



AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE LORRAINE

Ecole Nationale Supérieure de Géologie de Nancy

Laboratoire Environnement, Géomécanique et Ouvrages

Ecole Doctorale RP2E

THESE

Présentée en vue de l'obtention du grade de

DOCTEUR DE L'I.N.P.L.

Spécialité :

Génie civil - Hydrosystèmes - Géotechnique

par

Sergey SKACHKOV

Modèle macroscopique de la dispersion diphasique en milieux poreux et fracturés

Composition du jury :

Jean-Louis AURIAULT	Rapporteur
Christopher FARMER	Examineur
Mouaouia FIRDAOUSS	Rapporteur
Christian MOYNE	Président
Mikhail PANFILOV	Directeur de thèse
Alexandre SHANDRYGIN	Invité

La date de soutenance : le 27 octobre 2006

A tous mes proches et mes amis
J'ai consacré toute ma vie !
Mais dans le temps qu'ils m'ont laissé
J'ai essayé de bien bosser ...

Archie

Ce que ne nous tue pas nous rend plus fort
Ma devise

Remerciements

Je tiens à remercier Monsieur Mikhail Panfilov d'avoir dirigé cette thèse et de m'avoir aidé à développer mes capacités scientifiques.

Je remercie vivement Monsieur Christian Moyne de m'avoir fait l'honneur de présider mon jury de thèse. Je remercie également Messieurs Jean-Louis Auriault et Mouaouia Firdaouss, mes rapporteurs, ainsi que Monsieur Christopher Farmer d'avoir bien voulu examiner ce travail.

Je tiens à remercier le Centre Technologique de Schlumberger à Abingdon pour le financement de ma thèse.

Je remercie enfin mes amis et collègues, qui m'ont beaucoup aidé pendant ces trois ans de thèse.

Qualités des membres du jury

Jean-Louis AURIAULT
Rapporteur

Professeur des Universités
Domaine universitaire BP 53
38041 Grenoble cedex 9, France

Christopher FARMER
Examineur

Professor, Oxford University,
Scientific Advisor of Schlumberger
Abingdon Technology Center, Lambourn Court,
Wyndyke Furlong, Abingdon Business Park,
Abingdon, Oxfordshire, OX14 1UJ, UK.

Mouaouia FIRDAOUSS
Rapporteur

Maître de conférences Paris VI, HDR
LIMSI-CNRS BP133 F-91403 ORSAY, France
Spécialité : mécanique des fluides, milieux poreux

Christian MOYNE
Président

Professeur,
LEMTA, BP 160, 2 avenue de la Forêt de Haye,
54504 Vandoeuvre, FRANCE
Spécialité : mécanique des fluides

Mikhail PANFILOV
Directeur de thèse

Professeur,
L'Institut National Polytechnique de Lorraine,
ENSG, LEMTA, BP 160, 2 avenue de la Forêt de Haye,
54502, Vandoeuvre-lès-Nancy, France.
Spécialité : Mécanique, Génie mécanique, Génie civil

Alexandre SHANDRYGIN
Invité

Scientific Advisor of Schlumberger,
9, Taganskaya str. Moscow, Russia
Spécialité : hydrodynamique souterraine

Table des matières

1	Problème de la dispersion hydrodynamique	11
1.1	Introduction	12
1.1.1	Etat de l'art et objectifs	12
1.1.2	A propos de la théorie actuelle de dispersion hydrodynamique	14
1.1.3	Etude théorique du mélange diphasique	15
1.1.4	Dispersion diphasique comme une fonction de la saturation	17
1.1.5	Méthode de l'homogénéisation	18
1.2	Problème de l'écoulement diphasique en milieu hétérogène . .	19
1.2.1	Equations de l'écoulement diphasique	19
1.2.2	Conditions aux limites et conditions initiales	20
1.2.3	Formulation sous la forme de pression moyenne	22
2	Homogénéisation du premier ordre de l'écoulement diphasique	23
2.1	Homogénéisation du premier ordre de l'écoulement diphasique sans forces capillaires	24
2.1.1	Particularité de problème sans forces capillaires	24
2.1.2	Homogénéisation. Algorithme général	25
2.1.3	Formulation à deux échelles	25
2.1.4	A propos de l'ordre du modèle macroscopique	26
2.1.5	Equations moyennes non fermées	26
2.1.6	Fonctions oscillantes	27
2.1.7	Modèle homogénéisé : dérivations	28
2.1.8	Equation générale homogénéisée de transport	28
2.1.9	Conditions homogénéisées aux limites et initiales	29
2.2	Homogénéisation de l'écoulement diphasique avec les forces capillaires	30
2.2.1	Formulation à deux échelles	30
2.2.2	Expansions asymptotiques à deux échelles	31

2.2.3	Fonctions oscillantes. Problèmes cellulaires.	31
2.2.4	Modèle macroscopique fermé	32
2.3	Modèle homogénéisé avec dispersion	33
2.3.1	Modèle d'écoulement effectif dans le cas général	33
2.3.2	Perméabilité absolue effective	33
2.3.3	Tenseur de dispersion	34
2.3.4	Séparation des variables rapides et lentes dans les problèmes cellulaires	35
2.3.5	Trois problèmes basiques avec les variables rapides séparées	37
2.3.6	Equivalence entre la dispersion et la pression capillaire renormalisée	38
3	Analyse du tenseur de dispersion diphasique	40
3.1	Propriétés basiques du tenseur de dispersion diphasique	41
3.1.1	Asymétrie du tenseur de dispersion	41
3.1.2	A propos de la définition positive du tenseur de diffusion capillaire	43
3.2	Simulation du tenseur de dispersion dans un milieu bi-perméable	45
3.2.1	Description de cas examiné	45
3.2.2	Simulation de perméabilité effective	46
3.2.3	Simulation des problèmes cellulaires pour la dispersion	47
3.2.4	Calcul du tenseur de dispersion	49
3.2.5	Tenseur de dispersion en fonction de la saturation	49
3.2.6	Comparaison avec les données connues	49
3.3	Simulation du tenseur de dispersion sous la forme de la pression capillaire renormalisée	52
3.3.1	Description du test	52
3.3.2	Simulations de la pression capillaire renormalisée	52
4	Dispersion en milieu fracturé	56
4.1	Problèmes cellulaires pour le tenseur de dispersion en milieu fracturé	57
4.1.1	La propriété non locale du problème cellulaire pour le tenseur de dispersion	57
4.1.2	Structure du milieu	58
4.1.3	Cas limite des fractures minces	59
4.2	Problème cellulaire pour la perméabilité effective en milieu fracturé	61
4.2.1	La forme limite du problème cellulaire	61

4.2.2	Solution pour un problème cellulaire de perméabilité effective	62
4.2.3	Tenseur de perméabilité effective	63
4.2.4	Détermination de la vitesse de transport	63
5	Méthode de "Stream configuration"	65
5.1	Phénomène de dégénérescence de la "stream configuration" . .	66
5.1.1	Formulation équivalente	66
5.1.2	Non-unicité du problème	68
5.2	Régularisation du problème	70
5.2.1	Restriction générale pour les configurations des flux . .	70
5.2.2	Sélection des configurations des flux indépendants . . .	71
5.2.3	Conditions des configurations	72
5.2.4	Solution pour le problème cellulaire	73
5.3	Comportement du tenseur de dispersion. Dispersion singulière	74
5.3.1	Solution pour le tenseur de dispersivité	74
5.3.2	Simulation de la dispersivité	75
5.3.3	Effet de la dispersion singulière	77
5.3.4	Comparaison avec les autres résultats	78
5.3.5	Conclusion pour le chapitre 5	80
6	Upscaling du milieu fracturé désordonné	82
6.1	Approche semi-analytique de l'upsaling de la perméabilité en milieu poreux fracturé	83
6.1.1	Homogénéisation et upscaling	83
6.1.2	Perméabilité en milieu poreux fracturé	84
6.1.3	Décomposition de la contribution de la matrice et des fractures	85
6.2	Calcul de la perméabilité équivalente des fractures	87
6.2.1	Structure du réseau des fractures	87
6.2.2	Forme limite du problème cellulaire pour la perméabilité	88
6.2.3	Solution pour le problème cellulaire	89
6.2.4	Solution pour la perméabilité équivalente	89
6.2.5	Existence et unicité de solution	90
6.2.6	Démonstration de l'existence et de l'unicité d'une solution	91
6.2.7	Simulations numériques de la perméabilité équivalente	93
6.2.8	Upscaling avec "bordering"	95

7	Déplacement diphasique avec dispersion	97
7.1	Simulation de déplacement immiscible "huile-eau"	98
7.1.1	Description physique du test numérique	98
7.1.2	Description mathématique pour le cas I	99
7.1.3	Description mathématique pour les cas II et III	101
7.1.4	Résultats de simulation	102
7.1.5	Discussion	104
7.2	Dispersion dans le modèle "black-oil"	105
7.2.1	Modèle classique "black-oil" pour un déplacement "huile-gaz"	105
7.2.2	Principe d'insertion de l'effet de la dispersion dans le modèle black-oil	106
7.2.3	Transformation dans l'équation de transport pour la saturation	107
7.2.4	Introduction directe de la dispersion dans le modèle black-oil	108
7.2.5	Introduction de la dispersion par la renormalisation de la pression capillaire	109

Table des figures

2.1	Fonction $\Phi(S)$ et pression capillaire renormalisé $P_c(S)$ sous la forme adimensionnelle	39
3.1	Cellule unitaire	46
3.2	Solutions du problème pour la perméabilité effective, $\psi_1(y)$ et $\psi_2(y)$	46
3.3	Comportement caractéristique de la fonction $C(s)$	47
3.4	Solution du problème cellulaire pour le tenseur de dispersion, $\varphi_1(y)$, pour les différentes directions d'écoulement macroscopique	48
3.5	Solution du problème cellulaire pour le tenseur de dispersion, $\varphi_2(y)$, pour les différentes directions d'écoulement macroscopique	48
3.6	Dépendance de la dispersion longitudinale et ses parties convective et capillaire en fonction de la saturation pour l'écoulement macroscopique horizontal, $\times 10^{-6} m^2/s$	50
3.7	Dispersion longitudinale en fonction de la saturation pour les différentes directions d'écoulement, $\times 10^{-6} m^2/s$	50
3.8	Quatre composantes de la pression capillaire tensorielle renormalisée, $\tilde{P}_{c,ik}^f(s)$ [KPa], pour l'écoulement macroscopique orienté selon l'axe x_1 (cas 1)	53
3.9	Quatre composantes de la pression capillaire tensorielle renormalisée, $\tilde{P}_{c,ik}^f(s)$ [KPa], pour l'écoulement macroscopique orienté selon l'axe x_2 (cas 2)	54
3.10	Quatre composantes de la pression capillaire tensorielle renormalisée, $\tilde{P}_{c,ik}^f(s)$ [KPa], pour l'écoulement macroscopique orienté selon 40° par rapport à l'axe. x_1 (cas 3)	54
4.1	Structure du milieu fracturé (a) et une cellule (b)	58
4.2	Schéma pour obtenir la loi de conservation dans un nœud . . .	62

5.1	Processus variés dans un nœud : un mélange total des flux entrant (a) ; un passage indépendant des flux (b) ; un mélange partiel (c)	68
5.2	Les configurations possibles (I, II, III) et la configuration impossible (IV), pendant l'écoulement dans le secteur principal .	72
5.3	Géométries différentes des réseaux fracturés utilisés dans les simulations : les segments noirs sont plus perméables	76
5.4	Dispersivité dimensionnelle α_L^{dim} et α_T^{dim} , (m) en fonction du rapport de perméabilité $n = K_1/K_2$ pour les cas (b) et (c). . .	76
5.5	Dispersivité longitudinale, α_L , (m) en fonction de la direction du gradient de pression, $\gamma_{\nabla P}$, pour les cas (b) et (c).	77
5.6	Un milieu utilisé dans Tran (2000) (a) et dans le présent travail (b)	78
5.7	Dispersion longitudinal $\hat{D}_L/D_{in}$ en fonction de l'angle du gradient de pression, $\gamma_{\nabla P}$: 1 - solution analytique de travail présent ; 2 et 3 - simulation numérique de Tran (2000) pour $\phi=0.6$, $\phi=0.4$ respectivement.	79
6.1	La structure d'une cellule hydrodynamique	87
6.2	Simple cas d'une cellule unitaire	90
6.3	Construction du réseau de fracture pas au pas	92
6.4	Différents types d'une cellule d'hétérogénéité	94
6.5	Méthode de "bordering"	96
7.1	Domaine d'écoulement en milieu hétérogène	99
7.2	(a) – fonction $F'(s)$; (b) - courbe de diffusion capillaire, $R_c(s)$	100
7.3	Champ de la saturation d'eau en milieu hétérogène (cas I) . .	103
7.4	Saturation d'eau pour les trois cas quand $\mu=0.5$ ($t = 1$) . . .	103
7.5	Saturation d'eau pour les trois cas quand $\mu=0.1$ ($t = 1$) . . .	103

Chapitre 1

Problème de la dispersion hydrodynamique

1.1 Introduction

1.1.1 Etat de l'art et objectifs

Le déplacement d'un fluide par un autre ne peut jamais être de type piston car l'hétérogénéité du milieu détruit le front de déplacement, conduisant à la formation d'une zone de mélange entre les deux fluides. En effet, si les deux fluides sont séparés par une interface et se déplacent avec une vitesse, constante dans l'espace, ils vont se déplacer comme un corps solide, conservant la forme initiale de l'interface. Pourtant, si le champ de vitesse est hétérogène, les fluides vont être mélangés. Si en même temps nous augmentons l'échelle de considération, le mélange se manifestera d'une manière plus homogène. Pour une plus grande échelle d'observation, l'interpénétration des fluides sera similaire au processus de diffusion. Les équations d'écoulement à l'échelle macroscopique doivent alors avoir un opérateur responsable du mélange ; probablement un opérateur de diffusion. Cet effet de mélange dynamique à l'échelle macroscopique est appelé dispersion hydrodynamique.

Cet effet, aussi connu comme dispersion de Taylor, est largement étudié dans le cas monophasique. Dans un réservoir réel, où la perméabilité peut varier de plusieurs ordres, l'effet de dispersion est immense. Cet effet peut être obtenu par l'homogénéisation des équations d'écoulement au travers des hétérogénéités.

Deux propriétés évidentes de mélange sont très importantes : l'effet de mélange s'intensifie quand 1) le degré d'hétérogénéité augmente, et 2) la vitesse d'écoulement devient plus importante (dans un système immobile il n'y a pas de mélange même si le milieu est très hétérogène). Nous pouvons donc attendre des paramètres responsables du mélange, comme la dispersion hydrodynamique, de dépendre du milieu hétérogène et de la vitesse d'écoulement.

La dispersion joue un rôle similaire dans le cas d'écoulement diphasique quand les fluides sont immiscibles. Les expériences numériques, qui modélisent un déplacement diphasique en réservoir réel, montrent la formation d'une zone de mélange significative à la place du front de déplacement. Cependant, les modèles mathématiques classiques d'écoulement multiphasique en milieu poreux, comme le modèle de Buckley-Leverett, le modèle de "black oil" ou le modèle compositionnel, ne prennent pas en compte cet effet de dispersion. Dans la théorie des écoulements multiphasiques, il existe un opérateur de type diffusion qui apparaît grâce aux forces capillaires. Cette diffusivité, connue comme diffusion capillaire, n'est pourtant pas liée à la dispersion hydrodynamique et ne dépend pas de la vitesse d'écoulement. En outre, la diffusion capillaire est également presque indépendante de l'hétérogénéité du

milieu. Grâce à ces faits, la diffusion capillaire est traditionnellement étudiée comme un phénomène local, influant seulement sur la couche limite près du front de déplacement, tandis qu'en réservoir fortement hétérogène la dispersion hydrodynamique conduit à la création d'une zone de mélange énorme, comparable au domaine macroscopique.

Ces dernières années plusieurs essais ont été entrepris pour introduire la dispersion hydrodynamique dans les équations d'écoulement multiphasique, mais les premiers résultats sont assez modestes : la procédure de l'homogénéisation, appliquée pour un système non linéaire, devient très complexe et ne mène pas à des résultats constructifs. Malheureusement, ce phénomène, fortement non linéaire et difficilement compréhensible, ne laisse pas de place pour des approximations empiriques et grossières.

L'importance pratique de ce phénomène est très significative car le mélange cause un déplacement incomplet de l'huile par l'eau dans le réservoir pétrolier. Des effets similaires sont observés en hydrologie quand un polluant (NAPL), immiscible avec l'eau, pénètre dans un aquifère par mélange grâce à l'effet de dispersion.

Un autre aspect de la dispersion multiphasique concerne les simulations numériques de réservoir. Ce phénomène produit, de plus, une solution à un autre problème scientifique, lié à la prétendue dispersion numérique. Il est connu que la discrétisation numérique des équations d'écoulement produit un effet, similaire à la dispersion hydrodynamique ou à la diffusion, s'exprimant en particulier par la destruction du front de déplacement. Cet effet numérique est pourtant faux. Il y eu de multiples tentatives pour combattre cet effet. L'introduction d'une vraie dispersion physique dans les équations d'écoulement diphasique représente une méthode naturelle et puissante pour éliminer la dispersion numérique. Nos premiers résultats montrent que la vraie dispersion physique dans un réservoir gaz-condensât est beaucoup plus importante (de plusieurs ordres) que la dispersion numérique qui apparaît dans les équations classiques. L'introduction simple de la dispersion physique élimine donc le problème de dispersion numérique.

Les objectifs de ce travail sont donc de développer un modèle macroscopique d'écoulement diphasique en milieu poreux tout en gardant l'effet du mélange, d'obtenir une description quantitative des paramètres macroscopiques responsables du mélange et d'analyser les propriétés de mélange diphasique dans différentes situations physiques.

1.1.2 A propos de la théorie actuelle de dispersion hydrodynamique

Le problème de comment décrire l'effet de dispersion hydrodynamique a d'abord été résolu par Taylor, qui a examiné le transport d'un traceur par l'eau dans un tube uniforme. Un profil de vitesse non uniforme (parabolique pour l'écoulement de Poiseuille) produit une pénétration de l'eau tracée dans l'eau pure, formant une zone de transition, laquelle peut être considérée comme un mélange homogène à grande échelle. Prenant la moyenne d'écoulement à travers une section transversale du tube, Taylor a obtenu la description du mélange sous la forme d'un opérateur de diffusion avec un tenseur de diffusion apparent, proportionnel au carré de la vitesse et au carré du diamètre du tube. Cet effet est connu comme la dispersion de Taylor.

Le transport de traceur en milieu poreux est plus complexe car il y a un effet de dispersion qui apparaît à deux échelles différentes. Premièrement, la dispersion de Taylor est observée dans chaque pore. Cet effet est d'ordre ε_2^2 , où ε_2 est le rayon moyen des pores. Deuxièmement, la dispersion est produite par l'hétérogénéité de la vitesse moyenne de pore, laquelle peut être appelée l'hétérogénéité à l'échelle mesoscopique. La description de cette dispersion à l'échelle mesoscopique est obtenue dans plusieurs articles par prise de moyenne volumique des équations de transport de traceur : Nikolaevsky (1995), Plumb and Whitaker (1990), Adler (1992), Auriault and Adler (1995). Le paramètre de dispersion a été montré proportionnel à la grandeur d'échelle mesoscopique, ε .

La situation devient plus complexe si les propriétés de fluide (masse volumique et viscosité) dépendent de la concentration. Il est montré expérimentalement, Buès and Zilliox (1990), que le paramètre de dispersion dépend en plus de la distance parcourue.

Le cas d'écoulement diphasique et le phénomène de mélange similaire sont moins étudiés. Il y a nombre d'articles, dédiés à l'homogénéisation de l'écoulement diphasique en milieu poreux, comme Bourgeat (1996), Panfilov (2000), Quintard and Whitaker (1988), Saez et al. (1989), néanmoins, le phénomène de dispersion n'y a pas été obtenu. L'explication est la suivante : le modèle homogénéisé est obtenu comme une limite mathématique du processus quand $\varepsilon \mapsto 0$, ou comme une approximation d'ordre zéro d'expansion asymptotique. Dans le même temps, comme décrit au-dessus, la dispersion hydrodynamique en milieu poreux est d'ordre ε . Pour la prendre en compte, un modèle du premier ordre, incluant un terme $O(\varepsilon)$, doit être développé. Dans ces articles, cités au-dessus, l'objectif était seulement l'approximation du premier ordre.

Pour obtenir la dispersion comme une approximation d'ordre zéro, la

vitesse de transport, V , est fréquemment renormalisé de manière à devenir d'ordre ε^{-1} , Bourgeat (2000), Showalter and Walkington (1991). Dans ce cas le paramètre de dispersion, proportionnel à εV , sera d'ordre 1. Cette renormalisation ne change rien aux techniques des dérivations, mais elle peut être utile pour justifier rigoureusement la convergence. Une autre possibilité pour maintenir la dispersion comme une approximation du premier ordre est de considérer un milieu fortement hétérogène (amplitude d'hétérogénéité importante), comme montré dans Panfilov (2000).

Le deuxième obstacle sérieux dans le problème de dispersion diphasique est causé par la non périodicité (ou non stationnarité stochastique) du champ de vitesse. C'est une propriété typique d'un système diphasique, même si le milieu est périodique (ou stochastiquement stationnaire). Il est connu que les expressions constructives et closes pour le tenseur de dispersion sont seulement obtenues dans le cas où la vitesse est périodique ou stochastiquement homogène. Autrement, le tenseur de dispersion dépend des variables spatiales à l'échelle macroscopique et devient donc non local. Le problème est alors de trouver les cas dans lesquels il peut être localisé.

L'analyse numérique du mélange diphasique est présenté dans Lenormand (2000) et Artus and Noetinger (2002), où les propriétés particulières de la zone de mélange sont détectées. Dans Lenormand (2000) le paramètre de dispersion est montré comme une fonction non monotone de la saturation.

1.1.3 Etude théorique du mélange diphasique

Trois approches théoriques différentes pour obtenir explicitement le paramètre de dispersion hydrodynamique sont connues.

La première est basée sur la formulation de Lagrange des équations d'écoulement, qui représente une relation simple pour la distance parcourue par une particule individuelle de liquide, $X(t)$, via la vitesse locale de transport. Dans la théorie classique de diffusion, le paramètre de diffusion pour un champ gaussien est proportionnel à la moyenne du carré de X . Par analogie, le tenseur de dispersion diphasique peut être obtenu comme le deuxième moment statistique de X . Cette approche s'est justifiée pourtant que pour un champ de vitesse gaussien. C'est pourquoi, les tentatives pour appliquer cette méthode pour un écoulement diphasique dans Cvetkovich and Dagan (1996), Zhang and Tchelepi (1999) et Zhang (1997) peuvent être considérées comme très approximatives. Une méthode similaire est utilisée dans Lenormand (1995) pour un réseau de canaux poreux non uniformes, où la distance parcourue et le temps sont calculés directement.

La deuxième approche utilise la formulation d'Euler et la prise de moyenne directe des équations différentielles d'écoulement. Des tentatives pour obtenir

les paramètres du mélange par la prise de moyenne des équations d'écoulement diphasique ont été entreprises dans plusieurs articles, lesquels doivent être groupé dans des classes différentes, dépendant du cas étudié et de la technique utilisée.

Pour un milieu faiblement hétérogène (faible amplitude d'hétérogénéité), une technique de perturbation classique est appliquée dans Langlo and Espedal (1994), Neuweiler et al. (2003) et Jarman (2000). Les valeurs moyennes peuvent être déterminées comme la limite quand l'amplitude d'hétérogénéité tend vers zéro. Cette technique asymptotique est développée en plusieurs versions dans Monin and Yaglom (1965), Shvidler (1985), Gelhar (1993). Le milieu poreux est toujours examiné comme stochastiquement stationnaire et ergodique. Dans tout ces articles les forces capillaires sont négligées et l'écoulement est $1D$ à l'échelle macroscopique. Dans Langlo and Espedal (1994) le champ de vitesse totale est considéré stochastiquement stationnaire et la fonction d'autocorrélation de vitesse a une forme particulière. A cause de ces suppositions, les résultats doivent être considérés comme très approximatifs. Dans Neuweiler et al. (2003) la fonction d'autocorrélation est plus générale, mais elle reste stochastiquement stationnaire. Une autre expression est alors obtenue pour le paramètre de dispersion. Dans Jarman (2000) la fonction d'autocorrélation n'est pas stationnaire.

Pour homogénéiser un écoulement dans un milieu fortement hétérogène, d'autres méthodes doivent être appliquées. La méthode d'homogénéisation convergente à deux échelles est utilisée dans Bourgeat (2000). Le modèle macroscopique est obtenu comme une limite à deux échelles des équations initiales d'écoulement quand l'échelle d'hétérogénéité, ε , tend vers 0. La limite à deux échelles est utilisée sous la forme de la convergence à deux échelles, introduite dans Ngutseng (1989). Seulement un écoulement $1D$ est considéré en milieu périodique. Cet article est la première tentative pour obtenir un résultat rigoureux, concernant le problème de dispersion diphasique. Les équations à l'échelle macroscopique sont pourtant obtenues sous la forme d'opérateur, où l'effet de dispersion est observé implicitement.

Certaines idées constructives sont développées dans Glimm et al. (1998), où un écoulement diphasique ne prenant pas en compte la force capillaire est considéré. Les simulations numériques ont montré que le mélange hydrodynamique peut être décrit non seulement sous la forme de dispersion hydrodynamique (prise de moyenne parabolique), mais il peut aussi produire des modifications sérieuses dans le terme convectif, déterminé par la fonction de l'écoulement fractionnaire, $F(s)$ (prise de moyenne hyperbolique). En particulier, pour un écoulement avec digitation, il est recommandé d'utiliser un modèle, obtenu par prise de moyenne hyperbolique pure, sans aucune dispersion. La fonction moyenne de $f(s)$ est obtenue par des simulations nu-

mériques. En général, cette fonction diffère de la fonction $F(s)$ à l'échelle microscopique, mais dans certains cas particuliers elle peut être approximée par l'enveloppe convexe de $F(s)$.

Dans la troisième approche, dédiée à l'étude de la dispersion hydrodynamique, la solution des équations de transport est moyennée sous la forme d'un opérateur explicite. Généralement, cette solution est exprimée à l'aide d'une fonction de Green, qui peut être appliquée seulement dans le cas linéaire (transport du traceur). Le problème de prise de moyenne est donc réduit pour déterminer une fonction de Green moyenne. Même dans le cas linéaire, ce problème peut être résolu de manière exacte uniquement pour un milieu faiblement hétérogène et un champ de vitesse gaussien, Teodorovich (1991), en appliquant une technique de perturbation. Si le degré d'hétérogénéité est arbitraire, l'équation intégral-différentielle peut être obtenue pour la fonction de Green moyenne, comme par exemple dans Zhang (1997), mais cela ne mène pas à des résultats constructifs. Malheureusement, cette technique élégante, bien développée en physique théorique, ne peut pas être appliquée pour des équations diphasiques non linéaires. De manière générale, aucune technique basée sur un formalisme de Feynman, Feynman (1954), qui introduirait une transformation de mesure de probabilité, afin d'éliminer le terme convectif, ne pourrait être appliquée à ce cas.

1.1.4 Dispersion diphasique comme une fonction de la saturation

Concernant le problème de dispersion diphasique, des résultats contradictoires ont été obtenus dans Langlo and Espedal (1994) d'un côté, et dans Buès and Panfilov (2002), Neuweiler et al. (2003) et Panfilov (2000) de l'autre côté. Dans Langlo and Espedal (1994) la dispersion longitudinale en milieu stochastique faiblement hétérogène a été montrée proportionnelle au carré de la dérivée de la fonction d'écoulement fractionné :

$$D \sim (F')^2. \quad (1.1)$$

Cependant, dans Panfilov (2000), puis dans Buès and Panfilov (2002), ce même paramètre dans un milieu périodique avec n'importe quel degré d'hétérogénéité est proportionnel à la dérivée de $F(s)$:

$$D \sim F'. \quad (1.2)$$

Un résultat similaire, opposé à celui de Langlo and Espedal (1994), a été obtenu plus tard par Neuweiler et al. (2003) pour un milieu stochastique faiblement hétérogène. Comparé aux simulations numériques, les résultats de

Neuweiler et al. (2003), bien que restant assez approximatifs, se sont révélés beaucoup plus précis que ceux de Langlo and Espedal (1994). Il est donc clair que la relation (1.2) peut être utilisée comme une loi assez universelle indépendante du type de milieu hétérogène. Dans le même temps, ce résultat n'est confirmé que pour le cas d'un écoulement $1D$ en négligeant la force capillaire et la gravité.

1.1.5 Méthode de l'homogénéisation

L'homogénéisation est une méthode rigoureuse pour calculer les équations homogènes à grande échelle, en approchant les équations initiales hétérogènes.

Le terme "homogénéisation" a été employé pour la première fois par Sanchez-Palencia (1972). Il a montré que la loi de Darcy peut être obtenue comme le résultat de l'homogénéisation des équations de Stokes par des développements asymptotique.

Les bases de la méthode ont été largement développées dans Bakhvalov (1977) et Bensoussan et al. (1978). Une application de la théorie de l'homogénéisation à la mécanique a été étudiée par Sanchez-Palencia (1980) et Bakhvalov and Panasenko (1989). La méthode est également décrite dans Allaire (1992). Une approche plus mécanique a été proposée dans Auriault (1991).

1.2 Problème de l'écoulement diphasique en milieu hétérogène

1.2.1 Equations de l'écoulement diphasique

Examinons un écoulement diphasique dans le milieu poreux Ω à une échelle telle que le point mathématique du milieu correspond à un volume représentatif élémentaire physique, ce dernier contenant un grand nombre de pores. Le milieu est alors caractérisé par la perméabilité absolue, K , et par la porosité, ϕ , tandis que l'écoulement est décrit par la loi de Darcy. Les fluides sont incompressibles, le milieu est non déformable et les forces capillaires sont faibles sans être, pour autant, négligeables. Le domaine Ω est borné, continue et présente une frontière lisse par parties. La longueur caractéristique du domaine est L^* . Les équations d'écoulement sont la conservation de la masse et du moment (sous la forme de la loi de Darcy) pour les deux phases :

$$\begin{aligned} \phi \frac{\partial s}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{v}_\alpha &= 0, & -\phi \frac{\partial s}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{v}_\beta &= 0, \\ \mathbf{v}_\alpha &= -\frac{K k_\alpha(s)}{\mu_\alpha} \operatorname{grad} p_\alpha, & \mathbf{v}_\beta &= -\frac{K k_\beta(s)}{\mu_\beta} \operatorname{grad} p_\beta, \\ p_\beta - p_\alpha &= \frac{1}{C_a} P_c(s), \end{aligned} \quad (1.3)$$

où α et β sont les indices des phases ; s est la saturation de phase α ; $k_i(s)$ est la perméabilité relative ; K est la perméabilité absolue ; μ_i est la viscosité dynamique ; $\mathbf{v}_i$ et p_i sont respectivement la vitesse de Darcy et la pression de chaque phase, P_c est la pression capillaire. Toutes les variables sont adimensionnelles, les grandeurs caractéristiques des variables conformes avec dimensions sont donc :

$$L^*, \quad \Delta p^*, \quad \mu^*, \quad v^* = \frac{K^* \Delta p^*}{\mu^* L^*}, \quad P_c^*, \quad \frac{L^*}{v^*}, \quad K^*$$

respectivement pour les coordonnées d'espace, différence de pression, viscosités, vitesses d'écoulement, pression capillaire, temps et perméabilité absolue. Le paramètre Δp^* est la chute caractéristique de pression, qui peut être déterminée à travers les conditions aux limites.

Les perméabilités relatives sont des fonctions monotones, variant entre 0 et 1, de telle façon que la fonction $k_\alpha(s)$ est croissante et k_β est décroissante. La pression capillaire, $P_c(s)$, est une fonction diminuant de manière monotone, variant de $+\infty$ vers 0.

Le nombre capillaire $Ca = \Delta p^* / P_c^*$ (ou le nombre de Péclet) représente un rapport entre la chute caractéristique de pression et la pression capillaire moyenne. Dans ce travail nous examinons le cas de grand Ca .

Ce système d'équations est largement utilisé dans la science pétrolière pour décrire un écoulement d'eau (phase α) et d'huile (phase β), ou dans l'hydrogéologie pour décrire le transport d'eau souterraine (phase α) et de NAPL ou d'air (phase β).

Supposons que le milieu est hétérogène à l'échelle considérée, c'est-à-dire que la perméabilité et la porosité sont les variables oscillant rapidement dans l'espace : $K = K(x/\varepsilon)$ et $\phi = \phi(x/\varepsilon)$, où $\varepsilon = l^* / L^*$ est l'échelle adimensionnelle d'hétérogénéité. Plus strictement, la perméabilité et la porosité sont supposées périodiques, ε est donc la période d'hétérogénéité. Les perméabilités relatives et la pression capillaire peuvent être hétérogènes dans l'espace. Dans ce travail nous supposons pourtant ces fonctions comme uniformes.

1.2.2 Conditions aux limites et conditions initiales

Nous examinons une famille de processus de déplacement de fluides. Cette famille est décrite par les conditions initiales du type suivant :

$$s \Big|_{t=0} = s^0(x) \quad (1.4a)$$

et par les conditions aux limites :
soit

$$p \Big|_{\partial\Omega} = p_*(x, t) \quad (1.4b)$$

soit

$$p \Big|_{\partial\Omega_1} = p_*(x, t), \quad \frac{\partial p}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega_2} = r_*(x, t), \quad (1.4c)$$

où $\partial\Omega_1$ et $\partial\Omega_2$ sont deux parties disjointes de la frontière $\partial\Omega = \partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2$.

Les fonctions s^0 , p_* et r_* sont supposées satisfaire les propriétés suivantes. La pression à la frontière, p_* , est continue par rapport à x . Selon le principe de maximum appliqué pour l'équation elliptique dans (1.3), les valeurs maximales et minimales de pression sont atteinte sur la frontière. Si p_* est constante, les pressions maximales et minimales sont identiques, la pression est alors constante partout dans Ω , il n'y a donc pas d'écoulement. Pour garantir un processus d'écoulement, la fonction p_* doit donc être variable dans

l'espace. La différence entre les valeurs maximales et minimales, Δp , détermine la vitesse caractéristique et la direction dominante de l'écoulement. La valeur dimensionnelle correspondante, $\overline{\Delta P}$, peut être utilisée pour déterminer la grandeur P^* , introduite plus haut. La valeur adimensionnelle Δp , apparaissant dans le problème (1.3) - (1.4c), n'est pas un nouveau paramètre du processus. En effet, le système (1.3) est invariable lors d'un décalage de pression : le changement de variable $p' = p - C$, où C est une constante, ne change rien dans (1.3). En désignant C comme $C = p_{min}$, nous obtenons le même système (1.3), qui est écrit pour p' , mais avec un nouveau $\Delta p'$, étant maintenant égal à 1.

La fonction initiale s^0 est continue partout, sauf éventuellement au front initial de déplacement qui présenterait alors une surface de discontinuité Γ^0 . La surface Γ^0 divise le domaine en deux parties disjointes Ω^- et Ω^+ de manière que Ω^- contienne toujours le point de pression maximale tandis que Ω^+ contienne le point de pression minimale. Notons par s^{0-} et s^{0+} les valeurs de la fonction s^0 dans la discontinuité Γ^0 , définies respectivement dans Ω^- et dans Ω^+ . On suppose que $s^{0-} > s^{0+}$, ce qui signifie que la phase *beta* est déplacée par la phase α .

Ce problème a une solution unique lisse, selon Antontsev and Monakhov (1969), quand la fonction initiale s^0 est lisse. Le problème avec la fonction s^0 discontinue c'est qu'elle n'a une solution discontinue que si deux conditions additionnelles sont ajoutées : la condition de Hugoniot, représentant une analogie intégrale de la première équation différentielle (1.3) dans la zone extrêmement étroite autour de la discontinuité, et la condition d'entropie, qui dit que l'entropie du système doit s'agrandir en passant à travers la discontinuité.

L'objectif de cette recherche est de dériver les équations qui décrivent l'écoulement en milieu homogénéisé et qui sont équivalentes aux équations originales (1.3) de façon moyenné. Nous nous sommes intéressés à dériver un modèle macroscopique qui soit universel, c'est-à-dire qu'il ne dépend pas des conditions aux limites et des conditions initiales. Autrement dit, les propriétés de ces fonctions initiales ne doivent pas perturber le comportement macroscopique. D'habitude, cela est a priori satisfait si ces fonctions n'introduisent pas de grands ou petits paramètres dans le système. Les cas instables du point de vue hydrodynamique ne sont pas considérés.

1.2.3 Formulation sous la forme de pression moyenne

En introduisant la *pression globale*

$$p = p_1 F + p_2(1 - F) + \frac{1}{Ca} \int_0^s P_c(s') \frac{dF}{ds'} ds', \quad (1.5)$$

le problème initial (1.3) peut être écrit sous la forme

$$\begin{aligned} \phi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \frac{\partial s}{\partial t} + \mathbf{v} \text{grad} F(s) &= \frac{1}{Ca} \text{div} \left(K\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) R_c(s) \text{grad} s \right), \\ \text{div } \mathbf{v} &= 0, \\ \mathbf{v} &= -K\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \lambda(s) \text{grad} p, \end{aligned} \quad (1.6)$$

où

$$F(s) = \frac{k_1(s)/\mu_1}{k_1(s)/\mu_1 + k_2(s)/\mu_2}, \quad \lambda(s) = \frac{k_1}{\mu_1} + \frac{k_2}{\mu_2}, \quad R_c(s) = -\frac{F k_2}{\mu_2} \frac{dP_c}{ds}.$$

Ici $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ est la vitesse totale d'écoulement des deux phases; $F(s)$ est la fonction de l'écoulement fractionné (ou la fonction de Buckley-Leverett), qui est égale à la fraction volumique de la première phase dans l'écoulement total; $R_c(s)$ est la diffusion capillaire.

La première équation de système (1.6) est du type convection-diffusion en fonction de saturation s , quand la vitesse $\mathbf{v}$ est donnée. La deuxième équation est elliptique en fonction de pression, si la saturation est donnée.

L'extrémité droite de l'équation convection-diffusion (1.6) va être appelée la diffusion capillaire, car elle est produite par les forces capillaires. On sait que pour l'équation de convection-diffusion, l'effet de la dispersion peut être capturé si la convection domine sur la diffusion Panfilov (2000). Afin d'éviter d'utiliser les conditions de Hugoniot et d'entropie, mentionnées dans la section 1.2.2, nous allons garder le terme de diffusion capillaire, mais en supposant pourtant que la capillarité est faible :

$$\frac{1}{\varepsilon} \ll Ca \ll \frac{1}{\varepsilon^2}. \quad (1.7)$$

Chapitre 2

Homogénéisation du premier ordre de l'écoulement diphasique

2.1 Homogénéisation du premier ordre de l'écoulement diphasique sans forces capillaires

Nous commençons notre analyse en examinant l'écoulement sans forces capillaires, qui semble être plus simple. La technique d'homogénéisation, développée dans cette section, va être utilisée pour étudier l'écoulement plus complexe avec forces capillaires (section 2.2).

2.1.1 Particularité de problème sans forces capillaires

Pour le cas sans forces capillaires et gravitaires, le problème (1.3) peut être simplifié :

$$\begin{aligned} \phi \frac{\partial s}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{v}_1 &= 0, & -\phi \frac{\partial s}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{v}_2 &= 0, \\ \mathbf{v}_1 &= -K \frac{k_1(s)}{\mu_1} \operatorname{grad} p, & \mathbf{v}_2 &= -K \frac{k_2(s)}{\mu_2} \operatorname{grad} p, \end{aligned} \quad (2.1)$$

où s est la saturation de la première phase ; k_i est la perméabilité relative ; ϕ est la porosité du milieu ; μ_i est la viscosité du fluide.

Le système (2.1) peut être facilement transformé sous la forme équivalente suivante :

$$\begin{cases} \phi \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \frac{\partial s}{\partial t} + v_i \frac{\partial F(s)}{\partial x_i} = 0, \\ \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0, \\ v_i = -K \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) B(s) \frac{\partial p}{\partial x_i}, \end{cases} \quad (2.2)$$

$$F(s) = \frac{k_1(s)/\mu_1}{k_1(s)/\mu_1 + k_2(s)/\mu_2}; \quad \lambda(s) = \frac{k_1(s)}{\mu_1} + \frac{k_2(s)}{\mu_2}; \quad \varepsilon = \frac{l}{L}.$$

Ici $\mathbf{v} \equiv \{v_i\} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ est la vitesse totale des deux phases ; $\lambda(s)$ est la fonction de mobilité totale, $F(s)$ est la fonction de l'écoulement fractionné, qui est égale à la fraction volumique de la première phase dans le débit de l'écoulement total.

La première équation dans le système (2.2) est hyperbolique du premier ordre en fonction de la saturation s , quand la vitesse v est donnée. La deuxième équation est elliptique en fonction de la pression, si la saturation est donnée.

2.1.2 Homogénéisation. Algorithme général

La technique d'homogénéisation suivante sera appliquée :

- i) la variable y dans (2.2), responsable des oscillations microscopiques, sera considérée comme indépendante (séparation des échelles) ;
- ii) le système sera reformulé sous une forme à deux échelles ;
- iii) la solution de ce système sera construite sous la forme de série asymptotique régulière quand $\varepsilon \rightarrow 0$. Les équations homogénéisées, capables de capturer l'effet de dispersion, correspondent à la première approximation, c'est-à-dire de l'ordre de $O(\varepsilon)$.

2.1.3 Formulation à deux échelles

Nous remplaçons des fonctions $s(x, t)$, $v_i(x, t)$ et $p(x, t)$ par les fonctions à deux échelles $s(x, y, t)$, ..., et l'opération de différentiation $\partial/\partial x_i$ par $\partial/\partial x_i + (1/\varepsilon)\partial/\partial y_i$, réalisant certaines transformations arithmétique du système. Après l'introduction des variables adimensionnelles, nous obtenons une formulation équivalente à deux échelles pour le système (2.2) :

$$\begin{aligned} \phi(y) \frac{\partial s}{\partial t} + v_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial y_i} \right) F(s) &= 0, \\ \frac{\partial v_i}{\partial x_i} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial v_i}{\partial y_i} &= 0, \\ v_i &= -K(y) \lambda(s) \left(\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial p}{\partial y_i} \right). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Ce système est considéré dans $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^3$, $y \in Y$, $0 < t < T$, où $Y = \{0 \leq y_i \leq 1, i=1, 2, 3\}$ est une cellule d'hétérogénéité. Toutes les fonctions sont 1-périodiques sur y .

Nous nous sommes intéressés à trouver une solution périodique par rapport à y . Les conditions nécessaires à l'existence d'une solution périodique sont :

$$\left\langle \phi \frac{\partial s}{\partial t} \right\rangle + \frac{\partial}{\partial x_i} \langle v_i F(s) \rangle = 0, \quad \frac{\partial \langle v_i \rangle}{\partial x_i} = 0. \quad (2.4)$$

Le problème à deux échelles est régulier par rapport à ε . La procédure suivante consiste en l'application de technique de perturbation régulière. Autrement dit, la solution est construite sous la forme de série asymptotique à deux échelles :

$$\begin{aligned} s(x, y, t) &= s_0(x, t) + \varepsilon s_1(x, y, t) + \varepsilon^2 \dots \\ v_i(x, y, t) &= v_{i0}(x, y, t) + \varepsilon v_{i1}(x, y, t) + \varepsilon^2 \dots \quad i=1, 2, 3. \\ p(x, y, t) &= p_0(x, t) + \varepsilon p_1(x, y, t) + \varepsilon^2 \dots \end{aligned} \quad (2.5)$$

2.1.4 A propos de l'ordre du modèle macroscopique

Si $\langle s \rangle$ est la saturation moyenne, s' est la fluctuation de la moyenne, nous pouvons alors écrire

$$s = \langle s \rangle + s'.$$

Il est nécessaire de noter que dans (2.5) le terme d'ordre zéro n'est pas égal à $\langle s \rangle$, comme cela a été montré dans Panfilov (2000). Les approximations d'ordre plus élevées contribuent aussi à $\langle s \rangle$:

$$\langle s \rangle = s_0 + \varepsilon \langle s_1 \rangle + \varepsilon^2 \langle s_2 \rangle + \dots$$

La valeur $\sum_{k=0}^n \varepsilon^k \langle s_k \rangle$ sera appelée l'approximation d'ordre n de la saturation moyenne. Un modèle macroscopique sera appelé d'ordre n , s'il décrit le comportement de l'approximation d'ordre n de $\langle s \rangle$.

Pour conserver l'effet de dispersion, nous devons construire un modèle macroscopique du premier ordre.

2.1.5 Equations moyennes non fermées

La substitution des expansions (2.5) dans les relations intégrales (2.4) nous donne les équations basiques de première approximation, qui définissent la structure du modèle macroscopique :

$$\langle \phi \rangle \frac{\partial s_0}{\partial t} + \langle v_{i0} \rangle \frac{\partial F_0}{\partial x_i} = 0, \quad \frac{\partial \langle v_{i0} \rangle}{\partial x_i} = 0, \quad (2.6a)$$

$$\left\langle \phi \frac{\partial s_1}{\partial t} \right\rangle + \frac{\partial}{\partial x_i} \langle v_{i1} F_0 + v_{i0} F_1 \rangle = 0, \quad \frac{\partial \langle v_{i1} \rangle}{\partial x_i} = 0, \quad (2.6b)$$

Ici la notation suivante est utilisée : soit $f=f(s)$ une fonction arbitraire de saturation, alors

$$f_0 = f(s_0), \quad f_1 = \frac{df}{ds}(s_0) s_1. \quad (2.7)$$

En introduisant les quantités du premier ordre

$$\begin{aligned} S &= s_0 + \varepsilon \langle s_1 \rangle, \\ P &= p_0 + \varepsilon \langle p_1 \rangle, \\ \mathbf{V} &= \langle \mathbf{v}_0 \rangle + \varepsilon \langle \mathbf{v}_1 \rangle, \end{aligned} \quad (2.8)$$

nous obtenons les équations moyennées d'écoulement de (2.6) suivantes :

$$\begin{aligned} \langle \phi \rangle \frac{\partial S}{\partial t} + V_k \frac{\partial F(S)}{\partial x_k} = \\ -\varepsilon \left\{ \frac{\partial}{\partial t} (\langle \phi s_1 \rangle - \langle \phi \rangle \langle s_1 \rangle) + \frac{\partial}{\partial x_i} \langle v_{i0} F_1 \rangle - \langle v_{i0} \rangle \frac{\partial \langle F_1 \rangle}{\partial x_i} \right\}, \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial V_i}{\partial x_i} = 0. \quad (2.10)$$

Pour fermer ce système, les fonctions de première approximation, v_{i1} , s_1 de même que F_1 , représentant les oscillation provoqués par l'hétérogénéité, doivent être déterminées.

2.1.6 Fonctions oscillantes

Les fonctions oscillantes sont déterminées automatiquement à partir de la procédure asymptotique en substituant (2.5) dans (2.3) :

$$\begin{aligned} \phi \frac{\partial s_0}{\partial t} + v_{i0} \left(\frac{\partial F_1}{\partial y_i} + \frac{\partial F_0}{\partial x_i} \right) &= 0, \\ \frac{\partial v_{i0}}{\partial y_i} &= 0, \quad \frac{\partial v_{i1}}{\partial y_i} = - \frac{\partial v_{i0}}{\partial x_i}, \\ v_{i0} &= -K(y) \lambda_0 \left(\frac{\partial p_0}{\partial x_i} + \frac{\partial p_1}{\partial y_i} \right), \\ v_{i1} &= -K(y) \lambda_0 \left(\frac{\partial p_1}{\partial x_i} + \frac{\partial p_2}{\partial y_i} \right) - K(y) \lambda_1 \left(\frac{\partial p_0}{\partial x_i} + \frac{\partial p_1}{\partial y_i} \right). \end{aligned} \quad (2.11)$$

Les formulations suivantes sont donc définies :

$$\begin{aligned} s_1 &= \varphi_k(x, y, t) \frac{\partial s_0}{\partial x_k} + s_{10}(x, t), \\ p_1 &= \psi_k(y) \frac{\partial p_0}{\partial x_k} + p_{10}(x, t), \\ v_{i0} &= -K(y) \lambda_0 \frac{\partial p_0}{\partial x_k} \left(\frac{\partial \psi_k}{\partial y_i} + \delta_{ki} \right). \end{aligned}$$

Les fonction cellulaires, $\psi_j(y)$ et $\varphi_k(x, y, t)$ pour tout les k et j , sont les solutions des problèmes cellulaires suivants :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial y_i} \left(K(y) \left(\frac{\partial \psi_k}{\partial y_i} + \delta_{ki} \right) \right) = 0, \\ \langle \psi_k \rangle = 0, \quad \psi_k \text{ est périodique selon } y. \end{cases} \quad (2.12)$$

$$\begin{cases} v_{i0} \left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial y_i} + \delta_{ki} \right) - \frac{\phi \langle v_{k0} \rangle}{\langle \phi \rangle} = 0, \\ \langle \varphi_k \rangle = 0, \quad \varphi_k \text{ est périodique selon } y. \end{cases} \quad (2.13)$$

Notons que le problème (2.13) définit la valeur φ_k comme une fonction des variables rapides, y , avec une dépendance paramétrique par rapport aux variables lentes, (x, t) . Dans certains cas particuliers, cette fonction ne dépend pas des variables rapides, comme nous allons le démontrer.

2.1.7 Modèle homogénéisé : dérivations

En substituant les résultats obtenus pour les fonctions oscillantes dans (2.9) et (2.10), nous obtenons la relation pour le terme d'ordre $O(\varepsilon)$ que l'on nomme comme $-M\varepsilon$:

$$M = \frac{\partial}{\partial t} \left([\langle \phi \varphi_k \rangle - \langle \phi \rangle \langle \varphi_k \rangle] \frac{\partial s_0}{\partial x_k} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left([\langle \varphi_k v_{i0} \rangle - \langle \varphi_k \rangle \langle v_{i0} \rangle] \frac{\partial F_0}{\partial x_k} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\langle \phi \varphi_k \rangle \frac{\partial s_0}{\partial x_k} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\langle \varphi_k v_{i0} \rangle \frac{\partial F_0}{\partial x_k} \right).$$

Le premier terme peut être représenté sous la forme :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(B_k \frac{\partial s_0}{\partial x_k} \right) = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(B_k \frac{\partial s_0}{\partial t} \right) + \frac{\partial B_k}{\partial t} \frac{\partial s_0}{\partial x_k} - \frac{\partial s_0}{\partial t} \frac{\partial B_k}{\partial x_k}.$$

En introduisant (2.6a), nous pouvons modifier la dernière relation :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(B_k \frac{\partial s_0}{\partial x_k} \right) &= \frac{\partial}{\partial x_k} \left(-\frac{B_k \langle v_{i0} \rangle}{\langle \phi \rangle} \frac{\partial F_0}{\partial x_i} \right) + \\ &\quad \frac{\partial B_k}{\partial t} \frac{\partial s_0}{\partial x_k} - \frac{\partial B_k}{\partial x_k} \left(-\frac{\langle v_{i0} \rangle}{\langle \phi \rangle} \frac{\partial F_0}{\partial x_i} \right). \end{aligned}$$

2.1.8 Equation générale homogénéisée de transport

En réarrangeant les dernières relations avec (2.9) et (2.10), nous obtenons les équations moyennées du premier ordre pour un écoulement diphasique :

$$\langle \phi \rangle \frac{\partial S}{\partial t} + [V_k + \Delta V_k] \frac{\partial F(S)}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\widehat{D}_{ik} \frac{\partial S}{\partial x_k} \right), \quad (2.14a)$$

$$\frac{\partial V_i}{\partial x_i} = 0. \quad (2.14b)$$

Le tenseur de dispersion de deuxième rang est défini comme :

$$\widehat{D}_{ik} = \varepsilon F'_s(S) \left[\frac{\langle \phi \varphi_i \rangle V_k}{\langle \phi \rangle} - \langle \varphi_k v_i \rangle \right]. \quad (2.15)$$

La valeur ΔV est la correction de la vitesse moyenne de transport, causée par le champ de vitesse non stationnaire et non périodique :

$$\Delta V_k = \varepsilon \left\{ \frac{V_k}{\langle \phi \rangle} \frac{\partial \langle \phi \varphi_i \rangle}{\partial x_i} + \frac{1}{F'_s(S)} \left\langle \phi \frac{\partial \varphi_k}{\partial t} \right\rangle \right\}. \quad (2.16)$$

2.1.9 Conditions homogénéisées aux limites et initiales

Les conditions aux limites homogénéisées gardent la même forme que les conditions originales grâce à une structure spéciale de la frontière sans perturbation de la périodicité. La condition d'entropie, mentionnée plus tôt, est automatiquement satisfaite à grande échelle car le phénomène de dispersion produit une dissipation d'énergie, accompagnée par une augmentation d'entropie.

En même temps, les conditions initiales ne peuvent être satisfaites en première approximation. En effet, en utilisant les résultats de la section 2.1.6, nous pouvons obtenir de (1.4a) :

$$s_0(x, t) \Big|_{t=0} = s^0(x), \quad s_{10}(x, t) \Big|_{t=0} = -\varphi_k(x, t, y) \frac{\partial s_0}{\partial x_k} \Big|_{t=0}.$$

La saturation moyenne est donc :

$$S(x, t) \Big|_{t=0} = s^0(x) - \varepsilon \varphi_k(x, t, y) \frac{\partial S}{\partial x_k} \Big|_{t=0}. \quad (2.17)$$

Cette relation est impossible car l'extrémité gauche n'est une fonction que de x , tandis que l'extrémité droite dépend de x et y .

Le modèle obtenu est donc valide seulement hors de la couche frontière, formée aux alentours du point initial $t=0$, c'est-à-dire quand $t \gg \varepsilon$. Cette limitation du modèle obtenu est pourtant naturelle car les phénomènes de dispersion et de diffusion sont traditionnellement examinés sous la limite $t \rightarrow \infty$.

Pour obtenir un modèle, validé à tous les temps, il est nécessaire d'effectuer de nouveau l'homogénéisation en introduisant le temps rapide, $\tau=t/\varepsilon$, en même temps que le temps lent t . Une autre méthode consiste à développer un deuxième modèle, validé seulement dans la couche limite : la première étape est d'introduire le temps à une autre échelle $\tau=t/\varepsilon$, à la place de t , et la deuxième étape est de mettre en concordance les deux modèles.

L'équation macroscopique (2.14a) doit donc satisfaire les conditions de concordance avec le modèle de couche limite. Très souvent dans les cas linéaires, ces conditions peuvent être équivalentes aux conditions aux limites originales, transférées à grande échelle : $S(x, t)|_{t=0} = s^0(x)$, Panfilov (2000). Pour les systèmes non linéaires cela doit être vérifié dans chaque cas.

2.2 Homogénéisation de l'écoulement diphasique avec les forces capillaires

2.2.1 Formulation à deux échelles

Selon la méthode à deux échelles, nous considérons les variables rapides, $y_i = x_i/\varepsilon$, et les variables lentes, x_i , comme indépendantes. Dans les nouvelles coordonnées l'opérateur de dérivation est transformé en :

$$\frac{d}{dx_k} f\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial x_k} f(x, y) + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial y_k} f(x, y) \right) \Big|_{y=x/\varepsilon}. \quad (2.18)$$

Le système d'équations (1.6) prend donc la forme :

$$\begin{aligned} \phi \frac{\partial s}{\partial t} + v_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial y_i} \right) F(s) = \\ \frac{1}{Ca} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial y_i} \right) K(y) R_c(s) \left(\frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial y_i} \right) s, \\ \left(\frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial y_i} \right) v_i = 0, \\ v_i = -K(y) \lambda(s) \left(\frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial y_i} \right) p. \end{aligned} \quad (2.19)$$

En intégrant (2.19) par rapport à y_i sur Y et en utilisant les conditions de périodicité, nous obtenons les relations additionnelles intégrales suivantes :

$$\begin{aligned} \phi \frac{\partial s}{\partial t} + \left\langle v_i \frac{\partial}{\partial x_i} F(s) \right\rangle = \frac{1}{\varepsilon Ca} \frac{\partial}{\partial x_i} \left\langle K(y) R_c(s) \left(\varepsilon \frac{\partial s}{\partial x_i} + \frac{\partial s}{\partial y_i} \right) \right\rangle, \\ \frac{\partial}{\partial x_i} \langle v_i \rangle = 0. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Il est important d'utiliser ces relations dans le cadre de la technique d'homogénéisation.

2.2.2 Expansions asymptotiques à deux échelles

Comme décrit dans la section 2.1, nous représentons les quantités cherchées, saturation et pression, sous la forme de séries asymptotiques à deux échelles sur le petit paramètre ε :

$$\begin{aligned} s(x, y, t) &= s_0(x, t) + \varepsilon s_1(x, y, t) + \varepsilon^2 \dots \\ p(x, y, t) &= p_0(x, t) + \varepsilon p_1(x, y, t) + \varepsilon^2 \dots \end{aligned} \quad (2.21)$$

Selon la dernière équation de (2.19), la vitesse de Darcy est donc :

$$\begin{aligned} v_{i0} &= -K(y)\lambda_0 \left(\frac{\partial p_0}{\partial x_i} + \frac{\partial p_1}{\partial y_i} \right) \\ v_{i1} &= -K(y)\lambda_0 \left(\frac{\partial p_1}{\partial x_i} + \frac{\partial p_2}{\partial y_i} \right) - K(y)\lambda_1 \left(\frac{\partial p_0}{\partial x_i} + \frac{\partial p_1}{\partial y_i} \right) \end{aligned} \quad (2.22)$$

où pour toutes les fonctions arbitraires de saturation $f=f(s)$, la notation suivante est utilisée :

$$f_0 = f(s_0), \quad f_1 = \frac{df}{ds}(s_0) s_1. \quad (2.23)$$

En introduisant les quantités moyennes de premier ordre

$$\begin{aligned} S &= s_0 + \varepsilon \langle s_1 \rangle, \\ P &= p_0 + \varepsilon \langle p_1 \rangle, \\ \mathbf{V} &= \langle \mathbf{v}_0 \rangle + \varepsilon \langle \mathbf{v}_1 \rangle, \end{aligned} \quad (2.24)$$

nous obtenons les équations moyennées de l'écoulement de (2.20)

$$\begin{aligned} \langle \phi \rangle \frac{\partial S}{\partial t} + V_k \frac{\partial F(S)}{\partial x_k} &= -\varepsilon \left\{ \frac{\partial}{\partial t} (\langle \phi s_1 \rangle - \langle \phi \rangle \langle s_1 \rangle) + \right. \\ &\quad \left. \frac{\partial}{\partial x_i} (\langle v_{i0} F_1 \rangle - \langle v_{i0} \rangle \langle F_1 \rangle) - \frac{1}{\varepsilon Ca} \frac{\partial}{\partial x_i} \left\langle K R_0 \left(\frac{\partial s_0}{\partial x_i} + \frac{\partial s_1}{\partial y_i} \right) \right\rangle \right\}, \end{aligned} \quad (2.25)$$

$$\frac{\partial V_i}{\partial x_i} = 0. \quad (2.26)$$

2.2.3 Fonctions oscillantes. Problèmes cellulaires.

En substituant (2.21) et (2.22) dans les équations non moyennées (2.19) et en considérant les termes d'ordre ε^0 , nous obtenons :

$$\begin{aligned} \phi \frac{\partial s_0}{\partial t} + v_{i0} \left(\frac{\partial F_0}{\partial x_i} + \frac{\partial F_1}{\partial y_i} \right) &= \frac{1}{\varepsilon Ca} \frac{\partial}{\partial y_i} \left(K R_0 \left(\frac{\partial s_0}{\partial x_i} + \frac{\partial s_1}{\partial y_i} \right) \right), \\ \frac{\partial}{\partial y_i} \left(K \lambda_0 \left(\frac{\partial p_0}{\partial x_i} + \frac{\partial p_1}{\partial y_i} \right) \right) &= 0. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Nous écrivons les quantités s_1 et p_1 sous la forme

$$\begin{aligned} s_1 &= \varphi_k(x, y, t) \frac{\partial s_0}{\partial x_k} + s_{10}(x, t), \\ p_1 &= \psi_k(y) \frac{\partial p_0}{\partial x_k} + p_{10}(x, t). \end{aligned} \quad (2.28)$$

Les fonctions φ_i et ψ_j sont les solutions des problèmes suivants :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial y_i} \left(K(y) \left(\frac{\partial \psi_k}{\partial y_i} + \delta_{ki} \right) \right) = 0, \\ \langle \psi_k \rangle = 0, \quad \psi_k \text{ est périodique selon } y. \end{cases} \quad (2.29)$$

$$\begin{cases} \left[v_{i0} \left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial y_i} + \delta_{ki} \right) - \frac{\phi \langle v_{k0} \rangle}{\langle \phi \rangle} \right] F'(s_0) = \frac{1}{\varepsilon Ca} \frac{\partial}{\partial y_i} \left(K R_0 \left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial y_i} + \delta_{ki} \right) \right), \\ \langle \varphi_k \rangle = 0, \quad \varphi_k \text{ est périodique selon } y. \end{cases} \quad (2.30)$$

2.2.4 Modèle macroscopique fermé

En combinant (2.25), (2.26) et (2.28), nous pouvons écrire les équations générales homogénéisées de premier ordre pour un écoulement diphasique :

$$\langle \phi \rangle \frac{\partial S}{\partial t} + [V_k + \Delta V_k] \frac{\partial F(S)}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\hat{D}_{ik} \frac{\partial S}{\partial x_k} \right), \quad (2.31a)$$

$$\frac{\partial V_i}{\partial x_i} = 0, \quad (2.31b)$$

où le tenseur de dispersion est

$$\hat{D}_{ik} = \varepsilon F'_s(S) \left(\frac{\langle \phi \varphi_i \rangle V_k}{\langle \phi \rangle} - \langle \varphi_k v_i \rangle \right) + \frac{R(S)}{Ca} \left(\left\langle K \frac{\partial \varphi_k}{\partial y_i} \right\rangle + \langle K \rangle \delta_{ki} \right) \quad (2.32)$$

et la correction de vitesse est

$$\Delta V_k = \varepsilon \left\{ \frac{V_k}{\langle \phi \rangle} \frac{\partial \langle \phi \varphi_i \rangle}{\partial x_i} + \frac{1}{F'_s(S)} \left\langle \phi \frac{\partial \varphi_k}{\partial t} \right\rangle \right\}. \quad (2.33)$$

Nous voyons que la capillarité est représentée par un terme additionnel dans le tenseur de dispersion et qu'elle ne produit aucun changement dans la correction de vitesse.

2.3 Modèle homogénéisé avec dispersion

2.3.1 Modèle d'écoulement effectif dans le cas général

En réunissant les résultats obtenus pour tous les cas, nous concluons que le champ de perméabilité hétérogène produit un effet de mélange apparent entre les phases (dispersion hydrodynamique), qui peut être décrit par le modèle suivant, moyenné sur les hétérogénéités, avec ou sans forces capillaires :

$$\langle \phi \rangle \frac{\partial S}{\partial t} + [V_k + \Delta V_k(S)] \frac{\partial F(S)}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\hat{D}_{ik}(S, V) \frac{\partial S}{\partial x_k} \right), \quad (2.34a)$$

$$V_i \equiv \langle v_i \rangle = -\hat{K}_{ik} \lambda(S) \frac{\partial P}{\partial x_k}, \quad \text{div } V = 0, \quad (2.34b)$$

où S est la saturation macroscopique de la première phase (α), V est la vitesse totale macroscopique de Darcy ($V = V_w + V_{oil}$; μ est la viscosité dynamique ; P est la "pression globale" ; $\lambda(S)$ est la fonction de mobilité totale ; $F(S)$ est la fonction d'écoulement fractionné.

Comme nous avons vu à l'échelle macroscopique le processus de déplacement est décrit par une équation non linéaire de transport avec un terme de diffusion apparente, responsable du mélange des fluides. Cet effet physique, connu sous le nom de la dispersion hydrodynamique, est caractérisé par le tenseur de deuxième rang, appelé tenseur de dispersion, $\hat{D}_{ij}$. Ce dernier représente l'intérêt principal de ce projet.

Les trois paramètres macroscopiques, qui déterminent le processus, sont : le tenseur de perméabilité absolue effective, $\hat{K}$, le tenseur de dispersion effective, $\hat{D}$, et la correction à la vitesse de transport, ΔV . Ce troisième paramètre sera négligé car il n'est significatif que dans le cas de processus fortement non stationnaire ou de vitesse fortement non locale. La perméabilité effective et le tenseur de dispersion sont définis dans les paragraphes suivants.

2.3.2 Perméabilité absolue effective

Le tenseur de perméabilité absolue effective est déterminé comme suit :

$$\hat{K}_{ik} = \left\langle K(y) \frac{\partial \Psi_k}{\partial y_i} \right\rangle, \quad i, k=1, 2, 3, \quad (2.35)$$

où les fonctions cellulaires de première famille, $\Psi_k(y)$ ($k = 1, 2, 3$), sont les solutions du problème cellulaire ci-dessous pour une cellule étendue $Y = \{-1/2 < y_i < 1/2, i=1, 2, 3\}$, où $y_i = x_i/\varepsilon$:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial y_i} \left(K(y) \frac{\partial \Psi_k}{\partial y_i} \right) = 0, & y \in Y, \\ \langle \Psi_k - y_k \rangle = 0, & (\Psi_k - y_k) \text{ est périodique selon } y. \end{cases} \quad (2.36)$$

Ce problème est formulé dans la cellule $Y = [0; 1]^3 \in \mathbb{R}^3$.

Le problème (2.36) est un problème classique de théorie d'homogénéisation, Panfilov (2000). Il a une solution unique et périodique, différentiable deux fois. La fonction $K(y)$, décrivant l'hétérogénéité, peut être choisie parmi une large classe de fonctions, même discontinues.

Remarquons que (2.35) est un tenseur symétrique défini positif, représentant la propriété intrinsèque du milieu, car les fonctions cellulaires Ψ_k ne dépendent que de la structure de l'hétérogénéité. Le tenseur de perméabilité $\hat{K}_{ik}$ est donc indépendant de la direction d'écoulement, des conditions aux limites et de la saturation.

Il est plus commode d'utiliser également la fonction Ψ :

$$\Psi = \sum_{k=1}^3 a_k \Psi_k, \quad a_k = - \frac{\partial P}{\partial x_k} \Big/ |\nabla P|, \quad |\nabla P| = \sqrt{\sum_{k=1}^3 \left(\frac{\partial P}{\partial x_k} \right)^2}. \quad (2.37)$$

La vitesse de Darcy prend donc la forme

$$v_i(y, x, t) = K(y) \frac{\partial \Psi(y)}{\partial y_i} \lambda(S) |\nabla P|. \quad (2.38)$$

2.3.3 Tenseur de dispersion

Le tenseur effectif de dispersion, $\hat{D}$, est défini comme suit :

$$\hat{D}_{ik} = \varepsilon F'(S) V \mathfrak{a}_{ik} + \frac{1}{Ca} R_c(s) \left\langle K \frac{\partial \Phi_k}{\partial y_i} \right\rangle, \quad i, k = 1, 2, 3, \quad (2.39)$$

où V est une valeur absolue de la vitesse moyenne et le tenseur $\mathfrak{a}_{ik}$ sera appelé le tenseur de dispersivité :

$$\mathfrak{a}_{ik} = \left(\frac{\langle \phi \varphi_i \rangle}{\langle \phi \rangle} \left\langle K \frac{\partial \Psi}{\partial y_k} \right\rangle - \left\langle \varphi_k K \frac{\partial \Psi}{\partial y_i} \right\rangle \right) \Big/ \sqrt{\sum_{j=1}^3 \left\langle K \frac{\partial \Psi}{\partial y_j} \right\rangle^2}. \quad (2.40)$$

Les fonctions cellulaires de deuxième famille, $\varphi_k(y, S(x, t)) \equiv \Phi_k - y_k$, sont les solutions du deuxième problème cellulaire. Quand la capillarité est négligée, ce problème est une EDP de premier ordre :

$$\begin{cases} v_i \frac{\partial \Phi_k}{\partial y_i} = \frac{\phi V_k}{\langle \phi \rangle}, & y \in Y, \\ \langle \Phi_k - y_k \rangle = 0, & (\Phi_k - y_k) \text{ est périodique selon } y. \end{cases} \quad (2.41)$$

Le problème (2.41) apparaît fréquemment dans les articles dédiés à l'homogénéisation des équations hyperboliques de premier ordre, mais il est insuffisamment étudié. Un cas particulier de ce problème a été obtenu dans Showalter and Walkington (1991). Il est pourtant clair que la solution existe et qu'elle est unique quand la fonction $K(y)$ est continue.

Quand la capillarité est significative, le problème cellulaire pour le tenseur de dispersion est une EDP elliptique du deuxième ordre :

$$\begin{cases} \left(v_i \frac{\partial \Phi_k}{\partial y_i} - \frac{\phi V_k}{\langle \phi \rangle} \right) F'(S) = \frac{1}{\varepsilon Ca} \frac{\partial}{\partial y_i} \left(K R(S) \frac{\partial \Phi_k}{\partial y_i} \right), & y \in Y, \\ \langle \Phi_k - y_k \rangle = 0, & (\Phi_k - y_k) \text{ est périodique selon } y. \end{cases} \quad (2.42)$$

Le problème (2.42) est formulé pour une EDP du deuxième ordre, incluant également l'opérateur du premier ordre, qui décrit le problème cellulaire dans le cas sans forces capillaires. Puisque la dérivée du deuxième ordre lisse la solution, il est naturel de s'attendre à ce que les conditions d'existence d'une solution de (2.42) soient beaucoup plus flexible que pour (2.41).

Comme nous pouvons remarquer pour (2.39) et (2.40), le tenseur de dispersion, $\widehat{D}_{ik}$, dépend de certains paramètres responsable de l'hétérogénéité du milieu, de la saturation de phase, de la perméabilité relative et du rapport de viscosité.

2.3.4 Séparation des variables rapides et lentes dans les problèmes cellulaires

Les problèmes (2.41) et (2.42) ne sont pas vraiment locaux car les fonctions φ_k dépendent des variables lentes (x, t) . Pour certains cas particuliers, les variables rapides et lentes peuvent être factorisées, conduisant à la décomposition du problème cellulaire en un ensemble de problèmes entièrement locaux. Cela peut être fait pour le cas d'écoulement monodimensionnel à grande échelle.

Présentons le nombre capillaire, Ca , sous la forme suivante :

$$\frac{1}{Ca} = \varepsilon \sigma. \quad (2.43)$$

Selon les expressions (1.7), le paramètre σ est faible : $\sigma \ll 1$. Trouvons la solution φ_k du problème cellulaire (2.42) sous la forme de séries sur un petit paramètre σ :

$$\varphi_k = \varphi_k^{(0)} + \sigma \varphi_k^{(1)} + \dots \quad (2.44)$$

Nous allons également utiliser les notations $\Phi_k^{(j)} \equiv \varphi_k^{(j)} + y_k$, $j=0,1$. En substituant (2.44) dans (2.42), nous obtenons l'ensemble des équations pour $\varphi_k^{(0)}$ et $\varphi_k^{(1)}$:

$$\begin{aligned} v_{0i} \left(\frac{\partial \varphi_k^{(0)}}{\partial y_i} + \delta_{ik} \right) - \frac{\phi}{\langle \phi \rangle} \langle v_{0k} \rangle &= 0, \\ F'(s_0) v_{0i} \frac{\partial \varphi_k^{(1)}}{\partial y_i} &= \frac{\partial}{\partial y_i} \left(K R(s_0) \left(\frac{\partial \varphi_k^{(0)}}{\partial y_i} + \delta_{ik} \right) \right) \end{aligned} \quad (2.45)$$

Notons que la première équation de système (2.45) coïncide avec le problème (2.41) pour le cas sans forces capillaires.

En substituant la vitesse (2.38) dans la première équation (2.45), nous obtenons le problème suivant pour la fonction $\varphi_k^{(0)}$:

$$\begin{cases} K \frac{\partial \Psi}{\partial y_i} \frac{\partial \varphi_k^{(0)}}{\partial y_i} = -K \frac{\partial \Psi}{\partial y_k} + \frac{\phi}{\langle \phi \rangle} \left\langle K \frac{\partial \Psi}{\partial y_k} \right\rangle, \\ \langle \varphi_k^{(0)} \rangle = 0, \quad \varphi_k^{(0)} \text{ est périodique selon } y. \end{cases} \quad (2.46)$$

Par conséquent, les fonctions $\varphi_k^{(0)}$ peuvent être trouvées à partir du problème (2.46) comme des fonctions dépendant uniquement des variables rapides y_i . Le problème (2.46) est donc entièrement local.

Les fonctions $\varphi_k^{(1)}$ peuvent être représentés sous la forme factorisée :

$$\varphi_k^{(1)} = \frac{\tilde{\varphi}_k(y)}{C(x, t)}, \quad (2.47)$$

où le coefficient $C(x, t)$ est

$$C(x, t) = \frac{F'(S) \lambda(S)}{R(S)} |\nabla P|. \quad (2.48)$$

En substituant (2.47) dans la deuxième équation (2.45), nous obtenons le problème entièrement local pour la fonction $\tilde{\varphi}_k(y)$:

$$\begin{cases} K \frac{\partial \Psi}{\partial y_i} \frac{\partial \tilde{\varphi}_k}{\partial y_i} = \frac{\partial}{\partial y_i} \left(K \frac{\partial \varphi_k^{(0)}}{\partial y_i} \right) + \frac{\partial K}{\partial y_k}, \\ \langle \tilde{\varphi}_k \rangle = 0, \quad \tilde{\varphi}_k \text{ est périodique selon } y. \end{cases} \quad (2.49)$$

Nous pouvons donc représenter le tenseur de dispersion comme suit

$$\widehat{D}_{ik} = \varepsilon D_{ik}^{(0)} + \varepsilon \sigma D_{ik}^{(1)} + O(\varepsilon^2 \sigma^2) \quad (2.50a)$$

Les composantes $D_{ik}^{(0)}$ et $D_{ik}^{(1)}$ sont

$$D_{ik}^{(0)} = \mathfrak{x}_{ik}^{(0)} V F'(S), \quad (2.50b)$$

$$D_{ik}^{(1)} = \mathfrak{x}_{ik}^{(1)} R(S), \quad (2.50c)$$

où

$$\mathfrak{x}_{ik}^{(0)}(y) = \left(\frac{\langle \phi \varphi_i \rangle}{\langle \phi \rangle} \left\langle K \frac{\partial \Psi}{\partial y_k} \right\rangle - \left\langle \varphi_k K \frac{\partial \Psi}{\partial y_i} \right\rangle \right) / \sqrt{\sum_{j=1}^3 \left\langle K \frac{\partial \Psi}{\partial y_j} \right\rangle^2} \quad (2.50d)$$

$$\mathfrak{x}_{ik}^{(1)}(y) = \frac{\langle \phi \tilde{\varphi}_i \rangle}{\langle \phi \rangle} \left\langle K \frac{\partial \Psi}{\partial y_k} \right\rangle - \left\langle K \frac{\partial \Psi_1}{\partial y_i} \tilde{\varphi}_k \right\rangle + \left\langle K \frac{\partial \Phi_k^{(0)}}{\partial y_i} \right\rangle. \quad (2.50e)$$

Le tenseur de dispersion est donc calculé à travers une simple intégration, si les fonctions cellulaires sont connues.

2.3.5 Trois problèmes basiques avec les variables rapides séparées

Pour construire le tenseur de dispersion (2.50), nous devons trouver les fonctions cellulaires Ψ_1 , $\varphi_i^{(0)}$, $\tilde{\varphi}_i$. Nous devons donc résoudre consécutivement les trois problèmes suivants :

Problème pour $\Psi \equiv a_1 \Psi_1 + a_2 \Psi_2$:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial y_i} \left(K(y) \frac{\partial \Psi_k}{\partial y_i} \right) = 0, & y \in Y, \\ \langle \Psi_k - y_k \rangle = 0, & (\Psi_k - y_k) \text{ est périodique selon } y. \end{cases} \quad (2.51)$$

Problème pour $\varphi_k^{(0)}$:

$$\begin{cases} K \frac{\partial \Psi}{\partial y_i} \frac{\partial \varphi_k^{(0)}}{\partial y_i} = -K \frac{\partial \Psi}{\partial y_k} + \frac{\phi}{\langle \phi \rangle} \left\langle K \frac{\partial \Psi}{\partial y_k} \right\rangle, \\ \langle \varphi_k^{(0)} \rangle = 0, & \varphi_k^{(0)} \text{ est périodique selon } y. \end{cases} \quad (2.52)$$

Problème pour $\tilde{\varphi}_k(y)$:

$$\begin{cases} K \frac{\partial \Psi}{\partial y_i} \frac{\partial \tilde{\varphi}_k}{\partial y_i} = \frac{\partial}{\partial y_i} \left(K \frac{\partial \varphi_k^{(0)}}{\partial y_i} \right) + \frac{\partial K}{\partial y_k}, \\ \langle \tilde{\varphi}_k \rangle = 0, & \tilde{\varphi}_k \text{ est périodique selon } y. \end{cases} \quad (2.53)$$

2.3.6 Equivalence entre la dispersion et la pression capillaire renormalisée

L'équation macroscopique de transport (2.34a) est formellement similaire à une équation microscopique classique de Buckley-Leverett (1.6) :

$$\phi \frac{\partial s}{\partial t} + v_k \frac{\partial F(s)}{\partial x_k} = - \frac{1}{Ca} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{K F k_\beta}{\mu_\beta} \frac{\partial P_c(s)}{\partial x_k} \right), \quad (2.54)$$

où le terme de diffusion n'est causée que par la diffusion capillaire.

En prenant en compte la similarité formelle entre (2.34a) et (2.54), nous pouvons reformuler le tenseur de dispersion dans l'équation macroscopique (2.34a) sous une forme similaire à (2.54), introduisant la pression capillaire effective renormalisée, qui est une fonction tensorielle :

$$\widehat{D}(S, V)_{ik} = - \frac{1}{Ca} \widehat{K}_{ij} \frac{F(S) k_\beta(S)}{\mu_\beta} \frac{dP_c^f}{dS}. \quad (2.55)$$

En comparant cette relation avec la définition du tenseur de dispersion (2.39), nous obtenons la relation suivante pour la pression capillaire tensorielle :

$$P_c^f(S, \nabla P)_{ik} = \varepsilon Ca \alpha_{ik} \Phi(S) |\nabla P| + \beta_{ik} P_c(S), \quad (2.56)$$

où α_{ik} et β_{ik} sont les nouveaux tenseurs constants suivants :

$$\begin{aligned} \alpha_{ik} &= \widehat{K}_{ij}^{-1} \mathfrak{x}_{jk}, \\ \beta_{ik} &= \widehat{K}_{ij}^{-1} \left\langle K \frac{\partial \Phi_k}{\partial y_j} \right\rangle, \\ \Phi(S) &= \ln \left(\frac{k_\beta(S)}{k_\alpha(S)} \right) + \text{const.} \end{aligned} \quad (2.57)$$

Puisque la perméabilité effective (2.35) est un tenseur défini positif, son inverse, dénoté $\widehat{K}_{ij}^{-1}$, existe pour toutes les géométries de milieu et les expressions (2.57) sont bien posées.

La fonction $\Phi(s)$ est une fonction scalaire de la saturation macroscopique, définie à une constante additive d'intégration près. Cette constante a été choisie de telle manière que la pression capillaire effective est égale à zéro quand $S=1$. La forme caractéristique de la fonction $\Phi(S)$ est montrée sur la figure 2.1.

Il est significatif que la pression capillaire renormalisée soit "dynamique", c'est-à-dire qu'elle dépende de la vitesse d'écoulement.

La simulation du tenseur de dispersion sous la forme de pression capillaire renormalisée dynamique sera présentée dans la section 3.3.

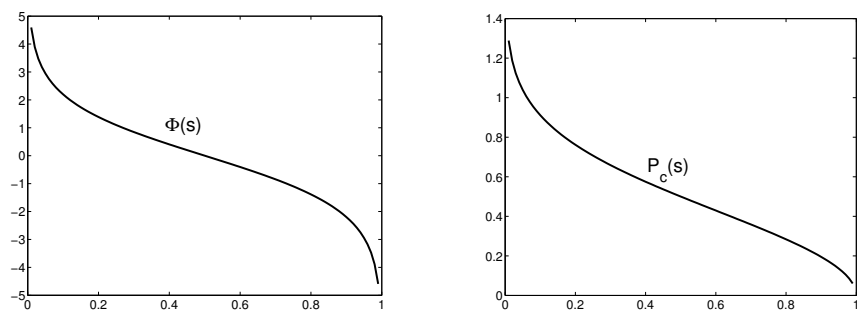


FIG. 2.1 – Fonction $\Phi(S)$ et pression capillaire renormalisé $P_c(S)$ sous la forme adimensionnelle

Chapitre 3

Analyse du tenseur de dispersion diphasique

3.1 Propriétés basiques du tenseur de dispersion diphasique

Dans cette section nous analysons analytiquement les propriétés du tenseur de dispersion (2.39) ou (2.55) dans un milieu avec une structure générale.

3.1.1 Asymétrie du tenseur de dispersion

Pour analyser la propriété de symétrie du tenseur de dispersion, nous présentons le problème cellulaire sous la forme équivalente suivante :

$$\begin{cases} B \left(v_i \frac{\partial \varphi_k}{\partial y_i} + v_k - \frac{\phi V_k}{\langle \phi \rangle} \right) = A \frac{\partial}{\partial y_i} \left(K(y) \frac{\partial \varphi_k}{\partial y_i} \right) + A \frac{\partial K(y)}{\partial y_k}, & y \in Y, \\ \langle \varphi_k \rangle = 0, & \varphi_k \text{ est } y\text{-périodique,} \end{cases} \quad (3.1)$$

où $A(x, t) \equiv \frac{R(S)}{\varepsilon C a}$, $B(x, t) \equiv F'(S)$. Ces deux fonctions sont positives pour tous les points S sauf les points extrêmes.

En utilisant les nouvelles notations, nous pouvons représenter le tenseur de dispersion sous la forme suivante :

$$\frac{\hat{D}_{ik}}{\varepsilon} = B \left(\frac{\langle \phi \varphi_i \rangle V_k}{\langle \phi \rangle} - \langle \varphi_k v_i \rangle \right) + A \left\langle K \left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial y_i} + \delta_{ik} \right) \right\rangle. \quad (3.2)$$

Pour représenter le problème (3.1) sous la forme variationnelle, nous le multiplions par une fonction de test $\xi(y)$ périodique en y , et l'intégrons sur la période Y :

$$0 = A \left\langle K \frac{\partial \varphi_k}{\partial y_i} \frac{\partial \xi}{\partial y_i} \right\rangle + A \left\langle K \frac{\partial \xi}{\partial y_k} \right\rangle - B \left\langle \varphi_k \frac{\partial v_i \xi}{\partial y_i} \right\rangle + B \langle v_k \xi \rangle - B \frac{\langle \phi \xi \rangle V_k}{\langle \phi \rangle},$$

où nous avons utilisé le théorème d'Ostrogradsky-Gauss et la propriété de fonction périodique, qui dit que l'intégrale de la dérivé sur la période est égale à zéro.

Prenons maintenant $\xi = \varphi_m$, alors :

$$\begin{aligned}
0 &= A \left\langle K \frac{\partial \varphi_k}{\partial y_i} \frac{\partial \varphi_m}{\partial y_i} \right\rangle + A \left\langle K \frac{\partial \varphi_m}{\partial y_k} \right\rangle - B \left\langle \varphi_k \frac{\partial v_i \varphi_m}{\partial y_i} \right\rangle + B \langle v_k \varphi_m \rangle - \\
&- B \frac{\langle \phi \varphi_m \rangle V_k}{\langle \phi \rangle} = -A \left\langle K \left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial y_m} + \delta_{mk} \right) \right\rangle + A \langle K \rangle \delta_{km} + A \left\langle K \frac{\partial \varphi_m}{\partial y_k} \right\rangle + \\
&+ A \left\langle K \frac{\partial \varphi_k}{\partial y_m} \right\rangle + A \left\langle K \frac{\partial \varphi_k}{\partial y_i} \frac{\partial \varphi_m}{\partial y_i} \right\rangle - \\
&- B \left\langle \varphi_k \frac{\partial v_i \varphi_m}{\partial y_i} \right\rangle - B \left[\frac{\langle \phi \varphi_m \rangle V_k}{\langle \phi \rangle} - \langle \varphi_k v_m \rangle - \langle \varphi_m v_k \rangle + \langle \varphi_k v_m \rangle \right] = \\
&= -\frac{\hat{D}_{mk}}{\varepsilon} + A \langle K \rangle \delta_{km} + A \left\langle K \frac{\partial \varphi_m}{\partial y_k} \right\rangle + A \left\langle K \frac{\partial \varphi_k}{\partial y_m} \right\rangle + A \left\langle K \frac{\partial \varphi_k}{\partial y_i} \frac{\partial \varphi_m}{\partial y_i} \right\rangle - \\
&- B \left\langle \varphi_k \frac{\partial v_i \varphi_m}{\partial y_i} \right\rangle + B [\langle \varphi_m v_k \rangle - \langle \varphi_k v_m \rangle].
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
\frac{\hat{D}_{mk}}{\varepsilon} &= A \langle K \rangle \delta_{km} + A \left\langle K \left(\frac{\partial \varphi_m}{\partial y_k} + \frac{\partial \varphi_k}{\partial y_m} \right) \right\rangle + A \left\langle K \frac{\partial \varphi_k}{\partial y_i} \frac{\partial \varphi_m}{\partial y_i} \right\rangle - \\
&+ B [\langle \varphi_m v_k \rangle - \langle \varphi_k v_m \rangle] - B \left\langle \varphi_k v_i \frac{\partial \varphi_m}{\partial y_i} \right\rangle,
\end{aligned}$$

où, pour le dernier terme, nous avons utilisé la propriété de libre divergence de la vitesse v_i .

En permutant les indices, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\frac{\hat{D}_{km}}{\varepsilon} &= A \langle K \rangle \delta_{km} + A \left\langle K \left(\frac{\partial \varphi_m}{\partial y_k} + \frac{\partial \varphi_k}{\partial y_m} \right) \right\rangle + A \left\langle K \frac{\partial \varphi_k}{\partial y_i} \frac{\partial \varphi_m}{\partial y_i} \right\rangle - \\
&+ B \left\langle \varphi_k v_i \frac{\partial \varphi_m}{\partial y_i} \right\rangle - B [\langle \varphi_m v_k \rangle - \langle \varphi_k v_m \rangle].
\end{aligned}$$

Le tenseur de dispersion n'est donc pas symétrique. Tout tenseur du deuxième ordre peut être représenté comme la somme de partie symétrique et antisymétrique. Comme nous avons vu, la partie symétrique correspond au tenseur de diffusion capillaire, tandis que la partie antisymétrique est causée par la convection.

La présence d'une partie antisymétrique dans la structure du tenseur de dispersion n'est pas surprenante car la dispersion est causée par le phénomène de convection. Il est bien connu que l'opérateur de convection est antisymétrique.

3.1.2 A propos de la définition positive du tenseur de diffusion capillaire

Etant asymétrique, le tenseur de dispersion n'est pas défini positivement en général. Pourtant, il est possible de montrer que sa partie symétrique, causée par les forces capillaires, est définie positivement. La dispersion capillaire, $\widehat{D}^c$, correspond à tous les termes multipliés par A dans la dernière relation :

$$\frac{\widehat{D}_{km}^c}{\varepsilon} = A \langle K \rangle \delta_{km} + A \left\langle K \left(\frac{\partial \varphi_m}{\partial y_k} + \frac{\partial \varphi_k}{\partial y_m} \right) \right\rangle + A \left\langle K \frac{\partial \varphi_k}{\partial y_i} \frac{\partial \varphi_m}{\partial y_i} \right\rangle.$$

Selon les transformations algébriques nous obtenons :

$$\frac{\widehat{D}_{km}^c}{\varepsilon} = A \left\langle K \left(\frac{\partial \varphi_m}{\partial y_i} + \delta_{im} \right) \left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial y_i} + \delta_{ik} \right) \right\rangle = A \langle K u_{mi} u_{ki} \rangle,$$

where $u_{ki} \equiv \left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial y_i} + \delta_{ki} \right)$.

Examinons la convolution du type $\beta_k \frac{\widehat{D}_{km}^c}{\varepsilon} \beta_m$, où β_k sont les nombres réels. Nous avons alors :

$$\begin{aligned} \beta_k \frac{\widehat{D}_{km}^c}{\varepsilon} \beta_m &= A \left\langle K \sum_i \left(\sum_m (\beta_m u_{mi}) \sum_k (\beta_k u_{ki}) \right) \right\rangle = \\ &= A \left\langle K \sum_i \left(\sum_k \beta_m u_{mi} \right)^2 \right\rangle = A \left\langle \sum_i \left(\sqrt{K} \sum_m \beta_m u_{mi} \right)^2 \right\rangle \geq \\ &\geq A \sum_i \left\langle \sqrt{K} \sum_m \beta_m u_{mi} \right\rangle^2, \end{aligned}$$

où nous avons utilisé l'inégalité de Schwarz-Buniakovsky

En continuant les dérivations, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \beta_k \frac{\widehat{D}_{km}^c}{\varepsilon} \beta_m &\geq A \sum_i \left\langle \sqrt{K} \sum_m \beta_m \left(\frac{\partial \varphi_m}{\partial y_i} + \delta_{mi} \right) \right\rangle^2 \geq \\ &= A \sqrt{K_{min}} \sum_i \sum_m \beta_m \left\langle \left(\frac{\partial \varphi_m}{\partial y_i} + \delta_{mi} \right) \right\rangle^2 = A \sqrt{K_{min}} \sum_i \sum_m (\beta_m \delta_{mi})^2 \end{aligned}$$

puisque la fonction est périodique en y . Finalement :

$$\beta_k \frac{\widehat{D}_{km}^c}{\varepsilon} \beta_m \geq A \sqrt{K_{min}} \sum_i (\beta_i)^2$$

qui est la définition du tenseur positivement défini.

Par la méthode similaire, la définition positive du tenseur de perméabilité effective est justifiée.

3.2 Simulation du tenseur de dispersion dans un milieu bi-perméable

3.2.1 Description de cas examiné

Le milieu est supposé être périodique et bidimensionnel. Les paramètres de simulations sont choisis similaire à ceux utilisés dans Neuweiler et al. (2003) pour comparer les résultats obtenus. Les valeurs caractéristiques de la perméabilité absolue, de la vitesse moyenne, de la viscosité, de la différence de pression et de la porosité sont :

$$\begin{aligned} K^* &= 100mD = 10^{-13}m^2, \\ V^* &= 5 \times 10^{-6}m/s, \\ \mu^* &= 10^{-3}Pa \cdot s, \\ \Delta p^* &= 5 \cdot 10^4 Pa/m, \\ \phi &= 0.2. \end{aligned} \tag{3.3}$$

La notation suivante est utilisée : pour une variable adimensionnelle f , la dimension caractéristique est notée f^* . Une variable dimensionnelle est représentée avec une "tilde" : $\tilde{f} = f \cdot f^*$.

Les viscosités du fluide poussé et déplacé sont fixées à $\mu_1=1$ et $\mu_2=2$, conduisant au rapport de viscosité de $\mu_1/\mu_2=0.5$. Les perméabilités relatives sont choisies sous forme de fonction quadratique polynomiale.

L'échelle d'hétérogénéité est $l^*=0.44m$ et la longueur de domaine est $L^*=25m$, le degré d'hétérogénéité est donc $\varepsilon=0.0176$. Le nombre capillaire, Ca , est choisi comme $(\varepsilon\sqrt{\varepsilon})^{-1}=431$, et l'expression (1.7) a donc lieu. La valeur caractéristique pour la pression capillaire, P_c^* , est définie comme suit :

$$P_c^* = \frac{\Delta p^* L}{Ca} = 2.9 \cdot 10^3 Pa. \tag{3.4}$$

La valeur caractéristique pour le tenseur de dispersion est :

$$D^* = L^* V^*. \tag{3.5}$$

Les dispersivités dimensionnelles sont donc

$$\tilde{\alpha}_{ik} = \varepsilon \cdot L^* \cdot \alpha = l^* \cdot \alpha. \tag{3.6}$$

Nous examinons un milieu bi-perméable avec une cellule d'hétérogénéité montrée en figure 3.1. Le domaine extérieur, $Y^{(2)}$, est plus perméable que l'intérieur, $Y^{(1)}$: $K_1=1$, $K_2=5$.

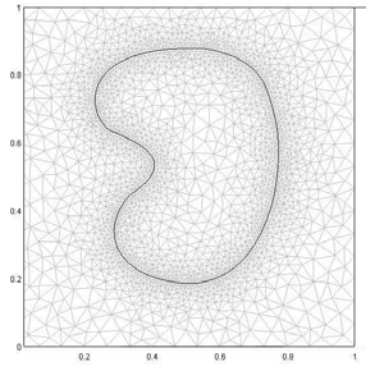


FIG. 3.1 – Cellule unitaire

3.2.2 Simulation de perméabilité effective

Premièrement, nous résolvons le problème cellulaire pour la perméabilité effective (2.36), qui est un problème périodique pour l'équation elliptique de deuxième ordre. Les solutions périodiques $\Psi_k(y) - y_k$ sont présentées en figure 3.2. Les simulations sont effectuées en appliquant la discrétisation du domaine par la méthode des éléments finis (simulateur FEMLAB).

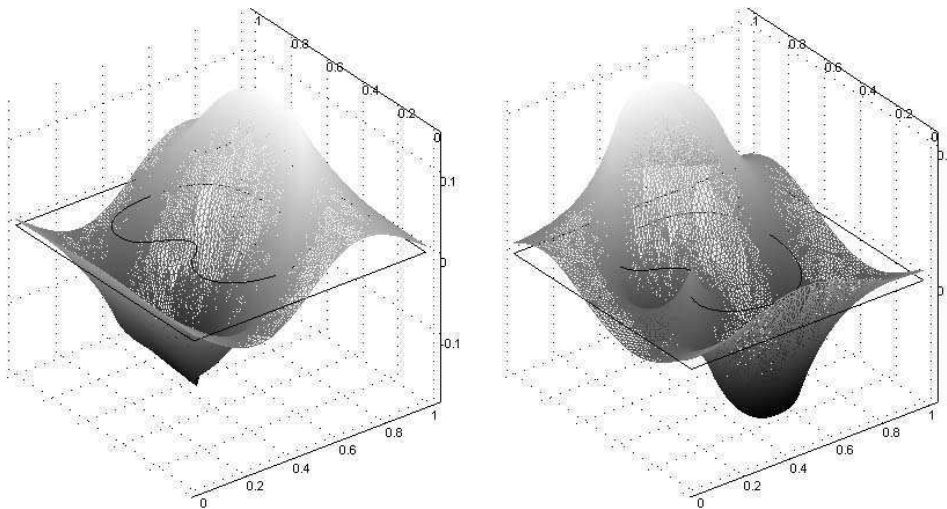


FIG. 3.2 – Solutions du problème pour la perméabilité effective, $\psi_1(y)$ et $\psi_2(y)$

Le tenseur de perméabilité effective (2.35) est alors calculé :

$$\hat{K}_{ik} = \begin{pmatrix} 3.2197 & -0.0084 \\ -0.0084 & 3.5114 \end{pmatrix}. \quad (3.7)$$

3.2.3 Simulation des problèmes cellulaires pour la dispersion

Substituant le vecteur de vitesse (2.38) dans (2.41), nous obtenons le problème cellulaire pour le tenseur de dispersion :

$$\frac{1}{\varepsilon Ca} C(s) \frac{1}{|\nabla P|} \frac{\partial}{\partial y_i} \left(K \frac{\partial \Phi_k}{\partial y_i} \right) = K \frac{\partial \Psi}{\partial y_i} \frac{\partial \Phi_k}{\partial y_i} - \frac{\phi}{\langle \phi \rangle} \left\langle K \frac{\partial \Psi}{\partial y_k} \right\rangle, \quad (3.8)$$

où $C(s) = \frac{R_c(s)}{\lambda(s)F'(s)} = -\frac{f_1 f_2}{f_1' f_2 - f_1 f_2'} \frac{dP_c}{ds}$.

A la différence du problème pour la perméabilité effective, le problème cellulaire pour le tenseur de dispersion est dépendant du processus d'écoulement car la fonction Ψ dépend de la direction du gradient de pression macroscopique et le facteur $C(S)$ dépend de la saturation macroscopique.

Le comportement du facteur $C(S)$ est montré en figure 3.3.

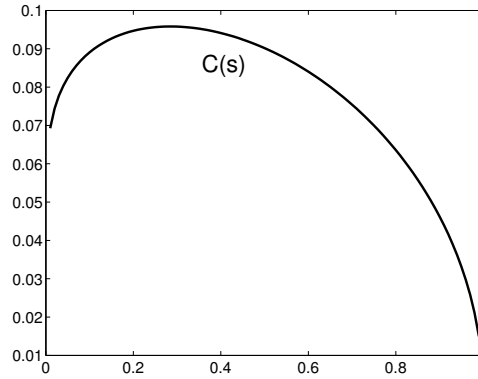


FIG. 3.3 – Comportement caractéristique de la fonction $C(s)$

Prenant en compte le fait que le nombre capillaire est supposé être suffisamment important, nous pouvons simplifier le terme capillaire dans l'extrémité droite du problème (3.8), en supposant que le facteur C est constant. Cela nous permet d'éviter l'apparition de la saturation macroscopique dans le problème cellulaire. Par exemple, la valeur constante choisie de la fonction C , présentée en figure 3.3, est sa moyenne : $C_{frozen}=0.08$.

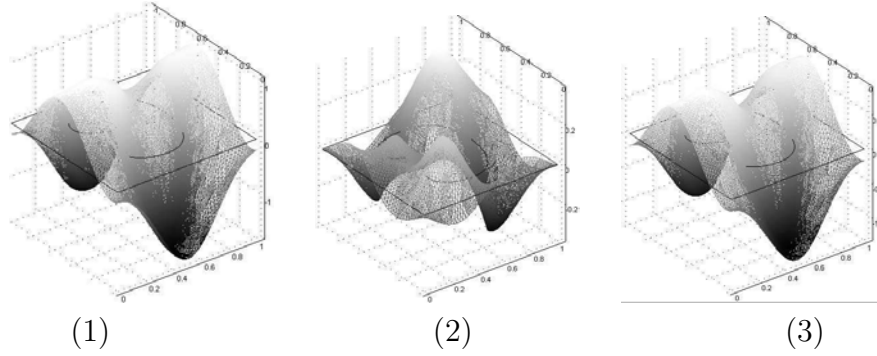


FIG. 3.4 – Solution du problème cellulaire pour le tenseur de dispersion, $\varphi_1(y)$, pour les différentes directions d'écoulement macroscopique

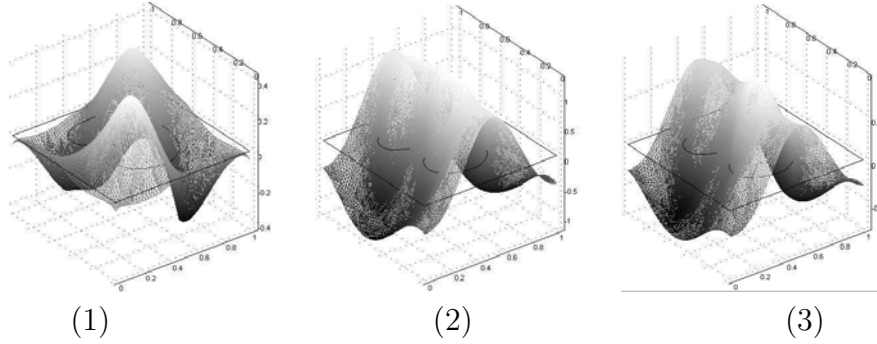


FIG. 3.5 – Solution du problème cellulaire pour le tenseur de dispersion, $\varphi_2(y)$, pour les différentes directions d'écoulement macroscopique

Pour éviter l'analyse de l'influence de la direction d'écoulement macroscopique aux fonctions cellulaires, nous supposons que la différence de pression macroscopique adimensionnelle, $|\nabla P|$, est constante (et elle est alors égale à 1).

Nous considérons trois directions d'écoulement : cas (1) - le déplacement selon l'axe Ox_1 ($a_1=1, a_2=0$), cas (2) - le déplacement selon l'axe Ox_2 ($a_1=0, a_2=1$), et le cas intermédiaire cas (3) - le déplacement avec angle $\gamma_{\nabla P} = 40^\circ$ par rapport à l'axe Ox_1 ($a_1=0.766, a_2=0.6428$).

La solution du problème cellulaire req33, $\varphi_k = \Phi_k - y_k$, est présentée pour tous les cas en figures 3.4 et 3.5.

Comme nous pouvons remarquer sur les figures 3.4 et 3.5, les fonctions $\varphi_1(y)$ et $\varphi_2(y)$ sont symétriques dans les cas (1) et (2) car elles représentent la dispersion en deux directions orthogonales.

3.2.4 Calcul du tenseur de dispersion

En utilisant les fonctions obtenues, $\varphi_1(y)$ et $\varphi_2(y)$, nous pouvons calculer les dispersivités dimensionnelles, $\tilde{\alpha}_{ik}, [m]$, définies par (2.40) et (3.6) :

$$\begin{aligned}
 &\text{Cas (1) : l'écoulement macroscopique selon } x_1 \\
 &\tilde{\alpha}_{ik} = \begin{pmatrix} 0.1043 & -0.0007 \\ 0.0012 & 0.0130 \end{pmatrix}. \\
 &\text{Cas (2) : l'écoulement macroscopique selon } x_2 \\
 &\tilde{\alpha}_{ik} = \begin{pmatrix} 0.0084 & -0.0007 \\ -0.0020 & 0.0874 \end{pmatrix}. \\
 &\text{Cas (3) : l'écoulement macroscopique avec l'angle } 40^\circ \text{ par rapport à } x_1 \\
 &\tilde{\alpha}_{ik} = \begin{pmatrix} 0.0639 & -0.0126 \\ -0.0446 & 0.0448 \end{pmatrix}.
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

Les résultats (3.9) montrent que la dispersivité longitudinale dans l'écoulement horizontal (cas 1) est de même ordre que la dispersivité transversale dans l'écoulement vertical (cas 2). Cela vient du fait que dans la cellule d'hétérogénéité, montrée en figure 3.1, l'inclusion a les mêmes longueurs caractéristique selon les axes Ox_1 et Ox_2 . Dans le cas de l'écoulement macroscopique diagonal (cas 3), les valeurs absolues des composantes diagonales et non diagonales sont de même ordre de grandeur.

Malgré l'apparition des composantes négatives, la matrice $\tilde{\alpha}_{ik}$ reste positivement définie dans les cas examinés.

3.2.5 Tenseur de dispersion en fonction de la saturation

Le tenseur de dispersion dépend de la saturation via la dérivée de la fonction d'écoulement fractionné, $F'(S)$, et via la diffusion capillaire, $R_c(s)$. La dépendance de la dispersion longitudinale en fonction de la saturation pour un écoulement horizontal est montrée figure 3.6.

La comparaison de la dispersion longitudinale pour les différentes directions d'écoulement est montrée figure 3.7.

3.2.6 Comparaison avec les données connues

Dans Neuweiler et al. (2003) la dispersivité a été calculée pour un cas d'écoulement diphasique. L'hétérogénéité du milieu est modélisée par des fluctuations stochastiques du champ de vitesse. L'écoulement est supposé

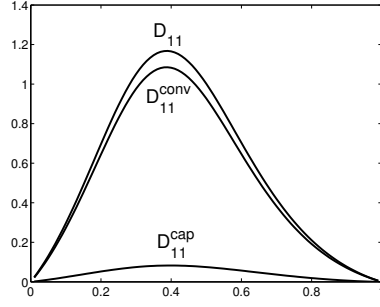


FIG. 3.6 – Dépendance de la dispersion longitudinale et ses parties convective et capillaire en fonction de la saturation pour l'écoulement macroscopique horizontal, $\times 10^{-6} m^2/s$

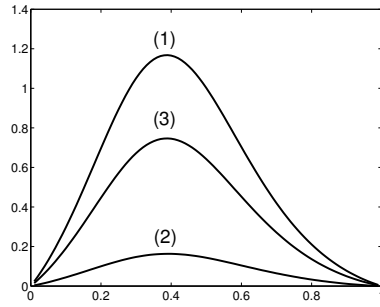


FIG. 3.7 – Dispersion longitudinale en fonction de la saturation pour les différentes directions d'écoulement, $\times 10^{-6} m^2/s$

stable, le rapport de viscosité, $\mu = \mu_1/\mu_2$, est égale à 0.5 ou 1.2 pour les différents cas. La dispersivité longitudinale obtenue, $\tilde{\alpha}_{ik}$, varie entre 0.1m et 0.2m.

Selon les résultats (3.9), la dispersivité longitudinale est comprise entre 0.08m et 0.1m, qui sont de même ordre de grandeur que dans Neuweiler et al. (2003).

3.3 Simulation du tenseur de dispersion sous la forme de la pression capillaire renormalisée

3.3.1 Description du test

Pour évaluer la pression capillaire effective renormalisée introduite comme (2.56) - (2.57), nous avons effectué plusieurs simulations numériques utilisant la solution des problèmes cellulaires obtenues dans la section 3.2.

Nous avons examiné le même cas du milieu bi-perméable comme il est décrit par (3.3) et figure 3.1. La valeur caractéristique des forces capillaires, P_c^* , est définie comme (3.4) :

$$P_c^* = \frac{\Delta p^* L}{Ca} = 2.9 \cdot 10^3 Pa.$$

Prenant en compte ces dimensions caractéristiques, nous pouvons obtenir la pression capillaire effective (2.56) sous la forme dimensionnelle :

$$\begin{aligned} \tilde{P}_c^f(S, \nabla p)_{ik} &= \varepsilon Ca \alpha_{ik} l^* \Phi(S) \Delta p^* + \beta_{ik} P_c(S) P_c^* = \\ &= (160 \alpha_{ik} \Phi(S) + 2.9 \beta_{ik} P_c(S)) \cdot 10^3 Pa. \end{aligned} \quad (3.10)$$

La solution pour la perméabilité effective et pour la première famille des problèmes cellulaires est obtenue dans la section 3.2 et elle est présentée en figure 3.2 et par la matrice (3.7).

3.3.2 Simulations de la pression capillaire renormalisée

Pour calculer la pression capillaire effective (2.56), il est nécessaire d'obtenir les tenseurs des dispersivités, α_{ik} et β_{ik} , définies par (2.57). Ces deux tenseurs sont déterminées à travers les fonctions cellulaires Ψ_k et Φ_k . Les fonctions Φ_k sont montrées figures 3.4 et 3.5.

En utilisant les fonctions cellulaires obtenues, nous devons calculer les tenseurs α_{ik} et β_{ik} dans (2.57) :

Cas (1) : l'écoulement macroscopique selon l'axe x_1

$$\alpha_{ik} = \begin{pmatrix} 0.0736 & -0.0005 \\ 0.0009 & 0.0084 \end{pmatrix}, \quad \beta_{ik} = \begin{pmatrix} 1.351 & 0.0774 \\ 0.1466 & 1.0716 \end{pmatrix}.$$

Cas (2) : l'écoulement macroscopique selon l'axe x_2

$$\alpha_{ik} = \begin{pmatrix} 0.0059 & -0.0004 \\ -0.0013 & 0.0566 \end{pmatrix}, \quad \beta_{ik} = \begin{pmatrix} 1.2329 & 0.1598 \\ -0.0356 & 1.0494 \end{pmatrix}.$$

Cas (3) : l'écoulement macroscopique selon 40° par rapport à l'axe x_1

$$\alpha_{ik} = \begin{pmatrix} 0.045 & -0.0088 \\ -0.0288 & 0.029 \end{pmatrix}, \quad \beta_{ik} = \begin{pmatrix} 1.3365 & 0.1609 \\ 0.0883 & 1.045 \end{pmatrix}.$$

Remarquons que les éléments diagonaux de coefficients α_{ik} sont beaucoup plus importants que les non diagonaux. Dans le même temps, les composantes des coefficients β_{ik} sont de même ordre de grandeur.

Les courbes de la pression capillaire tensorielle, $\tilde{P}_c^f(s)$, définies par (3.10), sont présentées sur les figures 3.8 – 3.10 pour trois orientations d'écoulement macroscopique.

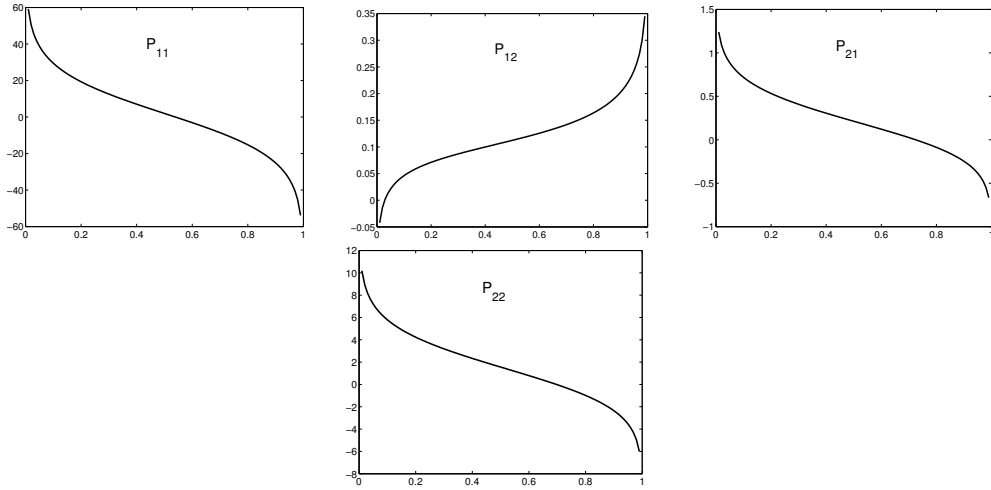


FIG. 3.8 – Quatre composantes de la pression capillaire tensorielle renormalisée, $\tilde{P}_{c,ik}^f(s)$ [KPa], pour l'écoulement macroscopique orienté selon l'axe x_1 (cas 1)

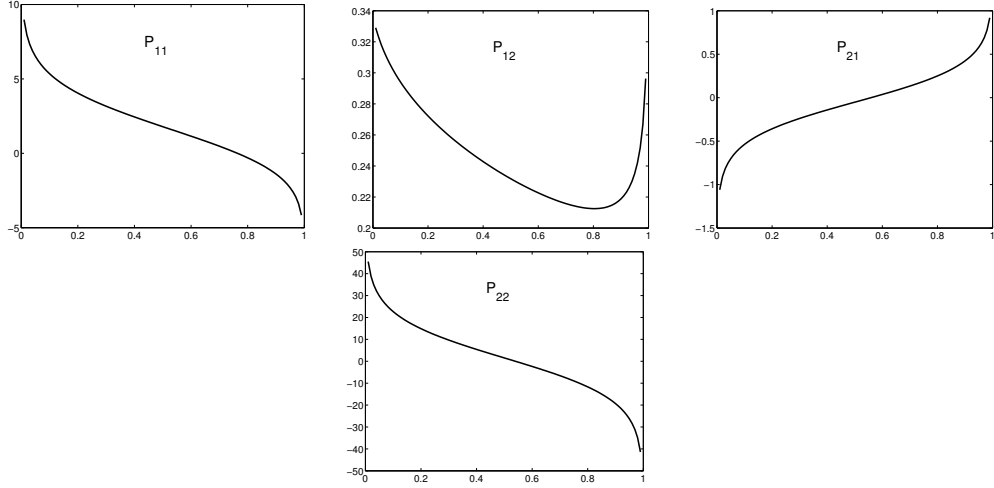


FIG. 3.9 – Quatre composantes de la pression capillaire tensorielle renormalisée, $\tilde{P}_{c,ik}^f(s)$ [KPa], pour l'écoulement macroscopique orienté selon l'axe x_2 (cas 2)

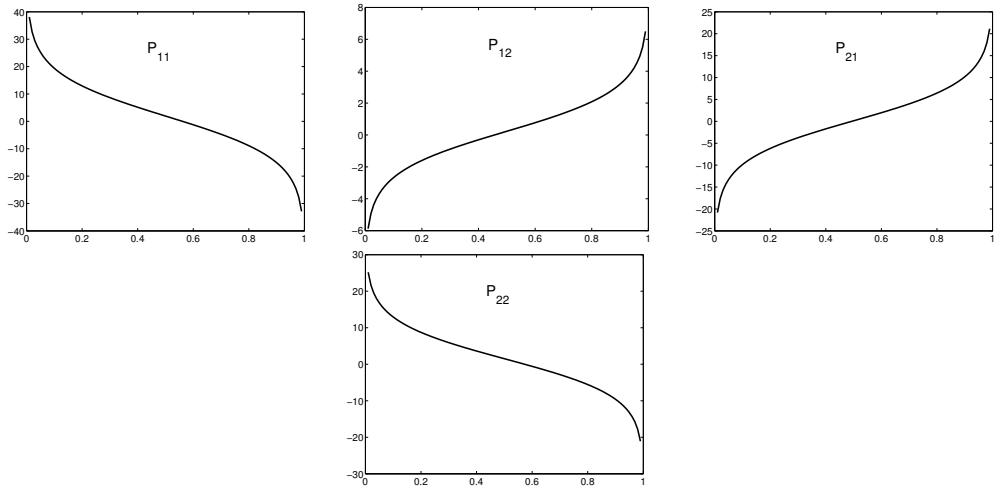


FIG. 3.10 – Quatre composantes de la pression capillaire tensorielle renormalisée, $\tilde{P}_{c,ik}^f(s)$ [KPa], pour l'écoulement macroscopique orienté selon 40° par rapport à l'axe. x_1 (cas 3)

Conclusion pour la section 3.3

Le comportement qualitatif et quantitatif du tenseur de la pression capillaire effective est analysé numériquement. Ce tenseur est introduit comme deuxième alternative pour interpréter le mélange dynamique entre les deux phases immiscibles en milieu poreux hétérogène.

Nous remarquons que la pression capillaire effective est une notion généralisée qui est causée non seulement par la vraie pression capillaire, mais aussi par l'effet de la dispersion hydrodynamique. Cette dernière est produite par l'hétérogénéité du milieu indépendamment de la capillarité. De ce point de vue, la pression capillaire effective est une pression fausse et apparente. Dans le même temps, son comportement qualitatif en fonction de la saturation est similaire à la courbe de pression capillaire classique décroissante de manière monotone.

Nous avons montré que la pression capillaire effective peut être beaucoup plus importante que la vraie pression capillaire, apparaissant en ménisques.

Dans plusieurs cas, certaines composantes du tenseur de pression capillaire peuvent être négatives et peuvent également être des fonctions croissantes.

Chapitre 4

Dispersion en milieu fracturé

4.1 Problèmes cellulaires pour le tenseur de dispersion en milieu fracturé

Dans cette section nous examinons l'écoulement de deux phases, immiscibles et incompressibles (α et β), dans un milieu à double porosité avec les champs de perméabilité, $K(x)$, et porosité, $\phi(x)$, oscillant rapidement dans l'espace. Les perméabilités relatives, $k_\alpha(S)$ et $k_\beta(S)$, sont supposées être des fonctions approximativement uniformes sur le domaine global d'écoulement Ω . Les oscillations rapides signifient que l'échelle d'hétérogénéité, l , est beaucoup moins importante que la dimension linéaire du domaine, L . Le petit paramètre, $\varepsilon=l/L$, est l'échelle caractéristique de l'hétérogénéité. Nous examinons le cas d'écoulement sans forces capillaires. Cela conduit à une relation analytique pour le tenseur de dispersion.

4.1.1 La propriété non locale du problème cellulaire pour le tenseur de dispersion

La fonction $\Psi_k(y)$ représente un champ de pression local, renormalisé sur une échelle de cellule unitaire et correspondant à l'écoulement macroscopique selon l'axe y_k . La fonction $\Phi_k(y)$ est la saturation locale de la phase α dans une cellule, renormalisée de la même façon. Le problème cellulaire (2.36), étant stationnaire et linéaire à l'échelle de la cellule, il décrit donc le comportement du champs de pression local. Le problème (2.41) est une équation stationnaire de transport pour la saturation locale. Ce problème est linéaire sur une échelle locale, mais non linéaire dans le sens où il dépend des variables macroscopiques S et P . Cette propriété signifie que la séparation des échelles (entre les variables rapides et lentes) n'est pas obtenue et que l'homogénéisation n'est pas effective. Pour séparer les échelles, plusieurs cas ont été examinés dans Panfilov and Floriat (2004), comme un cas d'écoulement presque monodimensionnel dans une cellule.

Nous allons montrer que dans le cas d'un milieu fracturé la séparation des échelles est obtenue sans aucune simplification additionnelle. Dans le même temps, la séparation n'est pas triviale dans ce cas, et ne peut être obtenue qu'après l'analyse du problème cellulaire.

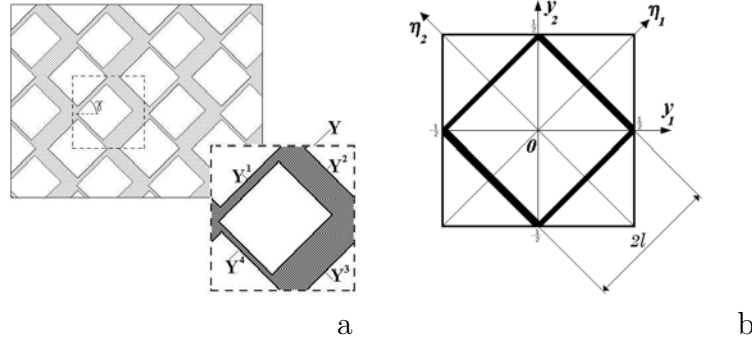


FIG. 4.1 – Structure du milieu fracturé (a) et une cellule (b)

4.1.2 Structure du milieu

Nous considérons un milieu fracturé en 2D sous la forme d'un réseau périodique et anisotrope, représenté figure 4.1. Chaque fracture est remplie par un milieu poreux avec une perméabilité beaucoup plus importante que celle de la matrice. L'écoulement dans chaque fracture est donc gouverné par la loi de Darcy et les équations initiales d'écoulement (2.34) sont toujours valides dans chaque fracture. Dans la section présente nous examinons le cas limite d'une matrice imperméable. La perméabilité et la porosité des fractures peuvent être différentes. Dans le but de simplifier nous examinons le cas bidimensionnel.

Une cellule périodique consiste en quatre fractures (segments) $Y^{(i)}$ d'épaisseur $h^{(i)}$, $i=1, 2, 3, 4$. L'appartenance au segment $Y^{(i)}$ sera dénotée par un indice supérieur (i) . La perméabilité, $K^{(i)}$, et la porosité, $\phi^{(i)}$, sont constantes dans chaque segment. Nous allons utiliser la notation suivante : $Y_\phi = Y^I \cup Y^{II} \cup Y^{III} \cup Y^{IV}$.

Conformément à la géométrie des fractures, nous introduisons un nouveau système de coordonnées, (η_1, η_2) , en tournant (y_1, y_2) d'un angle $\pi/4$ dans le sens inverse des aiguilles d'une montre (figure 4.1-b) :

$$\eta_1 = (y_1 + y_2) / \sqrt{2}, \quad \eta_2 = (y_2 - y_1) / \sqrt{2}. \quad (4.1)$$

Le vecteur vitesse dans ce nouveau système de coordonnées η est défini par les composantes (u_1, u_2) :

$$u_1 = (v_1 + v_2) / \sqrt{2}, \quad u_2 = (v_2 - v_1) / \sqrt{2}.$$

Utilisant (2.38), on obtient :

$$u_i(\eta, x, t) = K(\eta) \frac{\partial \Psi(\eta)}{\partial \eta_i} \lambda(S) |\nabla P|. \quad (4.2)$$

Les composantes de la perméabilité effective (2.35) dans les coordonnées η sont :

$$\hat{K}_{ik} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\langle K(\eta) \left(\frac{\partial \Psi_k}{\partial \eta_1} + (-1)^i \frac{\partial \Psi_k}{\partial \eta_2} \right) \right\rangle, \quad i, k = 1, 2. \quad (4.3)$$

Les problèmes cellulaires prennent les formes suivantes dans le nouveau système de coordonnées :

Problème pour la perméabilité effective, $k=1, 2$:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \eta_1} \left(K(\eta) \frac{\partial \Psi_k}{\partial \eta_1} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta_2} \left(K(\eta) \frac{\partial \Psi_k}{\partial \eta_2} \right) = 0, & \eta \in Y_\phi, \\ \langle \Psi_k - y_k \rangle = 0, & (\Psi_k - y_k) \text{ est périodique selon } y. \end{cases} \quad (4.4)$$

Problème pour le tenseur de dispersion :

$$\begin{cases} u_1 \frac{\partial \Phi_k}{\partial \eta_1} + u_2 \frac{\partial \Phi_k}{\partial \eta_2} = \frac{\phi V_k}{\langle \phi \rangle}, & \eta \in Y_\phi; \\ \langle \Phi_k \rangle = 0, & (\Phi_k - y_k) \text{ est périodique selon } y. \end{cases} \quad (4.5)$$

4.1.3 Cas limite des fractures minces

Supposant que les épaisseurs des fractures sont faibles par rapport à l'échelle d'hétérogénéité, nous allons analyser les problèmes cellulaires avec la condition :

$$h \equiv \max_i \{h^{(i)}\} \rightarrow 0. \quad (4.6)$$

Dans ce cas, les segments $Y^{(i)}$ sont transformés en ligne droite, et la superposition de deux segments voisins, $Y^{(i)}$ et $Y^{(j)}$, devient un nœud -point U^{ij} . La structure est telle que chaque nœud touche la frontière de la cellule. Les coordonnées des nœuds dans un système (η_1, η_2) sont les suivantes :

$$U^{12} = (l, l), \quad U^{23} = (l, -l), \quad U^{34} = (-l, -l), \quad U^{14} = (-l, l), \quad (4.7)$$

où $l = \sqrt{2}/4$ est la demi longueur de chaque fracture.

La porosité effective du milieu limite est donc :

$$\langle \phi \rangle = 2l \sum_{i=1}^4 h^{(i)} \phi^{(i)}. \quad (4.8)$$

Notons que la procédure de prise de moyenne en milieu limite est la suivante :

$$\langle \cdot \rangle = \left(\sum_{i=1,3} h^{(i)} \int_{-l}^l (\cdot) d\eta_1 + \sum_{i=2,4} h^{(i)} \int_{-l}^l (\cdot) d\eta_2 \right). \quad (4.9)$$

Evidemment, la surface de superposition de deux segments voisins est d'ordre h^2 et elle disparaît quand $h \rightarrow 0$.

Nous allons montrer que pour ce cas limite le problème pour la perméabilité effective a une solution régulière, qui peut être construite sous la forme analytique (section 4.2). Par contre, le problème limite pour le tenseur de dispersion devient irrégulier avec une solution non unique. La méthode de régularisation est développée pour résoudre ce problème (sections 5.1 et 5.1).

4.2 Problème cellulaire pour la perméabilité effective en milieu fracturé

4.2.1 La forme limite du problème cellulaire

Dans le cas limite (4.6), la construction de la solution généralisée sera possible seulement pour le problème (4.4). Plus précisément, nous allons construire la solution unique dans la classe des fonctions continues, mais non-différentiable dans les nœuds.

Dans la limite (4.6), l'équation (4.4) est transformée en une équation ordinaire différentielle monodimensionnelle pour chaque fracture et en la loi de Kirchhoff pour chaque nœud, pour tout $k = 1, 2$:

$\eta \in Y^{(i)}$:

$$\frac{\partial}{\partial \eta_1} \left(K^{(i)} \frac{\partial \Psi_k^{(i)}}{\partial \eta_1} \right) = 0, \quad i = 1, 3; \quad \frac{\partial}{\partial \eta_2} \left(K^{(i)} \frac{\partial \Psi_k^{(i)}}{\partial \eta_2} \right) = 0, \quad i = 2, 4; \quad (4.10a)$$

$\eta \in U^{(12)}, U^{(23)}, U^{(34)}, U^{(41)}$:

$$\begin{aligned} -h^{(1)} K^{(1)} \frac{\partial \Psi_k^{(1)}}{\partial \eta_1} \Big|_{\eta_1=l} - h^{(2)} K^{(2)} \frac{\partial \Psi_k^{(2)}}{\partial \eta_2} \Big|_{\eta_2=-l} + h^{(3)} K^{(3)} \frac{\partial \Psi_k^{(3)}}{\partial \eta_1} \Big|_{\eta_1=-l} + \\ h^{(4)} K^{(4)} \frac{\partial \Psi_k^{(4)}}{\partial \eta_2} \Big|_{\eta_2=l} = 0. \end{aligned} \quad (4.10b)$$

Cette dernière relation est obtenue par intégration de l'équation (4.4) sur un volume fini ω autour d'un nœud (figure 4.2) et en faisant tendre ce volume vers zéro. En effet, l'intégration nous donne

$$\int_{\partial \omega} K^{(i)} \frac{\partial \Psi}{\partial \eta_i} n_i d\eta = 0,$$

où $\partial \omega$ est la frontière d'un volume fini et n son vecteur normal extérieur. En prenant en compte l'orientation du vecteur normal pour chaque segment, on obtient (4.10b).

La relation obtenue est identique pour chaque nœud grâce à la périodicité.

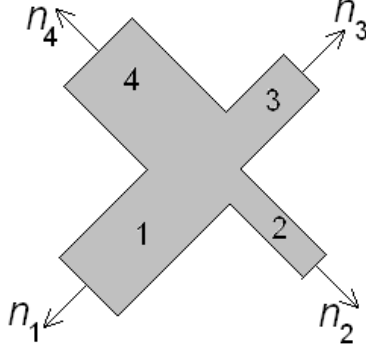


FIG. 4.2 – Schéma pour obtenir la loi de conservation dans un nœud

Les conditions en (4.4) pour la moyenne égale à zéro et la condition de périodicité et de continuité, nous donnent :

$$h^{(1)} \int_{-l}^l \Psi_k^{(1)}(\eta_1) d\eta_1 + h^{(2)} \int_{-l}^l \Psi_k^{(2)}(\eta_2) d\eta_2 +$$

$$h^{(3)} \int_{-l}^l \Psi_k^{(3)}(\eta_1) d\eta_1 + h^{(4)} \int_{-l}^l \Psi_k^{(4)}(\eta_2) d\eta_2 = 0, \quad (4.10c)$$

$$\Psi_k^{(1)}(-l, l) + \frac{1}{2}\delta_{k1} = \Psi_k^{(2)}(l, -l) - \frac{1}{2}\delta_{k1} = \Psi_k^{(3)}(l, -l) - \frac{1}{2}\delta_{k1} = \Psi_k^{(4)}(-l, l) + \frac{1}{2}\delta_{k1}, \quad (4.10d)$$

$$\Psi_k^{(1)}(l, l) - \frac{1}{2}\delta_{k2} = \Psi_k^{(2)}(l, l) - \frac{1}{2}\delta_{k2} = \Psi_k^{(3)}(-l, -l) + \frac{1}{2}\delta_{k2} = \Psi_k^{(4)}(-l, -l) + \frac{1}{2}\delta_{k2}.$$

4.2.2 Solution pour un problème cellulaire de perméabilité effective

Pour chaque $k=1, 2$, le problème (4.10a) - (4.10d) est fermé et a une solution unique, qui est linéaire par partie selon (4.10a) :

$$\Psi_k^{(i)} = \theta_k^{(i)} \eta_1 + \gamma_k^{(i)}, \quad i = 1, 3; \quad \Psi_k^{(i)} = \theta_k^{(i)} \eta_2 + \gamma_k^{(i)}, \quad i = 2, 4. \quad (4.11)$$

Pour un k fixé, les huit paramètres $\theta_k^{(i)}$ et $\gamma_k^{(i)}$, $i=1, 2, 3, 4$ sont obtenus par substitution de (4.11) dans les huit relations (4.10b) – (4.10d). Dès que la perméabilité effective est déterminée par dérivations de Ψ_k , nous avons

seulement besoin des paramètres $\theta_k^{(i)}$:

$$\begin{aligned}\theta_1^{(1)} = -\theta_1^{(4)} &= \frac{K^{(2)}h^{(2)} + K^{(3)}h^{(3)}}{2l \sum_{i=1}^4 K^{(i)}h^{(i)}}, & \theta_2^{(1)} = \theta_2^{(2)} &= \frac{K^{(3)}h^{(3)} + K^{(4)}h^{(4)}}{2l \sum_{i=1}^4 K^{(i)}h^{(i)}}, \\ \theta_1^{(3)} = -\theta_1^{(2)} &= \frac{K^{(1)}h^{(1)} + K^{(4)}h^{(4)}}{2l \sum_{i=1}^4 K^{(i)}h^{(i)}}, & \theta_2^{(3)} = \theta_2^{(4)} &= \frac{K^{(1)}h^{(1)} + K^{(2)}h^{(2)}}{2l \sum_{i=1}^4 K^{(i)}h^{(i)}}.\end{aligned}\tag{4.12}$$

4.2.3 Tenseur de perméabilité effective

En utilisant (4.3), (4.11) et (4.9), nous pouvons déterminer la perméabilité effective (2.35). Dans le système de coordonnées (y_1, y_2) elle peut être représenter sous la forme ($k=1, 2$) :

$$\widehat{K}_{1k} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^4 (-1)^{j+1} K^{(j)} h^{(j)} \theta_k^{(j)}, \quad \widehat{K}_{2k} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^4 K^{(j)} h^{(j)} \theta_k^{(j)}. \tag{4.13}$$

où on prend en compte l'égalité : $2l = \sqrt{2}/2$.

En développant ces relations nous obtenons facilement :

$$\begin{aligned}\widehat{K}_{11} &= \frac{K^{(1)}K^{(2)}h^{(1)}h^{(2)} + K^{(1)}K^{(3)}h^{(1)}h^{(3)} + K^{(2)}K^{(4)}h^{(2)}h^{(4)} + K^{(3)}K^{(4)}h^{(3)}h^{(4)}}{2l \sum_{i=1}^4 K^{(i)}h^{(i)}}, \\ \widehat{K}_{22} &= \frac{K^{(1)}K^{(3)}h^{(1)}h^{(3)} + K^{(1)}K^{(4)}h^{(1)}h^{(4)} + K^{(2)}K^{(3)}h^{(2)}h^{(3)} + K^{(2)}K^{(4)}h^{(2)}h^{(4)}}{2l \sum_{i=1}^4 K^{(i)}h^{(i)}}, \\ \widehat{K}_{12} = \widehat{K}_{21} &= \frac{K^{(1)}K^{(3)}h^{(1)}h^{(3)} - K^{(2)}K^{(4)}h^{(2)}h^{(4)}}{2l \sum_{i=1}^4 K^{(i)}h^{(i)}}.\end{aligned}\tag{4.14}$$

Le tenseur de perméabilité effective est donc symétrique.

4.2.4 Détermination de la vitesse de transport

Les solutions obtenues nous permettent de déterminer entièrement les fonctions u_k , définies comme (4.2) et jouant le rôle des composants de la vitesse de transport pour le deuxième problème cellulaire (4.5). En effet, en utilisant (4.2) et (4.11), on obtient :

$$u_1^{(i)} = \begin{cases} u^{(i)}, & i = 1, 3, \\ 0, & i = 2, 4, \end{cases} \quad u_2^{(i)} = \begin{cases} 0, & i = 1, 3, \\ u^{(i)}, & i = 2, 4, \end{cases} \tag{4.15a}$$

$$u^{(i)} = K^{(i)} \left(\theta_1^{(i)} a_1 + \theta_2^{(i)} a_2 \right) \lambda(S) |\nabla P|, \quad i = 1, 2, 3, 4. \tag{4.15b}$$

Il est plus opportun d'exprimer la vitesse de transport, $u^{(i)}$, à travers la valeur absolue de la vitesse moyenne, V :

$$u^{(i)} = V Z^{(i)}; \quad Z^{(i)}(\gamma_{\nabla P}) \equiv \frac{K^{(i)} \left(\theta_1^{(i)} a_1 + \theta_2^{(i)} a_2 \right)}{\sqrt{\left(\hat{K}_{11} a_1 + \hat{K}_{12} a_2 \right)^2 + \left(\hat{K}_{21} a_1 + \hat{K}_{22} a_2 \right)^2}}, \quad (4.16)$$

Dans ce travail nous utilisons deux paramètres pour décrire la direction d'écoulement : l'angle du gradient de pression, $\gamma_{\nabla P}$, et l'angle de la vitesse moyenne, γ_V . Nous allons montrer dans la section 7.2, que ces deux paramètres ne sont pas égaux pour un milieu anisotrope dans le cas général.

Dans notre algorithme les données initiales sont : les épaisseurs des fractures, $h^{(i)}$, les perméabilités des fractures, $K^{(i)}$, et la direction du gradient de pression. Le vecteur de vitesse sera donc calculé par (4.15) et (4.16), et sera utilisé pour résoudre le problème cellulaire de la dispersion.

Chapitre 5

Méthode de "Stream configuration"

5.1 Phénomène de dégénérescence de la "s-tream configuration"

La résolution du problème de dispersion en milieu fracturé conduit à une singularité mathématique : le problème devient non-unique. Physiquement, cela est provoqué par la dégénérescence du processus réel, qui a lieu dans les nœuds d'intersection des flux. Ce phénomène et sa résolution sont étudiés dans ce chapitre.

5.1.1 Formulation équivalente

Nous examinons maintenant le problème (4.5) pour une valeur de k fixé $k=1, 2$. Ce problème détermine la fonction cellulaire Φ_k , responsable du tenseur de dispersion. Avant d'analyser le cas limite des fractures minces, nous devons réécrire le problème (4.5) sous la forme conservative et équivalente :

$$\begin{cases} \frac{\partial u_1 \Phi_k}{\partial \eta_1} + \frac{\partial u_2 \Phi_k}{\partial \eta_2} = \frac{\phi V_k}{\langle \phi \rangle}, & \eta \in Y_\phi; \\ \langle \Phi \rangle = 0, & (\Phi_k - y_k) \text{ est périodique selon } y. \end{cases} \quad (5.1)$$

Cette relation est obtenue en utilisant la propriété de non divergence de la vitesse de transport selon (4.4) :

$$\frac{\partial u_i}{\partial \eta_i} = \frac{\partial}{\partial \eta_i} \left(K \frac{\partial \Psi}{\partial \eta_i} \right) \lambda(S) |\nabla P| = 0.$$

La condition nécessaire et suffisante d'existence de la solution périodique pour l'équation différentielle (5.1) est satisfaite. En effet, si nous écrivons l'équation (5.1) pour la fonction φ_k , on obtient :

$$\frac{\partial u_i \varphi_k}{\partial \eta_i} = \frac{\phi V_k}{\langle \phi \rangle} - u_k. \quad (5.2)$$

Une solution périodique existe si et seulement si la moyenne de l'extrémité droite est égale à zéro. Cette condition est évidemment vérifiée grâce à (2.34b).

Il est à remarquer que la condition de périodicité dans (5.1) implique que la relation $\Phi_k(y \pm 1) - y_k = \Phi_k(y) - y_k$ peut être appliquée pour n'importe quel

y , sauf lorsque la fonction $\Phi_k(y)$ est discontinue. En particulier, la discontinuité peut apparaître dans une frontière de cellule comme il va être montré dans les sections suivantes.

Comme précédemment dans le cas limite (4.6), la solution généralisée peut seulement être obtenue pour (5.1). En effet, dès que l'équation basique est du premier ordre, elle peut avoir des solutions discontinues. De plus, dans le cas limite on peut montrer que la solution continue n'existe pas.

Dans le cas (4.6), le problème (5.1) est transformé en une équation ordinaire différentielle pour chaque fracture et en une équation de conservation pour chaque nœud (for $k=1, 2$) : $\eta \in Y^{(i)}$:

$$u_1^{(i)} \frac{\partial \Phi_k^{(i)}}{\partial \eta_1} = \frac{\phi^{(i)} V_k}{\langle \phi \rangle}, \quad i = 1, 3; \quad u_2^{(i)} \frac{\partial \Phi_k^{(i)}}{\partial \eta_2} = \frac{\phi^{(i)} V_k}{\langle \phi \rangle}, \quad i = 2, 4; \quad (5.3a)$$

$$\eta \in U^{(12)}, U^{(23)}, U^{(34)}, U^{(41)} :$$

$$-u^{(1)} \varphi_k^{(1)} h^{(1)} - u^{(2)} \varphi_k^{(2)} h^{(2)} + u^{(3)} \varphi_k^{(3)} h^{(3)} + u^{(4)} \varphi_k^{(4)} h^{(4)} = 0. \quad (5.3b)$$

La condition de moyenne égale à zéro dans (5.1) nous donne :

$$h^{(1)} \int_{-l}^l \Phi_k^{(1)}(\eta_1) d\eta_1 + h^{(2)} \int_{-l}^l \Phi_k^{(2)}(\eta_2) d\eta_2 + h^{(3)} \int_{-l}^l \Phi_k^{(3)}(\eta_1) d\eta_1 + h^{(4)} \int_{-l}^l \Phi_k^{(4)}(\eta_2) d\eta_2 = 0. \quad (5.3c)$$

Les relations (5.3b) sont obtenues par intégration des équations différentielles (5.2) sur un volume arbitraire ω autour d'un nœud (figure 4.2) et en faisant tendre ce volume vers zéro. Les segments 3 et 4 sont reproduits par périodicité. L'extrémité gauche de (5.2) nous donne :

$$\int_{\omega} \frac{\partial(u_i \varphi_k)}{\partial \eta_i} d\eta = \int_{\partial \omega} u_i \varphi_k n_i d\eta$$

(n est le vecteur normal extérieur). Cette relation conduit à l'extrémité gauche de (5.3b). L'extrémité droite de (5.1), intégrée sur le volume examiné, est d'ordre h^2 et tend vers zéro quand $h \rightarrow 0$. Nous obtenons donc (5.3b).

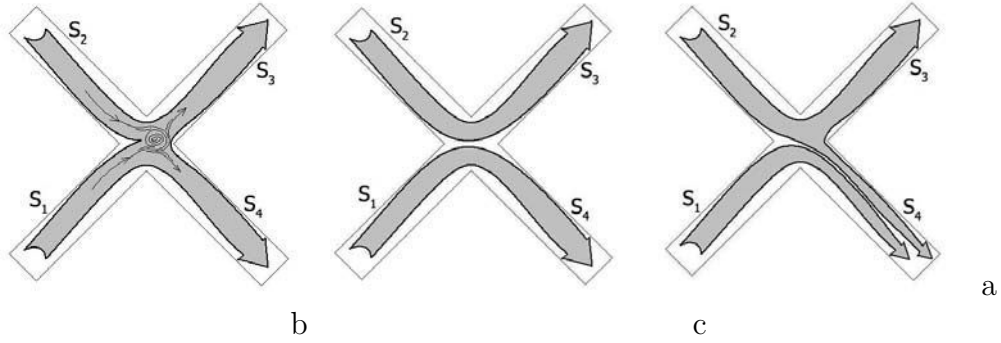


FIG. 5.1 – Processus variés dans un nœud : un mélange total des flux entrant (a) ; un passage indépendant des flux (b) ; un mélange partiel (c)

5.1.2 Non-unicité du problème

Selon (5.3a), la fonction cellulaire $\varphi_k^{(i)}$, ($k=1, 2$), est linéaire :

$$\Phi_k^{(i)} = \beta_k^{(i)} \eta_1 + \alpha_k^{(i)}, \quad i = 1, 3; \quad \Phi_k^{(i)} = \beta_k^{(i)} \eta_2 + \alpha_k^{(i)}, \quad i = 2, 4; \quad (5.4)$$

$$\beta_k^{(i)} = \frac{V_k}{v_1^{(i)} \langle \phi \rangle}, \quad i = 1, 3; \quad \beta_k^{(i)} = \frac{V_k}{v_2^{(i)} \langle \phi \rangle}, \quad i = 2, 4. \quad (5.5)$$

Pour un k donné, nous avons deux relations (5.3b) et (5.3c) pour quatre coefficients $\alpha_k^{(i)}$. La solution est donc non-unique.

La non-unicité du problème limite a une origine physique claire. Elle est causée par l'effet de dégénérescence de la configuration des flux dans les nœuds des intersections des fractures. La nature de cet effet est la suivante. Comme nous avons déjà dit, l'équation différentielle (5.1) décrit le transport convectif de saturation locale Φ_k sans diffusion. Supposons que deux flux avec des saturations différentes (S_1 et S_2) entrent dans le nœud par les deux fractures (figure 5.1).

Plusieurs processus peuvent être observés dans un nœud entre les deux flux : un mélange total, un mélange partiel ou un passage indépendant. Selon le type de processus hydrodynamique dans un nœud, nous pouvons obtenir les différentes possibilités pour les deux autres saturations (S_3 and S_4), sortant de ce nœud selon deux autres fractures. Si les flux entrants sont totalement mélangés à l'intérieur d'un nœud (figure 5.1a), les deux autres flux sortant de ce nœud vont transporter des saturations identiques : $S_3=S_4$. Si les deux flux entrants passent au travers d'un nœud de façon indépendante sans aucun mélange (figure 5.1b), les flux sortants vont transporter les même saturations que dans les flux entrants : $S_1=S_4$, $S_2=S_3$. La configuration des flux la plus complexe est montrée dans la figure 5.1c où le mélange partiel a lieu, c'est-à-dire $S_2=S_3$ et S_4 est une combinaison pondérée de S_1 et S_2 .

Dans la limite des fractures très minces, le volume d'un nœud tend vers zéro. Cela entraîne la dégénérescence des configurations des flux dans un nœud ou la perte d'information à propos des configurations des flux. Cela conduit à la non-unicité physique.

5.2 Régularisation du problème

5.2.1 Restriction générale pour les configurations des flux

Pour régulariser le problème cellulaire (5.3), il est nécessaire de construire certaines conditions additionnelles, représentant la vraie configuration géométrique des lignes de courant dans un nœud de volume fini. Comme nous l'avons vu, une configuration des flux dans un nœud impose des conditions assez précises sur la saturation des flux sortant d'un nœud.

Dans un volume fini, la structure des flux est déterminée par le champ de vitesse et par la géométrie constructive du nœud. Dans cette circonstance il devient pratiquement impossible de formuler toutes les conditions structurales existantes. Heureusement, dans le cas examiné (faible volume de nœud), les flux peuvent être considérés comme indépendants de la géométrie du nœud.

En effet, dans un petit nœud l'indépendance des différents flux est moins probable. Les flux doivent donc être mélangés. Plus le nœud est petit, plus le degré de mélange est important. Pour le cas des fractures très minces, nous acceptons donc la condition du mélange total des différents flux entrant dans chaque nœud. On en déduit que les saturations de tous les flux sortants sont identiques :

$$\Phi_k^{(i)} = \Phi_k^{(j)} \quad \text{dans un nœud,} \quad (5.6)$$

où les indices i et j correspondent aux flux sortant du nœud.

Cette condition nécessite de distinguer les flux entrants et sortants, autrement dit les directions des flux. Un schéma géométrique fixé pour une cellule, qui détermine les directions des flux dans chaque fracture, va être appelé *configuration des flux*. Les exemples des différentes configurations des flux sont montrés figure 5.2. La configuration des flux représente donc un ensemble de flèches dans la cellule, qui montre la direction dans chaque canal.

Pour les différentes configurations des flux la condition générale de mélange (5.6) va prendre un aspect concret. Le problème consiste donc en la détermination de toutes les configurations des flux probables.

5.2.2 Sélection des configurations des flux indépendants

Pour un réseau fracturé périodique, consistant en quatre canaux minces (dans lesquels un flux a seulement deux directions), le nombre total des configurations des flux est 2^4 . Néanmoins, tous les schémas géométriques formels ne sont pas indépendants et tous les schémas ne sont pas réalisés. Nous allons montrer que le nombre des configurations des flux, indépendants et admissibles, est seulement de trois dans le cas bidimensionnel.

Chaque flux est caractérisé par la direction d'écoulement, ou par le signe de la vitesse d'écoulement, $u^{(i)}$. A leur tour, les orientations de vitesse d'écoulement dépendent de $\gamma_{\nabla P}$, un angle entre le gradient de la pression moyenne et l'axe x_1 . Il est suffisant d'analyser la variation de $\gamma_{\nabla P}$ dans le secteur principal : $\gamma_{\nabla P} \in [0; \pi/4]$. Les situations hors de ce secteur principal peuvent être obtenues par la permutation symétrique des indices appropriés, ces situations seront présentées dans la section suivante.

En effet, supposons que la direction d'écoulement est dans le secteur principal, c'est-à-dire $a_1 \in [1/\sqrt{2}; 1]$, $a_2 \in [0; 1/\sqrt{2}]$. Rappelons quelques propriétés. Premièrement, selon (4.15b) le vecteur vitesse dans une fracture est proportionnel à

$$u^{(i)} \sim \theta_1^{(i)} a_1 + \theta_2^{(i)} a_2. \quad (5.7)$$

Deuxièmement, selon (4.12) les coefficients $\theta_k^{(i)}$ sont toujours positifs sauf $\theta_1^{(2)}$ et $\theta_1^{(4)}$, qui sont négatifs. Les vitesses $u^{(1)}$ et $u^{(3)}$ sont donc toujours positives dans le secteur principal, alors que les deux autres composantes, $u^{(2)}$ et $u^{(4)}$, peuvent changer de signe. En outre, nous allons montrer que ces deux composantes ne peuvent pas être positives en même temps. Pour cela on écrit (4.12) comme :

$$\begin{aligned} u^{(2)} &\sim -a_1 (K^{(1)} h^{(1)} + K^{(4)} h^{(4)}) + a_2 (K^{(3)} h^{(3)} + K^{(4)} h^{(4)}), \\ u^{(4)} &\sim -a_1 (K^{(2)} h^{(2)} + K^{(3)} h^{(3)}) + a_2 (K^{(1)} h^{(1)} + K^{(2)} h^{(2)}). \end{aligned} \quad (5.8)$$

La somme de ces composantes est

$$u^{(2)} + u^{(4)} \sim (a_2 - a_1) \left(\sum_{i=1}^4 K^{(i)} h^{(i)} \right) \leq 0. \quad (5.9)$$

Puisque la somme $u^{(2)} + u^{(4)}$ est toujours positive, alors $u^{(2)}$ et $u^{(4)}$ ne peuvent pas être positifs en même temps.

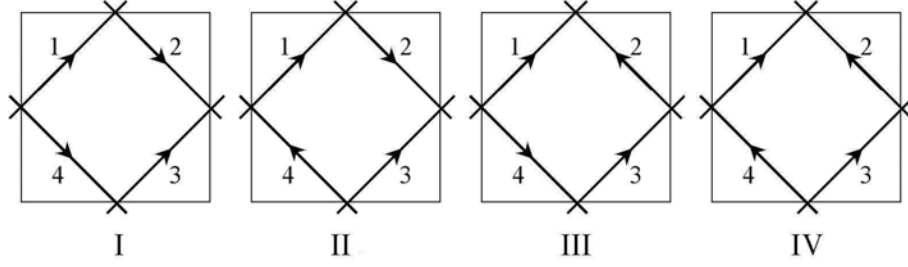


FIG. 5.2 – Les configurations possibles (I, II, III) et la configuration impossible (IV), pendant l'écoulement dans le secteur principal

Dans le secteur principal il y a donc seulement trois configurations possibles (figure 5.2) :

$$\begin{aligned}
 \text{Configuration } I : & \quad u^{(2)} < 0, \quad u^{(4)} < 0; \\
 \text{Configuration } II : & \quad u^{(2)} < 0, \quad u^{(4)} > 0; \\
 \text{Configuration } III : & \quad u^{(2)} > 0, \quad u^{(4)} < 0.
 \end{aligned} \tag{5.10}$$

Hors du secteur principal les résultats obtenus sont valides, mais la permutation suivante des indices et des variables doit être effectuée :

- Quand $\gamma_{\nabla P} \in [\pi/4; \pi/2]$: $y_1 \rightarrow y_2$, $y_2 \rightarrow y_1$, $\gamma_{\nabla P} \rightarrow \pi/2 - \gamma_{\nabla P}$,
indices $(1) \rightarrow (3)$, $(3) \rightarrow (1)$.
- Quand $\gamma_{\nabla P} \in [\pi/2; 3\pi/4]$: $y_1 \rightarrow y_2$, $y_2 \rightarrow -y_1$, $\gamma_{\nabla P} \rightarrow \gamma_{\nabla P} - \pi/2$,
indices $(1) \rightarrow (4)$, $(2) \rightarrow (1)$, $(3) \rightarrow (2)$, $(4) \rightarrow (3)$.
- Quand $\gamma_{\nabla P} \in [3\pi/4; \pi]$: $y_1 \rightarrow -y_1$, $\gamma_{\nabla P} \rightarrow \pi - \gamma_{\nabla P}$,
indices $(1) \rightarrow (2)$, $(2) \rightarrow (1)$, $(3) \rightarrow (4)$, $(4) \rightarrow (3)$.
- Quand $\gamma_{\nabla P} \in [\pi; 5\pi/4]$: $y_1 \rightarrow -y_1$, $y_2 \rightarrow -y_2$, $\gamma_{\nabla P} \rightarrow \gamma_{\nabla P} - \pi$,
indices $(1) \rightarrow (3)$, $(2) \rightarrow (4)$, $(3) \rightarrow (1)$, $(4) \rightarrow (2)$.
- Quand $\gamma_{\nabla P} \in [5\pi/4; 3\pi/2]$: $y_1 \rightarrow -y_2$, $y_2 \rightarrow -y_1$, $\gamma_{\nabla P} \rightarrow 3\pi/2 - \gamma_{\nabla P}$,
indices $(2) \rightarrow (4)$, $(4) \rightarrow (2)$.
- Quand $\gamma_{\nabla P} \in [3\pi/2; 7\pi/4]$: $y_1 \rightarrow -y_2$, $y_2 \rightarrow y_1$, $\gamma_{\nabla P} \rightarrow \gamma_{\nabla P} - 3\pi/2$,
indices $(1) \rightarrow (2)$, $(2) \rightarrow (3)$, $(3) \rightarrow (4)$, $(4) \rightarrow (1)$.
- Quand $\gamma_{\nabla P} \in [7\pi/4; 2\pi]$: $y_2 \rightarrow -y_1$, $\gamma_{\nabla P} \rightarrow 2\pi - \gamma_{\nabla P}$,
indices $(1) \rightarrow (4)$, $(2) \rightarrow (3)$, $(3) \rightarrow (2)$, $(4) \rightarrow (1)$.

5.2.3 Conditions des configurations

Pour chaque configuration, il y a seulement deux nœuds, qui mènent aux conditions des configurations (5.6). Ces expressions prennent la forme

suivante ($k=1, 2$) :

$$\begin{aligned}
\text{Config. I : } & \Phi_k^{(3)} \Big|_{U^{34}} = \Phi_k^{(2)} \Big|_{U^{12}}, & \Phi_k^{(1)} \Big|_{U^{14}} = \Phi_k^{(4)} \Big|_{U^{14}}; \\
\text{Config. II : } & \Phi_k^{(3)} \Big|_{U^{34}} = \Phi_k^{(4)} \Big|_{U^{34}}, & \Phi_k^{(3)} \Big|_{U^{34}} = \Phi_k^{(2)} \Big|_{U^{12}}; \\
\text{Config. III : } & \Phi_k^{(1)} \Big|_{U^{14}} = \Phi_k^{(4)} \Big|_{U^{14}}, & \Phi_k^{(1)} \Big|_{U^{14}} = \Phi_k^{(2)} \Big|_{U^{23}}.
\end{aligned} \tag{5.11}$$

Pour un k donné, chaque configuration nous donne deux conditions pour la fonction Φ_k . Les quatre coefficients $\alpha_k^{(i)}$ dans (5.4) sont alors déterminés par les deux conditions et les deux équations (5.3b) et (5.3c). Le problème a donc une solution unique.

5.2.4 Solution pour le problème cellulaire

La solution Φ_k peut être maintenant construite. Notons que les équations (5.3b) et (5.3c) prennent la forme :

$$u^{(3)} \alpha_k^{(3)} h^{(3)} + u^{(4)} \alpha_k^{(4)} h^{(4)} - u^{(1)} \alpha_k^{(1)} h^{(1)} - u^{(2)} \alpha_k^{(2)} h^{(2)} = 0, \tag{5.12}$$

$$\sum_{i=1}^4 h^{(i)} \alpha_k^{(i)} = 0. \tag{5.13}$$

En ajoutant les conditions des configurations découlant de (5.11), nous obtenons un système linéaire algébrique de quatre équations pour $\alpha_k^{(i)}$, k prenant une valeur donnée ($k=1, 2$) :

$$\sum_{i=1}^4 \lambda_{mi} \alpha_k^{(i)} = \mu_{m,k}, \quad m = 1 - 4, \tag{5.14}$$

les coefficients du système sont définis comme ($i=1-4, k=1, 2$) :

$$\begin{aligned}
\lambda_{1i} &= h^{(i)}, & \mu_{1,k} &= 0; \\
\lambda_{2i} &= (-1)^{(\delta_{i3} + \delta_{i4})} u^{(i)} h^{(i)}, & \mu_{2,k} &= 0; \\
\lambda_{3i} &= \begin{cases} \delta_{i1} - \delta_{i4}, & \text{Conf. I, III;} \\ \delta_{i3} - \delta_{i4}, & \text{Conf. II;} \end{cases} & \mu_{3,k} &= \begin{cases} l \left(\beta_k^{(1)} + \beta_k^{(4)} \right), & \text{Conf. I, III;} \\ l \left(\beta_k^{(3)} - \beta_k^{(4)} \right), & \text{Conf. II;} \end{cases} \\
\lambda_{4i} &= \begin{cases} \delta_{i2} - \delta_{i3}, & \text{Conf. I, II;} \\ \delta_{i1} - \delta_{i2}, & \text{Conf. III;} \end{cases} & \mu_{4,k} &= \begin{cases} -l \left(\beta_k^{(2)} + \beta_k^{(3)} \right), & \text{Conf. I, II;} \\ l \left(\beta_k^{(1)} - \beta_k^{(2)} \right), & \text{Conf. III.} \end{cases}
\end{aligned} \tag{5.15}$$

Une fois les coefficients $\alpha_k^{(i)}$ et $\beta_k^{(i)}$ déterminés, la solution (5.4) du problème cellulaire pour la dispersion est alors construite.

5.3 Comportement du tenseur de dispersion. Dispersion singulière

5.3.1 Solution pour le tenseur de dispersivité

Une fois que les deux familles des problèmes cellulaires sont résolues, le tenseur de dispersion (2.39) peut être calculé. En combinant les solutions pour les problèmes cellulaires (4.11), (5.4), les relations (4.12), (5.6) et (5.14) pour les paramètres $\theta_k^{(i)}$, $\beta_k^{(i)}$ et $\alpha_k^{(i)}$, et la relation (4.16) pour la vitesse de transport u , nous obtenons le résultat suivant pour le tenseur de dispersivité :

$$\frac{1}{\varepsilon} \mathfrak{a}_{ik}(\gamma_{\nabla P}) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^4 (-1)^{i(j-1)+1} h^{(j)} \alpha_k^{(j)}(\gamma_{\nabla P}) Z^{(j)}(\gamma_{\nabla P}), \quad i, k = 1, 2. \quad (5.16)$$

Selon les résultats obtenus, les dispersivités pour un milieu poreux donné ne sont pas constantes, car elles dépendent de la direction du gradient de pression macroscopique, $\gamma_{\nabla P}$. Les dispersivités ne sont donc pas les propriétés intrinsèques du milieu poreux, mais elles dépendent du processus. Elles peuvent être considérés comme des paramètres intrinsèques, si $\gamma_{\nabla P}$ est faiblement variable, c'est-à-dire si l'écoulement macroscopique est presque monodimensionnel.

Remarquons que dans le cas de la perméabilité macroscopique scalaire, $\gamma_{\nabla P}$ est égale à l'angle de la direction du vecteur de vitesse macroscopique. Cela n'est pas le cas quand le milieu est anisotrope à grande échelle, car la vitesse V n'est plus parallèle au gradient de pression.

L'intérêt pratique est en règle générale de calculer la dispersion longitudinale et transversale. La composante longitudinale correspond à la direction de la vitesse d'écoulement macroscopique. Dans le cas du milieu anisotrope à grande échelle (par rapport à la perméabilité), la vitesse macroscopique n'est pas parallèle au gradient de pression et elle est caractérisée par l'angle γ_V (qui n'est pas égal à $\gamma_{\nabla P}$).

Nous allons pourtant utiliser une autre définition de la dispersion longitudinale et transversale, en les associant aux coordonnées principales du tenseur de dispersivité. Il est connu que le tenseur est diagonal dans ces coordonnées. La composante longitudinale correspond à l'élément diagonal qui

a une valeur absolue maximale. Il est possible de montrer que cette définition est correcte car l'une des directions principales du tenseur de dispersivité est toujours égale à la direction de l'écoulement macroscopique.

Pour transformer le tenseur $\mathfrak{a}_{ik}$ de deuxième rang $\mathfrak{a}_{ik}$, déterminé par (5.16), des coordonnées (x_1, x_2) dans les coordonnées principales, il est suffisant d'utiliser la relation générale de matrice :

$$\mathfrak{a} = Q \cdot S \cdot R^*,$$

où Q et R sont des matrices unitaires, R^* est conjuguée à R , et S est une matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont les valeurs singulières de $\mathfrak{a}$. Les valeurs singulières de la matrice $\mathfrak{a}$ sont les racines carrées non négatives des valeurs propres du produit $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{a}^*$, où $\mathfrak{a}^*$ est conjuguée à $\mathfrak{a}$.

5.3.2 Simulation de la dispersivité

Même si toutes les dérivations analytiques ont été effectuées sous la forme adimensionnelle, les résultats des simulations numériques vont être présentés sous la forme dimensionnelle pour les comparer avec certains résultats connus et attendus. Le tenseur dimensionnel de dispersivité va être désigné par $\mathfrak{a}_{ik}^{dim}$. Il est relié à la dispersivité dimensionnelle par :

$$\mathfrak{a}_{ik}^{dim} = \varepsilon \cdot \mathfrak{a}_{ik} \cdot L^* = \mathfrak{a}_{ik} l^*.$$

Les paramètres pour les simulations ont été choisis pour être similaires à ceux utilisés dans Neuweiler et al. (2003) : l'échelle d'hétérogénéité est $l^*=0.44\text{m}$ et la longueur du domaine est $L^*=25\text{m}$, le degré d'hétérogénéité est donc $\varepsilon=0.0176$. Nous examinons le milieu bi-perméable, supposant que la perméabilité des fractures ne peut avoir que deux valeurs : K_1 ou K_2 . Le rapport des perméabilités est $n=K_1/K_2$. En même temps l'épaisseur de fracture est supposé être constante dans toute la cellule, $h=0.01 \cdot l^*$, pour minimiser le nombre des paramètres. Les exemples des cellules examinées sont montrées en figure 5.3, où les segments noir sont plus perméables.

Le gradient de pression est supposé parallèle à l'axe x_1 et donc $\gamma_{\nabla P}=0$. Comme nous l'avons remarqué plus tôt, cela ne signifie pas que la vitesse macroscopique d'écoulement est orientée suivant x_1 , car dans le milieu anisotrope la vitesse d'écoulement n'est pas parallèle au gradient de pression.

Pour le cas de $K_1/K_2=5$, l'angle de vitesse macroscopique par rapport à l'axe horizontal, γ_V , les dispersivités dimensionnelles longitudinale et trans-

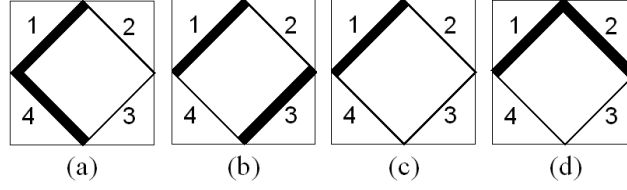


FIG. 5.3 – Géométries différentes des réseaux fracturés utilisés dans les simulations : les segments noirs sont plus perméables

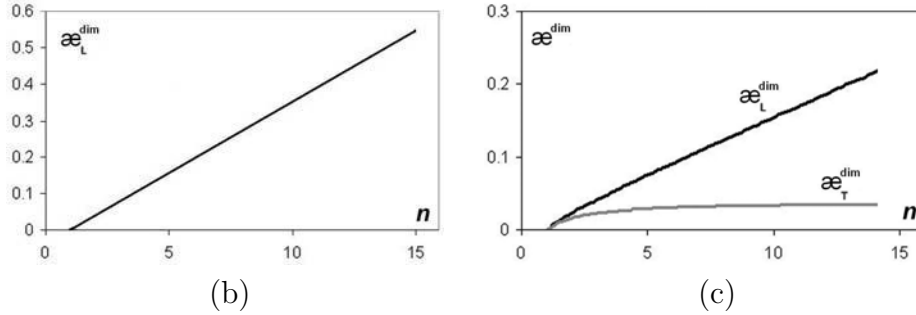


FIG. 5.4 – Dispersivité dimensionnelle $\mathfrak{a}_L^{dim}$ et $\mathfrak{a}_T^{dim}$, (m) en fonction du rapport de perméabilité $n = K_1/K_2$ pour les cas (b) et (c).

versale, $\mathfrak{a}_L^{dim}$, (m) et $\mathfrak{a}_T^{dim}$, (m) sont respectivement :

$$\begin{array}{cccc}
 (a) : & (b) : & (c) : & (d) : \\
 \left\{ \begin{array}{l} \gamma_V = 0^\circ \\ \mathfrak{a}_L^{dim} = 0 \\ \mathfrak{a}_T^{dim} = 0 \end{array} \right. & \left\{ \begin{array}{l} \gamma_V = 33.7^\circ \\ \mathfrak{a}_L^{dim} = 0.159 \\ \mathfrak{a}_T^{dim} = 0 \end{array} \right. & \left\{ \begin{array}{l} \gamma_V = 18.4^\circ \\ \mathfrak{a}_L^{dim} = 0.075 \\ \mathfrak{a}_T^{dim} = 0.029 \end{array} \right. & \left\{ \begin{array}{l} \gamma_V = 0^\circ \\ \mathfrak{a}_L^{dim} = 0.11 \\ \mathfrak{a}_T^{dim} = 0 \end{array} \right. \\
 & & & (5.17)
 \end{array}$$

Dans les cas (a) et (d) la direction longitudinale est la même que la direction du gradient de pression (axe x_1), dans le cas (a) la dispersion est donc nulle car le milieu est symétrique par rapport à la direction d'écoulement macroscopique. Au contraire, dans le cas (d), seule la dispersion transversale est égale à zéro car le milieu est symétrique par rapport à la direction transversale.

Dans les cas (b) et (c), la vitesse moyenne n'est plus parallèle à l'axe x_1 . Dans le cas (c), la dispersion longitudinale et la pente de la vitesse sont deux fois plus faible que dans le cas (b).

La dépendance des dispersivités longitudinale et transversale du rapport de perméabilité n est présentée en figure 5.4. La dispersion longitudinale est une fonction presque linéaire de n avec les tangentes 0.039 (cas (b)) et 0.018 (cas (c)). La dispersion transversale est toujours beaucoup plus faible que

la longitudinale et elle est une fonction non linéaire de n qui se stabilise rapidement quand n augmente. La dispersion transversale peut donc être considérée approximativement indépendante du rapport de perméabilité.

Tous ces résultats sont qualitativement cohérents aux propriétés géométriques du milieu.

5.3.3 Effet de la dispersion singulière

Les solutions développées révèlent un comportement singulier du tenseur de dispersion, de telle manière qu'une ou plusieurs composantes du tenseur de dispersion deviennent infinies.

Les composantes calculées du tenseur de dispersion sont montrées en figure 5.5 comme une fonction de la direction du gradient de pression. Nous pouvons remarquer que dans le cas de la géométrie (b), la composante α_L manifeste un comportement singulier aux alentours de l'angle critique $\gamma_{\nabla P}^* = 45^\circ$. Dans le cas de la géométrie (c) la dispersion a deux régimes singuliers. Entre ces deux régimes, l'écoulement est gouverné par la "stream" configuration *II*.

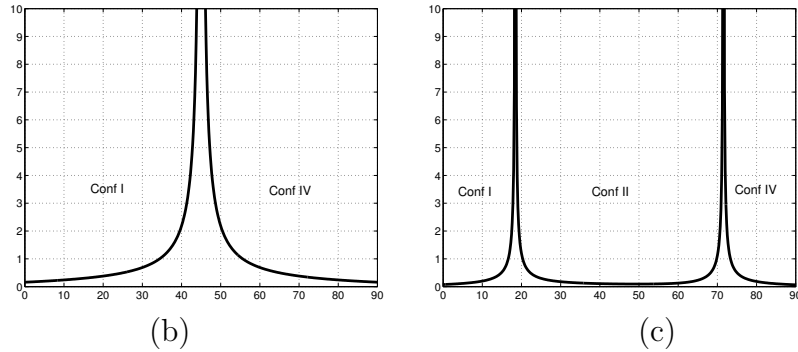


FIG. 5.5 – Dispersivité longitudinale, α_L , (m) en fonction de la direction du gradient de pression, $\gamma_{\nabla P}$, pour les cas (b) et (c).

L'augmentation infinie du tenseur de dispersion dans un régime singulier est donc causée par la création de zones stagnantes dans chaque cellule, conduisant à l'emprisonnement des fluides.

La raison de la singularité est reliée à la création des zones stagnantes, dans lesquelles le fluide est immobile. En effet, dans tous les régimes critiques, la vitesse d'écoulement est égale à zéro dans certaines fractures. Par exemple, dans le cas (b) en figure 5.5, les zones stagnantes apparaissent dans les segments $Y^{(2)}$ et $Y^{(4)}$.

5.3.4 Comparaison avec les autres résultats

Dans Neuweiler et al. (2003) la dispersivité est calculée pour l'écoulement diphasique. L'hétérogénéité du milieu poreux est modélisée par les fluctuations stochastiques du champ de vitesse. L'écoulement est supposé stable, le rapport de viscosité, $\mu = \mu_1/\mu_2$, est égale à 0.5 ou 1.2 pour les différents cas.

La dispersivité obtenue, α , varie entre 0.1 m et 0.2 m. Selon les résultats montrés en figure 5.4 et dans le tableau précédent, les dispersivités obtenues dans le présent travail sont entre 0 et 0.8 m. Cela est du même ordre de grandeur.

Une comparaison plus précise peut être réalisée pour le cas du transport inerte en écoulement monophasique, simulé par exemple dans Edwards et al. (1991), Edwards et al. (1992), Tran (2000). Dans Tran (2000) l'écoulement de Stokes autour d'un réseau de cylindres solides a été étudié numériquement. La période élémentaire est montrée en figure 5.6a. La perméabilité locale dans ce cas est égale à 1.

La structure de cellule que nous utilisons dans notre travail (figure 5.6b) est approximativement similaire mais elle diffère légèrement de celle de Tran (2000).

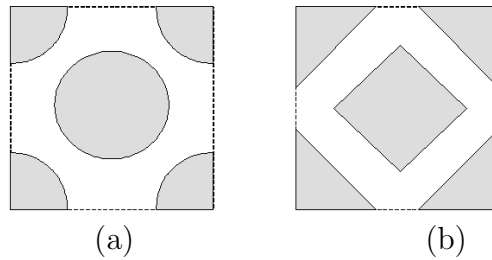


FIG. 5.6 – Un milieu utilisé dans Tran (2000) (a) et dans le présent travail (b)

Pour ce cas nous pouvons utiliser la même relation (2.39) pour le tenseur de dispersion, dans laquelle, pourtant, toutes les fonctions de saturation sont éliminées :

$$\hat{D}_{ik} = D_{in} \left(\frac{\langle \phi \varphi_i \rangle V_k}{\langle \phi \rangle} - \langle \varphi_k v_i \rangle \right),$$

où D_{in} est un coefficient de diffusion microscopique. Les résultats peuvent être comparés sous la forme des tenseurs normalisés : $\hat{D}/D_{in}$.

Le comportement de la dispersion longitudinale (déterminée comme détaillé dans la section 7.2) en fonction de l'angle $\gamma_{\nabla P}$ est présenté. Nous avons utilisé les données de Tran (2000) obtenus pour $Pe = 100$ et pour un milieu isotrope.

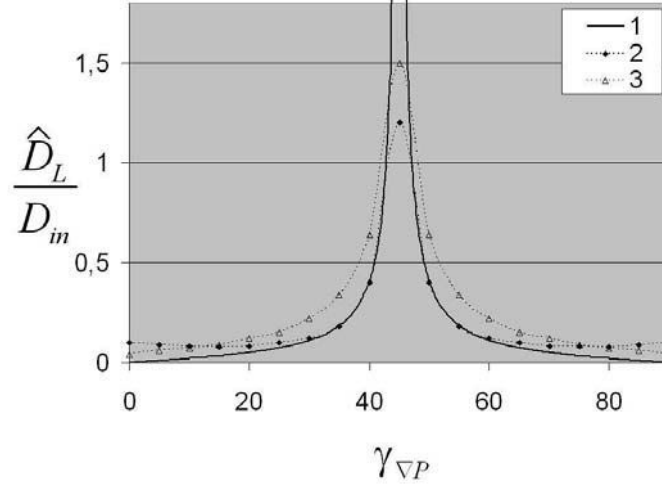


FIG. 5.7 – Dispersion longitudinale $\hat{D}_L/D_{in}$ en fonction de l'angle du gradient de pression, $\gamma_{\nabla P}$: 1 - solution analytique de travail présent ; 2 et 3 - simulation numérique de Tran (2000) pour $\phi=0.6$, $\phi=0.4$ respectivement.

La comparaison révèle trois conclusions significatives :

i) le comportement global des solutions obtenues dans la présente étude montre une bonne concordance quantitative et qualitative avec les résultats numériques obtenus par les autres auteurs ;

ii) les données numériques de Tran (2000) justifient l'existence des régimes singuliers de dispersion ; le point de la singularité ($\gamma_{\nabla P} = 45^\circ$) est exactement déterminé ;

iii) pour les cas examinés, les coefficients obtenus pour la dispersion sont indépendants de la porosité du milieu. Cela est plus ou moins en concordance avec les données numériques (la différence entre les courbes 2 et 3 est négligeable) ;

iv) la faible différence entre notre courbe et les données numériques quand $\gamma_{\nabla P} \rightarrow 0$ est liée à la différence entre les géométries des cellules. De plus, dans le présent travail, la dispersion microscopique provoquée par les profils de vitesse non uniforme à l'intérieur de chaque fracture a été négligée. Au contraire, dans Tran (2000) cette composante de la dispersion microscopique a été prise en compte. Grâce à cela, la dispersion dans les courbes 2 et 3 n'est jamais nulle et reste un peu plus importante que celle calculée dans le présent travail.

5.3.5 Conclusion pour le chapitre 5

Nous avons analysé dans le détail le cas du milieu fracturé périodique constitué de fractures très minces avec des épaisseurs variables. Une fracture mince signifie que la limite est examinée quand l'épaisseur de fracture tend vers zéro. Puisque la structure limite du réseau fracturé devient singulière, nous avons examiné la solution généralisée pour les problèmes cellulaires limites. Le cas de nombre capillaire illimité a été le seul étudié.

La première famille des problèmes cellulaires, qui est décrite par une équation elliptique, reste régulière dans le cas limite. Sa solution est construite sous une forme analytique. Cette solution nous permet de déterminer la perméabilité effective du milieu et les composantes de la vitesse de transport, qui entrent dans la deuxième famille.

La deuxième famille des problèmes cellulaires est décrite par une équation de transport du premier ordre en fonction de la saturation locale. Il a été montré que, contrairement au premier cas, la deuxième famille devient irrégulière dans le cas des épaisseurs limites. La solution est alors non unique. La non unicité est causée par un effet physique, appelé la dégénérescence de la "stream configuration", qui a lieu dans les nœuds d'intersection des fractures. En effet, quand plusieurs flux passent à travers un nœud d'intersection, la saturation des flux sortants n'est pas suffisamment défini par le mélange des flux à l'intérieur du nœud. Plusieurs possibilités existent : deux flux peuvent se mélanger, ils peuvent s'écouler indépendamment l'un de l'autre ou ils peuvent être partiellement mélangés. Quand le volume d'un nœud tend vers zéro, toutes les configurations à l'intérieur du nœud sont dégénérées et l'information à propos de l'écoulement est donc perdue. Cette situation n'a pas été observée pour un écoulement monophasique homogène, décrit par une équation elliptique.

Pour régulariser le problème, nous proposons une classe de conditions additionnelles, appelées conditions de configuration, qui représentent une vraie configuration des flux dans un nœud de volume infini. Pour un petit volume, cette condition de configuration implique un mélange total entre les flux entrants. Puisque une condition de configuration distingue les flux entrants et sortants, sa formulation mathématique dépend de l'orientation des flux. Nous avons détecté tous les schémas possibles, en montrant que leur nombre est fini pour un réseau périodique. Le problème cellulaire, complété avec les conditions de configurations, a été résolu analytiquement.

Grâce à cette solution, nous avons obtenu une relation générale analytique pour le tenseur de dispersion, qui est représenté sous la forme factorisé. Un facteur est responsable de la non linéarité et il est proportionnel à la vitesse d'écoulement et à la dérivé de la fonction de l'écoulement fractionné. Le

deuxième facteur est la dispersivité, qui est responsable de l'hétérogénéité du milieu. Nous avons montré que pour le cas diphasique, le tenseur de dispersivité n'est pas un paramètre strictement intrinsèque du milieu car il dépend de la pente du gradient de pression macroscopique. Des exemples de calcul de dispersion longitudinale et transversale sont présentés.

Nous avons mis en évidence des régimes de dispersion singuliers, dans lesquelles le tenseur de dispersion devient illimité. Dans le régime singulier, la zone stagnante apparaît dans certaines fractures qui conduisent à l'emprisonnement des fluides. Nous proposons une explication au fait que cet emprisonnement provoque une dispersion infinie.

La comparaison de nos résultats avec les données numériques des autres auteurs, obtenus à l'aide des autres méthodes, a révélée une bonne concorde d'un point de vue quantitatif. L'existence des régimes singuliers est confirmée par des données numériques.

Chapitre 6

Upscaling du milieu fracturé désordonné

6.1 Approche semi-analytique de l'upscaling de la perméabilité en milieu poreux fracturé

Pour un milieu désordonné nous proposons une approche similaire à celle que nous avons développée pour le cas périodique. Dans le cadre de cette approche, les solutions analytiques peuvent être obtenues pour les problèmes cellulaires avec certains paramètres qui doivent être calculés numériquement. C'est pourquoi nous appelons cette approche semi-analytique.

6.1.1 Homogénéisation et upscaling

Dans le cas du milieu désordonné, l'approche développée peut également être appliquée, mais sous la version modifiée qui prend en compte la non périodicité du milieu. Comme d'habitude, dans ce cas les vrais paramètres homogénéisés, même si ils existent, ne sont pas significatifs dans la pratique. L'objectif concerne les paramètres moyennés sur chaque cellule du maillage hydrodynamique, utilisée dans la simulation du réservoir. Cette procédure, appelée "upscaling", diffère légèrement de l'homogénéisation théorique. En effet, cette dernière représente une procédure de prise de moyenne sur l'échelle de l'hétérogénéité propre (une période ou un volume représentatif élémentaire) tandis que l'upscaling implique la prise de moyenne sur un fragment du milieu (une cellule hydrodynamique) imposé par les facteurs extérieurs. D'après cela, l'upscaling produit une *perméabilité équivalente* qui n'est pas égale à la it perméabilité effective provenant de l'homogénéisation. Plus précisément, la perméabilité équivalente n'est pas une propriété intrinsèque du milieu et elle dépend de la dimension et de la forme du maillage hydrodynamique de même que des conditions aux limites sur la cellule.

Malgré cette différence, les résultats d'upscaling (les équations macroscopiques et le problème cellulaire) sont simplement empruntés à la théorie d'homogénéisation. La condition de périodicité pour le problème cellulaire est également empruntée pour le cas non périodique à la place des vraies conditions aux limites qui sont inconnue a priori. En effet, les vraies conditions aux limites pour une cellule hydrodynamique sont couplées avec l'écoulement dans les cellules hydrodynamique voisines. Ces conditions vont conduire au couplage entre tous les problèmes cellulaires et à une procédure d'upscaling inefficace. Pour éviter ce défaut, chaque problème cellulaire est formulé

comme un problème indépendant en utilisant les conditions de périodicité (ou certaine version proche de la périodicité).

D'après cela, nous pouvons appliquer la technique de calcul de la perméabilité homogénéisée et du tenseur de dispersion pour effectuer l'upscaling du milieu désordonné.

De la même manière, toutes les autres versions de la méthode, caractérisée par les autres conditions aux limites pour le problème cellulaire, peuvent être analysées.

6.1.2 Perméabilité en milieu poreux fracturé

Pour un milieu poreux fracturé, nous pouvons introduire le rapport des perméabilités moyennes, qui est toujours un petit paramètre :

$$\omega \equiv \frac{\langle K_m \rangle}{\langle K_f \rangle} \ll 1, \quad (6.1)$$

où les parenthèses angulaires signifient une simple prise de moyenne volumique.

D'après cela, la perméabilité locale du milieu peut être représentée sous la forme suivante :

$$K(y) = \begin{cases} K^f(y), & y \in Y^f, \\ \omega K^m(y), & y \in Y^m \end{cases} \quad (6.2)$$

où les fonctions K^m et K^f sont de même ordre de grandeur ; les indices "f" et "m" correspondent respectivement à la "fracture" et à la "matrice".

Nous examinons une cellule unitaire hydrodynamique adimensionnelle $Y = \{-1/2 < y_i < 1/2, i=1, 2, 3\}$ de telle manière que la longueur linéaire de cellule est égale à 1. Si les x_i sont les coordonnées macroscopiques du réservoir et ε est la longueur d'une cellule hydrodynamique, alors $y_i = x_i/\varepsilon$. La structure d'hétérogénéité à l'intérieur de Y est désordonnée. Soit Γ l'interface entre les fractures et la matrice.

Le tenseur de perméabilité équivalente est déterminé de manière similaire à la perméabilité effective (2.35) :

$$\hat{K}_{ik} = \left\langle K(y) \left(\frac{\partial \psi_k}{\partial y_i} + \delta_{ik} \right) \right\rangle, \quad i, k=1, 2, 3, \quad (6.3)$$

où les fonctions cellulaires $\psi_k(y)$ ($k = 1, 2, 3$) sont les solutions du problème suivant sur la cellule Y :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial y_i} \left(K(y) \left(\frac{\partial \psi_k}{\partial y_i} + \delta_{ik} \right) \right) = 0, & y \in Y, \\ \langle \psi_k \rangle = 0, & (\psi_k) \text{ est périodique selon } y. \end{cases} \quad (6.4)$$

Comme indiqué, nous acceptons les conditions de périodicité pour le problème cellulaire malgré le fait que le milieu n'est pas périodique. Cela est simplement une approximation basée sur la supposition que la cellule hydrodynamique examinée est plus grande que l'échelle propre d'hétérogénéité. Dans ce cas, les conditions de périodicité donnent une bonne approximation de la vraie situation.

6.1.3 Décomposition de la contribution de la matrice et des fractures

Nous avons développé une méthode semi-analytique pour trouver la solution du problème cellulaire, basée sur la décomposition des parties contribuées par les fractures et par la matrice. Cette méthode représente une technique de perturbation sur le paramètre ω .

Selon cette méthode, nous représentons les fonctions cellulaires ψ_k sous la forme de séries asymptotiques sur ω :

$$\psi_k^\alpha = \psi_{k0}^\alpha + \omega \psi_{k1}^\alpha + O(\omega^2), \quad \alpha = f, m. \quad (6.5)$$

En substituant l'expansion (6.5) dans (6.3) et dans le problème cellulaire (6.4), tout en collectant les termes de même puissance de ω , nous obtenons une forme décomposée pour le tenseur de perméabilité effective pour un milieu poreux fracturé :

$$\widehat{K}_{ik} = \widehat{K}_{ik0} + \omega \widehat{K}_{ik1} \quad (6.6)$$

$$\widehat{K}_{ik0} = \int_{Y_f} K^f \left(\frac{\partial \psi_{k0}^f}{\partial y_i} + \delta_{ik} \right) dy, \quad \widehat{K}_{ik1} = \int_{Y_m} K^m \frac{\partial \psi_{k1}^m}{\partial y_i} dy + \int_{Y_f} K^f \frac{\partial \psi_{k1}^f}{\partial y_i} dy$$

Le premier terme décrit la perméabilité effective (ou équivalente) des fractures, qui est la contribution principale des fractures dans la perméabilité macroscopique quand la matrice est supposée imperméable. Le deuxième terme correspond à la contribution de la matrice et à l'écoulement secondaire dans les fractures, provoqué par l'écoulement à travers la matrice. Les contributions des fractures et de la matrice sont donc décomposées.

Les fonctions cellulaires ψ_{k0}^f , ψ_{k1}^m et ψ_{k1}^f sont définies comme les solutions des problèmes cellulaires décomposés suivants :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial y_i} \left(K^f(y) \left(\frac{\partial \psi_{k0}^f}{\partial y_i} + \delta_{ik} \right) \right) = 0, \quad y \in Y^f \\ K^f \frac{\partial \psi_{k0}^f}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = 0, \quad \langle \psi_{k0}^f \rangle_f = 0 \end{array} \right. \quad (6.7)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial y_i} \left(K^m(y) \left(\frac{\partial \psi_{k0}^m}{\partial y_i} + \delta_{ik} \right) \right) = 0, \quad y \in Y^m \\ \psi_{k0}^m \Big|_{\Gamma} = \psi_{k0}^f \Big|_{\Gamma} \end{array} \right. \quad (6.8)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial y_i} \left(K^f(y) \frac{\partial \psi_{k1}^f}{\partial y_i} \right) = 0, \quad y \in Y^f \\ K^f \frac{\partial \psi_{k1}^f}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = K^m \frac{\partial \psi_{k0}^m}{\partial n} \Big|_{\Gamma}, \quad \langle \psi_{k1}^f \rangle_f = 0 \end{array} \right. \quad (6.9)$$

Le symbole $\langle \cdot \rangle_f$ ou $\langle \cdot \rangle_m$ ne signifie la prise de moyenne que sur les fractures ou que sur la matrice.

Le premier problème décrit la contribution basique des fractures, le deuxième problème correspond à la contribution de la matrice et le troisième problème représente un écoulement secondaire dans une fracture, provoqué par l'écoulement à travers la matrice.

La perméabilité effective des fractures, $\hat{K}_{ik0}$, est dominante (si l'ouverture de fracture divisée par la longueur de cellule est plus importante que ω). Ce terme peut être calculé par la méthode de "stream-configuration" développée dans le chapitre 5.

Selon le rôle secondaire de la matrice, le deuxième terme dans (6.6) peut être calculé approximativement comme la moyenne arithmétique.

$$\hat{K}_{ik1} \approx \langle K^m \rangle_m \delta_{ik}. \quad (6.10)$$

6.2 Calcul de la perméabilité équivalente des fractures

Le terme principal de la perméabilité équivalente, représentant la contribution pure des fractures (quand la matrice est supposée imperméable), peut être calculé par la méthode développée dans le chapitre 5.

6.2.1 Structure du réseau des fractures

Dans le cadre du présent projet, nous examinons un cas bidimensionnel. Considérons une cellule hydrodynamique $Y = [0; 1] \times [0; 1]$ avec un réseau de fractures arbitrairement réparties comme il est montré sur la figure 6.1.

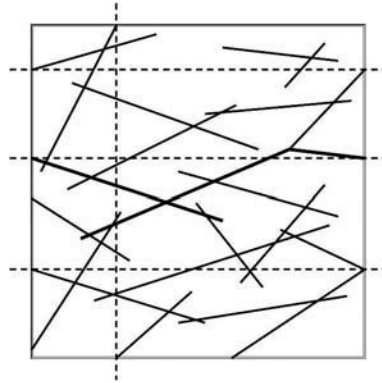


FIG. 6.1 – La structure d'une cellule hydrodynamique

La géométrie du réseau est définie comme suit :

- nombre des fractures, N_{fr} ;
- positions des centres $(x_c^{(i)}, y_c^{(i)})$;
- orientations des fractures, $\alpha^{(i)}$;
- longueurs des fractures, $l^{(i)}$;
- ouvertures des fractures, $h^{(i)}$;
- perméabilités des fractures, $K^{(i)}$.

Appelons un *segment actif* la partie d'une fracture qui relie soit deux nœuds d'intersections des fractures, soit un nœud d'intersection et un nœud de frontière, et ne contient pas d'autres nœuds. Tous les autres segments jouent un rôle d'impasse et peuvent être exclus de considération car aucun écoulement n'a lieu dans ces segments.

6.2.2 Forme limite du problème cellulaire pour la perméabilité

Pour chaque segment actif $Y^{(i)}$ nous associons des coordonnées locales cartésiennes $\eta^{(i)}$, orientées selon ce segment. L'origine de $\eta^{(i)}$ correspond au nœud gauche bas. L'angle entre $\eta^{(i)}$ et les coordonnées cartésiennes y_1 est dénotée $\alpha^{(i)}$.

Soit $h^{(i)}$ l'ouverture adimensionnelle du segment i , égale à la vraie ouverture divisée par la longueur de cellule.

La largeur de fracture est supposé faible par rapport à l'échelle d'une cellule d'hétérogénéité. Dans le même temps, l'ouverture ne peut pas être trop faible. Sinon, la contribution des fractures sera de même ordre que celle de la matrice. Selon (6.6), l'ouverture moyenne adimensionnelle des fractures, $h \equiv \langle h^{(i)} \rangle$, doit être plus importante que ω . Nous obtenons donc la restriction pour la largeur des fractures, qui détermine le domaine de validité de la méthode :

$$\omega \ll h \ll 1 \quad (6.11)$$

Puisque les valeurs d'ouvertures sont faibles, l'écoulement est presque monodimensionnel dans chaque fracture et orienté selon $(O\eta)$. Nous pouvons alors examiner le cas limite quand $h \rightarrow 0$ comme dans la section 5.1.

L'équation de Laplace (6.4) sera donc transformée en une équation monodimensionnelle différentielle ordinaire (4.10a) selon chaque fracture et dans la loi de Kirchhoff (4.10b) dans chaque nœud, pour chaque $k = 1, 2$ donné :

$$\frac{d}{d\eta} \left(K(\eta) \frac{d\Psi_k}{d\eta} \right) = 0, \quad \Psi_k \equiv \psi_k + y_k \quad (6.12a)$$

et

$$0 = \sum \pm h^{(i)} K \frac{\partial \Psi_k}{\partial \eta^{(i)}} \quad (6.12b)$$

où "+" correspond au segment actif entrant dans le nœud examiné de gauche et de bas, tandis que "-" est pris pour les segments passant de droite et de haut. La relation (6.12b) est écrite pour tous les nœuds d'intersection des fractures dans le domaine Y . La sommation dans (6.12b) est effectuée sur tous les segments croisant le nœud examiné.

Comme dans la section 5.1, la relation (6.12b) est obtenue par intégration de l'équation (6.4) sur un volume fini ω aux alentours d'un nœud (figure 4.2) et en faisant tendre ce volume vers zéro.

Ce problème doit être complété avec :

- La condition de continuité pour les fonctions $\Psi_k^{(i)}$ dans chaque nœud intérieur. Cela nous donne N_{cont} équations dans n_{int} nœuds intérieurs.

- La condition de périodicité pour tous les nœud de bord, c'est-à-dire la fonction cellulaire ψ_k a la même valeur dans les deux nœuds opposés.
- La condition que la valeur moyenne est nulle :

$$\langle \psi_k \rangle = 0. \quad (6.13)$$

Comme nous avons dit précédemment, dans un problème d'upscaling la périodicité des fonctions cellulaires est un outil approximatif, qui permet simplement de formuler un problème cellulaire comme indépendant et bien posé. Cela signifie que dans un vrai milieu désordonné, les nœuds de bord n'auront pas obligatoirement un nœud symétriquement opposés. Dans cette situation, nous devons supposer l'existence des faux nœuds de bord opposés aux vrais nœuds de bord pour appliquer la condition de périodicité.

6.2.3 Solution pour le problème cellulaire

La solution de chaque problème (6.12a), monodimensionnelle pour chaque segment, a la forme des fonctions linéaires suivantes :

$$\Psi_k^{(i)} = \theta_k^{(i)} \eta + \gamma_k^{(i)}, \quad k = 1, 2; \quad i = 1, \dots, N_{\text{ff}}. \quad (6.14)$$

La loi de Kirchhoff (6.12b) prend alors la forme suivante :

$$\sum_i (-1)^\delta h^{(i)} K^{(i)} \theta_k^{(i)} = 0, \quad (6.15)$$

Comme avant, les conditions de périodicité demandent que la fonction ψ_k soit la même sur les nœuds de bord opposés. La condition de continuité demande que la fonction $\psi_k + y_k$ soit continue dans chaque nœud intérieur. La condition pour la valeur moyenne (6.13) devient :

$$\begin{aligned} \sum_i h^{(i)} l^{(i)} \left(\frac{1}{2} l^{(i)} \left(\theta_k^{(i)} - \cos \alpha^{(i)} \right) + \gamma^{(i)} \right) &= 0, \quad k = 1, \\ \sum_i h^{(i)} l^{(i)} \left(\frac{1}{2} l^{(i)} \left(\theta_k^{(i)} - \sin \alpha^{(i)} \right) + \gamma^{(i)} \right) &= 0, \quad k = 2, \end{aligned} \quad (6.16)$$

où $l^{(i)}$ est la longueur du segment actif i .

6.2.4 Solution pour la perméabilité équivalente

Selon (6.14), l'opérateur de prise de moyenne est transformé dans la somme ci-dessous sur tous les segments :

$$\langle \cdot \rangle = \sum_{i=1}^{N_{\text{segm}}} h^{(i)} \int_0^l (\cdot) d\eta. \quad (6.17)$$

La contribution des nœuds, étant de l'ordre de h^2 , disparaît quand $h \rightarrow 0$.
Le tenseur de perméabilité effective prend la forme suivante :

$$\begin{aligned}\widehat{K}_{1k} &= \sum_{i=1}^{N_{\text{fr}}} K^{(i)} h^{(i)} l^{(i)} \cos \alpha^{(i)} \theta_k^{(i)}, \\ \widehat{K}_{2k} &= \sum_{i=1}^{N_{\text{fr}}} K^{(i)} h^{(i)} l^{(i)} \sin \alpha^{(i)} \theta_k^{(i)}, \quad k = 1, 2.\end{aligned}\tag{6.18}$$

Nous devons donc trouver $2N_{\text{fr}}$ variables inconnues $\theta_k^{(i)}$.

6.2.5 Existence et unicité de solution

En collectant les équations (6.15), (6.16) avec les conditions de continuité et de périodicité, nous obtenons le système de N_{eq} équations qui contient N_{var} variables inconnues $\theta_k^{(i)}$. Selon la géométrie des fractures, ce système peut être surdéterminé, c'est-à-dire $N_{\text{eq}} \geq N_{\text{var}}$.

En effet, certaines équations dans le système examiné ne sont pas indépendantes car la loi de Kirchhoff est utilisée plusieurs fois pour certains segments. Cela peut être montré sur l'exemple suivant.

Considérons une cellule avec deux fractures connecté (figure 6.2).

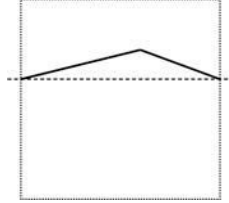


FIG. 6.2 – Simple cas d'une cellule unitaire

Ce système a deux segments actifs, NM et MN' , un nœud intérieur M et deux nœuds de bord symétriquement opposés N and N' . Notons que le nœud N (ou N') est également le nœud d'intersection des fractures selon le complément de la cellule par la périodicité.

Pour $k = 1$ dans ce cas particulier, nous avons quatre variables inconnues $\theta_1^{(i)}$, $\gamma_1^{(i)}$, $i = 1, 2$ et cinq équations : i) une équation de continuité dans le nœud intérieur M :

$$\theta_1^{(1)} \eta_M^{(1)} + \gamma_1^{(1)} = \theta_1^{(2)} \eta_M^{(2)} + \gamma_1^{(2)}$$

ii) une condition de périodicité dans les nœuds de bord :

$$\theta_1^{(1)}\eta_N^{(1)} + \gamma_1^{(1)} = \theta_1^{(2)}\eta_{N'}^{(2)} + \gamma_1^{(2)}$$

iii) la loi de Kirchhoff dans le nœud intérieur M :

$$h^{(1)}K^{(1)}\theta_1^{(1)} - h^{(2)}K^{(2)}\theta_1^{(2)} = 0$$

iv) la loi de Kirchhoff dans le nœud de bord N (ou N') :

$$h^{(1)}K^{(1)}\theta_1^{(1)} - h^{(2)}K^{(2)}\theta_1^{(2)} = 0$$

v) une condition pour la valeur moyenne (6.16) :

$$h^{(1)}l^{(1)} \left(\frac{1}{2}l^{(1)} \left(\theta_1^{(1)} - \cos\alpha^{(1)} \right) + \gamma^{(1)} \right) + \\ + h^{(2)}l^{(2)} \left(\frac{1}{2}l^{(2)} \left(\theta_1^{(2)} - \cos\alpha^{(2)} \right) + \gamma^{(2)} \right) = 0$$

Remarquons que même si les deux équations de Kirchhoff sont formulés pour les différents nœuds, elles sont absolument identiques. Le nombre des équations indépendantes est alors de quatre et le problème est donc bien posé.

Dans ce cas particulier nous avons explicitement montré que les deux équations sont identiques. En général dans le cas plus complexe, le système d'équations, formulé de manière similaire, ne contient pas explicitement des équations identiques, mais elles peuvent être obtenues selon de simples transformations arithmétiques. En pratique, ces transformations peuvent être effectuées numériquement en utilisant les algorithmes standards spéciaux, qui déterminent le rang d'une matrice et la convertissent dans la forme compacte correspondante.

6.2.6 Démonstration de l'existence et de l'unicité d'une solution

Pour prouver l'existence de solution dans le cas général, nous appliquons la méthode d'induction mathématique. Nous examinons tous les réseaux de fracture comme le résultat d'une procédure de construction de graphe pas au pas, dans laquelle chaque pas consiste en l'ajout d'un segment actif. L'état initial est une fracture choisie arbitrairement du graphe donné. Cette procédure est montrée sur la figure 6.3.

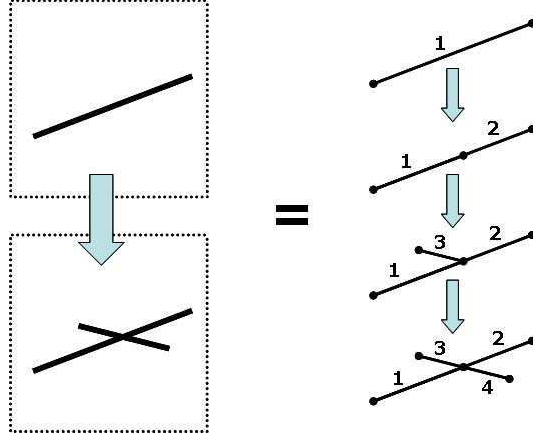


FIG. 6.3 – Construction du réseau de fracture pas au pas

Examinons la solution du problème cellulaire pour une valeur $k = 1$, qui définit la fonction cellulaire Ψ_1 . Pour la Ψ_2 toutes les procédures seront symétriques.

La base de l'induction est présentée par le graphe suivant qui ne contient qu'un segment. La solution du problème cellulaire dans ce cas est la suivante :

$$\begin{aligned} \theta_1^{(1)} = 1, \gamma_1^{(1)} = 0, & \text{ si la fracture est horizontale et sa longueur est égale à } 1; \\ \theta_1^{(1)} = 0, \gamma_1^{(1)} = 0, & \text{ sinon.} \end{aligned} \quad (6.19)$$

Il est facile d'expliquer ce résultat. En effet, le segment unique n'est actif que s'il est connecté aux frontières de la cellule. Selon la périodicité, ce segment doit être symétrique par rapport à l'axe y_2 , c'est-à-dire être horizontal (vertical pour la fonction Ψ_2). Puisque la longueur de la cellule est égale à 1, la longueur du segment sera aussi égale à 1. Tous les autres segments seront des impasses. Supposons maintenant par induction que la solution Ψ_1 pour le problème cellulaire est connue pour le pas N . A ce pas le graphe des fractures contient N segments. Le nombre d'équations et de variables dans le problème cellulaire est donc : $N_{\text{var}} = N_{\text{eq}} = 2N$.

Ajoutons un nouveau segment (nombre q) au graphe existant. Cela va conduire à l'apparition de deux nouvelles variables inconnues : $\theta_1^{(q)}$, et $\gamma_1^{(q)}$. Nous allons maintenant prouver que l'addition d'un segment n'ajoutera que deux équations au système.

Il existe un nombre fini des possibilités pour ajouter un segment au graphe existant :

1. Un des segments existants (nombre k) est divisé en deux parties. Un nouveau nœud apparaît et deux nouveaux segments se présentent à la place

du segment k . Cela conduit à l'apparition de deux nouvelles équations dans le nouveau nœud : l'équation de continuité et la loi de Kirchhoff.

2. Un des nœuds du nouveau segment était déjà défini tandis que le deuxième est créé et il est isolé. Le problème ne se change pas car ce nouveau segment sera passif : ce nouveau segment est une impasse.

3. Le nouveau segment relie deux nœuds déjà existant au pas précédent. Cela ajoutera deux nouvelles équations de continuité dans les deux nœuds. Les équations de Kirchhoff seront changées, mais leur nombre ne se changera pas.

4. Le nouveau segment est déconnecté du graphe existant. Dans ce cas, soit ce segment sera passif, soit (s'il est horizontal et de longueur égale à 1) il créera une nouvelle partie du graphe. Pour ce dernier cas, les deux équations seront utilisées comme pour la base d'induction.

Ces quatre cas épuisent toutes les variantes possibles.

Si un nœud du nouveau graphe est situé à la frontière et qu'il a un nœud opposé, la condition de périodicité et la loi de Kirchhoff doivent être utilisées pour ce point. Si le sommet est libre sans nœud opposé, alors un des ces quatre cas mentionnés plus haut doit être utilisé.

Si un nouveau nœud appartient à la frontière, mais qu'il n'a pas de nœud opposé, alors, comme il est montré dans la section 6.2.2, nous devons supposer approximativement qu'un nœud fictif opposé existe pour utiliser les conditions de périodicité. Cela conduira au cas précédent. Une autre possibilité est d'examiner le nouveau nœud sans le nœud opposé. Dans ce cas, le nouveau segment sera évidemment une impasse. Dans tous les cas, nous avons montré que l'addition d'un nouveau segment au graphe existant augmente le nombre d'équations et variables par deux.

6.2.7 Simulations numériques de la perméabilité équivalente

Un nouveau code numérique a été créé pour calculer la perméabilité effective (6.18) pour tous les réseaux donnés des fractures.

Pour valider notre méthode, nous comparons les résultats semi-analytiques obtenus avec une simulation directe pour plusieurs cas de cellule unitaire comme il est montré sur la figure 6.4.

La perméabilité effective est déterminée par la formule (2.35). Les fonctions cellulaires Ψ_k , obtenues du problème elliptique (2.36), sont calculées en utilisant le simulateur FemLab.

Deux cas de calcul numérique sont réalisés :

Dans le premier cas, la matrice est examinée comme faiblement perméable

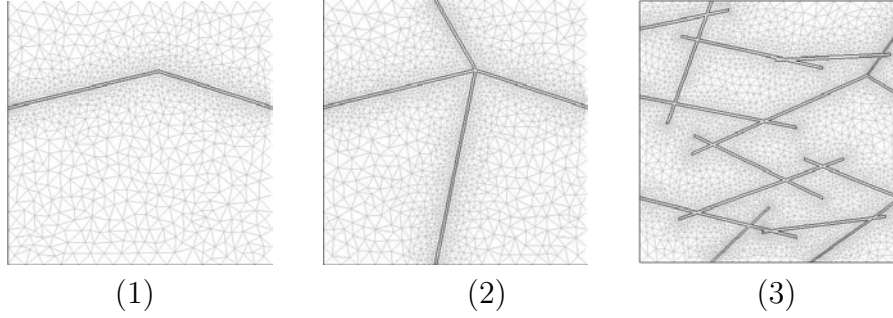


FIG. 6.4 – Différents types d'une cellule d'hétérogénéité

et donc $K_f=1000$, $K_m=0.1$. Le problème cellulaire (2.36) est résolu sur tout le domaine, dans les fractures et dans la matrice. Le raffinement du maillage est utilisé aux alentours et à l'intérieur de chaque fracture.

Dans le second cas, la matrice est considérée totalement imperméable. Le problème cellulaire n'est alors résolu que sur le réseau des fractures. Les conditions de non écoulement sont utilisées à la frontière "matrice-fracture".

Dans les deux cas, les conditions périodiques sont utilisées pour les fonctions $\Psi_k - y_k$.

La largeur de telles fractures qui coupe la frontière horizontale est de $h^{(i)}=0.01 \cdot |\sin \alpha^{(i)}|$, pour les autres segments $h^{(i)}=0.01 \cdot \cos \alpha^{(i)}$. La condition (6.11) est donc satisfaite : $\omega = 0.0001$, $h \sim 0.02$.

Nous raffinons le maillage numérique pour atteindre des résultats stables. Les résultats des deux simulations numériques et de la méthode semi-analytique sont les suivants :

	Simulation numérique Matrice faiblement perméable	Simulation numérique Matrice imperméable	Semi-analytique méthode
Cas 1	$\begin{pmatrix} 9.3665 & 0.0002 \\ 0.0002 & 0.1032 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 9.2673 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 9.26 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
Cas 2	$\begin{pmatrix} 9.388 & 0.0016 \\ 0.0016 & 8.7316 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 9.2815 & 0.0033 \\ 0.0033 & 8.626 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 9.26 & 0 \\ 0 & 8.96 \end{pmatrix}$
Cas 3	$\begin{pmatrix} 32.4866 & 1.1609 \\ 1.1609 & 6.1061 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 32.3076 & 1.1446 \\ 1.1446 & 5.9604 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 31.4 & 1.08 \\ 1.08 & 5.7 \end{pmatrix}$

Tabl. 1 : Perméabilité équivalente obtenue par les simulations numériques et par la méthode semi-analytique

Ces données numériques affirme la formule (6.18). En effet, la contribution de la matrice à la perméabilité effective est de l'ordre 0.0001, qui est identique à celui de $\omega = 10^{-4}$.

Comme nous l'avons vu, la méthode semi-analytique proposée produit des résultats très satisfaisant.

6.2.8 Upscaling avec "bordering"

La méthode proposée peut être améliorée en la combinant avec la méthode de "bordering". Pour diminuer l'erreur causée par les conditions aux limites approximatives, nous proposons de déplacer la frontière de la cellule le plus loin possible de la cellule examinée. Cela signifie que le problème sera analysé à l'intérieur d'un domaine qui inclura toutes les cellules voisines.

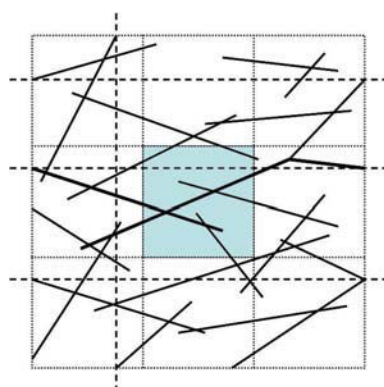


FIG. 6.5 – Méthode de "bordering"

Chapitre 7

Déplacement diphasique avec dispersion

7.1 Simulation de déplacement immiscible "huile-eau"

Le modèle développé d'écoulement diphasique avec la dispersion sera utilisé pour simuler le processus de déplacement "huile-eau" en réservoir hétérogène. L'objectif de cette simulation est de vérifier la validité du modèle et de comprendre quelles nouvelles propriétés macroscopiques peuvent apparaître quand ce modèle est appliqué au processus réel, observé par exemple dans le déplacement "huile-eau".

7.1.1 Description physique du test numérique

Dans cette section le déplacement diphasique est étudié sous la forme du modèle, qui prend en compte que les deux fluides (eau et huile) sont totalement immiscibles et incompressibles. Les équations classiques correspondantes, décrivant ce type d'écoulement, sont connues comme le modèle de Buckley-Leverett. Nous allons étudier une version plus complexe de ce modèle qui prend en compte les forces capillaires.

Le domaine bidimensionnel d'écoulement est un rectangle de 10×1 . Trois cas sont analysés :

- le cas I correspond à l'écoulement en milieu hétérogène décrit par le modèle classique de Buckley-Leverett avec la porosité et la perméabilité variant dans l'espace ;
- le cas II correspond au milieu équivalent homogénéisé dans lequel l'écoulement est décrit par le modèle classique de Buckley-Leverett avec la porosité moyenne constante et la perméabilité effective (homogénéisée) ;
- le cas III correspond également au milieu homogénéisé avec la porosité et la perméabilité constante mais avec un terme diffusif additionnel responsable de la dispersion diphasique.

Le milieu hétérogène consiste en dix cellules d'hétérogénéité situées périodiquement selon l'axe x_1 . Selon l'axe x_2 le milieu est également supposé périodique et il est donc suffisant de le considérer comme une simple couche unique de cellule pour analyser le déplacement, globalement orienté selon l'axe x_1 . L'hétérogénéité du milieu, montrée sur la figure 7.1, est la même que celle que nous avons examiné dans la section 3.2. Elle correspond à un milieu soi-disant bi-perméable.



FIG. 7.1 – Domaine d'écoulement en milieu hétérogène

La domaine extérieur, $Y^{(2)}$, est plus perméable que le domaine intérieur, $Y^{(1)}$, et donc $K^{(1)} < K^{(2)}$; $\phi^{(1)} < \phi^{(2)}$.

Selon cette géométrie du milieu hétérogène, l'écoulement équivalent en milieu homogénéisé sera évidemment monodimensionnel si la pression aux limites est spécifiée de manière correspondante. En particulier, si les axes principaux du tenseur de perméabilité coïncident avec x_1 (c'est-à-dire que la perméabilité macroscopique est un tenseur diagonal : $\hat{K}_{12} = \hat{K}_{21} = 0$), il est alors suffisant d'imposer une pression constante sur les deux frontières (entrante et sortante).

Le paramètre ε est égale à 0.1 dans tous les cas examinés.

7.1.2 Description mathématique pour le cas I

Dans les trois cas, l'écoulement peut être formellement décrit par le même système de deux équations similaires à (1.6) mais avec une définition différente pour tous les paramètres. Ce système représente une équation de convection-diffusion pour la saturation et une équation de Poisson pour la pression,

Le cas I est modélisé par le système suivant :

$$\begin{aligned} \phi \frac{\partial s}{\partial t} + v_i(x, t) \frac{\partial F(s)}{\partial x_i} &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left(K(x) R_c(s) \frac{\partial s}{\partial x_i} \right), \quad v_i \equiv -K(x) \lambda(s) \frac{\partial p}{\partial x_i}, \\ \frac{\partial}{\partial x_i} \left(K(x) \lambda(s) \frac{\partial p}{\partial x_i} \right) &= 0, \end{aligned} \quad (7.1)$$

avec les conditions initiales et les conditions aux limites :

$$s \Big|_{t=0} = 0, \quad s \Big|_{x_1=0} = 1, \quad s \Big|_{x_1=10} = 0, \quad \frac{\partial s}{\partial x_2} \Big|_{x_2=0;1} = 0, \quad (7.2)$$

$$p \Big|_{x_1=0} = 10, \quad p \Big|_{x_1=10} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial x_2} \Big|_{x_2=0;1} = 0, \quad (7.3)$$

où p est la pression globale, s est la saturation de l'eau.

$$\begin{aligned}\lambda &\equiv \lambda_w(s) + \lambda_o(s), \quad \lambda_i(s) \equiv \frac{k_i(s)}{\mu_i}, \quad F(s) \equiv \frac{\lambda_w(s)}{\lambda(s)}, \\ R_c(s) &\equiv -\frac{1}{Ca} \lambda_o(s) F(s) \frac{dp_c}{ds}, \\ k_w(s) &= s^2, \quad k_o(s) = (1-s)^2, \quad p_c(s) \equiv \sqrt{-\frac{1}{\gamma} \ln s}.\end{aligned}\tag{7.4}$$

Les perméabilités relatives, $k_i(s)$, et la pression capillaire, $p_c(s)$, sont définies par les approximations empiriques avec un paramètre de réglage γ . La fonction $F(s)$ est la fonction d'écoulement fractionné. Le paramètre Ca est le nombre capillaire microscopique, qui est le rapport entre la force visqueuse caractéristique (développé dans la longueur d'une hétérogénéité) et la force capillaire moyenne.

Selon la théorie développée, la capillarité est supposée faible (c'est-à-dire que Ca^{-1} est faible) :

$$Ca = 100.\tag{7.5}$$

La dérivée $F'(s)$, qui entre dans la structure du tenseur de dispersion, et la diffusion capillaire, $R_c(s)$, sont représentées sur la figure 7.2 pour les deux rapports de viscosités : $\mu=0.5$ et $\mu=0.1$, où $\mu=\mu_w/\mu_o$.

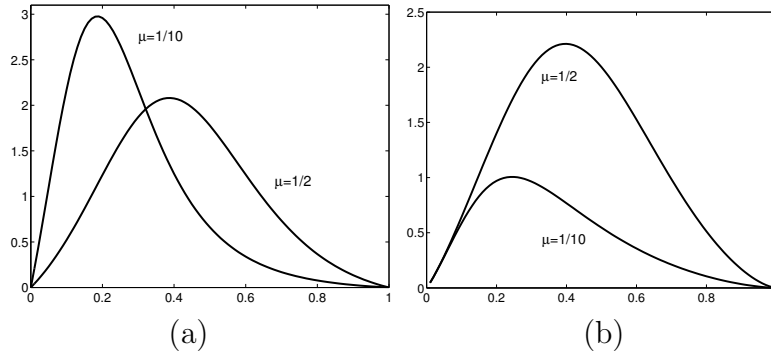


FIG. 7.2 – (a) – fonction $F'(s)$; (b) – courbe de diffusion capillaire, $R_c(s)$

7.1.3 Description mathématique pour les cas II et III

L'écoulement homogénéisé dans le cas II est décrit par le système classique des équations macroscopiques :

$$\begin{aligned} \phi \frac{\partial S}{\partial t} + V \frac{\partial F(S)}{\partial x_1} &= \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\hat{K} R_c(S) \frac{\partial S}{\partial x_1} \right), \quad V \equiv -\hat{K} \lambda(S) \frac{\partial P}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\hat{K} \lambda(S) \frac{\partial P}{\partial x_1} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (7.6)$$

avec les conditions initiales et les conditions aux limites :

$$S \Big|_{t=0} = 0, \quad S \Big|_{x_1=0} = 1, \quad S \Big|_{x_1=10} = 0 \quad (7.7)$$

$$P \Big|_{x_1=0} = 10, \quad P \Big|_{x_1=10} = 0 \quad (7.8)$$

où S , P et V sont la saturation moyenne, la pression globale moyenne et la vitesse d'écoulement totale moyenne; $\hat{K} \equiv \hat{K}_{11}$ est la composante longitudinale de la perméabilité effective, qui est un tenseur diagonal (c'est-à-dire que $\hat{K}_{12} = \hat{K}_{21} = 0$) selon la géométrie d'hétérogénéité; toutes les autres fonctions sont définies de la même manière que dans la section précédente.

Le cas III est déterminé par le nouveau modèle macroscopique :

$$\begin{aligned} \phi \frac{\partial S}{\partial t} + V \frac{\partial F(S)}{\partial x_1} &= \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\hat{D}(S, V) \frac{\partial S}{\partial x_1} \right), \quad V \equiv -\hat{K} \lambda(S) \frac{\partial P}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\hat{K} \lambda(S) \frac{\partial P}{\partial x_1} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (7.9)$$

$$\hat{D} = \varepsilon \varkappa V F'(S) + R_c(S) \left\langle K \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial y_1} + 1 \right) \right\rangle, \quad (7.10)$$

où le coefficient $\varkappa \equiv \varkappa_{11}$ de la dispersivité longitudinale est défini à travers les fonctions cellulaires φ_1 et Ψ_1 :

$$\varkappa = \left(\frac{\langle \phi \varphi_1 \rangle}{\langle \phi \rangle} - \frac{1}{\hat{K}} \left\langle K \varphi_1 \frac{\partial \Psi_1}{\partial y_1} \right\rangle \right) \quad (7.11)$$

Les fonctions cellulaires de la première et de la deuxième famille, $\Psi_1(y)$ et $\varphi_1(y, S)$, sont les solutions des deux problèmes cellulaires (2.36) et (2.42).

Les conditions initiales et les conditions aux limites sont les mêmes que dans (7.7) et (7.8).

Avec la dispersivité adimensionnelle, ε , nous allons utiliser la dispersivité dimensionnelle $\tilde{\varepsilon} = L\varepsilon$ [m], qui est introduite dans la section 3.2.

Les simulations numériques sont effectuées en utilisant le simulateur Fem-Lab, basé sur la discrétisation des éléments finis d'espace et sur le schéma implicite en temps.

7.1.4 Résultats de simulation

Les données numériques suivantes sont utilisées :

$$L=10, \quad K^{(1)} = 1, \quad K^{(2)}=5, \quad \phi^{(1)}=0.1, \quad \phi^{(2)}=0.2,$$

où l'indice supérieur (i) désigne le sous-domaine correspondant du milieu.

Nous utilisons deux rapports de viscosité : $\mu=0.5$ et $\mu=0.1$. Le premier rapport correspond à un déplacement pratiquement stable. Nous attendons donc d'observer un effet légèrement significatif de dispersion causée par l'hétérogénéité du milieu. Le deuxième rapport de viscosité correspond à un déplacement instable. Nous attendons donc d'observer un effet fortement significatif de dispersion, causée par l'hétérogénéité du milieu et augmentée par instabilité et par digitation.

Les paramètres moyens sont calculés comme les solutions des problèmes cellulaires :

$$\langle \phi \rangle = 0.17, \quad \hat{K} = 3.22.$$

For $\mu = 0.5$:

$$V = 1.6, \quad C_{frozen} = 0.034, \quad \varepsilon = 0.36.$$

For $\mu = 0.1$:

$$V = 0.5, \quad C_{frozen} = 0.023, \quad \varepsilon = 0.132,$$

où C_{frozen} est un paramètre fixé pour le problème cellulaire (2.42), qui assure la séparation des variables rapides et lentes.

Une distribution caractéristique de la saturation d'eau dans le milieu bi-dimensionnel hétérogène (cas I) est montrée sur la figure 7.3 pour le temps ($t=1$).

Le couleur rouge correspond à 100 % d'eau, tandis que le couleur bleu foncé est l'huile.

Le profil de saturation est ensuite intégré sur x_2 pour obtenir la saturation moyenne $S(x_1, t)$.



FIG. 7.3 – Champ de la saturation d’eau en milieu hétérogène (cas I)

La comparaison entre la simulation microscopique (la courbe pointillée), le modèle macroscopique (courbe rouge) et le modèle macroscopique avec dispersion (courbe bleue) est présentée sur la figure 7.4 pour $\mu=0.5$ et sur la figure 7.5 pour $\mu=0.1$.

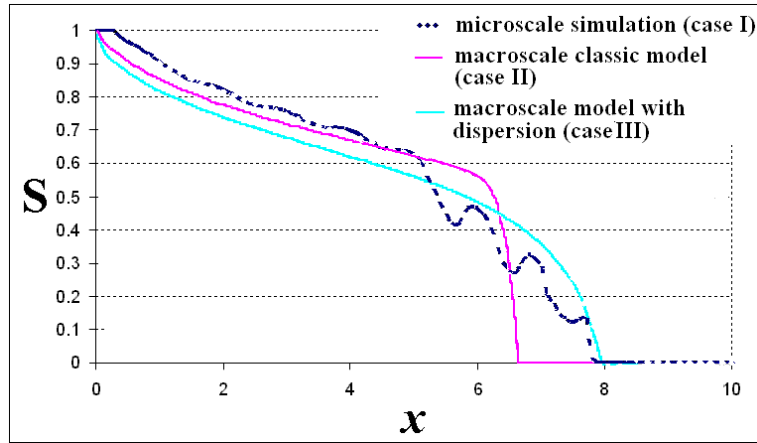


FIG. 7.4 – Saturation d’eau pour les trois cas quand $\mu=0.5$ ($t = 1$)

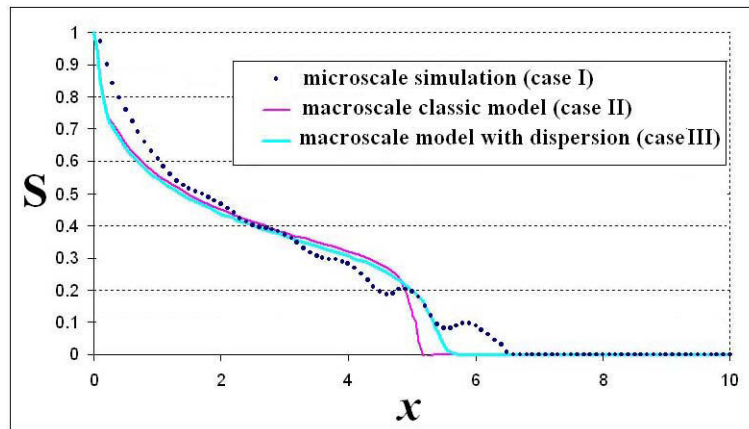


FIG. 7.5 – Saturation d’eau pour les trois cas quand $\mu=0.1$ ($t = 1$)

7.1.5 Discussion

La différence caractéristique entre la courbe rouge, correspondant au modèle classique, et la courbe bleue, produite par le nouveau modèle avec dispersion, consiste en ce que la courbe rouge décrit un déplacement avec le front plus avancé pour les deux cas, stable et instable. Cela est dû au fait que l'unique phénomène qui cause la destruction du front dans le modèle classique est la diffusion capillaire. Puisque dans le cas examiné cet effet est très faible ($Ca \sim 100$), la zone de diffusion pour la courbe rouge disparaît.

Au contraire, les courbes bleues sont caractérisées par une zone très large où le front de déplacement est diffus malgré le fait que la diffusion capillaire originale est très faible. L'hétérogénéité du milieu cause donc un effet diffusif beaucoup plus important que la capillarité.

Nous pouvons remarquer que dans les deux cas (déplacement stable et instable) le nouveau modèle produit des résultats meilleurs que le modèle classique.

L'effet de la dispersion diphase est tellement significatif, que les équations hyperboliques traditionnelles, utilisées dans la théorie de déplacement, ne peuvent pas être appliquées dans le cas où la capillarité est nulle.

En particulier, cela signifie qu'il n'est pas nécessaire de développer des méthodes sophistiquées dédiées à la suppression de la dispersion numérique dans les modèles de déplacement, puisque la vraie dispersion physique est beaucoup plus importante que cet artefact numérique.

7.2 Dispersion dans le modèle "black-oil"

Le modèle développé de la dispersion diphasique peut être élargi pour le cas d'écoulement partiellement miscible avec des échanges de masse décrit par le modèle "black-oil".

7.2.1 Modèle classique "black-oil" pour un déplacement "huile-gaz"

La version diphasique "huile-gaz" du modèle black-oil est basée sur les suppositions suivantes : la phase liquide ("oil") contient deux composantes : une légère (1) et une lourde (2), tandis que la phase gazeuse ne consiste qu'en des composantes légères. Pour cette mixture binaire, la thermodynamique ne dépend que de la pression (si $T=const$). Selon le transfert des composantes entre les phases, nous avons le cas de dissolution partielle dans le système diphasique.

La conservation des masses pour chaque composante est formulée de la manière suivante :

$$\phi \frac{\partial}{\partial \tau} (\rho_g(1-s) + \rho_{oil}c_{oil}^1s) = \rho_{oil}^0 \text{div}(\lambda_g \text{grad} p_g + \lambda_{oil}c_{oil}^1 \text{grad} p_{oil}), \quad (7.12a)$$

$$\phi \frac{\partial (\rho_{oil}c_{oil}^2s)}{\partial \tau} = \text{div}(\rho_{oil}^0 \lambda_{oil}c_{oil}^2 \text{grad} p_{oil}), \quad (7.12b)$$

$$p_{oil} = p_g - p_c(s), \quad (7.12c)$$

où les mobilités des phases λ_g et λ_{oil} sont introduites de telle manière qu'elles vont avoir la même dimension que pour le cas de l'écoulement immiscible et incompressible :

$$\lambda_g \equiv \frac{\rho_g K k_g(s)}{\mu_g \rho_{oil}^0}, \quad \lambda_{oil} \equiv \frac{\rho_{oil} K k_{oil}(s)}{\mu_{oil} \rho_{oil}^0} \quad (7.12d)$$

$k_i(s)$ sont les perméabilités relatives ; $K(x)$ la perméabilité absolue ; $\phi(x)$ est la porosité ; $\rho_i(p_i)$ est la masse volumique de phase ; $\mu_i(p_i)$ est la viscosité dynamique ; c_i^k est la concentration de masse de composante k dans la phase i ; p_c est la pression capillaire ; s est la saturation de l'huile. La valeur constante ρ_{oil}^0 est la masse volumique caractéristique (initiale) du liquide.

De manière traditionnelle, ce système peut être converti sous la forme équivalente des facteurs volumiques de formation et du rapport de solution de

gaz en remplacement des masses volumiques des phases et des concentrations de composantes. Nous allons pourtant garder la forme actuelle pour être adéquate avec les dérivations précédentes.

Le modèle est complété avec les relations de fermetures, qui décrivent les masses volumiques, les viscosités et les concentrations c_{oil}^1 ou $c_{oil}^2=1 - c_{oil}^1$ en fonction de la pression, des perméabilités relatives et la pression capillaire en fonction de la saturation.

La première équation peut être remplacé par la somme de (7.12a) et (7.12b) :

$$\phi \frac{\partial}{\partial \tau} (\rho_g(1 - s) + \rho_{oil}s) = \rho_{oil}^0 \text{div}(\lambda_g \text{grad} p_g + \lambda_{oil} \text{grad} p_{oil}). \quad (7.12e)$$

7.2.2 Principe d'insertion de l'effet de la dispersion dans le modèle black-oil

Pour insérer l'effet de dispersion dans le modèle black-oil, en théorie la même approche basée sur l'homogénéisation peut être appliquée. Malheureusement, l'homogénéisation de ce système d'équations est impossible à l'heure actuelle en raison de certaines difficultés mathématiques. D'après cela, nous proposons une autre approche basée sur les résultats obtenus pour l'écoulement totalement immiscible et incompressible. Le principe de cette approche est le suivant.

Pour le cas d'écoulement immiscible et incompressible, nous avons montré que l'effet de dispersion peut être interpréter sous la forme du nouveau tenseur de pression capillaire. Autrement dit, il suffit de renormaliser la courbe de pression capillaire pour introduire l'effet de dispersion dans le modèle d'écoulement. Supposons maintenant que la miscibilité partielle et la compressibilité n'influencent pas l'effet de dispersion. Pour introduire cet effet dans le modèle black-oil il est donc suffisant de renormaliser la courbe de pression capillaire de la même manière que pour le cas d'écoulement immiscible et incompressible.

Malheureusement cette renormalisation n'est pas triviale. En effet, les nouveaux termes de dispersion dans les fonctions de pression capillaire renormalisée dépendent de la saturation et de la vitesse de transport, $VF'(S)$. Ces deux variables apparaissent naturellement dans l'équation de transport pour la saturation dans le cas de l'écoulement immiscible et incompressible. Pourtant, dans le cas d'un écoulement partiellement miscible et compressible, les vitesses de masse apparaissent à la place des vitesses ordinaires. Un nouveau concept concernant la fonction d'écoulement fractionné apparaît alors qui prend en compte les compressibilités des fluides. Avant de renormaliser

la pression capillaire, il est donc nécessaire de reformuler le modèle black-oil sous la forme d'équation de transport pour la saturation et de déterminer la nouvelle vitesse de transport. Il faut enfin renormaliser la capillarité de manière analogue avec le cas immiscible mais sous la forme d'une nouvelle expression de la vitesse de transport.

7.2.3 Transformation dans l'équation de transport pour la saturation

Transformons le système (7.12) en une équation de convection-diffusion par rapport à saturation de l'huile. Pour cela, introduisons la modification de la fonction d'écoulement fractionné :

$$F(s, p) = \frac{\lambda_{oil} c_{oil}^2}{\lambda} = \frac{k_{oil} \rho_{oil} c_{oil}^2}{k_{oil} \rho_{oil} + k_g \rho_g \mu_{oil} / \mu_g}, \quad \lambda \equiv \lambda_g + \lambda_{oil}. \quad (7.13)$$

Désignons également : $p \equiv p_{oil}$.

L'équation (7.12b) peut être alors présentée sous la forme suivante :

$$\rho_{oil}^0 \text{div}(\lambda F \text{grad} p) = \phi \frac{\partial (\rho_{oil} c_{oil}^2 s)}{\partial \tau}$$

or

$$F \text{div}(\rho_{oil}^0 \lambda \text{grad} p) + \rho_{oil}^0 \lambda \text{grad} F \text{grad} p = \phi \frac{\partial (\rho_{oil} c_{oil}^2 s)}{\partial \tau}.$$

En utilisant l'équation (7.12e), nous pouvons transformer le premier terme de l'extrémité gauche :

$$F \left(\phi \frac{\partial}{\partial \tau} [\varphi_g (1 - s) + \varphi_{oil} s] - \text{div}(\lambda_g \text{grad} p_c) \right) + \lambda \text{grad} F \text{grad} p = \phi \frac{\partial (\varphi_{oil} c_{oil}^2 s)}{\partial \tau},$$

où

$$\varphi_{oil} \equiv \frac{\rho_{oil}}{\rho_{oil}^0}, \quad \varphi_g \equiv \frac{\rho_g}{\rho_{oil}^0}. \quad (7.14)$$

En regroupant les termes, nous pouvons obtenir finalement une équation de transport :

$$\begin{aligned} \phi \left[\frac{\partial (\varphi_{oil} c_{oil}^2 s)}{\partial \tau} - F \frac{\partial (\varphi_g (1 - s))}{\partial \tau} - F \frac{\partial (\varphi_{oil} s)}{\partial \tau} \right] - \\ - (\lambda \text{grad} p + \lambda_g \text{grad} p_c) \text{grad} F = -\text{div}(F \lambda_g \text{grad} p_c). \end{aligned} \quad (7.15)$$

Introduisons la vitesse totale d'écoulement, $\mathbf{v}$, et la diffusion capillaire, R_c :

$$\mathbf{v} \equiv -(\lambda \text{grad} p + \lambda_g \text{grad} p_c), \quad (7.16)$$

$$R_c(p, s) \equiv -F \lambda_g \frac{dp_c}{ds}, \quad (7.17)$$

l'équation (7.15) prend alors la forme suivante :

$$\phi \left[\frac{\partial (\varphi_{oil} c_{oil}^2 s)}{\partial \tau} - F \frac{\partial (\varphi_g (1-s))}{\partial \tau} - F \frac{\partial (\varphi_{oil} s)}{\partial \tau} \right] + \mathbf{v} \text{grad} F = \text{div}(R_c \text{grad} s). \quad (7.18)$$

Cette équation de convection-diffusion est similaire à l'équation (1.6), étudiée dans la section 1.2.3 pour le cas de l'écoulement incompressible.

7.2.4 Introduction directe de la dispersion dans le modèle black-oil

Supposons maintenant que les compressibilités des phases et la dissolution des composantes n'influencent pas la dispersion hydrodynamique. De manière analogue avec (2.34b), nous pouvons donc introduire l'effet de dispersion dans le modèle macroscopique :

$$\begin{aligned} \phi \left[\frac{\partial (\rho_{oil} c_{oil}^2 s)}{\partial \tau} - F \frac{\partial (\rho_g (1-s))}{\partial \tau} - F \frac{\partial (\rho_{oil} s)}{\partial \tau} \right] + \mathbf{V} \text{grad} F = \\ = \text{div}(\hat{D}_{ik}(S, V) \text{grad} S), \end{aligned} \quad (7.19)$$

où le tenseur de dispersion est :

$$\hat{D}_{ik} = \varepsilon V \varkappa_{ik} \frac{\partial F(S, P)}{\partial S} + \frac{1}{Ca} R_c(s) \left\langle K \frac{\partial \Phi_k}{\partial y_i} \right\rangle, \quad i, k = 1, 2, 3, \quad (7.20)$$

où V est la valeur absolue de la vitesse totale macroscopique définie de manière similaire à (7.16) et (7.12d) ; $R_c(S, P)$ est la diffusion capillaire, définie comme (7.17) ; la fonction modifiée d'écoulement fractionné, $F(S, P)$ est définie selon (7.13) ; le tenseur de dispersivité, $\varkappa_{ik}$, est :

$$\varkappa_{ik} = \left(\frac{\langle \phi \varphi_i \rangle}{\langle \phi \rangle} \left\langle K \frac{\partial \Psi}{\partial y_k} \right\rangle - \left\langle \varphi_k K \frac{\partial \Psi}{\partial y_i} \right\rangle \right) / \sqrt{\sum_{j=1}^3 \left\langle K \frac{\partial \Psi}{\partial y_j} \right\rangle^2}. \quad (7.21)$$

Les fonctions cellulaires $\varphi_k(y, S(x, t)) \equiv \Phi_k - y_k$ sont les solutions du deuxième problème cellulaire. Quand la capillarité est négligée, ce problème est une EDP du premier ordre :

$$\begin{cases} v_i \frac{\partial \Phi_k}{\partial y_i} = \frac{\phi V_k}{\langle \phi \rangle}, & y \in Y, \\ \langle \Phi_k - y_k \rangle = 0, & (\Phi_k - y_k) \text{ est périodique selon } y. \end{cases} \quad (7.22)$$

Quand la capillarité est significative, le problème cellulaire pour le tenseur de dispersion est une EDP elliptique du deuxième ordre :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(v_i \frac{\partial \Phi_k}{\partial y_i} - \frac{\phi V_k}{\langle \phi \rangle} \right) F'_s = \frac{1}{\varepsilon Ca} \frac{\partial}{\partial y_i} \left(K R_c(S) \frac{\partial \Phi_k}{\partial y_i} \right), \quad y \in Y, \\ \langle \Phi_k - y_k \rangle = 0, \quad (\Phi_k - y_k) \text{ est périodique selon } y. \end{array} \right. \quad (7.23)$$

ici $F'_s \equiv \partial F / \partial S$.

7.2.5 Introduction de la dispersion par la renormalisation de la pression capillaire

A la place de l'utilisation de l'équation (7.19), il est possible d'utiliser le modèle black-oil sous la forme standard (7.12) mais avec une pression capillaire renormalisée. En pratique, il est suffisant de simplement remplacer la courbe originale standard $p_c(s)$ par la fonction tensorielle suivante :

$$P_c^f(S, \nabla P)_{ik} = \varepsilon Ca \alpha_{ik} \Phi(S) |\nabla P| + \beta_{ik} P_c(S), \quad (7.24)$$

où α_{ik} et β_{ik} sont les nouvelles constantes tensorielles définies comme suit :

$$\begin{aligned} \alpha_{ik} &= \hat{K}_{ij}^{-1} \mathfrak{a}_{jk}, \\ \beta_{ik} &= \hat{K}_{ij}^{-1} \left\langle K \frac{\partial \Phi_k}{\partial y_j} \right\rangle, \\ \Phi(S) &= \ln \left(\frac{k_g(S)}{k_{oil}(S)} \right) + C_c. \end{aligned} \quad (7.25)$$

La dispersivité $\mathfrak{a}_{jk}$ et les fonctions cellulaires Φ_k sont définies plus tôt. La constante C_c est libre et elle ne peut pas être déterminée, mais cela n'est pas nécessaire car la dérivé de la pression capillaire est seulement utilisée dans les équations différentielles.

Notons que pour calculer la différence entre les pressions des phases, nous devons pourtant appliquer la fonction classique p_c .

Le modèle macroscopique peut alors être utilisé sous la forme du modèle black-oil standard mais avec une nouvelle fonction de pression capillaire.

Conclusion

Pour prendre en compte l'effet des hétérogénéités oscillant rapidement des réservoirs naturels, nous proposons l'introduction de la dispersion hydrodynamique diphasique dans les équations d'écoulement. De telles hétérogénéités ont leurs échelles caractéristiques beaucoup plus faibles que la distance entre les puits, mais beaucoup plus importantes que l'échelle des pores. L'origine de cet effet provient de la dispersion de Taylor et représente une diffusion apparente dans l'espace de toutes les interfaces microscopiques initiales qui sépare les deux phases. Cette diffusion est provoquée par le mélange entre les fluides, causé par le champ de vitesse hétérogène.

D'un point de vue mathématique, cet effet peut être décrit par un opérateur du deuxième ordre (par rapport à la saturation de phase) avec un paramètre de diffusion non-linéaire, qui dépend de la vitesse de transport, de la fonction d'écoulement fractionné, du rapport de viscosité, du nombre capillaire et de la courbe de pression capillaire. Le modèle correspondant a été obtenu dans le cadre du présent projet à l'aide d'une technique d'homogénéisation.

Le tenseur de dispersion obtenu contient deux parties. La première est produite par l'écoulement convectif, tandis que la seconde est causée par l'effet capillaire. Même si les forces capillaires sont nulles, l'effet de dispersion existe.

La partie de la dispersion, qui ne reflète que l'influence de l'hétérogénéité du milieu et qui est indépendante des fluides, est appelée la dispersivité. Nous avons développé une définition mathématique fermée pour le tenseur de dispersivité et nous avons calculé plusieurs exemples pour différentes géométries.

Pour le milieu fracturé, nous avons développé une technique mathématique spéciale (la méthode de "stream configuration") qui conduit aux relations analytiques pour le tenseur de dispersion dans le cas périodique et aux solutions semi-analytiques dans le cas désordonné. La technique est basée sur l'analyse de toutes les configurations des flux possibles dans chaque nœud d'intersection des fractures. Dans le cas périodique, le nombre de toutes

les configurations est fini et elles ont toutes été détectées.

Dans le cas désordonné, nous avons développé un algorithme effectif dédié au calcul du tenseur de perméabilité équivalente en milieu fracturé de manière très économique sans avoir à affiner le maillage aux alentours des fractures. L'algorithme similaire pour l'upscaling du tenseur de dispersion est encore en développement et il demande un temps additionnel pour être fini. Pour calculer le tenseur de dispersion dans le cas désordonné, le problème basique consiste en la détermination de toutes les configurations des flux possibles dans un nœud.

Nous avons prouvé que l'apparition de l'effet de dispersion peut être également exprimée sous la forme d'une pression capillaire renormalisée. Autrement dit, nous avons montré que l'effet de dispersion peut être introduit dans le modèle classique d'écoulement en renormalisant simplement la fonction originale de la pression capillaire. Dans ce cas, la pression capillaire classique en fonction de la saturation est remplacée par une fonction tensorielle, qui dépend de la vitesse d'écoulement, de la fonction d'écoulement fractionné et de la diffusion capillaire originale.

La simulation d'un déplacement d'huile-eau, que nous avons effectué en utilisant le nouveau modèle macroscopique, a montré que le modèle avec la dispersion décrit beaucoup mieux le champ de saturation dans les deux cas : stable et instable. Ce modèle prédit la formation d'une large zone de dispersion à la place d'un front rigide, calculé par le modèle classique.

Toutes les dérivations mathématiques ont été effectuées pour un écoulement diphasique immiscible et incompressible (l'écoulement de Buckley-Leverett). La prochaine étape était d'élargir ces résultats pour un écoulement partiellement miscible, décrit par le modèle classique "black-oil". Malheureusement, l'homogénéisation rigoureuse d'un tel écoulement nous semble actuellement impossible à cause de certaines difficultés mathématiques. Nous proposons une autre approche nous permettant d'insérer l'effet de dispersion dans le modèle "black-oil" de manière approximative. Cette approche est basée sur l'équivalence entre l'effet de dispersion et la pression capillaire renormalisée. L'effet de dispersion apparaît automatiquement dans le modèle "black-oil" si nous renormalisons la pression capillaire en transformant la pression capillaire classique en une fonction tensorielle. Ces nouvelles fonctions capillaires dépendent de la vitesse d'écoulement et de la fonction d'écoulement fractionné, déterminées de manière différente du cas d'écoulement immiscible et incompressible. La procédure fermée de la renormalisation capillaire est décrite.

Un des résultats obtenus dans le cadre de ce projet consiste en ce que l'effet de dispersion conduit toujours à une diffusion tellement significative que l'approche traditionnelle (basée sur l'utilisation des équation hyperbolique

ou presque hyperbolique pour la saturation) est fortement erronée. L'effet de dispersion est toujours beaucoup plus important que la diffusion physique (capillaire) et que de la dispersion numérique dans les modèles classiques. D'après cela, le problème de réduction de la dispersion numérique, surtout aux alentours du front de déplacement, nous semble insignifiant puisque pour tous les processus de déplacement dans un vrai réservoir hétérogène, la vraie dispersion physique est beaucoup plus importante que les artefacts numériques.

La même approche peut être élargie pour l'écoulement immiscible triphasé et pour la version triphasée du modèle "black-oil".

L'équivalence entre l'effet de dispersion et la pression capillaire renormalisée représente une base effective pour développer des "plug-ins" pour les simulateurs des réservoirs sans en modifier les principes de fonctionnement.

Bibliographie

- Adler, P. : 1992, *Porous media : geometry and transports*, Edition Boston : Butterworth-Heinemann.
- Allaire, G. : 1992, Homogenization and two-scale convergence, *SIAM J. Math. An.* **23**(26), 1482 – 1518.
- Antontsev, S. and Monakhov, V. : 1969, On a general model of two-phase flow of incompressible liquids through porous media, *Dynamics of Continuum Medium* **3**, 5–17. Novosibirsk.
- Artus, V. and Noetinger, B. : 2002, Macrodispersion approach for upscaling of two-phase, immiscible flow in heterogeneous porous media, *Proc. ECMOR 8th European Conference on the Mathematics of Oil Recovery*, Freiberg. paper E30.
- Auriault, J. and Adler, P. : 1995, Taylor dispersion in porous media : analysis by multiple scale expansions, *Advances in Water Resources* **18**(4), 217 – 226.
- Auriault, J. L. : 1991, Heterogeneous medium. is an equivalent macroscopic description possible?, *Int. J. Engng Sci.* **29**(7), 785 – 795.
- Bakhvalov, N. S. : 1977, *Averaging PDE with fast oscillating coefficients*, Nauka, Moscow.
- Bakhvalov, N. S. and Panasenko, G. P. : 1989, *Homogenization : Averaging Processes in Periodic Media*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.
- Bensoussan, A., Lions, J.-L. and Papanicolaou, G. : 1978, *Asymptotic analysis for periodic structures*, Amsterdam : North-Holland.
- Bourgeat, A. : 1996, Two-phase flow, in *Ed. U.Hornung, Springer, Homogenization and Porous Media* pp. 95–128.

- Bourgeat, A. : 2000, Homogenization of high-rate two-phase flow in porous media, *In Book of abstracts of the Int. Sympos. Computer Methods in Engineering of Porous Media : Flow and Transport*, Besançon, France.
- Buès, M. and Panfilov, M. : 2002, Two-phase dispersion in porous media, *In Poromechanics II, Proc. 2nd Biot Conference on Poromechanics*, Grenoble, France.
- Buès, M. and Zilliox : 1990, Déplacement miscible avec contrastes en milieux poreux, *J. Hydrology* **120**, 125 – 141.
- Cvetkovich, V. and Dagan, G. : 1996, Reactive transport and immiscible flow in geological media, *Proc. Royal Soc. London* **452**, 302–328.
- Edwards, D., Brenner, H. and Shapiro, M. : 1991, Dispersion of inert solutes in spatially periodic two-dimensional porous media, *Transport in Porous Media* **6**, 337–358.
- Edwards, D., Shapiro, M. and Brenner, H. : 1992, Dispersion and reaction in two-dimensional model porous media, *Phys. Fluids A* **5**, 837–848.
- Feynman, R. : 1954, An operator calculus having applications in quantum electrodynamics, *Phys. Rev.* **84**(1), 118 – 128.
- Gelhar, L. : 1993, *Stochastic Subsurface Hydrology*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ.
- Glimm, J., Kim, H., Sharp, D. and Wallstrom, T. : 1998, A stochastic analysis of the scale up problem for flow in porous media, *Computational and Applied Mathematics* **17**, 67 – 79.
- Jarman, K. : 2000, *Stochastic Immiscible Flow with Moment Equations*, PhD thesis, Univ. Colorado.
- Langlo, P. and Espedal, M. : 1994, Macrodispersion for two-phase, immiscible flow in porous media, *Adv. Water Ressour* **17**, 297–316.
- Lenormand, R. : 1995, A stream-tube model for miscible flow. part i : Macrodispersions in random porous media, *Transport in Porous Media* **18**(3), 251 – 261.
- Lenormand, R. : 2000, Homogenization of miscible and nonmiscible transient displacement in heterogeneous porous media, *Int. Sympos. Computer Methods in Engineering of Porous Media : Flow and Transport*, Besançon, France.

- Monin, A. and Yaglom, A. : 1965, *Statistical hydromechanics. Part I*, Nauka, Moscow. (in Russian).
- Neuweiler, I., Attinger, S., Kinzelbach, W. and King, P. : 2003, Large scale mixing for immiscible displacement in heterogeneous porous media, *Transport in Porous Media* **51**, 287–314.
- Nguetseng, G. : 1989, A general convergence result for a functional related to the theory of homogenization, *SIAM J. Math. Anal.* **20**, 608 – 629.
- Nikolaevsky, V. : 1995, Convective diffusion in porous media, *Izvestiya Akademii Nauk, Ser. Applied Mathematics and Mechanics* **23**(6), 1042 – 1050.
- Panfilov, M. : 2000, *Macroscale Models of Flow through Highly Heterogeneous Porous Media*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.
- Panfilov, M. and Floriat, S. : 2004, Nonlinear two-phase mixing in heterogeneous porous media, *Transport in Porous Media* **57**, 347–375.
- Plumb, O. and Whitaker, S. : 1990, *Diffusion, adsorption, and dispersion in porous media : The method of large-scale averaging. Dynamics of fluids in hierarchical porous media*, Orlando, Fla. : Acad. press.
- Quintard, M. and Whitaker, S. : 1988, Two phase flow in heterogeneous porous media : The method of large-scale averaging, *Transport in Porous Media* **3**, 357 – 413.
- Saez, A. E., Otero, C. J. and Rusinek, I. : 1989, The effective homogeneous behaviour of heterogeneous porous media, *Transport in Porous Media* **4**, 212 – 238.
- Sanchez-Palencia, E. : 1972, Equations aux dérivées partielles dans un type de milieux hétérogènes, *C. R. Acad. Sci. Paris* **A 271**, 395 – 398.
- Sanchez-Palencia, E. : 1980, *Non-homogeneous media and vibration theory*, Volume 129 of Lecture Notes in Physics, Springer Verlag, Berlin.
- Showalter, R. and Walkington, N. : 1991, Micro-structure models of diffusion in fissured media, *J. Math. Anal. and Appl.* **155**(1), 1 – 20.
- Shvidler, M. : 1985, *Statistical hydrodynamics of porous media*, Nedra, Moscow. (in Russian).
- Teodorovich, E. : 1991, Turbulent diffusion of tracer, *Applied Mathematics and Mechanics* **55**(2), 275 – 282.

- Tran, P. : 2000, *Corrections non linéaires à la loi de Darcy et dispersion en milieux poreux périodiques anisotropes*, PhD thesis, Université Paris 6.
- Zhang, D. and Tchelepi, H. : 1999, Stochastic analysis of immiscible two-phase flow in heterogeneous media, *SPE J* **4**(4), 380 – 388.
- Zhang, Q. : 1997, Multi-length-scale theories for scale-up problem and renormalized perturbation expansion, *Advances in Water Resources* **20**, 317–333.

**AUTORISATION DE SOUTENANCE DE THESE
DU DOCTORAT DE L'INSTITUT NATIONAL
POLYTECHNIQUE DE LORRAINE**

o0o

VU LES RAPPORTS ETABLIS PAR :

Monsieur Jean-Louis AURIAULT, Professeur, Lab. Sols Solides Structures, Grenoble

Monsieur Maouaouia FIRDAOUSS, Maître de Conférences, LIMSI, Orsay

Le Président de l'Institut National Polytechnique de Lorraine, autorise :

Monsieur SKACHKOV Sergey

à soutenir devant un jury de l'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE LORRAINE,
une thèse intitulée :

"Modèle macroscopique de la dispersion diphasique en milieux poreux et fracturés"

NANCY BRABOIS
2, AVENUE DE LA
FORET-DE-HAYE
BOITE POSTALE 3
F - 54 50 1
VANDŒUVRE CEDEX

en vue de l'obtention du titre de :

DOCTEUR DE L'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE LORRAINE

Spécialité : « Génie civil - hydrosystèmes - géotechnique »

Fait à Vandoeuvre, le 10 octobre 2006

Le Président de l'I.N.P.L.,

L. SCHUFFENECKER



RESUME

L'objectif est de construire le modèle homogénéisé d'un écoulement diphasique en milieu poreux et fracturé, en mettant en évidence le phénomène de mélange dynamique (mixing) entre les phases, provoqué par l'hétérogénéité du milieu. L'attention est concentrée sur l'influence de la capillarité. L'homogénéisation à double échelle a été appliquée. Le mixing se manifeste sous forme de la dispersion hydrodynamique et de l'advection renormalisée. Le tenseur de dispersion, déterminé à travers le problème cellulaire, est une fonction non linéaire de la saturation, vitesse d'écoulement, rapport de viscosité et du nombre capillaire. Pour les milieux fracturés, une méthode streamline configurations a été avancée pour le cas diphasique. Elle permet d'obtenir la dispersion et la perméabilité effective sous forme analytique pour des réseaux de fracture périodiques, ou semi-analytique pour des réseaux aléatoires. La simulation d'un déplacement diphasique à la base du nouveau model a été réalisée.

ABSTRACT

The objective of the thesis is to develop the homogenized model of a two-phase flow through a porous and fractured medium by highlighting the dynamic mixing between the phases, caused by the medium heterogeneity. Attention is focused on the influence of the capillarity. The two-scale homogenization is applied. The mixing is manifested in form of the hydrodynamic dispersion and renormalized advection. The dispersion tensor, determined by the cell problem, is a nonlinear function of saturation, flow velocity, viscosity ratio and capillary number. For a fractured medium the method of streamline configurations was advanced for a two- phase case. This method enables to obtain the dispersion tensor and the effective permeability in analytical form for periodic fractured networks or in semi-analytical form for random networks. The simulation of two- phase displacement based on the new model is performed.