



**UNIVERSITÉ
DE LORRAINE**

**BIBLIOTHÈQUES
UNIVERSITAIRES**

AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact bibliothèque : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr
(Cette adresse ne permet pas de contacter les auteurs)

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

Observation et commande d'une classe d'équations aux dérivées partielles couplées : Application à l'équation de Vlasov-Poisson

THÈSE

présentée et soutenue publiquement le 13 décembre 2022

pour l'obtention du

Doctorat de l'Université de Lorraine
(mention Automatique)

par

Amadou CISSE

Composition du jury

<i>Président/Rapporteur :</i>	Mohammed CHADLI :	Professeur des Universités, IBISC-Université d'Evry
<i>Rapporteur :</i>	Denis EFIMOV :	Directeur de Recherche à l'INRIA-CRISAL-Lille
<i>Examinatrices :</i>	Julie VALEIN :	Maitresse de conférence HDR, Université de Lorraine
	Ouafae BENNIS :	Maitresse de conférence, PRISME-Université d'Orléans
<i>Invité :</i>	Mohammed El Ganaoui :	Professeur des universités, Université de Lorraine
<i>Directeur :</i>	Mohamed BOUTAYEB :	Professeur, Université de Lorraine, Cran, UMR 7039

Mis en page avec la classe thesul.

Remerciements

Je remercie tout d'abord mon directeur de thèse le Pr. Mohamed Bou-tayeb, pour sa supervision et son support tout au long de ma recherche. Je lui suis reconnaissant de la confiance qu'il m'a accordée.

Je remercie le laboratoire CRAN (Centre de Recherche en Automatique de Nancy) qui m'a accueilli au sein de leur équipe de recherche. Je remercie toute l'équipe CID (Contrôle Identification Diagnostic) particulièrement celle de Commande et Observation des Systèmes Non-Linéaires (COSsyNL) pour la bonne collaboration dans leurs locaux à l'IUT Henri Poincaré. Je tiens à remercier particulièrement Dr. Latifa BADASS qui m'a accompagné dans mes enseignements à l'université de Lorraine.

À mes collègues de travail et amis, je vous remercie pour la dynamique que nous avons eue dans le laboratoire. Nos différents échanges et votre compagnie ont été appréciés.

J'exprime également mes remerciements à l'ensemble de mon jury, Dr. Denis EFIMOV et Pr. Mohammed CHADLI qui ont été mes rapporteurs, Dr. Julie VALEIN et Dr. Ouafae BENNIS. Je les remercie pour leur temps et leur bienveillance. Merci également au Pr. Mohammed El GANAOUI qui a accepté d'être membre invité au jury.

Il n'y a pas de mots pour remercier mes parents, mes frères et soeurs, pour leur soutien et prières qui m'ont accompagné tout au long de mes études.

*Je dédie cette thèse
à mes parents, mes frères et soeurs.*

Table des matières

Glossaire	ix
Introduction Générale	1
1 Contexte des travaux effectués	3
1.1 Contexte physique et équation de Vlasov	3
1.2 Modélisation mathématique de l'équation de Vlasov-Poisson	5
1.3 Quelques Propriétés du système de VP	6
1.4 Conclusion	11
2 La modélisation numérique	13
2.1 Méthode de Galerkin discontinue	13
2.1.1 Formulation de la méthode de Galerkin discontinue	14
2.1.2 Les normes	15
2.2 Approximation de Galerkin discontinue pour l'équation de Vlasov	16
2.3 Approximation par éléments finis mixtes de Raviart-Thomas du problème de Poisson	18
2.4 Erreur d'estimation	18
2.4.1 Intégration temporelle	19
2.5 Résultats numériques	20
2.6 Conclusion	23
3 Conception d'observateur et stabilisation des systèmes d'équation non linéaire : État de l'art	25
3.1 Observateurs d'état des systèmes non linéaires en dimension finie	26
3.1.1 Stabilité des systèmes dynamiques	26
3.1.2 Stabilité des systèmes dynamiques au sens de Lyapunov	27
3.1.3 Observateurs des systèmes non linéaires	28

3.2	Observateur d'état des EDPs par la méthode de « <i>Backstepping</i> »	35
3.2.1	« <i>Backstepping</i> »	36
3.2.2	Équation du noyau de gain	37
3.2.3	Conversion de l'EDP du noyau de gain en une équation intégrale	39
3.2.4	Méthode des approximations successives	40
3.2.5	Transformation inverse	41
3.2.6	Conception de l'observateur pour les EDP	43
3.2.7	La sortie du retour d'état	46
3.2.8	Etat d'art	48
3.3	Études des inégalités matricielles linéaires : Définitions et propriétés	48
3.3.1	Problème de faisabilité	49
3.3.2	Propriétés	50
3.4	Applications des LMIs	51
3.4.1	Analyse de Stabilité au sens de Lyapunov	51
3.4.2	Problème de stabilité quadratique des systèmes incertains	51
3.4.3	Stabilité des modèles Takagi-Sugeno (TS)	52
3.4.4	Problème de Stabilisation	53
3.4.5	Problèmes d'optimisation sous contraintes LMIs	53
3.4.6	Problème de commande Linéaire Quadratique (LQ)	55
3.4.7	Problème de commande Quadratique Linéaire Gaussienne (LQG)	55
3.4.8	Commande Prédictive Robuste	56
3.4.9	Problème de Commande \mathcal{H}_∞	57
3.5	Conclusion	58
4	Observateur d'état de l'équations Vlasov-Poisson	61
4.1	Synthèse d'observateur de VP	62
4.1.1	Transformation en LPV	62
4.1.2	Synthèse d'observateur \mathcal{H}_∞	68
4.2	Observateur d'état de l'équation de VP par la méthode de « <i>Backstepping</i> »	71
4.2.1	Structure d'observateur	73
4.2.2	Formulation du problème	74
4.3	Analyse de la convergence de l'erreur dynamique	75
4.3.1	La transformation de « <i>Backstepping</i> »	76
4.3.2	Solution du noyau de la transformation	77
4.3.3	Transformation inverse du « <i>Backstepping</i> »	78

4.3.4	Convergence de l'erreur dynamique de l'observateur	79
4.4	Résultats Numériques	79
4.5	Conclusion	82
5	Commande de l'équation de Vlasov-Poisson	83
5.1	Introduction	83
5.2	Commande linéaire de l'équation de Vlasov-Poisson	85
5.3	Commande basée observateur	86
5.3.1	Synthèse de la commande basée observateur	87
5.3.2	Extension à \mathcal{H}_∞	89
5.4	Conclusion	93
	Conclusion générale et Perspectives	95
	Bibliographie	99
A	Outils techniques	109
A.1	Opérateurs de projection	109
A.2	Preuves des Théorèmes du chapitre 2	110
A.2.1	Proposition (2.2.2)	110
A.2.2	Lemme(2.3.1)	111
B	Représentation spectrale de Fourier-Hermite	113
B.1	Lemmes	113
B.2	Fonction de Bessel J_n	114
B.3	La fonction de Bessel modifiée I_n	114
B.4	Représentation spectrale de Fourier-Hermite	115
B.4.1	Système discrétisé	116
C	Équation linéaire homogène avec dérivées partielles du premier ordre	119
C.1	La relation entre une équation linéaire homogène avec des équations différentielles partielles du premier ordre et le système d'équations différentielles ordinaires sous forme symétrique correspondante	119
C.2	Construction d'une solution générale d'une équation linéaire homogène	121

Glossaire

Symboles et Ensembles

\mathbb{R} = Ensemble des nombres réels

\mathbb{R}^+ = Ensemble des nombres réels positifs

\mathbb{R}^d = Ensemble des nombres réels euclidien de dimension d

$\Omega_x \subset \mathbb{R}^d$: Domaine des positions

$\Omega_v \subset \mathbb{R}^d$: Domaine des vitesses

$\Omega_T = [0, T] \subset \mathbb{R}^+$: Espace de temps

$\Omega = \Omega_x \times \Omega_v$: Domaine des phases

$\partial\Omega$: Frontière du domaine de Ω

$\mathcal{T}_{h_x}^x$: Famille de partitions cartésiennes de Ω_x

\mathcal{T}_h : Famille de partitions cartésiennes de Ω

h : Taille du maillage

$\nabla_x u = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial u_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$ avec $u = (u_1, \dots, u_n)$: gradient

$\frac{\partial u}{\partial x_i} = u_{x_i}$ avec $i = (1, 2, \dots, n)$: dérivées partielles

$\Delta u(x_1, \dots, x_n) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}(x_1, \dots, x_n)$: Opérateur Laplacien

Notations et Matrices

x = Position des particules

v = Vitesse des particules

t = Temps

T = Temps maximum

f = Fonction de distribution

f = Fonction de distribution d'état

\mathbf{f}_h = Vecteur d'état

$\tilde{\mathbf{f}}_h$ = Estimé de \mathbf{f}_h

$\dot{\mathbf{f}}_h$ = Dérivée de \mathbf{f}_h

E = Champs électrostatique

\mathbf{e}_r = Erreur d'estimation

ϕ = Potentiel électrostatique

ρ = Densité macroscopique de particule

\mathbf{J} = Densité de courant

\mathcal{E}_k = Énergie cinétique

\mathcal{E}_e = Énergie électrique

\mathcal{E}_{tot} = Énergie totale

\mathcal{M} = Masse totale

u = Fonction de commande

Y_h = Vecteur de sortie

$\mathbf{M}_h > 0$ ($\mathbf{M}_h \geq 0$) Matrice \mathbf{M}_h symétrique définie (resp. semi-définie) positive

$\mathbf{M}_h < 0$ ($\mathbf{M}_h \leq 0$) Matrice \mathbf{M}_h symétrique définie (resp. semi-définie) négative

\mathbf{I} = Matrice identité de dimension $s \times s$ (resp. appropriée)

\mathbf{M}_h^T = Transposée de la matrice \mathbf{M}_h

\mathbf{M}_h^{-1} = Inverse de la matrice \mathbf{M}_h

$\begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ (\star) & M_{22} \end{pmatrix}$ Matrice symétrique, le symbole (\star) représente M_{12}^T

$L^p(\Omega) = \left\{ u \text{ mesurable sur } \Omega, \quad \left(\int_{\Omega} u^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \right\} \quad 1 \leq p < \infty$

$L^\infty(\Omega) = \{u \text{ mesurable sur } \Omega, \text{ et il existe } c \text{ tel que } |u(x)| \leq c \text{ p.p. sur } \Omega\}$

$\mathcal{C}^k(\Omega) = \text{fonctions } k \text{ fois continûment différentiables sur } \Omega (k \text{ entier } \geq 0)$

$H^m(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) \mid \forall \alpha \text{ tel que } |\alpha| \leq m, D^\alpha u \in L^2(\Omega)\}$

$H_0^1(\Omega) : \text{L'ensemble des fonctions de } H^1(\Omega) \text{ dont la trace est nulle sur } \partial\Omega.$

$\mathcal{D}(\Omega) := \text{L'ensemble des applications } C^\infty(\Omega) \text{ à support compact dans } \Omega.$

$H^{-k}(\Omega) := \text{L'espace des formes linéaires continues sur } H_0^k, \text{ telles qu'il existe une constante } C > 0 \text{ pour laquelle } \forall \Phi \in \mathcal{D}(\Omega), | \langle u, \Phi \rangle | \leq C \|\Phi\|_{H^k(\Omega)}.$

$C(0, \tau; V) := \{u : [0, \tau] \longrightarrow V : t \longmapsto \|u(t)\|_V \text{ continue } \}$

$Co(x, y) := \{\lambda x + (1 - \lambda)y, 0 \leq \lambda \leq 1\} : \text{Ensemble convexe}$

$\|\cdot\|_{\mathcal{L}(X, Y)} := \|f\|_{\mathcal{L}(X, Y)} := \sup_{x \in X, \|x\|=1} \|f(x)\|_Y$

Acronymes

VP Vlasov-Poisson

LMI Linear Matrix Inequality (Inégalité matricielle linéaire).

LTI Linéaire à Temps Invariant

LPV Linéaires à Paramètres Variants

DMVT Differential Mean Value Theorem = Théorème des accroissements finis.

MDG Méthode de Galerkin Discontinue

FEM Methode des Éléments Finis

RT Raviart-Thomas

EVP Problèmes des valeurs propres

Table des matières

Table des figures

1.1	Vue d'artiste du Tokamak ITER[126]	4
2.1	Approximation de la fonction de distribution à différents instants, calculée sur un maillage $(N_x, N_v) = (120, 120)$ sur l'espace des phases $\Omega = \Omega_x \times \Omega_v$.	21
2.2	L'évolution temporelle de la norme L^2 du champs électrostatique $E_h(t)$ sur un maillage $(120, 120)$	22
2.3	L'évolution temporelle de l'énergie cinétique à gauche et celle de l'énergie totale à droite sur un maillage (120×120)	22
2.4	L'évolution temporelle de l'erreur de l'énergie totale sur un maillage $(120, 120)$.	23
2.5	L'erreur de conservation L^∞ de f_h à gauche , l'erreur de L^2 à droite et en bas l'erreur de conservation L^1 sur un maillage (120×120)	23
3.1	Principe d'estimation d'état	28
4.1	A gauche l'approximation de la fonction de distribution f_h et à droite celle de l'observateur \tilde{f}_h sur un maillage $(N_x, N_v) = (120, 120)$ sur l'espace des phases $\Omega = \Omega_x \times \Omega_v$	66
4.2	L'évolution temporelle de l'énergie totale de f_h à gauche et celle de l'observateur \tilde{f}_h à droite sur un maillage (120×120) à $T = 70$	67
4.3	A gauche l'évolution temporelle de l'erreur relative de l'énergie totale f_h , à droite celle de l'observateur \tilde{f}_h sur un maillage (120×120) à $T = 70$	67
4.4	A gauche l'erreur relative de conservation L^2 de f_h et droite celle de \tilde{f}_h sur un maillage (120×120)	67
4.5	A gauche l'approximation de la fonction de distribution f_h et à droite celle de l'observateur \tilde{f}_h sur un maillage $(N_x, N_v) = (120, 120)$ sur l'espace des phases $\Omega = \Omega_x \times \Omega_v$ cas \mathcal{H}_∞	70
4.6	L'évolution temporelle de l'énergie totale de f_h à gauche et celle de l'observateur \tilde{f}_h à droite sur un maillage (120×120) à $T = 70$ cas \mathcal{H}_∞	70
4.7	A gauche l'évolution temporelle de l'erreur relative de l'énergie totale f_h , à droite celle de l'observateur \tilde{f}_h sur un maillage (120×120) à $T = 70$ cas \mathcal{H}_∞ .	71
4.8	A gauche l'erreur relative de conservation L^2 de f_h et droite celle de \tilde{f}_h sur un maillage (120×120) cas \mathcal{H}_∞	71
4.9	De haut en bas, de la gauche vers la droite respectivement l'approximation de la fonction de distribution f et celle de l'observateur \tilde{f} sur un maillage $(N_x, N_v) = (120, 120)$ sur l'espace des phases Ω aux temps $T = 25, T = 70$.	80

4.10	L'évolution temporaire de l'énergie totale de f à gauche et celle de l'observateur \tilde{f} à droite sur un maillage (120×120) à $T = 25$	81
4.11	A gauche l'évolution temporelle de l'erreur relative de l'énergie totale de f , à droite celle de l'observateur \tilde{f} sur un maillage (120×120) à $T = 25$	81
4.12	A gauche l'erreur relative de conservation L^2 de f et à droite celle de \tilde{f} sur un maillage (120×120) à $T=25$	81
5.1	A gauche l'approximation de la fonction de distribution f_h et à droite celle sous l'action de $\mathbf{u}_h = -\mathbf{K}\tilde{\mathbf{f}}_h$ sur un maillage $(N_x, N_v) = (120, 120)$ sur l'espace des phases.	88
5.3	A gauche l'évolution temporelle de l'erreur relative de l'énergie totale de f_h et à droite celle sous l'action de $\mathbf{u}_h = -\mathbf{K}\tilde{\mathbf{f}}_h$ sur un maillage (120×120) à $T = 70$	89
5.2	L'évolution temporelle de l'énergie totale de f_h à gauche et celle sous l'action $\mathbf{u}_h = -\mathbf{K}\tilde{\mathbf{f}}_h$ à droite sur un maillage (120×120) à $T = 70$	89
5.4	A gauche l'erreur relative de conservation L^2 de f_h et à droite celle sous l'action de $\mathbf{u}_h = -\mathbf{K}\tilde{\mathbf{f}}_h$ sur un maillage (120×120)	90
5.5	A gauche l'approximation de la fonction de distribution f_h et à droite celle sous l'action de $\mathbf{u}_h = -\mathbf{K}\tilde{\mathbf{f}}_h$ sur un maillage $(N_x, N_v) = (120, 120)$ sur l'espace des phases Ω cas \mathcal{H}_∞	92
5.6	L'évolution temporelle de l'énergie totale de f_h à gauche et à droite celle sous l'action $\mathbf{u}_h = -\mathbf{K}\tilde{\mathbf{f}}_h$ sur un maillage (120×120) à $T = 70$ cas \mathcal{H}_∞	92
5.7	A gauche l'évolution temporelle de l'erreur de l'énergie totale de f_h , à droite celle sous l'action de $\mathbf{u}_h = -\mathbf{K}\tilde{\mathbf{f}}_h$ sur un maillage (120×120) à $T = 70$ cas \mathcal{H}_∞	93
5.8	A gauche l'erreur de conservation L^2 de f_h et à droite celle sous l'action de $\mathbf{u}_h = -\mathbf{K}\tilde{\mathbf{f}}_h$ sur un maillage (120×120) cas \mathcal{H}_∞	93
A.1	Diagramme de commutation	110

Introduction Générale

Cette thèse s'inscrit dans l'étude des synthèses des observateurs d'état et de lois de commande du système d'équation de Vlasov-Poisson $1D \times 1D$ en dimension finie et infinie. Elle aborde la problématique d'observation d'état et de lois de commande du système non linéaire de grande dimension. L'état d'un tel système n'est souvent pas mesurable en raisons d'inaccessibilité technique et/ou du coût très important. Pour y accéder, il est donc nécessaire de construire des capteurs logiciels pour la commande. En effet très peu de résultats existent sur le contrôle [59] et encore moins sur l'observation. La difficulté réside dans le fait qu'il existe très peu d'outils mathématiques en dimension infinie pour faire de l'observation et encore moins lorsque plusieurs EDPs sont couplées et non linéaires. Une solution alternative consistera à utiliser des estimateurs non linéaires en dimension infinie sur un modèle discrétisé du système d'équation de Vlasov-Poisson. L'objectif de cette thèse est de présenter quelques résultats d'observateur et lois de commande en dimension finie d'une part et d'autre part la synthèse d'observateur par la méthode de « *Backstepping* » en dimension infinie.

Le **chapitre 1** de ce manuscrit rappelle le contexte des travaux effectués. Il rappelle également la modélisation mathématiques et quelques propriétés physiques fondamentales de l'équation de Vlasov-Poisson (VP) : le principe du maximum, la conservation de masse totale, la conservation de l'énergie totale, la conservation du moment, la conservation de la charge et la conservation à la norme L^p au cours du temps.

Le **chapitre 2** est consacré à la modélisation numérique du schéma adopté dans ce manuscrit. Il présente et détaille le schéma numérique de la méthode de Galerkin discontinue (*DGM*) pour l'équation de Vlasov et une approximation par éléments finis mixtes de Raviart-Thomas (RT_k) au problème de l'équation de Poisson. Cette étude nous permettra d'obtenir une représentation matricielle du système. C'est le travail effectué en [31]. Il aboutira pour la suite à l'étude des inégalités matricielles linéaires (*LMIs*) dans les chapitres 4 et 5. Le chapitre se termine par la validation numérique. Les résultats numériques obtenus sont programmés sur Matlab2019a. Les études sont restreintes à $2D$ c'est à dire $1D$ en espace et $1D$ en vitesse. Il présente, à cet effet, un cas de test classique à ce type de système : l'amortissement de Landau linéaire qui vérifie les conservations de l'énergie totale et de norme L^2 .

Le **chapitre 3** rappelle d'une part le concept d'analyse de stabilité au sens de Lyapunov, de la théorie de conception d'observation et l'état de l'art sur la conception d'estimateur d'un système non linéaire : Observateurs de type Lipschitz, "One sided Lipschitz", approche basée sur le théorème des accroissement finis. Il rappelle la méthode de

« *Backstepping* » et la synthèse de l'observateur d'EDPs de l'équation de réaction-diffusion. D'autre part le **chapitre 3** rappelle les études des inégalités matricielles linéaires (LMIs) et quelques propriétés des problèmes dépendants des formulations en LMIs. Il expose quelques applications des LMIs à savoir l'analyse de stabilité au sens de Lyapunov, le problème de stabilité quadratique des systèmes incertains, la stabilité des modèles Takagi-Sugeno (TS), le problème de Stabilisation du système commandé et traite de quelques problèmes d'optimisation sous contraintes LMIs : Programmation Sémi-Définie (SDP), Problèmes des valeurs propres (EVP) et des problèmes de commande : Problème de commande Linéaire Quadratique (LQ), problème de commande Quadratique Linéaire Gaussienne (LQG), Commande Prédictive Robuste, Problème de Commande \mathcal{H}_∞ .

Le **chapitre 4** traite la synthèse d'observateur de l'équation de Vlasov-Poisson en dimension finie d'une part, en adoptant une approche basée sur l'utilisation du théorème des valeurs intermédiaires (DMVT). Il s'agit de transformer la dynamique de l'erreur d'estimation en un système à paramètres variables linéaires (LPV). Les techniques de calcul LPV permettent d'obtenir des conditions de stabilité sous forme d'inégalité matricielle linéaire (LMI). D'autre part il aborde la conception d'observateur d'état en dimension infinie de l'équation de Vlasov $1D \times 1D$ par la technique du « *Backstepping* ».

Le **chapitre 5** traite la stabilisation par retour d'état d'une classe de systèmes d'EDPs non linéaires décrits par l'équation de Vlasov-Poisson en dimension finie. Pour ce faire, grâce à l'approche de discrétisation discontinue de Galerkin du chapitre 2, il établit un modèle d'espace d'état explicite. Il aborde ensuite la stabilisation asymptotique sous la condition des LMIs de commande linéaire du retour d'état et celle d'une commande basée observateur, en présence ou non des perturbations.

Chapitre 1

Contexte des travaux effectués

Sommaire

1.1	Contexte physique et équation de Vlasov	3
1.2	Modélisation mathématique de l'équation de Vlasov-Poisson	5
1.3	Quelques Propriétés du système de VP	6
1.4	Conclusion	11

Ce chapitre permet de faire le point sur le contexte de ce travail de thèse. Dans un premier temps, il fait un bref rappel sur les plasmas. Ensuite il établit la modélisation mathématiques de l'équation du plasma (équation de Vlasov-Poisson). Enfin il rappelle quelques propriétés physiques du système d'équation de Vlasov-Poisson.

1.1 Contexte physique et équation de Vlasov

Rappelons qu'un plasma, souvent appelé le quatrième état de la matière, est en fait un gaz ionisé globalement neutre, constitué de particules neutres et chargées qui réagissent à la fois entre elles et avec la présence d'un champ électromagnétique. En raison de l'équilibre thermodynamique qui est atteint grâce aux collisions entre les particules, le comportement d'un plasma ne peut pas toujours être assimilé à celui d'un fluide. Les plasmas et les faisceaux de particules chargées sont modélisés par une fonction statistique. Cette fonction de distribution représente la probabilité de présence des particules en un point de l'espace des phases. Elle est alors une solution de l'équation de Vlasov qui fait intervenir un champ électromagnétique créé par les particules chargées, lui-même solution des équations de Maxwell. Sous certaines hypothèses, le modèle peut être réduit au problème de l'équation de Vlasov couplée à une équation de Poisson.

Pour les scientifiques, le but est de créer de l'énergie à moindres frais et avec des composants durables et recyclables. Pour chauffer le plasma, on procède soit par effet Joule soit par effet Compton (rayons laser) ou encore par injection d'ondes HF (Haute fréquence) (10-200GHz) par des antennes sur les tokamaks (1.1). Le tokamak est une machine expérimentale conçue pour exploiter l'énergie de la fusion. Dans l'enceinte d'un

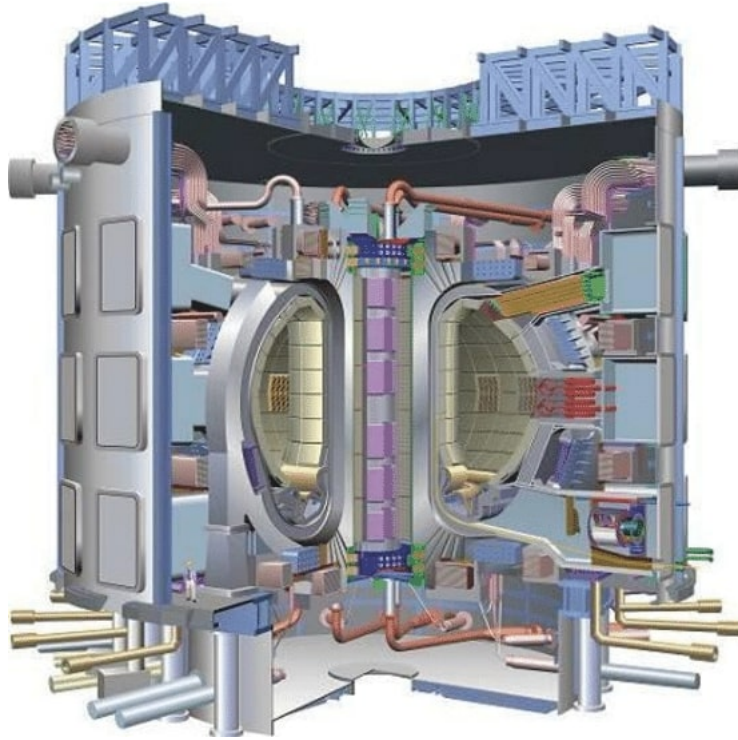


FIGURE 1.1 – Vue d’artiste du Tokamak ITER[126]

tokamak, l’énergie générée par la fusion des noyaux atomiques est absorbée sous forme de chaleur par les parois de la chambre à vide. Tout comme les centrales électrogènes classiques, une centrale de fusion utilisera cette chaleur pour produire de la vapeur, puis, grâce à des turbines et à des alternateurs, de l’électricité.

L’étude de la stabilité et de l’équilibre des particules chargées est une des applications en physique des plasmas, notamment pour la fusion contrôlée que l’on cherche à réaliser pour fournir de l’énergie dans des projets civils comme ITER (International Thermonuclear Experimental Reactor) au CEA(Commissariat à l’énergie atomique et aux énergies alternatives) à Cadarache ou militaires comme le Laser MégaJoule (LMJ) au CESTA à Bordeaux. On peut aussi s’intéresser, par exemple pour l’endommagement des matériaux spatiaux soumis à des faisceaux de particules chargées, à l’étude des plasmas et des faisceaux de particules présents dans l’espace. Une autre application est la construction et l’étude des accélérateurs de particules. Si vous voulez comprendre plus sur le plasma, je vous invite à lire les thèses de Besse Nicolas[20], Steiner Christophe[128], Coulette David[37], etc . Le CEA a également publié de nombreux articles de vulgarisation permettant de se renseigner sur le sujet en présentant les enjeux, les risques, les défis et de nombreux aspects intéressants au non spécialiste du domaine. C’est dans ce contexte que s’inscrit cette thèse.

1.2 Modélisation mathématique de l'équation de Vlasov-Poisson

Le système d'équation de Vlasov-Poisson (VP) est un modèle classique de la théorie cinétique sans collision. Il s'agit d'une description limite du champ moyen d'un grand ensemble de particules interagissant par des forces électrostatiques ou gravitationnelles. Nous nous limitons au cas de la physique des plasmas.

En théorie cinétique l'évolution de la densité de particules ou de la densité de masse $f(x, v, t)$ dans l'espace des phases (x, v) , c'est à dire la position et la vitesse au temps $t \geq 0$ est donnée par l'équation de Vlasov :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f - \nabla_x \phi \cdot \nabla_v f = 0, \quad (x, v, t) \in \Omega_x \times \mathbb{R}^d \times [0, T], \quad (1.1)$$

considérée avec des conditions limites périodiques $\Omega_x = [0, L]^d$ dans le tore de dimension d , avec $d = 1, 2, 3$ où ϕ est le potentiel électrique. Afin de décrire le mouvement des particules chargées dans les plasmas, nous devons calculer le champ de force à partir de la densité macroscopique des particules

$$\rho(x, t) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x, v, t) dv. \quad (1.2)$$

On définit également la densité de courant par

$$\mathbf{J}(x, t) = \int_{\Omega_v} v f(x, v, t) dv. \quad (1.3)$$

Dans un modèle plus précis, les effets magnétiques et l'équation de Maxwell pour les champs de force devraient être pris en compte. Nous supposons qu'ils sont négligeables et calculons le champ de force à partir de l'équation de Poisson suivante

$$-\Delta \phi(x, t) = \rho(x, t) - 1, \quad \Omega_x \times [0, T] \quad (1.4)$$

où $E(x, t) = \nabla_x \phi$ est le champ électrique par unité de masse, à un signe près, agissant sur les particules. Sa solution permet de calculer le potentiel électrique $\phi(x, t)$ dû à la fois à la partie auto-cohérente provenant de la densité macroscopique $\rho(x, t)$ et à une densité d'ions de fond uniforme normalisée à un. Dans les applications du plasma, le système doit être globalement neutre, on suppose que leur distribution est uniforme on a

$$\int_{\Omega_x} \rho(x, t) dx = \int_{\Omega_x} \int_{\mathbb{R}^d} f(x, v, t) dv dx = 1. \quad (1.5)$$

Cette condition de compatibilité est imposée par la périodicité des conditions aux limites. Pour déterminer de manière unique le champ électrique $E(x, t)$, nous ajoutons une condition de moyenne nulle

$$\int_{\Omega_x} E(t, x) dx = 0, \quad t \in \Omega_T. \quad (1.6)$$

L'existence de solutions faibles pour le système de VP fut d'abord établie par Arsenev [10] [11], puis par Illner-Neunzert [69], et enfin généralisée par Diperna-Lions [46] dans le cadre des solutions renormalisées. Pour le système de VP l'existence locale en temps à été établie par Kurth [85]. L'existence et l'unicité des solutions classiques ont été démontrées par Iordanskii [70] et Cooper-Klimas [34] en une dimension, Ukai-Okabe [136] en deux dimensions, Bardos-Degond [16] en trois dimensions pour une donnée initiale petite. Plusieurs analyses ont après suivi ces études. Nous ne les rappellerons pas dans ce manuscrit.

1.3 Quelques Propriétés du système de VP

Le système d'équation de VP vérifie un certain nombre de propriétés. Il a l'avantage de conserver un certain nombre de quantités physiques. Ainsi il conserve la masse, les normes L^p , la quantité de mouvement, l'énergie totale au cours du temps. Rappelons quelques propriétés suivantes :

Proposition 1.3.1 (Principe du maximum). *Soit $f_0(x, v)$ la fonction de distribution initiale du système de Vlasov-Poisson, supposée positive ou nulle, et $f(x, v, t)$ la solution de (1.1). On a alors*

$$0 \leq f(x, v, t) \leq \max_{(x;v) \in \Omega_x \times \Omega_v} f_0(x, v).$$

Démonstration. Rappelons que la fonction de distribution est une densité de probabilité, alors elle est toujours positive. Le système définissant les caractéristiques associées s'écrit

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{V}(t) \tag{1.7}$$

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = -E(\mathbf{X}(t), t). \tag{1.8}$$

On note par $(\mathbf{X}(t; x, v, s), \mathbf{V}(t; x, v, s))$, ou plus concis $(\mathbf{X}(t), \mathbf{V}(t))$ lorsque la dépendance par rapport aux conditions initiales n'est pas explicitement recherchée, l'unique solution à l'instant t de ce système qui prend la valeur (x, v) à l'instant s . En utilisant (1.7)-(1.8), l'équation de Vlasov (1.1) peut être exprimée de manière équivalente

$$\frac{d}{dt} (f(\mathbf{X}(t), \mathbf{V}(t))) = 0$$

Nous avons ainsi

$$f(x, v, t) = f_0(\mathbf{X}(0; x, v, t), \mathbf{V}(0; x, v)).$$

De cette expression, on déduit que f vérifie le principe du maximum qui peut s'écrire, comme f_0 est positif on a

$$0 \leq f(x, v, t) \leq \max_{(x,v)} (f_0(x, v)).$$

□

Proposition 1.3.2. *Le système Vlasov-Poisson vérifie la conservation de la quantité de mouvement suivante :*

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \mathbf{v} f d\mathbf{x} d\mathbf{v} = \frac{d}{dt} \int_{\Omega_{\mathbf{x}}} \mathbf{J} d\mathbf{x} = 0.$$

Démonstration. Nous allons utiliser l'égalité suivante qui se vérifie pour tout vecteur ϵ dépend de \mathbf{x} dans un domaine périodique

$$\int (\nabla \times \epsilon) \times \epsilon d\mathbf{x} = - \int \left(\epsilon (\nabla \cdot \epsilon) + \frac{1}{2} \nabla \epsilon^2 \right) d\mathbf{x} = - \int \epsilon (\nabla \cdot \epsilon) d\mathbf{x}. \quad (1.9)$$

Remarquons en particulier qu'en prenant $\epsilon = E$ dans l'égalité précédente avec E solution de l'équation de Poisson(1.4), on obtient, comme $\nabla \times E = 0$ et $\nabla \cdot E = -\Delta\phi(\mathbf{x}, t) = 1 - \rho(\mathbf{x}, t)$, que $\int E (1 - \rho) d\mathbf{x} = 0$. Comme de plus $E = -\nabla\phi$ et comme on intègre sur un domaine périodique $\int E d\mathbf{x} = 0$. Il en résulte alors que

$$\int E \rho d\mathbf{x} = 0. \quad (1.10)$$

Introduisons maintenant la formule de Green sur la divergence :

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{F} q + \int_{\Omega} \mathbf{F} \cdot \nabla q = \int_{\partial\Omega} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}) q \quad \forall \mathbf{F} \in H(\text{div}, \Omega), q \in H^1(\Omega), \quad (1.11)$$

où classiquement $H^1(\Omega)$ est le sous-ensemble de $L^2(\Omega)$ les fonctions carrées intégrables, des fonctions dont le gradient est dans $L^2(\Omega)$; et $H(\text{div}, \Omega)$ est le sous-ensemble de $L^2(\Omega)$ des fonctions dont la divergence est dans $L^2(\Omega)$.

Multiplions l'équation de Vlasov (1.1) par \mathbf{v} et intégrons dans \mathbf{x} et dans \mathbf{v}

$$\frac{d}{dt} \int \mathbf{v} f d\mathbf{x} d\mathbf{v} + \int \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\mathbf{v} \otimes \mathbf{v} f) d\mathbf{x} d\mathbf{v} - \int \mathbf{v} \nabla_{\mathbf{v}} \cdot (E f) d\mathbf{x} d\mathbf{v} = 0.$$

La deuxième intégrale s'annule car le domaine est périodique en \mathbf{x} et la formule de Green sur la divergence (1.11) donne pour la dernière intégrale

$$- \int \mathbf{v} \nabla_{\mathbf{v}} \cdot (E f) d\mathbf{x} d\mathbf{v} = \int E f d\mathbf{x} d\mathbf{v} = \int E \rho d\mathbf{x} = 0$$

en utilisant (1.10). Il s'ensuit finalement que

$$\frac{d}{dt} \int \mathbf{v} f d\mathbf{x} d\mathbf{v} = \frac{d}{dt} \int \mathbf{J} d\mathbf{x} = 0.$$

□

Proposition 1.3.3. *Si la fonction de distribution est à décroissance suffisamment rapide lorsque $|v| \rightarrow \infty$, on a l'équation de conservation de la charge*

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{J} = 0,$$

où la charge ρ est définie par (1.2) et le courant \mathbf{J} est défini par (1.3).

Démonstration. En intégrant l'équation de Vlasov en vitesse sous sa forme conservative on obtient

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Omega_v} \left(\frac{\partial}{\partial t} f + \nabla_x \cdot (\mathbf{v}f) - \nabla_v \cdot (Ef) \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{\Omega_v} f \right) + \nabla_x \cdot \left(\int_{\Omega_v} \mathbf{v}f \right) - \int_{\Omega_v} \nabla_v \cdot (Ef) \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \rho + \nabla_x \cdot \mathbf{J} \end{aligned}$$

le dernier terme s'annule (par le théorème de Gauss) du fait de la condition de décroissance à l'infini. \square

Proposition 1.3.4 (Conservation). *Quand on considère le système de Vlasov-Poisson dans tout l'espace $\Omega = \Omega_x \times \Omega_v$, la masse totale $\mathcal{M}(t)$, les normes L^p , la quantité de mouvement, l'énergie totale \mathcal{E}_{tot} , définies par*

1. *the total mass :*

$$\mathcal{M}(t) = \int_{\Omega} f(x, v, t) dx dv$$

2. *les normes L^p :*

$$\|f\|_p = \left(\int_{\Omega} f(x, v, t)^p dx dv \right)^{1/p}$$

3. *l'énergie totale $\mathcal{E}_{tot}(t) = \mathcal{E}_k(t) + \mathcal{E}_e(t)$:*

$$\mathcal{E}_{tot}(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} v^2 f(x, v, t) dx dv + \frac{1}{2} \int_{\Omega_x} E^2(x, t) dx$$

l'énergie cinétique :

$$\mathcal{E}_k(t) = \int_{\Omega} f(x, v, t) \frac{|v|^2}{2} dx dv$$

l'énergie électrique :

$$\mathcal{E}_e(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_x} |E(x, t)|^2 dx$$

sont conservées au cours du temps.

Démonstration. Nous allons restreindre la preuve à 2D c'est à dire 1D en position et 1D en vitesse. La fonction $f(t, x, v)$ est positive et périodique par rapport à x . La valeur initiale, f_0 est à support compact par rapport à v alors la solution, f restera compacte, (en d'autres termes f est nul pour les grandes vitesses). De plus, on peut noter que les variables indépendantes sont (x, v) et donc le problème est déjà en 2D. On commence par écrire la formulation faible de (1.1) en introduisant l'espace des fonctions $C_0^\infty(\Omega_x \times \Omega_v)$ et la fonction test $\varphi \in C_0^\infty(\Omega_x \times \Omega_v)$. En multipliant la PDE par la fonction test et en intégrant par rapport à x et v , nous avons

$$\begin{aligned}
0 &= \underbrace{\int_{\Omega_x} \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial f}{\partial t} \varphi dv dx}_{A(t)} + \int_{\Omega_x} \int_{\mathbb{R}} v \frac{\partial f}{\partial x} \varphi dv dx - \int_{\Omega_x} \int_{\mathbb{R}} E(x) \frac{\partial f}{\partial v} \varphi dv dx \\
&= A(t) + \int_{\Omega_x} \int_{\Omega_v} v \frac{\partial f}{\partial x} \varphi dv dx - \int_{\Omega_x} \int_{\Omega_v} E(x) \frac{\partial f}{\partial v} \varphi dv dx \\
&= A(t) + \int_{\Omega_v} v \left(\int_{\Omega_x} \frac{\partial f}{\partial x} \varphi dx \right) dv - \int_{\Omega_x} E(x) \left(\int_{\Omega_v} \frac{\partial f}{\partial v} \varphi dv \right) dx \\
&= A(t) + \left(\int_{\Omega_v} v \underbrace{[f\varphi]_{\partial\Omega_x}}_{=0} dv - \int_{\Omega_v} \int_{\Omega_x} v f \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx dv \right) \\
&\quad - \left(\int_{\Omega_x} E(x) \underbrace{[f\varphi]_{\partial\Omega_v}}_{=0} dx - \int_{\Omega_v} \int_{\Omega_x} E(x) f \frac{\partial \varphi}{\partial v} dx dv \right) \\
0 &= \int_{\Omega_x} \int_{\Omega_v} \frac{\partial f}{\partial t} \varphi dx dv - \int_{\Omega_x} \int_{\Omega_v} v f \frac{\partial \varphi}{\partial x} dv dx + \int_{\Omega_x} \int_{\Omega_v} E(x) f \frac{\partial \varphi}{\partial v} dv dx \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega_x \times \Omega_v).
\end{aligned}$$

VP : les conservations de masse et d'énergie ainsi que la conservation en L^2 .

1. Conservation de masse

La conservation de masse se lit :

$$\int_{\Omega_x} \int_{\Omega_v} f(t, x, v) dv dx = \int_{\Omega_x} \int_{\Omega_v} f_0(x, v) dv dx \quad \forall t > 0$$

Démonstration. Prenons φ comme

$$\varphi(x, v) = \begin{cases} 1 & v \in \Omega_v, x \in \Omega_x \\ 0 & v \in \mathbb{R} \setminus \Omega_v, x \in \Omega_x \end{cases}$$

alors nous aurons :

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{\Omega_x} \int_{\Omega_v} \frac{\partial f}{\partial t} 1 dx dv - \underbrace{\int_{\Omega_x} \int_{\Omega_v} v f \frac{\partial \varphi}{\partial x} dv dx}_{=0} + \underbrace{\int_{\Omega_x} \int_{\Omega_v} E(x) f \frac{\partial \varphi}{\partial v} dv dx}_{=0} \\
0 &= \frac{d}{dt} \int_{\Omega_x} \int_{\Omega_v} f dx dv
\end{aligned}$$

et donc

$$\int_{\Omega_x} \int_{\Omega_v} f(t, x, v) dv dx = \int_{\Omega_x} \int_{\Omega_v} f_0(x, v) dv dx \quad \forall t > 0$$

□

2. Conservation en L^2 , pour $p = 2$

$$\int_{\Omega_x} \int_{\Omega_v} |f(t, x, v)|^2 dv dx = \int_{\Omega_x} \int_{\Omega_v} |f_0(x, v)|^2 dv dx \quad \forall t > 0$$

Démonstration. Prenons $\varphi = f$ et alors

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{\Omega_x} \int_{\Omega_v} \frac{\partial f}{\partial t} f dx dv - \int_{\Omega_x} \int_{\Omega_v} v \frac{\partial f}{\partial x} dv dx + \int_{\Omega_x} \int_{\Omega_v} E(x) f \frac{\partial f}{\partial v} dv dx \\
0 &= \frac{d}{dt} \int_{\Omega_x} \int_{\Omega_v} |f|^2 dx dv - \frac{1}{2} \int_{\Omega_v} v \left(\int_{\Omega_x} \frac{\partial f^2}{\partial x} dx \right) dv + \frac{1}{2} \int_{\Omega_x} \int_{\Omega_v} E(x) \frac{\partial f^2}{\partial v} dv dx \\
0 &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega_x} \int_{\Omega_v} |f|^2 dx dv - \frac{1}{2} \int_{\Omega_v} v \underbrace{f^2|_{\partial\Omega_v}}_{=0} dv + \frac{1}{2} \int_{\Omega_x} E(x) \underbrace{f^2|_{\partial\Omega_x}}_{=0} dx \\
0 &= \frac{d}{dt} \int_{\Omega_x} \int_{\Omega_v} |f|^2 dv dx
\end{aligned}$$

où $f^2|_{\partial\Omega_x}$ est nul à cause de la périodicité de f dans x et $f^2|_{\partial\Omega_v}$ est nul en raison du support compact de f par rapport à v .

$$\int_{\Omega_x} \int_{\Omega_v} |f(t, x, v)|^2 dv dx = \int_{\Omega_x} \int_{\Omega_v} |f_0(x, v)|^2 dv dx \quad \forall t > 0.$$

□

3. Conservation de l'énergie

$$\mathcal{E}_{tot}(t) = \mathcal{E}_{tot}(0) \quad \forall t > 0$$

Démonstration. Prenons $\varphi = \frac{|v|^2}{2}$ et alors

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{\Omega_x} \int_{\Omega_v} \frac{\partial f}{\partial t} \frac{|v|^2}{2} dv dx - \underbrace{\int_{\Omega_x} \int_{\Omega_v} v f \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{|v|^2}{2} \right) dv dx}_{=0} + \int_{\Omega_x} \int_{\Omega_v} E(t, x) f \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{|v|^2}{2} \right) dv dx \\
0 &= \frac{d}{dt} \int_{\Omega_x} \int_{\Omega_v} f \frac{|v|^2}{2} dv dx + \int_{\Omega_x} E(t, x) \int_{\Omega_v} f v dv dx \\
0 &= \frac{d}{dt} \int_{\Omega_x} \int_{\Omega_v} f \frac{|v|^2}{2} dv dx + \int_{\Omega_x} E(t, x) \mathbf{J}(t, x) dx \quad \text{par substitution } \partial_t E = \mathbf{J}(t, x) \\
0 &= \frac{d}{dt} \left(\int_{\Omega_x} \int_{\Omega_v} f \frac{|v|^2}{2} dv dx + \int_{\Omega_x} \frac{E(t, x)^2}{2} dx \right). \tag{1.12}
\end{aligned}$$

□

□

1.4 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons tout d'abord rappelé le contexte physique de ce travail de thèse. Ensuite nous avons défini la modélisation mathématique du plasma (équation de Vlasov-Poisson). Enfin nous avons rappelé quelques propriétés physiques de l'équation de Vlasov-Poisson : le principe du maximum, conservation de masse, conservation du moment, conservation de la quantité de mouvement, conservation de la norme L^p conservation de l'énergie.

Chapitre 2

La modélisation numérique

Sommaire

2.1	Méthode de Galerkin discontinue	13
2.1.1	Formulation de la méthode de Galerkin discontinue	14
2.1.2	Les normes	15
2.2	Approximation de Galerkin discontinue pour l'équation de Vlasov	16
2.3	Approximation par éléments finis mixtes de Raviart-Thomas du problème de Poisson	18
2.4	Erreur d'estimation	18
2.4.1	Intégration temporelle	19
2.5	Résultats numériques	20
2.6	Conclusion	23

Ce chapitre présente la méthode numérique de Galerkin discontinue que nous avons adoptée dans ce manuscrit pour approximer l'équation de Vlasov-Poisson. Il nous permet de déterminer la représentation d'état du système. Il traite en partie notre travail [31]. Nous allons d'abord présenter le schéma stable de la DG pour l'équation de Vlasov puis une approximation par éléments finis mixtes de Raviart-Thomas (RT_k) au problème de l'équation de Poisson. Enfin nous terminerons par quelques résultats numériques.

2.1 Méthode de Galerkin discontinue

De nombreuses méthodes numériques ont été développées pour résoudre le système de Vlasov-Poisson. Nous avons principalement trois familles de méthodes numériques classiques pour ces équations : les méthodes PIC (Particle In Cell) voir [21][135], les méthodes eulériennes (telles que la méthode de Galerkin discontinue ou la méthode des volumes finis ou différentes méthodes finies) voir [38] et les méthodes semi-Lagrangiennes voir [26] [125]. Parmi elles, celle de Galerkin discontinue est d'une importance capitale pour notre sujet de recherche. C'est une méthode de type variationnel (comme la méthode des

éléments finis) où les fonctions sont approchées par des fonctions polynomiales par morceaux et où la discontinuité entre chaque élément du maillage nécessite la définition d'un flux (comme la méthode des volumes finis). Nous pouvons citer plusieurs travaux notamment ceux de José et al [44] et d'Eric Sonnendrücker et al [93] sur (VP). Cette méthode a l'avantage d'être à la fois conservative sur les quantités macroscopiques (charge, courant), dissipative en norme L^2 et de pouvoir traiter naturellement les géométries complexes. Bien que soumise à une contrainte de stabilité de type Courant-Friedrichs-Lewy (CFL), la méthode gagne en efficacité en étant d'ordre élevé en vitesse et en espace et en étant parallélisable.

2.1.1 Formulation de la méthode de Galerkin discontinue

Soient $\mathcal{T}_{h_x}^x$ et $\mathcal{T}_{h_v}^v$ deux familles de partitions cartésiennes respectives de Ω_x et Ω_v , formées par des rectangles pour $d = 1, 2$ et des cubes pour $d = 3$. Soit $\{\mathcal{T}_h\}$ défini comme le produit cartésien des deux partitions : $\mathcal{T}_h := \mathcal{T}_{h_x}^x \times \mathcal{T}_{h_v}^v$; i.e.,

$$\mathcal{T}_h := \{\mathcal{R} = T^x \times T^v : T^x \in \mathcal{T}_{h_x}^x, T^v \in \mathcal{T}_{h_v}^v\}.$$

Les tailles des maillages h_x, h_v, h sont définies respectivement par

$$0 < h_x = \max_{T^x \in \mathcal{T}_{h_x}^x} \text{diam}(T^x), \quad 0 < h_v = \max_{T^v \in \mathcal{T}_{h_v}^v} \text{diam}(T^v), \quad h = \max(h_x, h_v).$$

On note par Γ_x et Γ_v l'ensemble de toutes les arêtes des partitions respectivement de $\mathcal{T}_{h_x}^x$ et $\mathcal{T}_{h_v}^v$, et on fixe $\Gamma = \Gamma_x \times \Gamma_v$.

Les ensembles des arêtes intérieures et aux bords de la partition $\mathcal{T}_{h_x}^x$ (resp. $\mathcal{T}_{h_v}^v$) sont définis par Γ_x^0 (resp. Γ_v^0) et Γ_x^∂ (resp. Γ_v^∂), tel que $\Gamma_x = \Gamma_x^0 \cup \Gamma_x^\partial$ (resp. $\Gamma_v = \Gamma_v^0 \cup \Gamma_v^\partial$).

Pour tout $\mathcal{R} = T^x \times T^v \in \mathcal{T}_h$ avec $T^x \in \mathcal{T}_{h_x}^x$ et $T^v \in \mathcal{T}_{h_v}^v$ et pour tout $\varphi \in H^1(\mathcal{R})$ on définit les traces de fonctions φ sur $\partial T^x \times T^v$ et $T^x \times \partial T^v$.

On considère un élément général $T \in \mathcal{T}_{h_x}^x \cup \mathcal{T}_{h_v}^v$. On désigne par $\mathbf{n}_{|\partial T}^-$ la normale extérieure à l'élément T et on note φ^- la trace intérieure de $\varphi|_T$ sur ∂T et φ^+ la trace extérieure de $\varphi|_T$ sur ∂T . On définit les traces par :

$$\varphi_T^\pm(\mathbf{x}, \cdot) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \varphi_T(\mathbf{x} \pm \epsilon \mathbf{n}^-, \cdot) \quad \forall \mathbf{x} \in \partial T.$$

Soient T_- et T_+ deux éléments voisins dans $\mathcal{T}_{h_x}^x$ ou $\mathcal{T}_{h_v}^v$, et \mathbf{n}^- et \mathbf{n}^+ sont les vecteurs unitaires normaux de T . D'après [9] on définit le saut et la moyenne par :

$$\begin{aligned} \{\varphi\} &= \frac{1}{2}(\varphi^- + \varphi^+), \quad \llbracket \varphi \rrbracket = \varphi^- \mathbf{n}^- + \varphi^+ \mathbf{n}^+ \quad \text{pour } \varphi \in \Gamma_r^0, \quad r = x \text{ ou } v, \\ \llbracket \varphi \rrbracket &= \varphi \mathbf{n}, \quad \{\varphi\} = \varphi, \quad \text{pour } \varphi \in \Gamma_r^\partial \end{aligned} \quad (2.1)$$

Ensuite, pour $k \geq 0$, nous définissons les espaces des éléments finis discontinus \mathcal{Z}_h^k , X_h^k et V_h^k :

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}_h^k &:= \{\varphi \in L^2(\Omega) : \varphi|_{\mathcal{R}} \in \mathbb{Q}^k(T^x) \times \mathbb{Q}^k(T^v), \quad \forall \mathcal{R} = T^x \times T^v \in \mathcal{T}_h\}, \\
X_h^k &:= \{\psi \in L^2(\Omega_x) : \psi|_{T^x} \in \mathbb{Q}^k(T^x), \quad \forall T^x \in \mathcal{T}_{h_x}^x\} \\
V_h^k &:= \{\psi \in L^2(\Omega_v) : \psi|_{T^v} \in \mathbb{Q}^k(T^v), \quad \forall T^v \in \mathcal{T}_{h_v}^v\}
\end{aligned} \tag{2.2}$$

où $\mathbb{Q}^k(T)$ (resp. $(\mathbb{Q}^k(T)^d)$) est l'espace du scalaire (resp. vectoriel) des polynômes de degré au plus k dans chaque variable.

Nous définissons également $Q_h^k = X_h^k \cap L_0^2(\Omega_x)$. Nous introduisons enfin l'espace des éléments finis de Raviart-Thomas :

$$\Sigma_h^k = \{\tau \in H(\operatorname{div}; \Omega_x) : \tau|_{T^x} \in RT^k(T^x) \quad \forall T^x \in \mathcal{T}_{h_x}^x\}$$

où

$$H(\operatorname{div}; \Omega_x) = \left\{ \tau \in (L^2(\Omega_x))^d, \text{ avec } \operatorname{div}(\tau) \in L^2(\Omega_x) \text{ et } \tau \cdot \mathbf{n}_{\partial\Omega} \text{ périodique sur } \partial\Omega \right\}$$

et

$$RT^k(T^x) := \mathbb{Q}^k(T^x)^d + \mathbf{x} \cdot \mathbb{Q}^k(T^x).$$

On notera $\|\cdot\|_{H(\operatorname{div}; \Omega_x)}$ la norme de $H(\operatorname{div}; \Omega_x)$ défini par

$$\|\tau\|_{H(\operatorname{div}; \Omega_x)}^2 := \|\tau\|_0^2 + \|\operatorname{div}(\tau)\|_0^2 \quad \forall \tau \in H(\operatorname{div}; \Omega_x)$$

2.1.2 Les normes

Nous définissons les semi-normes et les normes suivantes qui seront utilisées dans notre analyse :

$$|\varphi|_{1,h}^2 = \sum_{\mathcal{R} \in \mathcal{T}_h} |\varphi|_{1,\mathcal{R}}^2 \quad \|\varphi\|_{m,\mathcal{T}_h}^2 := \sum_{\mathcal{R} \in \mathcal{T}_h} \|\varphi\|_{m,\mathcal{R}}^2 \quad \forall \varphi \in H^m(\mathcal{T}_h), m \geq 0 \tag{2.3}$$

$$\|\varphi\|_{0,\infty,\mathcal{T}_h} = \sup_{\mathcal{R} \in \mathcal{T}_h} \|\varphi\|_{0,\infty,\mathcal{R}} \quad \|\varphi\|_{L^p(\mathcal{T}_h)}^p := \sum_{\mathcal{R} \in \mathcal{T}_h} \|\varphi\|_{L^p(\mathcal{R})}^p \quad \forall \varphi \in L^p(\mathcal{T}_h), \tag{2.4}$$

pour tout $1 \leq p < \infty$. Nous introduisons également les normes suivantes sur le squelette de la partition par éléments finis,

$$\|\varphi\|_{0,\Gamma_x}^2 := \sum_{e \in \Gamma_x} \int_e |\varphi|^2 ds_x, \quad \|\varphi\|_{0,\Gamma_v}^2 = \sum_{e \in \Gamma_v} \int_e |\varphi|^2 ds_v.$$

Ensuite, nous définissons $\|\varphi\|_{0,\Gamma_h}^2 = \|\varphi\|_{0,\Gamma_x}^2 + \|\varphi\|_{0,\Gamma_v}^2$.

Grâce à la structure hamiltonienne particulière de l'équation de Vlasov (1.1) : v est indépendant de x et E est indépendant de v ; pour toutes les méthodes. L'approximation DG pour la fonction de distribution des électrons, se fait aussi de la même manière. Nous présentons d'abord la méthode DG pour l'équation de Vlasov(1.1).

2.2 Approximation de Galerkin discontinue pour l'équation de Vlasov

On choisit le champ électrostatique $E_h \in \Sigma_h^k$. L'approximation DG de (1.1) se lit de la façon suivante : trouver $(E_h, f_h) \in \mathcal{C}^1([0, T]; \Sigma_h^k \times \mathcal{Z}_h^k)$ tel que

$$\sum_{\mathcal{R} \in \mathcal{T}_h} \mathcal{B}_{h, \mathcal{R}}(E_h; f_h, \varphi_h) = 0 \quad \forall \varphi_h \in \mathcal{Z}_h^k \quad (2.5)$$

où $\forall \mathcal{R} = T^x \times T^v \in \mathcal{T}_h$,

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{h, \mathcal{R}}(E_h; f_h, \varphi_h) &= \int_{\mathcal{R}} \frac{\partial f_h}{\partial t} \varphi_h dv dx - \int_{\mathcal{R}} f_h \mathbf{v} \cdot \nabla_x \varphi_h dv dx + \int_{\mathcal{R}} f_h E_h \cdot \nabla_v \varphi_h dv dx \\ &+ \int_{T^v} \int_{\partial T^x} (\widehat{\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} f_h}) \varphi_h ds_x dv - \int_{T^x} \int_{\partial T^v} (\widehat{E_h \cdot \mathbf{n} f_h}) \varphi_h ds_v dx \quad \forall \varphi_h \in \mathcal{Z}_h^k. \end{aligned}$$

Pour faciliter la présentation, nous utiliserons \mathbf{n} pour désigner à la fois $\mathbf{n}^-_{|\partial T^x}$ et $\mathbf{n}^-_{|\partial T^v}$ respectivement les première et deuxième intégrales de frontière. Les flux numériques $(\widehat{\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} f_h})$ et $(\widehat{E_h \cdot \mathbf{n} f_h})$ sont définis comme suit :

$$\begin{cases} \widehat{\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} f_h} = \{\mathbf{v} f_h\}_\alpha \cdot \mathbf{n} := \left(\{\mathbf{v} f_h\} + \frac{|\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}|}{2} \llbracket f_h \rrbracket \right) \cdot \mathbf{n} \text{ dans } \Gamma_x^0, \\ \widehat{E_h \cdot \mathbf{n} f_h} = \{E_h f_h\}_\beta \cdot \mathbf{n} := \left(\{E_h f_h\} - \frac{|E_h \cdot \mathbf{n}|}{2} \llbracket f_h \rrbracket \right) \cdot \mathbf{n} \text{ dans } \Gamma_v^0, \end{cases} \quad (2.6)$$

avec $\alpha = \frac{1}{2}(1 \pm \text{sign}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}^\pm))$ et $\beta = \frac{1}{2}(1 \mp \text{sign}(E_h \cdot \mathbf{n}^\pm))$. Sur les arêtes intérieures on a : $\partial T^x \cap \partial \Omega_x = \emptyset$ et $\partial T^v \cap \partial \Omega_v = \emptyset$. Sur les arêtes frontières, nous imposons la périodicité pour $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} f_h$ et la compacité pour $E_h \cdot \mathbf{n} f_h$.

En combinant (2.1) et (2.6), nous pouvons réécrire 2.5 :

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{\mathcal{R} \in \mathcal{T}_h} \mathcal{B}_{h, \mathcal{R}}(E_h; f_h, \varphi_h) \\ &= \sum_{\mathcal{R} \in \mathcal{T}_h} \int_{\mathcal{R}} \frac{\partial f_h}{\partial t} \varphi_h dv dx - \int_{\Omega} f_h \mathbf{v} \cdot \nabla_x^h \varphi_h dv dx + \int_{\Omega} f_h E_h \cdot \nabla_v^h \varphi_h dv dx \\ &+ \int_{T^v} \int_{\Gamma_x} \{\mathbf{v} f_h\}_\alpha \cdot \llbracket \varphi_h \rrbracket ds_x dv - \int_{T^x} \int_{\Gamma_v} \{E_h f_h\}_\beta \cdot \llbracket \varphi_h \rrbracket ds_v dx \quad \forall \varphi_h \in \mathcal{Z}_h^k, \end{aligned}$$

où $\nabla_x^h \varphi_h$ et $\nabla_v^h \varphi_h$ sont les fonctions dont la restriction à chaque élément $\mathcal{R} \in \mathcal{T}_h$ sont égaux, respectivement à $\nabla_x \varphi_h$ et $\nabla_v \varphi_h$.

En représentation matricielle on a :

$$\mathbf{M}_h \dot{\mathbf{f}}_h(t) = \mathbf{A}_h \mathbf{f}_h(t) + \mathbf{G}_h [\mathbf{f}_h(t)], \quad (2.7)$$

avec

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_h(\mathbf{f}_h) &= \int_{\Omega} f_h E_h \cdot \nabla_v^h \varphi_h dv dx \\ &+ \int_{T^v} \int_{\Gamma_x} \{\mathbf{v} f_h\}_\alpha \cdot \llbracket \varphi_h \rrbracket ds_x dv - \int_{T^x} \int_{\Gamma_v} \{E_h f_h\}_\beta \cdot \llbracket \varphi_h \rrbracket ds_v dx, \end{aligned} \quad (2.8)$$

qui représente la partie non linéaire de l'équation de Vlasov. Cette non linéarité réside dans le fait que le champ électrostatique dépend lui même de la fonction de distribution. Les matrices \mathbf{M}_h et \mathbf{A}_h sont respectivement des matrices de masse globale et de gradient globale. Pour l'assemblage de la méthode DG voir [114],[66], la densité discrète, ρ_h est définie par

$$\rho_h = \sum_{T^v \in \mathcal{T}_h^v} \int_{T^v} f_h dv \in X_h^k.$$

Nous rappelons quelques résultats d'analyse de l'équation de Vlasov.

Lemme 2.2.1. (*Conservation des particules de masse*) Soit $k \geq 0$ et soit $f_h \in \mathcal{C}^1([0, T]; \mathcal{Z}_h^k)$ soit l'approximation DG de f , satisfaisant (2.5). Alors,

$$\sum_{\mathcal{R} \in \mathcal{T}_h} \int_{\mathcal{R}} f_h(t) dx dv = \sum_{\mathcal{R} \in \mathcal{T}_h} \int_{\mathcal{R}} f_h(0) dx dv = \sum_{\mathcal{R} \in \mathcal{T}_h} \int_{\mathcal{R}} f_0 = 1 \quad \forall t \in [0, T].$$

Démonstration. Voir [[45], Lemme 3.1]. □

Nous montrons ensuite la L^2 -stabilité pour la méthode numérique (2.6), qui découle de la sélection des flux numériques.

Proposition 2.2.2. Soit $f_h \in \mathcal{Z}_h^k$ l'approximation du problème (1.1)-(1.4), solution de (2.5) avec les flux numériques définis dans (2.6). Alors

$$\|f_h(t)\|_{0, \mathcal{T}_h} \leq \|f_h(0)\|_{0, \mathcal{T}_h} \quad \forall t \in [0, T].$$

Démonstration. Voir Annexe(A.2.1). □

Nous terminons cette section par ce résultat d'approximation élémentaire de la densité.

Lemme 2.2.3. Soient $k \geq 0$ et f et f_h les solutions continues et approchées du problème de Vlasov-Poisson. Soit ρ et ρ_h les densités continue et discrète définies en (1.2) et (2.10). Alors,

$$\|\rho - \rho_h\|_{0, \mathcal{T}_{hx}^x} \leq C [\text{meas}(\Omega_V)]^{1/2} \|f - f_h\|_{0, \mathcal{T}_h} \leq CL^{d/2} \|f - f_h\|_{0, \mathcal{T}_h}. \quad (2.9)$$

Démonstration. Voir[[44],Lemme 2]. □

Nous allons à présent donner l'approximation par éléments finis mixtes de Raviart-Thomas de l'équation de Poisson.

2.3 Approximation par éléments finis mixtes de Raviart-Thomas du problème de Poisson

Nous considérons l'approximation du problème de Poisson discret, qui peut être réécrit comme le système de premier ordre suivant :

$$E = \nabla_x \phi \quad \text{dans } \Omega_x, \quad -\operatorname{div}_x E = \rho_h - 1 \quad \text{dans } \Omega_x, \quad \rho_h = \sum_{T^v \in \mathcal{T}_{hv}^v} \int_{T^v} f_h dv \quad (2.10)$$

avec des conditions aux limites périodiques pour E et ϕ . La conservation de la masse et en prenant $\phi \in L_0^2(\Omega_x)$, garantit que le problème de Poisson est bien posé. La formulation faible du problème ci-dessus est la suivante : trouver $(E, \phi) \in H(\operatorname{div}; \Omega_x) \times L_0^2(\Omega)$ tels que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_x} E \cdot \tau dx &= \int_{\Omega_x} \nabla_x \phi \cdot \tau dx = 0 & \forall \tau \in H(\operatorname{div}; \Omega_x), \\ - \int_{\Omega_x} \operatorname{div}_x E \cdot q dx &= \int_{\Omega_x} (\rho_h - 1) \cdot q dx & \forall q \in L_0^2(\Omega). \end{aligned}$$

L'approximation se lit comme suit : trouver $(E_h, \phi_h) \in \Sigma_h^k \times Q_h^k$ satisfaisant

$$\int_{\Omega_x} E_h \cdot \tau dx - \int_{\Omega_x} \nabla_x \phi_h \cdot \tau dx = 0 \quad \forall \tau \in \Sigma_h^k, \quad (2.11)$$

$$- \int_{\Omega_x} \operatorname{div}_x (E_h) q dx = \int_{\Omega_x} (\rho_h - 1) q dx \quad \forall q \in Q_h^k. \quad (2.12)$$

Le lemme suivant fournit des estimations d'erreur dans la norme ci-dessus pour le champ électrostatique approximatif.

Lemme 2.3.1. *Soit $k \geq 0$, soit $(E_h, \phi_h) \in (C^0([0, T]); \Sigma_h^k \times X_h^k)$ et soit l'approximation RT_k du problème de Poisson(2.10). Supposons que $\phi \in C^0([0, T]; H^{k+2}(\Omega_x))$. Alors, l'estimation suivante est valable pour tout $t \in [0, T]$:*

$$\|E(t) - E_h(t)\|_{H(\operatorname{div}; \Omega_x)} \leq Ch^{k+1} \|\phi(t)\|_{k+2, \Omega_x} + CL^{d/2} \|f(t) - f_h(t)\|_{0, \mathcal{T}_h}.$$

Démonstration. Voir Annexe(A.2.2). □

Dans cette section nous allons présenter un résultat de l'erreur d'estimation de la fonction de distribution.

2.4 Erreur d'estimation

Plusieurs résultats existent sur l'analyse des erreurs[44]. Nous allons dans ce manuscrit énoncer un théorème fondamental de ces analyses d'erreurs.

Théorème 2.4.1. *Soit $\Omega = \Omega_x \times \Omega_v = [0, 1]^d \times [-V_c, V_c]^d \subset \mathbb{R}^{2d}$, $d = 2, 3$. Soit $k \geq 1$ et soit $f \in C^1([0, T]; H^{k+2}(\Omega) \cap W^{1, \infty}(\Omega))$ la solution à support compact au temps $t \in [0, T]$ du*

problème de Vlasov-Poisson (1.1)-(2.6) et soit $E \in \mathcal{C}^0 \left([0, T]; H^{k+1}(\Omega_x)^d \cap W^{1,\infty}(\Omega_x)^d \right)$ avec $d = 2$ ou 3 , le potentiel électrostatique associé.

Si $((E_h, \phi_h), f_h) \in \mathcal{C}^0([0, T]; (\Sigma_h^k \times Q_h^k)) \times \mathcal{C}^1([0, T]; \mathcal{Z}_h^k)$ est la solution d'approximation $RT_k - DG$ de (2.5)-(2.10), alors l'estimation suivante est vérifiée

$$\|f(t) - f_h(t)\|_{0,\Omega} \leq C_a h^{k+1} \quad \forall t \in [0, T],$$

où C_a dépend du temps final T , du degré polynomial k , de la régularité de forme de la partition et dépend aussi de f à travers les normes

$$C_a = C_a \left(\|f(t)\|_{k+2,\Omega}, \left\| \frac{\partial f(t)}{\partial t} \right\|_{k+1,\Omega}, \|f\|_{1,\infty,\Omega}, \|\phi\|_{k+2,\Omega_x}, \|E\|_{1,\infty,\Omega_x} \right).$$

Démonstration. Voir [[44], Théorème 1]. □

2.4.1 Intégration temporelle

Les méthodes DG et RT_k présentées jusqu'ici sont semi-discrètes. Pour la discrétisation en temps, nous considérons la méthode Runge Kutta (RK) explicite du quatrième ordre, dite $RK4$ ou Runge-Kutta classique [63]. Cependant pour les lois de conservation et d'autres problèmes hyperboliques non linéaires généraux, afin d'avoir une bonne résolution des chocs et des discontinuités, une variation totale diminuant (TVD) RK doit être utilisée. De plus, puisque nous nous intéressons aux méthodes d'ordre élevé (dans l'espace), l'intégration temporelle doit également être réalisée avec un schéma d'intégration temporelle d'ordre élevé. Comme il est bien connu, un TVD RK de quatrième ordre, nécessiterait pour le calcul des étages internes, l'évaluation de l'opérateur et de son adjoint, du fait de la présence de certains coefficients négatifs. Par conséquent, le coût (et le stockage) de la procédure globale augmenterait considérablement. Pour ces raisons, bien qu'en général, il soit beaucoup plus sûr d'utiliser une méthode TVD Runge-Kutta pour résoudre des problèmes hyperboliques, nous devons en tenir au RK classique du quatrième ordre pour la simulation du système Vlasov-Poisson.

Nous décrivons maintenant la mise en œuvre proprement dite. Pour l'intégrateur Runge-Kutta, nous prenons une partition uniforme de l'intervalle de temps $[0, T]$, $\{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n < \dots < t_{N_t} = T\}$ avec un pas de temps $\Delta t := t_{n+1} - t_n$. Le solveur $RK4$ met à jour la solution approchée actuelle, de $f_h(t_n)$ à $f_h(t_{n+1})$, en quatre étapes internes. La méthode est précise dans le temps au quatrième ordre, nous nous attendons à ce que les erreurs provenant de la discrétisation temporelle n'affectent pas beaucoup celles provenant du spatiale

$$\mathbf{M}_h \frac{d\mathbf{f}_h}{dt} = \mathcal{L}(\mathbf{f}_h, E_h, t) \quad (2.13)$$

où \mathbf{M}_h désigne la matrice de masse. Le vecteur d'inconnues, \mathbf{f}_h , est arrangé de sorte que les degrés de liberté correspondant au même élément, disons T_{ij} , soient dans le même bloc. Par conséquent, la structure de \mathbf{f}_h ressemble à ceci :

$$\mathbf{f}_h := \left[(\mathbf{f}_h)_{T_{11}}, (\mathbf{f}_h)_{T_{12}}, \dots, (\mathbf{f}_h)_{T_{21}}, \dots, (\mathbf{f}_h)_{T_{N_x, N_y}} \right]^T.$$

La matrice de masse, \mathbf{M}_h , est alors diagonale par bloc (en base de Lagrange) avec chaque bloc de taille $(k+1) \cdot (k+1)$, correspondant aux degrés de liberté dans chaque élément T_{ij} . Par conséquent, l'application du solveur RK4 à (2.13) peut se faire élément par élément puisqu'il suffit d'inverser les matrices de masse locales de taille $(k+1) \cdot (k+1)$ où k est un entier modéré, soit $k \leq 12$. Cette propriété permet d'effectuer la marche temporelle de t^n à t^{n+1} en parallèle comme nous le décrirons plus loin. L'inversion de matrice locale est effectuée avant de commencer l'intégration temporelle et elle est stockée et sauvegardée pour être réutilisée dans l'ensemble du calcul.

Pour avancer dans le temps de $(t^n, \mathbf{f}_h^n, E_h^n)$ à $(t^{n+1}, \mathbf{f}_h^{n+1}, E_h^{n+1})$ la méthode RK4 procède en 4 étapes :

$$\begin{aligned} k_1 &:= \Delta t \mathbf{M}^{-1} \mathcal{L}(\mathbf{f}_h^n, E_h^n, t_n) \\ k_2 &:= \Delta t \mathbf{M}^{-1} \mathcal{L}\left(\mathbf{f}_h^n + k_1/2, E_h^{n+1/4}, t_n + \Delta t/2\right) \\ k_3 &:= \Delta t \mathbf{M}^{-1} \mathcal{L}\left(\mathbf{f}_h^n + k_2/2, E_h^{n+2/4}, t_n + \Delta t/2\right) \\ k_4 &:= \Delta t \mathbf{M}^{-1} \mathcal{L}\left(\mathbf{f}_h^n + k_3, E_h^{n+3/4}, t_n + \Delta t\right) \\ & (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4). \end{aligned}$$

Dans cette section et dans le reste de ce manuscrit nous allons restreindre notre étude à $d = 1$; un système de Vlasov-Poisson $2D$ c'est à dire une dimension en espace et une dimension en vitesse ($1D \times 1D$).

2.5 Résultats numériques

Différents scénarios physiques peuvent être modélisés avec l'équation de Vlasov-Poisson, où la plupart des cas de test correspondent à une condition initiale unique avec certains paramètres. Nous présentons le cas de test d'amortissement de Landau linéaire. Les principes de validation consistent à comparer le comportement du code avec les propriétés mathématiques connues des équations et du schéma. En particulier, on s'assurera que les propriétés de conservation du schéma sont vérifiées à la précision machine, on comparera la solution numérique avec une solution analytique. La condition initiale est choisie comme étant une perturbation d'un équilibre homogène $f^0(v)$

$$f_0(x, v) = f^0(v)(1 + \epsilon \cos(sx)), \quad (2.14)$$

avec s le nombre d'onde et $f^0(v)$ l'équilibre Maxwellienne (cas de test de Landau)

$$f^0(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{v^2}{2}\right). \quad (2.15)$$

On suppose alors que l'on a $L = 2\pi/s$, avec $s = 0.5$ et une petite perturbation $\epsilon = 0.05$.

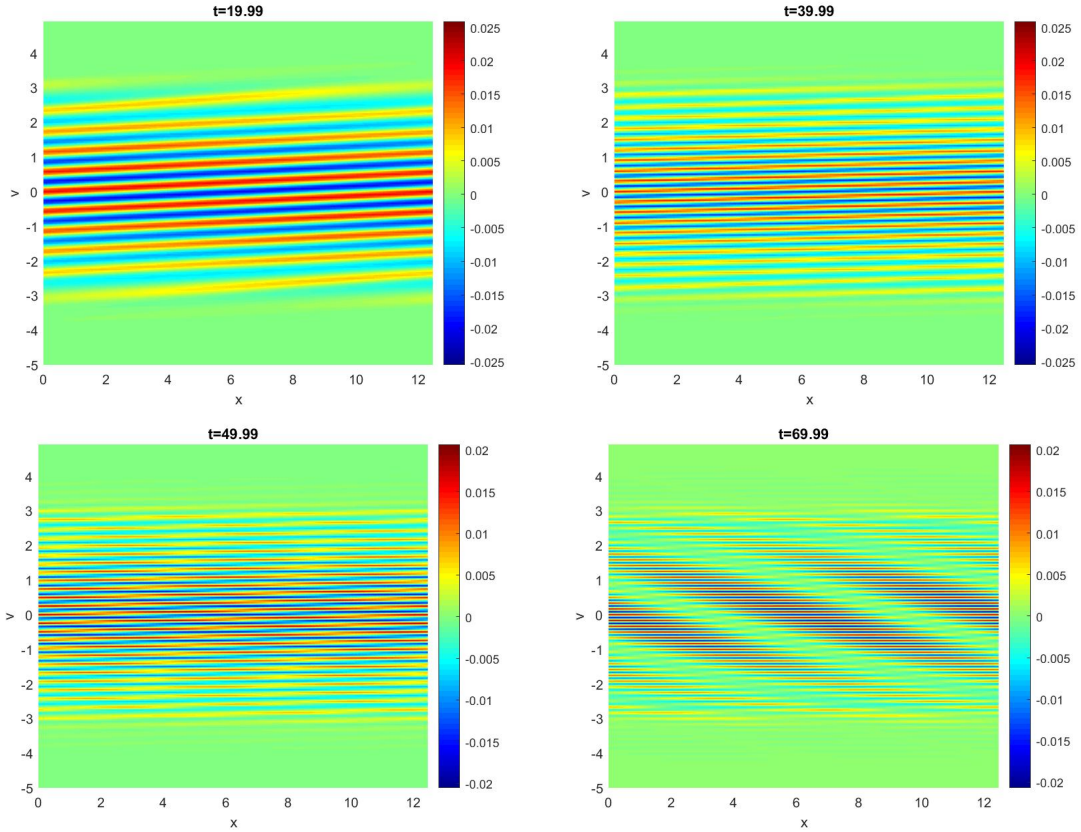


FIGURE 2.1 – Approximation de la fonction de distribution à différents instants, calculée sur un maillage $(N_x, N_v) = (120, 120)$ sur l'espace des phases $\Omega = \Omega_x \times \Omega_v$.

Les paramètres numériques sont choisis comme suit : le domaine $\Omega_v = [-5, 5]$ et le pas de temps est choisi égal à $\Delta t = 0.01$. Le domaine de phase est maillé par (N_x, N_v) avec $N_x = N_v$ où N_x, N_v sont respectivement les points des grilles de Ω_x, Ω_v .

Sur la figure (2.1) sont représentées dans l'espace des phases la fonction de distribution approchée f_h à différents temps, obtenus avec la méthode DG sur un maillage 120×120 . À partir des figures, on peut observer la structure détaillée de la solution capturée par la méthode DG préservant l'énergie.

Dans la figure (2.2), nous traçons dans un diagramme semi-logarithmique, l'évolution temporelle de la norme L^2 du champ électrostatique $E_h(t)$. Comme on peut l'observer sur le graphique, l'amplitude du champ électrostatique diminue de façon exponentielle jusqu'à un certain temps de récurrence $t = 40$, après quoi il oscille, en accord avec la théorie linéaire de Landau. Nous la comparons avec la solution linéaire $1.415661e^{-\gamma t}$ au taux d'amortissement $\gamma = -0.1533594$, ce qui est en bon accord avec les résultats trouvés dans la littérature (comparé à -0.1533 dans [117]). On remarque pour un ordre de temps l'amortissement est brutalement interrompu, le champs électrique revient quasiment à son amplitude initiale. Il s'agit d'un phénomène purement numérique lié à l'utilisation d'un maillage uniforme en vitesse pour un problème périodique en espace. On l'appelle le phénomène de la récurrence de Poincaré.

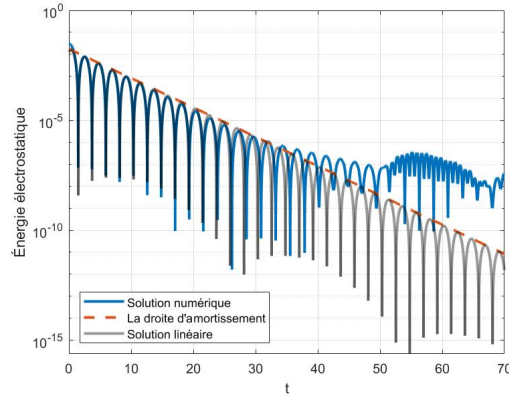


FIGURE 2.2 – L'évolution temporelle de la norme L^2 du champ électrostatique $E_h(t)$ sur un maillage $(120, 120)$.

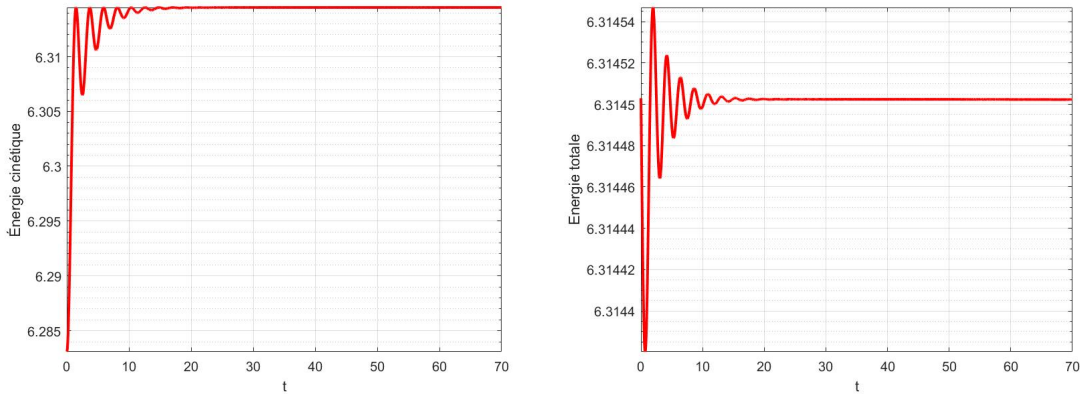


FIGURE 2.3 – L'évolution temporelle de l'énergie cinétique à gauche et celle de l'énergie totale à droite sur un maillage (120×120) .

Dans la figure (2.3), nous traçons dans un diagramme semi-logarithmique l'énergie l'énergie cinétique $\mathcal{E}_k(t)$ d'une part et d'autre part l'énergie totale $\mathcal{E}(t)$.

Dans la figure (2.4), nous traçons dans un diagramme semi-logarithmique l'erreur relative L^2 de l'énergie totale : $\frac{|\mathcal{E}(t) - \mathcal{E}(0)|}{\mathcal{E}(0)}$.

Dans la figure (2.5), nous traçons dans un diagramme semi-logarithmique des erreurs relatives de conservation L^∞ : $\frac{\|f_h(t)\|_{L^\infty} - \|f_h(0)\|_{L^\infty}}{\|f_h(0)\|_{L^\infty}}$, L^1 : $\frac{\|f_h(t)\|_{L^1} - \|f_h(0)\|_{L^1}}{\|f_h(0)\|_{L^1}}$ et L^2 : $\frac{\|f_h(t)\|_{L^2} - \|f_h(0)\|_{L^2}}{\|f_h(0)\|_{L^2}}$. On peut constater sur ces figures la convergence des erreurs relatives de conservation de l'énergie.

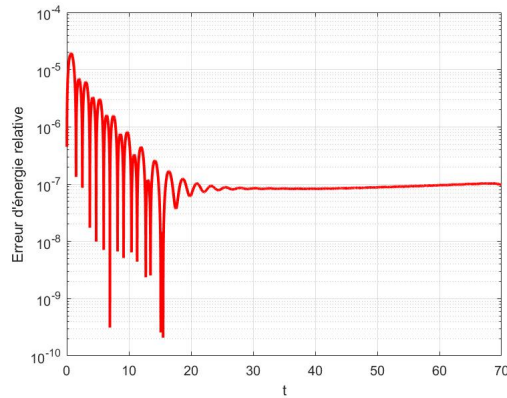


FIGURE 2.4 – L'évolution temporelle de l'erreur de l'énergie totale sur un maillage $(120, 120)$.

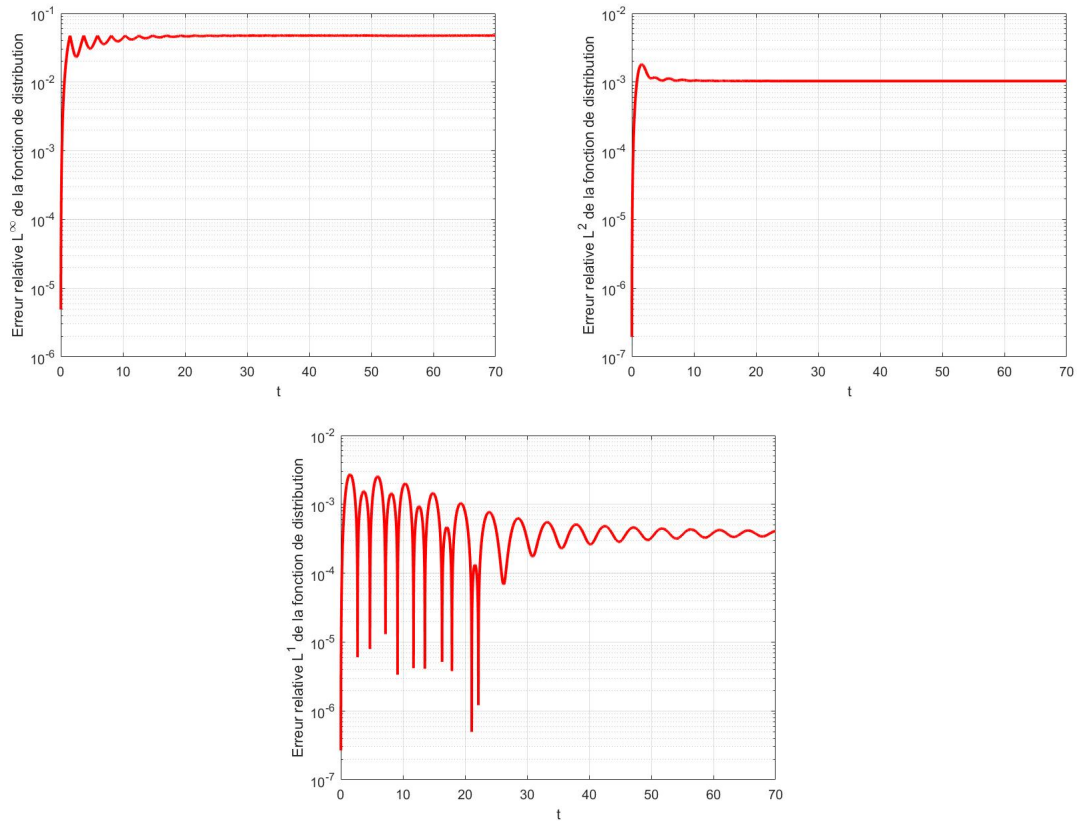


FIGURE 2.5 – L'erreur de conservation L^∞ de f_h à gauche, l'erreur de L^2 à droite et en bas l'erreur de conservation L^1 sur un maillage (120×120) .

2.6 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons exposé la modélisation numérique du système d'équations de Vlasov-Poisson. Nous avons présenté le schéma numérique Galerkin Discontinue pour

l'équation de Vlasov et une approximation par éléments finis mixte de Raviart-Thomas du problème de Poisson. Puis nous avons présenté quelques résultats pour la validation du code développé. La conservation des énergies cinétique, électrique et totale du système d'équation de Vlasov-Poisson ont été vérifiées. Nous avons terminé par présenter les erreurs de conservations relatives qui valident les résultats théoriques.

Chapitre 3

Conception d'observateur et stabilisation des systèmes d'équation non linéaire : État de l'art

Sommaire

3.1	Observateurs d'état des systèmes non linéaires en dimension finie	26
3.1.1	Stabilité des systèmes dynamiques	26
3.1.2	Stabilité des systèmes dynamiques au sens de Lyapunov	27
3.1.3	Observateurs des systèmes non linéaires	28
3.2	Observateur d'état des EDPs par la méthode de « Backstepping »	35
3.2.1	« Backstepping »	36
3.2.2	Équation du noyau de gain	37
3.2.3	Conversion de l'EDP du noyau de gain en une équation intégrale	39
3.2.4	Méthode des approximations successives	40
3.2.5	Transformation inverse	41
3.2.6	Conception de l'observateur pour les EDP	43
3.2.7	La sortie du retour d'état	46
3.2.8	Etat d'art	48
3.3	Études des inégalités matricielles linéaires : Définitions et propriétés	48
3.3.1	Problème de faisabilité	49
3.3.2	Propriétés	50
3.4	Applications des LMIs	51
3.4.1	Analyse de Stabilité au sens de Lyapunov	51
3.4.2	Problème de stabilité quadratique des systèmes incertains	51
3.4.3	Stabilité des modèles Takagi-Sugeno (TS)	52
3.4.4	Problème de Stabilisation	53

3.4.5	Problèmes d'optimisation sous contraintes LMIs	53
3.4.6	Problème de commande Linéaire Quadratique (LQ)	55
3.4.7	Problème de commande Quadratique Linéaire Gaussienne (LQG)	55
3.4.8	Commande Prédictive Robuste	56
3.4.9	Problème de Commande \mathcal{H}_∞	57
3.5	Conclusion	58

Ce chapitre a pour objectif d'une part, de dresser un panorama d'outils méthodologiques permettant d'aborder le problème d'analyse de stabilité d'un système non linéaire au sens de Lyapunov. Il présente également la théorie de conception des estimateurs d'état, pour aborder le problème de synthèse des observateurs et dresse un état de l'art sur la conception technique des observateurs. Il traite aussi l'observateur d'état des EDPs par la méthode de Backstepping. D'autre part il aborde une étude non exhaustive de la stabilisation des systèmes d'équation sous la contrainte des LMIs.

3.1 Observateurs d'état des systèmes non linéaires en dimension finie

3.1.1 Stabilité des systèmes dynamiques

Dans cette section, nous rappelons quelques concepts sur la stabilité des systèmes dynamiques à temps continu. La notion de stabilité d'un système dynamique caractérise le comportement de ses trajectoires autour des points d'équilibre. L'analyse de la stabilité d'un système dynamique permet d'étudier l'évolution de sa trajectoire lorsque l'état initial est proche d'un point d'équilibre.

On considère la classe des systèmes non linéaires décrits par son modèle d'état :

$$\dot{x}(t) = g(x(t), t), \quad x(t_0) = x_0 \quad (3.1)$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^N$ et g est une application de classe $C^1(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^+)$. Nous désignons par x_e le point d'équilibre de (3.1) tel que

$$g(x_e, t) = 0, \quad \forall t \geq t_0,$$

et par $x(t, t_0, x_0)$ la solution à l'instant $t \geq t_0$ du système (3.1) initialisée en x_0 et à l'instant t_0 . Nous supposons que le système (3.1) possède un point d'équilibre $x_e = 0$ unique. Par la suite, nous donnerons différentes définitions de la stabilité du système (3.1) au voisinage de l'origine.

Définition 3.1.1. *Le point x_e est un point d'équilibre stable au sens de Lyapunov pour (3.1)*

si $\forall \varepsilon > 0, \forall t_0 \geq 0, \exists \delta(\varepsilon, t_0) \geq 0$ tel que :

$$\|x_0\| < \delta(\varepsilon, t_0) \quad \Rightarrow \quad \|x(t, t_0, x_0)\| < \varepsilon, \quad t \geq t_0.$$

Définition 3.1.2 (Stabilité uniforme). *L'origine x_e est un point d'équilibre uniformément stable pour (3.1) si $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) \geq 0$ tel que :*

$$\|x_0\| < \delta(\varepsilon) \quad \Rightarrow \quad \|x(t, t_0, x_0)\| < \varepsilon, \quad t \geq t_0.$$

Définition 3.1.3 (Attractivité). *L'origine est un point d'équilibre attractif du système (3.1)*

si $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) \geq 0$ tel que :

$$\|x_0\| < \delta(t_0) \quad \Rightarrow \quad \lim_{t \rightarrow \infty} x(t, t_0, x_0) = 0, \quad t \geq t_0.$$

Lorsque $\delta(t_0) = +\infty$, on dit que l'origine est globalement attractive.

Définition 3.1.4 (Stabilité asymptotique). *x_e est un point d'équilibre globalement asymptotiquement (resp. localement asymptotiquement) stable pour (3.1) s'il est globalement attractif et stable (resp. localement attractif et stable).*

Définition 3.1.5. (Stabilité exponentielle) *x_e est un point d'équilibre localement exponentiellement stable pour (3.1) $\exists \alpha$ et β telles que :*

$$\|x(t, t_0, x_0)\| < \alpha \exp(-\beta(t - t_0)), \quad t \geq t_0, \forall x_0 \in B_r.$$

où B_r est un voisinage de x_e .

Si $B_r = \mathbb{R}^N$, on dit que le point x_e est globalement exponentiellement stable.

La théorie de Lyapunov permet de contourner la difficulté de la stabilité de (3.1) au voisinage d'un point d'équilibre x_e . Elle consiste à définir une fonction dont l'existence garantit la stabilité.

3.1.2 Stabilité des systèmes dynamiques au sens de Lyapunov

Cette méthode est basée sur la définition d'une fonction particulière définie positive (notée généralement $V(x, t)$), appelée fonction de Lyapunov, qui est décroissante le long des trajectoires du système à l'intérieur du bassin d'attraction.

Définition 3.1.6. *On considère la fonction $V(x, t) : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ continue. V est dite propre définie positive si :*

1. $\forall t \in \mathbb{R}^+, \forall x \in \mathbb{R}^N, x \neq 0 \quad V(x, t) > 0,$
2. $\forall t \in \mathbb{R}^+, \quad V(x, t) = 0 \Rightarrow x = 0,$
3. $\forall t \in \mathbb{R}^+, \quad \lim_{\|x\| \rightarrow \infty} V(x, t) = \infty.$

Définition 3.1.7 (Fonction de Lyapunov). *Une fonction $V(x, t)$ de classe \mathcal{C}^1 est une fonction de Lyapunov globale au sens large pour le système (3.1) si elle est propre définie positive et si pour tout $x \in \mathbb{R}^N$:*

$$\dot{V}(x, t) = \frac{\partial V(x, t)}{\partial t} + \left(\frac{\partial V(x, t)}{\partial x} \right) g(x(t), t) \leq 0.$$

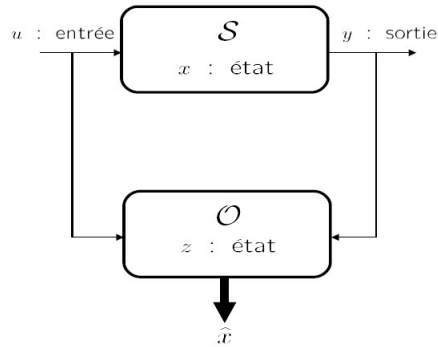


FIGURE 3.1 – Principe d'estimation d'état

Si $\dot{V}(x, t) < 0$, alors V est appelée la fonction de Lyapunov au sens strict pour (3.1).

Définition 3.1.8. *Si le système (3.1) admet une fonction de Lyapunov locale au sens large (resp. au sens strict) alors l'origine est un point d'équilibre localement stable (resp. asymptotiquement stable).*

Le même résultat reste vrai globalement.

Définition 3.1.9 (Stabilité exponentielle). *Le point x_e est localement exponentiellement stable s'il existe des constantes $\alpha, \beta, \gamma > 0$, $p \geq 0$ et une fonction $V(x, t) : \mathcal{V}_0 \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ de classe \mathcal{C}^1 telles que, $\forall x \in \mathcal{V}_0$:*

1. $\alpha \|x\|^p \leq V(x, t) \leq \beta \|x\|^p$,
2. $\dot{V}(x, t) < -\gamma V(x, t)$
3. Si $\mathcal{V}_0 = \mathbb{R}^N$ alors l'origine de (3.1) est globalement exponentiellement stable.

3.1.3 Observateurs des systèmes non linéaires

Cette section consiste à une introduction au problème d'observation d'état des systèmes non linéaires. Nous présentons le principe d'estimation d'état, quelques définitions sur la notion d'observabilité et un état de l'art sur les différentes techniques de conception d'observateurs pour les systèmes non linéaires.

Estimation de l'état des systèmes dynamiques

Un observateur est un système dynamique auxiliaire (\mathcal{O}) dont les entrées sont les entrées/sorties mesurées d'un système (\mathcal{S}), et les sorties sont supposées donner une estimation de l'état, selon le schéma décrit par la figure(3.1) Le système dynamique (\mathcal{S}) est décrit par :

$$\begin{cases} \dot{x} = g(x, u) \\ y = h(x, u) \end{cases} \quad (3.2)$$

Définition 3.1.10. Nous supposons que le système (\mathcal{O}) est décrit par les équations suivantes :

$$\begin{cases} \dot{z} = \Phi(z, u, y) \\ \hat{x} = \psi(z, u, y) \end{cases} \quad (3.3)$$

$z \in \mathbb{R}^s$, est un observateur asymptotique global pour le système (\mathcal{S}) si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

1.

$$x(0) = \hat{x}(0) \quad \Rightarrow \quad x(t) = \hat{x}(t) \quad \forall t \geq 0;$$

2.

$$x(0) - \hat{x}(0) \in \mathbb{R}^N \Rightarrow \|x(t) - \hat{x}(t)\| \rightarrow 0 \text{ lorsque } t \rightarrow \infty$$

Si $\|x(t) - \hat{x}(t)\|$ tend exponentiellement vers zéro alors le système (\mathcal{O}) est dit observateur global de (\mathcal{S}) . Lorsque nous avons un voisinage ouvert \mathcal{V}_1 au lieu de \mathbb{R}^N , le système (\mathcal{O}) est dit observateur local de (\mathcal{S}) .

Si notre état estimé \hat{x} est égal à z , alors nous pouvons remplacer le système(3.3) par :

$$\dot{\hat{x}} = \Phi(\hat{x}, u, y)$$

Nous exprimons la condition (1) par

$$\hat{x} = x \quad \Rightarrow \quad \Phi(\hat{x}, u, y) = g(\hat{x}, u).$$

nous réécrivons le système (3.3) sous la forme suivante :

$$\dot{\hat{x}} = g(\hat{x}, u) + L(\hat{x}, u, y)$$

avec

$$\hat{x} = x \quad \Rightarrow \quad L(\hat{x}, u, y) = 0 \quad (3.4)$$

Afin de satisfaire (3.4), L est généralement choisie sous la forme suivante :

$$L(\hat{x}, u, y) = \mathbf{K}(\hat{x}, u, y)(y - \hat{y})$$

où $\hat{y} = h(\hat{x}, u)$. On exprime l'observateur par :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = g(\hat{x}, u) + \mathbf{K}(\hat{x}, u, y)(y - \hat{y}) \\ \hat{y} = h(\hat{x}, u). \end{cases}$$

La conception d'observateur pour un système dynamique consiste à estimer l'état en général à partir des informations sur l'entrée et la sortie. La définition de l'observabilité d'un système linéaire est la propriété qui permet de donner une information si l'état peut être déterminé uniquement à partir des signaux d'entrée et de sortie. Cependant dans le cas des systèmes non linéaires, l'observabilité dépend généralement des entrées et des conditions initiales.

Définition 3.1.11 (Indistinguabilité). *On considère $y_0^u(t)$, $t \geq 0$ et $y_1^u(t)$, $t \geq 0$ deux signaux de sortie associés au signal d'entrée $u(t)$, $t \geq 0$ du système (3.1) avec les conditions initiales x_0 et x_1 , respectivement. Alors x_0 et x_1 sont indistinguables si*

$$y_0^u(t) = y_1^u(t) \quad \forall t \geq 0, \text{ pour tout } u.$$

Définition 3.1.12 (Observabilité). *Le système (3.1) est observable en x_0 si x_0 est distinguable pour tout $x \in \mathbb{R}^N$. En outre, le système (3.1) est observable si $\forall x \in \mathbb{R}^N$ nous avons x_0 distinguable.*

Il existe plusieurs façons de définir la notion d'observabilité des systèmes non linéaires. En lien avec le concept d'indistinguabilité des états, une définition très fréquente a été établie dans [65]. Pour plus de détails sur les différents types de définitions sur l'observabilité des systèmes non linéaires, voir [[127], [103], [18]]. Dans la prochaine section, nous présenterons quelques approches et algorithmes qui sont soit une extension des algorithmes linéaires, soit des approches spécifiques à une classe de systèmes non linéaires.

Observateurs pour une classe du système non linéaire de type Lipschitz

Nous présentons dans ce paragraphe un résumé des résultats dans la littérature, sur la synthèse d'observateurs des systèmes non linéaires de type Lipschitz. En général les systèmes de type Lipschitz traitent les observateurs à grand gain. Son nom est dû au fait que le gain de l'observateur choisi est suffisamment grand pour compenser la non-linéarité du système. Une méthode directe de conception d'observateur est d'utiliser un retour de sortie linéaire avec des applications notamment aux systèmes biologiques [53], [19]. Cette approche est introduite initialement dans [51]. L'approche de Thau n'est pas aussi une méthode de synthèse systématique. Raghavan a proposé une méthode constructive dans [115] où il a établi une solution explicite et systématique du choix du gain de l'observateur. Cette distinction a été clarifiée après la nouvelle méthode proposée dans [116]. Ce résultat donne des conditions nécessaires et suffisantes de la convergence de l'observateur. On note d'autres méthodes de synthèse d'observateurs appliquées pour une classe de systèmes non linéaires [57], [90].

La conception des observateurs pour les systèmes non linéaires de type Lipschitz a été largement étudiée, voir par exemple les travaux Alessandri [7], Perla et Mukhopadhyay [109], Phanomchoeng et Rajamani [111], Rajamani [116], Zemouche et Boutayeb [146] [147]. Cependant, la limitation de toutes ces approches réside dans le fait que les conditions de synthèse sont généralement irréalisables pour des systèmes avec de grandes constantes de Lipschitz. Différentes approches de synthèse sont proposées dans la littérature, voir par exemple les travaux de Ibrir [68], Phanomchoeng, Rajamani et Piyabongkarn [112] et Zemouche, Boutayeb et Bara [148].

Observateurs des systèmes non linéaires de type "One sided Lipschitz"

La condition de "one sided Lipschitz" a été introduite en [40]. Les auteurs ont démontré que la condition de "one sided Lipschitz" est moins conservatrice que la condition de Lip-

schitz pour la synthèse d'observateurs [67]. Dans de nombreux problèmes, les constantes de "one sided Lipschitz" sont nettement plus petites que les constantes de Lipschitz classiques, voir [40]. Cela rend les constantes de "one sided Lipschitz" beaucoup plus adaptées pour estimer l'influence de la partie non linéaire [40].

La constante du "one sided Lipschitz" peut être positive ou bien négative, voir [40][67].

Les limites de cette approche ont été mises en évidence voir [111],[148]. En effet, les auteurs ont montré que la solution de l'équation de Riccati dépendait fortement de la constante de Lipschitz, plus celle-ci est grande, plus il est difficile de trouver une solution à l'équation de Riccati-like. D'autres travaux intéressants sur la conception d'observateurs de l'état pour ce type de systèmes ont été mis au point, voir [67][143][150]. Cependant la condition de stabilité asymptotique conduit à un problème difficile qui est la résolution des inégalités matricielles bilinéaires. Abbaszadeh et Marquez. [3] ont exploré la condition "one sided Lipschitz" pour déduire les conditions de stabilité sous la forme des LMIs. Ils montrent en particulier l'avantage de la condition "one sided Lipschitz" sur la condition de Lipschitz classique. Une extension de ces travaux dans le cas des systèmes non linéaires à temps discret [134] a été établie par Benallouch et al. [17]. Dans [108], les auteurs ont proposé un observateur d'ordre réduit pour les systèmes non linéaires de type "one sided Lipschitz" avec des entrées inconnues.

Approche basée sur le théorème des accroissements finis

L'utilisation du théorème des accroissements finis(DMVT) pour le sigle anglais, consiste à linéariser l'erreur dynamique sous la forme d'un système linéaire à paramètres variants (LPV) afin de déduire des conditions de stabilité moins restrictives, sous la forme d'inégalités matricielles linéaires (LMIs), voir [22]. Il convient de mentionner que cette nouvelle formulation tient compte de la non-linéarité du système. Dans ce qui suit, nous allons décrire le principe de cette approche, car nous l'avons adapté au problème de l'estimation d'ordre réduit pour les systèmes de grandes dimensions. Nous commençons par introduire un théorème qui découle du théorème de Rolle et du théorème des accroissements finis.

Théorème 3.1.1. *On considère $g : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$. Soit $a, b \in \mathbb{R}^N$. On suppose que g est différentiable sur $Co(a, b)$. Alors, il existe une constante $z \in Co(a, b)$, $z \neq a$, $z \neq b$ tel que :*

$$g(a) - g(b) = \frac{\partial g}{\partial x}(z)(a - b).$$

Nous donnerons la version vectorielle du théorème(3.1.1), pour cela, on note par

$$e_N(i) = \underbrace{(0, \dots, 0, \overbrace{1}^{\text{ième}}, 0, \dots, 0)^T}_{N \text{ composantes}}, \quad i \in \{1, \dots, N\}$$

un vecteur de la base canonique de \mathbb{R}^N . On considère la fonction vectorielle

$$g : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^q.$$

La fonction g possède la forme suivante

$$g(x) = [g_1(x), \dots, g_q(x)]^T$$

où $g_i : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ représente la i^{me} composante de g , pour tout $N, q \geq 1$. On peut écrire la fonction g sous la forme suivante

$$g(x) = \sum_{i=1}^q e_q(i) g_i(x).$$

En appliquant le théorème (3.1.1) à toutes les fonctions g_i et en utilisant

$$\frac{\partial g_i}{\partial x}(\cdot) = \sum_{j=1}^N e_N^T(j) \frac{\partial g_i}{\partial x_j}(\cdot)$$

Nous obtenons le théorème suivant, la version vectorielle du théorème(3.1.1) :

Théorème 3.1.2. *Soit $g : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^q$. Soit $a, b \in \mathbb{R}^N$. On suppose que g est différentiable sur $Co(a, b)$. Alors il existe des constantes $z_1, \dots, z_q \in Co(a, b)$, $z_i \neq a$, $z_i \neq b$ pour tout $i = \{1, \dots, q\}$ tel que :*

$$g(a) - g(b) = \left(\sum_{i,j=1}^{q,N} e_q(i) e_N^T(j) \frac{\partial g_i}{\partial x_j}(z_i) \right) (a - b).$$

Considérons le système non linéaire décrit par la forme suivante :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \mathbf{A}x(t) + g(x(t), y(t), u(t)) \\ y(t) &= \mathbf{C}x(t) \end{aligned}$$

où $u \in \mathbb{R}^m$ est le vecteur d'entrée, $x \in \mathbb{R}^N$ représente le vecteur d'état du système et $y \in \mathbb{R}^p$ le vecteur de sortie. \mathbf{A} et \mathbf{C} sont des matrices constantes. La fonction $g : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^q$ est différentiable par rapport à x . Supposons de plus que la fonction g vérifie :

$$\underline{\gamma}_{ij} \leq \frac{\partial g_i}{\partial x_j}(x, y, u) \leq \bar{\gamma}_{ij}, \quad \forall x, y, u$$

pour tout $i \in \{1, \dots, q\}$ et $j \in \{1, \dots, N\}$, avec $\underline{\gamma}_{ij}$ et $\bar{\gamma}_{ij}$ des constantes réelles. L'observateur d'état de type Luenberger associé est de la forme

$$\dot{\hat{x}}(t) = \mathbf{A}\hat{x}(t) + g(\hat{x}(t), y(t), u(t)) + \mathbf{K}(y(t) - \mathbf{C}\hat{x}(t)) \quad (3.5)$$

avec \hat{x} est l'état estimé de x . L'objectif principal est de déterminer la matrice \mathbf{K} telle que l'erreur d'estimation

$$\mathbf{e}_r(t) = x(t) - \hat{x}(t)$$

converge vers zéro. Alors, la dynamique de l'erreur est donnée par :

$$\dot{\mathbf{e}}_r(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{K}\mathbf{C})\mathbf{e}_r(t) + \delta g(t) \quad (3.6)$$

avec

$$\delta g(t) = g(x(t), y(t), u(t)) - g(\hat{x}(t), y(t), u(t)).$$

En appliquons le théorème(3.1.2) à la fonction scalaire g , alors il existe $z_i(t) \in Co(x(t), \hat{x}(t))$ pour tout $i \in \{1, \dots, q\}$ tel que :

$$\delta g(t) = \left(\sum_{i,j=1}^{q,N} e_q(i) e_N^T(j) \frac{\partial g_i}{\partial x_j} (z_i(t), y(t), u(t)) \right) \mathbf{e}_r(t)$$

Pour des raisons de simplification nous introduisons les notations suivantes :

$$\begin{aligned} \gamma_{ij}(t) &= \frac{\partial g_i}{\partial x_j} (z_i(t), y(t), u(t)) \\ H_{ij}^q &= e_q(i) e_N^T(j) \text{ pour } 1 \leq i \leq q \text{ et } 1 \leq j \leq N \\ \gamma &= (\gamma_{11}, \dots, \gamma_{1N}, \dots, \gamma_{qN}) \\ \mathbf{D}(t) &= \sum_{i,j=1}^{q,N} \gamma_{ij}(t) H_{ij}^q. \end{aligned} \tag{3.7}$$

En utilisant les notations(3.7), la dynamique de l'erreur d'estimation peut être réécrite comme suit :

$$\dot{\mathbf{e}}_r(t) = (\mathbf{A} + \mathbf{D}(t) - \mathbf{KC})\mathbf{e}_r(t). \tag{3.8}$$

Cette équation (3.8) représente un système LPV. L'hypothèse (3.1.1) implique que $\gamma(t)$ appartient à un domaine borné $\mathcal{V}_{q,N}$ où les 2^{qN} éléments viennent dans l'ensemble suivant

$$\mathcal{V}_{q,N} = \left\{ \gamma = (\gamma_{11}, \dots, \gamma_{1N}, \dots, \gamma_{qN}) \mid \gamma_{ij} \in \left\{ \underline{\gamma}_{ij}, \bar{\gamma}_{ij} \right\} \right\}.$$

Remarque 1. En se basant sur les techniques LPV, on obtient des conditions suffisantes de convergence de l'observateur proposé. Ces conditions sont exprimées sous forme d'inégalités linéaires matricielles, voir [145], [148]. Le fait que les paramètres $\gamma_{ij}(t)$ soient inconnus à cause des $z_i(t)$ implique que l'observateur proposé est à gain constant. Une étude plus large de ce type d'observateurs est détaillée dans la thèse de A. Zemouche [145]. On peut aussi regarder la thèse de M. Ghattassi pour les EDPs [58]. Plusieurs extensions de la DMVT ont été développées voir [43] [148][147] [111].

Extension au filtrage de type \mathcal{H}_∞

Une extension des résultats présentés précédemment au cas des systèmes comportant des bruits dans la dynamique et la sortie du système sera illustrée dans cette section. Nous considérons le système suivant :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \mathbf{A}x + g(x, y, u) + \mathcal{W}_1 w \\ y &= \mathbf{C}x + \mathcal{W}_2 w \end{aligned} \tag{3.9}$$

avec \mathcal{W}_1 et \mathcal{W}_2 les matrices constantes de dimensions appropriées et $w \in L^2(\mathbb{R}^s)$ le vecteur des perturbations borné. Notre objectif est de reconstruire l'état du système (3.9) en gardant une certaine précision malgré la présence du bruit w . Nous cherchons à déterminer une précision optimale qui dépend en général des paramètres du système. Nous proposons l'observateur suivant :

$$\dot{\hat{x}} = \mathbf{A}\hat{x} + g(\hat{x}, y, u) + \mathbf{K}(y - \mathbf{C}\hat{x}). \quad (3.10)$$

Étant donné le système (3.9) et l'observateur (3.10), le problème de conception d'observateur \mathcal{H}_∞ robuste revient à déterminer la matrice \mathbf{K} telle que les conditions suivantes soient vérifiées :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{e}_r(t) = 0 \text{ pour } \omega(t) = 0 \quad (3.11)$$

$$\|\mathbf{e}_r(t)\|_{L_2} \leq \mu \|\omega(t)\|_{L_2} \text{ pour } \omega(t) \neq 0 \text{ et } \mathbf{e}_r(0) = 0. \quad (3.12)$$

où $\mathbf{e}_r = x - \hat{x}$ représente l'erreur d'estimation et μ un scalaire positif à déterminer. Afin de satisfaire aux conditions (3.11) et (3.12), cette fois en utilisant la théorie de Lyapunov, il suffit de trouver une fonction de Lyapunov V telle que

$$\dot{V} + \mathbf{e}_r^T \mathbf{e}_r - \mu^2 \omega^T \omega < 0.$$

La dynamique de l'erreur se réécrit sous la forme suivante :

$$\dot{\mathbf{e}}_r = (\mathbf{A} + \mathbf{D}(\xi) - \mathbf{K}\mathbf{C})\mathbf{e}_r + (\mathcal{W}_1 - \mathbf{C}\mathcal{W}_2)\omega$$

où \mathbf{D} a été définie dans (3.7). Une analyse de la stabilité a été établie, voir [145], [148].

Stabilisation basée observateur pour les systèmes non linéaires

L'état de la majorité des systèmes physiques n'est que partiellement accessible. Il est donc nécessaire d'inclure un observateur d'état afin de réaliser la boucle de commande de façon à ce que le système soit stable. Nous avons les principales techniques de stabilisation basée sur des observateurs pour les systèmes non linéaires :

1. La stabilisation basée observateur par modes glissants[6] est une forme de commande à structure variable qui a été appliquée à de nombreux systèmes, notamment pour la stabilisation des drones,[47] ou bien en robotique [71],[52][140]. Cette technique consiste à contraindre l'état d'un système non linéaire à atteindre en un temps une surface donnée et à y demeurer [48]. Cette surface représente une relation entre les variables d'état décrivant la dynamique du système sous la forme d'une équation différentielle. Le système soumis à cette commande ne dépend que des propriétés de la surface choisie.
2. La stabilisation basée observateur par backstepping a été développée par krctc et al [83]. Elle est basée sur la théorie de la stabilité de Lyapunov. La technique de backstepping surmonte la difficulté de choix de la fonction de Lyapunov en

construisant une fonction de Lyapunov adaptée au système étudié d'une manière itérative. Krctic et al dans [84] ont aussi étudié la stabilisation basée observateur des EDPs. Cette partie sera traitée dans la section suivante.

3. La stabilisation basée observateur grand gain est apparue avec les travaux de Saberi et al. [119], [77], Tornambe [132], et Khalil [49]. On trouve le travail de Esfandiari et Khalil [50] où ils ont proposé une solution pour montrer que le manque de conditions de croissance de l'observateur grand gain pourraient déstabiliser le système en boucle fermée lorsque le gain d'observateur est suffisamment grand. Ils suggèrent que la commande soit construite comme une fonction globalement bornée de l'estimation d'état afin qu'elle soit saturée pendant la période de pic. Car l'observateur est plus rapide que la dynamique en boucle fermée par un retour d'état. Teel et Praly [130] [131], s'inspirant des idées de Esfandiari et Khalil [50] et du travail de Tornambe [133], ont prouvé le premier principe de séparation non linéaire et ils ont développé un ensemble d'outils pour la stabilisation semi-globale des systèmes non linéaires. Atassi et Khalil [12] ont prouvé le principe de séparation en ajoutant une nouvelle dimension aux résultats de Teel et Praly [130] à savoir : la combinaison d'observateur rapide avec la saturation de commande permet à la commande par un retour d'état de récupérer les trajectoires de la commande par un retour d'état quand le gain d'observateur est suffisamment grand.

Remarque 2. Dans la suite nous nous intéressons à la stabilisation basée observateur en utilisant la formulation LPV et la DMVT.

Nous allons à présent introduire l'observateur d'état des EDPs en dimension infinie par la méthode de « Backstepping ». C'est le resultat des travaux réalisés par Krctic et al dans [[84], chapitres 4 et 5].

3.2 Observateur d'état des EDPs par la méthode de « Backstepping »

Les mesures dans les systèmes de paramètres distribués sont rarement disponibles dans tout le domaine. Il est plus courant que les capteurs soient placés uniquement aux limites. Ceci est particulièrement vrai dans les problèmes impliquant des écoulements de fluides (dans des applications telles que l'aérodynamique, l'acoustique, contrôle des processus chimiques, etc). Étant donné que les commandes à retour d'état développés jusqu'à présent nécessitent la mesure de l'état en chaque point du domaine, nous devons concevoir des observateurs d'état. Commençons par présenter d'abord la méthode de « Backstepping ».

3.2.1 « Backstepping »

Étudions le cas de l'équation réaction-diffusion :

$$\frac{\partial g}{\partial t}(x, t) = g_{xx}(x, t) + \lambda g(x, t) \quad (3.13)$$

$$g(0, t) = 0 \quad (3.14)$$

$$g(1, t) = U(t) \quad (3.15)$$

où λ est une constante arbitraire et $U(t)$ est l'entrée de contrôle. Le système en boucle ouverte (3.13), (3.14) (avec $g(1, t) = 0$) est instable avec arbitrairement des valeurs propres instables pour λ suffisamment grand.

Puisque le terme λg est source d'instabilité, l'objectif naturel d'une rétroaction aux frontières est « d'éliminer » ce terme. L'idée principale de la méthode de « Backstepping » est d'utiliser la transformation de coordonnées

$$w(x, t) = g(x, t) - \int_0^x k(x, y)g(y, t)dy \quad (3.16)$$

avec commande de retour d'état

$$g(1, t) = \int_0^1 k(1, y)g(y, t)dy \quad (3.17)$$

transformer le système (3.13), (3.14) en système cible

$$w_t(x, t) = w_{xx}(x, t), \quad (3.18)$$

$$w(0, t) = 0, \quad (3.19)$$

$$w(1, t) = 0, \quad (3.20)$$

qui est exponentiellement stable, comme le montre dans [[84], le chapitre 2]. Notons que les conditions aux limites (3.14), (3.19) et (3.17), (3.20) sont vérifiées par (3.16) sans aucune condition sur $k(x, y)$.

La transformation (3.16) est appelée transformation intégrale de Volterra. Sa caractéristique la plus importante est que la limite de l'intégrale va de 0 à x , et non de 0 à 1. Cela la rend « spatialement causal » : c'est-à-dire que pour un x donné, le second membre de droite de (3.16) ne dépend que des valeurs de g dans l'intervalle $[0, x]$. Une autre propriété importante de la transformation de Volterra est qu'elle est inversible, de sorte que la stabilité du système cible se traduit par la stabilité du système en boucle fermée constitué de la rétroaction aux limites.

L'objectif est maintenant de trouver la fonction du noyau de gain $k(x, y)$ qui fait que les équations (3.13), (3.14) avec le contrôleur (3.17) se comportent comme le système cible (3.18)-(3.20). À ce stade l'existence d'une telle fonction n'est pas gagnée d'avance.

3.2.2 Équation du noyau de gain

Pour savoir quelles conditions $k(x, y)$ doit satisfaire, nous substituons simplement la transformation (3.16) dans le système cible (3.18)-(3.20) et utilisons les équations (3.13)-(3.14). Pour cela, il faut dériver la transformation (3.16) par rapport à x et t , ce qui est facile une fois rappelée la règle de différenciation de Leibnitz :

$$\frac{d}{dx} \int_0^x f(x, y) dy = f(x, x) + \int_0^x f_x(x, y) dy.$$

Nous introduisons également la notation suivante :

$$\begin{aligned} k_x(x, x) &= \left. \frac{\partial}{\partial x} k(x, y) \right|_{y=x}, \\ k_y(x, x) &= \left. \frac{\partial}{\partial y} k(x, y) \right|_{y=x}, \\ \frac{d}{dx} k(x, x) &= k_x(x, x) + k_y(x, x). \end{aligned}$$

Dériver la transformation (3.16) par rapport à x donne

$$\begin{aligned} w_x(x) &= g_x(x) - k(x, x)g(x) - \int_0^x k_x(x, y)g(y)dy, \\ w_{xx}(x) &= g_{xx}(x) - \frac{d}{dx}(k(x, x)g(x)) - k_x(x, x)g(x) - \int_0^x k_{xx}(x, y)g(y)dy, \\ &= g_{xx}(x) - g(x)\frac{d}{dx}k(x, x) - k(x, x)g_x(x) - k_x(x, x)g(x) \\ &\quad - \int_0^x k_{xx}(x, y)g(y)dy. \end{aligned} \tag{3.21}$$

Cette expression de la seconde dérivée spatiale de $w(x)$ sera la même pour différents problèmes.

Ensuite, nous différencions la transformation (3.16) par rapport au temps :

$$\begin{aligned}
w_t(x) &= g_t(x) - \int_0^x k(x, y) g_t(y) dy \\
&= g_{xx}(x) + \lambda g(x) - \int_0^x k(x, y) (g_{yy}(y) + \lambda g(y)) dy \\
&= g_{xx}(x) + \lambda g(x) - k(x, x) g_x(x) + k(x, 0) g_x(0) \\
&\quad + \int_0^x k_y(x, y) g_y(y) dy - \int_0^x \lambda k(x, y) g(y) dy \quad (\text{intégration par parties}) \\
&= g_{xx}(x) + \lambda g(x) - k(x, x) g_x(x) + k(x, 0) g_x(0) + k_y(x, x) g(x) - k_y(x, 0) g(0) \\
&\quad - \int_0^x k_{yy}(x, y) g(y) dy - \int_0^x \lambda k(x, y) g(y) dy \quad (\text{intégration par parties}). \quad (3.22)
\end{aligned}$$

En soustrayant (3.21) de (3.22), on obtient

$$\begin{aligned}
w_t - w_{xx} &= \left[\lambda + 2 \frac{d}{dx} k(x, x) \right] g(x) + k(x, 0) g_x(0) \\
&\quad + \int_0^x (k_{xx}(x, y) - k_{yy}(x, y) - \lambda k(x, y)) g(y) dy. \quad (3.23)
\end{aligned}$$

Pour que le membre de droite soit nul pour tout g , les trois conditions suivantes doivent être satisfaites :

$$k_{xx}(x, y) - k_{yy}(x, y) - \lambda k(x, y) = 0, \quad (3.24)$$

$$k(x, 0) = 0, \quad (3.25)$$

$$\lambda + 2 \frac{d}{dx} k(x, x) = 0. \quad (3.26)$$

On peut simplifier (3.26) en l'intégrant par rapport à x et en remarquant d'après (3.25) que $k(0, 0) = 0$. ce qui nous donne ceci :

$$\begin{aligned}
k_{xx}(x, y) - k_{yy}(x, y) &= \lambda k(x, y) \\
k(x, 0) &= 0, \\
k(x, x) &= -\frac{\lambda}{2} x. \quad (3.27)
\end{aligned}$$

Il s'avère que ces trois conditions sont compatibles et forment en fait une EDP bien posée. Cette EDP est de type hyperbolique : on peut la considérer comme une équation d'onde avec un terme supplémentaire λk (x joue le rôle du temps). En physique quantique, ces PDE sont appelées PDE de Klein-Gordon. Le domaine de cette EDP est un triangle

$0 \leq y \leq x \leq 1$. Les conditions aux limites sont prescrites sur les deux côtés du triangle et le troisième côté (après résolution pour $k(x, y)$) nous donne le gain de contrôle $k(1, y)$.

Dans les deux sections suivantes, nous prouvons que l'EDP (3.27) admet une unique solution deux fois continûment différentiable.

3.2.3 Conversion de l'EDP du noyau de gain en une équation intégrale

Pour trouver une solution de l'EDP (3.27), nous la convertissons d'abord en une équation intégrale. Procédons au changement de variables suivant

$$\xi = x + y, \quad \eta = x - y,$$

on a

$$\begin{aligned} k(x, y) &= G(\xi, \eta), \\ k_x &= G_\xi + G_\eta, \\ k_{xx} &= G_{\xi\xi} + 2G_{\xi\eta} + G_{\eta\eta}. \\ k_y &= G_\xi - G_\eta, \\ k_{yy} &= G_{\xi\xi} - 2G_{\xi\eta} + G_{\eta\eta}. \end{aligned} \tag{3.28}$$

Ainsi, l'équation du noyau de gain devient

$$G_{\xi\eta}(\xi, \eta) = \frac{\lambda}{4}G(\xi, \eta) \tag{3.29}$$

$$G(\xi, \xi) = 0, \tag{3.30}$$

$$G(\xi, 0) = -\frac{\lambda}{4}\xi. \tag{3.31}$$

En intégrant (3.29) par rapport à η de 0 à η , on obtient

$$G_\xi(\xi, \eta) = G_\xi(\xi, 0) + \int_0^\eta \frac{\lambda}{4}G(\xi, s)ds = -\frac{\lambda}{4} + \int_0^\eta \frac{\lambda}{4}G(\xi, s)ds. \tag{3.32}$$

Ensuite, nous intégrons (3.32) par rapport à ξ de η à ξ pour obtenir

$$\begin{aligned} G(\xi, \eta) &= G(\eta, \eta) - \frac{\lambda}{4}(\xi - \eta) + \frac{\lambda}{4} \int_\eta^\xi \int_0^\eta G(\tau, s)dsd\tau \\ &= -\frac{\lambda}{4}(\xi - \eta) + \frac{\lambda}{4} \int_\eta^\xi \int_0^\eta G(\tau, s)dsd\tau. \end{aligned} \tag{3.33}$$

Nous avons obtenu l'équation intégrale, équivalente à PDE (3.27) en ce sens que toute solution de (3.27) est une solution de (3.33). L'intérêt de convertir l'EDP en équation intégrale est que cette dernière est plus facile à analyser avec un outil spécial, que l'on considère ensuite.

3.2.4 Méthode des approximations successives

Le principe de la méthode des approximations successives est la suivante :

1. une estimation initiale pour une solution de l'équation intégrale,
2. la substituer à la partie droite de l'équation,
3. utiliser l'expression obtenue comme estimation suivante dans l'équation intégrale et répéter la processus.

Le processus aboutit à une solution de l'équation intégrale. Commençons par une première supposition

$$G^0(\xi, \eta) = 0 \quad (3.34)$$

et configurons la formule récursive pour (3.33) comme suit :

$$G^{m+1}(\xi, \eta) = -\frac{\lambda}{4}(\xi - \eta) + \frac{\lambda}{4} \int_n^{\xi} \int_0^{\eta} G^m(\tau, s) ds d\tau \quad (3.35)$$

Si cela converge, on peut écrire la solution $G(\xi, \eta)$ sous la forme

$$G(\xi, \eta) = \lim_{n \rightarrow \infty} G^n(\xi, \eta). \quad (3.36)$$

Notons la différence entre deux termes consécutifs comme

$$\Delta G^n(\xi, \eta) = G^{n+1}(\xi, \eta) - G^n(\xi, \eta). \quad (3.37)$$

Puis

$$\Delta G^{m+1}(\xi, \eta) = \frac{\lambda}{4} \int_{\eta}^{\xi} \int_0^{\eta} \Delta G^m(\tau, s) ds d\tau \quad (3.38)$$

et (3.36) peut s'écrire alternativement comme

$$G(\xi, \eta) = \sum_{n=0}^{\infty} \Delta G^n(\xi, \eta). \quad (3.39)$$

Calcul de ΔG^n à partir de (3.38) en commençant par

$$\Delta G^1 = G^1(\xi, \eta) = -\frac{\lambda}{4}(\xi - \eta),$$

on peut observer le schéma qui conduit à la formule suivante :

$$\Delta G^n(\xi, \eta) = -\frac{(\xi - \eta)\xi^n \eta^n}{n!(n+1)!} \left(\frac{\lambda}{4}\right)^{n+1}.$$

Cette formule peut être vérifiée par induction. La solution de l'équation intégrale est donnée par

$$G(\xi, \eta) = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\xi - \eta)\xi^n \eta^n}{n!(n+1)!} \left(\frac{\lambda}{4}\right)^{n+1} \quad (3.40)$$

Pour calculer la série (3.40), notez dans l'annexe qu'une fonction de Bessel modifiée du premier ordre du premier type peut être représentée par

$$I_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1}}{n!(n+1)!}.$$

En comparant cette expression avec (3.40), on obtient

$$G(\xi, \eta) = -\frac{\lambda}{2}(\xi - \eta) \frac{I_1(\sqrt{\lambda\xi\eta})}{\sqrt{\lambda\xi\eta}}$$

ou, en revenant aux variables originales x, y ,

$$k(x, y) = -\lambda y \frac{I_1(\sqrt{\lambda(x^2 - y^2)})}{\sqrt{\lambda(x^2 - y^2)}}. \quad (3.41)$$

3.2.5 Transformation inverse

Pour compléter la conception, nous devons établir que la stabilité du système cible (3.18)-(3.20) implique la stabilité de la centrale en boucle fermée (3.13), (3.13), (3.17). En d'autres termes, nous devons montrer que la transformation (3.16) est inversible.

Écrivons une transformation inverse sous la forme

$$g(x) = w(x) + \int_0^x l(x, y)w(y)dy, \quad (3.42)$$

où $l(x, y)$ est le noyau de transformation. Étant donné la transformation directe (3.16) et la transformation inverse (3.42), les noyaux $k(x, y)$ et $l(x, y)$ satisfont

$$l(x, y) = k(x, y) + \int_y^x k(x, \xi)l(\xi, y)d\xi. \quad (3.43)$$

Démonstration. de (3.43). Tout d'abord, rappelons du calcul la formule suivante pour changer l'ordre d'intégration :

$$\int_0^x \int_0^y f(x, y, \xi)d\xi dy = \int_0^x \int_{\xi}^x f(x, y, \xi)dy d\xi.$$

En substituant (3.42) à (3.16), on obtient

$$\begin{aligned}
w(x) &= w(x) + \int_0^x l(x, y)w(y)dy - \int_0^x k(x, y) \left[w(y) + \int_0^y l(y, \xi)w(\xi)d\xi \right] dy \\
&= w(x) + \int_0^x l(x, y)w(y)dy - \int_0^x k(x, y)w(y)dy - \int_0^x \int_0^y k(x, y)l(y, \xi)w(\xi)d\xi dy, \\
0 &= \int_0^x w(y) \left[l(x, y) - k(x, y) - \int_y^x k(x, \xi)l(\xi, y)d\xi \right] dy.
\end{aligned}$$

Puisque la dernière ligne doit être vraie pour tout $w(y)$, nous obtenons la relation (3.43). \square

La formule (3.43) est générale (elle ne dépend pas de la centrale et du système cible) mais n'est pas très utile pour trouver réellement $l(x, y)$ à partir de $k(x, y)$. Au lieu de cela, nous suivons la même approche qui nous a conduit à l'équation du noyau pour $k(x, y)$: nous différencions la transformation inverse (3.42) par rapport à x et t et utilisons la plante et le système cible pour obtenir l'EDP pour $l(x, y)$.

En différenciant (3.42) par rapport au temps, on obtient

$$\begin{aligned}
g_t(x) &= w_t(x) + \int_0^x l(x, y)w_t(y)dy \\
&= w_{xx}(x) + l(x, x)w_x(x) - l(x, 0)w_x(0) - l_y(x, x)w(x) \\
&\quad + \int_0^x l_{yy}(x, y)w(y)dy
\end{aligned} \tag{3.44}$$

et différencier deux fois par rapport à x donne

$$\begin{aligned}
g_{xx}(x) &= w_{xx}(x) + l_x(x, x)w(x) + w(x) \frac{d}{dx} l(x, x) + l(x, x)w_x(x) \\
&\quad + \int_0^x l_{xx}(x, y)w(y)dy.
\end{aligned} \tag{3.45}$$

En soustrayant (3.45) de (3.44), on obtient

$$\begin{aligned}
\lambda w(x) + \lambda \int_0^x l(x, y)w(y)dy &= -2w(x) \frac{d}{dx} l(x, x) - l(x, 0)w_x(0) \\
&\quad + \int_0^x (l_{yy}(x, y) - l_{xx}(x, y)) w(y)dy.
\end{aligned} \tag{3.46}$$

ce qui donne les conditions suivantes sur $l(x, y)$:

$$l_{xx}(x, y) - l_{yy}(x, y) = -\lambda l(x, y), \quad (3.47)$$

$$l(x, 0) = 0, \quad (3.48)$$

$$l(x, x) = -\frac{\lambda}{2}x. \quad (3.49)$$

En comparant cette EDP avec l'EDP (3.27) pour $k(x, y)$, on voit que

$$l(x, y; \lambda) = -k(x, y; -\lambda).$$

De (3.41) nous avons

$$l(x, y) = -\lambda y \frac{I_1(\sqrt{-\lambda(x^2 - y^2)})}{\sqrt{-\lambda(x^2 - y^2)}} - \lambda y \frac{I_1(j\sqrt{\lambda(x^2 - y^2)})}{j\sqrt{\lambda(x^2 - y^2)}}$$

ou, en utilisant les propriétés de I_1 (voir (B.2)),

$$l(x, y) = -\lambda y \frac{J_1(\sqrt{\lambda(x^2 - y^2)})}{\sqrt{\lambda(x^2 - y^2)}}$$

où J_1 est la fonction de Bessel voir (B.3).

3.2.6 Conception de l'observateur pour les EDP

Considérons l'équation de chaleur instable avec actionnement aux limites précédent (3.13)-(3.15), où $U(t)$ peut soit représenter un forçage en boucle ouverte, soit être généré à partir d'une loi de rétroaction (« *feedback* »). Supposons que seul $g(0)$ soit disponible pour la mesure. Nous allons montrer qu'à partir de cette information de frontière, il est possible de reconstruire l'état dans le domaine. Nous concevons l'observateur suivant :

$$\hat{g}_t = \hat{g}_{xx} + \lambda \hat{g} + p_1(x)[g(0) - \hat{g}(0)] \quad (3.50)$$

$$\hat{g}_x(0) = p_{10}[g(0) - \hat{g}(0)], \quad (3.51)$$

$$\hat{g}(1) = U(t). \quad (3.52)$$

Ici, la fonction $p_1(x)$ et la constante p_{10} sont des gains d'observateur à déterminer. Il est utile de noter que la structure de l'observateur ci-dessus imite le format d'observateur de dimension du système suivant

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad (3.53)$$

$$y = Cx, \quad (3.54)$$

son observateur est

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(y - C\hat{x})$$

où L est le gain de l'observateur et $L(y - C\hat{x})$ est "l'injection d'erreur de sortie". Dans (3.50) et (3.51) l'observateur gagne $p_1(x)$ et p_{10} forme un "vecteur" de dimension infinie qui correspond à un analogue de L .

Notre objectif est de trouver $p_1(x)$ et p_{10} tels que \hat{g} converge vers g lorsque le temps tend vers l'infini. Pour ce faire, nous introduisons la variable d'erreur

$$\mathbf{e}_r = g - \hat{g}$$

et considérer le système d'erreur

$$\mathbf{e}_t = \mathbf{e}_{xx} + \lambda \mathbf{e} - p_1(x) \mathbf{e}(0), \quad (3.55)$$

$$\mathbf{e}_x(0) = -p_{10} \mathbf{e}(0), \quad (3.56)$$

$$\mathbf{e}(1) = 0. \quad (3.57)$$

Avec la transformation (inversible)

$$\mathbf{e}(x) = \tilde{w}(x) - \int_0^x p(x, y) \tilde{w}(y) dy \quad (3.58)$$

nous transformons le système d'erreur en l'équation de la chaleur exponentiellement stable

$$\tilde{w}_t = \tilde{w}_{xx}, \quad (3.59)$$

$$\tilde{w}_x(0) = 0, \quad (3.60)$$

$$\tilde{w}(1) = 0. \quad (3.61)$$

En différenciant la transformation (3.58), on obtient

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_t(x) &= \tilde{w}_t(x) - \int_0^x p(x, y) \tilde{w}_{yy}(y) dy \\ &= \tilde{w}_t(x) - p(x, x) \tilde{w}_x(x) + p(x, 0) \tilde{w}_x(0) + p_y(x, x) \tilde{w}(x) \\ &\quad - p_y(x, 0) \tilde{w}(0) - \int_0^x p_{yy}(x, y) \tilde{w}(y) dy, \end{aligned} \quad (3.62)$$

$$\begin{aligned} \tilde{w}_{xx}(x) &= \tilde{w}_{xx}(x) - \tilde{w}(x) \frac{d}{dx} p(x, x) - p(x, x) \tilde{w}_x(x) \\ &\quad - p_x(x, x) \tilde{w}(x) - \int_0^x p_{xx}(x, y) \tilde{w}(y) dy. \end{aligned} \quad (3.63)$$

En soustrayant (3.63) de (3.62), on obtient

$$\begin{aligned} &\lambda \left(\tilde{w}(x) - \int_0^x p(x, y) \tilde{w}(y) dy \right) - p_1(x) \tilde{w}(0) \\ &= 2\tilde{w}(x) \frac{d}{dx} p(x, x) - p_y(x, 0) \tilde{w}(0) + \int_0^x (p_{xx}(x, y) - p_{yy}(x, y)) \tilde{w}(y) dy. \end{aligned} \quad (3.64)$$

Pour que la dernière égalité soit valable, les trois conditions suivantes doivent être remplies :

$$p_{xx}(x, y) - p_{yy}(x, y) = -\lambda p(x, y) \quad (3.65)$$

$$\frac{d}{dx} p(x, x) = \frac{\lambda}{2} \quad (3.66)$$

$$p_1(x) = \varepsilon p_y(x, 0). \quad (3.67)$$

Les conditions aux limites (3.55) et (3.56) fournissent deux autres conditions comme suit :

$$p_{10} = p(0, 0), \quad (3.68)$$

$$p(1, y) = 0. \quad (3.69)$$

La condition (3.68) est obtenue en différenciant (3.58) par rapport à x , en posant $x = 0$, et en substituant (3.56) et (3.60) dans l'équation résultante. La condition (3.69) est obtenue en posant $x = 1$ dans (3.58) et en substituant (3.56) et (3.61) dans l'équation résultante. Résolvons (3.66) et (3.69) pour $p(x, x)$ et combinons le résultat avec (3.65) et (3.69) comme suit :

$$p_{xx}(x, y) - p_{yy}(x, y) = -\lambda p(x, y), \quad (3.70)$$

$$p(1, y) = 0, \quad (3.71)$$

$$p(x, x) = \frac{\lambda}{2}(x - 1). \quad (3.72)$$

Ces trois conditions forment une EDP bien posée que l'on peut résoudre explicitement. Pour ce faire, nous effectuons un changement de variables

$$\bar{x} = 1 - y, \quad \bar{y} = 1 - x, \quad \bar{p}(\bar{x}, \bar{y}) = p(x, y),$$

ce qui donne l'EDP suivante :

$$\bar{p}_{\bar{x}\bar{x}}(\bar{x}, \bar{y}) - \bar{p}_{\bar{y}\bar{y}}(\bar{x}, \bar{y}) = \lambda \bar{p}(\bar{x}, \bar{y}), \quad (3.73)$$

$$\bar{p}(\bar{x}, 0) = 0, \quad (3.74)$$

$$\bar{p}(\bar{x}, \bar{x}) = -\frac{\lambda}{2} \bar{x}. \quad (3.75)$$

Cette EDP a été résolue voir [[84] chapitre 4], et sa solution est

$$\bar{p}(\bar{x}, \bar{y}) = -\lambda \bar{y} \frac{I_1(\sqrt{\lambda(\bar{x}^2 - \bar{y}^2)})}{\sqrt{\lambda(\bar{x}^2 - \bar{y}^2)}}$$

ou, dans les variables d'origine,

$$p(x, y) = -\lambda(1-x) \frac{I_1(\sqrt{\lambda(2-x-y)(x-y)})}{\sqrt{\lambda(2-x-y)(x-y)}}.$$

Les gains de l'observateur, obtenus en utilisant (3.67) et (3.68) sont

$$p_1(x) = p_y(x, 0) = \frac{\lambda(1-x)}{x(2-x)} I_2(\sqrt{\lambda x(2-x)}), \quad (3.76)$$

$$p_{10} = p(0, 0) = -\frac{\lambda}{2}. \quad (3.77)$$

3.2.7 La sortie du retour d'état

L'observateur à convergence exponentielle développé dans la dernière section est indépendant de l'entrée de contrôle et peut être utilisé avec n'importe quel contrôleur. Dans cette section, nous le combinons avec le contrôleur de « *Backstepping* » (3.16) pour résoudre le problème de rétroaction de sortie. Pour les systèmes linéaires, le principe de séparation (ou "équivalence de certitude") est valable ; c'est-à-dire que la combinaison d'un contrôleur de retour d'état et d'un observateur conçus séparément donne un contrôleur de retour de sortie stabilisant. Ensuite, nous établissons le principe de séparation pour notre conception de « *feedback* » de sortie basée sur l'observateur.

Il est simple de montrer que les transformations de « *Backstepping* » observateur et contrôle (3.58) et

$$\hat{w}(x) = \hat{g}(x) - \int_0^x k(x, y) \hat{g}(y) dy, \quad (3.78)$$

$$\hat{g}(x) = \hat{w}(x) + \int_0^x l(x, y) \hat{w}(y) dy \quad (3.79)$$

cartographier le système en boucle fermée composé de la PDE d'erreur d'observateur et de l'observateur dans le système cible suivant :

$$\hat{w}_t = \hat{w}_{xx} + \left\{ p_1(x) - \int_0^x k(x, y) p_1(y) dy \right\} \tilde{w}(0), \quad (3.80)$$

$$\hat{w}_x(0) = p_{10} \tilde{w}(0), \quad (3.81)$$

$$\hat{w}(1) = 0, \quad (3.82)$$

$$\tilde{w}_t = \tilde{w}_{xx}, \quad (3.83)$$

$$\tilde{w}_x(0) = 0, \quad (3.84)$$

$$\tilde{w}(1) = 0, \quad (3.85)$$

où $k(x, y)$ est le noyau de la transformation de contrôle et $p_1(x), p_{10}$ sont les gains de l'observateur. Le système \tilde{w} et la partie homogène du système \hat{w} (sans $\tilde{w}(0, t)$) sont des

équations de chaleur exponentiellement stables. Pour montrer que le système (\hat{w}, \tilde{w}) est exponentiellement stable, nous utilisons la fonction de Lyapunov pondérée

$$V = \frac{A}{2} \int_0^1 \tilde{w}(x)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^1 \hat{w}(x)^2 dx \quad (3.86)$$

où A est la constante de pondération à choisir ultérieurement. En prenant la dérivée temporelle de (3.86), on obtient

$$\dot{V} = -A \int_0^1 \tilde{w}_x(x)^2 dx - p_{10} \hat{w}(0) \tilde{w}(0) - \int_0^1 \hat{w}_x(x)^2 dx \quad (3.87)$$

$$+ \tilde{w}(0) \int_0^1 \hat{w}(x) \left\{ p_1(x) - \int_0^x k(x, y) p_1(y) dy \right\} dx. \quad (3.88)$$

En utilisant les inégalités de Poincaré(B.1.3) et de Young(B.1.4), nous estimons

$$-p_{10} \hat{w}(0) \tilde{w}(0) \leq \frac{1}{4} \hat{w}(0)^2 + p_{10}^2 \tilde{w}(0)^2 \leq \frac{1}{4} \int_0^1 \hat{w}_x(x)^2 dx + p_{10}^2 \int_0^1 \tilde{w}_x(x)^2 dx$$

et

$$\begin{aligned} & \tilde{w}(0) \int_0^1 \hat{w}(x) \left\{ p_1(x) - \int_0^x k(x, y) p_1(y) dy \right\} dx \\ & \leq \frac{1}{4} \int_0^1 \hat{w}_x(x)^2 dx + B^2 \int_0^1 \tilde{w}_x(x)^2 dx \end{aligned}$$

où $B = \max_{x \in [0,1]} \left\{ p_1(x) - \int_0^x k(x, y) p_1(y) dy \right\}$. Avec ces estimations, on obtient

$$\dot{V} \leq -(A - B^2 - p_{10}^2) \int_0^1 \tilde{w}_x(x)^2 dx - \frac{1}{2} \int_0^1 \hat{w}_x(x)^2 dx \quad (3.89)$$

$$\leq -\frac{1}{4} (A - B^2 - p_{10}^2) \int_0^1 \tilde{w}(x)^2 dx - \frac{1}{8} \int_0^1 \hat{w}(x)^2 dx. \quad (3.90)$$

En prenant $A = 2(B^2 + p_{10}^2)$, on obtient

$$\dot{V} \leq -\frac{1}{4} V.$$

Ainsi, le système (\hat{w}, \tilde{w}) est exponentiellement stable. Le système (\hat{g}, \tilde{g}) est également exponentiellement stable puisqu'il est lié à (\hat{w}, \tilde{w}) par les transformations de coordonnées inversibles (3.58) et (3.79). Nous avons ainsi prouvé que le système en boucle fermée constitué du contrôleur de backstepping et l'observateur, est exponentiellement stable.

3.2.8 Etat d'art

La conception des observations des EDPs reste encore très difficile. Plusieurs résultats de cette conception par la méthode de « *Backstepping* » ont été présentés par Krstic et all dans [84]. En effet les auteurs ont développé l'observation des équations de réaction-advection-diffusion, Schrödinger et Ginzbourg-Landau. Nous notons d'autres travaux, l'estimation d'état basée sur le backstepping pour une classe d'EDP paraboliques dans des études de domaines spatiaux unidimensionnels et tridimensionnels a été développée dans les travaux de Jodachowski et all [74] [75], et son implémentation dans [76]. Dans le même ordre d'idées, on peut citer les travaux intéressants de Smyshlyaev et all [124], Nguyen in [101], Demetriou in [41], l'analyse de convergence de Balas in [15]. Boundary Observer for Output-« *Feedback* » Stabilization par Vazquez et all in [138]. L'observateur de type Luenberger par Meurer dans [96] et Zeitz (le cas ODE) dans [144], « *Backstepping* » control and state estimation dans [97] et [139].

3.3 Études des inégalités matricielles linéaires : Définitions et propriétés

Les sections suivantes présentent un ensemble des notions et propriétés concernent les inégalités matricielles linéaires LMIs et leurs applications en commande des systèmes. Les inégalités matricielles linéaires sont utilisées pour résoudre plusieurs problèmes d'automatique, (problèmes d'optimisation en théorie du contrôle, identification de système,...) qui sont généralement difficiles à résoudre de façon analytique. L'intérêt des méthodes basées sur les LMIs vient du fait que ces dernières peuvent être résolues en utilisant la programmation convexe. Avec cette approche, on n'est plus limité aux problèmes ayant une solution analytique. En résolvant ces inégalités, on obtient un domaine de solutions faisables, c'est-à-dire de solutions satisfaisant ces LMIs, plus vaste que celui généré par la recherche de solutions analytiques. En utilisant le fait qu'une inégalité possède davantage de solutions qu'une équation, il est possible d'employer les degrés de liberté supplémentaires pour inclure d'autres objectifs que ceux initialement retenus.

Les notions des LMIs se retrouvent dans plusieurs travaux depuis de nombreuses années. Ainsi Lyapunov a conditionné la stabilité d'un système par les LMIs. Plus tard, Kalman, Yakubovich et Popov ont généralisé le résultat de stabilité proposé par Lyapunov. La terminologie des LMIs a été utilisée par Willems en 1971 [141]. En 1994, Nesterov et Nemirovski ont trouvé une solution pour résoudre les LMIs de manière efficace en utilisant des méthodes basées sur les points intérieurs [99].

Définition 3.3.1 (Inégalité matricielle linéaire (LMI)). *On appelle une inégalité matricielle linéaire notée (LMI) le problème suivant : étant données les matrices réelles, carrées et symétriques : $F_i = F_i^T \in \mathbb{R}^{n \times n}, i = 0 \dots m$ et $x \in \mathbb{R}^m$ telles que :*

$$F(x) = F_0 + \sum_{i=1}^m x_i F_i > 0. \quad (3.91)$$

L'inégalité (3.91) implique que : $F(x)$ est une matrice définie positive c'est-à-dire : $\forall z \in \mathbb{R}^n$ et $z \neq 0$: $z^T F(x) z > 0$. De manière équivalente, la valeur propre la plus petit de $F(x)$ est positive.

Les matrices symétriques F_i sont fixées (connues) et $x = [x_1, x_2, \dots, x_m]^T$ est un vecteur de valeurs inconnues (variables). On dit que $F(x) > 0$ est une LMI affine des éléments de x .

Remarque 3. L'inégalité (3.91) est une LMI stricte si $F(x)$ est seulement définie positive (non négative) autrement LMI est dite non stricte.

Le succès des LMIs vient du développement des méthodes dites du point intérieur qui permettent de résoudre ces problèmes de manière efficace.

3.3.1 Problème de faisabilité

Le problème de faisabilité d'une LMI est le problème de trouver l'ensemble des points : $x \in Co$ où $Co = \{x \in \mathbb{R}^n / F(x) > 0\}$ qui vérifient LMI : $F(x) > 0$ alors le problème $F(x) > 0$ est dit faisable (ou réalisable) et ces points appelés points faisables.

Exemple : Les LMIs ne se présentent pas souvent directement sous la forme (3.91) prenons un exemple classique de l'automatique : la stabilité au sens de Lyapunov pour un système linéaire $\dot{x}(t) = Ax(t)$. Il s'agit de trouver une matrice réelle $P = P^T > 0$ de même dimensions que A telle que : $A^T P + PA < 0$.

Considérons à titre d'exemple le cas où A est une matrice 2×2 :

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}.$$

La matrice symétrique P dépend alors de 3 paramètres $x_i : i = 1, 2, 3$. on peut s'écrire :

$$P = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_2 & x_3 \end{bmatrix}.$$

La condition de positivité $P > 0$ s'écrit :

$$x_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} > 0.$$

L'inégalité de Lyapunov $A^T P + PA < 0$, peut se réécrire sous la forme suivante :

$$x_1 \begin{bmatrix} 2a_1 & a_2 \\ a_3 & 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_2 + a_3 & a_1 + a_4 \\ a_1 + a_4 & a_2 + a_3 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 0 & a_2 \\ a_3 & 2a_4 \end{bmatrix} < 0.$$

Cette inégalité est une LMI affine des éléments : x_1, x_2, x_3 .

3.3.2 Propriétés

Parmi les propriétés les plus importantes des inégalités matricielles linéaires, on peut mentionner :

Proposition 3.3.2 (LMIs multiples peuvent être écrites comme une seule LMI). *Parmi les propriétés remarquables des LMIs, la possibilité de regrouper plusieurs LMIs $F_1(x) > 0, F_2(x) > 0, \dots, F_n(x) > 0$ en une seule LMI bloc diagonale :*

$$\begin{bmatrix} F_1(x) & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & F_2(x) & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & 0 & F_n(x) \end{bmatrix} > 0.$$

La convexité est une propriété géométrique importante, qu'on trouve dans la théorie d'optimisation globale.

Définition 3.3.3 (Un ensemble convexe). *Un ensemble $Co := \{x : F(x) > 0\}$ est dit convexe si pour toutes les points $(x_1, x_2) \in Co$ et $0 < \lambda < 1$, alors :*

$$(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \in Co.$$

Définition 3.3.4 (Fonction convexe). *Soit une fonction f avec $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction f est convexe si $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^n, 0 < \lambda < 1$ alors*

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

La fonction f est convexe si pour toutes les paires $(x, y) : f(\lambda x + (1 - \lambda)y)$ est toujours en bas de $\lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$.

Proposition 3.3.5 (l'intersection de deux ensembles convexes). *Soit $F(x) > 0$ et $G(x) > 0$ deux LMIs, liées respectivement aux deux ensembles convexes suivants $Co_1 = \{x \in \mathbb{R}^m / F(x) > 0\}$ et $Co_2 = \{x \in \mathbb{R}^m / G(x) > 0\}$.*

Alors l'intersection de Co_1 et Co_2 est définie par l'ensemble convexe suivant :

$$Co_1 \cap Co_2 = \left\{ x \in \mathbb{R}^m / \begin{bmatrix} F(x) & 0 \\ 0 & G(x) \end{bmatrix} > 0 \right\}.$$

L'intersection de deux ensembles convexes donne un ensemble convexe.

Exemple : Soit l'inégalité matricielle quadratique suivante :

$$\begin{aligned} R &> 0 \\ A^T P + PA + PBR^{-1}B^T P + Q &< 0 \end{aligned}$$

où $A, B, Q = Q^T, R = R^T > 0$ sont des matrices données et $P = P^T$ est la variable. On peut reformuler cette inégalité matricielle quadratique sous forme d'une inégalité matricielle plus simple, en utilisant le lemme du complément de Schur (B.1.1) :

$$\begin{bmatrix} -A^T P - PA - Q & PB \\ B^T P & R \end{bmatrix} > 0.$$

3.4 Applications des LMIs

Dans cette section nous allons donner quelques problèmes qui font appel aux LMIs : Analyse de Stabilité au sens de Lyapunov.

3.4.1 Analyse de Stabilité au sens de Lyapunov

L'analyse de la stabilité des systèmes dynamiques au sens de Lyapunov est une application de LMI. En effet la méthode de Lyapunov proposée dans le cadre de l'étude de stabilité des systèmes linéaires est en réalité une manipulation des LMIs. Etant donné un système linéaire à temps invariant (LTI) :

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \quad x(0) = x_0.$$

Ce système est stable s'il existe une fonction $V(x)$ définie positive telle que sa dérivée est définie négative :

$$V(x) = x^T(t)Px(t)$$

où : P est une matrice symétrique et définie positive : $P = P^T > 0$

$$\dot{V}(x) = x^T (A^T P + PA) x. \quad (3.92)$$

La condition de stabilité consiste à trouver la matrice P qui vérifie l'inégalité matricielle :

$$A^T P + PA < 0.$$

On peut écrire :

$$\begin{cases} V(x) > 0 \\ \dot{V}(x) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P > 0 \\ A^T P + PA < 0 \end{cases} .$$

Donc il résulte :

$$\begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & -A^T P - PA \end{bmatrix} > 0. \quad (3.93)$$

Le système (3.92) est stable lorsque l'inégalité matricielle (3.93) est faisable.

3.4.2 Problème de stabilité quadratique des systèmes incertains

La notion de stabilité quadratique est le prolongement de la notion de stabilité de Lyapunov lorsque l'on considère des systèmes incertains, nous supposons que les matrices incertaines A du modèle d'état appartiennent à des ensembles compacts ϖ .

Nous considérons le système linéaire incertain suivant :

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t). \quad (3.94)$$

Ce système est dit stable quadratiquement lorsqu'il existe une matrice $P = P^T > 0$ telle que quelle que soit la matrice A appartenant à l'ensemble Ω nous avons $\dot{V}(x) < 0$:

$$x^T (A^T(t)P + PA(t)) x < 0.$$

Nous pouvons alors montrer qu'une condition nécessaire et suffisante de stabilité quadratique du système incertain (3.94) est :

1. Dans le cas des incertitudes bornées en norme avec l'ensemble compacts : $\Omega = \{A_0 + DF(t)E, \|F(t)\|_2 \leq 1\}$ avec : $\|F\|_2 = \lambda_{\max}(F^T F)$ où λ_{\max} représente la valeur propre maximale de $F^T F$. Qu'il existe une matrice $P = P^T > 0$ telle que l'inégalité matricielle :

$$A_0^T P + PA_0 + PDD^T P + E^T E < 0.$$

Soit vérifiée, pour une matrice nominale A_0 et des matrices constantes D, E données.

2. Dans le cas des incertitudes polytopiques avec : $\varpi = Co\{A_1, \dots, A_n\}$, Co : représente l'ensemble convexe et $\{A_1, \dots, A_n\}$ une série de matrices constantes données. Il existe une matrice $P = P^T > 0$ telle que l'inégalité matricielle :

$$A_i^T P + PA_i < 0, \quad \forall i = 1, \dots, n$$

soit vérifiée.

Notons que ces conditions sont uniquement suffisantes pour assurer la stabilité robuste du système incertain (3.94), c'est à dire sa stabilité pour toute incertitude admissible.

3.4.3 Stabilité des modèles Takagi-Sugeno (TS)

L'étude de la stabilité des modèles Takagi-Sugeno s'effectue principalement en utilisant la méthode directe de Lyapunov. Soit le modèle Takagi-Sugeno continu suivant en régime libre :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) A_i x(t) \quad (3.95)$$

$$h_i(z(t)) \geq 0, \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) = 1, \forall i \in \{1, \dots, r\}. \quad (3.96)$$

Les matrices $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ représentent un ensemble de r modèles linéaires. Les fonctions d'appartenance $h_i(\cdot)$ ont la propriété de somme convexe (3.96) et sont fonctions d'un vecteur $z(t) \in \mathbb{R}^z$ appelé vecteur des prémisses. La stabilité quadratique du modèle TS (3.95) revient à résoudre le problème suivant : Trouver une matrice $P > 0$, telle que :

$$A_i^T P + PA_i < 0, \quad \forall i \in \{1, \dots, r\}.$$

Pour plus de détail sur la stabilité des modèles Takagi-Sugeno se référer aux différents travaux suivants [102][86][87][106][92][91][1].

3.4.4 Problème de Stabilisation

Les LMIs permettent également de générer des lois de commande stabilisantes. La condition nécessaire et suffisante de stabilité du système commandé :

$$\dot{x} = Ax + Bu. \quad (3.97)$$

Par un retour d'état : $u = Kx$ est l'existence des matrices P et K telles que :

$$(A + BK)^T P + P(A + BK) < 0 \quad (3.98)$$

$$P = P^T > 0. \quad (3.99)$$

Cette inégalité est bilinéaire en P et K mais à l'aide du changement de variables $P = W^{-1}$ et $K = RW^{-1}$ elle devient une LMI en R et W :

$$AW + WA^T + BR + R^T B^T < 0 \quad (3.100)$$

$$W = W^T > 0. \quad (3.101)$$

Pour plus de détail voir les différents travaux suivants [25][123][62][42][100].

3.4.5 Problèmes d'optimisation sous contraintes LMIs

Beaucoup de problèmes d'Automatique et particulièrement les problèmes de contrôle des systèmes peuvent se formuler comme des problèmes d'optimisation sous contraintes LMIs. Et plusieurs problèmes sont mieux écrits en termes d'une simple ou multiple fonction objectif avec un ensemble des contraintes LMIs, car les problèmes d'optimisation convexe apparaissent souvent en pratique. Ceci est la force de l'utilisation des formulations LMIs dans les applications réelles qui concernent les lois de commande des divers systèmes. Pour plus de détail voir les différents travaux suivants [137][55][64][120][27].

L'introduction des contraintes LMIs permet de définir un ensemble de problèmes d'optimisation suivants :

Programmation Semi Définie (SDP)

La programmation semi définie SDP appelé aussi problème d'optimisation LMI, est une généralisation de la programmation linéaire (LP), formulé comme suit :

$$\min (c^T x) \quad (3.102)$$

$$F(x) = F_0 + \sum_{i=1}^m x_i F_i > 0 \quad (3.103)$$

$x \in \mathbb{R}^m$: vecteur des variables de décision,

c^T : vecteur ligne donnée,

$F(x)$: contrainte LMI.

Problèmes des valeurs propres (Eigenvalue Problem EVP)

Un grand nombre de propriétés de commande peut être calculé comme un problème de valeur propre (EVP) qui est le problème de minimisation de la valeur propre maximale : λ_{\max} d'une matrice : $A(x) > 0$ qui dépend affinement de la variable x , soumise à une contrainte LMI $F(x) > 0$.

Plusieurs tests d'analyse de performance, tels que le calcul de la norme \mathcal{H}_∞ peuvent être écrits sous forme d'un problème des valeurs propres (EVP) avec contrainte LMI. On écrits la forme générale d'un problème des valeurs propres (EVP) comme suit.

$$\min \lambda, \quad (3.104)$$

$$\lambda I - A(x) > 0, \quad (3.105)$$

$$F(x) > 0. \quad (3.106)$$

Problèmes des valeurs propres généralisées (GEVP)

Le problème de valeur propre généralisée consiste à minimiser la plus grande valeur propre d'une paire de matrices $F(x)$ et $G(x)$ dépendant linéairement de la variable x , sous contraintes LMIs. Le problème GEVP est exprimé par :

$$\min \lambda, \quad (3.107)$$

$$\text{Tel que : } \lambda F(x) - G(x) > 0, \quad (3.108)$$

$$F(x) > 0 \text{ et } G(x) > 0. \quad (3.109)$$

$F(x), G(x)$ sont des matrices symétriques.

Minimisation du déterminant

Le problème de minimisation du déterminant est exprimé par :

$$\min \{ \log [\det (G^{-1}(x))] \}$$

$$\text{Tel que : } F(x) > 0 \text{ et } G(x) > 0,$$

où $F(x)$ et $G(x)$ sont des matrices symétriques et affines en x . Ces problèmes d'optimisation peuvent être résolus par différents types de méthodes :

- Méthode des points intérieurs (méthode des centres, méthode primale-duale, méthode projective de Nemirovskii),
- Méthode des plans sécants,
- Méthode de l'ellipsoïde,
- Méthode du type simplex.

3.4.6 Problème de commande Linéaire Quadratique (LQ)

On parle de commande linéaire quadratique : LQ ou LQR (linear quadratic regulator). Le système est linéaire et la commande est quadratique. Dans le cas d'un système linéaire à temps invariant LTI suivant :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t).$$

On écrit la loi de commande optimale à horizon infini ($t_f \text{ final} \rightarrow +\infty$) par retour d'état comme suivant : $u(t) = -Kx(t)$ où : $K = -R^{-1}B^T P$ avec les matrices : $R = R^T > 0$ et $P = P^T > 0$ vérifie l'équation algébrique de Riccati (ARE) suivante :

$$A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q = 0.$$

Q : est une matrice symétrique fixée et définie positives. Les équations algébriques de Riccati (ARE) sont fréquemment utilisées dans la commande optimale, un résultat nécessitant une ARE peut être remplacé par un résultat équivalent où l'égalité est remplacée par une inégalité. Plus précisément ces contrôleurs optimaux peuvent être construits en calculant une matrice P symétrique définie positive qui satisfait l'inégalité algébrique de Riccati (ARI) :

$$A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q < 0.$$

L'ARI est quadratique en P mais elle peut être exprimée comme une LMI en appliquant le lemme du complément de Schur(B.1.1) :

$$\begin{bmatrix} -A^T P - PA - Q & PB \\ B^T P & R \end{bmatrix} > 0.$$

Pour plus de détail sur le problème de commande Linéaire Quadratique (LQ) voir [4][73][14][72][89][88][129].

3.4.7 Problème de commande Quadratique Linéaire Gaussienne (LQG)

Le problème d'atténuation des perturbations est traité par les méthodes de la commande optimale où une certaine mesure de l'amplitude de la sortie est minimisée sous des hypothèses sur les perturbations. Une procédure standard connue sous le nom du problème de la commande LQG (quadratique linéaire Gaussienne) est souvent utilisée, où la somme des variances de sortie est minimisée sous des hypothèses que les perturbations sont caractérisées comme des processus stochastiques Soit le système LTI stable suivant :

$$G(s) : \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bw(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

où : w est un bruit blanc gaussien unitaire.

La commande LQG peut se mettre sous une forme particulière dite forme standard. Il s'agit alors de synthétiser un correcteur minimisant une norme \mathcal{H}_2 sur les signaux de transfert. La fonction du coût minimisé est donnée par :

$$J = \|G\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |G(j\omega)|^2 d\omega.$$

La norme \mathcal{H}_2 est une mesure de la moyenne du carré de gain pris sur toutes les fréquences. Voici la formulation LMI de la norme \mathcal{H}_2 : Soit la solution $P_0 = P_0^T \leq 0$ qui vérifiant l'équation de Lyapunov :

$$AP_0 + P_0A^T + BB^T = 0.$$

Alors toute matrice $P > P_0$ vérifiant :

$$AP + PA^T + BB^T < 0. \quad (3.110)$$

Le système $G(s)$ stable, vérifié : $\|G\|_2^2 < \gamma_2$ si et seulement s'il existe une matrice symétrique positive $P > 0$ vérifiant LMI (3.110) et :

$$\text{Tr}(CPC^T) < \gamma_2. \quad (3.111)$$

L'ensemble des inégalités (3.110) et (3.111) constitue un système LMI qui peut formuler le problème LQG (\mathcal{H}_2) comme suivant :

$$\begin{aligned} & \min \{ \text{Tr}(CPC^T) \} \\ & AP + PA^T + BB^T < 0. \end{aligned}$$

Pour plus de littérature sur le problème de commande Quadratique Linéaire Gaussienne (LQG) voir [149] [122][104].

3.4.8 Commande Prédictive Robuste

La commande prédictive du modèle est devenue la méthode la plus populaire des méthodes de conception des contrôleurs multivariables à cause de sa capacité de traiter les contraintes linéaires des processus variables. Les formulations de la commande prédictive en programmation standard linéaire et quadratique peuvent être écrites en termes des LMIs. Le principe de la commande prédictive du modèle est l'utilisation d'une fonction quadratique définie positive de l'état pour borner ou limiter la fonction objectif de performance. Elle est basée sur l'utilisation d'un modèle pour prédire par le comportement future du système sur un horizon du temps fini et puis utiliser le lemme du complément de Schur pour changer ces contraintes en une contrainte LMI. Pour plus de littérature se référer aux différents travaux suivants [142][121][80] [105].

3.4.9 Problème de Commande \mathcal{H}_∞

La synthèse \mathcal{H}_∞ est un problème d'atténuation de perturbation, il consiste à minimiser l'effet d'une perturbation $w(t)$ sur le comportement du système.

Soit $G(s)$ un système LTI représenté par les équations d'état

$$G(s) : \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + B_1w(t) + B_2u(t) \\ z(t) = C_1x(t) + D_{11}w(t) + D_{12}u(t) \\ y(t) = C_2x(t) + D_{21}w(t) \end{cases}$$

$x \in \mathbb{R}^n, w \in \mathbb{R}^{nw}, u \in \mathbb{R}^{nu}, z \in \mathbb{R}^{nz}, y \in \mathbb{R}^{ny}$ Les matrices $A, B_1, B_2, C_1, C_2, D_{11}, D_{12}$, et D_{21} sont de dimensions appropriées. L'objectif d'un problème de commande \mathcal{H}_∞ est de trouver un contrôleur $K(s)$ pour synthétiser une loi de commande qui stabilise le processus $G(s)$. Le contrôleur $K(s)$ défini par :

$$K(s) : \begin{cases} \dot{x}_K(t) = A_Kx_K(t) + B_Ky(t) \\ u(t) = C_Kx_K(t) + D_Ky(t) \end{cases}$$

avec $G(s)$ et $K(s)$ définis ci dessus, la boucle fermée $N(s)$ admet la réalisation

$$N(s) : \begin{cases} \dot{x}_d(t) = A_dx_d(t) + B_dw(t) \\ z(t) = C_dx_d(t) + D_dw(t). \end{cases}$$

Le but est celui de trouver des matrices A_K, B_K, C_K et D_K telles que la norme \mathcal{H}_∞ de la boucle fermée soit la plus petite possible, c'est à dire :

$$\gamma_{opt} = \text{Min } \gamma \quad (3.112)$$

$$\text{tel que : } \|N(s)\|_\infty < \gamma. \quad (3.113)$$

La résolution du problème \mathcal{H}_∞ par LMIs est fondée sur l'utilisation des lemmes suivants :

Lemme 3.4.1 (Valeur singulière maximale). *La valeur singulière maximale mesure le gain maximal d'un système multivariable, où les amplitudes des vecteurs d'entrée et de sortie sont quantifiées par la norme Euclidienne.*

La valeur singulière maximale d'une matrice A qui dépend d'une manière affine de x est dénotée par $\bar{\sigma}(A(x))$ qui est la racine carrée de la plus large valeur propre de : $A(x)A^T(x)$ L'inégalité $\bar{\sigma}(A(x)) < 1$ est une contrainte convexe non linéaire de x , elle peut être écrite comme une LMI utilisant le lemme du complément de Schur :

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}(A(x)) < 1 &\Leftrightarrow A(x)A^T(x) < I \\ &\Leftrightarrow I - A(x)A^T(x) > 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} I & A(x) \\ A^T(x) & I \end{bmatrix} > 0. \end{aligned}$$

Lemme 3.4.2 (systèmes réels bornés). *Le lemme des réels bornés peut être appliqué à la commande des systèmes linéaires et non linéaires, le résultat actuel est basé sur la représentation en variables d'état d'un système linéaire suivant :*

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, & x(0) = 0 \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

où : $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$, $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ et $D \in \mathbb{R}^{p \times p}$ sont données. Supposons que A est stable et que (A, B, C) est minimal. La fonction de transfert matricielle est :

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D.$$

La performance du pire cas d'un système mesurée en termes de l'intégrale des erreurs carrées de l'entrée et de la sortie est quantifiée par la norme \mathcal{H}_∞ :

$$\|G(s)\|_\infty = \sup_{\operatorname{Re}(s) > 0} \{\bar{\sigma}(G(s))\} = \sup_{\omega \in \mathcal{R}} \{\bar{\sigma}(G(j\omega))\}.$$

La norme \mathcal{H}_∞ peut être écrite en termes d'une LMI. Pour cela on emprunte un résultat de la littérature de la commande robuste que la norme $\|G(s)\|_\infty \leq \gamma$ si et seulement si la valeur singulière maximale de D inférieure ou égale γ : $D^T D < \gamma^2 I$ et qu'il existe $P = P^T > 0$ tel que :

$$(A^T P + PA + C^T C) + (PB + C^T D) (\gamma^2 I - D^T D) (B^T P + D^T C) < 0.$$

Le lemme du complément de Schur implique que cette inégalité algébrique de Riccati (ARI) est équivalente à l'existence de $P = P^T > 0$ tel que LMI suivante est valide.

$$\begin{bmatrix} A^T P + PA + C^T C & PB + C^T D \\ B^T P + D^T C & D^T D - \gamma^2 I \end{bmatrix} < 0.$$

Donc $N(s)$ est stable de manière interne et de norme $\mathcal{H}_\infty < \gamma$ si et seulement s'il existe une matrice symétrique $P > 0$ telle que :

$$\begin{pmatrix} A_{cl}^T P + PA_{cl} & PB_{cl} & C_{cl}^T \\ B_{cl}^T P & -\gamma & D_{cl}^T \\ C_{cl} & D_{cl} & -\gamma I \end{pmatrix} < 0.$$

Pour plus de littérature se référer aux différents travaux suivants [94][29][24].

3.5 Conclusion

Ce chapitre a été consacré d'une part au rappel de concept d'analyse de stabilité au sens de Lyapunov, de la théorie de conception d'observation et l'état d'art sur la conception d'estimateurs d'un système non linéaire (Observateurs de type Lipschitz, One sided Lipschitz, approche basée sur le théorème des accroissement finis). Il rappelle également la

méthode de « *Backstepping* » et l'observateur d'EDPs (l'équation de réaction-diffusion). D'autre part dans ce chapitre nous avons défini des inégalités matricielles linéaires et étudié quelques propriétés des problèmes dépendants des formulations en LMIs et quelques applications des LMIs : l'analyse de stabilité au sens de Lyapunov, problème de stabilité quadratique des systèmes incertains, stabilité des modèles Takagi-Sugeno , Problème de Stabilisation du système commandé. Nous terminons par quelques problèmes d'optimisation sous contraintes LMIs : Programmation Semi Définie, Problèmes des valeurs propres et problème de commande : problème de commande Linéaire Quadratique, problème de commande Quadratique Linéaire Gaussienne, Commande Prédictive Robuste, Problème de Commande \mathcal{H}_∞ .

Chapitre 4

Observateur d'état de l'équations Vlasov-Poisson

Sommaire

4.1 Synthèse d'observateur de VP	62
4.1.1 Transformation en LPV	62
4.1.2 Synthèse d'observateur \mathcal{H}_∞	68
4.2 Observateur d'état de l'équation de VP par la méthode de « Backstepping »	71
4.2.1 Structure d'observateur	73
4.2.2 Formulation du problème	74
4.3 Analyse de la convergence de l'erreur dynamique	75
4.3.1 La transformation de « Backstepping »	76
4.3.2 Solution du noyau de la transformation	77
4.3.3 Transformation inverse du « Backstepping »	78
4.3.4 Convergence de l'erreur dynamique de l'observateur	79
4.4 Résultats Numériques	79
4.5 Conclusion	82

Ce chapitre traite la synthèse d'observateur de l'équation de Vlasov-Poisson en dimension finie d'une part, en adoptant une approche basée sur l'utilisation du théorème des accroissements finis (DMVT). Il s'agit de transformer la dynamique de l'erreur d'estimation en un système à paramètres variables linéaires (LPV). Les techniques de calcul LPV permettent d'obtenir des conditions de stabilité sous forme d'inégalité matricielle linéaire (LMI). D'autre part il aborde la conception d'observateur d'état en dimension infinie de l'équation de Vlasov $1D \times 1D$ par la technique du « Backstepping ». Les résultats de ce chapitre sont publiés dans [32] [33].

4.1 Synthèse d'observateur de VP

L'observation de l'état d'un système non linéaire est un peu plus délicate et il n'existe pas de méthode universelle de synthèse d'observateur. Les approches possibles sont soit une extension des algorithmes linéaires, soit des algorithmes non linéaires spécifiques. Dans le premier cas, l'extension est basée sur une linéarisation du modèle autour d'un point de fonctionnement. Pour le cas des algorithmes non linéaires spécifiques, les nombreuses recherches menées sur ce sujet voir [98] [13]. Nous utiliserons la méthodes de transformation non linéaire. Cette technique utilise un changement de coordonnées pour transformer un système non linéaire en un système linéaire. Une fois qu'une telle transformation est effectuée, l'utilisation d'un observateur de type Luenberger sera suffisante pour estimer l'état du système transformé, et donc l'état du système d'origine en utilisant le changement de coordonnées inverse. voir [81] [82].

La méthode numérique de DG présentée au chapitre 2 permet d'obtenir un modèle en dimension finie écrit sous la forme d'une représentation d'état explicite du système de VP $1D \times 1D$. Nous obtenons :

$$\begin{cases} \mathbf{M}_h \dot{\mathbf{f}}_h = \mathbf{A}_h \mathbf{f}_h + \mathbf{G}_h(\mathbf{f}_h) \\ Y_h = \mathbf{C}_h \mathbf{f}_h \end{cases} \quad (4.1)$$

où la fonction $\mathbf{G}(\mathbf{f}_h)$ est définie en (2.8), et E_h est donné par (2.11). Les matrices \mathbf{M}_h et \mathbf{A}_h sont des matrices carrées diagonales symétriques (base lagrangienne). Les matrices \mathbf{M}_h et \mathbf{A}_h sont respectivement définie positive et non définie négative, voir [110]. $Y_h \in \mathbb{R}^p$ est le vecteur de sortie du système qui présente le nombre de capteurs placés sur une partie du bord de l'espace de phase $\partial\Omega$. $\mathbf{C}_h \in \mathcal{M}_{p,N}$ est la matrice de sortie, telle que $p \leq N$.

L'observation directe pour déterminer la fonction de distribution d'un tel vecteur d'état est assez coûteuse en temps de calcul. Il faut donc estimer le vecteur d'état du système (4.1) : c'est le rôle de l'observateur. L'objectif est de construire une fonction de distribution en utilisant les capteurs à la surface de l'espace des phases.

Considérons l'observateur de Luenberger associé au système (4.1) :

$$\mathbf{M}_h \dot{\tilde{\mathbf{f}}}_h = \mathbf{A}_h \tilde{\mathbf{f}}_h + \mathbf{G}(\tilde{\mathbf{f}}_h) + \mathbf{L}(Y_h - \mathbf{C}_h \tilde{\mathbf{f}}_h), \quad (4.2)$$

où $\tilde{\mathbf{f}}_h$ représente l'estimation de \mathbf{f}_h et la matrice de gain \mathbf{L} doit être construite de telle manière que l'erreur d'estimation $\mathbf{e}_r = \mathbf{f}_h - \tilde{\mathbf{f}}_h$ converge asymptotiquement vers zéro pour toute condition initiales $\tilde{\mathbf{f}}_h^0$. On définit la dynamique de l'erreur d'estimation par :

$$\mathbf{M}_h \dot{\mathbf{e}}_r = (\mathbf{A}_h - \mathbf{L}\mathbf{C}_h)\mathbf{e}_r + [\mathbf{G}(\mathbf{f}_h) - \mathbf{G}(\tilde{\mathbf{f}}_h)]. \quad (4.3)$$

Nous pouvons maintenant étudier la synthèse de l'observateur d'état du système (4.1).

4.1.1 Transformation en LPV

La matrice \mathbf{M}_h est symétrique et définie positive donc elle est inversible. L'équation (4.3) devient :

$$\dot{\mathbf{e}}_r = \mathbf{M}_h^{-1}(\mathbf{A}_h - \mathbf{L}\mathbf{C}_h)\mathbf{e}_r + \mathbf{M}_h^{-1}[\mathbf{G}(\mathbf{f}_h) - \mathbf{G}(\tilde{\mathbf{f}}_h)]. \quad (4.4)$$

Avant de procéder à la synthèse nous présenterons une proposition qui permet de linéariser l'équation de la dynamique d'erreur.

Proposition 4.1.1. *Soit $k > 0$ et soit $(E_h, f_h) \in C^1([0, T]; \Sigma_h^k \times \mathcal{Z}_h^k)$ l'approximation du problème de Vlasov. On suppose de plus que $(\varphi_h, \nabla_v^h \varphi_h) \in C^1(\mathcal{Z}_h^k)$. Alors \mathbf{G}_h est dérivable et $\frac{\partial \mathbf{G}_h(\mathbf{f}_h)}{\partial \mathbf{f}_h} \in L^\infty(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^N)$.*

Démonstration. Rappelons la forme de \mathbf{G}_h qui est la non linéarité de l'équation approchée de Vlasov. Elle s'explique par le fait que le champ électrique dépend de la fonction de distribution. Nous restons toujours dans le cas $1D \times 1D$. Soit \mathbf{G}_h définit par :

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_h(\mathbf{f}_h) &= \underbrace{\int_{\Omega} f_h E_h \cdot \nabla_v^h \varphi_h dv dx}_{(I)} \\ &+ \underbrace{\int_{T^v} \int_{\Gamma_x} \{v f_h\}_\alpha \cdot \llbracket \varphi_h \rrbracket ds_x dv}_{(II)} - \underbrace{\int_{T^x} \int_{\Gamma_v} \{E_h f_h\}_\beta \cdot \llbracket \varphi_h \rrbracket ds_v dx}_{(III)}. \end{aligned}$$

Commençons par la dérivée.

En (I) on peut constater que l'expression est un polynôme. En effet f_h est indépendant de l'intégrale. En plus de la forme E_h des expressions (2.10) et (2.12), nous pouvons en déduire qu'elle est du second degré. Donc (I) est dérivable.

En (II) et (III) nous pouvons constater la même chose en combinant les expressions (2.1) et (2.6). Les termes (II) et (III) sont des polynômes. Ils sont dérivables. Alors \mathbf{G}_h est dérivable et sa dérivée est $\frac{\partial \mathbf{G}_h(\mathbf{f}_h)}{\partial \mathbf{f}_h}$. On sait maintenant que \mathbf{G}_h est un polynôme au moins de degré 2, sa dérivée est aussi un polynôme. Elle est continue. D'après le théorème (B.4.1) de dérivabilité des intégrales à paramètre nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{G}_h(\mathbf{f}_h)}{\partial \mathbf{f}_h} &= \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial f_h} (f_h E_h \cdot \nabla_v^h \varphi_h) dv dx \\ &+ \int_{T^v} \int_{\Gamma_x} \frac{\partial}{\partial f_h} (\{v f_h\}_\alpha \cdot \llbracket \varphi_h \rrbracket) ds_x dv - \int_{T^x} \int_{\Gamma_v} \frac{\partial}{\partial f_h} (\{E_h f_h\}_\beta \cdot \llbracket \varphi_h \rrbracket) ds_v dx \\ &= \int_{\Omega} E_h \cdot \nabla_v^h \varphi_h dv dx + \int_{\Omega} f_h \frac{\partial E_h}{\partial f_h} \cdot \nabla_v^h \varphi_h dv dx + \int_{\Gamma_x} \{v\}_\alpha \cdot \llbracket \varphi_h \rrbracket ds_x dv \\ &- \int_{\Gamma_v} \{E_h\}_\beta \cdot \llbracket \varphi_h \rrbracket ds_v dx - \int_{T^x} \int_{\Gamma_v} \left\{ \frac{\partial E_h}{\partial f_h} f_h \right\}_\beta \cdot \llbracket \varphi_h \rrbracket ds_v dx. \end{aligned}$$

Il reste à démontrer que $\frac{\partial \mathbf{G}_h(\mathbf{f}_h)}{\partial \mathbf{f}_h} \in L^\infty(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^N)$. Nous obtenons

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial \mathbf{G}_h(\mathbf{f}_h)}{\partial \mathbf{f}_h} \right| &\leq \int_{\Omega} |E_h \cdot \nabla_v^h \varphi_h| dv dx + \int_{\Omega} \left| f_h \frac{\partial E_h}{\partial f_h} \cdot \nabla_v^h \varphi_h \right| dv dx \\ &+ \int_{T^v} \int_{\Gamma_x} |\{v\}_\alpha \cdot \llbracket \varphi_h \rrbracket| ds_x dv + \int_{T^x} \int_{\Gamma_v} |\{E_h\}_\beta \cdot \llbracket \varphi_h \rrbracket| ds_v dx \\ &+ \int_{T^x} \int_{\Gamma_v} \left| \left\{ \frac{\partial E_h}{\partial f_h} f_h \right\}_\beta \cdot \llbracket \varphi_h \rrbracket \right| ds_v dx. \end{aligned}$$

Nous savons d'après les espaces finis (2.2) que $(f_h, \varphi, \nabla_v^h) \in L^2(\Omega)$, et $E_h \in L^2(\Omega_x)$.

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz nous obtenons :

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial \mathbf{G}_h(\mathbf{f}_h)}{\partial \mathbf{f}_h} \right| &\leq \|E_h\|_{k, \Omega_x} \|\nabla_v^h \varphi_h\|_{k, \Omega} + \left\| \frac{\partial E_h}{\partial f_h} \right\|_{k, \Omega_x} \|f_h \cdot \nabla_v^h \varphi_h\|_{k, \Omega} \\ &+ \| |v \cdot \mathbf{n}| \llbracket \varphi_h \rrbracket \|_{\Gamma_v^0 \times \Omega_v} + \| |E_h \cdot \mathbf{n}| \llbracket \varphi_h \rrbracket \|_{\Gamma_v^0 \times \Omega_x} \\ &+ \left\| \left(\frac{\partial E_h}{\partial f_h} f_h \right) \cdot \mathbf{n} \right\|_{\Gamma_v^0 \times \Omega_x} \llbracket \varphi_h \rrbracket. \end{aligned}$$

D'où le résultat. \square

Nous venons de démontrer que \mathbf{G}_h est dérivable et sa dérivée est bornée. Alors elle satisfait les hypothèses suivantes :

$$\begin{aligned} \underline{b}_i &\leq \frac{\partial \mathbf{G}_h^i(\mathbf{f}_h)}{\partial \mathbf{f}_h^i} \leq \bar{b}_i \text{ avec } \underline{b}_i \leq \bar{b}_i \leq 0 \\ \frac{\partial \mathbf{G}_h^i(\mathbf{f}_h)}{\partial \mathbf{f}_h^j} &= 0, \quad \forall i, j \in [1, \dots, N] \text{ et } i \neq j, \end{aligned} \quad (4.5)$$

où \underline{b}_i et \bar{b}_i sont des nombres constants et N le nombre de composantes de \mathbf{G}_h . La fonction \mathbf{G}_h est donc Lipschitz. D'après le théorème DMVT dans [2] il existe $z \in Co(\mathbf{f}_h, \tilde{\mathbf{f}}_h)$ tel que

$$\mathbf{G}_h(\mathbf{f}_h) - \mathbf{G}_h(\tilde{\mathbf{f}}_h) = \Lambda(\eta) \mathbf{e}_r,$$

où

$$\Lambda(\eta) = \sum_{i,j=1}^N \mathbf{G}_h^{ij} H_h^{ij} \text{ et } \mathbf{G}_h^{ij} = \frac{\partial \mathbf{G}_h^i(z)}{\partial \mathbf{f}_h^j} \quad (4.6)$$

$$H_h^{ij} = e_N(i) e_N^T(j), \quad \eta = (\mathbf{G}_h^{11}, \mathbf{G}_h^{22}, \dots, \mathbf{G}_h^{NN}).$$

On redéfinit $e_N(i)$ par : $e_N(i) = \underbrace{(0, \dots, 0, \overbrace{1}^{\text{ième}}, 0, \dots, 0)^T}_{N \text{ composantes}}, i \in \{1, \dots, N\}$.

D'après l'hypothèse (4.5) le paramètre η appartient à un domaine convexe

$$\varpi_N = \{\eta \mid \mathbf{G}_{ii} \in \{\underline{b}_i, \bar{b}_i\} \forall i = \{1, \dots, N\}\}.$$

La matrice jacobienne Λ est diagonale et semi-négative. La dynamique de l'erreur d'estimation (4.3) devient :

$$\mathbf{M}_h \dot{\mathbf{e}}_r = (\mathbf{A}_h + \Lambda(\eta) - \mathbf{L} \mathbf{C}_h) \mathbf{e}_r. \quad (4.7)$$

Nous allons présenter un résultat suffisant de stabilité asymptotique de l'observateur.

Théorème 4.1.1. *Soit une matrice de gain \mathbf{L} de taille appropriée telle que*

$$(\mathbf{A}_h + \Lambda(\eta))^T + (\mathbf{A}_h + \Lambda(\eta)) - \mathbf{C}_h^T \mathbf{L}^T - \mathbf{L} \mathbf{C}_h < 0, \quad \eta \in \varpi_N \quad (4.8)$$

alors l'observateur (4.2) est asymptotiquement stable.

Démonstration. On considère la fonction de Lyapunov suivante :

$$V(\mathbf{e}_r) = \mathbf{e}_r^T \mathbf{M}_h \mathbf{e}_r > 0.$$

Par dérivation de la fonction de Lyapunov le long de la trajectoire de (4.5), on obtient

$$\dot{V}(\mathbf{e}_r) = \mathbf{e}_r^T \Psi(\eta) \mathbf{e}_r,$$

où

$$\Psi(\eta) = (\mathbf{A}_h + \Lambda(\eta) - \mathbf{L}\mathbf{C}_h)^T + (\mathbf{A}_h + \Lambda(\eta) - \mathbf{L}\mathbf{C}_h).$$

La fonction $\dot{V} < 0$ pour tout $\eta \neq 0$ ssi

$$\Psi(\eta) < 0 \quad \forall \eta \in \varpi_N. \quad (4.9)$$

D'après le principe de convexité [118], l'inégalité (4.9) est satisfaite si et seulement si la LMI (4.8) est satisfaite pour tout $\eta \in \varpi_N$, cela signifie qu'il existe un gain d'observation \mathbf{L} tel que $\dot{V} < 0 \quad \forall \mathbf{e}_r \neq 0$. \square

Proposition 4.1.2. *Soit la matrice \mathbf{L} telle que la LMI suivante soit vérifiée :*

$$\mathbf{A}_h^T + \mathbf{A}_h - \mathbf{C}_h^T \mathbf{L}^T - \mathbf{L}\mathbf{C}_h < 0 \quad (4.10)$$

alors le gain d'observation \mathbf{L} satisfait (4.8).

Démonstration. La matrice Jacobienne Λ est définie semi-négative, en plus de l'hypothèse (4.10) on obtient que le gain \mathbf{L} vérifie (4.8). \square

Dans la suite nous allons présenter un résultat assurant la convergence exponentielle de l'erreur d'estimation. Pour cela, nous considérons le gain de l'observateur

$$\mathbf{L} = \beta \mathbf{C}_h^T, \quad \text{avec } \beta \in [0, \lambda_m] \quad (4.11)$$

tel que la condition (4.8) soit vérifiée. Définissons $\lambda_m > 0$, représentant la plus petite valeur propre de la matrice définie positive $-\mathbf{A}_h$.

Théorème 4.1.2. *L'observateur (4.2) converge exponentiellement et de plus il existe une matrice de gain $\mathbf{L} \neq 0$ qui satisfait la condition (4.8) et garantit une convergence plus rapide de l'observateur en boucle fermée par rapport à celui ouvert $\mathbf{L} = 0$.*

Démonstration. Considérons la fonction de Lyapunov suivante

$$V(\mathbf{e}_r) = \mathbf{e}_r^T \mathbf{M}_h \mathbf{e}_r > 0,$$

alors, la dérivée de la fonction V vérifie

$$\dot{V}(\mathbf{e}_r) \leq \mathbf{e}_r^T [(\mathbf{A}_h - \mathbf{L}\mathbf{C}_h)^T + (\mathbf{A}_h - \mathbf{L}\mathbf{C}_h)] \mathbf{e}_r$$

$$\dot{V}(\mathbf{e}_r) \leq 2\mathbf{e}_r^T [\mathbf{A}_h - \mathbf{L}\mathbf{C}_h] \mathbf{e}_r.$$

Prenons $L = \beta \mathbf{C}_h^T$ définie en (4.11), de plus nous avons $\beta \mathbf{e}_r^T \mathcal{I} \mathbf{e}_r > 0$ avec $\mathcal{I} = \mathbf{C}_h^T \mathbf{C}_h$. On en déduit que :

$$\mathbf{e}_r^T [\mathbf{A}_h - \beta \mathbf{C}_h^T \mathbf{C}_h] \mathbf{e}_r < \mathbf{e}_r^T \mathbf{A}_h \mathbf{e}_r$$

alors il existe un gain $\mathbf{L} \neq 0$ tel que

$$\dot{V}(\mathbf{e}_r) \leq \lambda_m^* V(\mathbf{e}_r).$$

avec λ_m^* la plus grande valeur propre de $\mathbf{A}_h - \beta \mathbf{C}_h^T \mathbf{C}_h$ et $\lambda_m^* < -\lambda_m$.

Donc l'observateur en boucle fermée garantit une convergence plus rapide par rapport à celle en boucle ouverte. \square

Exemples numériques

Nous procédons à l'illustration de la synthèse de cet observateur, en appliquant le même cas de test : l'amortissement de Landau linéaire. Les principes de validation, consistent à comparer le comportement des codes avec les propriétés mathématiques connues des équations et du chapitre 2. On s'assurera que les propriétés de conservation du schéma sont vérifiées. Nous prendrons la matrice de gain globale définie en (4.11) avec $\beta = \lambda_m/2$ c'est à dire $\mathbf{L} = \lambda_m/2 \mathbf{C}_h^T$.

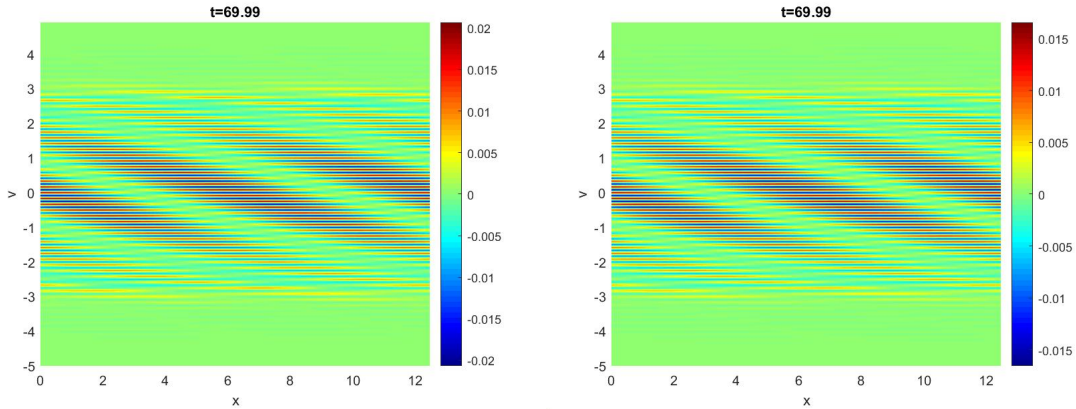


FIGURE 4.1 – A gauche l'approximation de la fonction de distribution f_h et à droite celle de l'observateur \tilde{f}_h sur un maillage $(N_x, N_v) = (120, 120)$ sur l'espace des phases $\Omega = \Omega_x \times \Omega_v$.

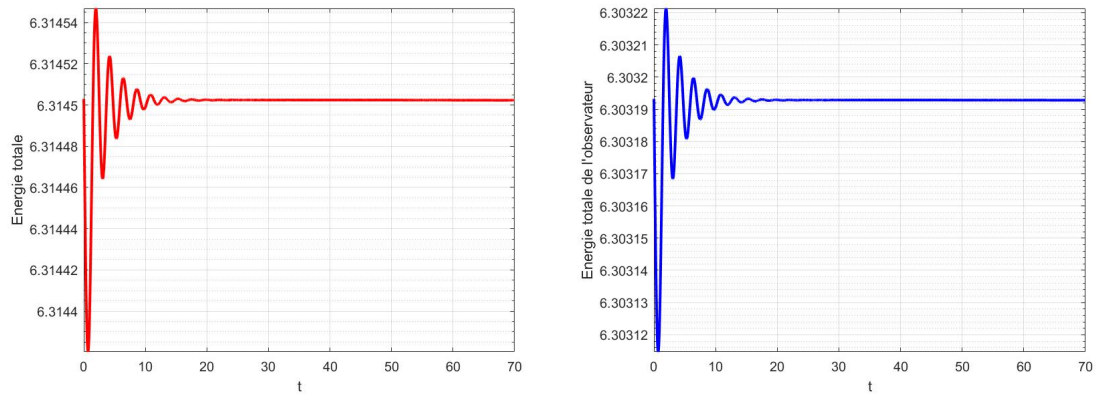


FIGURE 4.2 – L'évolution temporelle de l'énergie totale de f_h à gauche et celle de l'observateur \tilde{f}_h à droite sur un maillage (120×120) à $T = 70$.

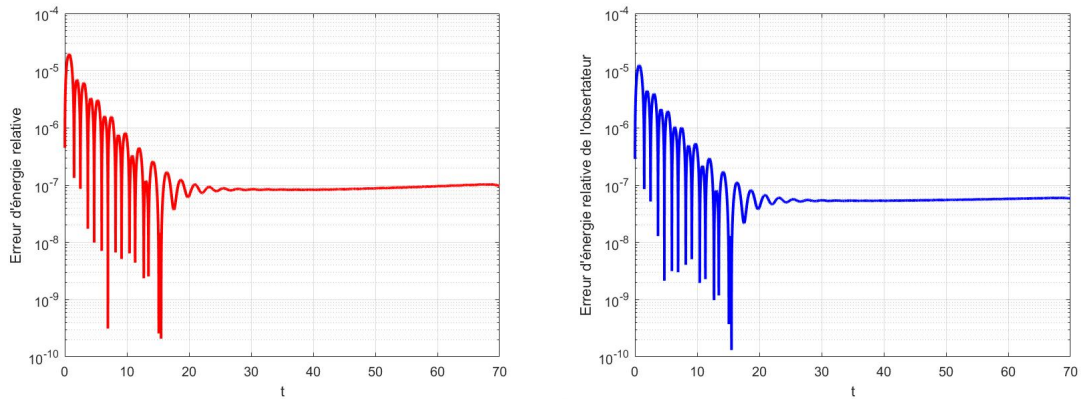


FIGURE 4.3 – À gauche l'évolution temporelle de l'erreur relative de l'énergie totale f_h , à droite celle de l'observateur \tilde{f}_h sur un maillage (120×120) à $T = 70$.

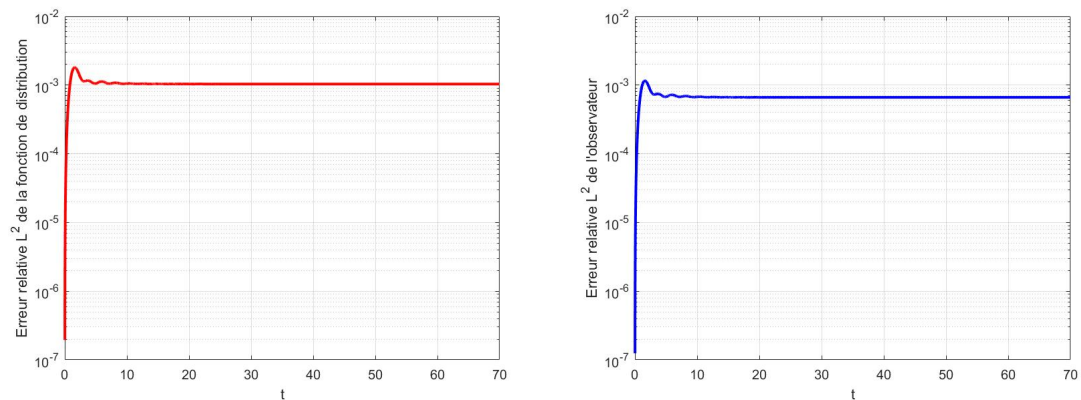


FIGURE 4.4 – À gauche l'erreur relative de conservation L^2 de f_h et droite celle de \tilde{f}_h sur un maillage (120×120) .

4.1.2 Synthèse d'observateur \mathcal{H}_∞

Cette section étend les résultats de la synthèse basée sur l'observateur au cas de systèmes avec du bruit dans la dynamique et la sortie du système. Le système est donné par :

$$\begin{cases} \mathbf{M}_h \dot{\mathbf{f}}_h = \mathbf{A}_h \mathbf{f}_h + \mathbf{G}_h(\mathbf{f}_h) + \mathcal{W}_1 w \\ Y_h = \mathbf{C}_h \mathbf{f}_h + \mathcal{W}_2 w \end{cases} \quad (4.12)$$

où \mathcal{W}_1 et \mathcal{W}_2 sont des matrices constantes de taille appropriée et $w \in L^2(\mathbb{R}^s)$ est le vecteur de perturbation borné. Soit l'observateur suivant :

$$\mathbf{M}_h \dot{\tilde{\mathbf{f}}}_h = \mathbf{A}_h \tilde{\mathbf{f}}_h + \mathbf{G}_h(\tilde{\mathbf{f}}_h) + \mathcal{W}_2 w + \mathbf{L}(Y_h - \mathbf{C}_h \tilde{\mathbf{f}}_h). \quad (4.13)$$

La dynamique de l'erreur de l'observateur d'état $\mathbf{e}_r = \mathbf{f}_h - \tilde{\mathbf{f}}_h$ est donné par

$$\mathbf{M}_h \dot{\mathbf{e}}_r = (\mathbf{A}_h + \Lambda(\eta) - \mathbf{L}\mathbf{C}_h)\mathbf{e}_r + (\mathcal{W}_1 - \mathbf{L}\mathcal{W}_2)w.$$

Le problème de conception d'observateur \mathcal{H}_∞ robuste consiste à déterminer la matrice \mathbf{L} telle que l'erreur d'estimation converge asymptotiquement vers zéro, i.e,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{e}_r = 0 \text{ pour } w(t) = 0 \quad (4.14)$$

$$\|\mathbf{e}_r(t)\|_{L^2} \leq \lambda \|w(t)\|_{L^2} \text{ pour } w(t) \neq 0 \text{ et } \mathbf{e}_r(0) = 0 \quad (4.15)$$

avec $\lambda > 0$ un niveau d'atténuation de perturbation scalaire prescrit. Cependant, pour satisfaire (4.14) et (4.15), il suffit de trouver une fonction de Lyapunov V telle que

$$\dot{V} + \mathbf{e}_r^T \mathbf{e}_r - \lambda w^T w < 0. \quad (4.16)$$

Il restera alors à démontrer l'implication de (4.16) sur (4.14) et (4.15).

- Pour $w = 0$, si (4.16) est vérifié, alors $\dot{V} < 0$. Ainsi, de la théorie de Lyapunov, nous déduisons que l'erreur d'estimation converge asymptotiquement vers zéro, ce qui implique (4.14).
- Si $w \neq 0$ et $\mathbf{e}_r(0) = 0$, alors (4.16) implique que

$$V(\mathbf{e}_r(t)) + \int_0^t \mathbf{e}_r^T(s)\mathbf{e}_r(s)ds - \lambda^2 \int_0^t w^T(s)w(s)ds < 0. \quad (4.17)$$

Nous savons que $V(\mathbf{e}_r) \geq 0$, pour tous $t \geq 0$, alors pour $t \rightarrow \infty$ nous obtenons

$$\int_0^\infty \mathbf{e}_r^T(s)\mathbf{e}_r(s)ds \leq \lambda^2 \int_0^\infty w^T(s)w(s)ds, \quad (4.18)$$

par conséquent (4.15).

Théorème 4.1.3. *Soit $\lambda > 0$, le problème de conception d'observateur \mathcal{H}_∞ correspondant au système (4.12). L'observateur (4.13) est solvable s'il existe une matrice de gain \mathbf{L} de dimension appropriée telle que la LMI suivante est satisfaite :*

$$\text{Bloc} - \text{Diag}(\Gamma(\eta_1, \lambda), \Gamma(\eta_2, \lambda), \dots, \Gamma(\eta_{2N}, \lambda)) < 0, \quad (4.19)$$

$$\eta_i \in \varpi_N, \forall i \in 1, \dots, 2^N,$$

avec

$$\Gamma(\eta, \lambda) = \begin{bmatrix} (\mathbf{A}_h + \Lambda(\eta) - \mathbf{L}\mathbf{C}_h)^T + \mathbf{A}_h + \Lambda(\eta) - \mathbf{L}\mathbf{C}_h + \mathbf{I} & \mathcal{W}_1 - \mathbf{L}\mathcal{W}_2 \\ (\mathcal{W}_1 - \mathbf{L}\mathcal{W}_2)^T & -\lambda^2\mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

Démonstration. Considérons la fonction de Lyapunov suivante :

$$V(\mathbf{e}_r) = \mathbf{e}_r^T \mathbf{M}_h \mathbf{e}_r,$$

par conséquent,

$$\begin{aligned} & \dot{V}(\mathbf{e}_r(t)) + \mathbf{e}_r^T \mathbf{e}_r - \lambda^2 w^T w \\ = & \begin{bmatrix} \mathbf{e}_r \\ w \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} (\mathbf{A}_h + \Lambda(\eta) - \mathbf{L}\mathbf{C}_h)^T + \mathbf{A}_h + \Lambda(\eta) - \mathbf{L}\mathbf{C}_h + \mathbf{I} & (\mathcal{W}_1 - \mathbf{L}\mathcal{W}_2) \\ (\mathcal{W}_1 - \mathbf{L}\mathcal{W}_2)^T & -\lambda^2\mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_r \\ w \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.21)$$

Alors,

$$\dot{V}(\mathbf{e}_r(t)) + \mathbf{e}_r^T \mathbf{e}_r - \lambda^2 w^T(t)w(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_r \\ w(t) \end{bmatrix}^T \Gamma(\eta, \lambda) \begin{bmatrix} \mathbf{e}_r \\ w(t) \end{bmatrix},$$

où $\Gamma(\eta, \lambda)$ est donné par (4.20), qui est identique à (4.19). Sous la condition (4.19), l'erreur de l'observateur d'état converge asymptotiquement vers zéro. \square

Proposition 4.1.3. *Soit $\lambda > 0$. S'il existe un gain d'injection de sortie \mathbf{L} de dimension appropriée telle que la condition de la LMI suivante soit vérifiée :*

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_h^T - \mathbf{C}_h^T \mathbf{L}^T + \mathbf{A}_h - \mathbf{L}\mathbf{C}_h + \mathbf{I} & \mathcal{W}_1 - \mathbf{L}\mathcal{W}_2 \\ (\mathcal{W}_1 - \mathbf{L}\mathcal{W}_2)^T & -\lambda^2\mathbf{I} \end{bmatrix} < 0, \quad (4.22)$$

la matrice de gain \mathbf{L} vérifie (4.19).

Démonstration. Soit $\lambda > 0$. si \mathbf{L} satisfait

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_h^T - \mathbf{C}_h^T \mathbf{L}^T + \mathbf{A}_h - \mathbf{L}\mathbf{C}_h + \mathbf{I} & \mathcal{W}_1 - \mathbf{L}\mathcal{W}_2 \\ (\mathcal{W}_1 - \mathbf{L}\mathcal{W}_2)^T & -\lambda^2\mathbf{I} \end{bmatrix} < 0,$$

on peut conclure en utilisant le lemme du complément de Schur(B.1.1) et la structure de la matrice jacobienne Λ que \mathbf{L} vérifie (4.19). \square

Exemples numériques

Pour illustrer numériquement l'observateur au cas \mathcal{H}_∞ , nous considérons le même cas de test de Landau linéaire avec les paramètres de l'exemple précédant. Les principes de validation demeurent les mêmes, à comparer le comportement des codes avec les propriétés mathématiques connues. On s'assurera que les propriétés de conservation du schéma sont vérifiées. Nous prenons une petite perturbation la même que celle du test de Landau c'est à $w = \pm 0.05 \tilde{\mathbf{f}}_h(t)$ avec les matrices

$$\mathcal{W}_1 = \begin{bmatrix} \mathcal{W}_1^* \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad \mathcal{W}_1^* \in \mathcal{M}_{2n,N}(\mathbb{R}) \quad (4.23)$$

$$\mathcal{W}_1^* = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{où } \mathbf{I} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R}),$$

et

$$\mathcal{W}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{p,N}(\mathbb{R}), \quad \text{où } \mathbf{I} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R}). \quad (4.24)$$

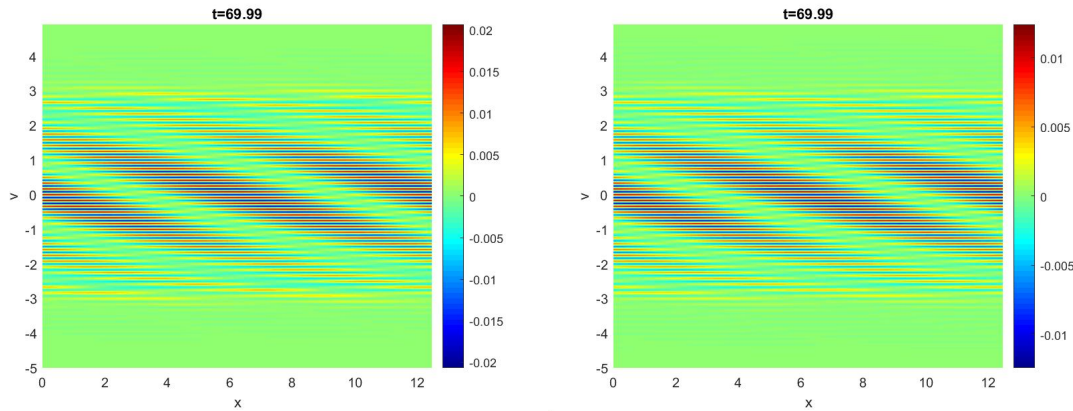


FIGURE 4.5 – A gauche l'approximation de la fonction de distribution f_h et à droite celle de l'observateur $\hat{\mathbf{f}}_h$ sur un maillage $(N_x, N_y) = (120, 120)$ sur l'espace des phases $\Omega = \Omega_x \times \Omega_y$ cas \mathcal{H}_∞ .

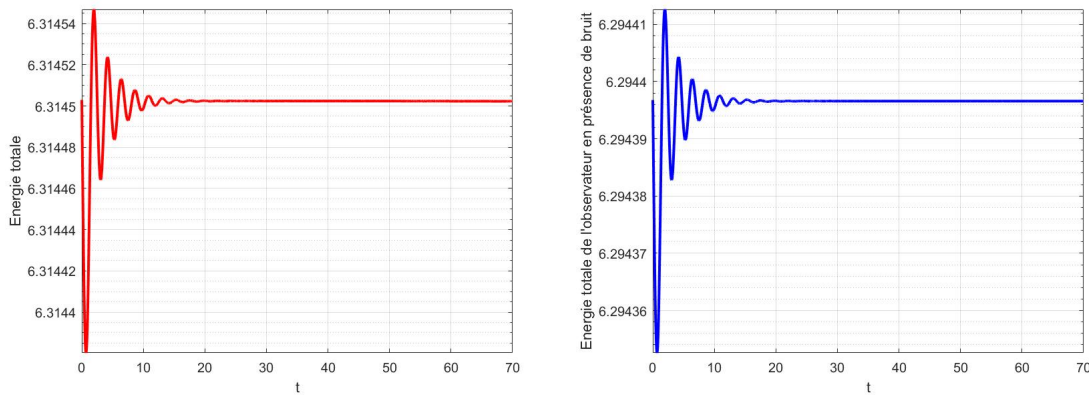


FIGURE 4.6 – L'évolution temporelle de l'énergie totale de f_h à gauche et celle de l'observateur $\hat{\mathbf{f}}_h$ à droite sur un maillage (120×120) à $T = 70$ cas \mathcal{H}_∞ .

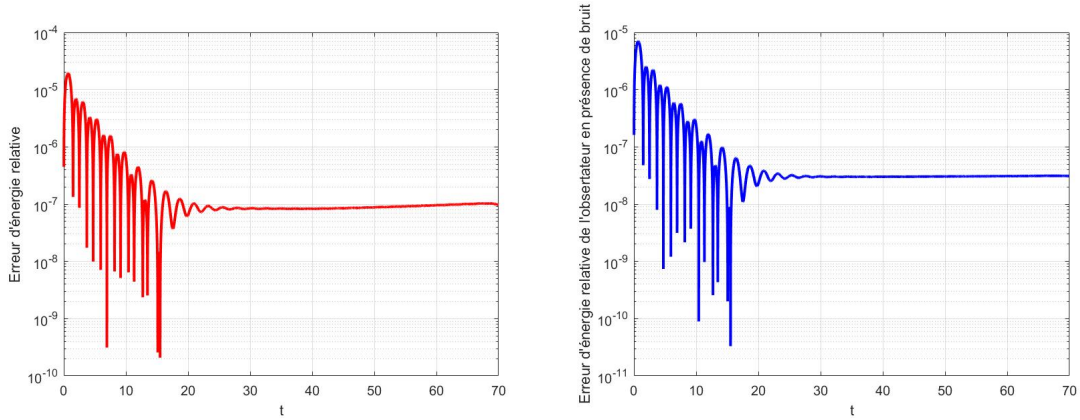


FIGURE 4.7 – A gauche l'évolution temporelle de l'erreur relative de l'énergie totale f_h , à droite celle de l'observateur $\tilde{\mathbf{f}}_h$ sur un maillage (120×120) à $T = 70$ cas \mathcal{H}_∞ .

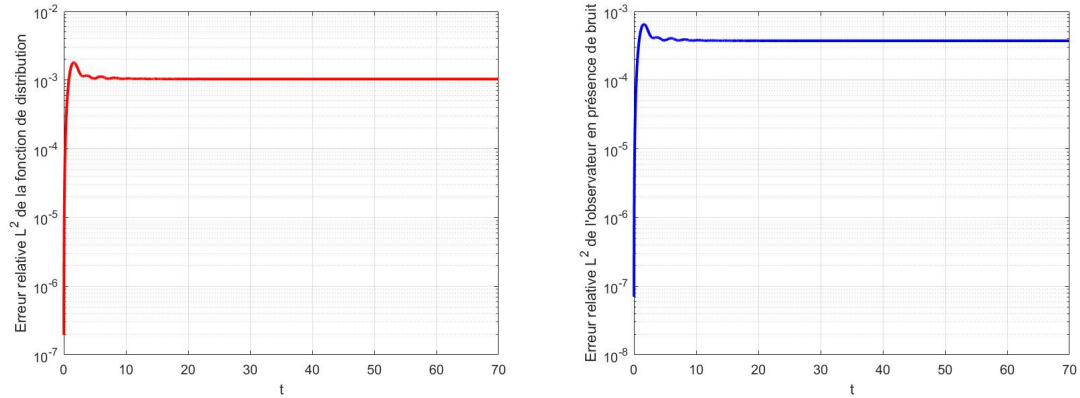


FIGURE 4.8 – A gauche l'erreur relative de conservation L^2 de f_h et droite celle de $\tilde{\mathbf{f}}_h$ sur un maillage (120×120) cas \mathcal{H}_∞ .

Nous allons à présent aborder le cas continu d'observateur de l'équation de Vlasov par la méthode de Backstepping définie au chapitre 3.

4.2 Observateur d'état de l'équation de VP par la méthode de « Backstepping »

La conception d'observateurs d'équations aux dérivées partielles reste encore une tâche très difficile, le cas du système de Vlasov encore plus. Il n'existe pratiquement pas de littérature sur ce domaine. Par ailleurs Il existe des résultats intéressants qui relèvent de la méthode de « Backstepping » d'autre système d'EDP. En effet, l'estimation d'état basée sur le backstepping pour une classe d'EDP paraboliques dans des études de domaines

spatiaux unidimensionnels et tridimensionnels a été développée dans les travaux de Jodachowski et al [74] [75], et son implémentation dans [76]. Dans le même ordre d'idées, on peut citer les travaux intéressants de Smyshlyaev et al [124] qui traite plusieurs systèmes physiques de type parabolique. Observateurs de second ordre pour les systèmes à paramètres distribués de second ordre dans \mathbb{R}^2 est étudié par Nguyen in [101]. Observateurs naturels du second ordre pour les systèmes de paramètres distribués du second ordre est traité par Demetriou in [41], l'analyse de convergence de Balas in [15]. Observateur de limite pour la stabilisation de la rétroaction de sortie par Vazquez et al in [138]. L'observateur de type Luenberger par Meurer dans [96] et Zeitz (le cas ODE) dans [144], Contrôle « *Backstepping* » et estimation d'état dans [97] et [139].

Nous proposons une approche basée sur le « *Backstepping* » pour l'estimation d'état du système de Vlasov-Poisson en temps continu. La sortie du système est restreinte à la condition à la limite $x = 0$. Les gains des observateurs peuvent être déduits de la technique du « *Backstepping* » où les équations du noyau sont résolues par les intégrales premières du système différentiel ordinaire.

Rappelons l'équation de Vlasov-Poisson $1D \times 1D$:

$$\frac{\partial f(t, x, v)}{\partial t} + v \frac{\partial f(t, x, v)}{\partial x} - \frac{\partial \phi(t, x)}{\partial x} \frac{\partial f(t, x, v)}{\partial v} = 0, \quad (4.25)$$

Dans la suite, nous prendrons $x \in \Omega_x = [0, L]$, $t \in \Omega_T = [0, T]$, $v \in \Omega_v = [-V_c, V_c]$ avec $V_c > 0$.

Afin de décrire le mouvement des particules chargées dans les plasmas, nous devons calculer le champ de force à partir de la densité macroscopique des particules

$$\rho(t, x) = \int_{\Omega_v} f(t, x, v) dv. \quad (4.26)$$

Nous calculons le champ de force à partir de l'équation de Poisson,

$$-\frac{\partial^2 \phi(t, x)}{\partial x^2} = \rho(t, x) - 1, \quad (t, x) \in \Omega_T \times \Omega_x, \quad (4.27)$$

avec une donnée initiale positive,

$$f(t_0, x, v) = f_0(x, v), \quad (x, v) \in \Omega_x \times \Omega_v. \quad (4.28)$$

Nous imposons des conditions aux limites périodiques en x :

$$\phi(t, 0) = \phi(t, L), \quad \phi_x(t, 0) = \phi_x(t, L) \quad (4.29)$$

et

$$f(t, 0, v) = f(t, L, v) = q(t, v), \quad (t, v) \in \Omega_T \times \Omega_v. \quad (4.30)$$

où la sortie du système est limitée à $x = 0$, ceci est dû au fait que le capteur est placé au début de la membrane. Nous avons :

$$y(t, v) = f(t, 0, v) = q(t, v), \quad (t, v) \in \Omega_T \times \Omega_v. \quad (4.31)$$

La périodicité de la fonction $q(t, v) \neq 0$ garantit l'observabilité du système (4.25)-(4.30).

4.2.1 Structure d'observateur

Considérons l'observateur d'état de Luenberger de l'équation de Vlasov suivant

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial t}(t, x, v) = -v \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(t, x, v) + \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial x}(t, x) \frac{\partial \tilde{f}}{\partial v}(t, x, v) + l(t, x, v)(y - \tilde{y}). \quad (4.32)$$

Nous avons les conditions aux limites périodiques en x

$$\tilde{f}(t, 0, v) = q(t, v) + l_0(t, v)(y - \tilde{y}), \quad (v, t) \in \Omega_v \times \Omega_T, \quad (4.33)$$

$$\tilde{f}(t, L, v) = q(t, v), \quad (v, t) \in \Omega_T \times \Omega_v, \quad (4.34)$$

et la condition initiale

$$\tilde{f}(t_0, x, v) = \tilde{f}_0(x, v), \quad (x, v) \in \Omega_x \times \Omega_v. \quad (4.35)$$

Les fonctions $l(t, x, v)$ et $l_0(t, v)$ désignent les gains de l'observateur à déterminer.

Nous définissons l'erreur dynamique d'observateur de l'équation de Vlasov

$$\mathbf{e}_r(t, x, v) = f(t, x, v) - \tilde{f}(t, x, v). \quad (4.36)$$

La dynamique d'erreur (4.36) d'observateur satisfait le système (4.25)-(4.30)

$$\frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial t}(t, x, v) = -v \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial v} - \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial x} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial v} - l(t, x, v)(y - \tilde{y}). \quad (4.37)$$

Avec les conditions aux limites

$$\mathbf{e}_r(t, 0, v) = -l_0(y - \tilde{y}), \quad (4.38)$$

$$\mathbf{e}_r(t, L, v) = 0 \quad (4.39)$$

et la donnée initiale

$$\mathbf{e}_r(t_0, x, v) = \mathbf{e}_r^0(x, v), \quad (x, v) \in \Omega_x \times \Omega_v \quad (4.40)$$

où $\tilde{\phi}_x$ est donnée par l'équation de Poisson

$$-\tilde{\phi}_{xx} = \tilde{\rho}(t, x) - 1, \quad (t, x) \in \Omega_T \times \Omega_x, \quad (4.41)$$

ou

$$-\tilde{E}_x(t, x) = \int_{\Omega_v} \tilde{f}(t, x, v) dv - 1, \quad (t, x) \in \Omega_T \times \Omega_x, \quad (4.42)$$

et la condition aux limites :

$$\tilde{\phi}(t, 0) = \tilde{\phi}(t, L), \quad \tilde{\phi}_x(t, 0) = \tilde{\phi}_x(t, L). \quad (4.43)$$

Le champ électrostatique est calculé de manière explicite alors on peut considérer sans ambiguïté que :

$$\frac{\partial \phi}{\partial x}(t, x) = \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial x}(t, x).$$

La dynamique d'erreur (4.37) devient

$$\frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial t}(t, x, v) = -v \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial v} - l(t, x, v)(y - \tilde{y}). \quad (4.44)$$

Nous pouvons maintenant présenter la méthode de Backstetepping du système de Vlasov.

4.2.2 Formulation du problème

Pour appliquer la méthode Backstepping, nous allons commencer par définir un système cible de l'erreur dynamique. Le choix de ce système doit être fait de telle manière que les conditions aux limites par la transformation de l'intégrale de Volterra (4.57) soient vérifiées. Il doit aussi garantir l'existence de l'intégrale.

Considérons maintenant le système linéaire suivant comme notre système cible :

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{e}}_r}{\partial t}(t, x, v) = -v \frac{\partial \tilde{\mathbf{e}}_r}{\partial x}(t, x, v) + x \frac{\partial \tilde{\mathbf{e}}_r}{\partial v}(t, x, v). \quad (4.45)$$

Avec les conditions aux limites

$$\tilde{\mathbf{e}}_r(t, 0, v) \neq 0, \quad (4.46)$$

$$\tilde{\mathbf{e}}_r(t, L, v) = 0 \quad (4.47)$$

et condition initiale

$$\tilde{\mathbf{e}}_r(t_0, x, v) = \tilde{\mathbf{e}}_r^0(x, v), \quad (x, v) \in \Omega_x \times \Omega_v. \quad (4.48)$$

Le système(4.45)-(4.48) est un système de transport nous pouvons alors chercher sa solution générale. Nous appliquons la méthode des caractéristiques. On compose un système d'équations différentielles ordinaires sous forme symétrique :

$$dt = \frac{dx}{v} = \frac{dv}{-x} \quad (4.49)$$

et trouver les deux premières intégrales convenables. Nous avons

$$dt = \frac{dx}{v} \iff v dt = dx \iff vt = x + C_1, \text{ avec } C_1 \in \mathbb{R} \quad (4.50)$$

où

$$vt - x = C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R}; \quad (4.51)$$

$$\frac{dx}{v} = \frac{dv}{-x} \iff \beta x dx = -v dv \iff \frac{x^2}{2} = -\frac{v^2}{2} + \bar{C}_2 \quad (4.52)$$

où

$$x^2 + v^2 = C_2, \quad C_2 \in \mathbb{R}. \quad (4.53)$$

Par conséquent, les deux premières intégrales indépendantes sont

$$\psi_1(t, x, v) = vt - x = C_1, \quad \psi_2(t, x, v) = x^2 + v^2 = C_2 \quad (4.54)$$

et donc la solution générale de l'équation est :

$$\tilde{\mathbf{e}}_r = \Theta (vt - x, x^2 + v^2), \quad (4.55)$$

où Θ est une fonction continûment différentiable. Pour mieux comprendre la nature de Θ , vous pouvez compléter votre lecture à l'annexe (C).

Nous allons dans cette section étudier la stabilité asymptotique du système des équations de Vlasov-Poisson. Nous nous assurerons d'abord de la stabilité de l'erreur dynamique du système d'équation du cible (4.45)-(4.48) par une condition suffisante.

4.3 Analyse de la convergence de l'erreur dynamique

Avant d'introduire l'intégral de Volterra et de procéder aux différentes transformations de « *backstepping* », nous allons commencer par étudier la stabilité du système d'équation cible. Le lemme suivant nous donne une condition suffisante de la stabilité asymptotique de l'erreur dynamique du système linéaire (4.45)-(4.48).

Lemme 4.3.1. *Le système des équations de transport (4.45)-(4.48) est exponentiellement stable en norme L^2 , s'il existe une fonction α de classe C^1 telle que $\left(\frac{\partial \tilde{\mathbf{e}}_r}{\partial \mathbf{v}}\right)^2 \leq \alpha(\tilde{\mathbf{e}}_r)^2$ et de plus*

$$\left(2V_c - \frac{\gamma L^2}{2} - \frac{\sup_{\Omega} |\alpha(t, \mathbf{x}, \mathbf{v})|}{2\gamma}\right) > 0$$

avec $V_c, \gamma > 0$ où γ est un paramètre issu de l'inégalité de Young (B.1.3).

Démonstration. Let the Lyapunov function, $V = \frac{1}{2} \|\tilde{\mathbf{e}}_r\|_{L^2}^2$

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \frac{dV}{dt} = \int_{\Omega} \tilde{\mathbf{e}}_r \frac{\partial \tilde{\mathbf{e}}_r}{\partial t} d\Omega \\ &= - \int_{\Omega} \mathbf{v} \tilde{\mathbf{e}}_r \frac{\partial \tilde{\mathbf{e}}_r}{\partial \mathbf{x}} d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{x} \tilde{\mathbf{e}}_r \frac{\partial \tilde{\mathbf{e}}_r}{\partial \mathbf{v}} d\Omega \\ &= - \underbrace{\int_{\Omega} \frac{\mathbf{v}}{2} \frac{\partial \tilde{\mathbf{e}}_r^2}{\partial \mathbf{x}} d\Omega}_{(*)} + \underbrace{\int_{\Omega} \mathbf{x} \tilde{\mathbf{e}}_r \frac{\partial \tilde{\mathbf{e}}_r}{\partial \mathbf{v}} d\Omega}_{(**)} \\ &\quad \text{nous appliquons le Lemme (B.1.3) à (*) et le Lemme (B.1.4) à (**).} \\ &\leq -2V_c \int_{\Omega} \tilde{\mathbf{e}}_r^2 d\Omega + \frac{\gamma}{2} \int_{\Omega} \mathbf{x}^2 \tilde{\mathbf{e}}_r^2 d\Omega + \frac{1}{2\gamma} \underbrace{\int_{\Omega} \left(\frac{\partial \tilde{\mathbf{e}}_r}{\partial \mathbf{v}}\right)^2 d\Omega}_{(***)} \\ &\quad \exists \alpha(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) / (***) \text{ est majorée} \\ &\leq -2V_c \int_{\Omega} \tilde{\mathbf{e}}_r^2 d\Omega + \frac{\gamma L^2}{2} \int_{\Omega} \tilde{\mathbf{e}}_r^2 d\Omega + \frac{1}{2\gamma} \sup_{\Omega} |\alpha(t, \mathbf{x}, \mathbf{v})| \int_{\Omega} \tilde{\mathbf{e}}_r^2 d\Omega \\ &\leq - \left(2V_c - \frac{\gamma L^2}{2} - \frac{\sup_{\Omega} |\alpha|}{2\gamma}\right) \int_{\Omega} \tilde{\mathbf{e}}_r^2 d\Omega \\ &\leq -\mu V \end{aligned}$$

avec

$$\mu = 2V_c - \frac{\gamma L^2}{2} - \frac{\sup_{\Omega} |\alpha(t, \mathbf{x}, \mathbf{v})|}{2\gamma}.$$

On peut en déduire que le système (4.45)-(4.48) est exponentiellement stable si $\mu > 0$ ainsi on a

$$\|\tilde{\mathbf{e}}_r(t, \mathbf{x}, \mathbf{v})\|_{L^2(\Omega)} \leq \exp\left(-\int_{\Omega_T} \mu dt\right) \|\tilde{\mathbf{e}}_r^0(\mathbf{x}, \mathbf{v})\|_{L^2(\Omega)}. \quad (4.56)$$

□

Nous pouvons maintenant appliquer la transformation de l'intégrale de Volterra, qui relie la dynamique d'erreur de l'observateur et du système cible.

4.3.1 La transformation de « Backstepping »

Le système d'erreur de l'équation de la cible est stable. Nous pouvons définir l'intégrale de Volterra. L'approche de « Backstepping » est utilisée pour connecter le système d'erreur d'observateur (4.44) à un système cible approprié dans l'état $\tilde{e}(t, x, v)$ par la transformation intégrale inversible de Volterra

$$\mathbf{e}_r(t, x, v) = \tilde{\mathbf{e}}_r(t, x, v) - \int_0^x k(t, x, \xi, v) \tilde{\mathbf{e}}_r(t, \xi, v) d\xi \quad (4.57)$$

où $k(t, x, \xi, v)$ est le noyau de la transformation. On rappelle la règle de différenciation de Leibniz et appliquons à la transformation (4.57). Nous obtenons :

$$\frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial x}(t, x, v) = \frac{\partial \tilde{\mathbf{e}}_r}{\partial x} - k(t, x, x, v) \tilde{\mathbf{e}}_r(t, x, v) - \int_0^x \frac{\partial k}{\partial x}(t, x, \xi, v) \tilde{\mathbf{e}}_r(t, \xi, v) d\xi \quad (4.58)$$

$$\frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial v} = \frac{\partial \tilde{\mathbf{e}}_r}{\partial v} - \int_0^x \frac{\partial k}{\partial v}(t, x, \xi, v) \tilde{\mathbf{e}}_r(t, \xi, v) d\xi - \int_0^x k(t, x, \xi, v) \frac{\partial \tilde{\mathbf{e}}_r}{\partial v}(t, \xi, v) d\xi \quad (4.59)$$

$$\frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial t} = \frac{\partial \tilde{\mathbf{e}}_r}{\partial t} - \int_0^x \frac{\partial k}{\partial t}(t, x, \xi, v) \tilde{\mathbf{e}}_r(t, \xi, v) d\xi - \int_0^x k(t, x, \xi, v) \frac{\partial \tilde{\mathbf{e}}_r}{\partial t}(t, \xi, v) d\xi \quad (4.60)$$

En substituant les résultats de (4.58)-(4.59) à (4.44), nous obtenons

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial t}(t, x, v) + v \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial x}(t, x, v) - \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial v}(t, x, v) + l(t, x, v) \mathbf{e}_r(t, 0, v) \\ &= \frac{\partial \tilde{\mathbf{e}}_r}{\partial t}(t, x, v) + v \frac{\partial \tilde{\mathbf{e}}_r}{\partial x}(t, x, v) - \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \tilde{\mathbf{e}}_r}{\partial v}(t, x, v) \\ &\quad - \int_0^x \tilde{\mathbf{e}}_r \left[\frac{\partial k}{\partial t}(t, x, \xi, v) + 2v \frac{\partial k}{\partial x}(t, x, \xi, x) - x \frac{\partial k}{\partial v}(t, x, \xi, v) \right] d\xi \\ &\quad + \left[\left(v - \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) k(t, x, \xi, v) \tilde{\mathbf{e}}_r(t, \xi, v) \right]_0^x - [xk(t, x, \xi, v) \tilde{\mathbf{e}}_r(t, \xi, v)]_0^x \\ &\quad - vk(t, x, x, v) \tilde{\mathbf{e}}_r(t, x, v) + l(t, x, v) \mathbf{e}_r(t, 0, v). \end{aligned}$$

En procédant par identification, nous obtenons le gain d'observateur $l(t, x, v)$

$$l(t, x, v) = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} + x - 2v \right) k(t, x, 0, v) \quad (4.61)$$

et l'équation du noyau de la transformation

$$\frac{\partial k}{\partial t}(t, x, \xi, v) + 2v \frac{\partial k}{\partial x}(t, x, \xi, x) - x \frac{\partial k}{\partial v}(t, x, \xi, v) = 0. \quad (4.62)$$

Pour les conditions aux limites de l'équation du noyau de transformation, on choisit $\xi \in (0, L)$ et $x \in (\xi, L)$. On obtient les conditions aux limites

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} + x - v \right) k(t, x, x, v) = 0. \quad (4.63)$$

Pour $x = L$ dans (4.57) nous avons :

$$k(t, x, L, v) = 0 \quad (4.64)$$

alors nous avons :

$$k(t, L, L, v) = 0 \quad (4.65)$$

$$k(t, 0, 0, v) = 0. \quad (4.66)$$

Nous avons la condition initiale

$$k(t_0, x, \xi, v) = k_0(x, \xi, v) \quad (4.67)$$

avec $k_0(x, \xi, v)$ étant consistant à $t = t_0$. Cette condition avec celles (4.64) - (4.66) impliquent la relation entre $\mathbf{e}_r(t_0, x, v)$ et $\tilde{\mathbf{e}}_r(t_0, x, v)$.

Le gain d'observateur $l_0(t, v)$ est obtenu par la condition (4.38) et on a :

$$l_0(t, v) = -1. \quad (4.68)$$

Nous pouvons maintenant donner une solution générale du noyau de la transformation dans la suite.

4.3.2 Solution du noyau de la transformation

La solution du système du noyau de transformation (4.62)-(4.67) est similaire à celle du système de l'erreur dynamique cible (4.45)-(4.48). On compose un système d'équations différentielles ordinaires sous forme symétrique

$$\frac{dt}{1} = \frac{dx}{2v} = \frac{dv}{-x} = \frac{dt + dx + d\xi + dv}{\text{"0"}}. \quad (4.69)$$

Nous pouvons trouver les trois premières intégrales appropriées. Nous avons

$$dt = \frac{dx}{2v} \iff vdt = dx \iff 2vt = x + C_1, \text{ avec } C_1 \in \mathbb{R} \quad (4.70)$$

où

$$2vt - x = C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R}; \quad (4.71)$$

$$\frac{dx}{2v} = \frac{dv}{-x} \iff xdx = -2v dv \iff \frac{x^2}{2} = -v^2 + C_2 \quad (4.72)$$

où

$$\frac{x^2}{2} + v^2 = C_2, \quad C_2 \in \mathbb{R}. \quad (4.73)$$

$$d(t + x + \xi + v) = 0 \iff t + x + \xi + v = C_3. \quad (4.74)$$

Les trois premières intégrales indépendantes sont

$$\begin{aligned} \psi_1(t, x, \xi, v) &= 2vt - x = C_1, \\ \psi_2(t, x, \xi, v) &= \frac{x^2}{2} + v^2 = C_2, \\ \psi_3(t, x, \xi, v) &= t + x + \xi + v = C_3 \end{aligned}$$

et donc la solution générale de l'équation est :

$$k(t, x, \xi, v) = \bar{\Theta} \left(2vt - x, \frac{x^2}{2} + v^2, t + x + \xi + v \right), \quad (4.75)$$

où $\bar{\Theta}$ est une fonction continuellement différentiable.

4.3.3 Transformation inverse du « Backstepping »

Afin d'analyser la stabilité exponentielle de la dynamique de l'erreur de l'observateur, il est nécessaire de considérer la transformation inverse du « Backstepping » entre $\mathbf{e}_r(t, x, v)$ et $\tilde{\mathbf{e}}_r(t, x, v)$. On obtient

$$\tilde{\mathbf{e}}_r(t, x, v) = \mathbf{e}_r(t, x, v) + \int_0^x g(t, x, \xi, v) \mathbf{e}_r(t, \xi, v) d\xi \quad (4.76)$$

où $g(t, x, \xi, v)$ est le noyau de la transformation. On procède de la même façon que (4.62)-(4.67) pour déterminer l'EDP du noyau de $g(t, x, v)$ et est donné par

$$\frac{\partial g}{\partial t}(t, x, \xi, v) + 2v \frac{\partial g}{\partial x}(t, x, \xi, v) + x \frac{\partial g}{\partial v}(t, x, \xi, v) = 0. \quad (4.77)$$

pour $\xi \in (0, L)$ et $x \in (\xi, L)$ On obtient les conditions aux limites

$$\left(\frac{\partial g}{\partial x} - x - 2v \right) g(t, x, 0, v) = 0. \quad (4.78)$$

En prenant $x = L$ dans (4.76) on a :

$$g(t, x, L, v) = 0 \quad (4.79)$$

ainsi nous avons :

$$g(t, L, L, v) = 0 \quad (4.80)$$

$$g(t, 0, 0, v) = 0 \quad (4.81)$$

condition initiale

$$g(t_0, x, \xi, v) = g_0(x, \xi, v) \quad (4.82)$$

avec la fonction $g_0(x, \xi, v)$ étant consistant avec (4.79)-(4.81) à $t = t_0$.

4.3.4 Convergence de l'erreur dynamique de l'observateur

Sur la base des propriétés de la solution pour les deux noyaux $k(t, x, \xi, v)$ et $g(t, x, \xi, v)$, la stabilité exponentielle de la dynamique d'erreur d'observateur avec les gains d'injection de sortie $l(t, x, v)$ et $l_0(t, v)$ peut être vérifiée.

Théorème 4.3.1. *Soient $l(t, x, v)$ et $l_0(t, v)$ les gains d'injection de sorties définis en (4.61) et (4.68). Soient les noyaux $k(t, x, \xi, v)$ et $g(t, x, \xi, v)$ de classe $C^1(\mathbb{R}^+ \times \Omega)$. Alors le point d'équilibre $\mathbf{e}_r(t, x, v) \equiv 0$ de (4.37)-(4.40) est stable exponentiellement pour tout $t \in \mathbb{R}^+$ en norme $L^2(\mathbb{R}^+ \times \Omega)$.*

Démonstration. Les noyaux de transformation $k(t, x, \xi, v)$ et $g(t, x, \xi, v)$ sont continuellement différentiables. L'inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée à (4.57) et (4.76) implique l'existence de constantes respectivement

$$M_0 = 1 + \sup_{t,x,\xi,v} |k(t, x, \xi, v)| \text{ et } M_1 = 1 + \sup_{t,x,\xi,v} |g(t, x, \xi, v)|$$

tel que

$$\|\tilde{\mathbf{e}}_r(t, x, v)\|_{L^2(\Omega)} \leq M_0 \|\mathbf{e}_r(t, x, v)\|_{L^2(\Omega)}$$

et

$$\|\mathbf{e}_r(t, x, v)\|_{L^2(\Omega)} \leq M_1 \|\tilde{\mathbf{e}}_r(t, x, v)\|_{L^2(\Omega)}.$$

De la relation (4.56), nous avons la suite des inégalités suivantes

$$\begin{aligned} \|\mathbf{e}_r(t, x, v)\|_{L^2(\Omega)} &\leq M_1 \exp\left(\int_{\Omega_T} \mu dt\right) \|\tilde{\mathbf{e}}_r^0(x, v)\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq M_0 M_1 \exp\left(\int_{\Omega_T} \mu dt\right) \|\mathbf{e}_r^0(x, v)\|_{L^2(\Omega)} \end{aligned} \quad (4.83)$$

et donc la stabilité exponentielle de l'équilibre

$$\mathbf{e}_r(t, x, v) \equiv 0.$$

□

4.4 Résultats Numériques

Pour procéder à l'illustration numérique, on s'intéresse au même cas de test : l'amortissement de Landau. En l'absence de la manipulation des LMIs comme il a été pour les exemples précédents nous utilisons cette fois ci la méthode de représentation spectrale Fourier-Hermite pour le système Vlasov-Poisson plus simple à implémenter (pour plus de détail voir[54][107][95]). Les principes de validation sont les mêmes, à comparer le comportement des codes avec les propriétés mathématiques connues. On s'assurera que les propriétés de conservation du schéma sont vérifiées.

La sortie du système restreinte à la frontière $x = 0$ est donnée par

$$y(t, v) = \frac{1 + \alpha \cos(2\pi t)}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{v^2}{2}\right), \quad (t, v) \in \Omega_v \times \Omega_T,$$

avec $\alpha = 0.01$.

Nous considérerons les gains d'observateur suivants :

en prenant dans (4.61) $\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin\left(\frac{\pi}{2}x + 2\pi t\right)$, et $k(t, x, 0, v) = x$, nous obtenons

$$l(t, x, v) = \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin\left(\frac{\pi}{2}x + 2\pi t\right) + x - 2v \right) x$$

et

$$l_0(t, v) = -1.$$

Nous appliquons les mêmes paramètres de l'amortisseur de Landau linéaire aux deux exemples numériques.

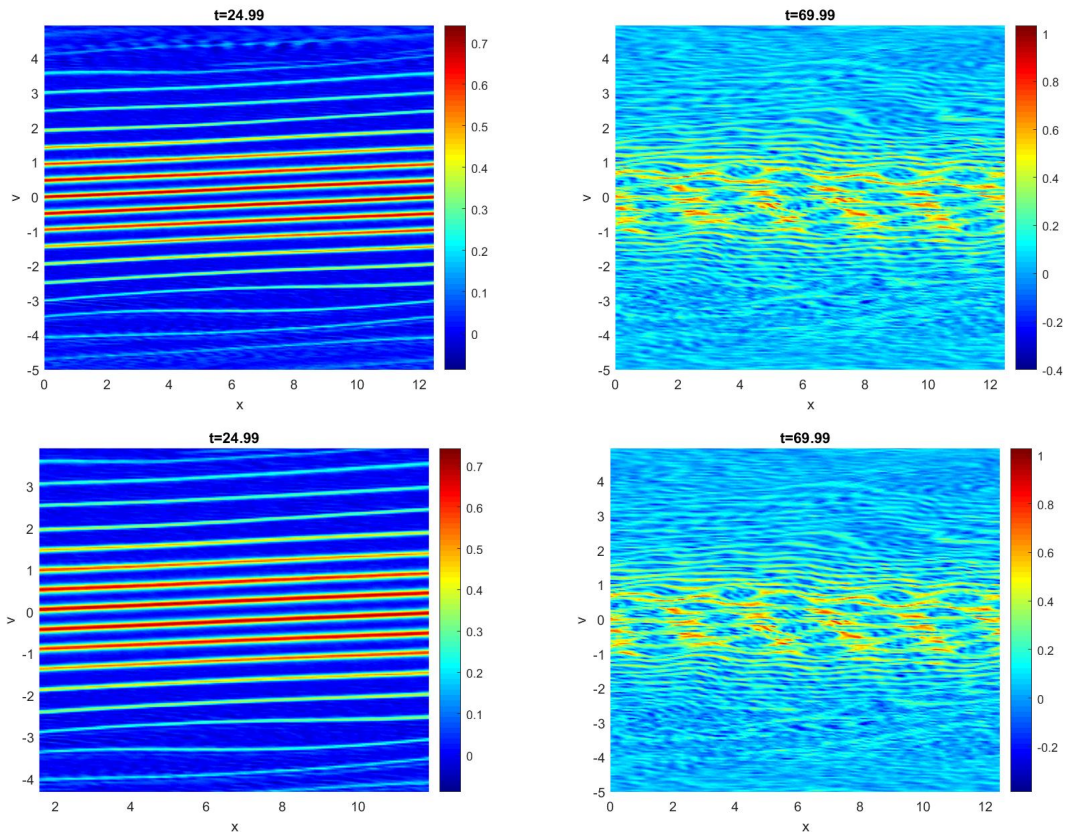


FIGURE 4.9 – De haut en bas, de la gauche vers la droite respectivement l'approximation de la fonction de distribution f et celle de l'observateur \tilde{f} sur un maillage $(N_x, N_v) = (120, 120)$ sur l'espace des phases Ω aux temps $T = 25, T = 70$.

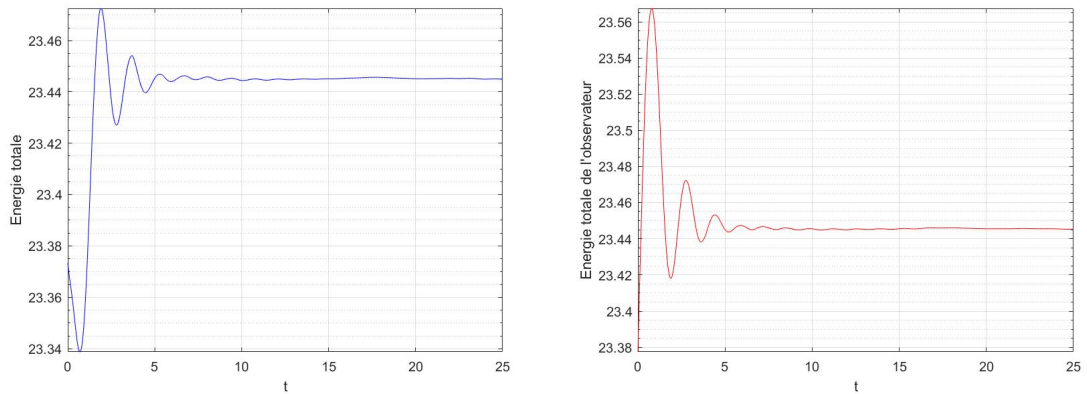


FIGURE 4.10 – L'évolution temporelle de l'énergie totale de f à gauche et celle de l'observateur \tilde{f} à droite sur un maillage (120×120) à $T = 25$.

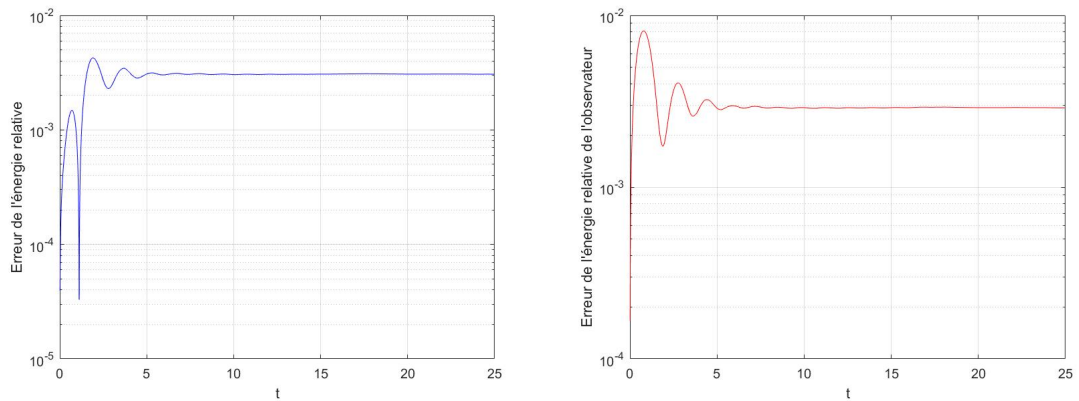


FIGURE 4.11 – À gauche l'évolution temporelle de l'erreur relative de l'énergie totale de f , à droite celle de l'observateur \tilde{f} sur un maillage (120×120) à $T = 25$.

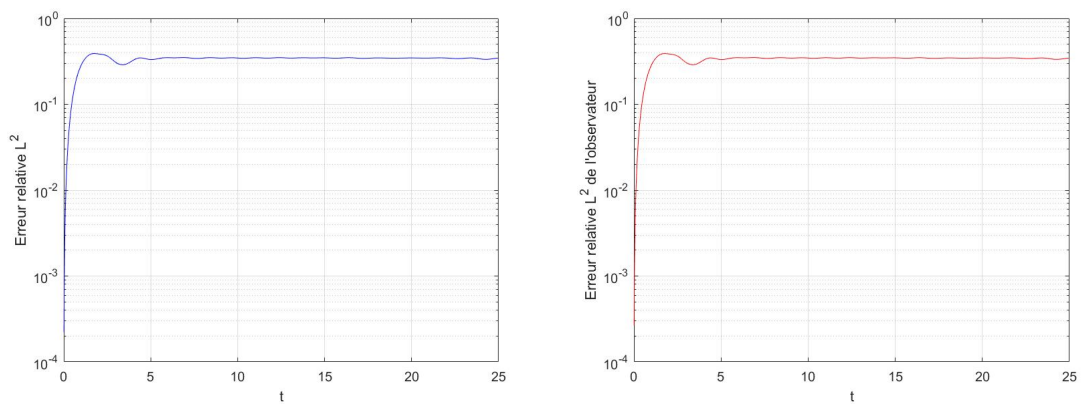


FIGURE 4.12 – À gauche l'erreur relative de conservation L^2 de f et à droite celle de \tilde{f} sur un maillage (120×120) à $T=25$.

4.5 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons étudié la synthèse d'observateur de l'équation de Vlasov-Poisson en dimension finie en adoptant une approche basée sur le théorème DMVT. La structure des matrices obtenues avec la méthode de GD nous permet de démontrer la stabilité exponentielle du système de VP par le biais des LMIs. Nous avons ensuite traité en dimension finie le cas \mathcal{H}_∞ où le système comporte des perturbations. Nous avons également étudié la synthèse en dimension infinie de l'observateur de l'équation VP par la méthode de « *Backstepping* ». Enfin nous avons illustré par des résultats numériques en vérifiant les conservations physiques du système VP pour chaque cas (dimension finie ou infinie).

Chapitre 5

Commande de l'équation de Vlasov-Poisson

Sommaire

5.1	Introduction	83
5.2	Commande linéaire de l'équation de Vlasov-Poisson	85
5.3	Commande basée observateur	86
5.3.1	Synthèse de la commande basée observateur	87
5.3.2	Extension à \mathcal{H}_∞	89
5.4	Conclusion	93

Ce chapitre traite la stabilisation par retour d'état d'une classe de systèmes d'EDPs non linéaires décrits par les équations de Vlasov-Poisson en dimension finie. Pour ce faire, grâce à l'approche de discrétisation discontinue de Galerkin du chapitre 2, il établit un modèle de représentation d'état explicite. Il aborde ensuite la stabilisation asymptotique sous une condition LMI de la commande linéaire du retour d'état. Enfin il étudie la stabilisation asymptotique d'une commande basée observateur, en présence ou non de perturbations.

5.1 Introduction

Il existe très peu de résultats sur la contrôlabilité et/ou la stabilisation des équations cinétiques, citons néanmoins le résultat de M. Klibanov et M. Yamamoto sur un modèle de type Boltzmann linéarisé, avec des vitesses réparties sur la sphère [78]. En particulier, le cas de l'équation de Vlasov-Poisson semble être le seul où un résultat avec des vitesses réparties dans l'espace a été obtenu, voir les travaux de O. Glass [59]. Nous avons un travail récent de Patrick Knopf sur le Contrôle optimal d'un plasma de Vlasov-Poisson par un champ magnétique externe - les bases du calcul variationnel [79]. Cependant, nous avons plusieurs littératures qui traitent de la stabilité des systèmes PDE. Nous pouvons citer les travaux de O. Glass Stabilisabilité asymptotique par retour stationnaire de l'équa-

où n_{no} désigne la norme unitaire externe sur $\partial\mathcal{D}$.

La formulation faible du problème continu (5.1) donne :
trouver (f, E) tel que

$$\int_{\Omega_x} \int_{\Omega_v} \frac{\partial f}{\partial t} f \varphi dx dv - \int_{\Omega_x} \int_{\Omega_v} v f \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx dv + \int_{\Omega_x} \int_{\Omega_v} E f \frac{\partial \varphi}{\partial v} dx dv = \int_{\Omega_x} \int_{\Omega_v} u \varphi dx dv$$

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega_x \times \Omega_v). \quad (5.4)$$

Nous obtenons (5.4) sous la forme matricielle en appliquant la méthode de Galerkin discontinue comme au chapitre 2 :

$$\mathbf{M}_h \dot{\mathbf{f}}_h = \mathbf{A}_h \mathbf{f}_h + \mathbf{G}_h(\mathbf{f}_h) + \mathbf{B}_h \mathbf{u}_h, \quad (5.5)$$

où la fonction $\mathbf{G}(\mathbf{f}_h)$ est définie en (2.8).

Dans la section suivante, nous présenterons un résultat de commande du système dynamique de Vlasov-Poisson et étudierons sa stabilité avec une conditions aux LMIs.

5.2 Commande linéaire de l'équation de Vlasov-Poisson

Nous présenterons dans cette section un résultat de commande linéaire. On Considère la commande linéaire suivante :

$$\mathbf{u}_h = -\mathbf{K} \mathbf{f}_h. \quad (5.6)$$

En remplaçant (5.6) dans (5.5) on a

$$\mathbf{M}_h \dot{\mathbf{f}}_h = (\mathbf{A}_h - \mathbf{B}_h \mathbf{K}) \mathbf{f}_h + \mathbf{G}(\mathbf{f}_h). \quad (5.7)$$

La fonction \mathbf{G}_h est β -lipschitzienne .

Théorème 5.2.1. *Soit la matrice de contrôle \mathbf{K} telle que la LMI suivante soit vérifiée :*

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_h^T - \mathbf{K}^T \mathbf{B}_h^T + \mathbf{A}_h - \mathbf{B}_h \mathbf{K} & \mathbf{I} & \mathbf{I} \\ (\star) & -\mu^2 \mathbf{I} & 0 \\ (\star) & (\star) & -\lambda^2 \mathbf{I} \end{bmatrix} < 0 \quad (5.8)$$

alors le système discrétisé (5.5) est asymptotiquement stable sous l'action de la rétroaction (5.6) $\forall \lambda > 0$ avec $\mu = \frac{1}{\lambda\beta}$.

Démonstration. Rappelons nous que \mathbf{f}_h est un vecteur défini positif. Nous introduisons la fonction de Lyapunov suivante :

$$V(\mathbf{f}_h) = \mathbf{f}_h^T \mathbf{M}_h \mathbf{f}_h > 0. \quad (5.9)$$

La dérivée \dot{V} est donnée par

$$\dot{V} = \mathbf{f}_h^T [(\mathbf{A}_h - \mathbf{B}_h \mathbf{K}) + (\mathbf{A}_h - \mathbf{B}_h \mathbf{K})^T] \mathbf{f}_h + \mathbf{f}_h^T \mathbf{G}_h(\mathbf{f}_h) + \mathbf{G}_h^T(\mathbf{f}_h) \mathbf{f}_h. \quad (5.10)$$

On sait que \mathbf{G}_h est β -Lipschitzienne alors pour tout $\lambda > 0$ nous avons

$$\lambda^2 \beta^2 \mathbf{f}_h^T \mathbf{f}_h - \lambda^2 \mathbf{G}_h^T(\mathbf{f}_h) \mathbf{G}(\mathbf{f}_h) > 0. \quad (5.11)$$

En additionnant (5.10) et (5.11) on a :

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq \mathbf{f}_h^T [(\mathbf{A}_h - \mathbf{B}_h \mathbf{K})^T + (\mathbf{A}_h - \mathbf{B}_h \mathbf{K}) + \lambda^2 \beta^2 \mathbf{I}] \mathbf{f}_h + \mathbf{f}_h^T \mathbf{G}(\mathbf{f}_h) \\ &+ \mathbf{G}^T(\mathbf{f}_h) \mathbf{f}_h - \lambda^2 \mathbf{G}^T(\mathbf{f}_h) \mathbf{G}(\mathbf{f}_h). \end{aligned} \quad (5.12)$$

On peut le réécrire sous la forme suivante

$$\dot{V} \leq \begin{bmatrix} \mathbf{f}_h^T \\ \mathbf{G}^T(\mathbf{f}_h) \end{bmatrix} \Xi \begin{bmatrix} \mathbf{f}_h \\ \mathbf{G}(\mathbf{f}_h) \end{bmatrix} \quad (5.13)$$

avec

$$\Xi = \begin{bmatrix} (\mathbf{A}_h - \mathbf{B}_h \mathbf{K})^T + (\mathbf{A}_h - \mathbf{B}_h \mathbf{K}) + (\lambda\beta)^2 \mathbf{I} & \mathbf{I} \\ (\star) & -\lambda^2 \mathbf{I} \end{bmatrix}. \quad (5.14)$$

$\Xi < 0$ garantit que $\dot{V} < 0$. En utilisant le complément de Schur(B.1.1), nous concluons que $\Xi < 0$ est équivalent à

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_h^T - \mathbf{K}^T \mathbf{B}_h^T + \mathbf{A}_h - \mathbf{B}_h \mathbf{K} & \mathbf{I} & \mathbf{I} \\ (\star) & -\mu^2 \mathbf{I} & 0 \\ (\star) & (\star) & -\lambda^2 \mathbf{I} \end{bmatrix} < 0. \quad (5.15)$$

□

Dans la section suivante, nous présenterons les résultats de commande basée sur l'observateur du système dynamique de Vlasov-Poisson et sa stabilité.

5.3 Commande basée observateur

Nous allons d'abord établir l'observateur du système dynamique de Vlasov-Poisson, appliquer la méthode de linéarisation de l'observateur étudiée dans la section(4.1.1), ensuite donner son erreur dynamique. Enfin, nous présenterons la synthèse de la commande basée sur l'observateur et présenterons une extension \mathcal{H}_∞ . Considérons le système dynamique de Vlasov suivant

$$\begin{cases} \mathbf{M}_h \dot{\mathbf{f}}_h = \mathbf{A}_h \mathbf{f}_h + \mathbf{G}_h(\mathbf{f}_h) + \mathbf{B}_h \mathbf{u}_h, \\ Y_h = \mathbf{C}_h \mathbf{f}_h. \end{cases} \quad (5.16)$$

L'observateur associé au système dynamique (5.16) :

$$\mathbf{M}_h \dot{\tilde{\mathbf{f}}}_h = \mathbf{A}_h \tilde{\mathbf{f}}_h + \mathbf{G}_h(\tilde{\mathbf{f}}_h) + \mathbf{B}_h \mathbf{u}_h + \mathbf{L}(Y_h - \mathbf{C} \tilde{\mathbf{f}}_h), \quad (5.17)$$

où $\tilde{\mathbf{f}}_h$ représente l'estimateur de \mathbf{f}_h et \mathbf{L} doit être construit de telle sorte que l'erreur d'estimation $\boldsymbol{\epsilon}_r = \mathbf{f}_h - \tilde{\mathbf{f}}_h$ converge asymptotiquement vers zéro pour toutes les conditions initiales $\tilde{\mathbf{f}}_h^0$ et \mathbf{f}_h^0 . La dynamique de l'erreur d'estimation est définie par :

$$\mathbf{M}_h \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_r = (\mathbf{A}_h - \mathbf{L} \mathbf{C}_h) \boldsymbol{\epsilon}_r + [\mathbf{G}_h(\mathbf{f}_h) - \mathbf{G}_h(\tilde{\mathbf{f}}_h)]. \quad (5.18)$$

En appliquant la méthode de linéarisation du théorème DMVT nous avons

$$\mathbf{M}_h \dot{\mathbf{e}}_r = (\mathbf{A}_h + \Lambda(\eta) - \mathbf{L}\mathbf{C}_h)\mathbf{e}_r, \quad \forall \eta \in \varpi_N. \quad (5.19)$$

Nous pouvons à présent étudier la synthèse de la commande du système (5.16).

5.3.1 Synthèse de la commande basée observateur

Dans ce paragraphe nous allons étudier la synthèse de la commande basée observateur du système dynamique suivant les conditions d'LMI. Le problème de stabilisation consiste donc à déterminer deux matrices \mathbf{K} et \mathbf{L} telles que le système (5.16) soit stable sous l'action de la rétroaction d'état

$$\mathbf{u}_h = -\mathbf{K}\tilde{\mathbf{f}}_h. \quad (5.20)$$

En remplaçant (5.20) dans (5.17) on a :

$$\mathbf{M}_h \dot{\mathbf{f}}_h = \mathbf{A}_h \mathbf{f}_h + \mathbf{G}(\mathbf{f}_h) - \mathbf{B}_h \mathbf{K} \tilde{\mathbf{f}}_h. \quad (5.21)$$

En appliquant la méthode de linéarisation du théorème DMVT nous avons

$$\mathbf{M}_h \dot{\mathbf{f}}_h = [\mathbf{A}_h + \Lambda(\nu) - \mathbf{B}_h \mathbf{K}] \mathbf{f}_h + \mathbf{B}_h \mathbf{K} \mathbf{e}_r \quad \forall \nu \in \varpi_N. \quad (5.22)$$

Considérons la forme augmentée du système :

$$\mathbb{M}\dot{\Pi} = \Sigma(\nu, \eta)\Pi \quad (5.23)$$

avec

$$\Sigma(\nu, \eta) = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_h + \Lambda(\nu) - \mathbf{B}_h \mathbf{K} & \mathbf{B}_h \mathbf{K} \\ 0 & \mathbf{A}_h + \Lambda(\eta) - \mathbf{L}\mathbf{C}_h \end{bmatrix} \quad (5.24)$$

$$\Pi = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_h \\ \mathbf{e}_r \end{bmatrix} \quad (5.25)$$

et

$$\mathbb{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_h & 0 \\ 0 & \mathbf{M}_h \end{bmatrix}. \quad (5.26)$$

Théorème 5.3.1. Soient \mathbf{K} , \mathbf{L} les matrices de gain de contrôle et d'observateur de dimensions appropriées telles que la LMI suivante soit satisfaite :

$$\Sigma(\nu, \eta) + \Sigma^T(\nu, \eta) < 0 \quad \forall \nu, \eta \in \varpi_N \quad (5.27)$$

alors le système (5.16) est asymptotiquement stable.

Démonstration. Considérons la fonction de Lyapunov suivante :

$$V(\Pi) = \Pi^T \mathbb{M} \Pi. \quad (5.28)$$

En effectuant la dérivée de V on obtient :

$$\dot{V} = \Pi^T [\Sigma^T(\nu, \eta) + \Sigma(\nu, \eta)] \Pi. \quad (5.29)$$

Ainsi, $\dot{V} < 0$ si et seulement si l'inégalité suivante est vérifiée :

$$\Sigma(\nu, \eta) + \Sigma^T(\nu, \eta) < 0 \quad \forall \nu, \eta \in \varpi_N. \quad (5.30)$$

□

Le théorème suivant garantit l'existence des matrices de gain pour la stabilité du système.

Théorème 5.3.2. *Soient les matrices de gains de contrôle et d'observation \mathbf{K} , \mathbf{L} de dimensions appropriées telles que la LMI suivante soit satisfaite :*

$$\Sigma_0 + \Sigma_0^T < 0, \quad (5.31)$$

où

$$\Sigma_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_h + \mathbf{B}_h \mathbf{K} & \mathbf{B}_h \mathbf{K} \\ 0 & \mathbf{A}_h - \mathbf{L} \mathbf{C}_h \end{bmatrix} \quad (5.32)$$

alors les matrices de gains \mathbf{K} et \mathbf{L} garantissent la stabilité asymptotique du système (5.16) sous l'action de la rétroaction d'état (5.20).

Démonstration. Les matrices \mathbf{L} et \mathbf{B}_h vérifient la LMI (5.31) par l'hypothèse du théorème. De plus Λ est une matrice définie négative, on peut alors conclure que les matrices \mathbf{L} et \mathbf{B}_h vérifient la LMI (5.27). D'où le résultat. □

Exemple numérique

Pour procéder à l'illustration de la synthèse de la commande basée observateur l'observateur $\mathbf{u}_h = -\mathbf{K}\tilde{\mathbf{f}}_h$ du système (5.16), nous appliquons le même cas de test : l'amortissement de Landau linéaire avec les mêmes conditions que les exemples numériques du chapitre 5. Les principes de validation restent les mêmes. On s'assurera que les propriétés de conservation du schéma sont vérifiées. Nous prendrons la matrice de gain globale définie en (4.11) avec $\mathbf{L} = \frac{\lambda_m}{2} \mathbf{C}_h^T$. On prendra $\mathbf{K} = \mathbf{B}_h^T$.

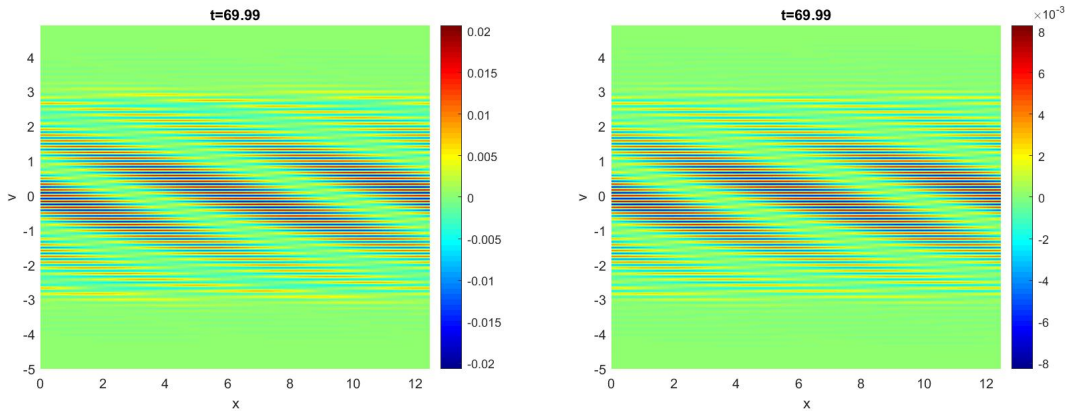


FIGURE 5.1 – À gauche l'approximation de la fonction de distribution f_h et à droite celle sous l'action de $\mathbf{u}_h = -\mathbf{K}\tilde{\mathbf{f}}_h$ sur un maillage $(N_x, N_y) = (120, 120)$ sur l'espace des phases.

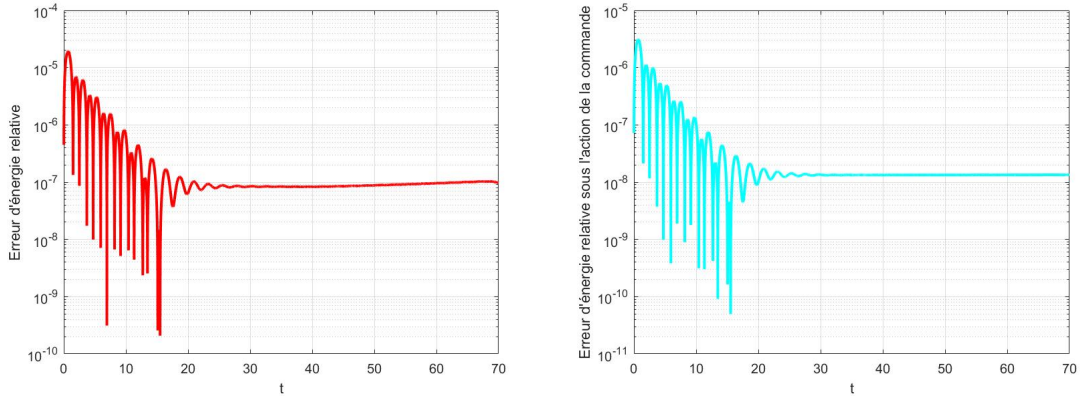


FIGURE 5.3 – À gauche l'évolution temporelle de l'erreur relative de l'énergie totale de f_h et à droite celle sous l'action de $\mathbf{u}_h = -\mathbf{K}\tilde{\mathbf{f}}_h$ sur un maillage (120×120) à $T = 70$.

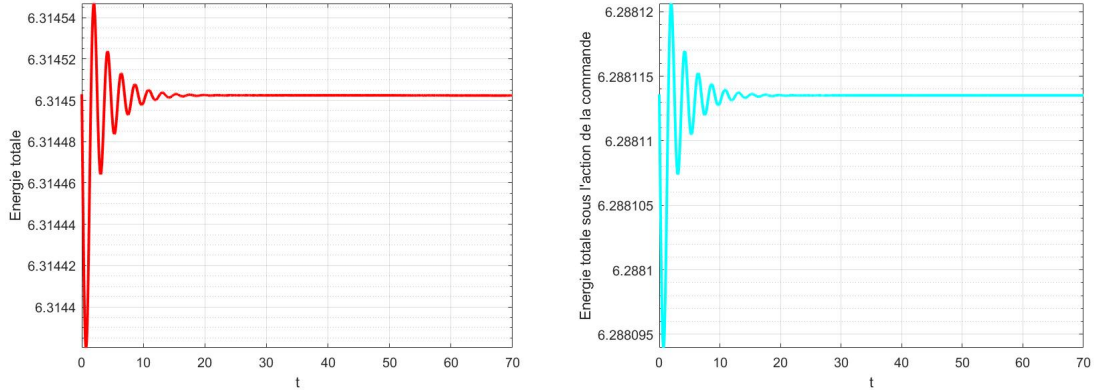


FIGURE 5.2 – L'évolution temporelle de l'énergie totale de f_h à gauche et celle sous l'action $\mathbf{u}_h = -\mathbf{K}\tilde{\mathbf{f}}_h$ à droite sur un maillage (120×120) à $T = 70$.

[H] [H]

5.3.2 Extension à \mathcal{H}_∞

Nous présentons dans cette partie une extension au cas \mathcal{H}_∞ . Le but est de trouver des conditions robustes qui garantissent la stabilité asymptotique du système sous l'action de (5.20). Considérons le système semi-discret suivant :

$$\begin{cases} \mathbf{M}_h \dot{\mathbf{f}}_h = \mathbf{A}_h \mathbf{f}_h + \mathbf{G}(\mathbf{f}_h) + \mathbf{B}_h \mathbf{u}_h + \mathcal{W}_1 w \\ Y_h = \mathbf{C}_h \mathbf{f}_h + \mathcal{W}_2 w \end{cases} \quad (5.33)$$

avec $w \in L^2(\mathbb{R}^N)$ le vecteur des perturbations bornées. \mathcal{W}_1 et \mathcal{W}_2 sont des matrices constantes de dimension appropriée. Considérons l'observateur suivant :

$$\mathbf{M}_h \dot{\tilde{\mathbf{f}}}_h = \mathbf{A}_h \tilde{\mathbf{f}}_h + \mathbf{G}_h(\tilde{\mathbf{f}}_h) + \mathbf{B}_h \mathbf{u}_h + \mathcal{W}_1 w + \mathbf{L}(Y_h - \mathbf{C}_h \tilde{\mathbf{f}}_h). \quad (5.34)$$

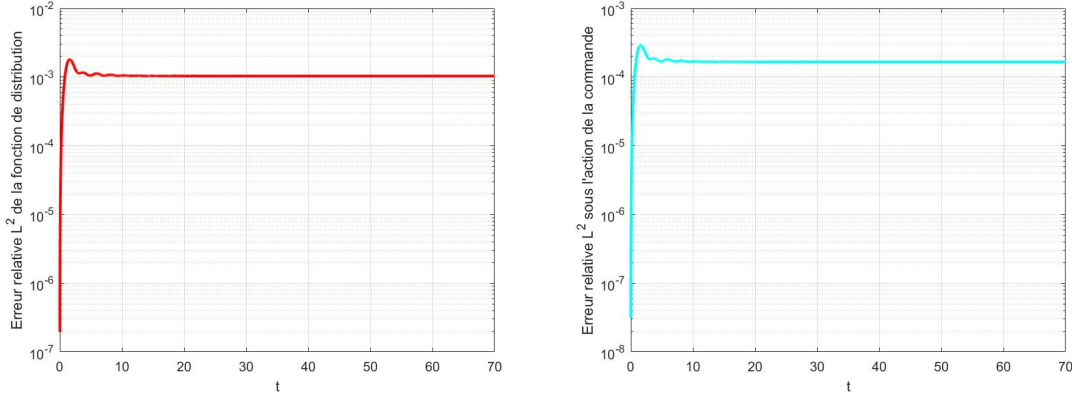


FIGURE 5.4 – À gauche l'erreur relative de conservation L^2 de f_h et à droite celle sous l'action de $\mathbf{u}_h = -\mathbf{K}\tilde{f}_h$ sur un maillage (120×120) .

La dynamique de l'erreur d'estimation est donnée par :

$$\mathbf{M}_h \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_r = (\mathbf{A}_h + \Lambda(\eta) - \mathbf{L}\mathbf{C}_h)\boldsymbol{\epsilon}_r + (\mathcal{W}_1 - \mathbf{L}\mathcal{W}_2)w. \quad (5.35)$$

Considérez le système augmenté suivant

$$\mathbf{M}\dot{\Pi} = \Sigma(\eta, \nu)\Pi + \mathbb{W}w. \quad (5.36)$$

où

$$\mathbb{W} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}\mathcal{W}_2 \\ \mathcal{W}_1 - \mathbf{L}\mathcal{W}_2 \end{bmatrix}. \quad (5.37)$$

Le problème est de trouver les matrices \mathbf{L} et \mathbf{K} telles que

$$\|\Pi\| \leq \sqrt{\gamma^2\|w\| + \varrho\|\Pi_0\|} \quad (5.38)$$

où $\gamma > 0$ est le niveau d'atténuation de la perturbation et $\varrho > 0$ une constante positive. Le problème \mathcal{H}_∞ (5.38) peut être réduit à trouver une fonction de Lyapunov $V = \Pi^T \mathbf{M} \Pi$ telle que

$$\dot{V} + \boldsymbol{\epsilon}_r^T \boldsymbol{\epsilon}_r - \gamma^2 w^T w < 0. \quad (5.39)$$

Nous pouvons maintenant étudier la synthèse des gains d'observation et de contrôle sous une LMI.

Théorème 5.3.3. *Soient les matrices de gain d'observation et de commande respectives \mathbf{L} , \mathbf{K} de dimensions appropriées. Le système (5.36) est asymptotiquement stable si le problème d'optimisation convexe est satisfait :*

$$\text{Bloc-Diag}(\Gamma(\eta_1, \nu_1, \gamma), \Gamma(\eta_2, \nu_2, \gamma), \dots, \Gamma(\eta_{2N}, \nu_{2N}, \gamma)) < 0. \quad (5.40)$$

où

$$\Gamma(\eta, \nu, \gamma) = \begin{bmatrix} \mathcal{S}(\nu) & 0 & \mathbf{L}\mathcal{W}_2 \\ (\star) & \mathcal{S}(\eta) & \mathcal{W}_1 - \mathbf{L}\mathcal{W}_2 \\ (\star) & (\star) & -\gamma^2 \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (5.41)$$

avec

$$\begin{aligned}\mathcal{S}(\nu) &= (\mathbf{A}_h + \Lambda(\nu) - \mathbf{B}_h \mathbf{K})^T + (\mathbf{A}_h + \Lambda(\nu) - \mathbf{B}_h \mathbf{K}) \\ \mathcal{S}(\eta) &= (\mathbf{A}_h + \Lambda(\eta) - \mathbf{L} \mathbf{C}_h)^T + (\mathbf{A}_h + \Lambda(\eta) - \mathbf{L} \mathbf{C}_h)\end{aligned}$$

$\forall \eta, \nu \in \varpi_N$.

Démonstration. Considérons la fonction de Lyapunov suivante :

$$V(\Pi) = \Pi^T \mathbf{M} \Pi.$$

En effectuant la dérivée de V on obtient :

$$\begin{aligned}\dot{V} &= \Pi^T [\Sigma^T(\eta, \nu) + \Sigma^T(\eta, \nu)] \Pi + \Pi^T \mathbb{W} w + w^T \mathbb{W} \Pi. \\ &= \vartheta^T \Gamma \vartheta\end{aligned}\tag{5.42}$$

où $\vartheta = [\mathbf{f}_h \ \mathbf{e}_r \ w]^T$.

Ainsi, la condition $\dot{V} < 0$ est vérifiée si et seulement si la condition suivante est satisfaite :

$$\Gamma(\eta, \nu, \lambda) < 0 \quad \forall \eta, \nu \in \varpi.$$

□

La proposition suivante garantit l'existence des matrices de gain pour la stabilité du système.

Proposition 5.3.1. *Soient les matrices de gains \mathbf{L} et \mathbf{K} telles que la LMI suivante soit vérifiée :*

$$\begin{bmatrix} \mathcal{S}_0(\nu) & 0 & \mathbf{L} \mathcal{W}_2 \\ (\star) & \mathcal{S}_0(\eta) & \mathcal{W}_1 - \mathbf{L} \mathcal{W}_2 \\ (\star) & (\star) & -\gamma^2 \mathbf{I} \end{bmatrix} < 0,\tag{5.43}$$

où

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_0(\nu) &= (\mathbf{A}_h - \mathbf{B}_h \mathbf{K})^T + \mathbf{A}_h - \mathbf{B}_h \mathbf{K} \\ \mathcal{S}_0(\eta) &= (\mathbf{A}_h - \mathbf{L} \mathbf{C}_h)^T + \mathbf{A}_h - \mathbf{L} \mathbf{C}_h\end{aligned}$$

Alors, la condition \mathcal{H}_∞ (5.38) est satisfaite, sous l'action de rétroaction d'état (5.20).

Démonstration. D'après l'hypothèse du théorème les LMIs suivantes sont vérifiées

$$\mathcal{S}_0(\eta) < 0 \quad \text{et} \quad \mathcal{S}_0(\nu) < 0.$$

De plus nous savons que Λ est une matrice définie négative. Nous pouvons conclure que sous l'action de la rétroaction d'état (5.20) les matrices existent et vérifient bien la LMI (5.40). □

Exemple numérique

Pour illustrer la synthèse de la commande basée observateur $\mathbf{u}_h = -\mathbf{K}\tilde{\mathbf{f}}_h$ du système (5.33), nous appliquons le même cas de test : l'amortissement de Landau linéaire avec les mêmes conditions que les exemples numériques du chapitre 4. Les principes de validation restent les mêmes. On s'assurera que les propriétés de conservation du schéma sont vérifiées. Nous prendrons la matrice de gain globale définie en (4.11) avec $\mathbf{L} = \frac{\lambda_m}{2} \mathbf{C}_h^T$. On prendra $\mathbf{K} = \mathbf{B}_h^T$. Nous utilisons la perturbation $w = \pm 0.05 \tilde{\mathbf{f}}_h$ avec les matrices $\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2$ définies en (4.23) et (4.24).

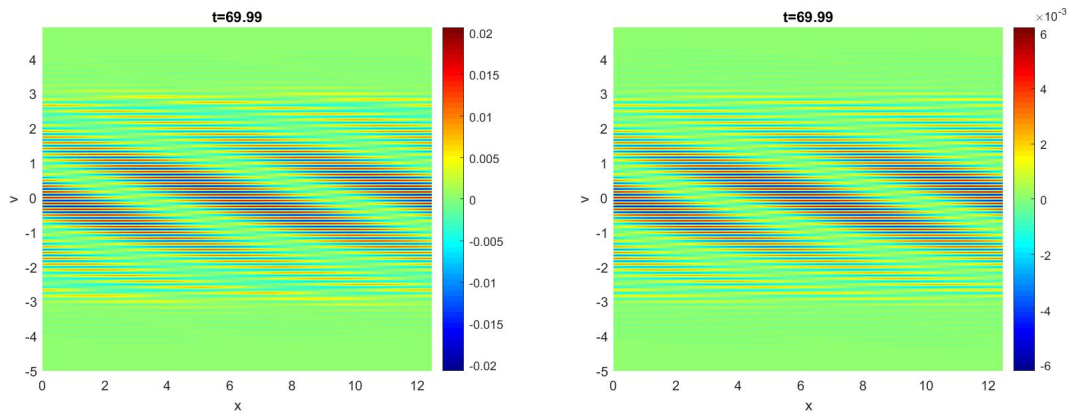


FIGURE 5.5 – A gauche l'approximation de la fonction de distribution f_h et à droite celle sous l'action de $\mathbf{u}_h = -\mathbf{K}\tilde{\mathbf{f}}_h$ sur un maillage $(N_x, N_v) = (120, 120)$ sur l'espace des phases Ω cas \mathcal{H}_∞ .

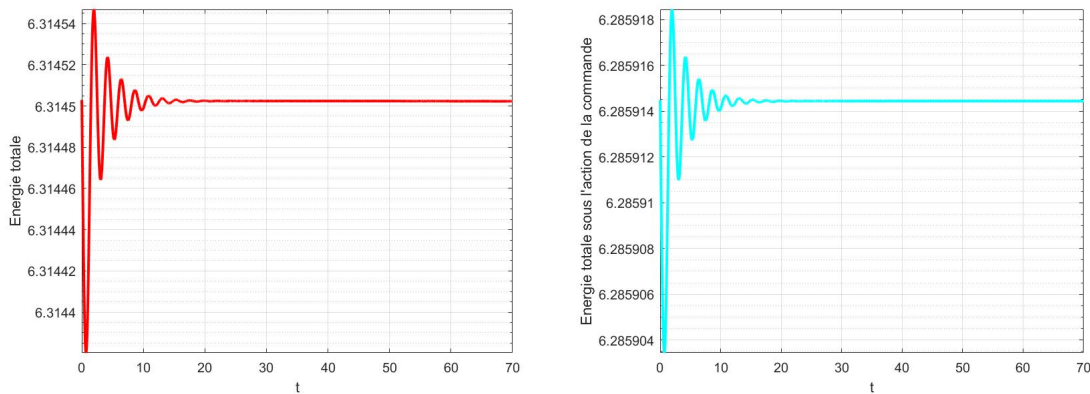


FIGURE 5.6 – L'évolution temporelle de l'énergie totale de f_h à gauche et à droite celle sous l'action $\mathbf{u}_h = -\mathbf{K}\tilde{\mathbf{f}}_h$ sur un maillage (120×120) à $T = 70$ cas \mathcal{H}_∞ .

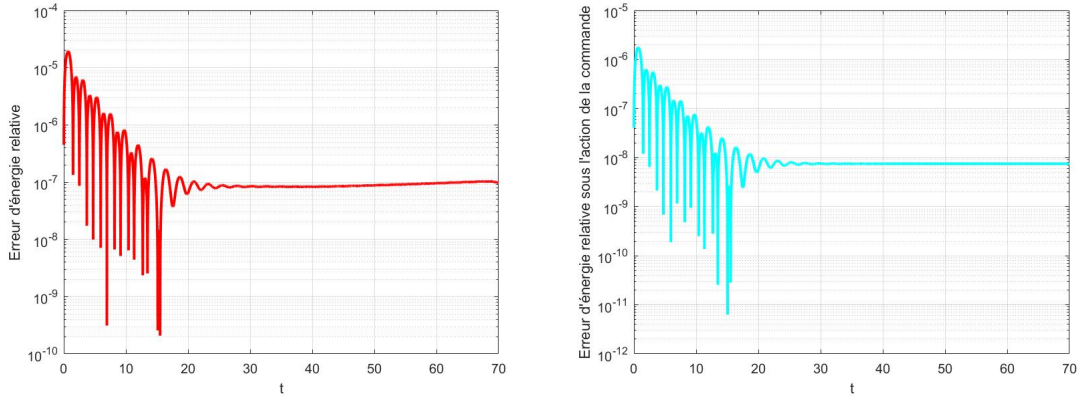


FIGURE 5.7 – A gauche l'évolution temporelle de l'erreur de l'énergie totale de f_h , à droite celle sous l'action de $\mathbf{u}_h = -\mathbf{K}\tilde{\mathbf{f}}_h$ sur un maillage (120×120) à $T = 70$ cas \mathcal{H}_∞ .

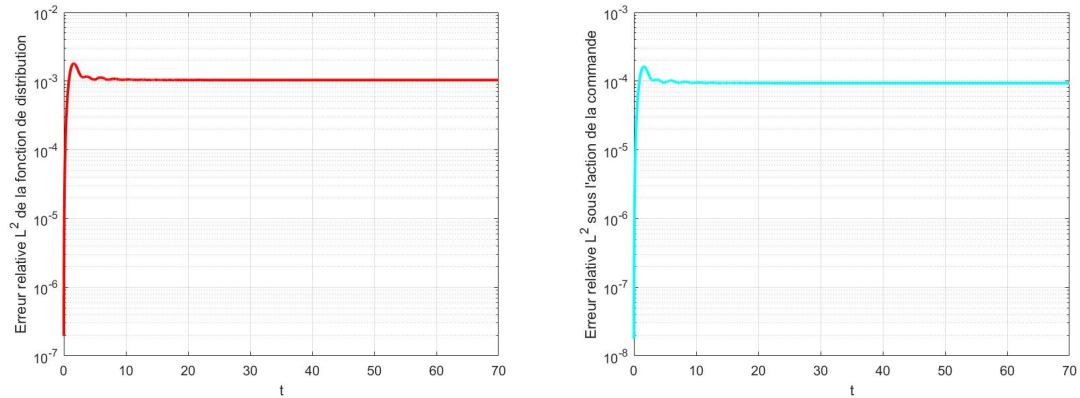


FIGURE 5.8 – A gauche l'erreur de conservation L^2 de f_h et à droite celle sous l'action de $\mathbf{u}_h = -\mathbf{K}\tilde{\mathbf{f}}_h$ sur un maillage (120×120) cas \mathcal{H}_∞ .

5.4 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons étudié la stabilité par retour d'état d'observateur de l'équation de Vlasov-Poisson en dimension finie en adoptant une approche basée sur le théorème DMVT. La structure des matrices obtenues avec la méthode de GD nous permet de démontrer la stabilité asymptotique du système de VP sous forme des LMIs. Nous avons ensuite traité en dimension finie le cas \mathcal{H}_∞ où le système comporte des perturbations. Nous avons également étudié la stabilité exponentielle de l'équation VP sous l'action de la commande basée observateur. Nous illustrons par des exemples numériques.

Conclusion générale et Perspectives

Conclusion générale

Dans ce manuscrit, nous avons présenté les résultats de synthèse d'observateurs d'état et de lois commandes d'une classe d'EDPs non linéaires et à grande dimension, avec une application aux équations de Vlasov-Poisson $1D \times 1D$. L'idée principale, pour s'assurer de la stabilité et de la conservation des propriétés physiques de l'équation de (VP), est de le discrétiser en dimension finie. Ensuite, nous proposons une synthèse d'observateur de Luenberger, de commande linéaire et de commande basée observateur. Nous avons également proposé en dimension infinie la synthèse d'observateur par la méthode du « *Backstepping* ».

Le chapitre 1 présente les définitions et le contexte des travaux effectués liés au système de Vlasov-Poisson. Il présente les propriétés physiques importantes notamment : le principe du maximum, conservation de masse totale, de l'énergie totale, conservation du moment, conservation de la charge et conservation à la norme L^p au cours du temps.

Nous avons ensuite, dans le chapitre 2, présenté et détaillé le schéma numérique de la méthode de Galerkin discontinue pour l'équation de Vlasov et une approximation par éléments finis mixte de Raviart-Thomas à l'équation de Poisson. Cette étape est fondamentale pour l'étude des LMIs tout au long de ce mémoire. Ce chapitre s'achève par des solutions numériques qui vérifient les conservations de l'énergie totale et de norme L^2 .

Afin de situer au mieux notre travail, le chapitre 3 a été consacré d'une part à l'analyse de stabilité au sens de Lyapunov, à la théorie de conception d'observation et l'état de l'art de la conception d'estimateur d'un système non linéaire. Il rappelle également la méthode de « *Backstepping* » et synthèse d'observateur d'EDPs de l'équation de réaction-diffusion. Le chapitre 3 rappelle d'autre part, les définitions et propriétés des problèmes des formulations en LMIs. Ensuite il traite quelques applications des LMIs et l'état de l'art des techniques de stabilisation du système commandé.

Le chapitre 4, présente la synthèse d'observateur de l'équation de Vlasov-Poisson en dimension finie d'une part, en adoptant une approche basée sur l'utilisation du théorème des accroissements finis (DMVT). Les techniques de calcul LPV permettent d'obtenir des conditions de stabilité sous forme d'inégalité matricielle linéaire (LMI). Il présente également la synthèse d'observateur \mathcal{H}_∞ . D'autre part il présente la synthèse d'observateur d'état en dimension infinie de l'équation de Vlasov $1D \times 1D$ par la technique du «

Backstepping ». Nous terminons ce chapitre par des résultats numériques pour valider les études.

Nous terminons ce mémoire par le chapitre 5 qui étudie la stabilisation par retour d'état d'une classe de systèmes d'EDPs non linéaires décrites par l'équation de Vlasov-Poisson en dimension finie. Nous présentons la stabilisation asymptotique sous les conditions d'LMIs de commande linéaire du retour d'état. Ensuite nous étudions la stabilisation asymptotique d'une commande basée observateur et le cas \mathcal{H}_∞ . Les résultats sont validés par des simulations numériques.

Perspectives

1. Étendre l'étude des observateurs et lois de commandes aux cas $2D$ et $3D$, c'est à dire respectivement 4 degrés $2D \times 2D$ et 6 degrés $3D \times 3D$ de libertés.
2. Aborder la commande par la méthode de « *Backstepping* ».
3. Étendre l'approche à des géométries complexes de Vlasov-Poisson.
4. Étendre l'approche à l'équation de Vlasov-Maxwell.

Conférences Nationales

- A. Cisse, M. Boutayeb. Représentation d'état d'ordre réduit des équations de Vlasov-Poisson. 8e Journées Doctorales / Journées Nationales MACS, JD-JN-MACS 2019, Jun 2019, Bordeaux, France.

Conférences Internationales

- A. Cisse, M. Boutayeb. Observers of Vlasov-Poisson system. 21st IFAC World Congress, IFAC 2020, Jul 2020, Berlin, Germany
- A. Cisse, M. Boutayeb. Backstepping based state observer design Vlasov-Poisson equation. SIAM Conference on Analysis of Partial Differential Equations, PD22, Mar 2022, Berlin, Germany.

Reuves internationales

- A. Cisse, M. Boutayeb. Software sensors design for a class of non linear coupled PDE systems : The Vlasov-Poisson dynamical system. (Soumis au Computer Physics Communications 08 Janvier 2023)
- A. Cisse, M. Boutayeb. On state feedback control of a class of Non-Linear PDE systems in finit dimension. (Soumis au Nonlinear Analysis : Hybrid Systems 05 Janvier 2022)

- A. Cisse, M. Boutayeb. Backstepping based infinite dimensional state observer design for the non linear coupled Vlasov-Poisson equation. (Soumis à IEEE TAC 09 Janvier 2022)

Bibliographie

- [1] P Shi NB Braiek A Chibani, M Chadli. Fuzzy fault detection filter design for T–S fuzzy systems in the finite-frequency domain. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 25(5) :1051–1061, 2016.
- [2] G. Bara A. Zemouche, M. Boutayeb. Observers for a class of Lipschitz systems with extension to H_∞ performance analysis. *System and Control Letters*, 2008.
- [3] Masoud Abbaszadeh and Horacio J Marquez. Nonlinear observer design for one-sided Lipschitz systems. In *Proceedings of the 2010 American control conference*, pages 5284–5289. IEEE, 2010.
- [4] Marc Abeille and Alessandro Lazaric. Thompson sampling for linear-quadratic control problems. In *Artificial Intelligence and Statistics*, pages 1246–1254. PMLR, 2017.
- [5] Shmuel Agmon. *Lectures on elliptic boundary value problems*, volume 369. American Mathematical Soc., 2010.
- [6] Tarek Ahmed-Ali and Francoise Lamnabhi-Lagarrigue. Sliding observer-controller design for uncertain triangular nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 44(6) :1244–1249, 1999.
- [7] A. Alessandri. Design of observers for Lipschitz nonlinear systems using LMI. *IFAC Proceedings Volumes*, 37(13) :459–464, 2004. 6th IFAC Symposium on Nonlinear Control Systems 2004 (NOLCOS 2004), Stuttgart, Germany, 1-3 September, 2004.
- [8] Douglas N Arnold. An interior penalty finite element method with discontinuous elements. *SIAM journal on numerical analysis*, 19(4) :742–760, 1982.
- [9] Douglas N Arnold, Franco Brezzi, Bernardo Cockburn, and L Donatella Marini. Unified analysis of discontinuous Galerkin methods for elliptic problems. *SIAM journal on numerical analysis*, 39(5) :1749–1779, 2002.
- [10] A.A. Arsenev. Global existence of a weak solutions of Vlasov’s system of equations. *U.S.S.R. Comput. Math. Math. Phys.*, (15) :131–143, (1975).
- [11] A.A. Arsenev. Some estimates for the solution of the Vlasov equation. (*Russian*) *zh. Vychiol. Math. i Math. Fiz.*, (1) :80–87, (1985).
- [12] Ahmad N Atassi and Hassan K Khalil. A separation principle for the stabilization of a class of nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 44(9) :1672–1687, 1999.

- [13] M. J. Corless B. L. Walcott and S. H. Zak. Comparative study of nonlinear state observation techniques. *Int. J. of Control*, 45(6) :2109–2132, 1987.
- [14] Dmitry V Balandin and Mark M Kogan. Lmi based output-feedback controllers : γ -optimal versus linear quadratic. *IFAC Proceedings Volumes*, 41(2) :9905–9909, 2008.
- [15] Mark J Balas. Do all linear flexible structures have convergent second-order observers? *Journal of guidance, control, and dynamics*, 22(6) :905–908, 1999.
- [16] C. Bardos and P. Degond. Global existence for the Vlasov-poisson equation in 3 spaces variables with small initial data. *Ann. Inst. Henri Poincaré, Anal. non linéaire*, (2) :101–118, (1985).
- [17] Mohamed Benallouch, Mohamed Boutayeb, and Michel Zasadzinski. Observer design for one-sided Lipschitz discrete-time systems. *Systems & Control Letters*, 61(9) :879–886, 2012.
- [18] O. Bernard and J. L. Gouze. State estimation for bioprocesses. *Mathematical Control Theory*, (Trieste) :ICTP, 2002.
- [19] O. Bernard, G. Sallet, and A. Sciandra. Nonlinear observers for a class of biological systems : application to validation of a phytoplanktonic growth model. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 43(8) :1056–1065, 1998.
- [20] Nicolas Besse. Etude mathématique et numérique de l'équation de Vlasov non linéaire sur des maillages non structurés de l'espace des phases. Technical report, 2003.
- [21] C.K. Birdsall and A.B. Langdon. Plasma Physics via Computer Simulation. *Institute of Physics (IOP), Series in Physics*, 1991.
- [22] Stephen Boyd, Laurent El Ghaoui, Eric Feron, and Venkataramanan Balakrishnan. *Linear matrix inequalities in system and control theory*. SIAM, 1994.
- [23] Franco Brezzi and Michel Fortin. *Mixed and hybrid finite element methods*, volume 15. Springer Science & Business Media, 2012.
- [24] Bor-Sen Chen, Kai-Chih Yang, and Min-Yen Lee. Robust H_∞ NLOS-Tolerant localization filter and nlos-tolerant remote reference tracking control of mobile robot in Wireless Sensor Networks. *IEEE Access*, 9 :164801–164819, 2021.
- [25] Zhiyong Chen and Jie Huang. Stabilization and regulation of nonlinear systems. *Cham, Switzerland : Springer*, 2015.
- [26] Chio-Zong Cheng and Georg Knorr. The integration of the Vlasov equation in configuration space. *Journal of Computational Physics*, 22(3), pages 330–351, 1976.
- [27] Graziano Chesi. LMI techniques for optimization over polynomials in control : a survey. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 55(11) :2500–2510, 2010.
- [28] G. E. Chilov. *Analyse mathématique Cours spécial*, volume -436 p. -M. :GIFML, 1961.
- [29] Chian-Song Chiu. Mixed feedforward/feedback based adaptive fuzzy control for a class of mimo nonlinear systems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 14(6) :716–727, 2006.

- [30] Philippe G Ciarlet. Basic error estimates for elliptic problems. 1991.
- [31] Amadou Cisse and Mohamed Boutayeb. Représentation d'état d'ordre réduit des équations de Vlasov-Poisson. In *8e Journées Doctorales / Journées Nationales MACS, JD-JN-MACS 2019*, Bordeaux, France, June 2019.
- [32] Amadou Cisse and Mohamed Boutayeb. Observers of Vlasov-Poisson system. *IFAC-PapersOnLine*, 53(2) :5946–5951, 2020. 21st IFAC World Congress.
- [33] Amadou Cisse and Mohamed Boutayeb. Backstepping based state observer design Vlasov-Poisson equation. SIAM Conference on Analysis of Partial Differential Equations, PD22, March 2022. Poster.
- [34] J. Cooper and A. Klimas. Boundary value problems for the Vlasov-Maxwell equation in one dimension. *J. Math. Anal. Appl.*, pages 306–329, (1980).
- [35] Jean-Michel Coron. Sur la stabilisation des fluides parfaits incompressibles bidimensionnels. *Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) dit aussi "Séminaire Goulaouic-Schwartz"*, 1998-1999. talk :7.
- [36] Jean-Michel Coron. On the null asymptotic stabilization of the two-dimensional incompressible Euler equations in a simply connected domain. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 37(6) :1874–1896, 1999.
- [37] David Coulette. *Simulation numérique de modèles cinétiques réduits pour l'étude de la dynamique des plasmas de fusion par confinement magnétique*. PhD thesis, Université de Lorraine, December 2013.
- [38] N. Crouseilles, T. Respaud, and E. Sonnendrucker. A forward Semi-Lagrangian method for the numerical solution of the Vlasov equation. *Computer Physics Communications Communications*, 180(10), pages 1730–1745, 2009.
- [39] Michel Crouzeix and Vidar Thomée. The stability in L_p and W_p^1 of the l_2 -projection onto finite element function spaces. *Mathematics of computation*, 48(178) :521–532, 1987.
- [40] Kees Dekker. Stability of Runge-Kutta methods for stiff nonlinear differential equations. *CWI Monographs*, 2, 1984.
- [41] Michael A Demetriou. Natural second-order observers for second-order distributed parameter systems. *Systems & control letters*, 51(3-4) :225–234, 2004.
- [42] BaoCang Ding, HeXu Sun, and Peng Yang. Further studies on LMI-based relaxed stabilization conditions for nonlinear systems in Takagi–Sugeno's form. *Automatica*, 42(3) :503–508, 2006.
- [43] Thach Ngoc Dinh, Vincent Andrieu, Madiha Nadri, and Ulysse Serres. Continuous-discrete time observer design for Lipschitz systems with sampled measurements. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 60(3) :787–792, 2014.
- [44] Blanca Ayuso De Dios, José A. Carrillo, and Chi-Wang Shu. Discontinuous Galerkin methods for the multi-dimensional Vlasov-Poisson problem. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 22(12) :1250042, 2012.
- [45] Blanca Ayuso De Dios, José A Carrillo, and Chi-Wang Shu. Discontinuous Galarkin Methods for One-Dimensional Vlasov System. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 2011.

- [46] R.J. Diperna and P.L. Lions. Solutions globales d'équations du type Vlasov-poisson. *C.R. Acad. Sci. Paris Ser., I* :655–658, (1988).
- [47] Adrien Drouot. *Stratégies de commande pour la navigation autonome d'un drone projectile miniature*. PhD thesis, Université de Lorraine, 2013.
- [48] Christopher Edwards and Sarah Spurgeon. *Sliding mode control : theory and applications*. Crc Press, 1998.
- [49] F Esfandiari and Hassan K Khalil. Observer-based design of uncertain systems : recovering state feedback robustness under matching conditions. In *Proc. Allerton Conf*, pages 97–106, 1987.
- [50] Farzad Esfandiari and Hassan K Khalil. Output feedback stabilization of fully linearizable systems. *International Journal of control*, 56(5) :1007–1037, 1992.
- [51] F. E.THAU. Observing the state of non-linear dynamic systems. *International Journal of Control*, 17(3) :471–479, 1973.
- [52] M Farooq, Wang Daobo, and NU Dar. Improved hybrid position/force controller design of a flexible robot manipulator using a sliding observer. *Journal of Systems Engineering and Electronics*, 20(1) :146–158, 2009.
- [53] Mondher Farza, Krishna Busawon, and Hassan Hammouri. Simple nonlinear observers for on-line estimation of kinetic rates in bioreactors. *Autom.*, 34 :301–318, 1998.
- [54] Francis Filbet and Tao Xiong. Conservative discontinuous Galerkin/Hermite spectral method for the vlasov–poisson system. *Communications on Applied Mathematics and Computation*, pages 1–26, 2020.
- [55] Pascal Gahinet, Arkadii Nemirovskii, Alan J Laub, and Mahmoud Chilali. The LMI control toolbox. In *Proceedings of 1994 33rd IEEE Conference on Decision and Control*, volume 3, pages 2038–2041. IEEE, 1994.
- [56] Lucia Gastaldi and Ricardo Nochetto. Optimal L^∞ -error estimates for nonconforming and mixed finite element methods of lowest order. *Numerische Mathematik*, 50(5) :587–611, 1987.
- [57] J.P. Gauthier, H. Hammouri, and S. Othman. A simple observer for nonlinear systems applications to bioreactors. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 37(6) :875–880, 1992.
- [58] Mohamed Ghattassi. *Modélisation, observation et commande d'une classe d'équations aux dérivées partielles : application aux matériaux semi-transparents*. PhD thesis, Université de Lorraine, September 2015.
- [59] Olivier Glass. On the controllability of the Vlasov-Poisson system. *Journal of Differential Equations*, 195(2) :332–379, 2003.
- [60] Olivier Glass. Asymptotic stabilizability by stationary feedback of the two-dimensional Euler equation : The multiconnected case. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 44(3) :1105–1147, 2005.
- [61] Olivier Glass. Controllability and asymptotic stabilization of the camassa ? Holm equation. *Journal of Differential Equations*, 245(6) :1584–1615, 2008.

- [62] Thierry Marie Guerra and Laurent Vermeiren. LMI-based relaxed nonquadratic stabilization conditions for nonlinear systems in the Takagi–Sugeno’s form. *Automatica*, 40(5) :823–829, 2004.
- [63] Ernst Hairer, Syvert P Nørsett, and Gerhard Wanner. *Solving ordinary differential equations. 1, Nonstiff problems*. Springer-Vlg, 1993.
- [64] Didier Henrion and J-B Lasserre. Solving nonconvex optimization problems. *IEEE Control Systems Magazine*, 24(3) :72–83, 2004.
- [65] R. Hermann and A. Krener. Nonlinear controllability and observability. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 22(5) :728–740, 1977.
- [66] J. S. Hesthaven and T. Warburton. *Nodal Discontinuous Galerkin Methods : Algorithms, Analysis, and Applications*. Springer, 2008.
- [67] Guang-Da Hu. Observers for one-sided Lipschitz non-linear systems. *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, 23(4) :395–401, 2006.
- [68] Salim Ibrir. Circle-criterion observers for dynamical systems with positive and non-positive slope nonlinearities. In *2007 American Control Conference*, pages 260–265. IEEE, 2007.
- [69] R. Illner and H. Neunzert. An existence theorem for the unmodified Vlasov’s equation. *Math. Math. Appl. Sci*, 1 :530–544, (1979).
- [70] S.V. Iordanskii. The Cauchy problem for kinetic equation of plasma. *Transl. II. Ser. An. Math. Soc.*, 35 :351–363, (1964).
- [71] Shafiqul Islam and Xiaoping P. Liu. Robust sliding mode control for robot manipulators. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 58(6) :2444–2453, 2011.
- [72] T Iwasaki and RE Skelton. The xy-centring algorithm for the dual LMI problem : a new approach to fixed-order control design. *International Journal of Control*, 62(6) :1257–1272, 1995.
- [73] T Iwasaki, RE Skelton, and JC Geromel. Linear quadratic suboptimal control with static output feedback. *Systems & Control Letters*, 23(6) :421–430, 1994.
- [74] Lukas Jadachowski, Thomas Meurer, and A. Kugi. Backstepping observers for periodic quasi-linear parabolic PDEs. *IFAC Proceedings Volumes (IFAC-PapersOnline)*, 19 :7761–7766, 01 2014.
- [75] Lukas Jadachowski, Thomas Meurer, and Andreas Kugi. State estimation for parabolic PDEs with varying parameters on 3-dimensional spatial domains. *IFAC Proceedings Volumes*, 44(1) :13338–13343, 2011.
- [76] Lukas Jadachowski, Thomas Meurer, and Andreas Kugi. An efficient implementation of backstepping observers for time-varying parabolic PDEs. *IFAC Proceedings Volumes*, 45(2) :798–803, 2012.
- [77] HASSANK Khalil and Ali Saberi. Adaptive stabilization of a class of nonlinear systems using high-gain feedback. *IEEE Transactions on automatic control*, 32(11) :1031–1035, 1987.
- [78] Michael V. Klibanov and Masahiro Yamamoto. Exact controllability for the time dependent transport equation. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 46(6) :2071–2195, 2007.

- [79] Patrik Knopf. Optimal control of a Vlasov-Poisson plasma by an external magnetic field—the basics for variational calculus. *arXiv preprint arXiv :1708.02464*, 2017.
- [80] Basil Kouvaritakis, J Anthony Rossiter, and Jan Schuurmans. Efficient robust predictive control. *IEEE Transactions on automatic control*, 45(8) :1545–1549, 2000.
- [81] A. J. Krener and A. Isidori. Linearization by output injection and nonlinear observers. systems and control letters. *Systems and Control Letters*, 3(1), pages 47–52, 1983.
- [82] A. J. Krener and W. Respondek. Nonlinear observer with linearizable error dynamics. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 23(2) :, pages 197–216, 1985.
- [83] Miroslav Krstic, Petar V Kokotovic, and Ioannis Kanellakopoulos. *Nonlinear and adaptive control design*. John Wiley & Sons, Inc., 1995.
- [84] Miroslav Krstic and Andrey Smyshlyaev. *Boundary control of PDEs : A course on Backstepping designs*. SIAM, 2008.
- [85] R. Kurth. Das Anfangswertproblem der stellardynamick, 2. *Astrophys.*, (30) :213–229, (1952).
- [86] Guohui Li. A Study on Stable Behaviors of Inverted-Pendulum under Microgravity Environments via an Improved LMI Approach. *Microgravity Science and Technology*, 23(1) :129–139, 2011.
- [87] Guohui Li and Xue Liu. Dynamic characteristic prediction of inverted pendulum under the reduced-gravity space environments. *Acta Astronautica*, 67(5-6) :596–604, 2010.
- [88] Yan Li, Jian Liang Wang, and Guang-Hong Yang. Sub-optimal linear quadratic control for singularly perturbed systems. In *Proceedings of the 40th IEEE Conference on Decision and Control (Cat. No. 01CH37228)*, volume 4, pages 3698–3703. IEEE, 2001.
- [89] Fang Liao, Jian Liang Wang, and Guang-Hong Yang. Reliable robust flight tracking control : an LMI approach. *IEEE transactions on control systems technology*, 10(1) :76–89, 2002.
- [90] F.L. Liu, M. Farza, M. M'Saad, and H. Hammouri. Observer design for a class of uniformly observable mimo nonlinear systems with coupled structure. *IFAC Proceedings Volumes*, 41(2) :7630–7635, 2008. 17th IFAC World Congress.
- [91] SX Ding M Chadli, A Abdo. H^-/H^∞ fault detection filter design for discrete-time Takagi–Sugeno fuzzy system. *Automatica*, 49(7) :1996–2005, 2013.
- [92] TM Guerra M Chadli. LMI solution for robust static output feedback control of discrete Takagi–Sugeno fuzzy models. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 20(6) :1160–1165, 2012.
- [93] Eric Madaule, Marco Restelli, and Eric Sonnendrücker. Energy conserving discontinuous Galerkin spectral element method for Vlasov-Poisson system. *Journal of Computational Physics*, 279 : 261-288,, 2014.
- [94] Ian R Manchester and Jean-Jacques E Slotine. Robust control contraction metrics : A convex approach to nonlinear state-feedback \mathcal{H}_∞ control. *IEEE Control Systems Letters*, 2(3) :333–338, 2018.

- [95] Gianmarco Manzini, Daniele Funaro, and Gian Luca Delzanno. Convergence of Spectral Discretizations of the Vlasov–Poisson system. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 55(5) :2312–2335, 2017.
- [96] Thomas Meurer. On the extended luenberger-type observer for semilinear distributed-parameter systems. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 58 :1732–1743, 07 2013.
- [97] Thomas Meurer and Andreas Kugi. Tracking control for boundary controlled parabolic PDEs with varying parameters : Combining backstepping and differential flatness. *Automatica*, 45(5) :1182–1194, 2009.
- [98] E. A. Misawa and J. K. Hedrick. Nonlinear observers—a state of the art survey. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and control*, 111 :344–352., (1989).
- [99] Yurii Nesterov and Arkadii Nemirovskii. *Interior-point polynomial algorithms in convex programming*. SIAM, 1994.
- [100] Sing Kiong Nguang and Peng Shi. H/sub/spl infin//fuzzy output feedback control design for nonlinear systems : an LMI approach. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 11(3) :331–340, 2003.
- [101] Tu Duc Nguyen. Second-order observers for second-order distributed parameter systems in \mathbb{R}^2 . *Systems & Control Letters*, 57(10) :787–795, 2008.
- [102] David Niemann, Jing Li, Hua O Wang, and Kazuo Tanaka. Parallel distributed compensation for Takagi-Sugeno fuzzy models : New stability conditions and dynamic feedback designs. *IFAC Proceedings Volumes*, 32(2) :5374–5379, 1999.
- [103] Henk Nijmeijer and Arjan van der Schaft. *Controllability and Observability, Local Decompositions*, pages 67–105. Springer New York, 1990.
- [104] Hendra I Nurdin, Nina H Amini, and Jiayin Chen. Data-driven system identification of linear quantum systems coupled to time-varying coherent inputs. In *2020 59th IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, pages 3829–3835. IEEE, 2020.
- [105] Pegah Ojaghi and Mehdi Rahmani. LMI-based robust predictive load frequency control for power systems with communication delays. *IEEE Transactions on Power Systems*, 32(5) :4091–4100, 2017.
- [106] Juntao Pan, Fang Liu, Yong Niu, and Bai Zhang. On local non-quadratic H_∞ filtering of continuous-time TS fuzzy systems. In *2016 Chinese Control and Decision Conference (CCDC)*, pages 6675–6680. IEEE, 2016.
- [107] Joseph T Parker and Paul J Dellar. Fourier–Hermite spectral representation for the Vlasov–Poisson system in the weakly collisional limit. *Journal of Plasma Physics*, 81(2), 2015.
- [108] Marcin Pazera, Mariusz Buciakowski, and Marcin Witczak. Robust multiple sensor fault-tolerant control for dynamic non-linear systems : Application to the aerodynamical twin-rotor system. *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science*, 28(2), 2018.
- [109] Ramesh Perla and Siddhartha Mukhopadhyay. Observer design for Lipschitz nonlinear systems with state dependency and nonlinearity distribution. In *2005 Annual IEEE India Conference-Indicon*, pages 437–441. IEEE, 2005.

- [110] Nhung Pham. *Méthodes numériques pour l'équation de Vlasov réduite*. PhD thesis, Université de Strasbourg, 2016.
- [111] G Phanomchoeng and Rh Rajamani. Observer design for Lipschitz nonlinear systems using riccati equations. In *Proceedings of the 2010 American Control Conference*, pages 6060–6065. IEEE, 2010.
- [112] Gridsada Phanomchoeng, Rajesh Rajamani, and Damrongrit Piyabongkarn. Non-linear observer for bounded jacobian systems, with applications to automotive slip angle estimation. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 56(5) :1163–1170, 2011.
- [113] Kim Dang Phung. Stabilization of the incompressible 2D Euler equations in a simply connected domain utilizing the lorentz force. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 293(2) :389–404, 2004.
- [114] D. A. Pietro and A. Ern. *Mathematical Aspects of Discontinuous Galerkin Methods*. Springer Science, 2011.
- [115] HEDRICK J. KARL RAGHAVAN, SEKHAR. Observer design for a class of non-linear systems. *International Journal of Control*, 59(2) :515–528, 1994.
- [116] R. Rajamani. Observers for Lipschitz nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 43(3) :397–401, 1998.
- [117] James A. Rossmannith and David C. Seal. A positivity-preserving high-order semi-Lagrangian discontinuous Galerkin scheme for the Vlasov–Poisson equations. *Journal of Computational Physics*, 230(16) :6203–6232, 2011.
- [118] E. Feron S. Boyd, L. E. Ghaoul and V. Balakrishnan. *Linear Matrix Inequalities in system and control theory*. SIAM, 1994.
- [119] Ali Saberi and Peddapullaiah Sannuti. Observer design for loop transfer recovery and for uncertain dynamical systems. In *1988 American Control Conference*, pages 803–808. IEEE, 1988.
- [120] Carsten W Scherer. An efficient solution to multi-objective control problems with lmi objectives. *Systems & control letters*, 40(1) :43–57, 2000.
- [121] J Schuurmans and JA Rossiter. Robust predictive control using tight sets of predicted states. *IEE proceedings-Control theory and applications*, 147(1) :13–18, 2000.
- [122] JT Scruggs. Multi-objective optimal causal control of an ocean wave energy converter in random waves. In *OCEANS'11 MTS/IEEE KONA*, pages 1–6. IEEE, 2011.
- [123] DD Šiljak and Dusan M Stipanovic. Robust stabilization of nonlinear systems : The LMI approach. *Mathematical problems in Engineering*, 6(5) :461–493, 2000.
- [124] Andrey Smyshlyaev and Miroslav Krstic. Backstepping observers for a class of parabolic pdes. *Systems & Control Letters*, 54(7) :613–625, 2005.
- [125] Sonnendrücker, Eric, Roche, Jean, Bertrand, Pierre, Ghizzo, and Alain. The semi-lagrangian method for the numerical resolution of the Vlasov equation. *Journal of computational physics*, 149(2) :201–220, 1999.
- [126] Eric Sonnendrücker and K Kormann. *Numerical methods for vlasov equations*. Lecture notes, 2013.

- [127] Sontag and Eduardo D. A concept of local observability. *Systems and Control Letters*, 5(1) :41–47, oct 1984.
- [128] Christophe Steiner. *Résolution numérique de l'opérateur de gyromoyenne, schémas d'advection et couplage : applications à l'équation de Vlasov*. PhD thesis, Université de Strasbourg, 2014.
- [129] Kiyotsugu Takaba. Linear quadratic optimal control for linear implicit system. In *Proceedings of the 38th IEEE Conference on Decision and Control (Cat. No. 99CH36304)*, volume 4, pages 4074–4079. IEEE, 1999.
- [130] Andrew Teel and Laurent Praly. Global stabilizability and observability imply semiglobal stabilizability by output feedback. *Systems & Control Letters*, 22(5) :313–325, 1994.
- [131] Andrew Teel and Laurent Praly. Tools for semiglobal stabilization by partial state and output feedback. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 33(5) :1443–1488, 1995.
- [132] Antonio Tornambè. Use of asymptotic observers having-high-gains in the state and parameter estimation. In *Proceedings of the 28th IEEE Conference on Decision and Control*,, pages 1791–1794. IEEE, 1989.
- [133] Antonio Tornambè. Output feedback stabilization of a class of non-minimum phase nonlinear systems. *Systems & Control Letters*, 19(3) :193–204, 1992.
- [134] Hieu Trinh and Tyrone Fernando. *Functional observers for dynamical systems*, volume 420. Springer Science & Business Media, 2011.
- [135] David Tskhakaya and Ralf Schneider. Optimisation of pic codes by improved memory management. *Journal of Computational Physics*, 225(1), pages 829–839, 2007.
- [136] S. Ukai and T. Okabe. On classical solution in the large in time of two dimensional Vlasov's equation. *Osaka, J. Math.*, 15 :245–261, (1978).
- [137] Lieven Vandenberghe and Venkataramanan Balakrishnan. Algorithms and software for LMI problems in control. *IEEE Control Systems Magazine*, 17(5) :89–95, 1997.
- [138] Rafael Vazquez and Miroslav Krstic. Boundary observer for output-feedback stabilization of thermal-fluid convection loop. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 18(4) :789–797, 2009.
- [139] Rafael Vazquez, Miroslav Krstic, and Jean-Michel Coron. Backstepping boundary stabilization and state estimation of a 2×2 linear hyperbolic system. In *2011 50th IEEE conference on decision and control and european control conference*, pages 4937–4942. IEEE, 2011.
- [140] V Vinoth, Yogesh Singh, Jayant Kumar Mohanta, and M Santhakumar. Robust disturbance observer based sliding mode control of a planar parallel (3-ppr) manipulator. In *2014 Students Conference on Engineering and Systems*, pages 1–6. IEEE, 2014.
- [141] Jan Willems. Least squares stationary optimal control and the algebraic Riccati equation. *IEEE Transactions on automatic control*, 16(6) :621–634, 1971.

- [142] Fen Wu. Lmi-based robust model predictive control and its application to an industrial CSTR problem. *Journal of process control*, 11(6) :649–659, 2001.
- [143] Mingyue Xu, Guang-Da Hu, and Yanbin Zhao. Reduced-order observer design for one-sided Lipschitz non-linear systems. *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, 26(3) :299–317, 2009.
- [144] Michael Zeitz. The extended Luenberger observer for nonlinear systems. *Systems & Control Letters*, 9(2) :149–156, 1987.
- [145] Ali Zemouche. *Sur l'observation de l'état des systèmes dynamiques non linéaires*. PhD thesis, Université Louis Pasteur-Strasbourg I, 2007.
- [146] Ali Zemouche and Mohamed Boutayeb. Nonlinear-observer-based \mathcal{H}_∞ synchronization and unknown input recovery. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I : Regular Papers*, 56(8) :1720–1731, 2008.
- [147] Ali Zemouche and Mohamed Boutayeb. On LMI conditions to design observers for Lipschitz nonlinear systems. *Automatica*, 49(2) :585–591, 2013.
- [148] Ali Zemouche, Mohamed Boutayeb, and G Iulia Bara. Observers for a class of Lipschitz systems with extension to h performance analysis. *Systems & Control Letters*, 57(1) :18–27, 2008.
- [149] Guofeng Zhang and Matthew R James. Direct and indirect couplings in coherent feedback control of linear quantum systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 56(7) :1535–1550, 2010.
- [150] Yanbin Zhao, Jian Tao, and Ning-Zhong Shi. A note on observer design for one-sided Lipschitz nonlinear systems. *Systems & Control Letters*, 59(1) :66–71, 2010.

Annexe A

Outils techniques

A.1 Opérateurs de projection

Soit $k \geq 0$ et soit $\mathcal{P}_h : L^2(\Omega) \rightarrow \mathcal{Z}_h^k$ soit la projection standard $2d - L^2$. Nous désignons par $\mathcal{P}_\mathbf{x} : L^2(\Omega) \rightarrow X_h^k$ et $\mathcal{P}_\mathbf{v} : L^2(\Omega) \rightarrow V_h^k$ les projections standard d -dimensionnelles L^2 sur les espaces X_h^k et V_h^k , respectivement, et nous notons que \mathcal{P}_h peut s'écrire comme suit

$$\mathcal{P}_h = \mathcal{P}_\mathbf{x} \otimes \mathcal{P}_\mathbf{v}.$$

La projection \mathcal{P}_h satisfait (voir [30] et [5])

$$\|w - \mathcal{P}_h(w)\|_{0, \mathcal{T}_h} + h^{1/2} \|w - \mathcal{P}_h(w)\|_{0, \Gamma_h} \leq Ch^{k+1} \|w\|_{k+1, \Omega} \quad \forall w \in H^{k+1}(\Omega), \quad (\text{A.1})$$

avec C ne dépendant que de la régularité de la forme de la triangulation et du degré polynomial. Par définition, \mathcal{P}_h est stable dans L^2 et on peut montrer qu'elle est stable dans toutes les normes L^p (voir [39] pour plus de détails);

$$\|\mathcal{P}_h(w)\|_{L^p(\mathcal{T}_h)} \leq C \|w\|_{L^p(\Omega)} \quad \forall w \in L^p(\Omega) \quad 1 \leq p \leq \infty. \quad (\text{A.2})$$

Nous avons également des propriétés d'approximation de la norme (voir [30]);

$$\|w - \mathcal{P}_h(w)\|_{0, \infty, \mathcal{T}_h} \leq Ch^{k+1} \|w\|_{k+1, \infty, \Omega} \quad \forall w \in W^{k+1, \infty}(\Omega). \quad (\text{A.3})$$

$\mathcal{P}_\mathbf{x}$ and $\mathcal{P}_\mathbf{v}$ satisfont également les propriétés (A.2) and (A.3). De plus, nous utiliserons également

$$\|w - \mathcal{P}_\mathbf{r}(w)\|_{0, \mathcal{T}_h} \leq Ch^{k+1} \|w\|_{k+1, \Omega} \quad \forall w \in H^{k+1}(\Omega), \quad \mathbf{r} = \mathbf{x} \text{ ou } \mathbf{v}$$

Projection de Raviart Thomas : Pour $k \geq 0$, nous désignons par \mathcal{R}_h^k l'opérateur d'interpolation locale qui satisfait le diagramme de commutation (A.1).

Où \hat{P}_h^k fait référence à l'opérateur de projection L^2 standard sur Q_h^k . Le diagramme de commutation ci-dessus exprime que $\text{div}(\Sigma_h^k) = Q_h^k$ et

$$\text{div} \mathcal{R}_h^k(\tau) = \hat{P}_h^k(\text{div} \tau) \quad \forall \tau \in H(\text{div}; \Omega_\mathbf{x}) \quad (\text{A.4})$$

$$\begin{array}{ccc}
H(\operatorname{div}; \Omega_{\mathbf{x}}) & \xrightarrow{\operatorname{div}} & L_0^2(\Omega_{\mathbf{x}}) \\
\mathcal{R}_h^k \downarrow & & \downarrow \bar{P}_h^k \\
\Sigma_h^k & \xrightarrow{\operatorname{div}} & Q_h^k
\end{array}$$

FIGURE A.1 – Diagramme de commutation

En particulier (A.4) vaut pour tout $\tau \in H^1(\Omega_{\mathbf{x}})^d$. Des propriétés d'approximation L^p optimales, avec $2 \leq p \leq \infty$ peuvent être montrées pour cet opérateur (voir [[23], Section III.3], [[23],[56]] pour plus de détails) :

$$\begin{aligned}
\|\tau - \mathcal{R}_h^k(\tau)\|_{L^p(\Omega_{\mathbf{x}})} + \|\operatorname{div}(\tau - \mathcal{R}_h^k(\tau))\|_{L^p(\Omega_{\mathbf{x}})} &\leq Ch^{k+1}\|\tau\|_{W^{k+1,p}(\Omega_{\mathbf{x}})} \\
&\forall \tau \in W^{k+1,p}(\Omega_{\mathbf{x}})^d
\end{aligned} \tag{A.5}$$

A.2 Preuves des Théorèmes du chapitre 2

A.2.1 Proposition (2.2.2)

Démonstration. En désignant par $\int_{\Gamma_r} = \sum_{e \in \Gamma_r} \int_e$, nous ferons un usage intensif de l'identité suivante (voir [8])

$$\sum_{T \in \mathcal{T}^r} \int_{\partial T^r} \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} \varphi ds_r = \int_{\Gamma_r} \{\boldsymbol{\tau}\} \cdot \llbracket \varphi \rrbracket ds_r + \int_{\Gamma_r^0} \llbracket \boldsymbol{\tau} \rrbracket \{\varphi\} ds_r \quad r = \mathbf{x}, \mathbf{v}. \tag{A.6}$$

En posant $\varphi_h = f_h$ dans (2.5), en intégrant les termes de volume qui en résultent et en utilisant (A.6) on obtient

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{\mathcal{R} \in \mathcal{T}_h} \mathcal{B}_{h,R}(E_h; f_h, f_h) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{\mathcal{R} \in \mathcal{T}_h} \left(\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{R}} f_h^2 d\mathbf{v} d\mathbf{x} - \int_{T^v} \int_{\Gamma_x} \mathbf{v} \cdot \llbracket f_h^2 \rrbracket ds_x d\mathbf{v} + \int_{T^x} \int_{\Gamma_v} E_h \cdot \llbracket f_h^2 \rrbracket ds_v d\mathbf{x} \right) \\
&\quad + \sum_{T^v \in \mathcal{T}_{h_v}} \int_{T^v} \int_{\Gamma_x} \{\mathbf{v} f_h\}_\alpha \cdot \llbracket f_h \rrbracket ds_x d\mathbf{v} - \sum_{T^x \in \mathcal{T}_{h_x}} \int_{T^x} \int_{\Gamma_v} \{E_h f_h\}_\beta \cdot \llbracket f_h \rrbracket ds_v d\mathbf{x}.
\end{aligned}$$

D'après la définition des opérateurs de trace (2.1), il s'ensuit que $\llbracket f_h^2 \rrbracket = 2\{f_h\}\llbracket f_h \rrbracket$ sur $e \in \Gamma_h^0$. En substituant l'identité ci-dessus avec la définition des flux numériques donnée dans (2.6), et en utilisant les conditions aux limites périodiques dans \mathbf{x} et le support compact dans \mathbf{v} , nous avons que

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} f_h^2 dv dx \\
&+ \sum_{T^v \in \mathcal{T}_{hv}^v} \int_{T^v} \int_{\Gamma_x^0} \frac{|v \cdot \mathbf{n}|}{2} \llbracket f_h \rrbracket^2 ds_x dv + \sum_{T^x \in \mathcal{T}_{hx}^x} \int_{T^x} \int_{\Gamma_v^0} \frac{|E_h \cdot \mathbf{n}|}{2} \llbracket f_h \rrbracket^2 ds_v dx.
\end{aligned}$$

En intégrant en temps de l'équation ci-dessus, de 0 à t conclut la preuve. \square

A.2.2 Lemme(2.3.1)

Démonstration. Pour simplifier la notation, nous laissons tomber la dépendance à la variable t . De [[23], II. Proposition 2.16] il s'ensuit que

$$\|E - E_h\|_{H(\text{div}; \Omega_x)} + \|\phi - \phi_h\|_{0, \Omega_x} \leq C \left(\inf_{\tau \in \Sigma_h^k} \|E - \tau\|_{H(\text{div}; \Omega_x)} + \inf_{q \in Q_h^k} \|\phi - q\|_{0, \mathcal{T}_{hx}^x} + M_{3h} \right), \tag{A.7}$$

où M_{3h} est l'erreur de consistance :

$$M_{3h} := \sup_{q \in Q_h^k} \frac{\left| \int_{\Omega_x} (\rho - \rho_h) q dx \right|}{\|q\|_{0, \mathcal{T}_{hx}^x}}.$$

Les deux premiers termes de (A.7) sont facilement estimés à partir des propriétés d'approximation standard des éléments de Raviart-Thomas ; les estimations (A.5) et l'approximation de la projection L_0^2 (A.1),

$$\inf_{\tau \in \Sigma_h^k} \|E - \tau\|_{H(\text{div}; \Omega_x)} + \inf_{q \in Q_h^k} \|\phi - q\|_{0, \mathcal{T}_{hx}^x} \leq Ch^{k+1} (\|E(t)\|_{k+1, \Omega_x} + \|\phi\|_{k+2, \Omega_x}).$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, ainsi que l'estimation (2.9), on trouve

$$M_{3h} \leq C \|\rho - \rho_h\|_{0, \mathcal{T}_{hx}^x} \leq CL^{d/2} \|f - f_h\|_{0, \mathcal{T}_h}$$

et la preuve de l'estimation dans la norme $H(\text{div}; \Omega_x)$ est complète. \square

Annexe B

Représentation spectrale de Fourier-Hermite

B.1 Lemmes

Lemme B.1.1 (Complément de Schur). Soient $P \in \mathbb{R}^{m \times m}$ une matrice définie positive, $X \in \mathbb{R}^{m \times n}$ une matrice de rang plein en ligne et $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ une matrice quelconque. Les deux inégalités suivantes sont équivalentes :

1. $Q(s) - X(s)^T P(s)^{-1} X(s) > 0, P(s) > 0$
2. $\begin{bmatrix} Q(s) & (*) \\ X(s) & P(s) \end{bmatrix} > 0.$

Lemme B.1.2. Soient Φ et Ψ deux matrices quelconques, Σ une matrice définie positive de dimension appropriée, alors on a

$$\forall \epsilon > 0 \quad \Psi \Phi^T + \Psi^T \Phi \leq \epsilon \Psi \Sigma \Psi^T + \frac{1}{\epsilon} \Phi \Sigma^{-1} \Phi^T$$

Lemme B.1.3 (Inégalité de Young). Pour tout a, b , il existe $\gamma > 0$,

$$ab \leq \frac{\gamma}{2} a^2 + \frac{1}{2\gamma} b^2. \quad (\text{B.1})$$

Lemme B.1.4 (Inégalité de Poincaré). Pour tout w , continuellement différentiable sur $[a, b]$,

$$\int_a^b w^2 dx \leq 2w^2(a) + 4 \int_a^b \partial_x w^2 dx. \quad (\text{B.2})$$

$$\int_a^b w^2 dx \leq 2w^2(b) + 4 \int_a^b \partial_x w^2 dx. \quad (\text{B.3})$$

B.2 Fonction de Bessel J_n

La fonction $y(x) = J_n(x)$ est une solution de l'ODE suivante :

$$x^2 y''_{xx} + x y'_x + (x^2 - n^2) y = 0.$$

Représentation en série :

$$J_n(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (x/2)^{n+2m}}{m!(m+n)!}$$

Propriétés :

$$2nJ_n(x) = x(J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x)), \quad (\text{B.4})$$

$$NJ_n(-x) = (-1)^n J_n(x). \quad (\text{B.5})$$

Différenciation :

$$\frac{d}{dx} J_n(x) = \frac{1}{2} (J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x)) = \frac{n}{x} J_n(x) - J_{n+1}(x) \quad (\text{B.6})$$

$$\frac{d}{dx} (x^n J_n(x)) = x^n J_{n-1}, \quad \frac{d}{dx} (x^{-n} J_n(x)) = -x^{-n} J_{n+1}. \quad (\text{B.7})$$

Propriétés asymptotiques

$$J_n(x) \approx \frac{1}{n!} \left(\frac{x}{2}\right)^n, \quad x \rightarrow 0. \quad (\text{B.8})$$

$$J_n(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\pi n}{2} - \frac{\pi}{4}\right), \quad x \rightarrow \infty. \quad (\text{B.9})$$

B.3 La fonction de Bessel modifiée I_n

La fonction $y(x) = I_n(x)$ est une solution de l'ODE suivante :

$$x^2 y''_{xx} + x y'_x - (x^2 + n^2) y = 0.$$

Représentation en série :

$$I_n(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(x/2)^{n+2m}}{m!(m+n)!}$$

Relation avec $J_n(x)$:

$$I_n(x) = i^{-n} J_n(ix), \quad I_n(ix) = i^n J_n(x).$$

Propriétés :

$$\begin{aligned} 2nI_n(x) &= x(I_{n-1}(x) - I_{n+1}(x)) \\ I_n(-x) &= (-1)^n I_n(x) \end{aligned}$$

Différenciation :

$$\frac{d}{dx} I_n(x) = \frac{1}{2} (I_{n-1}(x) + I_{n+1}(x)) = \frac{n}{x} I_n(x) + I_{n+1}(x), \quad (\text{B.10})$$

$$\frac{d}{dx} (x^n I_n(x)) = x^n I_{n-1}, \quad \frac{d}{dx} (x^{-n} I_n(x)) = x^{-n} I_{n+1} \quad (\text{B.11})$$

Propriétés asymptotiques

$$I_n(x) \approx \frac{1}{n!} \left(\frac{x}{2}\right)^n, \quad x \rightarrow 0, \quad (\text{B.12})$$

$$I_n(x) \approx \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}}, \quad x \rightarrow \infty. \quad (\text{B.13})$$

B.4 Représentation spectrale de Fourier-Hermite

Nous résolvons le système de Vlasov-Poisson (4.25)-(4.30) en utilisant une représentation de Fourier-Hermite. Dans l'espace on représente la fonction de distribution par une série de Fourier dont les propriétés sont bien connues. Dans l'espace des vitesses, nous développons la fonction de distribution comme la somme des fonctions d'Hermite. Pour cela nous introduisons les polynômes d'Hermite H_m et les fonctions d'Hermite re-normalisées φ^m définies par

$$H_m(v) = (-1)^m e^{v^2} \frac{d^m}{dv^m} (e^{-v^2}), \quad \varphi^m(v) = \frac{H_m(v)}{\sqrt{2^m m!}}, \quad (\text{B.14})$$

pour $m = 0, 1, 2, \dots$. Les fonctions d'Hermite ϕ^m sont orthonormées par rapport au poids maxwellien $e^{-v^2}/\sqrt{\pi}$, de sorte que l'introduction des fonctions d'Hermite duales $\phi_m(v) = e^{-v^2} \phi^m(v)/\sqrt{\pi}$ nous avons la condition de bi-orthonormalité

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n(v) \varphi^m(v) dv = \delta_{nm}, \quad \forall n \geq 0, m \geq 0. \quad (\text{B.15})$$

Chaque φ_m satisfait à la condition limite de l'espace des vitesses $\varphi_m(v) \rightarrow 0$ comme $v \rightarrow \pm\infty$, et l'ensemble des fonctions d'Hermite duales est complet pour les fonctions qui sont analytiques sur une bande dans le plan complexe v et satisfont à la condition de décroissance $|f(v)| < c_1 e^{-c_2 v^2/2}$ pour certaines constantes $c_1 > 0$ et $c_2 > 1$. Les fonctions d'Hermite oscillent avec une longueur d'onde caractéristique $\pi(2/m)^{1/2}$ de sorte que les fonctions d'ordre supérieur représentent des échelles d'espace de vitesse plus fines.

$$v\varphi_m(v) = \sqrt{\frac{m+1}{2}} \varphi_{m+1}(v) + \sqrt{\frac{m}{2}} \varphi_{m-1}(v), \quad (\text{B.16})$$

et les dérivées de la vitesse sont liées à un seul mode de voisinage

$$\frac{\partial \varphi_m}{\partial v} = -\sqrt{2(m+1)}\varphi_{m+1}, \quad \frac{\partial \varphi^m}{\partial v} = \sqrt{2m}\varphi^{m-1}. \quad (\text{B.17})$$

Nous développons la fonction de distribution dans une série de fonctions de Hermite doubles et, pour obtenir une somme finie, nous tronquons après les premiers N_m modes de Hermite (oscillant le plus lentement). Cette troncature est équivalente à une discrétisation de l'espace des vitesses sur les racines du polynôme d'Hermite H_m . d'Hermite H_{N_m} . L'espacement entre ces racines diminue comme $1/\sqrt{N_m}$ comme $N_m \rightarrow \infty$. Cependant, comme le système de Vlasov-Poisson est linéaire dans l'espace des vitesses, il n'est pas nécessaire de discrétiser explicitement dans v .

B.4.1 Système discrétisé

Nous résolvons (4.25)-(4.30) en utilisant la représentation de Fourier-Hermite

$$f(z, v, t) = \sum_{m=0}^{N_m-1} \sum_{j=-N_\vartheta}^{N_\vartheta} a_{jm}(t) e^{ik_j z} \varphi_m(v) \quad (\text{B.18})$$

avec l'inverse

$$a_{jm}(t) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^{\infty} dv \int_0^L dz f(z, v, t) e^{-ik_j z} \varphi^m(v), \quad (\text{B.19})$$

où $k_j = 2\pi j/L$. Ainsi, la fonction continue $f(z, v, t)$ est définie par un ensemble discret et fini de coefficients a_{jm} , qui sont implicitement une fonction du temps. En plaçant (B.18) dans le système de Vlasov-Poisson (4.25)-(4.30) et en appliquant l'opérateur

$$\frac{1}{L} \int_{-\infty}^{\infty} dv \int_0^L dz e^{-ik_j z} \varphi^m(v), \quad (\text{B.20})$$

nous dérivons le système discret

$$\frac{da_{jm}}{dt} + ik_j \left(\sqrt{\frac{m+1}{2}} a_{j,m+1} + \sqrt{\frac{m}{2}} a_{j,m-1} \right) + N_{jm} = -\sqrt{2} \hat{E}_j \delta_{m1} \quad (\text{B.21})$$

$$\hat{E}_j = -ik_j \hat{\phi}_j \quad (\text{B.22})$$

$$-k_j^2 \hat{\phi}_j = a_{j0} \quad (\text{B.23})$$

où le terme non linéaire N est la convolution discrète de Fourier

$$N_{jm} = \sqrt{2m} \sum_{j'=-N_\vartheta}^{N_\vartheta} \hat{E}_{j'} a_{j-j',m-1}, \quad (\text{B.24})$$

et \hat{E} et $\hat{\phi}$ sont les coefficients de Fourier de E et ϕ . Le système (B.21)-(B.23) est une hiérarchie de moments infinis dans l'espace d'Hermite, où le couplage des modes résulte

du flux de particules et des dérivées de vitesse via les relations (B.16) et (B.17), et du terme non linéaire via le champ électrique. Parce que $\partial f_0/\partial v$ peut être exprimé dans une série d'Hermite, le côté droit de (B.21) est un nombre fini de termes sources apparaissant à des modes d'Hermite fixes m , et le système est fermé sauf pour le terme a_{j,N_m+1} qui apparaît dans le flux de particules dans l'équation du moment le plus élevé. Le système (B.21)-(B.23) est aussi exactement le système obtenu en utilisant une représentation continue de Fourier-Hermite sur un domaine spatial infini, mais restreint aux nombres d'onde discrets k_j et aux modes d'Hermite $m < N_m$. Le calcul du terme non linéaire (B.24) directement pour chaque point de grille nécessite des opérations de $O(N_m N_k^2)$, mais cela se réduit à des opérations de $O(N_m N_k \log N_k)$ s'il est calculé de manière pseudo-spectrale, c'est-à-dire via une grille dans l'espace z utilisant des transformées de Fourier discrètes. Pour cela, nous avons besoin d'une version discrète de (B.18) et (B.19). Plus précisément, (B.18) doit être valable à chaque point de grille $z_l = lL/N_k$.

$$f(z_l, v) = \sum_{m=0}^{N_m-1} \sum_{j=-N_\vartheta}^{N_\vartheta} a_{jm} e^{ik_j z_l} \phi_m(v) \quad (\text{B.25})$$

et nous devons remplacer l'inverse z -intégral (B.19) par une somme finie de modes de Fourier. Le choix d'une grille spatiale uniforme $z_l = lL/N_k$ est motivé par la résolution de l'identité pour les modes de Fourier

$$\delta_{jj'} = \frac{1}{N_k} \sum_{l=0}^{N_k-1} e^{2\pi i(j-j')l/N_k} = \frac{1}{N_k} \sum_{l=0}^{N_k-1} e^{i(k_j - k_{j'})lL/N_k},$$

de sorte qu'en multipliant (B.25) par $e^{-ik_{j'}z_l}$ et en faisant la somme sur l on obtient

$$a_{jm} = \frac{1}{N_k} \sum_{l=0}^{N_k-1} \int_{-\infty}^{\infty} dv f(z_l, v) e^{-ik_j z_l} \phi^m(v)$$

avec le terme non linéaire calculé comme

$$N_{jm} = -i\sqrt{2m} F_{jl} \left\{ F_{ln}^{-1} \left(k_n \hat{\Phi}_n \right) F_{ln'}^{-1} (a_{n',m-1}) \right\}$$

où F est l'opérateur de la transformée de Fourier discrète

$$F_{jl} = \frac{1}{N_k} \sum_{l=0}^{N_k-1} e^{-ik_j z_l}, \quad F_{ln}^{-1} = \sum_{n=0}^{N_k-1} e^{ik_n z_l}.$$

Théorème B.4.1 (Dérivabilité des intégrales à paramètres). Soient $(a, b) \in \mathbb{R}$, $a < b$ et $f : (x, t) \mapsto f(x, t)$ est une fonction telle que

- f est intégrable par rapport à t sur $[a, b]$,
- f est dérivable par rapport à x ,
- $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue sur $\mathbb{R} \times [a, b]$

alors $F : x \mapsto \int_a^b f(x, t) dt$ est dérivable et sa dérivée est :

$$F'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt.$$

Annexe C

Équation linéaire homogène avec dérivées partielles du premier ordre

C.1 La relation entre une équation linéaire homogène avec des équations différentielles partielles du premier ordre et le système d'équations différentielles ordinaires sous forme symétrique correspondante

Une équation linéaire homogène avec des dérivées partielles du premier ordre est une équation de la forme

$$X_1(x_1, \dots, x_n) \partial_{x_1} u + \dots + X_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \partial_{x_n} u = 0. \quad (\text{C.1})$$

Supposons que les coefficients X_1, \dots, X_n de l'équation (C.1) sont définis et continus ainsi que leurs dérivées partielles en x_1, \dots, x_n dans un certain voisinage D du point (x_{10}, \dots, x_{n0}) et qu'ils ne se transforment pas en zéro en ce point. En particulier, nous supposons que

$$X_n(x_{10}, \dots, x_{n0}) \neq 0 \quad (\text{C.2})$$

Avec l'équation (C.1), on considère le système d'équations différentielles ordinaires de forme symétrique

$$\frac{dx_1}{X_1(x_1, \dots, x_n)} = \dots = \frac{dx_n}{X_n(x_1, \dots, x_n)}. \quad (\text{C.3})$$

Ce système est appelé système d'équations différentielles ordinaires sous forme symétrique, qui correspond à l'équation linéaire homogène aux dérivées partielles du premier ordre (C.1), ou au système d'équations caractéristiques de (C.1).

Sous les hypothèses concernant les fonctions X_1, \dots, X_n le système (C.3) a $n - 1$

de la fonction ψ est identiquement égale à zéro aux solutions du système (C.3) ou (C.5), soit

$$\partial_{x_1}\psi dx_1 + \dots + \partial_{x_n}\psi dx_n \equiv 0,$$

où les différentielles dx_1, \dots, dx_{n-1} doivent être remplacées par leurs expressions du système (C.5), à savoir

$$dx_1 = \frac{X_1}{X_n} dx_n, \dots, dx_{n-1} = \frac{X_{n-1}}{X_n} dx_n.$$

Par conséquent, nous aurons l'identité

$$\left(\partial_{x_1}\psi \frac{X_1}{X_n} + \dots + \partial_{x_n}\psi \right) dx_n \equiv 0$$

ou après réduction par dx_n et la multiplication par X_n

$$X_1\partial_{x_1}\psi + \dots + X_n\partial_{x_n}\psi \equiv 0.$$

Cette identité signifie également que la fonction $u = \psi(x_1, \dots, x_n)$ est une solution de l'équation (C.1). \square

Théorème C.1.2. *Toute solution instable de l'équation (C.1), équivalente à une constante arbitraire C , est la première intégrale du système (C.3).*

Démonstration. Soit $u = \psi(x_1, \dots, x_n)$ une solution instable de l'équation (C.1). Puis

$$X_1\partial_{x_1}\psi + \dots + X_n\partial_{x_n}\psi \equiv 0. \tag{C.6}$$

Calculer la différentielle totale de la fonction ψ , dont les arguments sont les composantes des solutions du système (C.3) ou, ce qui revient au même, du système (C.5), nous avons

$$\begin{aligned} d\psi &= (\partial_{x_1}\psi dx_1 + \dots + \partial_{x_n}\psi dx_n) \\ &= \left(\partial_{x_1}\psi \frac{X_1}{X_n} + \dots + \partial_{x_n}\psi \right) dx_n \\ &= (X_1\partial_{x_1}\psi + \dots + X_n\partial_{x_n}\psi) \frac{1}{X_n} dx_n, \end{aligned}$$

d'où, par l'identité (C.6), on obtient l'égalité $d\psi = 0$, c'est-à-dire que ψ est la première intégrale du système (C.3). \square

C.2 Construction d'une solution générale d'une équation linéaire homogène

Démontrons le théorème suivant.

Théorème C.2.1. *Si*

$$\psi_1(x_1, \dots, x_n) = C_1, \dots, \psi_{n-1}(x_1, \dots, x_n) = C_{n-1}$$

sont des intégrales premières indépendantes du système (C.3), alors l'ensemble des fonctions de la forme

$$u = \Phi(\psi_1, \dots, \psi_{n-1}), \tag{C.7}$$

où Φ est une fonction arbitraire avec des dérivées partielles continues dans $\psi_1, \dots, \psi_{n-1}$, est une solution générale de l'équation (C.1).

Démonstration. Prouvons que la fonction (C.7), où Φ est une fonction continuellement différentiable arbitrairement fixée, est une solution de l'équation (C.1). En substituant (C.7) dans (C.1) et en utilisant le fait que $\psi_1, \dots, \psi_{n-1}$ sont des solutions de l'équation (C.1), nous obtenons l'identité

$$\begin{aligned} X_1 \partial_{x_1} \Phi + \dots + X_n \partial_{x_n} \Phi &= X_1 \sum_{i=1}^{n-1} \partial_{\psi_i} \Phi \partial_{x_1} \psi_i + \dots + X_n \sum_{i=1}^{n-1} \partial_{\psi_i} \Phi \partial_{x_n} \psi_i \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \partial_{\psi_i} \Phi (X_1 \partial_{x_1} \psi_i + \dots + X_n \partial_{x_n} \psi_i) \equiv 0. \end{aligned}$$

La preuve que l'expression (C.7) détermine toutes les solutions de l'équation (C.1), c'est-à-dire que toute solution de l'équation (C.1) est obtenue à partir de (C.7) avec un choix approprié de la fonction Φ , peut être trouvé dans [[28], p. 249- 251]. □

Résumé

Ce sujet de recherche, aborde la problématique de l'observation et de la commande d'une classe d'Équations aux Dérivées Partielles (EDPs) non linéaire en dimension finie et infinie. Une des motivations principales concerne l'application de ces approches à l'équation de Vlasov-Poisson (VP) en dimension $1D \times 1D$. Cette dernière décrit l'évolution de la fonction de distribution de particules chargées dans un plasma de fusion. La majeure partie des travaux dans la littérature sur les équations de Vlasov-Poisson concerne l'analyse et la discrétisation de ces équations, mais très peu de résultats existent sur le contrôle encore moins sur l'observation. Dans ce travail on traite d'une part la synthèse d'observateur, la stabilisation par retour d'état et celle basée observateur du système discrétisé obtenu par la méthode Galerkin discontinue. Dans le cas des systèmes de dimension infinie, nous proposons la synthèse d'observateurs d'état basée sur la technique du «Backstepping». Un code de simulation a été développé pour valider les résultats obtenus.

Mots-clés: Vlasov-Poisson, Observateur, Commande, Galarkin Discontinue, Backstepping, LMIs.

Abstract

This research topic addresses the problem of the observation and the control of a class of nonlinear Partial Differential Equations (PDEs) in finite and infinite dimension. One of the main motivations concerns the application of these approaches to the Vlasov-Poisson equation (VP) in dimension $1D \times 1D$. The latter describes the evolution of the distribution function of charged particles in a fusion plasma. Most of the work in the literature on the Vlasov-Poisson equations concerns the analysis and discretisation of these equations, but very few results exist on the control and even less on the observation. In this work we deal with observer synthesis, state feedback stabilization and observer-based stabilization of the discretized system obtained by the discontinuous Galerkin method. In the case of infinite dimensional systems, we propose the synthesis of state observers based on the Backstepping technique. A simulation code has been developed to validate the results obtained.

Keywords: Vlasov-Poisson, Observer, Control, Galarkin Discontinuous, Backstepping, LMIs.

