terme diffusif $\mathcal{I}'_{\nu'}$ peut s'écrire de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \mathcal{I}'_{\nu'} = & \int_{t_0}^{t_0+T_o} \int_{\Gamma} -2 (\delta\nu \bar{S}_{ij}) \bar{u}_i^* n_j d\mathbf{x} dt \\ & + \int_{t_0}^{t_0+T_o} \int_{\Gamma} \frac{4C\bar{\Delta}^2}{|\bar{S}|} \bar{S}_{kl} \bar{S}_{kl}^* \bar{S}_{ij} \delta\bar{u}_i n_j d\mathbf{x} dt - \int_{t_0}^{t_0+T_o} \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{4C\bar{\Delta}^2}{|\bar{S}|} \bar{S}_{kl} \bar{S}_{kl}^* \bar{S}_{ij} \right) \delta\bar{u}_i d\mathbf{x} dt \\ & + \int_{t_0}^{t_0+T_o} \int_{\Gamma} E_{ij} \delta\bar{u}_i n_j d\mathbf{x} dt - \int_{t_0}^{t_0+T_o} \int_{\Omega} \left(B_i + \frac{\partial E_{ij}}{\partial x_j} \right) \delta\bar{u}_i d\mathbf{x} dt \end{aligned} \quad (\text{J.17})$$

J.1.7 Bilan des contributions

On rappelle que :

$$\mathcal{I}' = \mathcal{I}'_t + \mathcal{I}'_c + \mathcal{I}'_{\nu} + \mathcal{I}'_{\nu'} + \mathcal{I}'_P + \mathcal{I}'_{Cont}$$

où les différentes contributions ont été calculées aux sections précédentes. Nous allons maintenant regrouper les termes selon le type d'intégrale mis en jeu. Soit :

$$\mathcal{I}' = \mathcal{I}'_{\Omega} + \mathcal{I}'_{\Gamma} + \mathcal{I}'_T$$

où

$$\begin{aligned} \mathcal{I}'_{\Omega} = & \int_{t_0}^{t_0+T_o} \int_{\Omega} \left[-\frac{\partial \bar{u}_i^*}{\partial t} - 2\bar{u}_j \bar{S}_{ij}^* - \kappa \frac{\partial \bar{P}^*}{\partial x_i} - 2\nu \frac{\partial \bar{S}_{ij}^*}{\partial x_j} - \left[\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{4C\bar{\Delta}^2}{|\bar{S}|} \bar{S}_{kl} \bar{S}_{kl}^* \bar{S}_{ij} \right) \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{\partial E_{ij}}{\partial x_j} + B_i \right] \right] \delta\bar{u}_i d\mathbf{x} dt + \int_{t_0}^{t_0+T_o} \int_{\Omega} \left(-\frac{\partial \bar{u}_i^*}{\partial x_i} \delta\bar{P} \right) d\mathbf{x} dt \quad (\text{J.18}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{I}'_{\Gamma} = & \int_{t_0}^{t_0+T_o} \int_{\Gamma} \left[(\bar{u}_i \delta\bar{u}_j + \bar{u}_j \delta\bar{u}_i) \bar{u}_i^* n_j + \delta\bar{P} \bar{u}_i^* n_i + \kappa \bar{P}^* \delta\bar{u}_i n_i - 2(\nu \delta\bar{S}_{ij} + \delta\nu \bar{S}_{ij}) \bar{u}_i^* n_j \right. \\ & \left. + 2\nu \bar{S}_{ij}^* \delta\bar{u}_i n_j + \frac{4C\bar{\Delta}^2}{|\bar{S}|} \bar{S}_{kl} \bar{S}_{kl}^* \bar{S}_{ij} \delta\bar{u}_i n_j + E_{ij} \delta\bar{u}_i n_j \right] d\mathbf{x} dt \quad (\text{J.19}) \end{aligned}$$

et

$$\mathcal{I}'_T = \int_{\Omega} [\delta\bar{u}_i \bar{u}_i^*]_{t_0}^{t_0+T_o} d\mathbf{x}. \quad (\text{J.20})$$

J.1.8 Simplification des termes $\mathcal{I}'_\Gamma$ et $\mathcal{I}'_T$

J.1.8.1 Simplification du terme $\mathcal{I}'_\Gamma$

Nous allons maintenant introduire les conditions aux limites sur les frontières du domaine Γ pour simplifier l'écriture de (J.19). Puisque le contrôle est appliqué par soufflage et aspiration aux parois, les relations suivantes sont imposées sur les bords $\Gamma_2^\pm$ du canal :

$$\begin{array}{lll} n_1 = 0 & n_2 = \mp 1 & n_3 = 0 \\ \bar{u}_1 = 0 & \bar{u}_2 = -\bar{\Phi} n_2 & \bar{u}_3 = 0 \\ \bar{S}_{11} = 0 & \bar{S}_{22} = 0 & \bar{S}_{33} = 0 \end{array}$$

Nous avons donc pour les différents termes de (J.19) :

$$(\bar{u}_i \delta \bar{u}_j + \bar{u}_j \delta \bar{u}_i) \bar{u}_i^* n_j = 2 \bar{u}_2 \delta \bar{u}_2 \bar{u}_2^* n_2 = -2 \bar{u}_2 \bar{u}_2^* \delta \bar{\Phi}$$

$$\delta \bar{P} \bar{u}_i^* n_i = \delta \bar{P} \bar{u}_2^* n_2$$

$$\kappa \bar{P}^* \delta \bar{u}_i n_i = \kappa \bar{P}^* \delta \bar{u}_2 n_2 = -\kappa \bar{P}^* \delta \bar{\Phi}$$

$$-2 (\nu \delta \bar{S}_{ij} + \delta \nu \bar{S}_{ij}) \bar{u}_i^* n_j = -\delta \tau_{i2} \bar{u}_i^* n_2 \quad \text{avec} \quad \tau_{ij} = 2\nu \bar{S}_{ij}$$

$$2\nu \bar{S}_{ij}^* \delta \bar{u}_i n_j = 2\nu \bar{S}_{i2}^* \delta \bar{u}_i n_2 = -2\nu \bar{S}_{22}^* \delta \bar{\Phi}$$

$$\bar{S}_{ij} \delta \bar{u}_i n_j = \bar{S}_{i2} \delta \bar{u}_i n_2 = \bar{S}_{22} \delta \bar{u}_2 n_2 = 0$$

$$E_{ij} \delta \bar{u}_i n_j = E_{i2} \delta \bar{u}_i n_2 = E_{22} \delta \bar{u}_2 n_2 = -E_{22} \delta \bar{\Phi}$$

d'où

$$\begin{aligned} \mathcal{I}'_\Gamma &= \int_{t_0}^{t_0+T_o} \int_{\Gamma_2^\pm} - \left(2 \bar{u}_2 \bar{u}_2^* + 2\nu \bar{S}_{22}^* + E_{22} + \kappa \bar{P}^* \right) \delta \bar{\Phi} d\mathbf{x} dt \\ &+ \int_{t_0}^{t_0+T_o} \int_{\Gamma_2^\pm} (\delta \bar{P} \bar{u}_2^* n_2 - \delta \tau_{i2} \bar{u}_i^* n_2) d\mathbf{x} dt \end{aligned} \quad (\text{J.21})$$

J.1.8.2 Simplification du terme $\mathcal{I}'_T$

La condition initiale est supposée connue de manière parfaite à t_0 , nous avons donc :

$$\delta \bar{u}_i = 0 \quad \text{à} \quad t = t_0$$

$$\mathcal{I}'_T = \int_{\Omega} [\delta \bar{u}_i \bar{u}_i^*]_{t=t_0+T_o} d\mathbf{x}. \quad (\text{J.22})$$

J.2 Variation de la fonctionnelle coût $\mathcal{J}$

La fonctionnelle coût $\mathcal{J}$ introduite au chapitre 5 est la somme de 4 termes :

- le coût du contrôle,
- l'énergie cinétique turbulente calculée à la fin de la période d'optimisation,
- l'énergie cinétique turbulente totale,
- la traînée de frottement

soit

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(\bar{\mathbf{u}}, \bar{\Phi}) = & \frac{\ell}{2} \int_{t_0}^{t_0+T_o} \int_{\Gamma_2^\pm} \bar{\Phi}^2 d\mathbf{x} dt + \frac{\ell_{ter}}{2} \int_{\Omega} [\bar{u}_i(\bar{\Phi}) \bar{u}_i(\bar{\Phi})]_{t=t_0+T_o} d\mathbf{x} \\ & + \frac{\ell_{reg}}{2} \int_{t_0}^{t_0+T_o} \int_{\Omega} |\bar{\mathbf{u}}(\bar{\Phi})|^2 d\mathbf{x} dt + \ell_{drag} \int_{t_0}^{t_0+T_o} \int_{\Gamma_2^\pm} (-\tau_{12} n_2) d\mathbf{x} dt \end{aligned}$$

Les quantités étant au plus quadratiques, la variation de $\mathcal{J}$ est donnée de manière immédiate par :

$$\begin{aligned} \mathcal{J}'(\bar{\mathbf{u}}, \bar{\Phi}) = & \ell \int_{t_0}^{t_0+T_o} \int_{\Gamma_2^\pm} \bar{\Phi} \delta \bar{\Phi} d\mathbf{x} dt + \ell_{ter} \int_{\Omega} [\bar{u}_i \delta \bar{u}_i]_{t=t_0+T_o} d\mathbf{x} \\ & + \ell_{reg} \int_{t_0}^{t_0+T_o} \int_{\Omega} \bar{u}_i \delta \bar{u}_i d\mathbf{x} dt + \ell_{drag} \int_{t_0}^{t_0+T_o} \int_{\Gamma_2^\pm} (-\delta \tau_{12} n_2) d\mathbf{x} dt \end{aligned} \quad (\text{J.23})$$

ou bien

$$\begin{aligned} \mathcal{J}'(\bar{\mathbf{u}}', \bar{\Phi}) = & \ell \int_{t_0}^{t_0+T_o} \int_{\Gamma_2^\pm} \bar{\Phi} \delta \bar{\Phi} d\mathbf{x} dt + \ell_{ter} \int_{\Omega} [\bar{u}'_i \delta \bar{u}'_i]_{t=t_0+T_o} d\mathbf{x} \\ & + \ell_{reg} \int_{t_0}^{t_0+T_o} \int_{\Omega} \bar{u}'_i \delta \bar{u}'_i d\mathbf{x} dt + \ell_{drag} \int_{t_0}^{t_0+T_o} \int_{\Gamma_2^\pm} (-\delta \tau'_{12} n_2) d\mathbf{x} dt \end{aligned}$$

dans le cas où on base la fonctionnelle sur des fluctuations de vitesse.

J.3 Système optimal

Pour déterminer le système optimal *i.e.* les équations adjointes du problème, leurs conditions aux limites et terminale ainsi que les conditions d'optimalité, on considère que quelles que soient les variations $\delta \bar{u}_i$ (respectivement $\delta \bar{u}'_i$), $\delta \bar{P}$ et $\delta \bar{\Phi}$, on doit vérifier au minimum de la fonctionnelle $\mathcal{J}$ la condition $\mathcal{J}' = \mathcal{I}' = \mathcal{I}'_\Omega + \mathcal{I}'_\Gamma + \mathcal{I}'_T$ où $\mathcal{J}$ est donnée par (5.4) (respectivement (5.5)).

J.3.1 Cas de la fonctionnelle coût (5.4)

Compte tenu des équations (J.23), (J.18), (J.21) et (J.22), cela se traduit par l'égalité :

$$\begin{aligned}
& \underbrace{\ell \int_{t_0}^{t_0+T_o} \int_{\Gamma_2^\pm} \bar{\Phi} \delta \bar{\Phi} d\mathbf{x} dt}_I + \underbrace{\ell_{ter} \int_{\Omega} [\bar{u}_i \delta \bar{u}_i]_{t=t_0+T_o} d\mathbf{x}}_{II} \\
& + \underbrace{\ell_{reg} \int_{t_0}^{t_0+T_o} \int_{\Omega} \bar{u}_i \delta \bar{u}_i d\mathbf{x} dt}_{III} + \underbrace{\ell_{drag} \int_{t_0}^{t_0+T_o} \int_{\Gamma_2^\pm} (-\delta \tau_{12} n_2) d\mathbf{x} dt}_{IV} = \\
& - \underbrace{\int_{t_0}^{t_0+T_o} \int_{\Omega} \left[\frac{\partial \bar{u}_i^*}{\partial t} + 2 \bar{u}_j \bar{S}_{ij}^* + \kappa \frac{\partial \bar{P}^*}{\partial x_i} + 2 \nu \frac{\partial \bar{S}_{ij}^*}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{4 C \bar{\Delta}^2}{|\bar{S}|} \bar{S}_{kl} \bar{S}_{kl}^* \bar{S}_{ij} \right) + \frac{\partial E_{ij}}{\partial x_j} + B_i \right] \delta \bar{u}_i d\mathbf{x} dt}_V \\
& + \underbrace{\int_{t_0}^{t_0+T_o} \int_{\Omega} \left(-\frac{\partial \bar{u}_i^*}{\partial x_i} \delta \bar{P} \right) d\mathbf{x} dt}_{VI} - \underbrace{\int_{t_0}^{t_0+T_o} \int_{\Gamma_2^\pm} \left(2 \bar{u}_2 \bar{u}_2^* + 2 \nu \bar{S}_{22}^* + E_{22} + \kappa \bar{P}^* \right) \delta \bar{\Phi} d\mathbf{x} dt}_{VII} \\
& + \underbrace{\int_{t_0}^{t_0+T_o} \int_{\Gamma_2^\pm} (\delta \bar{P} \bar{u}_2^* n_2 - \delta \tau_{i2} \bar{u}_i^* n_2) d\mathbf{x} dt}_{VIII} + \underbrace{\int_{\Omega} [\delta \bar{u}_i \bar{u}_i^*]_{t=t_0+T_o} d\mathbf{x}}_{IX}
\end{aligned} \tag{J.24}$$

– Les termes *III* et *V* conduisent à l'équation adjointe :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \bar{u}_i^*}{\partial t} = & -2 \bar{u}_j \bar{S}_{ij}^* - \kappa \frac{\partial \bar{P}^*}{\partial x_i} - 2 \nu \frac{\partial \bar{S}_{ij}^*}{\partial x_j} \\
& - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{4 C \bar{\Delta}^2}{|\bar{S}|} \bar{S}_{kl} \bar{S}_{kl}^* \bar{S}_{ij} \right) - \frac{\partial E_{ij}}{\partial x_j} - B_i - \ell_{reg} \bar{u}_i
\end{aligned}$$

– Le terme *VI* conduit à la condition d'incompressibilité pour le problème adjoint :

$$\boxed{\frac{\partial \bar{u}_i^*}{\partial x_i} = 0}$$

– Les termes *II* et *IX* conduisent à la condition terminale du problème adjoint :

$$\boxed{\bar{u}_i^*(t_0 + T_o) = \ell_{ter} \bar{u}_i(t_0 + T_o) \quad i = 1, 2, 3} \tag{CT}$$

– Les termes *IV* et *VIII* conduisent aux conditions aux limites du problème adjoint soit :

$$\boxed{\bar{u}_1^*|_{\Gamma_{2\pm}} = \ell_{drag} \quad \bar{u}_2^*|_{\Gamma_{2\pm}} = \bar{u}_3^*|_{\Gamma_{2\pm}} = 0} \tag{CL}$$

– Les termes *I* et *VII* donnent le gradient de la fonctionnelle coût $\mathcal{J}$ par rapport aux variables de contrôle (condition d'optimalité), soit :

$$\frac{D \mathcal{J}}{D \bar{\Phi}} = \ell \bar{\Phi} + 2 \bar{u}_2 \bar{u}_2^* + 2 \nu \bar{S}_{22}^* + E_{22} + \kappa \bar{P}^*$$

c'est à dire compte tenu des conditions aux limites sur le problème adjoint :

$$\frac{D \mathcal{J}}{D \bar{\Phi}} = \ell \bar{\Phi} + E_{22} + \kappa \bar{P}^*$$

J.3.2 Cas de la fonctionnelle coût (5.5)

Pour les mêmes raisons qu'à la section I.3.2, on a également :

$$\delta u'_i = \delta u_i \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \quad \text{et} \quad \forall t$$

Par conséquent, on montre que les équations du système optimal restent les mêmes qu'à la section J.3.1 à l'exception :

1. de l'équation adjointe qui devient

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}_i^*}{\partial t} = & -2 \bar{u}_j \bar{S}_{ij}^* - \kappa \frac{\partial \bar{P}^*}{\partial x_i} - 2 \nu \frac{\partial \bar{S}_{ij}^*}{\partial x_j} \\ & - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{4 C \bar{\Delta}^2}{|\bar{S}|} \bar{S}_{kl} \bar{S}_{kl}^* \bar{S}_{ij} \right) - \frac{\partial E_{ij}}{\partial x_j} - B_i - \ell_{reg} \bar{u}'_i \end{aligned}$$

2. de la condition terminale de l'équation adjointe qui devient

$$\bar{u}_i^*(t_0 + T_o) = \ell_{ter} \bar{u}'_i(t_0 + T_o) \quad i = 1, 2, 3 \quad (\text{CT})$$

Annexe K

Méthodes de résolution numérique de l'équation adjointe du système optimal basé sur les équations LES

K.1 Discrétisation temporelle

La discrétisation temporelle est réalisée par un schéma hybride Runge-Kutta/Crank-Nicolson (voir annexe A). Tous¹ les termes convectifs et diffusifs dans lesquels interviennent des dérivées dans la direction normale sont traités de manière implicite par le schéma Crank-Nicolson. Tous les autres termes sont pris en compte de manière explicite par une méthode de Runge-Kutta d'ordre 3 à stockage limité. Cependant, pour simplifier la résolution de l'équation adjointe, toutes les dérivées intervenant dans E_{ij} et B_i vont être traitées de manière explicite, y compris les dérivées dans la direction normale e_y . Par ailleurs, puisque les équations adjointes sont linéaires, il ne sera pas nécessaire d'avoir recours à un processus de linéarisation pour simplifier les expressions à résoudre. Enfin, la même méthode à pas fractionnaire que celle mise en œuvre pour assurer l'incompressibilité du champ de vitesse direct (section 2.4.2.4), a été utilisée pour la condition d'incompressibilité du champ de vitesse adjoint (section K.2).

Quelle que soit la fonctionnelle coût considérée (traînée, énergie cinétique régularisée ou terminale), le système adjoint associé au système optimal pour les équations de Navier-Stokes simulées par LES peut être écrit sous la forme² :

$$\frac{\partial u_i^*}{\partial x_i} = 0$$

1. Voir ci-dessous.

2. Pour simplifier les notations, nous ferons le même choix qu'à la section 2.4 et supprimerons dans cette annexe le symbole $\bar{\cdot}$ pour représenter une grandeur filtrée.

pour l'équation de continuité, et

$$-\frac{\partial u_i^*}{\partial t} - 2u_j S_{ij}^* - \kappa \frac{\partial P^*}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_j} (2\nu S_{ij}^*) - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{4C\bar{\Delta}^2}{|S|} S_{kl} S_{kl}^* S_{ij} \right) - \frac{\partial E_{ij}}{\partial x_j} - B_i = f_i$$

pour l'équation de quantité de mouvement ($\nu = \frac{1}{Re_\tau} + \nu_T$). Le terme f_i est donné par

$$f_i = \ell_{reg} u_i.$$

Les équations adjointes sont munies de conditions aux limites et de conditions terminales qui sont indiquées sur la figure 5.2.

Pour l'équation adjointe, le schéma d'intégration temporelle à trois sous-pas de temps ($k = 1, 2, 3$) s'écrit :

$$-\frac{u_i^{*k} - u_i^{*(k-1)}}{\Delta t} = \beta_k \left(B_i^k + B_i^{k-1} \right) + \gamma_k A_i^{k-1} + \eta_k A_i^{k-2} + 2\beta_k \kappa P_{,i}^{*k} + 2\beta_k f_i^k$$

$$\frac{\partial u_i^{*k}}{\partial x_i} = 0$$

où A_i et B_i sont les termes qui sont respectivement discrétisés explicitement et implicitement. L'équation adjointe devant être intégré en temps rétrograde, il faudra prendre numériquement $\Delta t < 0$. Les valeurs numériques des coefficients β_k , γ_k et η_k sont données à la section 2.4.2.2.

Termes traités explicitement A_i Afin de simplifier la résolution numérique, tous les termes formant $S_{kl} S_{kl}^*$ sont traités de manière explicite même lorsqu'ils contiennent des dérivées spatiales dans la direction normale.

$$A_1 = 2u_1 S_{11}^* + u_2 \frac{\partial u_2^*}{\partial x} + 2u_3 S_{13}^* + \frac{\partial}{\partial x} \left(2\nu S_{11}^* + \frac{4\nu_T}{|S|^2} S_{11} S^* \right) +$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\nu \frac{\partial u_2^*}{\partial x} + \frac{4\nu_T}{|S|^2} S_{12} S^* \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(2\nu S_{13}^* + \frac{4\nu_T}{|S|^2} S_{13} S^* \right) +$$

$$\frac{\partial E_{1j}}{\partial x_j} + B_1$$

$$A_2 = u_1 \frac{\partial u_2^*}{\partial x} + u_3 \frac{\partial u_2^*}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} \left(2\nu S_{21}^* + \frac{4\nu_T}{|S|^2} S_{21} S^* \right) +$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{4\nu_T}{|S|^2} S_{22} S^* \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(2\nu S_{23}^* + \frac{4\nu_T}{|S|^2} S_{23} S^* \right) +$$

$$\frac{\partial E_{2j}}{\partial x_j} + B_2$$

$$\begin{aligned}
A_3 = & 2 u_1 S_{31}^* + u_2 \frac{\partial u_2^*}{\partial z} + 2 u_3 S_{33}^* + \frac{\partial}{\partial x} \left(2 \nu S_{13}^* + \frac{4 \nu_T}{|S|^2} S_{13} S^* \right) + \\
& \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu \frac{\partial u_2^*}{\partial z} + \frac{4 \nu_T}{|S|^2} S_{23} S^* \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(2 \nu S_{33}^* + \frac{4 \nu_T}{|S|^2} S_{33} S^* \right) + \\
& \frac{\partial E_{3j}}{\partial x_j} + B_3
\end{aligned}$$

où

$$S^* = S_{kl} S_{kl}^*.$$

Termes traités implicitement B_i

$$\begin{aligned}
B_1 &= u_2 \frac{\partial u_1^*}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu \frac{\partial u_1^*}{\partial y} \right) \\
B_2 &= u_1 \frac{\partial u_1^*}{\partial y} + 2 u_2 \frac{\partial u_2^*}{\partial y} + u_3 \frac{\partial u_3^*}{\partial y} + 2 \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu \frac{\partial u_2^*}{\partial y} \right) \\
B_3 &= u_2 \frac{\partial u_3^*}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu \frac{\partial u_3^*}{\partial y} \right)
\end{aligned}$$

Dans Chang (2000), le terme $u_2 \frac{\partial u_2^*}{\partial y}$ apparaissant dans B_2 est traité de manière explicite. On le retrouve donc dans A_2 sous la forme³ $-u_2 (S_{11}^* + S_{33}^*)$.

K.2 Méthode à pas fractionnaire

La condition d'incompressibilité pour l'équation adjointe est imposée comme pour l'équation d'état (section 2.4.2.4) par une méthode à pas fractionnaire.

Nous commençons par écrire les équations d'état du système LES sous forme vectorielle, soit :

$$\mathbf{u}^{*k} + \beta_k \Delta t \mathbf{M}(\mathbf{u}^{*k}) + 2 \beta_k \kappa \Delta t \mathbf{G} \left(P^{*k} - P^{*(k-1)} \right) = \mathbf{r}^{*(k-1)} - 2 \beta_k \Delta t \mathbf{f}^k \quad (\text{K.1})$$

$$D(\mathbf{u}^{*k}) = 0 \quad (\text{K.2})$$

où $\mathbf{G}$ représente un opérateur de gradient discret et D un opérateur de divergence discret. Par identification avec les expressions précédentes du système discrétisé en temps, on

3. D'après l'équation de la continuité pour le champ adjoint, on a $\frac{\partial u_2^*}{\partial y} = - \left(\frac{\partial u_1^*}{\partial x} + \frac{\partial u_3^*}{\partial z} \right)$ d'où le résultat annoncé.

trouve :

pour l'opérateur vectoriel $\mathbf{M}$

$$M_1(\mathbf{u}^{*k}) = B_1^k = \left(u_2 \frac{\partial \cdot}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu \frac{\partial \cdot}{\partial y} \right) \right) u_1^{*k}$$

$$M_2(\mathbf{u}^{*k}) = B_2^k = u_1 \frac{\partial u_1^{*k}}{\partial y} + 2 \left(u_2 \frac{\partial \cdot}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu \frac{\partial \cdot}{\partial y} \right) \right) u_2^{*k} + u_3 \frac{\partial u_3^{*k}}{\partial y}$$

$$M_3(\mathbf{u}^{*k}) = B_3^k = \left(u_2 \frac{\partial \cdot}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu \frac{\partial \cdot}{\partial y} \right) \right) u_3^{*k}$$

et pour le second membre $\mathbf{r}$

$$r_1^{*(k-1)} = u_1^{*(k-1)} - \beta_k \Delta t M_1(\mathbf{u}^{*(k-1)}) - \gamma_k \Delta t A_1^{k-1} - \eta_k \Delta t A_1^{k-2} - 2 \beta_k \kappa \Delta t P_{,x}^{*(k-1)}$$

$$r_2^{*(k-1)} = u_2^{*(k-1)} - \beta_k \Delta t M_2(\mathbf{u}^{*(k-1)}) - \gamma_k \Delta t A_2^{k-1} - \eta_k \Delta t A_2^{k-2} - 2 \beta_k \kappa \Delta t P_{,y}^{*(k-1)}$$

$$r_3^{*(k-1)} = u_3^{*(k-1)} - \beta_k \Delta t M_3(\mathbf{u}^{*(k-1)}) - \gamma_k \Delta t A_3^{k-1} - \eta_k \Delta t A_3^{k-2} - 2 \beta_k \kappa \Delta t P_{,z}^{*(k-1)}$$

En utilisant une factorisation de type LU comme on l'a fait à l'annexe B pour le champ de vitesse direct, on peut montrer que le système d'équations (K.1) et (K.2) s'écrit encore de la manière suivante :

$$\tilde{\mathbf{u}}^{*k} + \beta_k \Delta t \mathbf{M}(\tilde{\mathbf{u}}^{*k}) = \mathbf{r}^{*(k-1)} - 2\beta_k \Delta t \mathbf{f}^k \quad (\text{Prédiction}) \quad (\text{K.3})$$

$$D\mathbf{G}(P^{*k} - P^{*(k-1)}) = \frac{1}{2\beta_k \kappa \Delta t} D(\tilde{\mathbf{u}}^{*k}) \quad (\text{Equation de Poisson}) \quad (\text{K.4})$$

$$\mathbf{u}^{*k} = \tilde{\mathbf{u}}^{*k} - 2\beta_k \kappa \Delta t \mathbf{G}(P^{*k} - P^{*(k-1)}) \quad (\text{Correction}) \quad (\text{K.5})$$

où $\tilde{\mathbf{u}}^*$ est une vitesse intermédiaire qui ne vérifie pas nécessairement la condition d'incompressibilité.

Algorithme de résolution Par définition de l'opérateur vectoriel $\mathbf{M}$, la deuxième composante de l'équation de prédiction (K.3) est couplée aux deux autres par l'intermédiaire des vitesses intermédiaires $\tilde{u}_1^{*k}$ et $\tilde{u}_3^{*k}$. Pour déterminer la solution de l'équation de prédiction, nous devons donc d'abord résoudre les composantes longitudinale et transversale de l'équation de prédiction, puis utiliser les champs obtenus pour résoudre la composante normale. On est donc amené à résoudre successivement les équations suivantes :

$$\begin{aligned}\tilde{u}_1^{*k} + \beta_k \Delta t \left[u_2 \frac{\partial \tilde{u}_1^{*k}}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu \frac{\partial \tilde{u}_1^{*k}}{\partial y} \right) \right] &= r_1^{*(k-1)} - 2\beta_k \Delta t f_1^k \\ \tilde{u}_3^{*k} + \beta_k \Delta t \left[u_2 \frac{\partial \tilde{u}_3^{*k}}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu \frac{\partial \tilde{u}_3^{*k}}{\partial y} \right) \right] &= r_3^{*(k-1)} - 2\beta_k \Delta t f_3^k \\ \tilde{u}_2^{*k} + 2\beta_k \Delta t \left(u_2 \frac{\partial \tilde{u}_2^{*k}}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \left[\nu \frac{\partial \tilde{u}_2^{*k}}{\partial y} \right] \right) &= r_2^{*(k-1)} - 2\beta_k \Delta t f_2^k - \beta_k \Delta t \left(u_1 \frac{\partial \tilde{u}_1^{*k}}{\partial y} + u_3 \frac{\partial \tilde{u}_3^{*k}}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial^2 (P^{*k} - P^{*(k-1)})}{\partial x_j \partial x_j} &= \frac{1}{2\beta_k \kappa \Delta t} \frac{\partial \tilde{u}_i^{*k}}{\partial x_i} \\ u_i^{*k} &= \tilde{u}_i^{*k} - 2\beta_k \kappa \Delta t \frac{\partial (P^{*k} - P^{*(k-1)})}{\partial x_i}\end{aligned}$$

Bibliographie

- O. M. AAMO et T. I. FOSSEN : Stabilization of Fluid Flows in Channels and Pipes (Tutorial on Feedback Control of Flows, Part I). *Modelling, Identification and Control*, 23(3):161–226, 2002.
- K. AKSELVOLL : *Large Eddy Simulation of Turbulent Confined Coannular Jets and Turbulent Flow Over a Backward Facing Step*. Thèse de doctorat, Stanford University, 1995.
- B. ARCEN : Etude préliminaire par simulation numérique directe du transfert de chaleur en écoulement de canal. Mémoire de DEA, Ecole Supérieure des Sciences et Techniques de Nancy, 2003.
- B. ARCEN : *Etude par simulation numérique directe du comportement et de la dispersion de particules solides en écoulement non homogène isotherme ou anisotherme*. Thèse de doctorat, Université Henri Poincaré, France, 2006.
- C. BAILLY et G. COMTE-BELLOT : *Turbulence*. Sciences et techniques de l'ingénieur. CNRS Editions, 2003.
- Y. BENARAFA : *Application du couplage RANS/LES aux écoulements turbulents à haut nombre de Reynolds de l'industrie nucléaire*. Thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie, 2005.
- M. BERGMANN : *Optimisation aérodynamique par réduction de modèle POD et contrôle optimal. Application au sillage laminaire d'un cylindre circulaire*. Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Lorraine, Nancy, France, 2004.
- M. BERGMANN et L. CORDIER : Optimal control of the cylinder wake in the laminar regime by Trust-Region methods and POD Reduced Order Models. *J. Comp. Phys.*, 227:7813–7840, 2008.

- M. BERGMANN, L. CORDIER et J.-P. BRANCHER : Optimal rotary control of the cylinder wake using POD Reduced Order Model. *Phys. Fluids*, 17(9):097101 :1–21, 2005.
- T. R. BEWLEY : *Optimal and robust control and estimation of transition, convection and turbulence*. Thèse de doctorat, Stanford University, 1999.
- T. R. BEWLEY : Flow control : new challenges for a new Renaissance. *Progress in Aerospace Sciences*, 37:21–58, 2001.
- T. R. BEWLEY : The emerging roles of model-based control theory in fluid mechanics. In *Advances in Turbulence IX*, 2002. Ninth European Turbulence Conference.
- T. R. BEWLEY et O. M. AAMO : A "winwin" mechanism for low-drag transients in controlled two-dimensional channel flow and its implications for sustained drag reduction. *J. Fluid Mech.*, 499:183–196, 2004.
- T. R. BEWLEY, P. MOIN et R. TEMAM : DNS-based predictive control of turbulence : an optimal benchmark for feedback algorithms. *J. Fluid Mech.*, 447:179–225, 2001.
- T. R. BEWLEY, R. TEMAM et M. ZIANE : A general framework for robust control in fluid mechanics. *Physica D*, 138:360–392, 2000a.
- T. R. BEWLEY, R. TEMAM et M. ZIANE : Existence and uniqueness of optimal control to the Navier-Stokes equations. *C.R. Acad. Sci. Paris*, 330:1–5, 2000b.
- J.-F. BONNANS, J.-C. GILBERT, C. LEMARÉCHAL et C. A. SAGASTIZÁBAL : *Numerical Optimization*. Springer, 2003.
- J.-P. BONNET et J. DELVILLE : Coherent structures in turbulent flows and numerical simulations approaches. In *Lecture series 2002-04 on post-processing of experimental and numerical data*. Von Kármán Institute for Fluid Dynamics, 2002.
- J. BORGGAARD, J. BURKARDT, M. D. GUNZBURGER et J. PETERSON : *Optimal Design and Control*. Birkhäuser, Boston, 1994.
- F. BOUILLON : *Simulations numériques directes du contrôle électromagnétique. Etude de l'impact d'un forçage électromagnétique*. Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier - Grenoble 1, France, 2004.

- D. M. BUSHNELL et J. N. HEFNER : Viscous Drag Reduction in Boundary Layers. *Progress in Astronautics and Aeronautics*, 123, 1990. Am. Inst. of Aeronaut. and Astronaut. Washington DC.
- C. CANUTO, M. HUSSAINI, A. QUARTERONI et T. ZANG : *Spectral Methods. Fundamentals in Single Domains*. Springer Verlag, 2006.
- Y. CHANG : *Approximate models for optimal control of turbulent channel flow*. Thèse de doctorat, université de Rice, 2000.
- Y. CHANG, S. S. COLLIS et S. RAMAKRISHNAN : Viscous effects in control of near-wall turbulence. *Phys. Fluids*, 14(11):4069–4080, 2002.
- P. CHASSAING : *Turbulence en mécanique des fluides*. Polytech. Cépaduès, 2000.
- G. CHEN et S. S. COLLIS : Optimal Control for Burgers Flow Using the Discontinuous Galerkin Method. *In AIAA Student Paper Conference*, 2003.
- H. CHOI, P. MOIN et J. KIM : Direct numerical simulation of turbulent flow over riblets. *J. Fluid Mech.*, 255:503 – 539, 1993.
- H. CHOI, P. MOIN et J. KIM : Active turbulence control for drag reduction in wall-bounded flows. *J. Fluid Mech.*, 262:75–110, 1994.
- M. S. CHONG, A. E. PERRY et B. J. CANTWELL : A general classification of three-dimensional flow fields. *Phys. Fluids A*, 2(5):765–777, 1990.
- A. J. CHORIN : Numerical solution of the Navier-Stokes equations. *Math. Comp.*, 22:745–762, 1968.
- S. S. COLLIS, Y. CHANG, S. KELLOGG et R. D. PRABHU : Large eddy simulation and turbulence control. *In Fluids Conference and Exhibit*, Denver, Colorado, June 19 – 22, 2000. AIAA-Paper 2000-2564.
- L. CORDIER et M. BERGMANN : Proper Orthogonal Decomposition : an overview. *In Lecture series 2002-04 on post-processing of experimental and numerical data*. Von Kármán Institute for Fluid Dynamics, 2002a.
- L. CORDIER et M. BERGMANN : Two typical applications of POD : coherent structures eduction and reduced order modelling. *In Lecture series 2002-04 on post-processing of experimental and numerical data*. Von Kármán Institute for Fluid Dynamics, 2002b.

- J. W. DEARDORFF : A numerical study of three-dimensional turbulent channel flow at large Reynolds numbers. *J. Fluid Mech.*, 41:453–480, 1970.
- J. DELVILLE et J.-P. BONNET : Two-point correlation in fluid dynamics : POD, LSE and related methods. In *Lecture series 2003-03 on post-processing of experimental and numerical data*. Von Kármán Institute for Fluid Dynamics, 2003.
- V. DESCHAMPS : *Simulation numérique de la turbulence inhomogène incompressible dans un écoulement de canal plan*. Thèse de doctorat, INP Toulouse, 1988.
- N. DI CÉSARÉ : *Outils pour l'optimisation de forme et le contrôle optimal, application à la mécanique des fluides*. Thèse de doctorat, université Paris 6, 2000.
- O. DOCHE : *Contrôle actif dual des écoulements turbulents pariétaux. Expériences et Simulations Numériques Directes*. Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier - Grenoble 1, France, 2006.
- Y. DUBIEF et F. DELCAYRE : On coherent-vortex identification in turbulence. *Journal of Turbulence*, 1:1–22, 2000.
- A. EL SHRIF : Contrôle optimal des équations de Burgers monodimensionnelles. Méthodologies pour l'optimisation aérodynamique. Mémoire de DEA, Institut National Polytechnique de Lorraine, 2003.
- H. O. FATTORINI et S. S. SRITHARAN : Existence of optimal control for viscous flow problems. *Proc. R. Soc. Lond. A*, 439:81–102, 1992.
- M. FISCHER, J. JOVANOVIĆ et F. DURST : Reynolds number effects in the near-wall region of turbulent channel flows. *Phys. Fluids*, 13(6):1755–1767, 2001.
- M. GAD-EL-HAK : *Flow Control : Passive, Active and Reactive Flow Management*. Cambridge University Press, London, United Kingdom, 2000.
- B. GALLETTI, A. BOTTARO, C.-H. BRUNEAU et A. IOLLO : Accurate model reduction of transient and forced wakes. *Eur. J. Mech. B/Fluids*, 26(3):354–366, 2007.
- M. GERMANO, U. PIOMELLI, P. MOIN et W. H. CABOT : A dynamic subgrid-scale eddy viscosity model. *Phys. Fluids A*, 3:1760–1765, 1991.

- S. GHOSAL : Mathematical and physical constraints on Large Eddy Simulation of turbulence. *AIAA journal*, 37:425–433, 1999.
- N. I. M. GOULD et S. LEYFFER : An introduction to algorithms for nonlinear optimization. *In 10th EPSRC/LMS Numerical Analysis Summer School at the University of Durham*, 2002.
- M. A. GREEN, C. W. ROWLEY et G. HALLER : Detection of Lagrangian Coherent Structures in 3D Turbulence. *J. Fluid Mech.*, 572:111–120, 2007.
- M. D. GUNZBURGER : *Flow control*. Springer, New York, 1995.
- M. D. GUNZBURGER : Introduction into mathematical aspects of flow control and optimization. *In Lecture series 1997-05 on inverse design and optimization methods*. Von Kármán Institute for Fluid Dynamics, 1997a.
- M. D. GUNZBURGER : Lagrange multiplier techniques. *In Lecture series 1997-05 on inverse design and optimization methods*. Von Kármán Institute for Fluid Dynamics, 1997b.
- M. D. GUNZBURGER : Approximate solutions via sensitivities. *In Lecture series 1997-05 on inverse design and optimization methods*. Von Kármán Institute for Fluid Dynamics, 1997c.
- M. D. GUNZBURGER : Adjoint Equation-Based Methods for Control Problems in Incompressible, Viscous Flows. *Flow, Turbulence and Combustion*, 65:249–272, 2000.
- E. P. HAMMOND, T. R. BEWLEY et P. MOIN : Observed mechanisms for turbulence attenuation and enhancement in opposition-controlled wall-bounded flows. *Phys. Fluids*, 10(9):2421–2423, 1998.
- M. HINZE et T. SLAWING : Adjoint gradients compared to gradients from algorithmic differentiation in instantaneous control of the Navier-Stokes equations. *Optimization Methods and Software*, 18:299–315, 2003.
- J. C. R. HUNT, A. A. WRAY et P. MOIN : Eddies, streams, and convergence zones in turbulent flows. Summer program, Center For Turbulence Research, 1988.
- J. JEONG et F. HUSSAIN : On the identification of a vortex. *J. Fluid Mech.*, 285:69–94, 1995.

- J. JIMÉNEZ : The largest scales of turbulent wall flows. Annual research briefs, Center for Turbulence Research, 1998.
- J. JIMÉNEZ et P. MOIN : The minimal flow unit in near-wall turbulence. *J. Fluid Mech.*, 225:213–240, 1991.
- R. D. JOSLIN : Overview of Laminar Flow Control. *Technical publication*, NASA/TP-1998-208705, 1998.
- J. KIM et T. R. BEWLEY : A Linear Systems Approach to Flow Control. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 39:383–417, 2007.
- J. KIM, P. MOIN et R. D. MOSER : Turbulence statistics in fully developed channel flow at low reynolds number. *J. Fluid Mech.*, 177:133–166, 1987.
- A. G. KRAVCHENKO et P. MOIN : On the Effect of Numerical Errors in Large Eddy Simulations of Turbulent Flows. *J. Comp. Phys.*, 131(2):310–322, 1997.
- E. LAMBALLAIS : *Simulations numériques de la turbulence dans un canal plan tournant*. Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Grenoble, 1996.
- E. LAMBALLAIS et J.-P. BONNET : DNS/LES data processing and its relation with experiments. In *Lecture series 2003-03 on post-processing of experimental and numerical data*. Von Kármán Institute for Fluid Dynamics, 2003.
- H. LE et P. MOIN : An improvement of fractional step methods for the incompressible Navier-Stokes equations. *J. Comp. Phys.*, 92:369–379, 1991.
- H. LE et P. MOIN : Direct Numerical Simulation of Turbulent Flow Over a Backward-Facing Step. Rapport technique, TF-58 12/94, Flow Physics and Computation Division, Stanford University, 1994.
- C. LEE, J. KIM, D. BABCOCK et R. GOODMAN : Application of neural networks to turbulence control for drag reduction. *Phys. Fluids*, 9(6):1740–1747, 1997.
- S.-J. LEE et Y.-G. JANG : Control of flow around a NACA 0012 airfoil with a micro-riblet film. *Journal of Fluids and Structures*, 20(5):659–672, 2005.
- E. LENORMAND : *Contribution à la simulation des grandes échelles d'écoulements turbulents compressibles en milieux confinés*. Thèse de doctorat, Université Paris 6, 1999.

- D. LILLY : A proposed modification of the Germano subgrid-scale closure method. *Phys. Fluids A*, 4:633–635, 1992.
- J. LIM et J. KIM : A singular value analysis of boundary layer control. *Phys. Fluids*, 16:1980, 2004.
- T. S. LUND : On the use of discrete filters for large eddy simulation. Annual research briefs, Center for Turbulence Research, 1997.
- N. N. MANSOUR, J. KIM et P. MOIN : Reynolds-stress and dissipation-rate budgets in a turbulent channel flow. *J. Fluid Mech.*, 194:15–44, 1988.
- B. MOHAMMADI et O. PIRONNEAU : *Applied Shape Optimization for Fluids*. Oxford University Press, 2001.
- P. MOIN : *Fundamentals of Engineering Numerical Analysis*. Cambridge University Press, 2001.
- P. MOIN et J. KIM : Numerical investigation of turbulent channel flow. *J. Fluid Mech.*, 118:341 – 377, 1982.
- E. MONTREUIL : *Simulations numériques pour l'aérothermique avec des modèles sous-maille*. Thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie, 2000.
- Y. MORINISHI, T. S. LUND, O. V. VASILYEV et P. MOIN : Fully conservative higher order finite difference schemes for incompressible flow. *J. Comp. Phys.*, 143(1):90–124, 1998.
- R. D. MOSER, J. KIM et N. N. MANSOUR : Direct numerical simulation of turbulent channel flow up to $Re_\tau = 590$. *Phys. Fluids*, 11(4):943–945, 1999.
- O. MÉTAIS : Turbulence : modélisation et simulation numérique. Cours de DEA Mécanique des Fluides et des Transferts, INPG., 2003.
- F. M. NAJJAR et D. K. TAFTI : Study of discrete test filters and finite difference approximations for the dynamic subgrid-scale stress model. *Phys. Fluids*, 8:1076–1088, 1996.
- J. NOCEDAL et S. J. WRIGHT : *Numerical Optimization*. Springer series in operations research, 1999.

- J. B. PEROT : An analysis of the fractional step method. *J. Comp. Phys.*, 108:51–58, 1993.
- J. B. PEROT : Comments on the Fractional Step Method. *J. Comp. Phys.*, 121:190–191, 1995.
- L. PERSONNAZ et I. RIVALS : *Réseaux de neurones formels pour la modélisation, la commande et la classification*. Sciences et techniques de l'ingénieur. CNRS Editions, 2003.
- S. B. POPE : *Turbulent Flows*. Cambridge University Press, 2000.
- R. D. PRABHU, S. S. COLLIS et Y. CHANG : The influence of control on Proper Orthogonal Decomposition of wall-bounded turbulent flows. *Phys. Fluids*, 13(2):520–537, 2001.
- L. PRANDTL : *The mechanics of viscous fluids*. Durand, 1935.
- B. PROTAS et A. STYCZEK : Optimal rotary control of the cylinder wake in the laminar regime. *Phys. Fluids*, 14(7):2073–2087, 2002.
- B. PROTAS et J.-E. WESFREID : Drag force in the open-loop control of the cylinder wake in the laminar regime. *Phys. Fluids*, 14(2):810–826, 2002.
- P. RAMBAUD : *Contribution à l'étude du comportement de particules solides en écoulement turbulent confiné par Simulation Numérique Directe*. Thèse de doctorat, Université Henri Poincaré, France, 2001.
- S. K. ROBINSON : Coherent motions in the turbulent boundary layer. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 23:601–639, 1991.
- C. W. ROWLEY : Model reduction for fluids using balanced proper orthogonal decomposition. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 15(3):997–1013, 2005.
- C. W. ROWLEY et M. ILAK : Modeling of transitional channel flow using balanced proper orthogonal decomposition. *Phys. Fluids*, 20:034103, 2008.
- P. SAGAUT : *Simulations numériques d'écoulements décollés avec des modèles de sous-maille*. Thèse de doctorat, Université Paris VI, 1995.
- P. SAGAUT : *Large-eddy simulation for incompressible flows - An introduction*. Springer-Verlag, 2005.

- H. SCHLICHTING : Die Grenzschicht mit Absaugung und Ausblasen. *Luftfahrtforschung*, 19:179–181, 1942.
- P. J. SCHMID et D. S. HENNINGSON : *Stability and Transition in Shear Flows*. Applied Mathematical Sciences. Springer Verlag, 2001.
- J. R. SHEWCHUK : An introduction to the conjugate gradient method without the agonizing pain. Rapport technique, School of Computer Science, Carnegie Mellon university, 1994.
- J. SMAGORINSKY : General circulation experiments with the primitive equations : I. the basic experiment. *Mon. Weather Rev.*, 91(3):99–164, 1963.
- P. R. SPALART, R. D. MOSER et M. M. ROGERS : Spectral methods for the navier-stokes equations with one infinite and two periodic directions. *J. of Comp. Phys.*, 96:297–324, 1991.
- D. B. SPALDING : A single formula for the law of the wall. *J. Appl. Mech.*, 28:455–457, 1961.
- S. S. SRITHARAN : *Optimal Control of Viscous Flow*. SIAM, 1998.
- R. TEMAM : Sur l'approximation de la solution des équations de navier-stokes par la méthode des pas fractionnaires (ii). *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 33(5):377–385, 1969.
- E. TRÉLAT : *Contrôle optimal : théorie et applications*. Mathématiques Concrètes. Vuibert, 2005.
- L. VODINH LORANG, B. PODVIN et P. LE QUÉRÉ : Application of compact neural network for drag reduction in a turbulent channel flow at low Reynolds numbers. *Phys. Fluids*, 20:045104, 2008.
- R. VON KAENEL : *Large-Eddy Simulation of compressible flows using the finite-volume method*. Thèse de doctorat, Swiss Federal Institute of Technology Zürich, 2003.
- M. WEI et J. B. FREUND : A noise-controlled free shear flow. *J. Fluid Mech.*, 546:123 – 152, 2006.
- P. WESSELING : *Principles of Computational Fluid Dynamics*. Computational Mathematics Vol. 29. Springer-Verlag, 2001.

J. H. WILLIAMSON : Low-Storage Runge-Kutta Schemes. *J. Comp. Phys.*, 35:48–56, 1980.

K. ZHOU, J. C. DOYLE et K. GLOVER : *Robust and optimal control*. Prentice Hall, 1996.

INSTITUT NATIONAL
POLYTECHNIQUE
DE LORRAINE

AUTORISATION DE SOUTENANCE DE THESE
DU DOCTORAT DE L'INSTITUT NATIONAL
POLYTECHNIQUE DE LORRAINE

o0o

VU LES RAPPORTS ETABLIS PAR :

Monsieur Christophe AIRIAU, Maître de Conférences, Institut de Mécanique des Fluides de
Toulouse, Toulouse

Monsieur Pierre COMTE, Professeur, LEA, Université de Poitiers, Poitiers

Le Président de l'Institut National Polytechnique de Lorraine, autorise :

Monsieur EL SHRIF Ali

à soutenir devant un jury de l'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE LORRAINE,
une thèse intitulée :

"Contrôle optimal par simulation aux grandes échelles d'un écoulement turbulent"

en vue de l'obtention du titre de :

DOCTEUR DE L'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE LORRAINE

Spécialité : « Mécanique et énergétique »

NANCY BRABOIS
2, AVENUE DE LA
FORET-DE-HAYE
BOITE POSTALE 3
F - 54501
VANDŒUVRE CEDEX

Fait à Vandoeuvre, le 30 juin 2008

Le Président de l'I.N.P.L.,

F. LAURENT



TEL. 33/03.83.59.59.59
FAX. 33/03.83.59.59.55

