



AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE LORRAINE

Ecole Nationale Supérieure de Géologie de Nancy

Laboratoire Environnement, Géomécanique et Ouvrages

Ecole Doctorale RP2E

THESE

Présentée à l'I.N.P.L.

en vue de l'obtention du titre de

DOCTEUR DE L'INPL

en Génie Civil - Hydrosystèmes - Géotechnique

par

DO Duc Phi

**Application des approches d'homogénéisation à l'étude
des propriétés thermo-hydro-mécaniques des roches.**

Application aux argilites

Soutenue publiquement le 28 novembre 2008

devant la Commission d'Examen :

F. HOMAND	Professeur, Institut National Polytechnique de Lorraine	Président du jury
H. DUMONTET	Professeur, Université Pierre et Marie Curie (Paris)	Rapporteur
J. F. SHAO	Professeur, Université des Sciences et Technologie de Lille	Rapporteur
X. CHATEAU	Chargé de recherche, HDR, LMSGC, Marne La Vallée	Examineur
A. GIRAUD	Professeur, Université de Metz	Directeur de thèse
D. HOXHA	Professeur, Université d'Orléans	Co-Directeur de thèse

Mis en page avec la classe thloria.

A toute ma famille,

A toi, Anh Thu,

A la mémoire de ma mère !

Remerciements

Je tiens à exprimer ma profonde reconnaissance à toutes celles et tous ceux qui m'ont aidé pendant les trois années de thèse.

J'adresse tout d'abord mes gratitudes très sincères à mon directeur de thèse Monsieur Albert Giraud pour avoir accepté d'assurer la lourde tâche de direction de cette thèse. Ses expériences scientifiques et ses conseils ont été un soutien indispensable à la réalisation de ce travail. Je tiens également à remercier vivement mon co-directeur, Monsieur Dashnor Hoxha. La clarté et la justesse de ses raisonnements scientifiques ont été pour moi essentielles dans l'accomplissement de ce travail. Je n'oublierai sans doute jamais ses encouragements et sa disponibilité qui me permettent de surmonter de nombreuses difficultés durant le déroulement de thèse.

Je voudrais adresser mes vifs remerciements à Madame Françoise Homand, Professeur de l'INPL, qui m'a accueilli au sein de son équipe de recherche au LAEGO et a accepté d'être présidente de mon jury.

Je tiens ensuite à exprimer ma sincère reconnaissance aux rapporteurs, Madame Hélène Dumontet, Professeur à l'Université Pierre et Marie Curie (Paris VI), ainsi que Monsieur Jian-Fu Shao, Professeur à l'Université des Sciences et Technologie de Lille, pour leurs commentaires sur le mémoire et leurs discussions lors de la soutenance qui ont été constructifs. Je voudrais remercier également Monsieur Xavier Chateau (Chargé de recherche, HDR, Université Marne La Vallée) pour avoir accepté d'examiner ce travail.

Un amical remerciement à mes collègues et amis doctorants pour leur disponibilité, leur bonne humeur et surtout, l'amitié qu'ils m'ont prouvée dans plusieurs situations : Vu, Naïma, Javad, Cosmin, Truong, Tho, Bien, Jérôme, Vincent, Jon, Laurent,...

A toute ma famille, ma femme Anh Thu et mes amis qui m'ont offert leur soutien permanent, je souhaite qu'ils trouvent ici la marque de ma grande reconnaissance.

Résumé

Application des approches d'homogénéisation à l'étude des propriétés thermo-hydro-mécaniques des roches. Application aux argilites.

Le présent travail est consacré à l'étude du comportement thermo-hydro-mécanique linéaire et non linéaire des roches poreuses de type argilites par approche de changement d'échelle. A partir des observations microstructurales de ces matériaux, un modèle conceptuel a été proposé. Dans ce modèle, le volume élémentaire représentatif du milieu hétérogène est composé d'une phase matricielle argileuse contenant des inclusions sphériques de minéraux de quartz et de calcite et des inclusions ellipsoïdales aplaties représentant l'espace poreux. Dans un premier temps, le procédé de la modélisation a été exploité par la détermination des propriétés effectives isotropes et isotrope transverses des argilites : la conductivité thermique et les propriétés thermo-hydro-mécanique croisées. En outre, de nombreuses études numériques ont mis en évidence l'influence de la morphologie de l'espace poreux, de la minéralogie et des schémas d'estimation sur les résultats prédictifs. Dans un deuxième temps, nous avons modélisé le comportement mécanique non linéaire (élasto-plastique, élasto-viscoplastique) des roches argileuses. La comparaison entre les simulations numériques et les résultats expérimentaux disponibles (essai de compression triaxiale, essai de fluage) a confirmé la validation du modèle développé.

Mots-clés : Milieux hétérogènes, Argilites, Comportement thermo-hydro-mécanique linéaire, Comportement élasto-plastique, Comportement élasto-viscoplastique, Homogénéisation linéaire, Homogénéisation non linéaire.

Abstract

Application of homogenization approaches to the study of the thermo-hydro-mechanical properties of rocks. Application to argillites.

The present work deals with the linear and non-linear thermo-hydro-mechanical behaviour of porous rocks such as the argillite by the multiscale modelling approach. Based on microstructure observations, a conceptual model was proposed. In this model, the representative elementary volume of a heterogeneous medium is composed of an argillaceous matrix containing spherical inclusions of minerals quartz and calcite and ellipsoidal inclusions representing the pore space. In a first step, the process of modelling has been exploited by determining the isotropic and transversely isotropic effective properties of the argillite : thermal conductivity and thermo-hydro-mechanical properties. Furthermore, many numerical studies have highlighted the influence of the morphology of the pore space, of the mineralogy and of the estimate schemes to the predictive results. In a second step, we modelled the non linear mechanical behaviour (elasto-plastic, elasto-viscoplastic) of argillaceous rocks. The comparison between numerical simulations and available experimental results (triaxial compression test, creep test) confirmed the validation of the model developed.

Key-words : Argillites, Heterogeneous medium, Linear thermo-hydro-mechanical behaviour, Elasto-plastic behaviour, Elasto-viscoplastic behaviour, Linear and non linear homogenization.

Table des matières

Remerciements

Résumé

Abstract

Notations 15

Introduction 17

Chapitre I Homogénéisation de la conductivité thermique effective des argilites 23

I.1	Introduction	23
I.2	Méthode de changement d'échelle de l'espace	24
I.2.1	Introduction à la micromécanique des matériaux	24
I.2.2	Méthodologie de l'homogénéisation	24
I.3	Notions d'homogénéisation en thermique linéaire stationnaire	24
I.3.1	Condition de Hill-Mandel	26
I.3.2	Homogénéisation	26
I.4	Approche par tenseur d'Eshelby en thermique linéaire stationnaire	27
I.4.1	Fonction de Green	28
I.4.2	Le problème de l'inhomogénéité	30
I.5	Schémas d'estimation de la conductivité thermique effective	30
I.5.1	Schéma dilué	30
I.5.2	Schéma de Mori-Tanaka	31
I.5.3	Schéma autocohérent	32
I.5.4	Schéma différentiel	33
I.5.5	Méthode des champs effectifs	35
I.5.6	Bornes de Hashin-Shtrikman	35
I.6	Description microstructurale des matériaux étudiés et modèle proposée	36
I.6.1	Microstructure des argilites	36
I.6.2	Modèle proposé pour les argilites et source d'anisotropie	37
I.7	Méthode d'homogénéisation en deux étapes	39

I.8	Conductivité thermique effective d'un milieu poreux isotrope	41
I.8.1	L'influence du rapport d'aspect des pores, de la porosité et du degré de saturation	42
I.8.2	L'influence du schéma d'estimation	42
I.8.3	L'influence de la minéralogie	43
I.9	Conclusion	44
Chapitre II L'anisotropie de la conductivité thermique effective des argilites		49
II.1	Introduction	49
II.2	Les résultats expérimentaux sur les argilites	50
II.2.1	L'argilite de Meuse/Haute-Marne	50
II.2.2	L'argilite de Mont Terri	51
II.3	Tenseur de Hill dans le milieu isotrope transverse	51
II.3.1	Matrice de rotation	52
II.3.2	La solution analytique du tenseur de Hill pour l'inclusion alignée	54
II.3.3	La solution du tenseur de Hill pour l'inclusion orientée arbitraire	58
II.4	Calcul du tenseur de concentration	61
II.5	L'effet de la morphologie des pores [48]	62
II.6	L'effet de l'anisotropie de la matrice argileuse [42]	64
II.7	Validations expérimentales	65
II.8	Conclusion	69
Chapitre III Homogénéisation du comportement thermo-hydro-mécanique linéaire des argilites		75
III.1	Introduction	75
III.2	Homogénéisation du comportement élastique linéaire	76
III.2.1	L'approche micromécanique par la solution d'Eshelby	76
III.2.2	La répartition isotrope des inclusions sphéroïdales dans un milieu isotrope .	78
III.3	Homogénéisation du comportement thermo-élastique linéaire	79
III.3.1	Théorème de Levin	79
III.3.2	Homogénéisation du comportement thermo-élastique linéaire d'un milieu hétérogène biphasique	80
III.3.3	Homogénéisation du comportement thermo-élastique linéaire d'un milieu hétérogène multiphasique	82
III.4	Homogénéisation du comportement thermo-poro-élastique linéaire d'un milieu poreux saturé	83
III.4.1	Homogénéisation du comportement poro-élastique linéaire	83
III.4.2	Homogénéisation du comportement thermo-poro-élastique linéaire	85
III.4.3	Les propriétés thermo-poro-élastiques effectives : le cas drainé	87
III.4.4	Les propriétés thermo-poro-élastiques effectives : le cas non drainé	88

III.5 L'influence du schéma d'estimation sur les propriétés thermo-poro-élastiques effectives	89
III.6 Homogénéisation du comportement thermo-poro-élastique linéaire des argilites [43]	95
III.6.1 Cas de chargement purement mécanique	98
III.6.2 Cas de chargement purement hydrique	100
III.6.3 Cas de chargement thermique pur	102
III.6.4 Simulations numériques des propriétés thermo-poro-élastiques effectives des argilites	104
III.7 Conclusion	106
Chapitre IV Homogénéisation du comportement élasto-plastique des argilites	111
IV.1 Introduction	111
IV.2 Méthodologie d'homogénéisation non linéaire d'un milieu hétérogène	113
IV.2.1 Concept du matériau linéaire de comparaison (MLC)	113
IV.2.2 Sur la correction des différentes formulations d'homogénéisation non linéaire	114
IV.3 Homogénéisation non linéaire des milieux biphasiques	116
IV.3.1 Cas du milieu poreux	117
IV.3.2 Cas du milieu biphasique renforcé par des inclusions rigides	118
IV.4 Homogénéisation non linéaire d'un milieu multiphasique	119
IV.4.1 Algorithme de la formulation incrémentale modifiée	121
IV.4.2 Algorithme de la formulation sécante	122
IV.4.3 Simulations numériques	125
IV.5 Comportement élasto-plastique de l'argilite de M/H-M	125
IV.5.1 Comportement local des phases	127
IV.5.2 Validation expérimentale	128
IV.6 Conclusion	130
Chapitre V Homogénéisation du comportement différé	135
V.1 Introduction	135
V.2 Homogénéisation du comportement élasto-viscoplastique par la méthode à variables internes	136
V.2.1 Deux états asymptotiques du comportement élasto-viscoplastique	139
V.2.2 Algorithme de calcul numérique	140
V.3 Comportement viscoélastique linéaire d'un matériau biphasique	141
V.3.1 Approximation du schéma autocohérent	141
V.3.2 Mise en oeuvre de l'approche à variables internes pour le modèle de Mori Tanaka	142
V.4 Comportement élasto-viscoplastique du matériau biphasique	147
V.4.1 Formulation viscoplastique de type Perzyna avec le critère de Von Mises . .	147
V.4.2 Formulation viscoplastique de type Perzyna avec le critère de Drucker Prager	148
V.5 Comparaison avec la solution de la méthode des éléments finis	150

V.6	Comportement différé de l'argilite de M/H-M	151
V.7	Conclusion	152
Conclusion		159
8	Conclusions	159
9	Perspectives	162
Bibliographie		165
Annexe A Composantes du tenseur de Hill dans un milieu isotrope		177
Annexe B Algorithmes d'intégration locale		179
B.1	Algorithmes d'intégration locale du comportement élasto-plastique	179
B.2	Algorithmes d'intégration locale du comportement élasto-viscoplastique	181
Annexe C Annexes du chapitre V		183
C.1	Solutions analytiques dans l'espace symbolique de Laplace Carson	183
C.2	Solutions analytiques dans l'espace temporel	184
C.2.1	Comportement effectif sous la vitesse de déformation imposée constante . .	184
C.2.2	Comportement effectif sous la contrainte imposée constante (essai de fluage)	185

Notations

• Notations tensorielles

a	scalaire	$.$	contraction simple
$\underline{a}$	vecteur	$:$	double contraction
$\mathbf{a}$	tenseur d'ordre deux	$\otimes$	produit tensoriel
$\mathbb{A}$	tenseur d'ordre quatre	$\overset{s}{\otimes}$	produit tensoriel symétrisé
$\mathbf{I}$	tenseur unité d'ordre deux	$\mathbb{I}$	tenseur unité d'ordre quatre
$\mathbb{J}$	$= \frac{1}{3}(\mathbf{I} \otimes \mathbf{I})$	$\mathbb{K}$	$= \mathbb{I} - \mathbb{J}$

• Notations communes à tous les chapitres

$\langle u \rangle_\Omega$	moyenne spatiale de la grandeur u sur le domaine Ω
U_{hom}	grandeur homogénéisée
U_r	grandeur associée à la phase r
T	température
$\underline{E}$	vecteur de gradient thermique macroscopique
$\underline{\Sigma}$	vecteur de courant de chaleur macroscopique
$\underline{\varepsilon}$	vecteur de gradient thermique microscopique
$\underline{\sigma}$	vecteur de courant de chaleur microscopique
λ	tenseur de la conductivité thermique
S_r	degré de saturation

$\mathbf{E}$	tenseur de déformation macroscopique	$\dot{\mathbf{E}}$	tenseur du taux de déformation macroscopique
$\mathbf{\Sigma}$	tenseur de contrainte macroscopique	$\dot{\mathbf{\Sigma}}$	tenseur du taux de contrainte macroscopique
ε	tenseur de déformation microscopique	$\dot{\varepsilon}$	tenseur du taux de déformation microscopique
σ	tenseur de contrainte microscopique	$\dot{\sigma}$	tenseur du taux de contrainte microscopique

ε^p tenseur de déformation plastique microscopique

$\mathbf{E}^{vp}$ tenseur de déformation viscoplastique macroscopique

ε^{vp} tenseur de déformation viscoplastique microscopique

p_l	pression de pore	N	module de Biot
S	entropie volumique	ϕ	porosité lagrangienne
$\mathbb{C}$	tenseur d'élasticité	$\mathbb{C}^{sec}$	opérateur sécant
$\mathbb{C}^{tan}$	opérateur tangent	$\mathbb{L}$	tenseur de viscosité
$\mathbb{S}^E$	tenseur d'Eshelby	$\mathbb{P}$	tenseur de Hill
$\mathbb{A}$	tenseur de localisation en déformation	$\mathbf{B}$	tenseur de Biot
$\mathbb{B}$	tenseur de localisation en contrainte	α	tenseur de dilatation themrique
k	module de compressibilité	μ	module de cisaillement
E	module de Young	ν	coefficient de Poisson

γ coefficient de dilatation themrique différentiel

C^ε capacité de chaleur à la déformation constante

Introduction

L'expansion récente de l'utilisation des matériaux hétérogènes a fortement poussé au développement de l'étude de leurs propriétés mécaniques et leur comportement à la rupture. Un des défis actuels reste de comprendre et de modéliser les processus de déformation et les mécanismes d'endommagement de ces matériaux lorsqu'ils sont soumis à différents types de sollicitations.

Les matériaux considérés dans ce travail sont des roches poreuses telles que les argilites dont l'espace poreux interstitiel peut être saturé ou partiellement saturé. Grâce à leurs caractéristiques physiques et propriétés hydrauliques et mécaniques qui leur confèrent des qualités essentielles à une barrière naturelle (très faible perméabilité notamment), ces matériaux sont étudiés dans le cadre des recherches relatives à une stockage des déchets radioactifs en couches géologiques profondes. En France, un laboratoire souterrain de recherche est construit dans une couche d'argilites du Callovo-Oxfordien située à la limite de la Haute-Marne et de la Meuse qui permet d'étudier *in situ* le comportement de ce type de matériaux.

Les études en laboratoire réalisées depuis approximativement 20 à 25 ans ont mis en évidence le comportement non linéaire et le couplage thermo-hydro-mécanique des argilites. Malgré les nombreuses recherches réalisées (voir par exemple [25, 28, 64, 122, 50]) dans ce domaine, la question de l'influence de la microstructure sur les propriétés effectives macroscopiques, aussi bien thermiques, hydrauliques que thermoporomécaniques reste encore très largement posée. Les modèles phénoménologiques développés sur la base des essais de laboratoire et implantés dans des codes de calcul de structure en vue d'application aux ouvrages ont l'avantage de la simplicité et de l'efficacité. Ils sont indispensables mais ne permettent pas d'exploiter des informations locales comme le comportement des constituants, la morphologie de l'espace poreux et plus généralement la physique de la microstructure. Les travaux de recherche menés récemment sont destinés à enrichir les modèles macroscopiques phénoménologiques, au moins sur certains aspects, par des résultats de modèles et d'analyses micro-macro (par exemple modèles de J.F. Shao, D. Kondo et coauteurs [50, 51, 142]). C'est dans cette logique, il est primordial dans ce genre de problème, d'appréhender le comportement à l'échelle microscopique pour pouvoir prévoir le comportement à l'échelle macroscopique, ce qui justifie l'importance d'une théorie telle que l'homogénéisation développée depuis plusieurs

décennies. L'objectif de cette approche est de décrire le comportement macroscopique du matériau hétérogène à partir d'informations sur la microstructure et de la connaissance du comportement local des constituants à travers le processus d'homogénéisation. Les équations du comportement ainsi que les propriétés macroscopiques obtenues en fonction des données locales se déduisent d'un problème posé sur un Volume Élémentaire Représentatif (V.E.R) de la microstructure du matériau hétérogène. Pour cela, il est nécessaire de choisir une échelle de départ en assurant que, d'une part, le comportement du V.E.R peut être caractérisé par une loi homogène et d'autre part, la structure est toujours considérée comme un milieu continu.

L'approche micromécanique a été appliquée avec succès à la description des comportements de chaque constituant, en vue de prédire le comportement macroscopique des matériaux à microstructure périodique et aussi aléatoire. Différentes solutions ont été apportées par cette approche tant sur des problèmes mécaniques que des phénomènes de transport [33]. Un grand nombre d'auteurs se sont intéressés à ces problèmes et des modèles ont été élaborés afin de proposer des estimations et des bornes représentant au mieux les phénomènes subis par le milieu hétérogène. Nous nous sommes fixés dans ce travail comme objectif la prédiction du comportement macroscopique des argilites. Pour cela, une approche micromécanique basée sur des lois mécanique et de transports a été adoptée. À l'échelle microscopique, ces matériaux sont considérées comme des composites de type *matrice - inclusions* abondamment étudiés dans la littérature, la répartition des inclusions étant aléatoire ou orientée.

Ce mémoire de thèse se compose de cinq chapitres.

La première partie du mémoire, les trois premiers chapitres, est consacrée à l'estimation des propriétés effectives thermiques (tenseur de conductivité thermique) et thermoporoélastiques linéaires, dans le cadre de l'homogénéisation linéaire et plus précisément de l'approche par tenseurs d'Eshelby des milieux aléatoires. L'homogénéisation linéaire pour ce type d'approche est maintenant une théorie bien connue. La nouveauté du travail présenté est liée aux matériaux d'applications et au contexte anisotrope et couplé.

La seconde partie du mémoire, les chapitres 4 et 5, abordent la modélisation micro-macro du comportement non linéaire et irréversible, dans le cadre de l'homogénéisation non linéaire qui est un domaine encore très largement ouvert, en particulier pour le type de matériaux étudié.

Le **premier chapitre** rappelle de manière succincte la méthodologie de l'approche de changement d'échelle dans le contexte d'homogénéisation de la conductivité thermique effective des matériaux hétérogènes. En général, il s'agit de trois étapes. La première étape vise à décrire le matériau à l'échelle microscopique (le comportement local et la répartition spatiale des phases subsidiaires). L'étape suivante permet de déterminer les relations entre les quantités définies à l'échelle microscopique

pique et à l'échelle macroscopique équivalentes en utilisant la solution du problème d'inhomogénéité d'Eshelby. Ensuite, la propriété effective s'obtient par application des opérateurs de moyenne sur les solutions de l'étape précédente. Le rappel théorique se termine par une description de divers schémas d'estimation des propriétés effectives. Ensuite, le but est de présenter la microstructure des roches argileuses dont la compréhension nous fournit des bases cruciales dans la modélisation par un passage *micro-macro*. Un modèle d'homogénéisation simplifié à deux étapes est introduit dans le premier chapitre pour les roches composites de type argilites. Ces roches sont caractérisées par une phase matricielle argileuse contenant des inclusions minérales (quartz et calcite principalement) et des pores. On supposera, pour simplifier, les inclusions minérales de forme sphérique et les pores de forme ellipsoïdale aplatie. On suppose une séparation d'échelle entre les pores (de taille infra micrométrique) et les inclusions minérales de quartz et calcite (de taille micrométrique). L'espace poreux est extrêmement simplifié dans le sens où il est représenté par une classe unique de pores de même forme et dimension. La porosité dans ce type de matériau est très complexe et a un caractère multiéchelle (voir [138]) dont l'impact sur le comportement macroscopique est essentiel et fait l'objet de nombreuses recherches actuellement (menées par l'équipe de L. Dormieux notamment). Le modèle simplifié d'homogénéisation, à deux étapes, sera utilisé la première partie du mémoire (chapitres 1, 2, 3).

Dans le **deuxième chapitre**, la méthode d'homogénéisation linéaire de la conductivité thermique effective des argilites est généralisée au cas anisotrope, et plus précisément isotrope transverse. Deux sources d'anisotropies peuvent être prises en compte, la matrice solide supposée isotrope transverse, et l'espace poreux supposé respecter la symétrie de révolution autour du même axe de symétrie que la matrice. Une fonction de distribution en orientation (ODF) respectant la symétrie de révolution est introduite pour décrire l'orientation de l'espace poreux. Le paramètre caractérisant cette fonction est le degré d'alignement préférentiel autour de l'axe de symétrie. Des études de sensibilité portant sur le degré d'anisotropie de la matrice, la forme et le degré d'alignement des pores, et leur impact sur le tenseur de conductivité thermique effectif sont présentés. Des comparaisons avec des données expérimentales disponibles sont présentées en fin de chapitre.

Le travail présenté pour le tenseur de conductivité thermique est analogue à un travail similaire mené en thermoporoélasticité linéaire, dans l'équipe de mécanique des roches du LAEGO [66, 44, 46], du fait de la forte similitude théorique entre le problème d'équilibre élastique linéaire, et le problème de diffusion thermique linéaire stationnaire. ce dernier étant plus léger à résoudre que le premier. L'approche par tenseurs d'Eshelby nécessite le calcul du tenseur de Hill, ou tenseur de dépolarisation en diffusion [129]. Le tenseur de Hill est bien connu analytiquement pour des inclusions ellipsoïdales alignées avec les directions de symétrie de la matrice [42] mais pas dans le

cas d'inclusions inclinées relativement à l'axe de symétrie de la matrice (inclusion hors axe). Le calcul pour l'inclusion hors axe, qui est le résultat nouveau du chapitre, est effectué de manière semi-analytique par intégration numérique de la fonction de Green exacte du problème de diffusion en milieu infini isotrope transverse, dans un repère local lié à l'inclusion.

Le **troisième chapitre** est destiné à la détermination des propriétés thermo-poro-élastiques linéaires des milieux poreux par l'approche micromécanique en reprenant la solution d'Eshelby en élasticité linéaire. Après une brève introduction sur la méthode d'homogénéisation des problèmes linéaires (en mécanique, thermo-mécanique et thermo-hydro-mécanique), le modèle d'homogénéisation à deux étapes présenté dans le premier chapitre, pour les argilites est ensuite mis en oeuvre et appliqué à l'estimation des propriétés thermoporoélastiques linéaires de roches poreuses.

La modélisation micromécanique du comportement élasto-plastique des argilites fait l'objet du **quatrième chapitre**. Les résultats expérimentaux macroscopiques obtenus sur l'argilite de Meuse/Haute-Marne mettent en évidence un comportement irréversible et non linéaire, pouvant être caractérisé, d'un point de vue théorique par de la plasticité et de l'endommagement. Les observations à l'échelle microscopique ont mis en évidence un mouvement relatif entre les feuillets d'argile qui sont à l'origine des déformations irréversibles macroscopiques tandis que l'endommagement est dû au processus de décohésion aux interfaces des grains [25, 24, 40]. A partir de ces observations, on attribue un comportement élasto-plastique à la phase matricielle argileuse et les grains de quartz et de calcite sont supposés élastiques linéaires. Un modèle simplifié pour prendre en compte l'effet de décohésion à l'interface des grains et de la matrice argileuse est ensuite proposé en première approche. Une comparaison de plusieurs méthodes d'homogénéisation non linéaires dans le cadre de l'approche par champs moyens a été réalisée pour compléter les résultats fournis dans la littérature. Par la suite, on a fait le choix de la méthode sécante modifiée pour simuler le comportement élasto-plastique des argilites sous le chargement de compression triaxiale. Les résultats de la modélisation sont en plus confrontés aux courbes expérimentales.

Le **dernier chapitre** est consacré à l'étude du comportement différé des roches composites de type argilites. Comme on l'a indiqué précédemment, le caractère multiéchelle de la porosité n'est pas abordé dans ce travail, il est pourtant fondamental dans l'analyse des effets différés dans les roches argileuses (à titre d'exemple, l'analyse des feuillets argileux et de leur glissement est tout à fait essentielle [34]). On considèrera donc la matrice argileuse comme homogène, et on étudiera principalement l'influence des inclusions solides, sous une forme très simplifiée, sur le comportement différé macroscopique. Une synthèse bibliographique des approches d'homogénéisation élasto-viscoplastique des matériaux composites nous a conduit au choix de la méthode dite à variables internes développée par Berveiller, Berbenni et coauteurs [115, 9, 8, 7], du fait de sa relative sim-

plicité et de sa souplesse, notamment sur le plan numérique. Dans un premier temps, on cherche à adapter cette approche au matériau biphasé dont la phase matrice solide est viscoélastique alors que les inclusions sphériques sont élastiques linéaires. Cette adaptation nous permettra par la suite d'enrichir le modèle développé pour étudier le comportement différé des milieux hétérogènes dont la phase matrice élasto-viscoplastique obéit à une loi d'écoulement de Perzyna. L'approche à variables internes est ensuite élaborée pour simuler des essais de fluage des roches argileuses dont les inclusions minérales sont considérés élastiques et quasi rigides.

Chapitre I

Homogénéisation de la conductivité thermique effective des argilites

I.1 Introduction

Les limites de l'approche classique fondée sur l'expérience ont incité au développement de l'approche micromécanique (ou méthode de changement d'échelle) depuis les années cinquante. L'idée principale de cette méthode est de caractériser les propriétés physiques et les comportements à l'échelle macroscopique à partir d'une description microstructurale du matériau en utilisant le processus d'homogénéisation [139, 140]. Dans ce premier chapitre, cette approche sera représentée à travers l'étude de la conductivité thermique effective des milieux à microstructure aléatoire.

Pour commencer, nous présentons une description succincte de l'approche de changement d'échelle et les outils d'homogénéisation en thermique linéaire stationnaire. Le problème considéré se repose sur la solution célèbre d'Eshelby qui nous permet de déterminer la conductivité thermique macroscopique en utilisant l'opérateur de moyenne. Pour terminer cette partie de rappel théorique, plusieurs schémas d'estimation des propriétés effectives seront précisés, auxquelles on se réfère dans la suite du travail.

Notre objectif ensuite consiste à appliquer cette méthode d'homogénéisation pour évaluer la conductivité thermique effective des matériaux fortement hétérogènes comme les argilites. Pour cela, nous détaillerons une description microstructurale des roches argileuses examinées à différentes échelles. Nous proposons par la suite un modèle simplifié pour la modélisation de ce type de roche avec un développement d'une méthode d'homogénéisation en deux étapes. Enfin, des calculs numériques dans le cadre des milieux isotropes nous permettront de mettre en évidence l'influence des phases subsidiaires sur les résultats prédictifs de la conductivité thermique effective des roches poreuses.

I.2 Méthode de changement d'échelle de l'espace

I.2.1 Introduction à la micromécanique des matériaux

Dans l'approche micromécanique des milieux hétérogènes, il est important de choisir une échelle de départ qui permet de s'assurer de la justiciabilité des outils de la mécanique des milieux continus et de ne pas descendre inutilement à un niveau plus fin [140].

Pour cela, on adopte tout d'abord une notion d'hétérogénéité dont la "taille caractéristique" considérée est d . On choisit ensuite un élément de volume défini "Volume Élémentaire Représentatif" (V.E.R) qui est un assemblage hétérogène. La taille caractéristique de ce volume est ℓ . A l'échelle macroscopique (taille des ouvrages), on considère L comme la dimension caractéristique de la structure macroscopique. Ces trois paramètres doivent respecter les deux conditions de séparation :

- $\ell \leq L$: la condition pour que l'on puisse traiter la structure comme un milieu continu.
- $d \leq \ell$: la condition pour que l'on puisse caractériser le comportement du V.E.R par une loi homogène.

L'approche micromécanique vise enfin à remplacer le milieu hétérogène réel par un "milieu homogène équivalent" ou "milieu effectif" de sorte que les lois de comportement macroscopique de deux matériaux soient les mêmes. Ces derniers sont réalisés sur les moyens des champs locaux du matériau hétérogène réel.

I.2.2 Méthodologie de l'homogénéisation

Quand les conditions de séparation d'échelle au-dessus ont été vérifiées, la méthodologie de l'homogénéisation des matériaux hétérogènes s'effectue sur trois étapes :

- L'étape de **représentation** qui permet de décrire le matériau à l'échelle microscopique : définition des phases et description de leur répartition spatiale et de leur comportement local.
- Celle de **localisation** permet ensuite de modéliser le comportement mécanique (thermique) et de déterminer les relations entre les quantités définies à l'échelle microscopique et à l'échelle macroscopique équivalentes.
- Celle d'**homogénéisation** permet à la fin d'identifier le comportement macroscopique à partir des solutions de l'étape précédente en utilisant l'opérateur moyen.

I.3 Notions d'homogénéisation en thermique linéaire stationnaire

Dans cette partie, l'approche de changement d'échelle précédemment abordée sera décrite plus concrètement dans le cadre d'homogénéisation de la conductivité thermique des matériaux hété-

rogènes (voir également [129]).

Nous adoptons des notations pour les vecteurs gradients de température et les vecteurs courants de chaleur respectivement $\underline{\varepsilon}$, $\underline{\sigma}$. Le comportement local en thermique linéaire stationnaire d'un matériau hétérogène s'écrit :

$$\begin{cases} \underline{\sigma}(\underline{x}) = -\underline{\lambda}(\underline{x}).\underline{\varepsilon}(\underline{x}) \\ \underline{\varepsilon}(\underline{x}) = -\underline{S}(\underline{x}).\underline{\sigma}(\underline{x}) \end{cases} \quad (\text{I.1})$$

Le tenseur de conductivité thermique $\underline{\lambda}$ et le tenseur de résistivité thermique $\underline{S}$ sont inverses l'un de l'autre :

$$\underline{\lambda}.\underline{S} = \underline{\delta} \quad (\text{I.2})$$

avec $\underline{\delta}$ est le tenseur d'identité en deuxième ordre.

On considère maintenant un V.E.R occupant le domaine Ω qui est imposé par un gradient thermique homogène $\underline{E}$ au contour $\partial\Omega$. Le problème à résoudre à l'échelle microscopique est alors :

$$\begin{cases} \operatorname{div} \underline{\sigma}(\underline{x}) = 0 & (\Omega) \\ \underline{\sigma}(\underline{x}) = -\underline{\lambda}(\underline{x}).\underline{\varepsilon}(\underline{x}) & (\Omega) \\ \underline{\varepsilon}(\underline{x}) = \underline{\operatorname{grad}} T & (\Omega) \\ T = \underline{E}.\underline{x} & (\partial\Omega) \end{cases} \quad (\text{I.3})$$

La relation entre le vecteur gradient thermique $\underline{\varepsilon}(\underline{x})$ et la température T est développée en utilisant le théorème de Gauss :

$$\int_{\Omega} T_{,j} d\Omega = \int_{\partial\Omega} T n_j dS = E_i \int_{\partial\Omega} x_i n_j dS = E_i \int_{\Omega} x_{i,j} d\Omega = |\Omega| E_i \quad (\text{I.4})$$

Il déduit la relation suivante entre le vecteur gradient thermique microscopique et macroscopique en utilisant l'opérateur de moyenne :

$$\langle \underline{\varepsilon} \rangle = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \underline{\varepsilon}(\underline{x}) d\Omega = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} T_{,j} d\Omega = \underline{E} \quad (\text{I.5})$$

La solution du problème (I.3) est le champ de vecteur gradient thermique $\underline{\varepsilon}(\underline{x})$ qui est relié au vecteur gradient thermique homogène $\underline{E}$ par :

$$\underline{\varepsilon}(\underline{x}) = \underline{A}(\underline{x}).\underline{E} \quad (\text{I.6})$$

où $\underline{A}$ est le tenseur de localisation d'ordre deux dont l'expression est présentée dans la section qui suit. Ce tenseur symétrique ($A_{ij} = A_{ji}$) vérifie la condition suivante :

$$\langle \underline{A} \rangle = \underline{\delta} \quad (\text{I.7})$$

I.3.1 Condition de Hill-Mandel

Soient $\underline{\sigma}$ un vecteur courant de chaleur équilibré ($\text{div } \underline{\sigma} = 0$ dans Ω) et $\underline{\varepsilon}$ un champ de vecteur gradient associé avec $\underline{E}$ (il existe T vérifiant $T = \underline{E} \cdot \underline{x}$ sur $\partial\Omega$ et $\underline{\varepsilon} = \underline{\text{grad}} T$ sur Ω), on peut démontrer la relation :

$$\langle \underline{\sigma} \cdot \underline{\varepsilon} \rangle = \langle \underline{\sigma} \rangle \cdot \underline{E} = \langle \underline{\sigma} \rangle \cdot \langle \underline{\varepsilon} \rangle \quad (\text{I.8})$$

En posant $\underline{\Sigma}$ le vecteur courant de chaleur à l'échelle macroscopique qui vérifie :

$$\underline{\Sigma} = \langle \underline{\sigma} \rangle \quad (\text{I.9})$$

on déduit donc la relation :

$$\langle \underline{\sigma} \cdot \underline{\varepsilon} \rangle = \underline{\Sigma} \cdot \underline{E} \quad (\text{I.10})$$

I.3.2 Homogénéisation

Le comportement thermique homogénéisé du V.E.R peut être exprimé par des relations linéaires entre le vecteur courant de chaleur et le vecteur gradient thermique macroscopiques. Dans le cas du vecteur gradient thermique homogène imposé au contour, ce comportement s'écrit sous forme :

$$\underline{\Sigma} = \langle \underline{\sigma} \rangle = -\langle \underline{\lambda} \cdot \underline{\varepsilon} \rangle = -\langle \underline{\lambda} \cdot \underline{A} \rangle \cdot \underline{E} \quad (\text{I.11})$$

On obtient donc une loi de comportement homogénéisée caractérisée par le tenseur des conductivités thermiques macroscopique $\underline{\lambda}_{\text{hom}}$:

$$\underline{\Sigma} = -\underline{\lambda}_{\text{hom}} \cdot \underline{E} \quad (\text{I.12})$$

avec

$$\underline{\lambda}_{\text{hom}} = \langle \underline{\lambda} \cdot \underline{A} \rangle \quad (\text{I.13})$$

De la même façon, dans le cas du flux homogène imposé au contour, on obtient :

$$\underline{E} = -\underline{S}_{\text{hom}} \cdot \underline{\Sigma} \quad (\text{I.14})$$

$$\underline{S}_{\text{hom}} = \langle \underline{S} \cdot \underline{B} \rangle \quad (\text{I.15})$$

où $\underline{S}_{\text{hom}}$ le tenseur de résistivité thermique macroscopique et $\underline{B}$ le tenseur de concentration dans le cas du flux homogène au contour. Ce dernier tenseur symétrique ($B_{ij} = B_{ji}$) vérifie également :

$$\langle \underline{B} \rangle = \underline{\delta} \quad (\text{I.16})$$

I.4 Approche par tenseur d'Eshelby en thermique linéaire stationnaire

Le matériau hétérogène étudié ici comporte N phases dont la conductivité thermique de chaque phase est connue et homogène. A partir de la relation (I.13), on réécrit la conductivité macroscopique du V.E.R comme :

$$\boldsymbol{\lambda}_{\text{hom}} = \sum_{r=1}^N f_r \boldsymbol{\lambda}_r \cdot \mathbf{A}_r \quad (\text{I.17})$$

avec :

$$\mathbf{A}_r = \frac{1}{|\Omega_r|} \int_{\Omega_r} \mathbf{A}(\underline{x}) d\Omega \quad (\text{I.18})$$

où $\boldsymbol{\lambda}_r$, $\mathbf{A}_r$ désignent respectivement le tenseur de conductivité thermique et de concentration de la phase r .

La détermination de la conductivité thermique macroscopique $\boldsymbol{\lambda}_{\text{hom}}$ se ramène donc à chercher des tenseurs de concentration $\mathbf{A}_r$ dont l'expression peut être atteinte en utilisant la solution célèbre d'Eshelby [38].

Considérons d'abord le cas d'un milieu hétérogène biphasique Ω composant une phase solide Ω^s et une autre phase Ω^I . Les tenseurs $\boldsymbol{\lambda}_s$ et $\boldsymbol{\lambda}_I$ désignent les conductivités thermiques de ces deux phases. Le problème de conduction linéaire à l'intérieur du V.E.R de ce matériau soumis un gradient homogène $\underline{E}$ au contour s'exprime à l'aide des équations :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{div } \underline{\sigma} = 0 & (a) \\ \underline{\sigma}(\underline{x}) = -\boldsymbol{\lambda}(\underline{x}) \cdot \underline{\varepsilon}(\underline{x}) \quad \text{avec} \quad \left\{ \begin{array}{ll} \boldsymbol{\lambda}(\underline{x}) = \boldsymbol{\lambda}_I & \text{pour } \underline{x} \in \Omega^I \\ \boldsymbol{\lambda}(\underline{x}) = \boldsymbol{\lambda}_s & \text{pour } \underline{x} \in \Omega^s \end{array} \right. & (b) \\ \underline{\varepsilon}(\underline{x}) = \underline{\text{grad}} T & (c) \\ T = \underline{E} \cdot \underline{x} \quad \text{quand } \underline{x} \in \partial\Omega & (d) \end{array} \right. \quad (\text{I.19})$$

Au lieu de résoudre ce problème, on peut considérer le problème auxiliaire où l'inhomogénéité I de conductivité thermique $\boldsymbol{\lambda}_I$ est immergée dans un milieu homogène infini Ω dont la conductivité

thermique est λ_s . Les équations de ce problème d'inhomogénéité s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{div } \underline{\sigma} = 0 & (a) \\ \underline{\sigma}(\underline{x}) = -\underline{\lambda}(\underline{x}) \cdot \underline{\varepsilon}(\underline{x}) \quad \text{avec} \quad \left\{ \begin{array}{ll} \underline{\lambda}(\underline{x}) = \underline{\lambda}_I & \text{pour } \underline{x} \in (I) \\ \underline{\lambda}(\underline{x}) = \underline{\lambda}_s & \text{pour } \underline{x} \in (\Omega - I) \end{array} \right. & (b) \\ \underline{\varepsilon}(\underline{x}) = \underline{\text{grad}} T & (c) \\ T = \underline{E} \cdot \underline{x} \quad \text{quand } (|\underline{x}| \rightarrow \infty) & (d) \end{array} \right. \quad (\text{I.20})$$

En posant $\delta \underline{\lambda} = \underline{\lambda}_s - \underline{\lambda}_I$, on obtient :

$$\underline{\sigma}(\underline{x}) = -\underline{\lambda}_s \cdot \underline{\varepsilon}(\underline{x}) + \underline{\tau}(\underline{x}) \quad \text{avec} \quad \underline{\tau}(\underline{x}) = \chi_I(\underline{x}) \delta \underline{\lambda} \cdot \underline{\varepsilon}(\underline{x}) \quad (\text{I.21})$$

dans laquelle $\chi_I(\underline{x})$ désigne la fonction caractéristique de domaine I .

Supposons maintenant que $\underline{\tau}(\underline{x}) = \underline{\tau} \chi_I(\underline{x})$ où $\underline{\tau}$ est un vecteur constant. Le problème d'inhomogénéité défini par (I.20) est réécrit sous forme :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{div } \underline{\sigma} = 0 & (a) \\ \underline{\sigma}(\underline{x}) = -\underline{\lambda}_s \cdot \underline{\varepsilon}(\underline{x}) + \underline{\tau} \chi_I(\underline{x}) & (b) \\ \underline{\varepsilon}(\underline{x}) = \underline{\text{grad}} T & (c) \\ T = \underline{E} \cdot \underline{x} \quad \text{quand } (|\underline{x}| \rightarrow \infty) & (d) \end{array} \right. \quad (\text{I.22})$$

Ces équations définissent en effet le problème d'inclusion d'Eshelby [38].

I.4.1 Fonction de Green

Pour simplifier, on considère d'abord le cas $\underline{E} = 0$. La combinaison des équations de (I.22) conduit à l'équation suivante :

$$-\underline{\lambda}_s \cdot \Delta T + \underline{\tau} \cdot \underline{\text{grad}} \chi_I = 0 \quad (\text{I.23})$$

En utilisant la définition de la dérivation de la distribution, on obtient :

$$\langle \underline{\text{grad}} \chi_I, \psi \rangle = -\langle \chi_I, \underline{\text{grad}} \psi \rangle = -\int_I \underline{\text{grad}} \psi \, dV = -\int_{\partial I} \psi \underline{n} \, dS \quad (\text{I.24})$$

où ψ est une fonction quelconque de $D(\mathbb{R}^3)$ et $\underline{n}$ est le vecteur unitaire normal extérieur de I .

On introduit la fonction distribution Dirac attachée à la frontière de I qui est définie par :

$$\langle \delta_{\partial I}, \psi \rangle = \int_{\partial I} \psi \, dS \quad (\text{I.25})$$

On obtient donc :

$$\underline{\text{grad}} \chi_I = -\underline{n} \delta_{\partial I} \quad (\text{I.26})$$

L'équation (I.23) peut être écrite :

$$\underline{\lambda}_s \cdot \Delta T + \underline{\tau} \cdot \underline{n} \delta_{\partial I} = 0 \quad (\text{I.27})$$

La solution de (I.27) est atteinte en utilisant la notion de fonction de Green $G(\underline{x})$ définie comme la solution de l'équation :

$$\underline{\lambda}_s \cdot \Delta_{\underline{x}} G + \delta_{\underline{x}'} = 0 \quad (\text{I.28})$$

où $\delta_{\underline{x}'}$ est la fonction Dirac au point $\underline{x}'$ définie par $\langle \delta_{\underline{x}'}, \psi \rangle = \psi(\underline{x}')$ pour une fonction quelconque $\psi \in D(\mathbb{R}^3)$. La solution de (I.28) est obtenue comme la suivante (voir [23, 78]) :

$$G(\underline{x}, \underline{x}') = \frac{1}{4\pi \sqrt{\det \underline{\lambda}_s} r} \quad (\text{I.29})$$

où :

$$r^2 = [{}^t(\underline{x} - \underline{x}') \cdot \underline{\lambda}_s^{-1} \cdot (\underline{x} - \underline{x}')] \quad (\text{I.30})$$

La solution de (I.27) est atteinte par la superposition :

$$T = \int_{\partial I} G(\underline{x} - \underline{x}') \underline{\tau} \cdot \underline{n} dS_{\underline{x}'} \quad (\text{I.31})$$

En utilisant le théorème de divergence, on obtient :

$$T = \int_I \frac{\partial G(\underline{x} - \underline{x}')}{\partial x'_j} \tau_j dV_{\underline{x}'} = -\frac{\partial}{\partial x_j} \int_I G(\underline{x} - \underline{x}') \tau_j dV_{\underline{x}'} \quad (\text{I.32})$$

Le vecteur gradient thermique a donc la forme :

$$\underline{\varepsilon} = \underline{\text{grad}} T = \underline{P} \cdot \underline{\tau} \quad (\text{I.33})$$

où :

$$P_{ij} = -\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \int_I G(\underline{x} - \underline{x}') dV_{\underline{x}'} \quad (\text{I.34})$$

En cas de gradient homogène au contour ($\underline{E} \neq 0$), on a le résultat suivant :

$$\underline{\varepsilon} = \underline{P} \cdot \underline{\tau} + \underline{E} \quad (\text{I.35})$$

En résumé, dans le cas où $\underline{\tau}$ est constante, la solution du problème de l'inclusion d'Eshelby (I.22) est réduit à la détermination du tenseur $\underline{P}$ que l'on appelle le tenseur de Hill.

I.4.2 Le problème de l'inhomogénéité

On revient au problème de l'inhomogénéité (I.21) :

$$\underline{\sigma}(\underline{x}) = -\underline{\lambda}_s \cdot \underline{\varepsilon}(\underline{x}) + \underline{\tau}(\underline{x}) \quad \text{avec} \quad \underline{\tau}(\underline{x}) = \chi_I(\underline{x}) \delta \underline{\lambda} \cdot \underline{\varepsilon}(\underline{x}) \quad (\text{I.36})$$

Pour le problème d'inhomogénéité qui coïncide celui de l'inclusion, la condition nécessaire et suffisante est que la conductivité thermique soit uniforme dans le domaine d'inclusion I . Dans ce cas, la solution du problème de l'inhomogénéité est obtenue à partir de celle du problème de l'inclusion :

$$\begin{aligned} \underline{\varepsilon} &= \underline{P} \cdot \underline{\tau} + \underline{E} \\ \underline{\tau} &= \delta \underline{\lambda} \cdot \underline{\varepsilon} \end{aligned} \quad (\text{I.37})$$

Il conduit à :

$$\underline{\tau} = \delta \underline{\lambda} \cdot (\underline{I} - \delta \underline{\lambda} \cdot \underline{P})^{-1} \cdot \underline{E} \quad (\forall \underline{x} \in I) \quad (\text{I.38})$$

Si le tenseur de Hill $\underline{P}$ est constant dans le domaine ellipsoïde I , il déduit que $\underline{\tau}$ est constante. La valeur du vecteur gradient thermique dans le domaine ellipsoïde I s'écrit :

$$\underline{\varepsilon}(\underline{x}) = \underline{A}_I(\underline{x}) \cdot \underline{E} \quad (\text{I.39})$$

avec :

$$\underline{A}_I = [\underline{I} + (\underline{\lambda}_I - \underline{\lambda}_s) \cdot \underline{P}]^{-1} \quad (\text{I.40})$$

I.5 Schémas d'estimation de la conductivité thermique effective

La solution du problème de l'inhomogénéité d'Eshelby énoncée préalablement fournit un outil efficace pour construire différents schémas d'estimation de la conductivité thermique homogénéisée. Dans la partie suivante, seront représentés les schémas d'estimation utilisés ultérieurement dans ce travail.

I.5.1 Schéma dilué

On commence tout d'abord par le schéma le plus simple, c'est le schéma dilué. Le matériau considéré constitué d'une matrice (phase $i = 1$) entourant des hétérogénéités différentes (phase $i = 2, N$) et dont le comportement de chaque phase est homogène. Si les fractions volumiques des phases sont faibles et donc les inhomogénéités suffisamment éloignées les unes des autres, les interactions entre les hétérogénéités sont négligées. Dans ce cas-là, le comportement de chaque

inhomogénéité est considéré équivalent à celui de l'hétérogénéité en matrice infinie dans son propre problème. La moyenne du vecteur gradient thermique dans l'inhomogénéité (i) est déduit donc à partir de la solution au-dessus comme :

$$\langle \underline{\varepsilon} \rangle_i = \mathbf{A}_i \cdot \underline{E} \quad (\text{I.41})$$

où le tenseur de concentration moyen de phase i est donné par :

$$\mathbf{A}_i = \langle [\mathbf{I} + (\boldsymbol{\lambda}_i - \boldsymbol{\lambda}_1) \cdot \mathbf{P}_i]^{-1} \rangle \quad (\text{I.42})$$

A partir de la relation (I.7), le moyen du tenseur de concentration dans la phase matrice vaut :

$$\mathbf{A}_1 = \frac{1}{f_1} \left(\mathbf{I} - \sum_{i=2}^N f_i \langle [\mathbf{I} + (\boldsymbol{\lambda}_i - \boldsymbol{\lambda}_1) \cdot \mathbf{P}_i]^{-1} \rangle \right) \quad (\text{I.43})$$

où f_i ($i = 1, \dots, N$) désigne la fraction volumique de la phase i .

En portant (I.42) et (I.43) dans (I.13), on obtient l'estimation des vecteurs de la conductivité thermique homogène :

$$\boldsymbol{\lambda}^{\text{DIL}} = \boldsymbol{\lambda}_1 + \sum_{i=2}^N f_i (\boldsymbol{\lambda}_i - \boldsymbol{\lambda}_1) \cdot \mathbf{A}_i \quad (\text{I.44})$$

I.5.2 Schéma de Mori-Tanaka

Pour tenir compte de l'interaction des inclusions, on aborde un autre schéma souvent utilisé dans la littérature est celui de Mori-Tanaka [95]. Le principe de ce schéma est de considérer l'inhomogénéité ellipsoïdale immergée dans la matrice solide soumise à un gradient thermique fictif $\underline{E}_0$. La solution du problème d'inhomogénéité nous permet d'écrire :

$$\langle \underline{\varepsilon} \rangle_1 = \underline{E}_0 \quad (\text{I.45})$$

$$\langle \underline{\varepsilon} \rangle_i = \mathbf{A}_i \cdot \underline{E}_0$$

En notant que la valeur moyenne $\langle \underline{\varepsilon} \rangle = \underline{E}$, on obtient :

$$\underline{E} = \langle \underline{\varepsilon} \rangle = (1 - \sum_{i=2}^N f_i) \langle \underline{\varepsilon} \rangle_1 + \sum_{i=2}^N f_i \langle \underline{\varepsilon} \rangle_i = (1 - \sum_{i=2}^N f_i) \underline{E}_0 + \sum_{i=2}^N f_i \mathbf{A}_i \cdot \underline{E}_0 \quad (\text{I.46})$$

L'inversion de (I.46) conduit à la relation entre $\underline{E}_0$ et $\underline{E}$:

$$\underline{E}_0 = \mathbf{A}_{\text{int}}^{\text{MT}} \cdot \underline{E} \quad (\text{I.47})$$

avec :

$$\mathbf{A}_{\text{int}}^{\text{MT}} = \left[(1 - \sum_{i=2}^N f_i) \mathbf{I} + \sum_{i=2}^N f_i \mathbf{A}_i \right]^{-1} \quad (\text{I.48})$$

En remplaçant (I.47) en (I.45), on obtient le tenseur de concentration de la phase i comme :

$$\mathbf{A}_i^{\text{MT}} = \mathbf{A}_i \cdot \mathbf{A}_{\text{int}}^{\text{MT}} \quad (\text{I.49})$$

L'estimation des vecteurs de la conductivité thermique homogène dans le schéma de Mori-Tanaka est donc exprimée sous forme :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\lambda}^{\text{MT}} &= \boldsymbol{\lambda}_1 + \sum_{i=2}^N f_i (\boldsymbol{\lambda}_i - \boldsymbol{\lambda}_1) \cdot \mathbf{A}_i^{\text{MT}} \\ &= \boldsymbol{\lambda}_1 + \sum_{i=2}^N f_i (\boldsymbol{\lambda}_i - \boldsymbol{\lambda}_1) \cdot \mathbf{A}_i \cdot \left[\left(1 - \sum_{i=2}^N f_i\right) \mathbf{I} + \sum_{i=2}^N f_i \mathbf{A}_i \right]^{-1} \end{aligned} \quad (\text{I.50})$$

I.5.3 Schéma autocohérent

Le schéma auto-cohérent est introduit dans la littérature par Hershey [55] pour le matériau polycristal et reformulé par Hill [56] pour le matériau comportant des inclusions elliptiques. L'hypothèse principale du schéma autocohérent consiste à supposer que chaque inclusion soit entourée par le milieu continu équivalent dont la conductivité est égale à la conductivité effective $\boldsymbol{\lambda}_{\text{AC}}$ inconnue. Supposant que le milieu équivalent soit soumis au gradient thermique homogène au contour $\underline{E}$, on obtient donc :

$$\langle \underline{\varepsilon} \rangle_i = \mathbf{A}_i^{\text{AC}} \cdot \underline{E} \quad (\text{I.51})$$

où :

$$\mathbf{A}_i^{\text{AC}} = \langle [\mathbf{I} + (\boldsymbol{\lambda}_i - \boldsymbol{\lambda}_{\text{AC}}) \cdot \mathbf{P}_i^{\text{AC}}]^{-1} \rangle \quad (\text{I.52})$$

A partir de la relation (I.7), on déduit le tenseur de concentration de la phase matrice :

$$\mathbf{A}_1^{\text{AC}} = \frac{1}{f_1} \left(\mathbf{I} - \sum_{i=2}^N f_i \langle [\mathbf{I} + (\boldsymbol{\lambda}_i - \boldsymbol{\lambda}_{\text{AC}}) \cdot \mathbf{P}_i^{\text{AC}}]^{-1} \rangle \right) \quad (\text{I.53})$$

où f_i ($i = 1, \dots, N$) désigne la fraction volumique de la phase i .

L'estimation de la conductivité effective se trouve donc :

$$\boldsymbol{\lambda}_{\text{AC}} = \boldsymbol{\lambda}_1 + \sum_{i=2}^N f_i (\boldsymbol{\lambda}_i - \boldsymbol{\lambda}_1) \cdot \mathbf{A}_i^{\text{AC}} \quad (\text{I.54})$$

Dans le cas où le matériau comporte des grains ou des hétérogénéités accolées les unes aux autres (la fraction volumique de la phase matrice est donc $f_1 = 0$), on suppose que chaque grain soit entouré de tous les autres grains. La formule (I.54) dans ce cas se réécrit :

$$\boldsymbol{\lambda}_{\text{AC}} = \left\{ \sum_{i=2}^N f_i \boldsymbol{\lambda}_i \langle [\mathbf{I} + (\boldsymbol{\lambda}_i - \boldsymbol{\lambda}_{\text{AC}}) \cdot \mathbf{P}_i^{\text{AC}}]^{-1} \rangle \right\} \cdot \left\{ \sum_{i=2}^N f_i \langle [\mathbf{I} + (\boldsymbol{\lambda}_i - \boldsymbol{\lambda}_{\text{AC}}) \cdot \mathbf{P}_i^{\text{AC}}]^{-1} \rangle \right\} \quad (\text{I.55})$$

Le tenseur de Hill $\mathbf{P}_i^{\text{AC}}$ dans ce schéma s'exprime mathématiquement comme (I.34) où la fonction de Green est déterminée pour le milieu équivalent dont la conductivité $\boldsymbol{\lambda}_{\text{AC}}$ est inconnue.

I.5.4 Schéma différentiel

Une difficulté souvent rencontrée dans un schéma implicite comme celui d'autocohérent est qu'il nous faut résoudre des équations non linéaires pour évaluer les propriétés effectives. Dans le cas des milieux anisotropes, la résolution de ce problème est impossible. Ces limites de l'approche autocohérente amènent à générer un schéma itératif appelé différentiel. Le principe de ce dernier schéma [99, 98] consiste à construire le matériau homogénéisé à partir de celui-ci initial par une série d'additions incrémentales de la fraction volumique des phases incluses. Les propriétés effectives homogénéisées dépendent donc non seulement des fractions volumiques finales mais également du chemin suivi de construction. Dans cette subsection, la procédure du schéma différentiel est établie en premier lieu pour les matériaux hétérogènes biphasés. Le résultat est étendu par la suite dans le cas des milieux multiphasiques.

On considère un matériau biphasé comportant la phase matrice λ_1 et les inhomogénéités λ_2 dont la fraction volumique est f_2 . Le procédé adopté est comme le suivant :

- Le V.E.R initial de volume Ω consiste seulement de la phase matrice λ_1 . On enlève une partie très petite $dx \Omega$ du V.E.R et on y ajoute $dx \Omega$ des inhomogénéités λ_2 . La conductivité homogénéisée après le remplacement est obtenue comme :

$$\lambda_{\text{DIF}}^{(1)} = \lambda_1 + f_2^{(1)}(\lambda_2 - \lambda_1) \cdot \langle [I + (\lambda_2 - \lambda_1) \cdot P_1]^{-1} \rangle \quad (\text{I.56})$$

avec $f_2^{(1)} = dx$.

- Le V.E.R est ensuite considéré comme homogène avec la conductivité $\lambda_{\text{DIF}}^{(1)}$. Le procédé d'addition incrémentale continue jusqu'au moment où la fraction volumique de l'inhomogénéité dans le V.E.R est égale à f_2 . A l'étape $(j - 1)$ où la fraction volumique de l'inclusion est $f_2^{(j-1)}$, on remplace une petite partie $dx \Omega$ du V.E.R par la phase de l'inhomogénéité. Le volume de l'inhomogénéité après le changement sera donc :

$$f_2^{(j-1)}\Omega - f_2^{(j-1)}dx\Omega + dx\Omega \quad (\text{I.57})$$

Il conduit la fraction volumique de l'inhomogénéité à l'étape (j) :

$$f_2^{(j)} = f_2^{(j-1)} - f_2^{(j-1)}dx + dx \quad (\text{I.58})$$

ou :

$$dx = \frac{f_2^{(j)} - f_2^{(j-1)}}{1 - f_2^{(j-1)}} \quad (\text{I.59})$$

Il implique la conductivité homogénéisée à la fin de l'étape (j) :

$$\lambda_{\text{DIF}}^{(j)} = \lambda_{\text{DIF}}^{(j-1)} + dx(\lambda_2 - \lambda_{\text{DIF}}^{(j-1)}) \cdot \left\langle \left[I + (\lambda_2 - \lambda_{\text{DIF}}^{(j-1)}) \cdot P_{\text{DIF}} \right]^{-1} \right\rangle \quad (\text{I.60})$$

On peut écrire de manière générale :

$$\frac{d}{df_2} \lambda_{\text{DIF}} = \frac{1}{1-f_2} (\lambda_2 - \lambda_{\text{DIF}}) \cdot \left\langle [I + (\lambda_2 - \lambda_{\text{DIF}}) \cdot \mathbf{P}_{\text{DIF}}]^{-1} \right\rangle \quad (\text{I.61})$$

On applique maintenant cette méthode pour le matériau comportant la phase matrice (phase $i = 1$) entourant des hétérogénéités différentes (phase $i = 2, N$) dont les fractions volumiques sont f_i . De la même manière, on utilise la technique qui permet de construire la solution finale incrémentalement commencée à partir de la matrice homogène λ_1 . On suppose :

$$f = \sum_{i=2}^N f_i; \quad f_i = \rho_i f; \quad \sum_{i=2}^N \rho_i = 1 \quad (\text{I.62})$$

où les paramètres constants ρ_i ($i = 2, N$) représentent la fraction volumique relative des inhomogénéités.

Le procédé de construire le matériau est comme le suivant : à chaque étape on remplace une petite volume du V.E.R homogène $dx \Omega$ par des inhomogénéités dans laquelle la fraction volumique relative des phases est toujours fixée à ρ_i ($i = 2, N$). On considère, par exemple, la phase (i) dont le volume après le remplacement à l'étape (j) est :

$$f_i^{(j-1)} - f_i^{(j-1)} dx \Omega + \rho_i dx \Omega \quad (\text{I.63})$$

La fraction volumique de la phase (i) à l'étape (j) vaut :

$$\begin{aligned} f_i^{(j)} &= f_i^{(j-1)} - f_i^{(j-1)} dx + \rho_i dx \\ \rho_i f^{(j)} &= \rho_i f^{(j-1)} - \rho_i f^{(j-1)} dx + \rho_i dx \end{aligned} \quad (\text{I.64})$$

avec $f^{(j)}$ est la fraction volumique totale des inclusions à l'étape j .

Il déduit :

$$\rho_i dx = \frac{\rho_i (f^{(j)} - f^{(j-1)})}{1 - f^{(j-1)}} \quad (\text{I.65})$$

On obtient donc la conductivité homogénéisée à la fin d'étape j :

$$\lambda_{\text{DIF}}^{(j)} = \lambda_{\text{DIF}}^{(j-1)} + \sum_{i=2}^N \rho_i dx (\lambda_i - \lambda_{\text{DIF}}^{(j-1)}) \cdot \left\langle [I + (\lambda_i - \lambda_{\text{DIF}}^{(j-1)}) \cdot \mathbf{P}_{\text{DIF}}]^{-1} \right\rangle \quad (\text{I.66})$$

ou :

$$\frac{d}{df} \lambda_{\text{DIF}} = \sum_{i=2}^N \frac{\rho_i}{1-f} (\lambda_i - \lambda_{\text{DIF}}) \cdot \left\langle [I + (\lambda_i - \lambda_{\text{DIF}}) \cdot \mathbf{P}_{\text{DIF}}]^{-1} \right\rangle \quad (\text{I.67})$$

Cette dernière équation est intégrée dans le cas simple du matériau hétérogène isotrope avec des inclusions sphériques. Dans les autres cas, elle doit être calculée numériquement. Pour cela, on utilise la méthode incrémentale qui vérifie la condition suivante :

$$f^{(j)} = j df, \quad df = \frac{f}{N_{\text{inc}}} \quad (j = 1, N_{\text{inc}}) \quad (\text{I.68})$$

où N_{inc} est le nombre d'incrément. L'équation (I.65) est réécrite :

$$\rho_i dx = \frac{\rho_i df}{1 - (j - 1)df} \quad (\text{I.69})$$

Le résultat de ce schéma dépend donc de la valeur choisie du nombre d'incrément N_{inc} .

I.5.5 Méthode des champs effectifs

Une autre méthode d'estimation des propriétés effectives est présentée dans la littérature [75, 74, 84] que l'on appelle méthode des champs effectifs (MCE) pour distinguer avec la méthode des milieux effectifs (MME).

Les méthodes de type MME se décomposent en deux principales versions connues sous les noms de méthodes auto-cohérente (I.5.3), et itérative dite différentielle (I.5.4). Ces méthodes sont basées sur les hypothèses suivantes : (i) chaque inhomogénéité se comporte isolément et se place soit dans un milieu aux propriétés thermiques effectives initiales, soit dans un milieu aux propriétés thermiques effectives héritées de l'étape d'itération précédente ; (ii) le champ agissant sur cette inhomogénéité coïncide avec celui externe appliqué au V.E.R ; (iii) le champ moyen régnant dans le milieu hétérogène réel coïncide avec le champ moyen dans le milieu effectif.

Les méthodes de type MCE considèrent également l'inhomogénéité comme isolée des autres et placée dans un milieu effectif. Néanmoins, la différence avec les MME réside dans le fait que le champ effectif agissant sur l'inhomogénéité ne coïncide pas avec le champ extérieur appliqué au V.E.R, mais plutôt avec un champ formant la somme du champ extérieur et des perturbations induites par les inhomogénéités environnantes. Les versions simples de ces méthodes consistent à supposer ce champ effectif comme constant et identique pour toutes les inhomogénéités dans le V.E.R.

Plus récemment, on a démontré l'équivalence, sous certaines conditions restrictives, entre la méthode des champs effectifs comme celle de Mori-Tanaka [88, 74].

I.5.6 Bornes de Hashin-Shtrikman

Hashin et Strickman [53, 54] proposent les estimations basées sur une représentation variationnelle alternative qui permet de prendre en compte l'incorporation de l'hypothèse de l'isotropie statistique. Cette approche variationnelle utilise des champs de polarisation relativement à un milieu de référence homogène avec la conductivité λ_0 . Ces auteurs montrent que leurs estimations conduisent en fait, aux bornes supérieures et inférieures pour λ_{hom} si λ_0 est choisi égal au "maximum" et au "minimum" du λ_r ($r = 1, N$) respectivement. On peut citer comme exemple les travaux de Zaoui [139].

Dans le cas simple d'un milieu biphasique dont la conductivité de la phase matrice λ_m est plus

grande que celle de la phase d'inhomogénéité λ_i et présente une symétrie ellipsoïdale [133], les bornes de Hashin-Shtrikman peuvent être écrites sous la forme :

$$\lambda_{\text{HS}}^{(-)} \leq \lambda_{\text{HS}}^{\text{hom}} \leq \lambda_{\text{HS}}^{(+)} \quad (\text{I.70})$$

avec :

$$\lambda_{\text{HS}}^{(-)} = \lambda_i + (1 - f_i) (\lambda_m - \lambda_i) : \left\langle [\delta + f_i (\lambda_m - \lambda_i) \cdot \mathbf{P}_{\lambda_i}]^{-1} \right\rangle \quad (\text{I.71})$$

$$\lambda_{\text{HS}}^{(+)} = \lambda_m + f_i (\lambda_i - \lambda_m) : \left\langle [\delta + (1 - f_i) (\lambda_i - \lambda_m) \cdot \mathbf{P}_{\lambda_m}]^{-1} \right\rangle \quad (\text{I.72})$$

On remarque que dans le cas d'un milieu poreux, la borne inférieure tend vers 0 et la borne supérieure est confondue avec celle fournie par le schéma de Mori-Tanaka (dans le cas des pores sphériques).

I.6 Description microstructurale des matériaux étudiés et modèle proposée

I.6.1 Microstructure des argilites

Les roches argileuses constituent une grande majorité des roches sédimentaires à la surface de la Terre, et en particulier environ 75% des bassins sédimentaires. Les connaissances des propriétés physiques effectives et du comportement macroscopique de ce type de roches jouent un rôle très important dans plusieurs domaines comme l'exploration et l'exploitation des sites souterrains de stockage des déchets radioactifs.

Ces roches argileuses comportant plusieurs phases subsidaires peuvent être considérées comme un matériau composite multiphasique fortement hétérogène. Les hétérogénéités se manifestent à toutes les échelles d'observation et contribuent à l'anisotropie ainsi qu'à la grande variété des comportements observés à l'échelle macroscopique.

Une observation à l'aide des analyses au microscope électronique à balayage (MEB) et aux rayons X permet de décomposer la microstructure des roches argileuses en quatre niveaux d'échelles [130, 118] :

- *Niveau 0* : correspond à l'échelle des feuillets élémentaires d'argile dont la taille est de l'ordre de quelques nanomètres. À cette échelle, on observe que les cristallites (kaolinite, illite, smectite...) forment des plaquettes avec des rapports d'aspect (rapport d'élancement entre une direction de l'espace et les deux autres) de l'ordre de 1/20.
- *Niveau I* : correspond à l'échelle des particules argileuses constituées par l'empilement de cinq à dix feuillets de l'argilite. Les feuillets élémentaires avec la porosité forment une particule

argileuse à l'échelle caractéristique de longueur d'une centaine de nanomètre. On constate que les particules argileuses présentent une large variété de formes et de tailles : la dimension caractéristique est de l'ordre de 500 – 1000 nm de longueur et 20 – 50 nm d'épaisseur qui confirme le rapport d'aspect approximativement de $1/25 - 1/20$. Ces particules constituent le grain primaire reproduit suivant toutes les orientations possibles dans l'espace lors de la sédimentation.

- *Niveau II* : correspond à l'agrégat de plusieurs particules argileuses plus ou moins ordonnées à l'échelle des dizaines de micromètres. L'arrangement des particules argileuses du *niveau I* donne généralement naissance à une porosité conditionnée.
- *Niveau III* : correspond à l'échelle macroscopique de l'argilite. La matrice argileuse comportant des agrégats argileux du *niveau II* avec les grains de quartz et de calcites forme la structure macroscopique de l'argilite qui devient visible à l'échelle de millimètre.

Une description détaillée sur les argilites et plus particulièrement l'argilite de Meuse/Haute-Marne (M/H-M) est dans [60, 116, 117, 138]. D'après ces travaux, cette roche est composée de deux ensembles de minéraux formant deux structures opposées : la charge en clastes (tectosilicates et carbonates) et la matrice argileuse (phyllosilicates non gonflants et interstratifiés illite/smectite). Les tectosilicates comportent principalement de quartz (environ 20%) tandis que les feldspaths consistent en calcites (environ 30%) et un peu de dolomite. Ces minéraux détritiques sont de taille micrométrique jusqu'à quelques centaines de micromètres. Ils sont d'une faible connectivité dans le volume de la roche, à l'échelle macroscopique de l'échantillon alors que la matrice argileuse est toujours connectée.

La porosité physique de cette roche s'exprime comme le volume des vides, rapporté au volume total de l'échantillon. Cette porosité peut être déterminée à l'aide des masses volumiques ou par la porosimétrie au mercure. Pour l'argilite de Meuse/Haute-Marne, cette porosité varie entre 10 et 17% (voir [61]). La roche comporte deux types de porosité :

- la porosité interne à la matrice argileuse (autour des agrégats et des particules d'argiles), qui concerne les tailles de pores inframicrométriques (environ 90% du volume poreux).
- la porosité à l'interface entre la matrice argileuse et les clastes, qui concerne les tailles de pores micrométriques (environ 10% du volume poreux).

I.6.2 Modèle proposé pour les argilites et source d'anisotropie

La microstructure des argilites présentée précédemment nous suggère une proposition d'un modèle simplifié pour ce type de matériau. Selon ce modèle, un V.E.R des roches argileuses comporte plusieurs phases : la matrice poreuse - qui consiste en matrice argileuse et espace poreux - entoure

les grains de quartz et de calcites (Fig. I.2). Les grains de quartz et de calcites sont considérés comme des inclusions sphériques tandis que l'espace poreux est rempli par des phases liquides et/ou gazeuses.

De nombreux résultats expérimentaux à l'échelle macroscopique démontrent l'existence d'une anisotropie non négligeable dans les roches argileuses (voir également II.2). A l'échelle microscopique, cette anisotropie des argilites peut s'expliquer par les deux sources possibles, l'une destinée à l'anisotropie de la phase solide (matrice argileuse) et l'autre à la morphologie des pores présentant la géométrie et la répartition en orientation. En regardant la microstructure des roches argileuses où la forme des particules argileuses peut être approchée par une ellipsoïde, on suppose que les pores aient la forme d'un sphéroïde aplati avec le rapport d'aspect varié. Hornby et al. [62] ont choisi une valeur unique pour le rapport d'aspect des pores 1/20.

De plus, pour prendre en compte de la répartition en orientation des inclusions des pores, on utilise dans la littérature [119, 69, 130] une fonction statistique qui désigne la densité de distribution dans l'espace des inclusions. En général, l'orientation d'une inclusion de repère local $(\underline{e}_1^\alpha, \underline{e}_2^\alpha, \underline{e}_3^\alpha)$ est liée au repère global $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ par les trois angles d'Euler (φ, β, ϕ) où φ est l'angle entre les deux axes z_3 et z_3^α ($0 \leq \varphi \leq \pi$), β est une rotation du repère global autour de l'axe z_3 ($0 \leq \beta \leq 2\pi$) et ϕ est une rotation de l'inclusion autour de l'axe z_3^α ($0 \leq \phi \leq 2\pi$). Cette fonction dite fonction de distribution d'orientation (ODF) $W(\varphi, \beta, \phi)$ doit vérifier l'équation suivante :

$$\frac{1}{8\pi^2} \int_{\varphi=0}^{\pi} \int_{\beta=0}^{2\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} W(\varphi, \beta, \phi) \sin \varphi d\varphi d\beta d\phi = 1 \quad (\text{I.73})$$

Plusieurs auteurs [119, 69, 130] ont justifié que la fonction ODF dans le milieu isotrope transverse, où z_3 est l'axe de symétrie peut être exprimée par un seul angle d'Euler φ et un paramètre η . Ce paramètre η présente le degré d'alignement des inclusions des pores : $\eta = 0$ signifie une distribution d'orientation isotrope des pores, $\eta > 0$ induit une source d'anisotropie, et η tend vers l'infini dans le cas d'une distribution alignée des pores. L'équation (I.73) dans ce milieu devient donc :

$$\int_{\varphi=0}^{\pi} W(\varphi) d\varphi = 2 \quad (\text{I.74})$$

Pour les argilites, une fonction statistique du type de Fisher est utilisée pour décrire la répartition spatiale du système des pores [119, 69, 130] :

$$W(\varphi) = \frac{\eta \cosh(\eta \cos(\varphi))}{\sinh(\eta)} \quad (\text{I.75})$$

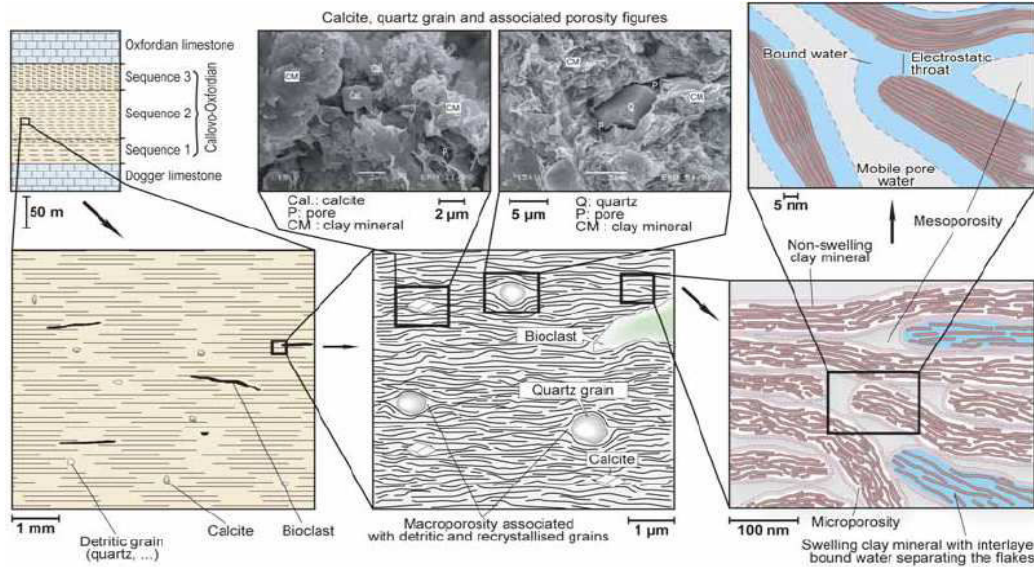


FIGURE I.1: La microstructure de l'argilite de Meuse/Haute-Marne [138]

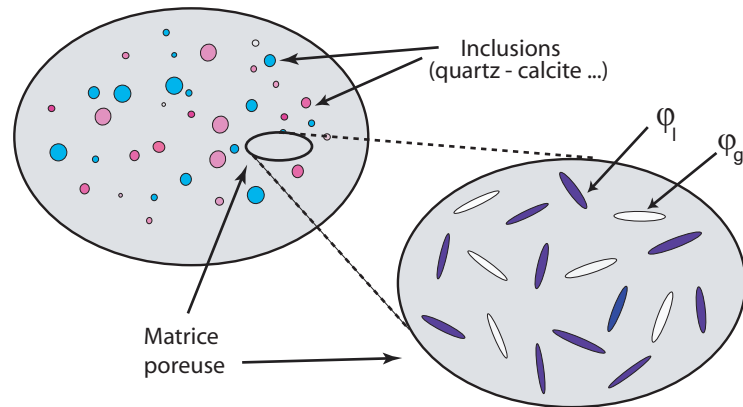
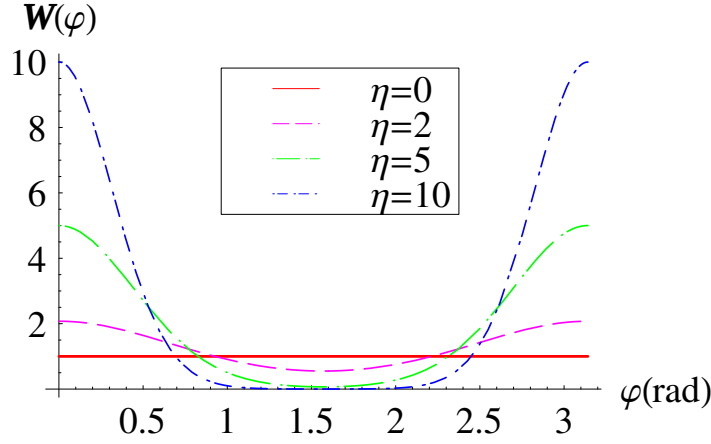


FIGURE I.2: Le V.E.R des roches argileuses

I.7 Méthode d'homogénéisation en deux étapes

Dans ce paragraphe le but est d'appliquer la méthode d'homogénéisation de la conductivité thermique effective aux milieux hétérogènes multiphasiques comme les argilites dont le V.E.R occupe le domaine géométrique Ω . Dans la description microstructurale au préalable des roches argileuses, la porosité de ce type de roches réside principalement au niveau I . On remarque également que la taille des pores est de l'ordre d'une centaine de nanomètres tandis que la taille des grains de quartz et de calcites est d'une dizaine de micromètres. Ces observations nous conduisent à proposer une méthode d'homogénéisation en deux étapes. La première étape permet d'homogénéiser la matrice poreuse Ω_m à partir de la matrice argileuse Ω_a entourant des pores Ω_p qui peuvent être


 FIGURE I.3: Fonction de distribution d'orientation : $0 \leq \eta \leq 10$

décomposée de la phase liquide Ω_l et de la phase gazeuse Ω_g (voir [32]). La deuxième étape donne la solution homogène à l'échelle macroscopique en ajoutant les inclusions de quartz Ω_{qu} et de calcites Ω_{ca} dans la matrice poreuse Ω_m . On acquit les relations suivantes :

$$\begin{aligned}
 \Omega &= \Omega_m + \Omega_{qu} + \Omega_{ca} = \Omega_m + f_{qu}\Omega + f_{ca}\Omega \\
 \Omega_m &= (1 - f_{qu} - f_{ca})\Omega \\
 \Omega_m &= \Omega_a + \Omega_p = \Omega_a + \Omega_l + \Omega_g \\
 f_p &= \frac{\Omega_p}{\Omega}, \quad S_r = \frac{\Omega_l}{\Omega_p}
 \end{aligned} \tag{I.76}$$

où f_{qu}, f_{ca}, f_p sont respectivement les fractions volumiques des inclusions de quartz, de calcites et des pores (la porosité) ; $S_r(\%)$ est le degré de saturation de la phase liquide. Plus précisément :

– *Étape 1 : homogénéiser la matrice poreuse*

Pour cette étape d'homogénéisation, on détermine les fractions volumiques de la phase liquide et de la phase gazeuse comme :

$$\begin{aligned}
 f_p^I &= \frac{\Omega_p}{\Omega_m} = \frac{f_p}{1 - f_{qu} - f_{ca}} \\
 f_l^I &= \frac{\Omega_l}{\Omega_m} = \frac{S_r \Omega_p}{\Omega_m} = S_r f_p^I \\
 f_g^I &= \frac{\Omega_g}{\Omega_m} = \frac{(100 - S_r) \Omega_p}{\Omega_m} = (100 - S_r) f_p^I
 \end{aligned} \tag{I.77}$$

La conductivité thermique effective de la matrice poreuse est déterminée en appliquant l'un des schémas d'estimation présentés précédemment :

$$\lambda_m = \lambda_a + f_l^I (\lambda_l - \lambda_a) \cdot \mathbf{A}_l + f_g^I (\lambda_g - \lambda_a) \cdot \mathbf{A}_g \tag{I.78}$$

avec $\lambda_a, \lambda_l, \lambda_g$ qui désignent respectivement la conductivité thermique de la matrice argileuse, de la phase liquide et de la phase gazeuse ; $\mathbf{A}_l, \mathbf{A}_g$ sont les tenseurs de localisation des phases liquide et gazeuse.

– *Étape 2 : homogénéiser le milieu macroscopique homogène*

Dans cette étape, on homogénéise la matrice poreuse dont la conductivité homogène est λ_m avec les phases minéralogiques qui sont considérées comme des inclusions sphériques. La conductivité thermique des inclusions de quartz et celle de calcite sont respectivement $\lambda_{qu}, \lambda_{ca}$. En utilisant un schéma d'estimation de la conductivité thermique effective, on obtient donc :

$$\lambda_{\text{hom}} = \lambda_m + f_{qu} (\lambda_{qu} - \lambda_m) \cdot \mathbf{A}_{qu}^{\text{sph}} + f_{ca} (\lambda_{ca} - \lambda_m) \cdot \mathbf{A}_{ca}^{\text{sph}} \quad (\text{I.79})$$

avec $\mathbf{A}_i^{\text{sph}}$ ($i = qu, ca$) sont les tenseurs de localisation des inclusions sphériques.

I.8 Conductivité thermique effective d'un milieu poreux isotrope

Les premières applications dans cette partie visent à déterminer la conductivité thermique effective d'un milieu poreux. L'espace poreux est modélisé par une seule famille des inclusions sphéroïdales du rapport d'aspect ε qui consiste de la phase liquide et de la phase gazeuse. En supposant que la conductivité thermique des phases composantes soit isotrope et que la répartition des inclusions poreuses soit aussi isotrope dans la matrice argileuse, il déduit l'isotropie de la conductivité thermique macroscopique. L'approche d'homogénéisation sur ce milieu hétérogène (c'est la solution de la première étape en regardant I.7) permet de mettre en évidence l'influence de la géométrie des inclusions des pores et des schémas d'estimation sur la propriété thermique effective. Il s'agit donc du but des sous-parties qui suivent.

On peut trouver la solution du tenseur de Hill $\mathbf{P}$ pour des inclusions sphéroïdales dans le milieu isotrope dans les travaux de Torquato [129] écrite de la manière suivante :

$$\mathbf{P} = \frac{Q}{\lambda_a} (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2) + \frac{1 - 2Q}{\lambda_a} \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3 \quad (\text{I.80})$$

avec :

$$Q = \begin{cases} \frac{1}{2} \left[1 + \frac{1}{\varepsilon^2 - 1} \left(1 - \frac{\varepsilon}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \arctan \left(\sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2} - 1} \right) \right) \right] & \text{si } \varepsilon < 1 \\ \frac{1}{3} & \text{si } \varepsilon = 1 \\ \frac{1}{2} \left[1 + \frac{1}{\varepsilon^2 - 1} \left(1 - \frac{\varepsilon}{2\sqrt{\varepsilon^2 - 1}} \ln \left(2\varepsilon^2 + 2\varepsilon\sqrt{\varepsilon^2 - 1} - 1 \right) \right) \right] & \text{si } \varepsilon > 1 \end{cases} \quad (\text{I.81})$$

Le tenseur de concentration $\mathbf{A}_i$ ($i = l, g$) déterminé comme (I.42) est donc isotrope dans le cas de répartition aléatoire des inclusions :

$$\mathbf{A}_i = \frac{1}{3} \lambda_a \left(\frac{1}{\lambda_i + 2Q(\lambda_a - \lambda_i)} + \frac{2}{\lambda_a - Q(\lambda_a - \lambda_i)} \right) (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3) \quad (\text{I.82})$$

où λ_a , λ_l et λ_g sont la conductivité thermique correspondante de la matrice argileuse, de la phase liquide et gazeuse.

I.8.1 L'influence du rapport d'aspect des pores, de la porosité et du degré de saturation

Les premières études permettent de visualiser l'effet du rapport d'aspect des pores ε , de la porosité f_p et du degré de saturation S_r sur les résultats prédictifs de la conductivité thermique effective. La conductivité thermique isotrope de la matrice argileuse est prise égale à $\lambda_a = 1.8 \text{ W K}^{-1} \text{ m}^{-1}$ et celle de la phase liquide λ_l et celle de la phase gazeuse λ_g . Ces deux dernières valeurs issues des expériences [27, 131, 130] sont présentées dans le tableau (I.1).

On constate dans les figures (I.4 et I.5) présentant les résultats prédictifs une tendance de diminution de la conductivité thermique effective en fonction de la porosité (avec des valeurs données du degré de la saturation et du rapport d'aspect des pores), tandis qu'elle augmente par rapport au degré de saturation (avec une valeur donnée de la porosité $f_p = 0.2$). Ces résultats sont évidents en comparant les valeurs de la conductivité thermique de la phase matricielle argileuse, de la phase liquide et de la phase gazeuse.

En plus, aux valeurs données de la porosité et du degré de la saturation de l'espace poreux, on observe une influence très importante de la géométrie des pores caractérisée par le rapport d'aspect ε sur la conductivité thermique effective. Plus le rapport d'aspect ε est faible, plus la conductivité thermique effective décroît. Dans le cas où le rapport d'aspect des pores est très faible (ε varie de 0.01 à 0.2), on constate que la conductivité thermique homogénéisée s'accroît très rapidement. Elle est la plus élevée dans le cas que les pores sont sphériques $\varepsilon = 1$.

I.8.2 L'influence du schéma d'estimation

Une comparaison des résultats prédictifs par les différents schémas d'estimation - le schéma dilué (DIL), le schéma de Mori-Tanaka (MT), le schéma différentiel (DIF), le schéma autocohérent (AC) et la borne supérieure de Hashin Shtrikman (HS) - est réalisée et présentée sur les figures (I.7 à I.9).

Dans le cas où le taux de porosité est réduit ($f_p \leq 0.1$) mais le degré de saturation élevé ($S_r \geq 95\%$), les résultats calculés par les schémas HS, MT, et AC sont approximativement identiques l'un de

l'autre. Pour les pores sphériques, on retrouve la superposition des résultats prédictifs par le schéma MT et la borne supérieure de HS.

D'ailleurs on remarque que plus la porosité (ou le degré de saturation) augmente (diminue), plus les différentes prédictions s'écartent les unes des autres. L'approche par le schéma dilué diverge rapidement par rapport au faible rapport d'aspect ε des pores. La prédiction par cette dernière approche donne des résultats non-physiques avec des valeurs négatives pour des porosités dépassant 70% (avec le rapport d'aspect correspondant $\varepsilon = 0.05$).

Pour ce qui concerne le schéma d'estimation autocohérent, on observe qu'à une réduite valeur du rapport d'aspect des pores, l'écart des prédictions entre ce dernier schéma, le schéma MT et la borne supérieure de HS est de plus en plus important. Cet écart monte quand la porosité du milieu est plus forte ou le degré de saturation est plus faible.

Dans tous les cas de calcul, on n'observe pas la violation de la borne supérieure de HS de ces schémas d'estimation. En outre, les prédictions par le schéma DIF et le schéma MT sont toujours les plus proches en comparaison avec d'autres schémas.

I.8.3 L'influence de la minéralogie

La méthode d'homogénéisation en deux étapes est exploitée maintenant pour étudier la sensibilité de la composition minéralogique sur la conductivité thermique effective en incorporant les inclusions sphériques de quartz et de calcite dans la matrice poreuse. On remarque que dans la première étape, on peut utiliser un des différents schémas pour homogénéiser la matrice poreuse. Pourtant, la deuxième étape comportant des inclusions sphériques, on adopte le schéma de Mori Tanaka qui coïncide dans ce cas avec la borne inférieure de Hashin Shtrikman. La conductivité thermique isotrope des inclusions minérales de quartz λ_{qu} et de calcite λ_{ca} a été obtenues à partir des essais expérimentaux [27, 131, 130] et sont présentées dans le tableau (I.1). Les trois cas considérés correspondent aux différentes fractions volumiques de la minéralogie : $f_{qu} = f_{ca} = 0.05$ (modèle A), $f_{qu} = f_{ca} = 0.125$ (modèle B) et $f_{qu} = f_{ca} = 0.25$ (modèle C).

Sur les figures (I.10 à I.12), on retrouve toujours les tendances des courbes de la conductivité thermique effective comme les constatations présentées précédemment pour le milieu poreux bi-phasique (qui correspond au cas $f_{qu} = f_{ca} = 0$). Une accroissement de la conductivité thermique macroscopique par rapport à la fraction volumique des inclusions minérales de quartz et de calcite est également notée. Ces résultats pertinents s'expliquent par les valeurs plus élevées de la conductivité thermique des minéraux de quartz et de calcites par rapport à celle de la matrice argileuse.

TAB. I.1: La conductivité thermique de la phase liquide, de la phase gazeuse et des phases minéralogiques de quartz et de calcite [$W\ m^{-1}\ K^{-1}$]

Phase	Gazeuse	Liquide	Quartz	Calcite
λ	0.0255	0.5984	7.7	3.3

I.9 Conclusion

Dans ce premier chapitre, on a présenté brièvement le principe de l'approche de changement d'échelle dans le contexte d'un comportement thermique linéaire stationnaire des matériaux à microstructure aléatoire. Le point de départ de cette approche est basé sur la solution célèbre d'Eshelby qui permet de déterminer la conductivité thermique homogénéisée en utilisant l'opérateur de moyenne. Ensuite, différents schémas d'estimation des propriétés effectives ont été rappelés parmi lesquels on a mentionné le schéma dilué, schéma de Mori-Tanaka, schéma autocohérent, schéma différentiel et les bornes de Hashin Shtrikman. A partir d'une description de la microstructure des roches argileuses, nous avons proposé un modèle simplifié avec des outils nécessaires pour la modélisation de ce type de roche. Plus précisément, une fonction de distribution en orientation (ODF) a été utilisée pour caractériser la répartition dans l'espace du système des pores. Pour la détermination des propriétés physiques effectives et le comportement macroscopique, on définit par la suite une méthode d'homogénéisation en deux étapes. De plus, plusieurs simulations numériques dans le cas simple d'un milieu poreux hétérogène isotrope ont été effectuées qui permettent d'illustrer l'effet de la porosité, du degré de saturation, de la géométrie des pores et de la composition minéralogique sur les résultats prédictifs de la conductivité thermique effective. Une extension de l'anisotropie de cette conductivité effective sera présentée dans le chapitre suivant.

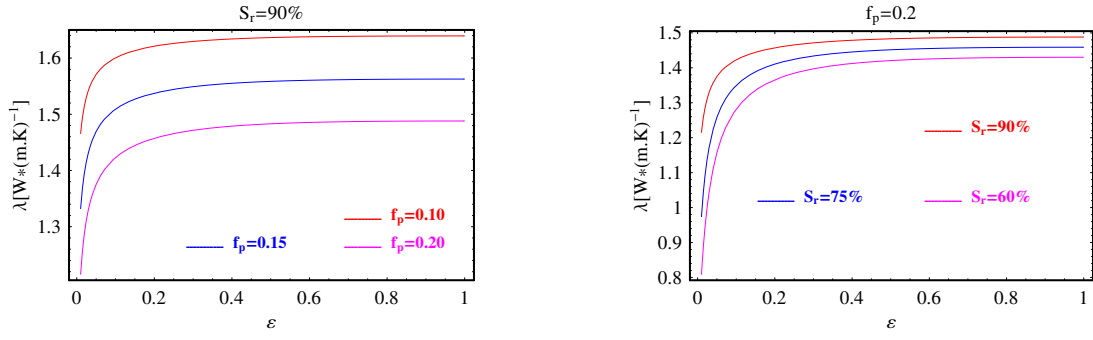


FIGURE I.4: L'évolution de la conductivité thermique effective en fonction du rapport d'aspect ε des pores (schéma MT)

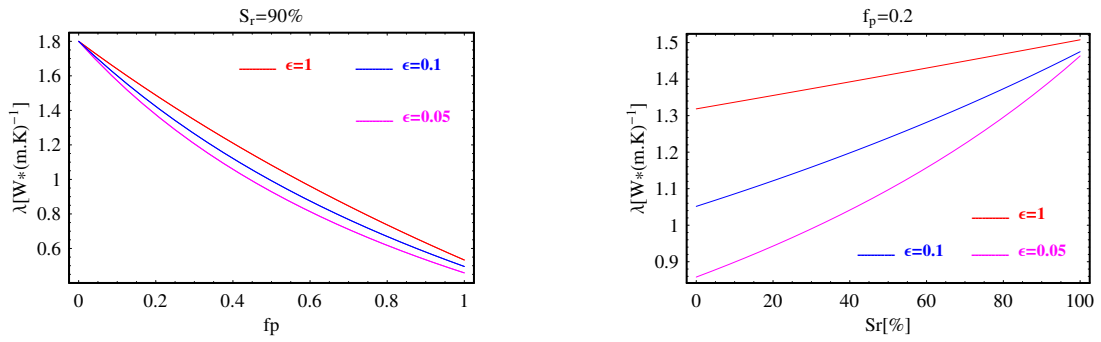


FIGURE I.5: L'évolution de la conductivité thermique effective en fonction de la porosité f_p et du degré de saturation S_r (schéma MT)

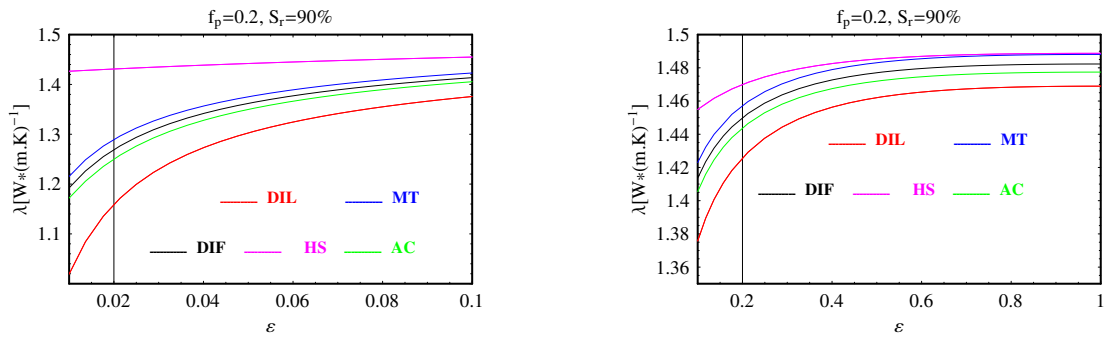


FIGURE I.6: L'évolution de la conductivité thermique effective en fonction du rapport d'aspect ε des pores (comparaison des différents schémas d'estimation)

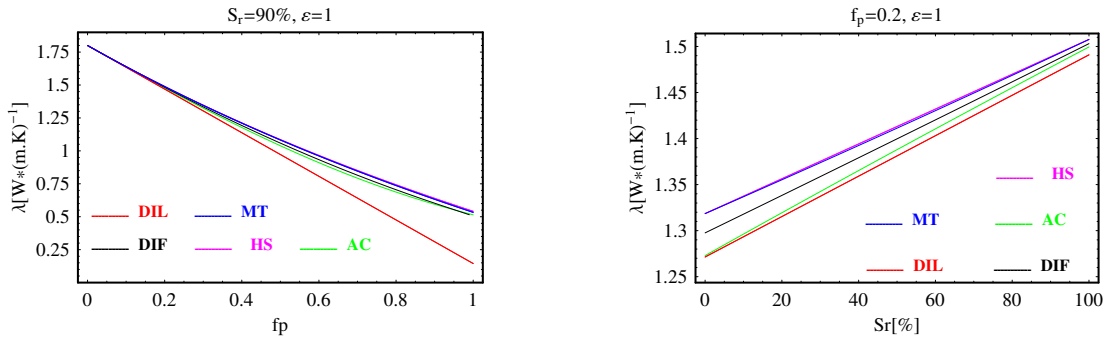


FIGURE I.7: L'évolution de la conductivité thermique effective en fonction de la porosité f_p et du degré de saturation S_r (comparaison des différents schémas d'estimation, cas $\varepsilon = 1$)

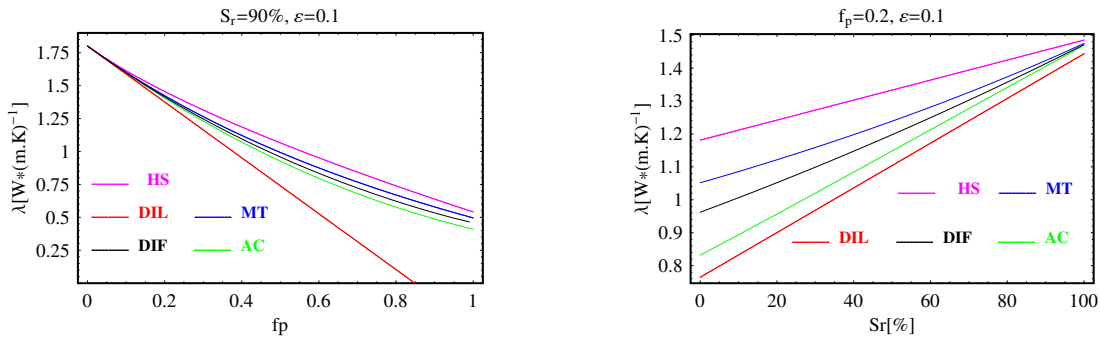


FIGURE I.8: L'évolution de la conductivité thermique effective en fonction de la porosité f_p et du degré de saturation S_r (comparaison des différents schémas d'estimation, cas $\varepsilon = 0.1$)

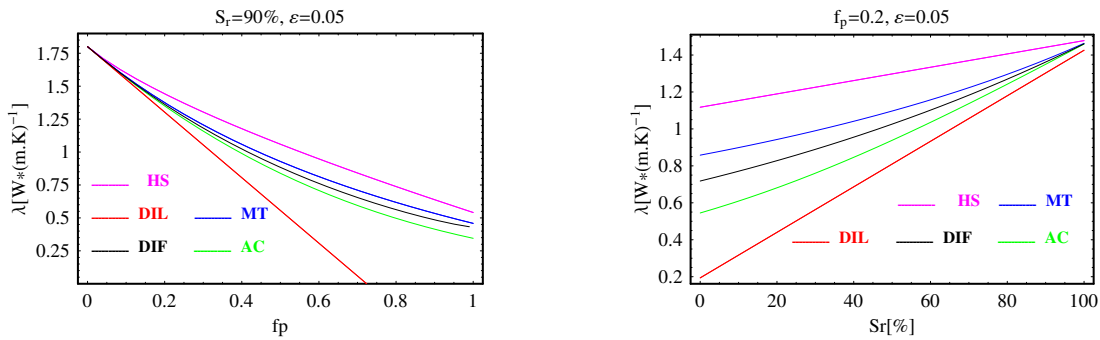


FIGURE I.9: L'évolution de la conductivité thermique effective en fonction de la porosité f_p et du degré de saturation S_r (comparaison des différents schémas d'estimation, cas $\varepsilon = 0.05$)

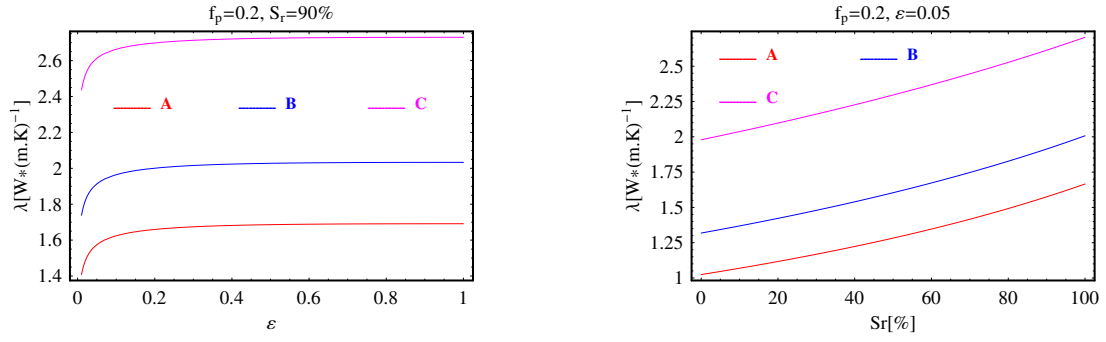


FIGURE I.10: L'influence de la minéralogie sur la conductivité thermique effective (schéma MT-MT)

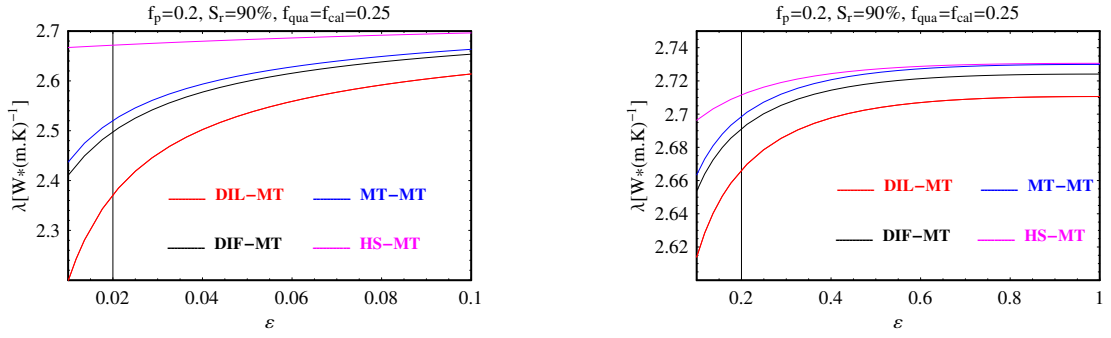


FIGURE I.11: L'évolution de la conductivité thermique effective en fonction du rapport d'aspect ε des pores (comparaison des différents schémas d'estimation avec deux étapes d'homogénéisation)

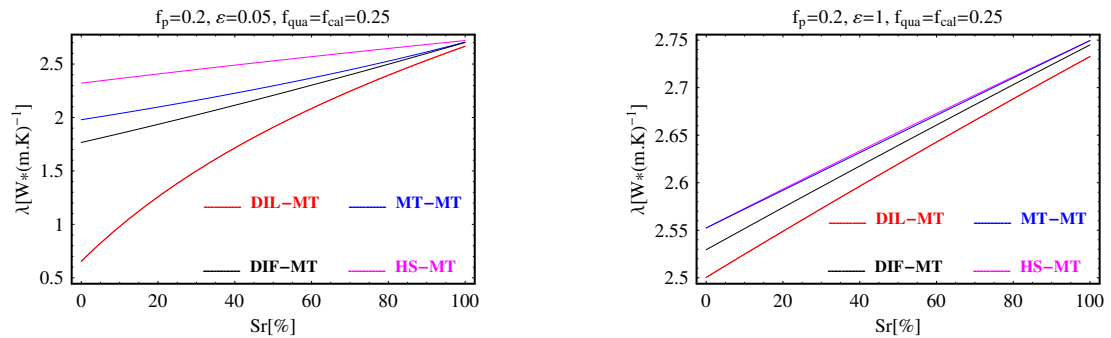


FIGURE I.12: L'évolution de la conductivité thermique effective en fonction de la porosité f_p et du degré de saturation S_r (comparaison des différents schémas d'estimation avec deux étapes d'homogénéisation)

Chapitre II

L'anisotropie de la conductivité thermique effective des argilites

II.1 Introduction

L'étude du comportement anisotrope des matériaux hétérogènes par l'approche de changement d'échelle est un point important et donc de nombreuses recherches dans la littérature lui réserve une large part. Pour les argilites qui sont l'objet de ce travail, nous observons souvent un comportement anisotrope de type isotrope transverse. Ce caractère des roches argileuses peut être expliqué à l'échelle microscopique par les deux sources : la morphologie du système des pores et l'anisotropie de la matrice argileuse. La distinction de l'influence de la morphologie et de l'anisotropie sur les résultats prédictifs de la conductivité thermique effective est donc le but de ce chapitre en utilisant la méthode d'homogénéisation avec les outils fournis dans le chapitre précédent.

Pour ce chapitre, le problème est étendu pour un milieu isotrope transverse. Dans la littérature, ce nouveau problème est résolu par Willis [133] en utilisant la méthode de transformation de Fourier. Une autre manière efficace développée dans ce travail est d'utiliser la fonction de Green qui nous permet de retrouver l'expression analytique du tenseur de Hill $\mathbf{P}$ (et donc du tenseur d'Eshelby $\mathbf{S}^E$) dans le cas des inclusions alignées. Le problème est ensuite enrichi pour les inclusions orientées dont le repère local associé ne coïncidant pas avec le repère global de la phase matrice isotrope transverse. Dans ce cas la solution du tenseur de Hill est calculée de manière numérique. Cette dernière solution joue un rôle important dans notre modèle proposé pour caractériser l'effet des deux sources d'anisotropie.

Enfin, les confrontations des simulations numériques aux résultats expérimentaux nous permettront de valider le modèle proposé.

II.2 Les résultats expérimentaux sur les argilites

Dans cette partie, on présente quelques résultats importants des essais expérimentaux sur les argilites provenant des bassins sédimentaires de Meuse/Haute-Marne (à l'Est de Paris, France) et de Mont Terri (Suisse).

II.2.1 L'argilite de Meuse/Haute-Marne

Plusieurs essais sur l'argilite de M/H-M pour déterminer les propriétés physiques ont été réalisés au laboratoire LAEGO de Nancy. En effet, ces résultats mettent en lumière une anisotropie de type isotrope transverse de cette roche. Dans le domaine des faibles perméabilités, deux essais de très bonne qualité [76] sont disponibles suivant les deux directions principales d'anisotropie. Ils montrent que la perméabilité moyenne suivant la direction de la stratification est de $4.5 \times 10^{-20} \text{m}^2$ alors que perpendiculairement à la stratification, elle est de $5.8 \times 10^{-20} \text{m}^2$, soit un rapport d'anisotropie de 1.29. Des essais triaxiaux ont été réalisés dans des éprouvettes quasi saturées, sous un confinement de 12 MPa correspondant approximativement à l'état des contraintes in situ. Les valeurs de la contraintes à la rupture sont plus élevées pour les éprouvettes dont l'axe correspond au plan de la stratification. Le rapport d'anisotropie de la résistance est alors de 1.13.

En ce qui concerne les propriétés thermiques de l'argilite de M/H-M, plusieurs essais [57] ont été effectués sur sept niveaux de la formation entre 450 m et 525 m et pour trois directions d'anisotropie de structure (trois directions par rapport à la stratification : parallèle, perpendiculaire et 45°). La composition minéralogique et la porosité de chaque échantillon sont présentées dans le tableau (II.1).

Les mesures de la diffusivité thermique et de la chaleur spécifique sont réalisées respectivement par un appareil flash et un calorimètre. La conductivité thermique est calculée à partir des résultats expérimentaux, à savoir les mesures de diffusivité thermique, de chaleur spécifique, de la masse volumique et de la chaleur spécifique du matériau sec, de la chaleur spécifique de l'eau et de la teneur en eau. Les résultats montrent que la diffusivité thermique et la conductivité thermique diminuent avec la teneur en eau. Par ailleurs, pour les matériaux des cellules testées, il apparaît une influence de l'anisotropie due à la stratification significative. La diffusivité thermique dans la direction parallèle à la stratification (0°) est supérieure à celle dans la direction à 45° qui est elle-même supérieure à celle dans la direction perpendiculaire (90°). Les évolutions de la conductivité thermique par rapport à la saturation sont présentées dans les figures (II.1 à II.3).

II.2.2 L'argilite de Mont Terri

Dans le laboratoire souterrain du Mont Terri (Suisse), onze organisations de six pays dont ANDRA et IPSN en France ont réuni les caractéristiques d'une formation argileuse du Mésozoïque, les argiles d'Opalinus. L'objectif de ce programme de recherche est d'analyser les propriétés physiques de ces argilites à savoir hydrogéologiques, géochimiques et géomécaniques, d'étudier les changements induits par l'excavation de galeries, et d'évaluer les techniques de recherche appropriées pour les améliorer.

Une des expériences réalisées dans ce laboratoire souterrain du Mont Terri est de caractériser les propriétés thermiques de l'argile d'Opalinus. Les résultats des mesures in situ ont prouvé que le comportement thermique de l'argilite n'était pas homogène autour du forage où le réchauffeur était installé. Par ailleurs, les résultats expérimentaux obtenus dans le laboratoire [68] ont également montré que la conductivité thermique dans la direction parallèle à la stratification (0°) est supérieure à celle dans la direction perpendiculaire (90°). Les valeurs des paramètres physiques sont présentées dans le tableau (II.2).

TAB. II.1: La composition minéralogique et la porosité de l'argilite de M/H-M

[57]

Échantillon	$SiO_2(\%)$	$CaCO_3(\%)$	Matrice argilleuse(%)	Porosité(%)
s1	30.	34.4	35.6	10.46
s2	33.	18.5	48.5	13.41
s3	29.	27.9	43.1	11.43
s4	30.	21.5	48.5	12.86
s5	27.	18.2	54.8	11.31
s6	21.	61.4	17.6	8.54
s7	34.	26.2	39.8	9.32

II.3 Tenseur de Hill dans le milieu isotrope transverse

Les résultats expérimentaux à l'échelle macroscopique des argilites nous suggèrent de résoudre le problème d'inhomogénéité d'Eshelby dans le cas général d'un milieu isotrope transverse. La

TAB. II.2: La composition minéralogique et la porosité de l'argilite de Mont Terri [128]

Paramètre	Valeur(%)
Illite,Chlorite,Kaolinite	55.
IS Illite, Smectite	10.
Quartz	20.
Calcite	10.
Feldspath, Dolomite...	5.
Porosité physique	12.-18.
Porosité (mercure injecté)	5.-10.

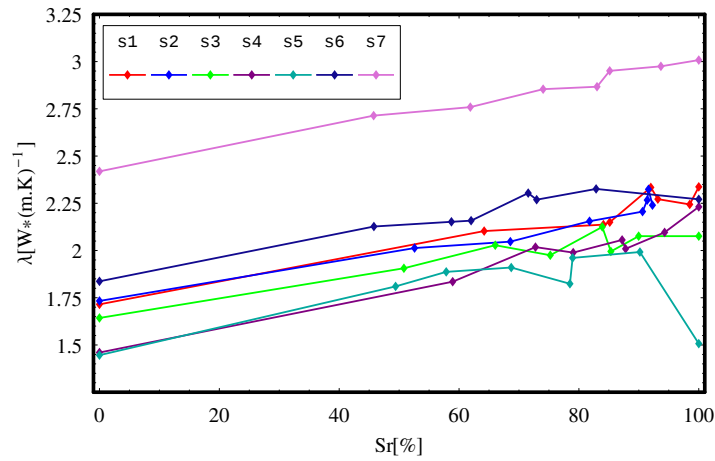


FIGURE II.1: L'évolution de la conductivité thermique de M/H-M en fonction du degré de saturation S_r - direction parallèle [57]

résolution de ce problème nous permet de trouver les éléments du tenseur de Hill $\mathbf{P}$ qui fournit donc les outils cruciaux pour la mise en pratique de l'approche d'homogénéisation de la conductivité thermique effective des roches argileuses.

II.3.1 Matrice de rotation

Considérons maintenant le problème d'inhomogénéité isolée où la phase matrice solide isotrope transverse est associée à un repère global $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ dont $\mathbf{e}_3$ est l'axe de symétrie. Nous avons défini

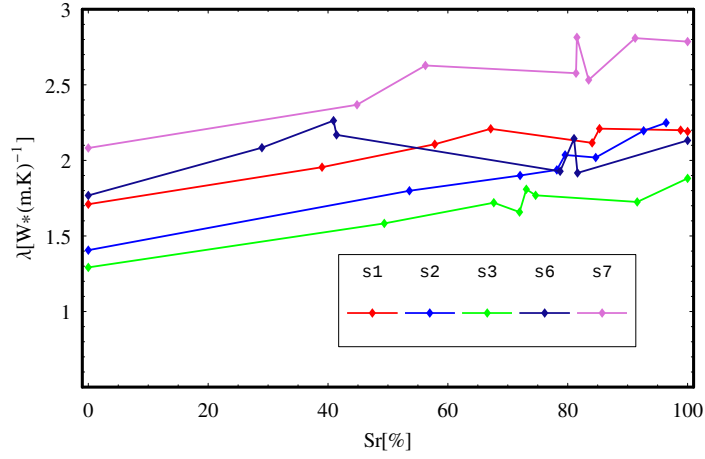


FIGURE II.2: L'évolution de la conductivité thermique de M/H-M en fonction du degré de saturation S_r - direction à 45° [57]

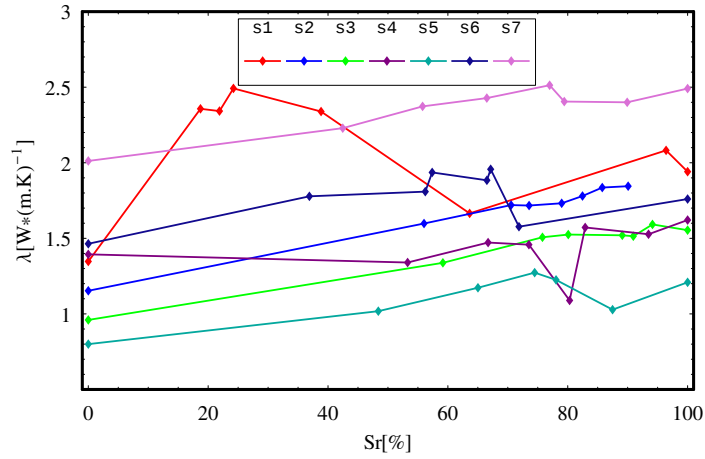


FIGURE II.3: L'évolution de la conductivité thermique de M/H-M en fonction du degré de saturation S_r - direction perpendiculaire [57]

ensuite un repère local associé à l'inclusion sphéroïdale $(\underline{e}_1^\alpha, \underline{e}_2^\alpha, \underline{e}_3^\alpha)$ où $\underline{e}_3^\alpha$ est l'axe de symétrie d'inhomogénéité. On constate que l'inhomogénéité est alignée dans le cas où les deux repères local et global se coïncident et elle est orientée arbitrairement si ces deux repères sont différents.

La méthode de changement de repère nous permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \underline{e}_i^\alpha &= Q_{ij}^\alpha \underline{e}_j & (i, j = 1, 2, 3) \\ \underline{e}_k &= R_{kl}^\alpha \underline{e}_l^\alpha & (k, l = 1, 2, 3) \end{aligned} \tag{II.1}$$

où $\mathbf{R}^\alpha$ est l'inverse du tenseur $\mathbf{Q}^\alpha$:

$$\begin{aligned}\mathbf{R}^\alpha &= (\mathbf{Q}^\alpha)^{-1} \\ R_{kl}^\alpha &= Q_{lk}^\alpha\end{aligned}\tag{II.2}$$

On remarque que le repère local d'inclusion orientée arbitrairement peut être obtenu par une première rotation du repère global autour de l'axe e_3 d'un angle β (avec $\beta \in [0, 2\pi]$) qui représente un repère intermédiaire $(e_1^\beta, e_2^\beta, e_3^\beta)$ et puis une deuxième rotation du repère intermédiaire autour de l'axe e_1^β d'un angle φ (avec $\varphi \in [0, \pi]$). On obtient donc les matrices de rotations suivantes :

$$\mathbf{Q}_\varphi^\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q}_\beta^\alpha = \begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta & 0 \\ \sin \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\tag{II.3}$$

et donc :

$$\mathbf{Q}^\alpha = \mathbf{Q}_\varphi^\alpha \cdot \mathbf{Q}_\beta^\alpha = \begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta & 0 \\ \cos \varphi \sin \beta & \cos \varphi \cos \beta & -\sin \varphi \\ \sin \varphi \sin \beta & \sin \varphi \cos \beta & \cos \varphi \end{pmatrix}\tag{II.4}$$

II.3.2 La solution analytique du tenseur de Hill pour l'inclusion alignée

On étudie tout d'abord le cas de l'inclusion sphéroïdale alignée dont le repère local associé coïncide avec celui de la matrice isotrope transverse.

A partir des formules générales (I.29, I.30), on réécrit la fonction de Green comme la suivante :

$$\begin{aligned}G(\underline{x}, \underline{x}') &= \frac{1}{4\pi\sqrt{\det \boldsymbol{\lambda}}} \frac{1}{\sqrt{\mathbf{T}(\underline{x} - \underline{x}') \cdot \mathbf{S} \cdot (\underline{x} - \underline{x}')}} \\ \mathbf{S} &= \boldsymbol{\lambda}^{-1} = S_{ij} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j\end{aligned}\tag{II.5}$$

On y introduit maintenant le vecteur $\underline{u}$ et celui unitaire correspondant $\underline{\ell}$:

$$\begin{aligned}\underline{u} &= \underline{x}' - \underline{x}, \quad u = |\underline{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} \\ \underline{\ell} &= \frac{\underline{u}}{|\underline{u}|} = \ell_1 \underline{e}_1 + \ell_2 \underline{e}_2 + \ell_3 \underline{e}_3\end{aligned}\tag{II.6}$$

On obtient donc :

$$\mathbf{T}(\underline{x} - \underline{x}') \cdot \mathbf{S} \cdot (\underline{x} - \underline{x}') = \mathbf{T} \underline{u} \cdot \mathbf{S} \cdot \underline{u} = S_{ij} u_i u_j\tag{II.7}$$

Pour le milieu isotrope transverse, la matrice de la conductivité thermique peut être exprimée par :

$$\boldsymbol{\lambda} = \nu^2 \lambda (\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2) + \lambda \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3 \quad (\text{II.8})$$

Il déduit à :

$$\begin{aligned} \det \boldsymbol{\lambda} &= \nu^4 \lambda^3 \\ \mathbf{S} &= \frac{1}{\nu^2 \lambda} (\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2) + \frac{1}{\lambda} \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3 \\ S_{ij} u_i u_j &= \frac{u_1^2 + u_2^2 + \nu^2 u_3^2}{\nu^2 \lambda} \end{aligned} \quad (\text{II.9})$$

et donc la fonction de Green s'écrit comme :

$$G(\underline{u}) = \frac{1}{4\pi\nu\lambda} \frac{1}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \nu^2 u_3^2}} \quad (\text{II.10})$$

Le tenseur de Hill $\mathbf{P}$ défini par (I.34) peut être réécrit comme :

$$P_{ij} = -\frac{\partial}{\partial x_j} \int_I \frac{\partial G(\underline{x} - \underline{x}')}{\partial x_i} dV_{\underline{x}'} \quad (\text{II.11})$$

Le développement de la dérivation de G par rapport à x_i donne :

$$\frac{\partial G(\underline{x} - \underline{x}')}{\partial x_i} = \frac{\partial G(\underline{u})}{\partial u_i} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = -\frac{\partial G(\underline{u})}{\partial u_i} \quad (\text{II.12})$$

avec :

$$\begin{aligned} \frac{\partial G(\underline{u})}{\partial u_i} &= -\frac{1}{4\pi\nu\lambda} \frac{u_i}{(u_1^2 + u_2^2 + \nu^2 u_3^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (i = 1, 2) \\ \frac{\partial G(\underline{u})}{\partial u_3} &= -\frac{\nu}{4\pi\lambda} \frac{u_3}{(u_1^2 + u_2^2 + \nu^2 u_3^2)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned} \quad (\text{II.13})$$

L'intégration volumique peut être considérée comme l'intégration surfacique qui s'exprime sous forme de l'angle solide :

$$dV_{\underline{x}'} = du dS = u^2 du d\omega \quad (\text{II.14})$$

La formule (II.11) est réécrite sous la forme suivante :

$$P_{ij} = \frac{\partial}{\partial x_j} \int_0^r \int_{\Sigma} \frac{\partial G(\underline{u})}{\partial u_i} u^2 du d\omega \quad (\text{II.15})$$

où Σ désigne la surface de la sphère unitaire au point $\underline{x}$ et $r(\ell)$ définit la frontière de l'inclusion ellipsoïdale. On obtient $r(\ell)$ comme la solution positive de l'équation :

$$\frac{(x_1 + r\ell_1)^2 + (x_2 + r\ell_2)^2}{a^2} + \frac{(x_3 + r\ell_3)^2}{\varepsilon^2 a^2} = 1 \quad (\text{II.16})$$

Cette solution a l'expression :

$$r(\underline{\ell}) = -\frac{f}{g} + \sqrt{\frac{f^2}{g^2} + \frac{e}{g}} \quad (\text{II.17})$$

où :

$$\begin{cases} e = 1 - \left(\frac{x_1^2 + x_2^2}{a^2} + \frac{x_3^2}{\varepsilon^2 a^2} \right) \\ f = \frac{x_1 \ell_1 + x_2 \ell_2}{a^2} + \frac{x_3 \ell_3}{\varepsilon^2 a^2} \\ g = \frac{\ell_1^2 + \ell_2^2}{a^2} + \frac{\ell_3^2}{\varepsilon^2 a^2} \end{cases} \quad (\text{II.18})$$

On pose :

$$g_i(\underline{\ell}) = u^2 \frac{\partial G}{\partial x_i} \quad (\text{II.19})$$

avec :

$$\begin{aligned} g_j(\underline{\ell}) &= \frac{\ell_j}{4\pi\nu\lambda (\ell_1^2 + \ell_2^2 + \nu^2 \ell_3^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (j = 1, 2) \\ g_3(\underline{\ell}) &= \frac{\nu \ell_3}{4\pi\lambda (\ell_1^2 + \ell_2^2 + \nu^2 \ell_3^2)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned} \quad (\text{II.20})$$

L'intégration de (II.15) devient :

$$P_{ij} = -\frac{\partial}{\partial x_j} \int_{\Sigma} r(\underline{\ell}) g_i(\underline{\ell}) d\omega \quad (\text{II.21})$$

On constate que g_i est impair par rapport à $\underline{\ell}$ tandis que $\left(\frac{f^2}{g^2} + \frac{e}{g}\right)^{\frac{1}{2}}$ est pair. Il déduit à :

$$\int_{\Sigma} \left(\frac{f^2}{g^2} + \frac{e}{g}\right)^{\frac{1}{2}} g_i(\underline{\ell}) d\omega = 0 \quad (\text{II.22})$$

En combinant les équations (II.17, II.21) et (II.22), on a :

$$P_{ij} = \frac{\partial}{\partial x_j} \int_{\Sigma} \frac{f}{g} g_i(\underline{\ell}) d\omega = \int_{\Sigma} \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{g_i(\underline{\ell})}{g} d\omega \quad (\text{II.23})$$

avec :

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} = \frac{\ell_j}{a^2} \quad (j = 1, 2) \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial x_3} = \frac{\ell_3}{\varepsilon^2 a^2} \quad (\text{II.24})$$

On écrit maintenant l'angle solide $d\omega$ et le vecteur unitaire $\underline{\ell}$ dans le repère sphérique :

$$\begin{aligned} \ell_1 &= \sin \theta \cos \psi \quad , \quad \ell_2 = \sin \theta \sin \psi \quad , \quad \ell_3 = \cos \theta \\ d\omega &= \sin \theta d\theta d\psi \quad , \quad \theta \in [0, \pi] \quad , \quad \psi \in [0, 2\pi] \end{aligned} \quad (\text{II.25})$$

L'intégration analytique par rapport à l'angle $\psi \in [0, 2\pi]$ implique :

$$P_{12} = P_{21} = P_{13} = P_{31} = P_{23} = P_{32} = 0 \quad (\text{II.26})$$

Les autres composantes du tenseur de Hill sont :

$$\begin{aligned} P_{11} = P_{22} &= \int_0^\pi \frac{\sqrt{2}\varepsilon^2 \sin \theta^3}{\nu\lambda [1 + \varepsilon^2 + (1 - \varepsilon^2) \cos(2\theta)] [1 + \nu^2 + (\nu^2 - 1) \cos(2\theta)]^{\frac{3}{2}}} d\theta \\ P_{33} &= \int_0^\pi \frac{\sqrt{2}\nu \sin \theta \cos \theta^2}{\lambda [1 + \varepsilon^2 + (1 - \varepsilon^2) \cos(2\theta)] [1 + \nu^2 + (\nu^2 - 1) \cos(2\theta)]^{\frac{3}{2}}} d\theta \end{aligned} \quad (\text{II.27})$$

En posant $\tan \theta = \nu \tan \zeta$ et ensuite $z = \cos \zeta$, on obtient :

$$\begin{aligned} P_{11} = P_{22} &= \int_0^1 \frac{\varepsilon^2(1 - z^2)}{2\lambda [\varepsilon^2\nu^2 - (\varepsilon^2\nu^2 - 1)z^2]} dz \\ P_{33} &= \int_0^1 \frac{z^2}{\lambda [\varepsilon^2\nu^2 - (\varepsilon^2\nu^2 - 1)z^2]} dz \end{aligned} \quad (\text{II.28})$$

Ces intégrations permettent de déterminer la solution analytique du tenseur de Hill $\mathbf{P}$. On rappelle que ce dernier tenseur et le tenseur de dépolarisation correspondant (ou tenseur d'Eshelby) $\mathbf{S}^E$ ont la relation suivante :

$$\mathbf{S}^E = \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\lambda} \quad (\text{II.29})$$

Ainsi, les expressions analytiques du tenseur de Hill $\mathbf{P}$ et du tenseur d'Eshelby $\mathbf{S}^E$ sont écrites de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= \frac{Q}{\nu^2\lambda} (\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2) + \frac{1 - 2Q}{\lambda} \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3 \\ \mathbf{S}^E &= Q (\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2) + (1 - 2Q) \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3 \end{aligned} \quad (\text{II.30})$$

où :

$$Q = \begin{cases} \frac{1}{2} \left[1 + \frac{1}{\varepsilon^2\nu^2 - 1} \left(1 - \frac{\varepsilon\nu}{\sqrt{1 - \varepsilon^2\nu^2}} \arctan \left(\sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2\nu^2} - 1} \right) \right) \right] & \text{si } \varepsilon\nu < 1 \\ \frac{1}{3} & \text{si } \varepsilon\nu = 1 \\ \frac{1}{2} \left[1 + \frac{1}{\varepsilon^2\nu^2 - 1} \left(1 - \frac{\varepsilon\nu}{2\sqrt{\varepsilon^2\nu^2 - 1}} \ln \left(2\varepsilon^2\nu^2 + 2\varepsilon\nu\sqrt{\varepsilon^2\nu^2 - 1} - 1 \right) \right) \right] & \text{si } \varepsilon\nu > 1 \end{cases} \quad (\text{II.31})$$

Dans le cas particulier du milieu isotrope ($\nu = 1$), on retrouve la formule (I.81). Un autre cas également intéressant est celui de l'inclusion sphérique avec $\varepsilon = 1$:

$$Q^{\text{sph}} = \begin{cases} \frac{1}{2} \left[1 + \frac{1}{\nu^2 - 1} \left(1 - \frac{\nu}{\sqrt{1 - \nu^2}} \arctan \left(\sqrt{\frac{1}{\nu^2} - 1} \right) \right) \right] & \text{si } \nu < 1 \\ \frac{1}{3} & \text{si } \nu = 1 \\ \frac{1}{2} \left[1 + \frac{1}{\nu^2 - 1} \left(1 - \frac{\nu}{2\sqrt{\nu^2 - 1}} \ln \left(2\nu^2 + 2\nu\sqrt{\nu^2 - 1} - 1 \right) \right) \right] & \text{si } \nu > 1 \end{cases} \quad (\text{II.32})$$

II.3.3 La solution du tenseur de Hill pour l'inclusion orientée arbitraire

On considère maintenant le cas général d'une inclusion sphéroïdale d'orientation arbitraire. En supposant λ^α et S^α respectivement les tenseurs de conductivité et de résistivité de la matrice dans le repère local, on a :

$$\lambda_{kl}^\alpha = R_{ik}^\alpha R_{jl}^\alpha \lambda_{ij} = Q_{ki}^\alpha Q_{lj}^\alpha \lambda_{ij} \quad , \quad S_{kl}^\alpha = Q_{ki}^\alpha Q_{lj}^\alpha S_{ij} \quad (\text{II.33})$$

Les expressions des tenseurs λ^α et S^α sont :

$$\begin{aligned} \lambda^\alpha &= \lambda_{11}^\alpha \underline{e}_1^\alpha \otimes \underline{e}_1^\alpha + \lambda_{22}^\alpha \underline{e}_2^\alpha \otimes \underline{e}_2^\alpha + \lambda_{33}^\alpha \underline{e}_3^\alpha \otimes \underline{e}_3^\alpha + \lambda_{23}^\alpha (\underline{e}_2^\alpha \otimes \underline{e}_3^\alpha + \underline{e}_3^\alpha \otimes \underline{e}_2^\alpha) \\ S^\alpha &= S_{11}^\alpha \underline{e}_1^\alpha \otimes \underline{e}_1^\alpha + S_{22}^\alpha \underline{e}_2^\alpha \otimes \underline{e}_2^\alpha + S_{33}^\alpha \underline{e}_3^\alpha \otimes \underline{e}_3^\alpha + S_{23}^\alpha (\underline{e}_2^\alpha \otimes \underline{e}_3^\alpha + \underline{e}_3^\alpha \otimes \underline{e}_2^\alpha) \end{aligned} \quad (\text{II.34})$$

avec :

$$\begin{aligned} \lambda_{11}^\alpha &= \nu^2 \lambda & \lambda_{22}^\alpha &= \frac{\lambda(1 + \nu^2 - (1 - \nu^2) \cos 2\varphi)}{2} \\ \lambda_{33}^\alpha &= \frac{\lambda(1 + \nu^2 + (1 - \nu^2) \cos 2\varphi)}{2} & \lambda_{23}^\alpha &= -\frac{\lambda(1 - \nu^2) \sin 2\varphi}{2} \\ S_{11}^\alpha &= \frac{1}{\nu^2 \lambda} & S_{22}^\alpha &= \frac{1 + \nu^2 - (1 - \nu^2) \cos 2\varphi}{2\nu^2 \lambda} \\ S_{33}^\alpha &= \frac{1 + \nu^2 + (1 - \nu^2) \cos 2\varphi}{2\nu^2 \lambda} & S_{23}^\alpha &= -\frac{(1 - \nu^2) \sin 2\varphi}{2\nu^2 \lambda} \end{aligned} \quad (\text{II.35})$$

La procédure de calcul dans les coordonnées locales est similaire à celle du paragraphe (II.3.2) en remplaçant les composants $x_i, x'_i, u_i, \lambda_{ij}, S_{ij}$ par $x_i^\alpha, x'^\alpha_i, u_i^\alpha, \lambda_{ij}^\alpha, S_{ij}^\alpha$ correspondant. La difficulté supplémentaire, dans le repère locale de l'inclusion, est due au tenseur non diagonal S_{ij}^α qui conduit à la dépendance de la fonction de Green et donc du tenseur de Hill à l'angle φ . Plus précisément, on obtient :

$$\begin{aligned} S_{ij}^\alpha u_i^\alpha u_j^\alpha &= \frac{2(u_1^\alpha)^2 + (1 + \nu^2) [(u_2^\alpha)^2 + (u_3^\alpha)^2]}{2\nu^2 \lambda} \\ &+ \frac{(1 - \nu^2) [(u_2^\alpha - u_3^\alpha)(u_2^\alpha + u_3^\alpha) \cos(2\varphi) - 2u_2^\alpha u_3^\alpha \sin(2\varphi)]}{2\nu^2 \lambda} \end{aligned} \quad (\text{II.36})$$

La fonction de Green dans ce cas a l'expression suivante :

$$G^\alpha(\underline{u}^\alpha) = \frac{1}{2\sqrt{2}\nu\lambda} \frac{1}{\bar{r}^\alpha} \quad (\text{II.37})$$

avec :

$$\begin{aligned} (\bar{r}^\alpha)^2 &= 2(u_1^\alpha)^2 + (1 + \nu^2) [(u_2^\alpha)^2 + (u_3^\alpha)^2] \\ &+ (1 - \nu^2) [(u_2^\alpha - u_3^\alpha)(u_2^\alpha + u_3^\alpha) \cos(2\varphi) - 2u_2^\alpha u_3^\alpha \sin(2\varphi)] \end{aligned} \quad (\text{II.38})$$

Les composantes $g_i^\alpha(\underline{\ell}^\alpha)$ sont déterminées comme :

$$\begin{aligned} g_i^\alpha(\underline{\ell}^\alpha) &= (u^\alpha)^2 \frac{\partial G^\alpha}{\partial x_i^\alpha} = -(u^\alpha)^2 \frac{\partial G^\alpha}{\partial u_i^\alpha} \\ g_1^\alpha(\underline{\ell}^\alpha) &= \frac{\ell_1^\alpha}{\sqrt{2\pi\nu\lambda}U^\alpha} \\ g_2^\alpha(\underline{\ell}^\alpha) &= \frac{(1+\nu^2)\ell_2^\alpha + (1-\nu^2)\ell_2^\alpha \cos(2\varphi) + (1-\nu^2)\ell_3^\alpha \sin(2\varphi)}{2\sqrt{2\pi\nu\lambda}U^\alpha} \\ g_3^\alpha(\underline{\ell}^\alpha) &= \frac{(1+\nu^2)\ell_3^\alpha - (1-\nu^2)\ell_3^\alpha \cos(2\varphi) + (1-\nu^2)\ell_2^\alpha \sin(2\varphi)}{2\sqrt{2\pi\nu\lambda}U^\alpha} \end{aligned} \quad (\text{II.39})$$

avec :

$$U^\alpha = \left\{ 2(\ell_1^\alpha)^2 + (1+\nu^2) [(\ell_2^\alpha)^2 + (\ell_3^\alpha)^2] + (1-\nu^2) [(\ell_2^\alpha - \ell_3^\alpha)(\ell_2^\alpha + \ell_3^\alpha) \cos(2\varphi) - 2\ell_2^\alpha \ell_3^\alpha \sin(2\varphi)] \right\}^{\frac{3}{2}} \quad (\text{II.40})$$

Le tenseur de Hill $\mathbf{P}^\alpha$ est déterminé sous la forme :

$$P_{ij}^\alpha = \frac{\partial}{\partial x_j^\alpha} \int_\Sigma \frac{f^\alpha}{g^\alpha} g_i^\alpha(\underline{\ell}^\alpha) d\omega = \int_\Sigma \frac{\partial f^\alpha}{\partial x_j^\alpha} \frac{g_i^\alpha(\underline{\ell}^\alpha)}{g^\alpha} d\omega \quad (\text{II.41})$$

où f^α, g^α et $\partial f^\alpha / \partial x_j^\alpha$ sont déduits à partir de (II.18, II.24) en remplaçant z_i et ℓ_i ($i = 1, 2, 3$) par z_i^α et ℓ_i^α respectivement. L'angle solide $d\omega$ et le vecteur unitaire $\underline{\ell}^\alpha$ sont écrits dans les coordonnées sphériques de la même façon que (II.25) :

$$\begin{aligned} \ell_1^\alpha &= \sin \theta \cos \psi, & \ell_2^\alpha &= \sin \theta \sin \psi, & \ell_3^\alpha &= \cos \theta \\ d\omega &= \sin \theta d\theta d\psi, & \theta &\in [0, \pi], & \psi &\in [0, 2\pi] \end{aligned} \quad (\text{II.42})$$

Il déduit le tenseur de Hill qui dépend de l'angle φ :

$$P_{ij}^\alpha(\varphi) = \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\psi=0}^{2\pi} p_{ij}^\alpha(\varphi, \theta, \psi) \sin \theta d\theta d\psi \quad (\text{II.43})$$

où $p_{ij}^\alpha(\varphi, \theta, \psi)$ peut être déterminé à partir de (II.41) en prenant en compte de (II.42). Le calcul montre que :

$$P_{12}^\alpha = P_{21}^\alpha = P_{13}^\alpha = P_{31}^\alpha = 0 \quad (\text{II.44})$$

Le tenseur $\mathbf{P}^\alpha$ déterminé dans le repère local peut être écrit donc sous forme de :

$$\mathbf{P}^\alpha(\varphi) = P_{11}^\alpha(\varphi) \underline{e}_1^\alpha \otimes \underline{e}_1^\alpha + P_{22}^\alpha(\varphi) \underline{e}_2^\alpha \otimes \underline{e}_2^\alpha + P_{33}^\alpha(\varphi) \underline{e}_3^\alpha \otimes \underline{e}_3^\alpha + P_{23}^\alpha(\varphi) (\underline{e}_2^\alpha \otimes \underline{e}_3^\alpha + \underline{e}_3^\alpha \otimes \underline{e}_2^\alpha) \quad (\text{II.45})$$

Pour une valeur donnée de φ , on peut intégrer numériquement le tenseur de Hill $\mathbf{P}^\alpha$ en utilisant la méthode de Gauss-Legendre :

$$P_{ij}^\alpha(\varphi) = \sum_{k=1}^{N_\theta} \sum_{l=1}^{N_\psi} w_k w_l p_{ij}^\alpha(\varphi, \theta_k, \psi_l) \sin(\theta_k) \quad (\text{II.46})$$

TAB. II.3: Les composants du tenseur de Hill dans le repère locale, $\varphi = \pi/5$,
 $\varepsilon = 0.1$, $\nu = \sqrt{2}$, $\lambda = 1$, $N_\psi = 2N_\theta$

N_θ	P_{11}^α	P_{22}^α	P_{33}^α	P_{23}^α	P_{32}^α
10	0.043029	0.046749	0.632002	-0.0144664	-0.0144664
20	0.0430476	0.046769	0.631955	-0.0144738	-0.0144738
40	0.0430473	0.0467687	0.631956	-0.0144736	-0.0144736
80	0.0430473	0.0467687	0.631956	-0.0144736	-0.0144736
160	0.0430473	0.0467687	0.631956	-0.0144736	-0.0144736

 TAB. II.4: Les composants du tenseur de Hill dans le repère locale, $\varphi = \pi/5$,
 $\varepsilon = 0.01$, $\nu = \sqrt{2}$, $\lambda = 1$, $N_\psi = 2N_\theta$

N_θ	P_{11}^α	P_{22}^α	P_{33}^α	P_{23}^α	P_{32}^α
10	0.00434164	0.0046813	0.732164	-0.00162881	-0.00162881
20	0.00510554	0.00550395	0.730223	-0.00191965	-0.00191965
40	0.00493638	0.00532178	0.730653	-0.00185525	-0.00185525
80	0.00488017	0.00526125	0.730795	-0.00183385	-0.00183385
160	0.00488017	0.00526125	0.730795	-0.00183385	-0.00183385

où w_k, θ_k, w_l et ψ_l désignent les poids et les coordonnées de Gauss-Legendre. Ces derniers correspondent à N_θ et N_ψ qui sont déterminés dans l'intervalle respectivement $\theta \in [0, \pi]$ et $\psi \in [0, 2\pi]$. L'expression de la solution du tenseur de Hill $\mathbf{P}$ pour l'inclusion orientée arbitraire dans le repère global s'acquiert comme :

$$P_{ij} = Q_{ki}^\alpha Q_{lj}^\alpha P_{kl}^\alpha \quad (\text{II.47})$$

qui déduit :

$$\begin{aligned}
 P_{11} &= P_{11}^\alpha \cos(\beta)^2 + \left(P_{22}^\alpha \cos(\varphi)^2 + P_{33}^\alpha \sin(\varphi)^2 + P_{23}^\alpha \sin(2\varphi) \right) \sin(\beta)^2 \\
 P_{12} &= P_{21} = \frac{\sin(2\beta) \left(P_{22}^\alpha \cos(\varphi)^2 + P_{33}^\alpha \sin(\varphi)^2 + P_{23}^\alpha \sin(2\varphi) - P_{11}^\alpha \right)}{2} \\
 P_{13} &= P_{31} = \frac{(2P_{23}^\alpha \cos(2\varphi) + (P_{33}^\alpha - P_{22}^\alpha) \sin(2\varphi)) \sin(\beta)}{2} \\
 P_{22} &= P_{11}^\alpha \sin(\beta)^2 + \left(P_{22}^\alpha \cos(\varphi)^2 + P_{33}^\alpha \sin(\varphi)^2 + P_{23}^\alpha \sin(2\varphi) \right) \cos(\beta)^2 \\
 P_{23} &= P_{32} = \frac{(2P_{23}^\alpha \cos(2\varphi) + (P_{33}^\alpha - P_{22}^\alpha) \sin(2\varphi)) \cos(\beta)}{2} \\
 P_{33} &= P_{22}^\alpha \sin(\varphi)^2 - P_{23}^\alpha \sin(2\varphi) + P_{33}^\alpha \cos(\varphi)^2
 \end{aligned} \tag{II.48}$$

Soit un tenseur d'ordre deux $\mathbf{D}$ dont les composants dans le repère local $\underline{e}_i^\alpha$ et le repère global $\underline{e}_i$ sont respectivement D_{ij}^α et D_{ij} . En considérant que la distribution des inclusions de chaque famille est isotrope, on peut déterminer la valeur moyenne $\langle \mathbf{D} \rangle$ comme suivant :

$$\langle \mathbf{D} \rangle = \frac{1}{4\pi} \int_{\varphi=0}^{\pi} \int_{\beta=0}^{2\pi} D_{mn}^\alpha \underline{e}_m^\alpha \otimes \underline{e}_n^\alpha \sin \varphi d\varphi d\beta \tag{II.49}$$

En prenant en compte de (II.1), on obtient :

$$\begin{aligned}
 \langle \mathbf{D} \rangle &= \langle D_{ij} \rangle \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \\
 \langle D_{ij} \rangle &= \frac{1}{4\pi} \int_{\varphi=0}^{\pi} \int_{\beta=0}^{2\pi} D_{mn}^\alpha Q_{mi}^\alpha Q_{nj}^\alpha \sin \varphi d\varphi d\beta
 \end{aligned} \tag{II.50}$$

Le moyen du tenseur de Hill $\langle \mathbf{P} \rangle$ est donc calculé comme :

$$\begin{aligned}
 \langle \mathbf{P} \rangle &= \langle P_{ij} \rangle \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \\
 \langle P_{ij} \rangle &= \frac{1}{4\pi} \int_{\varphi=0}^{\pi} \int_{\beta=0}^{2\pi} P_{mn}^\alpha Q_{mi}^\alpha Q_{nj}^\alpha \sin \varphi d\varphi d\beta = \frac{1}{4\pi} \int_{\varphi=0}^{\pi} \left(\int_{\beta=0}^{2\pi} P_{ij} \sin \varphi d\beta \right) d\varphi
 \end{aligned} \tag{II.51}$$

L'intégration par rapport à β déduit des expressions suivantes de $\langle \mathbf{P} \rangle$:

$$\begin{aligned}
 \langle P_{12} \rangle &= \langle P_{21} \rangle = \langle P_{13} \rangle = \langle P_{31} \rangle = \langle P_{23} \rangle = \langle P_{32} \rangle = 0 \\
 \langle P_{11} \rangle &= \langle P_{22} \rangle = \pi \sin(\varphi) \left(P_{11}^\alpha + P_{22}^\alpha \cos(\varphi)^2 + P_{33}^\alpha \sin(\varphi)^2 + P_{23}^\alpha \sin(2\varphi) \right) \\
 \langle P_{33} \rangle &= 2\pi \sin(\varphi) \left(P_{22}^\alpha \sin(\varphi)^2 - P_{23}^\alpha \sin(2\varphi) + P_{33}^\alpha \cos(\varphi)^2 \right)
 \end{aligned} \tag{II.52}$$

II.4 Calcul du tenseur de concentration

La solution de la méthode d'homogénéisation nous donne la relation ci dessous entre le gradient thermique macroscopique $\underline{E}$ et le moyen du gradient thermique microscopique de chaque phase $\langle \underline{\varepsilon}_i \rangle$:

$$\langle \underline{\varepsilon}_i \rangle = \mathbf{A}_i \cdot \underline{E} \tag{II.53}$$

Le tenseur de concentration $\mathbf{A}_i$ est déterminé à partir de la solution du tenseur de Hill $\mathbf{P}_i$:

$$\mathbf{A} = \langle [\mathbf{I} + (\boldsymbol{\lambda}_i - \boldsymbol{\lambda}) \cdot \mathbf{P}_i]^{-1} \rangle = \langle \mathbf{A}^{\text{dil}} \rangle \quad (\text{II.54})$$

Le symbol $\langle . \rangle$ désigne l'opérateur de moyenne dans l'espace. Le tenseur de Hill $\mathbf{P}_i$ correspondant a les composants dans le repère global comme (II.48). Il conduit que $\mathbf{A}^{\text{dil}}$ est une fonction de (φ, β) . Dans le cas où la distribution d'orientation des inclusions est isotrope, on peut écrire :

$$A_{kl} = \frac{1}{4\pi} \int_{\varphi=0}^{\pi} \int_{\beta=0}^{2\pi} A_{kl}^{\text{dil}}(\varphi, \beta) \sin \varphi d\varphi d\beta \quad (\text{II.55})$$

On constate que le tenseur de concentration $\mathbf{A}$ dépend du rapport d'aspect de l'inclusion, de la conductivité de l'inclusion $\boldsymbol{\lambda}_i$ et de la matrice $\boldsymbol{\lambda}$.

Distribution orientée des inclusions sphéroïdales

La distribution orientée dans l'espace des inclusions peut être caractérisée par la fonction de la distribution d'orientation $W(\varphi, \beta)$ (I.6.2). On remarque que dans le cas de l'anisotropie de type isotrope transverse cette fonction dépend d'un seul angle Eulerien φ et un paramètre η (voir I.6.2). Les moyens du tenseur de concentration $\langle \mathbf{A} \rangle$ (II.55) sont remplacés par :

$$A_{kl} = \frac{1}{4\pi} \int_{\varphi=0}^{\pi} \int_{\beta=0}^{2\pi} W(\varphi) A_{kl}^{\text{dil}}(\varphi, \beta) \sin \varphi d\varphi d\beta \quad (\text{II.56})$$

Ces valeurs moyennes peuvent être calculées numériquement en utilisant la méthode de Gauss-Legendre.

II.5 L'effet de la morphologie des pores [48]

Le but de cette partie est de mettre en lumière l'impact de la morphologie du système des pores sur le degré d'anisotropie de la conductivité thermique effective des argilites en utilisant la méthode d'homogénéisation en deux étapes. On rappelle que le modèle proposé pour les argilites est décrit comme dans (I.6.2) où l'espace poreux consiste de la phase liquide et gazeuse. Cette phase poreuse est considérée ici comme une seule famille d'inclusion sphéroïdale de même forme caractérisée par le rapport d'aspect ε . De plus, la phase matricielle argileuse dont la conductivité thermique est isotrope entoure des inclusions sphériques de quartz et de calcites qui disposent aussi les propriétés thermiques isotropes. Ainsi, la source d'anisotropie de la conductivité thermique effective ne peut qu'être interprétée par la morphologie des inclusions des pores qui signifient leur géométrie et leur répartition en espace.

Une fois de plus, la comparaison des différents schémas prédictifs est également précisée dans ces

études dans le cadre de la méthode d'homogénéisation en deux étapes. L'application des schémas d'estimation pour la détermination de la conductivité thermique effective est effectuée de la manière suivante :

- Dans un premier temps, on utilise un des schémas suivants pour homogénéiser la conductivité thermique de la matrice poreuse : schéma dilué (DIL), schéma différentiel (DIF), schéma de Mori-Tanaka (MT) ou les bornes de Hashin-Shtrikman (HS). En ce qui concerne l'effet de ces derniers schémas sur la conductivité thermique effective de la matrice poreuse isotrope, elle a été réalisée dans le chapitre précédent (I.8). Généralement, on trouve que, pour le milieu poreux quasi-saturé dont la porosité est faible, les prédictions par ces schémas sont plus ou moins identiques de celles estimées par le schéma autocohérent.
- Pour l'étape qui suit, on y ajoute des inclusions sphériques de quartz et de calcites dans la matrice poreuse. Le schéma choisi en ce moment est celui de Mori-Tanaka (MT). On rappelle que dans le cas des inclusions sphériques les résultats prédictifs de deux schémas d'estimation de MT et de Hashin-Shtrikman se coïncident.

Dans les calculs numériques qui suivent, la valeur de conductivité thermique isotrope de la matrice argileuse est considérée égale à $\lambda_a = 1.8 \text{WK}^{-1}\text{m}^{-1}$, $\nu_a = 1$. Les fraction volumiques de quartz et de calcites sont prises respectivement $f_{qu} = 0.2$, $f_{ca} = 0.3$.

Les premières études visent à mettre en évidence l'influence de la distribution d'orientation des pores sur le degré d'anisotropie des résultats prédictifs. Dans le cas général d'une distribution orientée des inclusions poreuses, le tenseur de concentration est calculé de manière numérique comme dans la formule (II.56). La fonction de distribution d'orientation associée dans ce cas dépend de la valeur donnée du paramètre η . On remarque que la distribution isotrope des pores correspond au cas $\eta \rightarrow 0$ tandis que $\eta \rightarrow \infty$ désigne la distribution alignée des inclusions poreuses. Sur les figures (II.4 et II.5) on trouve une augmentation du degré d'anisotropie de la conductivité thermique effective par rapport au paramètre η . L'anisotropie est plus forte pour la répartition alignée des inclusions mais elle est plus faible dans le cas de distribution isotrope. Ces deux cas de distribution particulière encadrent un domaine où se situent les autres cas de répartition orientée des pores. Il s'agit des courbes déterminées avec les valeurs correspondantes $\eta = 2$ et $\eta = 10$.

D'ailleurs, pour une valeur donnée de la porosité $f_p = 0.2$, le degré d'anisotropie de la conductivité thermique effective réduit par rapport à la saturation. A l'inverse, pour le degré de saturation $S_r = 90\%$, on constate un accroissement de l'anisotropie des prédictions dans le domaine de faible porosité $f_p \leq 0.2$. L'évolution de la conductivité thermique en fonction du rapport d'aspect des pores ε est illustrée sur la figure (II.4) qui montre une baisse de temps en temps de l'anisotropie de la conductivité effective. Plus précisément, la courbe de la conductivité thermique effective dans

la direction de l'axe de symétrie λ_{33} augmente par rapport à ε . Pourtant, il ne s'agit pas du cas de la conductivité thermique effective dans la direction parallèle à la stratification λ_{11} .

Les figures (II.6 et II.7) présentent les résultats prédictifs par différents schémas d'estimation (MT-MT, DIF-MT et HS-MT). On trouve que pour le milieu à faible porosité $f_p \leq 0.2$ et quasi-saturé, les prédictions par les schémas de calcul MT-MT et DIF-MT sont assez proches l'une des l'autre même dans le cas de faible rapport d'aspect des inclusions des pores. Ces résultats sont toujours inférieurs à ceux déterminés par l'approche HS-MT. La différence de ces prédictions est plus grande quand le rapport d'aspect ε est plus faible.

II.6 L'effet de l'anisotropie de la matrice argileuse [42]

La deuxième source d'anisotropie des propriétés effectives des argilites est prise en compte dans cette partie. Il s'agit de l'anisotropie de la phase matricielle argileuse. Plus précisément, la conductivité thermique de la matrice argileuse est considérée isotrope transverse et caractérisée par deux paramètres λ_a et ν_a . Dans ces études, les valeurs de deux paramètres $\lambda_a = 1.0 \text{ W K}^{-1} \text{ m}^{-1}$, $\nu_a = \sqrt{2}$ sont choisies alors que les valeurs de la conductivité thermique isotrope des phases liquide, gazeuse et minérale sont issues des expériences comme dans le paragraphe (II.5).

On s'intéresse dans une première étape au cas où les pores ont une distribution aléatoire dans la matrice argileuse (Fig. II.8). Ces inclusions ont une forme aplatie dont le rapport d'aspect s'avère faible $\varepsilon = 0.05$. Il s'agit donc de l'anisotropie de la matrice argileuse à l'échelle microscopique qui implique l'anisotropie de la conductivité thermique effective des argilites à l'échelle macroscopique. Sur la figure (II.8), on retrouve une tendance d'augmentation des résultats prédictifs par rapport à la saturation comme dans la partie (I.8.1). Concernant le schéma d'estimation, il est notable que le schéma MT-MT prédit des résultats toujours plus élevés que ceux du schéma DIF-MT.

On étudie par la suite la combinaison de deux sources d'anisotropie sur la conductivité thermique effective (Fig. II.9 et II.10). Comme attendu, on observe une augmentation d'anisotropie de la conductivité thermique effective dans les cas où la répartition des inclusions des pores est alignée ou orientée. Logiquement, le degré d'anisotropie de la conductivité thermique effective est plus fort dans le cas de distribution alignée des pores.

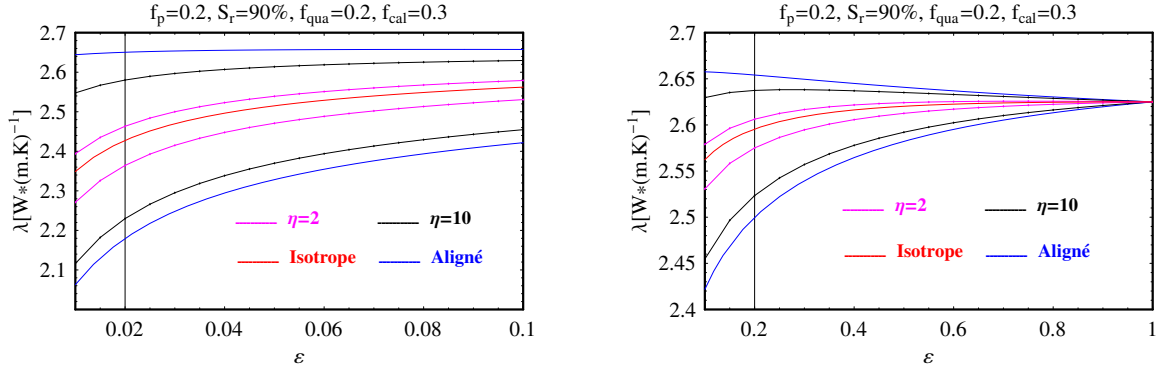


FIGURE II.4: L'évolution de la conductivité thermique effective en fonction du rapport d'aspect et de la distribution d'orientation des pores (cas matrice argileuse isotrope, schéma d'estimation MT-MT)

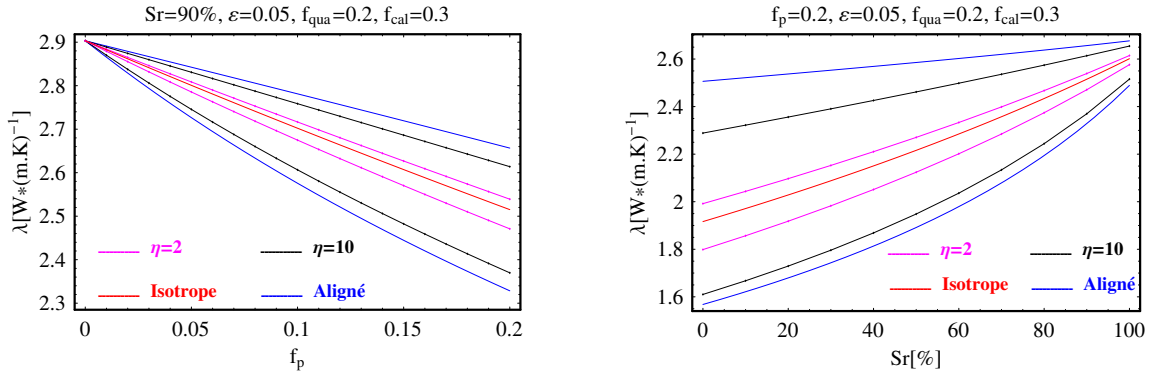


FIGURE II.5: L'évolution de la conductivité thermique effective en fonction de la porosité, du degré de saturation et de la distribution d'orientation des pores (cas matrice argileuse isotrope, schéma d'estimation MT-MT)

II.7 Validations expérimentales

La capacité prédictive de la méthode d'homogénéisation en deux étapes est exploitée dans cette partie pour simuler la conductivité thermique effective des argilites de M/H-M et de Mont Terri. La confrontation des simulations numériques aux données expérimentales nous fournit une validation du modèle et de la procédure proposés.

Dans ces argilites, les faibles valeurs des minéraux tels que du dolomite, pyrite, feldspath (qui sont inférieurs à 5% du volume total) contrairement au pourcentage très important de calcite et de quartz (entre 30% et 60% du volume) justifient la considération de ces derniers constituants dans l'évaluation de la conductivité macroscopique. La forme des minéraux dans la matrice argileuse est toujours considérée sphérique. En ce qui concerne le rapport d'aspect des pores, la valeur de $\varepsilon = 0.05$ a été choisie de la littérature [67] et [62].

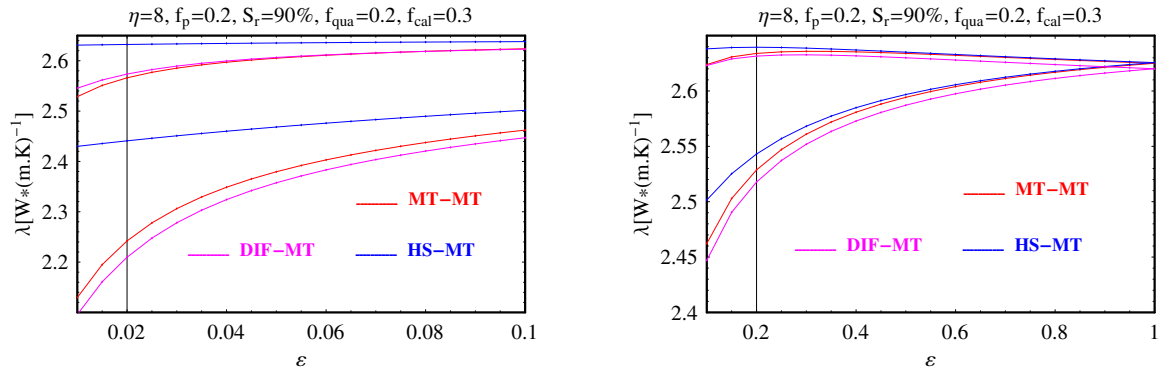


FIGURE II.6: Comparaison des différents schémas d'estimation sur la conductivité thermique effective en fonction du rapport d'aspect et de la distribution d'orientation des pores (cas matrice argileuse isotrope)

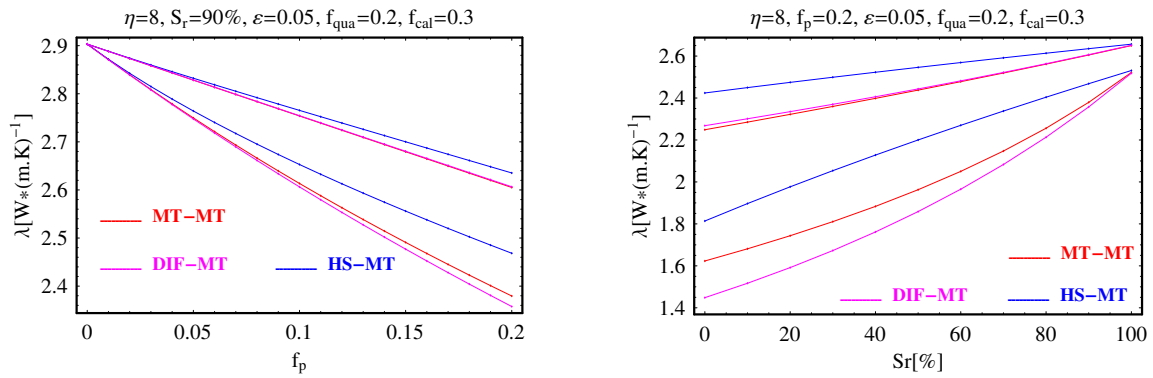


FIGURE II.7: Comparaison des différents schémas d'estimation sur la conductivité thermique effective en fonction de la porosité, du degré de saturation et de la distribution d'orientation des pores (cas matrice argileuse isotrope)

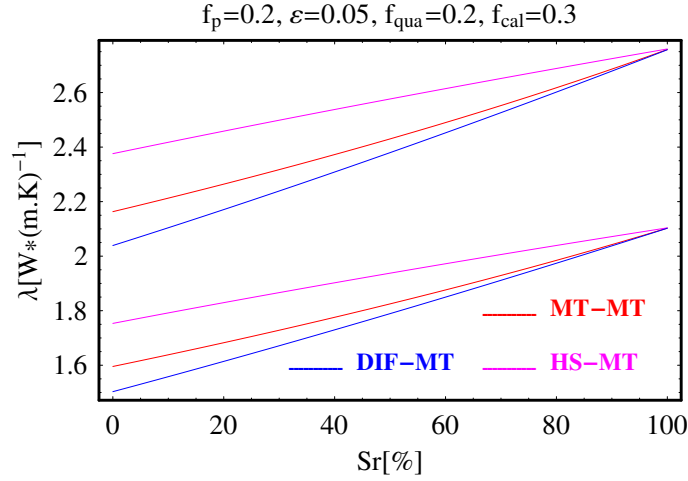


FIGURE II.8: Comparaison des différents schémas d'estimation sur la conductivité thermique effective en fonction du degré de saturation (cas de répartition isotrope des pores dans la matrice argileuse isotrope transverse)

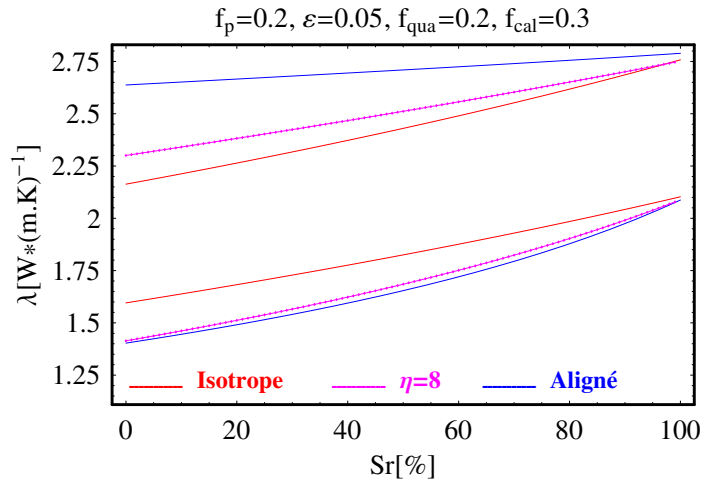


FIGURE II.9: L'évolution de la conductivité thermique effective en fonction du degré de saturation et de la distribution d'orientation des pores (matrice argileuse isotrope transverse, schéma d'estimation MT-MT)

Les valeurs de la conductivité de la matrice argileuse λ_a sont obtenues par les tests successifs réalisés afin de calibrer les simulations numériques avec des données expérimentales.

Comme énoncé, les premières observations relatives aux données expérimentales et les simulations effectuées consistent à une dépendance générale de la conductivité thermique effective de l'argilite de la composition minéralogique du matériau, de la géométrie et de la forme de l'inhomogénéité et du degré de saturation de l'espace poreux (Fig. II.1 à II.5). Les effets de désaturation les plus élevés sont accentués par des valeurs très faibles du rapport d'aspect des inhomogénéités (Fig.

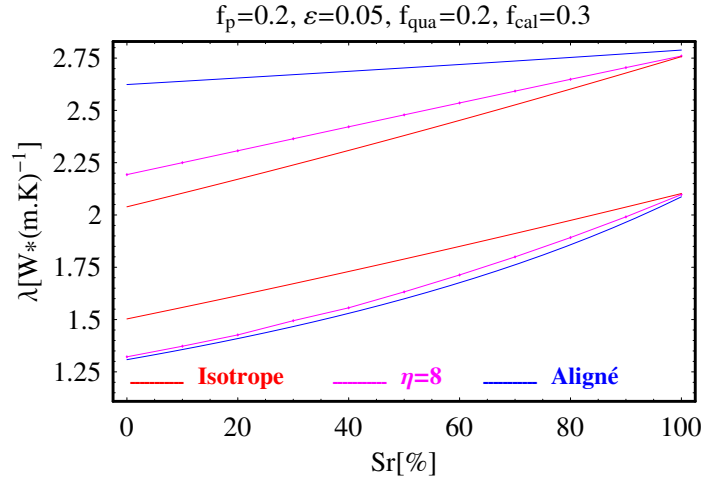


FIGURE II.10: L'évolution de la conductivité thermique effective en fonction du degré de saturation et de la distribution d'orientation des pores (matrice argileuse isotrope transverse, schéma d'estimation DIF-MT)

II.4 et II.6). En plus, on peut affirmer que l'incorporation des constituants minéralogique dans la deuxième étape de l'homogénéisation augmente la conductivité thermique de la matrice (Fig. II.6 à II.10) . Au contraire le degré d'anisotropie de la conductivité macroscopique réduit si la fraction volumique des minéraux augmente en raison de leur isotropie et de leur forme sphérique.

Pourtant dans les simulations numériques, on doit régler un problème inverse : les fractions de volume des pores et des minéraux, leur forme et leur conductivité thermique aussi bien que le degré d'anisotropie sont connues, on détermine la conductivité thermique de la matrice argileuse et l'anisotropie de la distribution d'orientation du système des pores (fonction ODF). Pour un degré d'anisotropie macroscopique donné, plus la fraction volumique des constituants minéraux (quartz, calcite) est élevée plus le degré d'anisotropie de la conductivité thermique de la matrice argileuse et le paramètre d'alignement η de la fonction de distribution d'orientation des pores s'accroissent. Les valeurs déterminées pour les argilites de M/H-M et de Mont Terri sont présentées dans les tableaux (II.5 et II.6). On trouve que les résultats expérimentaux relativement dispersés (en particulier du degré d'anisotropie) de la conductivité macroscopique de l'argilite de M/H-M conduisent à la différence des propriétés thermiques évaluées de la phase matricielle argileuse (caractérisées par λ_a et ν_a). Pourtant, ces valeurs sont plus homogènes dans le cas de l'argilite de Mont Terri qui donne $\lambda_a = 0.7 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$ et $\nu_a = \sqrt{2}$. Sur les figures (II.11 à II.19), on observe une tendance correcte de l'évolution de la conductivité thermique effective en comparaison avec les données expérimentales. Ils illustrent donc les bonnes capacités prédictives du procédé proposé.

II.8 Conclusion

Dans ce chapitre, la méthode d'homogénéisation en deux étapes a été exploitée pour déterminer la conductivité thermique effective des argilites de la Meuse/Haute-Marne et de Mont Terri. A l'échelle macroscopique, les expériences sur ces matériaux nous montrent un comportement de type isotrope transverse qui peut s'expliquer à l'échelle microscopique par la morphologie des inclusions poreuses et l'anisotropie de la matrice argileuse elle-même. La résolution du problème d'inhomogénéité dans une matrice isotrope transverse permet par la suite d'étudier la sensibilité de ces deux sources d'anisotropie sur les résultats prédictifs de la conductivité thermique effective. Enfin, la concordance entre les simulations numériques et les résultats expérimentaux sur la conductivité thermique des argilites confirme la validation du modèle proposé avec le procédé d'homogénéisation en deux étapes.

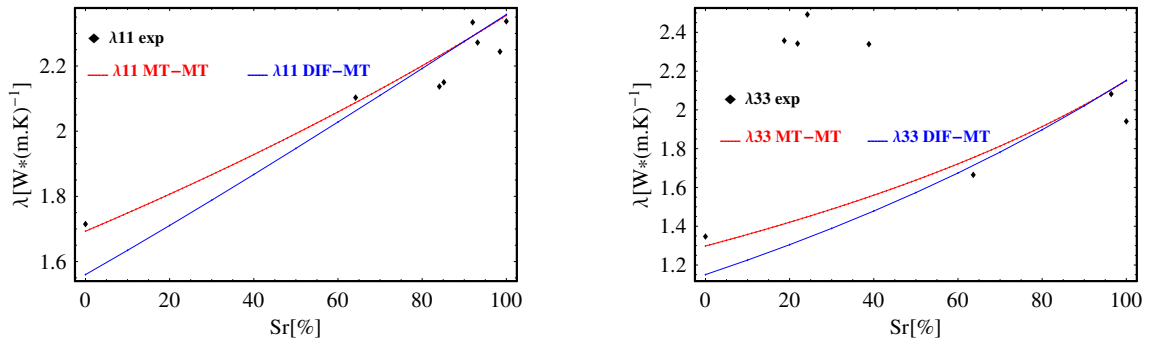


FIGURE II.11: L'évolution de la conductivité thermique effective de l'argilite de M/H-M (Échantillon s1)

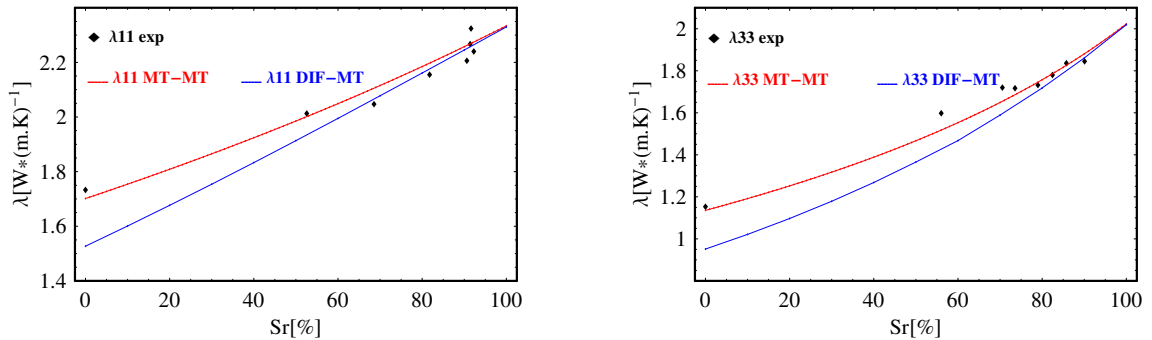


FIGURE II.12: L'évolution de la conductivité thermique effective de l'argilite de M/H-M (Échantillon s2)

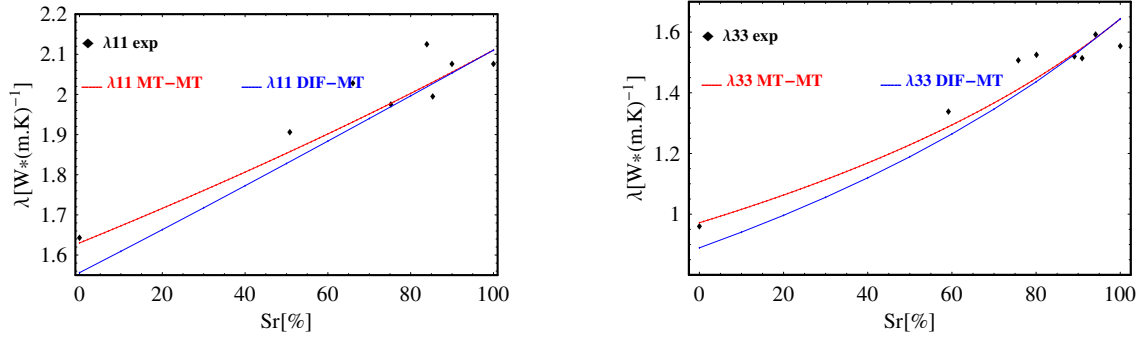


FIGURE II.13: L'évolution de la conductivité thermique effective de l'argilite de M/H-M (Échantillon s3)

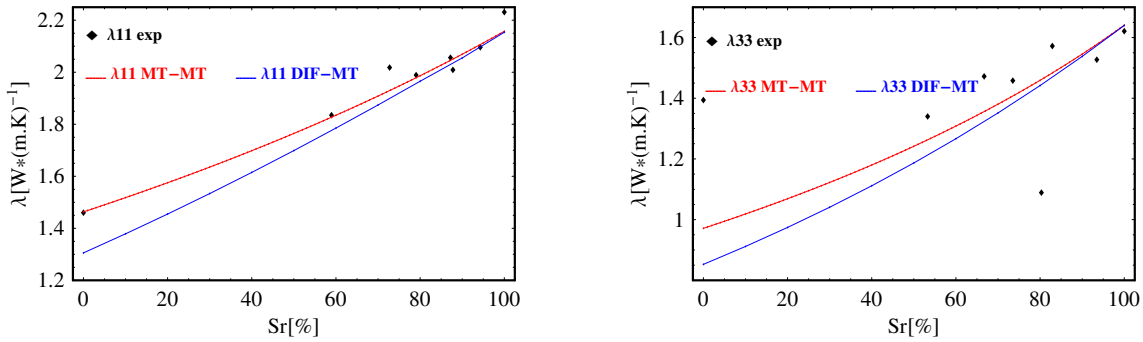


FIGURE II.14: L'évolution de la conductivité thermique effective de l'argilite de M/H-M (Échantillon s4)

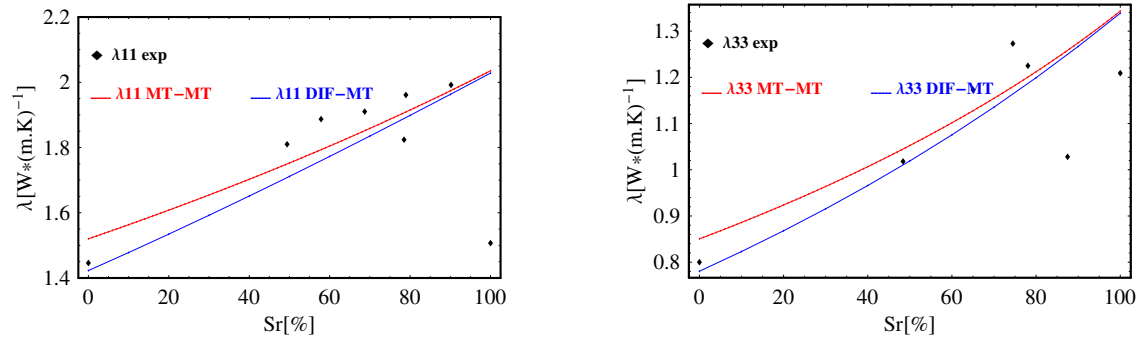


FIGURE II.15: L'évolution de la conductivité thermique effective de l'argilite de M/H-M (Échantillon s5)

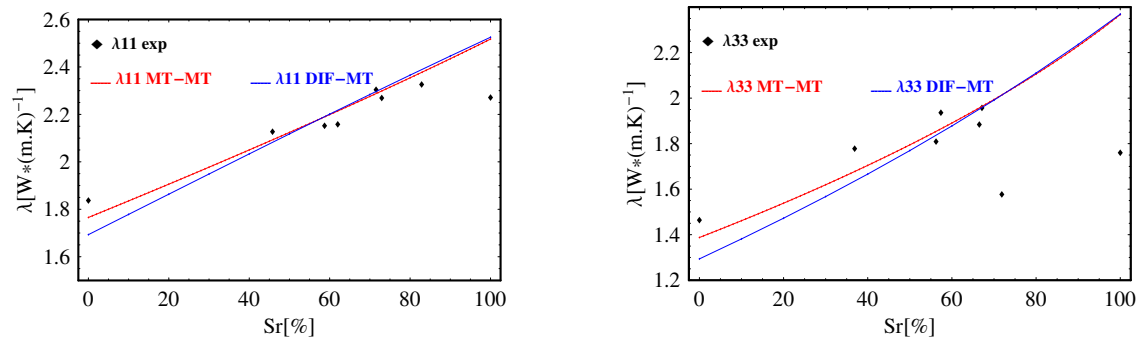


FIGURE II.16: L'évolution de la conductivité thermique effective de l'argilite de M/H-M (Échantillon s6)

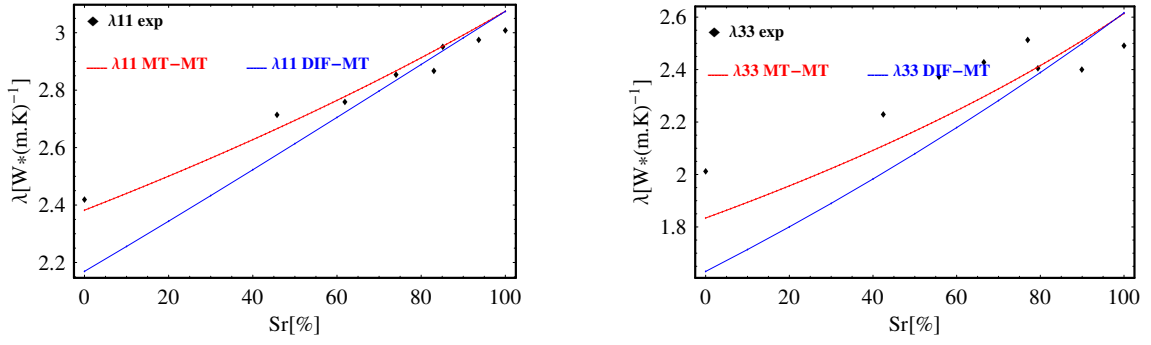


FIGURE II.17: L'évolution de la conductivité thermique effective de l'argilite de M/H-M (Échantillon s7)

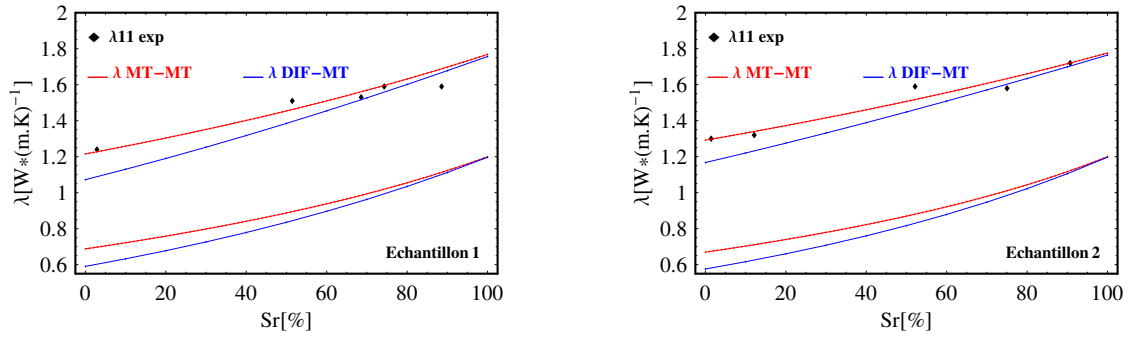


FIGURE II.18: L'évolution de la conductivité thermique effective de l'argilite de Mont Terri (échantillon 1 et 2)

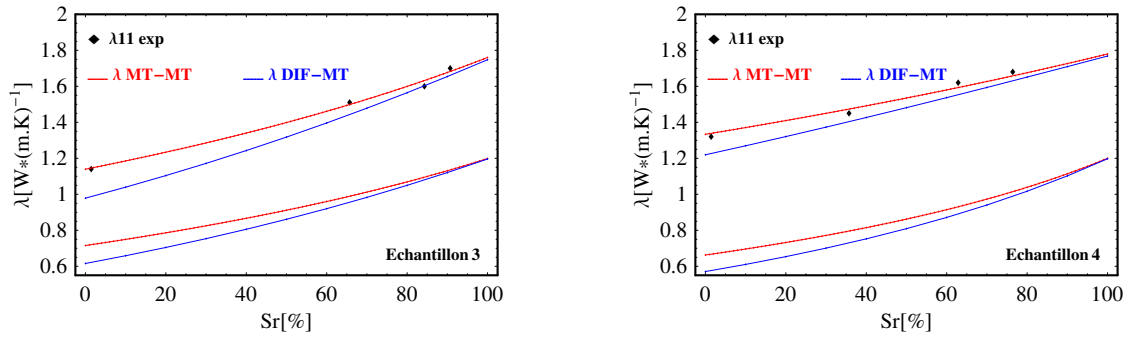


FIGURE II.19: L'évolution de la conductivité thermique effective de l'argilite de Mont Terri (échantillon 3 et 4)

TAB. II.5: Les résultats expérimentaux et numériques de la conductivité thermique effective $\lambda[W\ m^{-1}\ K^{-1}]$ de l'argilite de M/H-M

Echantillon	Schéma	λ_{11}^{exp}	λ_{33}^{exp}	λ_{11}^{cal}	λ_{33}^{cal}	λ_a	ν_a^2	S_r	σ
s1	MT-MT	2.33	2.08	2.30	2.10	0.85	1.32	90	4.0
	DIF-MT	2.33	2.08	2.28	2.02	0.85	1.32	90	4.0
s2	MT-MT	2.21	1.85	2.26	1.88	1.05	1.37	90	5.5
	DIF-MT	2.21	1.85	2.25	1.86	1.05	1.37	90	5.5
s3	MT-MT	2.08	1.51	2.06	1.54	0.55	2	90	10.0
	DIF-MT	2.08	1.51	2.05	1.53	0.55	2	90	10.0
s4	MT-MT	2.09	1.53	2.10	1.58	0.65	2	94	3.5
	DIF-MT	2.09	1.53	2.06	1.54	0.65	2	94	3.5
s5	MT-MT	1.99	1.03	1.97	1.27	0.5	2.56	90	5.5
	DIF-MT	1.99	1.03	1.96	1.27	0.5	2.56	90	5.5
s6	MT-MT	2.30	1.58	2.28	2.00	0.58	1.44	70	5.0
	DIF-MT	2.30	1.58	2.45	2.24	0.58	1.44	70	5.0
s7	MT-MT	2.98	2.40	3.00	2.51	1.3	1.56	90	3.0
	DIF-MT	2.98	2.40	2.98	2.50	1.3	1.56	90	3.0

TAB. II.6: Les résultats expérimentaux et numériques de la conductivité thermique effective $\lambda[W\ m^{-1}\ K^{-1}]$ de l'argilite de Mont Terri

Echantillon	Schéma	λ_{11}^{exp}	λ_{33}^{exp}	λ_{11}^{cal}	λ_{33}^{cal}	λ_a	ν_a^2	S_r	σ
1	MT-MT	1.59	-	1.69	1.11	0.7	2	90	4.0
	DIF-MT	1.59	-	1.68	1.11	0.7	2	90	4.0
2	MT-MT	1.72	-	1.72	1.12	0.7	2	90	6.0
	DIF-MT	1.72	-	1.70	1.11	0.7	2	90	6.0
3	MT-MT	1.70	-	1.68	1.13	0.7	2	90	2.5
	DIF-MT	1.70	-	1.65	1.12	0.7	2	90	2.5
4	MT-MT	1.68	-	1.66	1.01	0.7	2	76	7.5
	DIF-MT	1.68	-	1.71	1.10	0.7	2	76	7.5

Chapitre III

Homogénéisation du comportement thermo-hydro-mécanique linéaire des argilites

III.1 Introduction

Dans le contexte du stockage des déchets radioactifs, les argilites sont soumises à diverses sollicitations couplées faisant intervenir la mécanique, l'hydraulique et la thermique. La compréhension du comportement multi-physique de ces matériaux est alors un aspect très important. Ce présent chapitre de la thèse se focalise sur une modélisation du comportement thermo-poro-élastique de ce type de matériau par l'approche micromécanique.

Le principe du passage micro-macro a été présenté dans les deux premiers chapitres avec différentes méthodes d'homogénéisation dans le cadre du comportement thermique linéaire stationnaire. Cette approche reposant sur la solution du problème d'Eshelby [38] nous permet de mettre en évidence l'influence de la morphologie de l'espace poreux, la minéralogie et aussi la méthode d'homogénéisation sur les propriétés thermiques effectives des roches poreuses. Dans ce chapitre, l'étude de l'effet de ces dernières phases constituantes sera enrichi dans le contexte d'un couplage thermo-poro-élastique de ce type de roche en reprenant la solution connue d'Eshelby [38] en élasticité linéaire. Dans la littérature, les approches par le tenseur d'Eshelby pour le comportement poro-élastique, thermo-élastique et thermo-poro-élastique ont été discutées dans de nombreux travaux. Parmi ces recherches, on peut mentionner les contributions de Berryman et al. [13, 10, 11] et celles de Kachanov, Sevostianov et al. [72, 71, 120] qui étudient les propriétés mécaniques, thermiques et les propriétés croisées des matériaux comportant des cracks et/ou des pores. Plus récemment, il

y a les travaux de Ulm et al. [130], de Dormieux et al. [35, 33] dans le contexte du comportement poro-élastique des milieux poreux isotropes avec les pores ellipsoïdales. D'ailleurs, Levin et Alvarez-Tostado [85] ont déterminé les propriétés couplées thermo-poro-élastique d'un matériau poreux multi-phasique en utilisant la méthode des champs effectifs.

Dans ce présent travail, les propriétés effectives croisées des roches argileuses seront envisagées en appliquant la méthode d'homogénéisation en deux étapes adoptée dans les chapitres précédents. Les simulations numériques effectuées sur des matériaux hétérogènes isotropes nous confirment la capacité prédictive de la procédure. En effet, ces résultats convenables permettent de caractériser le comportement thermo-poro-élastique des matériaux dont l'anisotropie est faible comme notre constatation sur l'argilite de Meuse/Haute-Marne. Ce chapitre reprend les travaux de Giraud et al. [43] dans le cas des milieux hétérogènes isotropes. Pour les matériaux présentant un comportement de type isotrope transverse, on peut se référer à d'autres travaux de Giraud et ses collaborateurs [44].

III.2 Homogénéisation du comportement élastique linéaire

III.2.1 L'approche micromécanique par la solution d'Eshelby

On considère une inclusion (I) de la forme ellipsoïdale noyée dans un milieu infini élastique linéaire homogène (Ω) dont le module élastique égal à celui de l'inclusion. L'inclusion a une déformation imposée libre uniforme ε_L . Eshelby [38] a montré que la solution du champ de déformation de l'inclusion (I) est uniforme et dépend linéairement des valeurs du paramètre de chargement :

$$\varepsilon_I = \mathbb{S}^E : \varepsilon_L \quad (\text{III.1})$$

où le tenseur de quatrième ordre $\mathbb{S}^E$ est appelé le tenseur d'Eshelby qui dépend du module élastique $\mathbb{C}$ du milieu homogène (Ω) ainsi que de la forme et de l'orientation de l'inclusions (I). Cette solution est donnée également sous la forme :

$$\varepsilon_I = -\mathbb{P} : \tau \quad \text{avec} \quad \tau = -\mathbb{C} : \varepsilon_L \quad (\text{III.2})$$

$$\mathbb{P} = \mathbb{S}^E : \mathbb{C}^{-1} = \mathbb{S}^E : \mathbb{S} \quad (\text{III.3})$$

où $\mathbb{S} = \mathbb{C}^{-1}$ est le module de souplesse du milieu. Le tenseur $\mathbb{P}$ nommé tenseur de Hill dépend aussi bien du module élastique ($\mathbb{C}$) du milieu homogène (Ω), de la forme et de l'orientation de l'inclusions (I) comme le tenseur d'Eshelby $\mathbb{S}^E$. Une différence importante entre ces deux tenseurs est que celui d'Eshelby $\mathbb{S}^E$ est symétrique mineur ($S_{ijkl} = S_{jikl} = S_{ijlk}$) tandis que celui de Hill $\mathbb{P}$ est symétrique mineur et majeur ($P_{ijkl} = P_{jikl} = P_{ijlk} = P_{klij}$). L'expression du tenseur de Hill $\mathbb{P}$

s'écrit à l'aide de la fonction de Green $\mathbf{G}(\underline{x} - \underline{x}')$ (voir par exemple [96, 97]) comme la suivante :

$$\begin{aligned} P_{ijkl}(\underline{x}) &= \frac{1}{4} (M_{ijkl}(\underline{x}) + M_{kji l}(\underline{x}) + M_{l j i k}(\underline{x}) + M_{l j k i}(\underline{x})), \quad (\underline{x} \in I) \\ M_{ijkl}(\underline{x}) &= -\frac{\partial}{\partial x_l} \int_I \frac{\partial G_{ij}(\underline{x} - \underline{x}')}{\partial x_k} dV_{\underline{x}'} \end{aligned} \quad (\text{III.4})$$

où l'inclusion (I) a la forme d'ellipsoïde :

$$\underline{x} \in I \Leftrightarrow \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} + \frac{x_3^2}{c^2} \leq 1 \quad (\text{III.5})$$

L'expression analytique de deux tenseurs est $\mathbb{S}^E$ et $\mathbb{P}$ connue dans certains cas du milieu isotrope ou du milieu isotrope transverse avec inclusion alignée (voir [96, 45, 135]). Dans le cas du milieu anisotrope général, ces tenseurs peuvent être calculés numériquement [41].

La solution de ce problème est ensuite enrichie dans le cas où le module élastique d'inclusion $\mathbb{C}_I$ est différent de celui du milieu homogène $\mathbb{C}$ (problème d'inhomogénéité). Le milieu est imposé d'une déformation uniforme $\mathbf{E}$ à l'infini. La solution obtenue de ce nouveau problème [140, 33] montre que la déformation de l'inclusion dépend linéairement de la déformation imposée $\mathbf{E}$:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_I(\underline{x}) = \mathbb{A}_I(\underline{x}) : \mathbf{E} \quad (\underline{x} \in I) \quad (\text{III.6})$$

$$\mathbb{A}_I(\underline{x}) = [\mathbb{I} + \mathbb{P} : (\mathbb{C}_I - \mathbb{C})]^{-1} \quad (\text{III.7})$$

où $\mathbb{A}_I$ est le tenseur de concentration sous la sollicitation homogène en déformation.

Différents schémas d'estimation peuvent être construits à partir de cette solution pour évaluer les propriétés élastiques effectives. En général, en utilisant l'opérateur de moyenne, on obtient le comportement élastique effectif :

$$\boldsymbol{\Sigma} = \mathbb{C}_{\text{hom}} : \mathbf{E} \quad (\text{III.8})$$

$$\mathbb{C}_{\text{hom}} = \langle \mathbb{C} : \mathbb{A} \rangle = \sum_{i=1}^N f_i \mathbb{C}_i : \mathbb{A}_i \quad (\text{III.9})$$

avec f_i , $\mathbb{C}_i$ et $\mathbb{A}_i$ qui sont respectivement la fraction volumique, le module élastique et le tenseur de concentration moyen en déformation de la phase i d'un milieu hétérogène comportant N phase.

Les tenseurs de concentration $\mathbb{A}_i$ vérifient :

$$\langle \mathbb{A}_i \rangle = \sum_{i=1}^N f_i \mathbb{A}_i = \mathbb{I} \quad (\text{III.10})$$

où $\mathbb{I}$ est le tenseur d'identité quatrième ordre :

$$\mathbb{I} = \frac{1}{2} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (\text{III.11})$$

δ_{ij} désigne le delta Kronecker ($\delta_{ij} = 1$ si $i = j$ et $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$).

De la même manière, dans le cas de la sollicitation homogène en contrainte Σ , on a :

$$\mathbf{E} = \mathbb{S}_{\text{hom}} : \Sigma \quad (\text{III.12})$$

$$\mathbb{S}_{\text{hom}} = \langle \mathbb{S} : \mathbb{B} \rangle = \sum_{i=1}^N f_i \mathbb{S}_i : \mathbb{B}_i \quad (\text{III.13})$$

avec $\mathbb{B}_i$ est le moyen du tenseur de concentration moyen en contrainte de phase i . Ces tenseurs satisfont également la condition :

$$\langle \mathbb{B}_i \rangle = \sum_{i=1}^N f_i \mathbb{B}_i = \mathbb{I} \quad (\text{III.14})$$

III.2.2 La répartition isotrope des inclusions sphéroïdales dans un milieu isotrope

On étudie maintenant le cas simple où les inclusions ont une distribution aléatoire dans une matrice isotrope. Il implique donc un comportement isotrope du milieu homogénéisé à l'échelle macroscopique.

Les inclusions considérées sont de la forme sphéroïdale caractérisée par le rapport d'aspect ε . L'expression du tenseur de Hill $\mathbb{P}$ pour les inclusions sphériques ($\varepsilon = 1$) noyées dans une matrice isotrope est (voir [140]) :

$$\mathbb{P} = \frac{1}{3k_m + 4\mu_m} \mathbb{J} + \frac{3(k_m + 2\mu_m)}{5\mu_m(3k_m + 4\mu_m)} \mathbb{K} \quad (\text{III.15})$$

où k_m et μ_m sont les modules de compressibilité et de cisaillement de la phase matrice. Les tenseurs d'ordre quatre $\mathbb{J}$ et $\mathbb{K}$ sont définis comme :

$$\mathbb{J} = \frac{1}{3} \delta_{ij} \delta_{kl} \quad , \quad \mathbb{K} = \mathbb{I} - \mathbb{J} \quad (\text{III.16})$$

Dans le cas général où $\varepsilon \neq 1$ la solution analytique du tenseur de Hill $\mathbb{P}$ pour les inclusions sphéroïdales dans le milieu isotrope sera présentée dans l'annexe (A). En effet, ce tenseur $\mathbb{P}$ dans le repère local associé d'inclusion $(e_1^\alpha, e_2^\alpha, e_3^\alpha)$ est de type isotrope transverse. Le tenseur de concentration se définit comme :

$$\mathbb{D}_I = [\mathbb{I} + \mathbb{P} : (\mathbb{C}_I - \mathbb{C}_m)]^{-1} \quad (\text{III.17})$$

Il est donc également isotrope transverse avec six paramètres indépendants $D_{1111}^I, D_{1122}^I, D_{1133}^I, D_{3311}^I, D_{3333}^I, D_{2323}^I$ dans ce repère local.

La moyenne du tenseur de concentration est calculé par l'intégration suivante :

$$\begin{aligned} \mathbb{A}_I &= \frac{1}{|\Omega_I|} \int_{\Omega_I} \mathbb{D}_I d\Omega_i \\ A_{ijkl}^I &= \frac{1}{4\pi} \int_{\varphi=0}^{\pi} \int_{\beta=0}^{2\pi} Q_{pi}^\alpha Q_{qj}^\alpha Q_{rk}^\alpha Q_{sl}^\alpha D_{pqrs}^I \sin \varphi d\varphi d\beta \end{aligned} \quad (\text{III.18})$$

où $\mathbf{Q}^\alpha$ la matrice de rotation (voir II.3.1).

Dans le cas où la répartition des inclusions est isotrope, le tenseur $\mathbb{A}_I$ est exprimé sous la forme :

$$\begin{aligned}\mathbb{A}_I &= A_k^I \mathbb{J} + A_\mu^I \mathbb{K} \\ A_k^I &= \frac{1}{3} (2 (D_{1111}^I + D_{1122}^I + D_{1133}^I + D_{3311}^I) + D_{3333}^I) \\ A_\mu^I &= \frac{1}{15} (7D_{1111}^I - 5D_{1122}^I - 2 (D_{1133}^I - 6D_{2323}^I + D_{3311}^I - D_{3333}^I))\end{aligned}\tag{III.19}$$

III.3 Homogénéisation du comportement thermo-élastique linéaire

III.3.1 Théorème de Levin

Cette partie a pour but d'homogénéiser un milieu hétérogène sous la déformation macroscopique imposée $\mathbf{E}$ à l'infini prenant en compte des précontraintes uniformes $\boldsymbol{\tau}$ (ou des déformations libres uniformes $\boldsymbol{\varepsilon}_L$) dans les phases subsidiaires (voir aussi [83]). Le comportement local s'écrit dans ce cas comme :

$$\boldsymbol{\sigma}(\underline{x}) = \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{x}) + \boldsymbol{\tau}\tag{III.20}$$

où $\boldsymbol{\tau}$ est la précontrainte uniforme par phase. Il peut s'écrire par ailleurs sous l'autre forme :

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\underline{x}) = \mathbb{S} : \boldsymbol{\sigma}(\underline{x}) + \boldsymbol{\varepsilon}_L\tag{III.21}$$

avec $\boldsymbol{\varepsilon}_L = -\mathbb{S} : \boldsymbol{\tau}$ est la déformation libre uniforme.

Pour résoudre ce problème, on peut le décomposer en deux problèmes élémentaires :

- Le premier problème correspond à celui d'élastique linéaire sans précontrainte ($\mathbf{E} \neq 0$, $\boldsymbol{\tau} = 0$) :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \boldsymbol{\sigma}'(\underline{x}) = \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon}'(\underline{x}) & (\Omega) \\ \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}'(\underline{x}) = 0 & (\Omega) \\ \underline{\xi}'(\underline{x}) = \mathbf{E} \cdot \underline{x} & (\partial\Omega) \end{array} \right.\tag{III.22}$$

- Le deuxième correspond à celui avec précontrainte, à déformation macroscopique imposée nulle ($\mathbf{E} = 0$, $\boldsymbol{\tau} \neq 0$) :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \boldsymbol{\sigma}''(\underline{x}) = \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon}''(\underline{x}) + \boldsymbol{\tau} & (\Omega) \\ \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}''(\underline{x}) = 0 & (\Omega) \\ \underline{\xi}''(\underline{x}) = 0 & (\partial\Omega) \end{array} \right.\tag{III.23}$$

La solution du premier problème d'homogénéisation élastique linéaire (III.22) est connue à partir de la section précédente :

$$\Sigma' = \langle \sigma' \rangle = \mathbb{C}_{\text{hom}} : E \quad (\text{III.24})$$

$$\mathbb{C}_{\text{hom}} = \langle \mathbb{C} : \mathbb{A} \rangle$$

Considérons maintenant un champ de déformation cinématiquement admissible ε' du premier problème associé au champ de déformation macroscopique E et un champ de contrainte statiquement admissible σ'' du deuxième problème associé au champ de contrainte macroscopique Σ'' . En appliquant la condition de Hill-Mandel [140] au couple (σ'', ε') , on obtient :

$$\langle \sigma'' : \varepsilon' \rangle = \langle \sigma'' \rangle : \langle \varepsilon' \rangle = \Sigma'' : E \quad (\text{III.25})$$

D'ailleurs, on a :

$$\langle \sigma'' : \varepsilon' \rangle = \langle \varepsilon'' : \mathbb{C} : \varepsilon' \rangle + \langle \tau : \varepsilon' \rangle = \langle \varepsilon'' : \sigma' \rangle + \langle \tau : \mathbb{A} : E \rangle = \langle \tau : \mathbb{A} \rangle : E \quad (\text{III.26})$$

Il déduit donc que :

$$\Sigma'' = \langle \tau : \mathbb{A} \rangle \quad (\text{III.27})$$

Le comportement macroscopique du problème avec précontrainte (sous la déformation macroscopique imposée E) s'écrit :

$$\Sigma = \Sigma' + \Sigma'' \quad (\text{III.28})$$

De la même manière, le comportement macroscopique du problème avec déformation libre ε_L (sous la contrainte macroscopique imposée Σ) peut être trouvé comme :

$$E = E' + E'' \quad (\text{III.29})$$

$$E' = \mathbb{S}_{\text{hom}} : \Sigma \quad , \quad E'' = \langle \varepsilon_L : \mathbb{B} \rangle$$

III.3.2 Homogénéisation du comportement thermo-élastique linéaire d'un milieu hétérogène biphasique

On applique maintenant le théorème de Levin pour étudier le comportement thermo-élastique linéaire d'un milieu hétérogène biphasique comportant une matrice solide Ω_m et une phase d'inclusions Ω_i . Le comportement thermo-élastique linéaire de chaque phase s'écrit sous la forme suivante :

$$\sigma = \mathbb{C} : (\varepsilon - \alpha \Theta) \quad (\text{III.30})$$

$$s = \alpha : \mathbb{C} : \varepsilon + \frac{C^\varepsilon}{T_0} \Theta \quad (\text{III.31})$$

où α , s , $\Theta = T - T_0$ et C^ε désignent respectivement le tenseur de dilatation thermique, l'entropie volumique, la variation de la température et la capacité de chaleur à la déformation constante.

La détermination des propriétés thermo-élastiques effectives se réalise par l'application du théorème de Levin où la précontrainte de chaque phase est égale à $\tau = -\mathbb{C} : \alpha \Theta$. On obtient donc la solution suivante :

$$\Sigma = \mathbb{C}_{\text{hom}} : \mathbf{E} + \langle \tau : \mathbb{A} \rangle = \mathbb{C}_{\text{hom}} : \mathbf{E} - \mathbb{C}_{\text{hom}} : \alpha_{\text{hom}} \Theta \quad (\text{III.32})$$

avec $\mathbb{C}_{\text{hom}}$ et α_{hom} sont respectivement le module élastique et le tenseur de dilatation thermique homogénéisés. Ces tenseurs satisfont la relation :

$$\mathbb{C}_{\text{hom}} : \alpha_{\text{hom}} \Theta = -\langle \tau : \mathbb{A} \rangle = f_i \mathbb{C}_i : \alpha_i : \mathbb{A}_i \Theta + (1 - f_i) \mathbb{C}_m : \alpha_m : \mathbb{A}_m \Theta \quad (\text{III.33})$$

où f_i est la fraction volumique des inclusions. Il en déduit donc que :

$$\alpha_{\text{hom}} = (\mathbb{C}_{\text{hom}})^{-1} : \langle \mathbb{C} : \alpha : \mathbb{A} \rangle \quad (\text{III.34})$$

De la même façon, l'entropie volumique à l'échelle macroscopique est évaluée à partir des solutions de deux sous-problèmes :

$$S = S' + S'' \quad (\text{III.35})$$

La solution du premier sous-problème donne :

$$\begin{aligned} S' = \langle s' \rangle &= f_i s'_i + (1 - f_i) s'_m = f_i \mathbb{C}_i : \alpha_i : \bar{\varepsilon}'_i + (1 - f_i) \mathbb{C}_m : \alpha_m : \bar{\varepsilon}'_m \\ &= f_i \mathbb{C}_i : \alpha_i : \mathbb{A}_i : \mathbf{E} + (1 - f_i) \mathbb{C}_m : \alpha_m : \mathbb{A}_m : \mathbf{E} = \mathbb{C}_{\text{hom}} : \alpha_{\text{hom}} : \mathbf{E} \end{aligned} \quad (\text{III.36})$$

où $\bar{\varepsilon}'_r (r = i, m)$ est la déformation moyenne de chaque phase dans le premier sous problème.

L'entropie volumique macroscopique S'' du deuxième sous-problème est déterminée de la manière suivante :

$$\begin{aligned} S'' = \langle s'' \rangle &= f_i s''_i + (1 - f_i) s''_m \\ &= f_i \left(\mathbb{C}_i : \alpha_i : \bar{\varepsilon}''_i + \frac{C_i^\varepsilon}{T_0} \Theta \right) + (1 - f_i) \left(\mathbb{C}_m : \alpha_m : \bar{\varepsilon}''_m + \frac{C_m^\varepsilon}{T_0} \Theta \right) \end{aligned} \quad (\text{III.37})$$

Pour cela, il faut évaluer les déformations moyennes $\bar{\varepsilon}''_r (r = i, m)$ des phases qui vérifient :

$$\begin{aligned} f_i \bar{\varepsilon}''_i + (1 - f_i) \bar{\varepsilon}''_m &= 0 \\ \Sigma'' = -\mathbb{C}_{\text{hom}} : \alpha_{\text{hom}} \Theta &= f_i (\mathbb{C}_i : \bar{\varepsilon}''_i - \mathbb{C}_i : \alpha_i \Theta) + (1 - f_i) (\mathbb{C}_m : \bar{\varepsilon}''_m - \mathbb{C}_m : \alpha_m \Theta) \end{aligned} \quad (\text{III.38})$$

On trouve l'expression des déformations moyennes des phases du deuxième sous problème comme :

$$\bar{\epsilon}_i'' = -\frac{1}{f_i} (\mathbb{C}_i - \mathbb{C}_m)^{-1} : (\mathbb{C}_{\text{hom}} : \alpha_{\text{hom}} - f_i \mathbb{C}_i : \alpha_i - (1 - f_i) \mathbb{C}_m : \alpha_m) \Theta \quad (\text{III.39})$$

$$\bar{\epsilon}_m'' = \frac{1}{1 - f_i} (\mathbb{C}_i - \mathbb{C}_m)^{-1} : (\mathbb{C}_{\text{hom}} : \alpha_{\text{hom}} - f_i \mathbb{C}_i : \alpha_i - (1 - f_i) \mathbb{C}_m : \alpha_m) \Theta \quad (\text{III.40})$$

Il implique donc :

$$\begin{aligned} S'' &= \frac{C_{\text{hom}}^\epsilon}{T_0} \Theta \\ C_{\text{hom}}^\epsilon &= \langle C^\epsilon \rangle + T_0 (\mathbb{C}_m : \alpha_m - \mathbb{C}_i : \alpha_i) : (\mathbb{C}_i - \mathbb{C}_m)^{-1} : \\ &\quad : (\mathbb{C}_{\text{hom}} : \alpha_{\text{hom}} - f_i \mathbb{C}_i : \alpha_i - (1 - f_i) \mathbb{C}_m : \alpha_m) \end{aligned} \quad (\text{III.41})$$

Le comportement thermo-élastique macroscopique du milieu hétérogène s'écrit ensuite sous la forme suivante :

$$\Sigma = \mathbb{C}_{\text{hom}} : \mathbf{E} - \mathbb{C}_{\text{hom}} : \alpha_{\text{hom}} \Theta \quad (\text{III.42})$$

$$S = \mathbb{C}_{\text{hom}} : \alpha_{\text{hom}} : \mathbf{E} + \frac{C_{\text{hom}}^\epsilon}{T_0} \Theta \quad (\text{III.43})$$

III.3.3 Homogénéisation du comportement thermo-élastique linéaire d'un milieu hétérogène multiphasique

La méthode d'homogénéisation du comportement thermo-élastique linéaire peut être étendue à un milieu hétérogène multiphasique de N phase. Comme préalablement présenté, on décompose ce problème en deux sous-problèmes : le premier correspond au cas purement mécanique ($\mathbf{E} \neq 0, \boldsymbol{\tau} = 0$) tandis que le deuxième correspond au cas de la précontrainte avec la déformation macroscopique imposée nulle ($\boldsymbol{\tau} = -\mathbb{C} : \alpha \Theta, \mathbf{E} = 0$).

En appliquant le théorème de Levin, on peut retrouver les solutions :

$$\begin{aligned} \Sigma &= \Sigma' + \Sigma'' = \mathbb{C}_{\text{hom}} : \mathbf{E} + \langle \boldsymbol{\tau} : \mathbb{A} \rangle = \mathbb{C}_{\text{hom}} : \mathbf{E} - \mathbb{C}_{\text{hom}} : \alpha_{\text{hom}} \Theta \\ \mathbb{C}_{\text{hom}} : \alpha_{\text{hom}} \Theta &= -\langle \boldsymbol{\tau} : \mathbb{A} \rangle = \sum_{i=1}^N f_i \mathbb{C}_i : \alpha_i : \mathbb{A}_i \Theta \\ \alpha_{\text{hom}} &= (\mathbb{C}_{\text{hom}})^{-1} : \left(\sum_{i=1}^N f_i \mathbb{C}_i : \alpha_i : \mathbb{A}_i \right) \end{aligned} \quad (\text{III.44})$$

L'entropie volumique macroscopique est déterminée comme :

$$\begin{aligned} S &= S' + S'' \\ S' &= \langle s' \rangle = \sum_{i=1}^N f_i s'_i = \sum_{i=1}^N f_i \mathbb{C}_i : \alpha_i : \mathbb{A}_i : \mathbf{E} = \mathbb{C}_{\text{hom}} : \alpha_{\text{hom}} : \mathbf{E} \\ S'' &= \langle s'' \rangle = \sum_{i=1}^N f_i s''_i = \sum_{i=1}^N f_i \left(\mathbb{C}_i : \alpha_i : \bar{\epsilon}_i'' + \frac{C_i^\epsilon}{T_0} \Theta \right) \end{aligned} \quad (\text{III.45})$$

Les déformations moyennes des phases pour le deuxième sous problème $\bar{\varepsilon}_i''$ vérifient :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N f_i \bar{\varepsilon}_i'' &= 0 \\ \Sigma'' &= -\mathbb{C}_{\text{hom}} : \alpha_{\text{hom}} \Theta = \sum_{i=1}^N f_i (\mathbb{C}_i : \bar{\varepsilon}_i'' - \mathbb{C}_i : \alpha_i \Theta) \end{aligned} \quad (\text{III.46})$$

Ces équations ne permettent pas de déterminer les solutions de $\bar{\varepsilon}_i''$ ($i, 1, N$) à partir de ces deux fonctions. D'après Dvorak et Benveniste [36], pour résoudre ce problème il faut prendre en compte l'interaction des phases. Ces auteurs ont trouvé donc les solutions suivantes :

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}_i'' &= \mathbf{a}_i \Theta \\ \mathbf{a}_i &= \sum_{r=1}^N \mathbb{D}_{ir} : \alpha_r \end{aligned} \quad (\text{III.47})$$

où les tenseurs $\mathbb{D}_{ir}$ sont appelés les tenseurs d'influences de transformations. Pour le milieu multiphasique avec les inclusions de mêmes formes et alignées, Dvorak et Benveniste [36] ont déterminé l'expression de ces tenseurs comme :

$$\mathbb{D}_{ir} = (\mathbb{I} - \mathbb{A}_i) : (\mathbb{C}_i - \mathbb{C}_{\text{hom}})^{-1} : (\delta_{ir} \mathbb{I} - f_r \mathbb{A}_r^T) : \mathbb{C}_r \quad (\text{III.48})$$

Dans le cas de deux phases, l'expression de ces tenseurs s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathbb{D}_{rr} &= (\mathbb{I} - \mathbb{A}_r) : (\mathbb{C}_r - \mathbb{C}_s)^{-1} : \mathbb{C}_r \\ \mathbb{D}_{rs} &= -(\mathbb{I} - \mathbb{A}_r) : (\mathbb{C}_r - \mathbb{C}_s)^{-1} : \mathbb{C}_s \quad (r, s = i, m) \end{aligned} \quad (\text{III.49})$$

Enfin, on obtient l'entropie volumique macroscopique du deuxième sous-problème du milieu multiphasique :

$$\begin{aligned} S'' &= \frac{C_{\text{hom}}^\varepsilon}{T_0} \Theta \\ C_{\text{hom}}^\varepsilon &= \sum_{i=1}^N f_i C_i^\varepsilon + T_0 \sum_{i=1}^N f_i \mathbb{C}_i : \alpha_i : \left(\sum_{r=1}^N \mathbb{D}_{ir} : \alpha_r \right) \end{aligned} \quad (\text{III.50})$$

III.4 Homogénéisation du comportement thermo-poro-élastique linéaire d'un milieu poreux saturé

III.4.1 Homogénéisation du comportement poro-élastique linéaire

On rappelle brièvement dans cette sous-partie les résultats principaux de l'homogénéisation du comportement poro-élastique linéaire d'un milieu poreux saturé [33, 137, 66].

Considérons le V.E.R d'un milieu poreux Ω comportant une matrice solide Ω_s et l'espace poreux

Ω_p . La matrice solide est élastique linéaire et l'espace poreux saturé est modélisé comme une famille des inclusions sphéroïdales. Supposons que la frontière du V.E.R soit constituée seulement de la phase solide. Le problème posé sur le V.E.R s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \boldsymbol{\sigma}(\underline{x}) = \mathbb{C}_s : \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{x}) & (\Omega_s) \\ \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}(\underline{x}) = 0 & (\Omega_s) \\ \underline{\xi}(\underline{x}) = \mathbf{E} \cdot \underline{x} & (\partial\Omega) \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \underline{n} = -p_l \underline{n} & (\Omega_{sp}) \end{array} \right. \quad (\text{III.51})$$

où Ω_{sp} désigne l'interface entre la phase solide et la phase liquide. p_l désigne la pression de la phase liquide.

La détermination des propriétés effectives du couplage poromécanique est complètement identique à celle du problème thermo-élastique en observant la similarité entre les équations de ces deux problèmes [100, 13]. Donc, compte tenu de la linéarité du problème, on peut également découpler en deux sous-problèmes élémentaires suivants :

- Le premier sous-problème correspond à un chargement purement mécanique : $\mathbf{E} \neq 0$, $p_l = 0$.
- Le deuxième correspond à un chargement purement hydrique : $\mathbf{E} = 0$, $p_l \neq 0$.

La solution du premier sous-problème est connue comme :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Sigma}' &= \mathbb{C}_{\text{hom}} : \mathbf{E} \\ \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}'_i &= \mathbb{A}_i : \mathbf{E} \quad (i = s, p) \end{aligned} \quad (\text{III.52})$$

La solution du deuxième sous-problème peut être déterminée en utilisant le théorème de Levin [33] avec la précontrainte $\boldsymbol{\tau} = -p_l \boldsymbol{\delta}$:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Sigma}'' &= -p_l \mathbf{B} \\ \mathbf{B} &= f_p \boldsymbol{\delta} : \mathbb{A}_p \end{aligned} \quad (\text{III.53})$$

où $\mathbf{B}$ est le tenseur de Biot et $\boldsymbol{\delta}$ le tenseur d'identité de deuxième ordre.

Par ailleurs, la seconde équation d'état macroscopique désigne la variation du volume de l'espace poreux. Elle s'écrit comme :

$$\phi - \phi_0 = f_p \boldsymbol{\delta} : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_p = f_p \boldsymbol{\delta} : (\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}'_p + \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}''_p) = \mathbf{B} : \mathbf{E} + \frac{p_l}{N} \quad (\text{III.54})$$

où ϕ_0 et ϕ présentent respectivement la porosité lagrangienne à l'état initial et celle à l'état actuel et f_p la fraction volumique de l'espace poreux (la porosité eulérienne). L'expression du module de

Biot N se trouve à partir de l'évaluation de la déformation moyenne $\bar{\varepsilon}_p''$. Cette dernière peut être déterminée en utilisant les équations suivantes :

$$\begin{aligned} f_p \bar{\varepsilon}_p'' + (1 - f_p) \bar{\varepsilon}_s'' &= 0 \\ \Sigma'' &= -p_l \mathbf{B} = (1 - f_p) \mathbb{C}_s : \bar{\varepsilon}_s'' + f_p (\mathbb{C}_p : \bar{\varepsilon}_p'' - p_l \boldsymbol{\delta}) \end{aligned} \quad (\text{III.55})$$

On obtient les résultats :

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}_p'' &= -\frac{1}{f_p} (\mathbb{C}_p - \mathbb{C}_s)^{-1} : (\mathbf{B} - f_p \boldsymbol{\delta}) p_l \\ \bar{\varepsilon}_s'' &= \frac{1}{1 - f_p} (\mathbb{C}_p - \mathbb{C}_s)^{-1} : (\mathbf{B} - f_p \boldsymbol{\delta}) p_l \end{aligned} \quad (\text{III.56})$$

Il en déduit donc :

$$\frac{1}{N} = \boldsymbol{\delta} : (\mathbb{C}_s - \mathbb{C}_p)^{-1} : (\mathbf{B} - f_p \boldsymbol{\delta}) \quad (\text{III.57})$$

III.4.2 Homogénéisation du comportement thermo-poro-élastique linéaire

Le problème poro-mécanique du milieu poreux saturé précédent est étendu maintenant en ajoutant un chargement thermique :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \boldsymbol{\sigma}(\underline{x}) = \mathbb{C}_s : (\boldsymbol{\varepsilon}(\underline{x}) - \boldsymbol{\alpha}_s \Theta) & (\Omega_s) \\ \text{div } \boldsymbol{\sigma}(\underline{x}) = 0 & (\Omega_s) \\ \underline{\xi}(\underline{x}) = \mathbf{E}.\underline{x} & (\partial\Omega) \\ \boldsymbol{\sigma}.\underline{n} = -p_l \underline{n} & (\Omega_{sp}) \end{array} \right. \quad (\text{III.58})$$

La résolution de ce problème peut être décomposée en trois étapes relativement aux chargements élémentaires :

- $\mathbf{E} \neq 0, p_l = 0, \Theta = 0$: correspond à un chargement purement mécanique.
- $\mathbf{E} = 0, p_l \neq 0, \Theta = 0$: correspond à un chargement purement hydrique.
- $\mathbf{E} = 0, p_l = 0, \Theta \neq 0$: correspond à un chargement purement thermique.

En utilisant les solutions de (III.3.2) et (III.4.1), on obtient les expressions suivantes :

- pour un chargement purement mécanique :

$$\begin{aligned} \Sigma' &= \mathbb{C}_{\text{hom}} : \mathbf{E} \\ (\phi - \phi_0)' &= f_p \boldsymbol{\delta} : \bar{\varepsilon}_p' = f_p \boldsymbol{\delta} : \mathbb{A}_p : \mathbf{E} = \mathbf{B} : \mathbf{E} \\ S' &= f_p s_p' + (1 - f_p) s_s' = \mathbb{C}_{\text{hom}} : \boldsymbol{\alpha}_{\text{hom}} : \mathbf{E} \end{aligned} \quad (\text{III.59})$$

avec :

$$\begin{aligned}\mathbb{C}_{\text{hom}} &= \mathbb{C}_s + f_p (\mathbb{C}_p - \mathbb{C}_s) : \mathbb{A}_p \\ \mathbf{B} &= f_p \boldsymbol{\delta} : \mathbb{A}_p\end{aligned}\tag{III.60}$$

$$\boldsymbol{\alpha}_{\text{hom}} = (\mathbb{C}_{\text{hom}})^{-1} : (f_p \mathbb{C}_p : \boldsymbol{\alpha}_p : \mathbb{A}_p + (1 - f_p) \mathbb{C}_s : \boldsymbol{\alpha}_s : \mathbb{A}_s)$$

– pour un chargement purement hydrique :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Sigma}'' &= -p_l \mathbf{B} \\ (\phi - \phi_0)'' &= f_p \boldsymbol{\delta} : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_p'' = \frac{p_l}{N} \\ S'' &= f_p s_p'' + (1 - f_p) s_s'' = f_p \mathbb{C}_p : \boldsymbol{\alpha}_p : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_p'' + (1 - f_p) \mathbb{C}_s : \boldsymbol{\alpha}_s : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_s'' = -p_l \gamma_{\text{hom}}\end{aligned}\tag{III.61}$$

où le module de Biot N et le coefficient de dilatation thermique différentiel γ_{hom} sont exprimés comme :

$$\begin{aligned}\frac{1}{N} &= \boldsymbol{\delta} : (\mathbb{C}_s - \mathbb{C}_p)^{-1} : (\mathbf{B} - f_p \boldsymbol{\delta}) \\ \gamma_{\text{hom}} &= f_p \boldsymbol{\delta} : (\mathbb{C}_s : \boldsymbol{\alpha}_s - \mathbb{C}_p : \boldsymbol{\alpha}_p) : (\mathbb{C}_p - \mathbb{C}_s)^{-1} : (\mathbb{I} - \mathbb{A}_p)\end{aligned}\tag{III.62}$$

– pour un chargement purement thermique :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Sigma}''' &= -\mathbb{C}_{\text{hom}} : \boldsymbol{\alpha}_{\text{hom}} \Theta \\ (\phi - \phi_0)''' &= f_p \boldsymbol{\delta} : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_p''' = -\gamma_{\text{hom}} \Theta \\ S''' &= f_p s_p''' + (1 - f_p) s_s''' \\ &= f_p \left(\mathbb{C}_p : \boldsymbol{\alpha}_p : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_p''' + \frac{C_p^\varepsilon}{T_0} \Theta \right) + (1 - f_p) \left(\mathbb{C}_s : \boldsymbol{\alpha}_s : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_s''' + \frac{C_s^\varepsilon}{T_0} \Theta \right) \\ &= \frac{C_{\text{hom}}^\varepsilon}{T_0} \Theta\end{aligned}\tag{III.63}$$

avec :

$$\begin{aligned}C_{\text{hom}}^\varepsilon &= f_p C_p^\varepsilon + (1 - f_p) C_s^\varepsilon + T_0 (\mathbb{C}_s : \boldsymbol{\alpha}_s - \mathbb{C}_p : \boldsymbol{\alpha}_p) : (\mathbb{C}_p - \mathbb{C}_s)^{-1} : \\ &: (\mathbb{C}_{\text{hom}} : \boldsymbol{\alpha}_{\text{hom}} - f_p \mathbb{C}_p : \boldsymbol{\alpha}_p - (1 - f_p) \mathbb{C}_p : \boldsymbol{\alpha}_p)\end{aligned}\tag{III.64}$$

La superposition de trois sous problèmes déduit donc le comportement à l'échelle macroscopique :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Sigma} &= \mathbb{C}_{\text{hom}} : \mathbf{E} - p_l \mathbf{B} - \mathbb{C}_{\text{hom}} : \boldsymbol{\alpha}_{\text{hom}} \Theta \\ \phi - \phi_0 &= \mathbf{B} : \mathbf{E} + \frac{p_l}{N} - \gamma_{\text{hom}} \Theta \\ S &= \mathbb{C}_{\text{hom}} : \boldsymbol{\alpha}_{\text{hom}} : \mathbf{E} - p_l \gamma_{\text{hom}} + \frac{C_{\text{hom}}^\varepsilon}{T_0} \Theta\end{aligned}\tag{III.65}$$

Les expressions explicites des propriétés thermo-poro-élastiques effectives seront déterminées dans les sous-parties suivantes dans le contexte du schéma d'estimation de Mori Tanaka. En considérant la répartition isotrope des inclusions poreuses dans la matrice solide isotrope, on obtient en effet le comportement isotrope à l'échelle macroscopique dont les propriétés sont exprimés sous forme :

$$\mathbb{C}_{\text{hom}} = 3k_{\text{hom}} \mathbb{J} + 2\mu_{\text{hom}} \mathbb{K} \quad (\text{III.66})$$

$$\mathbf{B} = b \boldsymbol{\delta} \quad , \quad \boldsymbol{\alpha}_{\text{hom}} = \alpha_{\text{hom}} \boldsymbol{\delta} \quad (\text{III.67})$$

III.4.3 Les propriétés thermo-poro-élastiques effectives : le cas drainé

On s'intéresse en premier lieu au cas drainé où le module élastique de la phase poreuse est égal à zéro ($\mathbb{C}_p = 0$). Le module homogénéisé dans ce cas vaut :

$$\mathbb{C}_{\text{hom}} = \mathbb{C}_s - f_p \mathbb{C}_s : \mathbb{A}_p^{\text{MT}} = \mathbb{C}_s - f_p \mathbb{C}_s : \mathbb{A}_p : [(1 - f_p) \mathbb{I} + f_p \mathbb{A}_p]^{-1} \quad (\text{III.68})$$

Pour la répartition isotrope des inclusions poreuses, on peut écrire (voir III.2.2) :

$$\mathbb{A}_p = A_k^p \mathbb{J} + A_\mu^p \mathbb{K} \quad (\text{III.69})$$

Il déduit les expressions explicites des propriétés thermo-poro-élastiques effectives :

$$\begin{aligned} \frac{k_{\text{hom}}}{k_s} &= \frac{1 - f_p}{1 - f_p (1 - A_k^p)} \quad , \quad \frac{\mu_{\text{hom}}}{\mu_s} = \frac{1 - f_p}{1 - f_p (1 - A_\mu^p)} \\ b &= \frac{f_p A_k^p}{1 - f_p (1 - A_k^p)} = 1 - \frac{k_{\text{hom}}}{k_s} \quad , \quad \frac{k_s}{N} = b - f_p = -\frac{f_p (1 - f_p) (1 - A_k^p)}{1 - f_p (1 - A_k^p)} \\ \alpha_{\text{hom}} &= \alpha_s \quad , \quad \frac{\gamma_{\text{hom}}}{\alpha_s} = 3(b - f_p) = \frac{3k_s}{N} \\ C_{\text{hom}}^\varepsilon &= f_p C_p^\varepsilon + (1 - f_p) C_s^\varepsilon - \frac{9T_0 (1 - f_p) (1 - A_k^p) k_s \alpha_s^2}{1 - f_p (1 - A_k^p)} \end{aligned} \quad (\text{III.70})$$

On constate que dans le cas drainé, les coefficients A_k^p et A_μ^p ne dépendent que du rapport d'aspect des inclusions poreuses ε et du coefficient de Poisson de la phase matrice solide ν_s . L'influence du rapport d'aspect des pores ε et du coefficient de Poisson ν_s sur les modules de compressibilité et de cisaillement homogénéisés est présentée sur les figures (III.1 et III.3). Il est également remarquable que le module de cisaillement effectif μ_{hom} et le module de compressibilité effectif k_{hom} augmentent en fonction du rapport d'aspect ε (avec la valeur donné de la porosité $f_p = 0.15$) (voir également [136, 121, 72]). La répartition isotrope des pores aplatis affaiblit le matériau en comparaison avec des pores sphériques ($\varepsilon = 1$). Les figures (III.2 et III.4) montrent également la diminution de μ_{hom} et k_{hom} en fonction de la porosité f_p . Par ailleurs, plus le coefficient de Poisson ν_s s'accroît, plus k_{hom} est grand alors que μ_{hom} est faible.

Respectivement, l'impact du rapport d'aspect des pores ε_p , du coefficient de Poisson ν_s et de la

porosité f_p sur le coefficient de Biot b , le module de Biot N et le paramètre couplage thermique-hydraulique γ_{hom} est présenté sur les figures (III.5 à III.10). On retrouve les observations connues sur le coefficient de Biot qui diminue en fonction de ε et augmente par rapport à f_p . Les résultats notables (même dans ce cas d'isotropie) sont dédiés aux paramètres de couplage thermique-hydraulique γ_{hom} et module de Biot N . En réalité, il est très difficile de caractériser ces paramètres des roches poreuses dont la perméabilité est très faible. Le paramètre γ_{hom} qui est proportionnel avec $1/N$ diminue par rapport à ε et augmente en fonction de ν_s . A une valeur donnée du rapport d'aspect des pores (par exemple $\varepsilon = 0.05$) ces derniers paramètres croissent quand la porosité est faible ($f_p \leq 0.15$) et diminuent quand la porosité est plus grande.

III.4.4 Les propriétés thermo-poro-élastiques effectives : le cas non drainé

Le cas non drainé considéré ici n'est valide que si la contrainte uniforme initiale et la pression initiale de pore sont égales à zéro. Sous un chargement mécanique, le comportement du milieu poreux non drainé est considéré comme celui du biphasique : l'un est la phase matrice solide et l'autre la phase liquide. Pour le milieu poreux dont la perméabilité est très faible (cas des argilites), les propriétés thermo-poroélastiques effectives dans ce cas non drainé peuvent être déterminées en considérant l'espace poreux comme des inclusions dont les propriétés sont (voir [121]) :

$$\mathbb{C}_p = 3k_l \mathbb{J} , \quad \alpha_p = \alpha_l \delta \quad (\text{III.71})$$

Il conduit que les paramètres A_k^p et A_μ^p dépendent non seulement du rapport d'aspect ε , du coefficient de Poisson ν_s mais également du module de Young de la phase solide E_s et du module de compressibilité de la phase liquide k_l .

On remarque que dans le cas drainé, le coefficient de la dilatation thermique est égal à celui de la phase solide $\alpha_{\text{hom}} = \alpha_s$. Cependant, dans ce cas non drainé, il est exprimé comme :

$$\alpha_{\text{hom}}^{nd} = \frac{(1 - f_p) k_s \alpha_s + f_p A_k^p k_l \alpha_l}{(1 - f_p) k_s + f_p A_k^p k_l} \quad (\text{III.72})$$

Ce résultat vérifie les résultats connus dans la littérature [26, 129] :

$$\alpha_{\text{hom}}^{nd} = \alpha_s + (\alpha_l - \alpha_s) \left(f_p + \frac{1/k_{\text{hom}}^{nd} - (f_p/k_l + (1 - f_p)/k_m)}{1/k_l - 1/k_m} \right) \quad (\text{III.73})$$

Pour être plus brièvement, on ne présente pas ici les figures qui désignent l'effet du rapport d'aspect des pores ε , du coefficient de Poisson ν_s et de la porosité f_p sur les propriétés thermo-poro-élastiques effectives non-drainées. On observe néanmoins bien que les allures soient identiques dans les deux cas les valeurs quantitatives s'avèrent différentes. Cependant, sur les figures (III.11 et III.12), on peut constater l'influence de ces derniers termes sur le coefficient de dilatation thermique effectif

α_{hom}^{nd} avec les valeurs données des paramètres de chaque phase comme : $k_l = 2 \text{ GPa}$, $\alpha_l = 10^{-4} \text{ K}^{-1}$, $E_s = 10 \text{ GPa}$ et $\alpha_s = 10^{-5} \text{ K}^{-1}$. On observe une diminution de α_{hom}^{nd} en fonction du rapport d'aspect ε et du coefficient de Poisson ν_s . D'un autre coté, ce coefficient augmente par rapport à la porosité f_p .

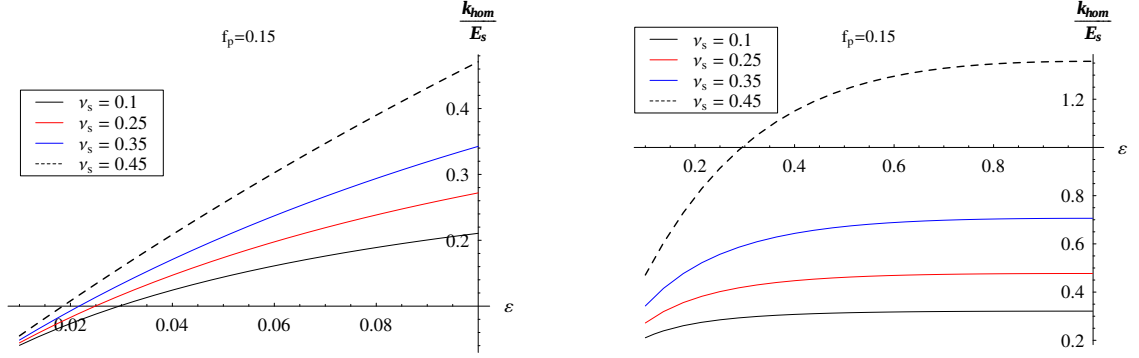


FIGURE III.1: L'évolution du module de compressibilité effectif en fonction de ε et ν_s (cas drainé)

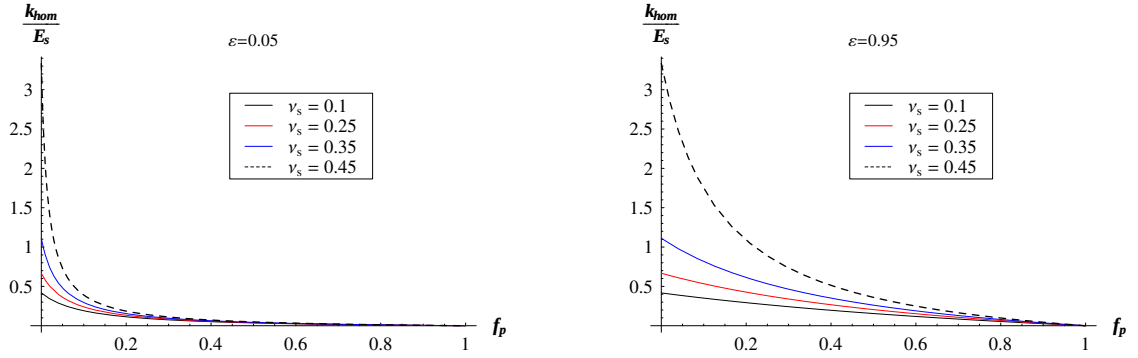


FIGURE III.2: L'évolution du module de compressibilité effectif en fonction de f_p et ν_s (cas drainé)

III.5 L'influence du schéma d'estimation sur les propriétés thermo-poro-élastiques effectives

Dans le paragraphe précédent, les propriétés thermo-poro-élastiques d'un milieu poreux ont été envisagées dans le cadre du schéma d'estimation de Mori-Tanaka. Les expressions analytiques de ces propriétés et les simulations numériques ont également été présentées. Pour cette partie, ces résultats prédictifs seront confrontés avec ceux des autres schémas d'estimation (schéma dilué, schéma autocohérent, schéma différentiel, les bornes de Hashin-Shtrikman) dont le principe a été décrit dans le premier chapitre (I). Les expressions explicites des propriétés thermo-poroélastiques isotropes effectives peuvent être établies pour ces derniers schémas de la même manière que celles

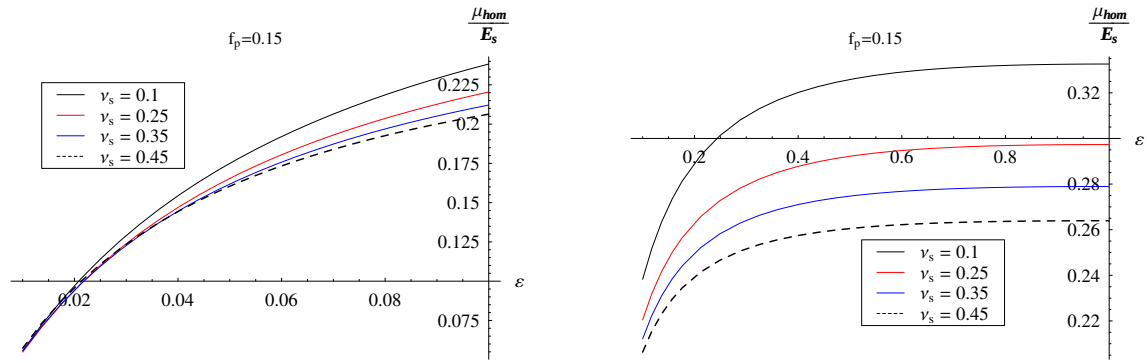


FIGURE III.3: L'évolution du module de cisaillement effectif en fonction de ε et ν_s (cas drainé)

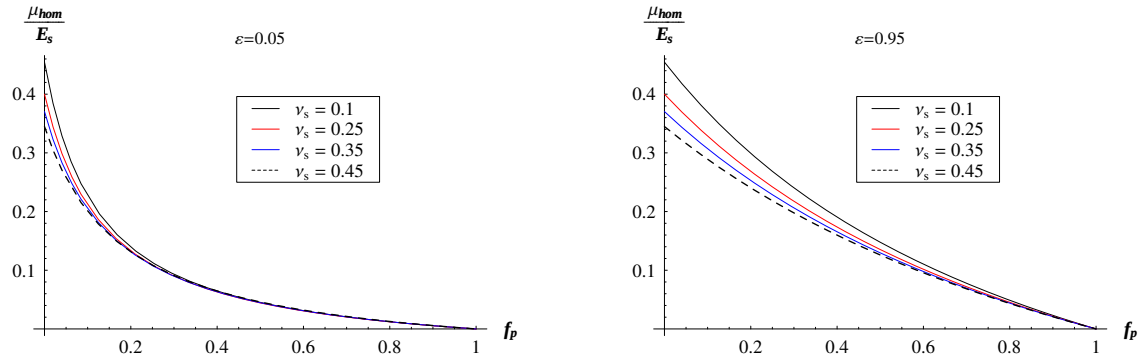


FIGURE III.4: L'évolution du module de cisaillement effectif en fonction de f_p et ν_s (cas drainé)

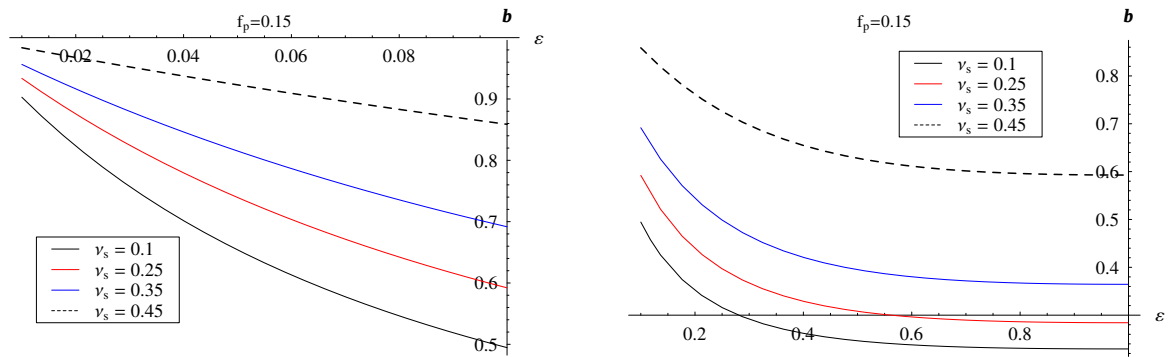


FIGURE III.5: L'évolution du coefficient de Biot effectif en fonction de ε et ν_s (cas drainé)

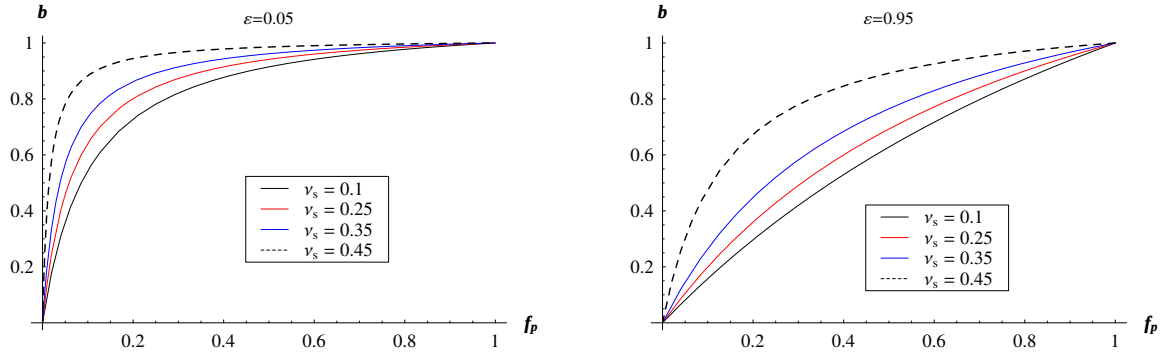


FIGURE III.6: L'évolution du coefficient de Biot effectif en fonction de f_p et ν_s (cas drainé)

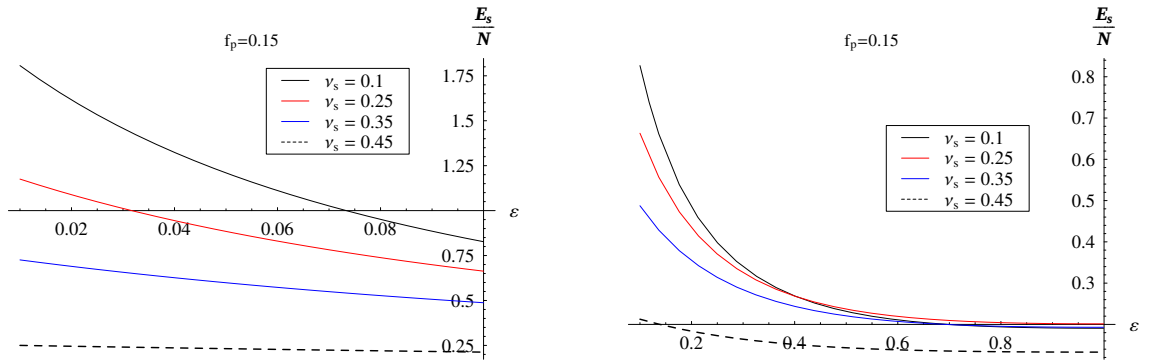


FIGURE III.7: L'évolution de l'inversion du module de Biot effectif en fonction de ε et ν_s (cas drainé)

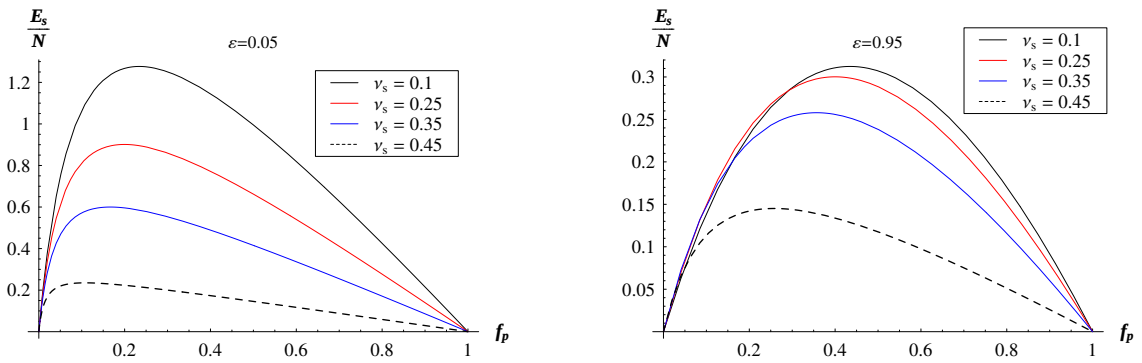


FIGURE III.8: L'évolution de l'inversion du module de Biot effective en fonction de f_p et ν_s (cas drainé)

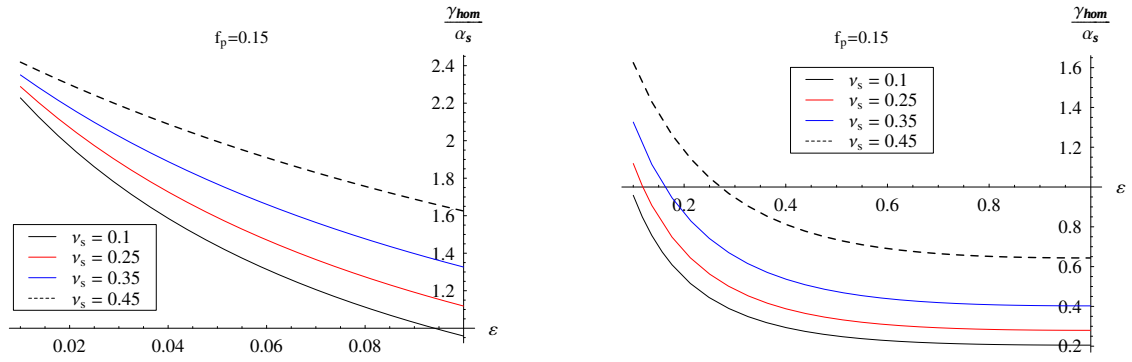


FIGURE III.9: L'évolution du coefficient de dilatation thermique différentiel effectif en fonction de ε et ν_s (cas drainé)

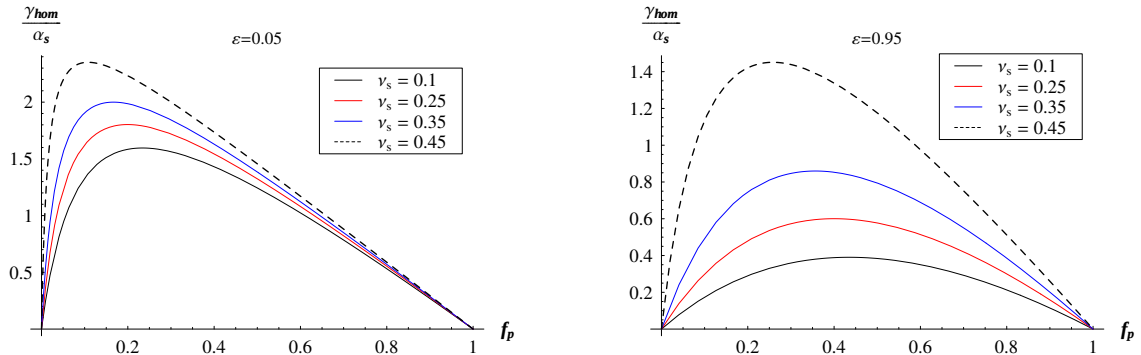


FIGURE III.10: L'évolution du coefficient de dilatation thermique différentiel effectif en fonction de f_p et ν_s (cas drainé)

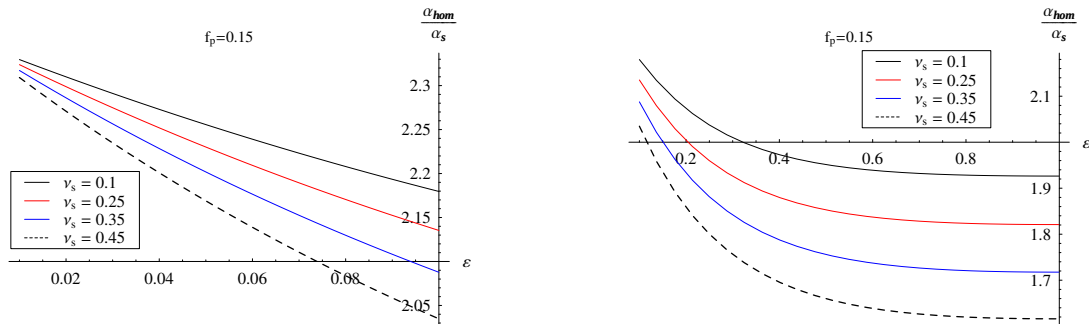


FIGURE III.11: L'évolution du coefficient de dilatation thermique effectif en fonction de ε et ν_s (cas non drainé)

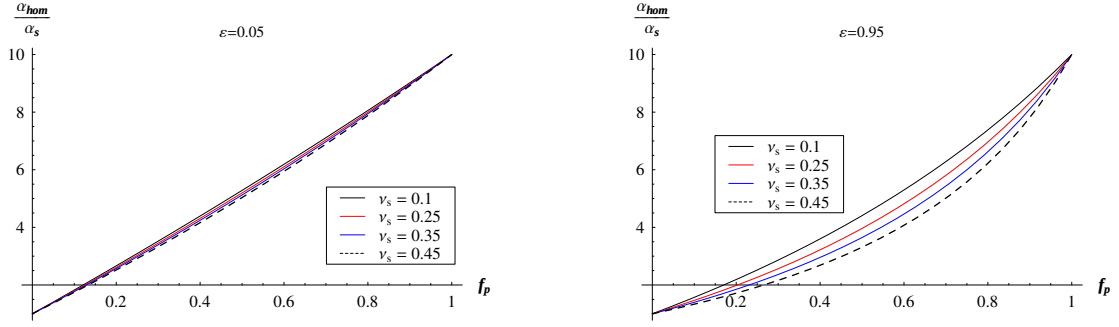


FIGURE III.12: L'évolution du coefficient de dilatation thermique effectif en fonction de f_p et ν_s (cas non drainé)

du schéma de Mori Tanaka en remplaçant le tenseur de concentration $\mathbb{A}_p^{\text{MT}}$ par celui d'autre schéma ($\mathbb{A}_p^{\text{DIL}}$, $\mathbb{A}_p^{\text{AC}}$ et $\mathbb{A}_p^{\text{AC}}$ respectivement pour les schémas dilué, autocohérent et les bornes de Hashin-Shtrikman correspondants).

Dans le cas du schéma différentiel, le milieu poreux homogénéisé s'obtient à partir de la phase matrice solide par une série d'additions incrémentales de la fraction volumique de la phase poreuse. A l'état initial, les propriétés du milieu sont prises égales à celles de la phase matrice solide $\mathbb{C}_0 = \mathbb{C}_s$, $\alpha_0 = \alpha_s$. A la fin de l'étape $(j-1)$ on a un milieu poreux homogénéisé dont les propriétés sont respectivement $\mathbb{C}^{(j-1)}$, $\mathbf{B}^{(j-1)}$, $\alpha^{(j-1)}$, $N^{(j-1)}$, $\gamma^{(j-1)}$ et $C_{\text{hom}}^{\epsilon, (j-1)}$. Pour l'étape (j) , on homogénéise la phase matrice poreuse Ω_m de l'étape précédente $(j-1)$ et la phase poreuse Ω_p avec la fraction volumique $df_p^{(j)}$. Le comportement local des phases s'écrit :

$$\sigma = \mathbb{C} : \varepsilon + \sigma_p - \mathbb{C} : \alpha \Theta \quad (\text{III.74})$$

avec :

$$\mathbb{C} = \begin{cases} \mathbb{C}_p & (\Omega_p) \\ \mathbb{C}^{(j-1)} & (\Omega_m) \end{cases} \quad \sigma_p = \begin{cases} -p_l \delta & (\Omega_p) \\ -p_l \mathbf{B}^{(j-1)} & (\Omega_m) \end{cases} \quad \alpha = \begin{cases} \alpha_p & (\Omega_p) \\ \alpha^{(j-1)} & (\Omega_m) \end{cases} \quad (\text{III.75})$$

Il s'agit du problème d'homogénéiser un milieu poreux à double porosité où la pression de la phase matrice poreuse est égale à celle de la phase poreuse p_l (voir les travaux de Dormieux et al., [33]). On obtient donc à la fin de l'étape (j) les équations des propriétés thermo-poro-élastiques homogénéisés (dans le cas drainé) comme :

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^{(j)} &= \mathbb{C}^{(j-1)} - df_p^{(j)} \mathbb{C}^{(j-1)} : \mathbb{A}_p^{(j-1)} \\ \mathbb{A}_p^{(j-1)} &= \left\langle \left[\mathbb{I} - \mathbb{P}_p^{(j-1)} : \mathbb{C}^{(j-1)} \right]^{-1} \right\rangle \end{aligned} \quad (\text{III.76})$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{B}^{(j)} &= \mathbf{B}^{(j-1)} + df_p^{(j)} (\boldsymbol{\delta} - \mathbf{B}^{(j-1)}) : \mathbb{A}_p^{(j-1)} \\
 \mathbf{C}^{(j)} : \boldsymbol{\alpha}^{(j)} &= \left(1 - df_p^{(j)}\right) \mathbf{C}^{(j-1)} : \boldsymbol{\alpha}^{(j-1)} : \mathbb{A}_m^{(j-1)} \\
 \frac{1}{N^{(j)}} &= \frac{1 - df_p^{(j)}}{N^{(j-1)}} - df_p^{(j)} (\mathbf{B}^{(j-1)} - \boldsymbol{\delta}) : \mathbb{S}^{(j-1)} : \left(\mathbb{I} - \mathbb{A}_p^{(j-1)}\right) : (\mathbf{B}^{(j-1)} - \boldsymbol{\delta}) \\
 \gamma^{(j)} &= \left(1 - df_p^{(j)}\right) \gamma^{(j-1)} + df_p^{(j)} \boldsymbol{\alpha}^{(j-1)} : (\mathbf{B}^{(j-1)} - \boldsymbol{\delta}) : \left(\mathbb{I} - \mathbb{A}_p^{(j-1)}\right)
 \end{aligned} \tag{III.77}$$

où la fraction volumique de chaque étape $df_p^{(j)}$ dépend du nombre d'incrément N_{inc} :

$$df_p^{(j)} = \frac{f_p}{N_{\text{inc}}} \cdot \frac{1}{1 - (j-1)f_p/N_{\text{inc}}} \quad (j = 1, N_{\text{inc}}) \tag{III.78}$$

Le milieu poreux homogénéisé s'obtient à la fin de l'étape $j = N_{\text{inc}}$ où la porosité dans le milieu est égale à f_p .

La comparaison des résultats prédictifs des propriétés thermo-poro-élastiques effectives par différents schémas d'estimation est présentée sur les figures ci-dessous (III.14 à III.21) avec les données de la phase matrice solide : $E_s = 10$ GPa, $\nu_s = 0.2$, $\alpha_s = 10^{-5}$ K⁻¹ et $N_{\text{inc}} = 100$ pour le schéma différentiel.

On s'intéresse tout d'abord à ces prédictions en fonction de la porosité f_p . Deux valeurs considérées du rapport d'aspect des pores correspondent aux pores aplatis $\varepsilon = 0.05$ et aux pores quasi-sphériques $\varepsilon = 0.95$. On observe que pour les pores quasi-sphériques les propriétés évaluées par les différentes approches d'homogénéisation sont proches pour les faibles taux de porosité $f_p \leq 10\%$. Au fur et à mesure que la porosité augmente, les différentes prédictions s'écartent les unes des autres. Les estimations issues de l'approche diluée divergent rapidement et deviennent non physiques pour des porosités dépassant 50%. L'approche du schéma autocohérent conduit également à des résultats non physiques pour des milieux de porosité supérieure à 50%. Les prédictions des schémas de Mori-Tanaka et de Hashin-Shtrikman sont superposées. On peut remarquer aussi que seules les approches de Hashin-Shtrikman, de Mori-Tanaka et celle différentielle permettent de donner des résultats à 100% de pores. Ces observations confirment celles-ci constatées dans les travaux de Smaoui Barboura [125] dans le contexte d'un milieu poreux dont les pores sont sphériques $\varepsilon = 1$. Dans le cas des pores aplatis $\varepsilon = 0.05$, la tendance de ces prédictions est aussi constatée. L'écart de ces estimations est de plus en plus grand à compter de très faible taux de porosité $f_p = 5\%$. Une méthode d'étendre de façon significative le domaine de validité des approches simplifiées (comme les schémas dilué et autocohérent) est d'utiliser une démarche d'homogénéisation itérative. Cette méthode itérative introduite par Dumontet, Benhamida et coauteurs [5, 4, 144] a montré sa capacité prédictive en appliquant aux milieux poreux à fortes porosités dont les pores sont de la forme sphériques [4, 125].

On s'intéresse également à l'évolution de ces propriétés prédictives par différentes approches en fonction du rapport d'aspect des pores ε . Pour une valeur donnée de la porosité $f_p = 10\%$, on trouve que ces prédictions s'approchent pour les rapports d'aspect près de $\varepsilon \approx 1$. Ils s'écartent les unes des autres pour les valeurs réduites du rapport d'aspect des pores $\varepsilon \leq 0.2$. L'approche du schéma dilué et autocohérent conduisent à des résultats non physiques pour des milieux dont le rapport d'aspect est pris très faible ($\varepsilon \leq 0.07$ pour le schéma dilué et $\varepsilon \leq 0.05$ pour le schéma autocohérent). On remarque également que dans le cas des pores fortement aplatis $\varepsilon \ll 1$, les inclusions poreuses sont considérées comme des "penny shaped cracks". L'effet des penny shaped cracks sur des propriétés effectives n'est plus exprimé en fonction de la porosité mais du paramètre de la densité des cracks [73, 103].

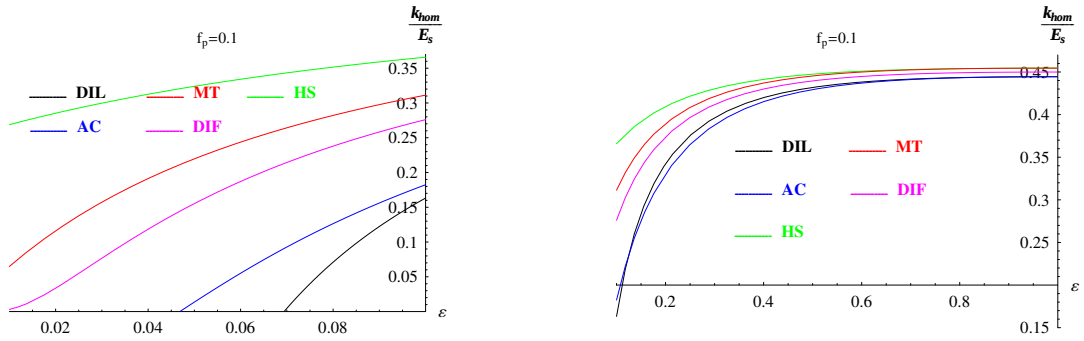


FIGURE III.13: L'évolution du module de compressibilité effectif en fonction de ε (comparaison des différents schémas d'estimation)

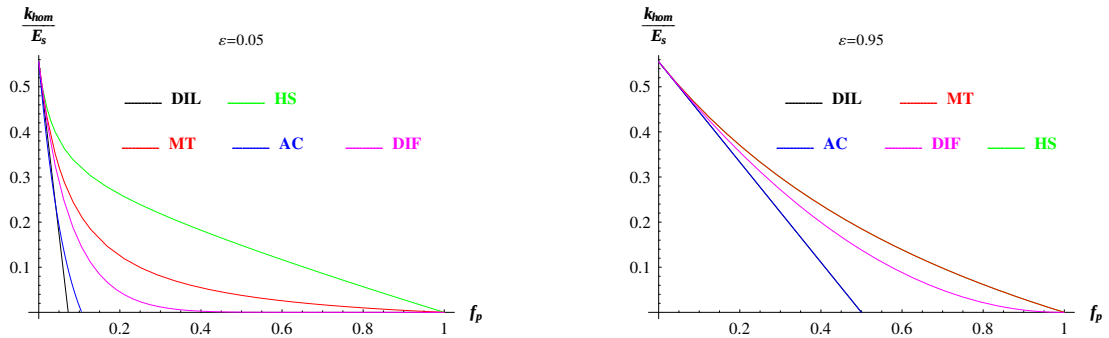


FIGURE III.14: L'évolution du module de compressibilité effectif en fonction de f_p (comparaison des différents schémas d'estimation)

III.6 Homogénéisation du comportement thermo-poro-élastique linéaire des argilites [43]

L'approche micromécanique du comportement thermo-poroélastique linéaire est appliquée dans cette partie pour les argilites en développant la méthode d'homogénéisation en deux étapes. Les

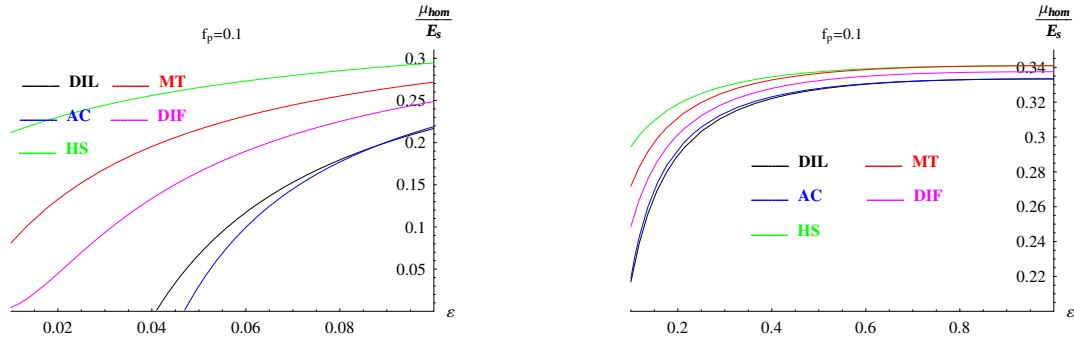


FIGURE III.15: L'évolution du module de cisaillement effectif en fonction de ε (comparaison des différents schémas d'estimation)

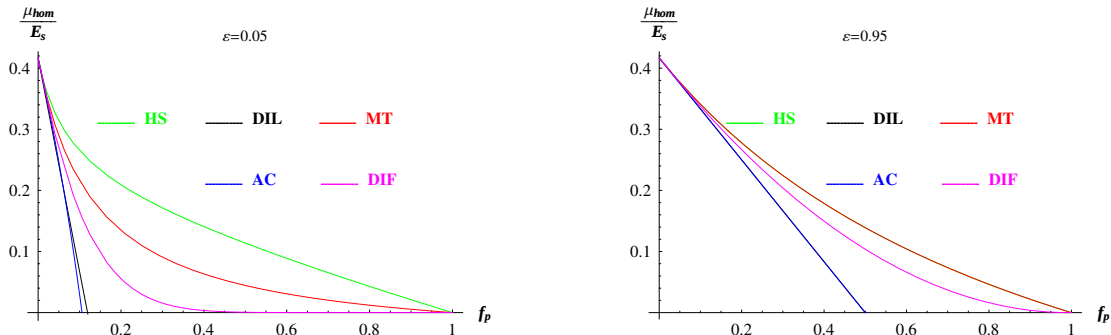


FIGURE III.16: L'évolution du module de cisaillement effectif en fonction de f_p (comparaison des différents schémas d'estimation)

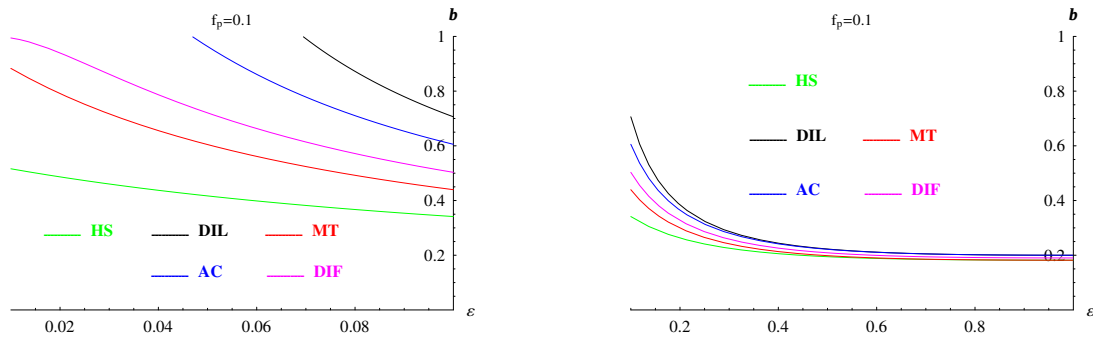


FIGURE III.17: L'évolution du coefficient de Biot effectif en fonction de ε (comparaison des différents schémas d'estimation)

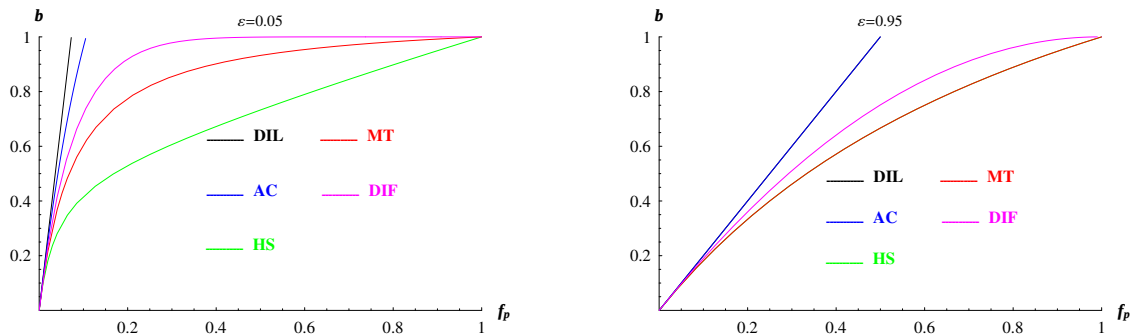
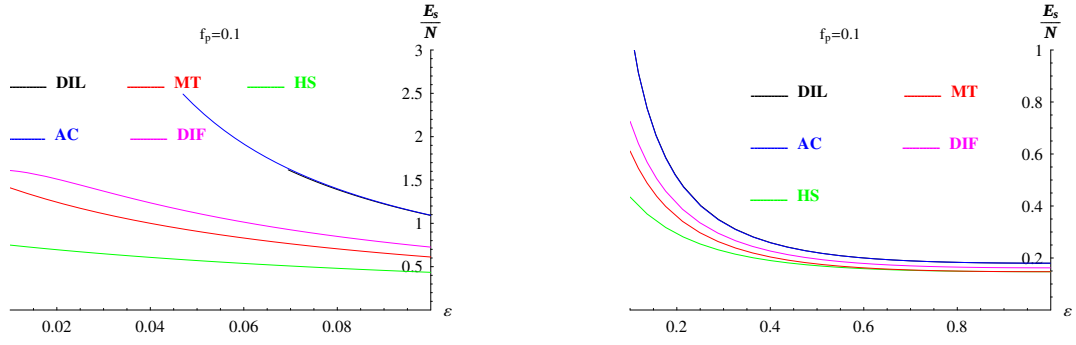
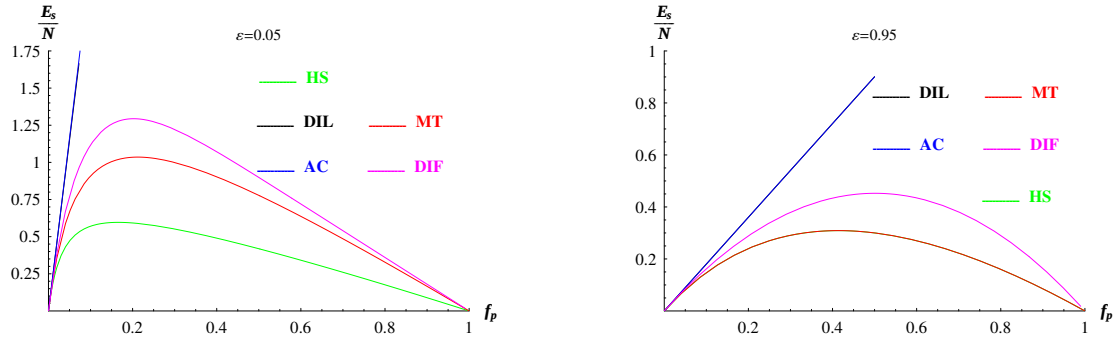
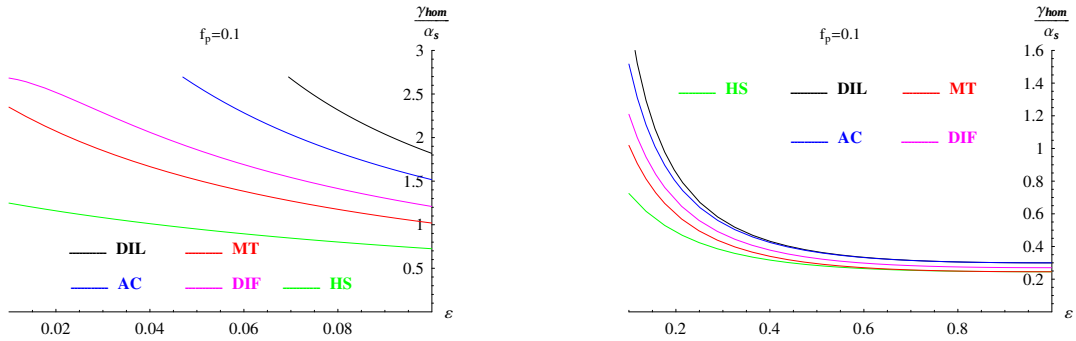
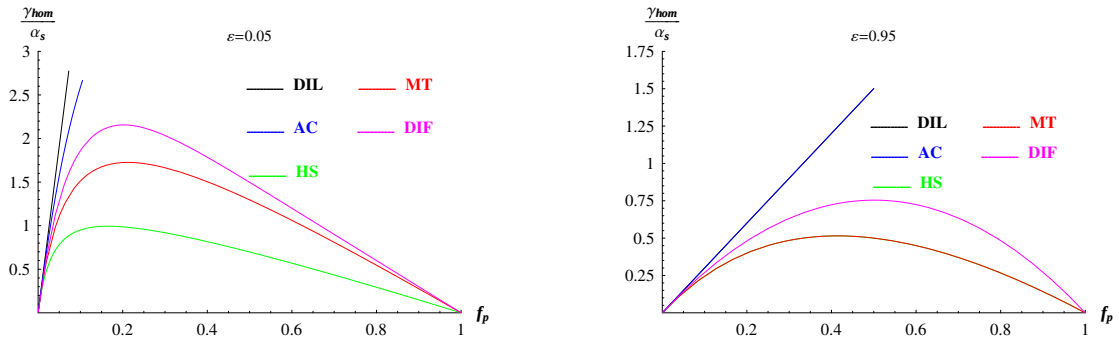


FIGURE III.18: L'évolution du coefficient de Biot effectif en fonction de f_p (comparaison des différents schémas d'estimation)


 FIGURE III.19: L'évolution de l'inversion du module de Biot effectif en fonction de ε (comparaison des différents schémas d'estimation)

 FIGURE III.20: L'évolution de l'inversion du module de Biot effectif en fonction de f_p (comparaison des différents schémas d'estimation)

 FIGURE III.21: L'évolution du coefficient de dilatation thermique différentiel effectif en fonction de ε (comparaison des différents schémas d'estimation)

 FIGURE III.22: L'évolution du coefficient de dilatation thermique différentiel effectif en fonction de f_p (comparaison des différents schémas d'estimation)

roches argileuses considérées ici sont schématisées comme des milieux poreux saturés comportant une phase matricielle argileuse, de l'espace poreux saturé et des inclusions minérales de quartz et de calcites. On propose donc :

- Pour la première étape, la matrice poreuse Ω_m est homogénéisée à partir de la matrice argileuse Ω_a et de l'espace poreux Ω_p qui est saturée par une phase liquide. La fraction volumique des inclusions des pores dans la matrice poreuse est déterminée comme :

$$f_p^I = \frac{\Omega_p}{\Omega_m} = \frac{f_p}{f_m} = \frac{f_p}{f_p + f_a} = \frac{f_p}{1 - f_{qu} - f_{ca}} \quad (\text{III.79})$$

$$f_m + f_{qu} + f_{ca} = 1$$

où f_p , f_a , f_{qu} et f_{ca} sont respectivement la fraction volumique de la matrice argileuse, de la phase poreuse et des inclusions de quartz et de calcites.

- Pour la deuxième étape, le milieu poreux homogénéisé Ω est obtenu en ajoutant des inclusions sphériques de quartz Ω_{qu} et de calcites Ω_{ca} dans la matrice poreuse Ω_m .

Le V.E.R du milieu poreux hétérogène est imposé par la suite d'une déformation macroscopique $\mathbf{E}$, une pression p_l dans l'espace poreux et une variation de la température $\Theta = T - T_0$. Encore une fois, compte tenu de la linéarité du problème, on peut le décomposer en trois sous-problèmes élémentaires comme dans (III.4.3) qui correspondent respectivement au cas de chargement purement mécanique, celui purement hydrique et celui purement thermique. La solution de chaque sous-problème dans le cadre de la méthode d'homogénéisation en deux étapes en utilisant le théorème de Levin [83] est démontrée dans les travaux de Giraud et al. [43, 44] et sera présentée dans les paragraphes suivants.

III.6.1 Cas de chargement purement mécanique

Considérons dans un premier temps le cas où le chargement est purement mécanique $\mathbf{E} \neq 0$, $p_l = 0$ et $\Theta = 0$. En supposant $\bar{\boldsymbol{\sigma}}'_m$ et $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}'_m$ respectivement la contrainte moyenne et la déformation moyenne de la matrice poreuse, on obtient les solutions suivantes pour chaque étape d'homogénéisation :

- *Première étape d'homogénéisation*

La matrice poreuse peut être considérée comme un milieu hétérogène biphasique comportant une matrice argileuse et une phase poreuse. Ce milieu est soumis d'une déformation uniforme $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}'_m$ à l'infini. En appliquant la solution présentée dans (III.4.3) pour le milieu poreux

biphasique, on obtient :

$$\begin{aligned}\bar{\boldsymbol{\sigma}}'_m &= \mathbb{C}_I : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}'_m \\ (\phi - \phi_0)'_m &= \mathbf{B}_I : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}'_m \\ s'_m &= \mathbb{C}_I : \boldsymbol{\alpha}_I : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}'_m\end{aligned}\tag{III.80}$$

où les tenseur $\mathbb{C}_I$, $\mathbf{B}_I$, et $\boldsymbol{\alpha}_I$ sont respectivement le module élastique, le tenseur de Biot et le tenseur de la dilatation thermique homogénéisés de la matrice poreuse. L'homogénéisation du problème élasticité linéaire fournit les expressions suivantes :

$$\begin{aligned}\mathbb{C}_I &= \mathbb{C}_a + f_p^I (\mathbb{C}_p - \mathbb{C}_a) : \mathbb{A}_p \\ \mathbf{B}_I &= f_p^I \mathbb{A}_p : \boldsymbol{\delta} \\ \mathbb{C}_I : \boldsymbol{\alpha}_I &= \langle \mathbb{C} : \boldsymbol{\alpha} : \mathbb{A} \rangle = f_p \mathbb{C}_p : \boldsymbol{\alpha}_p : \mathbb{A}_p + (1 - f_p^I) \mathbb{C}_a : \boldsymbol{\alpha}_a : \mathbb{A}_a\end{aligned}\tag{III.81}$$

avec $\mathbb{C}_r$, $\boldsymbol{\alpha}_r$ ($r = a, p$) sont les tenseurs du module élastique et de la dilatation thermique de la matrice argileuse et des inclusions poreuses. Dans le cas drainé, ces propriétés de la phase poreuse sont égales à $\mathbb{C}_p = 0$, $\boldsymbol{\alpha}_p = 0$ tandis que $\mathbb{C}_p = 3k_l \mathbb{J}$ et $\boldsymbol{\alpha}_p = \alpha_l \boldsymbol{\delta}$ (avec $k_l = 2\text{GPa}$, $\alpha_l = 10^{-4} \text{K}^{-1}$) pour le cas non drainé [121, 46].

– *Deuxième étape d'homogénéisation*

La deuxième étape d'homogénéisation permet de déterminer le comportement effectif des argilites en ajoutant les inclusions minérales dans la matrice poreuse. Les propriétés de la matrice poreuse sont obtenues à partir de la solution de l'étape précédente ($\mathbb{C}_m = \mathbb{C}_I$ et $\boldsymbol{\alpha}_m = \boldsymbol{\alpha}_I$). Sous la déformation macroscopique imposée $\mathbf{E}$, on a :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Sigma}' &= \mathbb{C}_{\text{hom}} : \mathbf{E} \\ \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}'_r &= \mathbb{A}_r : \mathbf{E} \quad (r = m, qu, ca)\end{aligned}\tag{III.82}$$

où $\mathbb{C}_{\text{hom}}$ désignent le tenseur d'élasticité homogénéisé et $\mathbb{A}_r$ ($r = m, qu, ca$) les tenseurs de concentrations :

$$\mathbb{C}_{\text{hom}} = \mathbb{C}_m + f_{qu} (\mathbb{C}_{qu} - \mathbb{C}_m) : \mathbb{A}_{qu} + f_{ca} (\mathbb{C}_{ca} - \mathbb{C}_m) : \mathbb{A}_{ca}\tag{III.83}$$

La variation du volume de l'espace poreux à l'échelle macroscopique s'écrit comme suivante [130] :

$$\begin{aligned}(\Phi - \Phi_0)' &= \langle (\phi - \phi_0)' \rangle_{\Omega} \\ &= f_m (\phi - \phi_0)'_m = f_m \mathbf{B}_I : \mathbb{A}_m : \mathbf{E} = \mathbf{B}_{\text{hom}} : \mathbf{E}\end{aligned}\tag{III.84}$$

avec le tenseur de Biot macroscopique $\mathbf{B}_{\text{hom}}$ qui vaut :

$$\mathbf{B}_{\text{hom}} = f_m \mathbf{B}_I : \mathbb{A}_m = \mathbf{B}_I : (\mathbb{I} - f_{qu} \mathbb{A}_{qu} - f_{ca} \mathbb{A}_{ca}) \quad (\text{III.85})$$

L'entropie volumique s'écrit à l'échelle macroscopique :

$$\begin{aligned} S' &= f_m s'_m + f_{qu} s'_{qu} + f_{ca} s'_{ca} \\ &= f_m \mathbb{C}_m : \boldsymbol{\alpha}_m : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}'_m + f_{qu} \mathbb{C}_{qu} : \boldsymbol{\alpha}_{qu} : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}'_{qu} + f_{ca} \mathbb{C}_{ca} : \boldsymbol{\alpha}_{ca} : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}'_{ca} \\ &= \mathbb{C}_{\text{hom}} : \boldsymbol{\alpha}_{\text{hom}} : \mathbf{E} \end{aligned} \quad (\text{III.86})$$

où :

$$\mathbb{C}_{\text{hom}} : \boldsymbol{\alpha}_{\text{hom}} = f_m \mathbb{C}_m : \boldsymbol{\alpha}_m : \mathbb{A}_m + f_{qu} \mathbb{C}_{qu} : \boldsymbol{\alpha}_{qu} : \mathbb{A}_{qu} + f_{ca} \mathbb{C}_{ca} : \boldsymbol{\alpha}_{ca} : \mathbb{A}_{ca} \quad (\text{III.87})$$

III.6.2 Cas de chargement purement hydrique

Supposons que $\bar{\boldsymbol{\sigma}}''_m$ et $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}''_m$ soient respectivement la contrainte moyenne et la déformation moyenne de la matrice poreuse (solution du cas de chargement purement hydrique $\mathbf{E} = 0$, $p_l \neq 0$ et $\Theta = 0$).

On obtiendra les solutions pour deux étapes d'homogénéisation :

– *Première étape d'homogénéisation*

La matrice poreuse dans ce cas est imposé par une déformation $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}''_m$ uniforme à l'infini et la pression p_l dans l'espace poreux. La solution de la sous-partie (III.4.3) nous permet d'écrire les résultats suivants en considérant $\Theta = 0$:

$$\begin{aligned} \bar{\boldsymbol{\sigma}}''_m &= \mathbb{C}_m : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}''_m - p_l \mathbf{B}_I \\ (\phi - \phi_0)''_m &= \mathbf{B}_I : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}''_m + \frac{p_l}{N_I} \\ s''_m &= \mathbb{C}_m : \boldsymbol{\alpha}_m : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}''_m - p_l \gamma_I \end{aligned} \quad (\text{III.88})$$

où l'expression du paramètre de couplage thermique-hydrique γ_I et le module de Biot N_I s'écrit :

$$\begin{aligned} \gamma_I &= \boldsymbol{\alpha}_a : (\mathbf{B}_I - f_p^I \boldsymbol{\delta}) \\ \frac{1}{N_I} &= \boldsymbol{\delta} : (\mathbb{C}_a - \mathbb{C}_p)^{-1} : (\mathbf{B}_I - f_p \boldsymbol{\delta}) \end{aligned} \quad (\text{III.89})$$

– *Deuxième étape d'homogénéisation*

La solution de la première étape donne l'expression suivante du comportement de la matrice poreuse :

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}}''_m = \mathbb{C}_m : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}''_m + \boldsymbol{\tau}_m \quad (\text{III.90})$$

avec $\boldsymbol{\tau}_m = -p_l \mathbf{B}_I$ peut être considéré comme la précontrainte uniforme dans la matrice poreuse. La solution de cette deuxième étape est donc acquise en appliquant les résultats du problème de précontrainte uniforme par phase. En utilisant le théorème de Levin, on obtient :

$$\boldsymbol{\Sigma}'' = \langle \boldsymbol{\tau} : \mathbb{A} \rangle = -f_m p_l \mathbf{B}_I : \mathbb{A}_m = -p_l \mathbf{B}_{\text{hom}} \quad (\text{III.91})$$

En outre, la variation du volume des pores et l'entropie volumique sont évaluées à l'échelle macroscopique comme suivantes :

$$(\Phi - \Phi_0)'' = \langle (\phi - \phi_0)'' \rangle_\Omega = f_m (\phi - \phi_0)''_m = f_m \left(\mathbf{B}_I : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}''_m + \frac{p_l}{N_I} \right) \quad (\text{III.92})$$

$$\begin{aligned} S'' &= f_m s''_m + f_{qu} s''_{qu} + f_{ca} s''_{ca} \\ &= f_m (\mathbb{C}_m : \boldsymbol{\alpha}_m : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}''_m - p_l \gamma_I) + f_{qu} \mathbb{C}_{qu} : \boldsymbol{\alpha}_{qu} : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}''_{qu} + f_{ca} \mathbb{C}_{ca} : \boldsymbol{\alpha}_{ca} : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}''_{ca} \end{aligned} \quad (\text{III.93})$$

Les déformations moyennes $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}''_i$ ($i = m, ca, qu$) peuvent être déterminées directement en utilisant la condition de la déformation macroscopique nulle à l'infini $\mathbf{E} = 0$. Elles vérifient les équations suivantes :

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= f_m \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}''_m + \sum_{i=1}^r f_i \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}''_i = 0 \\ \boldsymbol{\Sigma}'' &= -p_l \mathbf{B}_{\text{hom}} = f_m (\mathbb{C}_m : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}''_m - p_l \mathbf{B}_I) + \sum_{i=1}^r f_i \mathbb{C}_i : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}''_i \end{aligned} \quad (\text{III.94})$$

où r est le nombre des phases d'inclusions (dans notre cas $r = 2$ correspond aux deux phases de quartz et des calcites). En utilisant la formule (III.85), on peut développer les équations ci-dessus de la manière suivante :

$$\begin{aligned} -p_l \mathbf{B}_I : \left(\mathbb{I} - \sum_{i=1}^r f_i \mathbb{A}_i \right) &= -p_l \left(1 - \sum_{i=1}^r f_i \right) \mathbf{B}_I - \sum_{i=1}^r f_i \mathbb{C}_m : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}''_i + \sum_{i=1}^r f_i \mathbb{C}_i : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}''_i \\ &= -p_l \left(1 - \sum_{i=1}^r f_i \right) \mathbf{B}_I + \sum_{i=1}^r f_i (\mathbb{C}_i - \mathbb{C}_m) : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}''_i \end{aligned} \quad (\text{III.95})$$

qui déduit :

$$\sum_{i=1}^r f_i [(\mathbb{C}_i - \mathbb{C}_m) : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}''_i + p_l (\mathbb{I} - \mathbb{A}_i) : \mathbf{B}_I] = 0 \quad (\text{III.96})$$

La déformation moyenne de chaque phase est donc :

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}''_i = -p_l (\mathbb{C}_i - \mathbb{C}_m)^{-1} : (\mathbb{I} - \mathbb{A}_i) : \mathbf{B}_I \quad (\text{III.97})$$

On peut recalculer la variation du volume de l'espace poreux et l'entropie macroscopique :

$$\begin{aligned} (\Phi - \Phi_0)'' &= \frac{p_l}{N_{\text{hom}}} \\ \frac{1}{N_{\text{hom}}} &= \frac{f_m}{N_I} + \mathbf{B}_I : \left(\sum_{i=1}^r f_i (\mathbb{C}_i - \mathbb{C}_m)^{-1} : (\mathbb{I} - \mathbb{A}_i) \right) : \mathbf{B}_I \end{aligned} \quad (\text{III.98})$$

$$\begin{aligned}
 S'' &= -p_l \gamma_{\text{hom}} \\
 \gamma_{\text{hom}} &= f_m \gamma_I + \sum_{i=1}^r f_i (\mathbb{C}_i - \mathbb{C}_m)^{-1} : (\mathbb{I} - \mathbb{A}_i) : (\mathbb{C}_i : \boldsymbol{\alpha}_i - \mathbb{C}_m : \boldsymbol{\alpha}_m) : \mathbf{B}_I
 \end{aligned} \tag{III.99}$$

avec γ_{hom} et N_{hom} sont respectivement le coefficient de la dilatation différentiel et le module de Biot homogénéisés.

III.6.3 Cas de chargement thermique pur

La contrainte moyenne et la déformation moyenne de la matrice poreuse pour le cas de chargement purement thermique ($\mathbf{E} = 0$, $p_l = 0$ et $\Theta = T - T_0$) sont respectivement $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_m'''$ et $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_m'''$. La solution de ce problème est déterminée d'une manière aussi identique que celle du cas précédent :

– *Première étape d'homogénéisation*

Pour cette étape, on applique les résultats de la sous-partie (III.4.3) avec $p_l = 0$:

$$\begin{aligned}
 \bar{\boldsymbol{\sigma}}_m''' &= \mathbb{C}_m : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_m''' - \mathbb{C}_m : \boldsymbol{\alpha}_m \Theta \\
 (\phi - \phi_0)_m''' &= \mathbf{B}_I : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_m''' - \gamma_I \Theta \\
 s_m''' &= \mathbb{C}_m : \boldsymbol{\alpha}_m : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_m''' + \frac{C_m^\varepsilon}{T_0} \Theta
 \end{aligned} \tag{III.100}$$

où l'expression de C_m^ε s'écrit :

$$\begin{aligned}
 C_m^\varepsilon &= f_p^I C_p^\varepsilon + (1 - f_p^I) C_a^\varepsilon + T_0 (\mathbb{C}_a : \boldsymbol{\alpha}_a - \mathbb{C}_p : \boldsymbol{\alpha}_p) : (\mathbb{C}_p - \mathbb{C}_a)^{-1} : \\
 &: (\mathbb{C}_m : \boldsymbol{\alpha}_m - f_p^I \mathbb{C}_p : \boldsymbol{\alpha}_p - (1 - f_p^I) \mathbb{C}_a : \boldsymbol{\alpha}_a)
 \end{aligned} \tag{III.101}$$

– *Deuxième étape d'homogénéisation*

L'expression du comportement local de chaque phase pour cette deuxième étape est sous forme de :

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}}_i''' = \mathbb{C}_i : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_i''' - \mathbb{C}_i : \boldsymbol{\alpha}_i \Theta \quad (i = m, qu, ca) \tag{III.102}$$

Ce problème correspond au problème thermo-élastique linéaire du milieu multiphasique (voir III.3.3) où la déformation macroscopique imposée $\mathbf{E} = 0$. On obtient donc :

$$\boldsymbol{\Sigma}''' = -\mathbb{C}_{\text{hom}} : \boldsymbol{\alpha}_{\text{hom}} \Theta \tag{III.103}$$

Les déformations moyennes $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_i'''$ ($i = m, ca, qu$) peuvent être également déterminées directement comme le paragraphe précédent en utilisant la condition de la déformation macroscopique nulle.

pique nulle à l'infini $\mathbf{E} = 0$:

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= f_m \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_m''' + \sum_{i=1}^r f_i \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_i''' = 0 \\ \boldsymbol{\Sigma}''' &= -\mathbb{C}_{\text{hom}} : \boldsymbol{\alpha}_{\text{hom}} \Theta = f_m \mathbb{C}_m : (\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_m''' - \boldsymbol{\alpha}_m \Theta) + \sum_{i=1}^r f_i \mathbb{C}_i : (\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_i''' - \boldsymbol{\alpha}_i \Theta)\end{aligned}\quad (\text{III.104})$$

A partir de la formule (III.87), on peut développer les équations au-dessus comme :

$$\begin{aligned}-\mathbb{C}_{\text{hom}} : \boldsymbol{\alpha}_{\text{hom}} \Theta &= -\left(\mathbb{C}_m : \boldsymbol{\alpha}_m : \left(\mathbb{I} - \sum_{i=1}^r f_i \mathbb{A}_i \right) + \sum_{i=1}^r f_i \mathbb{C}_i : \boldsymbol{\alpha}_i : \mathbb{A}_i \right) \Theta \\ &= -\mathbb{C}_m : \boldsymbol{\alpha}_m \left(1 - \sum_{i=1}^r f_i \right) \Theta - \sum_{i=1}^r f_i \mathbb{C}_i : \boldsymbol{\alpha}_i \Theta + \sum_{i=1}^r f_i (\mathbb{C}_i - \mathbb{C}_m) \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_i'''\end{aligned}\quad (\text{III.105})$$

qui déduit que :

$$\sum_{i=1}^r f_i [(\mathbb{C}_i - \mathbb{C}_m) : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_i''' - (\mathbb{C}_i : \boldsymbol{\alpha}_i - \mathbb{C}_m : \boldsymbol{\alpha}_m) : (\mathbb{I} - \mathbb{A}_i) \Theta] = 0 \quad (\text{III.106})$$

La déformation moyenne de chaque phase est donc :

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_i''' = (\mathbb{C}_i - \mathbb{C}_m)^{-1} : (\mathbb{C}_i : \boldsymbol{\alpha}_i - \mathbb{C}_m : \boldsymbol{\alpha}_m) : (\mathbb{I} - \mathbb{A}_i) \Theta \quad (\text{III.107})$$

La variation du volume de l'espace poreux et l'entropie macroscopique sont recalculées comme :

$$(\Phi - \Phi_0)''' = f_m (\phi - \phi_0)'''_m = f_m (\mathbf{B}_I : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_m''' - \gamma_I \theta) = -\gamma_{\text{hom}} \Theta \quad (\text{III.108})$$

$$\begin{aligned}S''' &= f_m s_m''' + f_{qu} s_{qu}''' + f_{ca} s_{ca}''' \\ &= f_m \left(\mathbb{C}_m : \boldsymbol{\alpha}_m : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_m''' + \frac{C_m^\varepsilon}{T_0} \Theta \right) + \sum_{i=1}^r f_i \left(\mathbb{C}_i : \boldsymbol{\alpha}_i : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_i''' + \frac{C_i^\varepsilon}{T_0} \Theta \right) \\ &= \frac{C_{\text{hom}}^\varepsilon}{T_0} \Theta\end{aligned}\quad (\text{III.109})$$

$$\begin{aligned}C_{\text{hom}}^\varepsilon &= f_m C_m^\varepsilon + f_{qu} C_{qu}^\varepsilon + f_{ca} C_{ca}^\varepsilon + \\ &+ T_0 \sum_{i=1}^r (\mathbb{C}_i - \mathbb{C}_m)^{-1} : (\mathbb{C}_i : \boldsymbol{\alpha}_i - \mathbb{C}_m : \boldsymbol{\alpha}_m) : (\mathbb{I} - \mathbb{A}_i) : (\mathbb{C}_i : \boldsymbol{\alpha}_i - \mathbb{C}_m : \boldsymbol{\alpha}_m)\end{aligned}$$

Enfin, le comportement thermo-poro-élastique linéaire à l'échelle macroscopique est obtenu en superposant les solutions de trois sous-problèmes élémentaires qui s'écrivent sous forme :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Sigma} &= \boldsymbol{\Sigma}' + \boldsymbol{\Sigma}'' + \boldsymbol{\Sigma}''' = \mathbb{C}_{\text{hom}} : \mathbf{E} - p_l \mathbf{B}_{\text{hom}} - \mathbb{C}_{\text{hom}} : \boldsymbol{\alpha}_{\text{hom}} \Theta \\ \Phi - \Phi_0 &= (\Phi - \Phi_0)' + (\Phi - \Phi_0)'' + (\Phi - \Phi_0)''' = \mathbf{B}_{\text{hom}} : \mathbf{E} + \frac{p_l}{N_{\text{hom}}} - \gamma_{\text{hom}} \Theta \\ S &= S' + S'' + S''' = \mathbb{C}_{\text{hom}} : \boldsymbol{\alpha}_{\text{hom}} : \mathbf{E} - p_l \gamma_{\text{hom}} + \frac{C_{\text{hom}}^\varepsilon}{T_0} \Theta\end{aligned}\quad (\text{III.110})$$

III.6.4 Simulations numériques des propriétés thermo-poro-élastiques effectives des argilites

On introduit maintenant les résultats numériques des propriétés thermo-poro-élastiques effectives des argilites en utilisant le schéma d'estimation de Mori Tanaka dans les deux étapes d'homogénéisation. Ces résultats calculés dans le contexte des milieux isotropes peuvent être appliqués pour des roches dont le degré d'anisotropie est faible. Il s'agit du cas de l'argilite de Meuse/Haute-Marne [60].

Les deux phases solides de quartz et de calcite sont toujours modélisées comme des inclusions sphériques dont les propriétés thermo-élastiques sont isotropes :

$$\begin{aligned} \mathbb{C}_i^{\text{iso}} &= 3k_i^{\text{iso}} \mathbb{J} + 2\mu_i^{\text{iso}} \mathbb{K}, & \boldsymbol{\alpha}_i^{\text{iso}} &= \alpha_i^{\text{iso}} \boldsymbol{\delta} \quad (i = qu, ca) \\ k_i^{\text{iso}} &= \frac{\mathbb{C}_i :: \mathbb{J}}{3}, & \mu_i^{\text{iso}} &= \frac{\mathbb{C}_i :: \mathbb{K}}{10}, & \alpha_i^{\text{iso}} &= \frac{\boldsymbol{\alpha}_i : \boldsymbol{\delta}}{3} \end{aligned} \quad (\text{III.111})$$

En réalité, les propriétés thermo-élastiques des minéraux de quartz et de calcite sont fortement anisotropes. Par exemple (Tab. III.1), le coefficient de dilatation thermique de calcite est respectivement négatif dans la direction perpendiculaire à l'axe vertical z_3 du système de cristal ($\alpha_{11} = \alpha_{22} < 0$) et positif dans la direction z_3 . De plus, on remarque que le coefficient de dilatation thermique de quartz et de calcite est une fonction non linéaire de la température. D'après Winkler [134], les valeurs du coefficient de dilatation thermique ne valident que dans le domaine $0 - 150^\circ\text{C}$. Les paramètres isotropes équivalents calculés à partir de la relation (III.111) sont présentés dans le tableau (III.2).

En effet, pour le milieu isotrope le tenseur de concentration $\mathbb{A}$ peut être formulé comme :

$$\mathbb{A} = A_k \mathbb{J} + A_\mu \mathbb{K} \quad (\text{III.112})$$

Les résultats d'homogénéisation thermo-poro-élastique d'un milieu poreux biphasique (III.4.3) donnent les expressions explicites suivantes des propriétés effectives de la matrice poreuse :

$$\begin{aligned} \frac{k_I}{k_a} &= \frac{1 - f_p^I}{1 - f_p^I (1 - A_k^p)}, & \frac{\mu_I}{\mu_a} &= \frac{1 - f_p^I}{1 - f_p^I (1 - A_\mu^p)} \\ b_I &= \frac{f_p^I A_k^p}{1 - f_p^I (1 - A_k^p)}, & \frac{k_a}{N_I} &= -\frac{f_p^I (1 - f_p^I) (1 - A_k^p)}{1 - f_p^I (1 - A_k^p)} \\ \alpha_I &= \alpha_a, & \frac{\gamma_I}{\alpha_a} &= 3 (b - f_p^I) = \frac{3k_a}{N_I} \end{aligned} \quad (\text{III.113})$$

Dans le cas non drainé, ces propriétés effectives de la matrice poreuse sont exprimées comme :

$$\begin{aligned} \frac{k_I^{nd}}{k_a} &= \frac{1 - f_p^I (1 - A_k^l/k_a)}{1 - f_p^I (1 - A_k^l)} , & \frac{\mu_I^{nd}}{\mu_a} &= \frac{1 - f_p^I (1 - A_\mu^l)}{1 - f_p^I (1 - A_\mu^l)} \\ \frac{k_a}{N_I^{nd}} &= \frac{f_p^I (1 - f_p^I) (1 - A_k^l)}{(1 - f_p^I (1 - A_k^l)) (1 - k_l/k_a)} , & \frac{\alpha_I^{nd}}{\alpha_a} &= \frac{(1 - f_p^I) k_a + f_p^I k_l A_k^l / \alpha_a}{(1 - f_p^I) k_a + f_p^I k_l A_k^l} \\ b_I^{nd} &= \frac{f_p^I A_k^l}{1 - f_p^I (1 - A_k^l)} , & \frac{\gamma_I^{nd}}{\alpha_a} &= - \frac{3 (1 - f_p^I) f_p^I (1 - A_k^l) (k_a - k_l \alpha_l / \alpha_a)}{(1 - f_p^I (1 - A_k^l)) (k_a - k_l)} \end{aligned} \quad (III.114)$$

De la même manière, les tenseurs de concentration dilués $\mathbb{D}_i$ ($i = qu, ca$) des inclusions sphériques de quartz et de calcite s'écrivent :

$$\begin{aligned} \mathbb{D}_i &= D_k^i \mathbb{J} + D_\mu^i \mathbb{K} \quad (i = qu, ca) \\ D_k^i &= \frac{3k_I + 4\mu_I}{3k_i + 4\mu_I} , \quad D_\mu^i = \frac{5\mu_I (3k_I + 4\mu_I)}{3k_I (2\mu_i + 3\mu_I) + 4\mu_I (3\mu_i + 2\mu_I)} \end{aligned} \quad (III.115)$$

Il déduit l'expression suivante des tenseurs de concentration $\mathbb{A}_i^{MT}$ ($i = qu, ca$) pour les inclusions sphériques :

$$\begin{aligned} \mathbb{A}_i^{MT} &= A_k^i \mathbb{J} + A_\mu^i \mathbb{K} \quad (i = qu, ca) \\ A_k^i &= D_k^i / \left(1 + \sum_{i=1}^r f_i (D_k^i - 1) \right) , \quad A_\mu^i = D_\mu^i / \left(1 + \sum_{i=1}^r f_i (D_\mu^i - 1) \right) \end{aligned} \quad (III.116)$$

où $r = 2$ est le nombre de familles d'inclusions de quartz et de calcites.

Les propriétés thermo-poro-élastiques effectives à l'échelle macroscopique peuvent s'acquérir à partir des résultats de la deuxième étape d'homogénéisation comme :

$$\begin{aligned} k_{\text{hom}} &= k_I + \sum_{i=1}^r f_i (k_i - k_I) A_k^i , & \mu_{\text{hom}} &= \mu_I + \sum_{i=1}^r f_i (\mu_i - \mu_I) A_\mu^i \\ \frac{1}{N_{\text{hom}}} &= \frac{f_m}{N_I} + b_I^2 \left(\sum_{i=1}^r \frac{f_i (1 - A_k^i)}{k_i - k_I} \right) , & \alpha_{\text{hom}} &= \frac{\alpha_I k_I}{k_{\text{hom}}} + \sum_{i=1}^r f_i \left(\frac{\alpha_i k_i - \alpha_I k_I}{k_{\text{hom}}} \right) A_k^i \\ b_{\text{hom}} &= b_I \left(1 - \sum_{i=1}^r f_i A_k^i \right) , & \gamma_{\text{hom}} &= f_m \gamma_I + b_I \left(\sum_{i=1}^r \frac{f_i (1 - A_k^i) (k_i \alpha_i - k_I \alpha_I)}{k_i - k_I} \right) \end{aligned} \quad (III.117)$$

Les études paramétriques permettent de visualiser l'impact de la composition minéralogique de quartz et des calcites. Les trois cas considérés à une valeur fixée de la porosité ($f_p = 0.15$) sont : $f_{qu} = f_{ca} = 0.05$ (modèle A), $f_{qu} = f_{ca} = 0.125$ (modèle B) et $f_{qu} = f_{ca} = 0.25$ (modèle C). Les résultats sont présentés sur les figures (III.23 à III.29). On peut constater une tendance d'augmentation du module de compressibilité homogénéisé k_{hom} et du module de cisaillement μ_{hom} par rapport à la fraction volumique des minéraux de quartz et des calcites. Ces résultats s'avèrent appropriés en regardant la rigidité des inclusions minérales de quartz et de calcite par rapport à celui de la matrice argileuse (voir le tableau III.2). Au contraire, le coefficient de Biot b_{hom} , l'inversion

TAB. III.1: Les composantes du module élastique et du coefficient de dilatation thermique de quartz et de calcites[134] (C_{ijkl} en GPa et α_{ij} en 10^{-6} K^{-1})

Constituant	C_{1111}	C_{3333}	C_{2323}	C_{1122}	C_{1133}	C_{1123}	α_{11}	α_{33}
Quartz (SiO_2)	86.74	107.2	57.9	6.98	11.9	-17.9	16.0	8.0
Calcite (CaCO_3)	144	84.0	33.5	53.9	51.1	-20.5	-6.25	22.0

 TAB. III.2: Les composantes isotropes du module élastique et du coefficient de dilatation thermique de quartz, de calciteset de la matrice argileuse (k_i^{iso} et μ_i^{iso} en GPa et α_i^{iso} en 10^{-6} K^{-1})

Constituant	k_i^{iso}	μ_i^{iso}	α_i^{iso}
Quartz (SiO_2)	38	47.7	13.3
Calcite (CaCO_3)	76	36.8	3.2
Matrice argileuse	4.2	3.1	10.0

du module de Biot $1/N_{\text{hom}}$ et le coefficient de couplage thermique-hydrique γ_{hom} décroissent en fonction de la fraction volumique des inclusions minérales. Les résultats remarquables sont destinés au coefficient de dilatation thermique homogénéisé. On observe que dans le cas non drainé, le coefficient de dilatation thermique homogénéisé est plus élevé que celui dans le cas drainé. Cette observation est expliquée par la valeur plus élevée du coefficient de dilatation thermique de la phase liquide ($\alpha_l = 10^{-4} \text{ K}^{-1}$) en comparaison avec celle des constituants solides dans le cas non drainé. D'ailleurs, on retrouve des tendances de l'influence du rapport d'aspect des pores ε sur les propriétés thermo-poro-élastiques effectives comme dans le cas de milieu poreux biphasique (III.4.3). Plus précisément, le module de compressibilité et de cisaillement homogénéisés augmentent par rapport au rapport d'aspect ε alors que les autres coefficients se décroissent en fonction de la porosité ε .

III.7 Conclusion

Durant ce chapitre, la méthode d'homogénéisation du comportement élastique linéaire, poro-élastique, thermo-élastique et thermo-poro-élastique d'un milieu poreux a été développée en utilisant la solution célèbre d'Eshelby [38] et le théorème de Levin. Les simulations numériques ont mis en évidence encore une fois la dépendance des propriétés couplées effectives des milieux poreux de

la morphologie de l'espace poreux, de la porosité et des schémas d'estimation. En effet, pour les milieux poreux dont la porosité est faible $f_p \leq 10\%$, les résultats prédictifs par différents schémas d'estimation sont proches quand la forme des pores est quasi-sphérique $\varepsilon \approx 1$. Ces prédictions s'écartent les unes des autres quand le rapport d'aspect des pores est de plus en plus faible (cas des pores aplatis) ou bien la porosité augmente.

La méthode d'homogénéisation du comportement thermo-poro-élastique est ensuite appliquée pour les argilites. Pour cela, deux étapes d'homogénéisation ont été mises en oeuvre qui permettent de prendre en compte l'influence de la minéralogie sur les résultats prédictifs. Particulièrement, cette approche micromécanique a mis en évidence l'évolution des paramètres de couplage thermique-hydrrique et le module de Biot qui sont difficiles à caractériser à l'échelle macroscopique pour les roches poreuses dont la perméabilité est très faible. Ces résultats confirment ainsi la capacité de la procédure de déterminer les propriétés thermo-poro-élastiques des matériaux isotropes ou bien des matériaux dont l'anisotropie est faible. En outre, la procédure développée peut être étendue dans le cas anisotrope en particulier de l'isotropie transverse [44] qui est très utile pour plusieurs types de roches sédimentaires.

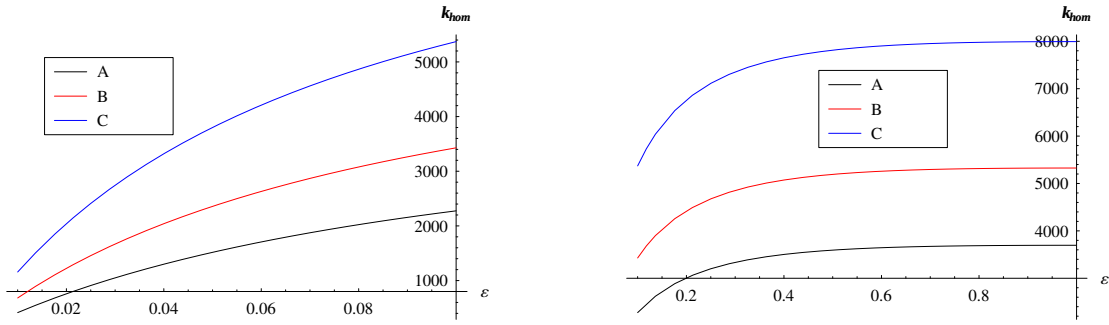


FIGURE III.23: Module de compressibilité homogénéisé k_{hom} en fonction de la fraction volumique de quartz, de calcite et du rapport d'aspect des pores ϵ

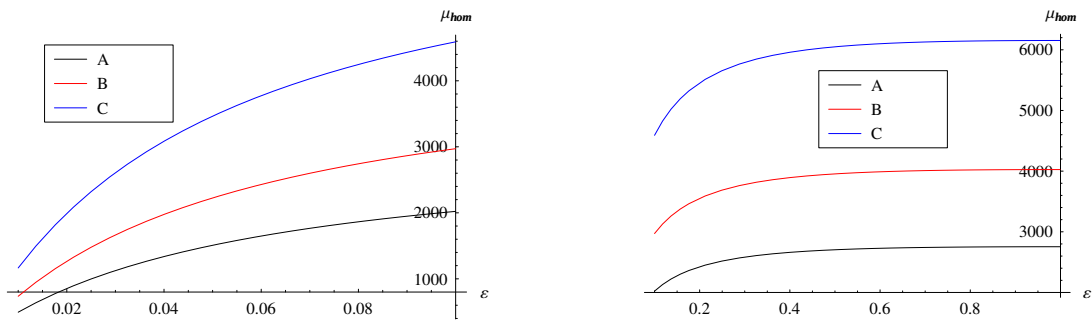


FIGURE III.24: Module de cisaillement homogénéisé μ_{hom} en fonction de la fraction volumique de quartz, de calcite et du rapport d'aspect des pores ϵ

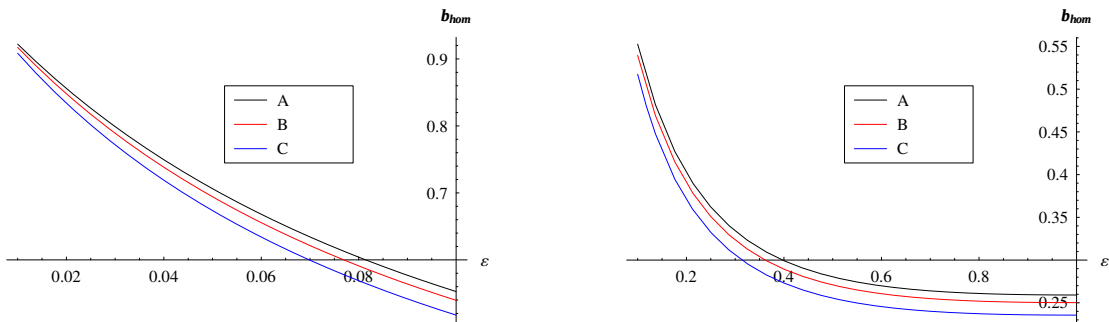


FIGURE III.25: Coefficient de Biot homogénéisé b_{hom} en fonction de la fraction volumique de quartz, de calcite et du rapport d'aspect des pores ϵ

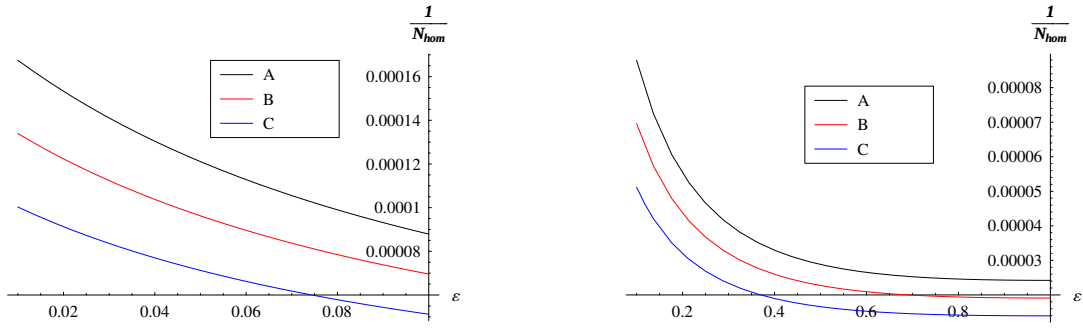


FIGURE III.26: Inversion du module de Biot homogénéisé $1/N_{\text{hom}}$ en fonction de la fraction volumique de quartz, de calcite et du rapport d'aspect des pores ε

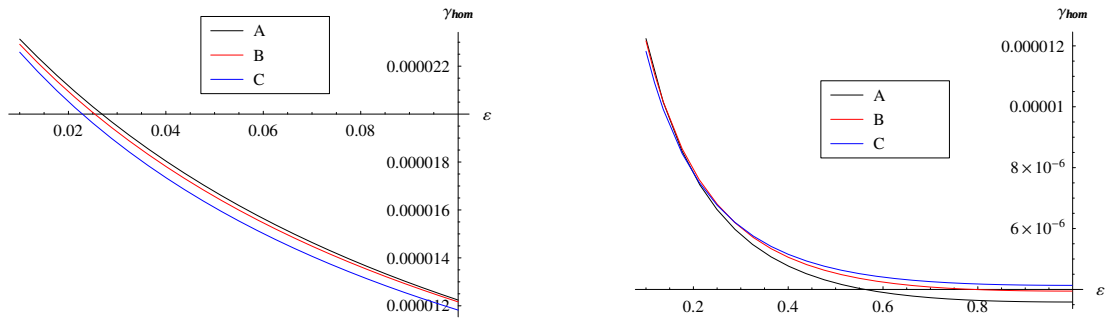


FIGURE III.27: Coefficient de couplage homogénéisé γ_{hom} en fonction de la fraction volumique de quartz, de calcite et du rapport d'aspect des pores ε

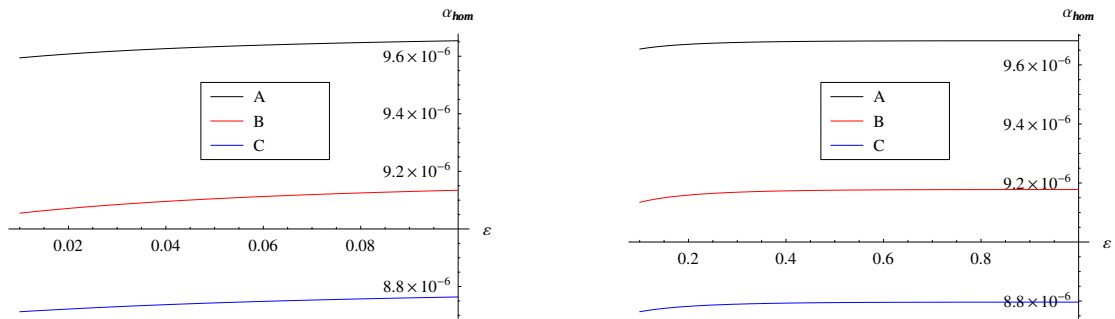


FIGURE III.28: Coefficient de dilatation thermique drainé homogénéisé α_{hom} en fonction de la fraction volumique de quartz, de calcite et du rapport d'aspect des pores ε

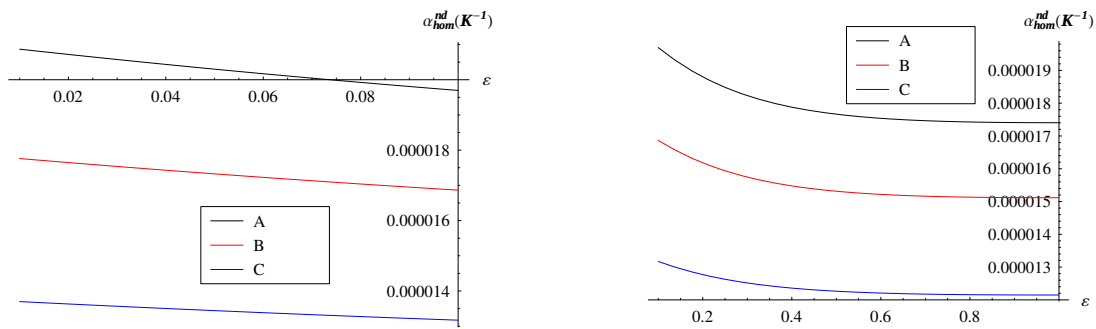


FIGURE III.29: Coefficient de dilatation thermique non drainé homogénéisé α_{hom}^{nd} en fonction de la fraction volumique de quartz, de calcite et du rapport d'aspect des pores ϵ

Chapitre IV

Homogénéisation du comportement élasto-plastique des argilites

IV.1 Introduction

Ce chapitre est consacré à l'étude du comportement élasto-plastique des argilites à l'aide des outils et méthodes d'homogénéisation.

A l'échelle macroscopique de nombreux essais ont été réalisés au sein du laboratoire Laego de Nancy pour caractériser le comportement mécanique de l'argilite de Meuse/Haute-Marne [58]. Notre intérêt se porte sur les essais de compression triaxiale déviatorique qui montrent que le comportement de cette argilite est irréversible et non-linéaire, intégrant plasticité et plus ou moins d'endommagement. On note une tendance à la dilatance à proximité du pic lors des essais de compression uniaxiale. Inversement, un comportement contractant est observé en essais triaxiaux déviatoriques avec confinement : la contractance est d'autant plus marquée que la pression de confinement est élevée. Ces observations sont classiques pour ce type de matériau, et elles ont été faites par [24], [58], [122].

A. S. Chiarelli et coauteurs [25, 122, 24] ont constaté dans tous les essais que les réponses globales de l'argilite de M/H-M montrent de grandes déformations résiduelles dans les deux directions axiale et latérale après déchargement de la contrainte déviatorique. Un endommagement caractérisé par la réduction des propriétés élastiques a été également observé. Des observations par microscopie électronique à balayage (MEB), montrent que de telles déformations irréversibles sont certainement dues à un mouvement relatif entre les feuillets d'argile [25]. D'autres observations effectuées sur les échantillons examinés mettent en évidence l'existence des microfissures. Deux familles principales des microfissures peuvent clairement être identifiées : les microfissures intergranulaires qui seront dues au processus de décohésion aux interfaces des grains et l'ensemble de

microfissures dans les grains de calcite. D'après Chiarelli [25, 24], il semble que les microfissures intra-granulaires ont des effets négligeables en ce qui concerne les inter-granulaires (voir également [40]).

Au niveau de la modélisation macroscopique, plusieurs travaux ont été effectués pour développer un modèle constitutif qui permet de rendre finement compte de l'ensemble des phénomènes observés au laboratoire [28, 64]. Un modèle élastoplastique de type Drucker Prager non associé, avec écrouissage isotrope, a été développé par J. F. Shao et co-auteurs, au LML [25, 50]. En prenant en compte l'endommagement, Chiarelli et al. [25] et Conil et al. [28] développent une loi d'endommagement anisotrope décrite par un tenseur symétrique d'ordre deux et les propriétés élastiques endommagées sont déterminées à partir d'un potentiel libre d'énergie. Hoxha et al. [64] ont proposé une autre méthode pour décrire l'endommagement de ce matériau. En considérant que les déformations plastiques sont les principaux mécanismes de dissipation, ces derniers auteurs suggèrent que l'endommagement du matériau est dû à l'incompatibilité de déformations plastiques.

Des études récentes du comportement élasto-plastique de l'argilite de M/H-M par l'approche de changement d'échelle ont été effectuées par A. Guéry [50, 49]. Dans son modèle, le V.E.R du matériau se compose d'une matrice argileuse et des inclusions sphériques de quartz et de calcites. Le comportement local de chaque phase, la matrice argileuse est associée à la loi élasto-plastique non associé de type de Drucker Prager et les grains de calcite sont élastiques couplés à un endommagement isotrope. La phase de quartz est considérée comme élastique linéaire.

Dans le cadre de cette thèse, l'objectif est d'appliquer la méthode d'homogénéisation non linéaire au modèle proposé dans le premier chapitre (I.6.2) sur l'argilite de M/H-M. En comparaison avec le modèle présenté par A. Guéry [50], il prend en compte la phase poreuse dans la matrice argileuse. L'apparition des inclusions poreuses induit en effet un problème plus complexe en terme de choix d'une méthode d'homogénéisation non-linéaire efficace qui permette de prendre en compte la fluctuation des champs de déformation à l'échelle microscopique [127, 112, 111].

Nous nous intéressons dans les parties qui suivent à la théorie de l'homogénéisation non linéaire. Dans cette optique, des méthodes d'homogénéisation classiques seront présentées ainsi que des exemples pour illustrer les limites de ces approches. Sur la base d'une synthèse bibliographique, la méthode sécante modifiée de P. Suquet [126] sera prise en compte pour étudier le comportement élastoplastique de l'argilites de M/H-M. On introduira également, en première approche un modèle simplifié d'endommagement isotrope pour représenter la décohésion partielle aux interfaces grains minéraux - matrice argileuse.

IV.2 Méthodologie d'homogénéisation non linéaire d'un milieu hétérogène

IV.2.1 Concept du matériau linéaire de comparaison (MLC)

La méthode d'homogénéisation non linéaire s'appuie souvent sur la linéarisation des lois constitutives locales en utilisant le concept d'un *milieu linéaire de comparaison* (MLC). L'objectif de ce concept est de fournir un cadre qui permet d'appliquer la procédure de l'homogénéisation linéaire pour le matériau hétérogène montrant un comportement non-linéaire. L'idée principale consiste donc de remplacer le V.E.R du milieu hétérogène original (avec des propriétés mécaniques changeant par rapport à l'espace et au temps) par un V.E.R qui a des propriétés mécaniques variant seulement avec le temps. En d'autres termes, ça permet de considérer le milieu hétérogène non linéaire par celui qui comporte, à chaque temps fixé, des caractéristiques linéarisées associées à chaque phase. Les solutions du milieu hétérogène original se reposent donc sur celles du milieu élastique (ou thermo-élastique) linéaire de comparaison.

Dans la littérature, la procédure d'homogénéisation du milieu hétérogène non linéaire peut être classé en deux catégories :

- les approches par des champs moyens : où la contrainte homogène est déterminée par le moyen des champs de contrainte des phases dans le MLC. Il s'agit souvent des formulations telles que : la méthode “d'analyse des champs de transformation” (ACT) originale de Dvorak et Benveniste [36], la méthode “d'analyse des champs de transformation non uniformes” (ACTN) présentée par Michel et Suquet [92, 93], la formulation tangente incrémentale de Hill [56], la formulation sécante classique de Hutchinson [65] ou modifiée de Suquet [126] et la formulation affine [89, 141, 17, 16].
- les approches qui reposent sur le potentiel effectif où la contrainte macroscopique est déterminée par la dérivation du potentiel effectif par rapport à la déformation macroscopique. On peut mentionner l'approche de Lahellec et Suquet [79] et les travaux de Ponte Castañeda telles que l'approche variationnelle [107], la méthode tangente du second ordre [108] et la méthode sécante générale du second ordre [109, 110]. Ces approches sont appliquées souvent aux matériaux dont le comportement se base sur un potentiel. Pour les matériaux standards dont le comportement peut être déterminé généralement à partir de deux potentiels thermodynamiques (énergie libre et dissipation), il existe des approches récemment présentées par Lahellec et Suquet [80, 81, 82]. Ces derniers auteurs utilisent le principe de variation incrémentale de la dissipation (en reposant sur la discrétisation du temps) pour réduire le problème de deux potentiels à celui de minimiser le potentiel unique d'un milieu thermo-

élastique non linéaire. Ils appliquent ensuite les méthodes déjà connues pour le problème d'un potentiel.

IV.2.2 Sur la correction des différentes formulations d'homogénéisation non linéaire

Dans la littérature, une très grande partie des études du comportement inélastique des matériaux hétérogènes par l'approche d'homogénéisation est réservée aux polycristaux en appliquant une des formulations précédemment présentées. Les résultats de ces travaux permettent de mettre en évidence la correction de ces formulations d'homogénéisation non linéaire.

En considérant le comportement élastoplastique des métaux par différentes approches d'homogénéisation non linéaire, Suquet [127] a remarqué que :

- La prédiction de la formulation incrémentale et ACT est trop raide en comparaison avec celle de la formulation sécante et du calcul par méthode d'éléments finis (MEF). La méthode ACT s'avère plus précise quand le nombre des sous-domaines de chaque phase augmente.
- Les formulations sécante classique et modifiée donnent une bonne concordance entre leurs prédictions et les résultats de MEF. Ces deux formulations sécantes sont plus différentes dans le cas des matériaux poreux et des matériaux dont la non-linéarité est plus grande.
- L'approche variationnelle de Ponte Castañeda [107] coïncide avec la méthode sécante modifiée. Pourtant, une limitation importante des approches sécantes est qu'elles se basent sur la théorie de la déformation plastique et donc inapplicable pour des trajets de chargement plus complexes.

Par ailleurs, Chaboche et al. [21] ont étudié le comportement élasto-plastique des métaux en utilisant des formulations ACT, incrémentale et affine. Ils ont constaté également la réponse trop raide de l'approche ACT. Une modification de cette approche [22, 21] est proposée par ces auteurs en prenant en compte le module tangent asymptotique (méthode ACT modifiée) qui donne des meilleurs résultats. En outre, ces auteurs confirment la réponse trop raide (un peu moins importante en comparaison avec la méthode ACT) des approches incrémentale et affine originales où le tenseur de Hill est évalué avec le module tangent anisotrope. En déterminant ce dernier tenseur avec le module tangent isotropisé, ils montrent que les deux formulations donnent des résultats plus concordants avec ceux calculés par la méthode des éléments finis. Une telle modification pour l'approche incrémentale est mentionnée dans les travaux [47, 31] qui confirment la concordance de cette méthode. Pour la formulation affine, la réponse est souvent très souple en comparaison avec la référence par la méthode des éléments finis et discontinue dans quelques cas qui sont vraiment discutables.

Dans les travaux récents, Michel et Suquet [92, 93] ont présenté la méthode “d’analyse des champs de transformation non uniformes” (ACTN) qui est connue comme une extension de la méthode ACT. En utilisant les champs de transformation non uniformes, ces auteurs montrent que les prédictions de cette méthode sont plus exactes que celles de la méthode ACT en comparaison avec les simulations numériques déterminées par l’approche de transformation de Fourier [91].

Plus récemment, Rekik et al. [111] ont fait une synthèse sur la correction des différentes méthodes d’homogénéisation non linéaire en comparaison avec la référence MEF. Trois types de matériaux dont la microstructure est périodique ont été considérés : le matériau renforcé (matrice élastique nonlinéaire renforcée par des inclusions élastiques), le matériau biphasique incompressible dont le comportement de chaque phase est élastique nonlinéaire et le matériau poreux. Le comportement élastique non linéaire des phases est de type de Ramberg-Osgood avec ou sans seuil. Ces auteurs ont montré que :

- La méthode sécante classique donne les résultats les plus raides. A l’échelle microscopique, les déformations déterminées par cette approche sont réellement différentes avec celles de référence MEF.
- La méthode sécante modifiée qui coïncide avec l’approche variationnelle de Ponte Castañeda [107] rend des réponses macroscopiques très raides. En général, ses prédictions pour les déformations microscopiques ne sont pas très concordantes avec les solutions de référence. Pourtant, en raison de sa simplicité, cette formulation est en réalité souvent utilisée.
- Pour l’approche affine classique (avec le module tangent associé est anisotrope), comme prévu, le comportement macroscopique associé est trop raide et viole souvent la borne supérieure calculée par l’approche variationnelle. La modification de cette approche en utilisant le module tangent isotropisé (avec la méthode d’isotropisation de Chaboche [20]) peut prédire le comportement macroscopique qui s’accorde avec celui de MEF. Néanmoins, les deux méthodes affines ne permettent pas de compter la fluctuation des champs de déformation à l’échelle microscopique.
- La méthode d’estimation tangente du second ordre de Ponte Castañeda [108] permet d’homogénéiser correctement le comportement macroscopique nonlinéaire dans le cas où le degré de non linéarité est faible. Comme la formulation affine, cette approche repose sur un MLC déterminé au moyen de champ de déformation par phase. Donc, il ne permet pas de tenir compte de la fluctuation de ces champs locaux.
- Une similarité est observée entre les résultats de la méthode tangente du second ordre et ceux de la méthode du troisième ordre proposé par Lahellec et Suquet [79]. La prédiction de cette dernière approche est un peu améliorée par rapport à celle de l’approche tangente

du second ordre. Cependant, les premier et deuxième moments des champs locaux de déformation évalués par l'approche de Lahellec et Suquet sont souvent très proches de ceux de la formulation affine anisotrope.

- La méthode d'estimation sécante générale du second ordre de Ponte Castañeda [109, 110] fournit des résultats macroscopiques les plus concordants par rapport à ceux de MEF en particulier dans le cas où la non linéarité est plus importante. Néanmoins, la prédiction de cette approche est un peu souple et dans les cas où la non linéarité est faible elle ne permet pas de rendre de bons résultats comme l'approche tangente du second ordre.

La synthèse sur la correction des différentes formulations d'homogénéisation non linéaire présentée précédemment nous montre les limites de ces approches. Généralement, une tendance correcte est réservée aux approches qui permettent de prendre en compte la fluctuation des champs locaux et d'utiliser un MLC élastique (ou thermo-élastique) anisotrope.

Dans le cadre de la présente thèse, compte tenu de la complexité de la microstructure de l'argilite, on a fait le choix d'une des approches par des champs moyens pour modéliser le comportement élasto-plastique. Dans les paragraphes qui suivent, on étudiera le comportement élastique non linéaire des milieux biphasiques par différentes approches des champs de moyens. Puis, la méthode d'homogénéisation non linéaire d'un milieu multiphasique (avec deux étapes d'homogénéisation linéaire du MLC) sera développée. Elle sera ensuite appliquée pour simuler le comportement de l'argilite de M/H-M en compression triaxiale.

IV.3 Homogénéisation non linéaire des milieux biphasiques

Dans cette partie la modélisation du comportement élastique non linéaire des milieux biphasiques est mise en oeuvre par différentes formulations d'homogénéisation. Il s'agit des méthodes sécante classique (SEC) de Hutchinson [65], sécante modifiée (SEM) de Suquet [126], analyse des champs de transformation modifiée (ACTM) de Chaboche et al. [21] et incrémentale modifiée. De plus, on rappelle qu'il existe deux méthodes d'isotropisation d'un opérateur tangent dans la formulation incrémentale modifiée : la méthode générale de Bornert [15] (INCB) et la méthode spéciale de Chaboche [20, 21] (INCS).

Le matériau considéré se compose d'une matrice solide et d'un espace poreux ou des inclusions rigides sphériques. La phase matrice solide suit un comportement élasto-plastique de type Von-Mises avec écrouissage isotrope dont la fonction de charge s'écrit sous la forme :

$$f(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\gamma}_p) = \sigma_{eq} - H \gamma_p^\alpha - \sigma_0 \quad (\text{IV.1})$$

avec les paramètres H , α et σ_0 correspondent au module d'écrouissage, à l'exposant d'écrouissage et au seuil de la contrainte initiale; σ_{eq} et γ_p sont respectivement la contrainte équivalente et la distorsion de déformation plastique cumulée (voir également [126, 20, 31]) :

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\frac{3}{2} \mathbf{s} : \mathbf{s}}, \quad \mathbf{s} = \boldsymbol{\sigma} - \sigma_v \boldsymbol{\delta}, \quad \sigma_v = \frac{\text{Tr}(\boldsymbol{\sigma})}{3} \quad (\text{IV.2})$$

$$\gamma_p = \sqrt{\frac{2}{3} \mathbf{e} : \mathbf{e}}, \quad \mathbf{e} = \boldsymbol{\varepsilon} - \varepsilon_v \boldsymbol{\delta}, \quad \varepsilon_v = \frac{\text{Tr}(\boldsymbol{\varepsilon})}{3} \quad (\text{IV.3})$$

Pour les applications numériques, on considère les valeurs suivantes du module d'élasticité isotrope avec $k_s = 9200$ MPa, $\mu_s = 5700$ MPa et $H = 461$, $\alpha = 0.3895$, $\sigma_0 = 2$ MPa comme les paramètres du comportement élasto-plastique de la matrice solide. De plus, la procédure d'homogénéisation le MLC est effectuée dans le cadre d'une approximation de Mori-Tanaka.

IV.3.1 Cas du milieu poreux

Considérons tout d'abord le cas d'un milieu poreux isotrope dont la répartition des inclusions poreuses est isotrope (les inclusions poreuses sont de forme *oblate spheroides aplati*, décrite au chapitre 1). La fraction volumique des pores est prise égale à $f_p = 0.15$. Le milieu est chargé avec une déformation macroscopique imposée $\mathbf{E}$ caractérisée par deux paramètres E_v et E_{eq} . Ces derniers termes correspondent aux déformations volumique et équivalente de $\mathbf{E}$:

$$E_{eq} = \sqrt{\frac{2}{3} \mathbf{E}_d : \mathbf{E}_d}, \quad \mathbf{E}_d = \mathbf{E} - E_v \boldsymbol{\delta}, \quad E_v = \frac{\text{Tr}(\mathbf{E})}{3} \quad (\text{IV.4})$$

Sur la figure (IV.1), une comparaison du comportement macroscopique du milieu poreux sous un chargement purement déviatorique ($E_v = 0$, $E_{eq} \neq 0$) simulé par différentes formulations d'homogénéisation non linéaire est réalisée. On trouve que dans le cas des pores quasi-sphériques ($\varepsilon = 0.95$), les résultats prédictifs de ces approches sont assez proches. Cette constatation confirme les résultats de S. Smaoui et al. [124, 125] dans le contexte des pores sphériques. Cependant, d'après cet auteur les prédictions par les deux approches sécantes mènent à des réponses macroscopiques qui diffèrent d'autant plus que la porosité du milieu est importante. L'autre cas intéressant est destiné au milieu poreux caractérisé par des pores de la forme aplatie. On observe que les prédictions dans ce cas s'écartent les unes des autres quand le rapport d'aspect des pores décroît ($\varepsilon = 0.05$).

Les figures (IV.2 et IV.3) présentent les résultats prédictifs dans le cas d'un chargement couplé avec le taux de triaxialité $T_E = E_v/E_{eq} = 1/2$. Une différence importante de l'évolution de la contrainte équivalente prédite par la formulation SEM et par les autres approches même dans le cas des pores quasi-sphériques ($\varepsilon = 0.95$) est notée. Par ailleurs, sur la figure (IV.3) qui désigne l'évolution de la contrainte sphérique en fonction de la déformation volumique, le comportement non linéaire peut être déterminé par les formulations SEC, SEM et INCS mais il est linéaire dans

le cas des approches ACTM et INCB.

La différence vraiment importante de ces prédictions est due au chargement hydrostatique (Fig. IV.4). Seulement l'approche SEM conduit à une réponse macroscopique non linéaire tandis que les autres méthodes montrent un comportement linéaire. Ces résultats ont été confirmés par plusieurs travaux dans la littérature [127, 15, 111]. En effet, les approches reposent sur la linéarisation évaluée au moyen des champs locaux ne permettent pas de prendre en compte la fluctuation des champs de déformation à l'échelle microscopique comme le remarquent Rekik et al. [112, 111].

Dans tous les cas de calcul, on constate que les prédictions par la méthode INCS sont très proches de celles de l'approche SEC. La formulation ACTM reposant sur un opérateur tangent asymptotique mène à des résultats proches de ceux de la méthode INCB. On observe également la différence entre les deux méthodes d'isotropisation de l'approche incrémentale modifiée sous un chargement couplé avec le taux de triaxialité $T_E = E_v/E_{eq} = 1/2$.

IV.3.2 Cas du milieu biphasique renforcé par des inclusions rigides

On considère maintenant le milieu biphasique dont la phase matrice solide entoure des inclusions sphériques élastiques linéaires. Les propriétés mécaniques des inclusions sont beaucoup plus rigides que celles de la matrice solide et sont prises égale à $k_i = 76$ GPa, $\mu_i = 36.8$ GPa. La fraction volumique de la phase rigide est $f_i = 0.3$.

La figure (IV.5) présentent le comportement homogénéisé sous le chargement couplé avec $T_E = E_v/E_{eq} = 1/2$. On obtient des résultats prédictifs assez proches par différentes méthodes d'homogénéisation non linéaire. De plus, on remarque que dans le cadre d'essais de traction effectués sur des métaux (avec : $T_\Sigma = \Sigma_v/\Sigma_{eq} = 1/3$), plusieurs auteurs (voir parmi eux [21, 31, 127]) ont montré la concordance entre les approches ACTM, INCB, INCS avec la méthode de référence qui est la méthode des éléments finis tandis que la méthode SEM est un peu plus souple.

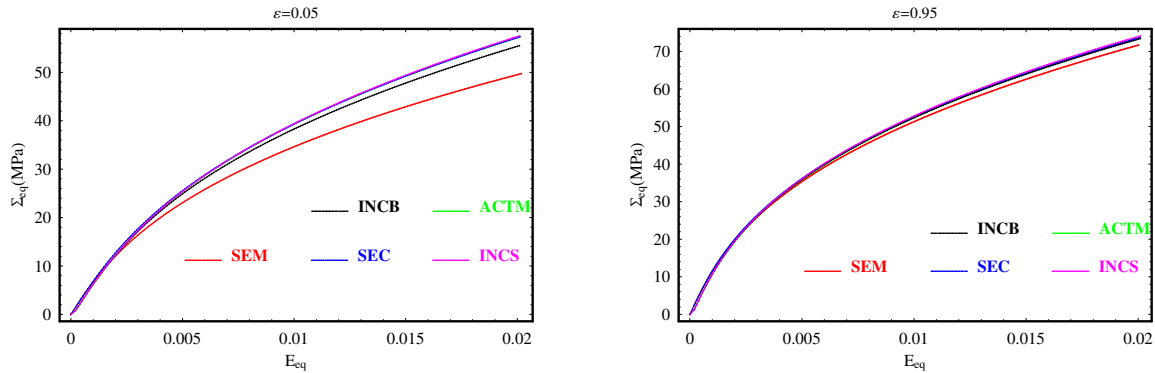


FIGURE IV.1: Evolution des contraintes déviatoriques équivalentes en fonction des déformations équivalentes par différentes approches d'homogénéisation non linéaire (milieu poreux sous chargement déviatorique : $E_v = 0$, $E_{eq} \neq 0$).

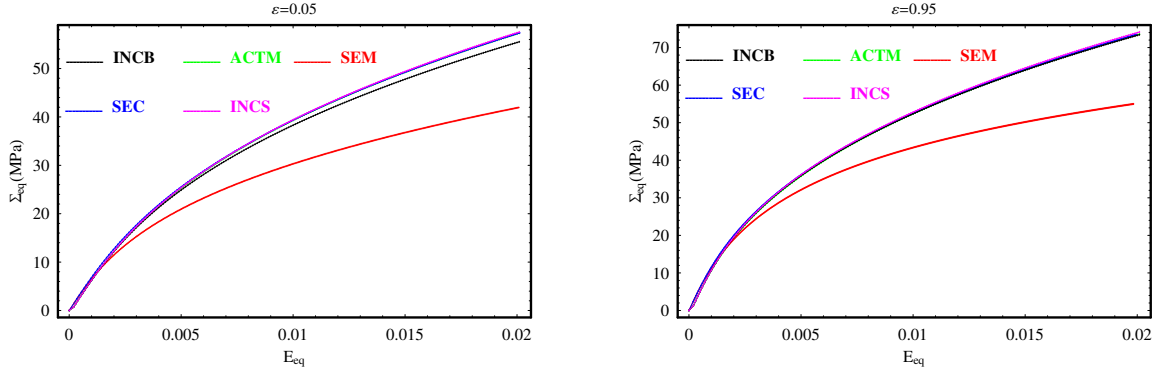


FIGURE IV.2: Evolution des contraintes déviatoriques équivalentes en fonction des déformations équivalentes par différentes approches d'homogénéisation non linéaire (milieu poreux sous chargement couplé : $T_E = E_v/E_{eq} = 1/2$).

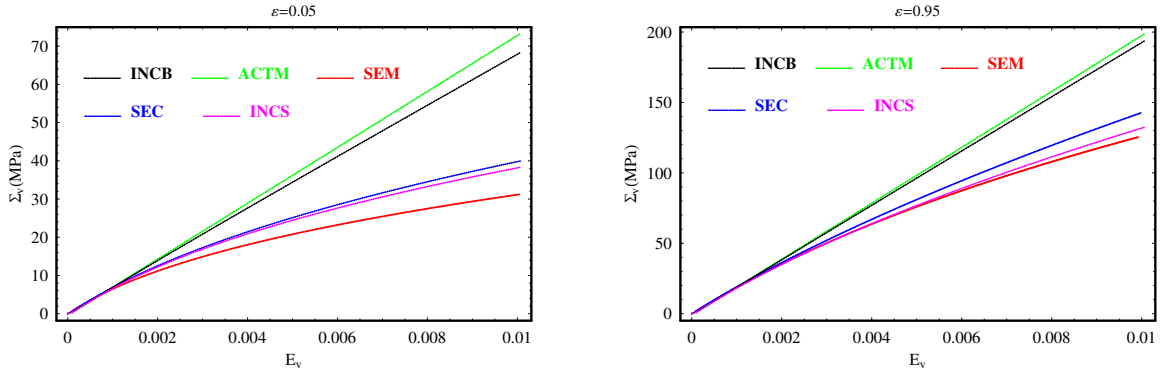


FIGURE IV.3: Evolution des contraintes volumiques en fonction des déformations volumiques par différentes approches d'homogénéisation non linéaire (milieu poreux sous chargement couplé : $T_E = E_v/E_{eq} = 1/2$).

IV.4 Homogénéisation non linéaire d'un milieu multiphasique

On cherche maintenant à étendre la méthode d'homogénéisation non linéaire pour le milieu hétérogène multiphasique qui comporte une matrice solide, un espace poreux et des inclusions sphériques rigides. L'espace poreux est modélisé par une famille d'inclusions aplaties avec le rapport d'aspect $\varepsilon = 0.05$. La matrice solide présente une loi de comportement élasto-plastique de type Von-Mises alors que les inclusions rigides sont élastiques linéaires. Les valeurs données concernant le comportement élasto-plastique de la matrice solide et élastique linéaire des renforts sont identiques à celles de la partie précédente. Les fractions volumiques de la phase poreuse et des inclusions rigides sont respectivement $f_p = 0.15$ et $f_i = 0.3$.

Pour modéliser le comportement élasto-plastique de ce type de matériau, la méthode d'homogénéisation en deux étapes du MLC est mise en oeuvre avec :

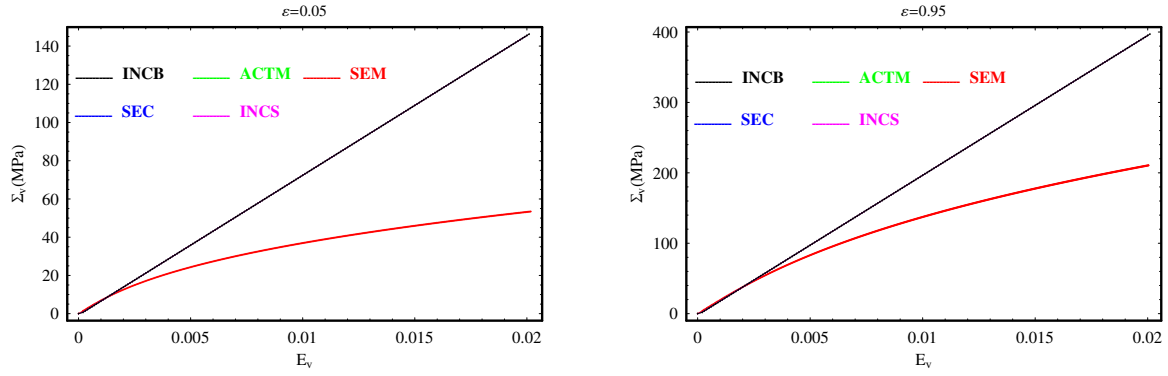


FIGURE IV.4: Evolution des contraintes volumiques en fonction des déformations volumiques par différentes approches d'homogénéisation non linéaire (milieu poreux sous chargement hydrostatique : $E_v \neq 0$, $E_{eq} = 0$).

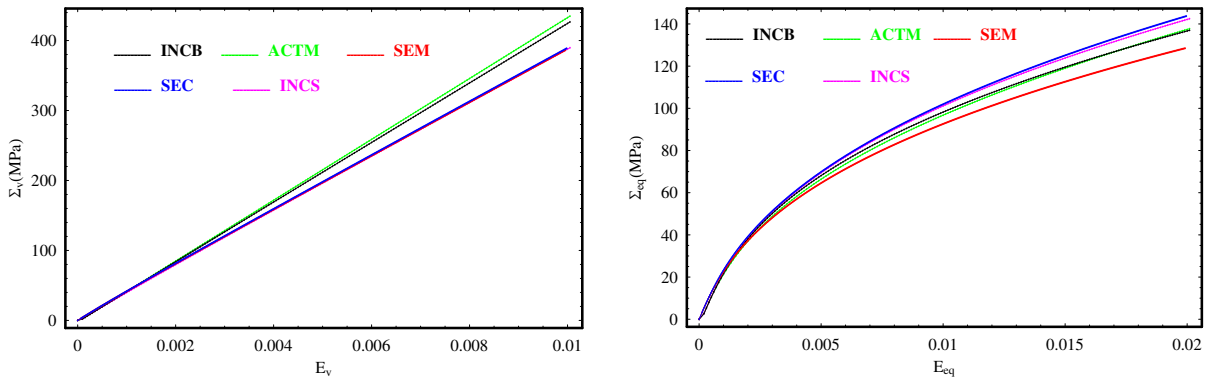


FIGURE IV.5: Evolution des contraintes en fonction des déformations par différentes approches d'homogénéisation non linéaire (milieu renforcé sous chargement couplé : $T_E = E_v/E_{eq} = 1/2$).

- *La première étape* : qui permet d'homogénéiser la matrice poreuse à partir de la phase matrice solide équivalente et le système des pores.
- *La deuxième étape* : qui permet à son tour de déterminer le comportement homogénéisé macroscopique en incorporant les inclusions rigides dans la matrice poreuse.

Les algorithmes d'homogénéisation du comportement élasto-plastique de ce matériau par les formulations incrémentale et sécante seront détaillés dans les paragraphes suivants.

IV.4.1 Algorithme de la formulation incrémentale modifiée

L'approche incrémentale est basée sur l'homogénéisation pas à pas du comportement macroscopique du MLC. Chaque pas correspond à un intervalle de temps $[t_n, t_{n+1}]$. Supposons à t_n , nous avons les données suivantes : la contrainte et la déformation macroscopique totale (Σ_n, E_n) , la déformation imposé ΔE et la déformation moyenne de la phase matrice solide $\bar{\epsilon}_{s,n}$. Le problème est de déterminer la contrainte macroscopique Σ_{n+1} et le module tangent homogénéisé $\mathbb{C}_{\text{hom}}^{\text{tan}}$ à t_{n+1} . L'algorithme de calcul se décompose en :

- Initialisation : en considérant le comportement de la matrice solide élastique isotrope, $\mathbb{C}_s = 3k_s\mathbb{J} + 2\mu_s\mathbb{K}$, on détermine :

$$\Delta \bar{\epsilon}_i = \mathbb{A}_i^{\text{MT}} : \Delta E \quad (\text{IV.5})$$

où $\mathbb{A}_i^{\text{MT}}$ sont les tenseurs de localisation des inclusions rigides i .

- Itération (j) (indice j omis pour la simplicité) :

1. Évaluer la déformation moyenne $\Delta \bar{\epsilon}_s$ de la matrice solide :

$$\begin{aligned} \Delta \bar{\epsilon}_m &= \frac{\Delta E - f_i \Delta \bar{\epsilon}_i}{1 - f_i}, & \Delta \bar{\epsilon}_p &= \mathbb{A}_p^{\text{MT}} : \Delta \bar{\epsilon}_m \\ \Delta \bar{\epsilon}_s &= \frac{\Delta \bar{\epsilon}_m - f_p^I \Delta \bar{\epsilon}_p}{1 - f_p^I} \end{aligned} \quad (\text{IV.6})$$

2. Déterminer $\bar{\epsilon}_{s,n+1}, \gamma_{n+1}^p$ et le module tangent $\mathbb{C}_s^{\text{tan}}$ de la matrice solide à partir de $\bar{\epsilon}_{s,n}, \gamma_n^p$ et $\Delta \bar{\epsilon}_s$ (voir l'annexe (B)).

3. Calculer le module tangent isotropisé $\mathbb{C}_a^{\text{tan,iso}}$ en appliquant une de deux méthodes d'isotropisation : méthode générale de Bornert [15] ou méthode spéciale de Chaboche [20, 21]. On obtient donc les deux approches correspondantes INCB et INCS.

4. Calculer le tenseur d'Eshelby $\mathbb{S}^E(\mathbb{C}_s^{\text{tan,iso}})$.

5. Déterminer le tenseur de Hill $\mathbb{P}_s = \mathbb{S}^E(\mathbb{C}_s^{\text{tan,iso}}) : (\mathbb{C}_s^{\text{tan}})^{-1}$, le tenseur de concentration $\mathbb{A}_p^{\text{MT}}$ et module homogénéisé de la matrice poreuse $\mathbb{C}_m^{\text{tan}}$ de la première étape d'homogénéisation :

$$\mathbb{C}_m^{\text{tan}} = \mathbb{C}_s^{\text{tan}} - f_p^I \mathbb{C}_s^{\text{tan}} : \mathbb{A}_p^{\text{MT}} \quad (\text{IV.7})$$

6. Calculer le module tangent isotropisé $\mathbb{C}_m^{tan,iso}$ de la matrice poreuse en utilisant la méthode générale de Bornert [15].

$$\mathbb{C}_m^{tan,iso} = (\mathbb{J} :: \mathbb{C}_m^{tan}) \mathbb{J} + \frac{1}{5} (\mathbb{K} :: \mathbb{C}_m^{tan}) \mathbb{K} \quad (\text{IV.8})$$

7. Déterminer le tenseur de Hill $\mathbb{P}_m^{sphere} = \mathbb{S}^E \left(\mathbb{C}_m^{tan,iso} \right) : (\mathbb{C}_m^{tan})^{-1}$, les tenseurs de concentration des inclusions rigides $\mathbb{A}_i^{MT}$ et le module macroscopique homogénéisé $\mathbb{C}_{hom}^{tan}$:

$$\mathbb{C}_{hom}^{tan} = \mathbb{C}_m^{tan} + f_i (\mathbb{C}_i - \mathbb{C}_m^{tan}) : \mathbb{A}_i^{MT} \quad (\text{IV.9})$$

8. Vérifier la compatibilité de la déformation moyenne de la phase poreuse et des inclusions sphériques en calculant les résidus :

$$\begin{aligned} R_i &= \mathbb{A}_i^{MT} : \Delta \mathbf{E} - \Delta \bar{\epsilon}_i \\ R_p &= \mathbb{A}_p^{MT} : \frac{\mathbb{I} - f_i \mathbb{A}_i^{MT}}{1 - f_i} : \Delta \mathbf{E} - \Delta \bar{\epsilon}_p \end{aligned} \quad (\text{IV.10})$$

9. Si $R_p \leq Tol$ et $R_i \leq Tol$, sortir de la boucle.

10. Si non, nouvelle itération (passer à l'étape 1) avec les nouveaux $\Delta \bar{\epsilon}_i$, $\Delta \bar{\epsilon}_p$:

$$\begin{aligned} \Delta \bar{\epsilon}_i &\leftarrow \Delta \bar{\epsilon}_i + R_i \\ \Delta \bar{\epsilon}_p &\leftarrow \Delta \bar{\epsilon}_p + R_p \end{aligned} \quad (\text{IV.11})$$

– Après convergence, on détermine le contrainte macroscopique :

$$\Sigma_{n+1} = \Sigma_n + \mathbb{C}_{hom}^{tan} : \Delta \mathbf{E} \quad (\text{IV.12})$$

IV.4.2 Algorithme de la formulation sécante

La formulation sécante repose sur la matrice solide équivalente dont le module d'élasticité est défini par :

$$\mathbb{C}_s^{sec} = 3k_s^{sec} \mathbb{J} + 2\mu_s^{sec} \mathbb{K} \quad (\text{IV.13})$$

Les modules homogénéisés de chaque étape d'homogénéisation s'obtient donc :

$$\begin{aligned} \mathbb{C}_m^{sec} &= \mathbb{C}_s^{sec} - f_p^I \mathbb{C}_s^{sec} : \mathbb{A}_p^{MT} \\ \mathbb{C}_{hom}^{sec} &= \mathbb{C}_m^{sec} + f_i (\mathbb{C}_i - \mathbb{C}_m^{sec}) : \mathbb{A}_i^{MT} \end{aligned} \quad (\text{IV.14})$$

où $\mathbb{A}_p^{MT}$ et $\mathbb{A}_i^{MT}$ sont les tenseurs de localisation associés avec les tenseurs $\mathbb{C}_s^{sec}$ et $\mathbb{C}_m^{sec}$ correspondants.

On remarque que le module sécant $\mathbb{C}_s^{sec}$ est déterminé à partir de la linéarisation du comportement élasto-plastique de la matrice solide et évalué à la moyenne ou à la moyenne quadratique de champs de déformation. Ces moyennes du champs de déformation de la matrice solide s'expriment de la manière suivante :

– **Moyenne du champs de déformation de la matrice solide :**

La pression dans la phase poreuse est nulle, on en déduit :

$$\bar{\sigma}_s = \frac{\bar{\sigma}_m}{1 - f_p^I} = \frac{\mathbb{C}_m^{sec} : \mathbb{A}_m^{MT} : \mathbf{E}}{1 - f_p^I} \quad (\text{IV.15})$$

On obtient :

$$\bar{\varepsilon}_s = \frac{(\mathbb{C}_s^{sec})^{-1} : \mathbb{C}_m^{sec} : \mathbb{A}_m^{MT} : \mathbf{E}}{1 - f_p^I} \quad (\text{IV.16})$$

A partir de la répartition aléatoire des inclusions poreuses et de l'isotropie des inclusions sphériques dans la matrice solide isotrope, on a donc le milieu homogénéisé isotrope à l'échelle macroscopique. L'équation précédente peut être découpé en partie sphérique et déviatorique comme :

$$\bar{\varepsilon}_v^s = A(k_s^{sec}, \mu_s^{sec}) E_v \quad (\text{IV.17})$$

$$\bar{\varepsilon}_{eq}^s = B(k_s^{sec}, \mu_s^{sec}) E_{eq} \quad (\text{IV.18})$$

avec :

$$\begin{aligned} A(k_s^{sec}, \mu_s^{sec}) &= \frac{1}{1 - f_p^I} \left((\mathbb{C}_s^{sec})^{-1} : \mathbb{C}_m^{sec} : \mathbb{A}_m^{MT} \right) :: \mathbb{J} \\ B(k_s^{sec}, \mu_s^{sec}) &= \frac{1}{1 - f_p^I} \frac{\left((\mathbb{C}_s^{sec})^{-1} : \mathbb{C}_m^{sec} : \mathbb{A}_m^{MT} \right) :: \mathbb{K}}{5} \end{aligned} \quad (\text{IV.19})$$

– **Moyenne quadratique du champ de déformation de la matrice solide :**

La moyenne quadratique du champs de déformation de la phase matrice solide est définie par un tenseur de quatrième ordre $\bar{\bar{\varepsilon}}_s$:

$$\bar{\bar{\varepsilon}}_s = \sqrt{\langle \boldsymbol{\varepsilon} \otimes \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_s} \quad (\text{IV.20})$$

Les parties sphérique et déviatorique de ce tenseur sont :

$$\begin{aligned} \bar{\bar{\varepsilon}}_v^s &= \frac{1}{3} \sqrt{\langle (\text{Tr}(\boldsymbol{\varepsilon}))^2 \rangle_s} \\ \bar{\bar{\varepsilon}}_{eq}^s &= \sqrt{\frac{2}{3} \langle \boldsymbol{\varepsilon}_d : \boldsymbol{\varepsilon}_d \rangle_s} \end{aligned} \quad (\text{IV.21})$$

Le calcul de cette moyenne quadratique repose sur l'estimation de l'énergie élastique emmagasinée [126, 15, 33]. A l'échelle macroscopique, cette énergie vaut :

$$W = \frac{1}{2} \mathbf{E} : \mathbb{C}_{\text{hom}}^{sec} : \mathbf{E} \quad (\text{IV.22})$$

D'ailleurs, l'énergie élastique vaut :

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon} : \mathbb{C}(\underline{x}) : \boldsymbol{\varepsilon} dV_{\underline{x}} \\ &= \frac{(1-f_i)}{2} \frac{1}{|\Omega_m|} \int_{\Omega_m} \boldsymbol{\varepsilon} : \mathbb{C}(\underline{x}) : \boldsymbol{\varepsilon} dV_{\underline{x}} + \frac{f_i}{2} \boldsymbol{\varepsilon} : \mathbb{C}_i : \boldsymbol{\varepsilon} \end{aligned} \quad (\text{IV.23})$$

Pour la matrice poreuse obtenue à partir de la première étape d'homogénéisation, on a [33] :

$$\frac{1}{2} \frac{1}{|\Omega_m|} \int_{\Omega_m} \boldsymbol{\varepsilon} : \mathbb{C}(\underline{x}) : \boldsymbol{\varepsilon} dV_{\underline{x}} = \frac{1-f_p^I}{2} \boldsymbol{\varepsilon} : \mathbb{C}_s^{sec} : \boldsymbol{\varepsilon} \quad (\text{IV.24})$$

Il déduit donc :

$$W = \frac{(1-f_i)(1-f_p^I)}{2} \boldsymbol{\varepsilon} : \mathbb{C}_s^{sec} : \boldsymbol{\varepsilon} + \frac{f_i}{2} \boldsymbol{\varepsilon} : \mathbb{C}_i : \boldsymbol{\varepsilon} \quad (\text{IV.25})$$

En dérivant l'énergie par rapport au module sécant de la phase solide, on obtient :

$$\frac{\partial W}{\partial \mathbb{C}_s^{sec}} = \frac{1}{2} (1-f_i)(1-f_p^I) (\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_s)^2 \quad (\text{IV.26})$$

Comme pour le cas précédent de la moyenne de déformation, si la matrice solide et le milieu présentent un comportement isotrope, on peut réduire cette équation à deux équations scalaires comme les suivantes :

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_v^s = \left[\frac{1}{(1-f_i)(1-f_p^I)} \left(\frac{\partial k_{\text{hom}}^{sec}}{\partial k_s^{sec}} E_v^2 + \frac{1}{3} \frac{\partial \mu_{\text{hom}}^{sec}}{\partial \mu_s^{sec}} E_{eq}^2 \right) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (\text{IV.27})$$

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{eq}^s = \left[\frac{1}{(1-f_i)(1-f_p^I)} \left(3 \frac{\partial k_{\text{hom}}^{sec}}{\partial \mu_s^{sec}} E_v^2 + \frac{\partial \mu_{\text{hom}}^{sec}}{\partial \mu_s^{sec}} E_{eq}^2 \right) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (\text{IV.28})$$

Contrairement au cas de la moyenne de déformation, on trouve un couplage des parties sphérique et déviatorique du chargement macroscopique dans ces deux équations.

Le comportement élasto-plastique de la matrice solide est supposé de type Von Mises qui désigne la dépendance du module de cisaillement de la déformation équivalente tandis que le module de compressibilité est constant :

$$k_s^{sec} = k_s, \quad \mu_s^{sec} = \mu_s^{sec}(\boldsymbol{\varepsilon}_{eq}^s) \quad (\text{IV.29})$$

On obtient donc l'équation non linéaire pour la première approximation de la moyenne de déformation où $\mu_s^{sec} = \mu_s^{sec}(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{eq}^s)$:

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{eq}^s = B(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{eq}^s) E_{eq} \quad (\text{IV.30})$$

Et pour la deuxième approximation de la moyenne quadratique où $\mu_s^{sec} = \mu_s^{sec}(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{eq}^s)$, on a :

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{eq}^s = [C(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{eq}^s) E_v^2 + D(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{eq}^s) E_{eq}^2]^{\frac{1}{2}} \quad (\text{IV.31})$$

avec :

$$\begin{aligned} C &= \frac{3}{(1-f_i)(1-f_p^I)} \frac{\partial k_{\text{hom}}^{\text{sec}}}{\partial \mu_s^{\text{sec}}} \\ D &= \frac{1}{(1-f_i)(1-f_p^I)} \frac{\partial \mu_{\text{hom}}^{\text{sec}}}{\partial \mu_s^{\text{sec}}} \end{aligned} \quad (\text{IV.32})$$

La mise en oeuvre de la méthode sécante (classique ou modifiée) et le comportement macroscopique se construisent en trois étapes :

- Exprimer le module sécant homogénéisé $\mathbb{C}_{\text{hom}}^{\text{sec}}$ et ses dérivées partielles par rapport à celui de la phase solide $\mathbb{C}_s^{\text{sec}}$. Dans le cas de milieu isotrope, il s'agit d'exprimer les modules de compressibilité et de cisaillement équivalents $k_{\text{hom}}^{\text{sec}}$ et $\mu_{\text{hom}}^{\text{sec}}$ et leurs dérivées par rapport au module de cisaillement sécant μ_s^{sec} .
- Déterminer les déformations effectives pour un chargement macroscopique $\mathbf{E}$. Il faut donc résoudre l'équation non linéaire (IV.30) pour l'approche sécante classique ou (IV.31) pour la formulation sécante modifiée.
- Construire la loi de comportement homogénéisé à l'échelle macroscopique :

$$\boldsymbol{\Sigma} = \mathbb{C}_{\text{hom}}^{\text{sec}} : \mathbf{E} \quad (\text{IV.33})$$

IV.4.3 Simulations numériques

Les figures (IV.6 à IV.8) présentent le comportement macroscopique du matériau considéré sous les chargements purement déviatorique, purement hydrostatique et couplé avec $T_E = E_v/E_{eq} = 1/2$. Une fois de plus, on retrouve le comportement linéaire sous le chargement hydrostatique par les approches reposant sur les moyennes des champs locaux. Les courbes de la contrainte déviatorique en fonction de la déformation déviatorique montrent les prédictions très proches des approches INCS, INCB et SEC dans les deux cas de chargement déviatorique et couplé. De plus, dans tous les cas, les prédictions par l'approche SEM sont toujours les plus souples.

IV.5 Comportement élasto-plastique de l'argilite de M/H-M

Dans cette partie la méthode d'homogénéisation non linéaire des matériaux hétérogènes multiphasiques sera exploitée pour la simulation du comportement de l'argilite de M/H-M sous les trajets de compression triaxiale. Il s'agit des essais triaxiaux à court terme en état quasi-saturé avec 5 valeurs différentes de la pression de confinement : 0 MPa, 2 MPa, 5 MPa, 10 MPa et 20 MPa. Le chemin de contrainte suivi est celui d'un essai classique : la pression de confinement est appliquée dans la cellule, suivie par le chargement déviatorique par la presse. Au cours de ces essais, on a déterminé les propriétés élastiques initiales à partir de la phase déchargement-rechargement

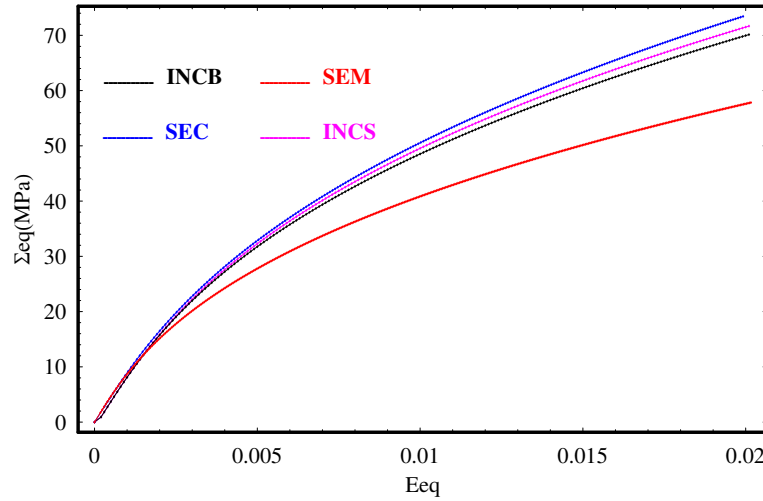


FIGURE IV.6: Evolution des contraintes déviatoriques équivalentes en fonction des déformations équivalentes par différentes approches d'homogénéisation non linéaire (milieu multiphasique sous chargement déviatorique : $E_v = 0$, $E_{eq} \neq 0$)

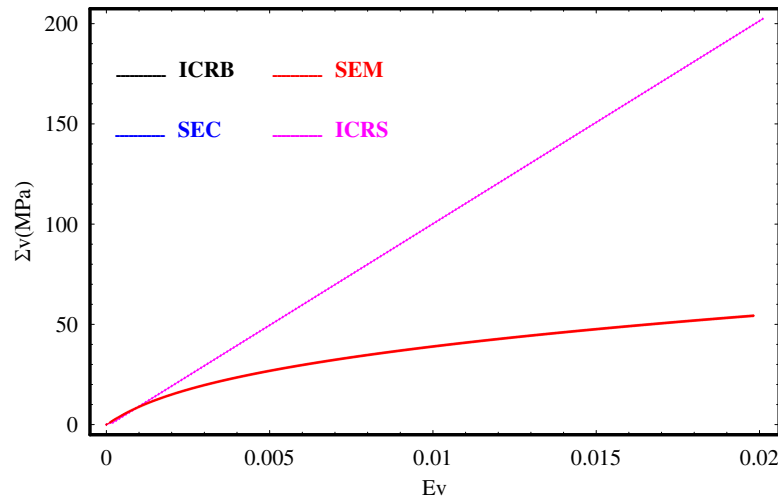


FIGURE IV.7: Evolution des contraintes volumiques en fonction des déformations volumiques par différentes approches d'homogénéisation non linéaire (milieu multiphasique sous chargement hydrostatique : $E_v \neq 0$, $E_{eq} = 0$)

du premier cycle. Les paramètres physiques et mécaniques des échantillons sont précisés dans le tableau (IV.1).

Les études dans les paragraphes précédents nous ont permis de mettre en évidence les limites des différentes approches d'homogénéisation non linéaire. Ainsi, nous avons décidé de choisir la formulation sécante modifiée pour la modélisation du comportement élasto-plastique de l'argilite de M/H-M.

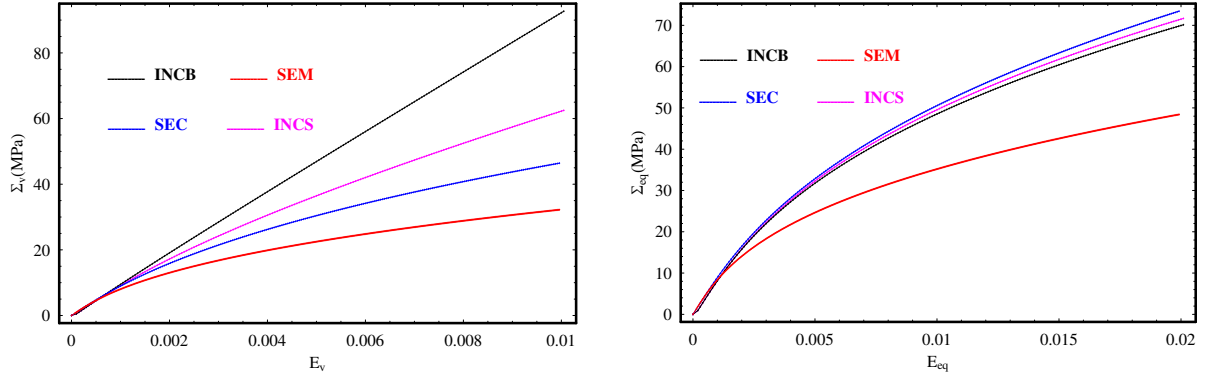


FIGURE IV.8: Evolution des contraintes en fonction des déformations par différentes approches d'homogénéisation non linéaire (milieu multiphasique sous chargement couplé : $T_E = E_v/E_{eq} = 1/2$).

TAB. IV.1: La composition et les paramètres élastiques initiaux des échantillons des essais triaxiaux [58]

Échantillon	Cote	σ_{conf}	Porosité f_p	f_{ca}	f_{qu}	E	ν
	(m)	(MPa)	(%)	(%)	(%)	(GPa)	
EST05716-13	496.20-496.52	0	13.5	19	15	7.91	0.17
EST05716-12	496.20-496.52	2	14	24	22	26.15	0.23
EST05736-11	500.97-501.29	5	13.5	29	25	17.21	0.34
EST05716-11	496.20-496.52	10	13.1	12	14	17.86	0.18
EST05736-10	500.97-501.29	20	13.5	29	27	21.55	0.14

IV.5.1 Comportement local des phases

Comme dans la description du premier chapitre (I), le modèle considéré pour les argilites comporte une phase matricielle argileuse Ω_a , un espace poreux Ω_p et des phases minéralogiques de quartz Ω_{qu} et de calcite Ω_{ca} . Dans ce modèle, l'adhérence entre les inclusions minérales et la matrice argileuse est supposé parfaite. On suggère par la suite que le comportement de la matrice argileuse soit associé à une loi élasto-plastique de type Von Mises (IV.1) tandis que les grains de quartz et de calcite sont élastiques linéaires.

Compte tenu de la rigidité de quartz et de calcite, on peut considérer les inclusions de ces deux phases minéralogiques comme des renforts dans la matrice argileuse. Au cours de chargement, le processus de décohésion aux interfaces des renforts et de la matrice argileuse apparait. On adopte

ici la notion des “renforts lisses” présentée dans les travaux de Barthélémy [1]. D’après cet auteur, le tenseur d’élasticité de ces renforts lisses peut être caractérisé par un module de cisaillement nul et un module de compression non nul. Donc, le module de compression homogénéisé k_{hom} n’est pas modifié lorsque l’on change la nature de l’interface matrice/renfort. En revanche, le module de cisaillement homogénéisé μ_{hom} est très sensible à la nature de l’interface. Ainsi, l’endommagement du matériau modélisé par une réduction de l’adhérence des renforts peut engendrer une diminution notable de μ_{hom} [1].

Néanmoins, dans ce travail pour ne pas compliquer le modèle énoncé des argilites, on propose de manière simple une diminution du module de cisaillement des inclusions minérales qui produit donc un affaiblissement du module de cisaillement homogénéisé μ_{hom} à l’échelle macroscopique. En acceptant ici que les déformations plastiques sont les principaux mécanismes de dissipation, on définit donc la diminution du module de cisaillement des inclusions minérales en fonction de la contrainte équivalente $\bar{\sigma}_{eq}^a$ de la matrice argileuse :

$$\mu_i = \mu_i(\bar{\sigma}_{eq}^a) = \mu_i^0 \exp[-b. (\bar{\sigma}_{eq}^a - \sigma_0)^+] \quad (i = ca, qu) \quad (\text{IV.34})$$

avec μ_i^0 qui est le module de cisaillement initial des inclusions minérales et $(.)^+$ qui désigne la partie positive de la quantité entre parenthèse.

Ainsi, le V.E.R du matériau comporte toujours une matricielle argileuse, un espace poreux et des inclusions de quartz et de calcite.

IV.5.2 Validation expérimentale

Les propriétés mécaniques de la minéralogie et de la porosité de l’argilite de M/H-M sont présentées dans le tableau (IV.2). On remarque que jusqu’à présent, seules les propriétés mécaniques

TAB. IV.2: Propriétés mécaniques des composantes de l’argilite de Meuse/Haute-Manre

Composantes	Propriétés mécaniques
Pores	$k_p = 0, \mu_p = 0$
Quartz	$E_{qu} = 101\text{GPa}, \nu_{qu} = 0.06$
Calcite	$E_{ca} = 95\text{GPa}, \nu_{ca} = 0.3$

macroscopiques ou effectives ont été caractérisées grâce à des essais réalisés à l’échelle macroscopique. Donc, pour déterminer les propriétés de la matrice argileuse à l’échelle microscopique, on

doit résoudre un problème inverse.

Solution du problème inverse

Une synthèse sur différents essais de compression sur l'argilite de Meuse/Haute-Manre présentant des écarts inhérents aux choix expérimentaux effectués a été réalisée par Escoffier [37]. En effet, ces essais ont été effectués selon des modes opératoires et des dispositifs expérimentaux différents. A partir des résultats déterminés par différents auteurs et en comparaison avec les résultats des essais présentés dans le tableau (IV.1), on décide d'opter pour les valeurs initiales du module de Young et du coefficient de Poisson à l'échelle macroscopique respectivement $E_{\text{hom}} = 8.0$ GPa et $\nu_{\text{hom}} = 0.15$

En raison de la détermination de ces propriétés mécaniques dans la phase de déchargement, le comportement de tous les composantes du V.E.R est donc élastique linéaire dans le problème inverse. En reprenant la méthode d'homogénéisation linéaire en deux étapes, on peut trouver la solution analytique du module homogénéisé. La répartition des pores dans la matrice argileuse isotrope est supposée aléatoire, on obtiendra les deux équations du module de Young et du coefficient de Poisson macroscopiques en fonction du module de compressibilité et du module de cisaillement de la matrice argileuse :

$$E_{\text{hom}} = E_{\text{hom}}(k_a, \mu_a), \quad \nu_{\text{hom}} = \nu_{\text{hom}}(k_a, \mu_a) \quad (\text{IV.35})$$

Les fractions volumiques des pores, des inclusions sphérique de quartz et de calcite sont issues de l'essai uniaxial avec $f_p = 0.14$, $f_{qu} = 0.15$ et $f_{ca} = 0.19$. En remplaçant dans la formule (IV.35), on obtient un système de deux équations qui permet de déterminer les propriétés mécaniques de la matrice argileuse précisés dans le tableau (IV.3).

TAB. IV.3: Propriétés mécaniques de la matrice argileuse

Matrice argileuse	$k_a = 10.6$ GPa, $\mu_a = 6.0$ GPa
-------------------	-------------------------------------

Calibration des essais de compression triaxiale

On simule maintenant le comportement non linéaire de l'argilite de Meuse/Haute-Marne par l'approche sécante modifiée avec les propriétés mécaniques fournies dans les tableaux (IV.2 et IV.3). Pour cela, on identifie d'abord les paramètres du comportement élastoplastique de la matrice argileuse (3 paramètres impliqués) et le paramètre b pour l'endommagement à l'interface des grains.

L'évaluation des paramètres élasto-plastiques est réalisée par calage sur la courbe de compression simple de l'éprouvette EST05716-13. Les valeurs retenues sont : $\alpha = 0.3985$, $H = 761\text{MPa}$, $\sigma_0 = 2\text{MPa}$

Le modèle est appliqué avec le même jeu de paramètres élasto-plastiques de la matrice argileuse ci-dessus et la fraction volumique de la phase poreuse sur des essais de compression triaxiaux (avec des confinements de 2, 5, 10 et 20 MPa). Le paramètre b d'endommagement est déterminé par calage sur la courbe des essais et sera présenté dans le tableau (IV.4).

Les figures (IV.9 à IV.13) montrent la comparaison entre la simulation du modèle et les données expérimentales. On observe une bonne concordance entre les prédictions du modèle et les résultats expérimentaux dans les deux essais de compression triaxiale (Fig. IV.10 et IV.11). Mais ce n'est pas le cas pour les deux autres essais triaxiaux (Fig. IV.12 et IV.13) qui attestent un comportement très contractant près du pic. Sur la figure (IV.9) qui présente un essai de compression uniaxiale, on trouve une tendance correcte pour l'évolution de la contrainte par rapport à la déformation axiale et latérale. Un point important à noter est que le modèle développé ne permet pas de reproduire un comportement plastique dilatant. Le comportement élastoplastique de la matrice argileuse considéré dans notre modèle est en effet plastiquement incompressible, contrairement au modèle de type Drucker Prager non associé pris en compte par Guéry et al. [50, 49], qui lui permet de prendre en compte une dilatance plastique.

TAB. IV.4: Paramètre d'endommagement b de chaque éprouvette

Échantillon	Paramètre d'endommagement b
EST05716-13	0.06
EST05716-12	0.045
EST05736-11	0.041
EST05716-11	0.041
EST05736-10	0.025

IV.6 Conclusion

Ce chapitre a pour but de modéliser le comportement élasto-plastique des roches argileuses par l'approche micromécanique. D'abord, une brève synthèse des différentes approches d'homogé-

néisation non linéaire avec leurs corrections a été effectuée. Puis, plusieurs études numériques ont été également mises en oeuvre qui permettent de prédire le comportement élastique non linéaire des milieux hétérogènes biphasiques en particulier des milieux poreux avec les pores de la forme aplatie. Ces études dans le contexte de différentes méthodes d'homogénéisation non linéaire par des champs moyens ont été ensuite étendues pour le milieu hétérogène multiphasique avec deux étapes d'homogénéisation du milieu linéaire de comparaison. En résumé, la formulation sécante modifiée de Suquet [126] a été choisie comme la méthode efficace pour l'homogénéisation non linéaire des milieux hétérogènes en particulier des milieux poreux grâce à sa relative simplicité et sa capacité à prendre en compte de la fluctuation des champs à l'échelle microscopique.

Nous avons donc adopté l'extension sécante modifiée pour simuler les essais de compression triaxiale sur l'argilite de M/H-M. Les observations à l'échelle microscopique sur les mécanismes de déformation de ce matériau nous suggèrent de modéliser un comportement élasto-plastique (de type de Von Mises) pour la matrice argileuse alors que les inclusions de quartz et de calcite présentent le comportement élastique linéaire. En outre, compte tenu de la décohésion entre les inclusions et la matrice argileuse, un modèle simplifié d'endommagement isotrope est également considéré. Les confrontations des prédictions du modèle développé aux données expérimentales nous montrent une tendance correcte pour les essais de compression triaxiale qui présentent un comportement contractant. Cependant, ce modèle ne permet pas d'expliquer la dilatance de la déformation volumique comme dans l'essai de compression uniaxiale.

En plus, la méthode d'homogénéisation non linéaire choisie dans ce travail est la formulation sécante modifiée qui est limitée au cas de chargement monotone et proportionnel. Elle incite à poursuivre les efforts de recherche sur les modèles qui permettent d'une part d'être applicable pour des différents trajets de sollicitations multiaxiaux et d'autre part de rendre compte de l'effet de dilatance plastique.

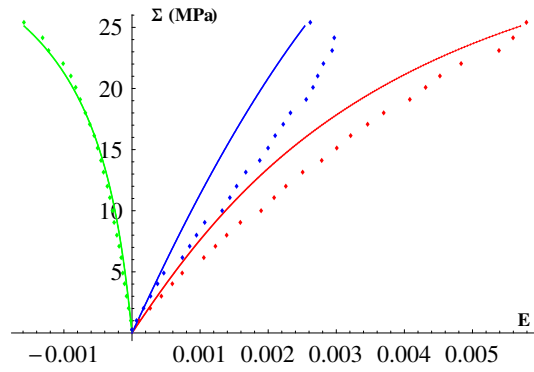


FIGURE IV.9: Essai de compression uniaxiale sur l'éprouvette EST05716-13

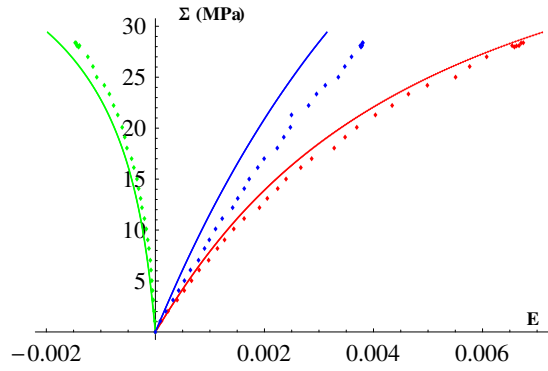


FIGURE IV.10: Essai de compression triaxiale sur l'éprouvette EST05716-12 avec la pression de confinement $\sigma_{\text{conf}} = 2$ MPa

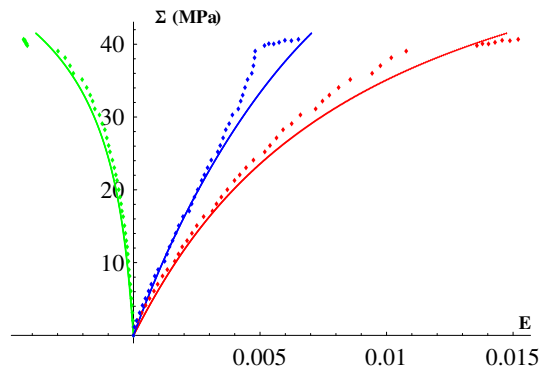


FIGURE IV.11: Essai de compression triaxiale sur l'éprouvette EST05716-11 avec la pression de confinement $\sigma_{\text{conf}} = 10$ MPa

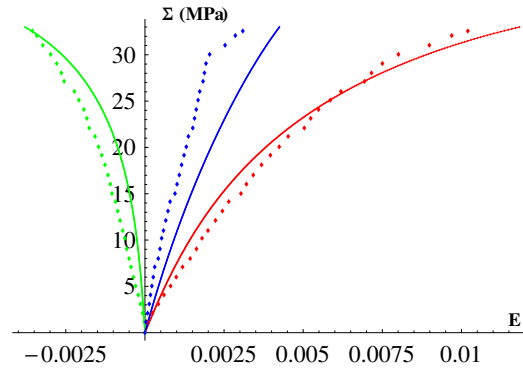


FIGURE IV.12: Essai de compression triaxiale sur l'éprouvette EST05736-11 avec la pression de confinement $\sigma_{\text{conf}} = 5$ MPa

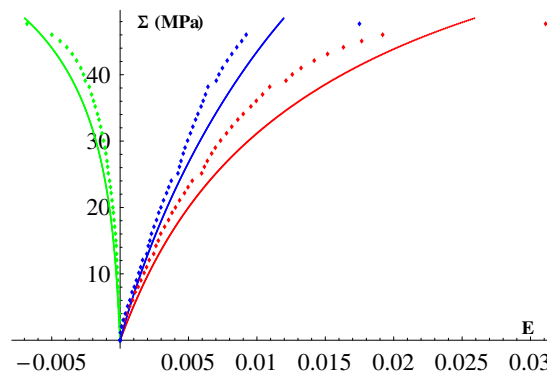


FIGURE IV.13: Essai de compression triaxiale sur l'éprouvette EST05736-10 avec la pression de confinement $\sigma_{\text{conf}} = 20$ MPa

Chapitre V

Homogénéisation du comportement différé

V.1 Introduction

Nous avons présenté dans les chapitres précédents une méthodologie d'homogénéisation pour les matériaux élastique et élasto-plastique. Nous présentons dans ce chapitre l'application de l'approche micromécanique à la modélisation du comportement différé des argilites, dans le cadre des modèles viscoélastique et/ou viscoplastique. Les essais géomécaniques macroscopiques de type fluage uniaxial ou triaxial, relaxation [58, 59, 63, 40, 50, 51] mettent en évidence un comportement mécanique différé influencé par les paramètres extrinsèques (comme la contrainte appliquée, la vitesse de déformation, la température) et les paramètres intrinsèques (comme la taille des grains, la porosité, la teneur en eau et la composition minéralogique). On étudiera plus précisément, dans ce chapitre, l'impact de la composition minéralogique, de la morphologie des inclusion et/ou pores, de la contrainte ou la vitesse de déformation appliquée, sur le comportement différé par application de l'approche micromécanique.

Les méthodes de changement d'échelle soulèvent, dans le cas du comportement héréditaire (visco-élastique linéaire, visco-élastique non linéaire et élasto-viscoplastique), des difficultés qui sont dues au caractère différentiel des équations constitutives avec différents ordres de dérivation relatifs aux contraintes et aux déformations. Dans la littérature, il existe de nombreuses études *micro-macro* qui ont été destinées au comportement élasto-viscoplastique des polycristaux. Dans le cadre de la méthode de champs moyens, ces études s'appuient principalement sur deux types d'approche : l'une dite *héréditaire* [113, 86, 90, 19, 18, 106] et l'autre dite à *variables internes* [101, 102, 115, 7]. Les idées principales de l'approche héréditaire [86, 90, 19, 18, 106] consistent à réduire le problème visco-élastique non linéaire (élasto-viscoplastique) du matériau hétérogène à celui d'un milieu visco-

élastique linéaire de comparaison. Ensuite, l'homogénéisation en viscoélasticité linéaire se ramène à un problème en élasticité (ou thermo-élasticité) linéaire symbolique dans l'espace de Laplace-Carson (à travers la transformation de Laplace-Carson). Cette approche reste en effet très lourde au niveau numérique notamment lors du passage à la transformation de Laplace-Carson inverse pour déterminer le comportement effectif. A chaque instant t , le comportement macroscopique dépend donc de toute l'histoire du matériau.

Une autre manière de résoudre le problème élasto-viscoplastique des matériaux hétérogènes est basée sur l'approche dite à variables internes qui peut être préférée pour sa simplicité sur le plan numérique. Cette approche repose sur une démarche incrémentale plutôt qu'intégrale dans laquelle la propriété d'hérédité est caractérisée par une dépendance instantanée par rapport à des variables décrivant l'état actuel du matériau (variables internes). Schématiquement, le comportement du matériau à l'instant par exemple t_{n+1} dépend uniquement du comportement à l'instant t_n et il est totalement déterminé par la donnée des variables internes en t_n .

Dans les paragraphes qui suivent, l'approche à variables internes sera adoptée pour modéliser le comportement différé d'un milieu hétérogène biphasé dont le V.E.R comporte une matrice et des inclusions sphériques. En ce qui concerne le comportement local des phases, on suppose ici un comportement élasto-viscoplastique pour la matrice tandis que les inclusions sont élastiques linéaires. En effet il s'agit du milieu renforcé où les propriétés mécaniques des inclusions sont beaucoup plus raides que celles de la matrice. On cherchera tout d'abord à adapter cette approche à variables internes à ce type de matériau. Une fois que la pertinence de la procédure serait confirmée, le modèle peut être enrichi pour les matériaux hétérogènes multiphasiques en incorporant différents types d'inclusion.

Le développement de l'approche à variables internes pour le schéma de Mori Tanaka et sa validation en viscoélasticité linéaire (paragraphe V.3) est le fruit d'une collaboration menée avec S. Berbenni (*LPMM*, Metz), une publication est en préparation sur ce sujet.

V.2 Homogénéisation du comportement élasto-viscoplastique par la méthode à variables internes

Dans cette partie, les points importants de la méthode à variables internes seront décrits de manière succincte (voir [115, 7, 8] pour plus de détails).

Considérons un milieu hétérogène Ω qui est soumis à une vitesse de déformation uniforme $\dot{\mathbf{E}}$ à la frontière $\partial\Omega$. Le comportement élasto-viscoplastique local s'écrit dans le cadre du modèle de

Maxwell par les formulations suivantes :

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbb{S} : \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{vp} \\ \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{vp} = \mathbb{M}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}^{vp}) : \boldsymbol{\sigma} \end{cases} \quad (\text{V.1})$$

avec $\mathbb{S}$ et $\mathbb{M}$ qui désignent respectivement les complaisances élastiques et viscoplastiques sécantes des phases. Les modules élastique et viscoplastique correspondants sont $\mathbb{C} = \mathbb{S}^{-1}$ et $\mathbb{L} = \mathbb{M}^{-1}$.

Les équations du problème hétérogène s'écrivent :

$$\begin{cases} \text{div} \dot{\boldsymbol{\sigma}} = 0, \quad \text{div} \boldsymbol{\sigma} = 0 & (\Omega) \\ \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{1}{2} \left(\mathbf{grad} \underline{\dot{\xi}} + {}^t \mathbf{grad} \underline{\dot{\xi}} \right) & (\Omega) \\ \underline{\dot{\xi}} = \dot{\boldsymbol{E}} \cdot \underline{x} & (\partial\Omega) \end{cases} \quad (\text{V.2})$$

La résolution de ce problème consiste à trouver les champs de taux de contrainte $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ et de taux de déformation $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ qui permettent de déterminer donc le comportement à l'échelle macroscopique au travers de l'étape d'homogénéisation. On remarque que les champs de contrainte $\boldsymbol{\sigma}$ et de déformation viscoplastique $\boldsymbol{\varepsilon}^{vp}$ sont envisagés comme des variables internes contenant toute l'histoire du comportement mécanique du matériau.

Dans cette approche, on utilise les opérateurs de projection notés Π^{C^e} qui sont liés avec les tenseurs modifiés de Green Γ^{C^e} (voir [77, 7]) comme :

$$\begin{aligned} \Pi^{C^e} &= \Gamma^{C^e} : \mathbb{C}^e \\ \Gamma_{ijkl}^{C^e} &= -\frac{1}{2} (G_{ij,kl}^{C^e} + G_{jk,il}^{C^e}) \end{aligned} \quad (\text{V.3})$$

avec G^{C^e} la fonction de Green associée avec le module de référence $\mathbb{C}^e$.

La procédure développée nous amène à la solution suivante du taux de déformation locale :

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \dot{\boldsymbol{E}} + \Pi^{C^e} * (\delta \mathbb{S}^e : \mathbb{C} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{vp}) \quad (\text{V.4})$$

En effet, cette dernière équation (V.4) montre que le taux de déformation microscopique $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ dépend de celui macroscopique imposé $\dot{\boldsymbol{E}}$, des hétérogénéités élastiques $\delta \mathbb{S}^e = \mathbb{S} - \mathbb{S}^e$ et également du taux de déformation viscoplastique $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{vp}$. Le dernier terme $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{vp}$ à son tour dépend de la contrainte $\boldsymbol{\sigma}$ qui contient l'histoire du matériau.

Il est remarquable que pour caractériser le comportement élasto-viscoplastique des matériaux héréditaires, deux cas asymptotiques peuvent être considérés : l'un à l'état élastique pur (temps courts) et l'autre à l'état viscoplastique pur (temps long) [115, 7]. Ces idées nous conduisent à résoudre l'équation (V.4) par deux sous-problèmes élémentaires : le premier correspond à un matériau hétérogène élastique dont la résolution classique est déjà connue tandis que le deuxième consiste à

traiter un matériau purement viscoplastique soumis à un champ uniforme inconnu $\dot{\mathbf{X}}$. En considérant $\dot{\mathbf{e}}^{vp}$ un champ de déformation viscoplastique cinématiquement admissible, on obtient les relations suivantes à partir de la solution du problème purement viscoplastique :

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{e}}^{vp} &= \mathbb{A}^L : \dot{\mathbf{X}} \\ \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{vp} &= \mathbb{A}^L : \dot{\mathbf{X}} + \delta \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{vp}\end{aligned}\tag{V.5}$$

où $\mathbb{A}^L$ désigne le tenseur de localisation du problème purement viscoplastique.

La propriété de l'opérateur de projection (voir [7, 115]) appliquée sur le champ cinématiquement admissible $\dot{\mathbf{e}}^{vp}$ nous donne :

$$\Pi^{C^e} * \dot{\mathbf{e}}^{vp} = \dot{\mathbf{e}}^{vp} - \dot{\mathbf{X}} = \mathbb{A}^L : \dot{\mathbf{X}} - \dot{\mathbf{X}}\tag{V.6}$$

En remplaçant (V.5, V.6) au (V.4), il conduit à :

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \dot{\mathbf{E}} + \mathbb{A}^L : \dot{\mathbf{X}} - \dot{\mathbf{X}} + \Pi^{C^e} * (\delta \mathbb{S}^e : \mathbb{C} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e + \delta \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{vp})\tag{V.7}$$

En outre, l'opérateur de projection Π^{C^e} peut être décomposé en un terme local et un terme non local :

$$\Pi^{C^e}(\underline{x} - \underline{x}') = \Pi_l^{C^e} \delta(\underline{x} - \underline{x}') + \Pi_{nl}^{C^e}(\underline{x} - \underline{x}')\tag{V.8}$$

où $\Pi_{nl}^{C^e}(\underline{x} - \underline{x}')$ décroît en $\frac{1}{|\underline{x} - \underline{x}'|^3}$ (voir par exemple les travaux de Bornert [14] et de Zaoui [140]). Par la suite le champ inconnu $\dot{\mathbf{X}}$ est choisi de manière qu'il permette de négliger la contribution non locale du dernier terme de l'équation (V.7) :

$$\langle \delta \mathbb{S}^e : \mathbb{C} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e + \delta \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{vp} \rangle = 0\tag{V.9}$$

où :

$$\delta \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{vp} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{vp} - \mathbb{A}^L : \dot{\mathbf{X}}\tag{V.10}$$

On déduit donc :

$$\dot{\mathbf{X}} = \langle \delta \mathbb{S}^e : \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{vp} \rangle = \langle (\mathbb{S} - \mathbb{S}^e) : \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{vp} \rangle = \langle \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \mathbb{S}^e : \dot{\boldsymbol{\sigma}} \rangle\tag{V.11}$$

soit :

$$\dot{\mathbf{X}} = \dot{\mathbf{E}} - \mathbb{S}^e : \dot{\boldsymbol{\Sigma}}\tag{V.12}$$

La relation macroscopique s'écrit alors :

$$\dot{\mathbf{E}} = \mathbb{S}^e : \dot{\boldsymbol{\Sigma}} + \dot{\mathbf{E}}^{vp}\tag{V.13}$$

avec :

$$\dot{\mathbf{E}}^{vp} = \dot{\mathbf{X}} = \langle {}^t\mathbb{B}^C : \dot{\mathbf{e}}^{vp} \rangle \quad (\text{V.14})$$

$\mathbb{B}^C$ sont les tenseurs de concentration des contraintes pour le problème purement élastique.

L'équation (V.7) est réécrite maintenant comme suivante :

$$\dot{\mathbf{e}} = \dot{\mathbf{E}} + \mathbb{A}^L : \dot{\mathbf{E}}^{vp} - \dot{\mathbf{E}}^{vp} + \Pi_l^{C^e} : (\delta\mathbb{S}^e : \mathbb{C} : \dot{\mathbf{e}}^e + \delta\dot{\mathbf{e}}^{vp}) \quad (\text{V.15})$$

En prenant en compte la relation entre l'opérateur de projection Π^{C^e} et le tenseur de Green Γ^{C^e} , on a :

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{e}} = & \dot{\mathbf{E}} + \mathbb{A}^{L^e} : \dot{\mathbf{E}}^{vp} - \dot{\mathbf{E}}^{vp} + \mathbb{P}^{C^e} : \mathbb{C}^e : \left(\dot{\mathbf{e}}^{vp} - \mathbb{A}^{L^e} : \dot{\mathbf{E}}^{vp} \right) \\ & + \mathbb{P}^{C^e} : \mathbb{C}^e : (\delta\mathbb{S}^e : \mathbb{C} : \dot{\mathbf{e}} - \delta\mathbb{S}^e : \mathbb{C} : \dot{\mathbf{e}}^{vp}) \end{aligned} \quad (\text{V.16})$$

avec $\mathbb{P}^{C^e} = \Gamma_l^{C^e}$ le tenseur de Hill associé au module de référence $\mathbb{C}^e$.

En effet, dans leur travail Berbenni et coauteurs [7, 101, 115] ont utilisé le schéma autocohérent pour homogénéiser les deux sous-problèmes élastique pur et viscoplastique pur :

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^e &= \langle \mathbb{C} : \mathbb{A}^{C^e} \rangle \\ \mathbb{L}^e &= \langle \mathbb{C} : \mathbb{A}^{L^e} \rangle \end{aligned} \quad (\text{V.17})$$

En choisissant le module de référence $\mathbb{C}^e$ égal au module effectif issu à partir du problème purement élastique, ces auteurs ont montré :

$$\delta\mathbb{S}^e : \mathbb{C} : \dot{\mathbf{e}} - \delta\mathbb{S}^e : \mathbb{C} : \dot{\mathbf{e}}^{vp} = -\mathbb{S}^e : \delta\mathbb{C}^e : \dot{\mathbf{e}} - \delta\mathbb{S}^e : \mathbb{C} : \dot{\mathbf{e}}^{vp} \quad (\text{V.18})$$

Les équations (V.16 et V.18) donnent à la fin une nouvelle équation de localisation en déformation :

$$\dot{\mathbf{e}} = \mathbb{A}^{C^e} : \left(\dot{\mathbf{E}} - \dot{\mathbf{E}}^{vp} \right) + \mathbb{A}^{C^e} : \mathbb{A}^L : \dot{\mathbf{E}}^{vp} + \mathbb{A}^{C^e} : \mathbb{P}^{C^e} : \left(\mathbb{C} : \dot{\mathbf{e}}^{vp} - \mathbb{C}^e : \mathbb{A}^L : \dot{\mathbf{E}}^{vp} \right) \quad (\text{V.19})$$

En introduisant l'équation (V.19) dans la loi constitutive locale $\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbb{C} : (\dot{\mathbf{e}} - \dot{\mathbf{e}}^{vp})$, on obtient la loi d'interaction en contraintes :

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbb{C} : \mathbb{A}^{C^e} : \mathbb{S}^e : \dot{\boldsymbol{\Sigma}} - \mathbb{C} : \mathbb{A}^{C^e} : (\mathbb{I} - \mathbb{S}^E) : \left(\dot{\mathbf{e}}^{vp} - \mathbb{A}^L : \dot{\mathbf{E}}^{vp} \right) \quad (\text{V.20})$$

où $\mathbb{S}^E = \mathbb{P}^{C^e} : \mathbb{C}^e$ est le tenseur d'Eshelby.

V.2.1 Deux états asymptotiques du comportement élasto-viscoplastique

On peut retrouver à partir des équations (V.18, V.20) les deux cas asymptotiques correspondant au comportement élasto-viscoplastique des matériaux hétérogènes :

- cas de l'élasticité pure dans lequel $\dot{\epsilon}^{vp} = \dot{\mathbf{E}}^{vp} = 0$, il conduit à :

$$\dot{\epsilon} = \mathbb{A}^{C^e} : \dot{\mathbf{E}} \quad (V.21)$$

$$\dot{\sigma} = \mathbb{C} : \mathbb{A}^{C^e} : \mathbb{S}^e : \dot{\Sigma}$$

- cas de la viscoplasticité pure dans lequel $\dot{\sigma} = \dot{\Sigma} = 0$, il conduit à :

$$\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}^{vp} = \mathbb{A}^L : \dot{\mathbf{E}} \quad (V.22)$$

$$\sigma = \mathbb{L} : \mathbb{A}^L : \mathbb{M}^e : \Sigma$$

V.2.2 Algorithme de calcul numérique

L'approche à variables internes repose sur une démarche incrémentale qui permet de déterminer le comportement macroscopique à travers l'étape d'homogénéisation pas à pas du problème hétérogène élasto-viscoplastique. Chaque pas correspond à un intervalle de temps $[t_n, t_{n+1}]$. On suppose que toutes les données, macroscopiques (tenseurs de déformations $\mathbf{E}_n$ et de contraintes Σ_n) et microscopiques décrivant toute l'histoire de la phase r (pour chaque phase $\sigma_n^r, \epsilon_n^{vp,r}$) sont connues à l'instant t_n . Le matériau hétérogène est soumis à une déformation uniforme $\mathbf{E}_{n+1} = \mathbf{E}_n + \Delta\mathbf{E}$. Le problème à résoudre est donc de déterminer la contrainte macroscopique Σ_{n+1} à t_{n+1} .

La procédure de calcul peut se décomposer de la façon suivante :

- 1. Calcul du module élastique effectif $\mathbb{C}^e$ et les tenseurs de localisation $\mathbb{A}^C, \mathbb{B}^C$ du problème purement élastique.
- 2. Détermination des déformations viscoplastiques locales $\Delta\epsilon_{n+1}^{vp,r}, \epsilon_{n+1}^{vp,r}$ et du module viscoplastique $\mathbb{L}^r$ à partir des données $\sigma_n^r, \epsilon_n^{vp,r}$ et Δt (voir l'annexe (B)).
- 3. Homogénéisation du problème purement viscoplastique macroscopique : la prise en compte des modules viscoplastiques $\mathbb{L}^r$ permet de déterminer les tenseurs $\mathbb{L}^e$ et $\mathbb{A}^L, \mathbb{B}^L$.
- 4. Calcul de la déformation viscoplastique macroscopique $\Delta\mathbf{E}_{n+1}^{vp}$ par la relation suivante :

$$\Delta\mathbf{E}_{n+1}^{vp} = \langle {}^t\mathbb{B}^C : \Delta\epsilon_{n+1}^{vp} \rangle \quad (V.23)$$

- 5. Evaluation des grandeurs locales $\Delta\epsilon^r$ et $\Delta\sigma^r$ à partir des équations (V.18) et (V.20) correspondantes.
- 6. Calcul de l'incrément de contrainte macroscopique :

$$\Delta\Sigma = \langle \Delta\sigma^r \rangle \quad (V.24)$$

- 7. Réactualisation des contraintes locales :

$$\sigma_{n+1}^r = \sigma_n^r + \Delta\sigma^r \quad (V.25)$$

- 8. Réactualisation de la contrainte macroscopique

$$\Sigma_{n+1} = \Sigma_n + \Delta \Sigma \quad (\text{V.26})$$

V.3 Comportement viscoélastique linéaire d'un matériau biphasique

V.3.1 Approximation du schéma autocohérent

Berbenni [7] dans sa thèse a effectué une comparaison entre l'approche héréditaire et celle à variables internes sur les matériaux dont les composants consistent en une phase matrice viscoélastique linéaire entourant des inclusions sphériques elles-même viscoélastiques linéaires (voir également [115]). Plus précisément, il a considéré le cas simple d'un matériau incompressible isotrope qui lui permet d'obtenir les résultats analytiques. Le modèle de référence de type héréditaire est celui de Hashin-Rougier [52, 114] reposant sur l'homogénéisation autocohérente symbolique dans l'espace de Laplace-Carson. Dans ses calculs numériques, les valeurs utilisées pour les modules de cisaillement élastique et visqueux de chaque phase sont prises égales à $\mu_m = 50\text{MPa}$ et $\rho_m = 10\text{MPa.s}$ pour la matrice et $\mu_i = 250\text{MPa}$ et $\rho_i = 1000\text{MPa.s}$ pour les inclusions sphériques. Les trois différentes valeurs de la fraction volumique des inclusions ont été étudiées qui correspondent à $f_i = 0.25$, $f_i = 0.5$ et $f_i = 0.75$. Berbenni [7] a constaté les bonnes concordances entre les prédictions de deux approches (dans l'espace symbolique de Laplace Carson ou bien dans l'espace temporel) pour toutes les valeurs de la fraction volumique des inclusions. Les résultats prédictifs de ces deux approches sont identiques dans les états asymptotiques (élastique pure et viscoplastique pure) tandis qu'ils sont très proches dans le régime transitoire. De plus, on remarque que dans ces résultats numériques, le temps de calcul CPU pour le modèle à variables internes est 100 fois inférieur à celui obtenu dans le modèle de type héréditaire.

Dans le présent travail on s'intéresse au cas particulier où les inclusions sphériques ont un comportement élastique linéaire. Ceci correspond au cas où les modules visqueux des inclusions tendent vers l'infini ($\eta_i \rightarrow \infty$ et $\rho_i \rightarrow \infty$). Ainsi, la déformation visqueuse des inclusions est égale à zéro ($\epsilon^{vp,i} = 0$). En supposant par ailleurs que la phase matrice est également incompressible ($\eta_m \rightarrow \infty$), on obtient la solution analytique du problème purement visqueux dans le cadre du schéma autocohérent :

$$\begin{aligned} \mathbb{L}_{\text{hom}}^{\text{AC}} &= \infty \mathbb{J} + 3\rho_{\text{hom}}^{\text{AC}} \mathbb{K} \\ \rho_{\text{hom}}^{\text{AC}} &= \frac{2\rho_m}{2 - 5f_i} \end{aligned} \quad (\text{V.27})$$

Ce résultat obtenu est non physique dans le cas où la fraction volumique des inclusions est élevée ($f_i \geq 40\%$). En alternative au schéma autocohérent, on a choisi de développer la méthode à variables internes pour le modèle de Mori Tanaka dont la validité est limitée à des microstructures de type matrice-inclusion. La validité du modèle de Mori Tanaka est limitée à des fractions volumiques modérées, de l'ordre de $f_i = 30\%$ (voire un peu plus dans le cas d'inclusions sphériques), [12]. On considérera, dans la suite du chapitre, le module de référence de la méthode à variables internes égal à celui homogénéisé de Mori Tanaka $\mathbb{C}^e = \mathbb{C}_{\text{hom}}^{\text{MT}}$.

V.3.2 Mise en oeuvre de l'approche à variables internes pour le modèle de Mori Tanaka

On adopte la démarche présentée dans les travaux de Berbenni et coauteurs [115, 9, 8, 7] pour la validation de l'approximation du schéma de Mori-Tanaka à l'approche à variables internes. Plus concrètement, une comparaison entre cette approche et celle héréditaire dans l'espace symbolique de Laplace Carson et dans l'espace temporel peut être élaborée dans le contexte du schéma d'estimation de Mori-Tanaka. Le modèle de référence de type héréditaire est celui présenté par Li et Weng [87]. Comme indiqué précédemment, le travail présenté dans ce paragraphe a été mené en collaboration avec S. Berbenni (LPMM, Metz).

Comparaison des grandeurs locales et effectives dans l'espace de Laplace Carson

Considérons le premier cas où le matériau biphasé est identique à celui étudié par Berbenni [7] dont les propriétés visco-élastiques des phases sont respectivement $\mu_m = 50\text{MPa}$ et $\rho_m = 10\text{MPa.s}$ pour la matrice et $\mu_i = 250\text{MPa}$ et $\rho_i = 1000\text{MPa.s}$ pour les inclusions sphériques.

Les solutions analytiques du modèle de référence dans l'espace de Laplace Carson sont rappelées dans l'annexe (C). On note p la variable conjuguée de t dans l'espace de Laplace-Carson. La transformée de Laplace-Carson d'une fonction $f(t)$ est notée $\hat{f}(p)$ et est définie par

$$\hat{f}(p) = p \int_0^\infty f(t) \exp(-pt) dt \quad (\text{V.28})$$

On rappelle ci-dessous les solutions déterminées par Berbenni et coauteurs [7, 115] pour le module effectif $\hat{L}_{\text{hom}}^{\text{Var}}(p)$, les tenseurs de localisation en contrainte $\hat{B}_r^{\text{Var}}(p)$, ($r = m, i$) et les tenseurs de localisation en déformation $\hat{A}_r^{\text{Var}}(p)$:

$$\hat{L}_{\text{hom}}^{\text{Var}}(p) = 1 / \left(\frac{p}{\mu_{\text{hom}}} + \left\langle \frac{\hat{B}_r^{\text{Var}}(p)}{\rho_r} \right\rangle + \left\langle a_r \frac{\hat{B}_r^{\text{Var}}(p)}{\rho_r} + b_r \left\langle \frac{\hat{B}_r^{\text{Var}}(p)}{\rho_r} \right\rangle \right\rangle \right), \quad (r = m, i) \quad (\text{V.29})$$

$$\hat{A}_r^{\text{Var}}(p) = \hat{B}_r^{\text{Var}}(p) \left(p + \frac{\mu_r}{\rho_r} \right) / \left(\frac{p}{\mu_{\text{hom}}} + \left\langle \frac{\hat{B}_r^{\text{Var}}(p)}{\rho_r} \right\rangle + \left\langle a_r \frac{\hat{B}_r^{\text{Var}}(p)}{\rho_r} + b_r \left\langle \frac{\hat{B}_r^{\text{Var}}(p)}{\rho_r} \right\rangle \right\rangle \right) \quad (\text{V.30})$$

$$\widehat{B}_m^{\text{Var}}(p) = \frac{p + \frac{3}{5}\mu_{\text{hom}}b_m(1 + a_i - f_m a_m b_m - f_i a_i b_i) / \rho_i}{\frac{p}{a_m} + \frac{3}{5}\mu_{\text{hom}}\left(\frac{1}{\rho_m} - f_m b_m \left(\frac{1+a_m-f_m a_m b_m-f_i a_i b_i}{\rho_m} - \frac{1+a_i-f_m a_m b_m-f_i a_i b_i}{\rho_i}\right)\right)} \quad (\text{V.31})$$

$$\widehat{B}_i^{\text{Var}}(p) = \frac{p + \frac{3}{5}\mu_{\text{hom}}b_i(1 + a_m - f_m a_m b_m - f_i a_i b_i) / \rho_m}{\frac{p}{a_i} + \frac{3}{5}\mu_{\text{hom}}\left(\frac{1}{\rho_i} - f_i b_i \left(\frac{1+a_i-f_m a_m b_m-f_i a_i b_i}{\rho_i} - \frac{1+a_m-f_m a_m b_m-f_i a_i b_i}{\rho_m}\right)\right)} \quad (\text{V.32})$$

où f_i , f_m et μ_{hom} sont respectivement la fraction volumique des inclusions, de la phase matrice et le module de cisaillement homogénéisé du problème purement élastique. Les paramètres a_m , a_i , b_m et b_i désignent les parties déviatoriques des tenseurs de localisation en déformation (du problème purement élastique) et en contrainte (du problème purement visqueux). Les solutions analytiques de ces paramètres en appliquant le schéma de Mori-Tanaka sont les suivantes :

$$\begin{aligned} a_m &= \frac{2\mu_i + 3\mu_m}{(2 + 3f_i)\mu_i + 3(1 - f_i)\mu_m}, & a_i &= \frac{5\mu_i}{(2 + 3f_i)\mu_i + 3(1 - f_i)\mu_m} \\ b_m &= \frac{2\rho_i + 3\rho_m}{2(1 - f_i)\rho_i + (3 + 2f_i)\rho_m}, & b_i &= \frac{5\rho_m}{2(1 - f_i)\rho_i + (3 + 2f_i)\rho_m} \end{aligned} \quad (\text{V.33})$$

Les résultats numériques obtenus par l'approche à variables internes pour les trois valeurs différentes de la fraction volumique des inclusions ($f_i = 0.05$, $f_i = 0.25$ et $f_i = 0.5$) sont très proches de ceux obtenus à l'aide de l'approche héréditaire de référence (Fig. V.1 à V.3). Particulièrement, ces résultats se superposent dans les cas asymptotiques correspondant à l'élasticité pure (respectivement à viscosité pure) quand le temps physique $t \rightarrow 0$ ou $p \rightarrow \infty$ (respectivement $t \rightarrow \infty$ ou $p \rightarrow 0$). On note une très faible différence entre les approches dans le régime transitoire, différence croissante avec la fraction volumique des inclusions.

On s'intéresse au deuxième cas où les inclusions sphériques sont élastiques linéaires ($\rho_i \rightarrow \infty$). Les figures (V.4 à V.6) présentent les résultats du module effectif et du tenseur de localisation de la phase matrice déterminés par les deux approches héréditaire et à variables internes. On observe un très bon accord entre les deux approches dans le régime transitoire et dans le cas asymptotique d'élasticité pure ($t \rightarrow 0$ ou $p \rightarrow \infty$). Les seules différences non négligeables sont observées dans le cas asymptotique de viscosité pure ($t \rightarrow \infty$ ou $p \rightarrow 0$). Ces différences sont alors d'autant plus importantes que la fraction volumique d'inclusions est élevée.

Comparaison des résultats macroscopiques pour des essais de compression uniaxiale

Des essais de compression uniaxiale ont été simulés à une vitesse de déformation macroscopique constante pour le matériau biphasique dont les inclusions élastiques sont immergées dans la matrice viscoélastique linéaire. Les propriétés mécaniques de chaque phase sont données comme les suivantes : $E_m = 3\text{GPa}$, $\nu_m = 0.3$, $\rho_m = 5000.\text{GPa.s}$ pour la matrice et $E_i = 95\text{GPa}$, $\nu_i = 0.3$ pour

les inclusions sphériques. Les solutions analytiques de l'approche héréditaire présentées par Li et Weng [87] sont rappelées dans l'annexe (C).

Les figures (V.7 et V.8) présentent les réponses macroscopiques du matériau issues des deux méthodes héréditaire et à variables internes dans l'espace temporel. Les simulations montrent une tendance identique à celle observée dans l'espace symbolique de Laplace Carson.

Un très bon accord entre les deux approches est observé dans le cas d'une faible fraction volumique d'inclusions $f_i = 0.1$. Pour la valeur de la fraction volumique plus élevée, $f_i = 0.3$, l'accord entre les approches héréditaire et à variables internes est observé dans le cas limite asymptotique élastique associé aux très faibles déformations. L'écart entre les approches est croissant avec la déformation, il est également d'autant plus important que la vitesse de déformation est faible.

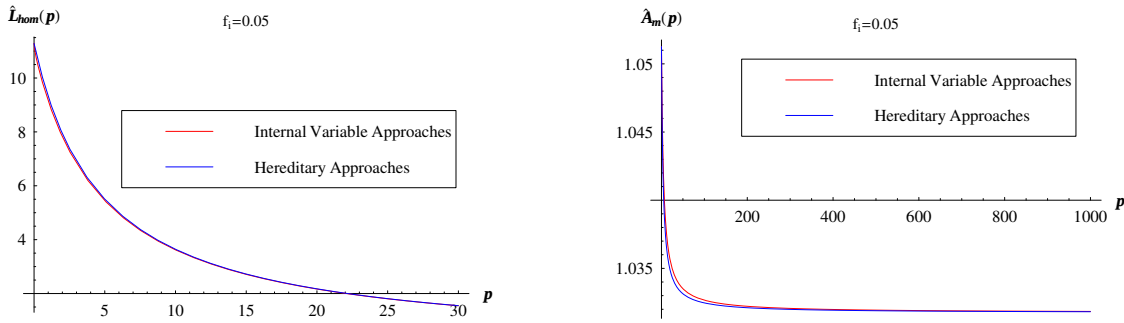


FIGURE V.1: Module effectif et tenseur de localisation en déformation de la matrice dans l'espace de Laplace Carson d'un matériau biphasé viscoélastique isotrope (cas $f_i = 0.05$)

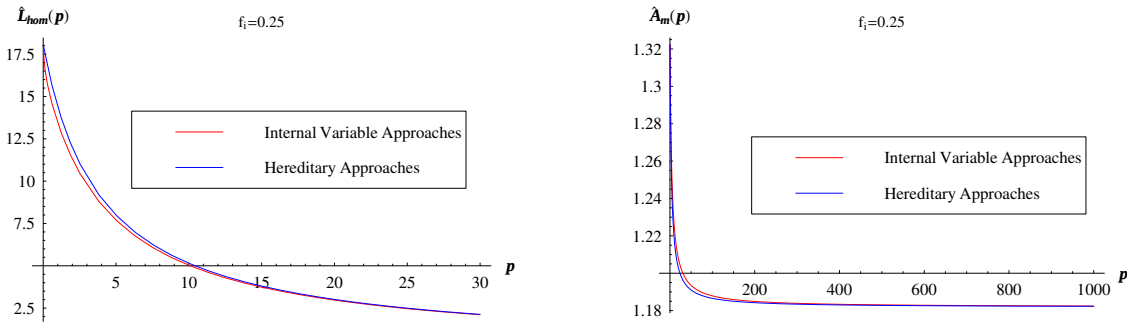


FIGURE V.2: Module effectif et tenseur de localisation en déformation de la matrice dans l'espace de Laplace Carson d'un matériau biphasé viscoélastique isotrope (cas $f_i = 0.25$)

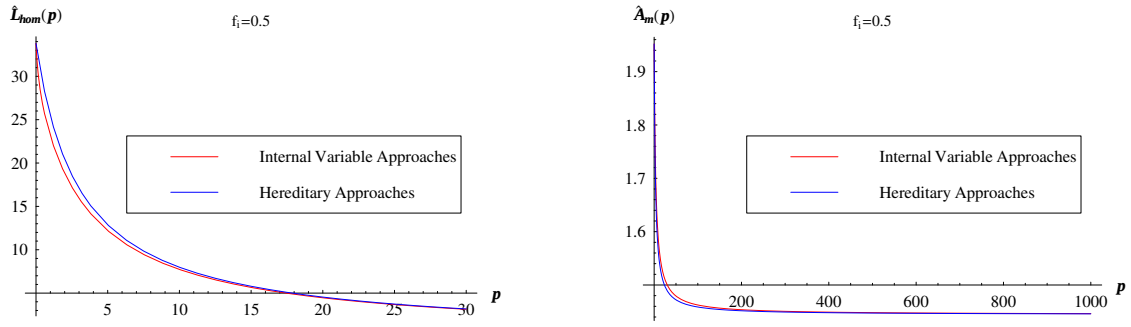


FIGURE V.3: Module effectif et tenseur de localisation en déformation de la matrice dans l'espace de Laplace Carson d'un matériau biphasé viscoélastique isotrope (cas $f_i = 0.5$)

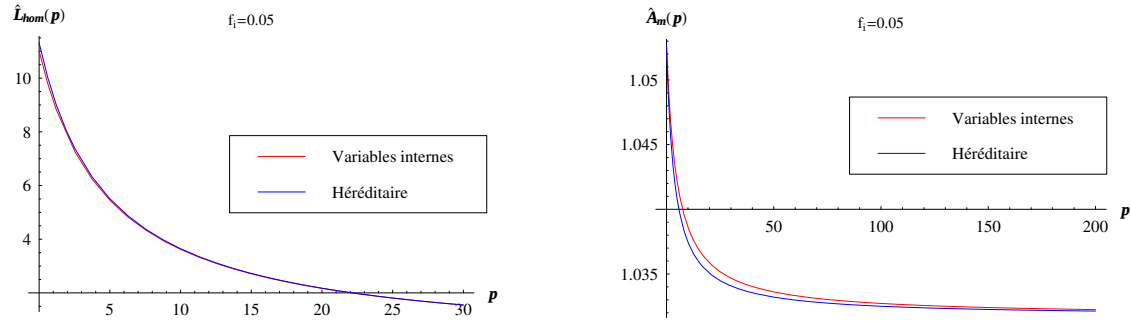


FIGURE V.4: Module effectif et tenseur de localisation en déformation de la matrice dans l'espace de Laplace Carson d'un matériau biphasé dont la matrice est viscoélastique isotrope et les inclusions sont élastiques isotropes (cas $f_i = 0.05$)

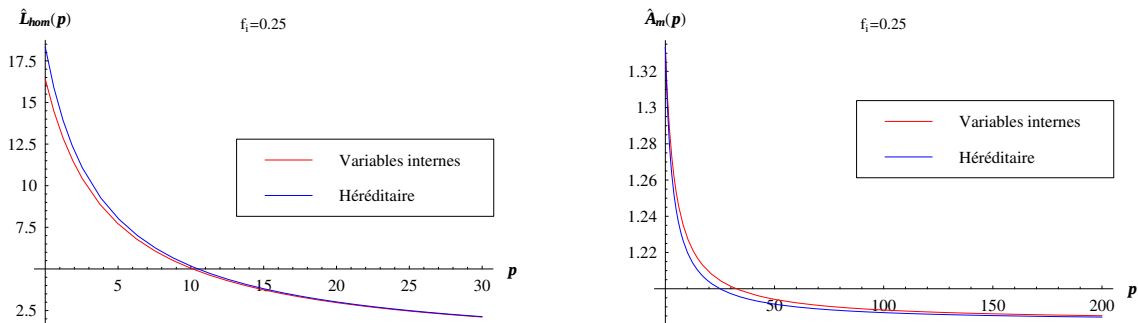


FIGURE V.5: Module effectif et tenseur de localisation en déformation de la matrice dans l'espace de Laplace Carson d'un matériau biphasé dont la matrice est viscoélastique isotrope et les inclusions sont élastiques isotropes (cas $f_i = 0.25$)

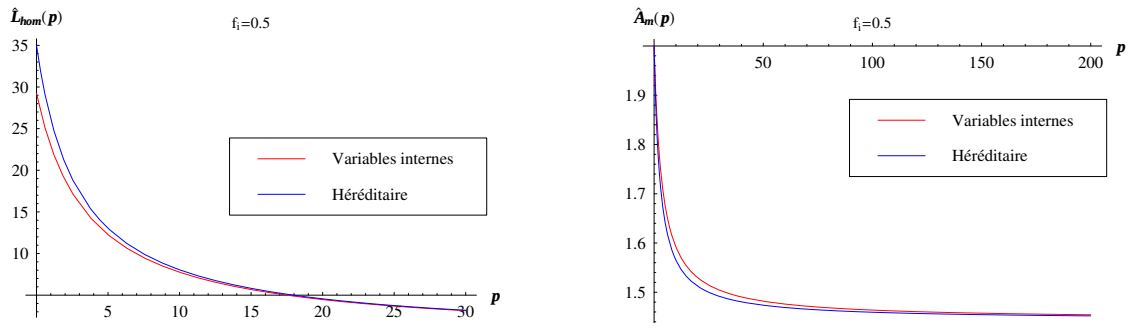


FIGURE V.6: Module effectif et tenseur de localisation en déformation de la matrice dans l'espace de Laplace Carson d'un matériau biphasé dont la matrice est viscoélastique isotrope et les inclusions sont élastiques isotropes (cas $f_i = 0.5$)

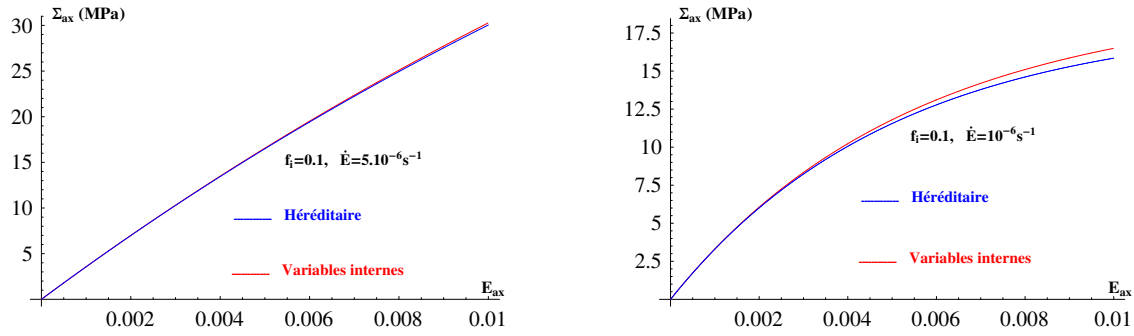


FIGURE V.7: Essai de compression uniaxial à vitesse de déformation imposée constante - comparaison entre l'approche à variables internes et l'approche héréditaire (cas $f_i = 0.1$)

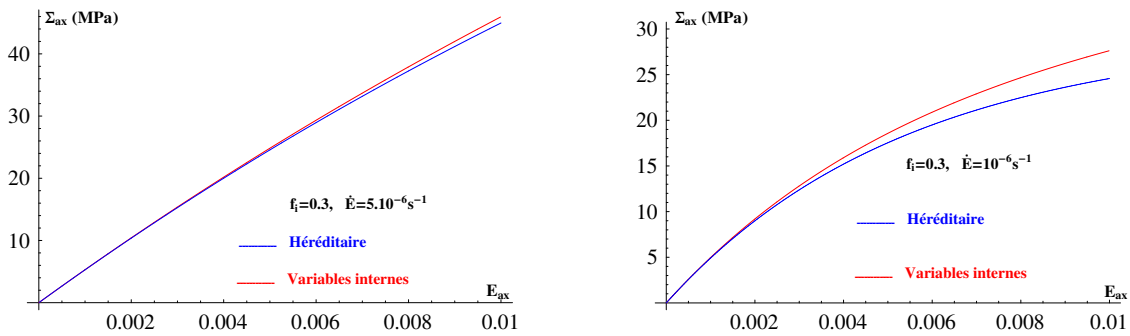


FIGURE V.8: Essai de compression uniaxial à vitesse de déformation imposée constante - comparaison entre l'approche à variables internes et l'approche héréditaire (cas $f_i = 0.3$)

V.4 Comportement élasto-viscoplastique du matériau biphasique

L'approche à variables internes est exploitée maintenant pour caractériser le comportement élasto-viscoplastique des matériaux biphasiques hétérogènes. Une formulation viscoplastique en utilisant la loi d'écoulement de Perzyna [104], les critères de plasticité de Von Mises et de Drucker Prager sont successivement employées pour décrire le comportement local différé de la phase matrice (voir [39, 49, 105]). Les calculs numériques dans le cadre du schéma d'homogénéisation de Mori Tanaka sont ensuite présentés.

V.4.1 Formulation viscoplastique de type Perzyna avec le critère de Von Mises

Supposons dans un premier temps que le comportement élasto-viscoplastique de la phase matrice du matériau obéit à la loi de Perzyna dont la déformation volumique se développe à un volume constant. Elle peut donc se mettre sous la forme (critère de plasticité de Von Mises) :

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbb{C} : (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{vp}) \quad (\text{V.34})$$

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{vp} = \begin{cases} g_v(f) \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} & \text{si } f(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}^{vp}) > 0 \\ 0 & \text{si } f(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}^{vp}) \leq 0 \end{cases} \quad (\text{V.35})$$

La surface de charge $f(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}^{vp})$ et la fonction viscoplastique $g_v(f)$ sont définies par (voir aussi [105]) :

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}^{vp}) &= q - H(\gamma^{vp})^\alpha - \sigma_0 \\ g_v(f) &= \frac{\sigma_0}{\kappa} \left(\frac{f(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}^{vp})}{\sigma_0} \right)^m \end{aligned} \quad (\text{V.36})$$

Les paramètres $H(\text{MPa})$, α désignent respectivement le module et l'exposant d'écrouissage, $\kappa(\text{MPa.s})$ et m le module et l'exposant viscoplastique. Les symboles q et γ^{vp} signifient la contrainte et la déformation viscoplastique équivalentes :

$$\begin{aligned} q &= \sqrt{\frac{3}{2} \mathbf{s} : \mathbf{s}}, \quad \mathbf{s} = \boldsymbol{\sigma} - \frac{\text{Tr}(\boldsymbol{\sigma})}{3} \boldsymbol{\delta} \\ \gamma^{vp} &= \sqrt{\frac{2}{3} \boldsymbol{\varepsilon}_d^{vp} : \boldsymbol{\varepsilon}_d^{vp}}, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_d^{vp} = \boldsymbol{\varepsilon}^{vp} - \frac{\text{Tr}(\boldsymbol{\varepsilon}^{vp})}{3} \boldsymbol{\delta} \end{aligned} \quad (\text{V.37})$$

La loi d'évolution de déformation viscoplastique définie dans (V.35) peut être réécrite comme suivante en développant la dérivation de la fonction de charge :

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{vp} = \frac{3}{2} g_v(f) \frac{\mathbf{s}}{q} = \mathbb{M}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}^{vp}) : \boldsymbol{\sigma} \quad (\text{V.38})$$

qui définit ainsi le tenseur de complaisance viscoplastique $\mathbb{M}$ comme le suivant :

$$\mathbb{M}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}^{vp}) = \frac{1}{2\rho} \mathbb{K} = \frac{3}{2} \frac{g_v(f)}{q} \mathbb{K} \quad (\text{V.39})$$

On obtient donc le module de cisaillement visqueux :

$$\rho = \frac{q}{3g_v(f)} = \frac{q\kappa}{3\sigma_0} \left(\frac{\sigma_0}{f(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}^{vp})} \right)^m \quad (\text{V.40})$$

Les simulations numériques sont ensuite effectuées sur ce matériau avec les paramètres viscoplastiques de la phase matrice donnés dans le tableau (V.1). Sur la figure (V.10) on constate une influence importante de la fraction volumique des inclusions f_i et de la vitesse de déformation appliquée sur la réponse de la courbe contrainte-déformation des essais de compression uniaxiale. Sous une vitesse de déformation constante, la contrainte déviatorique augmente par rapport à la fraction volumique des inclusions. En outre, on retrouve les résultats connus à partir des expériences selon lesquelles plus la vitesse de déformation est lente, plus les déformations sont importantes pour un même niveau de contrainte. L'effet des inclusions rigides est également introduit dans les essais de fluage uniaxiale sous les contraintes imposées $\Sigma_{33} = 4\text{MPa}$ et $\Sigma_{33} = 7\text{MPa}$ (voir Fig. V.11). Logiquement, on observe que plus la fraction volumique des inclusions augmente, plus les déformations viscoplastiques macroscopiques sont faibles. En plus, la contrainte imposée plus élevée conduit à un accroissement de déformation viscoplastique macroscopique.

V.4.2 Formulation viscoplastique de type Perzyna avec le critère de Drucker Prager

Dans un deuxième temps, on considère le cas où l'évolution de déformation viscoplastique de la matrice s'écrit :

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{vp} = \begin{cases} g_v(f) \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} & \text{si } f(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}^{vp}) > 0 \\ 0 & \text{si } f(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}^{vp}) \leq 0 \end{cases} \quad (\text{V.41})$$

La fonction $F(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}^{vp})$ désigne le potentiel plastique non associé à la fonction de charge $f(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}^{vp})$.

Ces deux fonctions s'écrivent de la façon suivante (critère de plasticité de Drucker Prager) :

$$f(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}^{vp}) = q + \alpha^{vp}(\gamma^{vp})(p - \sigma_0) \quad (\text{V.42})$$

$$F(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}^{vp}) = q + \beta^{vp}(\gamma^{vp})p \quad (\text{V.43})$$

Les paramètres α^{vp} et β^{vp} sont associés à la variable d'écrouissage γ^{vp} sous la forme exponentielle comme les suivantes (voir les travaux de J.F. Shao et coauteurs [25, 50, 51]) :

$$\alpha^{vp}(\gamma^{vp}) = \alpha_m^{vp} - (\alpha_m^{vp} - \alpha_0^{vp}) e^{-b\gamma^{vp}} \quad (\text{V.44})$$

$$\beta^{vp}(\gamma^{vp}) = \beta_m^{vp} - (\beta_m^{vp} - \beta_0^{vp}) e^{-b'\gamma^{vp}}$$

En dérivant le potentiel plastique par rapport à la contrainte, le taux de déformation $\dot{\epsilon}^{vp}$ peut être exprimé sous forme :

$$\dot{\epsilon}^{vp} = g_v(f) \left(\frac{3}{2} \frac{s}{q} + \frac{\beta^{vp}(\gamma^{vp})}{3} \delta \right) = g_v(f) \left(\frac{3}{2} \frac{s}{q} + \frac{\beta^{vp}(\gamma^{vp})}{3p} p \delta \right) = \mathbb{M}(\sigma, \epsilon^{vp}) : \sigma \quad (V.45)$$

avec le tenseur de complaisance viscoplastique qui est défini comme :

$$\begin{aligned} \mathbb{M}(\sigma, \epsilon^{vp}) &= \frac{1}{3\eta} \mathbb{J} + \frac{1}{2\rho} \mathbb{K} \\ \eta &= \frac{p}{\beta^{vp}(\gamma^{vp}) g_v(f)} = \frac{p \kappa}{\sigma_0 \beta^{vp}(\gamma^{vp})} \left(\frac{\sigma_0}{f(\sigma, \epsilon^{vp})} \right)^m \\ \rho &= \frac{q}{3g_v(f)} = \frac{q \kappa}{3\sigma_0} \left(\frac{\sigma_0}{f(\sigma, \epsilon^{vp})} \right)^m \end{aligned} \quad (V.46)$$

La fonction viscoplastique basée sur un critère de plasticité de Drucker Prager non associé avec écrouissage isotrope nous permet en effet de prendre en compte l'évolution de déformation viscoplastique volumique. De surcroît, la règle d'écoulement non associée permet dans ce cas de décrire une transition du comportement contractant au comportement dilatant du matériau. Les simulations numériques appliquées sur ce type de matériau sont présentées sur les figures (V.12 et V.13). Les paramètres du comportement viscoplastique de la phase matrice sont donnés dans le tableau (V.1). Comme dans le cas précédent du critère de plasticité de Von Mises, on retrouve une diminution de la déformation viscoplastique axiale en fonction de la fraction volumique des inclusions rigides. Sur la courbe de la déformation viscoplastique volumique de la phase matrice (cas $f_i = 0$), on constate un comportement fortement dilatant. La dilatanse viscoplastique est de moins en moins importante quand la fraction volumique de la phase rigide est plus grande. Ce type de résultat est conforme à l'intuition car, dans le modèle, la dilatanse n'est due qu'à la matrice et non aux inclusions. On notera que la diminution de vitesse de fluage avec une augmentation de fraction volumique d'inclusions élastiques a été observée, sur le même matériau par [51, 49] en suivant une approche incrémentale par champ moyen.

TAB. V.1: Les paramètres viscoplastiques de la phase matrice

Critère de plasticité de Von Mises	$H = 26.1\text{MPa}, \alpha = 0.3985, \sigma_0 = 1\text{MPa},$ $\kappa = 10^9\text{MPa.s}, m = 2.5$
Critère de plasticité de Drucker Prager	$\alpha_0^{vp} = 0.05, \alpha_m^{vp} = 5.2, b = 50, \beta_0^{vp} = -0.6, \beta_m^{vp} = 0.3,$ $b' = 400, \sigma_0 = 1\text{Mpa}, \kappa = 10^9\text{MPa.s}, m = 2.5$

V.5 Comparaison avec la solution de la méthode des éléments finis

Ce paragraphe a pour but d'effectuer une première validation de l'approche à variables internes en comparant ses prédictions du comportement élasto-viscoplastique d'un matériau hétérogène biphasique avec la solution de référence obtenue par la méthode des éléments finis (MEF). Le matériau considéré est renforcé par des inclusions élastiques quasi-rigides alors que le comportement élasto-viscoplastique de la phase matrice est de type Perzyna avec le critère plasticité de Von Mises. Pour des raisons de pertinence de la comparaison avec la MEF, une modification du critère plasticité a été réalisée. Plus précisément, la fonction de charge $f(\boldsymbol{\sigma}, \gamma^{vp})$ et la fonction viscoplastique $g_v(f)$ sont redéfinis comme :

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}^{vp}) &= q - R(\gamma^{vp}) \\ R(\gamma^{vp}) &= \sigma_0 + R_0 \cdot \gamma^{vp} + R_\infty \left(1 - e^{-b \cdot \gamma^{vp}}\right) \\ g_v(f) &= \kappa \left(\frac{f(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}^{vp})}{R(\gamma^{vp})} \right)^m \end{aligned} \quad (\text{V.47})$$

Par ailleurs, les paramètres utilisés dans l'approche micromécanique et la méthode des éléments finis sont choisis identiques avec : $m = 0.8$, $\kappa = 0.01$, $\sigma_0 = 1.2185\text{MPa}$, $R_0 = 572.47\text{MPa}$, $R_\infty = 14.3151\text{MPa}$ et $b = 252.059$. Les valeurs des propriétés élastiques sont respectivement $E_m = 3\text{GPa}$, $\nu_m = 0.3$ pour la matrice et $E_i = 95\text{GPa}$, $\nu_i = 0.3$ pour les inclusions.

Dans la méthode des éléments finis, le matériau est considéré comme un empilement de cellules élémentaires cylindriques à base hexagonale. Le centre de chaque cellule élémentaire est occupé par le renfort sphérique. La cellule élémentaire cylindrique à base hexagonale est assimilée à un cylindre à base circulaire (figure V.9). Voir également [51, 49] pour ce type de modélisation dans un matériau similaire.

Le comportement mécanique macroscopique de ces systèmes est fondé sur l'introduction d'un élément représentatif dans l'espace périodique. D'ailleurs, on suppose que chaque V.E.R se déforme d'une manière répétitive, identique à ses voisins. Les conditions de symétrie sont utilisées pour limiter le V.E.R au 1/4 de la cellule axisymétrique.

Les conditions aux limites sont choisies pour imposer que les bords latéral et supérieur restent droits alors que les deux bords sont maintenus :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{sur } y = 0 & \underline{u}_y = 0 \\ \text{sur } x = 0 & \underline{u}_x = 0 \\ \text{sur } x = R & \underline{u}_x = cte \end{array} \right. \quad (\text{V.48})$$

Le chargement extérieur correspond à un déplacement imposé sur le bord supérieur $\underline{u}_y = d$ pour simuler l'essai de compression. Les simulations de cette méthode de référence sont effectuées sur le code des éléments finis ANSYS (voir par exemple les travaux de Belayachi et coauteurs [6, 3, 2]). Sur les figures (V.14 et V.15) qui présentent la comparaison des résultats obtenus par l'approche micromécanique et la méthode des éléments finis, on constate une bonne concordance entre ces prédictions dans le cas de faibles fractions volumiques de particules ($f_i = 10\%$). Cependant, pour la valeur plus importante de fraction des inclusions rigides ($f_i = 20\%$), ces résultats sont différents si la vitesse de déformation imposée est plus lente.

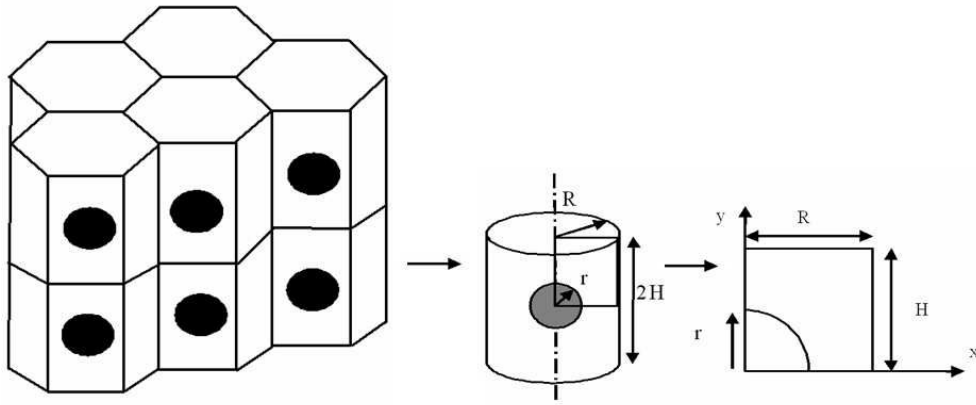


FIGURE V.9: Réseau périodique d'hexagones renforcés par des inclusions sphériques. Approximation de la cellule élémentaire cylindrique à une cellule 2D axisymétrique

V.6 Comportement différé de l'argilite de M/H-M

Les premières études du comportement différé de l'argilite de M/H-M par l'approche micromécanique ont été effectuées par Ariane Guéry [49] en utilisant une méthode dite incrémentale modifiée. Dans son modèle Ariane Guéry a décrit le comportement élasto-viscoplastique de la matrice argileuse de type Perzyna avec le critère de plasticité de Drucker Prager (V.4.2). En considérant les inclusions de quartz et de calcite quasi rigides, on a adopté l'hypothèse que les déformations élastiques dans la matrice et dans les inclusions sont plus petites que celles viscoplastiques dans la matrice. D'ailleurs en s'appuyant sur des expériences qui ont montré que les déformations irré-

versibles obtenues après un déchargement représentent la majeure partie des déformations totales, on a fait l'hypothèse que la déformation élastique macroscopique soit négligée par rapport à celle viscoplastique. Ainsi, la déformation macroscopique est supposée de nature viscoplastique et est égale à la moyenne des déformations viscoplastiques locales :

$$\dot{\mathbf{E}} \cong \dot{\mathbf{E}}^{vp} \cong \langle \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{vp} \rangle = \sum_r f_r \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_r^{vp} \quad (\text{V.49})$$

Malgré ces hypothèses retenues, l'approche incrémentale modifiée permet de prédire le comportement différé de l'argilite de M/H-M. Cette approche a été validée à l'aide de comparaisons avec des calculs par éléments finis et de nombreuses données expérimentales.

Dans ce travail, les simulations des essais de fluage uniaxial et triaxial avec différentes pressions de confinement sont recalculées dans le cadre de l'approche à variables internes et puis elles sont comparées avec celles de la méthode incrémentale modifiée. Les paramètres du comportement élasto-viscoplastique de la phase matrice argileuse sont repris comme dans le travail de Ariane Guéry [51] avec : $E_a = 3\text{GPa}$, $\nu_a = 0.3$, $\alpha_0^{vp} = 0.05$, $\alpha_m^{vp} = 0.95$, $b = 150$, $\beta_0^{vp} = 1.5$, $\beta_m^{vp} = 0.3$, $b' = 400$, $\sigma_0 = 14\text{MPa}$, $\kappa = 5.10^9\text{MPa.s}$, $m = 2.5$.

La comparaison des approches incrémentale modifiée (Guéry) et à variables internes est présentée sur les figures (V.16 à V.21). On constate une bonne concordance entre les prédictions de ces deux approches. On remarque que dans la méthode à variables internes, les simulations des essais de fluage s'effectuent dans le cas asymptotique de viscoplasticité pur où la déformation macroscopique totale est égale à celle macroscopique viscoplastique et donc égale à la moyenne des déformations viscoplastiques locales. Ces deux approches reposant sur la même hypothèse nous amènent ainsi à des résultats concordants. L'hypothèse V.49 faite dans [51, 49] est justifiée dans le cas des argilites car les forts contrastes de raideur élastique entre la matrice argileuse et les inclusions de quartz et/ou de calcite permet de négliger les contributions des inclusions aux déformations différées macroscopiques moyennes. L'hypothèse d'inclusions rigides fournit des résultats très proches. Dans le cas de milieux poreux, non abordés dans ce chapitre, l'hypothèse V.49 serait à réexaminer.

V.7 Conclusion

Le comportement élasto-viscoplastique des milieux hétérogènes a été étudié dans ce dernier chapitre par la méthode de changement d'échelle. L'étude bibliographique sur différentes approches d'homogénéisation élasto-viscoplastique des matériaux composites nous a conduit au choix de la méthode dite à variables internes grâce à sa simplicité au plan numérique. En effet, une modification de la version originale de cette approche à variables internes a été effectuée en reposant sur l'approximation explicite de Mori-Tanaka. L'adaptation de ce schéma se justifie en comparant avec

un modèle de référence de type héréditaire. En général, on trouve une concordance des résultats prédictifs des deux approches pour la simulation du comportement d'un matériau viscoélastique linéaire avec de faibles fractions volumiques de particules. La méthodologie adoptée s'est ensuite enrichie par l'introduction du modèle de Perzyna. La validation du modèle dans ce dernier cas est effectuée en comparant avec la solution de référence par éléments finis. Cette comparaison confirme la capacité prédictive de la procédure développée pour les matériaux renforcés par des inclusions rigides. Nous avons insisté plus particulièrement dans cette dernière partie sur la simulation des essais de fluage des roches argileuses dont les inclusions sont élastiques et quasi rigides.

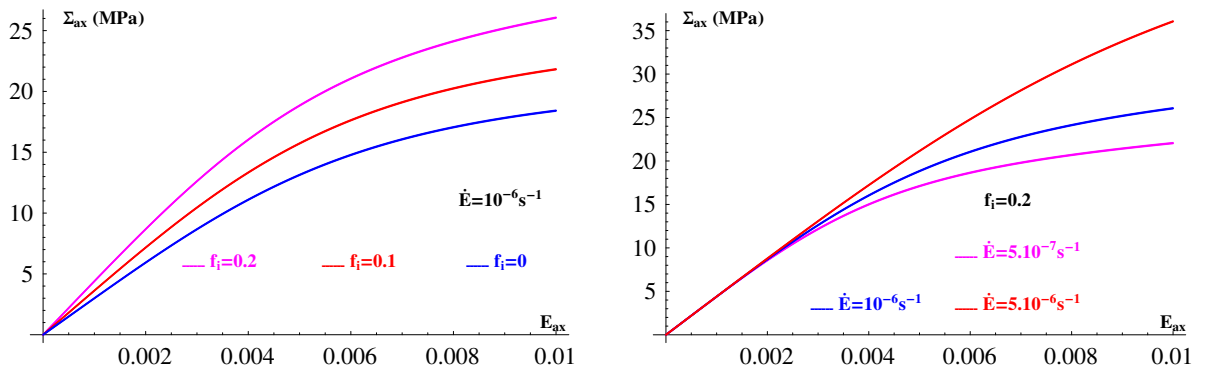


FIGURE V.10: Simulation des essais de compression uniaxiale : Influence de la fraction volumique des inclusions f_i et de la vitesse de déformation sur le comportement élasto-viscoplastique du matériau (critère de plasticité de Von Mises)

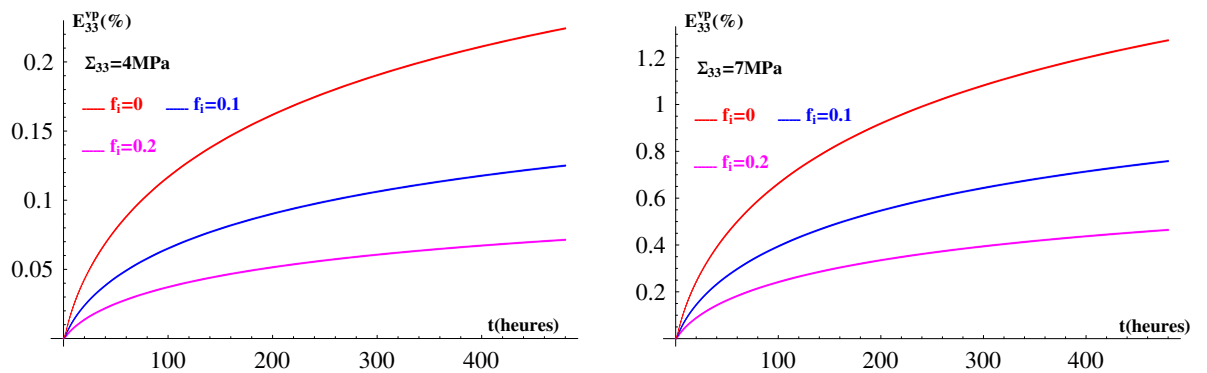


FIGURE V.11: Simulation des essais de fluage uniaxiale : Influence de la fraction volumique des inclusions f_i et de la contrainte imposée sur le comportement élasto-viscoplastique du matériau (critère de plasticité de Von Mises)

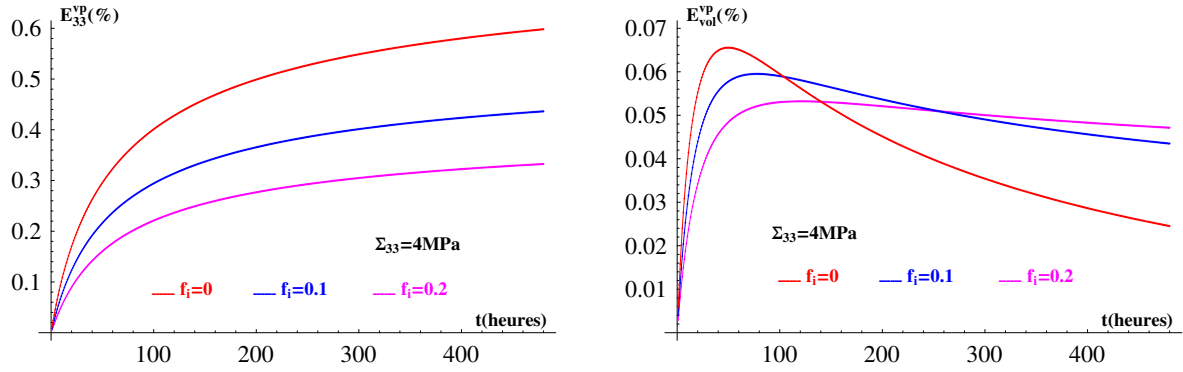


FIGURE V.12: Simulation des essais de fluage uniaxiale (monopalier) : Influence de la fraction volumique des inclusions f_i sur le comportement élasto-viscoplastique du matériau (critère de plasticité de Drucker Prager)

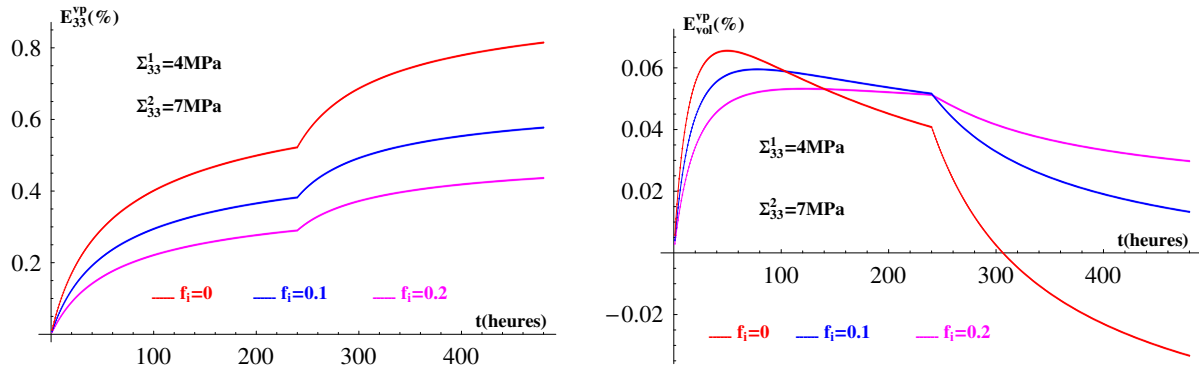


FIGURE V.13: Simulation des essais de fluage uniaxiale (multipalier) : Influence de la fraction volumique des inclusions f_i sur le comportement élasto-viscoplastique du matériau (critère de plasticité de Drucker Prager)

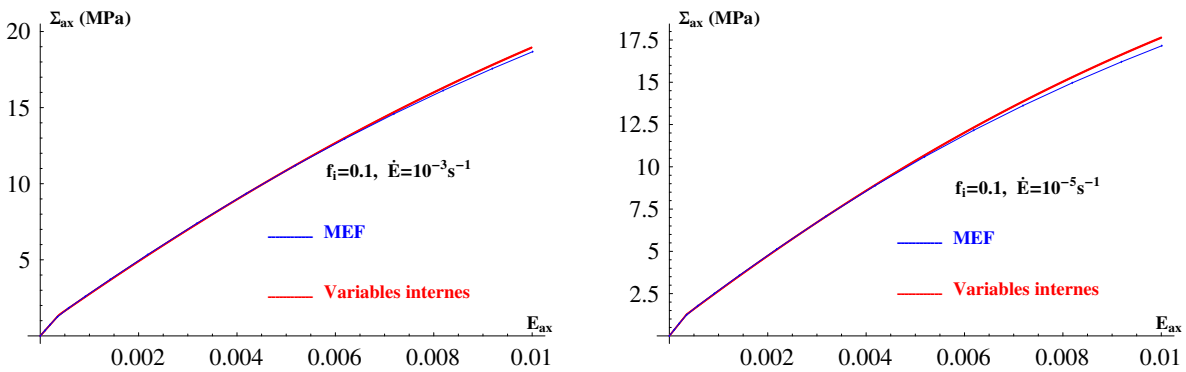


FIGURE V.14: Essai de compression uniaxial à vitesse de déformation imposée constante - comparaison entre l'approche à variables internes et la méthode des éléments finis ($f_i = 0.1$)

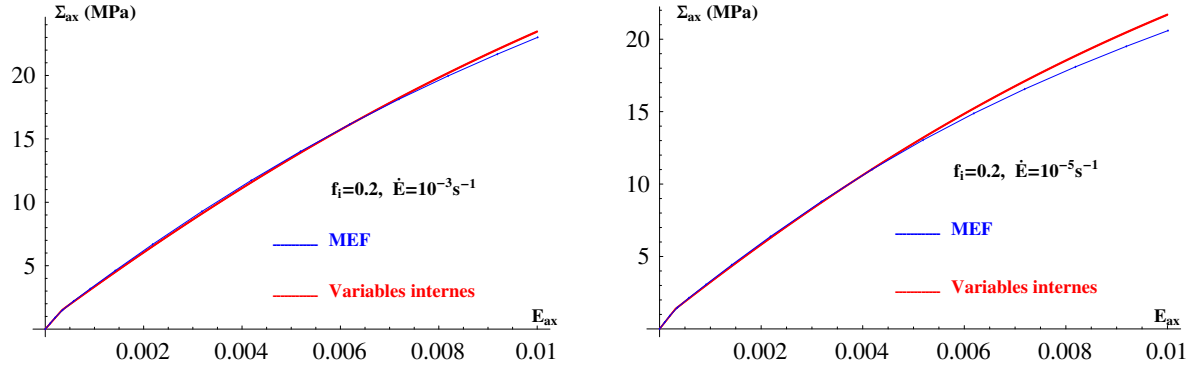


FIGURE V.15: Essai de compression uniaxial à vitesse de déformation imposée constante - comparaison entre l'approche à variables internes et la méthode des éléments finis ($f_i = 0.2$)

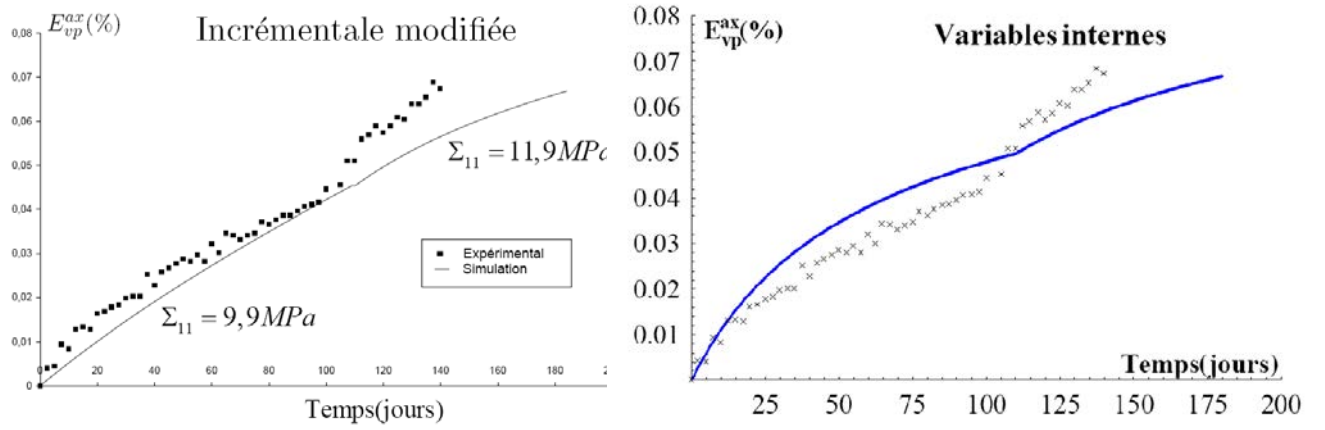


FIGURE V.16: Simulation d'essai de fluage uniaxial de l'argilite de M/H-M (échantillon EST 205 GII - 05481 - 01 : $f_{ca} = 36.2(\%)$, $f_{qu} = 33.4(\%)$)

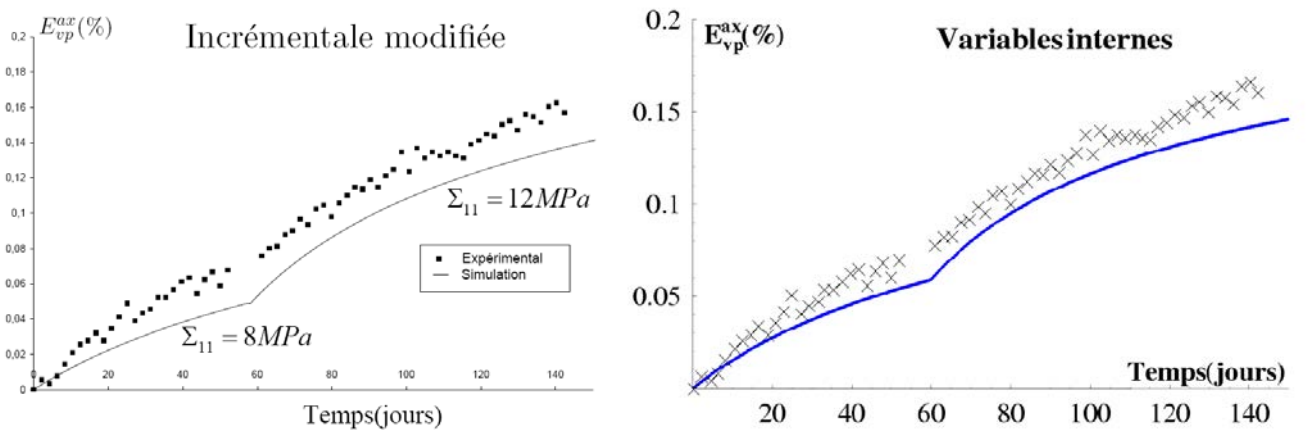


FIGURE V.17: Simulation d'essai de fluage uniaxial de l'argilite de M/H-M (échantillon EST 205 GIV - 05761 - 03 : $f_{ca} = 20.4(\%)$, $f_{qu} = 23.4(\%)$)

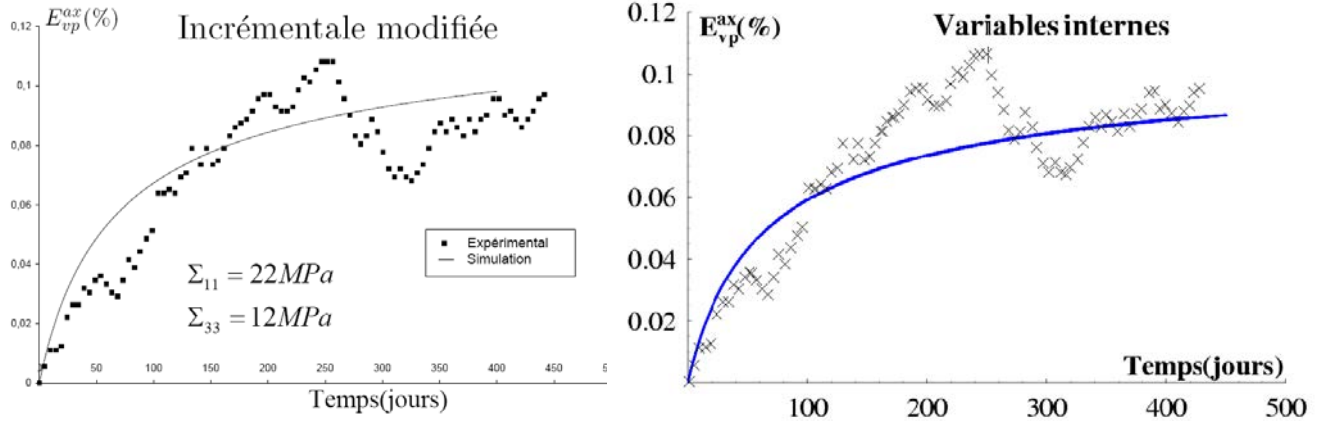


FIGURE V.18: Simulation d'essai de fluage triaxial de l'argilite de M/H-M
(échantillon EST 205 5697 - 2 : $f_{ca} = 21.7(\%)$, $f_{qu} = 21.3(\%)$)

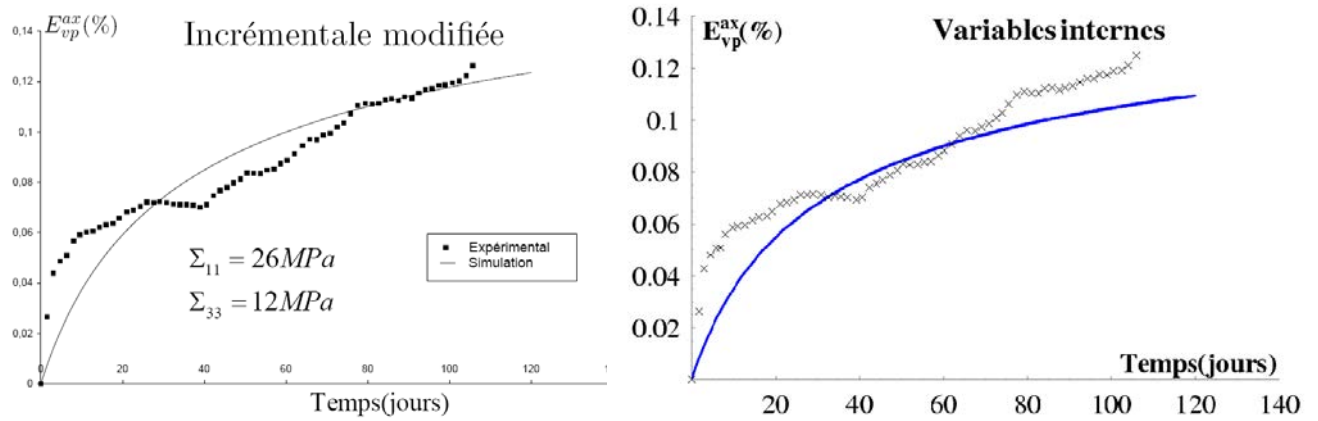


FIGURE V.19: Simulation d'essai de fluage triaxial de l'argilite de M/H-M
(échantillon EST 205 5697 - 7 : $f_{ca} = 21.7(\%)$, $f_{qu} = 21.3(\%)$)

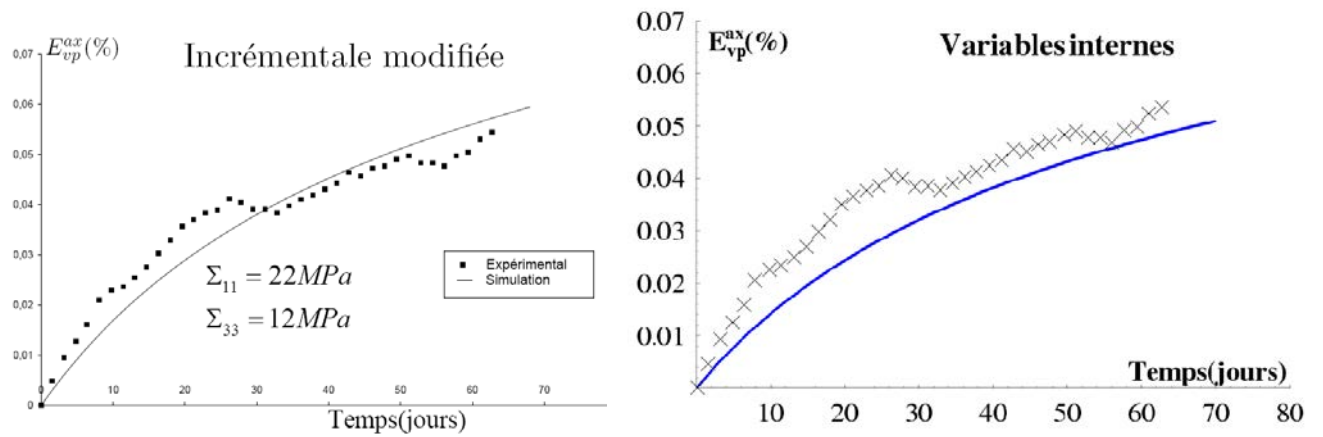


FIGURE V.20: Simulation d'essai de fluage triaxial de l'argilite de M/H-M
(échantillon EST 205 5698 - 5 : $f_{ca} = 21.9(\%)$, $f_{qu} = 21.2(\%)$)

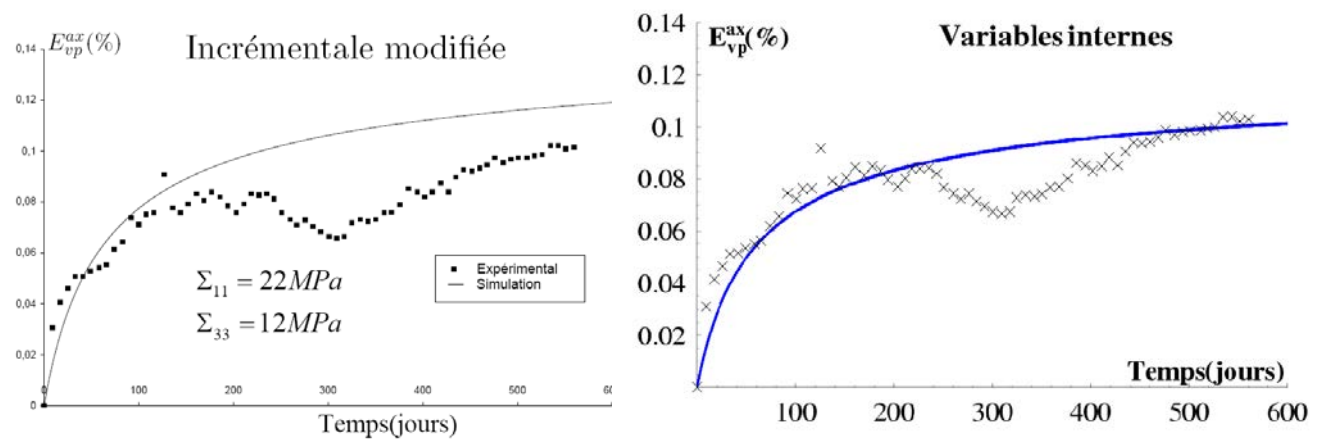


FIGURE V.21: Simulation d'essai de fluage triaxial de l'argilite de M/H-M
 (échantillon EST 205 5721 : $f_{ca} = 21.6(\%)$, $f_{qu} = 17.4(\%)$)

Conclusion

8 Conclusions

La modélisation du comportement thermo-hydro-mécanique linéaire et du comportement mécanique non linéaire des roches argileuses par l'approche micromécanique a été élaborée dans ce travail. En effet la réflexion sur la prédiction du comportement des argilites doit être menée sur plusieurs fronts : théorique pour identifier les lois de comportement micromécanique de chaque phase, expérimental pour identifier les paramètres de ces lois et numérique pour prendre en compte l'un et l'autre dans les simulations. Les observations microstructurales des argilites comme celles de Meuse/Haute-Marne nous ont amené à les schématiser comme des matériaux hétérogènes multiphasiques. D'après ce modèle, leur Volume Élémentaire Représentatif comporte une matrice poreuse entourant des inclusions sphériques de quartz et de calcite. La phase matrice poreuse elle-même est constituée d'une matrice argileuse et d'un espace poreux lui même modélisé, de manière simplifiée, par une classe unique d'inclusions sphéroïdales aplaties. Un modèle d'homogénéisation en deux étapes a été ensuite développé pour représenter, en première approche, les roches poreuses composites de type argilites.

L'échelle de référence choisie pour développer le modèle est l'échelle macroscopique des essais de laboratoire (niveau 2 de notre modèle, et niveau 4 du modèle général à quatre étapes présentés par Ulm et co-auteurs [130]). Deux informations microstructurales sont introduites : les inclusions solides minérales de quartz et calcite (représentées par des sphères réparties de manière isotrope) et l'espace poreux représenté par une classe unique d'ellipsoïdes aplaties. Ce modèle suppose une séparation d'échelle entre les pores et les inclusions de quartz et solide, ce qui revient à négliger une fraction de la porosité (environ 10% de la porosité totale), dite *macroporosité*, pour laquelle l'hypothèse de séparation d'échelle avec les inclusions de quartz et calcite (de taille micrométrique) n'est pas vérifiée. L'espace poreux est caractérisé par deux paramètres, le coefficient de forme des ellipsoïdes (rapport hauteur/diamètre) et le degré d'alignement préférentiel de leur orientation autour de l'axe de symétrie du matériau.

Les outils d'homogénéisation ont été présentés dans le premier chapitre à travers l'étude de la

conductivité thermique effective des argilites. Différents schémas d'estimation des propriétés homogénéisées reposant sur la solution du problème d'Eshelby ont été également abordés. Des simulations dans le contexte d'un milieu poreux isotrope partiellement saturé ont mis en évidence la sensibilité de la propriété thermique effective à la porosité, au degré de saturation, à la morphologie des inclusions des pores et à la composition minéralogique. Plus particulièrement, la conductivité thermique homogénéisée augmente en fonction du rapport d'aspect des pores ε et des compositions minéralogiques de quartz et de calcite. Une comparaison des prédictions des différents schémas d'estimation nous a permis de visualiser l'influence du schéma d'homogénéisation sur cette propriété thermique homogénéisée. L'écart entre ces prédictions est de plus en plus important quand la porosité du milieu est plus élevée ou au contraire quand le rapport d'aspect des inclusions poreuses est plus faible.

L'enrichissement du modèle proposé pour les argilites à matrice argileuse présente un comportement isotrope transverse et dont la distribution orientée en espace des inclusions poreuses a fait l'objet du deuxième chapitre. Plus concrètement, la répartition spatiale des inclusions poreuses a été supposée symétrique autour de l'axe vertical du repère global associé à la matrice argileuse et pu être caractérisée par une fonction de distribution en orientation (ODF). Un point important dans ce modèle enrichi est d'évaluer les tenseurs de concentration du problème d'inhomogénéité dans lequel l'inclusion est orientée arbitrairement dans la matrice isotrope transverse. Dans ce travail, ces tenseurs ont été déterminés numériquement en utilisant la fonction de Green. L'impact des deux sources d'anisotropie (la répartition spatiale des inclusions poreuses ainsi que l'anisotropie de la matrice argileuse) a été mis en évidence. Nous avons remarqué qu'une réduction du coefficient de forme des pores se traduit par un accroissement du degré d'anisotropie des propriétés effectives dans le cas où les pores sont alignés ou orientés dans la matrice argileuse isotrope transverse. En revanche le degré d'anisotropie de la conductivité macroscopique décroît si la fraction volumique d'inclusions minérales augmente. Ce résultat est logique car les inclusions de quartz et calcite sont des matériaux isotropes, de forme sphérique, répartis de manière isotrope, dont la présence tend à *isotropiser* le milieu. Nous avons appliqué par la suite la technique d'homogénéisation en deux étapes pour évaluer le tenseur de la conductivité thermique effective des argilites comme celle de Meuse/Haute-Marne et celle de Mon Terri. Les confrontations aux données expérimentales ont montré que les principales tendances expérimentales observées à l'échelle macroscopique sont correctement reproduites par le modèle.

L'application du modèle d'homogénéisation à deux étapes à l'estimation des caractéristiques effectives thermoporoélastiques linéaires des roches argileuses saturées, présentée dans le troisième chapitre, a mis en évidence l'impact de la forme des pores et de leur orientation préférentielle.

Les propriétés macroscopiques sont d'autant plus sensibles à la forme des pores que ceux-ci sont aplatis. Dans le cas des argilites, le coefficient de forme des pores peut être approché dans le domaine $0.01 \leq \varepsilon \leq 0.1$, domaine dans lequel la sensibilité est forte. Le cas limite des pores aplatis ($\varepsilon \rightarrow 0$) est bien connu dans la littérature, et correspond au cas limite de fissures circulaires [33]. L'équivalence entre le problème de la fissure et du cas limite d'une inclusion ellipsoïdale à faible coefficient de forme a d'ailleurs été démontrée par [30] et [33].

Les résultats présentés dans le mémoire, pour des pores ellipsoïdaux circulaires de coefficient de forme compris entre $\varepsilon \rightarrow 0$ et $\varepsilon = 1$, complètent les cas limites bien connus dans la littérature : fissures penny shape et pores sphériques [33, 125]. Dans le cas d'une matrice isotrope, l'impact de la forme des pores et de leur orientation sur les propriétés élastiques a été également abondamment étudiée par Kachanov, Sevostianov et co-auteurs [70] [71]).

La seconde partie du mémoire est consacrée à l'étude du comportement non linéaire des roches argileuses. Sur la base de résultats expérimentaux macroscopiques, obtenus à partir d'essais géomécaniques de type triaxiaux déviatoriques à court terme et long terme (fluage), des modèles de comportement élastoplastiques (chapitre 4) et élastoviscoplastiques (chapitre 5) ont été développés. Comme indiqué précédemment, la modélisation micromécanique de la matrice argileuse n'est pas abordée dans ce mémoire. A titre d'exemple, les mécanismes de glissement entre feuillets argileux, abondamment étudiés actuellement par d'autres équipes de recherche (équipe de L. Dormieux notamment), sont certainement pour une grande partie à l'origine du comportement irréversible observé à l'échelle macroscopique, tant pour le comportement à court terme (plasticité), que long terme (fluage). Les modèles présentés dans ce mémoire sont *macroscopiques* relativement à la matrice argileuse. Par rapport aux modèles macroscopiques phénoménologiques existants, les informations supplémentaires microstructurales prises en compte et introduites dans l'approche *micro-macro* sont essentiellement la présence d'inclusions minérales (quartz et calcite) et sous une forme très simplifiée la porosité.

Une autre partie dans ce travail vise à étudier le comportement mécanique non linéaire des argilites qui a été interprété à partir des tests triaxiaux comme la conséquence des mécanismes de plasticité et d'endommagement. Le mouvement relatif entre les feuillets d'argile constaté à l'échelle inférieure a été pris pour l'origine physique du problème non linéaire traité. Cela nous a amené à attribuer un comportement élasto-plastique à la matrice argileuse. Dans le chapitre 4, la matrice est supposée élastoplastique. Un mécanisme de décohésion aux interfaces entre les grains de quartz et de calcite et la matrice argileuse, a été pris en compte comme origine de l'endommagement macroscopique observés sur la base d'essais triaxiaux (méthode des interfaces lisses considérées par Barthélémy [1]).

Cependant, pour ne pas compliquer le problème considéré, un modèle simplifié a été proposé pour tenir compte de l'effet du mécanisme de décohésion interfaciale. En matière de la méthode d'homogénéisation dans le domaine non linéaire, nous avons repris le concept du matériau linéaire de comparaison produit par la linéarisation des lois de comportement locales des constituants. Dans le cadre d'homogénéisation par des champs moyens, différentes formulations de linéarisation ont été considérées et comparées par des simulations numériques. L'extension de la méthode sécante modifiée [126] à l'homogénéisation en deux étapes nous a permis de simuler le comportement élasto-plastique-endommageable des roches argileuses. Les validations expérimentales ont confirmé la pertinence du modèle développé en caractérisant le comportement contractant des argilites (cas des essais de compression triaxiale avec le confinement élevé). En revanche, la modélisation n'a pas pu refléter l'évolution dilatante de la déformation volumique comme dans l'essai de compression uniaxiale. Elle nous amène à poursuivre les efforts de recherche pour des modèles plus efficaces qui permettront d'une part d'être applicable pour les différents trajets de sollicitations multiaxiaux et d'autre part de rendre compte de l'effet de dilatance plastique.

Le dernier chapitre a été consacré à modéliser le comportement différé des matériaux hétérogènes renforcés par des inclusions quasi rigides. Pour cela, on a appliqué la méthode dite à variables internes qui est basée sur une démarche incrémentale caractérisée par une dépendance instantanée de la propriété d'hérédité par rapport à des variables décrivant l'état actuel du matériau. La procédure développée a été validée par comparaison avec l'approche héréditaire de référence pour la simulation du comportement viscoélastique linéaire des milieux biphasés. L'enrichissement du modèle pour les milieux multiphasiques a été également effectué et a été ensuite appliqué pour simuler les essais de fluage de l'argilite de Meuse/Haute-Marne. En comparaison avec les résultats déterminés par l'approche incrémentale modifiée de Guéry [51, 49], on a constaté une bonne concordance entre ces deux approches.

L'approche micromécanique avec la mise en place de la procédure d'homogénéisation en deux étapes a fait preuve de son aptitude à décrire des réponses linéaires et non linéaires des roches argileuses.

9 Perspectives

Les principales perspectives d'enrichissement des modèles présentés dans ce mémoire portent sur les échelles inférieures, et plus précisément la matrice argileuse et la porosité multi-échelle. En relation avec les nombreux travaux réalisés dans le domaine actuellement, tant théoriques qu'expérimentaux (observation à l'échelle nanométrique, essais de nano-indentation et micro-indentation etc.), une ou des étapes d'homogénéisation supplémentaires pourront être rajoutées pour remonter

plus précisément, par l'approche d'homogénéisation, les mécanismes physiques caractérisés à ces échelles inférieures.

Relativement aux modèles non linéaires présentés, des questions restent ouvertes

1. Les mécanismes d'endommagement et de *dilatance* observés sur essais macroscopiques n'ont pas été pris en compte. De même dans ce travail la prise en compte de l'endommagement dans le comportement de l'argilite de M/H-M a été réalisée d'une façon simplifiée ayant comme objectif la compréhension des principaux phénomènes et le guidage des modèles macroscopiques. La difficulté majeure d'une telle approche reste la prise en compte du phénomène de la dilatance associé à l'avancement de la fissuration. Dans cette voie, la nucléation des nouvelles fissures sous contraintes mérite d'être étudiée plus en détail comme étant une des sources possibles de la dilatance. L'introduction de fissures dilatantes dans la matrice (dite argileuse) semble une voie prometteuse pour prendre en compte le phénomène de dilatance dû aux frottements comme dans les travaux récents de Kondo et al. [142, 143] et de Barthélémy [1].
2. Le comportement viscoplastique de l'argilite de M/H-M et sa modélisation sont également des sujets à revoir et à remettre en perspective. En fait dans le cadre de notre travail et pour l'échelle choisie de description de la structure, échelle définie principalement en fonction du niveau des connaissances et de la caractérisation de la microstructure, la viscosité de la matrice argileuse apparaît comme une caractéristique intrinsèque. A d'autres échelles il paraît cependant que cette viscosité est en grande partie liée à différents états de l'eau au sein de l'argilite (Dormieux et al. [34]). Une connaissance plus profonde et surtout une caractérisation plus fine du matériau à des échelles inférieures, créeraient les conditions pour une approche microscopique plus globale multi échelle qui expliquerait entre autre les variations de cette viscosité avec la saturation.

Du point de vue méthodologique, bien que très efficace et élégante dans son application, l'approche de homogénéisation par tenseurs d'Eshelby, est mise en difficulté lorsqu'il s'agit de prendre en compte les déformations (visco)plastiques que rappelons le, sont non uniformes.

Les différentes approches, notamment celle du Milieu Linéaire de Comparaison (MLC), tentent, avec un certain succès de palier de ces difficultés. Il ne reste pas moins que pour la validation de telles approches on fait appel aux méthodes numériques, ce qui montre en soit même une voie de travail future importante qui n'a été abordée que très peu (voir chapitre 5) dans le présent travail. Bien que d'une portée quasiment universelle, de point de vue pratique ces méthodes semblent accessibles et efficaces particulièrement dans le cas des milieux périodiques, où in fine un problème simple peut être obtenu. Il est clair que notamment pour les géomatériaux, l'hypothèse de

la périodicité n'est pas forcément toujours acceptable et un passage vers des méthodes de homogénéisation des milieux aléatoires sera nécessaire. En principe, on peut utiliser toujours des codes aux éléments finis, à l'instar de ce qui a été fait dans le chapitre 5. Cependant on se heurte rapidement aux problèmes de représentativité de la cellule aléatoire homogénéisée et surtout de la description des frontières des différentes phases via un maillage. Généralement cela conduit soit dans un maillage de mauvaise qualité, soit à un maillage (extrêmement) volumineux. Une des pistes des travaux futurs, serait alors l'utilisation des méthodes sans maillage adaptées aux problèmes de l'homogénéisation numérique (Bechet, Möes [29, 94]).

Bibliographie

- [1] J. F. Barthelemy. *Approche micromécanique de la rupture et de la fissuration dans les géomatériaux*. PhD thesis, ENPC de Paris, Paris, 2005.
- [2] N. Belayachi. *Analyse du Comportement des Polymères Chocs avec la prise en compte de l'endommagement par cavitation*. PhD thesis, Université de Lille I, Lille, 2006.
- [3] N. Belayachi, N. Benseddiq, and M. Naït-Abdelaziz. Behaviour of the heterogeneous glassy polymers : Computation modelling and experimental approach. *Compos. Scienc. and Tech.*, 68 :367–375, 2008.
- [4] A. Benhamida, I. Djéran-Maigre, H. Dumontet, and S. Smaoui. Clay compaction modelling by homogenization theory. *Int. Jour. of Rock Mech. and Mining Scien.*, 42 :996–1005, 2005.
- [5] A. Benhamida and H. Dumontet. Etude micromécanique du comportement de matériaux hétérogènes par une approche itérative. In *Proceedings of 6th Colloque National en Calcul des Structures*, pages 523–530. Giens, Hermes Editor, 2003.
- [6] N. Benseddiq, N. Belayachi, and M. Naït-Abdelaziz. Multiscale approach to the behaviour and damage of the heterogeneous elastic-viscoplastic materials. *Theo. Appli. Frac. Mech.*, 46 :15–25, 2006.
- [7] S. Berbenni. *Elastoviscoplasticité des aciers polycristallins : Modélisation micromécanique et physique. Application au comportement dynamique et à l'effet Bake-Hardening*. PhD thesis, ENSAM de Metz, Metz, 2002.
- [8] S. Berbenni, V. Favier, and M. Berveiller. Impact of the grain size distribution on the yield stress of the heterogeneous materials. *Inter. Jour. of Plast.*, 23 :114–142, 2007.
- [9] S. Berbenni, V. Favier, X. Lemoine, and M. Berveiller. Micromechanical modeling of the elastic-viscoplastic behavior of polycrystalline steels having different microstructures. *Materials Science and Engineering*, 372 :128–136, 2004.
- [10] J. G. Berryman. Generalization of Eshelby's formula for a single ellipsoidal elastic inclusion to poroelasticity and thermoelasticity. *Phys. Rev. Letters*, 79(6) :1142–1145, 1997.

- [11] J. G. Berryman. Effective medium theories for multicomponent poroelastic composites. *Jour. of Engin. Mech*, 132(5) :519–531, 2006.
- [12] J. G. Berryman and P. A. Berge. Critique of two explicit schemes for estimating elastic properties of multiphase composites. *Mech. Mater.*, 22(2) :149–164, 1996.
- [13] J. G. Berryman and G. W. Milton. Exact results in linear thermomechanics of fluid-saturated porous media. *Appl. Phys. Lett*, 61 :2030–2032, 1992.
- [14] M. Bornert. Homogénéisation des milieux aléatoires : bornes et estimations. In *Homogénéisation en mécanique des matériaux I. Matériaux aléatoires élastiques et milieux périodiques*, pages 133–222. Hermes, Paris, 2001.
- [15] M. Bornert, T. Bretheau, and P. Gilormini. *Homogénéisation en mécanique des matériaux*. Hermes, Paris, 2001.
- [16] R. Brenner, O. Castelnau, and L. Badea. Mechanical field fluctuations in polycrystals estimated by homogenization techniques. *Proc. R. Soc. Lond.*, 460 :3589–3612, 2004.
- [17] R. Brenner, O. Castelnau, and P. Gilormini. A modified affine theory for the overall properties of nonlinear composites. *C.R. Acad. Sci. Paris*, 329(Série II b) :649–654, 2001.
- [18] R. Brenner and R. Masson. Improved affine estimates for nonlinear viscoelastic composites. *Eur. J. Mech. A/Solids*, 24 :1002–1015, 2005.
- [19] R. Brenner, R. Masson, O. Castelnau, and A. Zaoui. A “quasi-elastic” affine formulation for the homogenised behaviour of nonlinear viscoelastic polycrystals and composites. *Eur. J. Mech. A/Solids*, 21 :943–960, 2002.
- [20] J. L. Chaboche and P. Kanouté. Sur les approximations “isotrope” et “anisotrope” de l’opérateur tangent pour les méthodes tangentés incrémentale et affine. *C. R. Mécanique*, 331 :857–864, 2003.
- [21] J. L. Chaboche, P. Kanouté, and A. Roos. On the capabilities of mean-field approaches for the description of plasticity in metal matrix composites. *Inter. Jour. of Plast.*, 21 :1409–1434, 2005.
- [22] J. L. Chaboche, S. Kruch, J. F. Maire, and T. Pottier. Towards a micromechanics based inelastic and damage modeling of composites. *International Journal of Plasticity*, 17 :411–439, 2001.
- [23] T. Chen and H. Y. Kuo. On linking n-dimensional anisotropic and isotropic Green’s function for infinite space, half-space, bimaterial, and multilayer for conduction. *Int. J. Sol. Struct.*, 42(3-4) :4099–4114, 2005.

-
- [24] A. S. Chiarelli. *Etude expérimentale et modélisation du comportement mécanique de l'argilite de l'Est*. PhD thesis, Université Lille 1, Lille, 2000.
- [25] A. S. Chiarelli, Shao J. F., and N. Hoteit. Modelling of elastic - plastic damage behaviour of a claystone. *Int. J. Plasticity*, 19 :23–45, 2003.
- [26] R. M. Christensen. *Mechanics of Composite Materials*. John Wiley and Sons, New York, 1979.
- [27] C. Clauser and E. Huenges. Thermal conductivity of Rocks and Minerals. in : A Handbook of Physical Constants : Rock Physics and Phase Relations, vol.3, ed. Tom Ahrens, The American Geophysical Union, 105-126, 1995.
- [28] N. Conil, I. Djeran-Maigre, R. Cabrillac, and K. Su. Thermodynamics modelling of plasticity and damage of argillite. *C. R. Mecanique*, 332 :841–848, 2004.
- [29] C. Daux, N. Moës, J. Dolbow, N. Sukumar, and T. Belytschko. Arbitrary branched and intersecting cracks with the eXtended Finite Element Method. *Int. J. Num. Meth. Engin.*, 48 :1741–1760, 2000.
- [30] V. Deudé. *Non linéarités géométriques et physiques dans les milieux poreux : apport des méthode de changement d'échelle*. PhD thesis, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, Paris, 2002.
- [31] I. Doghri and A. Ouaar. Homogenization of two-phase composite materials and structures. study of tangent operators, cyclic plasticity and numerical algorithms. *Inter. Jour. of Solids and Structures*, 40 :1681–1712, 2003.
- [32] L. Dormieux and D. Kondo. Poroelasticity and damage theory for cracked media. In : Applied Micromechanics of Porous Media, ed : L. Dormieux and F.J. Ulm, Springer, 2005.
- [33] L. Dormieux, D. Kondo, and F. J. Ulm. *Microporomechanics*. John Wiley and Sons, 2006.
- [34] L. Dormieux, E. Lemarchand, and J. Sanahuja. Comportement macroscopique des matériaux poreux à microstructure en feuillets. *Comptes Rendus Mécanique*, 334 :304–310, 2006.
- [35] L. Dormieux, A. Molinari, and D. Kondo. Micromechanical approach to the behavior of poroelastic materials. *Journ. Mech. Phys. Solids*, 50 :2203–2231, 2002.
- [36] G. J. Dvorak and Y. Benveniste. On transformation strains and uniform fields in multiphase elastic media. *Proc. R. Soc. Lond.*, A437 :291–310, 1992.
- [37] S. Escoffier. *Caractérisation expérimentale du comportement hydromécanique des argilites de Meuse/Haute-Marne*. PhD thesis, INPL, Nancy, 2002.
- [38] J. D. Eshelby. The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion and related problems. *Proc. Royal Society London*, A 241 :376–396, 1957.

- [39] G. Fabre. *Fluage et endommagement des roches argileuses : Evolution de la microstructure et modélisation phénoménologique*. PhD thesis, Université Joseph Fourier - Grenoble I, 2005.
- [40] G. Fabre and F. Pellet. Creep and time-dependent damage in argillaceous rocks. *Int. Jour. Rock Mech. Min. Scien.*, 43 :950–960, 2006.
- [41] A. C. Gavazzi and D. C. Lagoudas. On the numerical evaluation of Eshelby’s tensor and its application to elastoplastic fibrous composites. *Computational Mechanics*, 7 :13–19, 1990.
- [42] A. Giraud, C. Gruescu, D. P. Do, F. Homand, and D. Kondo. Effective thermal conductivity of transversely isotropic media with arbitrary oriented ellipsoïdal inhomogeneities. *Inter. Jour. Sol. Struc.*, 44(11) :2627–2647, 2007.
- [43] A. Giraud, D. Hoxha, D. P. Do, and V. Magnenet. Effect of pore shape on effective thermo-poroelastic properties of isotropic rocks. *Inter. Jour. Sol. Struc.*, 45 :1–23, 2008.
- [44] A. Giraud, D. Hoxha, Q. V. Huynh, D. P. Do, and V. Magnenet. Effective porothermoelastic properties of transversely isotropic rock-like composites. *Inter. Jour. Engin. Scienc.*, 46 :527–550, 2008.
- [45] A. Giraud, Q. V. Huynh, D. Hoxha, and D. Kondo. Application of results on Eshelby tensor to the determination of effective poroelastic properties of anisotropic rocks-like composites. *Inter. Jour. Sol. Struc.*, 44 :3756–3772, 2007.
- [46] A. Giraud, Q. V. Huynh, D. Hoxha, and D. Kondo. Effective poroelastic properties of transversely isotropic rocks-like composites with arbitrarily oriented ellipsoidal inclusions. *Mechanics of Materials*, 39 :1006–1024, 2007.
- [47] C. González and J. Llorca. A self-consistent approach to the elasto-plastic behaviour of two-phase materials including damage. *J. Mech. Phys. Solids*, 48 :675–692, 2000.
- [48] C. Gruescu, A. Giraud, F. Homand, D. Kondo, and D. P. Do. Effective thermal conductivity of partially saturated porous rocks. *Inter. Jour. of Solids Struct.*, 44 :811–833, 2007.
- [49] A. Guéry. *Contribution à la modélisation micromécanique du comportement non linéaire de l’argilite du Callovo-Oxfordien*. PhD thesis, Université de Lille I, 2007.
- [50] A. Guéry, F. Cormery, J. F. Shao, and D. Kondo. A micromechanical model of elastoplastic and damage behavior of a cohesive geomaterial. *Int. Jour. of Sol. and Struc.*, 45 :1406–1429, 2008.
- [51] A. Guéry, F. Cormery, J. F. Shao, and D. Kondo. A multiscale modeling of damage and time-dependent behavior of cohesive rocks. *Int. Jour. Numer. Anal. Meth. Geomech.*, - :-, 2008.

-
- [52] Z. Hashin. The inelastic inclusion problem. *I. J. Engng. Sci.*, 7 :11–36, 1969.
 - [53] Z. Hashin and S. Shtrikman. A variational approach to the theory of the effective magnetic permeability of multiphase materials. *J. Appl. Physics*, 33 :3125–3131, 1962.
 - [54] Z. Hashin and S. Shtrikman. A variational approach to the theory of the elastic behavior of multiphase materials. *J. Mech. Phys. Solids*, 11 :127–141, 1963.
 - [55] A. V. Hershey. The elasticity of an isotropic aggregate of anisotropic cubic crystals. *J. Appl. Mech.*, 21 :226–240, 1954.
 - [56] R. Hill. A self-consistent mechanics of composite materials. *J. Mech. Phys. Solids*, 13 :213–222, 1965.
 - [57] F. Homand. Mesures thermiques sur le site Est. Technical Report Andra, DRP0ENG 98-009/A, INPL-LAEGO, 1998.
 - [58] F. Homand. Résultat des essais sur échantillons pour le développement des modèles rhéologiques HM et THM des argilites. Technical Report Andra, CRP0ENG 03.0380.D, INPL-LAEGO, 2005.
 - [59] F. Homand. Expérimentation Géomécafor : Essais de fluage. Technical Report FORPRO-CNRS-ANDRA, LG.CA.AND.PSI.RPRE.06.0491.A., LAEGO-ENSG, 2006.
 - [60] F. Homand, J. F. Shao, A. Giraud, C. Auvray, and D. Hoxha. Pétrofabrique et propriétés mécaniques des argilites. *C. R. Géoscience*, 338 :882–891, 2006.
 - [61] F. Homand and F. Villieras. Mesures des propriétés physiques d’échantillons de Meuse/Haute-Marne. Technical Report Andra, BRP0ENSG 95-007, INPL-LAEGO, 1995.
 - [62] B. Hornby, L. Schwartz, and J. Hudson. Anisotropic effective medium modeling of the elastic properties of shales. *Geophys.*, 59(10) :1570–1583, 1994.
 - [63] D. Hoxha, A. Giraud, and F. Homand. Modelling long-term behaviour of a natural gypsum rock. *Mechanics of Materials*, 37 :1223–1241, 2005.
 - [64] D. Hoxha, A. Giraud, F. Homand, and C. Auvray. Saturated and unsaturated behaviour modelling of Meuse/Haute-Marne argilite. *Int. J. Plasticity*, 23 :733–766, 2007.
 - [65] J. W. Hutchinson. Bounds and self-consistent estimates for creep of polycrystalline materials. *Proc. R. Soc. Lond. A*, 348 :101–127, 1976.
 - [66] Q. V. Huynh. *Estimation des propriétés poromécaniques effectives des argilites : apport des méthodes d’homogénéisation*. PhD thesis, ENSG-INPL, 2006.
 - [67] M. Jakobsen and T. A. Johansen. The effects of drained and undrained loading on visco-elastic waves in rock-like composites. *Int. J. Sol. Struct.*, 42 :1597–1611, 2005.

- [68] M. Jobmann and G. Buntebarth. Thermal conductivity determination on drill core samples from Mont Terri. BHE-D26. Technical report, DBE Technology GmbH, 2006.
- [69] T. A. Johansen, M. Jakobsen, and B. O. Ruud. Estimation of internal structure and anisotropy of shales from borehole data. Technical report, SRC Report No. 01-003, Institute of Solid Earth Physics, Univ. of Bergen, 2003.
- [70] M. Kachanov. Elastic solids with many cracks and related problems. *Advances in Applied Mechanics*, 30 :259–445, 1993.
- [71] M. Kachanov and I. Sevostianov. On quantitative characterization of microstructures and effective properties. *Inter. Jour. of Solids Struct.*, 42 :309–336, 2005.
- [72] M. Kachanov, I. Sevostianov, and B. Shafiro. Explicite cross-property correlations for porous materials with anisotropic microstructures. *Jour. Mech. Phys. of Solids*, 49 :1–25, 2001.
- [73] M. Kachanov, I. Tsukrov, and B. Shafiro. Effective moduli of solids with cavities of various shapes. *Appl. Mech. Rev.*, 47 :151–174, 1994.
- [74] S. K. Kanaun and D. Jeulin. Elastic properties of hybrid composites by the effective field approach. *Jour. Mech. Phys. Sol.*, 49 :2339–2367, 2001.
- [75] S. K. Kanaun and V. M. Levin. *Effective field method in mechanics of composite materials*. World Scientific, Singapore, Ed. : Markov, K.Z., 1994.
- [76] A. Koriche. *Caractérisation du comportement couplé des argilites de Meuse/Haute-Marne aux états saturé et partiellement saturé*. PhD thesis, INPL, 2004.
- [77] I. A. Kunin. An algebra of tensor operators and its applications to elasticity. *Int. J. Eng. Sci.*, 19 :1551–1561, 1981.
- [78] H. Y. Kuo and T. Chen. Steady and transient Green’s functions for anisotropic conduction in an exponentially graded solid. *Int. J. Solids Struct.*, 42(3-4) :1111–1128, 2005.
- [79] N. Lahellec and P. Suquet. Nonlinear composites : a linearization procedure, exact to second-order in contrast and for which the strain-energy and affine formulations coincide. *C. R. Mecanique*, 332 :693–700, 2004.
- [80] N. Lahellec and P. Suquet. Effective behavior of linear viscoelastic composites : A time-integration approach. *International Journal of Solids and Structures*, 44 :507–529, 2007.
- [81] N. Lahellec and P. Suquet. On the effective behavior of nonlinear inelastic composites : I. Incremental variational principles. *Jour. Mech. Phys. Sol.*, 55 :1932 – 1963, 2007.
- [82] N. Lahellec and P. Suquet. On the effective behavior of nonlinear inelastic composites : II. A second-order procedure. *Jour. Mech. Phys. Sol.*, 55 :1964 – 1992, 2007.

-
- [83] V. M. Levin. On the thermal expansion coefficients of heterogeneous materials. *Mechanics of Solids*, 1 :88–94, 1967.
- [84] V. M. Levin and M. G. Markov. Electroconductivity of a medium with thin low-resistivity inclusions. *Journ. Electrostatics*, 61 :129–145, 2004.
- [85] V.M. Levin and J. M. Alvarez-Tostado. Explicit effective constants for an inhomogeneous porothermoelastic medium. *Arch. Appl. Mech*, 76 :199–214, 2006.
- [86] J. Li and G. Weng. A secant-viscosity approach to the time-dependent creep of an elastic-viscoplastic composite. *J. Mech. Phys. Solids*, 45 :1543–1568, 1997.
- [87] J. Li and G. J. Weng. Strain-Rate Sensitivity, Relaxation Behavior, and Complex Moduli of a Class of Isotropic Viscoelastic Composites. *Jour. Engin. Mater. and Tech.*, 116 :495–504, 1994.
- [88] K. Z. Markov. Justification of an effective field method in elasto-statics of heterogeneous solids. *J. Mech. Phys. Solids*, 49(11) :2621–2634, 2001.
- [89] R. Masson, M. Bornert, P. Suquet, and A. Zaoui. An affine formulation for the prediction of the effective properties of nonlinear composites and polycrystals. *J. Mech. Phys. Solids*, 48 :1203–1227, 2000.
- [90] R. Masson and A. Zaoui. Self consistent estimates for the rate dependent elastoplastic behaviour of polycrystalline materials. *J. Mech. Phys. Solids*, 47 :1543–1568, 1999.
- [91] J. C. Michel, H. Moulinec, and P. Suquet. Effective properties of composite materials with periodic microstructure : a computational approach. *Comp. Methods Appl. Mech. Eng.*, 172 :109–143, 1999.
- [92] J. C. Michel and P. Suquet. Nonuniform transformation field analysis. *Int. Jour. Sol. Struc.*, 40 :6937–6955, 2003.
- [93] J. C. Michel and P. Suquet. Computational analysis of nonlinear composite structures using the nonuniform transformation field analysis. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 193 :5477–5502, 2004.
- [94] N. Moës, M. Cloirec, P. Cartraud, and J.F. Remacle. A computational approach to handle complex microstructure geometries. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 192 :3163–3177, 2003.
- [95] T. Mori and K. Tanaka. Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions. *Acta Metall.*, 21 :571–574, 1973.
- [96] T. Mura. *Micromechanics of defects in solids*. Martinus Nijhoff, 1987.
- [97] S. Nemat-Nasser and M. Hori. *Micromechanics : overall properties of heterogenous materials*. North Holland - Elsevier, Amsterdam, 1993.

- [98] S. Nemat-Nasser and M. Hori. *Micromechanics : overall properties of heterogenous materials*. North Holland - Elsevier, Amsterdam, 1999.
- [99] A. Norris. A differential scheme for the effective moduli of composites. *Mech. Mater*, 4 :1–16, 1985.
- [100] A. Norris. On the correspondence between poroelasticity and thermoelasticity. *J. Appl. Physics*, 71(3) :1138–1141, 1992.
- [101] A. Paquin. *Modélisation micromécanique du comportement élastoviscoplastique des matériaux hétérogènes*. PhD thesis, Université de Metz, Metz, 1998.
- [102] A. Paquin, S. Berbenni, V. Favier, X. Lemoine, and M. Berveiller. Micromechanical modeling of the elastic-viscoplastic behavior of polycrystalline steels. *I. J. Plasticity*, 17 :1267–1302, 2001.
- [103] V. Pensee. *Contribution de la micromécanique à la modélisation tridimensionnelle de l'endommagement par mésofissuration*. PhD thesis, Université des Sciences et Technologies de Lille, 2002.
- [104] P. Perzyna. Fundamental problems in viscoplasticity. *Adv. Appl. Mech*, 9 :247–377, 1966.
- [105] O. Pierard. *Micromechanics of inclusion-reinforced composites in elasto-plasticity and elasto-viscoplasticity : modeling and computation*. PhD thesis, Université Catholique de Louvain, 2006.
- [106] O. Pierard, J. Llorca, J. Segurado, and I. Doghri. Micromechanics of particle-reinforced elasto-viscoplastic composites : Finite element simulations versus affine homogenization. *Int. Jour. of Plast.*, 23 :1041–1060, 2007.
- [107] P. Ponte Castañeda. The effective mechanical properties of nonlinear isotropic composites. *J. Mech. Phys. Solids*, 39 :45–71, 1991.
- [108] P. Ponte Castañeda. Exact second-order estimates for the effective mechanical properties of nonlinear composite materials. *J. Mech. Phys. Solids*, 44 :827–862, 1996.
- [109] P. Ponte Castañeda. Second-order homogenization estimates for nonlinear composites incorporating field fluctuations : I-theory. *J. Mech. Phys. Solids*, 50 :737–757, 2002.
- [110] P. Ponte Castañeda. Second-order homogenization estimates for nonlinear composites incorporating field fluctuations : II-applications. *J. Mech. Phys. Solids*, 50 :759–782, 2002.
- [111] A. Rekik, F. Auslender, M. Bornert, and A. Zaoui. Objective evaluation of linearization procedures in nonlinear homogenization : A methodology and some implications on the accuracy of micromechanical schemes. *Int. Jour. Sol. Struc.*, 44 :3468–3496, 2007.

-
- [112] A. Rekik, M. Bornert, F. Auslender, and A. Zaoui. A methodology for an accurate evaluation of the linearization procedures in nonlinear mean field homogenization. *C. R. Mecanique*, 333 :789–795, 2005.
 - [113] Y. Rougier. *Etude du comportement sous irradiation : Modélisation micromécanique de l'élastoviscoplasticité*. PhD thesis, Ecole Polytechnique, 1994.
 - [114] Y. Rougier, C. Stolz, and A. Zaoui. Représentation spectrale en viscoélasticité linéaire des matériaux hétérogènes. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 316II :1517–1522, 1993.
 - [115] H. Sabar, M. Berveiller, V. Favier, and S. Berbenni. A new class of micro-macro models for elastic-viscoplastic heterogeneous materials. *I. J. Sol. Structures*, 39 :3257–3276, 2002.
 - [116] S. Sammartino, A. Bouchet, and J.C. Parneix. Construction d'un modèle conceptuel d'organisation de la porosité et de la minéralogie dans les argilites du site de Bure. RS Rapport Andra DRP0ERM 01-018, ERM, 2001.
 - [117] S. Sammartino, A. Bouchet, D. Prêt, J.C. Parneix, and E. Tevissen. Spatial distribution of porosity and minerals in clay rocks from the Callovo-Oxfordian formation (Meuse/Haute-Marne, Eastern France) - Implications on ionic species diffusion and rock sorption capability. *Applied Clay Science*, 23 :157–166, 2003.
 - [118] J. Sarout. *Propriétés Physiques et Anisotropie des Roches Argileuses : Modélisation Micromécanique et Expériences Triaxiales*. PhD thesis, Université Paris XI Orsay, 2006.
 - [119] C. M. Sayers. The elastic anisotropy of shales. *J. Geophys. Res.*, 99 :767–774, 1994.
 - [120] I. Sevostianov, L. Gorbatiikh, and M. Kachanov. Recovery of information on the microstructure of porous/microcracked materials from the effective elastic/conductive properties. *Mat. Sci. Engrg. A*, 318 :1–14, 2001.
 - [121] B. Shafiro and M. Kachanov. Materials with fluid-filled pores of various shapes : effective elastic properties and fluid pressure polarization. *Int. J. Solids Struct.*, 34 :3517–3540, 1997.
 - [122] J. F. Shao, D. Kondo, and A. S. Chiarelli. A coupled elastoplastic damage model for semi-brittle materials and extension to unsaturated conditions. *Mech. Mater.*, 38(3) :218–232, 2006.
 - [123] J. C. Simo and Hugues T. J. *Computational inelasticity*. Springer, New York, 1998.
 - [124] S. Smaoui, A. Benhamida, I. Djéran-Maigre, and H. Dumontet. Micro - Macro approaches coupled to iterative process for non linear poreus media. *Computer Material Continua*, 4(3) :153–162, 2006.
 - [125] S. Smaoui Barboura. *Modélisation micromécanique du comportement de milieux poreux non linéaire : Applications aux argiles compactées*. PhD thesis, Université Paris VI, 2007.

- [126] P. Suquet. Overall properties of nonlinear composites : a modified secant moduli theory and its link with Ponte Castañeda's nonlinear variational procedure. *Compte Rendus de l'Académie des Sciences*, 320 :563–571, 1995.
- [127] P. Suquet. Effective behavior of nonlinear composites. In : Continuum micromechanics, P. Suquet ed., Springer Verlag Wien, 197-264, 1997.
- [128] M. Thury. The characteristics of the Opalinus Clay investigated in the Mont Terri underground rock laboratory in Switzerland. *Comptes Rendus Physique*, 3(7-8) :923–933, 2002.
- [129] S. Torquato. *Random Heterogenous Materials. Microstructure and Macroscopic Properties*. Springer-Verlag, 2002.
- [130] F. J. Ulm, A. Delafargue, and G. Constantinides. Experimental Microporomechanics. In : Applied Micromechanics of Porous Media, ed : L. Dormieux and F.J. Ulm, Springer, 2005.
- [131] G. Vasseur, F. Brigaud, and L. Demongodin. Thermal conductivity estimation in sedimentary bassins. *Tectonophysics*, 224 :167–174, 1995.
- [132] Y. M. Wang and G. J. Weng. The Influence of Inclusion Shape on the Overall Viscoelastic Behavior of Composites. *Jour. Appl. Mech.*, 59 :510–518, 1992.
- [133] J. R. Willis. Bounds and self-consistent estimates for the overall properties of anisotropic composites. *J. Mech. Phys. Sol.*, 25 :185–202, 1977.
- [134] E. M. Winkler. *Stone : Properties, Durability in Man's Environment*. Springer - Verlag, 1975.
- [135] P. J. Withers. The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion in a transversely isotropic medium, and its relevance to composite materials. *Philosophical Magazine A*, 59(4) :759–781, 1989.
- [136] T. T. Wu. The effect of inclusion shape on the elastic moduli of a two-phase material. *Int. Journ. Solids. Struct*, 2(1) :1–8, 1966.
- [137] Y. Xu. *Approche multi-échelle pour l'étude du comportement des systèmes polyphasiques- Application aux milieux poreux non saturés*. PhD thesis, ENPC, Paris, 2004.
- [138] B. Yven, S. Sammartino, Y. Géraud, H. Homand, and F. Villiéras. Mineralogy, Texture and Porosity of Callovo-Oxfordian Argillites of the Meuse/Haute-Marne Region (Eastern Paris Basin). *Bulletin de la Société Géologie de France*, sous press, 2007.
- [139] A. Zaoui. Structural morphology and constitutive behaviour of microheterogeneous materials. In : Continuum micromechanics, P. Suquet ed., Springer Verlag Wien, 291-347, 1997.
- [140] A. Zaoui. *Matériaux hétérogènes et composites*. Ecole Polytechnique, 1998.

-
- [141] A. Zaoui and R. Masson. Micromechanics-based modeling of plastic polycrystals : an affine formulation. *Materials Science and Engineering*, A258 :418–424, 2000.
- [142] Q. Zhu, D. Kondo, and J. F. Shao. Micromechanical analysis of coupling between anisotropic damage and friction in quasi brittle materials : Role of the homogenization scheme. *Int. Jour. Sol. Struct.*, 45 :1385–1405, 2008.
- [143] Q. Zhu, D. Kondo, J. F. Shao, and V. Pensee. Micromechanical modelling of anisotropic damage in brittle rocks and application. *Int. Jour. Rock. Mech. Mining Scien.*, 45 :467–477, 2008.
- [144] R. Zouari, A. Benhamida, and H. Dumontet. A micromechanical iterative approach for the behavior of polydispersed composites. *Int. Jour. of Sol. and Struc.*, 45 :3139–3152, 2008.

Annexe A

Composantes du tenseur de Hill dans un milieu isotrope

Cette annexe présente les expressions analytiques des composantes du tenseur de Hill $\mathbb{P}$ dans le cadre de l'homogénéisation élastique linéaire d'un milieu hétérogène isotrope. Les inclusions ayant de la forme sphéroïdale sont caractérisées par un rapport d'aspect ε défini par :

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{c}{b} \quad (\text{A.1})$$

où a , b , c sont respectivement les demi-longueurs selon les axes $\underline{e}_1$, $\underline{e}_2$ et $\underline{e}_1$. Dans notre travail, on ne s'intéresse qu'à deux types de l'inclusion : $0 < \varepsilon < 1$ désigne l'inclusion aplatie tandis que $\varepsilon = 1$ correspond à l'inclusion sphérique.

La solution du tenseur de Eshelby $\mathbb{S}^E$ dans un milieu isotrope avec 6 composantes non nulles est exprimée par plusieurs auteurs [96, 97]. On présente donc dans cette annexe le tenseur de Hill $\mathbb{P}$ qui est caractérisé par un tenseur isotrope transverse avec 5 composantes indépendantes. Les expressions de ces composantes dans le cas de l'inclusion aplatie sont les suivantes :

$$\begin{aligned} P_{1111} &= \frac{\varepsilon \left(\varepsilon \sqrt{1 - \varepsilon^2} (k (6\varepsilon^2 - 33) + (26\varepsilon^2 - 35) \mu) + (3k (4\varepsilon^2 + 5) + (29 - 20\varepsilon^2) \mu) \arccos(\varepsilon) \right)}{16 (1 - \varepsilon^2)^{5/2} \mu (3k + 4\mu)} \\ P_{1122} &= - \frac{\varepsilon (3k + \mu) \left(\varepsilon \sqrt{1 - \varepsilon^2} (2\varepsilon^2 + 1) + (1 - 4\varepsilon) \arccos(\varepsilon) \right)}{16 (1 - \varepsilon^2)^{5/2} \mu (3k + 4\mu)} \\ P_{1133} &= - \frac{\varepsilon (3k + \mu) \left(-3\varepsilon \sqrt{1 - \varepsilon^2} + \arccos(\varepsilon) + 2\varepsilon^2 \arccos(\varepsilon) \right)}{4 (1 - \varepsilon^2)^{5/2} \mu (3k + 4\mu)} \\ P_{3333} &= \frac{\varepsilon (k (6\varepsilon^2 + 3) + (8\varepsilon^2 - 5) \mu) \arccos(\varepsilon) - 3\sqrt{1 - \varepsilon^2} (3\varepsilon^2 (k + \mu) - 2\mu)}{2 (1 - \varepsilon^2)^{5/2} \mu (3k + 4\mu)} \\ P_{2323} &= \frac{\sqrt{1 - \varepsilon^2} (3k (\varepsilon^4 + 3\varepsilon^2 + 2) + 2 (2\varepsilon^4 - 3\varepsilon^2 + 4) \mu) - 3\varepsilon (3k (\varepsilon^2 + 1) + 2\mu) \arccos(\varepsilon)}{8 (1 - \varepsilon^2)^{5/2} \mu (3k + 4\mu)} \\ P_{1212} &= \frac{P_{1111} - P_{1122}}{2} \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

où k , μ sont les modules de compressibilité et de cisaillement de la matrice isotrope. Dans le cas particulier de l'inclusion sphérique, le tenseur de Hill s'écrit sous forme :

$$\mathbb{P} = \frac{1}{3k + 4\mu} \mathbb{J} + \frac{3(k + 2\mu)}{5\mu(3k + 4\mu)} \mathbb{K} \quad (\text{A.3})$$

Annexe B

Algorithmes d'intégration locale

On introduit brièvement dans cette annexe les algorithmes d'intégration locale des comportements élasto-plastique et élasto-viscoplastique dans le cadre d'un critère associé de Von Mises. Cela nous permet par ailleurs de déterminer les opérateurs tangents utilisés dans la méthode d'homogénéisation non linéaire par l'approche incrémentale de Hill [56]. Pour le cas du critère non associé de type de Drucker Prager, on peut consulter le travail de Guéry [49].

B.1 Algorithmes d'intégration locale du comportement élasto-plastique

En reposant sur une démarche incrémentale, le problème élasto-plastique local peut être écrit :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma}_{n+1} &= \mathbb{C} : (\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p) \\ f(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}, \gamma_{n+1}^p) &= 0\end{aligned}\tag{B.1}$$

avec :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} &= \boldsymbol{\varepsilon}_n + \Delta\boldsymbol{\varepsilon} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p &= \boldsymbol{\varepsilon}_n^p + \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p \\ \gamma_{n+1}^p &= \gamma_n^p + \Delta\gamma \\ \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p &= \Delta\gamma \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}, \gamma_{n+1}^p)\end{aligned}\tag{B.2}$$

Le problème à résoudre est de déterminer la contrainte $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$, les déformations $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}$, $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p$ et la distorsion γ_{n+1}^p à t_{n+1} en connaissance l'incrément de déformation $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}$ et les valeurs de $\boldsymbol{\varepsilon}_n$, $\boldsymbol{\varepsilon}_n^p$ et γ_n^p à t_n .

La procédure de l'algorithme de type "cutting point algorithm" [123] est effectuée comme la suivante :

- Données d'entrée : ε_n , ε_n^p , γ_n^p et $\Delta\varepsilon$.
- Déterminer la déformation au pas $n + 1$: $\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n + \Delta\varepsilon$
- Itialisation

$$i := 0$$

$$\Delta\gamma = 0, \quad \gamma_{n+1}^{p,0} = \gamma_n^p \quad (\text{B.3})$$

$$\sigma_{n+1}^0 = \mathbb{C} : (\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n^p)$$

- Itérations (i+1) :

1. Evaluer $f_{n+1}^i = f(\sigma_{n+1}^i, \gamma_{n+1}^{p,i})$. Si $f_{n+1}^i < \text{tolérance}$, aller en 4, sinon aller en 2.
2. Calculer :

$$\delta(\Delta\gamma) = \frac{f_{n+1}^i}{\partial_\sigma f_{n+1}^i : \mathbb{C} : \partial_\sigma f_{n+1}^i - \partial_\gamma f_{n+1}^i} \quad (\text{B.4})$$

avec $\partial_\sigma f_{n+1}^i = \frac{\partial f}{\partial \sigma}(\sigma_{n+1}^i, \gamma_{n+1}^{p,i})$.

3. Actualiser :

$$\begin{aligned} \sigma_{n+1}^{i+1} &= \sigma_{n+1}^i - \delta(\Delta\gamma) \mathbb{C} : \partial_\sigma f_{n+1}^i \\ \gamma_{n+1}^{p,i+1} &= \gamma_{n+1}^{p,i} + \delta(\Delta\gamma) \\ \gamma_{n+1} &= \gamma_n + \delta(\Delta\gamma) \\ \varepsilon_{n+1}^{p,i+1} &= \sigma_{n+1}^{p,i} + \delta(\Delta\gamma) \partial_\sigma f_{n+1}^i \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

Revenir à 1.

4. Sortir de la boucle.

- Calculer l'opérateur tangent $\mathbb{C}^{tan}$ à partir de la formulation :

$$\mathbb{C}^{tan} = \begin{cases} \mathbb{C} & \text{si } \begin{cases} f(\sigma_{n+1}, \gamma_{n+1}^p) \leq 0 \\ \dot{f}(\sigma_{n+1}, \gamma_{n+1}^p) < 0 \end{cases} \\ \mathbb{C} - \frac{\mathbb{C} : \partial_\sigma f(\sigma_{n+1}, \gamma_{n+1}^p) \otimes \partial_\sigma f(\sigma_{n+1}, \gamma_{n+1}^p) : \mathbb{C}}{h} & \text{si } \begin{cases} f(\sigma_{n+1}, \gamma_{n+1}^p) = 0 \\ \dot{f}(\sigma_{n+1}, \gamma_{n+1}^p) = 0 \end{cases} \end{cases} \quad (\text{B.6})$$

avec $h = \partial_\sigma f(\sigma_{n+1}, \gamma_{n+1}^p) : \mathbb{C} : \partial_\sigma f(\sigma_{n+1}, \gamma_{n+1}^p) - \partial_\gamma f(\sigma_{n+1}, \gamma_{n+1}^p)$

B.2 Algorithmes d'intégration locale du comportement élasto-viscoplastique

Dans ce cas, le problème élasto-viscoplastique local est défini comme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{n+1} = \mathbb{C} : (\epsilon_{n+1} - \epsilon_{n+1}^{vp}) \\ \epsilon_{n+1} = \epsilon_n + \Delta\epsilon \\ \epsilon_{n+1}^{vp} = \epsilon_n^{vp} + \Delta\epsilon^{vp} \\ \gamma_{n+1}^{vp} = \gamma_n^{vp} + \Delta\gamma \\ f_{n+1} = f(\sigma_{n+1}, \gamma_{n+1}^{vp}) \\ \Delta\epsilon^{vp} = \Delta\gamma \partial_\sigma f_{n+1} \end{array} \right. \quad (\text{B.7})$$

avec :

$$\Delta\gamma = \begin{cases} 0 & \text{si } f_{n+1} \leq 0 \\ \frac{\sigma_0}{\kappa} \left(\frac{f_{n+1}}{\sigma_0} \right)^m \Delta t & \text{si } f_{n+1} > 0 \end{cases} \quad (\text{B.8})$$

En reprenant à t_n les données ϵ_n , ϵ_n^{vp} , γ_n^{vp} et l'incrément de déformation $\Delta\epsilon$, on cherche à déterminer à t_{n+1} les déformations ϵ_{n+1} , ϵ_{n+1}^{vp} , γ_{n+1}^{vp} et la contrainte σ_{n+1} . De la même manière que la précédente, l'algorithme de type de "cutting point algorithm" [123] est introduite comme suivante :

- Données d'entrée : ϵ_n , ϵ_n^{vp} , γ_n^{vp} et $\Delta\epsilon$.
- Déterminer la déformation au pas $n + 1$: $\epsilon_{n+1} = \epsilon_n + \Delta\epsilon$
- Itialisation

$$\begin{aligned} i &:= 0, \quad \Delta\gamma^0 = 0, \quad \gamma_{n+1}^{vp,trial} = \gamma_{n+1}^{vp,0} = \gamma_n^{vp} \\ \sigma_{n+1}^{trial} &= \sigma_{n+1}^0 = \mathbb{C} : (\epsilon_{n+1} - \epsilon_n^{vp}) \\ f_{n+1}^{trial} &= f(\sigma_{n+1}^{trial}, \gamma_{n+1}^{vp,trial}) \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

Si $f_{n+1}^{trial} \leq \text{tolérance}$, aller en 1, sinon aller en 2.

1. Actualiser :

$$\sigma_{n+1} = \sigma_{n+1}^{trial}, \quad \gamma_{n+1}^{vp} = \gamma_{n+1}^{vp,trial} \quad (\text{B.10})$$

2. Déterminer $\Delta\gamma$ par la méthode de Newton Raphson.

Itération (i) :

$$\begin{aligned}\Phi(\Delta\gamma^i) &= f_{n+1}^{trial} - \left(\frac{\Delta\gamma^i \kappa}{\Delta t \sigma_0}\right)^{1/m} \sigma_0 - 3\mu\Delta\gamma^i - H((\gamma_n^{vp} + \Delta\gamma^i)^\alpha - (\gamma_n^{vp})^\alpha) \\ \Phi'(\Delta\gamma^i) &= -\frac{\kappa}{m\Delta t} \left(\frac{\Delta\gamma^i \kappa}{\Delta t \sigma_0}\right)^{1/m-1} - 3\mu - \alpha H(\gamma_n^{vp} + \Delta\gamma^i)^{\alpha-1}\end{aligned}\quad (\text{B.11})$$

2. Vérifier : si $\Phi(\Delta\gamma^i) \leq \text{tolérance}$, aller en 4, sinon :

$$\Delta\gamma^{i+1} = \Delta\gamma^i - \frac{\Phi(\Delta\gamma^i)}{\Phi'(\Delta\gamma^i)} \quad (\text{B.12})$$

3. Actualiser :

$$\begin{aligned}\sigma_{n+1}^{i+1} &= \sigma_{n+1}^i - \Delta\gamma^{i+1} \mathbb{C} : \partial_\sigma f(\sigma_{n+1}^i, \gamma_{n+1}^{vp,i}) \\ \gamma_{n+1}^{vp,i+1} &= \gamma_{n+1}^{vp,i} + \Delta\gamma^{i+1} \\ \epsilon_{n+1}^{vp,i+1} &= \epsilon_{n+1}^{vp,i} + \Delta\gamma^{i+1} \partial_\sigma f(\sigma_{n+1}^i, \gamma_{n+1}^{vp,i})\end{aligned}\quad (\text{B.13})$$

Revenir en 2.

4. Sortir de la boucle.

– Calculer l'opérateur tangent algorithmique $\mathbb{L}^{alg}$ à partir de la formulation :

$$\mathbb{L}^{alg} = \left[\mathbb{C}^{-1} + \Delta\gamma_{n+1} \partial_{\sigma\sigma} f_{n+1} + \frac{\frac{m}{\kappa} \left(\frac{f_{n+1}}{\sigma_0}\right)^{m-1} \Delta t}{1 - \frac{m}{\kappa} \left(\frac{f_{n+1}}{\sigma_0}\right)^{m-1} \Delta t \partial_\gamma f_{n+1}} \partial_\sigma f_{n+1} \otimes \partial_\sigma f_{n+1} \right]^{-1} \quad (\text{B.14})$$

avec $f_{n+1} = f(\sigma_{n+1}, \gamma_{n+1}^{vp})$.

Annexe C

Annexes du chapitre V

Cette annexe nous présente les solutions analytiques du comportement effectif par l'estimation de Mori-Tanaka d'un matériau visco-élastique linéaire isotrope dans l'espace symbolique de Laplace Carson et dans l'espace temporel.

C.1 Solutions analytiques dans l'espace symbolique de Laplace Carson

Le matériau biphasique considéré consiste de la phase matrice et des hétérogénéités dont le comportement visco-élastique linéaire de chaque phase est de type Maxwellien isotrope incompressible. Les modules élastiques et visqueux des phases sont respectivement μ_m , ρ_m et μ_i , ρ_i . La loi de comportement de chaque phase s'écrit sous forme :

$$\dot{\mathbf{s}}_r = 2\mu_r (\dot{\mathbf{e}}_r - \mathbf{s}_r), \quad (r = m, i) \quad (\text{C.1})$$

où $\dot{\mathbf{s}}_r$ et $\dot{\mathbf{e}}_r$ désignent respectivement les taux de contrainte et de déformation déviatoriques.

Le passage à la transformé de Laplace Carson se définit par :

$$\widehat{f}(p) = \int_0^\infty p f(t) e^{-pt} dt \quad (\text{C.2})$$

L'équation (C.1) est donc réécrite dans le domaine de Laplace Carson comme :

$$\widehat{\mathbf{s}}_r(p) = 2\widehat{l}_r(p) \widehat{\mathbf{e}}_r(p), \quad (r = m, i) \quad (\text{C.3})$$

Cette équation désigne le comportement élastique linéaire dans le domaine symbolique de Laplace Carson de la phase r dont le module d'élasticité est :

$$\widehat{l}_r(p) = \frac{\mu_r}{p + \frac{\mu_r}{\rho_r}}, \quad (r = m, i) \quad (\text{C.4})$$

Dans le cas où le comportement des hétérogénéités est élastique linéaire ($\rho_i \rightarrow \infty$), on a :

$$\widehat{l}_i(p) = \frac{\mu_i}{p} \quad (\text{C.5})$$

On applique par la suite les résultats de la méthode d'homogénéisation linéaire dans le domaine symbolique de Laplace Carson. Dans le cadre de l'approximation de Mori Tanaka, on obtient le module effectif :

$$\widehat{L}_{\text{hom}}^{\text{MT}}(p) = \frac{\widehat{l}_m(p) \left((2 + 3f_i) \widehat{l}_i(p) + 3(1 - f_i) \widehat{l}_m(p) \right)}{2(1 - f_i) \widehat{l}_i(p) + (3 + 2f_i) \widehat{l}_m(p)} \quad (\text{C.6})$$

Et les tenseurs de localisation de déformation des phases dans l'espace de Laplace Carson sont déterminés comme les suivants :

$$\begin{aligned} \widehat{A}_i(p) &= \frac{5\widehat{l}_m(p)}{2(1 - f_i) \widehat{l}_i(p) + (3 + 2f_i) \widehat{l}_m(p)} \\ \widehat{A}_m(p) &= \frac{2\widehat{l}_i(p) + 3\widehat{l}_m(p)}{2(1 - f_i) \widehat{l}_i(p) + (3 + 2f_i) \widehat{l}_m(p)} \end{aligned} \quad (\text{C.7})$$

C.2 Solutions analytiques dans l'espace temporel

On introduit dans ce paragraphe les solutions analytiques déterminées par Weng et coauteurs [132, 87, 86] du comportement viscoélastique linéaire d'un matériau hétérogène dont les inclusions sphériques sont élastiques linéaires. Le comportement viscoélastique linéaire de la phase matrice est caractérisé par les modules de compressibilité et de cisaillement élastique k_m , μ_m et le module de cisaillement visqueux ρ_m alors que les paramètres k_i et μ_i correspondent au comportement élastique des inclusions.

C.2.1 Comportement effectif sous la vitesse de déformation imposée constante

Les expressions des contraintes volumique et déviatorique macroscopiques en fonction du temps et de la vitesse de déformation imposée ($\dot{\mathbf{E}} = \dot{E}_v \boldsymbol{\delta} + \dot{\mathbf{E}}_d$) sont les suivantes :

$$\begin{aligned} \Sigma_v(t) &= 3k_m \dot{E}_v \left[\left(1 + d_1 \frac{d_2}{d_3} \right) t + d_1 \frac{d_3 - d_2}{d_3^2} (1 - e^{-d_3 t}) \right] \\ \Sigma_d(t) &= \frac{2\mu_m}{T_m} \left\{ \left(1 + \frac{f_i}{d_4} \frac{\tau_m}{s_1 s_2} \frac{\mu_i}{\mu_i - \mu_m} \right) + \left[\frac{f_i}{d_4} \frac{1 - \tau_m}{(1 - s_1)(1 - s_2)} \frac{\mu_m}{\mu_i - \mu_m} - 1 \right] e^{-T_m t} \right. \\ &\quad \left. + \frac{f_i (\tau_m - s_1) (\mu_i / (\mu_i - \mu_m) - s_1)}{d_4 s_1 (s_1 - s_2) (1 - s_1)} e^{-s_1 T_m t} - \frac{f_i (\tau_m - s_2) (\mu_i / (\mu_i - \mu_m) - s_2)}{d_4 s_2 (s_1 - s_2) (1 - s_2)} e^{-s_2 T_m t} \right\} \dot{\mathbf{E}}_d \end{aligned} \quad (\text{C.8})$$

avec :

$$\begin{aligned} \tau_m &= \frac{3k_m}{3k_m + 4\mu_m}, \quad v_m = \frac{6}{5} \frac{k_m + 2\mu_m}{3k_m + 4\mu_m} \\ k_{\text{hom}} &= k_m \left(1 + \frac{f_i (k_i - k_m)}{(1 - f_i) \tau_m (k_i - k_m) + k_m} \right) \\ \mu_{\text{hom}} &= \mu_m \left(1 + \frac{f_i (\mu_i - \mu_m)}{(1 - f_i) v_m (\mu_i - \mu_m) + \mu_m} \right) \end{aligned} \quad (\text{C.9})$$

$$\begin{aligned}
T_m &= \mu_m / \rho_m, \quad d_1 = (k_{\text{hom}} - k_m) / k_m, \quad d_2 = \tau_m T_m \\
d_3 &= \frac{3(f_i k_m + (1 - f_i)k_i) T_m}{3(1 - f_i)(k_i - k_m) + (3k_m + 4\mu_m)} \\
d_4 &= (1 - f_i)v_m + \mu_m / (\mu_i - \mu_m) \\
d_5 &= \left[(1 - f_i)v_m \left(\frac{k_m}{k_m + 2\mu_m} + \frac{\mu_i}{\mu_i - \mu_m} \right) + \frac{\mu_m}{\mu_i - \mu_m} \tau_m \right] \frac{1}{d_4} \\
d_6 &= (1 - f_i)v_m \frac{k_m}{k_m + 2\mu_m} \frac{\mu_i}{\mu_i - \mu_m} \frac{1}{d_4} \\
s_1 &= \frac{1}{2} \left(d_5 + (d_5^2 - 4d_6)^{\frac{1}{2}} \right), \quad s_2 = \frac{1}{2} \left(d_5 - (d_5^2 - 4d_6)^{\frac{1}{2}} \right)
\end{aligned} \tag{C.10}$$

C.2.2 Comportement effectif sous la contrainte imposée constante (essai de fluage)

Au contraire, sous la contrainte imposée ($\Sigma = \Sigma_v \delta + \Sigma_d$), les évolutions des vitesses de déformations volumique et déviatorique macroscopiques sont déterminées comme les suivantes :

$$\begin{aligned}
\dot{E}_v(t) &= \frac{\Sigma_v}{3k_{\text{hom}}} (d_2 - d_3) T_m e^{-d_3 T_m t} \\
\dot{E}_d(t) &= \frac{T_m}{2\mu_{\text{hom}}} \left[\frac{d_6}{d_8} - \frac{(s_1 - s_3)(s_2 - s_3)(1 - s_3)}{s_3(s_4 - s_3)} e^{-s_3 T_m t} + \frac{(s_1 - s_4)(s_2 - s_4)(1 - s_4)}{s_4(s_4 - s_3)} e^{-s_4 T_m t} \right] \Sigma_d
\end{aligned} \tag{C.11}$$

avec :

$$\begin{aligned}
\tau_m &= \frac{3k_m}{3k_m + 4\mu_m}, \quad v_m = \frac{6}{5} \frac{k_m + 2\mu_m}{3k_m + 4\mu_m} \\
k_{\text{hom}} &= k_m \left(1 + \frac{f_i(k_i - k_m)}{(1 - f_i)\tau_m(k_i - k_m) + k_m} \right) \\
\mu_{\text{hom}} &= \mu_m \left(1 + \frac{f_i(\mu_i - \mu_m)}{(1 - f_i)v_m(\mu_i - \mu_m) + \mu_m} \right) \\
T_m &= \mu_m / \rho_m, \quad d_1 = \frac{f_i(k_i - k_m)}{(1 - f_i)\tau_m(k_i - k_m) + k_m} \\
d_2 &= \frac{f_i(k_i - k_m)}{(1 - f_i)\tau_m(k_i - k_m) + k_m} \tau_m \\
d_3 &= \frac{d_2 + \tau_m d_1}{1 + d_1}, \quad d_4 = \frac{\mu_i - \mu_m}{(1 - f_i)v_m(\mu_i - \mu_m) + \mu_m} \\
d_5 &= \left[(1 - f_i)v_m \left(\frac{k_m}{k_m + 2\mu_m} + \frac{\mu_i}{\mu_i - \mu_m} \right) + \frac{\mu_m}{\mu_i - \mu_m} \tau_m \right] d_4 \\
d_6 &= (1 - f_i)v_m \frac{k_m}{k_m + 2\mu_m} \frac{\mu_i}{\mu_i - \mu_m} d_4 \\
d_7 &= \frac{\mu_m}{\mu_{\text{hom}}} \left[d_5 + f_i d_4 \left(\frac{\mu_i}{\mu_i - \mu_m} \right) + \tau_m \right], \quad d_8 = \frac{\mu_m}{\mu_{\text{hom}}} \left(d_6 + f_i d_4 \frac{\mu_i}{\mu_i - \mu_m} \tau_m \right) \\
s_1 &= \frac{1}{2} \left(d_5 + (d_5^2 - 4d_6)^{\frac{1}{2}} \right), \quad s_2 = \frac{1}{2} \left(d_5 - (d_5^2 - 4d_6)^{\frac{1}{2}} \right) \\
s_3 &= \frac{1}{2} \left(d_7 + (d_7^2 - 4d_8)^{\frac{1}{2}} \right), \quad s_4 = \frac{1}{2} \left(d_7 - (d_7^2 - 4d_8)^{\frac{1}{2}} \right)
\end{aligned} \tag{C.12}$$

AUTORISATION DE SOUTENANCE DE THESE
DU DOCTORAT DE L'INSTITUT NATIONAL
POLYTECHNIQUE DE LORRAINE

ooo

VU LES RAPPORTS ETABLIS PAR :

Madame Hélène DUMONTET, Professeur, Université Pierre et Marie Curie, Paris

Monsieur Jian-Fu SHAO, Professeur, Polytech-Lille, Villeneuve d'Ascq

Le Président de l'Institut National Polytechnique de Lorraine, autorise :

Monsieur DO Duc Phi

à soutenir devant un jury de l'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE LORRAINE,
une thèse intitulée :

"Application des approches d'homogénéisation à l'étude des propriétés thermo-hydro-mécaniques des roches. Application aux argillites"

en vue de l'obtention du titre de :

DOCTEUR DE L'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE LORRAINE

Spécialité : « Génie civil - Hydrosystèmes - Géotechnique »

Fait à Vandœuvre, le 13 novembre 2008

Le Président de l'IN.P.L.,

F. LAURENT



NANCY BRAB
2, AVENUE DE
FORÊT-DE-HA
BOITE POSTAL
F - 54 5
VANDŒUVRE CEI