



AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

Méthodes numériques 3-D de restauration des structures géologiques faillées

THÈSE

présentée et soutenue publiquement le 16 décembre 2005

pour l'obtention du

Doctorat de l'Institut National Polytechnique de Lorraine

Spécialité Géosciences

par

Pierre Muron

Composition du jury

Président : Delphine ROUBY

Rapporteurs : Jean-Pierre GRATIER
Isabelle MORETTI

Examineurs : Donald MEDWEDEFF
Helmut SCHAEBEN

Directeur : Jean-Laurent MALLET

Remerciements

Avant tout, je tiens à remercier mon directeur de thèse, Jean-Laurent Mallet, qui m'a accepté dans son équipe jeune et dynamique. Le projet Gocad a été, et demeure, un cadre stimulant et enthousiasmant. Je suis tout naturellement fier de compter parmi les gocadiens et parmi ses étudiants.

Mes remerciements vont ensuite à la compagnie Chevron, qui a soutenu cette thèse et participé activement aux développements ; Don Medwedeff et Chuck Sword ont été une source inépuisable de commentaires et idées. Le département de Géologie structurale de l'Université de Harvard a eu le courage d'affronter l'austérité de mes implantations informatiques et de m'accueillir à plusieurs reprises, je tiens ici à étendre mes remerciements à John Shaw, Joachim Mueller, Chris Guzofski, Andreas Plesch et Peter Suess.

Enfin, je remercie les membres de mon Jury. Je suis très honoré d'y compter les auteurs de bien des articles références en restauration : Isabelle Moretti, de l'Institut Français du Pétrole, Jean-Pierre Gratier, de l'Observatoire des Sciences de la Terre de Grenoble, Delphine Rouby, de l'Université de Rennes ; et également un incontournable contributeur et acteur de la communauté Gocad, Helmut Schaebe, de l'Université de Freiberg.

Sur un autre registre, mais tout aussi important, je tiens à remercier mes infatigables relecteurs (toujours là, même sollicités en dernière minute, principalement Sarah et Christian, mais je n'oublie pas les autres) et notre secrétaire de choc, Monique Cugurno, qui subit avec toujours autant de bienveillance les errerements des jeunes thésards (jusqu'à leur dernier souffle). Christian, a.k.a. Cri-Cri (mais bon cela fait moins sérieux), a également été initiateur de nombreuses discussions productives.

Mes dernières salutations vont à tous mes camarades de lutte (je ne parle pas de WOW ou UT là) lors de ces dernières années : ceux qui sont partis (Manu, Bruno, Souchy, Rémi, Dave, Laurent L., François, Bilbo, JCV...) et pour certains passés du côté obscur de la force (certains comprendrons de quel côté il s'agit), ceux qui sont revenus (Guillaume), ceux qui restent (Sarah, Dooshe, Laeti, La Castagne, Luc, Tobias, Anne-Laure, MO,...) et ceux que j'oublie (parce qu'il est 1h AM et que je suis crevé). Aux avant-derniers, je souhaite tout particulièrement bonne continuation.

*"Comme les nocturnes aveuglés par l'éclat du soleil,
ainsi se comporte le regard de notre pensée devant ce qui est le plus lumineux."
Aristote*

Table des matières

Table des figures	ix
-------------------	----

Introduction

1

Restauration : position du problème

1.1	Exploration et production des ressources pétrolières	5
1.1.1	Les grandes étapes de l'exploration-production	6
1.1.2	Nature des données disponibles	7
1.1.3	Apports et limites de la modélisation	8
1.2	La restauration : définition et objectifs	11
1.3	Méthodes cinématiques de restauration	15
1.3.1	Mécanismes de déformation	16
1.3.2	Méthodes en coupe	17
1.3.3	Méthodes en carte	20
1.3.4	Méthodes en volume	23
1.4	Conclusions	26

2

Modèle continu et méthodes de résolution

2.1	Le modèle des milieux continus	30
2.2	Mesures et lois fondamentales dans les milieux continus	33
2.2.1	Mesures	33

2.2.2	Lois fondamentales de conservation	35
2.3	Méthodes numériques de résolution	36
2.3.1	Discrétisation des opérateurs différentiels	37
2.3.2	La méthode d'interpolation lisse discrète	38
2.3.3	La méthode des éléments finis	40
2.4	Conclusions	42

3

Modèles discrets en restauration

3.1	Le cahier des charges en restauration volumique	45
3.2	La modélisation volumique en géologie	47
3.2.1	Modèles à base micro-topologique	47
3.2.2	Modèles à base macro-topologique	49
3.2.3	Bilan	52
3.3	Un objet pour les corps géologiques déformables	52
3.3.1	Génération de maillages tétraédriques conformes	52
3.3.2	Gestion et construction de régions logiques	53
3.3.3	Gestion du plongement dans l'espace sédimentaire	57
3.4	Conclusions	59

4

Restauration et déformation continue

4.1	Principes et algorithmes généraux	64
4.2	Méthode cinématique de restauration	66
4.2.1	Principe	67
4.2.2	Contraintes de conservation du volume	69
4.2.3	Contraintes de minimisation de la déformation	69
4.2.4	Bilan	72
4.3	Méthode mécanique de restauration	74
4.3.1	Les grandes déformations	74

4.3.2	Principe de la méthode	74
4.3.3	Lois de comportement et restauration	79
4.4	Résolution par approche pseudo-transitoire	80
4.4.1	Motivations et contributions	81
4.4.2	Principe et algorithme de relaxation dynamique	81
4.4.3	Principe et algorithme de relaxation dynamique adaptative	85
4.4.4	Bilan	88
4.5	Résolution par approche statique non linéaire	88
4.5.1	Algorithme de résolution dans le cas linéaire	89
4.5.2	Algorithme de résolution dans le cas non linéaire	91
4.5.3	Linéarisation et discrétisation de la forme variationnelle	93
4.5.4	Résolution numérique des systèmes linéaires	94
4.5.5	Bilan	96
4.6	Conclusions	96

5

Restauration et déformation discontinue

5.1	Les différentes approches	100
5.1.1	La modélisation des rejets	100
5.1.2	Les rejets : produit de la restauration	103
5.2	Ensemble cohérent de conditions de contact	105
5.2.1	Contraintes cinématiques de contact en restauration	105
5.2.2	Algorithme de construction	110
5.3	Résolution numérique des conditions de contact	112
5.3.1	Définition et construction des variables cinématiques	113
5.3.2	Approche pseudo-transitoire	116
5.3.3	Approche statique	118
5.4	Conclusions	122

Conclusion

Bibliographie	131
----------------------	------------

Table des figures

1.1	Les différents types de restauration	12
1.2	La restauration séquentielle en coupe	13
1.3	Les différents modes de déformation par flexion	17
1.4	Le mode de déformation par cisaillement	18
1.5	Méthode de restauration multi-surface par optimisation	24
1.6	Méthode de restauration en volume	25
3.1	Exemple de différents types de modèles à base micro-topologique	49
3.2	Les différents types de modèles à base macro-topologique	52
3.3	Processus de génération d'un maillage tétraédrique	54
3.4	Génération des régions logiques	55
3.5	Configurations et formalisme des requêtes macro-topologiques	56
3.6	Faïlle et requêtes macro-topologiques associées	57
3.7	Calcul du temps et extraction d'horizons virtuels	58
3.8	Les différentes méthodes de calcul de la propriété temps	60
4.1	Restauration d'un pli cylindrique par la méthode DSI	72
4.2	Champ de vecteurs magnifiés (méthode DSI)	73
4.3	Un exemple de restauration séquentielle (modèle synthétique ENSG) . . .	89
4.4	Un exemple de restauration séquentielle (modèle synthétique ENSG) . . .	90
5.1	Les différentes relations logiques entre failles	108
5.2	Affaiblissement des contraintes cinématiques de contact	110
5.3	Définition des variables cinématiques de contact	114
5.4	Prise en compte des conditions de contact en relaxation dynamique	118
5.5	Restauration des réseaux de failles présentant de multiples branchements .	123
5.6	Restauration d'une structure géologique faillée complexe (modèle Total) . .	124

5.7	Restauration séquentielle sur un modèle faillé (modèle Harvard-Chevron)	. 126
-----	---	-------

Introduction

L'exploration du sous-sol est confrontée à l'antagonisme entre les données disponibles, incertaines et ponctuelles, et le besoin d'une représentation aussi détaillée que possible de la géométrie et de l'évolution temporelle du domaine d'étude. Les techniques informatiques sont actuellement un outil élémentaire et indispensable pour intégrer de manière cohérente les différentes sources d'information et les interpréter en termes géologiques et économiques. Plus spécifiquement, notre travail de modélisation s'inscrit dans les phases d'exploration et de production des hydrocarbures au sein du projet de recherche **Gocad**. L'objectif initial de ce projet est de proposer un ensemble cohérent d'outils mathématiques et informatiques pour la modélisation tridimensionnelle des objets géologiques. Le fruit de ces travaux de recherche est le logiciel **Gocad**, actuellement maintenu et développé commercialement par la société Earth Decision Sciences.

La restauration est une technique permettant de rétablir la géométrie des structures géologiques dans leur configuration de dépôt, elle est principalement utilisée pour la validation et la compréhension des modèles structuraux du sous-sol. Sa mise en oeuvre repose généralement sur des coupes ou des cartes ; la nature fondamentalement tridimensionnelle du problème nécessite le développement de techniques volumiques pour mieux prendre en compte les phénomènes dans leur ensemble. Les techniques de restauration 3-D n'en sont encore qu'à leur balbutiement, et constituent notre axe de recherche. Ce projet a été initié et financé par la compagnie pétrolière Chevron, avec laquelle nous avons collaboré activement.

Nos travaux de recherche tentent de répondre aux cinq points suivants :

1. Le passage à la troisième dimension implique la prise en compte et la caractérisation de la déformation continue volumique (restauration 3-D).
2. La géométrie des couches est un enregistrement cinématique de la déformation, l'objectif suivant est donc de caractériser dans le temps l'évolution de la géométrie (restauration 4-D ou restauration séquentielle).
3. Les déformations discontinues ont une importance majeure dans l'évolution des structures. Cependant leur traitement est plus complexe que pour la déformation

continue et nécessite un développement spécifique.

4. Le contexte de nos développements informatiques est le logiciel **Gocad**, ce qui permet d'assurer une bonne interaction avec les phases amonts de modélisation. Ce logiciel est principalement orienté vers la représentation géométrique et un travail important est par conséquent nécessaire pour assurer une bonne intégration de nos travaux.
5. Notre collaboration avec la compagnie Chevron implique le développement d'outils suffisamment efficace et interfacés pour une utilisation en contexte opérationnel.

Organisation du mémoire

Le premier chapitre replace la restauration structurale dans la chaîne d'exploration et de production des hydrocarbures, il souligne la dualité entre la nature incertaine et ponctuelle des données et les exigences toujours croissantes de l'exploration. Les différentes méthodes de restauration en coupe, carte et volume sont introduites et évaluées aussi bien sur des aspects géologiques que numériques. La plupart de ces méthodes repose sur des règles géométriques d'évolution et leur extension pour les volumes est délicate dans les contextes structuraux complexes. L'exploration de nouvelles méthodes, reposant sur la notion de milieu continu, constitue le coeur de nos travaux : les deux axes principaux sont les méthodes cinématiques et les méthodes mécaniques.

Le deuxième chapitre présente la notion de milieu continu en géologie, les concepts et les outils mathématiques associés ; ils seront utilisés abondamment dans la suite du mémoire. Deux grands principes sont énoncés, la conservation de la matière et la conservation des moments. Ils constituent la base de nos développements respectivement pour les méthodes cinématiques et les méthodes mécaniques. Enfin, nous présentons deux cadres numériques de résolution : la méthode d'interpolation lisse discrète et la méthode des éléments finis. La spécificité de nos travaux ont nécessité le développement de bibliothèques informatiques pour mettre en oeuvre de manière efficace et adaptée ces deux techniques.

Le troisième chapitre s'attache à définir et construire un modèle discret pour le problème de restauration volumique. Nous évaluons d'abord les différents modèles volumiques actuellement disponibles en Géosciences pour concluons sur la nécessité de développer une représentation informatique dédiée. Un modèle macro-topologique, le *Solid Model*, est alors présenté et offre un compromis entre les exigences numériques et géologiques. Il sert de base aux développements des chapitres suivants. Nous recommandons la lecture complémentaire des travaux de Lepage [2003] sur la génération de maillages pour les Géosciences.

Le quatrième chapitre s'intéresse au problème de la déformation continue et de la restauration séquentielle. Nous proposons un algorithme général où une fonction objective

est minimisée tout en honorant un jeu spécifique de conditions aux limites. Une méthode cinématique est proposée et se base sur les principes de conservation du volume et de minimisation de la déformation, dont différents modes sont envisagés. La suite du chapitre est consacrée au développement de formulations plus mécaniques de la restauration ; l'accent est mis sur le problème des grandes déformations en géologie.

Le cinquième chapitre est le complément logique du chapitre quatre et aborde le traitement de la déformation discontinue en restauration. Les approches actuellement disponibles sont évaluées et confrontées aux exigences de la restauration volumique. Devant l'inadéquation des différentes propositions, nous formalisons un ensemble de contraintes à honorer pour assurer une configuration restaurée cohérente. Nous proposons une méthode générale permettant de construire automatiquement cet ensemble à partir du modèle macro-topologique *Solid Model*. La dernière section est consacrée au traitement numérique dans le cadre de la méthode des éléments finis. Nous recommandons le livre de Wriggers [2002] au lecteur souhaitant un développement numérique détaillé.

Chapitre 1

Restauration : position du problème

Sommaire

1.1	Exploration et production des ressources pétrolières	5
1.2	La restauration : définition et objectifs	11
1.3	Méthodes cinématiques de restauration	15
1.4	Conclusions	26

Comme le soulignait Dahlstrom [1969], la géologie structurale tente de répondre à deux questions fondamentales : "Quelle est la structure ?", autrement dit identifier la nature et la géométrie du sous-sol, et "Comment s'est-elle formée ?", autrement dit comprendre les mécanismes de mise en place et l'évolution de la structure dans le temps. Malgré les avancées dans les techniques d'acquisition de données, ces questions restent d'actualité dans le domaine pétrolier : la géométrie n'est connue que localement, en un nombre fini de puits, et dans la configuration actuelle. Avec l'avènement des études tridimensionnelles, les outils informatiques de modélisation sont devenus indispensables pour intégrer les observations et les interprétations du sous-sol. L'objectif de ce chapitre est de présenter le principe et la mise en oeuvre informatique de la restauration, une des techniques à disposition du géologue pour valider, améliorer et comprendre les modèles structuraux du sous-sol. Après un bref rappel des étapes et besoins de l'exploration et la production des hydrocarbures, nous définissons les concepts liés à la restauration et ses principaux objectifs. Dans une troisième section, nous rappelons et commentons les différentes méthodes existantes.

1.1 Exploration et production des ressources pétrolières

Lors des processus d'exploration et de production des hydrocarbures, il est nécessaire de déterminer s'il existe une accumulation à caractère économique et si sa production

est économiquement viable. Face aux outils traditionnels de géophysique ou de terrain, la modélisation peut apporter des éléments de réponse qualitatifs et quantitatifs, qui lui permettent de s'inscrire dans chaque étape des processus d'exploration et d'exploitation.

1.1.1 Les grandes étapes de l'exploration-production

L'exploration

Lors de la phase d'exploration, il est nécessaire de déterminer si les conditions requises à la présence d'huile (source de matière organique, conditions en pression/température, présence de pièges) sont honorées lors de l'histoire du bassin.

1. *Phase précoce : exploration des frontières* Les différentes questions clefs lors des phases précoces de l'exploration du bassin sont principalement axées sur la caractérisation du bassin sédimentaire [Selley, 1998] : Quel est le type de bassin et contient-il des roches mères ? Quels sont les roches mères matures pour la génération des hydrocarbures ? Quel est l'histoire du bassin ? La formation d'une roche mère nécessite une accumulation importante de matière organique en condition anaérobie, la fraction insoluble de cette matière constitue les kérogènes. La qualité et la quantité des kérogènes déterminent uniquement le potentiel en hydrocarbures, car c'est seulement à l'issue d'une maturation suivant des conditions spécifiques de température et de pression que ces kérogènes deviennent pétrole et/ou gaz (la fenêtre à huiles). Pour déterminer si tous les paramètres sont réunis, les géologues s'appuient sur des éléments qualitatifs, comme le type de bassin, et sur des éléments quantitatifs. Allen and Allen [1990] catégorisent les bassins suivant des critères génétiques : les bassins distensifs, flexuraux et décrochants. Ces bassins se forment selon différents processus et ont de fait une géométrie d'ensemble, une architecture interne, une histoire thermique et structurale différentes. Les modèles conceptuels sont calibrés par les données acquises sur le terrain et permettent la mise en place d'un modèle de bassin intégrant géométrie, subsidence, charge sédimentaire, compaction, température et pression au cours du temps.
2. *Phase tardive : exploration et exploitation du bassin* Un piège à hydrocarbures est la combinaison d'une roche réservoir poreuse, d'une structure géologique jouant le rôle de conteneur et d'un scellement empêchant toute autre migration. Les différentes questions clefs, lors des phases plus tardives de l'exploration, sont principalement axées sur l'identification et la caractérisation de ces pièges : Où sont les pièges potentiels ? Sont-ils susceptibles de contenir des hydrocarbures ? Les géologues doivent déterminer la présence d'un piège économiquement viable en procédant à l'analyse des différentes lithologies de réservoir et en caractérisant la géométrie et l'organisation des couches et des différentes failles. Un piège doit être mis en place avant la migration des hydrocarbures, d'où encore l'importance de l'historique du bassin.

De l'évaluation à la production

Une fois que les ressources sont identifiées et localisées, de nombreuses incertitudes subsistent quant à la viabilité économique du champ une fois en production. Il est nécessaire d'affiner tout d'abord les connaissances sur la configuration du piège ainsi que sur les positions des contacts eau/gaz/huile dans l'architecture stratigraphique. L'ensemble des opérations d'acquisition de données et de modélisation permet de conclure à la rentabilité économique du gisement. Le plan de développement consiste à déterminer et optimiser le placement des différents puits de production. Cette phase est centrée autour d'un modèle conceptuel et numérique de réservoir, qui synthétise toutes les informations disponibles et permet de simuler l'écoulement des différents fluides suivant le positionnement des puits. Alors que dans les phases précédentes, toutes les données étaient statiques, la production fournit des données dynamiques qui permettent de compléter la connaissance de la structure interne du réservoir. Les modèles de réservoir sont régulièrement remis à jour de manière à reproduire le plus fidèlement l'historique de production et à optimiser le placement relatif des puits producteurs et injecteurs pour extraire un maximum d'hydrocarbure.

Le développement d'un gisement d'hydrocarbures nécessite une bonne compréhension du sous-sol à différentes échelles : depuis le bassin en phase précoce d'exploration jusqu'au piège plus tardivement, ce qui sous-entend une bonne intégration des différentes sources d'information. La restauration se situe plus particulièrement lors de la phase d'exploration, autour de deux points clefs que sont la caractérisation de la géométrie et son évolution à travers le temps.

1.1.2 Nature des données disponibles

L'exploration se base largement sur l'interprétation des données géophysiques de subsurface, tout particulièrement en domaine marin (*offshore*). Les méthodes géophysiques (principalement la gravimétrie, la magnétométrie et la sismique réflexion) fournissent des données indirectes : un phénomène physique observé en surface, comme par exemple une anomalie du champ de gravité, permet par des techniques d'inversion [Tarantola, 1987] d'évaluer la nature et la géométrie du sous-sol. La principale source d'information, surtout en phase d'exploration précoce, est la sismique réflexion. La méthode consiste à émettre des ondes élastiques à partir d'un point source puis à mesurer les caractéristiques spatio-temporelles des ondes réfléchies et mesurées en surface par des points récepteurs. Le lecteur pourra se reporter à Lavergne [1986] et Sheriff and Geldart [1995] pour plus de détails. La résolution verticale est intrinsèquement limitée, notamment par la longueur d'onde du signal, et l'image est bruitée à proximité des failles.

Les données directes, comme les données de puits et les données d'affleurement, sont un complément essentiel et permettent de calibrer et caler les données issues des campagnes

sismiques. Dans le contexte pétrolier, les puits demeurent la principale source d'information soit par l'extraction et l'analyse des carottes soit par les techniques de géophysique de puits [Selley, 1998; Gluyas and Swarbrick, 2004]. La nature et la position des différentes couches sont connues de manière bien plus précise que ne le permet la sismique mais aussi de manière beaucoup plus localisée.

1.1.3 Apports et limites de la modélisation

Les principales difficultés rencontrées pour mener à bien les différentes phases d'exploration et de production sont liées à la différence entre les connaissances requises (comportement statique et dynamique du sous-sol) et la nature des données. Ces dernières sont souvent incomplètes, regroupées spatialement le long des puits, de précision variable et de nature très hétérogène. La modélisation est utilisée comme outil de compréhension, d'intégration et de validation des différentes données et connaissances.

Les différents types de modèles

Soler [2000] définit un modèle comme un cadre représentatif idéalisé, nécessairement approximatif et simplificateur, qui est adapté et répond à un problème donné. En effet, et comme nous l'avons déjà évoqué précédemment, une grande variété de modèles intervient dans les Géosciences, suivant que l'on s'intéresse à la structure du piège ou l'écoulement des fluides dans le sous-sol.

Le modèle représentatif est une description du sous-sol qui tente de concilier les données, les connaissances et les besoins du géologue. Au cours de la chaîne d'exploration et production, de nombreux modèles sont utilisés en fonction du volume croissant de données et des besoins différents, partant de l'évaluation de la structure à celle de la production.

1. *Le modèle géophysique* ou modèle de vitesse est une représentation de la géométrie du sous-sol, généralement rudimentaire, et de ses propriétés géophysiques. A l'issue d'une campagne sismique réflexion, l'axe vertical de l'image obtenue du sous-sol est en temps et doit être ramené en profondeur [Claerbout, 1985]. Pour cela, le modèle volumique de vitesse est typiquement un modèle frontière, [Gjoystdal *et al.*, 1985; Guiziou *et al.*, 1990; Sword, 1991; Euler, 1999; Caumon, 2003] séparant les grandes entités géophysiques où les vitesses de propagation des ondes sismiques sont différentes. Il est itérativement amélioré en y simulant la propagation d'ondes sismiques sur la base d'un modèle élastique et en comparant le résultat aux données originales [Cerveny and de Castro, 1993; Velten, 1998].

2. *Le modèle structural* est une représentation détaillée de la géométrie du sous-sol et des relations logiques entre les différentes entités géologiques. Y figurent les principaux horizons, le réseau de failles et les frontières du domaine d'étude. La première fonction du modèle structural est de décrire la géométrie détaillée du sous-sol en utilisant une représentation informatique adaptée, respectant données et principes géologiques comme la non-intersection des horizons. Deux grands types d'approches sont couramment utilisés : la représentation continue et la représentation discrète. La première est encore appelée représentation paramétrique et consiste à utiliser des courbes et surfaces polynomiales de type Bézier [Bezier, 1987], Spline [de Boor, 1978] et Nurbs [Farin, 1992], classiquement utilisées en Conception Assistée par Ordinateur. Bien que des implantations spécifiques aux Géosciences existent [Segonds, 1998], c'est une technique qui est difficile à mettre en oeuvre au vu de la complexité géométrique et des discontinuités présentes dans les structures géologiques [Conreux, 2001]. La représentation discrète est basée sur des surfaces discrétisées par des mailles élémentaires simpliciales [Conraud, 1997; Lepage, 2003] ou polygonales [Conreux, 2001; Grosse, 2002] et est largement utilisée en Géosciences. La deuxième fonction du modèle structural est de décrire les relations logiques qui existent entre les différents éléments structuraux : les contacts failles-frontières-horizons (topologie du modèle). La définition de ces contacts renseigne les géologues sur le fonctionnement de la structure (hiérarchie des failles...) et permet d'assurer un modèle cohérent géométriquement et géologiquement [Duvina, 2000]. La topologie est renseignée (1) soit sous forme de méta-informations liant les différentes surfaces, par exemple via les contraintes DSI [Mallet, 2002] dans le projet Gocad, (2) soit en construisant des représentations informatiques plus sophistiquées pour stocker les relations d'adjacence et d'incidence entre les différentes surfaces (modèle volumique frontière [Euler, 1999] ou macro-cellulaire [Conreux, 2001; Lepage, 2003]).
3. *Le modèle stratigraphique* décrit l'architecture stratigraphique et les propriétés du remplissage sédimentaire. Il permet d'estimer au mieux les réserves disponibles en fonction à la fois du volume mais aussi des caractéristiques pétrophysiques des roches du réservoir. Il sert donc à la fois de support de stockage d'information et de support calculatoire aux algorithmes géostatistiques qui remplissent la grille de propriétés. Ce modèle est le plus souvent représenté par une grille composée d'hexaèdres, suivant la géométrie des couches et tronquée par le réseau de failles, appelée grille stratigraphique (ou *corner-point grid*). Le lecteur pourra se reporter à [Souche, 2005] pour une description des méthodes usuelles de génération. De telles grilles sont le plus souvent générées par extrusion [Mallet, 2002; Souche, 2005]. Devant la difficulté de l'exercice pour des stratigraphies complexes et fortement faillées, le modèle Geochron [Mallet, 2004; Moyen, 2005] propose de découpler la géométrie/stratigraphie (représentées par un modèle volumique à base de tétraèdres) du stockage des propriétés (représenté par une grille hexahédrique régulière).

4. *Le modèle réservoir* est l'échelon final du processus de modélisation en géologie pétrolière. C'est une représentation dérivée du modèle stratigraphique pour la simulation des écoulements au sein du réservoir. Il a donc essentiellement un but calculatoire et se doit donc d'être adapté aux techniques numériques de simulation des écoulements : une phase de changement d'échelle (*upscaling*) est réalisée et le maillage est orienté en fonction des écoulements de fluides [Renard and Marsily, 1997; Farmer, 2002; Prevost, 2003]. Ce sont typiquement des grilles irrégulières à base d'hexaèdres et, plus récemment, depuis le perfectionnement des schémas de discrétisation et la plus grande puissance des ordinateurs, des grilles à base de tétraèdres.

Le modèle prédictif est l'association entre un modèle conceptuel et une représentation physique et/ou mathématique. Il permet de synthétiser les observations, de formaliser les processus physiques y conduisant et de les reproduire numériquement (modélisation numérique) ou physiquement (modélisation analogique).

1. *La modélisation analogique* est très souvent utilisée en géologie [Hubbert, 1937] pour reproduire les processus tectoniques et sédimentaires. La modélisation expérimentale par analogue est une source précieuse d'information car elle permet l'acquisition de divers paramètres associés aux processus tectono-sédimentaires (géométrie tridimensionnelle, processus de déformation, influence des conditions aux limites...) qui sont difficilement déductibles des seules données [Vendeville, 1987]. En prenant l'exemple de la géologie structurale, la modélisation par analogue permet de comprendre les mécanismes de déformation des systèmes en transpression [Casas *et al.*, 2001], en extension [Vendeville *et al.*, 1987; McClay, 1990] et en compression.
2. *La modélisation numérique* permet de simuler des phénomènes en se basant sur une interprétation physique et mathématique des phénomènes, couplée à des techniques numériques de résolution. Elle se base sur une représentation discrète (un maillage) des structures géologiques comme le modèle stratigraphique ou le modèle réservoir. En géologie pétrolière, les principales utilisations sont : (1) la simulation géostatistique pour peupler de manière réaliste les grilles de propriétés pétrophysiques ou de faciès [Goovaerts, 1997; Chiles and Delfiner, 1999; Mallet, 2002], (2) la simulation thermo-mécanique pour modéliser l'évolution des bassins sédimentaires ou évaluer la stabilité des tracés de puits [McLean and Addis, 1990], (3) la simulation des écoulements multi-phasés dans le réservoir [Aziz and Settari, 1979].

Bilan

Les processus de modélisation en géologie pétrolière sont incrémentiels : ils reposent sur la capitalisation des informations stockées et produites par d'autres modèles en amont de la chaîne d'exploration et de production. Prenons par exemple le cas du modèle réservoir :

les informations de géométrie et de propriétés sont directement dérivées du modèle stratigraphique. Or la construction du modèle stratigraphique repose sur une bonne définition (1) de la géométrie des couches afin d'assurer que les relations de voisinage soient calculées dans l'espace sédimentaire (2) de la topologie et de la géométrie des failles afin d'assurer la continuité des propriétés au travers des failles. Or ces informations sont directement extraites du modèle structural.

En réalité, le socle commun des modèles est le plus souvent la géométrie et les relations des structures géologiques fournies par le modèle structural. Or celui-ci n'est qu'une approximation tentant de combler les données imparfaites et de répondre au mieux aux exigences de l'exploration. Le géologue est le plus souvent amené à faire des choix pour accommoder notamment les limitations des modèles et des représentations informatiques. Comme bien souvent, le maillon le plus faible d'une chaîne conditionne la robustesse de toute la chaîne, aussi il apparaît nécessaire de lui fournir des outils d'aide à la décision. C'est à ce problème que tente de répondre la restauration.

1.2 La restauration : définition et objectifs

La restauration structurale est une procédure permettant de rétablir une structure géologique dans un état non déformé. Historiquement, cette procédure est communément appelée équilibrage d'une structure [Dahlstrom, 1969] ou parfois simplement dépliage. Nous préférons le terme de restauration, plus générique. En effet, l'équilibrage fait référence à une technique précise (conservation des volumes) ; le dépliage est plus restrictif car toute déformation cassante associée aux failles n'est pas prise en compte directement par la méthode. Si l'objectif de la restauration est de retrouver la configuration géométrique et spatiale anté-tectonique, alors la restauration est qualifiée de *restauration palinspastique*. Nous distinguerons plusieurs types de restauration suivant le type d'objet restauré (Figure 1.1) :

1. La *restauration en section* (Figure 1.1 (a)) ; elle se base sur une coupe ou une série de coupes. Les éléments de travail élémentaires sont généralement des lignes représentant les limites des couches principales et des blocs principaux de failles. En faisant référence à la dimension topologique de ces éléments, nous pouvons donc également les désigner comme *restauration 1-D*, cette terminologie est néanmoins ambiguë car pouvant tout autant être associé à la procédure de *backstripping* sur des puits Allen and Allen [1990]. L'espace de plongement est quant à lui 2-D : l'axe de la section et l'axe vertical. Les sections sont impérativement réalisées perpendiculairement aux grands axes structuraux car elles ne peuvent accommoder la déformation que dans le plan de la section.
2. La *restauration en carte* (Figure 1.1 (b)) ; elle repose sur une carte ou une série de cartes représentant chacune un horizon interprété. Les surfaces à base de quadrangles

ou de triangles sont les plus utilisées, le volume intermédiaire n'est pas explicitement représenté et discrétisé. L'espace de plongement est systématiquement 3-D, ce qui leur vaut le plus souvent le qualificatif de restauration 3-D, mais pour les distinguer du type suivant, nous préférons référencer la dimension topologique en les nommant *restauration 2-D*.

3. La *restauration en volume* (Figure 1.1 (c)) ; elle a été développée plus récemment et repose sur un modèle volumique (volume clos défini par ses frontières ou entièrement discrétisé par un maillage) ; elle fait l'objet de cette thèse. L'élément de travail est le volume et nous la dénommons donc par opposition aux autres, *restauration 3-D*.

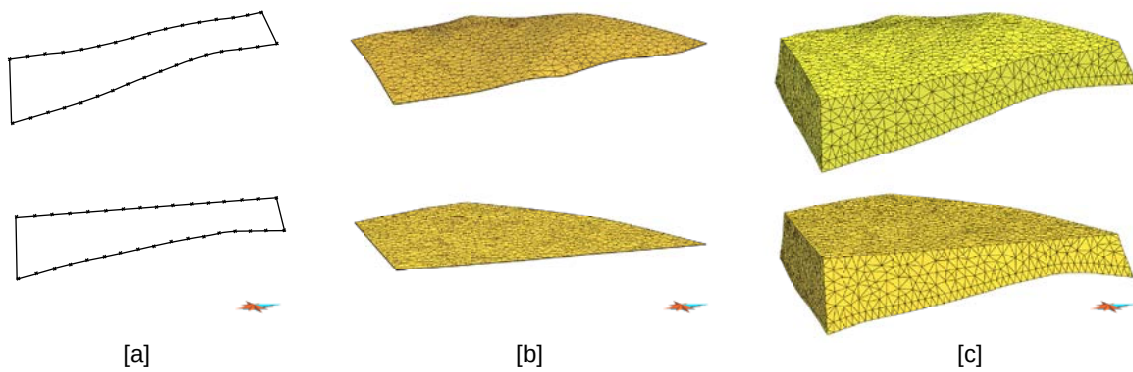


FIG. 1.1 – Les différents types de restauration : [a] en coupe, le support de travail est généralement un ensemble de lignes polygonales [b] en carte, le support de travail est généralement un ensemble surfaces à base de triangles ou de quadrangles [c] en volume, le support de travail est généralement un maillage tridimensionnel

Le *restauration séquentielle* est une procédure rétablissant la structure à des intervalles de temps donnés, correspondant généralement aux horizons interprétés. Si la structure présente des cycles de déformation syn-sédimentaire identifiés, alors la géométrie est considérée comme un enregistrement cinématique de la déformation au cours des temps. La structure peut être progressivement restaurée en enlevant itérativement le dernier incrément de déformation associé à la couche supérieure (Figure 1.2).

Objectifs de la restauration

Tous les types de restauration visent en général les mêmes objectifs : la validation des modèles structuraux, la caractérisation des paléo-géométries et la quantification de la déformation. Néanmoins dans la pratique, les hypothèses effectuées par les techniques de restauration et les compromis numériques réduisent leur champ d'applicabilité. Par exemple, dans une perspective opérationnelle, la restauration en volume reste une procédure coûteuse et la discrimination des principales erreurs structurales doit être effectuée au préalable par des outils plus simples comme la restauration en coupe ou en carte.

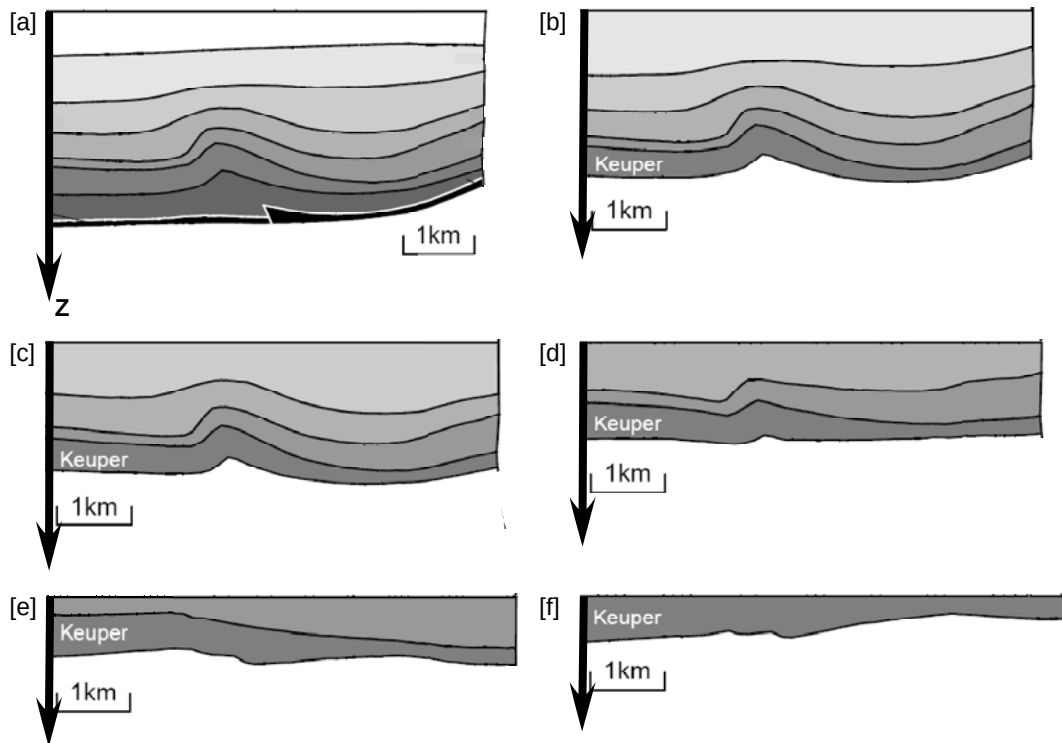


FIG. 1.2 – La restauration séquentielle en coupe, une série de coupe ([a] à [f]) est construite séquentiellement en restaurant le toit de la structure (modifié d'après Griffiths *et al.* [2002])

Validation et compréhension des modèles structuraux

Un modèle structural est un nécessaire compromis entre les données imparfaites, les besoins (ils servent de support à la construction des modèles stratigraphiques) et les connaissances du géologue. Il est nécessaire de procéder à une validation pour s'assurer de la bonne intégration de ces différentes sources d'information et ainsi réduire les incertitudes associées à la définition du piège. La restauration est une des techniques couramment utilisées en géologie structurale car elle fournit des métriques géométriques (notamment la notion de déformation) d'évaluation bien maîtrisées par le géologue. On considère notamment qu'un modèle est cohérent, ou encore *rétro-déformable*, si l'état restauré ne présente pas d'incohérences géométriques ou géologiques. A titre d'exemple, une carte restaurée montrant des recouvrement ou des interstices entre les différents blocs de failles n'est pas considérée géologiquement acceptable et le tracé de la faille dans le modèle initial doit être corrigé. La déformation associée au passage vers l'état restauré, appelée souvent *rétro-déformation*, fournit des informations quantitatives (les variations d'aire ou de volume) et qualitatives (la disposition globale des axes principaux) sur la qualité de la restauration. Il appartient au géologue d'évaluer si oui ou non la carte des déformations est géologiquement acceptable en gardant à l'esprit que, dans le cas des coupes et des cartes, elle ne fournit pas une déformation géologique mais une simple métrique géométrique.

La procédure implique le plus souvent le choix d'un mécanisme de déformation (cisaillement, glissement banc à banc...) et d'une technique de résolution. Cette dernière peut-être manuelle, reposant sur des constructions géométriques, ou informatique. La déformation inverse est appliquée au modèle en se reposant sur certaines règles cinématiques (horizon supérieur plat, présence de bords fixes...), puis le résultat est amélioré itérativement par essai-erreur en corrigeant le modèle structural initial. Certaines techniques permettent notamment de corriger le modèle à l'état restauré et de propager ces modifications et ajustements directement sur le modèle initial.

Il est important de noter que le résultat n'est cohérent qu'au regard du modèle de déformation et de la cinématique imposée, choisis a priori en fonction notamment du contexte structural régional (compressif, extensif ou décrochant). Cependant, une telle approche permet d'évaluer plusieurs styles de déformation et plusieurs types de conditions aux limites ; la restauration est alors un outil de compréhension et d'analyse des processus géologiques. Si plusieurs hypothèses sont plausibles, une règle communément admise est de baser son choix sur un critère de moindre rétro-déformation.

La restauration sismique consiste à transformer les données sismiques dans l'état restauré. Contrairement à une interprétation structurale surfacique, nécessairement limitée à un nombre fini d'horizons, une section ou un volume sismique sont exhaustifs : ils permettent donc d'interpréter dans la configuration restaurée toute l'architecture stratigraphique munie d'une certaine continuité spatiale (absence de failles). Enfin, la différence fondamentale est qualitative : la restauration sismique se base sur des données alors que les restaurations traditionnelles se basent sur une interprétation. La conséquence est que la restauration sismique est utilisée comme un moyen d'évaluer la qualité de la restauration.

Caractérisation des paléo-géométries

L'issue de chaque étape de restauration séquentielle est considérée comme représentative de la géométrie à un instant donné (l'âge de l'horizon supérieur déplié). La restauration fournit donc des informations 4-D sur la géométrie directement exploitables pour caractériser l'évolution dans le temps de la structure géologique et comprendre les relations tectono-sédimentaires.

Considérée à l'échelle du bassin, elle permet de mieux contraindre le chemin de charge de la roche mère et donc la maturation des kérogènes. L'évaluation du degré de maturation est directement dérivable du chemin P-T et est critique en exploration pétrolière afin de déterminer le potentiel d'un bassin en terme de gaz et/ou pétrole. Un des points clefs est également la coïncidence temporelle entre la mise en place du piège et la migration : repérer et caractériser la structure du piège n'est donc pas suffisant, il est nécessaire de dater sa mise en place, autrement dit de connaître son évolution temporelle. Dans la pratique, les processus de maturation et de migration sont souvent simulés (modélisation génétique) par des logiciels complexes intégrant le comportement thermo-mécanique du bassin et les

comportements chimique et cinétique de la matière organique. Une des données critiques est la géométrie initiale du bassin, qui est généralement approximée en aplanissant la structure (par simple cisaillement vertical), en décompactant les séquences sous-jacentes et en corrigeant par les effets isostatiques et eustatiques. La restauration fournira alors un moyen plus précis d'inférer la géométrie passée du bassin en intégrant un comportement structural plus réaliste.

A l'échelle du réservoir, la restauration permet d'inférer les mouvements relatifs des blocs de failles au cours du temps et donc les rejets de failles. Le rejet est un des éléments clefs pour déterminer la compartimentation du réservoir : il est utilisé pour déterminer la transmissibilité des failles, éventuellement au cours du temps, c'est-à-dire leur rôle de barrières ou de drains. L'impact sur l'évaluation des réserves, le positionnement des puits et la production est considérable.

Quantification de la déformation

La restauration permet de caractériser un champ de déplacement entre deux configurations, il est donc possible de calculer le tenseur des déformations associé, ce qui limite le champ d'applicabilité (la restauration en cartes est exclue). La rétro-déformation est alors considérée comme quantifiant la déformation finie géologique subie par les roches du réservoir. Il est également possible d'en déduire intensité et orientation de la fracturation à l'échelle sub-sismique. La caractérisation de la fracturation des réservoirs est actuellement un sujet de recherche actif, qui revêt une importance particulière : le comportement dynamique du réservoir est largement influencé par la présence de fractures.

1.3 Méthodes cinématiques de restauration

Les couches géologiques se déforment de manière complexe et variée suivant les échelles considérées et les contextes tectoniques étudiés. Il est difficile de saisir toute leur complexité par un modèle conceptuel générique rendant compte à la fois des déformations cassantes et ductiles, de l'échelle poly-cristalline à l'échelle du bassin, en contexte compressif comme extensif. Les techniques de restauration sont donc historiquement basées sur une grande variété de modèles de déformation traduisant en termes simples et géométriques les processus dans des contextes tectoniques différents. Selon Goguel [1948], la cinématique décrit l'évolution de la géométrie dans le temps. L'approche cinématique en restauration consiste donc à établir des règles géométriques rendant compte de la déformation et à les appliquer de manière inverse au modèle, parfois manuellement, mais le plus souvent en ayant recours à une implantation informatique de ces règles.

1.3.1 Mécanismes de déformation

Les mécanismes de déformation reposent fondamentalement sur les mêmes processus élémentaires à l'échelle micro-cristalline (cataclase, déformation plastique et diffusion par dissolution-recristallisation [Nicolas, 1988]). A l'échelle des couches, les deux modes extrêmes de déformation ductile sont la flexion et le glissement [Ramsay and Huber, 1983; Gidon, 1987; Twiss and Moores, 1992]. La contribution de l'un ou de l'autre est fonction de la compétence des strates, de leur géométrie et de leur agencement.

Flexion

Le plissement par *flexion* (ou *flexural folding*) (Figure 1.3 (a)) correspond au flambage d'une couche compétente sous une contrainte horizontale perpendiculaire à son axe (plis actifs) ou au ploiement sous une contrainte verticale (plis passifs). Les terrains se déforment en se comprimant à l'intrados du pli et se dilatant à l'extrados, de sorte que se trouve au milieu une *surface neutre* le long de laquelle il n'y a pas de variation de volume. En terme de micro-structure, la déformation est généralement accommodée à l'extrados par des fractures ouvertes perpendiculaires aux couches et à l'intrados par des plis et fractures secondaires.

Dans une première variante, appelée *flexion-écoulement* (ou *flexural flow*) (Figure 1.3 (b)), le pli est cisailé parallèlement à ses surfaces limites, par déplacement relatif de l'extrados vers la charnière. Ce cisaillement se traduit souvent par une déformation continue et imperceptible. Un tel mécanisme est souvent mis en évidence par la forme du pli qui tend à être anguleux et par la présence de microstructures de type fentes d'extension ou micro-fractures cisailantes.

Dans une deuxième variante, appelée *flexion-glissement* (ou *flexural slip*) (Figure 1.3 (c)), le pli n'est plus considéré comme une plaque homogène mais plutôt comme une plaque stratifiée où les strates élémentaires (les bancs) peuvent glisser librement les uns sur les autres. Ce type de déformation nécessite la présence d'un empilement de couches compétentes avec intercalation de joints incompétents et se manifeste principalement aux interfaces de couches par des crochons ou des stries de glissement perpendiculaires à l'axe du pli.

Glissement-aplatissement

Dans le mécanisme de *glissement-aplatissement* ou *cisaillement simple* (ou *simple shear*) (Figure 1.4), les strates sont en général des roches incompétentes et n'ont qu'un rôle passif de marqueurs. Le phénomène essentiel est le déplacement relatif des grains de la roche par un jeu de glissement, dont les directions sont plus ou moins parallèles. Les plans de glissement sont indépendants de la disposition des bancs. Un tel processus suffit

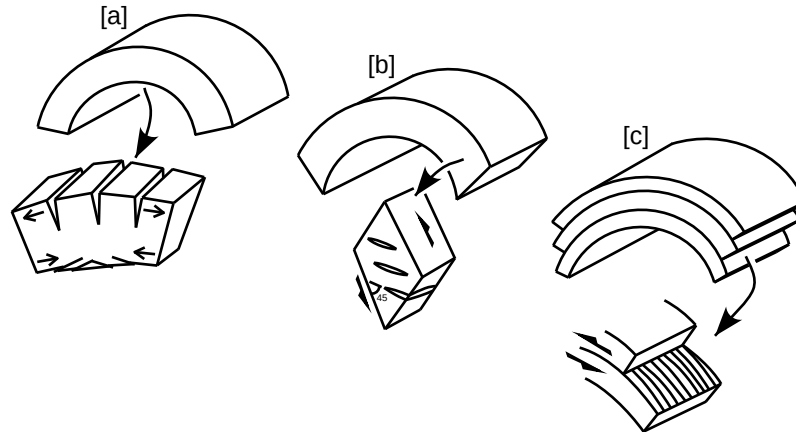


FIG. 1.3 – Les différents modes de déformation par flexion : [a] flexion [b] flexion-écoulement [c] flexion-glissement. Les flèches indiquent le déplacement relatif des particules du domaine (modifié d’après Gidon [1987])

à lui seul à produire des plis dès que se manifestent des hétérogénéités dans le glissement, la déformation apparaît néanmoins continue aux échelles d’observation courantes. Ce type de mécanisme concerne principalement des roches incompetentes : celles-ci développent sous des contraintes compressives tectoniques des plans propices aux glissements et ont tendance à s’effondrer par cisaillement vertical en contexte extensif.

Certaines structures présentent les preuves des deux modes de déformation. En cas d’alternance de couches de compétence variable, les bancs compétents forment des plis par flexion alors que les bancs intercalaires s’arrangent par fluage pour remplir l’espace entre les bancs.

1.3.2 Méthodes en coupe

Du point de vue de la terminologie, la restauration cinématique des coupes est souvent appelée équilibrage d’une coupe ou construction de *coupe équilibrée*, terme directement dérivé de l’anglais *balanced cross-sections* [Dahlstrom, 1969]. Elle repose sur un choix a priori du style de déformation en fonction du contexte tectonique de la région. Du point de vue historique, les premières méthodes ont été développées et formalisées pour la restauration en contexte compressif [Chamberlin, 1910; Dahlstrom, 1969; Hossack, 1979] et ce n’est que plus tardivement que Gibbs [1983] étend l’utilisation en contexte extensif. Les différentes méthodologies sont exhaustivement analysées dans [Rouby, 1994] et [Mallet, 2002; Massot, 2002] et nous reprenons ici les points principaux.

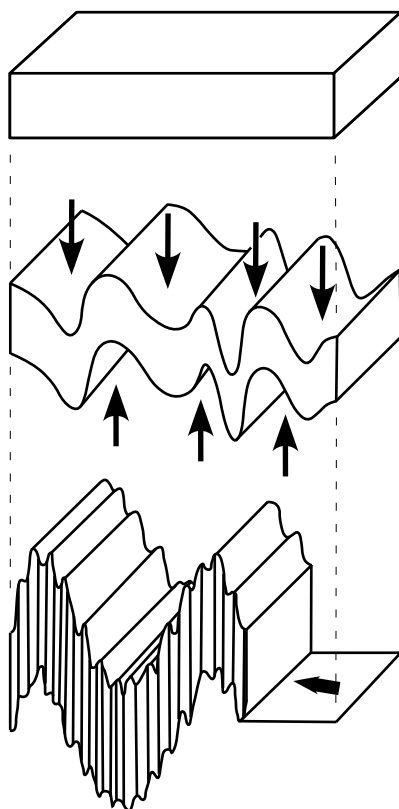


FIG. 1.4 – Le mode de déformation par cisaillement. Les flèches indiquent le déplacement relatif des particules du domaine (modifié d’après Gidon [1987])

Contexte compressif

Le style de déformation généralement retenu est la déformation par flexion-glissement et sert de base à la formulation des règles géométriques de restauration : les propriétés métriques (volume des roches et aire des interfaces entre bancs) doivent être conservées lors de la restauration. Afin de ramener le problème à une coupe et donc de réduire la dimension du problème, la règle initiale est affaiblie au profit d’une simple conservation de la surface de la coupe. Deux autres hypothèses cinématiques sont nécessaires afin de poser le problème correctement : (1) les niveaux repères (généralement le toit) sont initialement horizontaux et les couches gardent une épaisseur constante au cours du temps, (2) une bordure de la coupe est considérée fixe. Ainsi posé, il existe plusieurs approches pour résoudre le problème [Hossack, 1979] :

1. La *méthode de la surface transférée* [Chamberlin, 1910; Dahlstrom, 1969] consiste à reporter un excédent de surface produit par le soulèvement du niveau de référence. Si nous considérons que le niveau de référence est représenté par une ligne l_0 dans la configuration présente et une ligne l_t dans l’état restauré, alors l’aire comprise entre l_0 et l_t doit être transférée en fin de coupe pour assurer l’équilibre.

2. La *méthode de la conservation de la surface totale* [Denison and Woodward, 1963; Kiefer and Denison, 1972] est une application directe du principe de conservation de la surface de la coupe. Ainsi si l'épaisseur de la coupe passe de h_0 à h_t et la longueur de l_0 à l_t , alors $l_0 h_0 = l_t h_t$. Un tel principe peut être généralisé aux modèles présentant des variations d'épaisseur, s'écartant donc quelque peu du modèle canonique de déformation par flexion-glissement [Brewer and Groshong, 1993; Groshong and Epard, 1996].
3. La *méthode de conservation des longueurs et épaisseurs* [Dahlstrom, 1969] réduit le problème de conservation de la surface à une conservation de la longueur et de l'épaisseur des strates. Les longueurs sont simplement évaluées au moyen d'un curvimètre et reportées sur la coupe restaurée.
4. La *méthode mixte* [Ménard, 1988; Mitra and Namson, 1989] propose de combiner les deux approches précédentes en conservant les longueurs pour les niveaux les plus compétents, honorant typiquement plus les conditions géométriques de flexion-glissement, et les surfaces pour les niveaux moins compétents ou les parties moins contraintes de la coupe.

Contexte extensif

La transposition de ces méthodes en contexte extensif n'est pas immédiate et il est nécessaire d'adapter les procédures pour prendre en compte les différences notables avec le contexte compressif [Gibbs, 1983; Rowan and Kligfield, 1989]. Une des premières différences tient au style de déformation : il est généralement plus proche du pôle glissement-aplatissement et fortement asymétrique au niveau des failles normales. Une deuxième différence est liée aux phénomènes induisant des variations de volume (compaction essentiellement), désormais non négligeables et rendant caduques les hypothèses de conservation du volume. Enfin, le fait que l'extension soit généralement syn-sédimentaire induit de fortes variations latérales d'épaisseur des couches et il est nécessaire d'utiliser la restauration séquentielle pour découpler correctement les phénomènes de subsidence des phénomènes liés à l'extension.

Comme le souligne Rouby [1994], la plupart des méthodes de restauration en contexte extensif se ramène à une configuration élémentaire représentative de type demi-graben : une faille normale listrique sépare un bloc supérieur mobile et/ou déformable du mur rigide immobile. Le modèle conceptuel théorique sous-jacent est que le glissement le long d'une faille non-plane en contexte extensif est accommodé par un mécanisme d'effondrement gravitaire. Différentes techniques géométriques permettent de rendre compte du phénomène, elles se basent (1) sur des mouvements de corps rigides (Moretti *et al.* [1988] proposent notamment un modèle de rotation rigide le long d'une faille courbe), (2) et/ou sur la déformation du toit par un mécanisme de type flexion glissement [Davison, 1986], (3) ou encore plus couramment de type cisaillement (construction de Chevron [Verall, 1981]

et variantes). Nous avons déjà évoqué les règles géométriques pour la flexion-glissement, le type cisaillement se base quant à lui sur la conservation des longueurs le long de la direction cisailante (une image couramment utilisée est la déformation d'un paquet de carte).

La méthode fondatrice est connue sous le nom de construction de Chevron [Verall, 1981] et se divise en deux étapes : le toit est déplié par cisaillement simple vertical laissant apparaître artificiellement un vide, celui-ci est ensuite enlevé en translatant horizontalement le bloc supérieur. White *et al.* [1986] et White and Yielding [1991] reprennent le modèle de Chevron en imposant cette fois un cisaillement incliné et en considérant les effets de compaction. Néanmoins, ces méthodes ne représentent pas correctement le déplacement le long de la faille ce qui amène Williams and Vann [1987] à proposer une ultime variante pour corriger ce problème.

Bilan

Historiquement la restauration en coupe est réalisée de manière manuelle, les règles géométriques consistant le plus souvent à reporter angles et longueurs et à effectuer des rotations. Elles ont été rapidement informatisées pour faciliter l'aller-retour entre l'interprétation structurale et la configuration restaurée, la procédure demeurant typiquement itérative par essai-erreur : **Geosec-2D** [Kligfield *et al.*, 1986; Geiser *et al.*, 1988, 1991], **LO-CACE** [Moretti and Larrere, 1989; Moretti *et al.*, 1990], **RESTORE** [Schultz-Ela and Duncan, 1991; Schultz-Ela, 1992]. De nos jours, les différents modèles de déformation sont disponibles dans tous ces logiciels de manière robuste. Les limitations sont intrinsèquement liées au plongement 2-D des coupes, qui impose l'hypothèse d'une déformation plane parallèle au plan de coupe. Toute déformation transverse est alors ignorée ce qui conduit en général à ignorer les composantes décrochantes des failles et limite leur champ d'applicabilité.

1.3.3 Méthodes en carte

La restauration en carte tente de répondre aux limitations de la restauration en coupe, en considérant la structure géologique dans son extension horizontale et en accommodant potentiellement les déformations dans toutes les directions. L'utilisation en contexte décrochant ou purement décrochant est donc maintenant envisageable. Le fait que la carte soit plongée dans un espace tridimensionnel rend les opérations manuelles (projection, rotation...) complexes et de fait, la plupart des méthodes sont informatisées. Le lecteur notera qu'une carte représente un événement sédimentaire ponctuel (un horizon) alors qu'une coupe représente un événement sédimentaire continu (une ou plusieurs couches). En conséquence, la restauration d'une carte ne fournit la géométrie initiale que d'un horizon là où la restauration d'une coupe fournissait la géométrie d'une série sédimentaire. Nous opérons donc la distinction suivante :

1. Les *méthodes en carte* (stricto sensu) ou *méthodes 2-D* reposent sur le dépliage d'un horizon unique [Etchécopar, 1974; Schwerdtner, 1977; Cobbold, 1979; Percevault and Cobbold, 1982; Schultz-Ela, 1988; Bennis, 1990; Gratier *et al.*, 1991; Guillier, 1991; Audibert, 1991; Rouby, 1994; Bourgeois, 1994; Samson, 1996; Williams *et al.*, 1997; Rouby *et al.*, 2000; Mallet, 2002; Massot, 2002]. La géométrie des horizons sous-jacents est généralement obtenue a posteriori (méthodes des cartes d'isopaques restaurées). Dans la configuration présente, une propriété d'épaisseur de couche est calculée en tout point du domaine; la géométrie de l'horizon sous-jacent est restaurée, par exemple en déplaçant verticalement les noeuds du toit déplié pour retrouver l'épaisseur initiale.
2. Les *méthodes en multi-cartes* ou *méthodes 2.5-D* consistent à déplier simultanément plusieurs horizons en établissant des règles géométriques assurant la liaison inter-horizons (conservation du volume) [Thibaut, 1994; Samson, 1996; Léger *et al.*, 1997; Griffiths *et al.*, 2002]. Dans la littérature, elles sont souvent appelées méthodes 3-D et à ce titre nous les traiterons dans la section suivante, réservée aux méthodes volumiques. Il n'en demeure pas moins que fondamentalement, elles reposent sur des cartes et non un modèle volumique. Nous réservons donc le qualificatif 3-D aux méthodes basées sur des modèles volumiques pour éviter toute confusion.

Rouby [1994] souligne qu'historiquement ces méthodes en carte se divisent en deux ensembles : celles traitant la déformation continue et celles traitant la déformation discontinue. La procédure typique [Gratier and Guillier, 1993; Rouby *et al.*, 2000] consiste à déplier la carte pour se ramener à un ensemble de blocs plans puis à traiter les failles par rotation, le plus souvent rigide. Une approche alternative proposée par Mallet [2002] et Massot [2002] accommode les deux déformations en une seule étape, nous l'appelons traitement mixte de la déformation.

Nous allons brièvement présenter ces trois approches.

Traitement de la déformation continue

Pour traiter le problème de la déformation hétérogène continue, la plupart des méthodes repose sur une discrétisation de la carte par des éléments finis (quadrangles ou triangles), suffisamment petits pour que la déformation puisse y être considérée comme homogène. Historiquement, les premiers développements répondaient à une problématique de terrain. La procédure est la suivante : (1) la déformation est localement connue par des mesures de terrain, permettant ainsi de restaurer dans leur forme d'origine un nombre fini d'éléments dans la carte (2) le reste des éléments est restauré en les ajustant itérativement aux précédents, manuellement [Schwerdtner, 1977] ou informatiquement [Etchécopar, 1974; Cobbold, 1979; Percevault, 1983; Schultz-Ela, 1988]. Une telle méthodologie suppose la connaissance de marqueurs de déformation bien distribués sur le domaine et son applicabilité est donc limitée dans le contexte pétrolier.

Le logiciel UNFOLD [Gratier *et al.*, 1991; Gratier and Guillier, 1993] étend cette procédure en supposant un mécanisme de type flexion-glissement, minimisant donc les changements d'aire et de longueur au cours du dépliage. La carte est d'abord décomposée en un ensemble de blocs de failles topologiquement distincts et mono-valués en Z . Chacun des blocs est discrétisé par des triangles et la remise à plat est effectuée par rotation des triangles (étape 1). Les vides créés entre les triangles sont minimisés d'abord par rotation rigide autour d'un axe vertical (étape 2) puis par une procédure itérative ajustant la position finale des sommets (étape 3). Une surface parfaitement développable provoque un ajustement quasi-parfait dès la fin de l'étape 2. Rouby *et al.* [2000] généralisent cette technique aux contextes extensifs en supposant lors de l'étape 2 un mécanisme de type cisaillement hétérogène. Samson [1996] propose une procédure alternative, où les variations de longueur des arêtes des triangles sont minimisées par une procédure d'optimisation globale [Mallet, 2002].

Traitement de la déformation discontinue

La fermeture des failles est réalisée par un ensemble de rotations et translations, défini soit manuellement à l'aide d'un programme interactif [Gratier *et al.*, 1991], soit par une procédure informatique itérative optimisant l'ajustement des blocs [Rouby, 1994; Samson, 1996]. Le modèle cinématique sous-jacent considère que la déformation discontinue est essentiellement accommodée par des mouvements de corps rigides. Comme le notent Rouby *et al.* [2000], de nombreuses études de cas ont montré la validité d'une telle méthodologie aussi bien en contexte décrochant [Audibert, 1991; Richard, 1993], compressif [Bourgeois *et al.*, 1997] et extensif [Rouby *et al.*, 1993b,a, 1996b,a].

Traitement mixte de la déformation

Massot [2002] souligne que les algorithmes précédents reposent essentiellement sur des heuristiques géométriques qui par leur nature sont sensibles aux erreurs d'appréciation et aux problèmes de convergence, notamment aux problèmes de minima locaux. Les travaux de Mallet [2002] et Massot [2002] proposent alors une alternative basée, du point de vue cinématique, sur l'hypothèse de la flexion-glissement et, du point de vue numérique, sur des techniques d'optimisation : l'approche paramétrique. L'état palinspastique est vu comme un espace paramétrique bidimensionnel (dont les axes sont désignés par U et V) : déplier la carte consiste à assigner en tout point du domaine une valeur u et v correspondant à leur position dans le repère (U, V) , autrement dit à calculer une paramétrisation de la carte. L'opération de paramétrisation peut être vue de manière imagée comme le plaquage d'un damier sur une carte. Dans le cas d'un modèle en flexion-glissement, il doit être régulier (conservation des aires et longueurs), orthogonal (conservation des angles) et continu à travers les failles (fermeture des failles). La résolution numérique de ce problème est effectuée au moyen de la méthode d'interpolation lisse discrète (DSI) [Mallet, 2002] résolue

dans sa formulation locale (procédure de type Gauss-Seidel). Nos travaux de thèse nous ont notamment conduits à améliorer cette méthodologie en proposant une résolution plus efficace par formulation directe matricielle [Muron *et al.*, 2005].

Bilan

De par leurs résultats, leur simplicité de mise en oeuvre et leur informatisation robuste (Geosec-3D, 3D-Move, Gocad...), la valeur des restaurations en carte n'est plus à prouver : elles permettent de construire une bonne approximation de l'état palinspastique de l'horizon considéré, mais également de mettre en évidence efficacement les incohérences d'un modèle. Mais l'étude de la déformation dans le temps reste problématique, la géométrie des horizons inférieurs et surtout des failles n'étant estimée que de manière imprécise par les cartes d'isopaques.

1.3.4 Méthodes en volume

Le passage à la restauration volumique est actuellement un sujet actif de recherche et les méthodologies proposées sont encore peu nombreuses. Comme évoqué en section précédente, la plupart de ces méthodes sont en réalité ce que nous appelons des méthodes multi-cartes, ou pseudo-volume, ou 2.5-D : le volume de roche n'est représenté que par un nombre fini d'horizons et certaines contraintes géométriques inter-horizons sont imposées pour maintenir la cohérence géométrique et géologique de l'ensemble à l'état restauré. La totalité de ces approches se place dans un contexte de déformation par flexion-glisement si bien que la règle géométrique régissant les relations inter-horizons est la conservation du volume (en sus des règles appliquées aux horizons). Nous distinguons deux types de méthodes 2.5-D :

1. Les *méthodes de construction géométrique* [Samson, 1996; Griffiths *et al.*, 2002] qui dissocient le traitement du toit de celui des horizons inférieurs : le toit est déplié par les techniques développées précédemment et fournit un masque de déplacement appliqué ensuite aux autres horizons. Strictement, la procédure n'assure que la conservation du volume. Pour cette raison, Samson [1996] procède en post-traitement à un ajustement itératif de l'aire des surfaces. Griffiths *et al.* [2002] reposent de nouveau sur l'hypothèse des déformations planes (perpendiculaires à l'axe de la structure, supposé connu), la méthode est donc équivalente à une série dense de coupes, ce qui rend ses perspectives limitées.
2. Les *méthodes d'optimisation* [Thibaut, 1994; Léger *et al.*, 1997] (Figure 1.5) qui se placent dans le cadre de la théorie du problème inverse [Tarantola, 1987] couramment utilisé en géophysique. Le problème de dépliage est alors considéré comme un problème d'optimisation : une solution initiale est itérativement améliorée afin

de minimiser une fonction objective quadratique non linéaire (procédure de Gauss-Newton). Cette fonction comporte plusieurs composantes pondérées assurant, au sens des moindres carrés, la conservation du volume, la conservation des longueurs des horizons et l'horizontalité du toit. La représentation informatique des horizons est de type B-Spline cubique, ce qui permet de formuler et de linéariser numériquement le problème car il s'agit d'une représentation continue. Cette représentation continue par B-Spline offre une paramétrisation implicite, la restauration est vue comme le passage d'une représentation paramétrique à une autre.

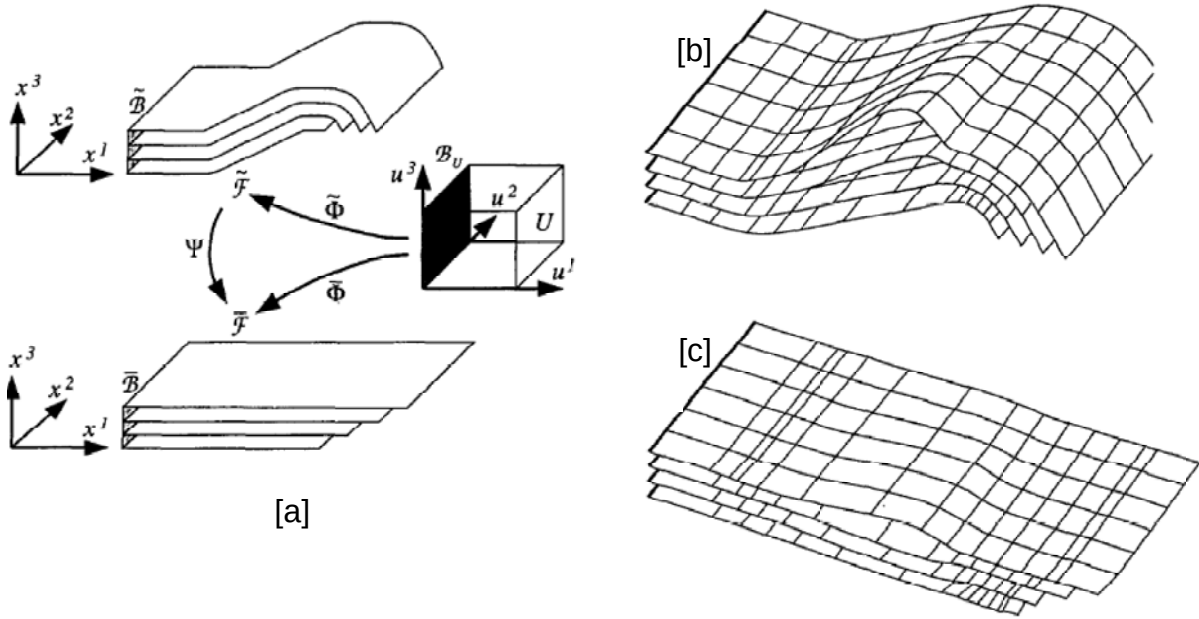


FIG. 1.5 – Méthode de restauration multi-surface par optimisation : [a] représentation paramétrique [b] surfaces à restaurer [c] résultat [Léger *et al.*, 1997]

Néanmoins, les méthodes de restauration multi-cartes ne permettent pas de prendre en compte (1) des géométries complexes fortement perturbées et faillées (notamment dans le cadre des approches continues utilisées par Thibaut [1994] et Léger *et al.* [1997]), (2) la déformation interne des blocs. Elles ne sont que peu généralisables aux cas réels en géologie pétrolière et, hormis les cas synthétiques, nous n'avons noté aucun cas d'étude dans la littérature.

Mallet [2002] et Massot [2002] proposent une méthodologie réellement 3-D (Figure 1.6) basée sur la notion de milieu continu (voir chapitre 2). Elle permet de reformuler mathématiquement les règles géométriques d'équilibrage et de les résoudre efficacement en discrétisant les opérateurs mathématiques sur un maillage volumique : conservation du volume et minimisation de la déformation. L'objectif est alors de calculer un champ de vecteurs de restauration, honorant ces principes et les conditions aux limites, sur tout le domaine discret. La discrétisation spatiale utilisée est un maillage régulier hexaédrique

modifié : la connectivité des noeuds au travers des failles est artificiellement supprimée permettant ainsi un champ de déplacement discontinu. L'algorithme se décompose en deux étapes : (1) l'horizon supérieur est restauré en mode flexion-glissement (approche paramétrique [Massot, 2002]) (2) les vecteurs de restauration obtenus sont interpolés dans le reste de la grille en honorant les contraintes géométriques énoncées. Du point de vue numérique, cette dernière opération est réalisée au moyen d'une interpolation lisse discrète (DSI) [Mallet, 2002], une méthode d'optimisation linéaire, ce qui conceptuellement la rapproche des travaux de Thibaut [1994] et Léger *et al.* [1997].

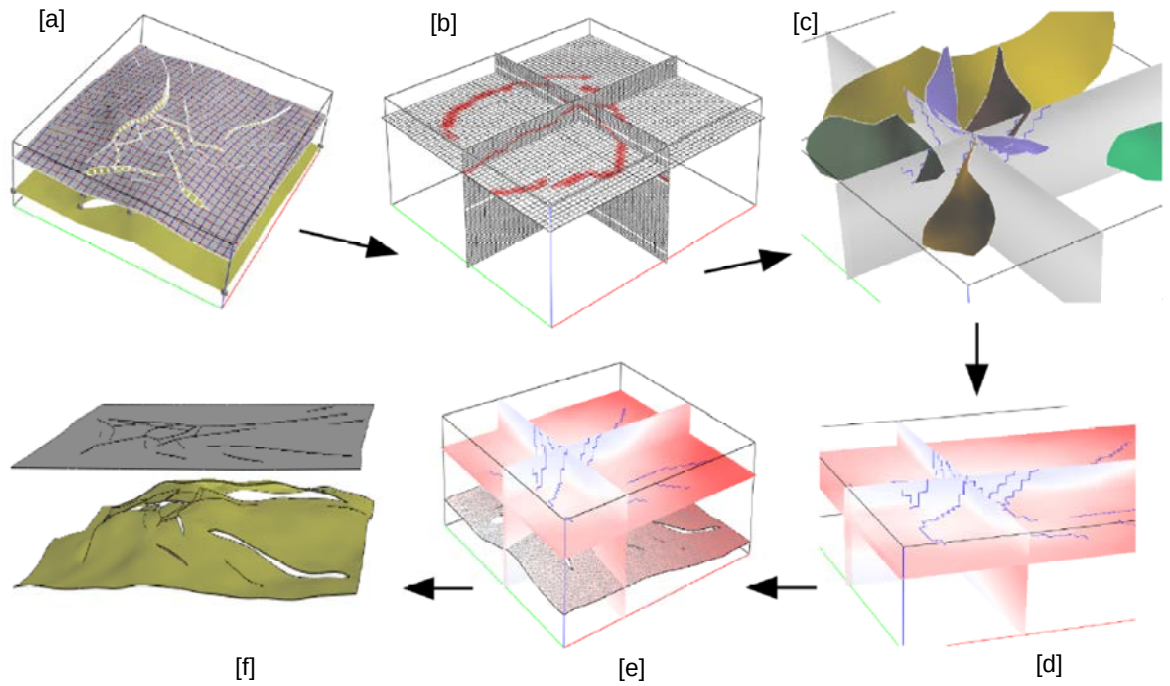


FIG. 1.6 – Méthode de restauration en volume : [a] restauration en carte [b] discrétisation par un maillage régulier hexaédrique [c] suppression de la connectivité au travers des failles [d] interpolation contrainte des vecteurs de restauration [e] transfert des vecteurs de restauration sur la surface à restaurer [f] résultat [Massot, 2002]

L'avantage de ce type d'approche est d'ouvrir la voie à une interprétation réellement 3-D en terme de géométrie et en terme de déformation, mais la mise en oeuvre informatique reste peu robuste et peu applicable. Comme le souligne à juste titre Massot [2002], l'utilisation de grilles régulières ne permet pas de rendre compte précisément de la géométrie (effet d'*aliasing*). L'augmentation de la résolution de la grille n'est pas envisageable car la procédure de résolution itérative ne convergerait pas dans un temps de calcul raisonnable.

1.4 Conclusions

La littérature sur la restauration est importante et se résume, pour la plupart, à des techniques cinématiques où les mécanismes de déformation sont traduits en termes géométriques simples, associés à des concepts géologiques bien établis. Deux tendances peuvent être extraites depuis les principes fondateurs de Chamberlin [1910] jusqu'aux derniers développements théoriques et pratiques [Massot, 2002].

1. L'*informatisation* des concepts et méthodes en restauration est rendue nécessaire par trois facteurs : (1) la nature intrinsèquement itérative de la restauration, permettant de valider par essai-erreur ou de tester différents scénarii de l'évolution structurale (2) la complexité géométrique des structures géologiques, qui allient géométrie arbitraire (non descriptible analytiquement) et discontinuités (3) le plongement tridimensionnel rendant les constructions sur papier irréalisables.
2. La *complexification des méthodes* a permis de réduire progressivement les hypothèses et d'augmenter la validité de la restauration, au prix d'une plus grande complexité algorithmique. Le passage en carte permet de s'affranchir de l'hypothèse des déformations planes et le pseudo-volume ouvre la voie à une interprétation réellement tridimensionnelle. Ces avancées ne supplantent pas les techniques antérieures mais sont plutôt complémentaires, apportant de manière incrémentielle une connaissance supplémentaire.

Les techniques de restauration cinématiques en coupe et en carte sont actuellement bien informatisées et ont montré en de nombreuses occasions des résultats satisfaisants [Rouby *et al.*, 2000]. Le passage aux restaurations en volume ouvre de nouvelles perspectives en terme d'interprétation 4-D de la géométrie et d'évaluation de la déformation des réservoirs. Dans le cadre des méthodes cinématiques, les travaux de Mallet [2002] et Massot [2002] sont les plus avancés. Ils se basent sur le concept de milieu continu offrant un cadre de résolution mathématique et numérique bien défini. Les principales limitations sont l'inadéquation de la discrétisation et les problèmes de convergence numérique. Ces remarques constituent le premier point de départ de nos travaux et nous proposons dans la suite une formulation étendue (chapitre 4) basée sur une discrétisation spatiale plus adaptée (chapitre 3) et une technique de résolution directe (chapitre 2).

D'une manière générale, nous constatons que les travaux de recherche en restauration ont pris un tournant nouveau ces dernières années et s'orientent vers une approche plus physique du problème. Une telle évolution répond en premier lieu aux critiques fondamentales émises à l'encontre des approches purement cinématiques [Fletcher and Pollard, 1999] : l'absence de dépendance explicite aux événements causaux de la déformation. Le découplage strict géométrie / mécanique peut mener à des interprétations incomplètes ou physiquement improbables des processus géologiques. Sans pour autant remettre en cause l'utilité des méthodes cinématiques, il est intéressant de les compléter et de les confronter aux méthodes mécaniques de restauration. Les développements théoriques et informa-

tiques restent cependant limités, essentiellement des projets de recherche encore actifs, relativement peu documentés (résumés de conférence uniquement) et contemporains de nos travaux de thèse :

1. Le projet **Recon** permet la restauration de coupes géologiques en utilisant la déformation élastique d'un bloc glissant sans frottement sur un mur rigide [de Santi, 2002], il a été récemment étendu pour les volumes tétraédrisés suivant le même principe [de Santi *et al.*, 2003]. Il s'agit d'un code élément fini explicite, dont nous reprenons et améliorons les bases au chapitre 4.
2. Le projet **Dynel** [Maerten and Maerten, 2004a,b] utilise une méthodologie similaire pour les coupes et cartes géologiques faillées, et assure apparemment la restauration des volumes non faillés. Ces travaux sont issus d'un consortium de recherche privé, nous ne disposons que d'informations méthodologiques restreintes (les références données sont des résumés d'une dizaine de lignes).
3. Le projet **Kine3D** est un logiciel commercial (Institut Français du Pétrole) de géologie structurale dont la partie restauration volumique [Lepage *et al.*, 2004] est encore en phase de recherche. Il s'agit d'un lien entre le logiciel **Gocad** et le code élément fini **Code Aster** (Électricité de France).

Lors de nos travaux de thèse, l'approche mécanique a été une deuxième voie d'investigation pour la restauration volumique, aucune approche n'étant alors documentées. Nous proposons dans la suite de ce manuscrit une approche basée sur les concepts de mécanique et bien intégrée au logiciel **Gocad**. Du point de vue numérique, elle rejoint les autres propositions en utilisant la méthode des éléments finis (Chapitre 2) et propose des solutions innovantes pour le traitement de la restauration séquentielle (Chapitre 4) et des structures faillées (Chapitre 5).

Chapitre 2

Modèle continu et méthodes de résolution

Sommaire

2.1	Le modèle des milieux continus	30
2.2	Mesures et lois fondamentales dans les milieux continus . . .	33
2.3	Méthodes numériques de résolution	36
2.4	Conclusions	42

Comme évoqué au chapitre 1, le problème en coupes et en cartes est essentiellement basé sur l'utilisation de formulations géométriques. Le passage à la troisième dimension pour les logiciels de restauration est accompagné d'une refonte complète des hypothèses de travail pour s'affranchir des limitations intrinsèques et algorithmiques de ces méthodes. Massot [2002] propose de baser les algorithmes de restauration volumique sur le modèle des milieux continus, un modèle mathématique largement répandu offrant les outils mathématiques, physiques et numériques pour comprendre les solides déformables. L'objectif de ce chapitre est de présenter le modèle des milieux continus et les outils numériques que nous utiliserons par la suite. Dans une première section nous aborderons la définition et la pertinence du milieu continu pour terminer par les concepts qui y sont liés. La restauration s'intéresse principalement à caractériser la déformation subie au cours des temps, aussi, dans une deuxième section, nous mettrons en évidence les principales notions permettant de décrire la déformation et de mesurer les efforts subis. Enfin, nous présenterons les deux grandes techniques de résolution numérique que nous avons utilisées lors de cette thèse : l'interpolation lisse discrète (DSI) et la méthode des éléments finis. Elles seront toutes deux plus amplement décrites dans la suite de ce manuscrit (chapitre 4).

2.1 Le modèle des milieux continus

Définition et utilisation en géologie

Un milieu continu est un milieu où, à l'échelle macroscopique, la matière est répartie de manière continue et dont le mouvement peut être décrit par des grandeurs continues et différentiables sur le domaine. Intuitivement, le concept de continuité se réfère à l'évolution au cours du temps de particules initialement voisines qui doivent conserver une relative proximité géométrique et dont les propriétés physiques doivent évoluer de manière comparable.

Considérer les structures géologiques comme des milieux continus n'est pas une pratique nouvelle et de nombreuses techniques quantitatives sont basées sur cette théorie [Ramsay and Huber, 2000]. La modélisation, la caractérisation structurale et la compréhension des bassins pétroliers utilisent de nombreux logiciels exploitant notamment la mécanique des milieux continus, dont nous décrirons les grands principes dans la suite de ce chapitre.

1. *La modélisation génétique* (ou *forward modeling*) décrit l'évolution d'une structure géologique en fonction de paramètres d'entrée comme la géométrie, les forces ou les déplacements appliqués aux frontières du domaine d'étude. Les échelles impliquées sont très variables. En géologie fondamentale, la modélisation génétique permet d'étudier la formation de micro-structures (inclusions [Ghosh and Sengupta, 1973; Pollard, 1973], bancs de déformation [Olsson *et al.*, 2004]...), de macro-structures (simples plis [Biot, 1964], plis par propagation de faille [Cardozo *et al.*, 2003]...) et de structures à l'échelle continentale (subduction océanique [van Hunen *et al.*, 2000]...). En géologie pétrolière, elle permet de reconstituer l'histoire géométrique et thermique du bassin en simulant la déformation [Cornu, 2001; Tuncay *et al.*, 2000], les phénomènes de compaction [Luo *et al.*, 1998; Scheider *et al.*, 1996] et de transfert de chaleur [Gerard, 1997]. La caractérisation des forces (les contraintes) agissant au sein du réservoir [Thomas, 1993] permet d'optimiser le tracé des puits et la production d'hydrocarbures en prédisant les zones d'intense fracturation [Bourne *et al.*, 2000; Mace *et al.*, 2004].
2. *La modélisation inverse* (ou *backward modeling*) se base sur les caractéristiques actuelles de la structure géologique, comme la géométrie et la présence de failles, et tente de reconstituer des paramètres passés. Comme évoqué au chapitre 1, c'est typiquement le cadre de la restauration. Les autres applications sont plus restreintes et sont principalement liées à la caractérisation de l'état de paléo-contraintes [Angelier, 1979; Etchecopar *et al.*, 1981], c'est-à-dire les forces agissant dans le milieu au cours des temps géologiques.

Bien qu'il existe une littérature abondante sur l'utilisation des milieux continus en

Géosciences, nous souhaitons rappeler les principaux points motivant notre démarche et souligner en quoi il est pertinent d'utiliser la mécanique des milieux continus pour la restauration.

Pertinence du modèle Fondamentalement, une structure géologique est discontinue, depuis l'échelle microscopique poly-cristalline (porosité de la roche, micro-fracturation...) jusqu'au bassin (fractures métriques aux failles majeures kilométriques). Un modèle continu fait toujours référence à une échelle de travail, dite macroscopique. Les hétérogénéités locales à l'échelle microscopique sont alors considérées comme s'annulant au sens statistique pour produire un milieu d'une certaine homogénéité et régularité [Gerard, 1997]. La restauration est typiquement réalisée à deux échelles : le bassin, où les discontinuités sont les failles majeures (les failles mineures et les fractures sont ignorées), et le réservoir, où les discontinuités sont les failles majeures et mineures (les fractures sont moyennées). Le modèle ne peut donc être pertinent en géologie qu'au prix d'un affaiblissement des hypothèses de continuité : les grandeurs décrivant le mouvement sont continues et différentiables par morceaux uniquement. Nous verrons plus particulièrement au chapitre 5 comment traiter les discontinuités que sont les failles lors de la restauration.

Pertinence de l'approche L'apport majeur des milieux continus est de fournir un cadre déterministe de résolution des problèmes : grâce à un ensemble bien identifié de lois nous pouvons faire correspondre une solution unique pour un problème donné. Au contraire, les approches géométriques plus traditionnelles se basent sur un modèle conceptuel, qui peut parfois être éloigné de la réalité des processus physiques [Fletcher and Pollard, 1999; Massot, 2002]. Toutefois comme nous l'avons déjà évoqué au chapitre précédent (chapitre 1), ceci n'altère en rien la validité de telles approches, puisque la validation des modèles se fait au regard d'un modèle donné. La mécanique des milieux continus va nous permettre d'avoir un cadre formel honorant les grands principes physiques et muni de techniques numériques éprouvées. La suite de ce chapitre développe ce cadre en se basant, sans nécessairement le rappeler systématiquement, sur des ouvrages classiques de mécanique des milieux continus [Sokolnikoff, 1956; Charlez, 1991; Belytschko *et al.*, 2000; Salençon, 2000; Garrigues, 2002a,b; Wriggers, 2002].

Définitions élémentaires

L'espace est constitué de *points géométriques* et le milieu matériel est constitué de *points matériels* appelés aussi *particules*. Si le milieu matériel est animé d'un mouvement, les points matériels se déplacent et leur position coïncide à chaque instant avec des points géométriques différents. À chaque particule sont attachées des grandeurs physiques scalaires (température, masse volumique...), vectorielles (vitesse, accélération...) et

tensorielles (tenseur des déformations, tenseur des contraintes...) définissant des champs différentiables. Nous pouvons alors distinguer :

1. Le *domaine matériel*, défini par l'ensemble des particules qui le constitue. Si une particule lui appartient à l'instant initial, alors elle lui appartient à tout instant de sorte que le flux de matière à travers la frontière du domaine matériel est nul. Nous noterons par la suite $\mathcal{B}$ (comme *body*) les domaines matériels et $\mathcal{F}$ (comme *frontier*) leurs frontières ; par souci de simplicité, ils désignerons aussi leurs discrétisations (voir chapitre 3).
2. Le *domaine géométrique*, défini par un ensemble de points géométriques et traversé par un milieu continu en mouvement. Le flux de matière est généralement non nul aux frontières du domaine. Nous noterons par la suite Ω de tels domaines et Γ leurs frontières ; par souci de simplicité ils désignerons aussi leurs discrétisations (voir chapitre 3).

La structure géologique considérée lors de la restauration est donc un domaine matériel, occupant le domaine géométrique Ω_0 à l'instant présent $t = 0$. Ω_0 est traditionnellement appelé *configuration initiale* en mécanique, mais nous l'appelons *configuration présente* pour plus de cohérence géologique. Pour décrire le mouvement et la déformation, une *configuration de référence* est nécessaire et, sauf autrement définie, elle est identique à la configuration présente. Lors de la restauration, le domaine $\mathcal{B}$ se déplace et se déforme pour occuper une autre configuration géométrique Ω_t au temps t , souvent appelée *configuration déformée* en mécanique ce qui prête à confusion dans notre cas. Nous l'appelons *configuration restaurée* au temps t pour plus de clarté.

La position d'un point matériel dans la configuration de référence est notée $\mathbf{X}$ (*coordonnées matérielles*) et sa position géométrique dans la configuration Ω_t est notée $\mathbf{x}$ (*coordonnées spatiales*). Ces deux types de coordonnées sont liés par la fonction bijective continue et différentiable ϕ , telle que $\mathbf{x} = \phi(\mathbf{X}, t)$ et $\mathbf{X} = \phi^{-1}(\mathbf{x}, t)$. Deux approches sont utilisées pour décrire le mouvement :

1. La *description eulérienne* qui consiste à donner le champ des vitesses observé en chaque point d'un domaine géométrique Ω . En un point d'observation donné, les vitesses observées au cours du temps sont donc des vitesses de particules différentes. En mécanique des fluides, où la position individuelle de chaque particule est sans intérêt, on utilise la description de Euler.
2. La *description lagrangienne* qui consiste à donner la position à tout instant de toutes les particules (identifiées comme incluses dans Ω_0), c'est-à-dire la fonction ϕ définie sur un domaine matériel $\mathcal{B}$. En mécanique des solides déformables, on préfère la description de Lagrange car on peut identifier aisément les particules et le domaine de référence. Les vitesses pendant la transformation due à l'application de forces extérieures sont souvent de peu d'intérêt, on s'intéresse plutôt à la position finale, la configuration géométrique restaurée.

La restauration cherche donc à calculer pour toute particule du domaine $\mathcal{B}$ le vecteur déplacement $\mathbf{u}(\mathbf{X}, t) = \phi(\mathbf{X}, t) - \mathbf{X}$ qui amène la particule dans sa configuration restaurée au temps t . Ce vecteur est appelé *vecteur de restauration* au temps t .

2.2 Mesures et lois fondamentales dans les milieux continus

Le domaine géologique considéré est à l'échelle des temps géologiques un milieu déformable. Nous nous intéressons dans cette section à la caractérisation mathématique de la déformation et des forces géologiques mises en jeu lors des différents événements tectoniques. Seules les déformations continues, c'est-à-dire n'induisant pas de plan de rupture comme les failles et les fractures, sont considérées ; la prise en compte des failles sera abordée au chapitre 5.

2.2.1 Mesures

Mesures de la déformation

Afin de décrire localement les processus de déformation d'une particule élémentaire, nous pouvons introduire un tenseur du second ordre $\mathbf{F}$, communément appelé *gradient de la déformation* et *matrice jacobienne* dans son expression matricielle. Il permet de caractériser la transformation d'un segment élémentaire $d\mathbf{X}$ de la configuration présente vers son image dans la configuration restaurée : $d\mathbf{x} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X}$. Le déterminant de la matrice jacobienne (Equation 2.1) est appelé le *jacobien* de la transformation et doit être strictement positif en tout point pour préserver la continuité de $\mathcal{B}$.

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{X}} \equiv \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} \equiv \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial X} & \frac{\partial x}{\partial Y} & \frac{\partial x}{\partial Z} \\ \frac{\partial y}{\partial X} & \frac{\partial y}{\partial Y} & \frac{\partial y}{\partial Z} \\ \frac{\partial z}{\partial X} & \frac{\partial z}{\partial Y} & \frac{\partial z}{\partial Z} \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

Les différentes mesures de la déformation peuvent être développées en étudiant de manière mathématique les variations de longueur d'un segment matériel arbitraire $d\mathbf{X}$ au cours de la transformation. Les différents tenseurs utilisés en mécanique des milieux continus sont :

1. Les *tenseurs de Cauchy-Green* ; ils sont une émanation directe du gradient de la déformation qui peut être composé de deux manières : $\mathbf{F}^T \mathbf{F}$ (*tenseur droit de Cauchy-Green* $\mathbf{C}$) et $\mathbf{F} \mathbf{F}^T$ (*tenseur gauche de Cauchy-Green* $\mathbf{B}$). Le tenseur droit de Cauchy-Green exprime le carré d'un segment spatial élémentaire $d\mathbf{x}$ en fonction d'un segment

matériel $d\mathbf{X}$, tel que $d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} = d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{C} \cdot d\mathbf{X}$. Il est relativement peu utilisé en géologie car dans le cas d'une déformation nulle, ϕ équivaudrait à l'identité, ce qui signifie que $\mathbf{F}$ et donc $\mathbf{C}$ vaudraient $\mathbf{1}$, alors que l'on attendrait $\mathbf{0}$.

2. Le *tenseur de Green-Lagrange* $\mathbf{E}$; il exprime la variation du carré des longueurs d'un segment matériel lorsqu'il passe à l'état restauré. De même il permet facilement de caractériser les variations relatives d'angle et de volume entre deux configurations géométriques, présente et restaurée par exemple. Il s'exprime directement en fonction des déplacements au moyen des gradients (Equation 2.2, ∇_X désignant l'opérateur gradient relativement à la configuration de référence). Pour ces raisons, il est très utilisé en géologie pour caractériser la déformation à de nombreuses échelles.

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{1}) = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{1}) \\ &= \frac{1}{2} \left(\nabla_X \mathbf{u} + (\nabla_X \mathbf{u})^T + \nabla_X \mathbf{u} \cdot (\nabla_X \mathbf{u})^T \right) \end{aligned} \quad (2.2)$$

Petites et grandes déformations La plupart des approches de restauration tridimensionnelles [Massot, 2002; de Santi *et al.*, 2003; Maerten and Maerten, 2004a] se base sur l'*hypothèse des petites déformations* : si on considère un segment matériel initial $d\mathbf{X}$, la correction de longueur apportée par la transformation est petite devant la longueur initiale du segment. La conséquence immédiate est que les termes quadratiques du tenseur sont négligeables et nous pouvons ainsi définir le *tenseur des petites déformations* (Equation 2.3). L'expression du tenseur devient linéaire par rapport aux déplacements ; ce tenseur porte donc aussi le nom de *tenseur linéarisé de Green-Lagrange*.

$$\boldsymbol{\epsilon} = \frac{1}{2} \left(\nabla_X \mathbf{u} + (\nabla_X \mathbf{u})^T \right) \quad (2.3)$$

Mesures des efforts

La déformation des structures géologiques est l'expression des actions subies par le milieu. En mécanique des milieux continus, les actions mécaniques sont appelées *efforts* et sont représentées par des *torseurs* (ensemble d'une force, d'un moment et de son point d'application). Le domaine matériel d'étude $\mathcal{B}$ est borné et nous pouvons distinguer deux types d'effort :

1. Les *efforts extérieurs* qui sont les actions mécaniques de l'extérieur sur le domaine $\mathcal{B}$. Ils peuvent s'exercer à distance sur les particules, comme les actions de gravitation ou les actions magnétiques, ou directement sur la frontière $\mathcal{F}$ du domaine, comme les contraintes régionales. Dans les structures géologiques, nous les trouvons entre

les blocs de failles ou à la frontière du domaine d'étude où s'exerce la pression lithostatique.

2. Les *efforts intérieurs* qui sont les actions entre les particules du domaine. Ils sont représentés par un tenseur du second ordre appelé *tenseur des contraintes de Cauchy*, noté $\boldsymbol{\sigma}$, et permettent de définir la densité surfacique de force $\mathbf{t}$ appliquée à une facette de normale unitaire $\mathbf{n}$ (Equation 2.4). Ils sont classiquement représentés en géologie par leurs trois valeurs et directions principales, les valeurs et vecteurs propres de $\boldsymbol{\sigma}$ ($\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$), au moyen du cercle de Mohr.

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{t} \, d\Gamma \quad (2.4)$$

Bien que peu usités en géologie, il existe plusieurs autres tenseurs des contraintes que nous utiliserons au chapitre 4. Leur signification physique n'est pas toujours évidente mais ils sont équivalents, en ce sens qu'ils permettent tous de calculer la contrainte de Cauchy par simple transformation mathématique (Equation 2.5). Au chapitre 4, nous en utiliserons deux en particulier :

- Le *tenseur premier de Piola-Kirchhoff* $\mathbf{P}$ (ou encore *tenseur nominal des contraintes*) qui permet de calculer la contrainte sur une facette dans sa configuration de référence et de normale $\mathbf{n}_0$.
- Le *tenseur second de Piola-Kirchhoff* $\mathbf{S}$ qui est encore une autre variante, mais n'a quant à lui pas de signification physique.

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{n}_0 = \mathbf{t}_0 \, d\Gamma_0 \quad (2.5)$$

$$\mathbf{S} \cdot \mathbf{n}_0 = \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{t}_0 \, d\Gamma_0$$

2.2.2 Lois fondamentales de conservation

Les équations fondamentales régissant les mouvements, la déformation et les efforts dans les milieux continus dérivent directement de lois de conservation ; elles doivent être toujours honorées par les modèles physiques. Si nous considérons les structures géologiques comme des systèmes thermo-mécaniques, quatre lois de conservation sont pertinentes : la *conservation de la masse*, la *conservation des moments linéaires*, la *conservation de l'énergie* et la *conservation des moments angulaires*. Dans notre problème de restauration, nous ne considérerons que les deux premières lois ; le lecteur pourra par exemple se reporter à Salençon [2000] pour plus de détails. Les relations de conservation sont exprimées mathématiquement par des équations aux dérivées partielles.

Conservation de la masse Puisqu'il n'y a aucun flux de matière au travers de la frontière d'un domaine matériel, la masse du domaine doit être constante au cours de la transformation. Si les phénomènes induisant des variations de densité sont ignorés, ce principe peut être dégénéré en conservation du volume. Nous retrouvons alors un principe intuitivement et géométriquement formulé dès les premières méthodes cinématiques de restauration, les milieux continus n'apportant ici qu'un formalisme mathématique. Ce principe et son expression mathématique locale sont notamment le point de départ des travaux de Mallet [2002] et Massot [2002]. Néanmoins, poser le problème en terme de conservation du volume n'assure pas le caractère univoque et géologique de la solution et c'est notamment pourquoi des règles géométriques sur le mode de déformation sont nécessaires. L'équation de conservation de la masse 2.6 se décompose en deux membres principaux : (1) un terme de variation de densité au sein du domaine (terme $\frac{D\rho}{Dt}$) et (2) un terme de flux de matière au niveau de la frontière du domaine (terme $\rho \nabla \cdot \mathbf{v}$).

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (2.6)$$

Conservation des moments linéaires La conservation des moments linéaires est équivalente à la seconde loi de Newton qui lie les forces extérieures agissant sur un domaine matériel et son accélération. Les forces extérieures considérées ici (Equation 2.7) sont de deux natures : (1) les forces de volume (terme $\rho \bar{\mathbf{b}}$) et (2) les forces de surface transformées par le théorème de Gauss (terme $\nabla \cdot \sigma$). C'est le point de départ des méthodes mécaniques de restauration.

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} - \rho \bar{\mathbf{b}} - \nabla \cdot \sigma = 0 \quad (2.7)$$

2.3 Méthodes numériques de résolution

Bien que les méthodes mathématiques de résolution des équations aux dérivées partielles soient nombreuses et performantes, elles ne permettent pas de trouver une solution analytique à ce type de problème étant données la géométrie complexe du domaine, la variation des propriétés mécaniques et des conditions aux limites parfois complexes. Il est nécessaire d'utiliser des méthodes numériques pour approximer la solution en transformant les équations aux dérivées partielles en un ensemble fini d'équations algébriques réunies dans un système linéaire. Les grandes étapes du processus sont les suivantes :

1. La *discrétisation du domaine d'étude* ; cela consiste à décomposer le domaine en un ensemble de domaines matériels élémentaires, les mailles, reliant un nombre fini de points matériels, les noeuds. Résoudre de manière approchée le problème de restauration équivaut à déterminer sur cet ensemble fini de noeuds les vecteurs

de restauration honorant les conditions aux limites et les lois fondamentales. Le maillage doit être une représentation fidèle du domaine ; il doit fournir la position géométrique des noeuds, leurs inter-connexions et enfin les propriétés du domaine.

2. La *discrétisation des équations aux dérivées partielles* ; cela permet d'approximer les différents opérateurs différentiels des équations 2.6 et 2.7 en se basant sur la valeur du déplacement aux noeuds. La contribution de chaque maille est établie de façon algébrique en intégrant les opérateurs sur la maille.
3. La *résolution du système* ; cela consiste à sommer les contributions élémentaires en un système linéaire (étape d'assemblage), chaque ligne représentant une équation algébrique liant les valeurs aux différents noeuds, et à le résoudre au moyen de techniques algébriques locales ou globales (étape de résolution proprement dite).

La discrétisation du domaine d'étude fera l'objet du chapitre 3 où nous chercherons à construire un modèle volumique spécifiquement adapté au problème de restauration. En terme informatique, l'étape élémentaire suivante est la discrétisation des opérateurs différentiels.

2.3.1 Discrétisation des opérateurs différentiels

Dans la suite de ce chapitre, nous considérerons par soucis de généralisation une fonction vectorielle φ à n_c composantes, définie sur le domaine matériel $\mathcal{B}$, devant honorer en tout point du domaine une équation différentielle $\mathcal{D}(\varphi) = 0$ et en tout point de sa frontière $\mathcal{F}$ des conditions aux limites $\mathcal{C}(\varphi) = 0$ ($\mathcal{C}$ peut être également une équation différentielle).

La fonction φ peut être approximée par une fonction discrète $\tilde{\varphi}$ définie sur les n_n noeuds du domaine discrétisé. En terme informatique, cette fonction discrète est représentée par un vecteur colonne de dimension $n_n \times n_c$ contenant les n_c valeurs de $\tilde{\varphi}$ à chaque noeud. Nous appelons ce vecteur le *vecteur global* de $\tilde{\varphi}$. L'objectif est maintenant de calculer en tout point $\mathbf{X}$ du domaine matériel, une valeur approchée $\tilde{\varphi}(\mathbf{X})$ en fonction des valeurs nodales. Pour ce faire, chacune des n_e mailles élémentaires Ω_e du domaine discrétisé est munie en chacun de ses n noeuds I d'une fonction d'interpolation $N_I(\boldsymbol{\xi})$, où $\boldsymbol{\xi}$ est une paramétrisation locale de la maille (Equation 2.8, où φ_I est un vecteur colonne contenant les valeurs de la fonction $\tilde{\varphi}$ au noeud I). Le lecteur notera qu'il ne s'agit ici que d'un formalisme générique pour des opérations classiques comme l'interpolation bilinéaire dans un triangle ou trilinéaire dans un tétraèdre.

$$\varphi(\mathbf{X}) \approx \tilde{\varphi}(\mathbf{X}) = \sum_{I=1}^n N_I(\mathbf{X}) \varphi_I \quad (2.8)$$

Les opérateurs différentiels peuvent être à leur tour discrétisés en fonction des dérivées des fonctions d'interpolation. Nous donnons à titre d'exemple l'opérateur gradient

relativement à la configuration de référence ∇_X (Equation 2.9, où J_e est le Jacobien de la transformation de l'élément paramétrique vers l'espace géométrique).

$$\begin{aligned}\nabla_X \varphi(\mathbf{X}) &\approx \nabla_X \tilde{\varphi}(\mathbf{X}) = \sum_{I=1}^n \varphi_I \otimes \nabla_X N_I = \sum_{I=1}^n \varphi_I \otimes J_e^{-T} \nabla_\xi N_I \\ J_e &= \sum_{I=1}^n \mathbf{X}_I \otimes \nabla_\xi N_I\end{aligned}\tag{2.9}$$

Il existe une grande variété de méthodes numériques de résolution ; le formalisme est différent et généralement adapté à une classe de problème. Pour les problèmes de nature géométrique, Mallet [1992] propose la *méthode d'interpolation lisse discrète* (ou *Discrete Smooth Interpolation*) dont l'intérêt est double dans le contexte de nos travaux : elle est spécifiquement orientée pour la modélisation des objets géologiques et est déjà bien intégrée au logiciel **Gocad**, base de nos développements. Toutefois, la solution existante n'étant pas pleinement satisfaisante au vu de notre problème, la première étape indispensable de notre travail a été d'implanter notre propre bibliothèque d'interpolation lisse discrète. Pour les problèmes de mécanique du solide déformable en trois dimensions, la *méthode des éléments finis* demeure la solution de référence, principalement grâce à sa maturité et ses avantages pour le traitement des matériaux hétérogènes et non-linéaires [Jing, 2003] (notamment en comparaison de la méthode des éléments frontières). Aucun outil d'éléments finis n'existant dans le logiciel **Gocad**, nous avons donc d'abord implanté ces bibliothèques, dont nous ferons un usage répété au cours de notre travail.

2.3.2 La méthode d'interpolation lisse discrète

Le géomodeleur **Gocad** repose pour de nombreux problèmes géométriques sur un moteur d'interpolation particulièrement adapté aux Géosciences, l'interpolation lisse discrète. Nous rappelons ici le principe et le formalisme associé, le lecteur pourra se reporter à Mallet [1992] ou Mallet [2002] pour les fondements théoriques.

Principe général

La méthode DSI permet de calculer une fonction scalaire ou vectorielle $\tilde{\varphi}$ honorant un ensemble C de contraintes c . Le terme de *contrainte* désigne toute relation linéaire algébrique imposée aux valeurs de la fonction $\tilde{\varphi}$. Une équation différentielle discrétisée au niveau d'une maille élémentaire peut fournir une telle relation algébrique. Prenons l'exemple plus simple de la reconstruction de la géométrie d'un horizon à partir de données de terrain : la fonction à interpoler est vectorielle (X , Y et Z) et soumise aux observations de localisation et de pendage. Les données de localisation sont généralement précises et

doivent être honorées strictement, ces contraintes sont appelées *contraintes dures*. Les données de pendage sont généralement moins fiables en raison des imprécisions de mesure et de leurs variations locales, elles doivent être honorées de manière souple, ces contraintes sont appelées *contraintes floues*. L'objectif de l'interpolation lisse discrète est de construire et de minimiser une fonction objective quadratique $R^*(\tilde{\varphi})$, appelée *rugosité généralisée*, à deux composantes :

1. Le *degré de violation des contraintes* C (noté $\rho(\tilde{\varphi})$) ; il permet de contraindre la fonction aux données et de s'assurer qu'elle honore des règles imposées a priori. $\rho(\tilde{\varphi})$ est la somme des contributions élémentaires $\rho(\tilde{\varphi}|c)$ pour chacune des contraintes, éventuellement pondérées par un facteur ω_c (Equation 2.10). Pour les contraintes dures, le pondérateur est élevé pour pénaliser fortement tout écart aux données.

$$\rho(\tilde{\varphi}) = \sum_{c \in C} \omega_c \rho(\tilde{\varphi}|c) \quad (2.10)$$

2. La *rugosité de $\tilde{\varphi}$* (notée $R(\tilde{\varphi})$) ; elle assure une certaine régularité de la solution. Dans les zones peu contraintes par les données, elle permet tout de même de calculer les valeurs de la fonction en se basant sur son caractère lisse. $R(\tilde{\varphi})$ est la somme des contributions élémentaires $R(\tilde{\varphi}|\alpha)$ en chaque noeud α du domaine, éventuellement pondérées par un facteur ω_α (Equation 2.11). D'une manière formelle, les termes élémentaires peuvent être vus comme des contraintes supplémentaires imposant une certaine régularité. Au niveau utilisateur, la distinction entre les contraintes de rugosité et l'ensemble C permet de privilégier une solution lisse honorant approximativement les contraintes ou au contraire à produire une solution plus rugueuse mais plus fidèle aux contraintes.

$$R(\tilde{\varphi}) = \sum_{\alpha \in B} \omega_\alpha R(\tilde{\varphi}|\alpha) \quad (2.11)$$

La résolution de ce problème d'optimisation linéaire est généralement résolu à l'aide d'une *formulation locale* : la contribution de chaque noeud est itérativement considérée et les valeurs de la fonction $\tilde{\varphi}$ sont réactualisées au moyen d'une procédure de type Gauss-Seidel. Cette procédure est notamment décrite en détail dans Mallet [1992] et Mallet [2002]. Les avantages tiennent à la facilité d'implantation informatique et au faible coût mémoire, ce qui explique historiquement le choix de la formulation locale. L'inconvénient majeur, notamment souligné lors des travaux de Massot [2002] sur la restauration, est une convergence lente de l'algorithme malgré plusieurs techniques d'optimisation comme les étapes d'initialisation [Cognot, 1996] ou les algorithmes multi-grilles [Massot, 2002; Labat, 2004].

Au cours de nos travaux de thèse, nous nous sommes orientés vers une formulation alternative, appelée *formulation globale* ou encore *formulation matricielle*¹. Elle est historiquement la première formulation du problème [Mallet, 1992, 2002] mais a été délaissée alors en raison des performances limitées des ordinateurs au début des années 90. Cette formulation consiste à résoudre directement le système linéaire issu du problème d'optimisation. L'approche présente l'avantage majeur de ne pas souffrir de problème de convergence. Un des premiers travaux de notre thèse a été de la réactiver en proposant une implantation informatique générique, formalisée dans [Muron *et al.*, 2005], servant de base à une partie de nos travaux, notamment le développement de méthodes cinématiques de restauration (chapitre 4).

Expression vectorielle canonique des contraintes

Que ce soit pour les termes élémentaires de rugosité ou de violation des contraintes, la mise en oeuvre de DSI consiste à exprimer les contraintes sous une forme linéaire canonique (Equation 2.12). Une contrainte est parfaitement définie par la donnée du second membre b_c et du vecteur $\mathbf{A}_c$, généralement très creux car seules quelques composantes de $\tilde{\varphi}$ sont impliquées dans une contrainte. La contribution $\rho(\tilde{\varphi}|c)$ de chaque contrainte est donnée par l'équation 2.13.

$$\{c \in C \text{ est honorée} \} \iff \sum_{\alpha \in \mathcal{B}} \sum_{\nu=1}^n A_c^\nu(\alpha) \varphi^\nu(\alpha) \approx b_c \quad (2.12)$$

$$\iff \mathbf{A}_c^t \cdot \tilde{\varphi} \approx b_c$$

$$\rho(\tilde{\varphi}|c) = \|\mathbf{A}_c^t \cdot \tilde{\varphi} - b_c\|^2 \quad (2.13)$$

2.3.3 La méthode des éléments finis

Depuis les premières formulations intuitives en mécanique des solides élastiques [Turner *et al.*, 1956; Clough, 1960], la méthode des éléments finis a été largement étudiée et formalisée et le lecteur pourra se reporter par exemple à Zienkiewicz and Taylor [2000a,b] pour les détails théoriques et algorithmiques. Nous rappelons ici les grandes lignes de la méthode sous l'optique des *résidus pondérés*; dans le cadre de la mécanique du solide déformable, nous aborderons au chapitre 4 la méthode sous l'angle plus physique des *principes variationnels*.

¹Jean-Laurent Mallet a initié ce mouvement lors des travaux de laboratoires de J. Hovadik et offre une perspective historique intéressante à ce sujet en première section de Muron *et al.* [2005]

Formes intégrales du problème

En analyse fonctionnelle, il est possible de montrer [Hildebrand, 1992] que la fonction φ honore les équations différentielles $\mathcal{D}$ et $\mathcal{C}$ respectivement en tout point du domaine et en tout point de la frontière si la fonction $G(\varphi, \psi^b, \psi^f)$ est égale à zéro pour toutes fonctions arbitraires ψ^b et ψ^f (Equation 2.14), appelées *fonctions de pondération*. De manière plus intuitive, nous pouvons étudier la contraposée d'une telle proposition : si une fonction φ est telle que $\mathcal{D}(\varphi) \neq 0$ en un point du domaine, alors il est possible de construire les fonctions ψ^b et ψ^f telles que l'intégrale $G(\varphi, \psi^b, \psi^f)$ soit non nulle.

$$G(\varphi, \psi^b, \psi^f) = \int_{\Omega_0} \psi^b \cdot \mathcal{D}(\varphi) d\Omega_0 + \int_{\Gamma_0} \psi^f \cdot \mathcal{C}(\varphi) d\Gamma_0 = 0, \quad \forall \psi^b, \psi^f \quad (2.14)$$

Pour garantir l'existence des formes intégrales, toutes les fonctions impliquées appartiennent en réalité à un espace de fonctions admissibles. Les restrictions dans la définition de φ , ψ^b et ψ^f dépendent notamment de l'ordre de dérivation des opérateurs différentiels impliqués dans $\mathcal{D}$ et $\mathcal{C}$: si une dérivée n -ième intervient, alors les fonctions doivent être nécessairement continuellement dérivables à l'ordre $n - 1$. Il est donc en général souhaitable d'abaisser le degré de dérivation en opérant une intégration par partie pour obtenir la *forme intégrale faible* du problème différentiel (Equation 2.15, où $\mathcal{M}$ à $\mathcal{P}$ sont des opérateurs différentiels). Les formes intégrales définies dans les équations 2.14 et 2.15 sont la base d'une approximation par éléments finis.

$$G(\varphi, \psi^b, \psi^f) = \int_{\Omega_0} \mathcal{M}(\psi^b) \cdot \mathcal{N}(\varphi) d\Omega_0 + \int_{\Gamma_0} \mathcal{O}(\psi^f) \cdot \mathcal{P}(\varphi) d\Gamma_0 = 0, \quad \forall \psi^b, \psi^f \quad (2.15)$$

Approximation des formes intégrales

Que le problème soit formulé sous forme différentielle ou intégrale, la solution exacte reste toujours inaccessible. Il est nécessaire d'approximer à la fois la définition des fonctions et de réduire la complexité du problème fonctionnel :

1. La fonction φ est approximée par $\tilde{\varphi}$, définie sur le maillage au moyen de ses valeurs nodales et de fonctions d'interpolation globales $\mathbf{N}_I$ en chaque noeud (Equation 2.16). Les fonctions d'interpolation globales sont construites pour chaque noeud par juxtaposition des fonctions d'interpolation N_I définies sur les mailles partageant le noeud considéré et sont nulles sur le reste du domaine.

$$\varphi \approx \sum_{I=1}^{n_n} \mathbf{N}_I \varphi_I = \mathbf{N} \tilde{\varphi} \quad (2.16)$$

2. La condition $G(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\psi}^b, \boldsymbol{\psi}^f) = 0$, $\forall \boldsymbol{\psi}^b, \boldsymbol{\psi}^f$ est remplacée par une condition moins contraignante : on ne cherche à satisfaire cette équation que pour un nombre fini d'approximations (Equation 2.17, où $\boldsymbol{\psi}_I$ sont des paramètres arbitraires définis aux noeuds).

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\psi}^b &\approx \sum_{I=1}^{n_n} \mathbf{W}_I^b \boldsymbol{\psi}_I \\ \boldsymbol{\psi}^f &\approx \sum_{I=1}^{n_n} \mathbf{W}_I^f \boldsymbol{\psi}_I\end{aligned}\tag{2.17}$$

L'intégration de ces approximations dans la forme intégrale 2.14 mène à un ensemble de n_n équations algébriques, une pour chaque $\mathbf{W}_I$, (Equation 2.18). Les paramètres $\boldsymbol{\psi}_I$ étant arbitraires, nous obtenons finalement n_n équations de la forme 2.19 ; nous pouvons dériver des équations similaires depuis la forme intégrale faible (Equation 2.20). Le lecteur notera que les expressions $\mathcal{D}(\mathbf{N} \tilde{\boldsymbol{\varphi}})$ et $\mathcal{C}(\mathbf{N} \tilde{\boldsymbol{\varphi}})$ sont en réalité les résidus, ou encore erreurs, des équations différentielles $\mathcal{D}$ et $\mathcal{C}$: l'équation 2.19 est donc une intégrale pondérée des résidus. Un tel schéma d'approximation est par conséquent appelé *méthode des résidus pondérés*.

$$\boldsymbol{\psi}_I \cdot \left\{ \int_{\Omega_0} \mathbf{W}_I^b \cdot \mathcal{D}(\mathbf{N} \tilde{\boldsymbol{\varphi}}) d\Omega_0 + \int_{\Gamma_0} \mathbf{W}_I^f \cdot \mathcal{C}(\mathbf{N} \tilde{\boldsymbol{\varphi}}) d\Gamma_0 \right\} = 0 \tag{2.18}$$

$$\int_{\Omega_0} \mathbf{W}_I^b \cdot \mathcal{D}(\mathbf{N} \tilde{\boldsymbol{\varphi}}) d\Omega_0 + \int_{\Gamma_0} \mathbf{W}_I^f \cdot \mathcal{C}(\mathbf{N} \tilde{\boldsymbol{\varphi}}) d\Gamma_0 = 0 \tag{2.19}$$

$$\int_{\Omega_0} \mathcal{M}(\mathbf{W}_I^b) \cdot \mathcal{N}(\mathbf{N} \tilde{\boldsymbol{\varphi}}) d\Omega_0 + \int_{\Gamma_0} \mathcal{O}(\mathbf{W}_I^f) \cdot \mathcal{P}(\mathbf{N} \tilde{\boldsymbol{\varphi}}) d\Gamma_0 = 0 \tag{2.20}$$

2.4 Conclusions

La mécanique des milieux continus offre un cadre mathématique et numérique pour étudier les déformations des structures géologiques et prédire leur évolution. Nous chercherons dans la suite de ce mémoire à appliquer les grands principes de conservation pour évaluer la configuration restaurée (Chapitre 4). Nous avons souligné l'importance des techniques de résolution numériques. Nous baserons le développement des méthodes cinématiques sur la méthode d'interpolation lisse discrète et les méthodes mécaniques sur la méthode des éléments finis. La discrétisation nécessaire du domaine fait l'objet du prochain chapitre où nous tentons de concilier les impératifs numériques et les exigences géologiques de la restauration.

L'implantation de la méthode d'interpolation lisse discrète n'était pas satisfaisante au regard des problèmes de convergence et nous avons proposé d'utiliser une formulation alternative, appelée *formulation globale*. Son implantation informatique générique et orientée objet a permis une efficacité et une grande souplesse de mise en oeuvre et elle est désormais le coeur de beaucoup de travaux de recherche ([Labat, 2004; Moyen, 2005; Leflon, 2005; Kedzierski *et al.*, 2005; Frank and Mallet, 2005; Tertois and Mallet, 2005; Fetel, 2005]) et de logiciels commerciaux (logiciel **Gocad** et dérivés). La mise en oeuvre de la méthode des éléments finis a nécessité l'implantation de toute une bibliothèque, également générique et réutilisable, car aucune fonctionnalité apparentée n'était disponible dans le modeleur **Gocad**.

Chapitre 3

Modèles discrets en restauration

Sommaire

3.1	Le cahier des charges en restauration volumique	45
3.2	La modélisation volumique en géologie	47
3.3	Un objet pour les corps géologiques déformables	52
3.4	Conclusions	59

Par opposition aux techniques en coupe ou en carte, la restauration structurale tridimensionnelle suit l'évolution dans le temps de différents volumes géologiques identifiables, comme les différents blocs de failles ou les différentes couches géologiques. Une première étape incontournable est la construction d'un modèle volumique du domaine d'étude, à partir d'un modèle structural surfacique. La restauration a des exigences spécifiques, tenant à la fois de la nature géologique du problème et de la nécessaire informatisation du processus. L'objectif de ce chapitre est de présenter la représentation informatique que nous avons choisi d'adopter. Nous nous penchons donc dans un premier temps sur les exigences du problème de restauration avant de présenter les différentes représentations volumiques actuellement disponibles en Géosciences. Dans une dernière section, nous proposons et présentons une structure appelée *SolidModel* répondant au plus près à nos exigences.

3.1 Le cahier des charges en restauration volumique

La restauration structurale est un processus complexe ; un modèle volumique adapté doit synthétiser des informations de nature différente (géométrique, géologique et calculatoire) afin d'être exploitable. Nous présentons brièvement dans cette section les différents points à considérer lors du choix d'une représentation. D'une manière générale, nous pouvons distinguer deux principales caractéristiques d'un modèle : (1) sa *validité représentative et géologique*, c'est-à-dire sa capacité à représenter fidèlement la géométrie

et la géologie du sous-sol (2) sa *validité applicative*, c'est-à-dire sa capacité à résoudre informatiquement le problème considéré.

1. Un des objectifs essentiels de la restauration est de valider un modèle structural surfacique. Il est donc nécessaire que le modèle volumique soit une *transcription fidèle du modèle structural* initial et qu'une certaine correspondance soit établie entre ces deux types de modèle. Par exemple, il doit être possible de corriger le modèle initial en fonction des erreurs ou anomalies pointées par la restauration. Au chapitre 1, nous avons souligné qu'un modèle structural est d'abord une description détaillée de la géométrie du sous-sol mais qu'il contient également des méta-informations renseignant les relations logiques entre les différentes surfaces. Pour opérer une transcription fidèle, nous devons donc à la fois rendre compte (1) de la *géométrie* du domaine, et plus particulièrement de celles des surfaces pointées lors de l'interprétation structurale (elles représentent en effet des événements sédimentaires et structuraux clefs) (2) de la *topologie* du domaine qui décrit les relations logiques entre les différents éléments comme les blocs de failles ou les différentes couches.
2. Dans le contexte des milieux continus (Chapitre 2), les règles de restauration se traduisent par des équations aux dérivées partielles. La résolution numérique requiert un support calculatoire, soit une *discrétisation spatiale* du domaine munie d'une discrétisation des opérateurs différentiels. Le problème de restauration nécessite également la définition de conditions aux limites, afin d'imposer des points fixes et/ou une cinématique particulière. Or ces conditions sont logiquement énoncées sur des entités géologiques : l'horizon supérieur H est horizontal dans l'état restauré, le bloc supérieur d'une faille F est contraint à glisser sur le bloc inférieur... La prise en compte de ce type de conditions nécessite donc d'individualiser au sein du maillage les différentes entités géologiques. Pour reprendre les exemples précédents, on doit répondre aux questions suivantes : quels sont les noeuds situés sur l'horizon H ? quels sont les noeuds situés sur la faille F ? sont-ils situés sur le bloc supérieur ou sur le bloc inférieur ? Par conséquent, d'une manière générale, définir un modèle volumique adapté passe par la *définition de régions logiques* regroupant les mailles et les noeuds suivant leur appartenance à tel type d'éléments géologiques (couches, surfaces, intersections de surfaces). De plus, la restauration séquentielle entraîne des modifications topologiques fortes (suppression de la couche supérieure après chaque étape). Il apparaît alors nécessaire de mettre régulièrement à jour les régions logiques, qui ne peuvent donc être définies statiquement à l'initialisation du modèle.

3.2 La modélisation volumique en géologie

Les modèles volumiques sont fréquemment utilisés en géologie depuis les étapes précoces comme la construction du modèle de vitesses jusqu'en fin de chaîne avec les simulations d'écoulement. Une grande variété de modèles est disponible, chacun répondant généralement à des besoins spécifiques. Nous présentons dans cette section les modèles les plus utilisés et analysons avantages et inconvénients suivant notre cahier des charges. Deux grandes classes peuvent être distinguées : les modèles à base micro-topologique et les modèles à base macro-topologique.

3.2.1 Modèles à base micro-topologique

Ces modèles sont plus communément appelés maillages, mais nous les appelons modèles à base micro-topologique pour les opposer aux modèles à base macro-topologique, davantage dédiés à la description des volumes géologiques ou encore macro-volumes (section suivante). Un maillage est le pavage du domaine d'intérêt par des ensembles géométriques plus simples, les mailles, couvrant un volume élémentaire et reliant un nombre arbitraire de points de l'espace, les noeuds. Il a pour but de décrire la géométrie et la micro-topologie. La géométrie du domaine est donnée par la position des noeuds du maillage dans l'espace tridimensionnel. La micro-topologie informe sur la connectivité de noeuds, c'est-à-dire sur les relations de voisinage entre les différentes mailles. La plupart des algorithmes nécessite en effet de pouvoir parcourir le maillage en allant de maille voisine en maille voisine ou de noeud voisin en noeud voisin. Il existe une grande variété de ces maillages ; Lepage [2003] rappelle que l'on peut faire une distinction d'ordre topologique ou géométrique pour qualifier leurs différents types.

Maillages structurés et non-structurés

La structure d'un maillage est une notion topologique. Dans un maillage structuré, les mailles sont identiques et à chaque noeud est associé un jeu d'index. L'accès aux différents voisins se fait par une simple transformation d'index (addition et soustraction). Il n'est donc pas nécessaire de stocker la topologie : elle est implicite. Par opposition, on appelle maillage non-structuré un maillage où les relations de voisinage sont explicitement et nécessairement stockées. La conséquence immédiate pour ces derniers est un plus fort coût mémoire. Néanmoins, cet inconvénient est en partie compensé par une plus grande flexibilité car le type de maille et le nombre de voisins peuvent varier au sein du maillage.

Maillages réguliers et irréguliers

La régularité d'un maillage dépend cette fois des modalités de stockage de la géométrie. Dans un maillage structuré, la géométrie d'un noeud s'obtient par simple formulation

analytique à partir généralement d'un index, de la position de l'origine et d'un pas élémentaire suivant l'axe X, Y et Z. La position est définie de manière implicite. Dans un maillage irrégulier, il est nécessaire de stocker explicitement la géométrie de tous les noeuds, ce qui est pénalisant en terme de mémoire mais offre en échange une grande flexibilité de représentation. Les maillages réguliers imposent une approximation géométrique des interfaces géologiques (effets d'*aliasing*) et une densité de noeuds constante sur tout le domaine.

Les maillages courants en Géosciences

Les caractéristiques de régularité et de structuration peuvent se combiner de manière indépendante pour former différents types de maillages volumiques, souvent destinés suivant leurs caractéristiques à des utilisations spécifiques.

1. Les *maillages structurés et réguliers* (Figure 3.1 [a]) sont le plus souvent un assemblage régulier d'hexaèdres pavant un parallélépipède et sont très simples à générer puisque la donnée de l'origine, des trois axes et les trois dimensions correspondantes est suffisante. Leur légèreté (géométrie et topologie sont implicites) les rend efficaces pour le stockage d'information dense et régulièrement répartie, comme les données issues des campagnes géophysiques. Ils constituent typiquement le support numérique de la sismique 3-D et le support de calcul pour les algorithmes qui en extraient les informations géologiques [Labrunye, 2004].
2. Les *maillages structurés et irréguliers* (Figure 3.1 [b]) apportent comparativement plus de souplesse pour la caractérisation géométrique pour un coût mémoire modeste, la topologie restant implicite. La *grille stratigraphique* (ou *corner-point grid*) est le représentant le plus utilisé et permet de se conformer plus finement à la stratigraphie ; les cellules hexaédriques sont alignées le long des différentes couches préservant ainsi, de cellule à cellule, le voisinage géologique.
3. Les *maillages non-structurés et réguliers* sont anecdotiques en Géosciences car la flexibilité apportée par une topologie explicite est annulée par une géométrie trop rigide. A notre connaissance, aucune implantation informatique n'existe par ailleurs dans les logiciels de modélisation.
4. Les *maillages non-structurés et irréguliers* (Figure 3.1 [c]) sont les plus flexibles et sont utilisés là où une représentation précise de la géométrie des couches et des failles est nécessaire. Il s'agit typiquement de maillages tétraédriques. Ils sont actuellement au centre de nombreuses recherches (écoulement des fluides dans les réservoirs [Prevost, 2003], modélisation sédimentaire [Moyen, 2005]...). L'augmentation drastique de la mémoire des ordinateurs, le nombre restreint de noeuds nécessaires pour une description adaptée et les outils modernes de génération [Lepage, 2003] en sont les raisons principales.

Les maillages tétraédriques paraissent correspondre parfaitement à nos besoins calculatoires et permettent de représenter fidèlement les géométries complexes du modèle struc-

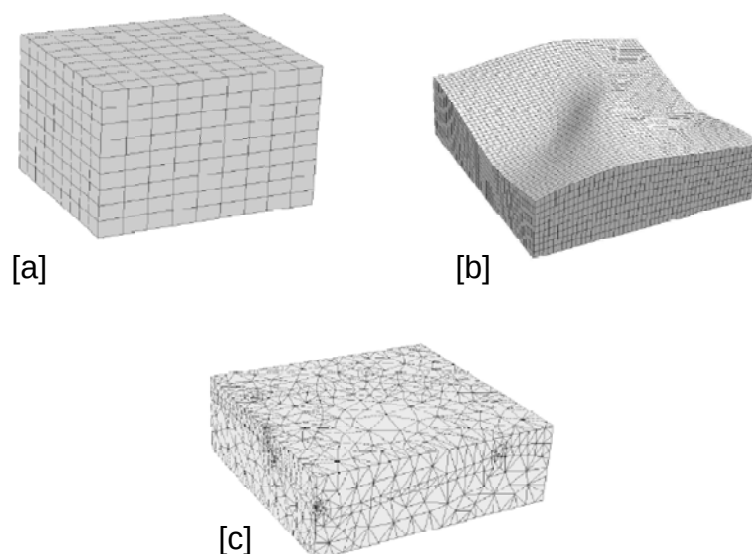


FIG. 3.1 – Exemple de différents types de modèles à base micro-topologique : [a] maillage structuré régulier [b] maillage structuré irrégulier [c] maillage non-structuré irrégulier (d’après Souche [2005])

tural. Néanmoins, ils n’offrent pas la possibilité de stocker aisément des méta-informations sur la macro-topologie du modèle.

3.2.2 Modèles à base macro-topologique

Le modèle à base macro-topologique est constitué d’un ensemble de surfaces (définies de manière discrète ou continue) décomposant le domaine d’étude en un ensemble de volumes, les macro-cellules. Celles-ci ont une géométrie arbitraire, définie par leurs frontières, et non plus le motif élémentaire des mailles ou cellules (hexaèdres, tétraèdres...). En plus de caractériser finement la géométrie des différents éléments du modèle (failles, horizons et frontières), ces représentations décrivent également les relations de contact comme la hiérarchie du réseau de failles ou les contacts horizons-failles. Elles respectent certains critères qui en font des représentations valides du sous-sol. Grosse [2002] les synthétise dans ses travaux en se basant sur [Requicha, 1980; Lamboglia, 1994; Euler, 1999]. Caumon [2003] complète ces conditions de validité représentative par des conditions de validité géologique du modèle, permettant d’assurer une image cohérente du sous-sol. Nous reprenons ci-après les principaux points :

– Les conditions de validité représentative

1. La *condition de non-intersection* stipule que (1) les régions volumiques ne peuvent s’intersecter qu’au niveau de leurs frontières communes, (2) les surfaces qu’au niveau de leurs bords communs, (3) les lignes qu’en leurs extrémités communes. Les points d’intersection doivent être topologiquement distincts

mais géométriquement confondus.

2. La *condition de finitude* stipule que les volumes sont finis, le domaine doit donc être borné par des éléments frontières qui sont typiquement les bords du domaine d'étude considéré. En général, une région fictive appelée univers doit pouvoir être construite comme le négatif de toutes les autres. Son absence signifie que le modèle est invalide, une fuite existe entre une région et la périphérie du modèle.
3. La *condition d'homogénéité* stipule que les surfaces sont orientées de manière à ce que tout volume ait un intérieur et un extérieur ; il est bordé par des surfaces dédoublées.
4. La *condition de rigidité* stipule que la forme et les conditions énoncées ci-dessus sont invariantes par translation et rotation du modèle. Du point de vue informatique, cette condition est souvent difficile à honorer considérant la précision numérique limitée du stockage de la géométrie et celle des calculs engendrés par des opérateurs géométriques.

– **Les conditions de validité géologique**

1. Les failles sont les seules interfaces géologiques dont les bords peuvent être libres. Si cette condition n'est pas vérifiée, les volumes ne sont pas définis car il subsiste des fuites entre les différents compartiments.
2. Les limites de couches (horizons ou surfaces d'érosion) ne peuvent s'intersecter qu'en leurs bords externes ; il ne peut y avoir d'intersection franche entre deux limites de couches.

Parmi les représentations permettant d'honorer ces conditions de validité, Conreux [2001] distinguent trois principales sortes de modèles utilisés. Nous décrivons leurs principes et soulignons avantages et inconvénients. Les représentations par frontières et macro-cellulaires sont les plus adaptées aux Géosciences.

Les représentations booléennes

Un modèle volumique peut être obtenu à partir de la combinaison de primitives géométriques élémentaires (cube, sphère, cône, cylindre...) [Requicha and Voelcker, 1980] (Figure 3.2 (a)). Les opérations de combinaison sont appelées opérations booléennes et sont au nombre de trois : l'union, l'intersection et la différence. Par exemple, la différence entre un cube et un cylindre permet d'obtenir un volume fermé cubique foré d'un trou cylindrique. Ce type de modèle est représenté informatiquement par un arbre dont les feuilles sont les formes élémentaires et les branches portent les opérations booléennes, offrant une démarche utilisateur de construction intuitive [Grosse, 2002]. Même si elles remplissent les conditions de validités représentative et géologique, ces représentations sont réservées à l'infographie et à la conception d'objets industriels car elles manquent de flexibilité pour

représenter des géométries arbitraires avec précision et rendent complexes les processus de mise à jour des modèles.

Les représentations par frontières

Dans cette représentation, les volumes sont définis par un ensemble de surfaces jointives, délimitant un volume clos (Figure 3.2 (b)). Contrairement aux représentations booléennes, les frontières ne sont pas définies analytiquement comme des objets simples, mais sont des surfaces triangulées à géométrie complexe. Les maillages de ces surfaces doivent donc être modifiés pour les rendre parfaitement coïncidents au niveau de l'intersection des surfaces, et proscrire ainsi toute fuite entre les sous-volumes. Des structures informatiques complexes (la structure de demi-arête [Baumgart, 1975] ou d'arête radiale [Weiler, 1987]) permettent de naviguer entre les différents contacts et volumes. Cette représentation est souvent utilisée en Géosciences car elle permet de modéliser des géométries et des contacts complexes, comme des structures salifères. En particulier, le modèle de vitesses en géophysique l'utilise abondamment. Les inconvénients d'une telle représentation sont dus à la forte complexité informatique des structures et surtout aux techniques de construction encore trop peu robustes. En effet, il est nécessaire de procéder à l'intersection des différentes surfaces, opération très sensible à la précision numérique [Euler, 1999].

Les représentations macro-cellulaires

Ces représentations décomposent les objets en un ensemble fini de cellules connexes (Figure 3.2 (c)). On parle de macro-cellules car dans notre cas chaque cellule est de forme quelconque et correspond non pas à un volume élémentaire mais à un volume géologique comme une couche ou un bloc de faille. Les facettes des cellules sont donc par exemple une portion de faille ou une portion d'horizon. Ce type de modèle est parfaitement défini mathématiquement, les structures informatiques sont la transposition immédiate des notions de graphe d'incidence et de graphe d'adjacence. Les représentations utilisées en Géosciences sont les Cartes Généralisées Hiérarchiques [Levy, 1999] (une extension des Cartes Généralisées [Lienhart, 1994]) et le *Soft Frame Model* [Lepage, 2003]. Les Cartes Généralisées Hiérarchiques mettent l'accent sur la validité mathématique, alors que le *Soft Frame Model* privilégie la validité applicative ; ce dernier peut en effet être construit simplement et directement à partir du modèle structural surfacique.

Parmi ces trois représentations à base macro-topologique, les représentations macro-cellulaires apparaissent actuellement plus adaptées : leur processus de construction est robuste car peu sujet au manque de précision numérique, et elles peuvent être directement extraites du modèle structural.

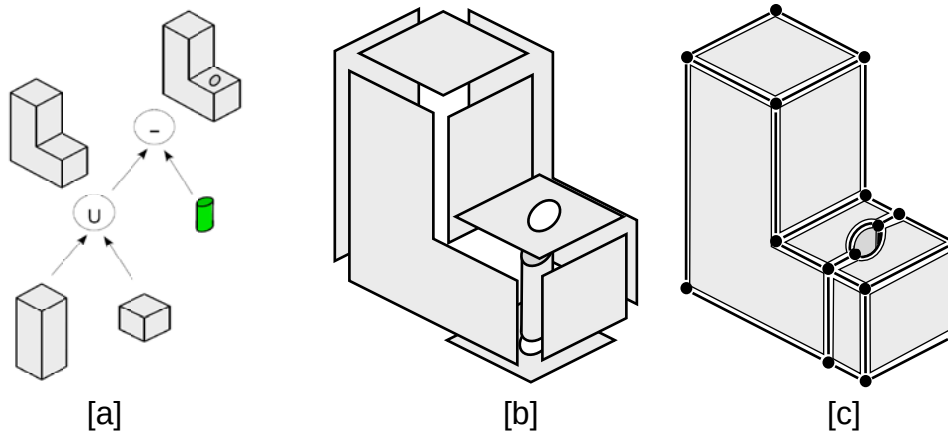


FIG. 3.2 – Les différents types de modèles à base macro-topologique : [a] représentation booléenne [b] représentation par frontières [c] représentation macro-cellulaire

3.2.3 Bilan

Il existe une grande variété de modèles volumiques en Géosciences. Les modèles à base macro-topologique sont une extension naturelle du modèle structural. Ils proposent une description géométrique fiable et mettent l'accent sur les relations logiques entre les différents volumes, préservant ainsi les informations de contact du modèle structural. Les modèles à base micro-topologiques privilégient quant à eux la discrétisation complète de l'espace (et non plus simplement des frontières) offrant ainsi un support pour le calcul et le stockage de l'information. Au vu de cette analyse, il apparaît qu'un modèle volumique adapté à la restauration doit tenir à la fois de ces deux grands types de représentations. Lepage [2003] lie les deux approches pour répondre au problème de la génération de maillages en Géosciences : un modèle macro-cellulaire sert de base à la construction d'un maillage tétraédrique. Nous nous sommes basés sur ces travaux pour développer un modèle volumique spécifiquement orienté vers le problème de restauration.

3.3 Un objet pour les corps géologiques déformables

L'objet de cette section est de présenter une structure de donnée, le *Solid Model*, bien intégrée au logiciel *Gocad*, et répondant au cahier des charges précédemment établi. Il est composé d'un maillage tétraédrique muni d'information macro-topologique et nous l'extrayons à partir du *Soft Frame Model*, développé par Lepage [2003].

3.3.1 Génération de maillages tétraédriques conformes

Le *Soft Frame Model* est une structure macro-cellulaire représentant le modèle structural en terme de géométrie et en terme de contacts. Le maillage volumique est ensuite

généralisé à partir de cette structure en procédant à la tessellation successive des différents éléments topologiques du modèle (Figure 3.3) :

1. Les *lignes* correspondent aux arêtes des macro-cellules ; elles sont ré-échantillonnées de manière régulière (Figure 3.3 (d)).
2. Les *surfaces* correspondent aux facettes des macro-cellules ; leur triangulation est contrainte par l'échantillonnage des lignes : les triangles situés sur les bords des facettes doivent honorer les segments constituant les lignes (Figure 3.3 (e)).
3. Les *volumes* correspondent aux macro-cellules ; leur tétraédrisation est effectuée de manière conforme, c'est-à-dire honorant les triangles constituant les surfaces (Figure 3.3 (f)).

Un tel processus de génération permet d'associer à chaque micro-cellule les informations suivantes : la macro-cellule englobante (une couche ou un bloc de faille), et éventuellement un contact (surface de faille ou horizon). D'un point de vue informatique, le *Soft Frame Model* fait correspondre à chaque tétraèdre une région volumique et un quadruplet renseignant pour chaque face (1) l'identifiant de la surface en contact (si existante), (2) la polarité du contact (côté supérieur/inférieur de la faille ou de l'horizon).

3.3.2 Gestion et construction de régions logiques

Définition et construction

Au maillage tétraédrique est associé un ensemble de quatre régions logiques référencées par la dimension topologique de leurs éléments constitutifs (Figure 3.4) :

1. Les *régions 3-D* (Figure 3.4 (a)) sont composées de tétraèdres et correspondent à une macro-cellule définie dans le *Soft Frame Model*. Intuitivement, chaque région s'identifie à une couche ; dans le cas des structures faillées, une couche sera représentée par autant de régions 3-D que de blocs de failles. L'extraction des différentes régions 3-D découle directement des informations du *Soft Frame Model*.
2. Les *régions 2-D* (Figure 3.4 (b)) sont définies par un ensemble de faces de tétraèdres et représentent les différentes interfaces du modèle structural : un horizon, une faille ou une frontière du modèle. Chaque région est munie d'une polarité, permettant ainsi de distinguer notamment les différents blocs de failles. Ainsi à une faille F correspondent deux régions 2-D : les faces situées sur le bloc supérieur et celles situées sur le bloc inférieur.
3. Les *régions 1-D* (Figure 3.4 (c)) représentent les intersections et contacts entre les différentes interfaces (zones de branchement, lèvres de faille...) et sont de fait constituées par des arêtes de tétraèdres. La construction de ces régions est effectuée au moyen d'intersections logiques entre les différentes régions 2-D ; du point de vue informatique cela consiste à effectuer une simple intersection entre les ensembles d'arêtes des faces de tétraèdres des régions 2-D impliquées.

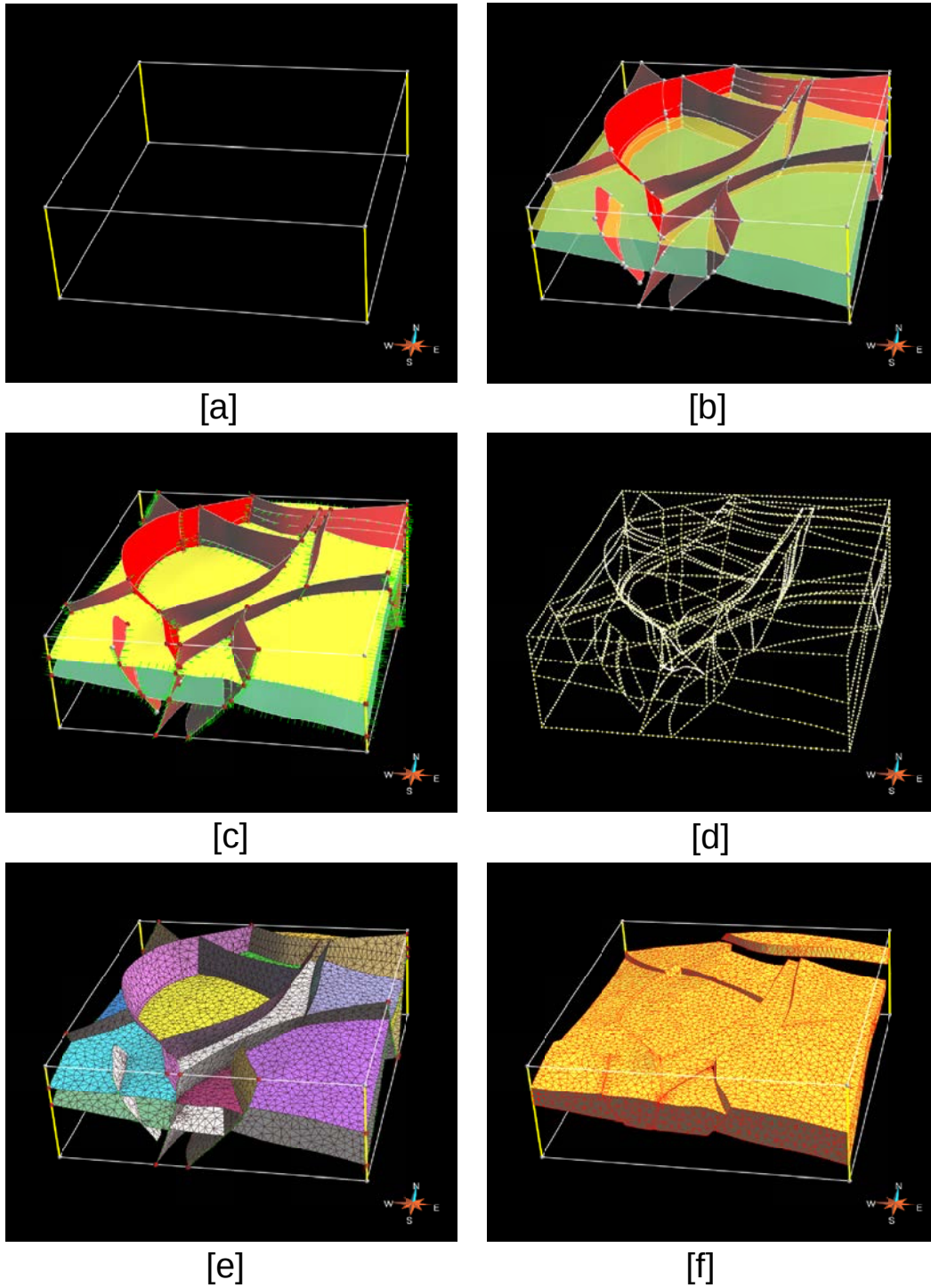


FIG. 3.3 – Processus de génération d'un maillage tétraédrique par l'utilisation du *Soft Frame Model* [Lepage, 2003] : [a] définition des frontières du domaine d'intérêt [b] interprétation structurale : géométrie des surfaces [c] interprétation structurale : définition des contacts [d] échantillonnage des contacts [e] triangulation conforme des surfaces [f] tétraédrisation conforme des macro-cellules

4. Les *régions 0-D* (Figure 3.4 (d)) sont définies par un unique noeud de tétraèdre, localisé à l'intersection entre plusieurs régions 1-D. Par exemple, la terminaison d'une lèvre de faille est une région 0-D. Leur construction repose sur le même principe d'intersection que pour les régions 1-D.

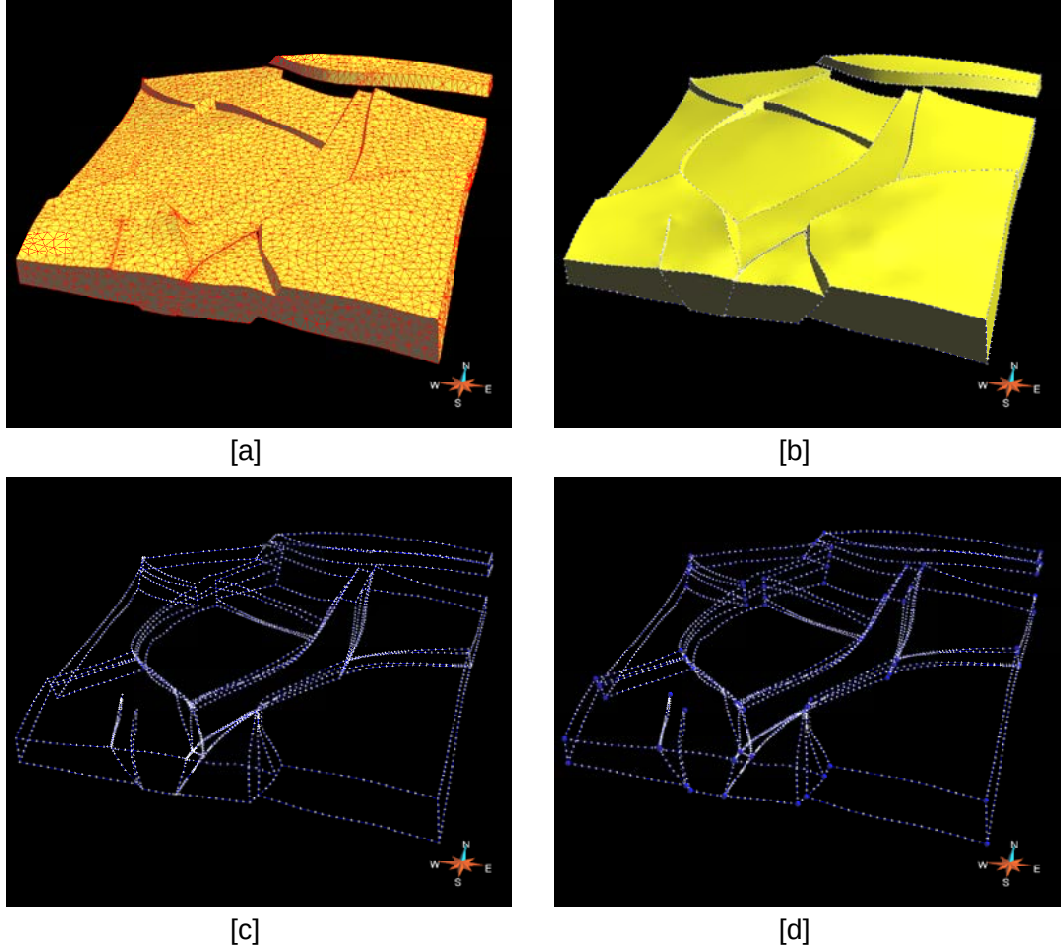


FIG. 3.4 – Génération des régions logiques : [a] modèle tétraédrique et régions 3-D [b] frontières et régions 2-D [c] contacts et régions 1-D [d] régions 0-D

Les avantages d'un tel procédé de construction tiennent à la fois de sa robustesse et de sa persistance. En effet, les opérations informatiques élémentaires sont uniquement des intersections logiques d'ensembles ; aucune heuristique géométrique n'est nécessaire. En outre, il est possible de reconstruire ces informations à tout moment en se basant uniquement sur les informations associées aux tétraèdres. Une telle caractéristique répond parfaitement à nos attentes en restauration séquentielle : la suppression de la couche supérieure est immédiatement suivie d'une reconstruction du modèle macro-topologique. La procédure est rapide, généralement de l'ordre de la seconde même pour des maillages volumineux (> 0.5 millions de tétraèdres).

Formalisme

Pour faciliter la présentation des concepts dans ce manuscrit comme leur manipulation informatique, nous introduisons la notion de *requête macro-topologique*. Si nous définissons un modèle structural comme un ensemble de failles F , de frontières du domaine d'étude B et d'horizons H , nous pouvons alors associer à chaque région une requête (Figure 3.5) :

1. Une région 2-D répond à une requête de type $q = i$, où i désigne un objet géologique (faille, horizon ou frontière). Pour référencer les blocs supérieur et inférieur d'une faille, nous reprenons les notations de Dunbar and Cook [2003] et Lepage *et al.* [2004]. Ainsi l'ensemble des faces de tétraèdres associé à une faille et localisé sur le bloc supérieur est identifié par la requête $q = F^+$; de la même manière $q = F^-$ désigne le bloc inférieur (Figure 3.6).
2. Une région 1-D répond à une requête de type $q = i \cap j$, où i et j désignent deux objets géologiques. Ainsi, à titre d'exemple, $q = H \cap F^+$ désigne la partie du modèle à l'intersection de l'horizon H et du bloc supérieur de la faille F , c'est-à-dire une lèvre de faille. La lèvre de faille opposée peut être aisément désignée par $q = H \cap F^-$ (Figure 3.6).
3. Une région 0-D répond à une requête de type $q = i \cap j \cap \dots$, c'est-à-dire l'intersection de k objets géologiques ($k > 2$). Par exemple, $q = H \cap F_1^+ \cap F_2^+$ désigne le point de branchement entre les blocs supérieurs des failles F_1 et F_2 au niveau de l'horizon H .

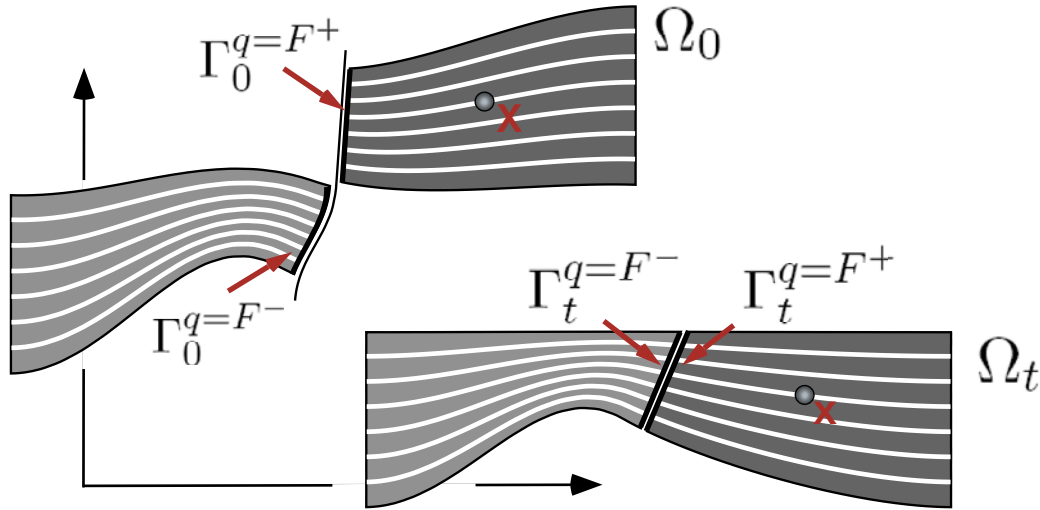


FIG. 3.5 – Configurations et formalisme des requêtes macro-topologiques

Du point de vue informatique, nous avons implanté des procédures permettant d'émettre une requête macro-topologique et de récupérer la région associée. Du point de vue utilisateur, nous avons implanté les éléments graphiques associés à une requête, permettant une bonne interaction utilisateur notamment pour la définition des conditions aux limites.

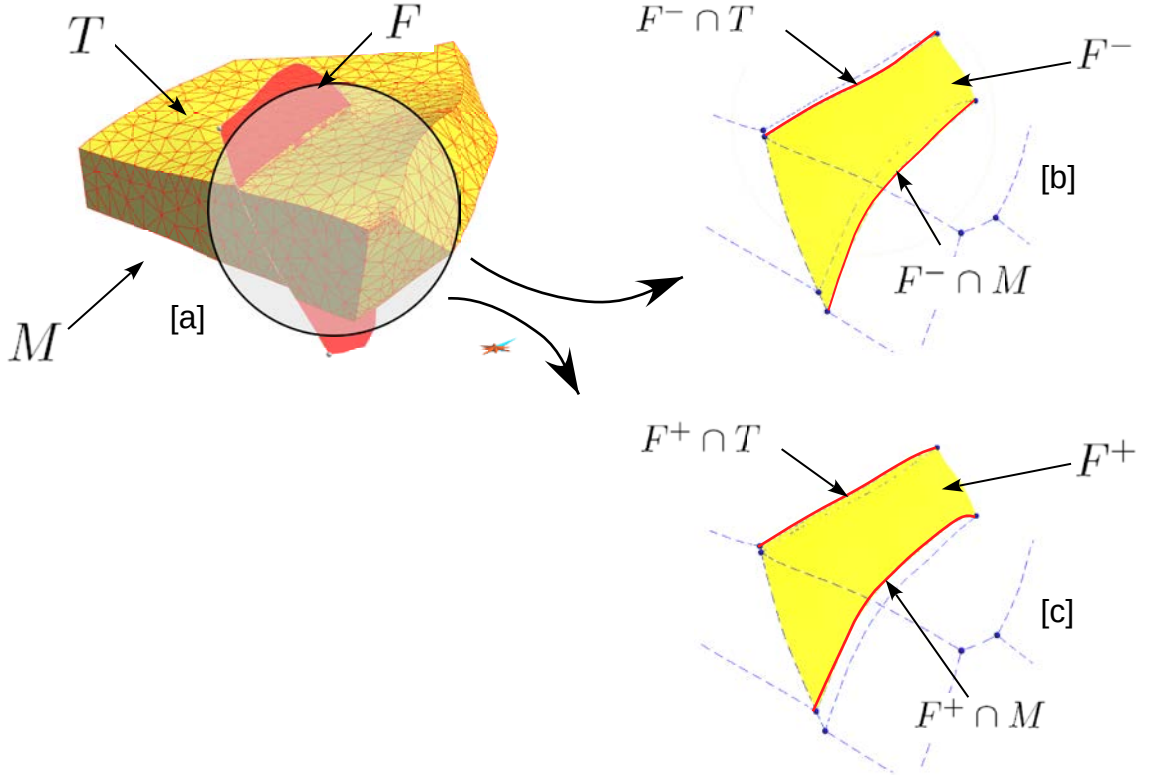


FIG. 3.6 – Faille et requêtes macro-topologiques associées (T : toit, M : mur, F : faille) : [a] bloc faillé [b] régions logiques 2-D et 1-D associées au bloc inférieur [c] régions logiques 2-D et 1-D associées au bloc supérieur

Le problème de restauration nous amène à considérer différentes configurations : la configuration présente Ω_0 et la configuration restaurée Ω_t au temps t . Pour désigner les différentes régions dans leurs différentes configurations, nous utilisons le formalisme suivant : si q est une requête quelconque, alors Γ_0^q et Γ_t^q sont respectivement les configurations présente et restaurée de la région répondant à la requête q .

3.3.3 Gestion du plongement dans l'espace sédimentaire

Définition

Une interprétation structurale n'est pas exhaustive et seuls quelques horizons clefs sont pointés sur la sismique et inclus dans le modèle structural. Comme le précise Mallet [2004] en décrivant le modèle géo-chronologique *Geochron*, une surface sédimentaire peut être vue comme une iso-surface d'une propriété *temps géologique* t . Nous proposons alors d'adjoindre au modèle volumique une propriété t pour approximer un *plongement continu dans l'espace sédimentaire* (Figure 3.7). Par plongement, nous entendons qu'en chaque point du domaine matériel est associée une valeur de la propriété temps géologique. Les

objectifs sont doubles : (1) l'extraction des iso-valeurs de t (Figure 3.7 (d)) dans la configuration restaurée permet potentiellement d'interpréter la géométrie restaurée de tout horizon (2) la propriété temps rend compte indirectement et en tout point du domaine de la géométrie des couches, paramètre généralement clef intervenant dans les mécanismes de déformation. En effet, si une fonction continue temps est définie sur tout le domaine, alors il est possible de calculer le gradient de t en chaque point, gradient qui peut être assimilé à la normale aux horizons $\mathbf{n}$. Le domaine est désormais muni de l'espace de plongement $(X, Y, Z, t, \mathbf{n})$.

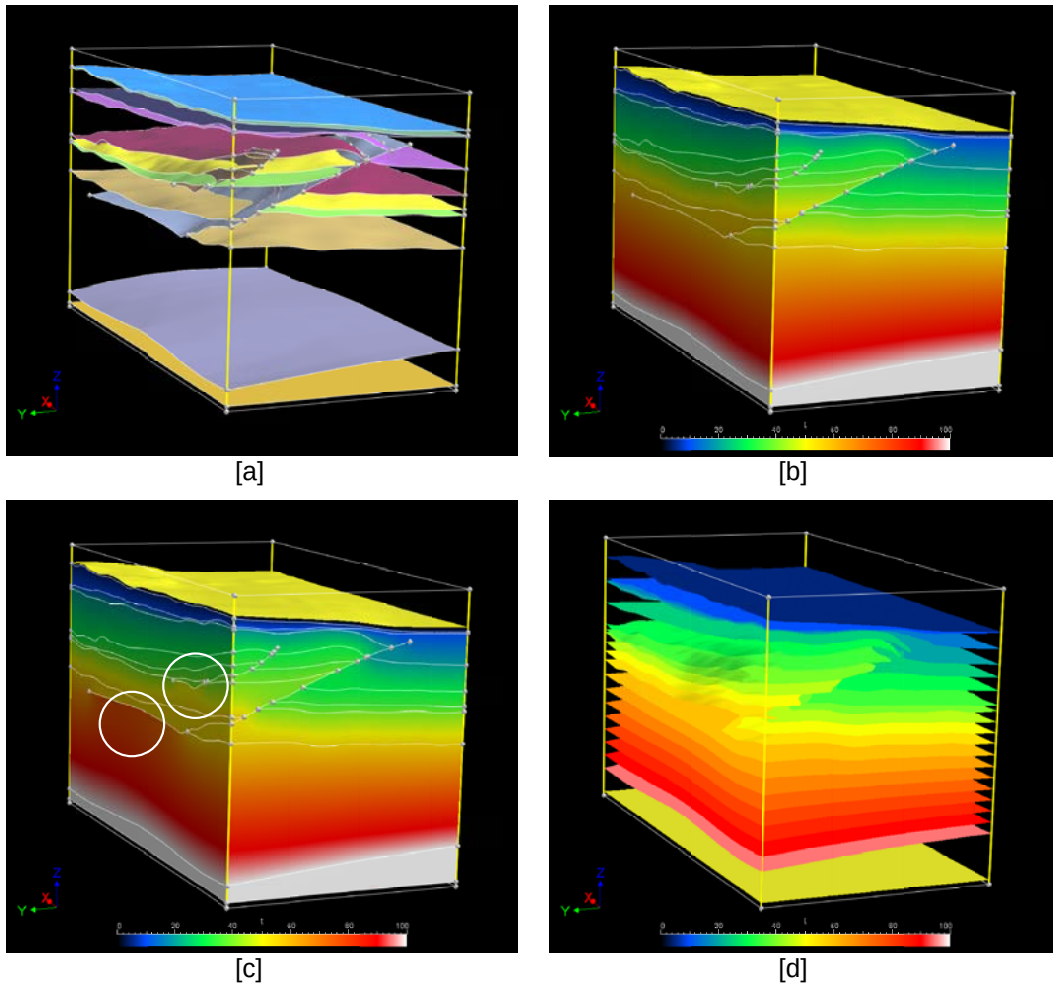


FIG. 3.7 – Calcul du temps et extraction d'horizons virtuels (modèle Harvard-Chevron) : [a] interprétation structurale : horizons datés [b] calcul du temps par la méthode DSI découplée [c] calcul du temps par l'analogie de thermique stationnaire : anomalie due aux failles [d] extraction d'horizons virtuels à partir d'iso-surfaces de la propriété temps

Construction

La propriété t est connue au niveau des horizons interprétés, l'objectif est de l'estimer sur le reste du volume (Figure 3.8). Dans le cadre du projet Geochron, Moyen [2005] propose d'utiliser l'interpolation lisse discrète pour calculer la propriété au sein du domaine : les valeurs aux horizons sont imposées et une variation continue et régulière de la propriété temps est assurée par l'utilisation d'une contrainte de gradient constant. Cette dernière contrainte spécifie de manière approximative (contrainte floue) que le gradient de t est localement constant d'un tétraèdre à un autre. Cependant une telle technique impose des contraintes trop fortes au regard des processus géologiques (vitesses de sédimentation régulières) et il n'est pas toujours possible de les accommoder : des valeurs aberrantes, comme des inversions du temps, peuvent être observées (Figure 3.8 (b)). Dans le cadre de notre modèle volumique, nous disposons d'informations supplémentaires : de multiples horizons, dont chacun est directement intégré au maillage par construction. Ce mode de construction permet donc d'individualiser les couches géologiques, ce qui nous permet de proposer deux alternatives de résolution du problème :

1. Nous proposons d'imposer un gradient constant par couche (Figures 3.7 (b) ; 3.8 (c)), il n'y a donc plus de continuité d'une couche à l'autre, ce qui correspond davantage aux processus de sédimentation. Pour ce faire, la constance du gradient est imposée à travers chaque face de tétraèdres, excepté sur celles correspondant à un horizon, obtenues aisément en émettant les requêtes macro-topologiques $q = H_i$.
2. Une deuxième solution proposée par Moyen [2005] mais non implantée, consiste en une analogie physique au problème de diffusion (Figures 3.7 (c) ; 3.8 (d)) : chaque horizon H_i est analogue à une plaque de température constante t_i , et le problème d'interpolation du temps correspond au problème de thermique stationnaire. L'équation fondamentale est $\nabla^2 t = 0$ (Laplacien de la température nul en tout point du domaine) et des conditions aux limites de type Dirichlet imposent la température pour chaque horizon. Le caractère générique de notre implantation des éléments finis nous a permis de résoudre facilement ce problème. L'avantage est essentiellement calculatoire : le système est mieux conditionné et résolu plus rapidement (l'interpolation lisse discrète est une formulation par pénalités, menant à des systèmes moins bien conditionnés). Si cette méthode présente l'avantage d'être particulièrement rapide, elle n'est toutefois pas toujours fiable comme dans le cas de présence de failles inverses qui engendre des anomalies (Figure 3.7 (c)).

3.4 Conclusions

Le problème en restauration nécessite un maillage volumique muni de méta-informations de nature géologique. Dans la littérature, deux grandes classes de modèles volumiques s'opposent : les modèles à base micro-topologique ou maillages et les modèles à base

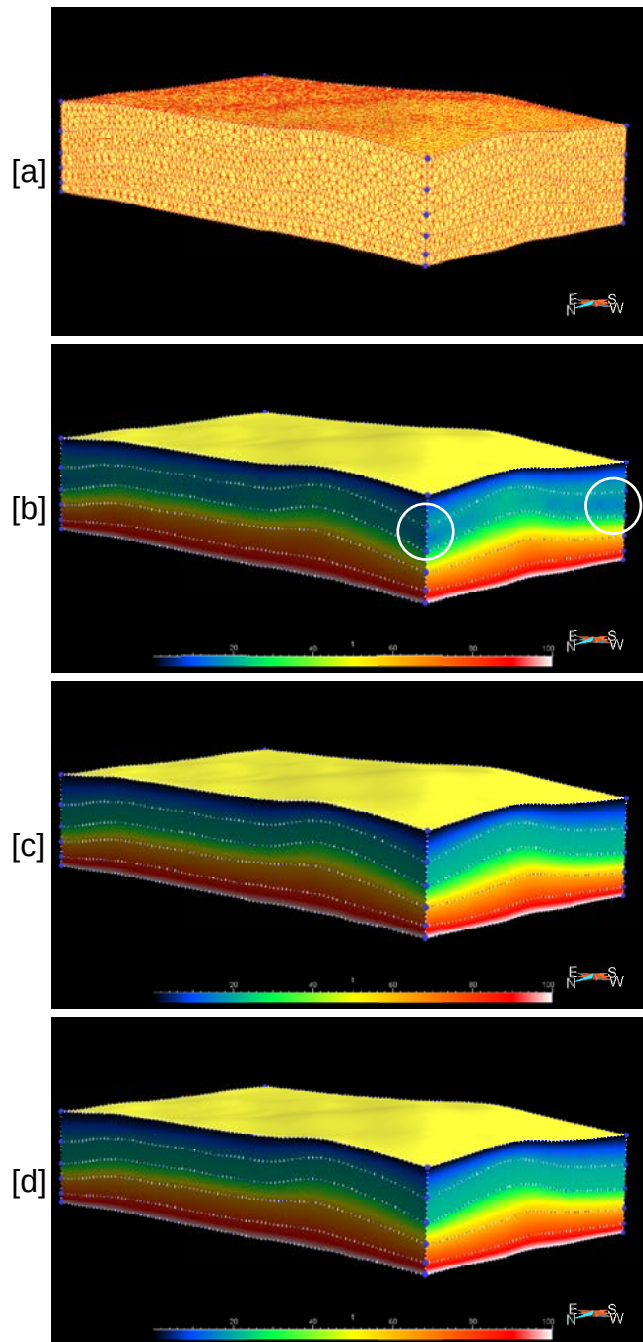


FIG. 3.8 – Les différentes méthodes de calcul de la propriété temps au sein d’un maillage volumique : [a] maillage tétraédrique initial [b] calcul du temps par la méthode DSI à gradients constants et anomalies associées [c] calcul du temps par la méthode DSI avec découplage [d] calcul du temps par l’analogie de thermique stationnaire

macro-topologique. Chacun d'eux apportent un élément de réponse à nos besoins, or il n'existe pas actuellement une telle structure hybride. Lepage [2003] amorce toutefois une première étape dans cette direction : la génération de ses maillages tétraédriques se base sur un modèle macro-cellulaire décrivant le modèle structural. Néanmoins ces travaux ont un objectif différent et les informations macro-topologiques ne sont pas agencées et optimisées pour (1) définir et construire des régions logiques (2) effectuer des modifications topologiques. Notre contribution est un objet **Gocad**, le *Solid Model*, offrant une interface et un formalisme adaptés au problème de restauration. En particulier aux chapitres 4 et 5, nous verrons comment ces informations sont utilisées pour la définition des conditions aux limites et celle des relations entre les blocs de failles respectivement.

Chapitre 4

Restauration et déformation continue

Sommaire

4.1	Principes et algorithmes généraux	64
4.2	Méthode cinématique de restauration	66
4.3	Méthode mécanique de restauration	74
4.4	Résolution par approche pseudo-transitoire	80
4.5	Résolution par approche statique non linéaire	88
4.6	Conclusions	96

La géométrie actuelle est l'expression de deux processus de déformation : les discontinuités topologiques reflètent des processus discontinus alors que la forme générale est essentiellement l'expression des processus continus. Les méthodologies de restauration reposent fondamentalement sur cette distinction et il est fréquent de les traiter séparément du point de vue conceptuel (les mécanismes sont différents) et algorithmique (les règles associées sont différentes). L'objectif de ce chapitre est de présenter le traitement algorithmique de la déformation continue ; nous aborderons le traitement des failles dans le chapitre suivant. Quelque soit la technique adoptée, les algorithmes de restauration et de restauration séquentielle reposent sur un tronc commun que nous présentons dans une première section. Nous développons et évaluons ensuite deux approches différentes : (1) une *méthode cinématique* basée sur des règles géométriques d'évolution, le cadre de résolution est l'interpolation lisse discrète (2) une *méthode mécanique* basée sur des règles mécaniques et dont le cadre numérique est la méthode des éléments finis.

4.1 Principes et algorithmes généraux

Comme évoqué au cours des chapitres 2 et 3, nous considérons les structures géologiques comme un milieu continu discrétisé par un maillage tétraédrique muni de métainformations géologiques. Quelque soit la méthode employée, les étapes élémentaires sont identiques :

1. *Sélection des conditions aux limites* Les conditions aux limites permettent de contraindre la cinématique de la restauration en fixant un ou plusieurs points de référence dans l'espace. Une des contraintes fondamentales reflète l'hypothèse couramment formulée sur la géométrie des terrains lors de leur dépôt : le toit du système doit être horizontal dans la configuration restaurée.
2. *Calcul des vecteurs de restauration* Le champ des vecteurs de restauration est calculé pour tout noeud de la structure $\mathcal{B}$. Il doit honorer les conditions aux limites et minimiser une fonction objective globale. L'introduction de cette fonction permet d'assurer un positionnement cohérent dans la configuration restaurée des noeuds non contraints par des conditions aux limites ; la nature de cette fonction détermine le comportement des terrains lors de la restauration. Si cette fonction dérive de principes géométriques, nous parlons de méthode cinématique. Si elle dérive de principes mécaniques, nous parlons de méthode mécanique.
3. *Application des vecteurs de restauration* A l'issue de l'opération précédente, nous pouvons associer un vecteur à chaque noeud et l'ajouter à la géométrie courante pour obtenir la configuration restaurée. L'horizon de référence est horizontal et le reste de la structure occupe le volume dicté par les autres conditions et la fonction objective.
4. *Suppression de la couche supérieure* Pour opérer une restauration séquentielle, les mailles appartenant à la couche supérieure sont supprimées de $\mathcal{B}$ et les ajustements micro- et macro-topologiques sont réalisés avant de procéder à l'étape de restauration suivante.

Les conditions aux limites

En modélisation génétique (*forward modeling*), l'évolution du système est notamment déterminée par deux grandes classes de conditions : (1) les conditions de Dirichlet imposant partiellement ou totalement le déplacement sur une frontière (2) les conditions de Neumann imposant une force surfacique sur une frontière. En restauration, nous pensons que l'évolution de la géométrie doit être essentiellement contrainte au moyen de conditions en déplacement : fondamentalement la géométrie actuelle est beaucoup moins incertaine que ne le sont les forces en jeu au cours de l'évolution de la structure. Intéressons-nous par exemple aux conditions à appliquer au toit de la structure pour qu'il soit effectivement horizontal dans la configuration restaurée. Peut-on espérer imposer cette condition

au moyen de forces connues a priori et appliquées aux frontières du domaine ? Autrement dit, peut-on reproduire de manière inverse le travail mécanique nécessaire qui a permis de créer la structure observable actuellement ? Le travail mécanique est le produit de la force appliquée par la distance parcourue ; ces deux informations sont difficilement appréciables. La distance parcourue, c'est-à-dire le taux de raccourcissement ou d'extension, est typiquement un résultat de la restauration et non une donnée d'entrée. Si nous considérons toutefois que la restauration volumique est un outil avancé réalisé en fin d'étude, la restauration en coupes peut être un outil complémentaire et aider à contraindre ce paramètre. Néanmoins, l'obstacle majeur reste alors l'évaluation des forces en jeu. S'il est possible de déterminer l'état de contrainte présent en analysant forme et fracturation des puits [Fairhurst, 2003], il est aujourd'hui impossible d'évaluer ces paramètres et leur évolution dans le temps en fonction simplement de la déformation observée actuellement. L'analyse régionale des failles actives donne des informations qualitatives comme l'orientation et le ratio des magnitudes [Bott, 1959; Angelier, 1979], mais le calcul des magnitudes absolues reste une tâche difficile et se base sur des données exhaustives de rejets et de stries de failles [Angelier, 1989] non accessibles dans le contexte d'exploration pétrolière.

A chaque étape de restauration sont définis un horizon de référence H_r (généralement le toit) et une altitude de référence z_r : la configuration restaurée de H_r est horizontale et d'altitude z_r . Nous définissons trois conditions aux limites indispensables pour assurer l'existence et l'unicité de la solution :

1. *Horizon de référence* Puisque l'altitude finale de chaque noeud de H_r est z_r , nous prescrivons la composante verticale du vecteur de restauration : $\mathbf{u}_z = z_r - Z$. Les autres composantes du vecteur ne sont pas contraintes et sont libres d'évoluer au gré des autres conditions et afin de minimiser la fonction objective choisie. Nous n'imposons donc pas un dépliage de l'horizon de référence de manière indépendante du reste du volume comme le proposent Samson [1996] puis Massot [2002]. La géométrie finale en X et en Y de l'horizon de référence fait partie du processus d'optimisation globale de manière similaire à Thibaut [1994] et Léger *et al.* [1997].
2. *Point de référence* Le problème n'est pas défini car il est nécessaire de préciser la position de la configuration restaurée de H_r dans le plan horizontal. Au moins un noeud doit avoir son vecteur de restauration parfaitement déterminé, il appartient nécessairement à l'horizon de référence pour éviter d'imposer une déformation verticale a priori entre les noeuds de H_r et le point de référence. Par souci de simplicité, nous fixons généralement les composantes en X et en Y de son vecteur de restauration à 0. La position finale est donc définie à une translation près.
3. *Direction de référence* Enfin, pour éviter les mouvement de rotation rigide autour de l'axe vertical, il est nécessaire de prescrire une direction : les points matériels situés sur une ligne imaginaire passant par le point de référence et colinéaire à la direction de référence ne peuvent se déplacer que le long de cette même ligne. Dans la pratique, cette condition peut être appliquée en prescrivant la composante en X

ou en Y d'un autre noeud ou groupe de noeuds. La position finale est donc définie à une rotation près et il appartient au géologue de choisir une direction cohérente.

Les autres contraintes en déplacement servent à imposer une certaine cinématique lors de la restauration. En étendant les concepts utilisés en restauration en coupes [Groshong, 1999], nous introduisons trois différentes conditions :

1. Un *pin point* est un noeud dont une ou plusieurs composantes du vecteur de restauration sont fixées. Elles permettent notamment de définir le point de référence et la direction de référence.
2. Une *pin line* est un ensemble de noeuds alignés et situés à l'intersection entre deux éléments surfaciques (par exemple $S \cap W$, où S et W sont deux frontières du domaine) et dont les composantes du vecteur de restauration sont partiellement fixées ou liées par une relation analytique. Considérons un domaine parallélépipédique constitué de quatre frontières orientées suivant les axes (W , E , N et S). Contraindre la restauration de $S \cap W$ par une *pin line* revient à limiter le déplacement des noeuds composants $S \cap W$ sur un axe vertical. Les composantes en X et en Y de leur vecteur de restauration sont nulles. A la différence du concept classique de *pin line* pour les restaurations en coupes, les noeuds de la ligne n'ont pas un déplacement strictement nul car ils peuvent évoluer librement suivant l'axe vertical. Si les frontières du domaine ne sont pas alignées avec les axes, une relation analytique liant les différentes composantes u_x , u_y et u_z du vecteur de restauration $\mathbf{u}$ est nécessaire pour imposer la même contrainte.
3. Un *pin wall* fonctionne suivant le même principe mais pour les noeuds alignés suivant un plan. Si nous considérons les mêmes frontières que précédemment, nous pouvons forcer les noeuds de W à rester sur le même plan lors de la restauration. Une telle condition aux limites peut notamment être employée pour forcer la direction de transport du matériel géologique lors de la restauration.

4.2 Méthode cinématique de restauration

La plupart des restaurations en coupes et en cartes se basent sur des critères géométriques. Nous proposons dans cette section d'étendre les concepts fondateurs en trois dimensions en se plaçant sous l'hypothèse d'un milieu continu (Chapitre 2) mais en travaillant cette fois sur les maillages tétraédriques (Chapitre 3). Les travaux présentés dans cette section sont le travail commun de Jean-Laurent Mallet et de l'auteur [Mallet, 2003; Muron and Mallet, 2003].

4.2.1 Principe

L'objectif de la restauration géométrique est de calculer un champ de vecteurs honorant les conditions aux limites décrites précédemment et minimisant une fonction objective à base géométrique assurant la *conservation du volume* de la structure et la *minimisation de la déformation* engendrée par la restauration.

1. La conservation de la masse découle du principe universel de conservation de la matière : le domaine matériel $\mathcal{B}$ conserve sa masse au cours de la restauration. Nous introduisons une simplification supplémentaire en ignorant les phénomènes induisant des changements de densité comme la compaction et les pertes de matière comme la pression-solution ou les migrations de fluides. La conservation de la masse, reflétée par l'équation de continuité (Equation 2.6), se ramène alors à une simple conservation du volume. Ce principe est par ailleurs une extension naturelle du principe de conservation des aires lors des restaurations en coupe basées sur l'aire [Mitra and Namson, 1989; Groshong and Epard, 1996].
2. La seule équation de continuité a une infinité de solution, aussi nous ajoutons, comme suggéré par Mallet [2002] et Massot [2002], la minimisation de la déformation à la fonction objective. La minimisation est un principe plus général et nous le dérivons pour plusieurs modes de déformation. Enfin, comme le fait remarquer Mallet [2002], elle correspond également à un principe empirique largement appliqué dans les sciences et connu sous le nom de *principe de Pierre Louis Moreau de Maupertuis*.

Du point de vue fonctionnel, nous définissons pour chaque volume élémentaire T , correspondant à un tétraèdre, et pour un champ vectoriel de restauration $\mathbf{u}$, une fonction objective élémentaire Ψ_e à deux composantes : le *degré élémentaire de violation de conservation du volume* Ψ_e^v et le *degré élémentaire de violation de minimisation de la déformation* Ψ_e^d . Leurs natures seront explicitées dans les sections suivantes. Les contributions élémentaires sont sommées sur le domaine matériel, c'est-à-dire l'union des tétraèdres, et pondérées par les volumes élémentaires pour obtenir la fonction objective globale Ψ (Equation 4.1).

$$\Psi_e(\mathbf{u}, T) = \Psi_e^v(\mathbf{u}, T) + \Psi_e^d(\mathbf{u}, T) \quad (4.1)$$

$$\Psi(\mathbf{e}) = \sum_T \Psi_e(\mathbf{u}, T) \cdot |T|$$

Méthode numérique et algorithme

La résolution de ce problème est effectuée grâce à l'interpolation lisse discrète (DSI) présentée au chapitre 2, ce choix étant motivé à la fois par la flexibilité mathématique

et la flexibilité d'implantation de cette méthode. La fonction élémentaire est légèrement modifiée pour respecter les contraintes numériques imposées par l'interpolateur : un terme de régularisation, appelé rugosité, est ajouté afin d'assurer l'existence et l'unicité de la solution [Mallet, 2002]. Dans la pratique, l'influence de ce terme est néanmoins diminuée grâce au pondérateur $\phi \omega$ (Equation 4.2), les fonctions Ψ_e^v et Ψ_e^d assurant déjà une bonne régularisation du système.

$$\Psi_e(\mathbf{u}, T) = \Psi_e^r(\mathbf{u}, T) + \phi \omega \left(\Psi_e^v(\mathbf{u}, T) + \Psi_e^d(\mathbf{u}, T) \right) \quad (4.2)$$

La technologie DSI offre un formalisme mathématique dans lequel chaque terme élémentaire est appelé une contrainte. L'objectif est d'interpoler une propriété, vectorielle dans notre cas, de manière à ce qu'elle honore les *contraintes dures* (dérivées des conditions aux limites) strictement et les *contraintes floues* (dérivées des fonctions objectives) au sens des moindres carrés. Classiquement, le problème DSI est résolu de manière locale au moyen d'une procédure itérative de Gauss-Seidel [Mallet, 2002]. Massot [2002] souligne la lenteur d'une telle technique pour les systèmes importants, l'algorithme ne convergeant que trop lentement. Nous avons également constaté au moyen de cas synthétiques (compression d'un cylindre et dépliage d'une barre fléchie) que la précision est faible et l'interprétons par les approximations effectuées lors de l'implantation de la procédure locale. Pour ces raisons, nous proposons d'utiliser une approche globale de résolution du problème DSI, appelée formulation matricielle, dans laquelle le système linéaire est explicitement construit et résolu. L'algorithme est le suivant :

1. *Prise en compte des fonctions objectives* A chaque tétraèdre T sont associées deux contraintes floues : une contrainte de conservation du volume C_e^v et une contrainte de minimisation de la déformation C_e^d permettant de minimiser respectivement Ψ_e^v et Ψ_e^d . Les termes de rugosité ne sont alors plus calculables sur une base nodale et nous itérons sur l'ensemble des noeuds pour les construire.
2. *Prise en compte des conditions aux limites* A chaque noeud de l'horizon de référence est appliquée une contrainte dure spécifiant que la composante en z est connue et égale à $z_r - Z$. Une contrainte dure prescrivant un déplacement horizontal nul est appliquée au noeud de référence et une contrainte équivalente permet d'imposer une direction de référence.
3. *Interpolation* Les contraintes élémentaires sont sommées sur le domaine pour construire un système aux moindres carrés, qui est ensuite corrigé pour la prise en compte des contraintes dures. Le système linéaire est résolu et les vecteurs résultants sont attribués à leur noeud respectif.

4.2.2 Contraintes de conservation du volume

La conservation du volume en mécanique des milieux continus est dérivée de l'équation de continuité pour un matériel incompressible : la divergence du champ de vitesses est nulle en tout point. L'opposé du champ de vecteurs de restauration $-\mathbf{u}$ peut être vu comme une approximation du premier ordre du champ de vitesses [Mallet, 2002] au moyen d'une approximation de Taylor. En conséquence la contrainte de conservation du volume est exprimée ainsi : la divergence du champ de vecteurs de restauration est nulle en tout point du domaine (Equation 4.3). La fonction objective élémentaire associée est fonction de la divergence du vecteur de restauration (Equation 4.4), elle est munie d'un pondérateur ω^v pour spécifier sa contribution à la fonction objective globale. D'après la définition du tenseur des petites déformations ϵ (Equation 2.3), $\Psi_e^v(\mathbf{u}, T)$ est également fonction du carré de la trace du tenseur ϵ .

$$C_e^v : \quad \nabla_T \cdot \mathbf{u} = \sum_i \frac{\partial u_i}{\partial i} \Big|_T \approx 0 \quad i \in \{X, Y, Z\} \quad (4.3)$$

$$\Psi_e^v(\mathbf{u}, T) = \omega^v(T) \left\{ \nabla_T \cdot \mathbf{u} \right\}^2 = \omega^v(T) \left\{ \sum_i \epsilon_{ii}(\mathbf{u}, T) \right\}^2 \quad i \in \{X, Y, Z\} \quad (4.4)$$

Comme évoqué au chapitre 2, pour être utilisable par DSI, cette équation doit être mise sous forme canonique exprimée sur un tétraèdre T défini par ses sommets I , $I \in \{\alpha_1, \dots, \alpha_4\}$. En considérant un tétraèdre linéaire, nous pouvons exprimer l'équation précédente en fonction des composantes du vecteur gradient (Equation 4.5). Les coefficients sont donnés par l'Equation 4.6.

$$C_e^v : \quad \sum_I \sum_i N_{I,i} u_i(I) \approx 0 \quad I \in \{\alpha_1, \dots, \alpha_4\}, i \in \{X, Y, Z\} \quad (4.5)$$

$$C_e^v : \quad \left| \begin{array}{lcl} A_c^i(I) & = & N_{I,i} \\ b_c & = & 0 \end{array} \right. \quad I \in \{\alpha_1, \dots, \alpha_4\}, i \in \{X, Y, Z\} \quad (4.6)$$

4.2.3 Contraintes de minimisation de la déformation

Comme évoqué au chapitre 1, la déformation ductile des structures géologiques suit plusieurs modes (Figure 4.1). En conséquence, la minimisation de la déformation peut s'entendre de plusieurs manières et nous proposons ici de définir les fonctions objectives correspondantes.

Minimisation isotrope

La minimisation isotrope de la déformation se base sur une réaction équivalente dans toutes les directions aux sollicitations mécaniques. Nous cherchons alors à minimiser l'énergie de déformation $\Psi_e^d(\mathbf{u}, T)$ de chaque tétraèdre T lors du déplacement $\mathbf{u}$. Pour plus de flexibilité nous pondérons les différentes composantes au moyen des coefficients $\omega_{ij}^d(T)$ (Equation 4.7). Pour transposer le problème en terme de contrainte DSI, nous introduisons un jeu de six contraintes sur les différentes composantes du tenseur des petites déformations (Equation 4.8 et 4.13) dont les coefficients figurent dans l'équation 4.10.

$$\Psi_e^d(\mathbf{u}, T) = \sum_i \sum_j \left\{ \omega_{ij}^d(T) \epsilon_{ij}^2(\mathbf{u}, T) \right\} \quad i, j \in \{X, Y, Z\} \quad (4.7)$$

$$C_e^d : \quad \epsilon_{ij} \Big|_T = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial u_j}{\partial i} \Big|_T + \frac{\partial u_i}{\partial j} \Big|_T \right\} \approx 0 \quad \forall j \geq i \in \{X, Y, Z\} \quad (4.8)$$

$$C_e^d : \quad \sum_I \left\{ N_{I,i} u_j(I) + N_{I,j} u_i(I) \right\} \approx 0 \quad I \in \{\alpha_1, \dots, \alpha_4\}, \forall j \geq i \in \{X, Y, Z\} \quad (4.9)$$

$$C_e^d : \quad \bigcup_{i,j \in \{X,Y,Z\}} C_{e,ij}^d \quad \text{et} \quad C_{e,ij}^d \quad \left| \begin{array}{lll} A_c^i(I) & = & N_{I,j} \quad I \in \{\alpha_1, \dots, \alpha_4\} \\ A_c^j(I) & = & N_{I,i} \quad I \in \{\alpha_1, \dots, \alpha_4\} \\ b_c & = & 0 \end{array} \right. \quad (4.10)$$

Minimisation anisotrope cisailante homogène et hétérogène

Le modèle cinématique de déformation cisailante opère un déplacement des particules dans une direction donnée appelée *direction de cisaillement*, caractérisée par un vecteur unitaire $\mathbf{W}$. Une des conséquences géométriques est que les longueurs sont préservées le long de $\mathbf{W}$. Or le tenseur des déformations permet de caractériser les variations relatives de longueurs $\Delta(\mathbf{W})$ dans la direction $\mathbf{W}$. Minimiser la déformation en contexte de déformation cisailante revient à minimiser $\Delta(\mathbf{W})$. La direction $\mathbf{W}$ peut être constante ou variable au sein du domaine, définissant respectivement le cisaillement homogène et hétérogène; nous notons $\mathbf{W}(T)$ la direction choisie au tétraèdre T .

$$C_e^d : \quad \Delta(\mathbf{W}_T) = \mathbf{W}^T(T) \cdot \epsilon(\mathbf{u}, T) \cdot \mathbf{W}(T) \approx 0 \quad (4.11)$$

La fonction objective devient alors :

$$\Psi_e^d(\mathbf{u}, T) = \omega^d(T) \left\{ \mathbf{W}^T(T) \cdot \epsilon(\mathbf{u}, T) \cdot \mathbf{W}(T) \right\}^2 \quad (4.12)$$

$$C_e^d : \sum_I \sum_i \sum_j \left\{ W_i(T) W_j(T) N_{I,j} u_i(I) \right\} \approx 0 \quad I \in \{\alpha_1, \dots, \alpha_4\}, i \in \{X, Y, Z\} \quad (4.13)$$

$$C_e^d : \begin{cases} A_c^i(I) &= \sum_j W_i(T) W_j(T) N_{I,j} & I \in \{\alpha_1, \dots, \alpha_4\}, i \in \{X, Y, Z\} \\ b_c &= 0 \end{cases} \quad (4.14)$$

Minimisation anisotrope par flexion-écoulement

Dans le mode de déformation par flexion-écoulement, chaque horizon conserve autant que possible ses propriétés métriques : les longueurs, les angles et les aires sont préservés au cours du plissement. Pour honorer ces caractéristiques géométriques, nous proposons de manière intuitive de procéder ainsi :

1. En chaque point du domaine, nous pouvons associer un triplet de directions (caractérisé par des vecteurs unitaires $\mathbf{W}^k$, $k \in \{1, 2, 3\}$) non colinéaires et localement tangentes à l'horizon passant par ce point.
2. Considérons maintenant trois segments unitaires dont les directions respectives sont données par les $\mathbf{W}^k$: si chacun conserve sa longueur pendant la restauration alors nous pouvons dire que localement les propriétés métriques sont conservées.

En conséquence, nous définissons la contrainte de minimisation de la déformation comme un ensemble de trois contraintes imposant la préservation des longueurs (Equation 4.11) dans trois directions non colinéaires et tangentes localement aux horizons $\mathbf{W}^k(T)$, $k \in \{1, 2, 3\}$. Les développements numériques sont donc identiques au cas précédent, nous ne les présentons pas ici. La principale difficulté tient de l'évaluation en tout point du domaine des trois directions.

Evaluation des $\mathbf{W}^k(T)$ Un vecteur est dit tangent localement aux horizons s'il est orthogonal à la normale aux horizons. Le problème revient donc à évaluer cette normale pour chaque tétraèdre, or elle n'est bien évidemment pas définie pour des volumes mais seulement pour des surfaces. L'objet présenté au chapitre 3, le *Solid Model*, est muni d'un plongement dans l'espace sédimentaire : en tout point du domaine nous pouvons donc définir la normale aux horizons comme le gradient du temps géologique.

La figure 4.1 illustre ces trois types de déformations dans le cas d'un pli cylindrique et la figure 4.2 présente les champs de vecteurs de restauration associés (ils sont magnifiés pour

faciliter la visibilité). La configuration restaurée présente dans tous les cas la géométrie attendue, la base est parfaitement horizontale, et les extrémités diffèrent en conformité avec le mode de déformation.

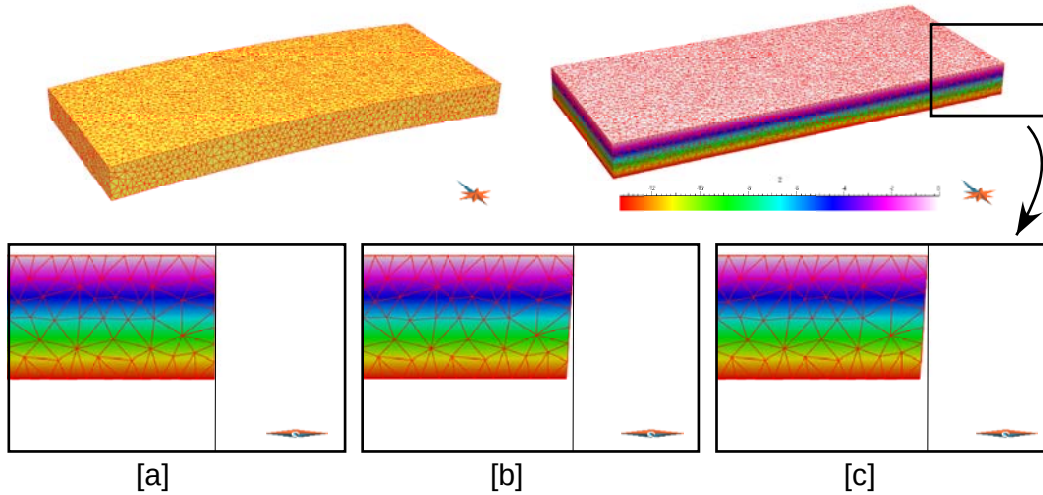


FIG. 4.1 – Restauration d'un pli cylindrique par la méthode DSI : les différents modes de déformation (cas des petites déformations) : [a] déformation isotrope [b] déformation par cisaillement vertical [c] déformation par flexion-écoulement

4.2.4 Bilan

Cette approche géométrique est historiquement la première que nous ayons développée, en s'inspirant des critères géométriques existants pour les restaurations en sections et en cartes. Elle est une extension directe des travaux de Massot [2002] et diffère néanmoins par les points suivants :

1. Le formalisme est différent et plus orienté vers un problème d'optimisation au sens large, nous rejoignons ici le formalisme adopté pour la méthode 2.5D de Thibaut [1994] et Léger *et al.* [1997]. Nous avons explicité les fonctions objectives et ceci prendra tout son intérêt dans les sections suivantes où le parallèle sera fait avec les approches plus mécaniques. Enfin, le principe de minimisation de la déformation est pris dans un sens plus large de manière à introduire plusieurs styles de déformations, et ainsi d'être plus à même de représenter la cinématique de la déformation ductile.
2. Du point de vue représentatif, l'utilisation des maillages tétraédriques nous permet de représenter fidèlement le modèle structural initial sans les effets d'*aliasing* inhérents aux discrétisations par maillages structurés réguliers. Le modèle macro-topologique nous permet d'envisager le dépliage séquentiel, chose impossible auparavant.

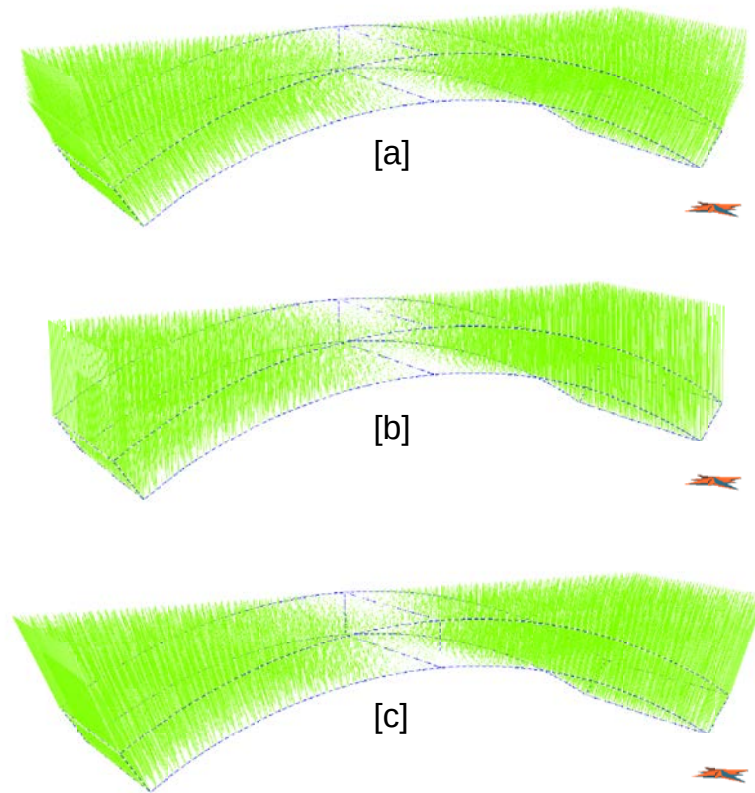


FIG. 4.2 – Champ de vecteurs magnifiés (méthode DSI) pour les trois modes de déformation : [a] isotrope [b] cisaillement vertical [c] flexion-écoulement

3. Enfin, du point de vue numérique nous avons mis en place une nouvelle implantation générique de DSI sous sa formulation globale qui présente une grande rapidité dans la résolution et une grande souplesse d'utilisation. L'ensemble des contraintes présenté ne prenant alors que quelques dizaines de lignes de code spécifique.

Néanmoins, l'approche purement géométrique nous a menés à certains écueils fondamentaux. Le principe de minimisation isotrope de la déformation peut être testé qualitativement face à des cas synthétiques (par exemple, compression uniaxiale d'un cylindre) mais les principes de minimisation anisotrope restent difficiles à évaluer. Du point de vue quantitatif, l'influence des différents pondérateurs est difficilement appréciable au regard des informations disponibles en géologie. Enfin, seuls les comportements géométriquement linéaires peuvent être considérés par cette méthodologie et nous sommes donc limités par l'hypothèse des petites déformations, là où bien souvent la géométrie suggère des grandes déformations.

4.3 Méthode mécanique de restauration

L'objectif de cette section est de proposer une approche différente permettant de s'affranchir des limitations précédentes : elle doit permettre de prendre en compte les grandes déformations et doit reposer sur des paramètres clairement identifiables et compréhensibles en termes géologiques. L'idée initiale est de considérer la restauration comme un problème mécanique ; en conséquence, le passage vers la configuration restaurée doit conserver les moments du domaine géologique considéré. Ces grands principes ont été énoncés au chapitre 2, nous nous attachons ici à développer la résolution numérique de ce problème au moyen de la méthode des éléments finis.

4.3.1 Les grandes déformations

Travailler dans le cadre des grandes déformations a des conséquences géométriques importantes : un segment, une facette ou un volume élémentaire considéré dans sa configuration initiale peut avoir une forme très différente dans la configuration finale après transformation. C'est notamment pour cette raison que nous avons introduit au chapitre 2 les différents tenseurs des contraintes (Cauchy, Piola-Kirchoff...) : la contrainte s'exprime différemment dans la configuration Ω_0 et Ω_t . La conséquence numérique est le choix d'un système de référence pour exprimer les grandeurs et leurs dérivées partielles. Les discrétisations basées sur des maillages lagrangiens (c'est-à-dire en formulation lagrangienne) sont classiquement divisées en *formulation lagrangienne totale* et *formulation lagrangienne actualisée*. Dans cette dernière, les dérivées partielles sont considérées respectivement aux coordonnées spatiales $\mathbf{x}$, et les équations sont intégrées sur le domaine géométrique Ω_t . Dans la formulation lagrangienne totale, les dérivées partielles sont considérées respectivement aux coordonnées matérielles $\mathbf{X}$, et les équations sont intégrées sur le domaine géométrique Ω_0 . Dans nos travaux, nous avons choisi cette dernière formulation, classiquement utilisée en mécanique des solides déformables.

4.3.2 Principe de la méthode

La discrétisation de l'équation locale d'équilibre des moments (Equation 2.7) est réalisée au moyen de la méthode des éléments finis. Nous l'avons étudiée au chapitre 2 par l'*approche des résidus pondérés* ; étant donnée la nature du problème nous adoptons ici une perspective plus physique connue sous le nom d'*approche variationnelle*. D'une manière très générale, la solution $\hat{\mathbf{u}}$ d'une équation différentielle $\mathcal{D}(\mathbf{u})$ est vue comme un point de stationnarité d'une fonction énergie $\mathcal{W}(\mathbf{u})$: tout déplacement infinitésimal $\delta\mathbf{u}$ autour de la solution ne modifie pas l'énergie, autrement dit si $\hat{\mathbf{u}}$ est la solution alors $\delta\mathcal{W}(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}) = 0$ pour tout $\delta\mathbf{u}$. L'objectif de cette section est de développer la résolution de l'équation de conservation des moments par la méthode des éléments finis et de mettre en

valeur certaines quantités que nous utiliserons par la suite.

Forme variationnelle faible

Si nous considérons un champ de déplacement infinitésimal, appelé souvent *déplacement test*, noté $\delta \mathbf{u}$ et défini sur le volume Ω_0 , le *principe des travaux virtuels* énonce que la somme des travaux « virtuels » opérés lors de ce déplacement par toutes les forces extérieures et intérieures au système est égale au travail virtuel des quantités d'accélération. De manière pratique, la forme variationnelle (Equation 4.15) est obtenue en prenant le produit de l'équation de conservation des moments par les déplacements tests et en l'intégrant sur le domaine géométrique pour calculer le travail total. En formulation lagrangienne totale, le domaine d'intégration est Ω_0 et il est donc nécessaire d'exprimer l'équation locale de conservation des moments dans la configuration présente au moyen du tenseur premier de Piola-Kirchhoff $\mathbf{P}$.

$$\delta \mathcal{W}(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) = \int_{\Omega_0} \delta \mathbf{u} \cdot \left\{ \nabla \cdot \mathbf{P} + \rho_0 (\bar{\mathbf{b}} - \ddot{\mathbf{u}}) \right\} d\Omega_0 = 0 \quad (4.15)$$

Le tenseur des contraintes est une fonction des déplacements $\mathbf{u}$ par le biais de deux relations successives : (1) la *relation constitutive*, ou *loi de comportement*, lie le tenseur des contraintes au tenseur des déformations (par exemple une relation élastique ou élasto-plastique) (2) la *relation cinématique de déformation* lie le tenseur des déformations aux déplacements (le tenseur de Green-Lagrange). Chacune introduit un degré de dérivation et de fait le terme $\nabla \cdot \mathbf{P}$ exhibe des dérivées secondes. D'un point de vue numérique, la *forme variationnelle forte* 4.15 n'est pas utile car les déplacements doivent être continus C^1 . Une intégration par partie du premier terme et l'utilisation du théorème de Gauss (ou théorème de la divergence) nous permet de réduire le niveau de continuité nécessaire, menant à la *forme variationnelle faible* (Equation 4.16). Nous avons obtenu cette forme par développement mathématique des équations locales, mais un simple raisonnement physique l'aurait permis. Son interprétation physique peut se faire en considérant séparément les différents termes de l'équation 4.16 :

1. $\delta \mathcal{W}^{int}(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u})$ est le travail virtuel des efforts intérieurs.
2. $\delta \mathcal{W}^{cin}(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u})$ est le travail virtuel des quantités de mouvement.
3. $\delta \mathcal{W}^{ext}(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u})$ est le travail virtuel des efforts extérieurs

$$\delta\mathcal{W}(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}) = \underbrace{\int_{\Omega_0} \delta\mathbf{E} \cdot \mathbf{S} \, d\Omega_0}_{\delta\mathcal{W}^{int}(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u})} + \underbrace{\int_{\Omega_0} \rho_0 \delta\mathbf{u} \cdot \ddot{\mathbf{u}} \, d\Omega_0}_{\delta\mathcal{W}^{cin}(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u})} - \underbrace{\left\{ \int_{\Omega_0} \rho_0 \delta\mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{b}} \, d\Omega_0 + \int_{\Gamma_0} \delta\mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{t}} \, d\Gamma_0 \right\}}_{\delta\mathcal{W}^{ext}(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u})} = 0 \quad (4.16)$$

$$\delta\mathbf{E} = \frac{1}{2} \left\{ \mathbf{F}^T \nabla_X \delta\mathbf{u} + (\nabla_X \delta\mathbf{u})^T \mathbf{F} \right\}$$

Discrétisation de la forme variationnelle faible

Le domaine géométrique Ω_0 est approximé par un ensemble $\tilde{\Omega}_0$ de n_e mailles élémentaires, les tétraèdres, occupant chacune un volume élémentaire Ω_0^e dans la configuration présente. Comme pour la méthode d'interpolation lisse discrète, la contribution élémentaire de chaque tétraèdre à la forme intégrale générale est considérée (Equation 4.17).

$$\int_{\Omega_0} \{ \dots \} \, d\Omega_0 \approx \int_{\tilde{\Omega}_0} \{ \dots \} \, d\Omega_0 = \bigcup_{e=1}^{n_e} \int_{\Omega_0^e} \{ \dots \} \, d\Omega_0 \quad (4.17)$$

Travaux virtuels des efforts intérieurs Le travail des efforts intérieurs s'exprime en fonction de la variation du tenseur de Green-Lagrange $\delta\mathbf{E}$ et du premier tenseur de Piola-Kirchhoff $\mathbf{S}$ (l'expression de ce dernier ne sera développée que dans la section suivante). La forme discrétisée $\delta\tilde{\mathbf{E}}$ (Equation 4.18) est obtenue en combinant la définition du tenseur $\delta\mathbf{E}$ (Equation 4.16) et l'approximation des fonctions $\mathbf{u}$ et $\delta\mathbf{u}$ par les fonctions d'interpolation de la maille (Equation 2.8).

$$\begin{aligned} \delta\tilde{\mathbf{E}} &= \frac{1}{2} \sum_{I=1}^n \left\{ \tilde{\mathbf{F}}^T (\delta\mathbf{u}_I \otimes \nabla_X N_I) + (\nabla_X N_I \otimes \delta\mathbf{u}_I) \tilde{\mathbf{F}} \right\} \\ \tilde{\mathbf{F}} &= \sum_{K=1}^n \left\{ \mathbf{x}_K \otimes \nabla_X N_K \right\} \end{aligned} \quad (4.18)$$

Afin d'exploiter informatiquement ces expressions, nous dérivons une formulation matricielle des approximations. Pour ce faire, deux étapes sont nécessaires : (1) nous dérivons l'équation 4.18 en notations indicielles dans l'équation 4.19, la convention d'Einstein est utilisée (2) nous utilisons les notations tensorielles de Voigt qui consistent à représenter les tenseurs du second ordre par un vecteur colonne. Puisque les tenseurs $\delta\mathbf{E}$ et $\mathbf{S}$ sont symétriques (respectivement par construction et par conservation des moments angulaires), nous obtenons deux vecteurs colonnes à six composantes : $\delta\mathbf{E} = \{\delta E_{11} \, \delta E_{22} \, \delta E_{33} \, \delta E_{12} \, \delta E_{23} \, \delta E_{13}\}^T$ et $\mathbf{S} = \{S_{11} \, S_{22} \, S_{33} \, S_{12} \, S_{23} \, S_{13}\}^T$. L'exploitation des

points (1) et (2) nous permet de produire une formulation matricielle de $\delta \mathbf{E}$ en fonction des déplacements virtuels $\delta \mathbf{u}_I$ aux noeuds de la maille. (Equation 4.20)

$$\delta \tilde{E}_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{I=1}^n \left\{ \tilde{F}_{ki} N_{I,j} + N_{I,i} \tilde{F}_{kj} \right\} \delta u_{Ik} \quad (4.19)$$

$$\delta \mathbf{E} = \sum_{I=1}^n \mathbf{B}_I \delta \mathbf{u}_I \quad (4.20)$$

Enfin, nous pouvons procéder à l'étape d'assemblage sur le domaine (Equation 4.21). Le détail du calcul fait apparaître le vecteur $\mathbf{F}^{int}(\mathbf{u})$ appelé *vecteur global des forces internes*, résultante des efforts intérieurs exprimée aux noeuds. Il est construit par union des *vecteurs locaux des forces internes* $\mathbf{F}_e^{int}(\mathbf{u}_e)$ qui représentent la contribution de la maille e aux forces internes.

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{W}^{int}(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) &\approx \int_{\tilde{\Omega}_0} \delta \mathbf{E} \cdot \mathbf{S}^d d\Omega_0 = \bigcup_{e=1}^{n_e} \int_{\Omega_0^e} \delta \mathbf{E}^T \mathbf{S} d\Omega_0 \\ &= \bigcup_{e=1}^{n_e} \sum_{I=1}^n \delta \mathbf{u}_I^T \int_{\Omega_0^e} \mathbf{B}_I^T \mathbf{S} d\Omega_0 \\ &= \bigcup_{e=1}^{n_e} \sum_{I=1}^n \delta \mathbf{u}_I^T \mathbf{F}_I^{int}(\mathbf{u}_e) \\ &= \bigcup_{e=1}^{n_e} \delta \mathbf{u}_e^T \mathbf{F}_e^{int}(\mathbf{u}_e) \\ &= \delta \mathbf{u}^T \mathbf{F}^{int}(\mathbf{u}) \end{aligned} \quad (4.21)$$

Deux cas de figure peuvent se présenter suivant la nature de la relation constitutive :

1. Si la relation constitutive est *linéaire*, alors il est possible d'exprimer les forces internes par une relation matricielle $\mathbf{F}_e^{int}(\mathbf{u}_e) = \mathbf{K}_e \mathbf{u}_e$ pour chaque élément e , où $\mathbf{K}_e$ est appelée *matrice locale de rigidité*. Au niveau du système, nous obtenons une relation $\mathbf{F}^{int}(\mathbf{u}) = \mathbf{K} \mathbf{u}$ où $\mathbf{K}$ est appelée *matrice globale de rigidité* ou plus simplement *matrice de rigidité* (Equation 4.22).

$$\delta \mathcal{W}^{int}(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) \approx \bigcup_{e=1}^{n_e} \delta \mathbf{u}_e^T \mathbf{K}_e \mathbf{u}_e = \delta \mathbf{u}^T \mathbf{K} \mathbf{u} \quad (4.22)$$

2. Si la relation constitutive est *non-linéaire*, alors il n'est pas possible de produire une formulation matricielle et il est nécessaire de linéariser le problème. Cette procédure, détaillée en fin de chapitre, consiste à approcher la solution itérativement en effectuant un développement en série de Taylor de l'expression variationnelle.

Nous introduirons alors la dérivée des forces internes $\partial \mathbf{F}^{int} / \partial \mathbf{u}$, appelée *matrice de rigidité tangentielle* $\mathbf{K}_T$. Son calcul est complexe et décrit en fin de chapitre.

Travaux virtuels des efforts cinétiques Par une procédure similaire nous pouvons dériver les termes inertiels, le lecteur pourra se reporter par exemple à Zienkiewicz and Taylor [2000a] pour le détail. Il est possible d'exprimer $\delta \mathcal{W}^{cin}(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u})$ par une relation matricielle (Equation 4.23), où $\mathbf{M}$ est appelée *matrice de masse*.

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{W}^{cin}(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) &\approx \int_{\tilde{\Omega}_0} \rho_0 \delta \mathbf{u} \cdot \ddot{\mathbf{u}} d\Omega_0 = \bigcup_{e=1}^{n_e} \sum_{I=1}^n \sum_{J=1}^n \delta \mathbf{u}_I^T \int_{\Omega_0^e} N_I \rho_0 N_J d\Omega_0 \ddot{\mathbf{u}}_J \quad (4.23) \\ &= \bigcup_{e=1}^{n_e} \sum_{I=1}^n \sum_{J=1}^n \delta \mathbf{u}_I^T \mathbf{M}_{IJ} \ddot{\mathbf{u}}_J \\ &= \delta \mathbf{u}^T \mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}} \end{aligned}$$

Travaux virtuels des efforts externes Enfin, les termes de chargement sont calculés, le lecteur pourra se reporter par exemple à Zienkiewicz and Taylor [2000a] pour le détail. Le vecteur $\mathbf{F}^{ext}(\mathbf{u})$ (Equation 4.24) est appelé *vecteur global des forces externes*.

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{W}^{ext}(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) &\approx \int_{\Omega_0^d} \rho_0 \delta \mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{b}} d\Omega_0 + \int_{\Gamma_0^d} \delta \mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{t}} d\Gamma_0 = \bigcup_{e=1}^{n_e} \sum_{I=1}^n \delta \mathbf{u}_I^T \int_{\Omega_0^e} \rho_0 \bar{\mathbf{b}} N_I d\Omega_0 \quad (4.24) \\ &+ \bigcup_{f=1}^{n_f} \sum_{I=1}^m \delta \mathbf{u}_I^T \int_{\Gamma_0^f} N_I \bar{\mathbf{t}} d\Gamma_0 \\ &= \delta \mathbf{u}^T \mathbf{F}^{ext}(\mathbf{u}) \end{aligned}$$

Equation matricielle d'équilibre L'expression finale du travail virtuel $\delta \mathcal{W}(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u})$ (Equation 4.25) est obtenue en intégrant les équations 4.21, 4.23 et 4.24. Or puisque les déplacements $\delta \mathbf{u}$ sont arbitraires, nous obtenons l'équation matricielle aux dérivées ordinaires 4.26, qui exprime sous forme matricielle l'équilibre entre forces internes, forces externes et quantité d'accélération.

$$\delta \mathbf{u}^T \left\{ \mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{F}^{int}(\mathbf{u}) - \mathbf{F}^{ext}(\mathbf{u}) \right\} = 0 \quad (4.25)$$

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{F}^{int}(\mathbf{u}) - \mathbf{F}^{ext}(\mathbf{u}) = 0 \quad (4.26)$$

4.3.3 Lois de comportement et restauration

Le calcul des forces internes repose sur le choix d'une loi de comportement permettant d'évaluer le tenseur second de Piola-Kirchhoff $\mathbf{S}$ en fonction de la déformation. Il existe une grande variété de lois permettant de décrire la grande variété des phénomènes mécaniques. Néanmoins, en restauration nous devons considérer les points suivants :

1. L'objectif n'est pas de reproduire fidèlement le phénomène mécanique dans sa complexité mais plutôt de donner des bornes physiques raisonnables et contrôlable au contraire des techniques purement cinématiques : les paramètres physiques du problème, comme par exemple les conditions aux limites, ne sont pas suffisamment contraints par les données. En modélisation génétique, à toutes échelles (réservoir, bassin ou continent), les lois de type élasto-plastique sont couramment utilisées et reproduisent de manière satisfaisante aussi bien les phénomènes ductiles et cassants [Hassani, 1994; Nino, 1997; Pourhiet, 2004, par ex.] que les phénomènes de compaction mécanique et chimique [Audet and McConnel, 1992; Scheider *et al.*, 1996; Pouya *et al.*, 1998; Luo *et al.*, 1998, par ex.]. Nous ne pouvons pas prétendre inverser ce type de phénomènes, fondamentalement non conservatifs, car la correspondance entre déformation actuelle (seule chose connue) et contraintes n'est pas univoque. Enfin, prescrire des lois de comportement de type élastoplastique, c'est également ignorer que la géométrie et la position actuelle des failles fournissent implicitement une partie de la réponse : nous savons a priori où est localisée la déformation plastique.
2. Les paramètres des lois de comportement doivent être à la fois connus sur le domaine et interprétables en termes géologiques. Suite aux remarques formulées au paragraphe précédent, nous avons limité notre étude au cas des relations élastiques et plus particulièrement aux relations élastiques parfaitement réversibles, c'est-à-dire hyperélastiques. Nous basons nos développements sur la loi Néo-Hookéenne [Treolar, 1947], une extension naturelle en grande déformation de la loi de Hooke souvent utilisée et bien maîtrisée en géologie [Ramsay and Huber, 2000]. Elle présente notamment l'avantage de reposer sur des paramètres physiques connus (soit par essai de laboratoire soit par inversion élastique de la sismique) et interprétables : les paramètres de Lamé λ et μ , ou plus communément utilisés le module de Young E et le coefficient de Poisson ν .

Relation hyperélastique de type Néo-Hookéenne

Les matériaux élastiques pour lesquels le travail est indépendant du chemin de charge sont dits hyperélastiques. Ils sont caractérisés par l'existence d'une fonction énergie de déformation $\mathcal{W}^{int}$, permettant par définition de dériver le tenseur second de Piola-Kirchhoff $\mathbf{S}$. Pour une relation Néo-Hookéenne, nous donnons en équation 4.27 leurs expressions

[Belytschko *et al.*, 2000].

$$\mathcal{W}^{int} = \frac{1}{2} \lambda (\ln J)^2 - \mu \ln J + \frac{1}{2} (\text{Tr } \mathbf{C} - 3) \quad J = \det \mathbf{F} \quad (4.27)$$

$$\mathbf{S} = 2 \frac{\partial \mathcal{W}^{int}}{\partial \mathbf{C}} = \lambda \ln J \mathbf{C}^{-1} + \mu (\mathbf{1} - \mathbf{C})^{-1}$$

En intégrant la loi de comportement à l'équation 4.21, nous pouvons calculer les forces internes $\mathbf{F}^{int}$ pour une déformation donnée $\mathbf{C}$. La non-linéarité de l'expression de $\mathbf{S}$ nous empêche néanmoins de construire une matrice de rigidité : il n'est pas possible d'établir une relation matricielle de type $\mathbf{F}^{int}(\mathbf{u}) = \mathbf{K} \mathbf{u}$. Plusieurs stratégies sont possibles pour contourner ce problème et sont développées dans les deux sections suivantes : l'*approche pseudo-transitoire* et l'*approche statique non linéaire*. Du point de vue chronologique, nos investigations se sont orientées tout d'abord vers la première en raison de sa facilité d'implantation informatique et de son traitement simplifié des failles (Chapitre 5). Pour pallier les problèmes inhérents de l'approche pseudo-transitoire, nous avons par la suite développé un code de statique gérant à la fois les non linéarités liées à la loi de comportement et aux failles.

4.4 Résolution par approche pseudo-transitoire

L'*approche pseudo-transitoire*, encore appelée *relaxation dynamique*, consiste à dire que la solution d'un problème statique est la partie stationnaire finale de l'analyse transitoire d'un système [Underwood, 1983]. Considérons par exemple un système mécanique et appliquons de manière instantanée une charge quelconque : les paramètres physiques, comme la position des particules, évoluent progressivement au cours du temps (c'est la *phase transitoire*) jusqu'à un équilibre physique entre les différentes forces en jeu (c'est la *phase stationnaire* finale). L'étude numérique d'un tel système est appelée une *analyse transitoire* en mécanique ; elle met en équation et résout le comportement dynamique du système. Dans le cas de la relaxation dynamique, la partie transitoire de la réponse est sans signification car seul l'état final importe. La résolution du problème est donc optimisée en conséquence et de fait, la phase transitoire est réduite artificiellement au minimum pour accélérer les calculs : elle n'a plus de signification physique particulière. L'idée présentée dans cette section est d'appliquer le principe de la relaxation dynamique à la restauration. En effet, seule la configuration finale restaurée est d'intérêt car nous ne prétendons pas ici reproduire l'intégralité du chemin de déformation.

L'approche pseudo-transitoire est donc un artifice physique car la plupart des calculs effectués va décrire des étapes transitoires sans signification physique. Comme bien souvent, les intérêts résident dans le traitement numérique simplifié, particulièrement pour

les problèmes fortement non linéaires en mécanique. En effet, c'est un *algorithme explicite* car, par opposition à un *algorithme implicite*, aucun système linéaire n'est résolu [Zienkiewicz, 1977]. Du point de vue informatique, toutes les quantités sont des vecteurs rendant la programmation simple et peu coûteuse en terme de mémoire. Les algorithmes explicites ont néanmoins un inconvénient majeur : ils sont numériquement instables c'est-à-dire que la convergence ne peut être atteinte que si les paramètres honorent certaines conditions [Papadrakakis, 1981].

4.4.1 Motivations et contributions

L'utilisation de la méthode de relaxation en géologie a été en premier lieu introduite pour modéliser l'évolution en coupes des grandes structures géologiques en grande déformation [Hassani, 1994], comme les processus de subduction [Hassani *et al.*, 1997] ou l'évolution des chaînes de montagnes [Vanbrabant *et al.*, 1999]. Le logiciel issu de ces travaux, le **code ADELI**, est orienté vers la modélisation génétique et la reproduction précise des processus thermo-mécaniques en jeu ; les fonctionnalités mécaniques sont avancées (incluant friction, visco-élasticité et visco-plasticité) mais limitées à des géométries rudimentaires en coupe : la problématique est donc très différente. L'utilisation en modélisation inverse a été introduite plus tardivement pour la restauration des coupes [de Santi, 2002] et des volumes [de Santi *et al.*, 2003; Maerten and Maerten, 2004a,b]. Néanmoins, les limitations importantes de ces travaux et le type des publications (résumés de conférence uniquement) motivent et justifient nos recherches sur la restauration par relaxation dynamique. Les limitations relèvent des points suivants pour la restauration volumique :

1. La complexité géométrique et topologique des modèles est limitée. Maerten and Maerten [2004a] considèrent uniquement des volumes tétraédrisés non faillés et les travaux de de Santi *et al.* [2003] modélisent le déplacement du compartiment supérieur d'une faille normale sur un compartiment inférieur rigide. Les logiciels développés, respectivement **Dynel** et **Recon**, ne traitent donc pas les modèles structuraux couramment rencontrés en géologie pétrolière. La prise en compte de modèles complexes et faillés (le traitement des failles est abordé au chapitre 5) ainsi que la possibilité de restauration séquentielle constituent notre première contribution.
2. Seule la déformation infinitésimale est considérée, c'est-à-dire que ces travaux se placent sous l'hypothèse des petites déformations. Le traitement des grandes déformations est plus complexe et a des conséquences algorithmiques, notamment sur la stabilité numérique des algorithmes ; il constitue notre deuxième contribution.

4.4.2 Principe et algorithme de relaxation dynamique

L'algorithme de relaxation dynamique cherche à limiter la phase transitoire oscillatoire pour obtenir l'état final le plus rapidement possible au moyen d'une force additionnelle,

dite *force d'amortissement*. Du point de vue physique, elle s'apparente à une force visqueuse de résistance au mouvement ; elle est fonction de la vitesse du corps $\dot{\mathbf{u}}_n$ à un instant t . Nous ajoutons donc un terme d'amortissement à l'équation matricielle d'équilibre (Equation 4.28) : $\mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}_n$, où $\mathbf{C}$ est appelée *matrice d'amortissement*.

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}_n + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}_n + \mathbf{F}^{int}(\mathbf{u}_n) - \mathbf{F}^{ext}(\mathbf{u}_n) = 0 \quad (4.28)$$

L'évaluation de la matrice d'amortissement est en pratique difficile, les paramètres physiques régissant les forces d'amortissement visqueuses sont mal connus. Il est donc souvent fait comme hypothèse que $\mathbf{C}$ est une combinaison linéaire $\alpha \mathbf{M} + \beta \mathbf{K}$ des matrices de masse et de rigidité, les paramètres α et β étant issus de l'expérience [Chopra, 1995]. Cette simplification, appelée *amortissement de Rayleigh*, est d'autant plus appropriée en relaxation dynamique que l'algorithme ne modélise pas de manière physique la phase transitoire. La méthode la plus efficace [Underwood, 1983] considère $\mathbf{C} = c \mathbf{M}$, où c est le *coefficient d'amortissement*.

L'équation 4.28 précédente est une équation différentielle ordinaire dans son expression matricielle. La solution est obtenue en considérant un schéma numérique d'intégration du temps, c'est-à-dire la relation de récurrence entre $\mathbf{u}_n$, $\dot{\mathbf{u}}_n$ et $\ddot{\mathbf{u}}_n$. Il existe une très grande variété de relations possibles et le choix approprié dépend le plus souvent du type de problème et du type d'algorithme, le lecteur pourra se reporter à Hugues [1987] pour une analyse complète. En relaxation dynamique, un schéma explicite courant et fiable est la *différence centrale* : les vitesses et accélérations sont exprimées au milieu du pas de temps h (Equation 4.29). Ce schéma fournit une intégration précise à l'ordre deux et la plus forte stabilité numérique [Krieg, 1973].

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{u}}_{n-\frac{1}{2}} &= \frac{1}{h}(\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_{n-1}) \\ \ddot{\mathbf{u}}_n &= \frac{1}{h}(\dot{\mathbf{u}}_{n+\frac{1}{2}} - \dot{\mathbf{u}}_{n-\frac{1}{2}}) \end{aligned} \quad (4.29)$$

Algorithme classique Afin de fixer les idées, nous proposons de décrire les grandes étapes de l'algorithme de relaxation dynamique. Il consiste à itérer sur le temps au moyen de la formule de récurrence (Equation 4.29) et de la loi d'équilibre des moments (Equation 4.28) jusqu'à ce que la phase transitoire laisse place à l'état stationnaire.

1. *Evaluation des paramètres* Les paramètres de l'algorithme sont le pas de temps h , le coefficient d'amortissement c et la matrice de masse $\mathbf{M}$; ils sont calculés pour assurer la stabilité numérique de l'algorithme et la convergence la plus rapide possible. Les déplacements $\mathbf{u}_0$ et vitesses $\dot{\mathbf{u}}_0$ sont initialisés à $\mathbf{0}$.
2. *Evaluation des forces internes et externes* Les déplacements de chaque noeud sont concaténés dans le vecteur global de déplacement $\mathbf{u}_n$; ils permettent d'évaluer l'état courant des forces internes et externes c'est-à-dire les vecteurs globaux $\mathbf{F}_n^{int}$ et $\mathbf{F}_n^{ext}$.

3. *Calcul des vitesses* Les forces résiduelles au temps courant, équilibrées par les forces d'inertie et d'amortissement, vont permettre de calculer un nouvel état du système. En substituant l'équation 4.29 dans l'équation 4.28, nous obtenons une relation liant les vitesses d'une étape à une autre (Equation 4.30). Un traitement spécial pour le premier pas de temps est nécessaire car $\dot{\mathbf{u}}_{-\frac{1}{2}}$ n'est pas défini [Underwood, 1983].

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{u}}_{n+\frac{1}{2}}^* &= \frac{2-ch}{2+ch} \dot{\mathbf{u}}_{n-\frac{1}{2}} + \frac{2h}{2+ch} \mathbf{M}^{-1} \underbrace{\{\mathbf{F}_n^{ext} - \mathbf{F}_n^{int}\}}_{\mathbf{R}_n} \\ \dot{\mathbf{u}}_{\frac{1}{2}}^* &= \frac{h}{2} \mathbf{M}^{-1} \underbrace{\{\mathbf{F}_0^{ext} - \mathbf{F}_0^{int}\}}_{\mathbf{R}_0}\end{aligned}\quad (4.30)$$

4. *Correction des vitesses* Les vitesses ainsi calculées sont appelées *vitesses fictives* et notées au moyen d'une étoile. En effet, aucune des conditions aux limites en déplacement n'a pour le moment été prise en compte : la configuration correspondante Ω_{n+1}^* , obtenue en appliquant les *déplacements fictifs* $\mathbf{u}_{n+1}^*$ (Equation 4.31), viole par endroit ces conditions. En différenciant les conditions en déplacement, nous obtenons des conditions sur les vitesses et les modifions en conséquence pour obtenir les *vitesses corrigées*.

$$\mathbf{u}_{n+1}^* = \mathbf{u}_n + h \dot{\mathbf{u}}_{n+\frac{1}{2}}^* \quad (4.31)$$

5. *Calcul des déplacements* Les déplacements nodaux sont calculés en fonction des vitesses corrigées au moyen de l'équation 4.32. Une nouvelle configuration Ω_{n+1} au temps $n+1$ est ainsi obtenue.

$$\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_n + h \dot{\mathbf{u}}_{n+\frac{1}{2}} \quad (4.32)$$

6. *Evaluation du critère de convergence* Il est maintenant nécessaire d'évaluer l'état de convergence c'est-à-dire savoir si l'algorithme a atteint l'état stationnaire. Dans le cas contraire, l'algorithme continue à l'étape 2. Il est nécessaire de définir un critère de convergence.

L'implantation de ce type d'algorithme ne présente pas de difficultés particulières dans son ensemble. Il est simple et robuste car toutes les quantités sont vectorielles et toutes les opérations effectuées sont de simples additions de vecteurs. Néanmoins, c'est dans les étapes élémentaires que se situent les principales difficultés et nous proposons dans les sections qui suivent de détailler le calcul des forces internes et le choix du critère de convergence. Enfin, nous étudierons dans la section suivante les critères de stabilité numérique et proposerons un algorithme alternatif permettant une meilleure stabilité.

Calcul des forces internes et externes

A chaque pas de temps, il est nécessaire d'évaluer le vecteur $\mathbf{F}_n^{int}$ des forces internes et le vecteur $\mathbf{F}_n^{ext}$ des forces externes. Considérons dans un premier temps les forces internes,

nous omettons le n pour alléger les notations. Chaque élément tétraédrique e contribue à hauteur de $\mathbf{F}_{I_e}$ aux forces internes appliquées à son noeud I . De l'équation 4.21 nous pouvons déduire la valeur de $\mathbf{F}_{I_e}$ (Equation 4.33) pour l'élément e . L'opération est répétée pour chaque élément et le résultat ensuite concaténé au vecteur global $\mathbf{F}_n^{int}$ (procédure d'assemblage). A partir de l'équation variationnelle 4.24 et au moyen d'une procédure similaire, nous construisons les forces externes surfaciques (exposant s) et volumiques (exposant v).

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{W}^{int}(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) &\Rightarrow \mathbf{F}_{I_e} = \int_{\Omega_0^e} \mathbf{B}_I^T \cdot \mathbf{S} d\Omega_0 \\ \delta \mathcal{W}^{ext}(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) &\Rightarrow \mathbf{F}_{I_e}^v = \int_{\Omega_0^e} \rho_0 \bar{\mathbf{b}} N_I d\Omega_0 \quad \mathbf{F}_{I_f}^s = \int_{\Gamma_0^f} N_I \bar{\mathbf{t}} d\Gamma_0 \end{aligned} \quad (4.33)$$

Ces calculs complexes sont les plus coûteux au sein de l'algorithme de relaxation dynamique ; nous avons observés qu'ils représentent 90% du temps de calcul effectif. Un moyen d'accélérer l'algorithme est de pré-calculer un certain nombre de quantités lorsque celles-ci ne dépendent pas ou dépendent linéairement de l'état de déformation courant. Ainsi par exemple, si nous considérons une relation Hookéenne sous l'hypothèse des petites déformations, le vecteur de forces internes est égal au produit de la matrice de rigidité par le vecteur déplacement (Equation 4.22) : $\mathbf{F}_n^{int} = \mathbf{K} \mathbf{u}_n$. La matrice $\mathbf{K}$ est connue et calculée une fois pour toute au début de l'algorithme ; le produit matrice vecteur restant à effectuer à chaque itération est une opération peu couteuse. Néanmoins, dans le cas d'une relation Néo-Hookéenne, cette opération n'est pas envisageable.

Critères de convergence

La détection de l'état stationnaire est une étape difficile car toutes les quantités, en plus des effets oscillatoires physiques, sont soumises à des oscillations numériques. Plusieurs options sont possibles et sont généralement basées sur les variations relatives des déplacements, des forces, des accélérations et de l'énergie :

1. *Norme des forces résiduelles* Le vecteur des forces résiduelles représente le déséquilibre courant entre les forces internes et les forces externes ; il est calculé explicitement à chaque étape (Equation 4.30). Underwood [1983], synthétisant de nombreux autres écrits, utilise sa norme pour détecter le passage en phase transitoire. En restauration, la plupart des conditions aux limites sont en déplacement, elles sont donc appliquées a posteriori lors de l'étape de correction des vitesses. La valeur de la force équivalente n'est jamais explicitée car le coût calculatoire serait prohibitif. Bien que classiquement utilisée, nous n'utilisons donc pas cette technique.
2. *Norme des incréments de déplacement* Intuitivement, lorsque l'algorithme converge, le vecteur déplacement est stabilisé et chaque nouvelle itération ne modifie que peu

ce vecteur : autrement dit, l'incrément de déplacement $\Delta \mathbf{u}_n$ voit sa norme décroître. Puisque nous ne connaissons pas a priori la valeur significative d'un déplacement, nous étudions plutôt la valeur relative $\Delta \mathbf{u}_n / \mathbf{u}_n$ et considérons la phase stationnaire comme atteinte si elle est inférieure à ϵ sur plusieurs cycles.

3. *Norme des énergies* Belytschko *et al.* [2000] proposent une alternative intéressante basée sur la variation relative d'énergie du système. Elle fournit un critère aussi robuste que précédemment et présente l'avantage supplémentaire de détecter de manière robuste les instabilités numériques : l'énergie interne croît de manière exponentielle. Le calcul des différentes énergies est réalisé de manière incrémentielle [Belytschko *et al.*, 2000]. Nous avons donc retenu ce critère dans la mise en oeuvre de nos travaux (4.34).

$$\begin{aligned}\mathcal{W}_{n+1}^{int} &= \mathcal{W}_n^{int} + \frac{1}{2} \Delta \mathbf{u}_n^T \left\{ \mathbf{F}_n^{int} + \mathbf{F}_{n+1}^{int} \right\} \\ \mathcal{W}_{n+1}^{ext} &= \mathcal{W}_n^{int} + \frac{1}{2} \Delta \mathbf{u}_n^T \left\{ \mathbf{F}_n^{ext} + \mathbf{F}_{n+1}^{ext} \right\} \\ \mathcal{W}_{n+1}^{cin} &= \frac{1}{2} \left\{ \dot{\mathbf{u}}_n^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{u}}_n \right\}\end{aligned}\tag{4.34}$$

4.4.3 Principe et algorithme de relaxation dynamique adaptative

La principale difficulté de la relaxation dynamique est la stabilité conditionnelle de l'algorithme ; elle est bien comprise mathématiquement mais généralement difficile à prendre en compte numériquement. Nous appelons *domaine de stabilité* l'ensemble des valeurs de h , c et $\mathbf{M}$ pour lesquelles l'algorithme est convergent. Dans le cas d'une relation constitutive linéaire (relation hookéenne), les paramètres n'évoluent pas au cours du temps et peuvent donc être évalués en début d'algorithme. En revanche, pour les relations non linéaires (relation néo-hookéenne) ce domaine peut varier en fonction de l'état de déformation : les conséquences peuvent être la divergence ou une surévaluation des déplacements [Papadrakakis, 1981]. La solution réside à la fois dans une bonne estimation des paramètres initiaux et dans une procédure d'adaptation des paramètres au profil courant de déformation ; cette procédure est appelée *algorithme de relaxation dynamique adaptative* [Underwood, 1979; Papadrakakis, 1981; Oakley and Knight, 1995a,b; Oakley *et al.*, 1995].

Domaine de stabilité

La convergence vers la solution peut être caractérisée par une mesure de l'erreur $\mathbf{e}_n = \mathbf{u}_n - \hat{\mathbf{u}}$, où $\hat{\mathbf{u}}$ est la solution stationnaire. Un algorithme est globalement convergent si la norme de l'erreur diminue au cours du temps. En développant mathématiquement

l'expression de $\mathbf{e}_n$ [Frankel, 1950], il est possible de montrer qu'elle suit une relation de récurrence et que le domaine de stabilité est fonction des valeurs propres maximale λ_m et minimale λ_0 de $\mathbf{A}_n$, appelée *matrice d'amplification* (Equations 4.35 et 4.36, où $\mathbf{K}_n$ est la matrice de rigidité dans le cas linéaire ou tangentielle dans le cas non linéaire). Le lecteur pourra se reporter à Papadrakakis [1981] et Underwood [1983] pour un développement complet. La première condition (Equation 4.36 (1)) correspond à la limite de stabilité de l'intégrateur par différence centrale [O'Brien *et al.*, 1951]. La deuxième condition (Equation 4.36 (2)) impose un amortissement critique de l'intégrateur afin d'obtenir une convergence optimale [Thompson, 1965].

$$\mathbf{e}_{n+1} = \left(1 - \frac{2h^2}{2 + ch} \mathbf{A}_n\right) \mathbf{e}_n + \frac{2 - ch}{2 + ch} (\mathbf{e}_n - \mathbf{e}_{n-1}) \quad \mathbf{A}_n = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{K}_n \quad (4.35)$$

$$(1) h \leq \frac{2}{\sqrt{\lambda_m}} \quad (2) c \approx 2\sqrt{\lambda_0} \quad (4.36)$$

Évaluation numérique des paramètres

Les valeurs propres λ_m et λ_0 de la matrice d'amplification ne sont pas connues a priori et le calcul explicite serait prohibitif au vu de la taille des systèmes considérés. En conséquence, il est nécessaire de recourir à des techniques numériques permettant d'évaluer les critères de stabilité. En réalité, il n'est nécessaire de connaître que deux des trois paramètres h , c et $\mathbf{M}$: il est classique de fixer de manière arbitraire $h = 1$ et d'évaluer c et $\mathbf{M}$ en conséquence. Pour assurer une certaine marge, nous effectuons les évaluations pour $h = 1.1$.

1. *Évaluation de la matrice de masse* Le choix de la matrice de masse permet d'honorer la condition (1) (Equation 4.36). Une première approche [Welsh, 1967; Cassell and Hobbs, 1976; Key *et al.*, 1981] consiste à interpréter de manière physique cette condition en se référant au théorème de Courant-Friedricks-Lewy [Courant *et al.*, 1928] : la masse associée à chaque élément doit permettre la traversée d'une onde élastique lors du pas de temps h . Le lecteur pourra se reporter à [Hugues, 1987] pour l'évaluation des éléments les plus classiques. Nous optons pour une seconde approche [Bunce, 1972], plus mathématique et calculatoire, se basant sur le théorème de Gerschgorin [Strang, 1976] : il fournit un encadrement approché des valeurs propres d'une matrice et permet d'exprimer la condition (1) au moyen de l'équation 4.37. Dans le cas d'une relation constitutive linéaire, les K_{ij} sont les composantes de la matrice de rigidité linéaire $\mathbf{K}$ (constante et calculée explicitement en début d'algorithme). Dans le cas d'une relation non linéaire, les K_{ij} sont les composantes de la matrice de rigidité tangentielle $\mathbf{K}_T$. Or cette matrice n'est pas constante et dépend de l'état de déformation $\mathbf{u}$. Nous mettons donc en évidence ici le fait que les paramètres de stabilité varient à mesure que l'algorithme progresse, d'où la nécessité

de réactualiser $\mathbf{M}$ et c au cours du processus. Dans la pratique, nous ne calculons pas explicitement $\mathbf{K}_T$ mais seulement une version diagonalisée comme le suggère l'équation 4.37, économisant ainsi le coup d'assemblage.

$$M_{ii} \geq \frac{h^2}{4} \sum_j |K_{ij}| \quad (4.37)$$

2. *Évaluation du coefficient d'amortissement* Encore aujourd'hui, la majeure partie des algorithmes détermine la condition (2) (Equation 4.36) par l'expérience, c'est-à-dire que sa valeur est progressivement augmentée jusqu'à ce qu'une configuration stable soit trouvée. Cette approche est cependant peu robuste et coûteuse car bien souvent, le nombre d'itérations à réaliser est considérable. Bunce [1972] propose une alternative basée sur le quotient de Rayleigh (Equation 4.38) qui a été depuis largement reprise et éprouvée [Underwood, 1983; Felipa, 1990; Oakley and Knight, 1995a].

$$c \approx 2 \sqrt{h \frac{(\dot{\mathbf{u}}_{n-\frac{1}{2}})^T (\mathbf{F}_n^I - \mathbf{F}_{n-1}^I)}{(\dot{\mathbf{u}}_{n-\frac{1}{2}})^T \mathbf{M} (\dot{\mathbf{u}}_{n-\frac{1}{2}})}} \quad (4.38)$$

Algorithme de mise à jour des paramètres

La matrice de masse et le coefficient d'amortissement doivent donc être modifiés à mesure que la rigidité du système évolue. D'un point de vue calculatoire, si la mise à jour de c est relativement peu coûteuse, il n'en est pas de même pour la matrice de masse : elle requiert le calcul de la matrice de rigidité, le réaliser à chaque pas de temps rendrait en pratique l'algorithme inutilisable. Nous utilisons donc une métrique normée f_p , appelée *fréquence apparente perturbée* [Park and Underwood, 1980; Underwood and Park, 1980], pour déterminer si une mise à jour de la matrice de masse est nécessaire. Dans le cas d'une relation constitutive non linéaire, nous proposons donc de modifier l'algorithme classique de relaxation dynamique en intercalant entre les étapes 5 (calcul des déplacements) et 6 (évaluation du critère de convergence) les étapes suivantes :

1. Le calcul de la fréquence apparente perturbée f_p est effectué pour déterminer s'il est nécessaire de reformer la matrice de masse. Si oui, la matrice de rigidité tangentielle diagonalisée est calculée et la matrice de masse déduite (Equation 4.37). L'algorithme reprend à l'étape 2 pour évaluer à nouveau les déplacements.
2. Le coefficient d'amortissement est mis à jour au moyen du quotient de Rayleigh (Equation 4.38) et l'algorithme poursuit normalement.

4.4.4 Bilan

L'algorithme de relaxation dynamique est exploitable pour la résolution du problème de restauration volumique ; il se base sur le maillage tétraédrique du *Solid Model* et permet de fait de traiter les géométries complexes en restauration séquentielle. L'introduction des grandes déformations nous a amenés à proposer des modifications de l'algorithme initial au profit d'une version adaptative accommodant les non-linéarités du problème. La figure 4.4 présente une restauration séquentielle complète effectuée avec une loi de comportement non linéaire de type Néo-Hookeenne, le temps de calcul global est de l'ordre de deux heures sur un modèle de 250000 tétraèdre (P4 - 2.2GHz - 1GB RAM).

L'inconvénient majeur réside dans le temps de calcul nécessaire pour obtenir une convergence assurée : il tient à la fois de la réévaluation coûteuse des paramètres et des caractéristiques intrinsèques. En effet, la convergence est d'autant plus lente que les éléments sont petits, car les conditions de stabilité (notamment la condition de Courant-Friedricks-Lewy) nous obligent à diminuer le pas de temps stable. Or, afin d'accommoder finement la géométrie des structures géologiques, il est fréquent de trouver localement de petits tétraèdres : les zones de branchement de failles et d'inversion de rejet en sont de bons exemples, ils constituent ce que Lepage [2003] appelle les *épis*. De manière pratique, les calculs sont de l'ordre de l'heure pour chaque étape de restauration. La restauration est typiquement un processus d'essai-erreur et il n'est pas rare de vouloir tester plusieurs cinématiques. Il apparaît donc que la mise en oeuvre en contexte opérationnel est difficile. En conséquence, la section suivante tente de trouver une méthodologie alternative plus efficace.

4.5 Résolution par approche statique non linéaire

Pareillement à l'approche pseudo-transitoire, l'approche statique ne s'intéresse pas à la description du solide pendant la déformation mais seulement à l'état final de la structure après application instantanée des conditions aux limites. L'équation matricielle d'équilibre (Equation 4.26) est donc réduite en supprimant les termes inertiels (Equation 4.39) ; nous supposons dans cette section que les forces extérieures ne dépendent pas du déplacement ($\mathbf{F}^{ext}(\mathbf{u}) = \mathbf{F}^{ext}$). Nous envisagerons successivement deux cas :

1. *Cas linéaire* Si la relation constitutive liant contrainte, déformation et déplacement est linéaire en déplacement, alors les forces internes $\mathbf{F}^{int}$ peuvent être exprimées comme le produit de la matrice de rigidité $\mathbf{K}$ et des déplacements $\mathbf{u}$ (Equation 4.22). L'équilibre se résume alors à un système linéaire $\mathbf{F}^{ext} = \mathbf{F}^{int} = \mathbf{K} \mathbf{u}$, classiquement résolu par des techniques d'analyse numérique.
2. *Cas non linéaire* Si la relation constitutive n'est pas linéaire, alors un tel système

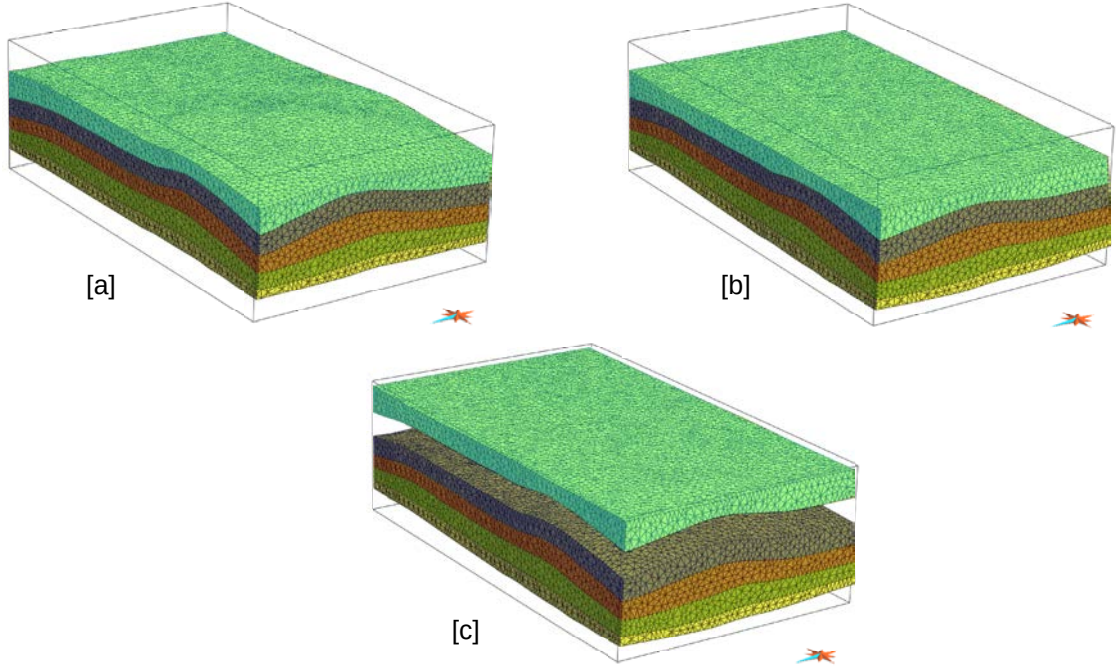


FIG. 4.3 – La procédure est identique pour chaque étape de restauration : la configuration de départ [a] correspond soit à la géométrie présente ou est issue de l'étape précédente, la configuration restaurée est calculée et les éléments de la couche supérieure sont enlevés pour passer à l'étape suivante.

ne peut être résolu. Il est nécessaire de linéariser le problème variationnel et conséquemment le problème matriciel afin de le résoudre.

$$\mathbf{F}^{int}(\mathbf{u}) - \mathbf{F}^{ext} = 0 \quad (4.39)$$

4.5.1 Algorithme de résolution dans le cas linéaire

Le problème de statique des solides déformables en petites déformations est très classique et sa résolution par la méthode des éléments finis est largement traitée dans la littérature aussi bien en mécanique [Hugues, 1987; Bathe, 1995; Zienkiewicz and Taylor, 2000a] qu'en géologie [Ramsay and Huber, 2000]. En partant de l'équation variationnelle discrétisée, nous rappelons les principales étapes de résolution.

1. *Assemblage de la matrice de rigidité globale* De l'équation 4.21, nous pouvons déduire que $\mathbf{F}_e^{int} = \mathbf{K}_e \mathbf{u}_e$, où $\mathbf{K}_e$ est appelée matrice de rigidité élémentaire, elle représente la contribution de e à la rigidité d'ensemble. Le calcul est répété pour chaque élément et chaque matrice de rigidité élémentaire est concaténée à la matrice de rigidité globale $\mathbf{K}$ au moyen d'une indexation appropriée des noeuds.

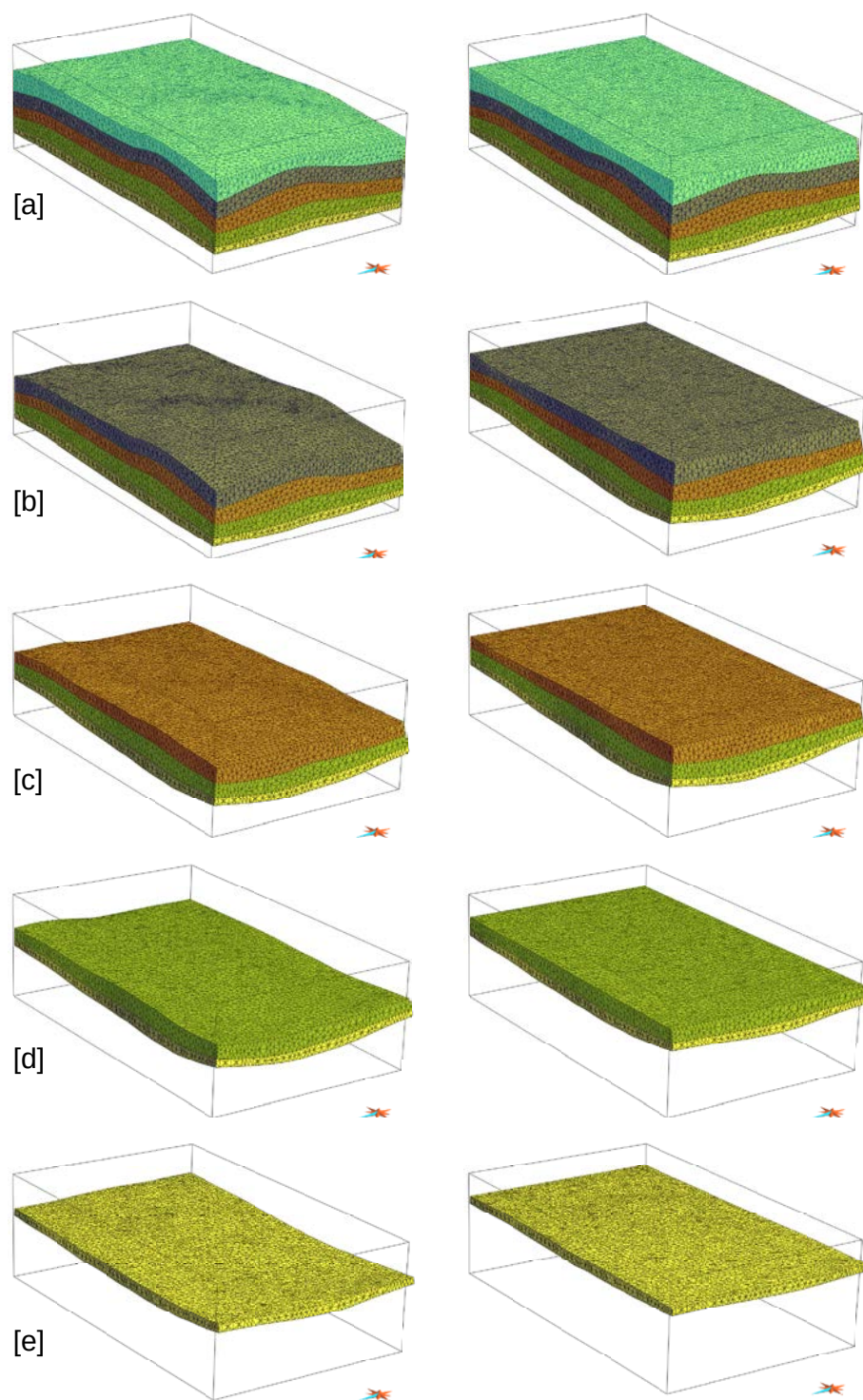


FIG. 4.4 – Un exemple de restauration séquentielle (modèle synthétique ENSG), les étapes [a] à [e] montrent les géométries successivement restaurées.

2. *Assemblage des conditions aux limites* Une procédure similaire permet de construire le vecteur global des forces extérieures en considérant tour à tour la contribution des éléments de volume aux forces extérieures volumiques et la contribution des éléments frontières de surfaces aux forces extérieures surfaciques. A cette étape, le système $\mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{F}^{ext}$ est construit mais ne prend pas en compte des conditions aux limites en déplacement. Plusieurs techniques permettent d'imposer ces conditions ; les plus employées sont la méthode de pénalisation, la méthode des multiplicateurs de Lagrange, la méthode des Lagrangiens augmentés et la méthode des Lagrangiens perturbés. Le lecteur pourra se reporter à Belytschko *et al.* [2000] pour les développements mathématiques. Nous utilisons dans nos travaux la méthode par pénalisation qui allie facilité d'implantation et robustesse. Néanmoins le choix de la valeur de ce facteur est critique : s'il est trop faible, les conditions aux limites sont honorées approximativement, s'il est trop important, le mauvais conditionnement du système empêche une résolution correcte et rapide. Nous avons choisi d'évaluer le facteur de pénalisation d'après les travaux de Nour-Omid and Wriggers [1987]
3. *Résolution du système linéaire* Le système obtenu $\mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{F}^{ext}$, modifié par les conditions en déplacement, est résolu au moyen de techniques modernes de résolution, éventuellement pré-conditionnées pour équilibrer les effets de la pénalisation.

4.5.2 Algorithme de résolution dans le cas non linéaire

La méthode la plus employée pour la résolution d'équations algébriques non linéaires est la méthode de Newton, aussi appelée *méthode de Newton-Raphson* en mécanique. Nous rappelons brièvement ici le principe et soulignons les difficultés majeures. Partant d'une solution initiale $\bar{\mathbf{u}}$, l'algorithme s'approche itérativement de la solution $\hat{\mathbf{u}}$ en estimant le pas $\Delta\mathbf{u}$ nécessaire par un développement de Taylor de la forme variationnelle (Equation 4.40, par la suite nous utiliserons D pour désigner la dérivée directionnelle).

$$\delta\mathcal{W}(\hat{\mathbf{u}}, \delta\mathbf{u}) = \delta\mathcal{W}(\bar{\mathbf{u}}, \delta\mathbf{u}) + \left. \frac{\partial\delta\mathcal{W}(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u})}{\partial\mathbf{u}} \right|_{\mathbf{u}=\bar{\mathbf{u}}} \Delta\mathbf{u} + o(\Delta\mathbf{u}^2) = 0 \quad (4.40)$$

$$\underbrace{\delta\mathcal{W}(\bar{\mathbf{u}}, \delta\mathbf{u})}_{(1)} + \underbrace{D\delta\mathcal{W}(\bar{\mathbf{u}}, \delta\mathbf{u}) \Delta\mathbf{u}}_{(2)} = 0$$

La *forme variationnelle linéarisée* peut être discrétisée comme nous l'avons fait pour la forme variationnelle faible : elle fait apparaître les forces internes évaluées en $\bar{\mathbf{u}}$ et la matrice de rigidité tangentielle $\mathbf{K}_T(\bar{\mathbf{u}})$, encore appelée *matrice jacobienne du système* (Equation 4.41). Le détail de la forme linéarisée sera donné en section suivante. Cette forme permet de calculer un système linéaire liant le pas $\Delta\mathbf{u}$, la matrice $\mathbf{K}_T$ et les forces évaluées pour l'état de déformation $\bar{\mathbf{u}}$ (Equation 4.42).

$$\underbrace{\delta \mathbf{u}^T \left\{ \mathbf{F}^{int}(\bar{\mathbf{u}}) - \mathbf{F}^{ext}(\bar{\mathbf{u}}) \right\}}_{(1)} + \underbrace{\delta \mathbf{u}^T \mathbf{K}_T(\bar{\mathbf{u}}) \Delta \mathbf{u}}_{(2)} = 0 \quad (4.41)$$

$$\delta \mathbf{u}^T \left\{ \mathbf{F}^{int}(\bar{\mathbf{u}}) - \mathbf{F}^{ext}(\bar{\mathbf{u}}) + \mathbf{K}_T(\bar{\mathbf{u}}) \Delta \mathbf{u} \right\} = 0$$

$$\mathbf{F}^{int}(\bar{\mathbf{u}}) - \mathbf{F}^{ext}(\bar{\mathbf{u}}) + \mathbf{K}_T(\bar{\mathbf{u}}) \Delta \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (4.42)$$

Algorithme

1. *Calcul d'une solution initiale* L'algorithme itératif améliore une solution initiale ; il est donc critique de partir d'une solution approchée satisfaisante. Le problème de statique linéaire est résolu pour fournir une solution initiale $\bar{\mathbf{u}}$.
2. *Évaluation des forces internes et externes* Il est nécessaire de calculer le résidu du système linéarisé en $\bar{\mathbf{u}}$, c'est-à-dire d'évaluer les forces internes et externes $\mathbf{F}^{int}(\bar{\mathbf{u}})$ et $\mathbf{F}^{ext}(\bar{\mathbf{u}})$. Cette procédure a déjà été évoquée lors de la description de l'algorithme de relaxation dynamique.
3. *Assemblage de la matrice de rigidité tangentielle* Les contributions respectives de chaque élément e du système, au travers des matrices de rigidité tangentielle élémentaires $\mathbf{K}_{T_e}$, sont calculées et assemblées à la matrice globale par une procédure identique au cas linéaire.
4. *Assemblage des conditions aux limites* Le système ainsi formé est modifié pour prendre en compte les conditions aux limites en déplacement. Dans la cas linéaire elles étaient exprimées sur la variable $\mathbf{u}$, il est nécessaire de les transformer pour les exprimer sur la variable $\Delta \mathbf{u}$. Nous utilisons également la méthode par pénalisation.
5. *Résolution du système et calcul du pas* La résolution du système linéaire nous donne le pas $\Delta \mathbf{u}$ à effectuer dans la direction de la solution : $\bar{\mathbf{u}} \leftarrow \bar{\mathbf{u}} + \Delta \mathbf{u}$. D'une manière générale, la direction de recherche est satisfaisante mais la taille du pas (autrement dit la norme de $\Delta \mathbf{u}$) n'est pas optimal. Il est néanmoins possible de calculer le pas optimal (méthode de Newton avec recherche linéaire).
6. *Évaluation de la convergence* La convergence est évaluée à partir de la norme du pas $\Delta \mathbf{u}$ relativement au vecteur déplacement $\mathbf{u}$. Si $\|\Delta \mathbf{u}\| \leq \epsilon \|\mathbf{u}\|$, alors l'algorithme est stoppé et la valeur $\bar{\mathbf{u}}$ est retenue comme solution. Dans le cas contraire, nous améliorons la solution en revenant à l'étape 2.

Les difficultés La procédure est aisément programmable, robuste et converge rapidement, en général quelques itérations suffisent (pour $\epsilon = 10^{-6}$). Les principales difficultés sont liées à l'évaluation de la matrice de rigidité tangentielle et à la nécessité de produire des méthodes numériques de résolution efficaces, puisqu'un système linéaire doit être résolu à chaque itération. Ces deux points sont détaillés dans les sections suivantes.

4.5.3 Linéarisation et discrétisation de la forme variationnelle

L'objectif de cette section est de présenter brièvement le calcul de la matrice de rigidité tangentielle, le lecteur pourra se reporter à Wriggers [2002] et Zienkiewicz and Taylor [2000b] pour les développements complets. En reprenant la forme faible des travaux virtuels (Equation 4.16) et en considérant que seules les forces internes dépendent de l'état de déformation, nous pouvons dériver la forme linéarisée (Equation 4.43, où $\bar{\mathbf{S}}$ est le second tenseur de Piola-Kirchhoff, $\delta\bar{\mathbf{E}}$ est la variation infinitésimale du tenseur de Green-Lagrange, $\bar{\mathbf{C}}^{SE}$ est le *tenseur des modules tangentiels* et $\Delta\bar{\mathbf{E}}$ est la variation du tenseur de Green-Lagrange). Les quantités sont évaluées à l'état courant de déformation $\bar{\mathbf{u}}$.

$$\begin{aligned} D\delta\mathcal{W}(\bar{\mathbf{u}}, \delta\mathbf{u}) \cdot \Delta\mathbf{u} &= D \left\{ \int_{\Omega_0} \delta\bar{\mathbf{E}} \cdot \bar{\mathbf{S}} \, d\Omega_0 \right\} \cdot \Delta\mathbf{u} \\ &= \int_{\Omega_0} \left\{ \underbrace{\delta\bar{\mathbf{E}} \cdot \bar{\mathbf{C}}^{SE} [\Delta\bar{\mathbf{E}}]}_{(1)} + \underbrace{\nabla(\Delta\mathbf{u}) \bar{\mathbf{S}} \cdot \nabla(\delta\mathbf{u})}_{(2)} \right\} d\Omega_0 \end{aligned} \quad (4.43)$$

Le tenseur des modules tangentiels, encore appelé *tenseur second de l'élasticité*, est un tenseur au quatrième ordre reliant le taux du second tenseur de Piola-Kirchhoff au taux du tenseur de Cauchy (Equation 4.44), nous l'obtenons en différenciant la relation 4.27 par rapport au temps. Il est donc défini à partir de la fonction énergie interne et nous donnons son expression pour la loi Néo-Hookéenne en équation 4.45 [Belytschko *et al.*, 2000].

$$\dot{\mathbf{S}} = 2 \frac{\partial^2 \mathcal{W}^{int}}{\partial \mathbf{C} \partial \mathbf{C}} [\dot{\mathbf{C}}] \quad \mathbf{C}^{SE} = \frac{\partial^2 \mathcal{W}^{int}}{\partial \mathbf{C} \partial \mathbf{C}} \quad (4.44)$$

$$\bar{C}_{IJKL}^{SE} = \lambda C_{IJ}^{-1} C_{KL}^{-1} + (\mu - \lambda \ln J) \left\{ C_{IK}^{-1} C_{JL}^{-1} + C_{IL}^{-1} C_{KJ}^{-1} \right\} \quad (4.45)$$

La discrétisation de cette forme faible linéarisée suit les mêmes étapes élémentaires que dans le cas linéaire. Elle permet de mettre en évidence deux matrices (Equation 4.46),

appelées *matrice de rigidité matérielle* et *matrice de rigidité géométrique* correspondant respectivement aux termes (1) et (2) de l'équation 4.43.

$$\begin{aligned}
 D\delta\mathcal{W}(\bar{\mathbf{u}}, \delta\mathbf{u}) \cdot \Delta\mathbf{u} &\approx \bigcup_{e=1}^{n_e} \sum_{I=1}^n \sum_{K=1}^n \delta\mathbf{u}_I^T \left\{ \bar{\mathbf{K}}_{TIK}^{mat} + \bar{\mathbf{K}}_{TIK}^{geo} \right\} \Delta\mathbf{u}_K \\
 &= \bigcup_{e=1}^{n_e} \delta\mathbf{u}_e^T \bar{\mathbf{K}}_{Te} \Delta\mathbf{u}_e \\
 &= \delta\mathbf{u}^T \bar{\mathbf{K}}_T \Delta\mathbf{u}
 \end{aligned} \tag{4.46}$$

Matrice de rigidité matérielle

Du point de vue physique, la matrice de rigidité matérielle lie les incréments (ou taux) de forces internes aux incréments (ou taux) de déplacements. Elle dépend donc de la nature du matériel élastique, c'est-à-dire des constantes et la loi de comportement utilisée, reflétées dans le second tenseur élastique $\mathbf{C}^{SE}$. Pour la mise sous forme matricielle, ce tenseur est intégré sous sa forme de Voigt $\bar{\mathbf{D}}$ (Equation 4.47).

$$(1) \rightarrow \approx \bigcup_{e=1}^{n_e} \sum_{I=1}^n \sum_{K=1}^n \delta\mathbf{u}_I^T \underbrace{\int_{\Omega_0^e} \bar{\mathbf{B}}_I^T \bar{\mathbf{D}} \bar{\mathbf{B}}_K d\Omega_0}_{\bar{\mathbf{K}}_{TIK}^{mat}} \Delta\mathbf{u}_K \tag{4.47}$$

Matrice de rigidité géométrique

$$\begin{aligned}
 (2) \rightarrow &\approx \bigcup_{e=1}^{n_e} \sum_{I=1}^n \sum_{K=1}^n \int_{\Omega_0^e} (\Delta\mathbf{u}_K \otimes \nabla_X N_K) \bar{\mathbf{S}} \cdot (\delta\mathbf{u}_I \otimes \nabla_X N_I) d\Omega_0 \\
 &= \bigcup_{e=1}^{n_e} \sum_{I=1}^n \sum_{K=1}^n \delta\mathbf{u}_I^T \underbrace{\int_{\Omega_0^e} \left\{ (\nabla_X N_I)^T \bar{\mathbf{S}} (\nabla_X N_K) \right\} d\Omega_0}_{\bar{\mathbf{K}}_{TIK}^{geo}} \Delta\mathbf{u}_K
 \end{aligned} \tag{4.48}$$

4.5.4 Résolution numérique des systèmes linéaires

La procédure de Newton implique la résolution d'un système linéaire à chaque pas, étape critique et conditionnant la rapidité générale de l'algorithme de restauration. Que la restauration soit utilisée itérativement pour améliorer un modèle ou de manière séquentielle pour contraindre l'évolution géométrique d'un bassin, il apparaît nécessaire d'optimiser cette étape au moyen de techniques modernes de résolution. Lors du choix de la méthode, nous avons gardé à l'esprit plusieurs points :

1. Toutes les techniques de résolution se basent sur un ensemble d'opérations algébriques élémentaires, appelées classiquement *basic linear algebra subroutines* ou *sparse basic linear algebra subroutines* pour les vecteurs creux. Ces opérations élémentaires conditionnent en grande partie la rapidité de la méthode ; elles peuvent être optimisées pour une architecture particulière.
2. La gestion optimisée des systèmes linéaires creux est une opération complexe. La problématique fondamentale est la dualité entre un stockage optimisé d'une information non dense et l'accessibilité de l'information pour les opérations algébriques lors de la résolution.
3. La taille des systèmes peut être importante (> 50000 noeuds). Les architectures massivement parallèles sont désormais accessibles et classiquement utilisées en industrie pétrolière (notamment pour les calculs géophysiques ou les simulations de bassins). Nous ne disposons néanmoins pas de tels systèmes lors de nos travaux.

Considérant le premier point, nous reposons sur des bibliothèques optimisées **Atlas** [Whaley and Dongarra, 1997] et **Goto Blas** [Goto, 2003], largement utilisées et reconnues pour leur efficacité. Considérant les points suivants, nous avons opté pour le couplage de nos algorithmes avec des bibliothèques dédiées ; nous avons implanté de nombreuses interfaces orientées objets permettant d'assurer la conversion des données du système et le contrôle des paramètres. Deux grandes classes de méthodes sont généralement distinguées [Meurant, 1999] :

1. Les *méthodes directes* aboutissent à la solution exacte en un nombre fini d'opérations, classiquement par élimination de Gauss (cas général) ou décomposition de Cholesky (cas symétrique). Dans le cas de système creux, il est nécessaire d'ajuster les algorithmes pour les rendre exploitables : (1) la phase d'ordonnancement condense le système par permutation de lignes et colonnes (2) la phase de factorisation symbolique calcule une séquence de pivots exploitant le caractère creux, réduisant le coût mémoire et les opérations élémentaires (3) la phase de factorisation numérique applique la séquence pour factoriser la matrice (4) la phase de résolution applique l'élimination directe puis inverse pour produire une solution intermédiaire (5) la solution finale est obtenue par ordonnancement inverse de la solution intermédiaire. Gould *et al.* [2005] évaluent exhaustivement les différentes solutions logicielles actuellement disponibles ; nous avons retenu **Pardiso** [Schenk and Gartner, 2004], **Taucs** [Toledo, 2003], **SuperLU** [Demmel *et al.*, 1999] et **UmfPack** [Davis, 2003]. Ce sont les méthodes généralement privilégiées pour les systèmes de faible taille (< 10000 noeuds) car le coût mémoire et le coût calculatoire sont en n^3 .
2. Les *méthodes itératives* approchent la solution de manière itérative, il est nécessaire de fournir un critère de convergence généralement basé sur la norme du résidu $\mathbf{R}$ ($= \mathbf{K} \mathbf{u} - \mathbf{B}$, où $\mathbf{B}$ est le second membre). La plupart des méthodes repose sur une descente de gradient : partant d'une solution initiale, on la fait évoluer dans le sens

de $\nabla \mathbf{R}$. Les plus communément utilisées sont le résidu minimum généralisé (cas général) et le gradient conjugué (cas symétrique). La méthode de pénalisation, utilisée pour imposer les conditions aux limites, diminue le conditionnement du système et il est nécessaire d'utiliser la technique de pré-conditionnement (le système est modifié en un système différent mais de solution identique). Nous utilisons les bibliothèques **Taucs** [Toledo, 2003] et **LasPack** [Skalicky, 1996].

4.5.5 Bilan

La statique non-linéaire est fondamentalement basée sur les mêmes équations mais offre une alternative intéressante à la relaxation dynamique en raison de sa grande rapidité. Dans la perspective de la restauration, une telle caractéristique apporte plus de souplesse d'utilisation pour effectuer et tester itérativement plusieurs cinématiques complètes. A titre comparatif, nous avons repris le modèle présenté en figure 4.4 avec la même loi de comportement non linéaire Néo-Hookéenne : le temps de calcul est de 355 secondes (P4 - 2.2GHz - 1GB RAM). Les inconvénients sont essentiellement liés à une implantation informatique plus complexe.

4.6 Conclusions

Pour répondre au problème de restauration volumique, nous avons proposé deux approches en nous basant respectivement sur des concepts géométriques et des concepts mécaniques. La première est une extension directe des méthodes de restauration en coupe et en carte. Les règles géométriques liant la configuration présente et la configuration restaurée sont traduites en terme numérique : la conservation du volume et la minimisation de la déformation sont assurées par une procédure d'optimisation. Le cadre numérique de résolution est la méthode d'interpolation lisse discrète, pour laquelle nous avons développé une implantation spécifique (formulation matricielle). La deuxième approche assure la conservation des moments lors de la restauration, elle nécessite l'introduction d'une loi de comportement décrivant la réponse du matériel géologique aux contraintes mécaniques. Le cadre numérique de résolution est la méthode des éléments finis, classiquement utilisée en mécanique des solides, pour laquelle nous avons également développé une implantation spécifique. Dans les deux cas, le passage à une méthodologie pleinement tridimensionnelle apporte une grande flexibilité d'utilisation (conditions aux limites variées, hétérogénéités de comportement...) et des informations plus exhaustives que les méthodes 1-D, 2-D et 2.5-D (caractérisation 4-D de la structure : déformation et géométrie 3-D pour chaque étape de restauration séquentielle).

D'un point de vue fondamental, les concepts associés à la formulation cinématique sont bien maîtrisés en géologie et leur pertinence pour le problème de restauration n'est

plus à prouver. Le problème inhérent est la difficulté à apprécier quantitativement les paramètres : comment pondérer la conservation du volume par rapport à la minimisation de la déformation ? A l'inverse, la formulation mécanique présentée repose sur le modèle de l'élasticité isotrope et nous pouvons légitimement nous interroger sur la validité d'une telle représentation. En effet, aux échelles considérées, la déformation de la roche est fortement influencée par les structures internes (discontinuités entre les couches, contraste de compétence...). En revanche, les paramètres impliqués sont clairement identifiés en géologie tant du point de vue qualitatif que quantitatif.

D'un point de vue numérique, la méthode d'interpolation lisse discrète ne permet pas de prendre en compte les non-linéarités du problème (grandes déformations) au contraire de la méthode des éléments finis. En outre, cette dernière est généralement plus rapide car elle produit des systèmes mieux conditionnés que la formulation aux moindres carrés de la méthode DSI.

Chapitre 5

Restauration et déformation discontinue

Sommaire

5.1	Les différentes approches	100
5.2	Ensemble cohérent de conditions de contact	105
5.3	Résolution numérique des conditions de contact	112
5.4	Conclusions	122

La prise en compte des failles en restauration volumique est une étape critique à la fois par les enjeux sous-jacents que par les techniques numériques avancées nécessaires. Que ce soit à l'échelle du bassin ou du réservoir, les failles sont une composante majeure des modèles car elles influent sur le comportement statique et dynamique des structures géologiques. D'une part, la géométrie du réseau de failles est peu contrainte par les données de puits et entachée d'une forte incertitude en sismique. D'autre part, sa topologie reflète généralement un compromis entre les connaissances du géologue, le manque d'information et une réduction nécessaire de la complexité. Il existe donc une incertitude majeure associée à l'interprétation d'un réseau de failles et la restauration peut fournir un outil d'évaluation et de compréhension en terme de géométrie et de topologie. D'une manière générale, ce problème n'est que peu abordé dans la littérature et les solutions proposées ne nous semblent actuellement pas adaptées aux problèmes typiquement rencontrés en modélisation. Le modèle volumique utilisé pour la restauration doit être représentatif du modèle structural initial. Dans ce but, nous avons construit un objet (le *Solid Model*, chapitre 3) intégrant la topologie et la géométrie du réseau de failles. Nous nous intéressons dans ce chapitre au traitement algorithmique des failles lors de la restauration. Dans une première section, nous présentons et commentons les différentes approches possibles. Dans une deuxième section, nous développons une méthodologie pour construire automatiquement un ensemble de règles assurant la cohérence du réseau de failles dans la configuration

restaurée. Enfin, nous proposons deux approches pour assurer numériquement que le processus de restauration se conforme à cet ensemble de règles.

5.1 Les différentes approches

Le traitement de la déformation discontinue assure le caractère conforme des interfaces dans la configuration restaurée : il n'existe pas de recouvrement ou d'interstice entre les blocs de failles. Pour être valide géologiquement, la restauration doit faire coïncider à nouveau les points matériels séparés lors du mouvement relatif du bloc supérieur et inférieur d'une faille. Le coeur du problème est donc lié à l'estimation des rejets et deux approches peuvent être considérées :

1. *Rejets connus* Les rejets sont une donnée d'entrée du problème de restauration volumique : en tout point d'une faille, il est possible d'assigner a priori les composantes verticales et décrochantes du vecteur rejet. Du point de vue algorithmique, il est ensuite possible d'imposer le respect de ce vecteur lors de la restauration au moyen de contraintes DSI (restauration cinématique, Chapitre 4) ou de multiplicateurs de Lagrange (restauration mécanique, Chapitre 4). Certaines techniques de restauration [Massot, 2002; Lepage *et al.*, 2004] basent ainsi leurs calculs sur la donnée d'un nombre fini de vecteurs liant les différentes lèvres de failles du modèle structural. Une telle méthode n'assure en rien la cohérence des rejets dans le volume : des chevauchements et des interstices subsistent dans la configuration restaurée. Il est donc nécessaire de recourir à des techniques permettant d'évaluer le rejet en tout point d'une faille et non pas seulement au niveau des horizons pointés ; nous évaluons dans un premier temps les différentes possibilités.
2. *Rejets prédits* Les rejets sont alors considérés comme prédits par la restauration, c'est-à-dire que la configuration optimale des différents blocs de failles est calculée en minimisant un critère donné. Un tel critère est exprimé en termes géométriques (il impose un minimum de chevauchement [Rouby, 1994]) ou en terme de déformation (il correspond à une configuration de déformation minimale [Dunbar and Cook, 2003; de Santi *et al.*, 2003]). Nous verrons dans quelle mesure ces critères sont transposables en trois dimensions.

5.1.1 La modélisation des rejets

Les travaux de Souche [2005] abordent spécifiquement le problème de l'évaluation des rejets ; nous reprenons et complétons ici son analyse en incluant les travaux récents. S'il est possible de prévoir d'une manière théorique la distribution des rejets pour le cas de failles isolées, la complexité des interactions mécaniques au sein d'un réseau de failles (phénomène de coalescence, déflexion du champ de contrainte...) rend en pratique tout

calcul analytique impossible. Il est de fait nécessaire de recourir à certaines techniques numériques pour approximer le vecteur rejet.

Les approches géomécaniques

Les approches mécaniques considèrent les failles comme des discontinuités glissantes au sein d'un milieu déformable : le déplacement relatif de deux blocs est alors déduit de simulations des déplacements d'un domaine soumis à des contraintes régionales. Du point de vue numérique, la solution retenue de manière unanime est la discrétisation par éléments frontières [Crouch and Starfield, 1983] du problème de dislocation angulaire élastique [Rongved and Frasier, 1958]. Cette méthode permet de prédire la distribution des rejets sur les surfaces de failles [Willemse *et al.*, 1996; Maerten *et al.*, 1999; Healy *et al.*, 2004], dont les estimations quantitatives reposent fortement sur les conditions aux limites imposées. Or les techniques actuelles ne permettent pas d'apprécier correctement le champ de paléocontraintes. De plus, la complexité topologique des réseaux de failles traités est limitée. Pour ces raisons, l'apport des approches géomécaniques est essentiellement qualitatif. Ces modèles montrent notamment que la distribution des rejets d'une faille normale est fortement influencée par la présence de failles voisines et le branchement de failles mineures. Comme le souligne Souche [2005], l'utilisation typique de ces approches est itérative : elle consiste à modifier pas à pas le modèle structural (topologie et géométrie) pour honorer les prédictions et les enseignements de la modélisation mécanique.

Les approches géométriques

Alors que les approches mécaniques reposaient sur un modèle mécanique, les approches géométriques tentent de déduire les rejets de la géométrie des failles et des rejets verticaux observés sur les horizons interprétés. La caractérisation géométrique des rejets est essentiellement 2-D (les rejets ne sont évalués que ponctuellement au niveau des horizons interprétés) et ce n'est que récemment que ces techniques ont été étendues en 3-D (les rejets sont évalués sur toute la surface de faille).

Caractérisation bidimensionnelle L'estimation des rejets sur un horizon se divise en deux étapes : la création d'un modèle macro-topologique appariant les différentes lèvres de failles puis le calcul du rejet proprement dit. Cette procédure est généralement basée sur des heuristiques géométriques : les différents bords sont parcourus à la recherche de singularités angulaires pour déterminer les différentes lèvres de failles puis les relations de proximité géométrique ou des algorithmes de reconnaissance de formes permettent d'apparier les lèvres noeud à noeud [Duvina, 2000; Massot, 2002]. Les inconvénients majeurs sont le manque de robustesse, impliquant un contrôle qualité systématique, et une mauvaise appréciation des composantes décrochantes des rejets. Les failles traversant

de part en part ou partiellement le modèle constituent les cas pathologiques pour cette caractérisation.

Caractérisation tridimensionnelle Comme le souligne Moyen [2005], l’extension en trois dimensions n’est pas triviale car les heuristiques géométriques ne sont plus applicables du point de vue algorithmique. Il propose donc d’abaisser le degré de complexité en se ramenant artificiellement au cas précédent : une série d’horizons est extraite à partir des iso-valeurs d’une propriété temps et la procédure décrite dans le paragraphe précédent est répétée pour chacun de ces horizons. Les résultats sont ensuite transférés sur les différentes surfaces de failles. Les inconvénients de cette approche sont directement hérités de la robustesse des heuristiques géométriques et il est en pratique difficile d’obtenir un échantillonnage régulier des vecteurs rejets. Pour ces raisons, Souche [2005] et Moyen [2005] proposent une alternative où les algorithmes géométriques cèdent la place à des méthodes d’interpolation sous contraintes algébriques. La première étape consiste à déterminer la direction des vecteurs rejets, c’est à dire les stries de failles, en interpolant les directions connues localement et en contraignant par des informations secondaires : Massot [2002], Thibaut [1994] et Thibaut *et al.* [1996] préconisent l’utilisation des courbures, et Moyen [2005] celle de la normale aux horizons projetées sur la surface de faille. Dans la deuxième étape, l’intensité du rejet est estimée à partir d’une double paramétrisation : une propriété temps géologique t , calée aux horizons interprétés, est interpolée séparément sur le côté + (bloc supérieur) et le côté – (bloc inférieur). Considérons un point du côté + de temps t , en suivant le champ des stries (méthode de Runge-Kuta par exemple), nous pouvons trouver le point possédant le même temps t mais du côté –, d’où le rejet. Si la propriété temps est cohérente, comme dans le cas du modèle Geochron [Mallet, 2004] utilisé par Souche [2005] et Moyen [2005], alors le rejet est géologiquement cohérent sur tout le réseau de failles, jonctions de failles comprises. Cette méthodologie présente une grande robustesse.

Prise en compte a priori des rejets

A cette étape, nous disposons pour chaque faille d’une propriété vectorielle rejet régulièrement distribuée et il est possible de l’intégrer dans les algorithmes de restauration décrits au chapitre 4. Au moyen des informations du *SolidModel*, pour chaque faille F du domaine nous associons à chaque noeud de F^+ un point d’impact sur F^- grâce au vecteur rejet (cette recherche géométrique est optimisée par un arbre octal). Ces deux points doivent être à la même position dans la configuration restaurée. Ceci peut être exprimé sous forme de contrainte DSI liant les deux vecteurs de restauration ; c’est une contrainte de type delta [Mallet, 2002]. Elle est ajoutée au système avec un fort poids pour être honorée strictement. Dans le cas des éléments finis, nous construisons une expression variationnelle contrainte afin d’honorer les rejets soit par des multiplicateurs de Lagrange

soit par pénalisation.

Dans le cadre de nos travaux, cette méthodologie est la première implantée et utilisée pour la restauration des structures faillées. Elle présente l'intérêt pratique d'exploiter d'autres travaux déjà bien intégrés. Si elle est parfaitement exploitable du point de vue algorithmique, elle repose sur des hypothèses géométriques. L'utilisation de la géométrie des lèvres de failles, et plus généralement de la propriété temps, pour contrôler la direction des stries conduit le plus souvent à ignorer la composante décrochante des rejets. À l'inverse, ignorer la géométrie des horizons pour se baser sur la géométrie des failles conduit à d'inévitables erreurs au regard de l'incertitude associée à la géométrie des failles [Lecour, 2000]. L'utilisation de techniques d'interpolation induit également une surévaluation du rejet et une accommodation linéaire de la déformation dans les zones peu contraintes par des données dures. Enfin, sous la perspective de la restauration, le plus grand défaut reste que la modélisation géométrique des rejets ne calcule qu'un rejet total sans considération de son évolution temporelle : la restauration séquentielle n'est donc pas possible car toute la déformation cassante serait accommodée lors de la première étape.

5.1.2 Les rejets : produit de la restauration

Du point de vue technique, il n'y a donc pas d'obstacle à l'intégration des rejets obtenus au préalable par modélisation géométrique. En revanche, la valeur et l'intérêt d'une restauration structurale s'en trouvent diminués au regard des hypothèses limitantes. Intuitivement, la restauration est une source potentielle d'information sur la distribution des rejets à la fois dans l'espace et dans le temps : la restauration nous renseigne sur la géométrie des dépôts au cours du temps, elle pourrait tout autant nous renseigner sur la géométrie des discontinuités. Nous évaluons les différentes approches adoptées pour la restauration des cartes.

Respect des failles en post-traitement

Traditionnellement, les techniques de restauration en cartes [Audibert, 1991; Gratier and Guillier, 1993; Rouby, 1994] ou en pseudo-volumes [Williams *et al.*, 1997] tentent de répondre à ce problème en reléguant le traitement des failles à une étape de post-traitement après dépliage. Les discontinuités sont enlevées itérativement par des rotations rigides des blocs dépliés jusqu'à minimisation au moindre carré d'un critère géométrique, généralement correspondant au minimum des vides et recouvrements entre blocs. Comme le notent Rouby *et al.* [2000], de nombreuses études de cas ont montré la validité d'une telle méthodologie aussi bien en contexte décrochant [Audibert, 1991; Richard, 1993], compressif [Bourgeois *et al.*, 1997] et extensif [Rouby *et al.*, 1993b,a, 1996b,a] : la déformation discontinue peut être accommodée principalement par mouvements rigides de blocs. Un tel procédé de restauration est donc intéressant car il ne repose pas sur une connaissance a

priori des rejets et représente bien les phénomènes de déformation discontinue. Les avantages tiennent de la simplicité algorithmique du traitement : il peut être réalisé sous la supervision exclusive de l'utilisateur [Gratier and Guillier, 1993; Williams *et al.*, 1997] ou assisté par un programme optimisant le positionnement des blocs [Audibert, 1991; Rouby, 1994]. Une telle méthodologie met facilement en évidence les erreurs de modélisation (un bloc manquant ou mal cartographié provoque un mauvais ajustement). Les inconvénients sont liés au manque de précision car l'ajustement est approximatif.

La transposition en trois dimensions est difficile à mettre en oeuvre du point de vue algorithmique notamment car il est alors nécessaire d'ajuster géométriquement un réseau de surfaces parfois complexe. Un des obstacles majeurs reste d'ordre topologique. Lorsqu'une terminaison latérale de faille est présente, Rouby [1994] compartimente artificiellement le domaine d'étude par prolongation des failles ou ajout de discontinuités : l'algorithme se ramène donc au cas canonique à blocs multiples sans discontinuités internes. De telles modifications topologiques sur un maillage tétraédrique en restauration sont peu envisageables car celui-ci perdrait sa validité applicative : comment conserver les informations macro-topologiques, la conformité au modèle structural et la qualité du support calculatoire ? L'édition des maillages tétraédriques en Géosciences est encore un sujet actif de recherche [Tertois and Mallet, 2005].

Respect des failles au cours du traitement

Dunbar and Cook [2003] proposent une alternative intéressante où le respect des failles est traité directement lors du dépliage au moyen de contraintes cinématiques additionnelles. Les lèvres de failles sont contraintes à glisser librement le long de leurs lèvres conjuguées durant le dépliage, ainsi le point de contact et la direction de mouvement ne sont pas fixés a priori. La distribution finale des rejets fait partie d'un processus global de minimisation de l'énergie de déformation. L'algorithme se divise en deux étapes :

1. Partant d'une surface triangulée initiale, un algorithme géométrique assigne un cadre macro-topologique : les différentes lèvres conjuguées sont calculées et orientées en parcourant récursivement les bords de la surface et en repérant les singularités géométriques.
2. Le problème de dépliage est considéré comme la remise à plat d'une membrane hyperélastique résolue par la méthode des éléments finis ; pour chaque lèvre de faille est ajoutée une condition de contact permettant le glissement sans frottement. Le problème est résolu par des techniques d'optimisation non linéaires afin de trouver la configuration dépliée et la distribution des rejets qui minimisent globalement l'énergie de déformation.

Un principe équivalent pour la restauration des volumes a été proposé par de Santi *et al.* [2003] pour modéliser la restauration d'un bloc de faille indépendant glissant sur un

mur rigide. Considérant les limitations des autres méthodologies, nous avons opté pour une approche similaire détaillée dans les sections suivantes.

5.2 Ensemble cohérent de conditions de contact

La restauration des structures géologiques faillées nécessite d'imposer des conditions supplémentaires aux limites de blocs de failles afin de conserver la cohérence géologique de la configuration restaurée. Nous proposons de décrire dans cette section la définition et la construction d'un ensemble cohérent de conditions de contact.

5.2.1 Contraintes cinématiques de contact en restauration

Dans les simulations mécaniques classiques, comme par exemple dans la modélisation des collisions de voitures, le modélisateur n'a pas connaissance a priori des interfaces en contact : toutes les parties du modèle peuvent potentiellement entrer en collision entre elles ou avec les éléments extérieurs. Les conditions de contact sont donc définies au sens large et il n'est pas rare de les résumer tout simplement à une condition de non interpénétration : une seule frontière est définie pour toute la superficie du modèle et ne peut s'interpénétrer. En restauration, les conditions nécessaires à la cohérence géologique sont plus fortes, ce qui est à la fois un avantage calculatoire car elles réduisent le temps de recherche des éléments en contact, et un inconvénient algorithmique car il est nécessaire de définir et de construire de manière cohérente un ensemble de conditions.

Définition Nous appelons *contrainte cinématique de contact* en restauration les restrictions imposées aux noeuds du modèle en vue d'assurer dans l'état restauré le scellement adéquat des failles. En pratique, cela consiste à assigner à chaque noeud situé sur une faille une zone de glissement autorisée et cohérente avec la structure. Le modèle macro-topologique développé prend ici tout son sens : les heuristiques géométriques ne suffisent plus et des informations fortes sur les relations logiques sont nécessaires. Nous utiliserons trois grands types de contraintes élémentaires suivant la dimension topologique de l'objet de référence. Les contraintes C^l imposent le glissement d'une ligne sur une autre et sont définies par la donnée d'une ligne esclave L_s et d'une ligne maître L_m , nous les explicitons par la notation $C^l(L_s, L_m)$. De manière similaire, la contrainte $C^{ss}(S_s, S_m)$ prescrit le déplacement d'une surface esclave S_s sur une surface maître S_m . Enfin, bien que n'offrant aucune latitude dans les mouvements relatifs, nous introduisons la contrainte C^{nn} liant deux noeuds lors de la restauration.

Notations Afin de clarifier les développements, nous désignons une intersection de failles I au moyen d'un triplet ordonné $(F_m, F_b, \diamond)$, où F_b est une faille mineure se bran-

chant sur une faille majeure F_m du côté $\diamond$ de cette dernière. Le bloc opposé est référencé en utilisant $\bar{\diamond}$.

Les contraintes extrinsèques

Les contraintes extrinsèques définissent localement la valeur du vecteur rejet. Nous les qualifions d'extrinsèques car elles nécessitent une intervention du modélisateur afin de spécifier quels noeuds sont contraints et comment ils le sont. L'objectif de ce type de conditions est double. Elles permettent d'imposer un vecteur rejet lorsque celui-ci est connu : certains corps sédimentaires comme les chenaux observables en imagerie sismique offrent des informations locales sur le rejet d'une faille. Enfin, elles permettent de contraindre volontairement la cinématique de la restauration soit parce que l'association des lèvres de failles est évidente géométriquement soit pour résoudre une ambiguïté.

Les contraintes intrinsèques

Les contraintes intrinsèques maintiennent la cohérence géologique de l'état restauré. Nous les déclarons intrinsèques car la simple donnée du réseau de failles, par l'intermédiaire d'un modèle macro-topologique, suffit à déterminer l'ensemble des contraintes géologiquement nécessaires. Nous distinguons trois types différents suivant les objectifs :

1. **La cohérence des surfaces de failles** dans l'état restauré est assurée lorsque pour toute faille F du réseau il n'existe pas de recouvrement ou d'interstice entre $\Gamma_t^{F^+}$ et $\Gamma_t^{F^-}$. Ces contraintes assurent donc le glissement libre des noeuds de F^+ sur $\Gamma_t^{F^-}$. En réalité, la discrétisation nécessairement limitée des failles ne garantit pas que les noeuds de F^- soient alors sur $\Gamma_t^{F^+}$; de faibles recouvrements ou interstices peuvent subsister. Il est nécessaire de symétriser cette condition en imposant à la fois $C^{ss}(F^+, F^-)$ et $C^{ss}(F^-, F^+)$ (Equation 5.1). Pour fixer les idées : la contrainte $C^{ss}(F^+, F^-)$ exprime le fait que les noeuds de F^+ doivent être localisés sur la configuration restaurée $\Gamma_t^{F^-}$ de F^- .

$$\begin{aligned} C^{ss}(F^+, F^-) : \quad F^+ &\rightarrow \Gamma_t^{F^-} \\ C^{ss}(F^-, F^+) : \quad F^- &\rightarrow \Gamma_t^{F^+} \end{aligned} \quad (5.1)$$

2. **La cohérence des branchements de failles** impose des conditions particulières sur les intersections entre les différentes failles ou au contraire impose plus de liberté de mouvement. Si nous considérons une faille F_b se branchant sur une faille majeure F_m (le branchement est positionné du côté $\diamond$ de F_m), il est nécessaire de distinguer deux cas de figure pour plus de vraisemblance géologique [Dunbar and Cook, 2003] :

- Le *branchement antithétique* est un branchement de la faille F_b avec un fort angle d'incidence (Figure 5.1 (b)). La classification des branchements peut être issue d'un angle critique donné ou d'une définition au préalable par l'utilisateur. Dans ce cas, la ligne de branchement doit être contrainte de sorte que les noeuds de $F_b^+ \cap F_m^\diamond$ se déplacent librement sur $\Gamma_t^{F_b^- \cap F_m^\diamond}$ et inversement (Equation 5.2). Nous désignons ces intersections comme $I_{BA}(F_m, F_b, \diamond)$.

$$\begin{aligned} C^{ll}(F_b^+ \cap F_m^\diamond, F_b^- \cap F_m^\diamond) : \quad & F_b^+ \cap F_m^\diamond & \rightarrow & \Gamma_t^{F_b^- \cap F_m^\diamond} \\ C^{ll}(F_b^- \cap F_m^\diamond, F_b^+ \cap F_m^\diamond) : \quad & F_b^- \cap F_m^\diamond & \rightarrow & \Gamma_t^{F_b^+ \cap F_m^\diamond} \end{aligned} \quad (5.2)$$

- Le *branchement synthétique* est un branchement de la faille F_b avec un faible angle d'incidence, une faille listrique à fort pendage se branchant sur un détachement basal en est un bon exemple (Figure 5.1 (c)). Contrairement au cas précédant qui restreignait les mouvements des noeuds situés à l'intersection, une telle configuration permet une plus grande latitude de mouvement : si nous reprenons notre exemple précédent, la surface de glissement du bloc supérieur est composée à la fois de la faille listrique mais également du détachement basal. Nous désignons ces intersections comme $I_{BS}(F_m, F_b, \diamond)$ et l'équation 5.3 résume de manière plus formelle les différentes contraintes résultantes. Nous remarquons qu'elles étendent les contraintes imposées sur les failles : $C^{ss}(F_b^-, F_b^+)$ (Equation 5.1) devient $C^{ss}(F_b^-, F_b^+ \cup \dots)$ (Equation 5.3). Nous verrons dans la pratique comment assurer la compatibilité de toutes les contraintes.

$$\begin{aligned} C^{ss}(F_b^-, F_b^+ \cup F_m^\diamond) : \quad & F_b^- & \rightarrow & \Gamma_t^{F_b^+ \cup F_m^\diamond} \\ C^{ss}(F_b^+, F_b^- \cup F_m^\diamond) : \quad & F_b^+ & \rightarrow & \Gamma_t^{F_b^- \cup F_m^\diamond} \\ C^{ss}(F_m^\diamond, F_m^\diamond \cup F_b^-) : \quad & F_m^\diamond & \rightarrow & \Gamma_t^{F_m^\diamond \cup F_b^-} \\ C^{ss}(F_m^\diamond, F_m^\diamond \cup F_b^+) : \quad & F_m^\diamond & \rightarrow & \Gamma_t^{F_m^\diamond \cup F_b^+} \end{aligned} \quad (5.3)$$

3. **La cohérence des intersections de failles** concerne le cas des intersections franches de failles (Figure 5.1 (d)), dite configuration en X, et est imposée sur les différentes lignes d'intersection pour prévenir leur séparation lors du dépliage. Trois paires de contraintes élémentaires sont nécessaires (Equation 5.4) et sont obtenues par permutation circulaire. Ces intersections sont notées $I_X(F_m, F_b)$, la distinction faille majeure et mineure n'est pas nécessaire, non plus que celle du bloc de branchement.

$$\begin{aligned}
 C^{ll}(F_m^+ \cap F_b^+, F_m^- \cap F_b^+) : & \quad F_m^+ \cap F_b^+ & \rightarrow & \quad \Gamma_t^{F_m^- \cap F_b^+} \\
 C^{ll}(F_m^- \cap F_b^+, F_m^+ \cap F_b^+) : & \quad F_m^- \cap F_b^+ & \rightarrow & \quad \Gamma_t^{F_m^+ \cap F_b^+} \\
 \\
 C^{ll}(F_m^- \cap F_b^+, F_m^- \cap F_b^-) : & \quad F_m^- \cap F_b^+ & \rightarrow & \quad \Gamma_t^{F_m^- \cap F_b^-} \\
 C^{ll}(F_m^- \cap F_b^-, F_m^- \cap F_b^+) : & \quad F_m^- \cap F_b^- & \rightarrow & \quad \Gamma_t^{F_m^- \cap F_b^+} \\
 \\
 C^{ll}(F_m^- \cap F_b^-, F_m^+ \cap F_b^-) : & \quad F_m^- \cap F_b^- & \rightarrow & \quad \Gamma_t^{F_m^+ \cap F_b^-} \\
 C^{ll}(F_m^+ \cap F_b^-, F_m^- \cap F_b^-) : & \quad F_m^+ \cap F_b^- & \rightarrow & \quad \Gamma_t^{F_m^- \cap F_b^-}
 \end{aligned} \tag{5.4}$$

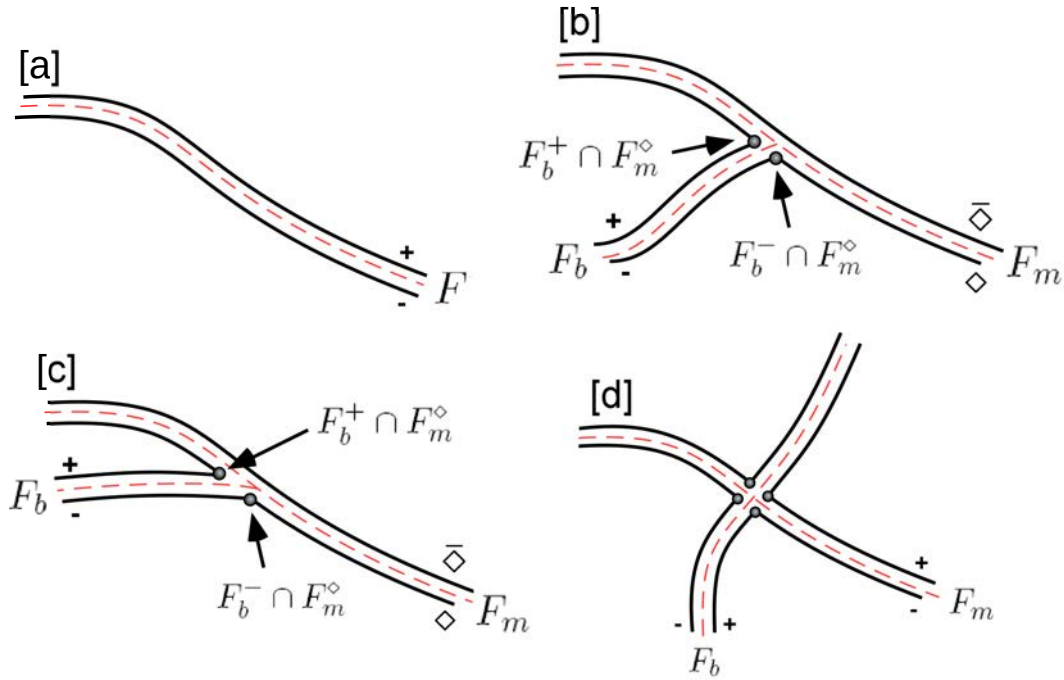


FIG. 5.1 – Les différentes relations logiques entre failles : [a] faille isolée [b] branchement antithétique [c] branchement synthétique [d] intersection franche

Les contraintes hybrides

Les contraintes hybrides permettent la cohérence géologique de l'état restauré au niveau de l'horizon de référence H , elles nécessitent la donnée de l'horizon de référence et nous les dénommons hybrides (ou semi-intrinsèques) pour cette raison. Pour fixer les idées, nous pouvons virtuellement nous ramener à une restauration en carte de H : il s'agit de

transposer les contraintes intrinsèques pour assurer la cohérence à l'état restauré de H . Il suffit alors de reprendre les équations 5.1, 5.2, 5.3 et 5.4 en ajoutant $H \cap \{\dots\}$ à chacune des requêtes macro-topologiques. Les contraintes C^{ss} deviennent C^{ll} et les contraintes C^{ll} deviennent de la même manière C^{nn} . Nous ne les détaillerons pas ici.

Remarques

L'énoncé des contraintes cinématiques nécessaires est directement dérivé du caractère géologique de notre problème, le formalisme adopté n'est là que pour exprimer en terme informatique ce que le géologue conçoit intuitivement. Les difficultés sont essentiellement algorithmiques. Elles tiennent en premier lieu à la construction automatique du jeu de contraintes avec un minimum d'interaction avec l'utilisateur, car dans les configurations complexes, la spécification à la main est fastidieuse. La deuxième difficulté est d'exprimer numériquement ces contraintes cinématiques, la tâche est plus difficile qu'il n'y paraît. Une contrainte $C(a, b)$ exprime que les noeuds de la région a doivent se situer sur la configuration restaurée Γ_t^b de b , et que leurs positions doivent minimiser l'énergie globale du système. Or nous n'avons pas de connaissance a priori sur la géométrie de Γ_t^b ni sur la position optimale des noeuds.

Affaiblissement des contraintes Les ensembles décrits précédemment assurent une conformité géométrique stricte des interfaces, c'est-à-dire que tout noeud se situant sur une faille est nécessairement positionné sur le bloc opposé dans la configuration restaurée. Or une telle contrainte peut mener à des incohérences de modélisation. Il est nécessaire de travailler sur un domaine d'étude restreint qui inclus donc partiellement le réseau de failles : les surfaces de glissement sont incomplètes (Figure 5.2).

Redondance des contraintes Certaines contraintes sont localement redondantes. Considérons le cas simple d'une faille F_b se branchant de manière antithétique sur une faille majeure F_m . Les noeuds situés le long de l'intersection sont contraints à demeurer à la fois sur le côté opposé de F_b et sur le côté opposé de F_m (Equation 5.2), autrement dit ils sont nécessairement sur l'intersection dans la configuration restaurée. En conséquence, nous disons que la contrainte C^{ll} visant à imposer la cohérence du branchement de faille est redondante vis-à-vis des contraintes C^{ss} visant à imposer la cohérence des surfaces de failles (Equation 5.1). Les contraintes hybrides peuvent être perçues au même titre comme redondantes. Du point de vue numérique, nous avons constaté qu'il est préférable d'imposer explicitement toutes les contraintes sur les branchements de failles pour des raisons de stabilité et de convergence.

Ambiguïté des contraintes Il est parfois nécessaire d'imposer certaines contraintes extrinsèques afin de lever une indétermination potentielle. Si une faille sépare deux blocs

topologiquement disjoints, les contraintes intrinsèques ne suffisent pas pour produire une solution : les deux blocs peuvent potentiellement glisser l'un contre l'autre sans trouver de point de stabilité. Aussi nous énonçons la condition suivante : pour tout bloc de faille possédant au moins un bord sur la frontière du domaine d'étude, il est nécessaire d'imposer au moins une contrainte extrinsèque de rejet, dite *contrainte extrinsèque de non-ambiguïté*.

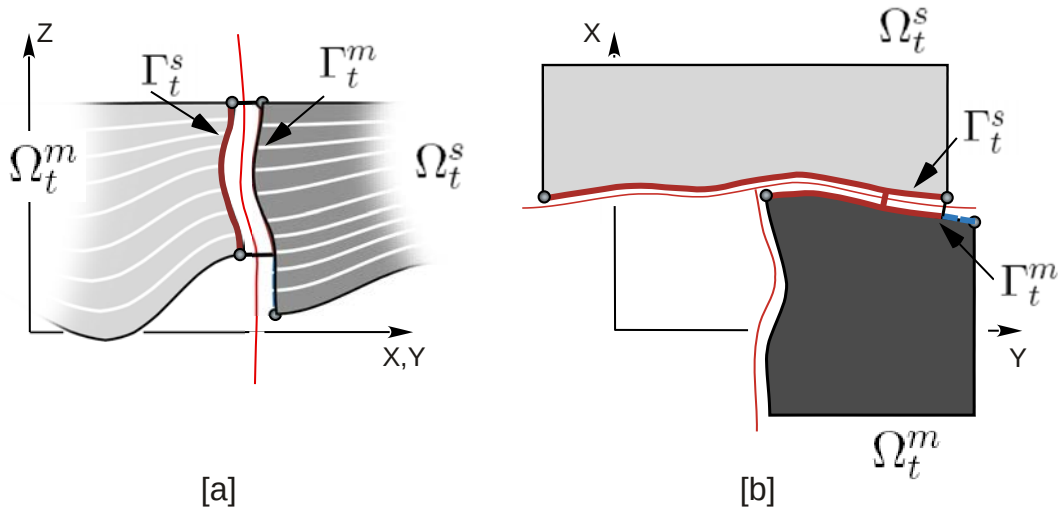


FIG. 5.2 – Affaiblissement des contraintes cinématiques de contact à proximité des bords du domaine d'étude : [a] limite verticale du domaine [b] limite horizontale du domaine

5.2.2 Algorithme de construction

La détermination des contraintes cinématiques repose sur la donnée des failles, c'est-à-dire qu'une intervention de l'utilisateur est nécessaire pour spécifier manuellement quelles sont les frontières de type faille. L'algorithme procède à la détermination des différentes intersections, à leur classification, puis au calcul effectif des contraintes. Nous rappelons qu'une des difficultés majeures est liée à la restauration séquentielle : elle introduit des modifications topologiques (destruction de la couche supérieure) rendant impossible tout calcul au préalable des contraintes. Celles-ci sont donc calculées en début de chaque cycle de restauration.

Détermination des intersections La première étape consiste à déterminer les différentes intersections de failles au sein du modèle ; le modèle macro-topologique fournit la liste des surfaces de failles représentées mais non pas la liste des intersections effectives. Parmi tous les couples de failles non ordonnés possibles (F_1, F_2) , une première sélection rapide est effectuée pour discriminer les intersections potentielles : si la boîte englobante de F_1 intersecte la celle de F_2 , alors ce couple est retenu, sinon il est éliminé. Pour dé-

terminer ensuite s'il y a effectivement intersection, il suffit qu'une des régions $F_1^+ \cap F_2^+$, $F_1^+ \cap F_2^-$, $F_1^- \cap F_2^+$ ou $F_1^- \cap F_2^-$ existe et soit non vide.

Classification des intersections Nous avons alors un ensemble $\mathcal{I}$ d'intersection de failles, dont les couples ne sont pas ordonnés, c'est-à-dire que nous n'avons pas encore affecté les relations logiques de branchements. L'objectif de cette deuxième étape est de déterminer ces relations et de répartir l'ensemble des intersections de failles en trois sous-ensembles : $\mathcal{I}_{BA}$ pour les branchements antithétiques, $\mathcal{I}_{BS}$ pour les branchements synthétiques et $\mathcal{I}_X$ pour les intersections franches. Pour chaque couple non ordonné (F_1, F_2) de $\mathcal{I}$, nous évaluons quatre propositions : (1) $\rightarrow F_1^+ \cap F_2^+$, (1') $\rightarrow F_1^+ \cap F_2^-$, (2) $\rightarrow F_1^- \cap F_2^+$ et (2') $\rightarrow F_1^- \cap F_2^-$.

1. Si toutes ces propositions sont non vides, alors (F_1, F_2) est une intersection en X et nous l'ajoutons à $\mathcal{I}_X$.
2. Si une seule de ces propositions est non vide, alors il subsiste une indétermination : une des failles à été trop partiellement incluse dans le modèle structural initial. Il est nécessaire de recourir à une interaction avec l'utilisateur pour appliquer les contraintes nécessaires à cette intersection.
3. Si deux propositions exactement sont non vides, alors il s'agit d'un branchement de failles et il est nécessaire de le polariser en déterminant la faille majeure et la polarité de branchement : les propositions non vides sont nécessairement de la forme $F_\alpha^+ \cap F_\beta^\diamond \neq \emptyset$ et $F_\alpha^- \cap F_\beta^\diamond \neq \emptyset$. Alors F_α se branche sur F_β du côté $\diamond$. Une simple heuristique géométrique sur l'angle des plans de failles permet d'attribuer ce couple aux ensembles $\mathcal{I}_{BA}$ ou $\mathcal{I}_{BS}$.
4. Si une unique proposition est non vide, alors il s'agit d'une frontière du modèle et aucun traitement n'est nécessaire ni possible.

Traitement des failles Nous introduisons deux groupes de contraintes : $\mathcal{C}^l$ regroupe toutes contraintes de type C^l tandis que $\mathcal{C}^{ss}$ celles de type C^{ss} . Le traitement des failles est relativement simple puisqu'il consiste à ajouter à $\mathcal{C}^{ss}$ deux contraintes pour chacune des failles (Equation 5.1) : $\mathcal{C}^{ss} \leftarrow \mathcal{C}^{ss}(F^+, F^-)$ et $\mathcal{C}^{ss} \leftarrow \mathcal{C}^{ss}(F^-, F^+)$. Nous introduisons un opérateur $\top^{ss}$ (une simple fonction du point de vue informatique), renvoyant pour toute région surfacique $F^\diamond$ la surface de glissement opposée suivant les contraintes stockés dans $\mathcal{C}^{ss}$ à cet instant précis. Ainsi, pour le moment et pour toute faille F , $\top^{ss}(F^\diamond) = F^\diamond$.

Traitement des intersections Les trois ensembles d'intersections sont traités successivement pour calculer les différentes contraintes à concaténer soit à $\mathcal{C}^{ss}$ soit à $\mathcal{C}^l$ suivant leur nature. Les ensembles $\mathcal{I}_{BA}$ et $\mathcal{I}_X$ ne présentent pas de problème particulier ; en revanche nous avons vu que la prise en compte des branchements synthétiques est problématique.

1. $\mathcal{I}_{BA}$ est un ensemble de branchements de type antithétique $I_{BA}(F_m, F_b, \diamond)$, nous rappelons que $\diamond$ est le bloc de F_m contenant F_b . Deux contraintes différentes sur les lignes de branchement sont nécessaires (Equation 5.2) :

$$\begin{aligned} - \mathcal{C}^{ll} &\leftarrow C^{ll}(F_b^+ \cap F_m^\diamond, F_b^- \cap F_m^\diamond) \\ - \mathcal{C}^{ll} &\leftarrow C^{ll}(F_b^- \cap F_m^\diamond, F_b^+ \cap F_m^\diamond) \end{aligned}$$

2. $\mathcal{I}_X$ est un ensemble d'intersections franches $I_X(F_m, F_b)$, l'affectation m et b est arbitraire et la polarité n'a pas de sens. Six contraintes sont nécessaires pour une prise en compte correcte (Equation 5.4) :

$$\begin{aligned} - \mathcal{C}^{ll} &\leftarrow C^{ll}(F_m^+ \cap F_b^+, F_m^- \cap F_b^+) \\ - \mathcal{C}^{ll} &\leftarrow C^{ll}(F_m^- \cap F_b^+, F_m^+ \cap F_b^+) \\ - \mathcal{C}^{ll} &\leftarrow C^{ll}(F_m^- \cap F_b^+, F_m^- \cap F_b^-) \\ - \mathcal{C}^{ll} &\leftarrow C^{ll}(F_m^- \cap F_b^-, F_m^- \cap F_b^+) \\ - \mathcal{C}^{ll} &\leftarrow C^{ll}(F_m^- \cap F_b^-, F_m^+ \cap F_b^-) \\ - \mathcal{C}^{ll} &\leftarrow C^{ll}(F_m^+ \cap F_b^-, F_m^- \cap F_b^-) \end{aligned}$$

3. $\mathcal{I}_{BA}$ est un ensemble de branchements de type synthétique $I_{BS}(F_m, F_b, \diamond)$. Le traitement est particulier car il n'est pas nécessaire de contraindre la ligne d'intersection. L'idée est d'extraire de $\mathcal{C}^{ss}$ les contraintes imposées à F_m et F_b et de les modifier pour refléter le degré de liberté supplémentaire accordé par un branchement synthétique (Equation 5.3).

$$\begin{aligned} - \mathcal{C}^{ss} &\rightarrow C^{ss}(F_b^-, \top^{ss}(F_b^-)) \text{ puis } \mathcal{C}^{ss} \leftarrow C^{ss}(F_b^-, \top^{ss}(F_b^-) \cup F_m^\diamond) \\ - \mathcal{C}^{ss} &\rightarrow C^{ss}(F_b^+, \top^{ss}(F_b^+)) \text{ puis } \mathcal{C}^{ss} \leftarrow C^{ss}(F_b^+, \top^{ss}(F_b^+) \cup F_m^\diamond) \\ - \mathcal{C}^{ss} &\rightarrow C^{ss}(F_m^\diamond, \top^{ss}(F_m^\diamond)) \text{ puis } \mathcal{C}^{ss} \leftarrow C^{ss}(F_m^\diamond, \top^{ss}(F_m^\diamond) \cup F_b^-) \\ - \mathcal{C}^{ss} &\rightarrow C^{ss}(F_m^\diamond, \top^{ss}(F_m^\diamond)) \text{ puis } \mathcal{C}^{ss} \leftarrow C^{ss}(F_m^\diamond, \top^{ss}(F_m^\diamond) \cup F_b^+) \end{aligned}$$

Traitement des contraintes extrinsèques Un ensemble $\mathcal{C}^{nn}$ de contraintes C^{nn} est construit à partir des différentes spécifications de rejet établies par l'utilisateur. Il est nécessaire qu'elles comprennent les contraintes extrinsèques de non-ambiguïté. Il est possible de tester si la condition de non-ambiguïté est honorée en individualisant les blocs de failles sur les bords du domaine et en analysant l'ensemble $\mathcal{C}^{nn}$.

5.3 Résolution numérique des conditions de contact

La section précédente montre qu'il est nécessaire et possible d'extraire automatiquement un ensemble de contraintes cinématiques pour assurer la cohérence de l'état restauré. Trois ensembles de contraintes sont individualisés, $\mathcal{C}^{nn}$, $\mathcal{C}^{ll}$ et $\mathcal{C}^{ss}$, consistant respectivement à assurer la coïncidence géométrique de noeuds, de lignes et de surfaces. L'objectif de la section qui suit est d'évaluer et de mettre en oeuvre les techniques numériques permettant d'honorer des ensembles sans supposer a priori ni de la géométrie des failles à

l'état restauré, ni des vecteurs rejets : ces deux éléments sont dictés par la minimisation d'une fonction objective, l'énergie de déformation. Deux méthodes sont considérées et font échos au chapitre précédent : l'approche pseudo-transitoire et l'approche statique. La prise en compte des contraintes cinématiques repose fondamentalement sur les mêmes étapes : (1) une solution (état restauré hypothétique) est calculée sans prendre en compte ces contraintes (2) le respect des contraintes est évalué par une métrique (3) des termes correctifs sont ajoutés au problème en vue d'honorer les contraintes et une nouvelle solution est calculée. La procédure est répétée itérativement jusqu'à obtention d'un point de stabilité.

5.3.1 Définition et construction des variables cinématiques

Avant de détailler les algorithmes de résolution, nous développons ci-après quelques éléments de terminologie classique en mécanique du contact et apportons les nuances nécessaires à notre problème, le lecteur pourra se reporter à [Wriggers, 2002] pour une description plus complète. Pour toute contrainte $C(E_s, E_m)$ et quelque soit son type (C^{nn} , C^{ll} ou C^{ss}), nous appelons E_s *élément esclave* et E_m *élément maître*. A titre d'exemple, pour la contrainte $C^{ss}(F^+, F^-)$, le côté $+$ de F est la surface esclave et le côté $-$ est la surface maître. De manière intuitive, cette distinction est liée au fait qu'un seul des deux côtés, l'esclave, est assujéti à une contrainte. En réalité, nous avons vu que nous symétrisons les contraintes et que de fait il existe une contrainte $C^{ss}(F^-, F^+)$ inversant les rôles : nous l'appelons *contrainte conjuguée*.

Problème de la distance minimale

Il est nécessaire de définir une métrique permettant d'évaluer le respect d'une contrainte cinématique donnée $C(E_s, E_m)$, autrement dit le degré de pénétration ou d'écart des deux éléments E_s et E_m dans leur configuration restaurée. Ainsi, pour tout point matériel de $\mathbf{X}^s$ de $\Gamma_0^{E_s}$, nous pouvons définir la valeur d'une *fonction distance minimale* d par rapport à l'élément maître (Equation 5.5) : il s'agit de la distance entre le point matériel esclave $\mathbf{x}^s$ dans sa configuration restaurée et sa projection la plus proche sur la surface $\Gamma_t^{E_m}$. En mécanique du solide traditionnelle, la définition est moins restrictive car elle implique simplement la projection sur le corps le plus proche. Nous appelons donc en réalité d la *fonction distance minimale contrainte* et toutes les fonctions dérivées dans les sections suivantes sont également contraintes. Néanmoins, pour des raisons de clarté, nous omettons par la suite cette précision.

$$d(\mathbf{X}^s) = \{ \min \| \varphi(\mathbf{X}^s) - \varphi(\mathbf{X}^m) \|, \mathbf{X}^m \in \Gamma_0^{E_m} \} \quad (5.5)$$

$$= \{ \min \| \mathbf{x}^s - \mathbf{x}^m \|, \mathbf{x}^m \in \Gamma_t^{E_m} \}$$

Fonction écart normal

Nous dénotons $\bar{\mathbf{x}}^m$ le point spatial satisfaisant le problème de la distance minimale (il est appelé *point d'impact*) et $\bar{\mathbf{n}}^m$ la normale unitaire sortante à $\Gamma_t^{E_m}$ en ce point. Suivant la dimension de la contrainte il n'est pas toujours possible de définir une normale sortante au point d'impact. Les contraintes C^{ss} mettent en jeu des surfaces où il est donc possible de définir la normale. En revanche, dans un espace tridimensionnel, la normale à une ligne (contraintes C^{ll}) n'est pas univoque, et la normale à un noeud (contraintes C^{ll}) n'est pas définie. Dans ces deux cas, nous prenons alors la moyenne des normales avoisinantes. La *fonction écart normal* g_N (Figure 5.3) est une fonction scalaire signée représentant le degré de pénétration ou écart le long de la normale sortante à $\Gamma_t^{E_m}$ (Equation 5.6). Elle prend des valeurs négatives lorsqu'il y a pénétration et positives lorsqu'il y a écart.

$$g_N = (\mathbf{x}^s - \bar{\mathbf{x}}^m) \cdot \bar{\mathbf{n}}^m \quad (5.6)$$

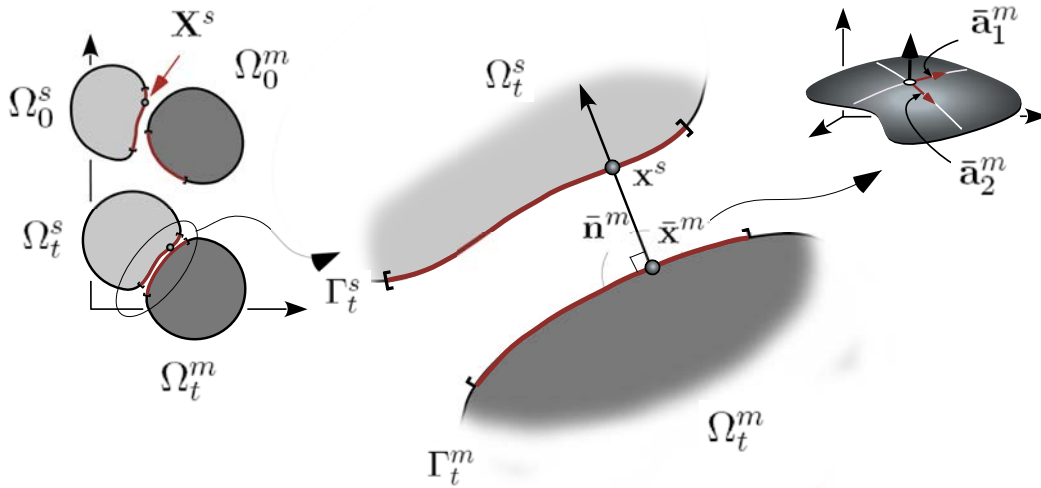


FIG. 5.3 – Définition des variables cinématiques de contact (modifié d'après [Wriggers, 2002])

Fonction écart tangentiel

La *fonction écart tangentiel* est une fonction vectorielle décrivant la composante tangentielle de l'écart entre l'esclave et le maître. Ainsi si nous considérons le vecteur $\mathbf{x}^s - \bar{\mathbf{x}}^m$, il se décompose en une composante normale $g_N \bar{\mathbf{n}}^m$ et une composante tangentielle $\mathbf{g}_T$. Au point d'impact, nous pouvons déterminer un repère local orthonormé et tangent à la surface de faille au moyen des vecteurs $\bar{\mathbf{a}}_1^m$ et $\bar{\mathbf{a}}_2^m$, puis exprimer l'écart tangentiel (Equation 5.7).

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_T &= \sum_{\alpha=1}^2 g_{T_\alpha} \bar{\mathbf{a}}_\alpha^m \\ g_{T_\alpha} &= (\mathbf{x}^s - \bar{\mathbf{x}}^m) \cdot \bar{\mathbf{a}}_\alpha^m \end{aligned} \quad (5.7)$$

Fonction écart normal affaiblie

Nous avons vu dans la section précédente que dans certaines conditions il n'est pas souhaitable d'honorer strictement une contrainte cinématique de contact. C'est notamment le cas aux frontières du domaine où le glissement relatif des blocs peut amener une partie du modèle hors des limites du domaine. Pour prendre en compte ce type de configuration, nous introduisons une fonction écart normal affaiblie : si la fonction écart tangentiel est non nulle en un point donné, alors nous assignons une valeur nulle à g_N . La suite des algorithmes développés dans cette section ne cherchera donc pas à corriger la position de ce noeud. Néanmoins dans la suite de l'exposé nous continuerons à utiliser la notation g_N , elle doit se comprendre alors comme la fonction écart normal affaiblie.

Discrétisation des fonctions écarts

Les fonctions écarts sont comme pour les déplacements des fonctions discrètes définies aux noeuds puis interpolées en utilisant un schéma bilinéaire (cas des frontières surfaciques) ou linéaire (cas des frontières linéiques). Le point d'impact $\bar{\mathbf{x}}^m$ est recherché dans la configuration restaurée pour chaque noeud de l'élément esclave E_s . De nombreuses techniques numériques de recherche spatiale existent et permettent de réduire le coût calculatoire de cette opération, le lecteur pourra se reporter à Williams and O'Connor [1999], Heinsteins *et al.* [2000] et Wriggers [2002] pour une analyse complète. Nous avons développé un algorithme simple et bien plus efficace qu'une recherche exhaustive :

1. Les éléments maîtres et esclaves sont plongés dans l'état restauré Γ_t en utilisant les vecteurs de restauration. De manière à accélérer la recherche spatiale, les boîtes englobantes de chacun des éléments sont partitionnées par une structure hiérarchique à base octale (*Octree*). Le volume est récursivement décomposé en huit cellules filles

hexagonales ; l'algorithme stoppe lorsque toutes les cellules terminant les différentes branches contiennent au plus un noeud.

2. Pour chaque noeud de l'élément esclave E_s , le noeud le plus proche β sur $\Gamma_t^{E_m}$ est calculé au moyen de la structure hiérarchique précédente. Les éléments discrets voisins de β sur $\Gamma_t^{E_m}$ sont rassemblés dans un ensemble $\mathcal{V}$: pour les surfaces ce sont les triangles, et pour les lignes, les segments ayant β comme sommet. Ensuite, et pour chaque élément de $\mathcal{V}$, nous calculons le point d'impact le plus proche (Equation 5.5) (pour les éléments plats comme les segments et triangles, nul besoin de recourir à une résolution non linéaire). Nous conservons le plus proche de tous comme $\bar{\mathbf{x}}^m$.

5.3.2 Approche pseudo-transitoire

Nous rappelons que l'approche pseudo-transitoire, ou relaxation dynamique, est un algorithme itératif où l'état restauré final est considéré comme l'état stationnaire d'un système dynamique. Des forces d'accélération et d'amortissement sont ajoutées aux forces internes et externes, l'évolution du système dans le temps est étudié jusqu'à obtention d'un état stable stationnaire (Chapitre 4). Les étapes transitoires n'ont pas d'intérêt particulier ni de signification physique, les paramètres sont calculés pour obtenir le plus rapidement possible la convergence. Nous discutons dans cette section plusieurs techniques permettant d'intégrer les contraintes cinématiques liées aux failles.

Méthode des forces de pénalité

La méthode de force de pénalité [Heinstein *et al.*, 2000] consiste à appliquer des forces d'interface entre les différents éléments de la contrainte $C(E_s, E_m)$. Du point de vue physique, ces forces sont équivalentes à la présence de ressorts de forte rigidité et de longueur nulle, agissant perpendiculairement aux interfaces. La force est appliquée de manière proportionnelle à l'écart normal et à un facteur de pénalité, mimant ainsi une forte rigidité. Nous développerons de manière plus rigoureuse dans l'approche statique les principes variationnels associés.

L'intégration à l'algorithme de relaxation dynamique apporte à chaque pas de temps une correction sur le vecteur des forces résiduelles pour assurer le rapprochement des éléments maître et esclave. Lors de l'étape d'évaluation des forces $\mathbf{F}_n^{int}$ et $\mathbf{F}_n^{ext}$, une procédure supplémentaire est ajoutée en vue de calculer les forces de contact. Nous considérons successivement les contraintes de $\mathcal{C}^{nn}$, $\mathcal{C}^{ll}$ et $\mathcal{C}^{ss}$. Nous calculons pour ce pas de temps la fonction discrète écart normal et dérivons pour chaque noeud de E_s une force de pénalité. Les différentes valeurs sont concaténées pour former le vecteur global des forces de contact $\mathbf{F}_n^{ctc}$ et les forces résiduelles deviennent $\mathbf{R}_n = \mathbf{F}_n^{int} - \mathbf{F}_n^{ext} - \mathbf{F}_n^{ctc}$. L'algorithme suit son cours en calculant les déplacements à l'aide des forces résiduelles modifiées.

La méthode présente des avantages informatiques par la simplicité de l'algorithme mais au prix de nombreux inconvénients numériques limitant sa précision et sa performance. Le choix du paramètre de pénalité est critique car les forces de pénalité contribuent à l'énergie interne. Une valeur excessive réduit la limite de stabilité et augmente de fait le nombre d'itérations nécessaires à la convergence. Une valeur trop faible, et donc un ressort moins rigide, conduit à des recouvrements et écarts substantiels entre les blocs de failles. Nos expériences montrent qu'en pratique il est difficile d'évaluer a priori la valeur du paramètre de pénalité.

Méthode des contraintes cinématiques partitionnées

Une alternative possible, connue sous le nom de *méthode des contraintes cinématiques* [Hallquist, 1998], consiste à corriger les vitesses et déplacements à chaque pas de temps pour qu'ils honorent les ensembles $\mathcal{C}^l$ et $\mathcal{C}^{ss}$. de Santi *et al.* [2003] introduisent cette technique pour la restauration : le bloc inférieur d'une faille normale listrique est ainsi contraint à demeurer sur le bloc supérieur rigide (contact unilatéral) lors de sa restauration. Nous proposons de généraliser cette utilisation aux réseaux de failles plus complexes sans nécessairement reposer sur l'hypothèse d'un bloc supérieur rigide.

La procédure est relativement similaire aux traitements des conditions aux limites en déplacement : les vitesses fictives sont corrigées pour produire des déplacements se conformant aux conditions prescrites. Le principe est donc d'effectuer une deuxième correction pour se conformer aux contraintes cinématiques liées aux failles : une simple correction des vitesses permet de s'assurer que le noeud esclave se trouvera bien sur l'élément maître à la fin du pas de temps (Figure 5.4). Une telle procédure n'est pas souhaitable car elle prescrit quel bloc de faille (le bloc esclave) accommodera entièrement la déformation discontinue. Prenons l'exemple d'une simple faille F à laquelle sont logiquement attachées les deux contraintes cinématiques conjuguées $C^{ss}(F^+, F^-)$ et $C^{ss}(F^-, F^+)$. Lors du traitement de la première, la surface esclave F^+ se trouve projetée sur la surface maître F^- , accommodant ainsi de manière unilatérale toute la déformation : le traitement de $C^{ss}(F^-, F^+)$ ne provoque qu'un faible ajustement des noeuds de F^- lié à la discrétisation nécessairement limitée. Nous proposons donc d'introduire un pondérateur β , appelé *coefficient de partitionnement cinématique*, permettant de moduler la contribution relative des contraintes conjuguées. Ainsi, lors du traitement de la première contrainte, seule une partie de l'écart normal g_N est corrigée suivant le ratio β ; ce n'est que lors du traitement de la deuxième contrainte que le reste des interstices et recouvrements est corrigé. La déformation est donc répartie de part et d'autre de l'interface.

Les limitations de cette méthode sont liées à l'approche géométrique adoptée. Premièrement, les vitesses et déplacements sont corrigés pour assurer une juxtaposition géométrique mais aucunement un transfert des moments à travers les interfaces. Si la méthode permet d'obtenir un état restauré cohérent, elle ne garantit pas que celui-ci corresponde à

un minimum de l'énergie de déformation, ni à une solution physiquement réaliste. Deuxièmement, le choix du coefficient de partitionnement cinématique est délicat et soumis à appréciation de l'utilisateur. Une alternative intéressante, mais non implantée, consiste à estimer plus précisément les forces de contact nécessaires en utilisant des techniques similaires aux multiplicateurs de Lagrange [Taylor and Flanagan, 1989; Belytschko and Neal, 1991].

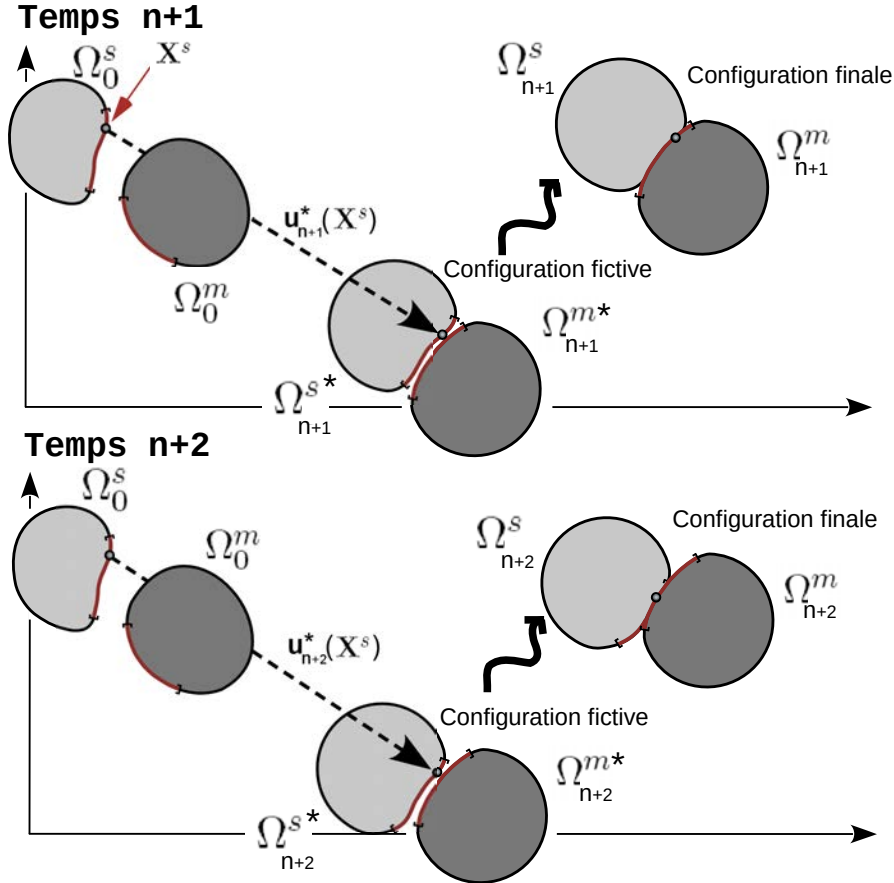


FIG. 5.4 – Prise en compte des conditions de contact en relaxation dynamique, le glissement relatif des interfaces résulte de l'action combinée des forces internes (provoquant potentiellement un déplacement tangentiel) et des corrections liées aux conditions de contacts.

5.3.3 Approche statique

Nous rappelons que l'approche statique consiste à résoudre un système algébrique non linéaire correspondant à l'équilibre final après application instantanée des conditions aux limites. Une solution initiale $\bar{\mathbf{u}}$ est calculée (phase linéaire) et itérativement affinée par une procédure de Newton (phase non linéaire) : une correction $\Delta \mathbf{u}$ est calculée à partir du système algébrique linéarisé et ajoutée à $\bar{\mathbf{u}}$ jusqu'à convergence (Chapitre 4). L'objectif

de cette section est de décrire la prise en compte des conditions cinématiques de contact dans l'approche statique. Nous reposons sur les concepts et techniques de mécanique du contact, le lecteur pourra notamment se reporter à la synthèse de Wriggers [2002] pour de plus amples détails.

Principe général

Nous avons vu que la méthode des éléments finis, dans son approche variationnelle, a pour objectif de trouver le point de stationnarité d'une fonction énergie $\mathcal{W}$. Dans le cas d'une situation élastique stable, ce point correspond à un minimum. L'idée est d'introduire un *terme de contact* $\mathcal{W}^{ctc}$ pénalisant tout écart aux contraintes cinématiques : le *terme variationnel de contact* $\delta\mathcal{W}^{ctc}$ correspondant est introduit dans la forme intégrale faible d'équilibre des moments (Equation 5.8).

$$\mathcal{W}(\mathbf{u}) = \mathcal{W}^{int}(\mathbf{u}) - \mathcal{W}^{ext}(\mathbf{u}) + \mathcal{W}^{ctc}(\mathbf{u}) \quad (5.8)$$

$$\delta\mathcal{W}(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}) = \delta\mathcal{W}^{int}(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}) - \delta\mathcal{W}^{ext}(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}) + \delta\mathcal{W}^{ctc}(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u})$$

L'expression du terme de contact peut se concevoir intuitivement (Equation 5.9) : $\epsilon_N g_N^2$ pénalise tout écart normal alors que $\epsilon_T \mathbf{g}_T \cdot \mathbf{g}_T$ pénalise tout écart tangentiel par rapport à l'élément maître (ϵ_N et ϵ_T sont des facteurs de pénalité). Du point de vue physique, le terme $\delta\mathcal{W}^{ctc}$ correspond donc au travail virtuel d'une force de contact prévenant toute interpénétration des blocs de failles mais également toute séparation ; nous pouvons distinguer une composante normale (1) agissant perpendiculaire à l'élément maître et une composante tangentielle (2) agissant dans le plan tangent à l'élément maître.

$$\begin{aligned} \mathcal{W}^{ctc}(\mathbf{u}) &= \int_{\Gamma_0} \left\{ \epsilon_N g_N^2 + \epsilon_T \mathbf{g}_T \cdot \mathbf{g}_T \right\} d\Gamma_0 \\ \delta\mathcal{W}^{ctc}(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}) &= \int_{\Gamma_0} \left\{ \underbrace{\epsilon_N g_N \delta g_N}_{(1)} + \underbrace{\epsilon_T \mathbf{g}_T \cdot \delta \mathbf{g}_T}_{(2)} \right\} d\Gamma_0 \end{aligned} \quad (5.9)$$

L'objectif est de trouver une configuration finale des rejets minimisant l'énergie. Pour ce faire, il est nécessaire d'assurer le glissement libre des interfaces le long des unes des autres. Il n'est donc pas souhaitable de prendre en compte les écarts tangentiels car les forces résultantes s'opposent aux mouvements tangentiels. Le contact est de type bilatéral (les éléments maîtres et esclaves sont déformables), adhésif (aucun recouvrement ni interstice) et normal (glissement libre) (Equation 5.10).

$$\begin{aligned}\mathcal{W}^{ctc}(\mathbf{u}) &= \int_{\Gamma_0} \epsilon_N g_N^2 d\Gamma_0 \\ \delta\mathcal{W}^{ctc}(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}) &= \int_{\Gamma_0} \epsilon_N g_N \delta g_N d\Gamma_0\end{aligned}\tag{5.10}$$

Le problème est fondamentalement non linéaire car la fonction g_N n'est évaluable que pour une configuration donnée et ne varie bien évidemment pas linéairement en fonction du déplacement. Il est donc nécessaire de recourir à un algorithme d'optimisation permettant d'approcher la configuration optimale en partant d'une solution initiale et en linéarisant le problème. Le lecteur notera qu'il s'agit de la procédure suivie pour la résolution de l'équation de statique non linéaire par la méthode de Newton. En conséquence, résoudre les problèmes de conditions de contact consiste simplement à développer les termes linéarisés associés et à les ajouter à la procédure de statique non linéaire. Ainsi l'algorithme général est le suivant :

1. Une première configuration restaurée, appelée *configuration restaurée non contrainte*, est calculée en ignorant les conditions liées aux failles. Elle correspond à la configuration issue d'un dépliage indépendant des blocs de failles (Chapitre 4). Cette solution initiale $\bar{\mathbf{u}}$ présente donc des chevauchement et des interstices entre les différents blocs.
2. Soit $\bar{\mathbf{u}}$ les vecteurs de restauration amenant à la configuration restaurée non contrainte. Ils servent de solution initiale à une procédure de Newton calculant la *configuration restaurée contrainte*. A chaque itération, la fonction écart normal g_N est recalculée pour mettre à jour la matrice de rigidité tangentielle associée aux contacts nouvellement établis (Equation 5.11).
3. La procédure stoppe lorsqu'un point de stabilité est atteint, c'est-à-dire lorsqu'il n'y a plus de mouvement relatif des blocs.

$$\mathbf{F}^{int}(\bar{\mathbf{u}}) - \mathbf{F}^{ext}(\bar{\mathbf{u}}) + \mathbf{F}^{ctc}(\bar{\mathbf{u}}) + \left\{ \mathbf{K}_T(\bar{\mathbf{u}}) + \mathbf{K}_T^{ctc}(\bar{\mathbf{u}}) \right\} \Delta\mathbf{u} = \mathbf{0}\tag{5.11}$$

Discrétisation du terme variationnel de contact

Comme pour les forces internes, le vecteur des forces de contact est mis en valeur en discrétisant le terme variationnel de contact. Si nous considérons une contrainte cinématique de contact, l'équation 5.12 permet de calculer pour chaque noeud esclave s la force de contact et sa réaction opposée sur l'élément maître (ces deux forces sont concaténées dans le vecteur $\mathbf{F}_s^{ctc}$).

$$\begin{aligned}
 \delta \mathcal{W}^{ctc}(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) &= \int_{\Gamma_0} \epsilon_N g_N \delta g_N d\Gamma_0 \\
 &\approx \bigcup_{s=1}^{n_c} \delta \mathbf{u}_s^T \bar{\mathbf{F}}_s^{ctc} \\
 &\approx \delta \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{F}}^{ctc}
 \end{aligned} \tag{5.12}$$

Discrétisation du terme variationnel de contact linéarisé

La matrice de rigidité tangentielle associée aux contacts est également mise en valeur en linéarisant et discrétisant le terme variationnel de contact. Si nous considérons une contrainte cinématique de contact, l'équation 5.13 permet de calculer pour chaque noeud esclave s une matrice de rigidité élémentaire de contact.

$$\begin{aligned}
 D\delta \mathcal{W}^{ctc}(\bar{\mathbf{u}}, \delta \mathbf{u}) \cdot \Delta \mathbf{u} &= \epsilon_N \int_{\Gamma_0} \left\{ \Delta g_N \delta g_N + g_N \Delta \delta g_N \right\} d\Gamma_0 \\
 &\approx \bigcup_{s=1}^{n_c} \delta \mathbf{u}_s^T \bar{\mathbf{K}}_{T_s}^{ctc} \Delta \mathbf{u}_s \\
 &\approx \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{K}}_T^{ctc} \Delta \mathbf{u}
 \end{aligned} \tag{5.13}$$

Le développement des vecteurs $\bar{\mathbf{F}}_s^{ctc}$ et matrices $\bar{\mathbf{K}}_{T_s}^{ctc}$ dépend du type de contrainte considérée. Le développement complet est complexe et nous invitons le lecteur à se reporter aux références données ci-après. Nous pouvons distinguer trois cas de figure différents permettant de traiter respectivement les éléments de $\mathcal{C}^{ss}$, $\mathcal{C}^{ll}$ et $\mathcal{C}^{nn}$:

1. Le cas NTS (*Node To Surface*) [Wriggers, 2002, Equations 8.120 et 8.122] modélise le glissement d'un noeud esclave sur une surface composée de triangles, c'est donc le cas de figure pour les frontières 2-D des maillages tétraédriques. Les dimensions de $\bar{\mathbf{F}}_s^{ctc}$ et $\bar{\mathbf{K}}_{T_s}^{ctc}$ sont $3 \times (1 + 3)$ (trois composantes du déplacement, pour le noeud esclave et les 3 noeuds du triangle cible maître).
2. Le cas NTE (*Node To Edge*) [Wriggers, 2002, Equations 8.129 et 8.130] modélise le glissement d'un noeud esclave sur une ligne composée d'arêtes, c'est donc le cas de figure pour les frontières 1-D des maillages tétraédriques. Les dimensions sont cette fois $3 \times (1 + 2)$ (trois composantes du déplacement, pour le noeud esclave et les 2 noeuds de l'arête cible maître).
3. Le cas NTN (*Node To Node*) [Wriggers, 2002, Equations 8.135 et 8.136] permet de lier noeud esclave et noeud maître. Les dimensions sont cette fois $3 \times (1 + 1)$ (trois composantes du déplacement, pour le noeud esclave et le noeud maître).

5.4 Conclusions

Deux optiques peuvent être considérées lors du traitement des failles en restauration volumique. Une première approche considère les rejets comme une donnée du problème, prescrivant en grande partie la solution mais simplifiant l'algorithme. Une alternative plus intéressante, adoptée dans nos travaux, s'attache à inférer les rejets du processus de restauration lui-même, la configuration optimale étant dictée par la minimisation de l'énergie de déformation.

De manière plus intuitive, le procédé consiste à autoriser le glissement libre des blocs de failles les uns sur les autres au gré des conditions aux limites et des forces internes. A la différence des objets industriels, il est nécessaire d'imposer des restrictions sur le mouvement relatif des blocs afin d'assurer la cohérence géologique de l'état restauré. Nous avons formalisé ces règles et proposé un algorithme calculant automatiquement les contraintes cinématiques de contact. Un modèle macro-topologique adapté est l'élément clef du problème et nous soulignons à nouveau le fort couplage entre géométrie, géologie et méthodes numériques pour la restauration.

La résolution numérique du problème se base à nouveau sur la méthode des éléments finis ; nous avons étendu les approches pseudo-transitoire et statique non linéaire pour prendre en compte les conditions cinématiques de contact. L'état restauré est donc cohérent et nous assurons le scellement adéquat des failles, la déformation discontinue étant accommodée par déformation élastique des blocs de failles. Deux exemples sont donnés en figures 5.5, 5.6 et 5.7. Nous émettrons cependant deux critiques. D'un point de vue fondamental, la méthode répond au problème posé (assurer la continuité des terrains) mais reste éloignée du processus physique, puisque la déformation discontinue est en réalité et majoritairement accommodée par des mouvements de corps rigides. Du point de vue pratique, les incohérences du modèle sont généralement pointées par le mauvais ajustement des blocs, le fait que nous imposions le scellement parfait empêche une telle analyse. Il est alors nécessaire de recourir à des outils alternatifs comme la déformation engendrée par la restauration.

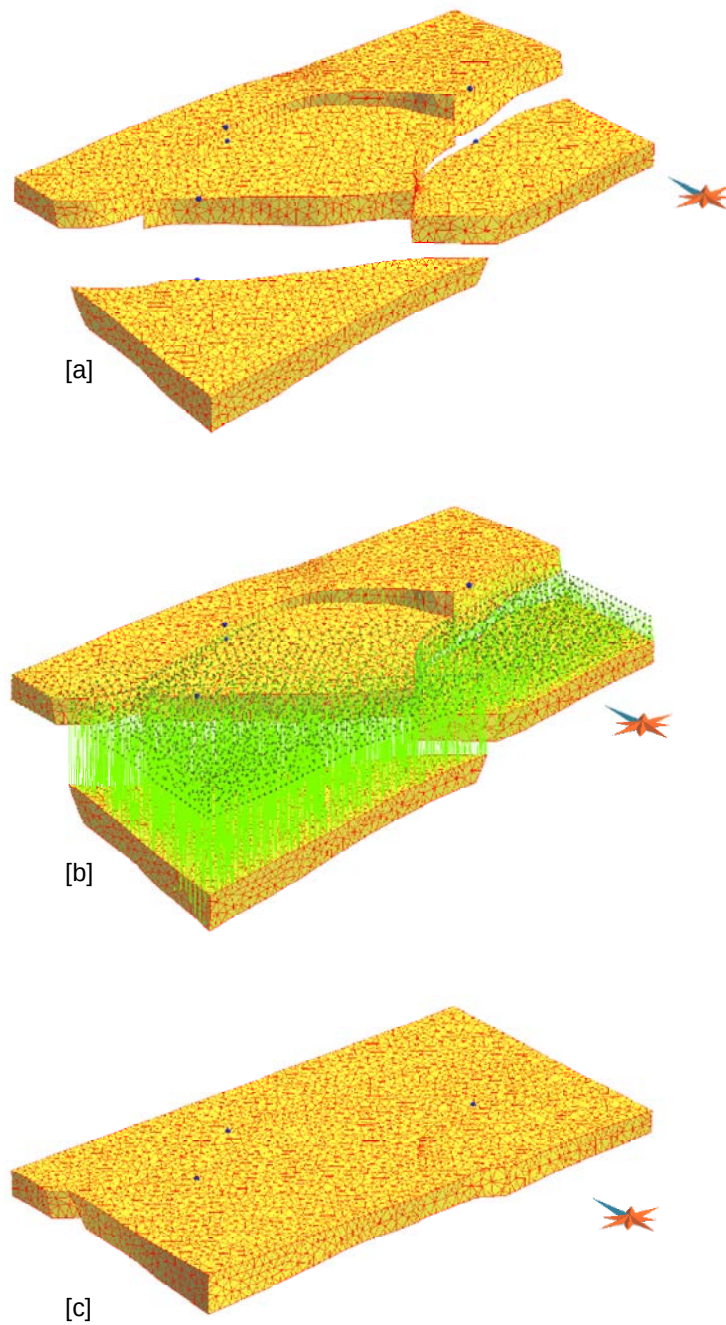


FIG. 5.5 – Restauration des réseaux de failles présentant de multiples branchements : [a] configuration présente, les liens représentés sont des vecteurs de rejet imposés [b] champ de vecteurs de restauration calculé [c] configuration restaurée - la frontière Nord du domaine a été contrainte au moyen d'un *pin wall* - temps de résolution : 40 s. pour 40000 tétraèdres en statique non linéaire (P4 - 2.2 GHz - 1GB RAM)

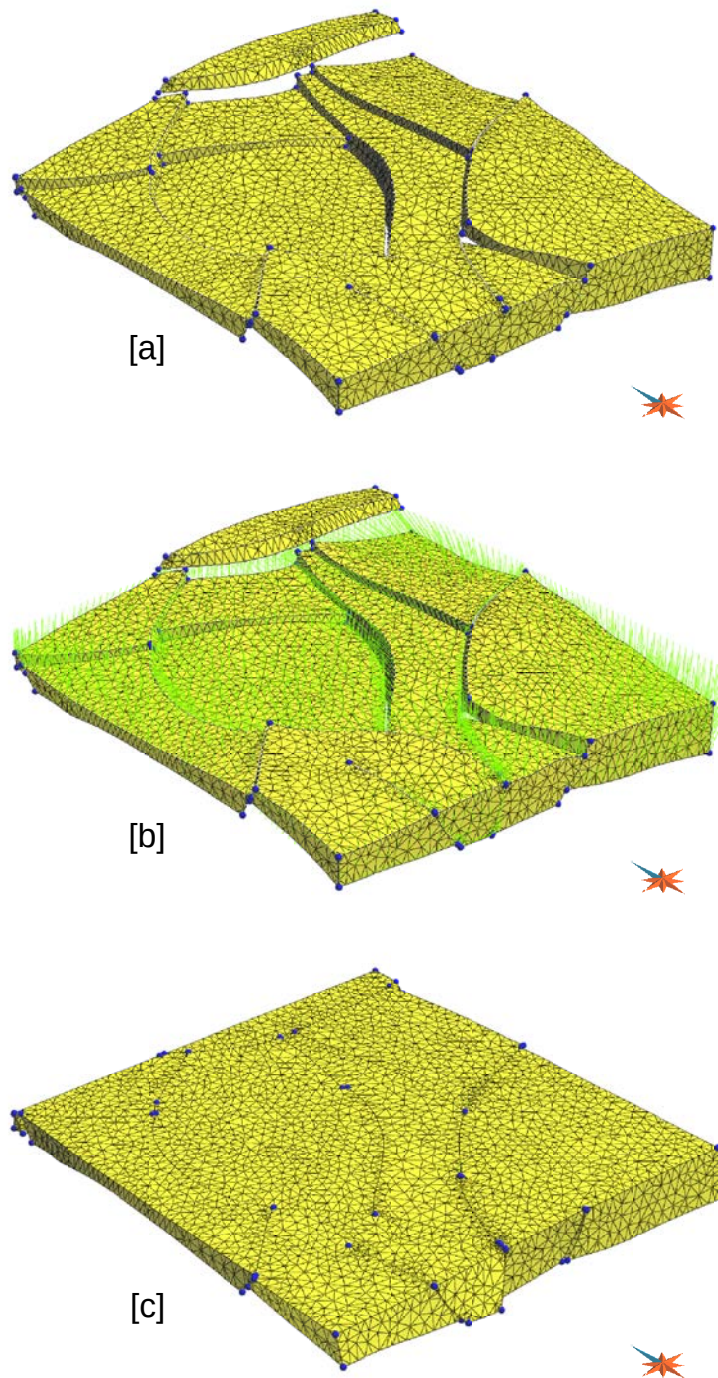
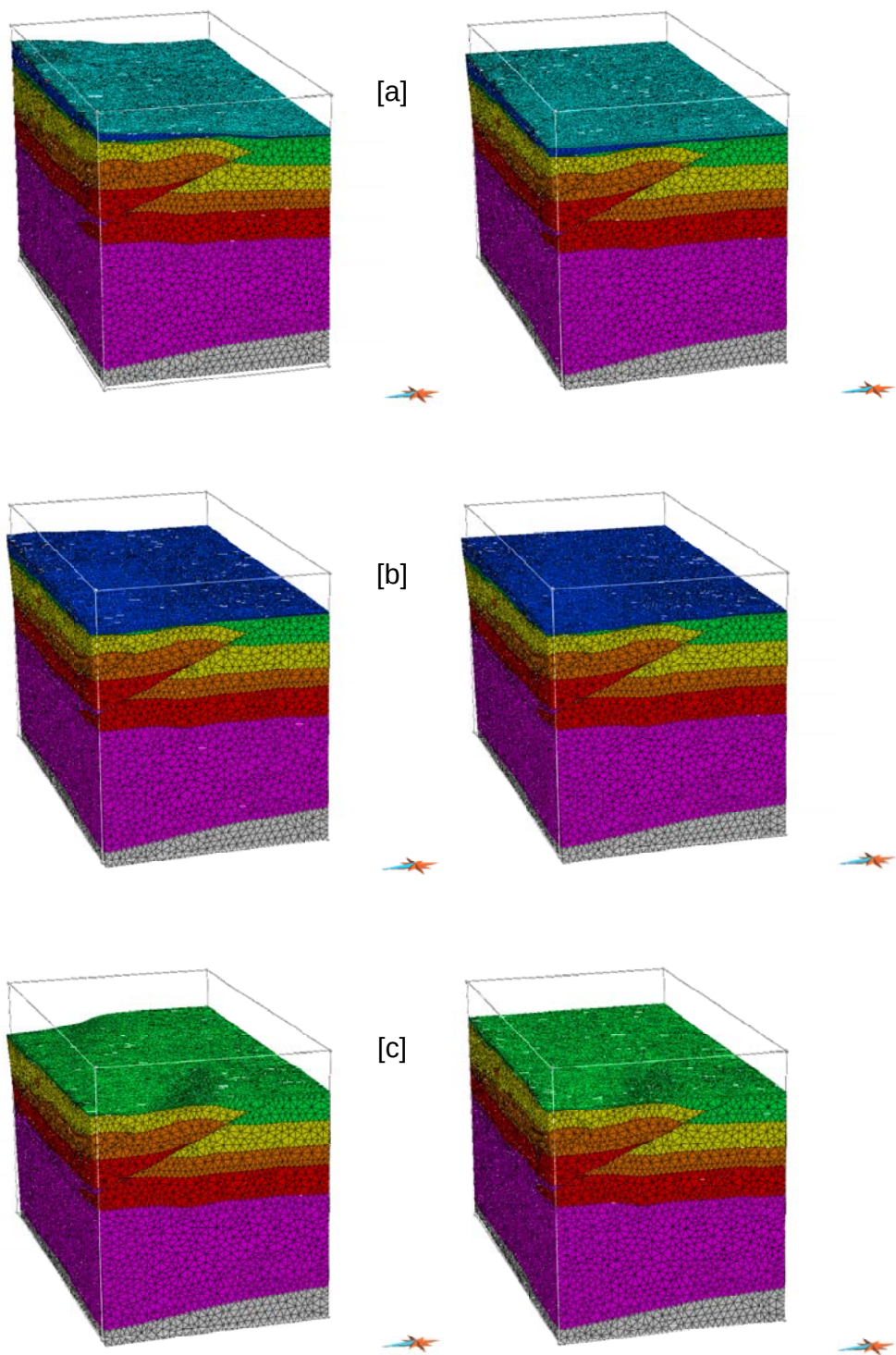


FIG. 5.6 – Restauration d’une structure géologique faillée complexe (modèle Total) : [a] configuration présente [b] champ de vecteurs de restauration calculé [c] configuration restaurée - la frontière Nord du domaine a été contrainte au moyen d’un *pin wall* - temps de résolution : 250 s. pour 60000 tétraèdres en relaxation dynamique (P4 - 2.2 GHz - 1GB RAM)



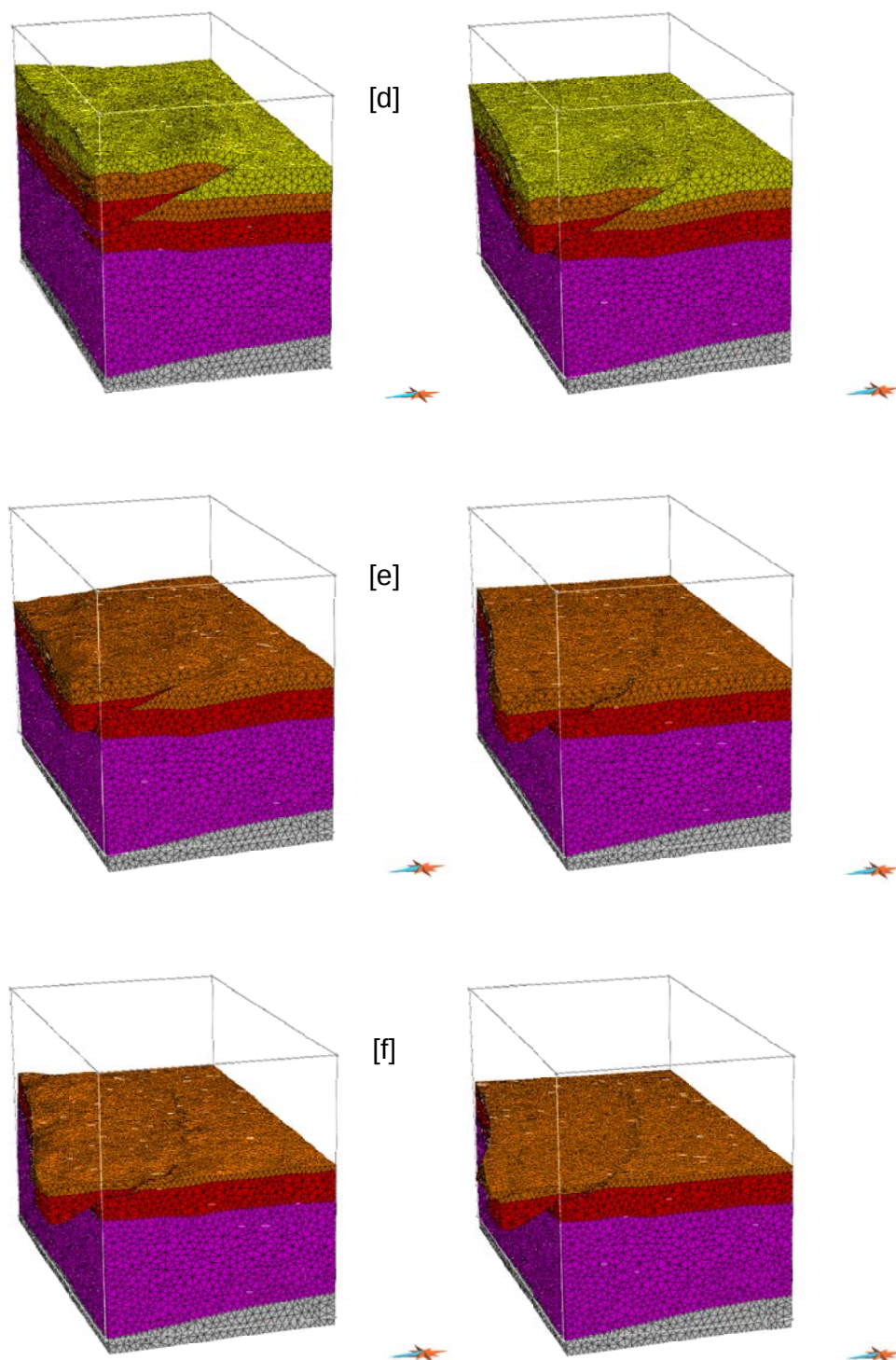


FIG. 5.7 – Restauration séquentielle sur un modèle faillé (modèle Harvard-Chevron) - les frontières Sud et Ouest du domaine ont été contraintes au moyen d'un *pin wall* - temps de résolution : 25 mn. pour 500000 tétraèdres en statique non linéaire (P4 - 2.2 GHz - 1GB RAM)

Conclusion

Dans nos travaux, nous avons développé des techniques numériques performantes et efficaces permettant de résoudre de manière géologiquement cohérente le problème de restauration des structures géologiques faillées. En partant d'une représentation surfacique de la structure du sous-sol, les principales étapes de la méthode sont : (1) la construction d'une représentation volumique du domaine basée sur un maillage tétraédrique (2) la définition des conditions aux limites, dont les relations entre les blocs de failles (3) le choix d'une formulation cinématique ou mécanique et d'une technique de résolution appropriée (4) la résolution proprement dite et l'exploitation des résultats.

Le premier point de nos travaux a été la mise en place d'une représentation informatique volumique et d'un formalisme, tous deux dédiés à la restauration. Cette représentation consiste en un maillage tétraédrique se conformant aux interfaces géologiques, et d'un modèle macro-topologique (1) renseignant les relations logiques entre les différents corps géologiques (2) assurant un plongement continu dans l'espace sédimentaire. Ces deux aspects sont à la base du processus de restauration. La construction de ce modèle utilise les travaux de Lepage [2003], qui sont actuellement parmi les plus performants, ils constituent néanmoins l'étape limitante en termes de temps dans le processus global de restauration.

Nous avons choisi de poser le problème de restauration, suivant un principe similaire à Thibaut [1994] et Léger *et al.* [1997], comme un problème d'optimisation au sens large ; nous cherchons à minimiser une fonctionnelle prescrivant le comportement du domaine au cours de la restauration. La construction de cette fonction objective peut reposer soit sur des règles géométriques, soit sur des règles mécaniques, définissant des méthodes de restauration cinématique et mécanique respectivement. Ces deux méthodes se rejoignent donc conceptuellement, mais diffèrent par leurs règles fondatrices et les techniques de résolution associées. Dans le premier cas, nous utilisons l'interpolation lisse discrète ; dans le deuxième cas, nous utilisons la méthode des éléments finis. En omettant pour le moment le problème des failles, il est possible de comparer ces deux approches suivant trois critères principaux (Tableau 1). Dans l'état actuel de notre implantation, l'approche cinématique a le mérite de modéliser en termes géologiques le comportement du domaine, par

opposition à l'approche mécanique limitée par l'hypothèse d'une déformation isotrope. En revanche, cette dernière est munie d'outils numériques plus performants en terme de rapidité et pour la prise en compte des phénomènes non linéaires. Nous souhaitons rappeler ici, que des projets basés sur des techniques similaires sont actuellement en cours de développement ; nous avons néanmoins souligné l'absence de résultats comparables dans les communications relatives. En outre, une des originalités de notre travail est de proposer une technique séquentielle de restauration pour les volumes.

L'atout majeur de notre outil de restauration est la prise en compte des réseaux de failles, problématique qui n'est actuellement pas traitée de manière satisfaisante à notre connaissance dans la littérature. Le traitement des failles nécessite (1) la définition et la construction d'un ensemble cohérent de conditions de contact glissant entre blocs (2) des techniques de résolution modernes accommodant la forte non-linéarité du problème. Le premier point est résolu grâce à l'utilisation de notre modèle macro-topologique. Le deuxième point repose sur la méthode des éléments finis en contexte non linéaire (approches non linéaires pseudo-transitoire et statique). De fait, dans le cadre de nos travaux, la méthode mécanique de restauration apparaît plus adaptée à la résolution d'un problème complet de restauration (Tableau 1).

	Approche cinématique (DSI)	Approche mécanique (FEM)	
		Relaxation dynamique	Statique non linéaire
Modes de déformation	$\oplus\oplus$ (anisotropie)	$\oplus$ (isotropie)	$\oplus$ (isotropie)
Types de déformation	$\ominus$ (ϵ)	$\oplus$ (E - lent)	$\oplus\oplus$ (E - rapide)
Traitement des failles	$\ominus$ (rejets connus)	$\oplus$ (rejets prédits)	$\oplus$ (rejets prédits)
Facilité d'implantation	$\oplus\oplus$ (procédure linéaire)	$\oplus$ (problème de stabilité)	$\ominus$ (procédure non linéaire)
Efficacité	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus\oplus$

TAB. 1 – Tableau comparatif des méthodes cinématique et mécanique

Perspectives

Une première perspective consisterait à étendre et améliorer les méthodes cinématique et mécanique. La technique de résolution employée dans l'approche cinématique ne permet pas une prise en compte pertinente des failles. Une première piste de recherche consisterait à découpler strictement le processus de dépliage (réalisé par méthode cinématique) de l'ajustement relatif des blocs de failles (réalisé par méthode mécanique). Une deuxième piste serait d'opter pour une autre technique numérique de résolution que l'interpolation lisse discrète, mieux adaptée aux non-linéarités liées aux failles. Pour améliorer les approches mécaniques, l'étude de lois de comportement plus adaptées aux cas géologiques est nécessaire ; de nouveaux travaux de thèse sont initiés au sein de notre laboratoire dans ce sens. Plus précisément, deux aspects sont à considérer : (1) l'anisotropie de comportement de matériaux à l'échelle considérée (bassin ou réservoir) (2) les différents comportements rhéologiques, notamment le sel. Le traitement de ce dernier est d'autant plus critique qu'il est souvent associé à des réservoirs.

La conclusion d'un projet de recherche requiert sa validation sur des cas synthétiques et la confrontation avec des réalités de terrain ; nous n'avons qu'ébauché cette étape. Il serait notamment nécessaire de confronter nos résultats (1) à des méthodes en coupe et en carte déjà bien éprouvées (2) à des modèles analogiques 3-D comme ceux du projet FACET 4D [Daniel, 2002] (3) à des jeux de données réels avec un enjeu scientifique et économique.

Enfin, les outils développés de notre thèse gagneraient à être appliqués hors du contexte de la restauration notamment pour la modélisation génétique (*forward modeling*) et la construction de modèles géo-chronologiques de type Geochron [Mallet, 2004; Moyen, 2005].

Bibliographie

- P.A. Allen and J.R. Allen. *Basin Analysis, Principles and Applications*. Blackwell Scientific, Oxford, 1990.
- J. Angelier. Determination of the mean principal direction of stresses for a given fault population. *Tectonophysics*, 56 :17–26, 1979.
- J. Angelier. From orientation to magnitudes in palaeostress determination using fault slip data. *Journal of Structural Geology*, (11) :37–50, 1989.
- D.M. Audet and J.D.C. McConnell. Forward modelling of porosity and pore pressure in sedimentary basins. *Basin Research*, 4 :147–162, 1992.
- M. Audibert. Déformation discontinue et rotation de blocs, méthodes numériques de restauration : Application à la galilée. *Mémoires et Documents du Centre Armoricaïn d’Etudes Structurales des Socles*, 40, 1991.
- K. Aziz and A. Settari. *Petroleum Reservoir Simulation*. Elsevier Applied Science Publishers, 1979.
- K.J. Bathe. *Finite Element Procedures*. Prentice Hall, 1995.
- B. Baumgart. A polyhedron representation for computer vision. In *AFIPS National Conference Proceedings*, volume 44, pages 589–596, 1975.
- T. Belytschko and M.O Neal. Contact-impact by the pinball algorithm with penalty and lagrangian methods. *International Journal in Numerical methods in Engineering*, 32 :103–128, 1991.
- T. Belytschko, W.K. Liu, and B. Moran. *Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures*. Wiley, 2000.
- C. Bennis. *Synthèse de textures hiérarchiques planes - Développement de surfaces 3D pour un plçage de textures minimisant les distorsions*. PhD thesis, Université de Paris XI - Orsay, Paris, France, 1990.
- P. Bezier. *Courbes et Surfaces*. Hermès, 1987.

- M.A. Biot. Theory of folding of stratified visco-elastic media and its application in tectonics and orogenesis. *Geological Society America Bulletin*, 72 :1595–1620, 1964.
- M.H.P. Bott. The mechanics of oblique slip faulting. *Geology Magazine*, (96) :109–117, 1959.
- O. Bourgeois, P.R. Cobbold, and D. Rouby and J.C. Thomas. Least square restoration in plan view of tertiary thrust sheets in the Tadjik depression. *Journal of Geophysical Research*, 102 :27553–27573, 1997.
- O. Bourgeois. Restauration numérique de la déformation discontinue dans les domaines en compression. application à la dépression de Tadjik. Master's thesis, Université de Rennes I, Rennes, France, 1994.
- S. Bourne, F. Brauckman, L. Rijkels, B. Stephenson, A. Weber, and E. Willemse. Predictive modelling of naturally fractured reservoirs using geomechanics and flow simulation. In *Proceedings of the 9th ADIPEC*, 2000.
- R.C. Brewer and R.H. Groshong. Restoration of cross-sections above intrusive salt domes. *AAPG Bulletin*, 77 :1769–1780, 1993.
- J.W. Bunce. A note on the estimation of critical damping in dynamic relaxation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 4 :301–304, 1972.
- N. Cardozo, K.i Bhalla, A.T. Zehnder, and R.W. Allmendinger. Mechanical models of fault propagation folds and comparison to the trishear kinematic model. *Journal of Structural Geology*, 25(1) :1–18, 2003.
- A.M. Casas, D. Gapais, T. Nalpas, K. Besnard, and T. Roman-Berdiel. Analogue models of transpressive systems. *Journal of Structural Geology*, 23 :733–743, 2001.
- A.C. Cassell and R.E. Hobbs. Numerical stability of dynamic relaxation analysis of non-linear structures. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 10 :1407–1410, 1976.
- G. Caumon. *Représentation, visualisation et modification de modèles volumiques pour les Géosciences*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Lorraine, Nancy, France, 2003.
- V. Cerveny and M.A. de Castro. Application of the dynamic ray tracing in the 3-d inversion of seismic-reflection data. *Geophysical Journal International*, 113 :776–779, 1993.
- T.T. Chamberlin. The Appalachian folds of central Pennsylvania. *Journal of Structural Geology*, 18 :228–251, 1910.

-
- P.A. Charlez. *Rocks mechanics : theoritical fundamentals*. Editions Technip, 1991.
- J.P. Chiles and P. Delfiner. *Geostatistics - Modeling Spatial Uncertainties*. Wiley, 1999.
- A.K. Chopra. *Dynamics of Structures*. Prentice-Hall, 1995.
- J. Claerbout. *Imaging the Earth Interior*. Blackwell, 1985.
- R.W. Clough. The finite element in plane stress analysis. In *Proceedings of the 2nd ASCE Conference on Electronic Computation*, 1960.
- P.R. Cobbold. Removal of finite deformation using strain trajectories. *Journal of Structural Geology*, 1 :62–72, 1979.
- R. Cognot. *La méthode D.S.I. : optimisation, implémentaton et applications*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Lorraine, Nancy, France, 1996.
- J. Conraud. *Génération de maillages de simplexes pour la modélisation des objets naturels*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Lorraine, Nancy, France, 1997.
- S. Conreux. *Modélisation de 3-variétés à base topologique : application à la géologie*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Lorraine, Nancy, France, 2001.
- T. Cornu. *Modéliation cinématique discrète de la déformation 3D des bassins sédimentaires*. PhD thesis, Université Joseph Fourier, Grenoble, France, 2001.
- R. Courant, K. Friedrichs, and H. Lewy. On the partial difference equations of mathematical physics. *Mathematische Annalen*, 100 :32–74, 1928.
- S.L. Crouch and S.L. Starfield. *Boundary Element Methods in Solid Mechanics*. George Allen & Unwin, 1983.
- C.D.A. Dahlstrom. Balanced cross sections. *Canadian Journal of Earth Sciences*, 6 :743–757, 1969.
- J.-M. Daniel. Fault analysis in 4d from analogue experiments. Site Internet, 2002. [http ://exploration-gisements.ifp.fr/IFP/fr/rechercheindustrie/explorationproduction/Facet4D.htm](http://exploration-gisements.ifp.fr/IFP/fr/rechercheindustrie/explorationproduction/Facet4D.htm).
- T.A. Davis. Umfpack, an unsymmetric-pattern multifrontal method. *ACM Transaction Mathematical Software*, 30 :196–199, 2003.
- I. Davison. Listric normal fault profiles : calculation using bed-length balance and fault displacement. *Journal of Structural Geology*, 8 :209–210, 1986.
- C. de Boor. *A Practical Guide to Splines*. Springer, 1978.

- M.R. de Santi, J.L.E. Campos, and L.F. Martha. 3d geological restoration using a finite element approach. In *23rd Gocad Meeting Proceedings*, 2003.
- M.R. de Santi. *Procedimentos computacionais para o balanceamento de secoes geologicas*. PhD thesis, Pontificia universidade Catolica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, Brasil, 2002.
- J.W. Demmel, S.C. Eisenstat, J.R. Gilbert, X.S. Li, and J.W.H. Liu. A supernodal approach to sparse partial pivoting. *SIAM Journal Matrix Analysis and Applications*, 20 :720–755, 1999.
- J.M. Denison and H.P. Woodward. Palinspastic maps of central appalachians. *AAPG Bulletin*, 47 :666–680, 1963.
- J.A. Dunbar and R.W. Cook. Palinspastic reconstruction of structure maps : an automated finite element approach with heterogenous strain. *Journal of Structural Geology*, 26 :1021–1036, 2003.
- I. Duvinage. *Création et mise en cohérence de modèles structuraux à partir d’horizons extraits de données sismiques tridimensionnelles*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Lorraine, Nancy, France, 2000.
- A. Etchécopar. *Simulation par ordinateur de la déformation progressive d’un agrégat polycristallin*. PhD thesis, Université de Nantes, Nantes, France, 1974.
- A. Etchecopar, G. Vasseur, and M. Daignieres. An inverse problem in micro-tectonics for the determination of stress tensor from fault striation analysis. *Journal of Structural Geology*, 3 :51–65, 1981.
- N. Euler. *Modélisation volumique, Contraintes et libertés*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Lorraine, Nancy, France, 1999.
- C. Fairhurst. Stress estimation in rock : a brief history and review. *Rock Mechanics and Mining Sciences*, 40 :957–973, 2003.
- G. Farin. *Curves and Surfaces for Computer Aided Design*. Academic Press, 3rd edition, 1992.
- C.L. Farmer. Upscaling : a review. *International Journal for Numerical in Fluids*, 40 :63–78, 2002.
- C. Felipa. Conjugate dynamic relaxation. Report CU-CSSC-90-25, University of Colorado, Department of Aerospace Engineering Sciences and Center for Space Structures and Controls, 1990.

-
- E. Fetel. Constraining response surface with secondary information for reservoir. In 25th *Gocad Meeting Proceedings*, 2005.
- R.C. Fletcher and D.D. Pollard. Can we understand structural and tectonic processes and their products without appeal to a complete mechanics? *Journal of Structural Geology*, 21 :1071–1088, 1999.
- T. Frank and J.-L. Mallet. Rapid deformation of iso-contours by interactive edition of implicit functions. In 25th *Gocad Meeting Proceedings*, 2005.
- S.P. Frankel. Convergence rates of iterative treatments of partial differential equations. *Mathematical Tables and Other Aids to Computation*, 4(30) :65–75, 1950.
- J. Garrigues. *Mécanique des milieux continus*. Ecole Supérieure de Mécanique de Marseille, Marseille, France, 2002.
- J. Garrigues. *Mécanique des milieux continus en déformation finie*. Ecole Supérieure de Mécanique de Marseille, Marseille, France, 2002.
- J. Geiser, P. Geiser, R. Kligfield, R. Ratcliff, and M. Rowan. New applications of computer based section construction : strain analysis, local balancing and sub-surface fault prediction. *Mathematical Geology*, 25 :47–59, 1988.
- J. Geiser, R. Ratcliff, R. Kliegfield, and A. Morris. Simultaneous decompression and restoration : an improved method for basin modeling. *AAPG Bulletin*, 75 :579, 1991.
- B. Gerard. *Modélisation 3D des transferts de chaleur et de fluide dans les formations sédimentaires. Application aux réacteurs d’oklo (Gabon)*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Lorraine, Nancy, France, 1997.
- S.K. Ghosh and S. Sengupta. Compression and simple shear of tests models with rigid and deformable inclusions. *Tectonophysics*, 17 :133–175, 1973.
- A.D. Gibbs. Balanced cross-section construction from seismic sections in areas of extensional tectonics. *Journal of Structural Geology*, 9 :153–160, 1983.
- M. Gidon. *Les structures tectoniques*. Editions BRGM, 1987.
- H. Gjoystdal, J.E. Reinhardsen, and K. Astelbol. Computer representation of complex three-dimensional geological structures using a new solid modeling technique. *Geophysical Prospecting*, 33(8) :1195–1211, 1985.
- J. Gluyas and R. Swarbrick. *Petroleum Geoscience*. Blackwell Publishing, 2004.
- J. Goguel. *Introduction à l’étude mécanique des déformations de l’écorce terrestre*. BRGM, 1948.

- P. Goovaerts. *Geostatistics for Natural Resources Evaluation*. Oxford University Press, 1997.
- K. Goto. Goto blas. Site Internet, 2003. Texas Advanced Computing Center, University of Texas at Austin - <http://www.tacc.utexas.edu/resources/software/>.
- N.I.M. Gould, Y. Hu, and J.A. Scott. A numerical evaluation of sparse direct solvers for the solution of large sparse symmetric linear systems of equations. Technical report, Council for the Central Laboratory of the Research Councils, Oxfordshire, UK, 2005.
- J.-P. Gratier and B. Guillier. Compatibility constraints on folded and faulted strata and calculation of total displacement using computational restoration (unfold program). *Journal of Structural Geology*, 15(3-5) :391–402, 1993.
- J.P. Gratier, B. Guillier, A. Delorme, and F. Odonne. Restoration and balance of a folded and faulted surface by best-fitting of finite-element : principle and applications. *Journal of Structural Geology*, 13 :111–115, 1991.
- P. Griffiths, S. Jones, N. Salter, F. Schaefer, R. Osfield, and H. Reiser. A new technique for 3-d flexural-slip restoration. *Journal of Structural Geology*, 24 :773–782, 2002.
- R.H. Groshong and J.-L. Epard. *Computerized cross section restoration and balance*, pages 477–478. Pergamon, 1996.
- R.H. Jr. Groshong. *3D Structural Geology : a practical guide to surface and subsurface map interpretation*. Springer Verlag, 1999.
- O. Grosse. *Remise en cohérence d'un modèle géologique 3D*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Lorraine, Nancy, France, 2002.
- B. Guillier. *Dépliage automatique de strates plissées et faillées : application à l'équilibrage des structures naturelles*. PhD thesis, Université de Grenoble I, Grenoble, France, 1991.
- J.-L. Guiziou, P. Compère, P. Guillaume, B.C. Scheffers, M. Riepen, and T.V. Der Weff. Sistre : a tile-to-depth conversion tool applied to structurally complex 3d-media. In Society of Exploration Geophysicists, editor, *Proceedings of the SEG Annual Meeting*, pages 1267–1270, 1990.
- J.O. Hallquist. *LS-DYNA Theoretical Manual*. Lawrence Livermore National Laboratory, 1998.
- R. Hassani, D. Jongmans, and J. Chéry. Study of plate deformation and stress in subduction processes using two-dimensional numerical models. *Journal of Geophysical Research*, 102 :17951–17965, 1997.

-
- R. Hassani. *Modélisation numérique de la déformation des systèmes géologiques*. PhD thesis, Université de Montpellier II, Montpellier, France, 1994.
- D. Healy, N. Kusznir, and G. Yielding. An inverse method to derive fault slip and geometry from seismically observed vertical stratigraphic displacements using elastic dislocation theory. *Marine and Petroleum Geology*, 21 :923–932, 2004.
- M.W. Heinstein, F.J. Mello, S.W. Attaway, and T.A. Laursen. Contact-impact modeling in explicit transient dynamics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 187 :621–640, 2000.
- F. Hildebrand. *Methods of Applied Mathematics*. Dover Publications, 1992.
- J.R. Hossack. The use of balanced cross-section in calculation of orogenic contraction : a review. *Journal of Geological Society of London*, 136 :705–711, 1979.
- M.K. Hubbert. Theory of scale models as applied to the study of geologic structures. *Geological Society of America Bulletin*, 48, 1937.
- T.J.R. Hugues. *The finite element method : linear static and dynamic finite element analysis*. Prentice-Hall, New Jersey, 1987.
- L. Jing. A review of techniques, advances and outstanding issues in numerical modelling for rocks mechanics and rock engineering. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, 40 :283–353, 2003.
- P. Kedzierski, J.-J. Royer, J.-L. Mallet, and L. Labat. Membership functions constrained by stratigraphic parameters. In *25th Gocad Meeting Proceedings*, 2005.
- S.W. Key, C.M. Stone, and R.D. Krieg. *A Solution Strategy for the Quasi-Static, Large Deformation, Inelastic Response of Axisymmetric Solids*, pages 585–620. Springer, 1981.
- J.D. Kiefer and J. M. Denison. Palinspastic map of devonian strata. *AAPG Bulletin*, 56 :161–166, 1972.
- R. Kligfield, P. Geiser, and J. Geiser. Construction of geologic cross-sections using micro-computer systems. *Geobyte*, 86 :60–66, 1986.
- R. Krieg. Unconditional stability in numerical time integration methods. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 40 :417–421, 1973.
- L. Labat. *Simulation stochastiques de faciès par la méthode des membership functions*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Lorraine, Nancy, France, 2004.
- E. Labrunye. *Extraction automatique d'information géologique à partir d'images sismiques tridimensionnelles*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Lorraine, Nancy, France, 2004.

- K. Lamboglia. *Modélisation Volumique de Surfaces Non-Manifold*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Lorraine, Nancy, France, 1994.
- M. Lavergne. *Méthodes sismiques*. Editions Technip, 1986.
- M. Lecour. *Incertitudes concernant la géométrie des failles*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Lorraine, Nancy, France, 2000.
- B. Leflon. *Modélisation des hétérogénéités lithologiques à l'échelle du réservoir pétrolier en milieu marin et fluvial*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Lorraine, Nancy, France, 2005.
- F. Lepage, I. Moretti, and M. Guiton. 3-d restoration : Geometry and geomechanics. In *24th Gocad Meeting Proceedings*, 2004.
- F. Lepage. *Génération de maillages tridimensionnels pour la simulation des phénomènes physiques en géosciences*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Lorraine, Nancy, France, 2003.
- B. Levy. *Topologie Algorithmique, Combinatoire et Plongement*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Lorraine, Nancy, France, 1999.
- M. Léger, M. Thibaut, J.-P. Gratier, and J.-M. Morvan. A least-square method for multi-surface unfolding. *Journal of Structural Geology*, 19(5) :795–743, 1997.
- P. Lienhart. N-dimensional generalized combinatorial maps and cellular quasi-manifolds. *Journal on Computational Geometry and Applications*, 4(3) :275–324, 1994.
- X. Luo, G. Vasseur, A. Pouya, V. Lamoureux-Var, and A. Poliakov. Elastoplastic deformation of porous media applied to the modeling of compaction at basin scale. *Marine and Petroleum Geology*, 18 :145–162, 1998.
- L. Mace, L. Souche, and J.-L. Mallet. 3d fracture characterization based on geomechanics and geologic data uncertainties. In *24th Gocad Meeting Proceedings*, 2004.
- F. Maerten and L. Maerten. 3-d geomechanical techniques to better characterizing complex structural models : (i) slip inversion and (ii) restoration. In *Proceedings of the 2004 AAPG ACTE*, 2004. Abstract.
- L. Maerten and F. Maerten. Chronologic modeling of faulted and fractured reservoirs using geomechanically-based restoration. In *Proceedings of the 2004 AAPG ACTE*, 2004. Abstract.
- L. Maerten, E.J.M. Willemse, D.D. Pollard, and K. Rawnsley. Slip distributions on intersection normal faults. *Journal of Structural Geology*, 21 :259–271, 1999.

-
- J.-L. Mallet. Discrete smooth interpolation in geometric modeling. *CAD*, 24 :177–191, 1992.
- J.-L. Mallet. *Geomodeling*. Oxford University Press, 2002. 666 p.
- J.-L. Mallet. Constraining a piecewise linear function defined on a 3D complex. In *23rd Gocad Meeting Proceedings*, 2003.
- J.-L. Mallet. Space-time mathematical framework for sedimentary geology. *Mathematical Geology*, 36(1), 2004.
- J. Massot. *Implémentation de méthodes de restauration équilibrée*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Lorraine, Nancy, France, 2002.
- K.R. McClay. Extensional fault systems in sedimentary basins : a review of analogue model studies. *Marine and Petroleum Geology*, 7(3) :206–233, 1990.
- M.R. McLean and M.A. Addis. Wellbore stability analysis : a review of current methods of analysis and their field applications. In SPE, editor, *IADC/SPE Drilling Conference (Houston, TX)*, 1990.
- Gérard Meurant. *Computer Solution of Large Linear System*, volume 28 of *Studies in Mathematics and Its Applications*. North-Holland, 1999.
- S. Mitra and J. Namson. Equal-area balancing. *American Journal of Science*, 289 :563–599, 1989.
- G. Ménard. *Méthodologies générale de construction des coupes équilibrées*, pages 145–157. 1988.
- I. Moretti and M. Larrere. Locace : Computer-aided construction of balanced geological cross-sections. *Geobyte*, 4 :16–24, 1989.
- I. Moretti, B. Colleta, and R. Vially. Theoretical models of block rotation along circular faults. *Tectonophysics*, 153 :313–320, 1988.
- I. Moretti, S. Wu, and A.W. Bally. Computerized balanced cross-section locace to reconstruct an allochthonous salt sheet, offshore louisiana. *Marine and Petroleum Geology*, 7 :371–377, 1990.
- R. Moyen. *Paramétrisation 3D de l'espace en géologie : le modèle Géochron*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Lorraine, Nancy, France, 2005.
- P. Muron and J.-L. Mallet. 3d balanced unfolding : the tetrahedral approach. In *23rd Gocad Meeting Proceedings*, 2003.

- P. Muron, A.-L. Tertois, J.-L. Mallet, and J. Hovadik. An efficient and extendible interpolation framework base on the matrix formulation of the discrete smooth interpolation. In *25th Gocad Meeting Proceedings*, 2005.
- A. Nicolas. *Principes de tectoniques*. Masson, 1988. 233 p.
- F. Nino. *Modélisation numérique de la déformation localisée et de l'activité tectonique des failles*. PhD thesis, Université de Montpellier II, Montpellier, France, 1997.
- B. Nour-Omid and P. Wriggers. A note on the optimum choice for penalty parameters. *Communications in Applied Numerical Methods*, 36 :9–15, 1987.
- D.R. Oakley and N.F. Knight. Adaptive dynamic relaxation algorithm for non-linear hyperelastic structures, pat i formulation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 126 :67–89, 1995.
- D.R. Oakley and N.F. Knight. Adaptive dynamic relaxation algorithm for non-linear hyperelastic structures, pat ii single processor implementation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 126 :91–109, 1995.
- D.R. Oakley, N.F. Knight, and D. Warner. Adaptive dynamic relaxation algorithm for non-linear hyperelastic structures, pat iii parallel implementation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 126 :111–129, 1995.
- G.G. O'Brien, M.A. Hyman, and S. Kaplan. A study of the numerical solution of partial difference equations. *Journal of Mathematics and Physics*, 29 :223–251, 1951.
- W.A. Olsson, J.C. Lorenz, and S.P. Cooper. A mechanical model for multiply-oriented conjugate deformation bands. *Journal of Structural Geology*, 26(2) :325–338, 2004.
- M. Papadrakakis. A method for the automated evaluation of the dynamic relaxation parameters. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 25(1) :35–48, 1981.
- K.C. Park and P.G. Underwood. Variable step central difference method for structural dynamic analysis, part i theoretical aspects. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 22(2) :241–258, 1980.
- M.N. Percevault and P.R. Cobbold. Mathematical removal of regional ductile strain in central brittany : evidence of wrench tectonics. *Tectonophysics*, 82 :317–328, 1982.
- M.N. Percevault. *Problème inverse en déformation finie : application au segment hercynien de Bretagne Centrale*. PhD thesis, Université de Rennes, Rennes, France, 1983.
- D.D. Pollard. Derivation and evaluation of a mechanical model for sheet intrusions. *Tectonophysics*, 19 :233–269, 1973.

-
- L. Le Pourhiet. *Modélisation thermo-mécanique de l'extension continentale : développements théoriques et applications au Golfe de Corinthe (Grèce)*. PhD thesis, Université Paris VI, Paris, France, 2004.
- A. Pouya, I. Djéran-Maigre, V. Lamoureux-Var, and D. Grunberger. Mechanical behavior of fine grained sediments : experimental compaction and three-dimensional constitutive model. *Marine and Petroleum Geology*, 15 :129–143, 1998.
- M. Prevost. *Accurate Coarse Reservoir Modeling Using Unstructured Grids, Flow-Based Upscaling and Streamline Simulation*. PhD thesis, Stanford University, California, USA, 2003.
- J.G. Ramsay and M.I. Huber. *The Techniques of Modern Structural Geology - Volume 2 : Folds and Fractures*. Academic Press, 1983.
- J.G. Ramsay and M.I. Huber. *The Techniques of Modern Structural Geology - Volume 3 : Applications of continuum mechanics in structural geology*. Academic Press, 2000.
- P. Renard and G. De Marsily. Calculating equivalent permeabilities : A review. *Advances in Water Resources*, 20(5-6) :253–278, 1997.
- A.A.G. Requicha and H.B. Voelcker. Constructive solid geometry. Production Automation Project Technical Memo 25, Rochester University, 1980.
- A.A.G. Requicha. Representations for rigid solids : Theory, methods and systems. *Computing Surveys*, 12(4) :437–464, 1980.
- S.M. Richard. Palinspastic reconstruction of southeastern california and southwestern arizona for the middle eocene. *Tectonics*, 12 :830–854, 1993.
- L. Rongved and J.T. Frasier. Displacement discontinuity in the elastic half-space. *Journal of Applied Mechanics*, 25 :25–128, 1958.
- D. Rouby, P.R. Cobbold, P.Szatmari, S. Demercian, D. Coelho, and J.A. Rici. Least-squares palinspastic restoration of regions of normal faulting : application to the campos basin (brazil). *Tectonophysics*, 221 :439–452, 1993.
- D. Rouby, P.R. Cobbold, P. Szatmari, S. Demercian, and D. Coelho. Restoration in plan view of faulted upper cretaceous and oligocene horizons and its bearing in the history of salt tectonics in the campos basin (brazil). *Tectonophysics*, 228 :435–445, 1993.
- D. Rouby, H. Fossen, and P.R. Cobbold. Extension, displacement and block rotations in the lager gulfaks area, northern north sea. *AAPG Bulletin*, 80 :875–890, 1996.

- D. Rouby, T. Souriot, J.P. Brun, and P.R. Cobbold. Displacements, strains and rotations within the afar depression (djibouti) from restoration in map view. *Tectonics*, 15 :952–965, 1996.
- D. Rouby, H. Xiao, and J. Suppe. 3-d restoration of complexly folded and faulted surfaces using multiple unfolding mechanism. *AAPG Bulletin*, 84(6) :805–829, 2000.
- D. Rouby. *Restauration en carte des domaines failles en extension, methode et applications*. PhD thesis, Universite de Rennes I, Rennes, France, 1994.
- M.G. Rowan and R. Kligfield. Cross-section restoration and balancing as an aid to seismic interpretation in extensional terranes. *AAPG Bulletin*, 73 :955–966, 1989.
- J. Salencon. *Mécanique des milieux continus. Tome I : Concepts généraux*. Editions de l'Ecole Polytechnique, France, 2000.
- P. Samson. *Equilibrage de structures géologiques dans le cadre du projet Gocad*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Lorraine, Nancy, France, 1996.
- F. Scheider, J.L. Potdevin, S. Wolf, and I. Faille. Mechanical and chemical compaction model for sedimentary basin simulators. *Tectonophysics*, 263 :307–317, 1996.
- O. Schenk and K. Gartner. Solving unsymmetric sparse systems of linear equations with pardiso. *Future Generation Computer Systems*, 20 :475–487, 2004.
- D. Schultz-Ela and K. Duncan. Restore (c) software and user's manual. Technical report, Bureau of Economic Geology (Texas, USA), 1991.
- D. Schultz-Ela. Application of three-dimensional finite-element method to strain field analysis. *Journal of Structural Geology*, 10 :263–272, 1988.
- D.D. Schultz-Ela. Restoration of cross-sections to constrain deformation processes of extensional terranes. *Marine and Petroleum Geology*, 9 :372–388, 1992.
- W.M. Schwerdtner. Geometric interpretation of regional strain regimes. *Tectonophysics*, 39 :515–531, 1977.
- D. Segonds. *Intégration de l'approche paramétrique dans le géomodelleur Gocad*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Lorraine, Nancy, France, 1998.
- R.C. Selley. *Elements of Petroleum Geology*. Academic Press, 2nd edition, 1998.
- R.E. Sheriff and L.P. Geldart. *Exploration seismology*. Academic Press, 1995.
- T. Skalicky. Laspack reference manual. Site Internet, 1996. [http ://www.tu-dresden.de/mwism/skalicky/laspack/laspack.html](http://www.tu-dresden.de/mwism/skalicky/laspack/laspack.html).

-
- I.S. Sokolnikoff. *Mathematical Theory of Elasticity*. McGraw-Hill, New York, 1956.
- L. Soler. *Introduction à l'épistémologie*. Ellipses, 2000.
- L. Souche. *Méthodes numériques pour la représentation des failles et des structures géologiques faillées*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Lorraine, Nancy, France, 2005.
- G. Strang. *Linear Algebra and Its Applications*. Academic Press, New York, 1976.
- C.H. Sword. Building flexible interactive geologic models. In Society of Exploration Geophysicist, editor, *61st Annual International Meeting*, 1991.
- A. Tarantola. *Inverse Problem Theory*. Elsevier, 1987.
- L.M. Taylor and D.P. Flanagan. Pronto3d : A three-dimensional transient solid dynamics program. Report SAND87-1912, Sandia National Laboratory, 1989.
- A.-L. Tertois and J.-L. Mallet. Real-time fault editing in a tetrahedralised volume. In *25th Gocad Meeting Proceedings*, 2005.
- M. Thibaut, J.P. Gratier, M. Léger, and J.M. Morvan. An inverse method for determining three-dimensional fault geometry with thread criterion : application to strike slip and thrust faults (western alps and california). *Journal of Structural Geology*, 18(9) :1127–1138, 1996.
- M. Thibaut. *Géométrie des surfaces de failles et dépliage 3D (Méthodes et Applications)*. PhD thesis, Université Joseph Fourier, Grenoble, France, 1994.
- A.L. Thomas. Poly3d : A three-dimensional, polygonal element, displacement discontinuity boundary element computer program with applications to fractures, faults and cavities in earth's crust. Master's thesis, Stanford University, California, USA, 1993.
- W.T. Thompson. *Vibration Theory and applications*. Prentice-Hall, 1965.
- S. Toledo. Taucs : a library of sparse linear solvers. Site Internet, 2003. <http://www.tau.ac.il/~stoledo/taucs/>.
- L.R.G. Treolar. Stresses and birefringence in rubber subjected to general homogeneous strain. *Proceedings of the Physical Society*, 60 :135–144, 1947.
- K. Tuncay, A. Park, and P. Ortoleva. Sedimentary basin deformation : an incremental stress approach. *Tectonophysics*, 323 :77–104, 2000.
- M.J. Turner, R.W. Clough, H.G. Martin, and L.J. Topp. Stiffness and deflection analysis of complex structures. *Journal of Aerospace Science*, 23 :805–823, 1956.

- R.J. Twiss and E.M. Moores. *Structural Geology*. W.H. Freeman and Company, 1992.
- P.G. Underwood and K.C. Park. Variable step central difference method for structural dynamic analysis, part ii implementation and performance evaluation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 23(3) :259–279, 1980.
- P.G. Underwood. An adaptive dynamic relaxation technique for nonlinear structural analysis. Technical Report LMSC-D678265, Lockheed Palo Alto Research Laboratory, 1979.
- P.G. Underwood. *Dynamic Relaxation*, chapter 5, pages 246–265. North-Holland, 1983.
- J. van Hunen, A.P. van den Berg, and N.J. Vlaar. A thermo-mechanical model of horizontal subduction below an overriding plate. *Earth and Planetary Science Letters*, 182(2) :157–169, 2000.
- Y. Vanbrabant, D. Jongmans, R. Hassani, and D. Bellino. An application of two-dimensional finite-element modelling for studying the deformation of the variscan fold-and-thrust belt (belgium). *Tectonophysics*, 309 :141–159, 1999.
- W. Velten. *Effective Seismic Modeling in 3D Earth Models*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Lorraine, Nancy, France, 1998.
- B. Vendeville, P.R. Cobbold, P. Davy, J.P. Brun, and P. Choukroune. *Physical models of extensional tectonics at various scales*, volume Continental Extensional Tectonics, 28 of *Geological Society of London Special Publication*, pages 95–107. M.P. Coward and J.F. Dewey and P.L. Hancock, 1987.
- B. Vendeville. *Champs de failles et tectoniques en extension : modélisation expérimentale*. PhD thesis, Université de Rennes I, Rennes, France, 1987.
- P. Verall. Structural interpretation with applications to north sea problems. course notes no. 3. Technical report, Joint Association of Petroleum Exploration Courses, 1981.
- K.J. Weiler. *The radial edge structure : A topological representation for non-manifold geometric modeling.*, chapter Geometric Modeling for CAD Applications. Springer Verlag, 1987.
- A.K. Welsh. Discussion on dynamic relaxation. *Proceedings of the Institute of Civil Engineers*, 37 :723–750, 1967.
- R.C. Whaley and J. Dongarra. Automatically tuned linear algebra software. Technical Report UT-CS-97-366, University of Tennessee, Knoxville, USA, 1997.
- N.J. White and G. Yielding. *Calculating normal fault geometries at depth : theory and examples*, pages 251–260. 1991.

-
- N. White, J.A. Jackson, and D.P. MacKenzie. The relationship between the geometry of normal fault and that of the sedimentary layers in their hanging walls. *Journal of Structural Geology*, 8 :897–909, 1986.
- E.J.M. Willemse, D.D. Pollard, and A. Aydin. Three-dimensional analyses of slip distributions on normal fault arrays with consequences for fault scaling. *Journal of Structural Geology*, 18(2-3) :295–309, 1996.
- J.R. Williams and R. O’Connor. Discrete element simulation and the contact problem. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 6 :279–304, 1999.
- G.D. Williams and I. Vann. The geometry of listric faults and deformation in their hangingwalls. *Journal of Structural Geology*, 9 :789–795, 1987.
- G.D. Williams, S.J. Kane, T.S. Buddin, and A.J. Richards. Restoration and balance of complex folded and faulted rock volumes : flexural flattening, jigsaw fitting and decompaction. *Tectonophysics*, 273 :203–218, 1997.
- P. Wriggers. *Computational Contact Mechanics*. Wiley, 2002.
- O.C. Zienkiewicz and R.L. Taylor. *The finite element method - Volume I : The Basis*. Butterworth-Heinemann, 5th edition, 2000.
- O.C. Zienkiewicz and R.L. Taylor. *The finite element method - Volume II : Solid mechanics*. Butterworth-Heinemann, 2000.
- O.C. Zienkiewicz. *The finite element method*. McGraw-Hill, 3rd edition, 1977.

Résumé

La restauration structurale consiste à rétablir un modèle géométrique du sous-sol dans sa configuration de dépôt. En permettant de tester et de valider les modèles structuraux face à des concepts et hypothèses géologiques, cette technique constitue un des outils clefs d'aide à l'interprétation et à la compréhension des structures ; elle est régulièrement employée en exploration et production des ressources pétrolières. L'objectif de cette thèse est de développer des méthodes numériques de restauration applicables à des modèles volumiques. Trois aspects sont successivement traités :

- La construction d'une représentation volumique adaptée au problème de restauration : une structure de données, le *Solid Model*, se basant sur un maillage tétraédrique conforme est construite à partir d'un modèle structural puis munie de méta-informations assurant la définition des relations logiques entre les groupes de mailles et les entités géologiques.
- Le traitement de la déformation continue de manière séquentielle : une fonction objective à minimiser est définie en tout point du domaine pour contrôler les conditions aux limites et le comportement du modèle volumique. Plusieurs approches sont présentées pour construire une telle fonction : (1) une approche cinématique établit des règles géométriques pour chacun des différents modes de déformation géologique (2) une approche mécanique dérive la fonction objective à partir du principe de conservation des moments. L'utilisation du *Solid Model* facilite l'interface entre les aspects géologiques et calculatoires.
- Le traitement de la déformation discontinue : un ensemble de contraintes cinématiques de contact est extrait automatiquement du *Solid Model* et permet d'assurer la cohérence du réseau de failles dans la configuration restaurée. La résolution numérique de ce type de déformation se base sur des algorithmes de mécanique du contact.

Mots-clés: restauration, dépliage, déformation, modélisation volumique, modélisation structurale, géomodélisation.

Abstract

Structural restoration aims at removing iteratively deformation to characterize geometry of subsurface models at time of deposition, it provides a systematic way to test and validate structural models against a set of geological hypothesis and concepts. This technique is widely used in exploration and production of hydrocarbons as it brings valuable insights for the interpretation and understanding of geological structures. This thesis is focused on the development of numerical methods for the restoration of volumetric models ; three different topics are successively covered :

- The development of a volumetric representation tailored for volumetric restoration : a data structure, referred as *Solid Model*, based on a conforming tetrahedral mesh is generated from a structural model and provides key meta-information to handle logical and geological relationship within the mesh.
- The sequential restoration of continuous deformation : a parameterized objective function subject to specific boundary conditions guides the behavior of the volumetric model through time. Several approaches are developed : (1) the kinematical approach defines the objective function based on geometrical assumptions derived from deformation styles (2) the mechanical approach relies on the conservation of momentum. The *Solid Model* ensures a consistent transition from geological requirements to computational requirements.
- The restoration of discontinuous deformation : a set of kinematical contact constraints is automatically derived from the meta-model provided by the *Solid Model* and ensures the geological consistency of the fault network in the restored state. The numerical technique enforcing the contact constraints relies on classical contact mechanics algorithm.

Keywords: restoration, unfolding, deformation, volumetric modeling, structural modeling, geomodeling.