
Etude numérique du point critique de systèmes quantiques de spin désordonnés en dimensions élevées

THÈSE

présentée et soutenue publiquement le 7 octobre 2022

pour l'obtention du

Doctorat de l'Université de Lorraine

(Mention Physique)

par

Valentin Anfray

Composition du jury

<i>Directeur de thèse :</i>	Christophe Chatelain	Maître de Conférences, Université de Lorraine
<i>Président de jury :</i>	Ferenc Iglói	Professeur, Université de Szeged
<i>Rapporteurs :</i>	Marco Picco	Directeur de recherche, CNRS, Sorbonne Université
	Sylvain Capponi	Professeur, Université Paul Sabatier
<i>Examineurs :</i>	Léonie Canet	Professeure, Université de Grenoble Alpes
	Dragi Karevski	Professeur, Université de Lorraine



**UNIVERSITÉ
DE LORRAINE**

**BIBLIOTHÈQUES
UNIVERSITAIRES**

AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact bibliothèque : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr
(Cette adresse ne permet pas de contacter les auteurs)

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

Remerciements

Il est coutumier, passage obligé, de remercier son directeur de thèse fleurissant ainsi avec le poncif. Ce n'en est pas moins du fond du coeur que je serai à jamais reconnaissant envers Christophe Chatelain de m'avoir donné la chance de travailler à ses côtés. Il a été d'une patience infinie et d'une disponibilité sans égal tout au long de ces trois ans, me prodiguant conseils avisés sans pour autant brider ma curiosité et liberté à aller me perdre dans des domaines pourtant bien éloignés de mon sujet. Je ne peux que me sentir immensément privilégié de l'investissement temporel qu'il m'a dévoué, en particulier lors de la rédaction de ce manuscrit avec ses nombreuses relectures attentives et lors de mes maintes répétitions de soutenance. S'il y a bien deux choses - en plus des résultats scientifiques - que j'aimerais immortaliser par cette présente thèse ce sont les éminentes qualités humaines et scientifiques de Christophe, merci pour tout.

Je remercie chaleureusement Marco Picco et Sylvain Capponi d'avoir bien voulu accepter de rapporter cette thèse. Toute ma gratitude va également à Ferenc Iglói, Dragi Karevski et Léonie Canet pour leur participation au jury. Remerciements tout particuliers à Léonie Canet - sans qui je n'écrirai sans doute pas ces mots - pour avoir attisé ma curiosité sur les transitions de phases.

Ce travail aurait été bien différent sans le cadre de vie exceptionnel au sein du Laboratoire de Physique et Chimie Théoriques de Vandœuvre-lès-Nancy. Je remercie à ce titre Séverine Bonenberger pour avoir fluidifié et simplifié toutes demandes administratives, Fabien Pascale pour son aide technique sur l'utilisation des supercalculateurs du laboratoire, Christian Causse pour son aide sur des problèmes pratiques, et plus généralement je tiens à remercier l'ensemble des chercheurs du LPCT pour les moments partagés.

Je tiens à remercier Emilie Gaudry pour m'avoir fait confiance dès ma première année en me permettant d'enseigner à l'école des Mines durant ces trois années et à Sébastien Fumeron pour m'avoir proposé de faire de même à Polytech Nancy pendant ma dernière année. Je tiens d'autant plus à les remercier tous deux pour avoir fait partie de mon comité de suivi.

Je ne peux terminer ces remerciements sans mentionner les personnes qui m'ont accompagnées dans ma vie de tous les jours et sans qui, ces trois ans auraient eu une toute autre saveur. Tirailé, j'en suis venu à la conclusion que je ne donnerai que leur nom alors qu'elles mériteraient toutes au moins quelques lignes - ce qui ferait passer ces remerciements pour un roman autobiographique. Je me contenterai alors de les rassembler par groupe tout en sachant qu'elles ne pourraient se réduire à cela. Aux doctorants et post-doctorants du LPCT : merci à Claude et François pour toutes les discussions passionnantes que l'on a eu dans notre bureau, merci à Andy et Leïla pour tous les passages de 5 minutes qui se sont transformées en plusieurs heures, merci à Vishal, Daniel, Natalia, Margaret, Emma, Souloke, Aurianne, Alekos et Michele pour tous ces repas pris ensemble au CROUS, merci à Manue, Valentin, Federico, Abderrahmane, Souissi, Julia, Tom, Basile, Mohamed, Tarek, Bastien, Philippe, Kanika, Toni, Bernadeta et Raul pour tous les échanges que l'on a eu dans la salle de séjour du laboratoire, merci à Javier, Elif, Giannis, Mariana, Stefano, Fabio, Giulio, Attila, Anna et Olivier qui, mal-

gré un bref passage (pour moi) au LPCT, y ont laissé des souvenirs indélébiles. Parce que la liste ne saurait se contenir au LPCT, merci aux autres doctorants que j'ai eu la chance de rencontrer : Mihai, Marco, David, Tristan, Laurène, Paul, Ludivine, Alicia, Saeid, Guglielmo, Nishan, Bodry, Lydia, Walid, Paul, Vedran, Zarina, Yiming, Gaukhar et Asma. La recherche ne fut pas ma seule passion, je remercie alors tous les grimpeurs du dimanche matin qui ont rythmé mes semaines : Richard (x2), Chloé, Elina, Benoit, François, Dylan, Laetitia, Jesus, Francesca et Marion ; les fidèles joueurs du vendredi soir : Pierre, Quentin, Tiphaine et les moins fidèles : Paul, Mathias et Lucas ; des compagnons d'écran : Mathilde, Barrock et Augustin ; et le quatuor inégalable : Pierre-Jean, Alexandre, Bastien et Cyril. Enfin, parce qu'un groupe ne saurait être constitué d'une seule personne, je termine par quelques électrons libres : Hervé, Théo, Alexandre et Solène.

J'en viens à terminer ces remerciements en les adressant à ma famille qui a été d'un soutien indéfectible. Je les remercie surtout pour avoir été compréhensif lors des moments où, pris par ma thèse, je n'ai fait preuve de suffisamment d'attention alors qu'ils méritent tout l'amour du monde.

Sommaire

Introduction	1
Chapitre 1 Généralités sur les transitions de phase	3
1.1 Transition de phase classique	3
1.1.1 Phénomènes critiques	3
1.1.2 Homogénéité et hypothèse d'échelle	5
1.1.3 Groupe de Renormalisation	6
1.1.4 Effets de taille finie	8
1.2 Transition de phase quantique	8
1.2.1 Comportement critique à la transition quantique	9
1.2.2 Modèle d'Ising quantique	9
1.3 Transitions de phase dans les systèmes désordonnés	12
1.3.1 Les différents types de désordre	12
1.3.2 Influence du désordre à la transition de phase	14
1.3.3 Comportement d'échelle du point pseudo-critique	14
1.3.4 Phase de Griffiths	15
1.4 Groupe de renormalisation en désordre fort	16
1.4.1 Règles de renormalisation	17
1.4.2 Équations de flot	18
1.4.3 Distributions au point fixe et exposants critiques	19
1.5 Modèle d'Ising désordonné en champ transverse en dimensions $D > 1$	21
Chapitre 2 Étude du comportement critique par SDRG en dimensions $D > 1$	23
2.1 Implémentation numérique de la SDRG en dimensions $D > 1$	23
2.1.1 Généralisation des règles de décimation en dimensions $D > 1$	24
2.1.2 Formulation des règles de décimation sur un graphe	26
2.1.3 Optimisations de l'algorithme	29
2.2 Estimation des exposants critiques	34
2.2.1 Point pseudo-critique et exposant critique ν	34
2.2.2 Autres exposants critiques	36
2.3 Conclusion	37

Chapitre 3 Modèle de Potts quantique désordonné en dimensions deux et trois 39

3.1	Présentation du modèle et état de l'art	39
3.1.1	Description du modèle classique pur et comportement critique	39
3.1.2	Propriétés critiques en présence de désordre	42
3.1.3	Modèle de Potts quantique homogène	42
3.1.4	Étude du modèle désordonné unidimensionnel par SDRG	43
3.1.5	Comportement critique en dimensions $D = 2, 3$	45
3.2	Application de la SDRG au modèle de Potts en dimensions $D = 2, 3$	46
3.2.1	Détail des simulations	46
3.2.2	Mise en évidence d'un point fixe de désordre infini	47
3.3	Étude des propriétés critiques	49
3.3.1	Position du point critique et exposant critique ν	49
3.3.2	Aimantation et exposant critique d_f	59
3.3.3	Gap d'énergie et exposant critique ψ	62
3.4	Conclusion	66

Chapitre 4 Modèle d'horloge quantique désordonné en dimensions deux et trois 67

4.1	Présentation du modèle et état de l'art	67
4.1.1	Description du modèle classique pur et comportement critique	67
4.1.2	Propriétés critiques en présence de désordre	69
4.1.3	Modèle d'horloge quantique homogène	70
4.1.4	Étude du modèle désordonné unidimensionnel par SDRG	70
4.1.5	Comportement critique en dimensions $D = 2, 3$	72
4.2	Application de la SDRG au modèle d'horloge en dimensions $D = 2, 3$	72
4.2.1	Chaos du flot de RG et désordre minimal	72
4.2.2	Détail des simulations	76
4.2.3	Mise en évidence d'un point fixe de désordre infini	77
4.3	Étude des propriétés critiques	81
4.3.1	Position du point critique et exposant critique ν	81
4.3.2	Aimantation et exposant critique d_f	88
4.3.3	Gap d'énergie et exposant critique ψ	92
4.4	Conclusion	95

Chapitre 5 Modèle d'Ashkin-Teller quantique désordonné en dimensions deux et trois 97

5.1	Présentation du modèle et état de l'art	97
5.1.1	Description du modèle classique pur et comportement critique	98

5.1.2	Propriétés critiques en présence de désordre	102
5.1.3	Modèle d'Ashkin-Teller quantique homogène	102
5.1.4	Étude du modèle à N couleurs désordonné unidimensionnel par SDRG	103
5.2	Cas particulier du modèle à deux couleurs	105
5.2.1	Règles de décimation	106
5.2.2	Diagramme de phase en dimension $D = 1$	111
5.2.3	Comportement critique en dimensions $D = 2, 3$	111
5.2.4	Algorithme utilisé	113
5.3	Modèle d'Ashkin-Teller quantique désordonné à deux couleurs en dimensions $D > 1$	115
5.3.1	Point tricritique	115
5.3.2	Étude des deux transitions à $\epsilon > 1$	117
5.4	Conclusion	121
Conclusions et perspectives		123
Annexes		127
Annexe A Détails algorithmiques		127
A.1	Optimisation de l'algorithme de SDRG	127
A.2	Adaptation de l'algorithme de SDRG au modèle d'horloge	129
A.2.1	Algorithme de Dijkstra dans un graphe avec des poids négatifs	129
A.2.2	Actualisation de l'arbre binaire	131
A.3	Adaptation de l'algorithme de SDRG au modèle d'Ashkin-Teller	132
Annexe B Figures complémentaires pour le modèle de Potts		135
B.1	Distributions des points pseudo-critiques	135
B.2	Moyennes des points pseudo-critiques	139
B.3	Écarts-types des points pseudo-critiques	141
B.4	Moyennes des moments magnétiques	143
B.5	Moyennes des logarithmes des gaps d'énergie	145
B.6	Distributions des gaps d'énergie	147
Annexe C Figures complémentaires pour le modèle d'horloge		151
C.1	Distributions des points pseudo-critiques	151
C.2	Écarts-types des points pseudo-critiques	155
C.3	Moyennes des points pseudo-critiques	157
C.4	Moyennes des moments magnétiques	159
C.5	Moyennes des logarithmes des gaps d'énergie	161
C.6	Distributions des gaps d'énergie	163

Bibliographie

Table des figures

2.1	Procédure de décimation sur un réseau bidimensionnel.	24
2.2	Liaisons faibles non générées.	25
2.3	Comparaison entre une implémentation naïve et une optimisée des règles de SDRG.	28
2.4	Noeuds inactifs à supprimer du graphe et importance de l'ordre de suppression.	30
2.5	Méthode du doublement.	34
3.1	Modèle de Potts : moyenne du moment magnétique $\bar{\mu}$ en fonction du nombre d'échantillons de désordre du modèle à $q = 10$ états.	48
3.2	Modèle de Potts : variance réduite $R_\mu(L)$ du moment magnétique.	48
3.3	Modèle de Potts : distributions $P_L(\zeta)$ et $P_L((\zeta_0 + \zeta)L^{-\psi})$ des modèles à $q = 3$ et $q = 50$ états.	50
3.4	Modèle de Potts : distributions des points pseudo-critiques $P(\theta_c^i(L))$ et $P(L^{1/\nu} \theta_c^i(L) - \theta_c /\theta_c)$ du modèle à $q = 10$ états.	51
3.5	Modèle de Potts : moyenne des points pseudo-critiques en fonction de L du modèle à $q = 10$ états.	53
3.6	Modèle de Potts : exposants critiques ν_s en fonction de $1/L_{\min}$	56
3.7	Modèle de Potts : logarithme de l'écart-type des points pseudo-critiques en fonction de L du modèle à $q = 10$ états.	57
3.8	Modèle de Potts : exposants critiques ν_w en fonction de $1/L_{\min}$	58
3.9	Modèle de Potts : moyenne de l'écart relatif des sauts du moment magnétique en fonction de L	60
3.10	Modèle de Potts : logarithme de la moyenne des moments magnétiques en fonction de L du modèle à $q = 10$ états.	61
3.11	Modèle de Potts : exposants critiques d_f en fonction de $1/L_{\min}$	63
3.12	Modèle de Potts : moyenne du logarithme du gap d'énergie en fonction de L du modèle à $q = 10$ états.	64
3.13	Modèle de Potts : exposants critiques ψ en fonction de $1/L_{\min}$	65
4.1	Modèle d'horloge : évolution des distributions de probabilité des champs transverses β et des couplages ζ au cours de la renormalisation.	73
4.2	Modèle d'horloge : figure de récurrence.	75
4.3	Modèle d'horloge : χ en fonction de κ	76

4.4	Modèle d'horloge : moyenne du moment magnétique en fonction du nombre d'échantillons de désordre du modèle à $q = 8$ états.	78
4.5	Modèle d'horloge : variance réduite $R_\mu(L)$ du moment magnétique	79
4.6	Modèle d'horloge : distributions $P_L(\zeta)$ et $P_L((\zeta_0 + \zeta)L^{-\psi})$ du modèle à $q = 10$ états avec un désordre initial $\Delta = 5$	80
4.7	Modèle d'horloge : distributions des points pseudo-critiques $P(\theta_c^i(L))$ et $P(L^{1/\nu} \theta_c^i(L) - \theta_c /\theta_c)$ du modèle à $q = 10$ états avec un désordre initial $\Delta = 5$	82
4.8	Modèle d'horloge : moyenne des points pseudo-critiques en fonction de L du modèle à $q = 10$ états avec un désordre initial $\Delta = 5$	83
4.9	Modèle d'horloge : exposants critiques ν_s en fonction de $1/L_{\min}$	85
4.10	Modèle d'horloge : logarithme de l'écart-type des points pseudo-critiques en fonction de L du modèle à $q = 10$ états avec un désordre initial $\Delta = 5$	86
4.11	Modèle d'horloge : exposants critiques ν_w en fonction de $1/L_{\min}$	87
4.12	Modèle d'horloge : estimation de la probabilité de chaotité du flot de renormalisation.	89
4.13	Modèle d'horloge : moyenne des sauts relatifs du moment magnétique en fonction de L	90
4.14	Modèle d'horloge : logarithme de la moyenne des moments magnétiques en fonction de L du modèle à $q = 10$ états avec un désordre initial $\Delta = 5$	91
4.15	Modèle d'horloge : exposants critiques d_f en fonction de $1/L_{\min}$	92
4.16	Modèle d'horloge : moyenne du logarithme du gap d'énergie en fonction de L du modèle à $q = 10$ états avec un désordre initial $\Delta = 5$	93
4.17	Modèle d'horloge : exposants critiques ψ en fonction de $1/L_{\min}$	94
5.1	Modèle d'Ashkin-Teller : diagramme de phase de modèle d'Ashkin-Teller isotrope classique bidimensionnel.	99
5.2	Modèle d'Ashkin-Teller : schéma illustrant la nécessité de prendre en compte le second plus grand couplage pour la décimation du plus grand couplage $\Omega = K_{ij}$	107
5.3	Modèle d'Ashkin-Teller : représentation schématique des trois premières règles de décimation.	110
5.4	Modèle d'Ashkin-Teller : représentation schématique du diagramme de phase de l'état fondamental du modèle quantique désordonné unidimensionnel.	110
5.5	Modèle d'Ashkin-Teller : représentation schématique du diagramme de phase de l'état fondamental du modèle quantique désordonné en dimensions $D > 1$	113
5.6	Modèle d'Ashkin-Teller : polarisation redimensionnée $M_p L^{\beta/\nu}$ en fonction de $(\epsilon - 1)^{1/\nu_\epsilon}$ en dimension $D = 1$	117
5.7	Modèle d'Ashkin-Teller : polarisation redimensionnée $M_p L^{\beta/\nu}$ en fonction de $(\epsilon - 1)^{1/\nu_\epsilon}$ en dimensions $D = 2$	118
5.8	Modèle d'Ashkin-Teller : polarisation redimensionnée $M_p L^{\beta/\nu}$ en fonction de $(\epsilon - 1)^{1/\nu_\epsilon}$ en dimensions $D = 3$	119
5.9	Modèle d'Ashkin-Teller : phases obtenues par méthode du doublement à $\epsilon_I = 2$	120

A.1	Représentation schématique des nœuds inactifs atteints lors de l'utilisation de l'algorithme de Dijkstra.	128
A.2	Échec de la recherche du plus proche voisin par l'algorithme de Dijkstra dans un graphe avec des poids négatifs.	130
B.1	Modèle de Potts : distributions des points pseudo-critiques $P(\theta_c^i(L))$ et $P(L^{1/\nu} \theta_c^i(L) - \theta_c /\theta_c)$ du modèle d'Ising avec $\Delta = 1$	135
B.2	Modèle de Potts : distributions des points pseudo-critiques $P(\theta_c^i(L))$ et $P(L^{1/\nu} \theta_c^i(L) - \theta_c /\theta_c)$ du modèle d'Ising avec $\Delta = 3$	136
B.3	Modèle de Potts : distributions des points pseudo-critiques $P(\theta_c^i(L))$ et $P(L^{1/\nu} \theta_c^i(L) - \theta_c /\theta_c)$ du modèle à $q = 3$ états avec $\Delta = 1$	136
B.4	Modèle de Potts : distributions des points pseudo-critiques $P(\theta_c^i(L))$ et $P(L^{1/\nu} \theta_c^i(L) - \theta_c /\theta_c)$ du modèle à $q = 5$ états avec $\Delta = 1$	137
B.5	Modèle de Potts : distributions des points pseudo-critiques $P(\theta_c^i(L))$ et $P(L^{1/\nu} \theta_c^i(L) - \theta_c /\theta_c)$ du modèle à $q = 20$ états avec $\Delta = 1$	137
B.6	Modèle de Potts : distributions des points pseudo-critiques $P(\theta_c^i(L))$ et $P(L^{1/\nu} \theta_c^i(L) - \theta_c /\theta_c)$ du modèle à $q = 50$ états avec $\Delta = 1$	138
B.7	Modèle de Potts : distributions des points pseudo-critiques $P(\theta_c^i(L))$ et $P(L^{1/\nu} \theta_c^i(L) - \theta_c /\theta_c)$ du modèle à $q = 50$ états avec $\Delta = 3$	138
B.8	Modèle de Potts : distributions des points pseudo-critiques $P(\theta_c^i(L))$ et $P(L^{1/\nu} \theta_c^i(L) - \theta_c /\theta_c)$ du modèle à $q = 50$ états avec $\Delta = 5$	139
B.9	Modèle de Potts : moyenne des points pseudo-critiques en fonction de L du modèle d'Ising avec $\Delta = 1$ et $\Delta = 3$	139
B.10	Modèle de Potts : moyenne des points pseudo-critiques en fonction de L du modèle de Potts à $q = 3$ et $q = 5$ états.	140
B.11	Modèle de Potts : moyenne des points pseudo-critiques en fonction de L du modèle de Potts à $q = 20$ et $q = 50$ états.	140
B.12	Modèle de Potts : moyenne des points pseudo-critiques en fonction de L du modèle de Potts à $q = 50$ états avec $\Delta = 3$ et $\Delta = 5$	140
B.13	Modèle de Potts : logarithme de l'écart-type des points pseudo-critiques en fonction de L du modèle d'Ising avec $\Delta = 1$ et $\Delta = 3$	141
B.14	Modèle de Potts : logarithme de l'écart-type des points pseudo-critiques en fonction de L du modèle à $q = 3$ et $q = 5$ états.	141
B.15	Modèle de Potts : logarithme de l'écart-type des points pseudo-critiques en fonction de L du modèle à $q = 20$ et $q = 50$ états.	142
B.16	Modèle de Potts : logarithme de l'écart-type des points pseudo-critiques en fonction de L du modèle à $q = 50$ états avec $\Delta = 3$ et $\Delta = 5$	142
B.17	Modèle de Potts : logarithme de la moyenne des moments magnétiques en fonction de L du modèle d'Ising avec $\Delta = 1$ et $\Delta = 3$	143
B.18	Modèle de Potts : logarithme de la moyenne des moments magnétiques en fonction de L du modèle à $q = 3$ et $q = 5$ états.	143

B.19	Modèle de Potts : logarithme de la moyenne des moments magnétiques en fonction de L du modèle à $q = 20$ et $q = 50$ états.	144
B.20	Modèle de Potts : logarithme de la moyenne des moments magnétiques en fonction de L du modèle à $q = 50$ états avec $\Delta = 3$ et $\Delta = 5$	144
B.21	Modèle de Potts : moyenne du logarithme du gap d'énergie en fonction de L du modèle d'Ising avec $\Delta = 1$ et $\Delta = 3$	145
B.22	Modèle de Potts : moyenne du logarithme du gap d'énergie en fonction de L du modèle à $q = 3$ et $q = 5$ états.	145
B.23	Modèle de Potts : moyenne du logarithme du gap d'énergie en fonction de L du modèle à $q = 20$ et $q = 50$ états.	146
B.24	Modèle de Potts : moyenne du logarithme du gap d'énergie en fonction de L du modèle à $q = 50$ états avec $\Delta = 3$ et $\Delta = 5$	146
B.25	Modèle de Potts : distributions $P_L(\zeta)$ et $P_L((\zeta_0 + \zeta)L^{-\psi})$ du modèle d'Ising. . .	147
B.26	Modèle de Potts : distributions $P_L(\zeta)$ et $P_L((\zeta_0 + \zeta)L^{-\psi})$ du modèle d'Ising avec $\Delta = 3$	147
B.27	Modèle de Potts : distributions $P_L(\zeta)$ et $P_L((\zeta_0 + \zeta)L^{-\psi})$ du modèle à $q = 3$ états.	148
B.28	Modèle de Potts : distributions $P_L(\zeta)$ et $P_L((\zeta_0 + \zeta)L^{-\psi})$ du modèle à $q = 5$ états.	148
B.29	Modèle de Potts : distributions $P_L(\zeta)$ et $P_L((\zeta_0 + \zeta)L^{-\psi})$ du modèle à $q = 20$ états.	148
B.30	Modèle de Potts : distributions $P_L(\zeta)$ et $P_L((\zeta_0 + \zeta)L^{-\psi})$ du modèle à $q = 50$ états avec $\Delta = 3$	149
B.31	Modèle de Potts : distributions $P_L(\zeta)$ et $P_L((\zeta_0 + \zeta)L^{-\psi})$ du modèle à $q = 50$ états avec $\Delta = 5$	149
C.1	Modèle d'horloge : distributions des points pseudo-critiques $P(\theta_c^i(L))$ et $P(L^{1/\nu} \theta_c^i(L) - \theta_c /\theta_c)$ du modèle à $q = 5$ états avec $\Delta = 1$ et $\Delta = 2$ (2D).	151
C.2	Modèle d'horloge : distributions des points pseudo-critiques $P(\theta_c^i(L))$ et $P(L^{1/\nu} \theta_c^i(L) - \theta_c /\theta_c)$ du modèle à $q = 5$ états avec $\Delta = 3$ (2D).	152
C.3	Modèle d'horloge : distributions des points pseudo-critiques $P(\theta_c^i(L))$ et $P(L^{1/\nu} \theta_c^i(L) - \theta_c /\theta_c)$ du modèle à $q = 5$ états avec $\Delta = 3$ et $\Delta = 8$ (3D).	152
C.4	Modèle d'horloge : distributions des points pseudo-critiques $P(\theta_c^i(L))$ et $P(L^{1/\nu} \theta_c^i(L) - \theta_c /\theta_c)$ du modèle à $q = 8$ états avec $\Delta = 2$ et $\Delta = 3$ (2D).	153
C.5	Modèle d'horloge : distributions des points pseudo-critiques $P(\theta_c^i(L))$ et $P(L^{1/\nu} \theta_c^i(L) - \theta_c /\theta_c)$ du modèle à $q = 8$ états avec $\Delta = 5$ (3D).	153
C.6	Modèle d'horloge : distributions des points pseudo-critiques $P(\theta_c^i(L))$ et $P(L^{1/\nu} \theta_c^i(L) - \theta_c /\theta_c)$ du modèle à $q = 10$ états avec $\Delta = 5$ et $\Delta = 7$ (2D).	154
C.7	Modèle d'horloge : distributions des points pseudo-critiques $P(\theta_c^i(L))$ et $P(L^{1/\nu} \theta_c^i(L) - \theta_c /\theta_c)$ du modèle à $q = 10$ états avec $\Delta = 5$ et $\Delta = 8$ (3D).	154
C.8	Modèle d'horloge : logarithme des l'écart-type des points pseudo-critiques en fonction de L du modèle à $q = 5$ états avec $\Delta = 1, 2, 3$ (2D).	155
C.9	Modèle d'horloge : logarithme de l'écart-type des points pseudo-critiques en fonction de L du modèle à $q = 5$ états avec $\Delta = 3, 8$ (3D).	155

C.10	Modèle d'horloge : logarithme de l'écart-type des points pseudo-critiques en fonction de L du modèle à $q = 8$ états avec $\Delta = 2, 3$ (2D) et $\Delta = 5$ (3D).	156
C.11	Modèle d'horloge : logarithme de l'écart-type des points pseudo-critiques en fonction de L du modèle à $q = 10$ états avec $\Delta = 5, 7$ (2D) et $\Delta = 5, 8$ (3D).	156
C.12	Modèle d'horloge : moyenne des points pseudo-critiques en fonction de L du modèle à $q = 5$ états avec $\Delta = 1, 2, 3$ (2D).	157
C.13	Modèle d'horloge : moyenne des points pseudo-critiques en fonction de L du modèle à $q = 5$ états avec $\Delta = 3, 8$ (3D).	157
C.14	Modèle d'horloge : moyenne des points pseudo-critiques en fonction de L du modèle à $q = 8$ états avec $\Delta = 2, 3$ (2D) et $\Delta = 5$ (3D).	158
C.15	Modèle d'horloge : moyenne des points pseudo-critiques en fonction de L du modèle à $q = 10$ états avec $\Delta = 5, 7$ (2D) et $\Delta = 5, 8$ (3D).	158
C.16	Modèle d'horloge : logarithme de la moyenne des moments magnétiques en fonction de L du modèle à $q = 5$ états avec $\Delta = 1, 2, 3$ (2D).	159
C.17	Modèle d'horloge : logarithme de la moyenne des moments magnétiques en fonction de L du modèle à $q = 5$ états avec $\Delta = 3, 8$ (3D).	159
C.18	Modèle d'horloge : logarithme de la moyenne des moments magnétiques en fonction de L du modèle à $q = 8$ états avec $\Delta = 2, 3$ (2D) et $\Delta = 5$ (3D).	160
C.19	Modèle d'horloge : logarithme de la moyenne des moments magnétiques en fonction de L du modèle à $q = 10$ états avec $\Delta = 5, 7$ (2D) et $\Delta = 5, 8$ (3D).	160
C.20	Modèle d'horloge : moyenne des logarithmes du gap d'énergie en fonction de L du modèle à $q = 5$ états avec $\Delta = 1, 2, 3$ (2D).	161
C.21	Modèle d'horloge : moyenne des logarithmes du gap d'énergie en fonction de L du modèle à $q = 5$ états avec $\Delta = 3, 8$ (3D).	161
C.22	Modèle d'horloge : moyenne des logarithmes du gap d'énergie en fonction de L du modèle à $q = 8$ états avec $\Delta = 2, 3$ (2D) et $\Delta = 5$ (3D).	162
C.23	Modèle d'horloge : moyenne des logarithmes du gap d'énergie en fonction de L du modèle à $q = 10$ états avec $\Delta = 5, 7$ (2D) et $\Delta = 5, 8$ (3D).	162
C.24	Modèle d'horloge : distributions $P_L(\zeta)$ et $P_L((\zeta_0 + \zeta)L^{-\psi})$ du modèle à $q = 5$ états avec $\Delta = 1, 2$ (2D).	163
C.25	Modèle d'horloge : distributions $P_L(\zeta)$ et $P_L((\zeta_0 + \zeta)L^{-\psi})$ du modèle à $q = 5$ états avec $\Delta = 2$ (2D)	163
C.26	Modèle d'horloge : distributions $P_L(\zeta)$ et $P_L((\zeta_0 + \zeta)L^{-\psi})$ du modèle à $q = 5$ états avec $\Delta = 3, 8$ (3D).	164
C.27	Modèle d'horloge : distributions $P_L(\zeta)$ et $P_L((\zeta_0 + \zeta)L^{-\psi})$ du modèle à $q = 8$ états avec $\Delta = 2, 3$ (2D).	164
C.28	Modèle d'horloge : distributions $P_L(\zeta)$ et $P_L((\zeta_0 + \zeta)L^{-\psi})$ du modèle à $q = 8$ états avec $\Delta = 5$ (3D).	165
C.29	Modèle d'horloge : distributions $P_L(\zeta)$ et $P_L((\zeta_0 + \zeta)L^{-\psi})$ du modèle à $q = 10$ états avec $\Delta = 5, 7$ (2D).	165

C.30	Modèle d'horloge : distributions $P_L(\zeta)$ et $P_L((\zeta_0 + \zeta)L^{-\psi})$ du modèle à $q = 10$ états avec $\Delta = 5, 8$ ($3D$).	166
------	---	-----

Résumé

Nous avons étudié numériquement plusieurs modèles de spins quantiques désordonnés en dimensions $D > 1$ par le groupe de renormalisation en désordre fort (SDRG). Pour cela, nous avons implémenté un algorithme permettant de considérer des systèmes contenant de l'ordre d'un million de spins indépendamment de la dimension du réseau. Nous avons montré que les propriétés critiques du modèle de Potts quantique désordonné à $q = 2, 3, 5, 10, 20$ et 50 états en dimensions $D = 2$ et $D = 3$ sont gouvernées par un point fixe de désordre infini. Nous avons estimé les exposants critiques de la longueur de corrélation ν , de l'aimantation d_f et du gap d'énergie ψ . En exploitant les effets de taille finie et en prenant en compte les corrections, nous avons mis en évidence que les propriétés critiques du modèle de Potts sont indépendantes du nombre d'états q . Nous avons également étudié le modèle d'horloge quantique désordonné à $q = 2, 3, 5, 8$ et 10 états en dimensions $D = 2$ et $D = 3$. L'importance du désordre initial a été mis en évidence pour pouvoir atteindre un point critique de désordre infini. Bien que les incertitudes sur ψ soient grandes, nos estimations des exposants ν et ψ sont compatibles pour tout q avec ceux du modèle d'Ising quantique désordonné. Les estimations de l'exposant d_f sont incompatibles dans les barres d'erreur mais néanmoins très proches. Enfin, nous avons étudié le point tricritique du modèle d'Ashkin-Teller quantique désordonné en dimensions $D = 2$ et $D = 3$. Nous avons montré que l'exposant de la longueur de corrélation dans une des directions instables n'appartient pas à la classe d'universalité du modèle d'Ising quantique désordonné.

Mots-clés: systèmes quantique de spins, point critique de désordre infini, dimension élevée, groupe de renormalisation en désordre fort, universalité, transition de phase du second ordre, point tricritique, modèle de Potts, modèle d'horloge, modèle d'Ashkin-Teller

Abstract

Several random quantum spin models have been numerically studied in dimension $D > 1$ by Strong Disorder Renormalisation Group (SDRG). We have implemented an efficient algorithm to be able to consider a system with up to few million spins independently of its spatial dimension. Critical properties of the $2D$ and $3D$ random quantum Potts model with $q = 2, 3, 5, 10, 20$ and 50 states are shown to be governed by an infinite disorder fixed point. We have computed the correlation-length exponent ν , the magnetization exponent d_f and the energy gap exponent ψ . Using finite-size scaling and taking into account finite-size corrections, critical properties of the Potts model are shown to be q -independent. Random quantum Clock models with $q = 2, 3, 5, 8$ and 10 states have been also studied in $2D$ and $3D$. A minimum amount of initial disorder strength is required to flow to an infinite disorder fixed point. Despite large error bars on ψ exponent, our estimates for the critical exponents ν and ψ for all q are compatible with those of the random transverse-field Ising model. Our estimates for the critical exponent d_f are incompatible within error bar but very close. Lastly, the tricritical point of the random quantum Ashkin-Teller model has been studied in dimension two and three. We have shown that the correlation-length exponent associated with one of the two unstable directions does not belong to the universality class of the random transverse-field Ising model.

Keywords: quantum spin systems, infinite disorder fixed point, high-dimensional, Strong Disorder Renormalization Group, universality, second order phase transition, tricritical point, Potts model, Clock model, Ashkin-Teller model

Introduction

L'existence et l'importance des transitions de phase sont perceptibles dans nos vies de tous les jours et ce depuis l'aube des temps. Il suffit pour cela de constater que le ciel peut larmoyer sans besoin d'être modélisé par une bassine percée contenant une quantité infinie d'eau sous forme liquide. Néanmoins, ces transitions aisément observables sont presque toutes du premier ordre, signifiant qu'elles présentent une discontinuité de l'une des dérivées premières de l'énergie libre impliquant entre autres une coexistence des phases. Les premières observations scientifiques de transitions de phases du second ordre remontent à 1822 par Charles Cagniard de La Tour [1] sur un mélange eau-alcool porté à haute température et à haute pression. Thomas Andrews dans les années 1860 confirme la possibilité qu'un corps puisse passer de l'état liquide à gazeux de manière continue et observe le phénomène d'opalescence critique, i.e. l'apparition spontanée d'une couleur nacré au point critique du dioxyde de carbone [2]. Aux transitions du second ordre sont associées des phénomènes critiques où la portée des corrélations diverge et où les grandeurs thermodynamiques présentent des singularités en loi de puissance caractérisées par des exposants dits critiques définissant une classe d'universalité. Cette notion d'universalité réfère à un comportement similaire au point critique de systèmes bien que microscopiquement distincts. Elle met en exergue l'importance d'un nombre restreint de paramètres. En 1937, Landau [3] formule une théorie phénoménologique des transitions de phases du second ordre permettant de rendre compte de l'universalité de systèmes partageant les mêmes symétries et ayant un même nombre de composantes du paramètre d'ordre. Néanmoins, parce qu'elle néglige les fluctuations, cette théorie est mise en défaut pour des transitions dans des systèmes aux dimensions physiquement accessibles comme le modèle d'Ising en dimensions $D = 2$ résolu exactement par Onsager [4]. Tirant pleinement parti de l'invariance d'échelle, le groupe de renormalisation est formalisé dans le cadre de la mécanique statistique par Wilson dans les années 1970 [5, 6] permettant le calcul des exposants critiques en deçà de la dimension critique supérieure et offrant une compréhension à l'émergence de classes d'universalité.

Un système réel n'étant jamais parfaitement homogène, de nombreuses recherches, nécessitant l'élaboration de nouvelles techniques analytiques et numériques, ont été menées pour étudier l'influence du désordre [7-12]. De nouveaux phénomènes ont ainsi été découverts comme l'absence de diffusion des ondes dans un milieu désordonné, prenant le nom de localisation d'Anderson [13]. L'introduction de désordre peut également changer radicalement le comportement critique du modèle pur en conduisant à de nouvelles classes d'universalité [14] ou en modifiant l'ordre de la transition de phase [15]. En 1995, Fisher détermine analytiquement les exposants

critiques et les fonctions d'échelle de la chaîne d'Ising désordonnée en champ transverse [16] en utilisant la méthode du groupe de renormalisation en désordre fort (SDRG). La SDRG a été ensuite appliquée à bien d'autres modèles de spins pour en obtenir les propriétés critiques comme celui de Potts [17], d'horloge [17] ou encore d'Ashkin-Teller [18, 19]. Pour des raisons de topologie, ces résultats analytiques se limitent au cas unidimensionnel. L'exploration du point critique de ces modèles à de plus hautes dimensions nécessite l'usage de simulations numériques et constitue l'objectif de cette thèse.

Pour le mener à bien, nous rappellerons dans le chapitre 1 quelques généralités sur les transitions de phases classiques et quantiques puis nous présenterons la méthode SDRG et nous l'appliquerons à la chaîne d'Ising désordonnée en champ transverse. Nous détaillerons dans le chapitre 2 l'algorithme introduit par [20] pour appliquer la SDRG à de larges systèmes de spins en dimensions $D > 1$. Les chapitres 3 et 4 seront dédiés à l'étude du point critique des modèles de Potts et d'horloge quantiques désordonnés pour différents nombre d'états q en dimensions deux et trois. Les exposants critiques de la longueur de corrélation ν , de l'aimantation d_f et du gap d'énergie ψ seront estimés en exploitant le comportement d'effet de taille finie. La classe d'universalité de ces modèles sera discutée en fonction du nombre d'états q . Enfin, le chapitre 5 sera consacré aux propriétés du point tricritique du modèle d'Ashkin-Teller quantique désordonné à deux couleurs en dimensions deux et trois.

Chapitre 1

Généralités sur les transitions de phase

1.1 Transition de phase classique

Une transition de phase correspond à un brusque changement des propriétés thermodynamiques d'un système lors d'une variation d'un paramètre de contrôle tel que la température ou encore la pression. Elle se caractérise par une singularité de l'énergie libre $F = U - TS$ avec U l'énergie interne du système, S l'entropie et T la température. Deux types de transitions de phases doivent être distinguées. Celles dites du premier ordre (appellation donnée par Ehrenfest [21]) présentent une discontinuité dans au moins une des dérivées premières de F . Elles sont caractérisées par une coexistence de phase et la présence d'une chaleur latente. Un exemple est la transition liquide/solide de l'eau. Les autres transitions sont continues (du second ordre ou d'ordre supérieur, suivant la classification d'Ehrenfest). Les dérivées premières de l'énergie libre, comme l'entropie $S = -\frac{\partial F}{\partial T}$ ou l'aimantation $M = -\frac{\partial F}{\partial H}$ avec H le champ magnétique externe, sont en effet continues. Il n'y a ni coexistence de phase, ni chaleur latente. Proche du point critique terminant la ligne de transition liquide-vapeur, des régions d'une taille macroscopique fluctuent de manière cohérente oscillant entre gaz et liquide. Il en résulte une diffusion de la lumière qui se traduit par l'apparition spontanée, pour le dioxyde de carbone, d'une couleur nacré : c'est le phénomène d'opalescence critique dont la découverte est attribuée à Thomas Andrew [2]. Cet exemple introduit une grandeur fondamentale dans la description d'une transition de phase continue : la longueur de corrélation ξ . Dans la suite, il ne sera plus question que des transitions de phase continues.

1.1.1 Phénomènes critiques

La fonction de corrélation G permet de quantifier à quel point les fluctuations de deux quantités $s(\mathbf{x})$ et $s(\mathbf{x}')$, distantes l'une de l'autre de $|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$, sont reliées entre elles. Loin du point critique, les corrélations connectées décroissent exponentiellement

$$G_c(\mathbf{x}-\mathbf{x}') = \langle s(\mathbf{x})s(\mathbf{x}') \rangle - \langle s(\mathbf{x}) \rangle \langle s(\mathbf{x}') \rangle \sim \frac{e^{-|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|/\xi}}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^{D-2+\eta}}, \quad \text{lorsque } |\mathbf{x}-\mathbf{x}'| \rightarrow +\infty \quad (1.1)$$

qui permet de définir la longueur de corrélation ξ .

Le modèle d'Ising [22] est le modèle paradigmatique pour l'étude du comportement critique. Le système est constitué de N spins S_i pouvant prendre uniquement les valeurs $+1$ ou -1 . L'énergie H_C d'une configuration $\mathcal{C} = \{S_1, \dots, S_N\}$ est donnée par

$$H_C = -J \sum_{\langle ij \rangle} S_i S_j \quad (1.2)$$

où la somme s'étend sur les paires de voisins les plus proches et $J > 0$ dans le cas ferromagnétique. À température nulle, le système est dans la configuration minimisant l'énergie. Tous les spins sont dans le même état $+1$ ou -1 . Le système est dans une phase ordonnée dite ferromagnétique. À l'inverse, lorsque la température est infinie, toutes les configurations sont équiprobables et l'état d'un spin est indépendant de celui de ses voisins. Le système est dans une phase désordonnée appelée paramagnétique. Le paramètre d'ordre permet de faire la distinction entre ces deux phases. Il est nul dans l'une et non nul dans l'autre et permet de ce fait de repérer la position de la transition de phase. Pour le modèle d'Ising, le paramètre d'ordre est l'aimantation moyenne

$$m = \frac{1}{N} \left| \sum_i^N \langle S_i \rangle \right| \quad (1.3)$$

avec

$$\langle S_i \rangle = \frac{\sum_{\mathcal{C}} S_i e^{-H_C/k_b T}}{Z} \quad (1.4)$$

où la somme s'étend sur toutes les configurations possibles et $Z = \sum_{\mathcal{C}} e^{-H_C/k_b T}$ est la fonction de partition. L'énergie d'une configuration (1.2) étant invariante par renversement de tous les spins, l'aimantation moyenne m est nécessairement nulle et ce quelle que soit la température. L'apparition d'une phase ferromagnétique résulte d'une brisure spontanée de la symétrie. Pour le modèle d'Ising, elle peut être due à un champ magnétique externe résiduel, correspondant à une contribution $-H \sum_i^N S_i$ à l'énergie (1.2), brisant la symétrie. La phase ferromagnétique est alors caractérisée par une aimantation spontanée non nulle. On note T_c la température critique à laquelle la transition survient.

A l'approche du point critique, la longueur de corrélation diverge comme

$$\xi \sim |t|^{-\nu} \quad (1.5)$$

où $t = (T - T_c)/T_c$ est une variable adimensionnée mesurant l'écart au point critique et ν est l'exposant critique de la longueur de corrélation. La divergence de ξ conduit à une invariance sous une transformation d'échelle. La longueur de corrélation s'étendant sur l'intégralité du système, les détails microscopiques n'influent pas sur le comportement au point critique. Ainsi, plusieurs modèles, bien que différents microscopiquement, peuvent se comporter d'une manière semblable au point critique. On dit d'eux qu'ils appartiennent à la même classe d'universalité. Comme la longueur de corrélation, les grandeurs thermodynamiques présentent un comportement en loi de puissance, avec parfois une partie régulière. L'ensemble des exposants

Observable	Exposant	Loi de puissance	Conditions
Chaleur spécifique	α	$C \sim t ^{-\alpha}$	$t \rightarrow 0, h = 0$
Aimantation	β	$m \sim (-t)^\beta$	$t \rightarrow 0^-, h = 0$
Aimantation	δ	$m \sim h ^{1/\delta}$	$t = 0, h \rightarrow 0$
Susceptibilité magnétique	γ	$\chi \sim t ^{-\gamma}$	$t \rightarrow 0, h = 0$
Longueur de corrélation	ν	$\xi \sim t ^{-\nu}$	$t \rightarrow 0, h = 0$
Longueur de corrélation	ν_h	$\xi \sim h ^{-\nu_h}$	$t = 0, h \rightarrow 0$
Fonction de corrélation spin-spin	η	$G(\mathbf{x}) \sim \mathbf{x} ^{-D+2-\eta}$	$t = 0, h = 0$

TABLE 1.1 – Définitions des exposants critiques lors d’une transition ferromagnétique-paramagnétique. $t = (T - T_c)/T_c$ représente l’écart au point critique avec T_c la température critique. $h = H/T$ est le champ magnétique externe et D la dimensionnalité du système.

critiques caractérise une classe d’universalité. Ainsi, deux modèles appartiennent à la même classe d’universalité s’ils partagent les mêmes exposants. La classe d’universalité d’un système ne dépend que d’un nombre restreint de paramètres : la symétrie de l’hamiltonien, le fait que les interactions soient à courte portée ou non, la dimension et le nombre de composantes du paramètre d’ordre.

Pour la transition ferromagnétique-paramagnétique du modèle d’Ising, la définition de ces exposants est explicitée dans la table 1.1. La divergence de ξ conduit à la disparition de l’exponentielle dans l’expression (1.1) des corrélations. Il ne reste plus qu’une décroissance algébrique. Par le théorème fluctuation-dissipation, cette dernière conduit à la divergence de la susceptibilité.

1.1.2 Homogénéité et hypothèse d’échelle

Les exposants critiques présentés dans la table 1.1 ne sont pas indépendants. Il existe des lois d’échelle (table 1.2) les liant et permettant de réduire le nombre d’exposants indépendants à deux. L’hypothèse d’homogénéité de la partie singulière de la densité d’énergie libre f_{sing} permet de démontrer ces relations. Cette hypothèse a été formulée pour la première fois par Widom [23] et a été exploitée par la suite [24-27] pour aboutir aux lois d’échelle. Pour la transition ferromagnétique-paramagnétique du modèle d’Ising, f_{sing} dépend de deux champs d’échelle t et h . L’hypothèse d’homogénéité de l’énergie libre implique que sous une dilatation $x \rightarrow x' = x/b$ de facteur d’échelle b , la partie singulière de la densité d’énergie libre se transforme comme

$$f_{\text{sing}}(t, h) = b^{-d} f_{\text{sing}}(b^{y_t} t, b^{y_h} h) \quad (1.6)$$

avec $y_h = 1/\nu_h$ et $y_t = 1/\nu$. Toutes les grandeurs thermodynamiques s’écrivant comme des dérivées de f , elles peuvent également s’exprimer comme une fonction homogène de t et h . En dérivant deux fois l’énergie libre par rapport à t , on obtient par exemple la chaleur spécifique

$$C(t, h) = b^{-d} \frac{\partial^2 f(b^{y_t} t, b^{y_h} h)}{\partial t^2} = b^{-d+2y_t} C(b^{y_t} t, b^{y_h} h). \quad (1.7)$$

$\alpha = 2 - \nu D$	Josephson
$\alpha + 2\beta + \gamma = 2$	Rushbrooke
$\gamma = \beta(\delta - 1)$	Widom
$\gamma = (2 - \eta)\nu$	Fisher

TABLE 1.2 – Lois d'échelle. La relation de Josephson dépend explicitement de D et n'est valable que lorsque $D \leq D_c$ la dimension critique supérieure.

En posant $b = t^{-1/y_t}$ et $h = 0$, on a

$$C(t, h) = t^{-(d+2y_t)/y_t} C(1, 0) \sim t^{d\nu-2}. \quad (1.8)$$

Par comparaison avec le comportement de la chaleur spécifique de la table 1.1, on obtient la relation de Josephson liant les exposants α et ν . En procédant de la même manière pour les observables données dans la table 1.1, on obtient les lois d'échelle présentées dans la table 1.2.

Le comportement en loi de puissance n'est valable qu'au voisinage du point critique. Il est parfois nécessaire de tenir compte de corrections d'échelle de la forme

$$C(t, 0) \sim t^{-\alpha} (1 + at^{-\omega} + \dots), \quad (1.9)$$

avec $\omega > 0$.

1.1.3 Groupe de Renormalisation

Dans l'approximation du champ moyen [3, 28, 29], on obtient pour le modèle d'Ising les exposants suivants :

$$\alpha = 0, \quad \beta = 1/2, \quad \gamma = 1, \quad \delta = 3, \quad \nu = 1/2, \quad \eta = 0 \quad (1.10)$$

en contradiction avec la solution exacte d'Onsager du modèle bidimensionnel [4]. Ce n'est qu'au delà de la dimension critique supérieure D_c que le comportement critique est correctement décrit par l'approximation de champ moyen. Pour le modèle d'Ising, la dimension critique supérieure est $D_c = 4$.

Afin de décrire le comportement au point critique en deçà de la dimension critique supérieure, Kadanoff [24] a introduit une procédure itérative consistant à former successivement des blocs de spins en moyennant les fluctuations aux petites échelles. Après chaque itération, la longueur de corrélation est divisée par un facteur b . Outre les points fixes où $\xi = 0$, il existe un point fixe $\xi = +\infty$ traduisant l'invariance par dilatation au point critique. Wilson [5, 6] formalisa cette procédure.

Soit un hamiltonien \mathcal{H} formé des opérateurs $\{O\} = (O_1, O_2, \dots)$, correspondant aux interactions possibles entre degrés de liberté $\{\phi_\alpha(\mathbf{x})\}$ et d'un jeu de constantes de couplage

$\{K\} = (K_1, K_2, \dots)$:

$$\mathcal{H} = \sum_{\alpha=1}^{+\infty} K_{\alpha} O_{\alpha}. \quad (1.11)$$

Pour le modèle d'Ising, on a $O_1 = \sum_{\langle ij \rangle} S_i S_j$ et $O_2 = \sum_i S_i$ avec les couplages $\{K\} = (-J, -H)$. Le groupe de renormalisation (RG) consiste à

1. Réduire le nombre de degrés de liberté du système en décimant certains.
2. Dilater le réseau d'un facteur b pour préserver la densité des degrés de liberté.

Un nouvel hamiltonien \mathcal{H}' est construit en prenant la trace partielle Tr' sur les degrés de liberté décimés : [30]

$$\exp(-\beta\mathcal{H}') = \text{Tr}' \exp(-\beta\mathcal{H}) \quad (1.12)$$

ce qui permet d'assurer l'invariance de la fonction de partition. L'hamiltonien \mathcal{H}' possède les mêmes symétries mais de nouvelles constantes de couplage $\{K'\} = (K'_1, K'_2, \dots)$ dites renormalisées à la suite de la transformation \mathcal{R}_b :

$$\{K'\} = \mathcal{R}_b(\{K\}). \quad (1.13)$$

Les itérations successives de cette relation de récursion définissent une trajectoire dans l'espace de couplages appelée flot de renormalisation. Suffisamment proche d'un point fixe $\{K^*\} = \mathcal{R}_b(\{K^*\})$, on peut linéariser la transformation \mathcal{R}_b :

$$\delta K'_{\alpha} = \sum_{\beta} T_{\alpha\beta}(b) \delta K_{\beta} + \mathcal{O}((K_{\beta})^2). \quad (1.14)$$

Le comportement critique est donné par les valeurs propres λ_i

$$\lambda_i(b) = b^{y_i}. \quad (1.15)$$

y_i est appelé dimension d'échelle du champ d'échelle t_i correspondant à la composante du vecteur propre \mathbf{e}_i associée :

$$\delta K_{\alpha} = \sum_i t_i \mathbf{e}_i. \quad (1.16)$$

Sous la transformation \mathcal{R}_b , on retrouve le comportement :

$$t'_i = b^{y_i} t_i. \quad (1.17)$$

Trois situations peuvent se produire

1. $y_i > 0$, t_i augmente lors de la renormalisation. Le champ d'échelle t_i est dit pertinent.
2. $y_i < 0$, le flot se rapproche du point fixe. Le champ d'échelle t_i est non pertinent.
3. $y_i = 0$, l'approximation linéaire n'est pas suffisante pour statuer sur la pertinence. Le champ d'échelle t_i est marginal.

On peut classer les points fixes selon le nombre de directions pertinentes [30]. Un point critique correspond à un point fixe possédant deux directions pertinentes. Au delà de deux, il est appelé multi-critique. Pour le modèle d'Ising, on a deux champs d'échelle pertinents : la température réduite $t = (T - T_c)/T_c$ et le champ magnétique h .

La notion d'universalité se comprend d'une façon nouvelle à la lumière du groupe de renormalisation. Tous les points se trouvant sur une même surface critique, paramétrée par les champs d'échelle non pertinents, appartiennent à la même classe d'universalité.

1.1.4 Effets de taille finie

Numériquement, il n'est pas possible de considérer un système dans la limite thermodynamique. Le nombre de degrés de liberté étant fini, la densité d'énergie libre ne peut pas présenter de singularité. Les grandeurs thermodynamiques divergentes au point critique dans la limite thermodynamique (susceptibilité, chaleur spécifique, ...) restent finies et, pour un système de taille L , la position $T_c(L)$ de leur maximum tend vers le point critique comme

$$|T_c - T_c(L)| \sim L^{-1/\nu}. \quad (1.18)$$

Dans la suite, $T_c(L)$ est qualifiée de point pseudo-critique. Les effets de taille finie sont observables lorsque $\xi \geq L$. On peut en tenir compte en ajoutant le nouveau champ d'échelle pertinent $1/L$ dans la loi de transformation de la densité d'énergie libre :

$$f(t, h, 1/L) = b^{-d} f(b^{y_t} t, b^{y_h} h, b/L). \quad (1.19)$$

Il en découle, par exemple, le comportement d'échelle de la chaleur spécifique :

$$C = \xi^{\alpha/\nu} C_0(L/\xi) \quad (1.20)$$

avec C_0 une fonction adimensionnée telle que $C_0(x)$ est constante si $x \gg 1$ et $C_0(x) \sim x^{\alpha/\nu}$ lorsque $x \rightarrow 0$. Les comportements d'échelle des autres grandeurs thermodynamiques sont obtenus de manière analogue.

1.2 Transition de phase quantique

Alors que les transitions de phase sont généralement provoquées par le développement des fluctuations thermiques, certaines transitions se produisent à température nulle. Elles sont provoquées par le développement de fluctuations quantiques sous la variation d'un paramètre extérieur θ . Ces fluctuations induisent le passage d'un état fondamental à un autre de symétrie différente. Comme dans le cas classique, il existe plusieurs classes de transitions de phase quantique et nous ne discuterons, comme précédemment, que des transitions continues.

Avec l'avènement de techniques expérimentales permettant de se placer à très basses températures, de nombreuses réalisations de transitions de phase quantiques ont pu être observées

par exemple, entre un superfluide et un isolant de Mott dans un gaz d'atomes froids [31], entre une phase ordonnée antiferromagnétiquement et une phase paramagnétique dans TlCuCl_3 [32], entre un état de Hall quantique, un état métallique et un état isolant dans des gaz d'électrons bidimensionnels [33-37], entre un comportement de liquide de Fermi, de non liquide de Fermi et antiferromagnétique dans des alliages de fermions lourds [38-40].

1.2.1 Comportement critique à la transition quantique

Au voisinage du point critique θ_c , le gap Δ entre l'état fondamental et le premier état excité s'annule suivant la loi [41]

$$\Delta \sim |\theta - \theta_c|^{\nu z} \quad (1.21)$$

avec ν l'exposant de la longueur de corrélation et z l'exposant dynamique. Comme pour une transition de phase classique du second ordre, la longueur de corrélation diverge comme

$$\xi \sim |\theta - \theta_c|^{-\nu}. \quad (1.22)$$

Ces deux équations permettent de lier longueur et énergie caractéristique

$$\Delta \sim \xi^{-z}. \quad (1.23)$$

En temps imaginaire, longueur de corrélation spatiale et longueur d'autocorrélation $\xi_\tau \sim 1/\Delta$ dans la direction temporelle sont liées par

$$\xi_\tau \sim \xi^z. \quad (1.24)$$

Lorsque $z \neq 1$, les corrélations décroissent différemment dans les directions spatiales et temporelle : le système est anisotrope.

A température finie, deux scénarios sont possibles. Dans certains cas, les fluctuations thermiques détruisent la phase ordonnée et il n'y a plus de transition pour toute température $T > 0$. Dans le cas des modèles de spins qui nous intéressent (Ising, Potts, horloge), les deux échelles d'énergie du problème, le gap Δ et l'énergie thermique $k_B T$ entrent en compétition. Lorsque $\Delta > k_B T$, le système est dans le régime quantique dominé par les fluctuations quantiques. Lorsque $k_B T > \Delta$, les fluctuations thermiques dominent et le système peut être décrit de manière classique. Comme on l'a vu dans la première partie, l'ordre ferromagnétique peut survivre jusqu'à une température critique T_c . Une ligne de transition joint alors le point critique quantique à température nulle au point critique classique à température finie.

1.2.2 Modèle d'Ising quantique

Il existe un lien entre les transitions de phase quantiques à D dimensions et les transitions classiques à $D + 1$ dimensions. La fonction de partition d'un système quantique est $Z_Q = \text{Tr}\{e^{-\beta H_Q}\}$. L'hamiltonien est généralement formé de termes ne commutant pas, i.e.

$[H_Q^0, H_Q^1] \neq 0$, impliquant que $e^{-\beta H_Q} \neq e^{-\beta H_Q^0} e^{-\beta H_Q^1}$. La décomposition de Trotter-Suzuki [42, 43] permet néanmoins de séparer les exponentielles : $e^{-\beta H_Q^0 - \beta H_Q^1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(e^{-\frac{\beta}{n} H_Q^0} e^{-\frac{\beta}{n} H_Q^1} \right)^n$. En posant $\frac{\beta}{n} = \delta\tau$ et en insérant des relations de fermeture $\sum_{\{\sigma_{\tau_n}\}} |\{\sigma_{\tau_n}\}\rangle \langle \{\sigma_{\tau_n}\}|$ entre chaque élément $e^{-\frac{\beta}{n} H_Q^0} e^{-\frac{\beta}{n} H_Q^1}$, la fonction de partition s'interprète comme la somme sur tous les chemins possibles en temps imaginaire $\delta\tau = i\delta t$. Classiquement, chaque élément de matrice $\langle \{\sigma_{\tau_{n+1}}\} | e^{-\frac{\beta}{n} H_Q^0} e^{-\frac{\beta}{n} H_Q^1} | \{\sigma_{\tau_n}\} \rangle$ s'apparente à une matrice de transfert d'une configuration $\{\sigma_{\tau_n}\}$ de dimension D à une autre configuration $\{\sigma_{\tau_{n+1}}\}$. Ainsi, la dimension spatiale supplémentaire du système classique correspond au temps imaginaire du système quantique. La température β du modèle quantique est donc liée à la taille L_τ du modèle classique dans la direction temporelle par $L_\tau = \beta/\delta\tau$.

Dans la limite anisotrope extrême, l'équivalent quantique unidimensionnel du modèle d'Ising bidimensionnel est [44]

$$H_Q = -J \sum_i \sigma_i^z \sigma_{i+1}^z - h \sum_i \sigma_i^x \quad (1.25)$$

avec $\sigma_i^{x,z}$ les matrices de Pauli qui s'écrivent dans la base propre de σ^z

$$\sigma^x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (1.26)$$

On note $|\uparrow\rangle_i$ et $|\downarrow\rangle_i$ les deux vecteurs propres de σ^z , de valeurs propres $+1$ et -1 . Lorsque $h = 0$, l'état fondamental $|0\rangle$ de l'hamiltonien (1.25) est deux fois dégénéré et correspond aux deux états ferromagnétiques, i.e. $|0\rangle = \bigotimes_i |\uparrow\rangle_i$ et $|0\rangle = \bigotimes_i |\downarrow\rangle_i$. On définit l'aimantation totale comme

$$m = \frac{1}{N} \sum_i \langle 0 | \sigma_i^z | 0 \rangle. \quad (1.27)$$

Un champ transverse $h \neq 0$ tend à détruire l'ordre ferromagnétique. L'effet de σ_i^x est, en effet, de renverser l'orientation du spin : $\sigma_i^x |\uparrow\rangle_i = |\downarrow\rangle_i$. Lorsque $J = 0$, chaque spin se trouve dans la superposition d'états $|\rightarrow\rangle_i = (|\uparrow\rangle_i + |\downarrow\rangle_i)/\sqrt{2}$. L'état fondamental est $|0\rangle = \bigotimes_i |\rightarrow\rangle_i$. L'aimantation associée est donc nulle. Entre ces deux limites se produit une transition de phase à $\theta_c = J/h = 1$. Lorsque $\theta < 1$, le système est dans la phase paramagnétique. Lorsque $\theta > 1$, il se trouve dans la phase ferromagnétique.

Fixons par convention l'énergie de l'état fondamental $E_0 = 0$. Lorsque $h = 0$, la première excitation correspond à un mur de domaine obtenu par le renversement de tous les spins à partir d'un site i sur l'état fondamental $|0\rangle = |\uparrow \dots \uparrow\rangle$. Par exemple, $|1\rangle = |\uparrow \dots \uparrow_i \downarrow_{i+1} \dots \downarrow\rangle$, d'énergie $2J$, est créé par l'action de l'opérateur $\tau_i^z = \prod_{j>i} \sigma_j^x$. La présence du mur de domaine sur le site i est repérée par l'opérateur $\tau_i^x = \sigma_i^z \sigma_{i+1}^z$. Les excitations suivantes correspondent à n murs de domaine d'énergie totale $E_n = 2nJ$. Lorsque $J = 0$, la première excitation correspond à un retournement de l'un des spins. Par exemple $|1\rangle = |\rightarrow \dots \rightarrow \leftarrow \rightarrow \dots \rightarrow\rangle$, d'énergie $E_1 = h$, est créée par l'action de l'opérateur σ_i^z sur l'état fondamental $|0\rangle = |\rightarrow \dots \rightarrow\rangle$. La position du site retourné est repérée par l'opérateur σ_i^x . Les excitations suivantes correspondent au retournement de n spins. On peut réécrire l'hamiltonien d'Ising en fonction de ces nouveaux

opérateurs τ^x et τ^z

$$H'_Q = - \sum_i (J\tau_i^x + h\tau_{i-1}^z\tau_i^z) \quad (1.28)$$

L'hamiltonien conserve la même forme que l'hamiltonien original (1.25) après l'échange $J \leftrightarrow h$. Il en découle que si la transition est unique alors elle se produit lorsque $J = h$.

La diagonalisation de l'hamiltonien (1.25) peut être effectuée en procédant tout d'abord à une transformation de Jordan-Wigner [45] qui permet de l'exprimer en terme d'opérateurs fermioniques

$$H = - \sum_i \left[J(c_i^\dagger c_{i+1} + c_{i+1}^\dagger c_i + c_i^\dagger c_{i+1}^\dagger + c_{i+1} c_i) + h(1 - 2c_i^\dagger c_i) \right]. \quad (1.29)$$

On obtient un gaz de fermions sans interaction mais dont le nombre n'est pas conservé à cause des termes $c_i^\dagger c_{i+1}^\dagger + c_{i+1} c_i$. Il est néanmoins possible de diagonaliser cet hamiltonien en passant tout d'abord dans l'espace des moments k via une transformation de Fourier

$$H = \sum_k \left(2[h - J \cos k] c_k^\dagger c_k + iJ \sin k [c_{-k}^\dagger c_k^\dagger + c_{-k} c_k] - h \right) \quad (1.30)$$

puis en appliquant une transformation de Bogoliubov [46] qui permet de l'écrire avec un nouveau jeu d'opérateurs fermioniques $\gamma_k = u_k c_k - i v_k c_{-k}^\dagger$ dont le nombre est cette fois conservé [41]

$$H = \sum_k \epsilon_k (\gamma_k^\dagger \gamma_k - 1/2) \quad (1.31)$$

où $\epsilon_k = 2J\sqrt{(\cos k - \theta)^2 + \sin^2 k}$ est l'énergie à une particule avec $\theta = J/h$. Comme $\epsilon_k \geq 0$, l'état fondamental $|0\rangle$ est obtenu lorsqu'il n'y a aucun fermion γ . Les états à n particules sont de la forme $\gamma_{k_1}^\dagger \dots \gamma_{k_n}^\dagger |0\rangle$. Le gap d'énergie entre l'état fondamental et le premier état excité est $\Delta = 2J|1 - \theta|$. Comme attendu, le gap s'annule pour $\theta = 1$, i.e. à la transition de phase. En calculant également les corrélations et l'aimantation, on montre que les exposants critiques $\nu = 1$ et $\beta = 1/8$ sont ceux du modèle d'Ising $2D$ classique et que l'exposant dynamique est $z = 1$ [47].

Malgré la simplicité de ce modèle, il permet de rendre compte qualitativement du comportement de certains matériaux et de manière exacte des grandeurs universelles au point critique. Dans le composé LiHoF_4 , le spin de l'ion magnétique Ho^{3+} se trouve dans deux états, aligné parallèlement ou anti-parallèlement à un axe cristallin. Chaque ion Ho^{3+} interagit avec ses voisins via des interactions magnétiques dipolaires. À $T = 0K$, en l'absence de champ externe, ces interactions tendent à aligner les spins de tous les ions Ho^{3+} dans la même direction, donnant ainsi un état ferromagnétique. Un champ magnétique H_p appliqué perpendiculairement à cet axe permet d'augmenter la probabilité de transition d'un état à l'autre pouvant ainsi détruire cet ordre ferromagnétique. Le LiHoF_4 peut être assimilé à un hamiltonien d'Ising en champ transverse ne se limitant pas aux interactions entres proches voisins [48]. Le diagramme de phase de LiHoF_4 en fonction de la température T et du champ transverse appliqué a été

déterminé dans [49]. Notons dès à présent que du désordre peut être introduit en remplaçant aléatoirement les ions magnétiques Ho^{3+} par des ions non magnétiques Y^{3+} donnant le matériau $\text{LiHo}_x\text{Y}_{1-x}\text{F}_4$. En variant la concentration x , différents régimes de verres de spins peuvent être obtenus [50-54]. Une autre réalisation du modèle d'Ising en champ transverse a été observé dans les composés quasi-unidimensionnels de CoNb_2O_6 [55]. Les ions Co^{2+} font office de spins d'Ising. Leurs spins peuvent s'orienter parallèlement ou anti-parallèlement par rapport à un axe cristallin sous l'effet des interactions spin-orbite. À $T = 0\text{K}$, en l'absence de champ appliqué, l'état fondamental est magnétiquement ordonné. Un champ magnétique appliqué dans une direction perpendiculaire détruit l'ordre ferromagnétique. De la même manière que pour LiHoF_4 , CoNb_2O_6 permet d'explorer l'effet de la température à proximité d'une transition de phase quantique. Il existe de nombreux autres exemples dont une liste non exhaustive est donnée dans la référence [56].

1.3 Transitions de phase dans les systèmes désordonnés

Un échantillon macroscopique n'est jamais pur. Il subsiste des inhomogénéités prenant, par exemple, la forme d'impuretés, de lacunes, ou autres défauts cristallins. Pour un modèle de spins sur réseau, le désordre prendra la forme d'une dilution de sites ou de liaisons ou de couplages aléatoires.

1.3.1 Les différents types de désordre

Dans un système réel, les impuretés et les défauts peuvent évoluer au cours du temps. On parle de désordre recuit lorsque la densité d'impuretés a le temps de fluctuer au cours du temps, i.e. lorsque le temps caractéristique des fluctuations est inférieur à celui de l'expérience. Du point de vue de la physique statistique, on doit traiter les impuretés comme des degrés de liberté du système et les inclure dans la sommation lors du calcul de la fonction de partition. On parle de désordre gelé lorsque les impuretés peuvent être considérées comme statiques i.e. lorsque le temps caractéristique est plus grand que le temps de l'expérience. Pour un système fini, on devra alors moyenniser les quantités thermodynamiques sur toutes les réalisations possibles du désordre. On a donc deux moyennes à réaliser successivement, d'abord une moyenne sur les fluctuations thermiques ou quantiques puis une moyenne sur le désordre. Dans la suite, on ne considèrera que le cas du désordre gelé et on notera \overline{X} la moyenne sur le désordre de X .

Pour la chaîne d'Ising en champ transverse (1.25), le désordre peut être introduit en

1. Considérant comme aléatoires les couplages entre deux spins et/ou les champs transverses associés à chaque spin, c'est-à-dire en posant

$$H_Q^d = - \sum_i J_i \sigma_i^z \sigma_{i+1}^z - \sum_i h_i \sigma_i^x. \quad (1.32)$$

Si les couplages J_i, h_i sont tous positifs alors le désordre ne change pas les propriétés des phases ferromagnétique et paramagnétique. Le désordre ne brise pas la symétrie \mathbb{Z}_2 ,

- i.e. l'hamiltonien commute toujours avec $P = \prod_i \sigma_i^x$. Ce désordre est qualifié de masse aléatoire car il joue sur le terme de masse de l'action de Ginzburg-Landau [57].
2. En ajoutant un champ magnétique aléatoire couplé à chaque spin i : $\sum_i B_i \sigma_i^z$. Un tel désordre brise localement la symétrie \mathbb{Z}_2 .

Lorsque les couplages ou le champ aléatoire prennent des valeurs négatives, le désordre introduit de la frustration. Le diagramme de phase peut être modifié avec l'apparition de phases de verre de spins [7, 11]. Dans cette thèse, on se limitera au cas de couplages aléatoires positifs.

Pour un système fini, plusieurs types de distribution de couplages aléatoires peuvent être considérés. Un désordre est dit canonique [58, 59] (également appelé grand-canonique [60-63]) lorsque le paramètre de contrôle θ n'est fixé qu'en moyenne. Pour la chaîne d'Ising en champ transverse désordonnée, on a $\theta = \overline{\ln h} - \overline{\ln J}$ [64]. Pour un système de taille L , les fluctuations $\sqrt{\text{Var}[\theta]}$ décroissent comme $1/\sqrt{L}$. Un désordre microcanonique (également appelé canonique) correspond à un paramètre de contrôle fixé pour chaque échantillon de désordre. Pour la chaîne d'Ising en champ transverse, on impose donc la contrainte [58, 59, 65]

$$\sum_{i=0}^{L-1} (\ln h_i - \ln J_i) = \theta. \quad (1.33)$$

pour chaque échantillon et plus seulement en moyenne. Dans la limite thermodynamique, il a été montré que ces deux types de désordre sont équivalents et conduisent, asymptotiquement, à des variances réduites $R_X = \frac{\overline{X^2} - \overline{X}^2}{\overline{X}^2}$ des grandeurs thermodynamiques X identiques [63]. Pour des systèmes de tailles finies, il en va autrement. À cause des fluctuations entre échantillons, le désordre canonique conduit à des corrections aux comportements critiques [60, 62]. C'est pourquoi, il a été proposé de considérer l'écart au point pseudo-critique de chaque échantillon plutôt que par rapport au point critique afin de réduire le bruit sur les moyennes des observables [60]. En se plaçant à la température $T(\chi_{\max})$ du maximum de la susceptibilité magnétique χ avant de moyenniser les grandeurs thermodynamiques, Bernadet *et al.* ont ainsi obtenu un bruit sensiblement réduit conduisant à une meilleure estimation des exposants critiques ν et γ du modèle d'Ising classique désordonné bidimensionnel [62]. Pour des observables de surface, des exposants différents pour les deux types de désordre ont été rapportés. Au point critique, l'aimantation de surface de la chaîne d'Ising en champ transverse conduit à un comportement d'échelle des valeurs moyenne et typique identiques et donc $\nu_{av} = \nu_{typ} = 1$ pour un désordre microcanonique. Pour un désordre canonique, on a en revanche $\nu_{av} = 2$ et $\nu_{typ} = 1$ [58, 59, 65]. Pour les corrélations entre les spins en bout de chaîne, la différence de comportement pour les deux types de désordre est encore plus prononcée. Les corrélations décroissent en loi de puissance pour le désordre canonique et exponentiellement pour le désordre microcanonique [58, 65]. Pour des observables de volume, le même exposant est obtenu pour les deux types de désordre [58] conformément aux prédictions théoriques [66].

Dans cette thèse, il sera question exclusivement d'un désordre canonique gelé.

1.3.2 Influence du désordre à la transition de phase

Harris a étudié l'effet de l'introduction d'un désordre gelé couplé à la densité d'énergie sur la stabilité du point critique pur [14]. Il a montré que le point fixe du système pur est stable si

$$D\nu > 2 \quad (1.34)$$

où D est la dimension du système et ν l'exposant critique du système pur. En utilisant la loi d'échelle de Josephson, l'équation (1.34) équivaut à $\alpha < 0$. Si $\alpha = 0$, le désordre est marginal et il n'est pas possible de conclure. Enfin, si $\alpha > 0$, le désordre est pertinent et le comportement critique du système désordonné diffère de celui du système pur. Chayes *et al.* [67] ont montré que le nouvel exposant ν du système désordonné satisfait $D\nu \geq 2$ au point fixe désordonné.

Le critère de Harris s'applique aussi bien pour des transitions de phase classiques que quantiques. Il n'est cependant valable que lorsque les corrélations du désordre décroissent plus rapidement que $|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^{-D}$ [68]. Dans le cas de corrélations de la forme $|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^{-a}$, Weinrib et Halperin ont montré que le point fixe pur est stable si $\nu > 2/a$ avec $a < D$ [68].

De manière générale, le désordre adoucit les transitions du premier ordre et réduit leur chaleur latente. Aizenman et Wehr ont rigoureusement prouvé qu'un désordre infinitésimal, couplé aussi bien à la densité d'énergie qu'au paramètre d'ordre, transforme une transition du premier ordre en une transition du second ordre en dimensions $D \leq 2$ dans le cas classique [15] et dans le cas quantique [69, 70]. Pour un système de symétrie continue ce résultat est valide pour $D \leq 4$. En dimensions supérieures, il pourra exister un point tricritique où se rejoignent une ligne de transition du premier ordre en désordre faible et une ligne du second ordre en désordre fort [71].

1.3.3 Comportement d'échelle du point pseudo-critique

Pour un système de taille finie L , l'écart entre le point pseudo-critique $\theta_c(L)$ et le point critique θ_c décroît comme $L^{-1/\nu}$ (1.18). L'introduction de désordre conduit à des points pseudo-critiques $\theta_c^i(L)$ différents d'une configuration i de désordre à l'autre. La moyenne $\bar{\theta}_c(L) = \overline{\theta_c^i(L)}$ des points pseudo-critiques se rapproche du point critique θ_c comme dans le système pur [60-62, 72, 73]

$$|\bar{\theta}_c(L) - \theta_c| \sim L^{-1/\nu_s} \quad (1.35)$$

mais avec un exposant ν_s associé au modèle désordonné. L'écart-type des points pseudo-critiques $\delta\theta_c(L) \equiv \sqrt{\text{Var}(\theta_c^i(L))}$ se comporte comme [61, 74]

$$\delta\theta_c(L) \sim L^{-1/\nu_w}. \quad (1.36)$$

La variance réduite d'un observable X

$$R_X(L) = \frac{\text{Var}[X(L)]}{\overline{X(L)}^2}. \quad (1.37)$$

permet de rendre compte de la pertinence du désordre. En effet, lorsque le désordre est non pertinent, l'écart-type des points pseudo-critiques (1.36) est donné par le théorème de la limite centrale et donc $\nu_w = 2/D$ [14]. Le critère de Harris, $\nu_s > 2/D$, implique que $R_{\theta_c}(L)$ s'annule comme $L^{\alpha/\nu}$ de sorte que, dans la limite $L \rightarrow +\infty$, la variable $\theta_c(L)$ est auto-moyennante. En revanche, au point critique désordonné, on a $\nu_w = \nu_s$ [61, 74]. Il en découle que $R_X(L)$ tend vers une valeur finie dans la limite $L \rightarrow +\infty$ indiquant que les variables ne sont pas auto-moyennantes. Une conséquence est l'apparition possible de deux exposants de la longueur de corrélation : ν associé au comportement de la moyenne des corrélations et $\tilde{\nu}$ aux corrélations typiques. Pour la chaîne d'Ising désordonnée en champ transverse, ces exposants sont distincts $\nu = 2$ et $\tilde{\nu} = 1$ [16]. Le comportement critique des grandeurs moyennes est alors déterminé par les événements rares. C'est une des raisons pour laquelle il est essentiel, même pour de larges tailles L , de moyenner sur un grand nombre d'échantillons.

1.3.4 Phase de Griffiths

Alors que les systèmes purs présentent des singularités uniquement au point critique, les systèmes désordonnés peuvent présenter des singularités dans une région étendue du diagramme de phase entourant le point critique. On parle de phase de Griffiths [75].

Ces singularités de Griffiths sont dues à l'existence de régions macroscopiques présentant des couplages plus faibles (ou plus forts) que la moyenne. Dans le cas du modèle d'Ising désordonné, on peut montrer que, dans la phase paramagnétique, la probabilité d'une région de taille caractéristique ℓ avec des couplages J_{ij} plus grands que les champs transverses h_i est de la forme [57]

$$p(\ell) \sim \exp(-a\ell^d). \quad (1.38)$$

En négligeant les champs transverses, l'état fondamental d'une telle région est donc $|\uparrow \dots \uparrow\rangle$ ou $|\downarrow \dots \downarrow\rangle$. Le terme $\sum_i h_i \sigma_i^x$ de l'hamiltonien ne peut retourner cet amas qu'à l'ordre ℓ^d en perturbation car seul $(\sum_i h_i \sigma_i^x)^n |\uparrow \dots \uparrow\rangle$ fait apparaître un terme $\otimes_i \sigma_i^x |\uparrow \dots \uparrow\rangle = |\downarrow \dots \downarrow\rangle$. Le gap d'énergie se comporte donc comme

$$\epsilon(\ell) \sim \exp(-b\ell^D). \quad (1.39)$$

Il en découle la densité d'état

$$\rho(\epsilon) = \int d\ell p(\ell) \delta(\epsilon - \exp(-b\ell^D)) \sim \epsilon^{D/z-1} \quad (1.40)$$

où l'exposant dynamique z est relié aux constantes a et b . La phase de Griffiths paramagnétique est donc sans gap.

Dans la phase de Griffiths ordonnée, une analyse similaire [57] conduit à une densité d'état également sans gap mais de la forme

$$\rho(\epsilon) \sim \exp\left(-c \left(\ln \frac{\epsilon_0}{\epsilon}\right)^{1-1/D}\right) \quad (1.41)$$

avec ϵ_0 une échelle d'énergie microscopique et c une constante variant continûment à travers la phase de Griffiths ferromagnétique. Ainsi, l'effet des régions rares dans la phase de Griffiths ordonnée est souvent moindre que dans la phase de Griffiths désordonnée.

De la densité d'état des régions rares peuvent être obtenues différentes observables thermodynamiques des phases de Griffiths quantiques [57]. Par exemple, dans la phase désordonnée du modèle d'Ising quantique désordonné en champ transverse, les singularités de Griffiths dominent le comportement de la chaleur spécifique à basse température, $C(T) \sim T^{D/z}$, et de la susceptibilité $\chi(T) \sim T^{D/z-1}$ [16, 76-78].

Dans cette section, il n'a été mentionné que les phases de Griffiths quantiques. L'effet de régions rares sur des systèmes classiques existe également. Il conduit à une dynamique anormalement lente dans des modèles ferromagnétiques dilués [79, 80] et des modèles de verres de spins [81]. Griffiths a montré que l'aimantation du modèle d'Ising classique dilué n'est pas une fonction analytique du champ appliqué H lorsque $H = 0$ en deçà de la température critique du modèle pur [75]. Néanmoins, cette singularité est faible et expérimentalement difficilement observable [82-84]. Une région rare dans un modèle quantique est équivalente à une région infiniment corrélée dans une dimension supplémentaire dans un modèle classique. McCoy et Wu ont prédit dans un modèle d'Ising bidimensionnel classique dont le désordre est infiniment corrélé dans une direction, une divergence logarithmique de la chaleur spécifique au point critique [85-87], comme dans le système pur, en adéquation avec des observations expérimentales [88, 89].

1.4 Groupe de renormalisation en désordre fort

En présence de désordre, la méthode des répliques [11] permet d'appliquer les techniques de renormalisation au modèle ϕ^4 [90] et d'estimer les exposants critiques sous forme de série en $\epsilon = 4 - D$ [30]. Lorsque le désordre est infiniment corrélé dans une direction, le point fixe désordonné disparaît et le flot de renormalisation entraîne le système vers l'infini [41, 91]. De manière étonnante, une technique de renormalisation dans l'espace réel, initialement introduite par Ma, Dasgupta et Hu [92, 93] pour étudier la chaîne d'Heisenberg quantique désordonnée antiferromagnétique, donne des résultats exacts pour la chaîne d'Ising désordonnée en champ transverse [16, 94] et la chaîne d'Heisenberg antiferromagnétique [95]. Fisher a pu déterminer analytiquement les exposants critiques et les fonctions d'échelle associées. Le principe de cette procédure tire pleinement parti du fait que le désordre lève les dégénérescences présentes dans le système pur. Il est dorénavant possible d'éliminer successivement les degrés de liberté de plus haute énergie et d'étudier les propriétés à basse énergie, notamment celles de l'état fondamental. Pour cela, la procédure consiste à repérer le plus grand couplage du système Ω , à déterminer l'état fondamental du plus petit hamiltonien local comprenant ce couplage, à traiter le reste de l'hamiltonien du système en perturbation et à éliminer les états propres de hautes énergies de l'hamiltonien local. Cette renormalisation s'effectue à une échelle d'énergie Ω et reste locale (elle n'implique que les couplages voisins). L'hamiltonien est itérativement modifié et caractérisé par

les distributions des couplages restants. La procédure s'arrête une fois que l'échelle d'énergie voulue est atteinte.

Cette méthode est nommée groupe de renormalisation en désordre fort (SDRG). Dans toute cette partie, on l'applique à la chaîne d'Ising désordonnée en champ transverse (1.32) où les couplages $\{h_i\}$ et $\{J_i\}$ sont tous positifs.

1.4.1 Règles de renormalisation

Les règles de renormalisation permettent de déterminer comment doivent être modifiés les couplages après une procédure de renormalisation. Le couplage le plus grand du système est noté

$$\Omega \equiv \max(h_i, J_i). \quad (1.42)$$

Lors de la décimation de Ω , deux cas distincts peuvent se produire.

- Si le plus grand couplage est un champ transverse $\Omega = h_i$, le terme dominant dans l'hamiltonien (1.32) est $\mathcal{H}'_i = -h_i \sigma_i^x$. La plus petite valeur propre de \mathcal{H}'_i est $-h_i$ associée au vecteur propre $|\rightarrow_i\rangle$. Elle est séparée du premier état excité par un gap d'énergie $2h_i$. On décime le site i en projetant l'hamiltonien de la chaîne sur l'état fondamental $|\rightarrow_i\rangle$ de \mathcal{H}'_i . Les opérateurs couplant le site i au reste du système, ici $\mathcal{H}_I = -J_{i-1} \sigma_{i-1}^z \sigma_i^z - J_i \sigma_i^z \sigma_{i+1}^z$, induisent au second ordre en perturbation, un hamiltonien effectif $\tilde{\mathcal{H}}$

$$\tilde{\mathcal{H}} = -\tilde{J} \tilde{\sigma}_{i-1}^z \tilde{\sigma}_{i+1}^z, \quad \text{avec } \tilde{J} \approx \frac{J_{i-1} J_i}{h_i} + \mathcal{O}\left(\frac{J_i^3 J_{i+1}}{h_i} + \frac{J_i J_{i+1}^3}{h_i} + \frac{J_i^2 J_{i+1}^2}{h_i}\right). \quad (1.43)$$

correspondant à une interaction effective \tilde{J} entre les spins voisins $\tilde{\sigma}_{i-1}^z$ et $\tilde{\sigma}_{i+1}^z$.

- Si le plus grand couplage est une liaison $\Omega = J_i$, le terme dominant de l'hamiltonien est $\mathcal{H}' = -J_i \sigma_i^z \sigma_{i+1}^z$. La plus petite valeur propre de \mathcal{H}' , doublement dégénérée, est $-J_i$. Les vecteurs propres associés sont $|\uparrow_i \uparrow_{i+1}\rangle$ et $|\downarrow_i \downarrow_{i+1}\rangle$. Les deux spins d'Ising i et $i+1$ se trouvent alors dans le même état et se comportent comme un macro-spin d'Ising à deux états. L'état fondamental est séparé des états excités par un gap d'énergie $2J_i$. Les champs transverses h_i et h_{i+1} lèvent la dégénérescence entre les états $|\uparrow_i \uparrow_{i+1}\rangle$ et $|\downarrow_i \downarrow_{i+1}\rangle$. La création d'un macro-spin conduit à l'hamiltonien effectif

$$\tilde{\mathcal{H}} = -\tilde{h} \tilde{\sigma}_i^x, \quad \text{avec } \tilde{h} \approx \frac{h_i h_{i+1}}{J_{i,i+1}} + \mathcal{O}\left(\frac{h_i^3 h_{i+1}}{J_i} + \frac{h_i h_{i+1}^3}{J_i} + \frac{h_i^2 h_{i+1}^2}{J_i}\right) \quad (1.44)$$

où l'opérateur $\tilde{\sigma}_x = \sigma_i^x \sigma_{i+1}^x$ est un nouvel opérateur qui retourne de manière cohérente les spins i et $i+1$. \tilde{h} est un champ transverse effectif couplé au macro-spin. Ce dernier est également couplé aux spins voisins par $-J_{i-1,i} \sigma_{i-1}^z \tilde{\sigma}_i^z - J_{i,i+2} \tilde{\sigma}_i^z \sigma_{i+2}^z$. Le moment effectif $\tilde{\mu}$ du macro-spin est la somme

$$\tilde{\mu} = \mu_i + \mu_{i+1}. \quad (1.45)$$

des moments magnétiques μ_i et μ_{i+1} des spins qui ont fusionné.

Dans les deux cas, un degré de liberté a été éliminé et le nouveau couplage \tilde{J} ou \tilde{h} est

plus faible que Ω . L'échelle maximale d'énergie Ω diminue donc nécessairement après chaque itération. Les propriétés de l'état fondamental sont obtenues dans la limite $\Omega \rightarrow 0$. A l'issue d'une décimation, la structure de l'hamiltonien est préservée. Aucun terme n'y est ajouté et la valeur des nouveaux couplages ne dépend que des termes éliminés. Ainsi, aucune corrélation entre les couplages $\{h_i, J_{ij}\}$ restants n'est ajoutée par une décimation. La symétrie entre les règles de décimation obtenues reflètent la dualité entre h et J de l'hamiltonien.

1.4.2 Équations de flot

Fisher a extrait le comportement critique des équations d'évolution des distributions de probabilité des couplages aléatoires au cours de la renormalisation. Pour le modèle d'Ising, on doit considérer les distributions des couplages $P(J)$ et $R(h)$. Plutôt que de suivre leur évolution en fonction du nombre d'itérations de renormalisation, on suit $P(J, \Omega)$ et $R(h, \Omega)$ en fonction de Ω , correspondant à la valeur du prochain couplage décimé. La dualité entre J et h permet de limiter l'analyse à l'une des deux distributions.

L'étude du flot de renormalisation consiste à étudier la variation des distributions $P(J, \Omega)$ et $R(h, \Omega)$ lorsque l'échelle d'énergie Ω diminue de $d\Omega$ après la décimation des couplages compris entre $\Omega - d\Omega$ et Ω . On introduit $N_b(J, \Omega)$ le nombre total de couplages de valeur J , $N_s(h, \Omega)$ le nombre de champs transverses d'amplitude h et $N(\Omega)$ le nombre total de couplages J ou h à l'échelle Ω . La distribution $P(J, \Omega - d\Omega)$ est donnée par le rapport

$$P(J, \Omega - d\Omega) = \frac{N_b(J, \Omega - d\Omega)}{N(\Omega - d\Omega)}. \quad (1.46)$$

Le nombre total de couplages diminue à chaque décimation :

$$N(\Omega - d\Omega) = N(\Omega) - d\Omega(N_s(\Omega, \Omega) + N_b(\Omega, \Omega)). \quad (1.47)$$

Chaque décimation d'un champ transverse $h = \Omega$ conduit à la création d'un couplage effectif $\tilde{J} = J_1 J_2 / \Omega$ et à la suppression des couplages J_1 et J_2 . Le nombre de couplages J évolue alors suivant

$$N_b(J, \Omega - d\Omega) = N_b(J, \Omega) + d\Omega N_s(\Omega, \Omega) \int_0^\Omega dJ_1 \int_0^\Omega dJ_2 P(J_1, \Omega) P(J_2, \Omega) \times \left[\delta \left(J - \frac{J_1 J_2}{\Omega} \right) - \delta(J - J_1) - \delta(J - J_2) \right] \quad (1.48)$$

pour tout $J < \Omega - d\Omega$ où $d\Omega N_s(\Omega, \Omega)$ est le nombre de champs transverses $h \in [\Omega - d\Omega; \Omega]$ décimés. En développant l'intégrale, on obtient

$$N_b(J, \Omega - d\Omega) = N_b(J, \Omega) - 2P(J, \Omega)N_s(\Omega, \Omega)d\Omega + d\Omega N_s(\Omega, \Omega) \int_0^\Omega dJ_1 \int_0^\Omega dJ_2 P(J_1, \Omega) P(J_2, \Omega) \delta \left(J - \frac{J_1 J_2}{\Omega} \right). \quad (1.49)$$

La variation de la probabilité $dP(J, \Omega)/d\Omega$ est donnée par le rapport (1.46) de (1.49) par (1.47). Au premier ordre en $d\Omega$, il vient

$$\frac{\partial P(J, \Omega)}{\partial \Omega} = P(J, \Omega)[R(\Omega, \Omega) - P(\Omega, \Omega)] - R(\Omega, \Omega) \int_0^\Omega dJ_1 \int_0^\Omega dJ_2 P(J_1, \Omega) P(J_2, \Omega) \delta \left(J - \frac{J_1 J_2}{\Omega} \right) \quad (1.50)$$

et par dualité

$$\frac{\partial R(h, \Omega)}{\partial \Omega} = R(h, \Omega)[P(\Omega, \Omega) - R(\Omega, \Omega)] - P(\Omega, \Omega) \int_0^\Omega dh_1 \int_0^\Omega dh_2 R(h_1, \Omega) R(h_2, \Omega) \delta \left(h - \frac{h_1 h_2}{\Omega} \right). \quad (1.51)$$

Étant donné la structure multiplicative des équations de récursion, il est pratique d'introduire le logarithme de l'échelle d'énergie Γ et des couplages ζ et β

$$\Gamma = \ln(\Omega_0/\Omega), \quad \zeta = \ln(\Omega/J), \quad \beta = \ln(\Omega/h) \quad (1.52)$$

où Ω_0 correspond à la valeur initiale de l'énergie. Les équations d'évolution de P et R s'écrivent en fonction de ces nouvelles variables [16]

$$\begin{cases} \frac{\partial P(\zeta, \Gamma)}{\partial \Gamma} = \frac{\partial P(\zeta, \Gamma)}{\partial \zeta} + P(\zeta, \Gamma)[P(0, \Gamma) - R(0, \Gamma)] + R(0, \Gamma) \int_0^\infty d\zeta_1 P(\zeta_1, \Gamma) P(\zeta - \zeta_1, \Gamma), \\ \frac{\partial R(\beta, \Gamma)}{\partial \Gamma} = \frac{\partial R(\beta, \Gamma)}{\partial \beta} + R(\beta, \Gamma)[R(0, \Gamma) - P(0, \Gamma)] + P(0, \Gamma) \int_0^\infty d\beta_1 R(\beta_1, \Gamma) R(\beta - \beta_1, \Gamma). \end{cases} \quad (1.53)$$

1.4.3 Distributions au point fixe et exposants critiques

Fisher a analysé les solutions de ce jeu d'équations au point critique et en dehors du point critique. Un ansatz est la forme exponentielle

$$P(\zeta, \Gamma) = P(0, \Gamma) \exp(-\zeta P(0, \Gamma)), \quad R(\beta, \Gamma) = R(0, \Gamma) \exp(-\beta R(0, \Gamma)). \quad (1.54)$$

En injectant (1.54) dans (1.53) on montre que ces distributions sont effectivement solutions si elles satisfont les équations différentielles couplées

$$\begin{cases} \frac{\partial P(0, \Gamma)}{\partial \Gamma} = -R(0, \Gamma) P(0, \Gamma), \\ \frac{\partial R(0, \Gamma)}{\partial \Gamma} = -P(0, \Gamma) R(0, \Gamma). \end{cases} \quad (1.55)$$

Au point critique, l'autodualité impose $P(0, \Gamma) = R(0, \Gamma)$. Les équations différentielles couplées se réduisent à une seule

$$\frac{\partial P(0, \Gamma)}{\partial \Gamma} = -P(0, \Gamma)^2 \quad (1.56)$$

dont la solution est $P(0, \Gamma) = 1/(\Gamma - \Gamma_0)$ avec Γ_0 une constante d'intégration. Les distributions au point fixe sont alors

$$P(\zeta, \Gamma) = \frac{1}{\Gamma} e^{-\zeta/\Gamma}, \quad R(\beta, \Gamma) = \frac{1}{\Gamma} e^{-\beta/\Gamma}. \quad (1.57)$$

Dans la limite de basse énergie, c'est-à-dire lorsque $\Gamma \rightarrow \infty$, ces distributions deviennent infiniment larges et le désordre infiniment fort. L'utilisation de la perturbation au second ordre pour obtenir les règles de décimation est alors justifiée. La probabilité que le couplage voisin de Ω soit de l'ordre de $\alpha\Omega$ avec $\alpha \in [0, 1]$ est donnée par

$$\text{Pr}(\alpha) = \int_0^{-\ln \alpha} P(\zeta, \Gamma) d\zeta \sim \frac{\ln \alpha}{\Gamma}. \quad (1.58)$$

Lorsque $\Gamma \rightarrow +\infty$, la probabilité de trouver un couplage proche de Ω est donc infiniment faible. La perturbation du second ordre est asymptotiquement exacte.

Puisque chaque itération de renormalisation s'accompagne de la décimation d'un amas, la densité d'amas évolue comme

$$\frac{dn_\Gamma}{d\Gamma} = -[P(0, \Gamma) + R(0, \Gamma)]n_\Gamma. \quad (1.59)$$

Au point critique ($P(0, \Gamma) = R(0, \Gamma) = 1/\Gamma$), la solution est

$$n_\Gamma \sim \frac{1}{\Gamma^2}. \quad (1.60)$$

La longueur typique d'une liaison ou d'un amas est $\bar{l} \sim 1/n_\Gamma$. On obtient la relation entre une échelle d'énergie Ω et une échelle de longueur \bar{l} :

$$\bar{l} \sim \Gamma^2 \sim \ln^2 \left(\frac{\Omega_0}{\Omega} \right). \quad (1.61)$$

En réécrivant cette équation avec les notations $\bar{l} \sim \xi$ et $\xi_\tau \sim 1/\Omega$, on a

$$\ln \xi_\tau \sim \xi^{1/2}. \quad (1.62)$$

En comparant avec (1.24), il apparaît que l'exposant dynamique z est formellement infini au point fixe. Le retournement d'un amas est alors exponentiellement lent au point critique. Un tel comportement est appelé dynamique activée et est caractérisé par le nouvel exposant ψ

$$\ln(\Omega_0/\Omega) \sim \xi^\psi. \quad (1.63)$$

Pour la chaîne d'Ising désordonné en champ transverse, cet exposant vaut $\psi = 1/2$.

En étudiant l'évolution de la probabilité $P(h, \mu, \Omega)$ qu'un amas de moment magnétique μ soit couplé à un champ transverse h à l'énergie Ω , on montre que [16]

$$\bar{\mu} \sim [\ln(\Omega_0/\Omega)]^\phi, \quad (1.64)$$

avec $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ le nombre d'or.

Insistons sur le fait qu'une des spécificités de ce point critique de désordre infini est que les distributions des quantités physiques, comme l'énergie ou le paramètre d'ordre (aimantation pour le modèle d'Ising), sont infiniment larges ce qui implique une différence marquée entre valeurs typique et moyenne. Pour la chaîne d'Ising désordonnée en champ transverse, Fisher a montré que les corrélations spin-spin typiques $C_{typ}(x) = \overline{\ln\langle\sigma_j^z\sigma_{j+x}^z\rangle}$ décroissent dans la phase désordonnée comme $C_{typ}(x) \sim x/\xi_{typ}$ avec $\xi_{typ} \sim |\theta - \theta_c|^{-\nu_{typ}}$ où $\nu_{typ} = 1$. Les corrélations moyennes $C_{moy}(x) = \overline{\langle\sigma_j^z\sigma_{j+x}^z\rangle}$ décroissent exponentiellement dans la phase désordonnée comme $C_{moy}(x) \sim e^{-x/\xi}$ avec $\xi \sim |\theta - \theta_c|^{-\nu}$ où $\nu = 2$ [16]. Cela met en exergue l'importance des régions rares ; les moyennes des quantités physiques sont dominées par des évènements rares.

Les exposants critiques de la chaîne d'Ising désordonné en champ transverse sont finalement [16]

$$\nu = 2, \quad \nu_{typ} = 1, \quad \psi = 1/2, \quad \beta = 2 - \phi = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}. \quad (1.65)$$

Fisher a également déterminé les fonctions d'échelle de l'aimantation et de la susceptibilité magnétique en fonction de la température ou du champ magnétique appliqué [16].

1.5 Modèle d'Ising désordonné en champ transverse en dimensions $D > 1$

Dans la section précédente, on a décrit le comportement critique de la chaîne d'Ising en champ transverse. Il n'est cependant pas possible de faire de même pour l'étudier analytiquement par SDRG en dimensions $D > 1$. Les premiers résultats numériques du comportement critique du modèle d'Ising bidimensionnel désordonné en champ transverse en dimensions $D > 1$ ont été obtenus par simulations Monte-Carlo dans le cas bidimensionnel [96, 97]. Comme dans le cas unidimensionnel, il est décrit, en présence de désordre, par un point fixe de désordre infini [96, 97]. Les distributions de probabilité du cumulants de Binder sont de plus en plus étalées à mesure que la taille L du système augmente, signe que l'exposant dynamique z est infini. Le logarithme de la longueur de corrélation dans la direction transverse varie en fonction de la taille du système avec un exposant $\psi \simeq 0.42$ dans [96] et $\psi \simeq 0.5$ dans [97]. La moyenne des corrélations spin-spin décroît en loi de puissance avec l'exposant $\eta \sim 1.95$.

Quelques années plus tard, des simulations numériques basées sur une implémentation des règles de décimation décrites précédemment ont été réalisées sur le modèle bidimensionnel [98]. L'étude du flot de renormalisation des couplages h_i, J_{ij} indique l'existence d'un point fixe de désordre infini en accord avec les simulations Monte-Carlo. Des tailles de systèmes jusqu'à $L = 290$ ont été considérées contre seulement $L = 42$ et $L_\tau = 2048$ pour les simulations Monte-Carlo. Plusieurs exposants critiques ont été estimés : $\psi = 0.42 \pm 0.06$, $d_f = 1.0 \pm 0.1$, $\eta = 2.0 \pm 0.2$ et $\phi = 2.5 \pm 0.4$. Dans cette implémentation des règles de la SDRG, seules les liaisons effectives plus grandes qu'une valeur seuil donnée étaient prises en compte. Dans une autre implémentation de ces règles, où toutes les liaisons effectives étaient prises en compte limitant la taille maximale

	1D	2D	3D	4D
ν_w	2	1.24(2)	0.97(5)	0.825(40)
ν_s	2	2.50(6)	0.987(17)	0.74(4)
d_f	$\frac{7-\sqrt{5}}{4}$	1.018(16)	1.161(15)	1.28(12)
ψ	0.5	0.48(2)	0.46(2)	0.46(2)

TABLE 1.3 – Exposants critiques du modèle d’Ising désordonné en champ transverse en dimensions $D = 1, 2, 3, 4$. $\nu_s(\nu_w)$ est l’exposant de la longueur de corrélation obtenu à partir de la moyenne (écart-type) des points pseudo-critiques. Les données proviennent de [16] (1D) et [104] ($D > 1$).

à $L = 128$, des exposants critiques similaires sont obtenus [99]. Des études, également basées sur une procédure de SDRG, ont permis de montrer que l’entropie d’intrication du modèle bidimensionnel suit une loi d’aire modifiée avec une contribution atypique en $l \log \log l$ [100]. Une conclusion différente avec une simple correction logarithmique est avancée [101] puis confirmée par des simulations numériques en dimensions allant jusqu’à 4 [102].

L’implémentation décrite dans le chapitre qui suit a été proposée par Kovács et Iglói et appliquée au modèle d’Ising désordonné en champ transverse. Elle a permis l’étude du comportement critique non seulement en dimensions $D = 2$ mais également en dimensions $D = 3$ et $D = 4$ en considérant dans chaque cas des systèmes contenant jusqu’à plusieurs millions de spins [103, 104]. Nous reportons les détails algorithmiques au prochain chapitre et résumons ici les résultats obtenus par Kovács et Iglói. Le point critique a été estimé à partir des points pseudo-critiques de chaque échantillon calculés en recourant à la méthode du doublement (définie dans le chapitre suivant). Au point critique, les distributions du gap d’énergie et du moment magnétique ont été déterminées. Elles montrent que le modèle d’Ising désordonné en champ transverse est gouverné par un point fixe de désordre infini en dimensions $D = 2, 3, 4$ indépendamment du désordre initial. Les exposants critiques estimés par la méthode du quotient [105-107], afin de prendre en compte les corrections d’échelle, dépendent de la dimension D . Ils sont résumés dans la table 1.3.

Le modèle d’Ising désordonné en champ transverse en dimensions $D > 1$ a également été étudié analytiquement [108]. Malgré le fait que le calcul repose sur un développement perturbatif valable pour $J_{ij} \ll h_i$, la présence d’un point de désordre infini a pu être mise en évidence. En dimensions $D > 3$, le point fixe de désordre infini n’est atteint qu’avec un désordre suffisamment fort.

Chapitre 2

Étude du comportement critique par SDRG en dimensions $D > 1$

Dans le chapitre 1, la méthode de renormalisation SDRG a été présentée dans le cas unidimensionnel. Il est facile de voir que les règles de décimation ne sont pas modifiées en dimensions supérieures. Toutefois, la décimation d'un champ transverse ou d'une liaison ne laisse plus invariant la topologie du réseau. En particulier, la décimation d'un champ transverse sur un site donné induit un couplage effectif entre toutes les paires de ses sites voisins. Il n'est plus possible de suivre analytiquement l'évolution des distributions $P(J, \Omega)$, $R(h, \Omega)$ car les décimations induisent des corrélations entre les couplages. La détermination des distributions à basse énergie, lorsque $\Omega \rightarrow 0$, et donc des propriétés critiques, devient alors irréalisable. L'alternative consiste à avoir recours à une implémentation numérique. Un algorithme naïf, qui créerait systématiquement tous les couplages effectifs après une décimation, serait vite limité par la quantité de mémoire nécessaire. Dans la première partie de ce chapitre, on présentera un algorithme optimisé basé sur une structure en graphe. On développera plusieurs optimisations conduisant à une complexité en $\mathcal{O}(N \ln N + E)$ où N est le nombre de spins total et E le nombre de liaisons du réseau. Une optimisation majeure consistera à remarquer qu'il n'est pas nécessaire de systématiquement décimer le couplage le plus grand à chaque itération, mais seulement n'importe quel couplage suffisamment grand par rapport aux couplages voisins. Dans une seconde partie, on discutera la méthode employée pour étudier le comportement critique. On déterminera tout d'abord la position du point pseudo-critique en utilisant la méthode du doublement pour chaque échantillon de désordre. On déterminera ensuite les exposants critiques à partir du comportement d'échelle de plusieurs observables (paramètre d'ordre et gap d'énergie).

2.1 Implémentation numérique de la SDRG en dimensions $D > 1$

Dans cette première section, on décrit l'algorithme SDRG utilisé en dimensions $D > 1$. Dans un premier temps, on explicite la généralisation des règles de décimation, précédemment obtenues dans le cas unidimensionnel, à plus hautes dimensions. Deux règles, équivalentes au

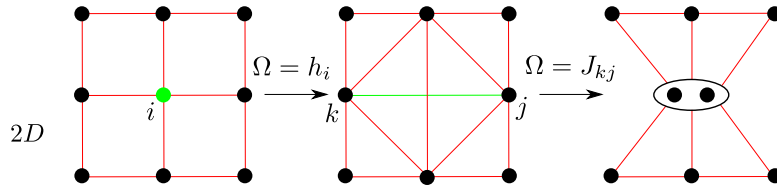


FIGURE 2.1 – Illustration de la procédure de décimation sur un réseau carré. Les spins sont représentés par des ronds noirs et les couplages par des traits rouges. La couleur verte indique le couplage qui est décimé. Sur la figure de gauche, le spin central possède le champ transverse le plus grand. Lorsqu’il est décimé (figure du milieu), des liaisons sont créées entre tous ses voisins. La topologie n’est plus celle d’un réseau carré. Après la décimation d’une liaison (figure de droite) un amas I constitué des deux spins k et j , reliés initialement par la liaison décimée, est formé. Si un spin était relié à k par J_1 et à j par J_2 avant la décimation, la valeur du couplage entre celui-ci et I est donnée par la règle du maximum $J_f = \max(J_1, J_2)$ ou par la règle de l’addition $J_f = J_1 + J_2$.

point critique de désordre infini, sont discutées. Le choix de l’une d’elles est la clef de voûte de l’implémentation numérique présentée. En guise d’illustration, le modèle d’Ising désordonné en champ transverse est utilisé tout au long du chapitre. L’hamiltonien unidimensionnel (1.32), présenté au chapitre précédent, se généralise aisément pour n’importe quelle dimension et n’importe quelle géométrie comme

$$H_{Ising} = - \sum_{\langle ij \rangle} J_{ij} \sigma_i^z \sigma_j^z - \sum_i h_i \sigma_i^x \quad (2.1)$$

où $\sum_{\langle ij \rangle}$ désigne la somme sur les paires de voisins les plus proches. Ensuite, on détaille l’implémentation numérique de la SDRG introduite par Kovács et Iglói pour étudier le modèle d’Ising désordonné en champ transverse en dimensions $2 \leq D \leq 4$ [103, 104]. Elle consiste à associer à l’hamiltonien sur réseau un graphe dans lequel chaque nœud correspond initialement à un site et chaque arête à un couplage J . Enfin, on présente plusieurs optimisations nécessaires et permettant de diminuer le temps de calcul.

2.1.1 Généralisation des règles de décimation en dimensions $D > 1$

En dimensions $D > 1$, les règles de décimation s’obtiennent de manière analogue au cas unidimensionnel. Elles se formulent de la manière suivante :

- si le couplage le plus grand est la liaison $J_{ij} = \Omega$, l’amas I formé par les spins i et j est couplé à un champ transverse effectif $\tilde{h} = \frac{h_i h_j}{J_{ij}}$. Il est relié aux voisins de i et de j par les couplages $J_{Ik} = J_{ik} + J_{jk}$. Cette décimation est illustrée par la figure 2.1 (à droite).
- si le couplage le plus grand est un champ transverse $h_i = \Omega$, des liaisons effectives $\tilde{J}_{kl} = J_{ki} J_{il} / h_i$ sont créées entre tous les voisins k, l du site i . Cette décimation est illustrée par la figure 2.1 (au milieu).

Une particularité de la SDRG à hautes dimensions est de créer des couplages effectifs entre deux sites qui étaient déjà potentiellement couplés. En effet, supposons que le site i soit voisin des sites k et l et qu’il existe une liaison J_{kl} entre les sites k et l . Si $h_i = \Omega$, alors la décimation

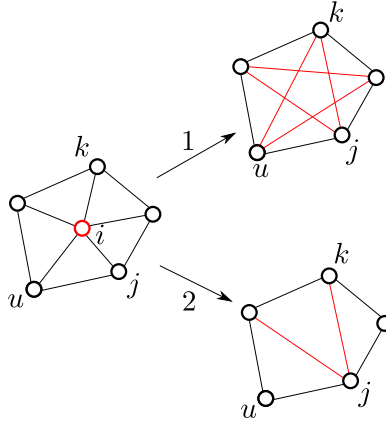


FIGURE 2.2 – Décimation du champ transverse i . Dans le cas 1, toutes les liaisons possibles sont générées. Dans le cas 2, seules les liaisons utiles sont générées sous réserve de certaines conditions (voir texte).

du spin va créer une liaison effective J'_{kl} entre les sites k et l . Il y a désormais deux couplages J_{kl} et J'_{kl} . Le couplage effectif est la somme des deux, c'est-à-dire $\tilde{J}_{kl} = J_{kl} + J'_{kl}$ (règle de l'addition). Toutefois, au point critique de désordre infini, on peut remplacer la somme par un maximum sans affecter le comportement critique, c'est-à-dire $\tilde{J}_{kl} = \max(J_{kl}, J'_{kl})$ (règle du maximum). L'utilisation de la règle du maximum est justifiée au point de désordre infini par le fait que les couplages ont des amplitudes très différentes (leur distribution est extrêmement large) garantissant que $\tilde{J}_{kl} = J_{kl} + J'_{kl} \simeq \max(J_{kl}, J'_{kl})$. Cette méthode est communément employée pour traiter des systèmes en dimensions $D > 1$ [98, 103, 109]. Il en va de même lorsque $J_{ij} = \Omega$. Si un spin k est initialement voisin de i et j , la décimation de la liaison J_{ij} conduit à la formation d'un amas I . Le couplage entre le spin k et l'amas I est $J_{Ik} = J_{ik} + J_{jk}$. On le remplacera par $J_{Ik} = \max(J_{ik}, J_{jk})$.

Numériquement, la règle du maximum est extrêmement avantageuse en cela qu'elle permet l'utilisation de nombreuses simplifications tout en garantissant des résultats identiques au point de désordre infini. Elle sera la pierre angulaire du fonctionnement de l'implémentation présentée par la suite. Plus spécifiquement, prendre le maximum permet de ne pas garder la mémoire de toutes les liaisons mais seulement de celles qui ont une chance d'être décimées par la suite. Prenons l'exemple donné par la figure 2.2. Supposons qu'on décime dans un premier temps le champ transverse h_i . En principe, des couplages effectifs J'_{kl} sont induits entre tous les voisins k, l du site i . Supposons que le plus grand couplage est à présent h_j . Sa décimation va conduire à de nouveaux couplages effectifs J''_{kl} entre tous les voisins de j . Or certains voisins de j sont aussi des voisins de i . On va donc créer des couplages effectifs J'_{kl} puis J''_{kl} . Par application de la règle du maximum, il est inutile de créer J'_{kl} si $J'_{kl} < J''_{kl}$ i.e. si

$$\frac{J_{ki}J_{il}}{h_i} < \frac{J_{ki}J_{ij}J_{jl}}{h_i h_j}. \quad (2.2)$$

On peut estimer la complexité de l'algorithme naïf qui créerait tous les couplages effectifs comme $\mathcal{O}(N^3)$ avec N le nombre de sites dans le réseau. Cette estimation correspond au cas où presque chaque spin est relié à tous les autres, ce qui survient rapidement dans la phase

paramagnétique dans laquelle les champs transverses sont décimés en premier, donnant $\sim N^2$ liaisons dans le système. Or la SDRG requiert de décimer N champs transverses et la décimation de chaque champ transverse génère $\sim N^2$ couplages, ce qui donne la complexité en $\mathcal{O}(N^3)$. En considérant uniquement les liaisons qui seront utiles, il est possible d'aboutir à un algorithme ayant une complexité en $\mathcal{O}(N \ln N + E)$ où N est le nombre de sites et E le nombre de liaisons [104]. C'est cet algorithme qui est présenté dans la section suivante.

2.1.2 Formulation des règles de décimation sur un graphe

Kovács et Iglói ont proposé un algorithme basé sur la règle du maximum et ne créant que les couplages effectifs nécessaires. Ils l'ont appliqué au modèle d'Ising désordonné en champ transverse [20, 104]. L'implémentation repose sur le passage de l'hamiltonien sur réseau à un graphe et sur l'équivalence entre règle du maximum et chemin le plus court entre deux nœuds de ce graphe. L'utilisation d'un graphe permet l'emploi d'algorithmes très performants comme celui de Dijkstra [110] accélérant significativement les calculs.

2.1.2.1 Description du graphe

Soit $G = (V, E)$ un graphe non orienté où V est l'ensemble des nœuds, $|V|$ le nombre de nœuds initiaux et E un ensemble d'arêtes e_{ij} reliant deux nœuds $(i, j) \in V^2$. À chaque nœud i du graphe est associé le poids

$$r_i = -\ln h_i. \quad (2.3)$$

On introduit le booléen l_i , attaché au nœud i , qui prend la valeur 1 si le nœud i a été décimé (dans ce cas le nœud i est dit inactif) et 0 autrement (dans ce cas le nœud i est dit actif). On note V^0 l'ensemble des nœuds actifs et V^1 l'ensemble des nœuds inactifs et donc $V = V^1 \cup V^0$. Chaque arête e_{ij} porte initialement un poids

$$d_{ij} = d_{ji} = -\ln J_{ij}. \quad (2.4)$$

L'astuce de cette nouvelle implémentation est de ne jamais créer de nouvelles arêtes. Lors de la décimation d'un spin, on se contente d'inactiver le nœud correspondant. Les couplages effectifs seront recalculés à chaque fois que nécessaire. Les arêtes ne posséderont plus d'interprétation physique lorsqu'elles relient un nœud actif et un nœud inactif. On introduit la distance entre deux nœuds actifs i et j comme

$$\delta_{ij} = \min_{\mathcal{C}^{ij} \in \mathcal{A}^{ij}} \left(\sum_{p=1}^{|\mathcal{C}^{ij}|-1} d_{u_p u_{p+1}} - l_{u_p} \frac{r_{u_p} - \ln \kappa}{2}, u_p \in \mathcal{C}^{ij} \right) \quad (2.5)$$

avec $\mathcal{C}^{ij} = \{i, k_1, \dots, k_n, j\}$ une suite ordonnée de nœuds telle que $e_{ik_1}, \dots, e_{k_n j} \in E$ et $(k_1, \dots, k_n) \in V^1$ i.e. les nœuds sont inactifs et donc $l_{k_1} = \dots = l_{k_n} = 1$. $|\mathcal{C}^{ij}|$ est le nombre de nœuds dans \mathcal{C}^{ij} . L'ordre est primordial car il est relié aux arêtes utilisées. u_p prend successivement les valeurs i, k_1, \dots, k_n, j . \mathcal{A}^{ij} est l'ensemble constitué de tous les chemins possibles reliant les nœuds i et j

\mathcal{C}^{ij} . δ_{ij} est, par définition, la distance la plus petite reliant les nœuds actifs i et j ne passant que par des nœuds inactifs. On a introduit le paramètre κ pour généraliser les règles de décimations du modèle d'Ising ($\kappa = 1$) à d'autres modèles. Pour les modèles de Potts et d'horloge, on aura $\kappa \neq 1$.

2.1.2.2 Règles de décimation appliquées au graphe

Le graphe G deux quantités : les poids r_i associés à chaque nœud actif et les distances δ_{ij} entre toutes les paires de nœuds actifs (i, j) . On appelle minimum global $\Omega = \min_{i \in V^0}(r_i, \delta_i)$ avec δ_i la distance reliant le nœud i à son plus proche voisin actif i.e. $\delta_i = \min_{j \in V^0}(\delta_{ij})$. La recherche du minimum global ne nécessite pas la connaissance de toutes les distances δ_{ij} , mais uniquement de celles susceptibles d'être décimées, les δ_i . Les règles de SDRG transposées au graphe G s'écrivent :

- si r_i est le minimum global ou, de manière équivalente, si h_i est le plus grand couplage, le nœud i est inactivé i.e. l_i prend la valeur 1. Les poids d_{ij} de toutes les arêtes e_{ij} reliant le nœud i à un nœud voisin j sont actualisés comme

$$d_{ij} \leftarrow d'_{ij} = d_{ij} - \frac{r_i - \ln \kappa}{2} \quad (2.6)$$

De manière équivalente, on peut écrire

$$d_{ij} = -\ln J_{ij} - l_i \frac{r_i - \ln \kappa}{2} - l_j \frac{r_j - \ln \kappa}{2}. \quad (2.7)$$

On retrouve (2.4) si les nœuds sont actifs et (2.6) lorsqu'ils ont été inactivés.

- si δ_{ij} est le minimum global ou, de manière équivalente, si J_{ij} est le plus grand couplage, les deux nœuds i et j fusionnent pour ne donner qu'un seul nœud I . Le poids du nœud I est actualisé suivant

$$r_I \leftarrow \tilde{r}_I = r_i + r_j - \delta_{ij} + \ln \kappa. \quad (2.8)$$

Pour chaque nœud k connecté initialement aux nœuds i et j , le poids d_{ki} de l'arête entre le nœud k et le nœud I est remplacé par $d'_{kI} = \min(d_{kj}, d_{ki})$.

Ces transformations du graphe G sont strictement équivalentes à celles de la SDRG :

- si le nœud i est inactivé. La distance entre deux nœuds actifs k et l voisins de i est

$$\begin{aligned} \delta_{kl}^{\{i\}} &= d'_{ik} + d'_{il} \\ &= d_{ik} + d_{il} + \ln \kappa - r_i \\ &= -\ln \frac{J_{ik} J_{il}}{\kappa h_i} \\ &= -\ln J_{eff} \end{aligned}$$

où J_{eff} est bien le couplage effectif après décimation du champ transverse h_i . Notons que δ_{ij} est la plus petite distance entre les deux nœuds actifs k et l . On a ici introduit

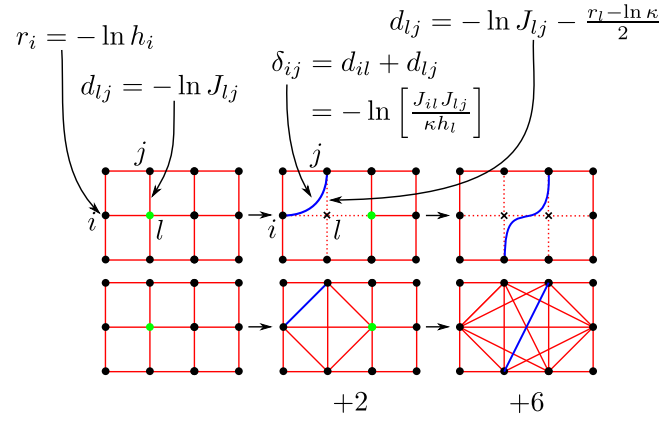


FIGURE 2.3 – Comparaison entre la formulation sur un graphe (haut) et l’implémentation naïve sur réseau avec création de tous les couplages effectifs (bas). Sur le graphe (réseau), un cercle indique un nœud actif (spin) et une croix un nœud inactif. Le cercle de couleur vert indique le nœud/spin qui va être décimé. Un exemple de liaison du réseau J et son équivalent dans le graphe, la distance δ , est indiqué en bleu. Les +2, +6 sont les différences entre le nombre de liaisons du réseau (en bas) et le nombre d’arêtes du graphe (en haut). À $2D$, en procédant aux décimations successives de deux spins voisins, un algorithme naïf crée 6 liaisons supplémentaires.

$\delta_{kl}^{\{i\}}$ comme distance du plus petit chemin entre les deux nœuds actifs k, l passant par le nœud inactif i , qui n’est pas forcément le chemin le plus court. La figure 2.3 illustre une décimation d’un champ transverse et d’un couplage. Les courbes bleues retranscrivent visuellement la correspondance entre la distance δ passant par des nœuds inactifs (croix) et une liaison J du réseau.

— si les nœuds i et j fusionnent ($\Omega = \delta_{ij}$). Le poids du nœud issu de la fusion est

$$\begin{aligned} \tilde{r}_I &= r_i + r_j - \delta_{ij} + \ln \kappa \\ &= -\ln \frac{h_i h_j}{\kappa J_{ij}} \\ &= -\ln h_{eff}. \end{aligned}$$

Le champ transverse h_{eff} correspond bien à celui obtenu après décimation d’une liaison J_{ij} par SDRG. Le choix du minimum $d'_{kI} = \min(d_{ki}, d_{kj})$ si le nœud k est connecté à i et à j correspond à l’application de la règle de maximum.

Les quantités r_i et d_{ij} sont stockées en mémoire et donc immédiatement accessibles. Ce n’est pas possible pour les δ_{ij} qu’il faudra donc recalculer à chaque fois que nécessaire. Étant donné qu’elles correspondent au chemin le plus court entre deux nœuds actifs, il est possible d’utiliser l’algorithme de Dijkstra [110] pour les calculer efficacement. Le pseudo-code pour calculer δ_i est donné dans l’algorithme 1. En sortie, on obtient j le plus proche voisin actif de i et la distance associée $\delta_j^i = \delta_{ij}$. Par définition, cette distance correspond à $\delta_i = \delta_{ij}$.

La complexité en temps de l’algorithme de Dijkstra est $\mathcal{O}((|V| + |E|) \ln |V|)$, qui peut être amélioré encore, en utilisant une structure de données en tas de Fibonacci [111], en $\mathcal{O}(|E| + |V| \ln |V|)$. Dans l’algorithme 1, la complexité dépend du nombre de nœuds inactifs visités et du nombre d’arêtes associées à chacun de ces nœuds et non du nombre total de nœuds et d’arêtes

Algorithm 1 Recherche de δ_i 1: **Inputs:**

$G = (V, E)$ avec un poids d_{ij} pour chaque $e_{ij} \in E$
 $V = V^0 \cup V^1$ avec $k \in V^0$ si actif, $k \in V^1$ si inactif
 $i \in V^0$ nœud de départ

2: **Initialize:**

$\delta_i^i = 0$
 $\delta_k^i = +\infty, \forall k \neq i \in V$
 $\delta_k^i = d_{ik}, \forall k$ voisin de i
 $D = \{i\}$ ensemble des nœuds visités
 $j = \min_{k \notin D}(\delta_k^i)$ nœud le plus proche de i non visité

3: **while** $j \in V^1$ **do**4: $\delta_k^i \leftarrow \min(\delta_k^i, \delta_j^i + d_{jk}), \forall k$ voisin de j 5: $D \leftarrow D \cup \{j\}$ 6: $j = \min_{k \notin D}(\delta_k^i)$ 7: **end while**8: **return** j, δ_j^i

du graphe. Néanmoins, il y a une contrainte forte sur l'emploi de cet algorithme : toutes les arêtes doivent avoir un poids d_{ij} strictement positif. Dans la procédure présentée précédemment, aucune précaution n'a été prise pour que les poids d_{ij} soient tous positifs.

2.1.3 Optimisations de l'algorithme

Dans cette section, on s'assure qu'initialement et après toute décimation, aucune distance négative ne sera présente dans le graphe.

2.1.3.1 Suppression des nœuds inactifs sous certaines conditions

Pour garantir qu'un poids d_{ij} soit positif, il suffit de vérifier que les trois valeurs prises par d_{ij} , lorsque $l_i = l_j = 0, l_i \neq l_j$ et $l_i = l_j = 1$, ne changent pas de signe. On a les situations suivantes :

- initialement tous les nœuds sont actifs ($l_i = l_j = 0$) donc $d_{ij} = -\ln J_{ij}$. Pour que $d_{ij} \geq 0$ il faut que toutes les couplages J_{ij} de l'hamiltonien soient inférieurs ou égaux à 1. Cette contrainte garantit que le poids de chaque arête est positif sans pour autant affecter la physique du problème. En effet, on peut toujours multiplier l'hamiltonien par une constante, choisie de manière à ce que $J_{ij} \leq 1$, sans changer l'état fondamental.
- lorsqu'un seul des deux nœuds, disons le nœud i , est inactivé ($l_i = 1, l_j = 0$), le poids d_{ij} est actualisé en $d_{ij} = -\ln J_{ij} - \frac{r_i - \ln \kappa}{2}$. Pour que cette distance reste positive il faut que

$$\frac{\ln \kappa - r_i}{2} \geq \ln J_{ij} \iff \kappa h_i \geq J_{ij}^2$$

Or, pour que le nœud i soit inactivé, il a fallu nécessairement que r_i ait été plus petit que toutes les distances δ_{ij} voisines, i.e. $r_i < \delta_{ij} = d_{ij}$ et donc $h_i > J_{ij}$. Cette condition est vraie avant que i ne soit inactivé. De plus, puisque $J_{ij} \leq 1$ alors $J_{ij}^2 \leq J_{ij} < h_i$. Dans

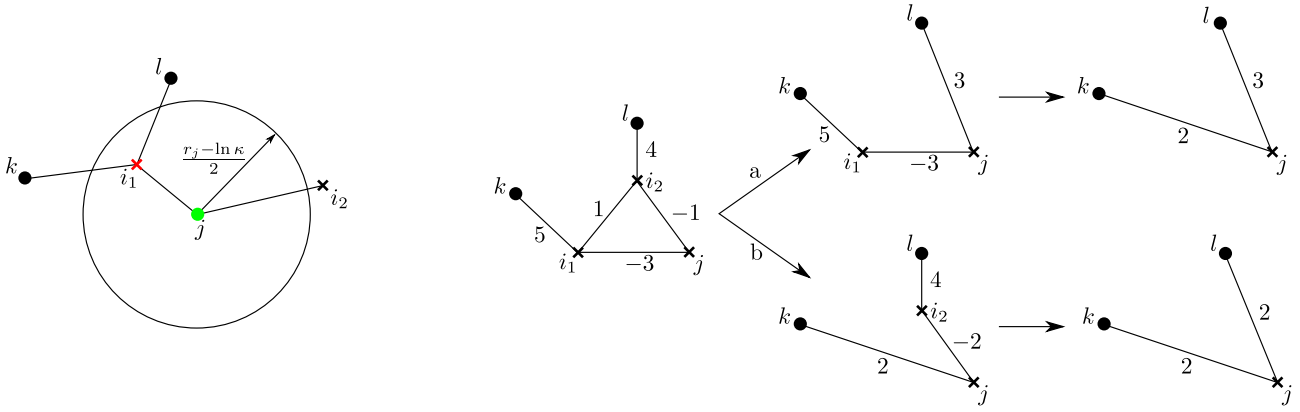


FIGURE 2.4 – À gauche, si le nœud j (cercle vert) est inactivé, alors tous les nœuds inactifs i (croix rouges) se trouvant dans un cercle de rayon $\frac{r_j - \ln \kappa}{2}$ autour de j posséderont un poids d_{ij} négatif et devront être retirés du graphe. Après cette opération, il n’y a plus de nœuds inactifs à l’intérieur du cercle (ni de nœud actif si $\kappa \geq 1$). Les nouvelles distances d_{kj}, d_{lj} sont positives. À droite, illustration de l’importance de l’ordre selon lequel les nœuds inactifs i_1, i_2 doivent être enlevés du graphe à la suite de l’inactivation du nœud j . Dans le cas $a(b)$, $i_1(i_2)$ est enlevé le premier. Ce choix influe sur la valeur finale de la liaison d_{lj} . Il faut nécessairement que le nœud inactif voisin de j ayant la distance la plus petite soit enlevé en premier pour éviter une erreur en actualisant les distances du graphe.

la suite, on se limite au cas $\kappa \geq 1$ de sorte que $\kappa h_i \geq J_{ij}^2$. Le poids d_{ij} est alors toujours positif. Le cas $\kappa < 1$ sera considéré dans le chapitre 4 sur le modèle d’horloge.

- lorsque les deux nœuds sont inactivés ($l_i = l_j = 1$), le poids d_{ij} , à la suite de l’inactivation de r_j , est actualisé comme $d_{ij} = d'_{ij} - \frac{r_j - \ln \kappa}{2}$ avec $d'_{ij} = -\ln J_{ij} - \frac{r_i - \ln \kappa}{2}$. On a $d_{ij} \geq 0$ et donc $d'_{ij} \geq (r_j - \ln \kappa)/2$. Or, la condition pour que r_j soit le minimum global n’implique pas d'_{ij} mais les δ_{jk} avec $k \in V^0$ un nœud actif. Le poids d_{ij} peut donc être négatif. La figure 2.4 à gauche montre un cas où le poids de l’arête entre j et le nœud i_1 (croix rouge) sera négatif après inactivation de j . Le poids de l’arête entre le nœud j et i_2 sera quant à lui positif (croix noire).

Si le poids d_{ij} entre deux nœuds inactifs devient négatif à la suite de l’inactivation de j , alors le nœud i peut être retiré du graphe. Cela signifie que tous les poids d_{ik} avec $k \neq j$, rattachés au nœud i , sont dorénavant rattachés au nœud j et leurs valeurs deviennent $d_{jk} = \min(d_{jk}, d_{ij} + d_{ik})$. Cette suppression de nœud est possible car tout chemin le plus court δ passant par le nœud inactif i passe nécessairement par le nouveau nœud inactif j . Il n’est donc plus utile de conserver le nœud inactif i . À noter que cette étape ne crée aucune nouvelle arête. Elle ne fait que déplacer les arêtes d’un nœud à un autre en changeant leur poids. La preuve peut se résumer de la manière suivante. Soient deux nœuds actifs k et l voisins de i (la notion de voisin est ici prise au sens de nœud actif tel qu’il existe un chemin constitué uniquement de nœuds inactifs menant à i), on a $\delta_{kl}^{\{i\}} = d_{ki} + d_{il}$. Comme j est également inactif, on peut calculer $\delta_{kl}^{\{ij\}} = d_{ki} + d_{ij} + d_{ji} + d_{il}$. Or $d_{ij} < 0$ donc $\delta_{kl}^{\{ij\}} < \delta_{kl}^{\{i\}}$. On en déduit que tout plus court chemin passant par i passe nécessairement par j . Le nœud inactif i est devenu superflu. Cette procédure s’effectue tant qu’il reste une distance négative entre j et tout autre nœud inactif. L’ordre de suppression de ces nœuds inactifs a une importance. Il faut nécessairement que cette suppression soit effectuée

par ordre croissant de la distance d_{ji} (i.e. de la plus grande en valeur absolue à la plus petite). Ce faisant, toutes les distances sont adéquatement actualisées. La figure 2.4 à droite illustre sur un exemple l'importance de l'ordre de suppression des nœuds inactifs voisins.

À partir du moment où le poids d'une arête entre deux nœuds inactifs est négatif alors il est toujours possible de l'éliminer du graphe en enlevant des nœuds inactifs. La suppression potentielle de nœuds inactifs garantit qu'à toute étape de décimation les poids des arêtes restent positifs lorsque $\kappa \geq 1$. Pour $\kappa < 1$, il peut exister des arêtes dont le poids est négatif, i.e. $d_{ij} < 0$, entre un nœud actif et un nœud inactif qui ne peuvent pas être supprimées.

2.1.3.2 Choix de l'ordre de décimation, minima globaux et locaux

A chaque itération, il existe nécessairement un minimum global Ω permettant de déterminer s'il convient d'inactiver un nœud ($\Omega = r_i$) ou de fusionner deux nœuds ($\Omega = \delta_{ij}$). Pour déterminer ce minimum global, on peut utiliser l'algorithme de Dijkstra en partant de chaque nœud actif i pour calculer la distance la plus courte avec le plus proche voisin δ_i , en déduire les $\Omega_i = \min(r_i, \delta_i)$ et enfin obtenir $\Omega = \min_{i \in V^0}(\Omega_i)$. Cette stratégie implique de recalculer systématiquement des Ω_i qui étaient déjà connus et qui n'avaient pas été modifiés lors d'une décimation. Il est donc plus efficace de ne s'intéresser qu'aux Ω_i ayant été affectés par une décimation. On verra par la suite qu'il existe une seconde stratégie consistant à ne plus tenir compte systématiquement du minimum global Ω en s'autorisant à décimer des minima locaux.

Calcul systématique du minimum global A chaque étape, on doit décimer le minimum global $\Omega = \min_{i \in V^0}(r_i, \delta_i)$. Initialement, il faut calculer chaque $\Omega_i = \min(r_i, \delta_i)$ pour tous les nœuds $i \in V^0 = V$ du graphe. Pour déterminer efficacement le minimum global pour les itérations suivantes, on peut utiliser un arbre binaire de recherche [112] classant les nœuds i par valeur croissante de Ω_i . La taille de l'arbre est égale à n_i où $n_i \leq N_i$ avec N_i le nombre de nœuds actifs à l'étape de décimation i . Les opérations d'insertion, de suppression et de recherche, notamment pour celle du plus petit Ω_i , sur l'arbre nécessitent un temps $\mathcal{O}(\ln(N_i))$ voire $\mathcal{O}(N_i)$ si l'arbre est déséquilibré. Après chaque itération, on mettra l'arbre à jour. Deux cas doivent être distingués :

- si $\Omega = \delta_{ij}$, la formation d'un amas ne modifie pas les distances δ_{kl} entre les paires (k, l) des nœuds actifs du graphe. Il suffit de supprimer Ω_i et Ω_j de l'arbre et de déterminer Ω_I où I est le nouveau nœud formé.
- si $\Omega = r_i$, l'inactivation d'un nœud modifie les arêtes voisines et donc potentiellement certaines des distances δ_{kl} entre les paires (k, l) des nœuds actifs du graphe. Plusieurs cas peuvent survenir pour un voisin actif j de i :
 - si $\Omega_j = \delta_{ij}$, il faut supprimer Ω_j de l'arbre et calculer le nouveau minimum Ω_j pour l'y insérer.
 - si $\Omega_j \neq \delta_{ij}$ et si l'inactivation de i modifie une arête générant une distance $\delta_{jk}^{\{i\}} < \Omega_j$ avec $\delta_{jk}^{\{i\}}$ la distance la plus courte entre j et un voisin actif k passant par i . Il faut supprimer Ω_j de l'arbre et insérer $\Omega_j = \delta_{jk}$ dans celui-ci.

La gestion efficace de ces différents cas va dépendre du modèle étudié.

Passage à la décimation d'un minimum local Comme on l'a vu précédemment, la décimation du minimum global nécessite d'actualiser à chaque itération un arbre binaire. Dans le pire des cas, il faut modifier l'intégralité de l'arbre. Pour gagner en temps de calcul, il faudrait relâcher la contrainte sur la décimation systématique du minimum global afin de s'autoriser à décimer d'autres couplages. On les appelle minima locaux. On voudrait que les minima locaux satisfassent les propriétés suivantes :

1. un minimum local ne peut plus être modifié et reste un minimum local jusqu'à ce qu'il soit décimé.
2. l'ordre de décimation de deux minima locaux n'a pas d'importance.

Si c'est le cas, alors la décimation des minima locaux est équivalente à la décimation des minima globaux. En effet, le premier point impose que le minimum global se trouve nécessairement parmi les minima locaux. Le second point fait en sorte que l'on peut, à chaque itération, faire le choix de décimer ce minimum global.

Il est à noter que :

- la notion de minimum local n'est compatible qu'avec la règle du maximum. La règle de l'addition ne permet pas une décimation dans n'importe quel ordre.
- si les couplages effectifs créés peuvent être plus grands que ceux ayant été décimés, il est possible qu'il n'existe, à chaque itération, qu'un seul minimum local : le minimum global. Or, si à chaque itération il n'y a qu'un seul minimum local, le coût moyen pour le trouver sera plus grand que celui de rechercher systématiquement le minimum global et d'actualiser un arbre binaire.

Pour le modèle d'Ising désordonné en champ transverse et pour le modèle de Potts, on dit que

- un nœud est un minimum local si $r_i < \delta_{ik} \forall k$ voisins actifs de i .
- une distance δ_{ij} est un minimum local si $\delta_{ij} < r_i, r_j$ et si $\delta_{ij} < \max(\delta_i^{\{j\}}, \delta_j^{\{i\}})$ avec $\delta_i^{\{j\}}(\delta_j^{\{i\}})$ la distance entre i (resp. j) et le voisin actif le plus proche hormis j (resp. i).

Dans la suite, on omet $\ln \kappa$ qui est nécessairement positif pour les modèles d'Ising et de Potts. Le choix $\ln \kappa = 0$ correspond au cas où les couplages effectifs sont les plus grands. Cette définition satisfait les deux critères mentionnés précédemment.

1. Montrons que les règles de décimations d'un nœud ou d'une liaison préservent les autres minima locaux. Lorsque r_i est un minimum local, alors on a les situations suivantes :
 - (a) si r_j , un autre minimum local voisin de i , est décimé, alors les distances modifiées par l'inactivation de j et impliquant i sont les $\delta_{ik}^{\{j\}}$ avec k un nœud actif voisin. Les distances δ_{ik}' sont actualisées comme $\delta_{ik}' = \min(\delta_{ik}^{\{j\}}, \delta_{ik})$. Or, $\delta_{ik}^{\{j\}} = \delta_{ij} + \delta_{jk} - r_j$ d'après l'équation (2.5) et $r_j < \delta_{jk}, \delta_{ij}$ par définition d'un minimum local. Comme i est également un minimum local, on a $r_i < \delta_{ij}, \delta_{ik}$. Il en découle que $\delta_{ik}^{\{j\}} > r_i + \delta_{jk} - r_j > r_i$ et donc que $r_i < \delta_{ik}'$. Ainsi, r_i reste un minimum local.

- (b) si une distance δ_{jk} est un minimum local avec i voisin de j ou de k , la fusion des nœuds j et k pour former l'amas c induit la nouvelle distance $\delta_{ci} = \min(\delta_{ij}, \delta_{ik})$. Comme $r_i < \delta_{ij}, \delta_{ik}$ par définition d'un minimum local, il vient $r_i < \delta_{ic}$ et donc r_i reste un minimum local.

Lorsque δ_{ij} est un minimum local, on a les situations suivantes :

- (a) si le nœud k voisin de i et ou j est inactivé (r_k est un minimum local), les distances entre tous les nœuds voisins l et m de k sont actualisées comme $\delta'_{lm} = \min(\delta_{lm}, \delta_{lm}^{\{k\}})$ avec $\delta_{lm}^{\{k\}} = \delta_{lk} + \delta_{km} - r_k > \delta_{lk}, \delta_{km}$ par définition d'un minimum local. Ainsi, $\delta'_{lm} \geq \min(\delta_{lm}, \delta_{lk}, \delta_{km})$ de sorte que les distances modifiées ne peuvent être plus petites que celles déjà présentes. δ_{ij} reste un minimum local.
- (b) si une distance δ_{lk} est un minimum local avec $l, k \neq i, j$ et l voisin de i et j (raisonnement similaire si k est voisin de i et j), la fusion des nœuds l et k pour former l'amas c induit la nouvelle distance $\delta_{ic} = \min(\delta_{il}, \delta_{ik})$. Si δ_{ij} est un minimum local avec $\delta_{ij} < \delta_i^{\{k\}}$ alors $\delta_{ij} < \delta_{ic}$. Sinon, si $\delta_{ij} > \delta_{il}, \delta_{ik}$ alors on a toujours $\delta_{ij} > \delta_{ic}$. Dans tous les cas, δ_{ij} reste un minimum local.
- (c) si une distance δ_{jk} est un minimum local avec $k \neq i$ et forme l'amas c constitué des nœuds j et k , le poids associé à c est $r_c = r_j + r_k - \delta_{jk} + \ln \kappa > r_j + r_k - \delta_{jk} > r_j$ car $\kappa \geq 1$ et $\delta_{jk} < r_k$. Donc $\delta_{ij} = \delta_{ic}$ reste plus petit que les poids des nœuds i, c . La formation de l'amas c peut également modifier la distance δ_{ij} . Si δ_{ki} existe alors $\delta_{ic} = \min(\delta_{ij}, \delta_{ik})$. Or, par hypothèse, δ_{ij} et δ_{jk} sont des minima locaux. Il en découle que $\max(\delta_{ij}, \delta_{jk}) < \delta_{ik}$. Ainsi, $\delta_{ic} = \min(\delta_{ij}, \delta_{ik}) = \delta_{ij}$, et donc la valeur $\delta_{ij} = \delta_{ic}$ n'est pas modifiée et reste un minimum local.
2. Montrons qu'il est possible d'inverser l'ordre de la décimation de deux minima locaux. Si les deux minima locaux sont suffisamment éloignés l'un de l'autre alors ils n'agiront pas sur les mêmes arêtes et nœuds. Ils peuvent donc être décimés dans un ordre arbitraire. Il reste plus qu'à considérer tous les cas pour lesquels les deux décimations affectent les mêmes nœuds et arêtes, procéder aux décimations dans un ordre puis dans l'autre pour enfin conclure. À chaque fois, les deux cas sont équivalents grâce à l'utilisation de la règle du maximum (minimum) et de l'impossibilité de générer des couplages plus grands que ceux décimés.

Nous avons vérifié cette équivalence numériquement en comparant les résultats obtenus à la suite d'une décimation systématique du minimum global et en procédant à la décimation de minima locaux.

Étant donné que l'ordre de décimation des minima locaux peut être différent de celui des minima globaux, le dernier amas décimé n'est pas nécessairement le même. Comme les procédures sont équivalentes, l'état obtenu est identique et c'est l'amas i ayant le champ transverse h_i le plus faible (le poids r_i le plus grand) qui est équivalent au dernier amas obtenu par décimation du minimum global.

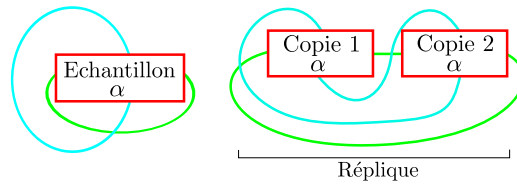


FIGURE 2.5 – Représentation schématique de la méthode du doublement. Les courbes indiquent l'utilisation de conditions aux limites périodiques. À droite, les deux copies de l'échantillon α sont raccordées de manière à ce que l'environnement de n'importe quel spin dans la réplique soit exactement le même que le spin équivalent dans l'échantillon de gauche.

2.2 Estimation des exposants critiques

On détaille dans cette section la méthode utilisée pour déterminer les exposants critiques d'un modèle de spins désordonné. Dans un premier temps, on présente la méthode du doublement permettant d'estimer la position des points pseudo-critiques d'un échantillon de désordre de taille finie L . L'étude des distributions de ces points pseudo-critiques en fonction de L permet d'estimer l'exposant de la longueur de corrélation ν . Dans un second temps, on se place au point pseudo-critique de chaque échantillon et on étudie le comportement de taille finie du paramètre d'ordre et du gap d'énergie afin d'estimer les exposants critiques associés.

2.2.1 Point pseudo-critique et exposant critique ν

Comme discuté dans les sous-parties 1.3.1 et 1.3.3, pour réduire les fluctuations entre les échantillons avec un désordre canonique, il faut déterminer la position du point pseudo-critique $\theta_c^i(L)$ de chaque échantillon puis mesurer les observables à ces points pseudo-critiques.

2.2.1.1 Méthode du doublement

Pour déterminer la position du point pseudo-critique d'un système désordonné, Garel et Monthus ont introduit une technique nommée "sample replication procedure" [113, 114] consistant à considérer un échantillon i de taille L , un échantillon de taille $2L$ construit en fusionnant deux copies de l'échantillon i et un échantillon de taille $4L$ en fusionnant quatre copies de i . Une température pseudo-critique est alors définie comme le point d'intersection des densités d'énergie de ces trois échantillons en fonction de la température. Kovács et Iglói ont employé une méthode semblable, la méthode du doublement, afin de déterminer le point pseudo-critique d'un échantillon de désordre pour le modèle d'Ising en champ transverse [103, 104]. Partant d'un échantillon i de taille L , N copies identiques de cet échantillon sont fusionnées, en utilisant les conditions aux limites présentées à la figure 2.5, donnant un échantillon i' de taille NL . La procédure de renormalisation SDRG est appliquée à l'échantillon i' jusqu'à ne plus laisser qu'un seul amas. Dans la phase paramagnétique, $\theta > \theta_c^i(L)$, cet amas ne s'étend que sur une seule des N répliques. Dans la phase ferromagnétique en revanche, $\theta < \theta_c^i(L)$, on s'attend à ce qu'il percole sur l'ensemble du système et donc sur les N répliques. Dans la suite, on se limitera au cas $N = 2$. Pour estimer le point pseudo-critique, on procède par dichotomie jusqu'à une

précision ϵ . Cette procédure est réalisée sur un grand nombre d'échantillons afin d'obtenir une bonne statistique des distributions $P(\theta_c^i(L))$ des points pseudo-critique $\theta_c^i(L)$ pour différentes tailles L .

2.2.1.2 Position du point critique et exposant de la longueur de corrélation

Comme discuté dans la sous-partie 1.3.3, l'étude des distributions $P(\theta_c^i(L))$ permet d'estimer l'exposant de la longueur de corrélation ν en

1. considérant les distributions de probabilité de la variable d'échelle $u = \frac{|\theta_c^i(L) - \theta_c|}{\theta_c} L^{1/\nu}$. Les valeurs de θ_c et ν sont obtenues lorsque les N_L distributions $P_L(u)$ se superposent pour différentes tailles L .
2. utilisant la valeur moyenne $\bar{\theta}_c(L) \equiv \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \theta_c^i(L)$ qui, d'après (1.35), se comporte comme

$$|\bar{\theta}_c(L) - \theta_c| \sim L^{-1/\nu_s}. \quad (2.9)$$

3. utilisant l'écart type $\delta\theta_c(L) \equiv \sqrt{\overline{\theta_c^2(L)} - (\bar{\theta}_c(L))^2}$ qui, d'après (1.36), se comporte comme

$$\delta\theta_c(L) \sim L^{-1/\nu_w}. \quad (2.10)$$

Les symboles ν, ν_s, ν_w ont été choisis pour distinguer les différentes méthodes employées.

Il existe d'autres méthodes permettant d'estimer cet exposant. Kovács et Iglói [103, 104] ont estimé les différents exposants critiques (ν, d_f et ψ) en utilisant la méthode du quotient [105-107] afin de prendre en compte les corrections d'échelle. Cette méthode consiste à comparer des observables calculées à des tailles multiples d'un coefficient s donné. Par exemple, pour une observable $O(L)$ ayant un comportement d'échelle en L^a , le rapport $R_O(L) \equiv O(sL)/O(L)$ calculé pour les paires (L, sL) suit la loi $R_O(L) = s^a + \mathcal{O}(L^{-\omega})$ où ω est un exposant de correction d'échelle. En appliquant cette méthode à (2.9) pour déterminer l'exposant ν , on obtient [103]

$$\frac{\bar{\theta}_c(sL) - \bar{\theta}_c(L)}{\bar{\theta}_c(L) - \bar{\theta}_c(L/s)} = s^{-1/\nu_s(L)} + \mathcal{O}(L^{-\omega}) \quad (2.11)$$

qui permet d'éviter de calculer la position du point critique. Pour l'écart-type des points pseudo-critiques (2.10), la méthode du quotient, en utilisant trois points, donne [103]

$$\frac{\delta\theta_c(sL) - \delta\theta_c(L/s)}{2\delta\theta_c(L)} = \sinh\left(-\frac{\ln s}{\nu_w(L)}\right) + \mathcal{O}(L^{-\omega}). \quad (2.12)$$

Kovács et Iglói ont ensuite étudié graphiquement les variations des exposants $\nu_s(L)$ et $\nu_w(L)$ ainsi obtenus afin d'estimer ν_s et ν_w . Des relations similaires peuvent être obtenues pour l'aimantation et le gap d'énergie afin d'estimer les exposants critiques d_f et ψ . Pour déterminer le point critique, Kovács et Iglói ont étudié le rapport

$$\alpha(L) = \frac{\theta_c - \bar{\theta}_c(L)}{\delta\theta_c(L)}, \quad (2.13)$$

qui doit être indépendant de L au point critique θ_c .

2.2.2 Autres exposants critiques

Pour déterminer les autres exposants critiques, deux choix sont envisageables :

1. se positionner à $\theta = \theta_c$ et calculer les moyennes de grandeurs physiques pour un grand nombre d'échantillons et pour différentes tailles L . C'est la méthode communément employée,
2. se positionner à $\theta = \theta_c^i(L)$ pour chaque échantillon i de taille L et y calculer les observables. Cela suppose que les grandeurs physiques présentent le même comportement d'échelle pour tous les échantillons de désordre. Comme discuté dans la sous partie 1.3.3, cette méthode réduit les fluctuations entre échantillons.

Les deux observables qui vont être étudiées au point critique dans le cadre de cette thèse sont la densité d'aimantation et l'énergie de première excitation.

2.2.2.1 Estimation de l'exposant du gap d'énergie

Au cours de la renormalisation, la plus grande échelle d'énergie Ω du système décroît, au point critique de désordre infini, comme (1.63) i.e.

$$\ln \frac{\Omega_0}{\Omega} \sim L^\psi \quad (2.14)$$

avec Ω_0 une échelle d'énergie de référence et ψ l'exposant critique. Le gap d'énergie ΔE entre l'état fondamental et le premier état excité est donné par le champ transverse du dernier amas décimé lors de la procédure SDRG. Il découle de l'équation (2.14) que

$$\overline{-\ln(\Delta E)}(L) + C \sim L^\psi \quad (2.15)$$

avec C une constante.

La détermination de l'exposant critique ψ peut s'effectuer en :

1. étudiant les distributions $P_L(-\ln(\Delta E))$ des champs transverses du dernier amas décimé ΔE pour plusieurs échantillons à différentes tailles de système L . La théorie d'échelle stipule que la distribution de probabilité $\tilde{P}((-\ln(\Delta E) + C)L^{-\psi})$ doit être indépendante de la taille du système.
2. étudiant la variation du champ transverse moyen $\overline{-\ln(\Delta E)}(L)$ du dernier amas en fonction de la taille du système L .

2.2.2.2 Étude de l'aimantation

La densité d'aimantation m est le paramètre d'ordre de la transition ferromagnétique-paramagnétique. À l'approche du point critique, la densité d'aimantation décroît comme

$$m \sim |\theta - \theta_c|^\beta \quad (2.16)$$

avec β l'exposant critique magnétique. Elle est reliée au moment magnétique μ du dernier amas décimé après une procédure de SDRG par $m = \mu/L^d$. Au point critique de désordre infini, en combinant les équations (1.63) et (1.64), la loi d'échelle entre μ et L s'écrit

$$\mu \sim L^{d_f} \quad (2.17)$$

avec $d_f = \psi\phi$ la dimension fractale de l'aimantation. La densité d'aimantation m décroît au point critique comme

$$m \sim L^{-x} \quad (2.18)$$

avec x la dimension anormale de l'aimantation. Les équations (2.16), (2.17), (2.18) et (1.22) permettent de relier ces exposants

$$x = \beta/\nu \quad d_f = d - x \quad \beta = \nu(d_f - d). \quad (2.19)$$

En supposant l'exposant ν connu, il suffit de connaître l'un des trois exposants β, x, d_f pour déterminer les autres.

La détermination des exposants magnétiques peut être effectuée en :

1. étudiant la distribution $P_L^1(\mu)$ des moments magnétiques μ de tous les amas formés pour les échantillons de taille L . Au point critique de désordre infini, on s'attend à ce que $P_L^1(\mu) \sim \mu^{-\tau}$ avec $\tau = 1 + \frac{d}{d_f}$ [103].
2. étudiant les distributions $P_L^2(\mu)$ du moment magnétique μ du dernier amas uniquement pour plusieurs échantillons à différentes tailles de système L . La théorie d'échelle stipule qu'il existe une unique distribution \tilde{P}^2 telle que $P_L^2(\mu) = L^{d_f} \tilde{P}^2(\mu L^{-d_f})$.
3. étudiant la variation de l'aimantation $m(\theta, L)$ moyenne en fonction de l'écart au point critique pour plusieurs tailles L . La théorie d'échelle donne $m(\theta, L) = L^{-x} m(|\theta - \theta_c| L^{1/\nu})$. x est estimé en superposant les courbes de $m(\theta, L)L^x$ en fonction de $|\theta - \theta_c| L^{1/\nu}$.
4. étudiant la variation du moment magnétique moyen $\bar{\mu}_L$ du dernier amas en fonction de la taille du système L se comportant comme (2.17).

2.3 Conclusion

Nous avons présenté l'algorithme introduit par Kovács et Iglói [104] permettant de réaliser efficacement les itérations de SDRG en ne générant pas de nouvelles liaisons lors de la décimation d'un champ transverse. Il permet de considérer des systèmes ayant plusieurs millions

de spins indépendamment de leur dimensionnalité. Nous avons détaillé la méthode du doublement permettant de déterminer la position du point pseudo-critique d'un échantillon. Enfin, nous avons présenté plusieurs méthodes permettant d'estimer les exposants critiques ν , d_f et ψ avec les données obtenues par l'algorithme de SDRG aux points pseudo-critiques de chaque échantillon de désordre. Dans les trois chapitres qui suivent, nous employons cet algorithme, modulo quelques adaptations, pour étudier le comportement critique des modèles quantiques désordonnés de Potts, horloge et Ashkin-Teller en dimensions $D = 2$ et $D = 3$.

Chapitre 3

Modèle de Potts quantique désordonné en dimensions deux et trois

Dans le chapitre 1, les propriétés critiques du modèle d'Ising désordonné en champ transverse en dimensions $D \leq 4$ ont été présentées. Elles sont gouvernées par un point fixe de désordre infini. Qu'en est-il d'autres modèles quantiques désordonnés ? L'objectif de ce chapitre est d'étudier les propriétés critiques du modèle de Potts. Dans un premier temps, on présentera plus en détail ce modèle et les résultats déjà connus. Plus spécifiquement, on détaillera les résultats analytiques obtenus en appliquant la SDRG au modèle de Potts quantique désordonné unidimensionnel. Dans une seconde partie, on justifiera l'emploi de l'algorithme présenté au chapitre 2 pour ce modèle. En particulier, on montrera l'existence d'un point fixe de désordre infini. On énumérera les détails des simulations effectuées. Enfin, on décrira et commentera les résultats obtenus pour étudier les propriétés critiques du modèle de Potts. Les distributions des points pseudo-critiques, des moments magnétiques et des champs transverses seront analysées conduisant aux estimations des exposants critiques ν , d_f et ψ .

3.1 Présentation du modèle et état de l'art

On décrit dans un premier temps le modèle de Potts classique et on présente son comportement critique dans le cas pur et le cas désordonné. On discute ensuite la version quantique de ce modèle et en particulier les propriétés critiques du modèle désordonné unidimensionnel connues exactement par SDRG. On clôt cette partie en examinant l'ordre des transitions en dimensions $D > 1$ par des arguments d'échelle et en exposant les résultats déjà connus.

3.1.1 Description du modèle classique pur et comportement critique

Le modèle de Potts à q états [115, 116] est une généralisation du modèle d'Ising pour lequel les spins prennent q valeurs, soit $s_i = 1, \dots, q$. L'hamiltonien en absence de champ magnétique est

$$H_{\text{Potts}}^{\text{C}} = -J \sum_{\langle ij \rangle} \delta(s_i, s_j) \quad (3.1)$$

où la somme s'étend sur les paires de voisins les plus proches. On retrouve le modèle d'Ising dans le cas $q = 2$. L'hamiltonien est invariant sous toute permutation des q états. À basse température, la symétrie \mathfrak{S}_q est brisée spontanément. Le paramètre d'ordre associé à cette transition est

$$\rho = \frac{q \max_s \rho(s) - 1}{q - 1} \quad (3.2)$$

avec

$$\rho(s) = \frac{1}{N} \sum_i \delta_{s_i, s} \quad (3.3)$$

la densité de spins se trouvant dans l'état s . Dans la phase ferromagnétique, on a $\rho > 0$. La nature de la transition dépend du nombre d'états q et de la dimensionnalité du système. Il existe une valeur critique $q_c(D)$ (resp. une dimension critique supérieure $D_c(q)$) telle que, pour tout $q > q_c(D)$ (resp. $D > D_c(q)$), le comportement critique est celui de la théorie de champ moyen. Les points connus exactement sont $q_c(2) = 4$, $q_c(4) = 2$ et $q_c(6) = 1$ [116]. À deux dimensions, la transition est du premier ordre pour $q > 4$ et du second ordre pour $q \leq 4$ [117, 118]. À trois dimensions, il n'y a plus de résultats exacts, mais des simulations numériques montrent que la transition est du premier ordre pour $q \geq 3$ et du second ordre pour $q = 2$ [119-121]. À quatre dimensions, la transition est également du premier ordre pour $q > 2$ [122].

En dimensions $D = 2$, le comportement critique est connu exactement. Le couplage critique $K_c = \beta J_c$ sur un réseau carré a été déterminé par Potts en généralisant la transformation de dualité de Kramers-Wannier du modèle d'Ising [123] et en supposant l'autodualité de la fonction de partition. Il obtient [115]

$$K_c = \ln(1 + \sqrt{q}). \quad (3.4)$$

Il a été prouvé que le point autodual est le même que le point critique pour les modèles d'amas aléatoires [124]. La fonction de partition du modèle de Potts peut être reformulée comme une somme sur tous les graphes du réseau avec un poids pour chaque liaison du graphe dépendant du couplage βJ . Chaque amas est pondéré par le nombre d'états q . Pour $q = 1$, on retrouve le modèle de percolation. Dans cette représentation due à Fortuin et Kasteleyn [125], la transition ferromagnétique-paramagnétique du modèle de Potts apparaît comme une transition de percolation des amas. Cette représentation permet également d'étendre le modèle de Potts aux valeurs non entières de q et elle a été exploitée pour développer des algorithmes Monte-Carlo beaucoup plus efficaces [126, 127].

La fonction de partition dans la représentation de Fortuin-Kasteleyn est, en théorie des graphes, un polynôme de Whitney [128]. Sur un réseau plan régulier, le calcul d'un tel polynôme est équivalent à un modèle de glace (ou modèle à six sommets) [129]. Le comportement critique du modèle de Potts a été étudié à la lumière de cette relation [117, 130]. On en conclut que la transition est du premier ordre pour $q > 4$ et du second ordre pour $q \leq 4$ [117]. À partir des résultats connus pour le modèle à huit sommets [131], il a été conjecturé que l'exposant thermique $y_t = 1/\nu$ est égal à [132]

$$y_t = 3 \frac{y - 1}{y - 2} \quad (3.5)$$

	2D			3D
$q =$	2	3	4	2
ν	1	5/6	2/3	0.629(1)
α	0	1/3	2/3	0.113(3)
γ	7/4	13/9	7/6	1.236(2)

TABLE 3.1 – Exposants critiques du modèle de Potts pur. À deux dimensions, les exposants sont connus exactement. À trois dimensions, ils sont estimés par la méthode bootstrap conforme [138].

pour $q \leq 4$, où y est relié à q par

$$q = 4 \cos^2 \left(\frac{\pi y}{2} \right). \quad (3.6)$$

Une conjecture pour l'exposant magnétique $x_\sigma = \beta/\nu$ a également été formulée [133, 134]

$$x_\sigma = \frac{1 - y^2}{4(2 - y)}. \quad (3.7)$$

Le comportement critique du modèle de Potts peut être dérivé de l'équivalence entre le modèle à six sommets et le gaz de Coulomb [135]. De la relation entre le gaz de Coulomb et la théorie de l'invariance conforme, on a pu déduire que le modèle de Potts à q états correspond au modèle minimal paramétré par l'entier m tel que [136, 137]

$$q = 4 \cos^2 \left(\frac{\pi}{m+1} \right), \quad (3.8)$$

i.e. $m = 3$ pour $q = 2$, $m = 5$ pour $q = 3$ et $m \rightarrow +\infty$ pour $q = 4$. La charge centrale est reliée à m par

$$c = 1 - \frac{6}{m(m+1)}, \quad (3.9)$$

et les exposants critiques sont connus exactement (table 3.1).

En dimensions $D = 2$, l'hélium ${}^4\text{He}$ adsorbé sur du graphite présente une transition du second ordre [139, 140] et l'estimation de l'exposant critique de la chaleur spécifique donne $\alpha \simeq 0.36$ [140], en accord avec les prédictions théoriques du modèle de Potts à trois états. Une classification théorique des systèmes monocouches adsorbants a été effectuée montrant des transitions appartenant à la classe d'universalité des modèles de Potts à trois et quatre états [141-143]. Des accords expérimentaux avec les exposants critiques des modèles de Potts à trois [144] et quatre états [145] ont été obtenus. En dimensions $D = 3$, des matériaux cubiques ferromagnétiques possédant trois axes faciles sont des réalisations du modèle de Potts à trois états [146] notamment $DyAl_2$ qui présente une transition du premier ordre [147].

3.1.2 Propriétés critiques en présence de désordre

L'introduction de désordre gelé transforme l'hamiltonien (3.1) en

$$H_{\text{Potts}}^{\text{C,D}} = - \sum_{\langle ij \rangle} J_{ij} \delta(s_i, s_j) \quad (3.10)$$

avec J_{ij} une variable aléatoire. L'introduction de désordre peut drastiquement affecter la physique du modèle. Un désordre gelé infinitésimal en dimensions $D = 2$ suffit à changer une transition du premier ordre en une transition continue [15]. Le critère de Harris [14] indique que si l'exposant de la chaleur spécifique du modèle pur α^{pur} est positif alors le désordre est pertinent et le point fixe pur est instable. Pour le modèle de Potts, ce critère est vérifié pour $q > 2$ en dimensions $D = 2$ et $q = 2$ en dimensions $D = 3$. Des simulations numériques ont confirmé ces deux prédictions. En dimensions $D = 2$, il a été montré pour différentes valeurs de $q > 4$ que les transitions sont du second ordre en présence de désordre [148]. L'exposant critique associé à l'aimantation dépend de q [71, 148-150]. En revanche l'exposant de la longueur de corrélation ν est compatible avec celui du modèle d'Ising pour toute valeur de q . Il en résulte une possible superuniversalité de l'exposant $\nu = 1$ pour le modèle de Potts désordonné [151]. Remarquons que la valeur $\nu = 1$ correspond à $2/D$ et donc à un désordre marginal au nouveau point fixe [14, 67].

En dimensions $D > 2$, pour $q > 2$, la transition du premier ordre peut subsister si le désordre est faible [71]. Cette prédiction a été vérifiée tout d'abord pour le modèle de Potts à trois états pour lequel la transition faiblement du premier ordre devient une transition du second ordre lors de la dilution suffisante d'une fraction des sites [152]. Pour une dilution faible, il a été montré que la transition du premier ordre persistait jusqu'à un point tricritique [153]. Pour une transition du premier ordre plus forte, cette prédiction a également été vérifiée pour le modèle de Potts à quatre états en dimensions $D = 3$ [154, 155].

3.1.3 Modèle de Potts quantique homogène

La matrice de transfert T du modèle de Potts classique en dimensions $D + 1$ est reliée à l'opérateur d'évolution en temps imaginaire du modèle de Potts quantique en dimensions D dans la limite anisotrope extrême [44]. Le modèle de Potts quantique à q états est défini sur un réseau $\Lambda = (V, E)$, avec V l'ensemble des sites et E l'ensemble des liaisons, par l'hamiltonien [156, 157]

$$H_{\text{Potts}}^{\text{Q}} = -J \sum_{(i,j) \in E} D_{i,j} - \frac{h}{q} \sum_{i \in V} M_i. \quad (3.11)$$

Cet hamiltonien agit sur l'espace de Hilbert constitué des états $\bigotimes_{i \in V} |s_i\rangle$ avec $s_i = 1, \dots, q$. La première somme de (3.11) s'étend à toutes les paires de sites voisins i, j . Ce terme favorise

l'ordre ferromagnétique. L'opérateur $D_{i,j}$ peut être représenté à l'aide des opérateurs locaux Ω_i

$$D_{i,j} = \frac{1}{q} \sum_{k=1}^{q-1} \Omega_i^k \Omega_j^{q-k}. \quad (3.12)$$

La matrice Ω_i s'écrit en terme d'une matrice diagonale Ω de taille $(q \times q)$ comme $\Omega_i = \mathbb{1}^{\otimes i-1} \otimes \Omega \otimes \mathbb{1}^{\otimes N-i}$ agissant uniquement sur le site i , avec

$$\Omega = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \omega & & & & \\ & & \omega^2 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & \omega^{q-1} & \\ & & & & & \end{pmatrix}, \quad \omega = \exp\left(\frac{2\pi i}{q}\right). \quad (3.13)$$

La seconde somme est associée aux fluctuations quantiques qui vont détruire l'ordre ferromagnétique. À chaque site est associé un opérateur $M_i = \mathbb{1}^{\otimes i-1} \otimes M \otimes \mathbb{1}^{\otimes N-i}$ avec M une matrice $q \times q$ où tous les éléments sont égaux à 1 que l'on peut écrire $M = \sum_{k=1}^q \Gamma^k$ avec

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.14)$$

Les opérateurs Ω_i et $\Gamma_i = \mathbb{1}^{\otimes i-1} \otimes \Gamma \otimes \mathbb{1}^{\otimes N-i}$ satisfont les relations $(\Omega_i)^q = (\Gamma_i)^q = \mathbb{1}^{\otimes N}$ et $(\Omega_i)^\dagger = (\Omega_i)^{-1} = (\Omega_i)^{q-1}$, $(\Gamma_i)^\dagger = (\Gamma_i)^{-1} = (\Gamma_i)^{q-1}$.

Les propriétés de la version quantique du modèle de Potts pur en dimensions D découlent des propriétés du modèle classique en dimensions $D + 1$. Ainsi, pour le modèle quantique unidimensionnel, pour $q \leq 4$ (resp. $q > 4$), la transition est continue (resp. discontinue) [117, 158, 159]. Le modèle étant autodual, le point critique est situé à $h_c = J$ [157]. Les exposants critiques sont connus exactement (voir table 3.1). Numériquement, il a été vérifié que la transition du modèle de Potts quantique bidimensionnel à deux états (resp. à trois et quatre états) sur un réseau carré est continue (resp. du premier ordre) [160-162].

3.1.4 Étude du modèle désordonné unidimensionnel par SDRG

L'introduction de désordre transforme l'hamiltonien (3.11) en

$$H_{\text{Potts}}^{\text{Q,D}} = - \sum_{(i,j) \in E} J_{ij} D_{i,j} - \frac{1}{q} \sum_{i \in V} h_i M_i. \quad (3.15)$$

avec J_{ij} et h_i des variables aléatoires, supposées ici strictement positives.

L'introduction de désordre dans le modèle quantique en dimensions D équivaut à introduire

dans le modèle classique en dimensions $D + 1$ un désordre homogène dans D directions mais infiniment corrélé dans la $(D + 1)$ -ième direction. Ce qui a été décrit pour le cas classique désordonné ne s'applique donc plus au cas quantique désordonné. Le critère de Harris [14] sous la forme $D\nu < 2$ reste néanmoins valide pour une transition de phase quantique. Pour le modèle de Potts quantique désordonné unidimensionnel avec deux états (Ising), on a $\nu = 1$ de sorte que le désordre est pertinent alors qu'il est marginal pour l'équivalent bidimensionnel classique. En outre, le passage d'une transition discontinue à une transition continue lors de l'introduction d'un désordre infinitésimal [15] reste vrai pour un système quantique en dimensions $D \leq 2$ [69, 70]. De manière remarquable, le comportement critique du modèle quantique unidimensionnel est connu exactement en utilisant la SDRG alors qu'il ne l'est pas pour le modèle classique désordonné bidimensionnel.

Dans le chapitre 1, on a vu que la SDRG permettait d'obtenir des résultats exacts pour des systèmes unidimensionnels désordonnés. Senthil et Majumdar ont appliqué cette méthode au modèle de Potts désordonné (3.15) pour déterminer ses propriétés critiques [17].

On rappelle que la SDRG consiste à décimer le plus grand couplage $\Omega = \max(J_{ij}, h_i)$.

- Si ce couplage est un champ transverse $\Omega = h_i$, le terme dominant dans l'hamiltonien (3.15) est $H'_i = -h_i M_i / q$. La plus petite valeur propre de H'_i est $-h_i$. On projette le système sur le vecteur propre associé $|v\rangle = \frac{1}{\sqrt{q}}(|1\rangle_i + \dots + |q\rangle_i)$. Le spin i est alors décimé et de nouveaux couplages effectifs sont générés entre ses voisins par perturbation au second ordre [17]

$$\tilde{J}_{i-1,i+1} = \frac{J_{i-1,i} J_{i,i+1}}{\kappa h_i} \quad (3.16)$$

avec $\kappa = q/2$.

- Si ce couplage est une liaison $\Omega = J_{i,i+1}$, le terme dominant dans l'hamiltonien (3.15) est $H'_i = -J_{i,i+1} D_{i,i+1}$. La plus petite valeur propre de H'_i est $-J_{i,i+1}$. Le vecteur propre associé est $|\tilde{s}\rangle = |k\rangle_i \otimes |k\rangle_{i+1}$ avec $k \in [1, q]$. Les deux spins de Potts se trouvent dans le même état et se comportent comme un macro-spin de Potts avec q états. En utilisant la théorie des perturbations au second ordre, le macro-spin est couplé à un champ transverse effectif [17]

$$\tilde{h}_i = \frac{h_i h_{i+1}}{\kappa J_{i,i+1}} \quad (3.17)$$

avec $\kappa = q/2$ comme précédemment.

Ces règles de décimation sont similaires à celles obtenues pour le modèle d'Ising à une constante multiplicative κ près. Il en va de même pour l'équation de flot de la distribution des couplages J (1.50) qui devient

$$\begin{aligned} \frac{\partial P(J, \Omega)}{\partial \Omega} &= P(J, \Omega) [R(\Omega, \Omega) - P(\Omega, \Omega)] \\ &\quad - R(\Omega, \Omega) \int_0^\Omega \int_0^\Omega P(J_1, \Omega) P(J_2, \Omega) \delta \left(J - \frac{J_1 J_2}{\kappa \Omega} \right) dJ_1 dJ_2. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Une équation analogue est obtenue pour $R(h, \Omega)$ par dualité. Les propriétés du point fixe sont

obtenues dans la limite $\Omega \rightarrow 0$. À basse énergie, cette constante κ est non pertinente tant que κ est finie. Elle ne correspond qu'à un seuil d'énergie en deçà duquel il faut se trouver afin d'obtenir le comportement critique. Les distributions au point critique sont donc indépendantes de q . Il en va de même pour les fonctions d'échelle et les exposants associés à toutes les quantités physiques [17]. Les propriétés critiques du modèle de Potts sont alors décrites par un point fixe de désordre infini indépendant de la valeur de q et donc identique à celui du modèle d'Ising.

3.1.5 Comportement critique en dimensions $D = 2, 3$

Dans ce chapitre, on tâchera de répondre à deux questions. Le comportement critique du modèle de Potts quantique est-il décrit par un point fixe de désordre infini en dimensions $D = 2, 3$? Si oui, ce point fixe dépend-t-il du nombre d'états q ?

Quelques éléments de réponses sont déjà connus. En dimensions $D = 2$, pour tout q , la transition est du second ordre d'après le théorème d'Aizenman-Greenblatt-Lebowitz [69, 70]. Pour $q = 2$, les propriétés critiques sont contrôlées par un point fixe de désordre infini [103]. Il ne serait alors pas surprenant, qu'en dimensions $D = 2$, il y ait un point fixe de désordre infini pour tout q . La question de l'indépendance de ce point fixe avec q comme dans le cas unidimensionnel reste ouverte. Un début de réponse a été apporté par l'étude du modèle de Potts quantique en dimensions $D = 2$ avec une variation quasi-périodique des couplages. Il a été montré que les propriétés critiques sont gouvernées par un même point fixe de quasipériodicité infinie pour tout $q > 2$ [163]. Ce point fixe possède, comme celui de désordre infini, une dynamique activée caractérisée par un exposant dynamique z infini. De plus, des simulations Monte-Carlo quantique ont été faites sur le modèle de Potts quantique désordonné bidimensionnel à deux et trois états. Les estimations des exposants critiques des deux modèles coïncident en prenant en compte les barres d'erreur [164]. Cela suggère que le comportement critique est indépendant de q . Dans ce même article, Kang *et al.* ont montré qu'il existe une transformation du modèle de Potts désordonné vers un modèle de jauge discret. Si le comportement critique du modèle de Potts est indépendant de q alors il en ira de même pour de nombreux modèles. Le comportement critique pourrait être qualifié de "superuniversel" [164].

En dimensions $D = 3$, le théorème de Aizenman-Greenblatt-Lebowitz [69, 70] ne s'applique plus. La nature de la transition après introduction de désordre n'est pas connue. Il se peut qu'elle dépende de la quantité de désordre comme dans le cas classique du modèle de Potts à quatre états en dimensions $D = 3$ [154, 155]. Si le désordre est suffisant alors il ne serait pas surprenant que les propriétés critiques soient gouvernées par un point fixe de désordre infini comme dans le cas à deux états [104]. Quant à savoir si ces propriétés sont indépendantes ou non de q , la question reste également ouverte.

3.2 Application de la SDRG au modèle de Potts en dimensions $D = 2, 3$

L'algorithme présenté dans le chapitre 2 a été utilisé pour étudier le modèle de Potts quantique désordonné en dimension $D = 2$ et $D = 3$. Dans un premier temps, on précise les paramètres utilisés, les tailles de système considérés et le nombre d'échantillons. Dans un second temps, on établit l'existence d'un point fixe de désordre infini pour tous les nombres d'états q considérés et on discute de la quantité d'échantillons utilisée pour chacune des tailles L .

3.2.1 Détail des simulations

Nous avons étudié six modèles de Potts à $q = 2, 3, 5, 10, 20, 50$ états en dimensions $D = 2$ et $D = 3$. Le modèle d'Ising ($q = 2$) a été également étudié afin de vérifier si les exposants critiques estimés avec notre implémentation numérique et nos méthodes d'analyse étaient cohérents avec ceux de Kovács et Iglói [103, 104]. Étant donné que $\kappa \geq 1$ pour ces modèles, les couplages effectifs sont nécessairement plus petits que ceux décimés. Nous avons donc employé la décimation par minimum local. Pour chaque modèle, nous avons considéré plusieurs tailles de système L . Les plus grandes correspondent à environ 10^6 spins. Le réseau choisi est un hypercube de dimension D . Les distributions initiales utilisées sont

$$P(J_{ij}) = \frac{J_{ij}^{1/\Delta-1}}{\Delta}, \quad (0 < J_{ij} < 1) \quad (3.19)$$

$$R(h_i) = \frac{h_i^{1/\Delta-1}}{\Delta h_{\max}}, \quad (0 < h_i < h_{\max}), \quad (3.20)$$

avec Δ un paramètre ajustable, permettant de modifier la forme des distributions initiales. Une distribution initiale uniforme, $\Delta = 1$, a été employée pour tous les modèles. Chaque itération du groupe de renormalisation rapproche les distributions $P(J)$ et $R(h)$ des couplages de la distribution du point fixe. Dans la limite thermodynamique, on peut réaliser, en principe, une infinité d'itérations de sorte que la mémoire des distributions initiales est complètement perdue. En revanche, numériquement, on n'a accès qu'à des systèmes finis et donc à un nombre fini d'itérations. Pour étudier le point fixe de désordre infini, il est donc préférable de partir de distributions initiales proches de celles attendues au point fixe qui correspondent ici à $\Delta \rightarrow +\infty$. Pour certains modèles, différentes valeurs Δ ont été utilisées pour étudier l'influence du désordre initial. Pour chaque taille L , nombre d'états q , intensité du désordre Δ et dimension D , un grand nombre d'échantillons ont été utilisés. Le tableau 3.2 résume ces différentes données et le nombre minimal d'échantillons considérés. Pour chaque échantillon, nous avons déterminé la position du point pseudo-critique h_c^i avec une précision de $\epsilon = 10^{-5}$ en utilisant la méthode du doublement (voir sous-section 2.2.1.1). Au point pseudo-critique estimé pour chaque échantillon, nous avons calculé le moment magnétique et le champ transverse, correspondant au gap d'énergie entre l'état fondamental et le premier état excité, du dernier amas. Nous avons considéré comme suffisant un nombre d'échantillons tel que les erreurs relatives des observables \mathcal{O} , i.e. $\frac{\sqrt{\text{Var } \mathcal{O}/N}}{\mathcal{O}}$,

2D									
$L =$	32	40	48	64	80	96	128	160	192
$n_{\text{échantillons}}^{\min}$	4×10^5	2×10^5	1×10^5	7×10^4	5×10^4	3×10^4	6×10^4	4×10^4	4×10^4
$L =$	256	320	384	512	640	768	1024	1280	1536
$n_{\text{échantillons}}^{\min}$	2×10^4	3×10^4	2×10^4	1×10^4	2×10^4	1×10^4	2×10^4	1×10^4	8×10^3
3D									
$L =$	4	5	8	10	13	16	20	26	32
$n_{\text{échantillons}}^{\min}$	1×10^6	1×10^6	1×10^5	3×10^5	2×10^5	1×10^5	1×10^5	6×10^4	3×10^4
$L =$	40	52	64	80	104	128	160		
$n_{\text{échantillons}}^{\min}$	2×10^4	2×10^4	1×10^4	1×10^4	1×10^4	7×10^3	3×10^3		

TABLE 3.2 – Nombre minimum d'échantillons considérés pour tous les modèles avec $\Delta = 1$ pour différentes tailles L en dimensions $D = 2$ et $D = 3$.

soient inférieures à 1% avec $\bar{\mathcal{O}}$ la moyenne sur les échantillons de désordre de \mathcal{O} et $\text{Var } \mathcal{O}$ la variance. Il s'agit ici des moyennes des moments magnétiques μ et des logarithmes des champs transverses ζ des derniers amas. Le plus mauvais cas survient pour le modèle de Potts tridimensionnel à trois états pour lequel l'erreur relative associée à la moyenne des moments magnétiques pour $L = 160$ est de 0.6%. Les fluctuations de $\bar{\mu}$ obtenues pour différentes tailles L sont représentées sur la figure 3.1. Des événements rares, ayant une grande contribution, ne semblent plus influencer sur le plateau atteint par la moyenne du moment magnétique. Pour les estimations des exposants critiques qui suivront, l'erreur associée au nombre fini d'échantillons sera plus faible que celle venant des interpolations.

3.2.2 Mise en évidence d'un point fixe de désordre infini

Pour que la SDRG soit valide, il faut que le point fixe soit de désordre infini i.e. que les distributions des couplages au point critique soient infiniment larges. À un tel point fixe, c'est également le cas pour les distributions de probabilité des observables qui ne sont pas auto-moyennante. Sur la figure 3.2, la variance réduite $R_\mu(L) = \frac{\overline{\mu^i(L)^2} - \mu^i(L)^2}{\mu^i(L)^2}$ des moments magnétiques $\mu^i(L)$, obtenus aux points pseudo-critiques, est représentée en fonction de L . En dimensions $D = 2$ et $D = 3$ et pour différents modèles de Potts à q états, $R_\mu(L)$ tend vers une constante non nulle lorsque $L \rightarrow +\infty$. Ces constantes, $R_\mu^{2D}(\infty) = 0.126(5)$ et $R_\mu^{3D}(\infty) = 0.155(5)$, semblent être indépendantes du nombre d'états q . Le moment magnétique est non auto-moyennant comme attendu à un point fixe de désordre infini.

Ce point fixe est également caractérisé par une dynamique activée, c'est-à-dire par un exposant z infini. Sur la figure 3.3, les distributions $P_L(\zeta)$ avec $\zeta = -\ln \Delta E$ sont représentées pour plusieurs tailles de système L en dimensions $D = 2$ et $D = 3$ pour les modèles de Potts à $q = 3$ états (haut) et $q = 50$ états (bas). Dans tous les cas, les distributions sont de plus en plus larges avec la taille du système L . En changeant l'échelle i.e. en travaillant avec les variables $\tilde{\zeta} = (\zeta_0 + \zeta)L^{-\psi}$ avec ζ_0, ψ des coefficients à ajuster, un recouvrement des distributions $\tilde{P}_L(\tilde{\zeta})$ peut être obtenu pour un couple (ζ_0, ψ) donné. Ce comportement est celui attendu pour une dynamique activée caractérisée par l'exposant ψ . On détaillera la procédure choisie pour

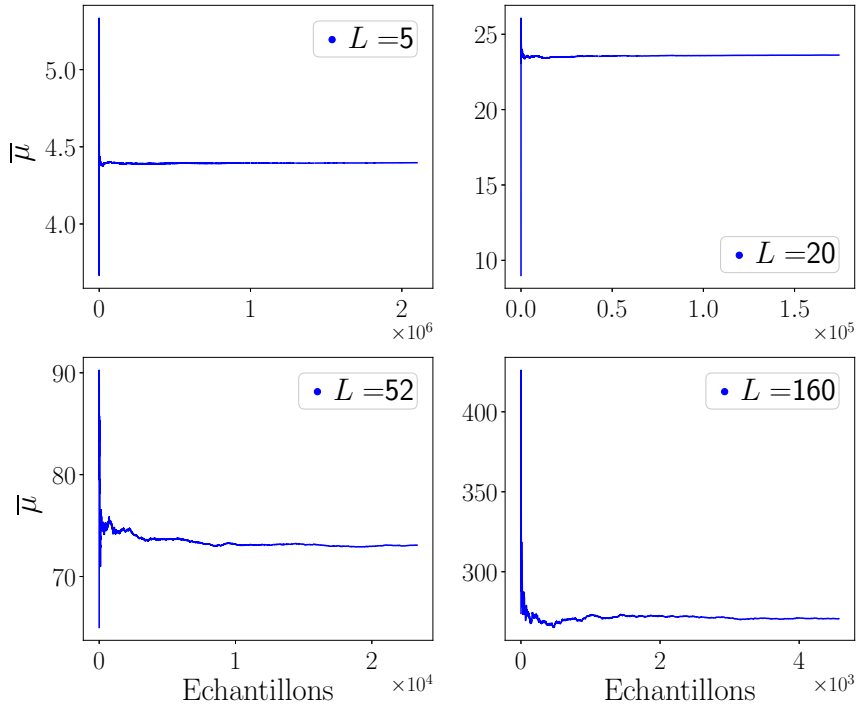


FIGURE 3.1 – Moyenne du moment magnétique $\bar{\mu}$ du dernier amas, pour le modèle de Potts en dimensions $D = 3$ avec $q = 10$, en fonction du nombre d'échantillons de désordre pour quatre différentes tailles de système L .

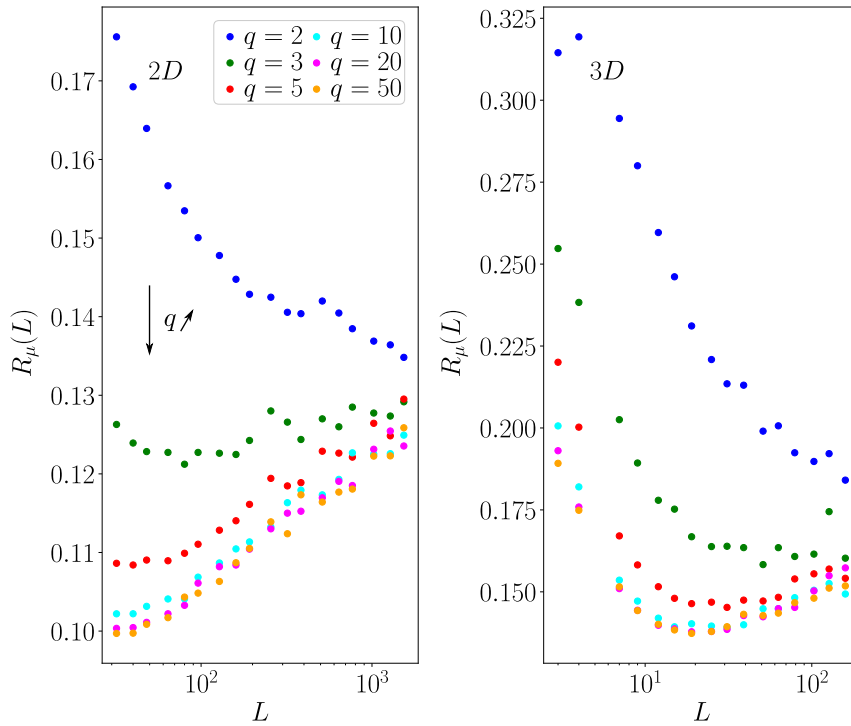


FIGURE 3.2 – Variance réduite $R_\mu(L)$ du moment magnétique de plusieurs modèles de Potts à q états en fonction de la taille du système L en dimensions $D = 2$ (à gauche) et $D = 3$ (à droite). R_μ tend vers une valeur constante non nulle lorsque $L \rightarrow +\infty$ signe que le moment magnétique n'est pas auto-moyennant.

déterminer ψ ultérieurement. Des figures semblables, voir annexe B.6, ont été obtenues pour tous les modèles de Potts étudiés.

Nous en avons déduit que, pour $q \geq 2$ et en dimensions $D = 2$ et $D = 3$, les propriétés critiques sont gouvernées par un point fixe de désordre infini. Ce résultat était attendu en dimensions $D = 2$. En dimensions $D = 3$, il suggère que même pour un désordre initial relativement faible, $\Delta = 1$, les distributions obtenues sont suffisamment proches de celles attendues au point fixe de désordre infini. Pour un désordre plus faible, il faudrait travailler avec des tailles de systèmes L suffisamment grandes pour se rapprocher suffisamment des distributions du point fixe. Dans les configurations utilisées, nous avons choisi $\Delta \geq 1$ ce qui garantit que les propriétés critiques mesurées sont celles du point fixe de désordre infini.

3.3 Étude des propriétés critiques

Nous utilisons la SDRG pour déterminer les propriétés critiques du modèle de Potts quantique désordonné en dimensions $D = 2$ et $D = 3$. On commence par l'étude des distributions des points pseudo-critiques afin d'estimer la position du point critique et l'exposant ν . Puis, on étudie les distributions des moments magnétiques du dernier amas aux points pseudo-critiques pour évaluer l'exposant d_f . On termine avec les distributions des champs transverses du dernier amas pour estimer l'exposant ψ .

3.3.1 Position du point critique et exposant critique ν

En utilisant la méthode du doublement pour chaque échantillon, on détermine la valeur h_{\max} de la distribution initiale des champs transverses (3.20) pour laquelle le système passe d'une phase ordonnée à désordonnée. Elle est notée $h_c^i(L)$ pour le i -ème échantillon de taille L . Par analogie avec le cas unidimensionnel, on définit la position du point pseudo-critique comme $\theta_c^i(L) \equiv \ln h_c^i(L)$. La précision associée à $\theta_c^i(L)$ est alors $\sim \frac{10^{-5}}{h_c^i(L)}$.

Comme indiqué dans la section 2.2.1.2, la position du point critique et l'exposant ν sont estimés dans la suite en utilisant les distributions des points pseudo-critiques ainsi que le comportement de taille finie de la moyenne et de la variance de θ_c .

3.3.1.1 Comportement d'échelle des distributions des points pseudo-critiques

Conformément à l'équation (1.35), on s'attend à ce que les distributions de probabilité P_L des variables d'échelle $u = L^{1/\nu} |\theta_c^i(L) - \theta_c| / \theta_c$ soient indépendantes de la taille du système L . Pour déterminer les paramètres θ_c et ν qui permettent le meilleur recouvrement des courbes $P_L(u)$ en fonction de u , on utilise la fonction de coût

$$\sigma = \frac{1}{u_{\max} - u_{\min}} \int_{u_{\min}}^{u_{\max}} \sum_L \left\{ \ln [P_L(u)] - \frac{1}{N_L} \sum_L \ln [P_L(u)] \right\}^2 du \quad (3.21)$$

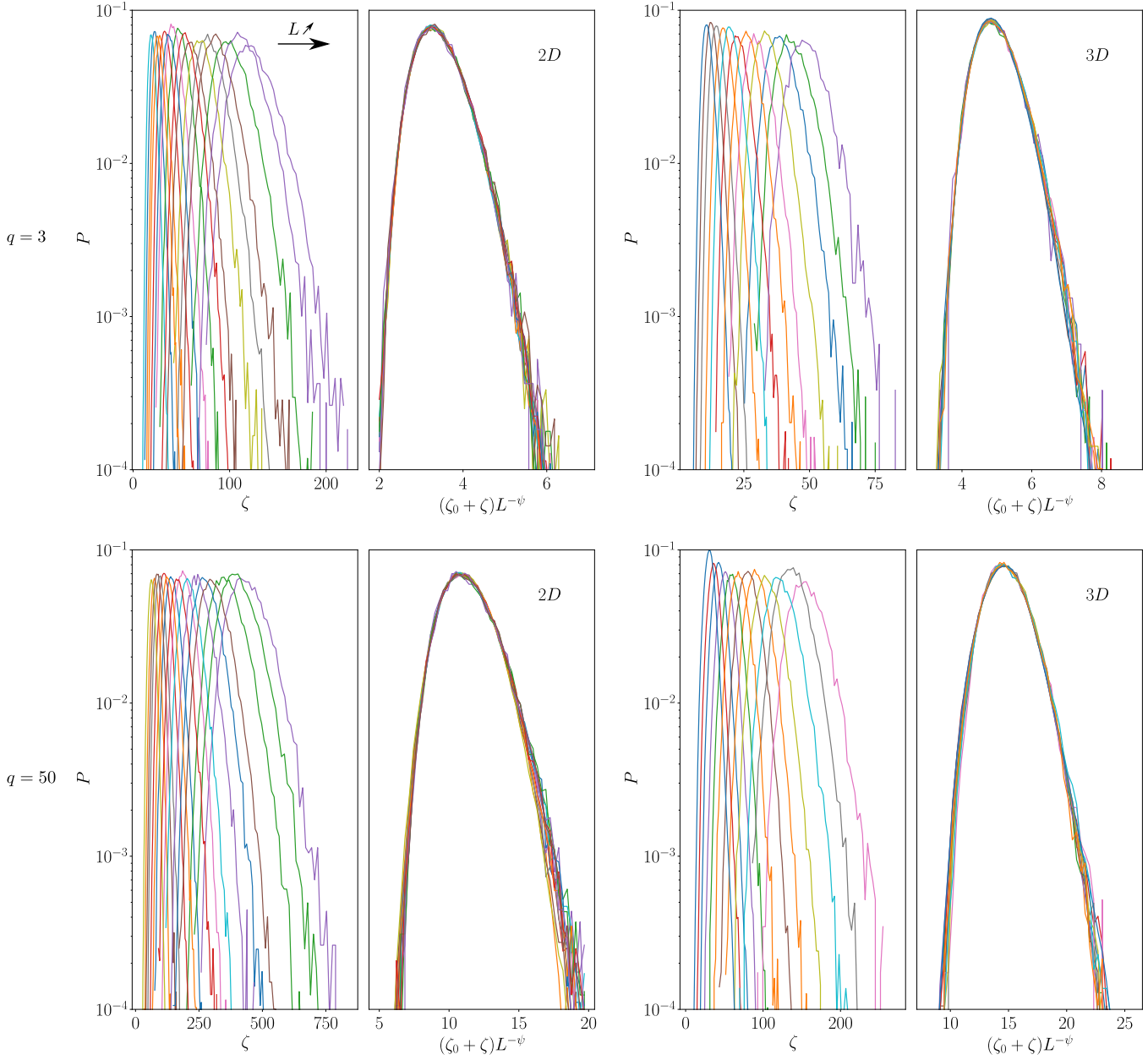


FIGURE 3.3 – Distributions $P_L(\zeta)$, avec $\zeta = -\ln \Delta E$ et ΔE le gap d'énergie entre l'état fondamental et le premier niveau excité, des modèles de Potts à $q = 3$ états (haut) et $q = 50$ états (bas) avec $\Delta = 1$ et distributions $P_L((\zeta_0 + \zeta)L^{-\psi})$ avec ζ_0 et ψ des coefficients choisis pour obtenir le meilleur recouvrement des courbes entre les différentes tailles de systèmes L . Les couleurs indiquent des tailles L différentes croissantes de gauche à droite pour $P(\zeta)$; $L \in [48, 1536]$ en dimensions $D = 2$ et $L \in [13, 160]$ en dimensions $D = 3$. Les couples de paramètres (ζ_0, ψ) utilisés se trouvent dans la table 3.5.

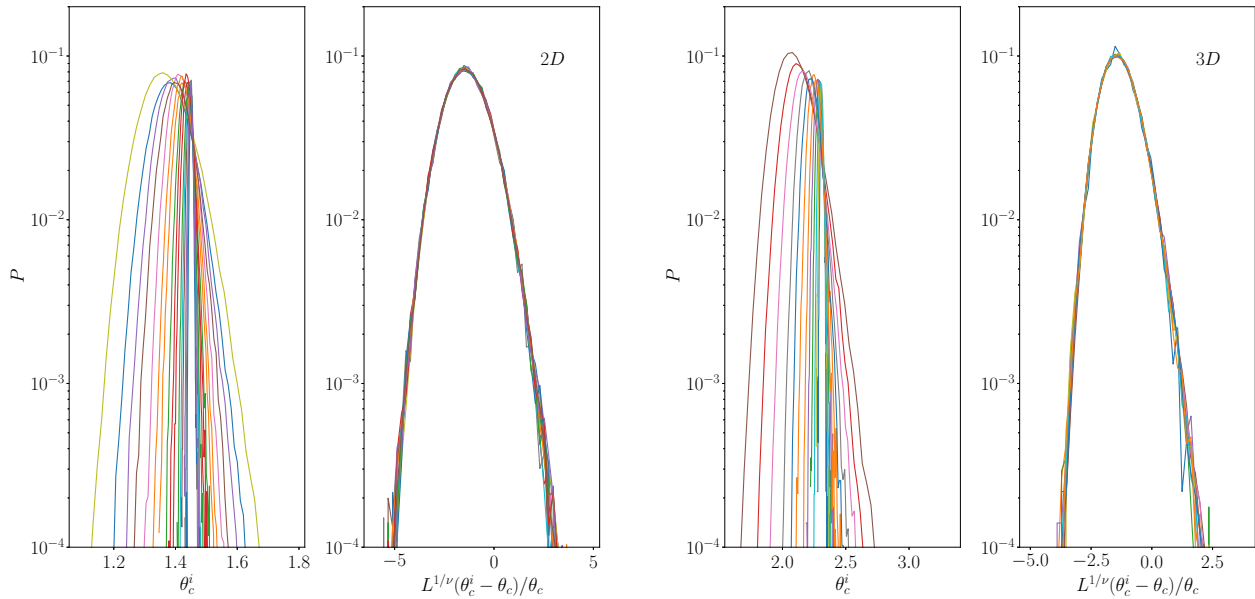


FIGURE 3.4 – Distributions des points pseudo-critiques $\theta_c^i(L)$ et des variables d'échelle $u = L^{1/\nu}|\theta_c^i(L) - \theta_c|/\theta_c$ pour plusieurs tailles L du modèle de Potts à $q = 10$ états en dimensions $D = 2$ (à gauche) et $D = 3$ (à droite). Les distributions les plus larges $P_L(\theta_c^i)$ correspondent aux tailles les plus petites. Les variables ν et θ_c utilisées pour obtenir u se trouvent dans la table 3.3. Elles ont été déterminées en minimisant (3.21).

avec N_L le nombre de tailles L considérées et u_{\min} et u_{\max} les plus petites et plus grandes valeurs de u utilisées. Le logarithme a été choisi pour mieux prendre en compte les queues des distributions. Mais, c'est également dans les queues des distributions qu'on observe de larges fluctuations liées à la difficulté d'échantillonner des événements rares. Pour cette raison, nous avons imposé un seuil arbitraire $\epsilon = 10^{-2}$ tel que si $P(u) < \epsilon$ alors $P(u) = \epsilon$. σ est minimisé numériquement en utilisant la méthode de Powell [165]. Pour procéder à cette minimisation, nous avons eu recours à la bibliothèque Scipy [166] de Python [167, 168] et plus particulièrement la fonction `minimize` du module `optimize`. Le second intérêt d'introduire la fonction de coût (3.21) est la possibilité d'estimer des incertitudes en évaluant la matrice covariante. Cette dernière est reliée à la matrice hessienne dont les coefficients sont les $\frac{\partial^2 f}{\partial a_i \partial a_j}$ avec ici $f = \sigma$ et $a_i, a_j \in [\theta_c, \nu]$. La matrice hessienne est estimée par différences finies autour des paramètres optimisés. Comme le proche voisinage des paramètres optimisés est très escarpé, l'évaluation de la matrice hessienne a été faite avec un pas de 10^{-2} . On s'éloigne alors suffisamment du minimum pour éviter les fluctuations de σ mais pas trop pour que les termes d'ordres supérieurs à 2 restent négligeables. Pour l'estimation de la matrice hessienne, la fonction `Hessian` de la bibliothèque `Numdifftools` [169] a été employée. Afin de limiter le temps de calcul et d'éviter une optimisation trop complexe, nous avons utilisé uniquement quatre tailles de systèmes $N_L = 4$ avec $L = \{64, 256, 512, 1280\}$ en dimensions $D = 2$ et $L = \{13, 32, 64, 128\}$ en dimensions $D = 3$.

Sur la figure 3.4 sont représentées les distributions $P_L(\theta_c^i)$ et $P_L(L^{1/\nu}|\theta_c^i(L) - \theta_c|/\theta_c)$ obtenues pour le modèle de Potts à dix états en dimensions $D = 2$ (à gauche) et $D = 3$ (à droite). Un recouvrement très satisfaisant est observé. Pour les autres modèles considérés, des

$q =$		2		3	5	10
$\Delta =$		1	3	1	1	1
θ_c	2D	1.678(3)	5.034(7)	1.563(4)	1.495(3)	1.457(3)
	3D	2.531(9)	7.596(19)	2.42(6)	2.359(6)	2.331(6)
ν	2D	1.26(12)	1.24(11)	1.26(13)	1.25(8)	1.26(8)
	3D	1.00(10)	1.01(7)	1.00(5)	1.00(7)	1.01(5)
$q =$		20		50		
$\Delta =$		1	1	3	5	
θ_c	2D	1.442(3)	1.435(3)	4.448(6)	7.624(15)	
	3D	2.325(7)	2.327(12)	7.047(17)	11.924(31)	
ν	2D	1.25(8)	1.25(8)	1.25(9)	1.28(15)	
	3D	1.01(7)	1.01(11)	1.00(6)	1.00(7)	

TABLE 3.3 – Tableau récapitulatif de la position du point critique θ_c et de l'exposant ν , des différents modèles et désordres considérés, estimés par la minimisation de σ (3.21) des distributions $P_L(L^{1/\nu}|\theta_c^i(L) - \theta_c|/\theta_c)$.

recouvrements d'une qualité équivalente sont obtenus (voir l'annexe B.1). Les paramètres ν et θ_c estimés en minimisant σ se trouvent dans la table 3.3. L'incertitude sur l'exposant ν semble toutefois surestimée. En fixant le paramètre ν avec la valeur maximale dans les barres d'erreur et en variant θ_c aucun recouvrement satisfaisant n'est trouvé. Une explication pourrait être liée au fait que l'exposant ν contrôle l'étalement des distributions en fonction de L . Or, à cause du logarithme utilisé dans la fonction de coût (3.21), la variation de ν conduit à une variation de σ faible contrairement au décalage des distributions provoqué par θ_c .

3.3.1.2 Comportement d'échelle de la position moyenne des points pseudo-critiques

D'après (1.35), le comportement de taille finie de l'écart au point critique est

$$\bar{\theta}_c(L) = \theta_c + aL^{-1/\nu_s}. \quad (3.22)$$

L'interpolation des données numériques se fait par un ajustement, qualifié de simple, avec les paramètres libres θ_c, a et ν_s . La première difficulté est que cet ajustement est non-linéaire nécessitant de recourir à une méthode itérative [170]. Nous avons utilisé la fonction `curve_fit`, basée sur une méthode des moindres carrés, du module `optimize` de Scipy. Les paramètres optimisés sont ceux minimisant

$$\chi^2 = \sum_i^n \frac{(y_i - f(x_i, \mathbf{b}))^2}{\sigma_i^2} \quad (3.23)$$

avec n le nombre de données, y_i les données mesurées, $f(x_i, \mathbf{b})$ la fonction à ajuster avec \mathbf{b} les paramètres à optimiser et σ_i le poids associée à la donnée y_i . Ici, σ_i correspond aux écarts-types. Par défaut, la méthode utilisée pour déterminer \mathbf{b} est l'algorithme de Levenberg-Marquardt [171]. Les écarts-types associés à chaque paramètre \mathbf{b} peuvent être estimés à partir de la matrice de covariance. Sauf mention contraire, toutes les barres d'erreur affichées dans les

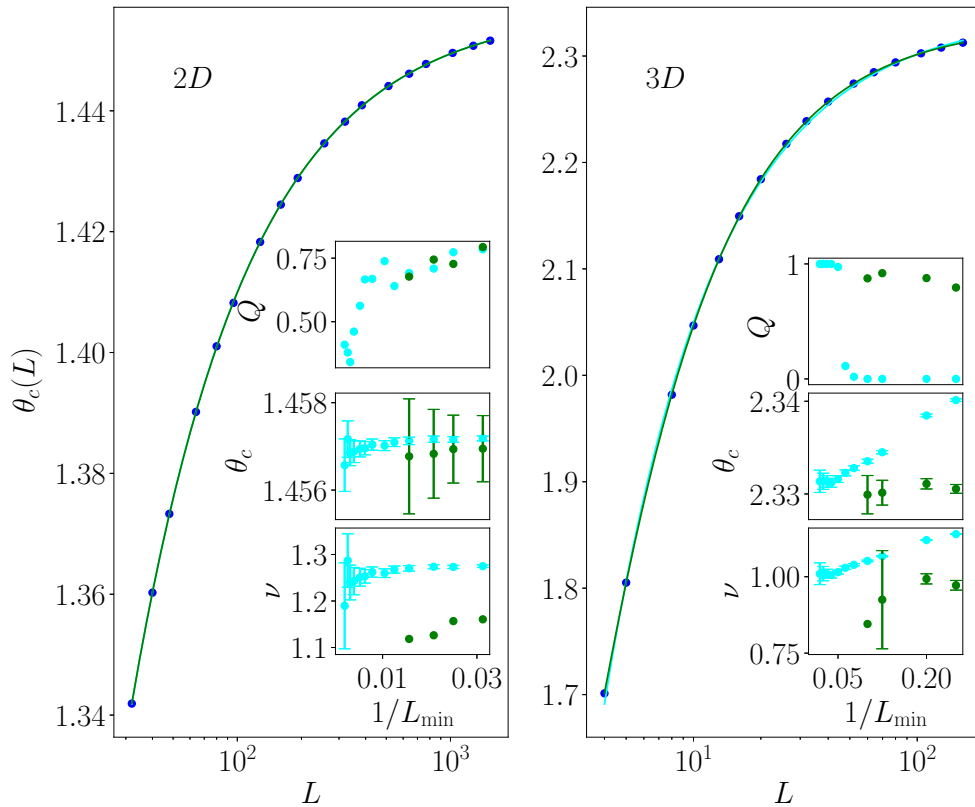


FIGURE 3.5 – Moyenne des points pseudo-critiques $\theta_c(L) \equiv \overline{\theta_c^i(L)}$ du modèle de Potts à dix états quantique désordonné en dimensions $2D$ (à gauche) et $3D$ (à droite) en fonction de L . La courbe cyan correspond à un ajustement simple suivant l'équation (3.22) tandis que la courbe verte à un ajustement complexe prenant en compte des corrections algébriques suivant l'équation (3.24). Dans les graphiques incrustés sont représentées la qualité de l'ajustement Q et la variation des paramètres optimaux ν_s et θ_c obtenus en procédant à un ajustement simple (points en cyan) et complexe (en vert) en fonction de la plus petite taille L_{\min} considérée. Si aucune barre d'erreur n'est indiquée, cela signifie que l'erreur est plus grande que la fenêtre et donc que l'ajustement réalisé est peu exploitable.

figures sont calculées de cette manière. Ces estimations ne sont pas exempts d'approximations, en particulier que le bruit associé aux données est Gaussien et que, localement, la variation de χ^2 autour des paramètres optimaux soit identique au cas linéaire [172].

La moyenne des points pseudo-critiques $\theta_c(L) \equiv \overline{\theta_c^i(L)}$ du modèle de Potts à $q = 10$ états quantique désordonné en dimensions $2D$ (à gauche) et $3D$ (à droite) est tracée en fonction de L sur la figure 3.5. En dimensions $D = 2$, dans les incrustations, on n'observe aucune évolution de θ_c et ν_s (points en cyan) avec L_{\min} , la plus petite taille considérée dans l'interpolation. En dimensions $D = 3$, en revanche, une évolution systématique est clairement visible. En considérant toutes les tailles L , l'exposant ν_s obtenu est estimé à 1.14 tandis qu'en n'utilisant que les plus grandes tailles pour faire l'ajustement, on obtient $\nu_s \sim 1.01$. Cette dépendance trahit la présence de corrections d'échelle. Nous avons procédé à l'ajustement, qualifié de complexe pour le distinguer du précédent (3.22),

$$\overline{\theta}_c(L) = \theta_c + aL^{-1/\nu_s} [1 + bL^{-\omega}] \quad (3.24)$$

avec b et ω deux nouveaux paramètres et $\omega > 0$. Sur la figure 3.5, la courbe en cyan est l'ajustement obtenu avec (3.22) et en vert celui prenant en compte des corrections algébriques (3.24). En dimensions $D = 2$, les courbes verte et cyan sont indiscernables. En dimensions $D = 3$, une différence est notable entre les courbes vertes et cyan, la verte se rapprochant le plus des données observées. Dans l'incrustation, les exposants ν_s obtenus en utilisant l'ajustement complexe (points verts) sont compatibles, en considérant les barres d'erreur, avec ceux obtenus par un ajustement simple dans la limite $1/L_{\min} \rightarrow 0$. Cet accord indique que les tailles de systèmes considérées sont suffisantes et que la modélisation des corrections d'échelle est pertinente. Néanmoins, l'estimation précise des paramètres ajustés reste difficile. D'un côté, l'ajustement simple ne prend pas en compte des éventuelles corrections et il faut se placer à L_{\min} grand pour limiter ces dernières. Dans ce cas, le nombre de données à ajuster est plus faible donc les incertitudes sur les paramètres plus grands. De l'autre, on peut essayer de prendre en compte ces corrections d'échelle en ajoutant un terme $bL^{-\omega}$ mais ces deux termes supplémentaires rendent l'optimisation plus instable et des différences dans les paramètres peuvent survenir en fonction des paramètres initiaux et de la méthode employée pour minimiser χ^2 . Dans les deux cas, les incertitudes sur les paramètres ν_s et θ_c sont importantes. En particulier, pour procéder à un ajustement complexe, il faut que le terme $L^{-\omega}$ ait un poids significatif pour les tailles considérées afin que l'estimation des paramètres optimaux soit stable. C'est pour cette raison qu'en dimensions $D = 2$, les incertitudes sur l'exposant ν_s (points verts) sont trop importantes pour être représentées sur la figure 3.5. Cela explique également qu'en dimensions $D = 3$, l'incertitude sur ν_s augmente fortement lorsque $1/L_{\min}$ diminue. La qualité de l'ajustement Q [172] d'une loi du χ^2 permet, en supposant que les résidus suivent une distribution gaussienne, d'estimer la probabilité d'obtenir un χ^2 aussi élevé ou plus élevé. Si Q est faible, typiquement inférieur à 0.05, il y a de fortes chances que

- la fonction interpolée ne soit pas la bonne,
- les écarts-types choisis σ_i sont incorrects,
- les résidus ne suivent pas une distribution gaussienne.

Q est relié à la valeur χ^2/n_{ddl} avec n_{ddl} le nombre de degrés de liberté i.e. $n_{ddl} = n_{data} - |\mathbf{b}|$ avec n_{data} le nombre de données à disposition et $|\mathbf{b}|$ le nombre de paramètres à ajuster. La qualité d'ajustement Q peut être utilisée pour comparer les différents ajustements entre eux. Si $Q_1 > Q_2$ alors l'ajustement 1 reproduit mieux les données observées que le 2. Sur la figure 3.5, la qualité Q des ajustements linéaires et complexes sont représentés en fonction de $1/L_{\min}$. En dimensions $D = 2$, les qualités sont similaires même lorsque les plus petites tailles sont considérées. C'est un indicateur d'une faible correction d'échelle i.e. d'un exposant ω grand ou des tailles suffisamment importantes pour que $L^{-\omega}$ soit négligeable. Le cas de la dimension $D = 3$ est radicalement différent. Comme mentionné précédemment, les variations des paramètres ν_s et θ_c obtenues avec un ajustement simple trahissent la présence de corrections d'échelle fortes. Les valeurs de Q , associées aux ajustements avec des petites tailles de systèmes, sont proches de 0. On peut en déduire que la fonction interpolée n'est pas la bonne. Par contre, dans la limite $1/L_{\min} \rightarrow 0$, en dimensions $D = 3$, Q est proche de 1 signe que l'ajustement simple utilisé est cohérent avec

$q =$		2		3		5		10
$\Delta =$		1		3		1		1
θ_c	2D	1.6784(4)		5.035(2)		1.5627(5)		1.4570(3)
	3D	2.531(2)		7.597(3)		2.420(2)		2.331(2)
$q =$		20		50				
$\Delta =$		1		1		3		5
θ_c	2D	1.4421(3)		1.4353(5)		4.448(1)		7.621(2)
	3D	2.326(2)		2.327(2)		7.050(3)		11.922(6)

TABLE 3.4 – Position du point critique θ_c , pour les différents modèles de Potts quantique désordonné et désordres considérés, estimé par un ajustement simple (3.22) des moyennes des points pseudo-critiques dans la limite $1/L_{\min} \rightarrow 0$.

les données observées. Néanmoins, ce n'est pas parce que la valeur de Q est proche de 1 que les paramètres d'ajustement sont exploitables. Les incertitudes peuvent être tellement larges, comme c'est le cas en dimensions $D = 2$ lorsque l'exposant ν_s est déterminé avec un ajustement complexe, qu'il est difficile de conclure.

La variation de Q en fonction de L_{\min} et la comparaison entre ajustements simple et complexe permettent de déduire qu'en dimensions $D = 2$ et $D = 3$ les estimations des paramètres ν_s et θ_c provenant d'un ajustement simple dans la limite $1/L_{\min} \rightarrow 0$ sont crédibles pour le modèle de Potts à $q = 10$ états et pour tous les autres modèles de Potts considérés (voir l'annexe B.2). Les estimations des positions des points critiques θ_c sont répertoriés dans le tableau 3.4. En comparant les exposants ν_s des différents modèles, on se rend compte qu'ils sont très similaires. Sur la figure 3.6 est représentée l'exposant ν_s , estimé par un ajustement simple (3.22), en fonction de $1/L_{\min}$ pour tous les modèles considérés. En dimensions $D = 2$, l'exposant effectif ν_s varie faiblement avec L_{\min} et les valeurs prises pour les différents modèles sont tous compatibles, en prenant en compte leurs barres d'erreur, avec $\nu_s \simeq 1.25(3)$. En dimensions $D = 3$, pour des L_{\min} faibles, les exposants effectifs ν_s sont incompatibles et augmentent avec q . Les exposants semblent converger vers la valeur 0.99(4) dans la limite $1/L_{\min} \rightarrow 0$.

3.3.1.3 Écart-type de la position des points pseudo-critiques

Nous avons également estimé l'exposant ν , noté ici ν_w , en considérant le comportement de taille finie de la distance au point critique $\delta\theta_c(L) = \sqrt{\theta_c^i(L)^2 - \bar{\theta}_c^i(L)^2}$ (2.10). On peut linéariser cette équation en prenant le logarithme afin de procéder à l'ajustement, dit simple,

$$\ln \delta\theta_c(L) = -\frac{1}{\nu_w} \ln L + a \quad (3.25)$$

avec ν_w et a deux paramètres libres. En prenant le logarithme de $\delta\theta_c$, les erreurs associées, si elles étaient initialement gaussiennes, ne le sont plus. Dans les données utilisées, l'erreur relative est très faible (inférieure à 1%) de sorte que les erreurs associées aux $\ln \delta\theta_c(L)$ peuvent être considérées comme gaussiennes.

Un ajustement est représenté pour le modèle de Potts à 10 états sur la figure 3.7. Les

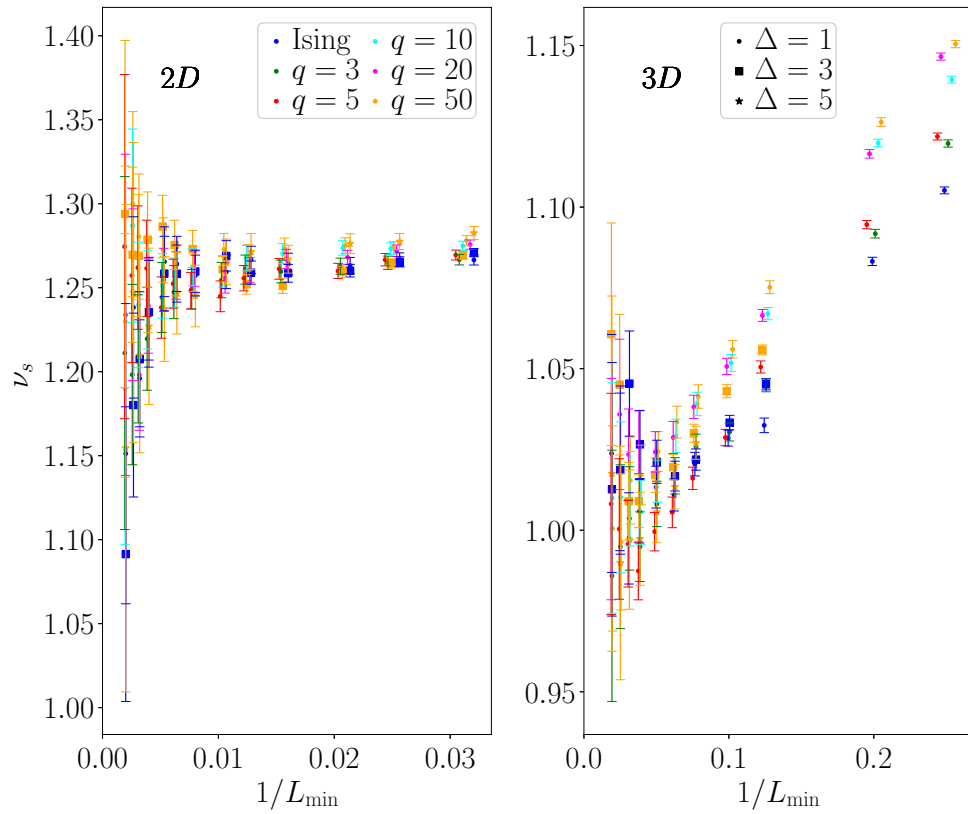


FIGURE 3.6 – Exposant ν_s estimé par un ajustement simple (3.22) en fonction de la plus petite taille de système considérée L_{\min} pour différents modèles q et différents désordres initiaux Δ . Le nombre minimum de données utilisées pour faire un ajustement a été fixé à six sachant qu'il y a trois paramètres à optimiser. Les légendes sont identiques pour les deux figures. Les points ayant les mêmes valeurs L_{\min} ont été légèrement décalés pour améliorer la lisibilité.

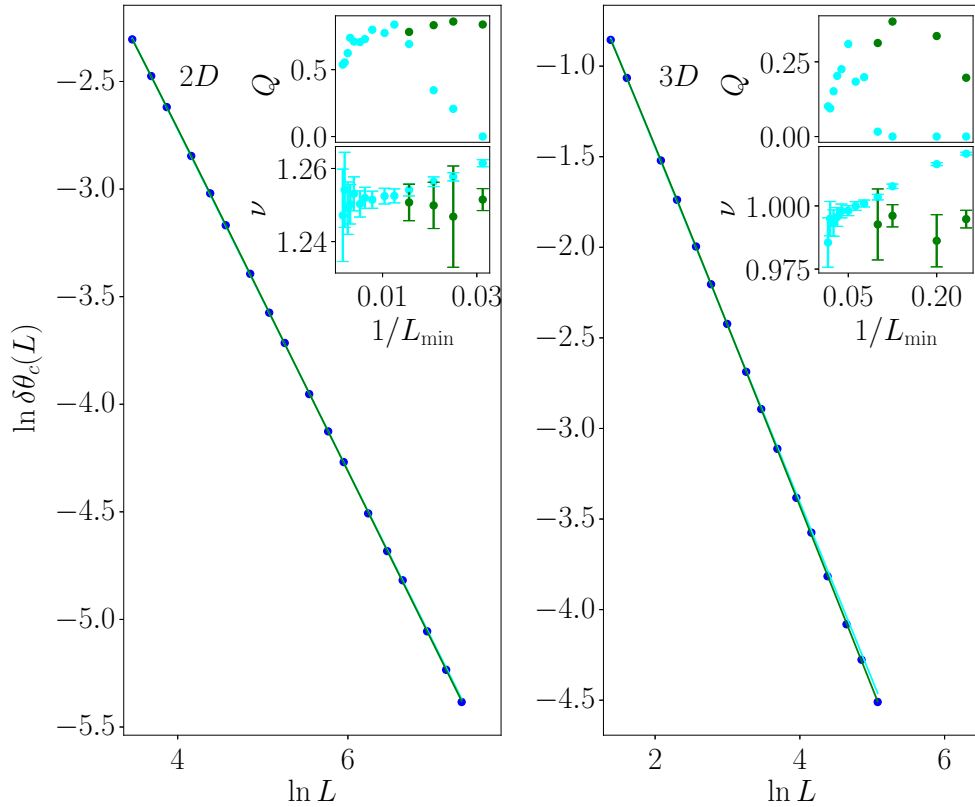


FIGURE 3.7 – Logarithme de l'écart-type des points pseudo-critiques $\ln \delta\theta_c(L)$ du modèle de Potts à $q = 10$ états quantique désordonné en dimensions $2D$ (à gauche) et $3D$ (à droite) en fonction de L . La courbe cyan correspond à un ajustement, dit simple, suivant l'équation (3.25) tandis que la courbe verte à un ajustement, dit complexe, prenant en compte des corrections algébriques suivant l'équation (3.26). Dans les graphiques incrustés sont représentés la qualité de l'ajustement Q et l'exposant ν_w obtenu en procédant à un ajustement simple (points en cyan) et complexe (en vert) en fonction de la plus petite taille L_{\min} considérée dans cet ajustement.

conclusions que l'on peut en tirer sont très similaires à celles concernant $\theta_c(L)$. En dimensions $D = 3$, la variation de ν_w avec L_{\min} , bien que nettement plus faible qu'avec $\theta_c(L)$, trahit la présence de corrections. Nous avons considéré l'ajustement, dit complexe, suivant

$$\ln \delta\theta_c(L) = -\frac{1}{\nu_w} \ln L + a + \ln(1 + bL^{-\omega}) \quad (3.26)$$

avec b et $\omega > 0$, deux paramètres libres supplémentaires. Comme précédemment, les exposants ν_w obtenus par un ajustement simple dans la limite $1/L_{\min} \rightarrow 0$ sont comparables à ceux obtenus par un ajustement complexe. Les figures pour les autres modèles se trouvent dans l'annexe B.3.

Sur la figure 3.8 est représentée l'exposant ν_w , estimé par un ajustement simple (3.22), en fonction des tailles $L > L_{\min}$ pour tous les modèles considérés. En dimensions $D = 2$, les exposants semblent tendre vers une valeur 1.24(1) dans la limite $1/L_{\min} \rightarrow 0$. En dimensions $D = 3$, les exposants effectifs dépendent de q pour L_{\min} petit. Dans la limite $1/L_{\min} \rightarrow 0$, les écarts entre les exposants diminuent jusqu'à être compatibles avec $\nu_w \simeq 0.99(1)$.

Les variations de ν_s et ν_w dans la limite $1/L_{\min} \rightarrow 0$ semblent indiquer que les modèles de

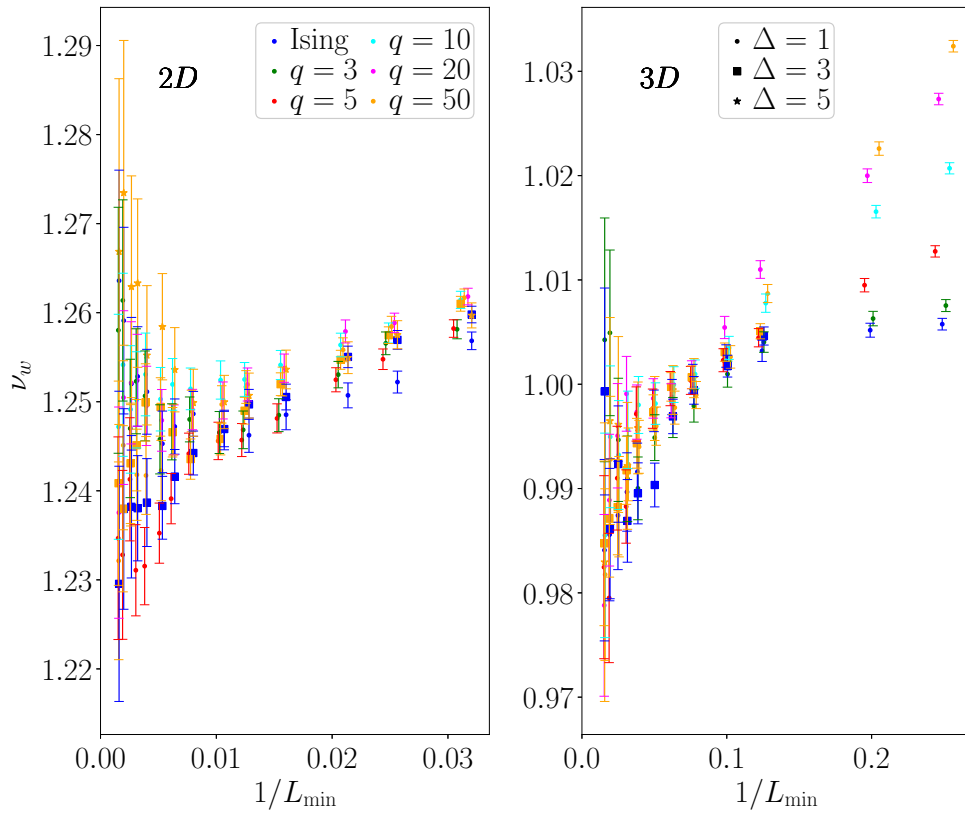


FIGURE 3.8 – Exposant ν_w estimé par un ajustement linéaire (3.25) en fonction de la plus petite taille de système considérée L_{\min} pour différents modèles q et différents désordres initiaux Δ . Le nombre minimum de données utilisées pour faire un ajustement a été fixé à cinq sachant qu’il y a deux paramètres à optimiser. Les légendes sont identiques pour les deux figures. Les points de même valeur L_{\min} ont été légèrement décalés pour améliorer la lisibilité.

Potts partagent la même classe d'universalité. Des figures 3.6 et 3.8, on estime les exposants $\nu_s \simeq 1.25(3)$ et $\nu_w \simeq 1.24(1)$ en dimensions $D = 2$ et $\nu_s \simeq 0.99(4)$ et $\nu_w \simeq 0.99(1)$ en dimensions $D = 3$. Ces estimations sont compatibles avec celles obtenues pour le modèle d'Ising : $\nu_s \simeq 1.25(3)$ et $\nu_w \simeq 1.24(2)$ en dimensions $D = 2$ [103] et $\nu_s \simeq 0.99(2)$ et $\nu_w \simeq 0.97(5)$ en dimensions $D = 3$ [20].

3.3.2 Aimantation et exposant critique d_f

Dans cette partie, on montre que l'aimantation, $m^i(L) = \mu^i(L)/L^D$, d'un échantillon à son point pseudo-critique n'est défini de manière univoque que dans la limite thermodynamique. On présente nos estimations des exposants critiques d_f pour chaque modèle et on montre que, malgré les effets de tailles finies, ces estimations sont toutes compatibles dans les barres d'erreur.

3.3.2.1 Saut de l'aimantation

Le calcul du moment magnétique d'un échantillon au point pseudo-critique s'est révélé difficile. Pour un échantillon donné, le moment magnétique varie brusquement au point pseudo-critique. Sur quelques échantillons, nous avons effectué des balayages du paramètre de contrôle avec un pas de 10^{-8} plutôt que de 10^{-5} . Le saut n'est pas un artefact numérique et reste inchangé. Dans la suite, nous avons conservé la précision de 10^{-5} de la position du point pseudo-critique. Pour quantifier le saut du moment magnétique au point critique, on introduit

$$\gamma_{err}(L) = \frac{1}{N} \sum_i^N \frac{\mu^i(\theta_c^i(L) - \epsilon, L) - \mu^i(\theta_c^i(L) + \epsilon, L)}{[\mu^i(\theta_c^i(L) - \epsilon, L) + \mu^i(\theta_c^i(L) + \epsilon, L)]/2} \quad (3.27)$$

avec $\epsilon \sim 10^{-5}$ et $\mu^i(\theta, L)$ le moment magnétique de l'échantillon i de taille L pour un paramètre de contrôle θ . $\gamma_{err}(L)$ correspond à la moyenne des sauts relatifs du moment magnétique autour du point pseudo-critique de chaque échantillon. La variation de $\gamma_{err}(L)$ avec L est représentée sur la figure 3.9. L'amplitude des sauts du moment magnétique augmente avec q . Pour le modèle d'Ising, ces variations sont négligeables. Nous n'avons pas d'interprétation à un tel phénomène. La diminution de l'amplitude du saut avec L est salutaire car dans la limite thermodynamique, cet effet devient négligeable. Pour des systèmes de taille finie accessibles numériquement, il faudra choisir une valeur du moment magnétique parmi $\mu^i(\theta_c^i(L) - \epsilon, L)$ et $\mu^i(\theta_c^i(L) + \epsilon, L)$. Il découle de ce choix des estimations différentes de l'exposant d_f pour les petites tailles. Aux grandes tailles, on observe que les exposants tendent vers la même valeur quelle que soit la définition du moment magnétique que l'on choisit. N'ayant aucune raison de se situer préférentiellement dans une phase plutôt que l'autre, le moment magnétique sera mesuré dans la suite au point $\theta_c^i(L) = \frac{\theta_2 + \theta_1}{2}$ avec θ_1 (resp. θ_2) se trouvant dans la phase ferromagnétique (paramagnétique). Cela revient à prendre aléatoirement le moment magnétique dans la phase ferromagnétique ou paramagnétique.

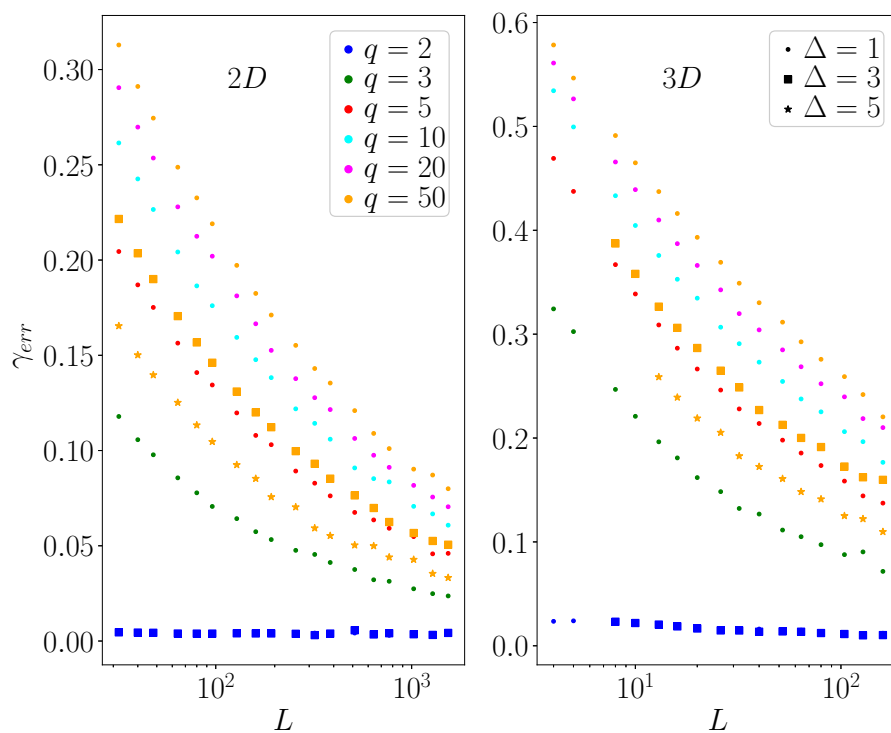


FIGURE 3.9 – Moyenne de l'écart relatif des sauts du moment magnétique des échantillons autour de leur point pseudo-critique $\gamma_{err}(L)$ en fonction de L pour tous les modèles de Potts considérés en dimensions $D = 2$ (à gauche) et $D = 3$ (à droite) avec différents désordres Δ initiaux.

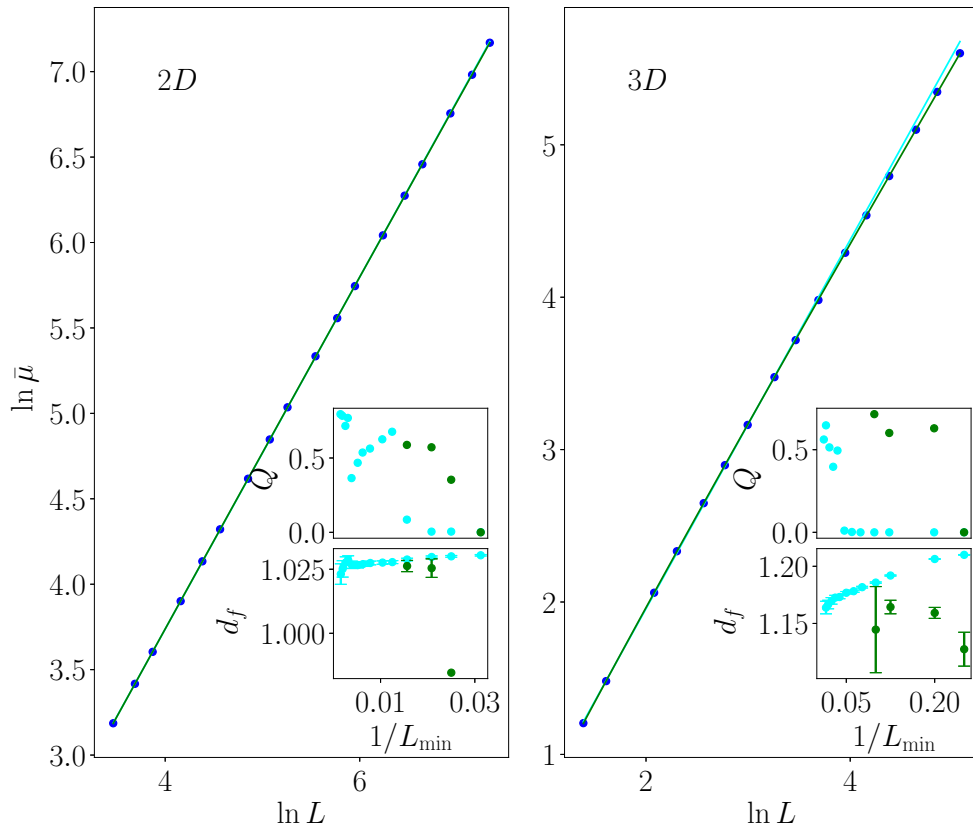


FIGURE 3.10 – Logarithme de la moyenne des moments magnétiques des derniers amas $\ln \bar{\mu}$ du modèle de Potts à $q = 10$ états quantique désordonné en dimensions $2D$ (à gauche) et $3D$ (à droite) en fonction de L . La courbe cyan correspond à un ajustement, dit simple, suivant l'équation (3.28) tandis que la courbe verte à un ajustement, dit complexe, prenant en compte des corrections algébriques suivant l'équation (3.29). Dans les graphiques incrustés sont représentées la qualité de l'ajustement Q et la variation de l'exposant optimal d_f obtenu en procédant à un ajustement simple (points en cyan) et complexe (en vert), en fonction de la plus petite taille L_{\min} considérée dans cet ajustement.

3.3.2.2 Calcul de d_f

Le moment magnétique suit une loi de puissance avec L (2.17). En prenant le logarithme de cette expression, on extrait d_f en procédant à l'ajustement simple

$$\ln \bar{\mu} = d_f \ln L + a \quad (3.28)$$

avec d_f et a deux paramètres libres à optimiser. La variation de $\ln \bar{\mu}$ en fonction de $\ln L$ pour le modèle de Potts à $q = 10$ états est présentée sur la figure 3.10. Les deux courbes principales sont des droites a priori sans courbure. En regardant les incrustations, on observe en dimensions $D = 2$ une légère évolution de d_f (points cyan) avec L_{\min} . En outre, la qualité Q (points cyan) de l'ajustement est proche de 0 pour les L_{\min} les plus faibles. En dimensions $D = 3$, cet effet est plus fort encore. On considère alors un ajustement, dit complexe, de la même forme que celui de $\ln \delta\theta_c(L)$ (3.26)

$$\ln \bar{\mu} = d_f \ln L + a + \ln(1 + bL^{-\omega}) \quad (3.29)$$

avec b et $\omega > 0$, deux nouveaux paramètres à ajuster. Sur la figure 3.10, les exposants d_f issus de cet ajustement complexe correspondent aux points verts. En dimensions $D = 2$ et 3 , les ajustements complexes sur toutes les tailles donnent des qualités Q proches de 0 et ne doivent pas être pris en compte. En enlevant la plus petite taille, dans les deux cas, les exposants d_f estimés correspondent à ceux obtenus par un ajustement simple sur les plus grandes tailles. Comme pour les exposants ν_s et ν_w , on en déduit que seules les plus grandes tailles considérées doivent être utilisées pour estimer l'exposant d_f par un ajustement simple. Les figures pour les autres modèles se trouvent dans l'annexe B.4. Pour comparer les résultats des différents modèles, on juxtapose toutes les courbes de d_f en fonction de L_{\min} sur la figure 3.11. En dimensions $D = 2$ et 3 , les exposants d_f sont incompatibles pour des valeurs faibles de L_{\min} . À mesure que $1/L_{\min} \rightarrow 0$, les exposants deviennent presque tous compatibles avec leurs barres d'erreur. Une exception est le modèle $q = 50$ avec $\Delta = 1$ en dimensions $D = 3$. Il est intéressant de constater qu'à L_{\min} faible, les exposants d_f augmentent avec le nombre d'états q comme γ_{err} . Cela suggère qu'une partie des corrections d'échelle observées pourrait provenir de la discontinuité du moment magnétique aux petites tailles. On notera également que les exposants ν_s et ν_w , qui ne sont pas mesurés à partir du moment magnétique, ne présentent pas de dépendance aussi marquée des corrections avec q . Malgré ces corrections, les tailles considérées sont suffisantes pour observer une convergence de tous les modèles vers une même valeur d_f . On en déduit que, comme ν_s et ν_w , l'exposant d_f est indépendant de q . Dans la limite $1/L_{\min} \rightarrow 0$, on estime finalement les exposants à $d_f^{2D} \simeq 1.022(5)$ et, en dimensions $D = 3$ et en ne tenant compte que des désordres les plus forts pour chaque modèle, $d_f^{3D} \simeq 1.155(7)$. En considérant les moments magnétiques obtenus dans la phase ferromagnétique $\bar{\mu}_f$, i.e. à $\theta_c^i(L) - \epsilon$, et paramagnétique $\bar{\mu}_p$, i.e. à $\theta_c^i(L) + \epsilon$, on a vérifié que pour tous les modèles (en particulier $q = 50$ et $\Delta = 1$ en dimensions $D = 3$), les exposants d_f estimés avec $\bar{\mu}_f$ et $\bar{\mu}_p$ encadrent les estimations d_f^{2D} et d_f^{3D} et convergent vers elles.

3.3.3 Gap d'énergie et exposant critique ψ

Le gap d'énergie entre l'état fondamental et le premier état excité correspond au champ transverse du dernier amas obtenu à la fin de la procédure de SDRG. Tout comme le moment magnétique, le gap d'énergie de certains échantillons varie brusquement au point pseudo-critique. Comme pour le moment magnétique, l'amplitude relative des sauts diminue aux grandes tailles. Étant donnée la loi suivie par le logarithme du gap d'énergie (2.15), on extrait ψ en procédant à l'ajustement, dit simple,

$$\overline{-\ln(\Delta E)}(L) = a + bL^\psi \quad (3.30)$$

avec a, b et ψ trois paramètres à déterminer. À la différence du moment magnétique, cet ajustement ne peut pas être linéarisé à cause de la constante a . L'estimation de ψ est plus difficile comme en témoignent les barres d'erreur importantes sur la figure 3.12. Nous avons tout de même procédé à un ajustement plus complexe en prenant en compte des corrections algébriques

$$\overline{-\ln(\Delta E)}(L) = a + bL^\psi (1 + cL^{-\omega}) \quad (3.31)$$

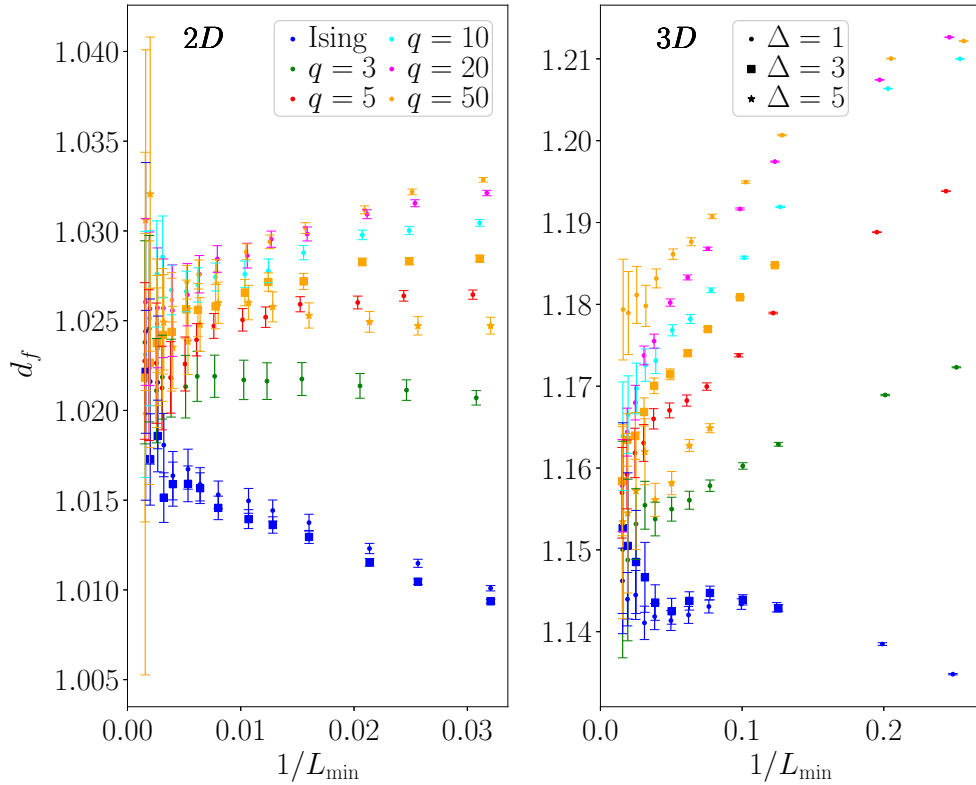


FIGURE 3.11 – Exposant d_f estimé par un ajustement linéaire (3.28) en fonction de la plus petite taille de système considérée L_{\min} pour différents modèles de Potts à q états et différents désordres initiaux Δ . Le nombre minimum de données utilisées pour faire un ajustement a été fixé à cinq sachant qu'il y a deux paramètres à optimiser. Les légendes sont identiques pour les deux figures. Les points de même valeur de L_{\min} ont été légèrement décalés pour améliorer la lisibilité.

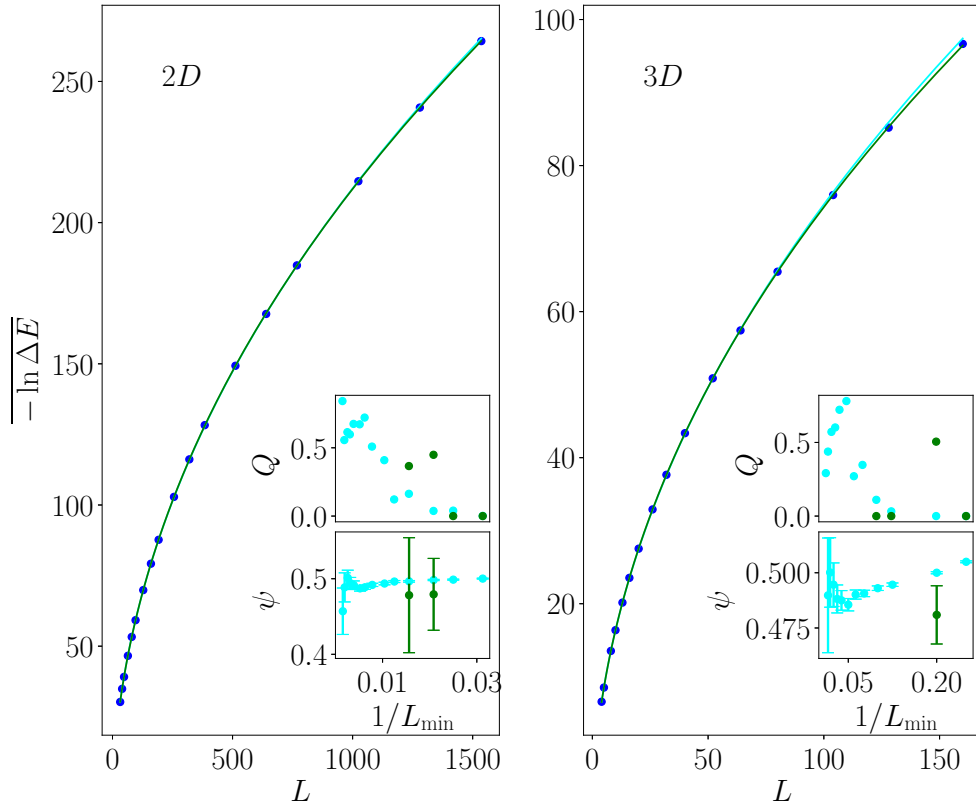


FIGURE 3.12 – Moyenne du logarithme du gap d'énergie des derniers amas $-\overline{\ln \Delta E}$ du modèle de Potts à $q = 10$ états quantique désordonné en dimensions $2D$ (à gauche) et $3D$ (à droite) en fonction de L . La courbe cyan correspond à un ajustement, dit simple, suivant l'équation (3.30) tandis que la courbe verte à un ajustement, dit complexe, prenant en compte des corrections algébriques suivant l'équation (3.31). Dans les graphiques incrustés sont représentés la qualité de l'ajustement Q et l'exposant optimal ψ , obtenu en procédant à un ajustement simple (points en cyan) et complexe (en vert), en fonction de la plus petite taille L_{\min} considérée dans cet ajustement.

avec c et $\omega > 0$ deux paramètres libres. Sans surprise, les ajustements associés sont, ou bien inutilisables ($Q = 0$, paramètres optimisés non cohérents) ou bien avec des incertitudes sur ψ très grandes. Les figures pour les autres modèles se trouvent dans l'annexe B.5.

La figure 3.13 présente le comportement de l'exposant $\psi(L_{\min})$ estimé pour les différents modèles en fonction de L_{\min} . Les incertitudes sur $\psi(L_{\min})$ sont extrêmement larges pour $1/L_{\min} \rightarrow 0$, ce qui s'explique par le peu de données (au minimum six) utilisées pour procéder à un ajustement avec trois paramètres. En dimensions $D = 2$ et $D = 3$, les exposants effectifs varient avec L_{\min} et augmentent, à L_{\min} petit, avec q et Δ comme d_f . Aux grandes tailles et à fort désordre, les exposants sont compatibles dans les barres d'erreur dans la limite $1/L_{\min} \rightarrow 0$. Toutefois les erreurs sont importantes et ne permettent pas d'exclure une faible dépendance de ψ avec q . En dimensions $D = 3$, l'exposant associé au modèle d'Ising est systématiquement inférieur aux autres et n'est compatible avec ceux d'autres modèles que lorsque les incertitudes sont les plus grandes. L'augmentation du désordre initial change très peu la valeur des exposants effectifs obtenus pour le modèle d'Ising et ce dernier présente un saut petit du gap d'énergie autour du point pseudo-critique. L'évolution de ψ avec L_{\min} du modèle d'Ising ne laisse pas non

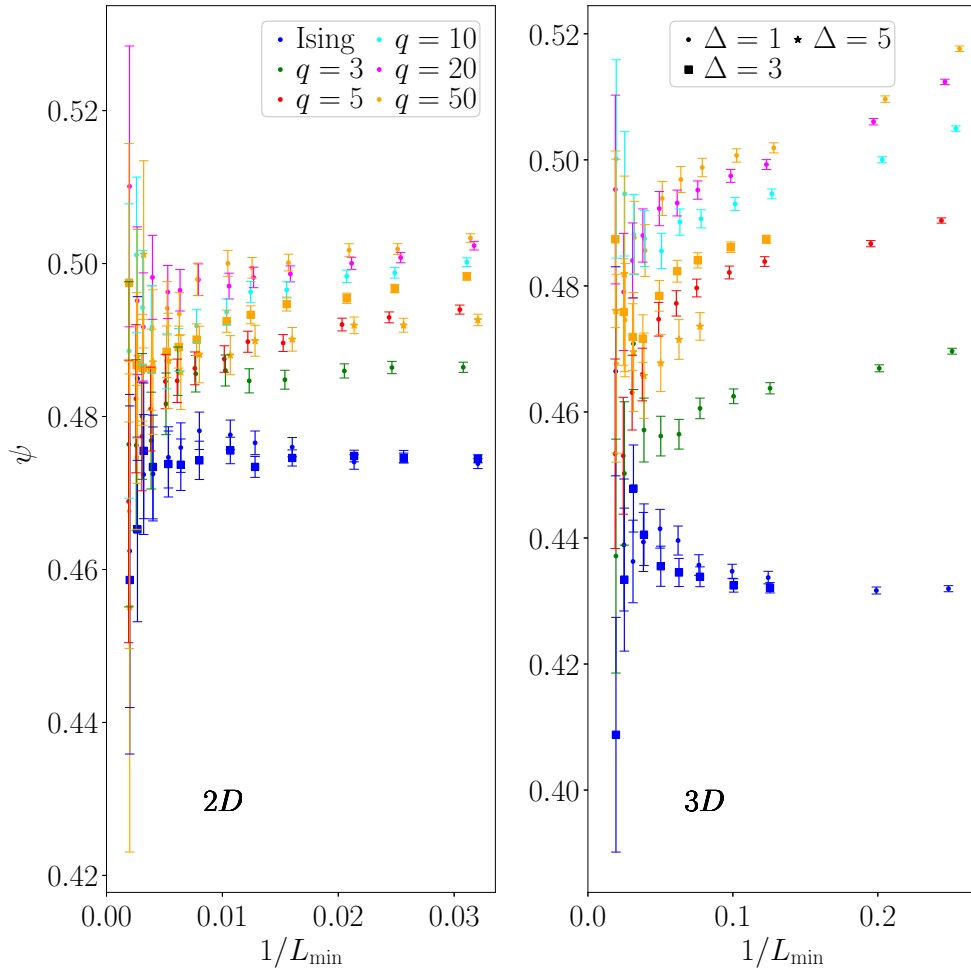


FIGURE 3.13 – Exposant ψ estimé par un ajustement linéaire (3.30) en fonction de la plus petite taille de système considérée L_{\min} pour différents modèles de Potts à q états et différents désordres initiaux Δ . Le nombre minimal de données utilisées pour réaliser un ajustement a été fixé à six sachant qu'il y a trois paramètres à optimiser. Les légendes sont identiques pour les deux figures. Les points de mêmes valeurs de L_{\min} ont été légèrement décalés pour améliorer la lisibilité.

plus supposer un rapprochement avec les autres exposants ψ . Il faudrait considérer des tailles L bien plus grandes pour être véritablement en mesure de trancher. En supposant que ψ est indépendant de q , on estime $\psi \simeq 0.48(2)$ en dimensions $D = 2$ et $\psi \simeq 0.46(4)$ en dimensions $D = 3$. Si on se limite à des désordres d'intensité $\Delta \geq 3$, les modèles d'Ising et de Potts à $q = 50$ état conduisent à des exposants compatibles entre eux dans la limite $1/L_{\min} \rightarrow 0$ et on estime $\psi \simeq 0.478(6)$ en dimensions $D = 2$ et $\psi \simeq 0.455(15)$ en dimensions $D = 3$.

Nous avons également estimé ψ en minimisant (3.21) pour obtenir le meilleur recouvrement des distributions $P_L(u)$ avec $u = L^{-\psi}(\zeta_0 - \ln \Delta E)$. Les paramètres ζ_0 et ψ ainsi obtenus se trouvent dans la table 3.5. Comme on peut le constater sur la figure 3.3 et dans l'annexe B.6, un très bon recouvrement est effectivement obtenu pour les différents modèles considérés confirmant que la dynamique est activée comme attendu à un point fixe de désordre infini. En dimensions $D = 3$, les exposants pour Ising $\psi \simeq 0.436(20)$ et pour les modèles de Potts

$q =$		2		3	5	10
$\Delta =$		1	3	1	1	1
ζ_0	2D	2.4(3)	8.9(3)	3.4(3)	6.5(5)	7.0(5)
	3D	5.0(4)	14.2(6)	5.0(4)	6.7(3)	11.1(3)
ψ	2D	0.478(16)	0.469(15)	0.495(16)	0.493(15)	0.508(16)
	3D	0.434(16)	0.439(16)	0.482(17)	0.498(17)	0.493(16)
$q =$		20		50		
$\Delta =$		1	1	3	5	
ζ_0	2D	13.3(11)	14.0(6)	14.9(9)	12.8(4)	
	3D	14.8(5)	23.4(5)	24.1(3)	29.5(2)	
ψ	2D	0.498(15)	0.511(15)	0.508(16)	0.513(16)	
	3D	0.494(17)	0.477(16)	0.494(16)	0.490(15)	

TABLE 3.5 – Tableau récapitulatif de ζ_0 et de l'exposant ψ , des différents modèles et désordres considérés, estimés par la minimisation de σ (3.21) des distributions $P_L(L^{-\psi}(\zeta_0 - \ln \Delta E))$.

à $q > 3$ états $\psi \simeq 0.49(2)$ sont incompatibles. Il faut cependant considérer ces exposants et leurs incertitudes avec prudence. Ils dépendent de la fonction à minimiser, ici σ (3.21), du seuil arbitraire fixé ($\epsilon = 10^{-2}$), de la méthode pour calculer la matrice covariance et du bon échantillonnage des distributions. De plus, ils ne prennent pas en compte de corrections et n'ont été estimés qu'avec quatre tailles de système.

3.4 Conclusion

La SDRG a été appliquée au modèle de Potts quantique désordonné en dimensions $D = 2, 3$ pour différentes valeurs de q allant de $q = 2$ à $q = 50$. Les propriétés critiques sont gouvernées par un point critique de désordre infini. L'étude des distributions des points pseudo-critiques conduit aux estimations des points critiques θ_c des différents modèles (voir table 3.3 et table 3.4) et de l'exposant de la longueur de corrélation ν . Cet exposant est indépendant de q et prend la valeur $\nu_s \simeq 1.25(3)$ et $\nu_w \simeq 1.24(1)$, selon la méthode utilisée, en dimensions $D = 2$ et $\nu_s \simeq 0.99(4)$ et $\nu_w \simeq 0.99(1)$ en dimensions $D = 3$. L'exposant d_f , obtenu en étudiant la moyenne des moments magnétiques, est également indépendant du nombre d'états q . On estime $d_f^{2D} \simeq 1.022(5)$ et $d_f^{3D} \simeq 1.155(7)$. L'exposant ψ est compatible dans les barres d'erreur mais ces dernières sont relativement importantes. Nos estimations, basées sur la variation sur le comportement de taille finie de la moyenne $-\overline{\ln \Delta E}(L)$, conduisent à $\psi^{2D} = 0.48(2)$ et à $\psi^{3D} = 0.46(4)$. En ne considérant que les modèles d'Ising et de Potts à $q = 50$ états pour lesquels des données pour des désordres d'intensité $\Delta \geq 3$ sont disponibles, on estime $\psi^{2D} = 0.478(6)$ en dimensions $D = 2$ et $\psi^{3D} = 0.455(15)$ en dimensions $D = 3$. Par recouvrement des distributions, nous estimons pour le modèle tridimensionnel $\psi^{3D} \simeq 0.44(2)$ pour $q = 2$ et $\psi^{3D} \simeq 0.49(2)$ pour $q \geq 3$. Dans les deux cas, ces estimations sont toutes compatibles dans les barres d'erreur avec celles obtenues pour le modèle d'Ising : $\psi^{2D} \simeq 0.48(2)$ et $\psi^{3D} \simeq 0.46(2)$ [20, 103]. De plus grandes tailles de systèmes $L > 1536$ en dimensions $D = 2$ et $L > 160$ en dimensions $D = 3$ devront être considérées pour pouvoir véritablement trancher.

Chapitre 4

Modèle d'horloge quantique désordonné en dimensions deux et trois

Pour le modèle de Potts à q états désordonné quantique, un point critique de désordre infini gouverne les propriétés critiques en dimensions $D \leq 3$ indépendamment de la valeur de q . Dans ce chapitre, on considère le modèle d'horloge. Comme pour le modèle de Potts, chaque spin possède q états, mais, l'hamiltonien n'est plus invariant sous toutes les permutations de spin mais seulement sous les permutations circulaires. Les cas $q = 2, 3$ et $q = 4$ sont respectivement équivalents au modèle d'Ising, au modèle de Potts à trois états et à deux modèles d'Ising découplés. On considérera donc uniquement le cas $q > 4$. En dimensions $D = 2$, le modèle classique d'horloge se distingue tout particulièrement du modèle de Potts par la présence de deux transitions de type Berezenskii-Kosterlitz-Thouless (BKT).

Dans un premier temps, on présentera le modèle d'horloge et les propriétés critiques du modèle unidimensionnel désordonné qui, par SDRG, sont connues exactement. Puis, on discutera l'application de la SDRG en dimensions supérieures. La distribution initiale de désordre, qui dictera la convergence vers un point critique de désordre infini, sera plus particulièrement discutée. Enfin, on présentera les propriétés critiques du point de désordre infini.

4.1 Présentation du modèle et état de l'art

On décrit dans un premier temps le modèle d'horloge classique et on présente son comportement critique dans le cas pur et le cas désordonné. On discute ensuite la version quantique de ce modèle et en particulier les propriétés critiques du modèle désordonné unidimensionnel connues exactement par SDRG. On clôt cette partie en examinant l'ordre des transitions en dimensions $D > 1$ par des arguments d'échelle.

4.1.1 Description du modèle classique pur et comportement critique

Le modèle d'horloge à q états est également appelé modèle \mathbb{Z}_q ou encore modèle de Potts vectoriel. Dans le cas classique, chaque spin s_i peut prendre q angles discrets $\theta_i = \frac{2\pi s_i}{q}$ avec

$s_i = 0, 1, \dots, q - 1$. L'énergie d'une configuration est donnée par

$$H_{\text{Clock}}^C = -J \sum_{\langle ij \rangle} \cos(\theta_i - \theta_j) \quad (4.1)$$

où la somme s'étend sur les paires de voisins les plus proches et J correspond au couplage d'interaction. Le modèle d'horloge et le modèle de Potts sont équivalents pour $q = 2$ et $q = 3$. Le modèle d'horloge à quatre états peut s'écrire comme deux modèles d'Ising découplés. Dans la limite $q \rightarrow +\infty$, on obtient le modèle XY dont la symétrie est continue. L'hamiltonien est invariant sous la permutation cyclique $s_i \rightarrow s_i + 1$ modulo q et possède donc une symétrie discrète \mathbb{Z}_q .

En dimensions $D \leq 2$, le théorème de Mermin-Wagner [173-175] stipule qu'une symétrie continue ne peut être spontanément brisée à température finie en présence d'interactions entre proches voisins. Ce théorème s'applique en particulier au modèle XY bidimensionnel. Néanmoins, il a été montré, qu'en dépit de l'absence de brisure spontanée de symétrie, une transition à température finie reste possible. Cette transition est appelée BKT pour Berezinskii [176] et Kosterlitz et Thouless [177, 178]. Elle sépare une phase désordonnée à haute température d'une phase d'ordre à longue distance (QLRO) caractérisée par une décroissance algébrique de la fonction de corrélation $G(r) \sim r^{-\eta(T)}$. La phase QLRO est critique en tout point et, du point de vue du groupe de renormalisation, est décrite par une ligne de points fixes. En l'absence de brisure spontanée de symétrie, l'aimantation n'est pas un paramètre d'ordre de la transition BKT. La réponse de l'énergie libre à une déformation du système, appelée module d'hélicité [179], fournit un paramètre d'ordre [180].

En dimensions $D = 2$, pour $2 \leq q \leq 4$, la transition du modèle d'horloge est du second ordre séparant une phase ferromagnétique d'une phase paramagnétique étant donné l'équivalence du modèle d'horloge avec les modèles d'Ising et de Potts. Pour $q \rightarrow +\infty$, la transition est de type BKT séparant une phase QLRO à basse température d'une phase désordonnée à haute température. Pour les valeurs de q intermédiaires, Elitzur *et al.* [181] ont étudié l'extension discrète du modèle de Villain [182, 183] possédant la même symétrie. Ils en ont déduit l'existence d'un nombre d'état critique $q_c = 5$ tel que pour tout $q \geq q_c$, une phase QLRO se trouve entre la phase ordonnée et celle désordonnée. Les deux transitions sont de type BKT avec des températures de transition T_{c1} et T_{c2} qui dépendent de q . Ces résultats ont été fortement débattus [184-189]. L'existence de deux transitions de type BKT pour $q \geq 5$ a été confirmée par de nombreuses études numériques récentes. Pour le modèle d'horloge à cinq états, ces deux transitions ont été clairement identifiées [180, 190-196] attestant que $q_c = 5$ mais avec des températures de transition T_{c1} et T_{c2} très proches. À six [180, 184, 189, 193-199], sept [196], huit [189, 196], neuf états [196] et douze états [189], deux transitions de type BKT sont également observées avec un écart entre les deux positions T_{c1} et T_{c2} ne cessant de s'accroître principalement par la diminution de T_{c1} . Comme prédit par José *et al.* sur un modèle de Villain [183], les résultats numériques sont en accord avec la valeur de l'exposant η aux deux transitions i.e. $\eta(T_{c2}) = 1/4$ comme pour le modèle XY et $\eta(T_{c1}) = 4/q^2$.

En dimensions $D = 3$, des résultats numériques et analytiques suggèrent que la transition d'un empilement de modèles d'Ising frustrés sur un réseau triangulaire appartient à la même classe d'universalité que le modèle XY [200]. Expérimentalement, cette prédiction a été corroborée par l'étude de CsMnI_3 où l'exposant β est proche de celui du modèle XY [201]. C'est un exemple de modèles qui, malgré une symétrie discrète, possède les mêmes propriétés critiques qu'un modèle de symétrie continue. Par la suite, des études numériques du modèle d'horloge à six états en dimensions $D = 3$ attestent d'une unique transition de phase du second ordre dont les exposants critiques associés sont compatibles avec ceux du modèle XY [202-204] i.e. $\nu \simeq 0.67$ et $\eta \simeq 0.04$ [205-207]. Le même résultat a été obtenu pour le modèle d'horloge à cinq états [208]. Pour les théories de jauge \mathbb{Z}_q sur réseaux tridimensionnels à température nulle, le nombre d'états critique est $q_c = 5$ et le modèle appartient à la classe d'universalité du modèle XY pour $q \geq q_c$ [209].

La dimension $D = 4$ est la dimension critique supérieure des modèles $O(n)$. À $D = 4$ et au-delà, les exposants critiques sont ceux donnés par la théorie champ moyen, à savoir $\nu = 1/2, \gamma = 1$ [210].

4.1.2 Propriétés critiques en présence de désordre

L'introduction de désordre gelé transforme l'hamiltonien (4.1) en

$$H_{\text{Clock}}^C = - \sum_{\langle ij \rangle} J_{ij} \cos(\theta_i - \theta_j) \quad (4.2)$$

avec J_{ij} un couplage aléatoire. En dimensions $D = 2$, le critère de Harris [14] prédit que la classe d'universalité des deux transitions BKT reste inchangée. Pour le modèle XY , des simulations numériques avec une dilution de liaisons [211] et de sites [212-214] sont en accord avec cette prédiction. La température de transition diminue avec l'augmentation du désordre, sans pour autant affecter la nature de la transition, jusqu'au seuil de percolation où la température s'annule. Au delà de ce seuil, il ne peut plus y avoir d'amas percolant et donc d'ordre à grande distance. Pour le modèle d'horloge à six états, les températures des deux transitions BKT diminuent de même que la différence entre ces dernières à mesure que la probabilité de liaison diminue [211]. Les exposants η associés à chacune des transitions restent compatibles avec ceux du modèle pur comme prédit par le critère de Harris. Le même résultat a été obtenu avec une distribution gaussienne des couplages J_{ij} avec une variance faible [215].

En dimensions $D = 3$, le critère de Harris prédit également une non pertinence du désordre. Pour le modèle XY , cette prédiction a été confirmée numériquement pour des couplages $J_{ij} > 0$ distribués uniformément [216].

Une des principales réalisations expérimentales de même classe d'universalité que le modèle XY est la transition superfluide λ de l'hélium 4 [217]. La présence d'un aéro-gel, agissant comme du désordre, peut changer la classe d'universalité de cette transition [218-221] en apparente contradiction avec le critère de Harris. Néanmoins, si le désordre est corrélé à longue portée, alors il échappe au critère de Harris et le désordre peut être pertinent même si $\nu > 2/D$ [68].

Les exposants critiques du modèle XY avec un désordre corrélé coïncident avec ceux de la transition superfluide en présence d'un aerogel [216, 222, 223].

Nous avons considéré uniquement le cas sans frustration i.e. $J_{ij} > 0$. Nous ne discuterons donc pas de l'apparition d'une phase de verre de spin en présence de frustration qui a été abondamment étudiée [224-235].

4.1.3 Modèle d'horloge quantique homogène

Comme pour le modèle de Potts traité dans le chapitre 3, il est possible de construire un hamiltonien quantique effectif du modèle d'horloge dans la limite anisotrope du modèle classique en dimensions $D + 1$. Le modèle d'horloge quantique à q états est défini sur un réseau $\Lambda = (V, E)$, avec V l'ensemble des sites et E l'ensemble des liaisons, par l'hamiltonien [236]

$$H_{Clock}^Q = -J \sum_{(i,j) \in E} (\Omega_i \Omega_j^\dagger + \Omega_j \Omega_i^\dagger) - h \sum_{i \in V} (\Gamma_i + \Gamma_i^\dagger) \quad (4.3)$$

avec $J, h > 0$. Cet hamiltonien agit sur l'espace de Hilbert constitué des états $\bigotimes_{i \in V} |s_i\rangle$ avec $s_i = 0, \dots, q-1$. La première somme s'étend à toutes les paires de sites voisins i, j . Les opérateurs Ω_i et Γ_i ont été, respectivement, introduits dans le chapitre sur le modèle de Potts aux équations (3.13) et (3.14). Étant donné que $\Gamma_i |s_i\rangle = |s_i + 1\rangle$, on constate que ce modèle est symétrique sous une rotation cyclique globale $|s\rangle \rightarrow |s + 1\rangle$ notée \mathbb{Z}_q .

Le diagramme de phase en dimensions D peut être déduit du modèle classique en dimensions $D + 1$. Ainsi, le modèle d'horloge quantique unidimensionnel avec $q > 4$ possède une phase QLRO séparée par deux transitions de type BKT d'une phase désordonnée et d'une phase ordonnée à grande distance. Pour $2 \leq q \leq 4$, la phase QLRO disparaît pour ne laisser qu'une unique transition du second ordre. Ce diagramme de phase a été vérifié numériquement [236, 237]. En dimensions $D = 2$, pour $q > 4$, une unique transition de phase du second ordre appartenant à la classe d'universalité du modèle XY sépare la phase ordonnée de celle désordonnée. Des simulations Monte-Carlo quantique sur les modèles d'horloge à cinq et six états donnent des exposants critiques effectivement compatibles avec ceux du modèle XY [238].

4.1.4 Étude du modèle désordonné unidimensionnel par SDRG

L'introduction de désordre transforme l'hamiltonien (4.3) en

$$H_{Clock}^{Q,D} = - \sum_{(i,j) \in E} J_{ij} (\Omega_i \Omega_j^\dagger + \Omega_j \Omega_i^\dagger) - \sum_{i \in V} h_i (\Gamma_i + \Gamma_i^\dagger). \quad (4.4)$$

avec J_{ij} et h_i des couplages aléatoires supposés ici strictement positifs.

Dans le cas du modèle quantique désordonné unidimensionnel, le critère de Harris [14] prédit un désordre non pertinent car $\nu = +\infty$ dans la phase QLRO. Néanmoins, ce critère n'est valide que pour un désordre faible. Comme pour le modèle de Potts, Senthil et Majumdar ont étudié le modèle d'horloge fortement désordonné par SDRG [17]. Les règles de décimation du plus

grand couplage $\Omega = \max(J_{ij}, h_i)$ sont similaires à celles obtenues pour le modèle de Potts à une constante près.

1. Si le plus grand couplage est un champ transverse $\Omega = h_i$, alors les nouveaux couplages effectifs générés entre ses voisins sont

$$\tilde{J}_{i-1,i+1} = \frac{J_{i-1,i}J_{i,i+1}}{\kappa h_i} \quad (4.5)$$

avec

$$\kappa = \frac{1 - \cos(2\pi/q)}{1 + \delta_{q,2}}. \quad (4.6)$$

2. Si le plus grand couplage est une liaison $\Omega = J_{ij}$, les sites i et j fusionnent en un macro-spin couplé à un champ transverse effectif

$$\tilde{h}_i = \frac{h_i h_j}{\kappa J_{ij}} \quad (4.7)$$

avec le même κ que précédemment.

Pour $q \leq 4$, on retrouve les valeurs de κ du modèle d'Ising ($\kappa = 1$ pour $q = 2$ et $q = 4$ qui correspond à deux chaînes d'Ising découplées), et du modèle de Potts à trois états ($\kappa = 3/2$ pour $q = 3$). Pour $q > 4$, κ est strictement inférieur à 1, contrairement au modèle de Potts pour lequel $\kappa \geq 1$.

Les équations de flot du modèle de Potts (3.18) sont identiques à celles du modèle d'horloge. Senthil et Majumdar ont montré que la constante κ est non pertinente tant qu'elle est finie et ce aussi bien pour κ plus grand que ou plus petit que 1. Les propriétés critiques du modèle d'horloge sont alors décrites par un point fixe de désordre infini indépendant de la valeur de q et identique à celui du modèle d'Ising [17].

Ces résultats ont été obtenus pour un désordre initial fort i.e. pour lequel la procédure de renormalisation est valide. L'influence d'un désordre faible sur le modèle pur est au delà de ce que peut apporter la SDRG. Néanmoins, il est possible de conjecturer le diagramme de phase en fonction de l'intensité du désordre. Pour le modèle d'horloge quantique pur unidimensionnel, le désordre est non-pertinent car l'exposant de la longueur de corrélation diverge dans la phase QLRO du modèle pur. Senthil et Majumdar conjecturent que les deux transitions BKT convergent vers un point tricritique à mesure que le désordre initial augmente. Au delà, il ne reste plus qu'une unique transition du second ordre décrite par un point critique de désordre infini [17].

En utilisant la méthode du groupe de renormalisation de la matrice densité (DMRG) [239], Carlon *et al.* ont étudié l'influence de l'intensité du désordre initial Δ sur les propriétés critiques du point fixe [240]. Pour le modèle d'horloge quantique unidimensionnel avec $q > 4$, ils obtiennent trois régimes distincts en fonction de Δ . Pour un désordre faible, les propriétés critiques sont celles du point fixe pur, caractérisé par $z = 1$, en accord avec le critère de Harris. Lorsque Δ est fort, le point fixe est celui de désordre infini avec $z = +\infty$. Entre ces deux extrêmes, un régime intermédiaire dans lequel les exposants critiques dépendent du désordre

est observé.

L'intensité du désordre initial est un paramètre important à prendre en compte si l'on veut décrire le comportement critique du modèle d'horloge quantique unidimensionnel désordonné. Le reste de ce chapitre est dédié à décrire le comportement critique en dimensions deux et trois qui n'avait pas encore été étudié jusqu'à présent.

4.1.5 Comportement critique en dimensions $D = 2, 3$

En dimensions $D = 2$, le modèle d'horloge quantique donne lieu à une unique transition de phase du second ordre appartenant à la classe d'universalité du modèle XY . L'exposant de la longueur de corrélation étant estimé à $\nu \simeq 0.67$ [205-207], le critère de Harris indique que le désordre est pertinent. En dimensions $D = 3$, l'exposant de la longueur de corrélation est égal à $\nu = 1/2$, le critère de Harris prédit également un désordre pertinent alors qu'il est marginal pour le modèle classique en dimensions $D = 4$. De la similitude des règles de décimation des modèles de Potts et d'horloge, on peut supposer que, comme dans le cas unidimensionnel, les propriétés critiques en désordre fort seront gouvernées par un point fixe de désordre infini en dimensions $D = 2$ et $D = 3$. Et, comme dans le cas du modèle de Potts quantique désordonné unidimensionnel, on peut conjecturer que la transition sera décrite par ce point fixe même en désordre faible en dimensions $D = 2$ et $D = 3$ puisque le désordre est pertinent dans les deux cas.

4.2 Application de la SDRG au modèle d'horloge en dimensions $D = 2, 3$

L'algorithme présenté au chapitre 2 a été utilisé pour étudier le modèle d'horloge quantique désordonné en dimensions $D = 2$ et $D = 3$. Numériquement, pour atteindre les distributions caractéristiques d'un point fixe de désordre infini, un désordre initial fort s'avère nécessaire. Dans un premier temps, on estime un tel désordre minimal Δ_c en fonction du nombre d'états q . Dans un second temps, on précise les paramètres, les tailles de système et le nombre d'échantillons utilisés.

4.2.1 Chaos du flot de RG et désordre minimal

Pour montrer l'existence d'un point critique de désordre infini, on peut vérifier que la distribution des couplages devient de plus en plus large à mesure que le nombre d'itérations du groupe de renormalisation augmente. En dimensions $D = 2$, il a été observé numériquement que la distribution des champs transverse du modèle d'Ising désordonné conserve, comme dans le cas unidimensionnel, une forme exponentielle [98]

$$R(\beta; \Gamma) \sim R_0(\Gamma)e^{-R_0(\Gamma)\beta} \quad (4.8)$$

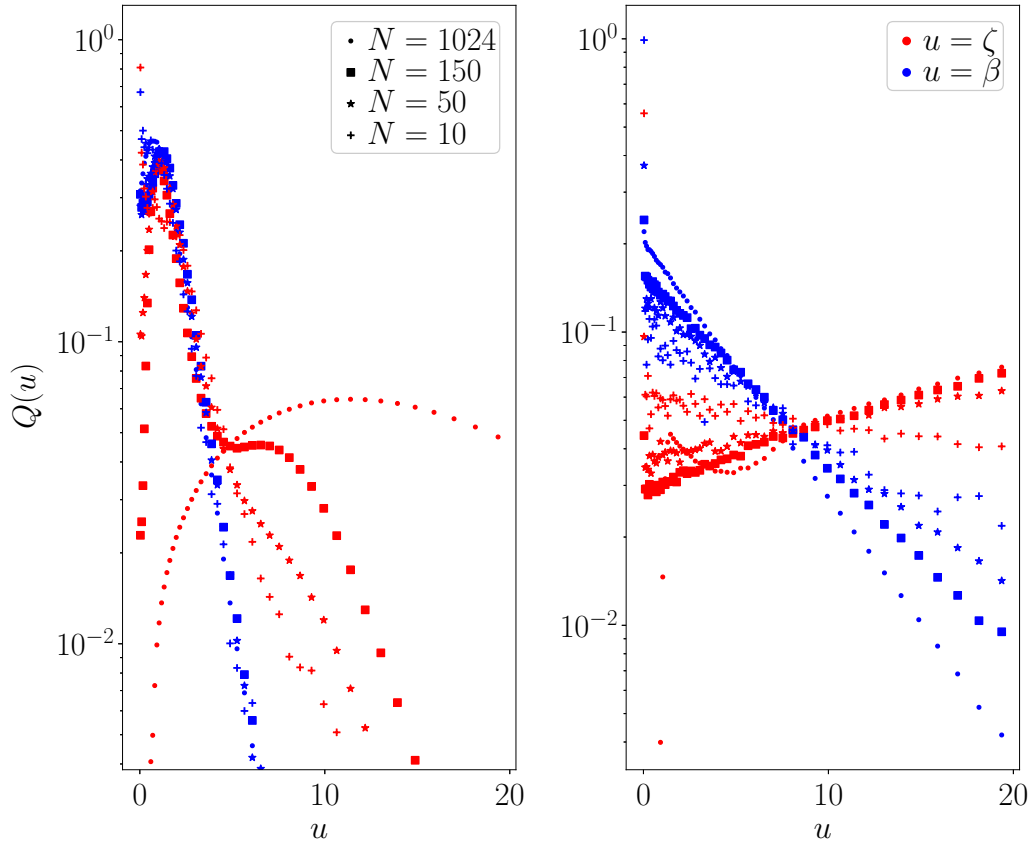


FIGURE 4.1 – Évolution des distributions de probabilité des champs transverses $Q(u) = R(\beta)$ (en bleu) et des couplages $Q(u) = P(\zeta)$ (en rouge) au cours de la renormalisation pour plusieurs nombre de spins restants N du modèle d'horloge à $q = 10$ états quantique bidimensionnel avec un désordre initial $\Delta = 1$ (à gauche) et $\Delta = 5$ (à droite) et $h_{\max} = 5$ (voir équation (4.10)). Ces distributions ont été obtenues en moyennant sur 1000 échantillons de taille $L = 64$. Ce nombre d'échantillons est suffisant pour observer qualitativement l'influence du désordre initial. Pour la distribution $P(\zeta)$, un seuil $\zeta_c = 20$ a été fixé afin d'éviter de générer les couplages les plus faibles.

avec $R_0(\Gamma) \equiv R(\beta = 0; \Gamma)$ et les variables logarithmiques $\beta = -\ln h/\Omega$ et $\Gamma = \ln \Omega_0/\Omega$. Ω_0 est une échelle d'énergie reliée à l'hamiltonien initial de telle sorte que $\Gamma \geq 0$. La largeur de la distribution est donnée par $1/R_0(\Gamma)$. À proximité d'un point critique de désordre infini, $1/R_0(\Gamma)$ augmente lorsque Ω (resp. Γ) tend vers 0 (resp. l'infini). En procédant au changement de variable $\zeta_{sc} = R_0(\Gamma)\zeta$ avec $\zeta = -\ln J/\Omega$, Motrunich *et al.* constatent que la distribution des couplages ζ_{sc} possède une dérivée positive ($dP_{sc}/d\zeta_{sc} > 0$) au voisinage du point critique [98] alors que dans le cas unidimensionnel, la distribution au point fixe est exactement $P_{sc}(\zeta_{sc}) = \exp(-\zeta_{sc})$ [16].

On a représenté sur la figure 4.1 l'évolution des distributions $R(\beta)$ (en bleu) et $P(\zeta)$ (en rouge) pour plusieurs nombres de spins N restants après décimation pour deux désordres initiaux, l'un faible $\Delta = 1$ (à gauche) et l'autre plus fort $\Delta = 5$ (à droite). Comme pour le modèle

de Potts, Δ intervient dans les distributions initiales des couplages¹

$$P(J_{ij}) = \frac{J_{ij}^{1/\Delta-1}}{\Delta}, \quad (0 < J_{ij} < 1) \quad (4.9)$$

$$R(h_i) = \frac{h_i^{1/\Delta-1}}{\Delta h_{\max}}, \quad (0 < h_i < h_{\max}). \quad (4.10)$$

$\Delta \rightarrow +\infty$ correspond aux distributions attendues au point fixe de désordre infini dans le cas unidimensionnel. Pour un système fini, un désordre initial Δ plus grand permet d'arriver plus rapidement au voisinage du point fixe s'il est de désordre infini. Au cours de la renormalisation, les distributions obtenues avec un désordre initial $\Delta = 5$ sont similaires à celles observées pour le modèle d'Ising quantique désordonné bidimensionnel [98]. L'estimation de la position du point critique, via l'étude des variations des distributions avec le nombre de spins restant N , nécessite une description plus qualitative de l'évolution avec h_{\max} comme cela a été fait par Motrunich *et al.* [98]. Le cas $\Delta = 1$ est radicalement différent. Les distributions des champs $R(\beta)$ et $P(\zeta)$ restent piquées. Il en découle que, lors de la décimation d'un champ h_i , la probabilité qu'il soit couplé à au moins un de ses voisins par un couplage J_{ij} proche de Ω n'est pas négligeable. Le calcul d'un couplage effectif au second ordre en perturbation n'est alors plus justifié. On ne peut pas pour autant en déduire que le comportement critique pour $\Delta = 1$ n'est pas gouverné par un point fixe de désordre infini. Les tailles numériquement accessibles restent petites. En outre, il n'est pas exclu qu'en tenant compte des corrections aux ordres supérieurs, le système rejoigne le point fixe de désordre infini.

Au second ordre en perturbation, les couplages effectifs (4.5) et (4.7) peuvent être plus grands que les couplages décimés lorsque $\kappa < 1$ i.e. lorsque $q > 4$. Nous avons remarqué que cela conduit à une chaotité du flot de renormalisation. La présence de chaos dans le flot du groupe de renormalisation n'est pas atypique. Des trajectoires chaotiques, signature d'une phase de verre de spins [241, 242], ont été observées lors de la renormalisation exacte d'un modèle d'Ising frustré sur réseau hiérarchique [243-245]. Le même comportement chaotique apparaît lors d'une renormalisation de Migdal-Kadanoff [246, 247] sur un modèle de verre de spins d'Ising tridimensionnel [248]. Les différents scénarios pouvant survenir à la fin du flot de renormalisation, en particulier l'existence possible de cycles aperiodiques reliées à un comportement chaotique, ont été étudiés [249-251]. Nous insistons à nouveau sur le fait que, contrairement aux références citées précédemment, le chaos observé par SDRG du modèle d'horloge n'est pas la signature d'une physique différente mais uniquement de l'impossibilité de se limiter à un développement perturbatif au second ordre pour le calcul des couplages effectifs. Le comportement chaotique n'est d'ailleurs observé que pour un désordre initial faible, domaine dans lequel la SDRG ne devrait pas être utilisée. Il augmente avec le nombre d'états q puisque les couplages renormalisés sont proportionnels à $1/[1 - \cos(2\pi/q)]$.

1. Pour le modèle d'horloge, ces distributions ont été générées en élevant à la puissance Δ , une variable aléatoire provenant d'une distribution uniforme $U(0, h_{\max})$. Les champs transverses sont compris entre $[0, h_{\max}^\Delta]$. C'est pourquoi l'influence du désordre initial Δ n'est pas strictement équivalent à celui utilisé pour le modèle de Potts.

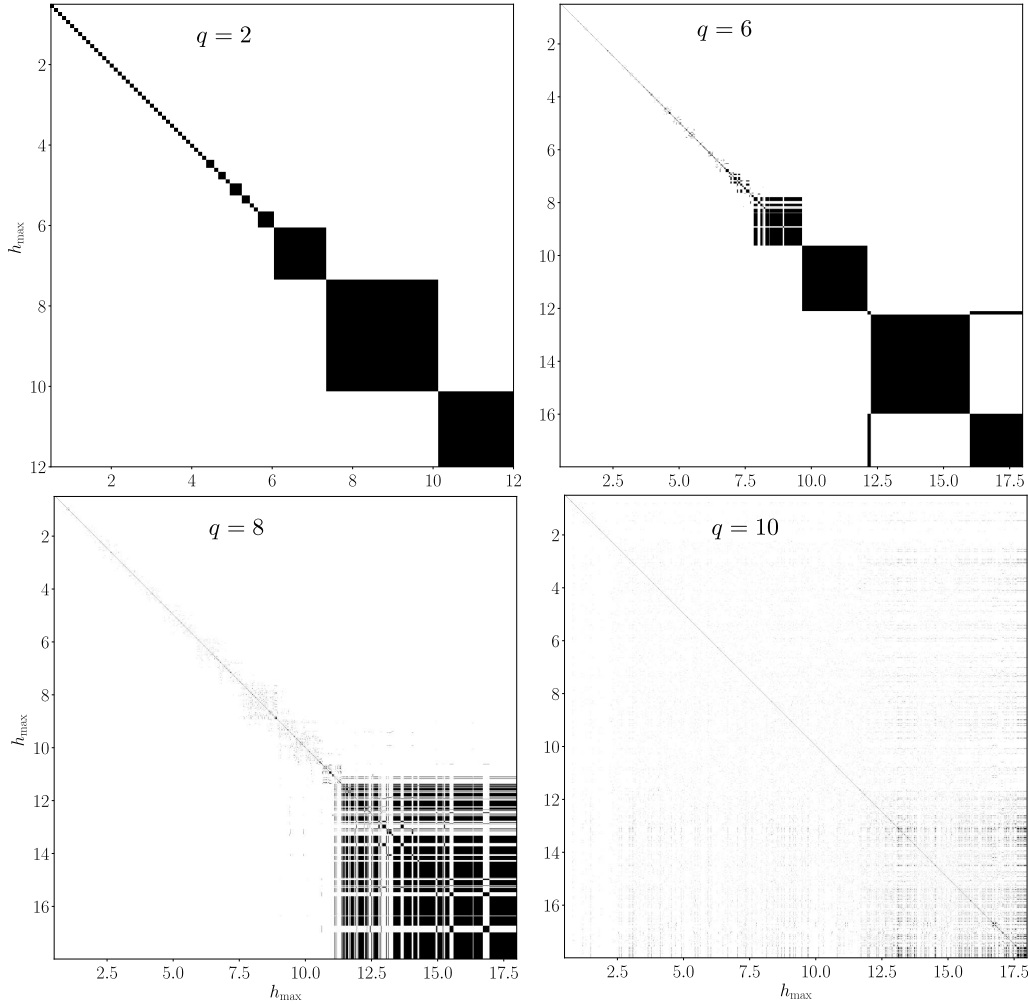


FIGURE 4.2 – Figure de récurrence d'un modèle d'horloge quantique désordonné bidimensionnel pour différents états q avec $L = 32$ et un désordre initial $\Delta = 1$.

La chaoticité du flot de renormalisation est clairement mise en évidence sur une figure de récurrence [252]. Pour un système avec des couplages J_{ij} initiaux fixés, nous avons appliqué n_h procédures de SDRG indépendantes pour différentes valeurs de $h_{\max} = h_1, \dots, h_n$, avec $h_1 < \dots < h_n$. La figure de récurrence est une matrice $n_h \times n_h$ dont les éléments sont égaux à 1 si les moments magnétiques du dernier amas sont égaux ($\mu_i = \mu_j$) et 0 autrement. Le système est chaotique si, sur une même ligne i se trouvent deux éléments non nuls $c_{i,k} = c_{i,l} = 1$ et qu'il existe $u \in]k, l[$ tel que $c_{i,u} = 0$, signe que la variation du moment magnétique avec h_{\max} est non monotone. Une telle figure de récurrence est représentée sur la figure 4.2 pour le modèle d'horloge quantique désordonné bidimensionnel pour différents nombres d'états q avec $L = 32$ et un désordre initial $\Delta = 1$. Le cas $q = 2$ correspond au modèle d'Ising pour lequel la décroissance du moment magnétique est monotone avec l'augmentation de h_{\max} . À mesure que le nombre d'états q augmente, le moment magnétique est non monotone sur des intervalles de plus en plus grands.

On mesure la déviation au comportement monotone en introduisant

$$\chi \equiv \frac{1}{n_h} \sum_{i=1}^{n_h} \frac{P_{vl}(i) - B(i)}{P_{vl}(i)} \quad (4.11)$$

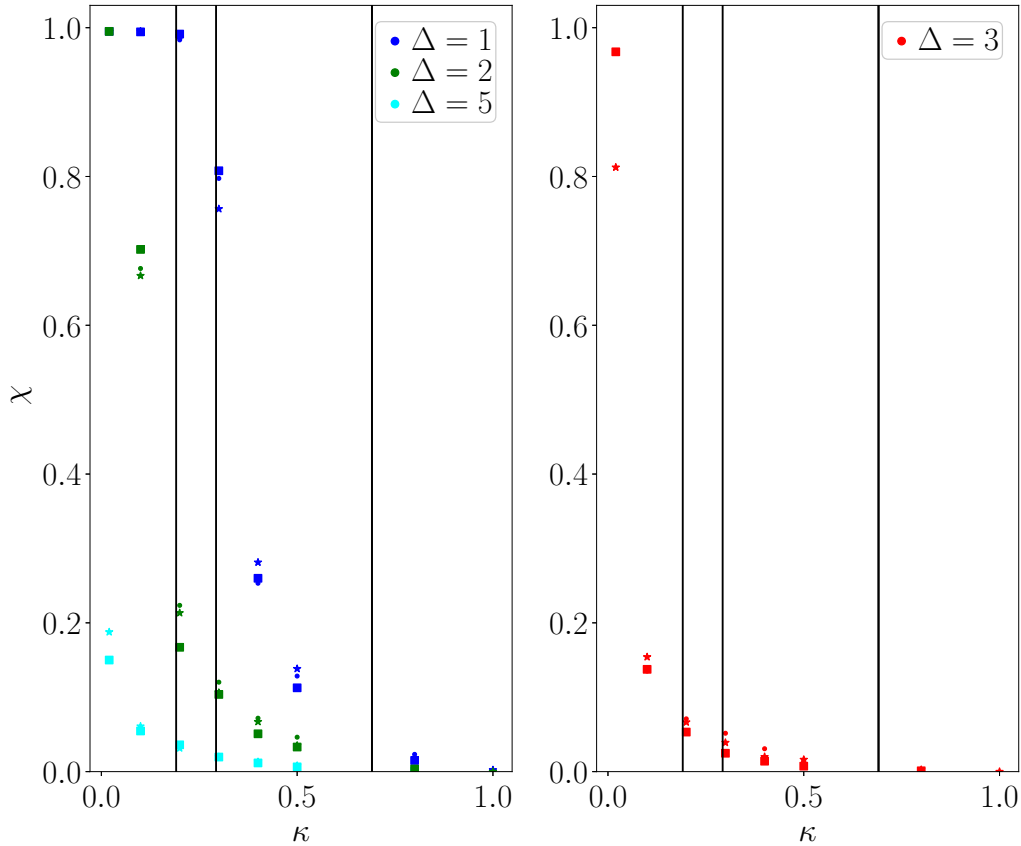


FIGURE 4.3 – χ en fonction de κ en dimensions $D = 2$ (à gauche) et $D = 3$ (à droite). Les traits verticaux sont des repères visuels correspondants aux états $q = 5, 8, 10$ et aux $\kappa \sim 0.7, 0.3, 0.2$ associés. Les symboles rond, carré, étoile indiquent des tailles de systèmes différents $L = \{32, 64, 128\}$ en dimensions $D = 2$ et $L = \{10, 20, 30\}$ en dimensions $D = 3$. Pour chaque point, 150 figures de récurrence ont été moyennées.

avec $P_{vl}(i)$ le nombre d'éléments de matrice c_{ij} non nuls sur la ligne verticale i , $B(i)$ le nombre d'éléments non nuls consécutifs incluant c_{ii} . Dans le cas monotone $P_{vl}(i) = B(i)$, donc $\chi = 0$. À l'inverse, pour un système parfaitement chaotique $B(i) = 1$, donc $\chi \simeq 1$. Sur la figure 4.3, une transition dépendant du désordre initial Δ entre un comportement monotone et chaotique est observée en fonction de κ et donc du nombre d'états q . On peut, qualitativement, en déduire qu'en dimensions $D = 2$ un désordre $\Delta = 1$ (resp. $\Delta = 2$ et $\Delta = 5$) ne peut être employé que pour un modèle d'horloge avec $\kappa > 0.5$ ($\kappa > 0.3$, $\kappa > 0.02$) et, qu'en dimensions $D = 3$, un désordre initial $\Delta = 3$ peut être utilisé pour $\kappa > 0.1$. Ces estimations ne sont pas à prendre au sens strict car le calcul de χ dépend de l'intervalle $[h_1, h_n]$ choisi et qu'une valeur de χ non nulle peut être l'indicateur de variations très localisées du moment magnétique comme dans le cas $q = 6$ de la figure 4.2.

4.2.2 Détail des simulations

A la différence du modèle de Potts, il n'est plus possible de décimer les minima locaux suivant l'algorithme de la sous-section 2.1.3.2. Le fait qu'un nouveau couplage puisse être plus grand qu'un couplage initial ne permet plus de garantir qu'un minimum local le restera lorsque

	2D						3D											
q	5			8			10			5			8			10		
Δ	1	2	3	2	3		5	7		3	8		5	8		5	8	

TABLE 4.1 – Désordres initiaux Δ utilisés pour chaque nombre d'états q en dimensions deux et trois.

d'autres couplages sont décimés. Nous avons donc décidé de retourner à la décimation du minimum global. Une difficulté numérique majeure est l'existence dans le graphe d'arêtes de poids négatif qui ne peuvent pas être supprimées. En effet, lors de l'inactivation d'un noeud, la condition pour que le poids d'une arête entre un noeud inactif et un noeud actif soit positif implique que $\kappa \geq 1$ comme discuté dans la sous-section 2.1.3.1. Il en résulte un temps de calcul nettement supérieur car le premier noeud actif trouvé par l'algorithme de Dijkstra n'est plus nécessairement celui avec la distance la plus petite si dans le graphe il existe des arêtes avec un poids négatif. Des détails concernant la possibilité d'utiliser l'algorithme de Dijkstra avec des poids négatifs et l'optimisation permettant d'obtenir efficacement le minimum global sont présentés dans l'annexe A.2. À cause de ces complications, les plus grandes tailles utilisées pour le modèle d'horloge sont inférieures à celles considérées pour le modèle de Potts.

Nous avons choisi d'étudier trois modèles d'horloge $q = 5, 8, 10$ en dimensions $D = 2$ et $D = 3$. À la lumière de la sous-section précédente, nous avons utilisé différents désordres initiaux Δ en fonction du nombre d'états q et de la dimension (table 4.1). Les valeurs de Δ interviennent dans les distributions initiales employées (4.10). Les différentes tailles de système L considérées avec le nombre minimal d'échantillons utilisés associé sont données dans la table 4.2. Le nombre d'échantillons a été déterminé, comme au chapitre précédent, de manière à ce que les erreurs relatives des moyennes soient inférieures à 1%. La plus grande erreur (0.5%) est observée pour le modèle d'horloge à huit états en dimensions $D = 2$ pour $L = 768$ avec un désordre initial $\Delta = 3$. Les fluctuations de $\bar{\mu}$ pour ce modèle pour différentes tailles L sont représentées sur la figure 4.4. Des événements rares, ayant une grande contribution, ne semblent plus influencer sur le plateau atteint par la moyenne du moment magnétique. Pour les estimations des exposants critiques qui suivront, l'erreur associée au nombre fini d'échantillons sera plus faible que l'erreur venant des interpolations.

4.2.3 Mise en évidence d'un point fixe de désordre infini

On montre ici que les désordres initiaux choisis conduisent à une convergence du flot de renormalisation vers un point fixe de désordre infini. Nous suivons le même cheminement que pour le modèle de Potts dans la sous-section 3.2.2.

Sur la figure 4.5, la variance réduite $R_\mu(L) = \frac{\mu^i(L)^2 - \mu^i(L)^2}{\mu^i(L)^2}$ des moments magnétiques $\mu^i(L)$ obtenus aux points pseudo-critiques est représentée en fonction de L . En dimensions $D = 2$, l'augmentation du désordre initial Δ tend à rapprocher les courbes du modèle d'horloge à $q = 5$ états des modèles d'Ising ($q = 2$) et du modèle de Potts à trois états. On peut supposer qu'à de plus grandes tailles ou avec un désordre initial plus fort, la variance réduite $R_\mu(L)$ de tous

2D									
$L =$	32	40	48	64	80	96	128	160	192
$n_{\text{échantillons}}^{\min}$	6×10^5	4×10^5	2×10^5	1×10^5	1×10^5	6×10^4	6×10^4	6×10^4	4×10^4
$L =$	256	320	384	512	640	768	1024	1280	1536
$n_{\text{échantillons}}^{\min}$	3×10^4	2×10^4	3×10^4	2×10^4	1×10^4	8×10^3	5×10^4	4×10^4	6×10^3

3D									
$L =$	4	5	6	7	8	10	12	14	
$n_{\text{échantillons}}^{\min}$	1×10^6	1×10^6	1×10^6	9×10^5	6×10^5	8×10^5	4×10^5	3×10^5	
$L =$	15	16	20	25	30	35	40	50	
$n_{\text{échantillons}}^{\min}$	2×10^5	3×10^5	1×10^5	2×10^5	1×10^5	7×10^4	5×10^4	3×10^4	
$L =$	70	80	90	100	110	120			
$n_{\text{échantillons}}^{\min}$	10×10^3	1×10^4	9×10^3	3×10^4	2×10^4	1×10^4			

TABLE 4.2 – Nombre minimal d'échantillons considérés pour tous les modèles d'horloge pour différentes tailles L en dimensions $D = 2$ et $D = 3$. En rouge, des tailles supplémentaires considérées pour le modèle d'horloge à $q = 10$ états avec un désordre initial $\Delta = 7$. En bleu, des tailles supplémentaires considérées pour les modèles d'horloge à $q = 5$ états avec $\Delta = 8$, $q = 8$ états avec $\Delta = 5$ et $q = 10$ états avec $\Delta = 5, 8$. En vert, des tailles supplémentaires considérées pour les modèles d'horloge à $q = 5$ et 10 états avec un désordre initial $\Delta = 8$.

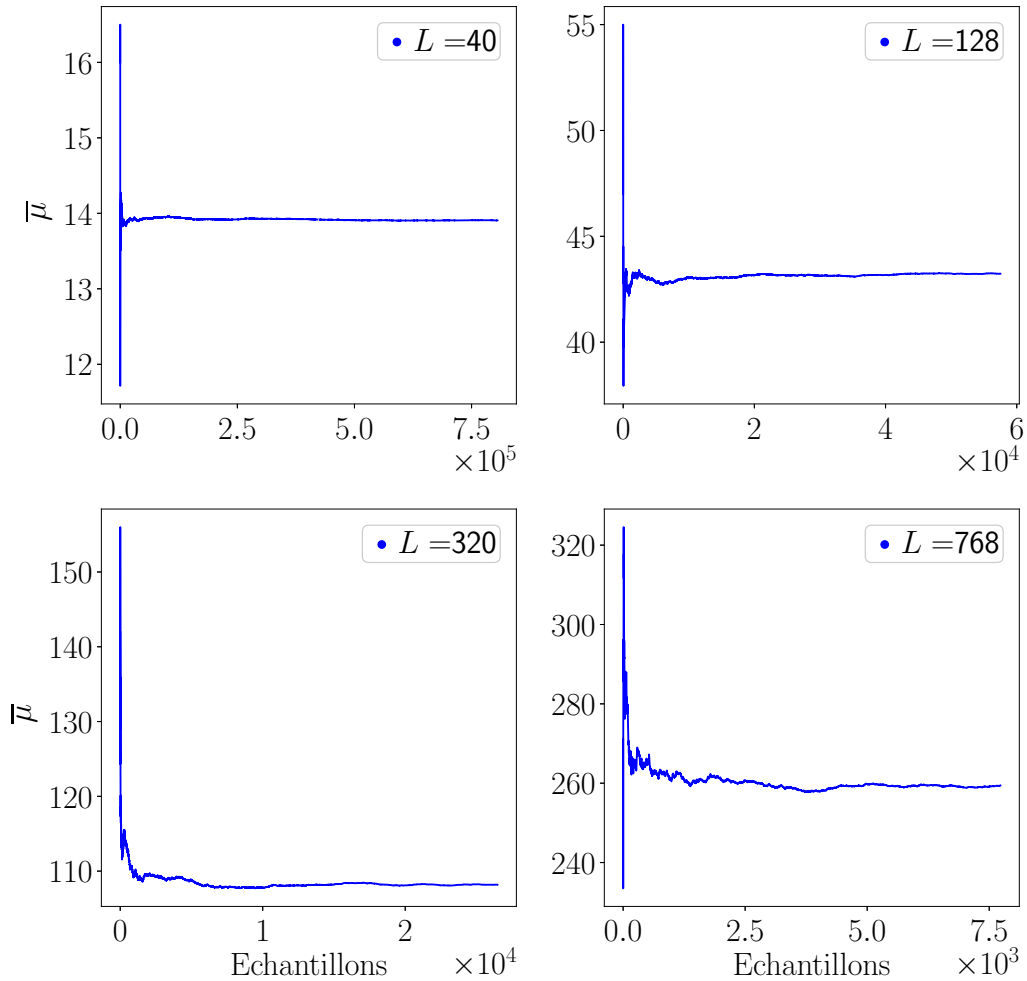


FIGURE 4.4 – Moyenne du moment magnétique $\bar{\mu}$ du dernier amas, pour le modèle d'horloge en dimensions $D = 2$ avec $q = 8$ et un désordre initial $\Delta = 3$, en fonction du nombre d'échantillons de désordre pour quatre tailles de système L .

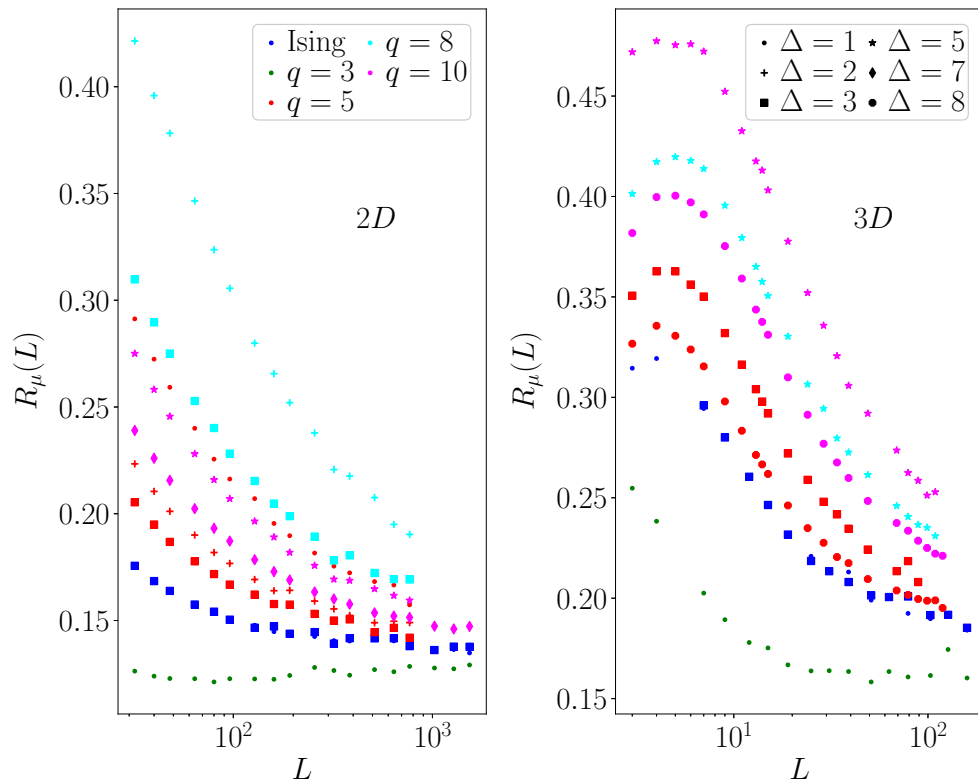


FIGURE 4.5 – Variance réduite $R_\mu(L)$ du moment magnétique de plusieurs modèles d'horloge à q états pour différents désordres initiaux Δ en fonction de la taille du système L en dimensions $D = 2$ (à gauche) et $D = 3$ (à droite).

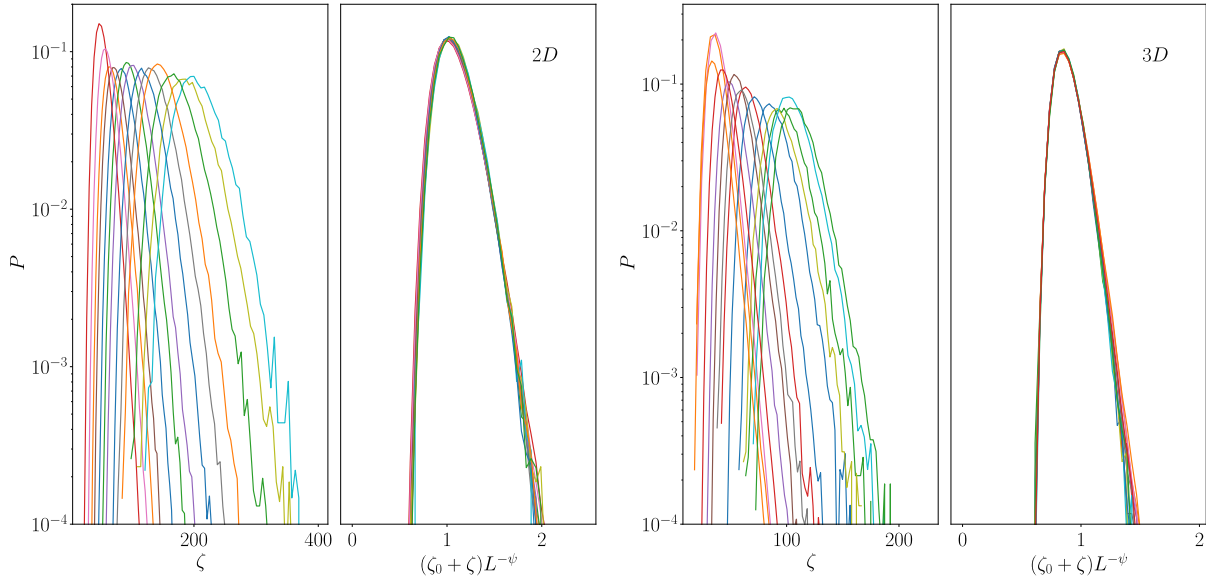


FIGURE 4.6 – Distributions $P_L(\zeta)$, avec $\zeta = -\ln \Delta E$ et ΔE le gap d'énergie entre l'état fondamental et le premier niveau excité, du modèle d'horloge à $q = 10$ états avec un désordre initial $\Delta = 5$ et distributions $P_L((\zeta_0 + \zeta)L^{-\psi})$ avec ζ_0 et ψ des coefficients choisis pour obtenir le meilleur recouvrement des courbes entre les différentes tailles de systèmes L . Les courbes de différentes couleur indiquent des tailles L différentes croissantes de gauche à droite pour $P(\zeta)$; $L \in [48, 768]$ en dimensions $D = 2$ et $L \in [14, 110]$ en dimensions $D = 3$. Les couples de paramètres (ζ_0, ψ) utilisés se trouvent dans la table 4.5.

les modèles considérés converge vers une valeur non nulle indépendante du nombre d'états q , aussi bien en dimensions $D = 2$ que $D = 3$. Le moment magnétique est non auto-moyennant comme attendu à un point fixe de désordre infini.

Sur la figure 4.6, les distributions de probabilité $P_L(\zeta)$ avec $\zeta = -\ln \Delta E$ sont représentées pour plusieurs tailles de système L , en dimensions $D = 2$ et $D = 3$ pour le modèle d'horloge avec $q = 10$ états et un désordre initial $\Delta = 5$. Les distributions sont de plus en plus larges avec la taille du système L . En changeant l'échelle i.e. en travaillant avec les variables $\tilde{\zeta} = (\zeta_0 + \zeta)L^{-\psi}$ avec ζ_0, ψ des coefficients à ajuster, un recouvrement des distributions $\tilde{P}_L(\tilde{\zeta})$ peut être obtenu pour un couple (ζ_0, ψ) donné. Ce comportement est celui attendu pour une dynamique activée caractérisée par l'exposant ψ .

Nous avons également considéré les modèles d'horloge à $q = 8$ et $q = 10$ états avec un désordre initial $\Delta = 3$. Bien que la déviation χ soit faible (figure 4.3), les distributions reliées au gap de l'énergie $P(\zeta)$ ne correspondent pas à celles attendues d'une dynamique activée caractérisée par l'exposant ψ . Le désordre initial $\Delta = 3$ est donc trop faible pour que les distributions de probabilité des gaps d'énergie des modèles d'horloge à huit et dix états soient celles attendues au point critique de désordre infini.

4.3 Étude des propriétés critiques

Nous suivons la même procédure que celle employée pour déterminer les propriétés critiques du modèle de Potts (voir section 3.3). Nous ne redétaillerons pas les méthodes déjà employées au chapitre précédent et nous nous contenterons d'y faire référence. On commence par étudier les distributions des points pseudo-critiques pour estimer l'exposant ν puis les distributions du moment magnétique du dernier amas pour estimer l'exposant d_f et enfin les distributions du champ transverse de ce même amas pour estimer l'exposant ψ .

4.3.1 Position du point critique et exposant critique ν

Le paramètre de contrôle de la transition est défini comme $\theta_c^i(L) \equiv \ln h_c^i(L)$ où $h_c^i(L)$ est la valeur de h_{\max} de la distribution initiale $R(h_i)$ (4.10) au point pseudo-critique du i -ème échantillon.

L'exposant ν est estimé de trois manières distinctes : par l'étude des distributions des points pseudo-critiques, par la comportement de taille finie de leur valeur moyenne et de leurs fluctuations.

4.3.1.1 Comportement d'échelle des distributions des points pseudo-critiques

Conformément à (1.35), on s'attend à ce que les distributions de probabilité P_L des variables d'échelle $u = L^{1/\nu}|\theta_c^i(L) - \theta_c|/\theta_c$ soient indépendantes de la taille du système L . Nous avons déterminé les paramètres ν et θ_c en minimisant la fonction de coût (3.21) en ne considérant que quatre tailles L pour limiter le temps de calcul. En dimensions $D = 2$, nous avons choisi les tailles $L = \{64, 160, 384, 768\}$, et en dimensions $D = 3$, les tailles $L = \{20, 40, 70, 90\}$ ou $L = \{20, 40, 80, 110\}$ en fonction des plus grandes tailles disponibles.

Sur la figure 3.4 sont représentées les distributions $P_L(\theta_c^i)$ et $P_L(u)$ obtenues pour le modèle d'horloge à dix états en dimensions $D = 2$ (à gauche) et $D = 3$ (à droite). Un recouvrement très satisfaisant est observé. Pour les autres modèles considérés, des recouvrements d'une qualité équivalente sont obtenus (voir l'annexe C.1). Les paramètres ν et θ_c estimés en minimisant σ se trouvent dans la table 4.3. L'incertitude sur l'exposant ν semble, comme c'est le cas pour le modèle de Potts, toutefois surestimée. Lorsque ν est choisi à la limite des barres d'erreur, aucune valeur de θ_c ne conduit à un recouvrement satisfaisant visuellement. Une incertitude deux à trois fois inférieure, nous semble plus vraisemblable.

4.3.1.2 Comportement d'échelle de la position moyenne des points pseudo-critiques

On procède à l'ajustement simple (3.22) du comportement de taille finie des valeurs moyennes des points pseudo-critiques $\bar{\theta}_c^i(L) \equiv \theta_c(L)$ (1.35), en considérant trois paramètres libres θ_c , a et ν_s et à l'ajustement complexe (3.22) en ajoutant deux paramètres libres b et $\omega > 0$ pour prendre en compte des corrections d'échelle.

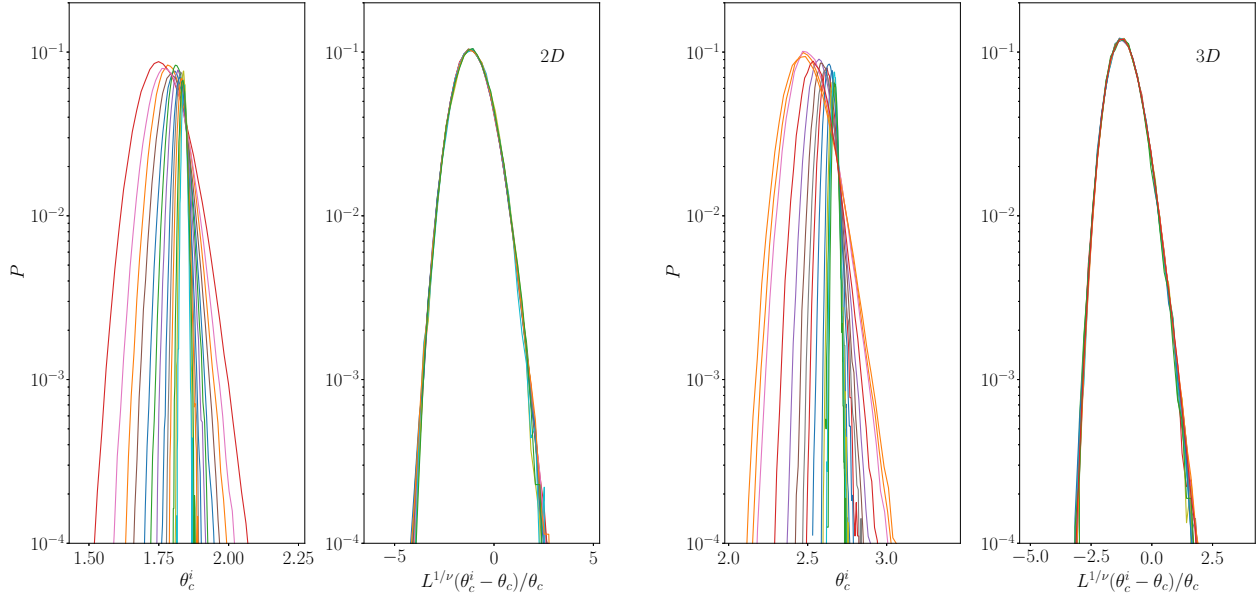


FIGURE 4.7 – Distributions des points pseudo-critiques $\theta_c^i(L)$ et des variables d'échelle $u = L^{1/\nu} |\theta_c^i(L) - \theta_c| / \theta_c$ pour plusieurs tailles L du modèle d'horloge à $q = 10$ états avec un désordre initial $\Delta = 5$ en dimensions $D = 2$ (à gauche) et $D = 3$ (à droite). Les distributions les plus larges $P_L(\theta_c^i)$ correspondent aux tailles les plus petites. Les variables ν et θ_c utilisées pour obtenir u se trouvent dans la table 4.3. Elles ont été déterminées en minimisant (3.21).

$q =$		5				8		
$\Delta =$		1	2	3	8	2	3	5
θ_c	2D	1.876(4)	1.764(4)	1.732(4)	2.550(7)	2.069(3)	1.904(4)	2.648(8)
	3D			2.584(11)				
ν	2D	1.25(13)	1.26(10)	1.24(9)	1.01(8)	1.23(9)	1.25(11)	1.00(9)
	3D			1.01(9)				

$q =$		10		
$\Delta =$		5	7	8
θ_c	2D	1.850(4)	1.792(3)	2.550(7)
	3D	2.701(9)		
ν	2D	1.25(10)	1.25(9)	1.0(2)
	3D	1.0(1)		

TABLE 4.3 – Tableau récapitulatif de la position du point critique θ_c et de l'exposant ν , estimés par la minimisation de σ (3.21) des distributions $P_L(L^{1/\nu} |\theta_c^i(L) - \theta_c| / \theta_c)$, du modèle d'horloge quantique désordonné pour différents états q et désordres initiaux Δ .

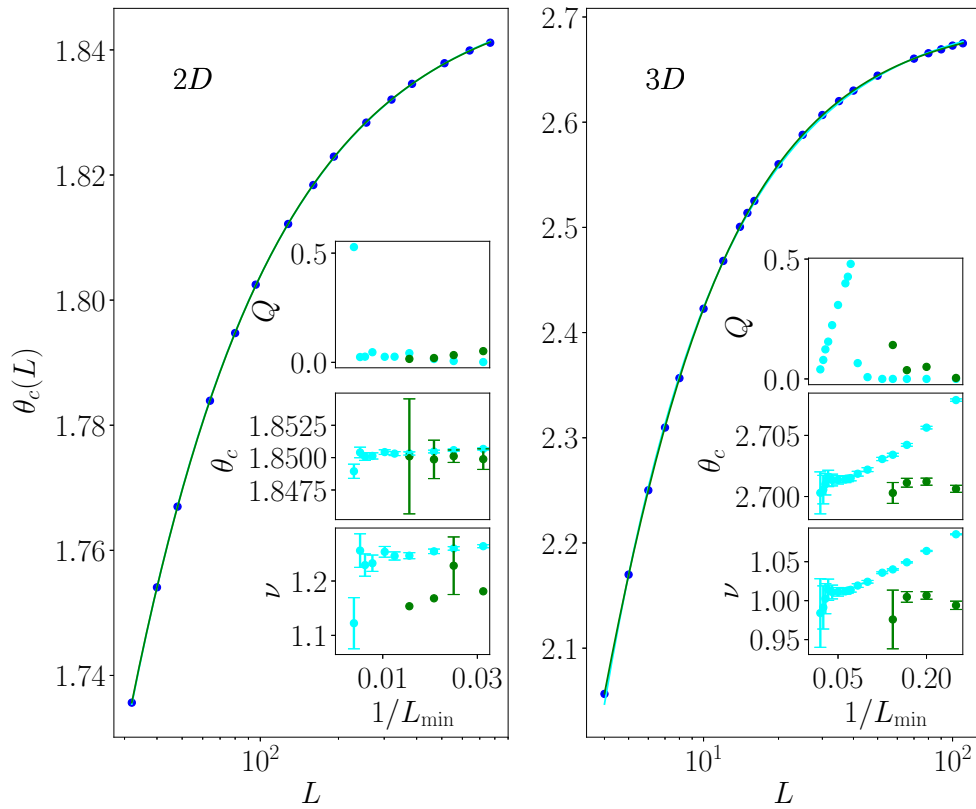


FIGURE 4.8 – Moyenne des points pseudo-critiques $\theta_c(L) \equiv \overline{\theta_c^i(L)}$ du modèle d’horloge à dix états quantique désordonné avec un désordre initial $\Delta = 5$ en dimensions $2D$ (à gauche) et $3D$ (à droite) en fonction de L . La courbe cyan correspond à un ajustement simple suivant l’équation (3.22) tandis que la courbe verte à un ajustement complexe prenant en compte des corrections algébriques suivant l’équation (3.24). Dans les graphiques incrustés sont représentées la qualité de l’ajustement Q et la variation des paramètres optimaux ν_s et θ_c obtenus en procédant à un ajustement simple (en cyan) et complexe (en vert) en fonction de la plus petite taille L_{\min} considérée. Si aucune barre d’erreur n’est indiquée, cela signifie que l’erreur est plus grande que la fenêtre et donc que l’ajustement réalisé est peu exploitable.

Sur la figure 4.8, la moyenne des points pseudo-critiques $\theta_c(L)$ du modèle d’horloge à $q = 10$ états quantique désordonné avec un désordre initial $\Delta = 5$ en dimensions $2D$ (à gauche) et $3D$ (à droite) est tracée en fonction de L . La courbe cyan correspond à l’ajustement simple (3.22) et la verte à l’ajustement complexe (3.24). En dimensions $D = 2$, ces deux courbes se confondent et les variations des paramètres θ_c et ν_s obtenus par l’ajustement simple (en cyan) sont faibles tandis qu’en dimensions $D = 3$, on peut discerner une différence entre ces deux courbes et les paramètres θ_c et ν_s varient nettement avec $1/L_{\min}$. En outre, dans les incrustations de gauche ($D = 2$), les barres d’erreur associées aux paramètres provenant de l’ajustement complexe (en vert) sont très larges ; les tailles sont trop grandes pour que le poids $L^{-\omega}$ soit suffisamment perceptible ce qui conduit à une instabilité sur les valeurs de b et ω . À l’inverse, en dimensions $D = 3$, l’ajustement complexe donne une estimation de ν_s qui est compatible avec celle obtenue par un ajustement simple dans la limite $1/L_{\min} \rightarrow 0$. Il est à noter que la qualité des ajustements Q en dimensions $D = 2$ est faible même si, visuellement, les interpolations semblent satisfaisantes.

$q =$		5				8		
$\Delta =$		1	2	3	8	2	3	5
θ_c	2D	1.8760(6)	1.7638(6)	1.7324(6)		2.0688(7)	1.9042(8)	
	3D			2.584(2)	2.550(2)			2.6485(10)

$q =$		10		
$\Delta =$		5	7	8
θ_c	2D	1.8503(4)	1.7924(3)	
	3D	2.701(1)		2.626(2)

TABLE 4.4 – Tableau récapitulatif de la position du point critique θ_c et de l'exposant ν , du modèle d'horloge quantique désordonné pour différents états q et désordres considérés, estimés par ajustement linéaire des moyennes des points pseudo-critiques (3.22) dans la limite $1/L_{\min} \rightarrow 0$.

Les courbes pour les autres valeurs de q se trouvent dans l'annexe C.3. La table 4.4 récapitule les θ_c estimés. Sur la figure 4.9, on représente les exposants effectifs ν_s estimés par un ajustement simple en fonction de $1/L_{\min}$ pour les différents modèles et désordres initiaux considérés. En dimensions $D = 2$, les erreurs données par un ajustement complexe sont trop grandes pour que cet ajustement soit exploitable. En dimensions $D = 3$, les exposants ν_s obtenus avec l'ajustement complexe sont presque identiques à ceux obtenus par l'ajustement simple dans la limite $1/L_{\min} \rightarrow 0$. Cela signifie que les plus larges tailles L considérées sont suffisamment grandes pour que les corrections puissent être considérées comme négligeables. Nous avons également tracé les exposants obtenus pour le modèle d'Ising et le modèle de Potts à $q = 3$ états. La figure 4.9 est sensiblement identique à la figure 3.6 obtenue précédemment pour le modèle de Potts. Les exposants ν_s des différents modèles sont tous compatibles dans la limite où $1/L_{\min}$ est suffisamment faible. Nous avons estimé $\nu_s \simeq 1.24(3)$ en dimensions $D = 2$ et $\nu_s \simeq 0.99(3)$ en dimensions $D = 3$.

4.3.1.3 Écart-type de la position des points pseudo-critiques

Le comportement de taille finie de l'écart type $\delta\theta_c(L)$ des positions des points pseudo-critiques (1.36) peut être linéarisé en prenant le logarithme. Nous avons procédé à un ajustement simple (3.25) ne prenant en compte que deux paramètres libres ν_w et a et à un ajustement plus complexe (3.26) en ajoutant deux paramètres b et $\omega > 0$ supplémentaires pour tenir compte de corrections algébriques. Le logarithme de l'écart type $\ln \delta\theta_c(L)$ du modèle d'horloge à $q = 10$ états avec un désordre initial $\Delta = 5$ est tracé sur la figure 4.10 (voir l'annexe C.2 pour les autres valeurs de q). Les courbes cyan (associées à l'ajustement simple (3.25)) et les courbes vertes (associées à l'ajustement complexe (3.26)) sont presque indifférenciables, aussi bien en dimensions $D = 2$ (à gauche) qu'en dimensions $D = 3$ (à droite). Les exposants ν_w sont représentés en fonction de la plus petite taille L_{\min} considérée dans les incrustations. En dimensions $D = 2$ et $D = 3$, l'exposant ν_w varie faiblement avec $1/L_{\min}$ sans pour autant atteindre un plateau. En dimensions $D = 2$, les exposants donnés par l'ajustement complexe (en vert) et par l'ajustement simple sur les plus grandes tailles uniquement sont compatibles

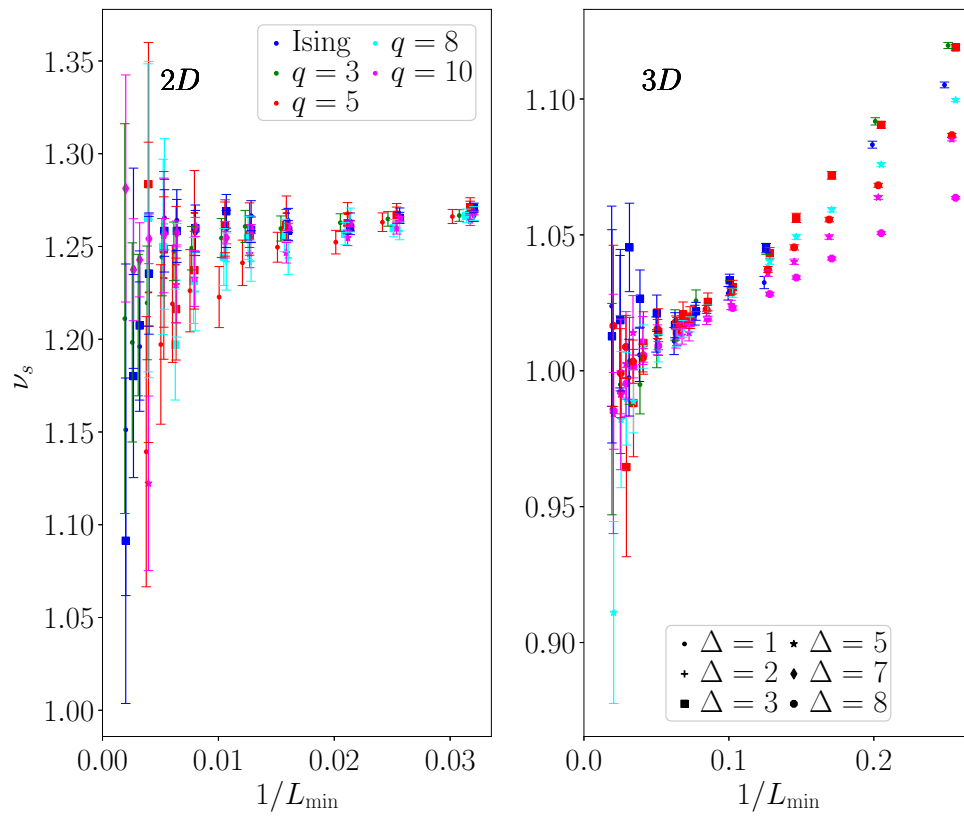


FIGURE 4.9 – Exposant ν_s estimé par un ajustement simple (3.22) en fonction de la plus petite taille de système considérée L_{\min} pour différents nombre d'états q et différents désordre initiaux Δ . Pour la plus grande valeur de L_{\min} , l'ajustement est réalisé sur six points. Les légendes sont identiques pour les deux figures. Les points ayant les mêmes valeurs L_{\min} ont été légèrement décalés pour améliorer la visibilité.

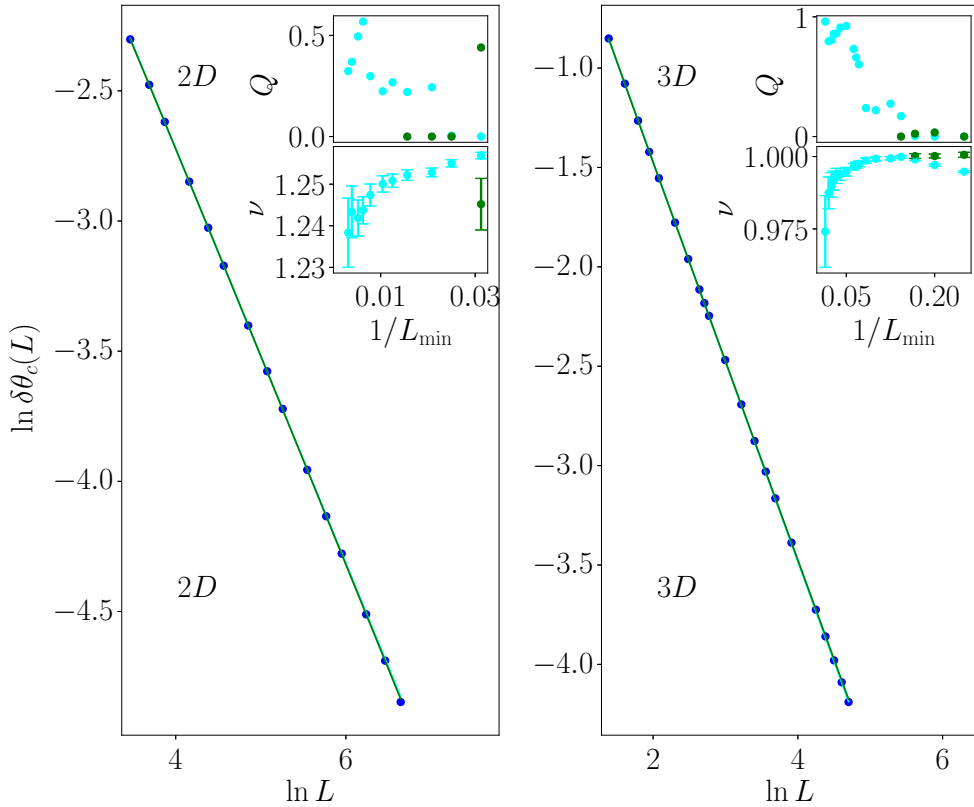


FIGURE 4.10 – Logarithme de l'écart-type des points pseudo-critiques $\ln \delta\theta_c(L)$ du modèle d'horloge à $q = 10$ états quantique désordonné avec un désordre initial $\Delta = 5$ en dimensions $2D$ (à gauche) et $3D$ (à droite) en fonction de L . La courbe cyan correspond à un ajustement, dit simple, suivant l'équation (3.25) tandis que la courbe verte à un ajustement, dit complexe, prenant en compte des corrections algébriques suivant l'équation (3.26). Dans les graphiques incrustés sont représentés la qualité de l'ajustement Q et l'exposant ν_w obtenu en procédant à un ajustement simple (en cyan) et complexe (en vert) en fonction de la plus petite taille L_{\min} considérée dans cet ajustement.

laissant présager que l'exposant ν_w puisse se situer entre 1.24 et 1.25. En dimensions $D = 3$, la conclusion est moins claire. D'une part les ajustements complexes donnent lieu à des qualités Q très faibles. D'autre part, la variation de l'exposant ν_w , estimé par l'ajustement simple, avec $1/L_{\min}$ est non monotone.

Sur la figure 4.11, on a représenté la variation de l'exposant ν_w en fonction de $1/L_{\min}$ pour les différents modèles et désordres initiaux considérés. En dimensions $D = 2$, en considérant toutes les données, les exposants ν_w de chaque modèle sont compatibles avec 1.259. Lorsque L_{\min} augmente, tous les exposants varient plus ou moins de la même manière signalant la présence de légères corrections à prendre en compte. Ils semblent tous se stabiliser autour de 1.24(1). En dimensions $D = 3$, les variations de ν_w avec L_{\min} sont non monotones. En se limitant aux grandes valeurs de L_{\min} , l'extrapolation des exposants effectifs est compatible avec 0.99(1).

En conclusion, de l'étude du comportement d'échelle des points pseudo-critiques, nous en avons déduit que l'exposant ν est indépendant du nombre d'états q pour le modèle d'horloge. Nous avons estimé $\nu_s \simeq 1.24(3)$ et $\nu_w \simeq 1.24(2)$ en dimensions $D = 2$ et $\nu_s \simeq 0.99(3)$ et $\nu_w \simeq 0.99(1)$ en dimensions $D = 3$.

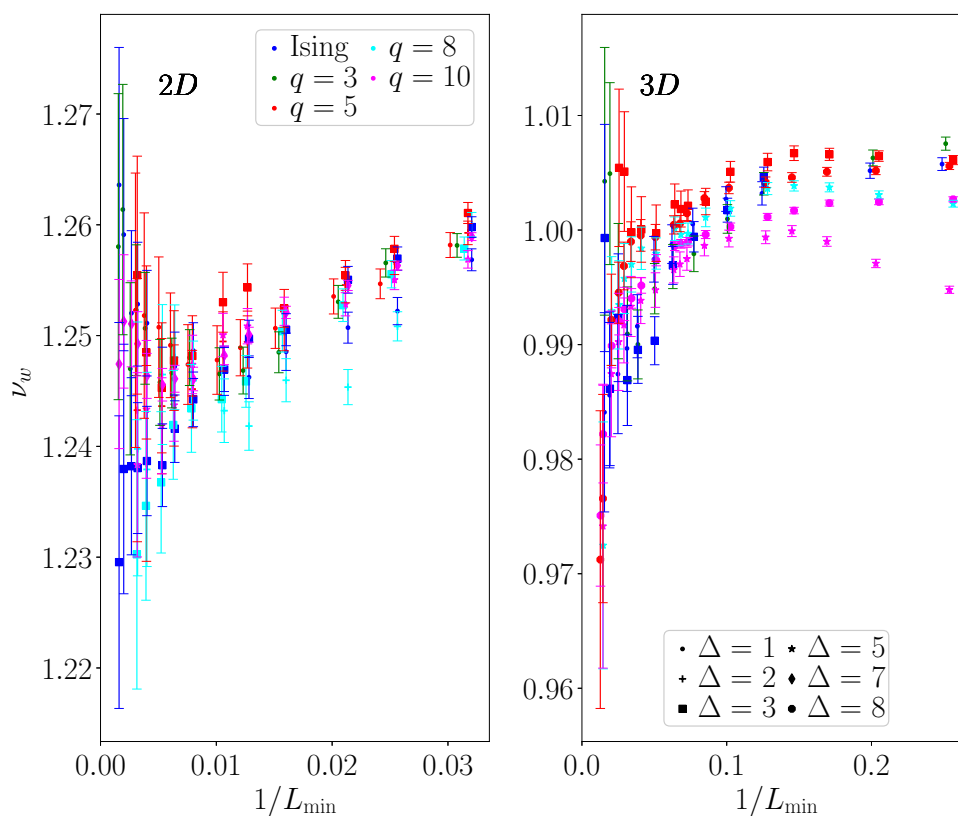


FIGURE 4.11 – Exposant ν_w estimé par un ajustement linéaire (3.25) en fonction de la plus petite taille de système considérée L_{\min} pour différents nombre d'états q et différents désordre initiaux Δ . Pour la plus grande valeur de L_{\min} , l'ajustement est réalisé sur cinq points. Les légendes sont identiques pour les deux figures. Les points de même valeur L_{\min} ont été légèrement décalés pour améliorer la visibilité.

4.3.2 Aimantation et exposant critique d_f

Comme pour le modèle de Potts, on montre que l'aimantation présente également une discontinuité du point pseudo-critique de certains échantillons. Pour le modèle d'horloge, on a en outre une chaoticité résiduelle du flot de renormalisation malgré les désordres initiaux choisis. Enfin, on présente nos estimations des exposants critiques d_f pour chaque modèle.

4.3.2.1 Saut et signature de chaoticité

Le point pseudo-critique $\theta_c^i(L)$ d'un échantillon i a été déterminé avec la méthode du doublement avec une précision $\epsilon = 10^{-5}$. Nous avons observé que pour certains échantillons, le moment magnétique dans la phase ferromagnétique est parfois plus petit que celui dans la phase paramagnétique. Nous attribuons cet effet une chaoticité résiduelle du flot de renormalisation. On introduit la probabilité de la présence de chaos comme

$$p^- = \frac{1}{N} \sum_i^N H [\mu^i(\theta_c^i(L) + \epsilon, L) - \mu^i(\theta_c^i(L) - \epsilon, L)] \quad (4.12)$$

avec $H(x)$ la fonction de Heaviside. La figure 4.12 représente la probabilité p^- en fonction de L pour différents nombres d'états q et désordres initiaux Δ . Cette probabilité, à Δ fixé, augmente avec le nombre d'états q et, à q fixé, diminue avec Δ . Ces évolutions sont cohérentes avec la sous-section 4.2.1.

On pourrait être tenté d'invalider la méthode de détermination du point pseudo-critique. Néanmoins, la méthode du doublement n'est pas directement reliée à la monotonie du moment magnétique, elle dépend de la structure du dernier amas obtenu et non de la valeur de son moment magnétique. En outre, nous n'avons pas trouvé d'indication laissant supposer l'existence de plusieurs points pseudo-critiques aux désordres initiaux utilisés.

A cause de la présence de chaos, nous introduisons une nouvelle définition de l'amplitude relative γ_{err} (3.27) du saut du moment magnétique au point pseudo-critique en ajoutant des valeurs absolues

$$\gamma_{err}(L) = \frac{1}{N} \sum_i^N \frac{|\mu^i(\theta_c^i(L) - \epsilon, L) - \mu^i(\theta_c^i(L) + \epsilon, L)|}{[\mu^i(\theta_c^i(L) - \epsilon, L) + \mu^i(\theta_c^i(L) + \epsilon, L)]/2}. \quad (4.13)$$

Elle est représentée à la figure 4.13. Les observations concernant la dépendance de la probabilité p^- avec le nombre d'états q et le désordre initial Δ valent également pour l'amplitude du saut γ_{err} . Cette amplitude est bien plus petite pour les modèles d'horloge à $q > 4$ états que celle observée pour le modèle de Potts à $q = 3$ états et donc plus généralement pour les modèles de Potts à $q > 2$ états. Mais la variation de γ_{err} avec la taille L est bien plus rapide pour les modèles de Potts.

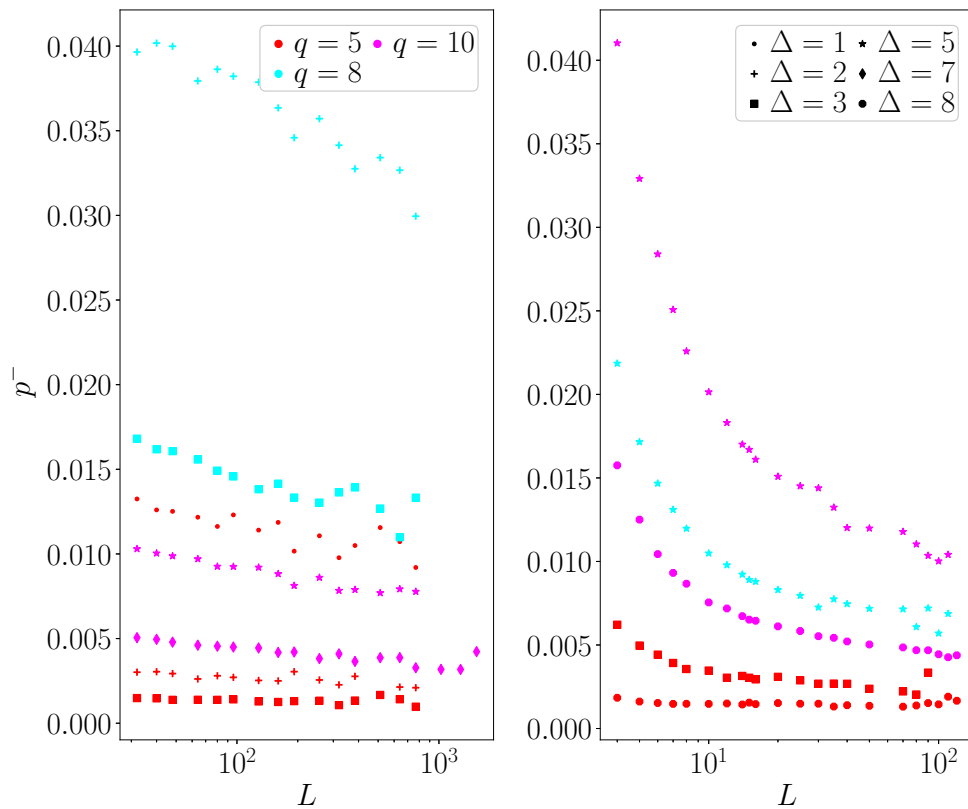


FIGURE 4.12 – Probabilité p^- qu'autour du point pseudo-critique le moment magnétique dans la phase désordonnée soit plus grand que dans la phase ordonnée pour le modèle d'horloge à q états avec différent désordres initiaux Δ en dimensions $D = 2$ (à gauche) et $D = 3$ (à droite).

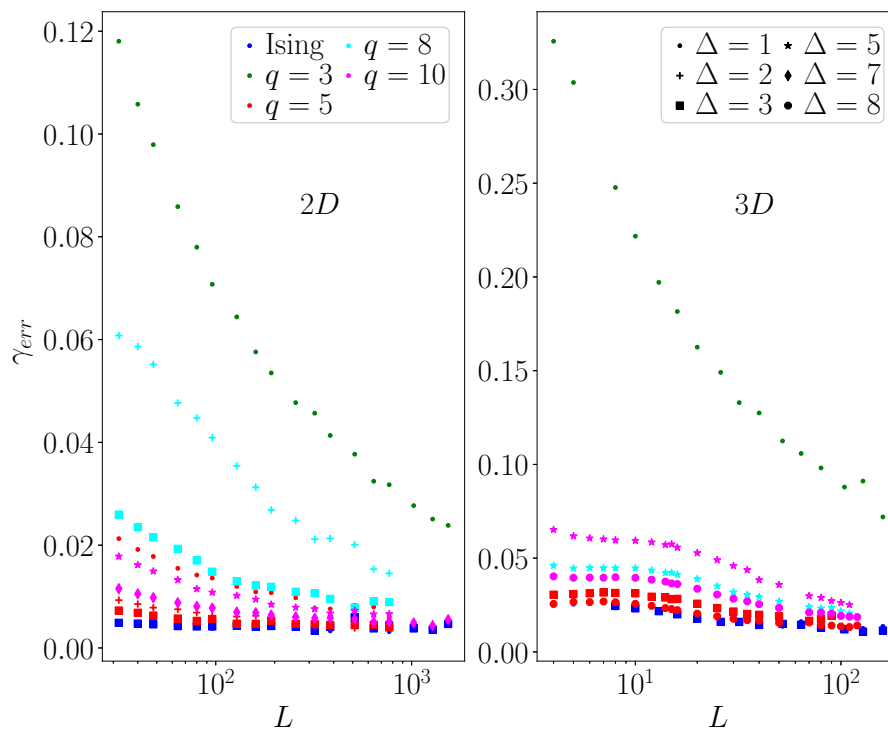


FIGURE 4.13 – Moyenne des sauts relatifs du moment magnétique des échantillons autour de leur point pseudo-critique $\gamma_{err}(L)$ en fonction de L pour tous les modèles d'horloge considérés en dimensions $D = 2$ (à gauche) et $D = 3$ (à droite) avec différents désordres Δ initiaux.

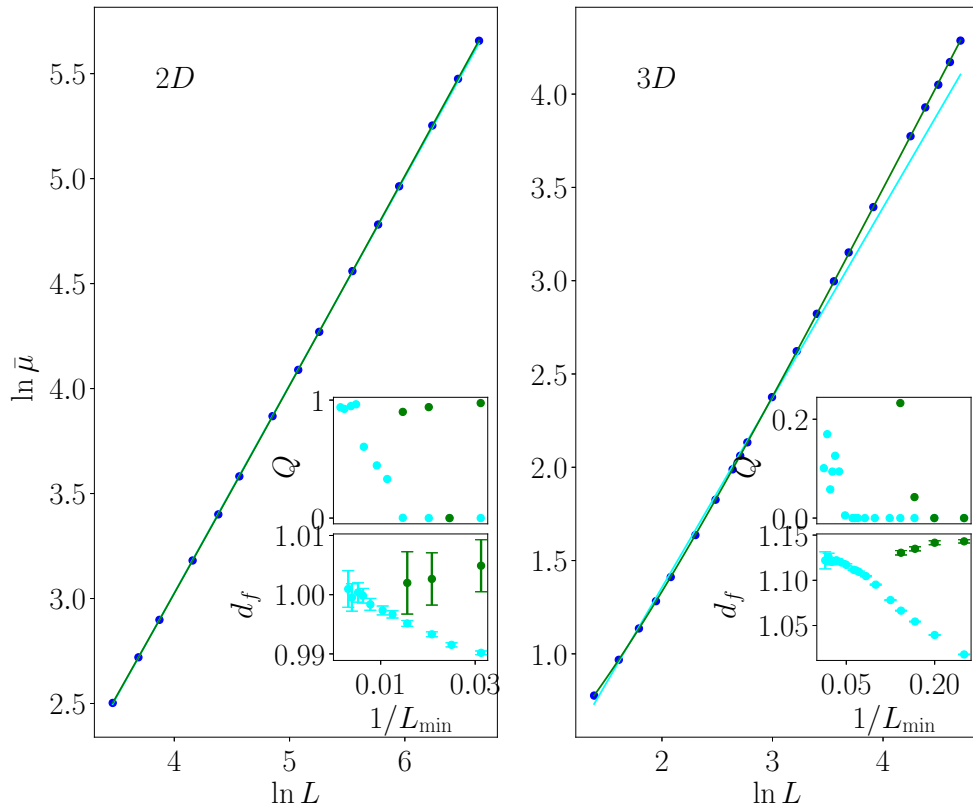


FIGURE 4.14 – Logarithme de la moyenne des moments magnétiques des derniers amas $\ln \bar{\mu}$ du modèle d’horloge à $q = 10$ états quantique désordonné avec un désordre initial $\Delta = 5$ en dimensions $2D$ (à gauche) et $3D$ (à droite) en fonction de L . La courbe cyan correspond à un ajustement simple suivant l’équation (3.28) tandis que la courbe verte à un ajustement complexe prenant en compte des corrections algébriques suivant l’équation (3.29). Dans les graphiques incrustés sont représentées la qualité de l’ajustement Q et la variation de l’exposant optimal d_f obtenu en procédant à un ajustement simple (en cyan) et complexe (en vert), en fonction de la plus petite taille L_{\min} considérée dans cet ajustement.

4.3.2.2 Calcul de d_f

En linéarisant la relation (2.17) liant moyenne des moments magnétiques du dernier amas $\bar{\mu}$ et taille du système L , nous avons procédé à un ajustement linéaire (3.28) afin de déterminer la dimension fractale d_f et à un ajustement complexe (3.29) en prenant en compte des corrections algébriques. Sur la figure 4.14 est tracée le logarithme du moment magnétique en fonction du logarithme de la taille du système. En dimensions $D = 3$ (à gauche), une différence est nettement visible entre l’ajustement simple (courbe en cyan) et l’ajustement complexe (en vert). Cette différence se retrouve dans les incrustations avec une très faible qualité Q des ajustements lorsque la plus petite taille considérée L_{\min} est faible et par une importante variation de l’exposant effectif d_f avec L_{\min} . En dimensions $D = 2$, c’est également le cas mais dans une moindre mesure.

La figure 4.15 regroupe les courbes de l’exposant d_f avec la plus petite taille considérée L_{\min} pour les différents modèles. En dimensions $D = 2$ et $D = 3$, les exposants du modèle d’horloge à $q > 4$ sont incompatibles avec ceux du modèle de Potts. Néanmoins, ces résultats doivent

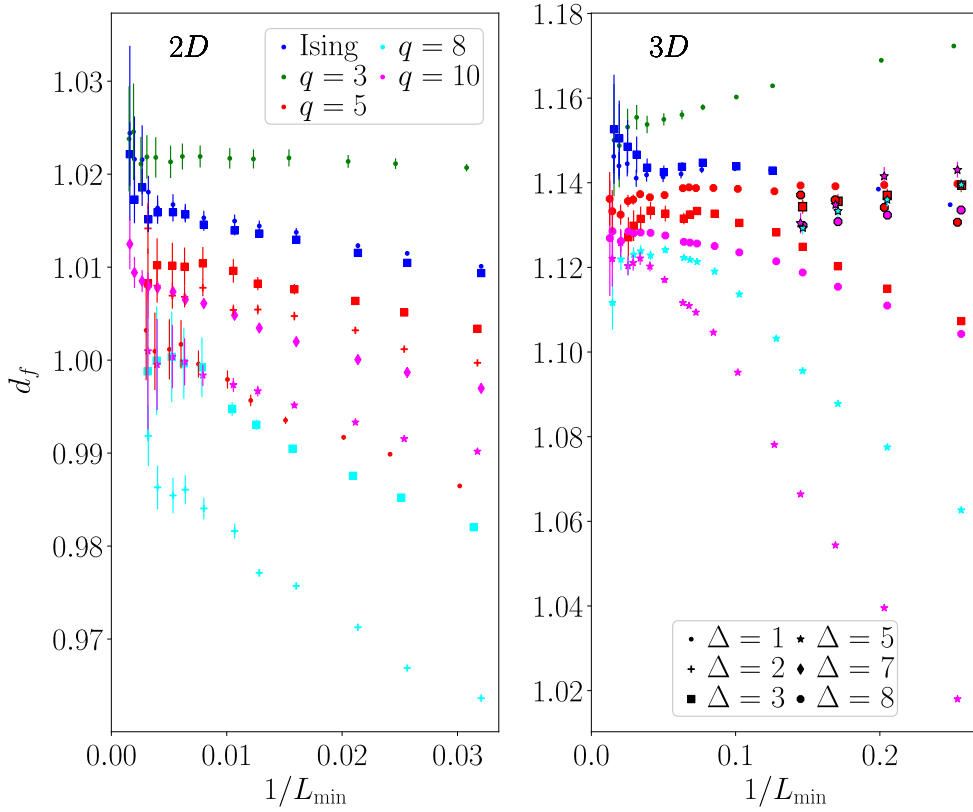


FIGURE 4.15 – Exposant d_f estimé par un ajustement linéaire (3.28) en fonction de la plus petite taille de système considérée L_{\min} pour différents modèles d'horloge à q états et différents désordres initiaux Δ . En dimensions $D = 3$ (à droite), les exposants entourés en noir proviennent d'un ajustement complexe. Pour la plus grande valeur de L_{\min} , l'ajustement est réalisé sur quatre points. Les légendes sont identiques pour les deux figures. Les points de même valeur de L_{\min} ont été légèrement décalés pour améliorer la visibilité.

être nuancés. Tout d'abord les plus grandes tailles de systèmes considérées sont bien différentes, $L_{\max}^{2D} = 1536$ et $L_{\max}^{3D} = 160$ pour les modèles de Potts et $L_{\max}^{2D} = 768$ ($L_{\max}^{2D} = 1536$ seulement pour $q = 10$ et $\Delta = 7$) et $L_{\max}^{3D} = 120$ pour les modèles d'horloge à $q > 4$ états. Si, pour le modèle de Potts, on se limite aux mêmes tailles $L \leq L_{\max}$ que pour le modèle d'horloge, les exposants obtenus ne sont plus tous compatibles dans les barres d'erreur. De plus, en dimensions $D = 2$ et $D = 3$ pour $q > 4$, le désordre initial Δ affecte fortement les estimations des exposants d_f et les corrections. Enfin, les différences entre les exposants d_f estimés restent faibles (inférieures à 0.03). En conclusion, bien que les estimations des exposants d_f soient incompatibles entre eux, il n'est pas exclu qu'en considérant de plus grandes tailles de systèmes et/ou des désordres initiaux plus importants, les exposants soient finalement compatibles.

4.3.3 Gap d'énergie et exposant critique ψ

Ce dont nous avons discuté à propos de la discontinuité et de l'absence de monotonie du moment magnétique dans la sous-section 4.3.2.1 s'applique au gap d'énergie.

Nous avons procédé à l'ajustement simple (3.30) de la moyenne du logarithme du gap d'énergie $-\overline{\ln(\Delta E)}(L)$ et un ajustement complexe pour tenir compte de corrections algébriques

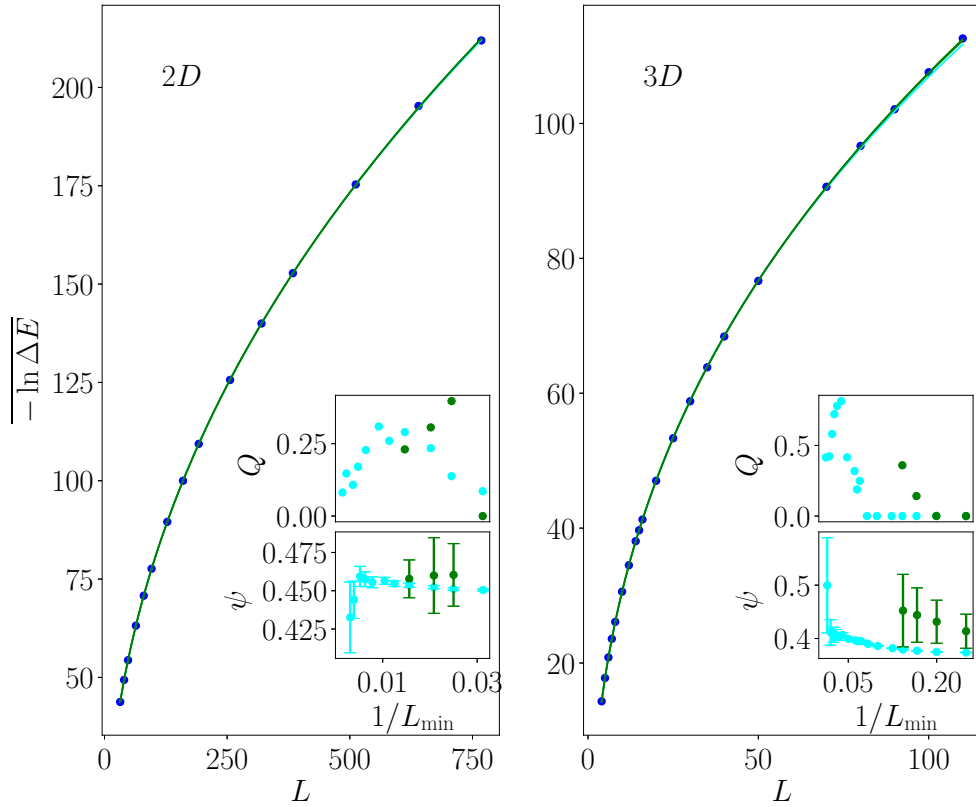


FIGURE 4.16 – Moyenne du logarithme du gap d'énergie des derniers amas $-\overline{\ln \Delta E}$ du modèle d'horloge à $q = 10$ états quantique désordonné en dimensions $2D$ (à gauche) et $3D$ (à droite) en fonction de L . La courbe cyan correspond à un ajustement simple suivant l'équation (3.30) tandis que la courbe verte à un ajustement complexe prenant en compte des corrections algébriques suivant l'équation (3.31). Dans les graphiques incrustés sont représentés la qualité de l'ajustement Q et l'exposant optimal ψ , obtenu en procédant à un ajustement simple (en cyan) et complexe (en vert), en fonction de la plus petite taille L_{\min} considérée dans cet ajustement.

(3.31). La variation de $-\overline{\ln(\Delta E)}(L)$ pour le modèle d'horloge à $q = 10$ états avec un désordre initial $\Delta = 5$ est représenté sur la figure 4.16.

Nous avons regroupé les courbes de l'exposant ψ en fonction de $1/L_{\min}$ pour tous les modèles d'horloge considérés sur la figure 4.17. Comme pour l'exposant d_f , en dimensions $D = 2$, le désordre initial influe sur les corrections et les estimations des exposants ψ . Néanmoins, en ne considérant que les désordres les plus forts pour tous les modèles, les exposants ψ sont compatibles dans la limite $1/L_{\min} \rightarrow 0$ avec $\psi \simeq 0.467(10)$. Cette estimation est par ailleurs compatible avec celles du modèle de Potts, à savoir $\psi \simeq 0.48(2)$ et $\psi \simeq 0.478(6)$ en ne considérant que les désordres forts. En dimensions $D = 3$, les corrections sont plus fortes que dans le cas bidimensionnel, tout particulièrement pour le modèle à $q = 10$ états. Toutefois, les exposants tendent vers des valeurs quasiment compatibles dans les barres d'erreur lorsque les désordres les plus forts sont considérés. En supposant les exposants indépendants de q , on estime $\psi \simeq 0.432(18)$ en dimensions $D = 3$ qui est également compatible avec celles du modèle de Potts, à savoir $\psi \simeq 0.46(4)$ et $\psi \simeq 0.455(15)$ en ne considérant que les désordres forts.

Nous avons estimé l'exposant ψ en recherchant le meilleur recouvrement des distributions

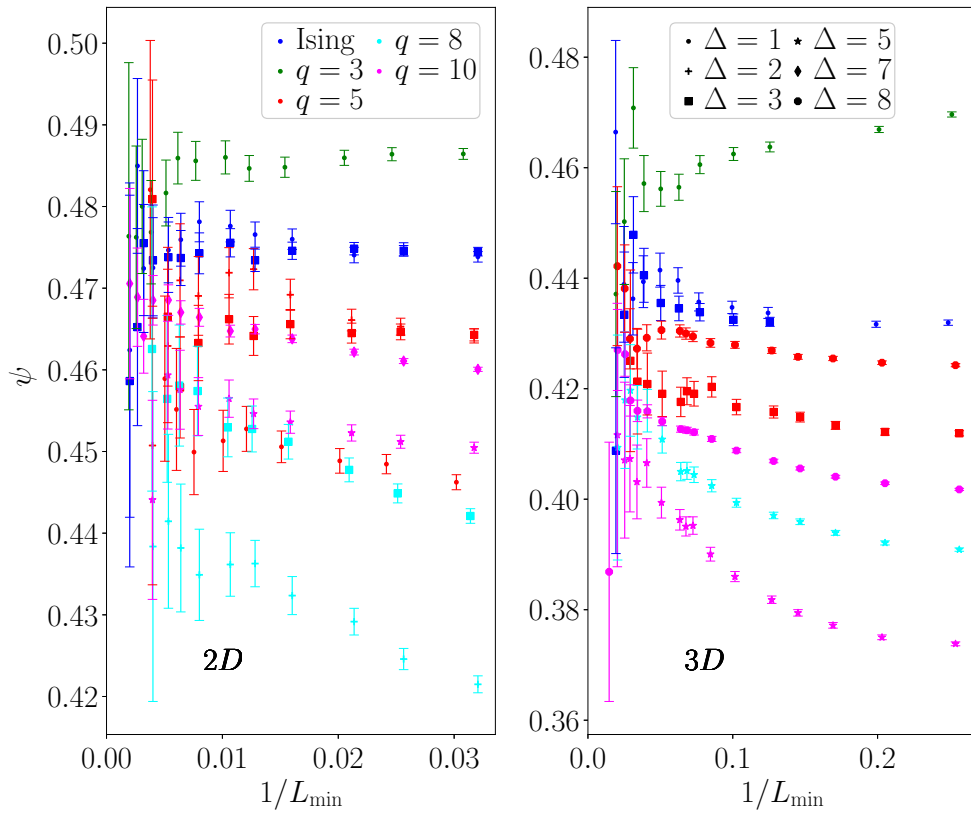


FIGURE 4.17 – Exposant ψ estimé par un ajustement linéaire (3.30) en fonction de la plus petite taille de système considérée L_{\min} pour différents modèles d'horloge à q états et différents désordre initiaux Δ . Pour la plus grande valeur de L_{\min} , l'ajustement est réalisé sur six points. Les légendes sont identiques pour les deux figures. Les points de mêmes valeurs de L_{\min} ont été légèrement décalés pour améliorer la visibilité.

$q =$		5				8			10		
$\Delta =$		1	2	3	8	2	3	5	5	7	8
ζ_0	2D	3.5(5)	6.3(5)	10.0(6)		9.9(5)	10.0(7)		14.2(12)	18.7(11)	
	3D			11.4(4)	39(1)			25.9(9)	26.9(8)		42(4)
ψ	2D	0.41(3)	0.45(2)	0.45(2)		0.34(2)	0.41(2)		0.43(2)	0.45(2)	
	3D			0.44(2)	0.43(2)			0.39(2)	0.37(2)		0.40(2)

TABLE 4.5 – Tableau récapitulatif de la position du point critique ζ_0 et de l’exposant ψ , du modèle d’horloge quantique désordonné pour différents états q et désordres considérés, estimés par la minimisation de σ (3.21) des distributions $P_L(L^{-\psi}(\zeta_0 - \ln \Delta E))$.

$P(u)$ avec $u = L^{-\psi}(\zeta_0 - \ln \Delta E)$ en minimisant (3.21). Les paramètres ζ_0 et ψ ainsi estimés se trouvent dans la table 4.5. Les courbes se trouvent dans l’annexe C.6. Un bon recouvrement est effectivement obtenu pour les différents modèles considérés confirmant que la dynamique est activée comme attendu à un point fixe de désordre infini. Les estimations de l’exposant ψ dépendent de q et fortement du désordre initial. Comme explicité dans la sous-section 3.3.3, il faut considérer ces exposants et leurs incertitudes avec prudence.

4.4 Conclusion

Nous avons modifié l’algorithme de SDRG de Kovács et Iglói [20] afin de pouvoir l’appliquer au modèle d’horloge. Le retour à la décimation systématique du maximum global et la gestion d’une règle de décimation pouvant induire de plus grands couplages nous a contraint à travailler avec des tailles de systèmes plus petites, jusqu’à $L = 756$ en dimensions $D = 2$ et $L = 110$ en dimensions $D = 3$. Nous avons étudié les modèles d’horloge à $q = 5, 8$ et 10 états. Contrairement au modèle de Potts, il est nécessaire de considérer une distribution initiale avec un désordre suffisamment fort, et ce d’autant plus que le nombre d’états q est grand pour que les distributions obtenues tendent vers celles attendues au point fixe de désordre infini. Pour les trois modèles, nous avons mis en évidence l’existence d’un tel point fixe. Les estimations des exposants critiques ν_s et ν_w sont compatibles avec ceux du modèle d’Ising. Les exposants ψ sont compatibles dans les barres d’erreur mais ces dernières sont grandes. Nos estimations des exposants d_f pour $q > 4$ sont incompatibles dans les barres d’erreur de celui du modèle d’Ising bien que proches. Elles s’en rapprochent en augmentant le désordre initial Δ . Des simulations en considérant de plus grandes tailles de système et/ou des désordres initiaux plus grands seront nécessaires pour conclure sur la dépendance de l’exposant d_f avec le nombre d’états q .

Chapitre 5

Modèle d'Ashkin-Teller quantique désordonné en dimensions deux et trois

Le modèle d'Ashkin-Teller correspond à deux modèles d'Ising, de spins σ et τ , couplés par leur énergie locale en tout site du réseau. Pour certaines valeurs du couplage, il est équivalent aux modèles d'Ising et de Potts à quatre états. Néanmoins, le diagramme de phase du modèle d'Ashkin-Teller est plus riche que ces derniers. Une phase produit dans laquelle la polarisation $\langle\sigma\tau\rangle$ est non nulle et l'aimantation $\langle\sigma\rangle = \langle\tau\rangle$ est nulle émerge entre une phase paramagnétique et une phase de Baxter où $\langle\sigma\rangle = \pm\langle\tau\rangle \neq 0$. Dans sa version quantique désordonnée, une telle phase existe également. L'apparition de cette nouvelle phase, apporte de nouvelles questions ; quels sont les comportements critiques aux transitions entre cette phase et les phases paramagnétique et de Baxter ? Quel est le comportement au point tricritique, jointure de ces trois phases ? Dans un premier temps, on présentera les modèles d'Ashkin-Teller classique et quantique, de même que la version étendue à N modèles d'Ising couplés. Puis, on discutera plus spécifiquement du modèle quantique désordonné pour lequel des résultats ont été obtenus par SDRG en dimension $D = 1$. En particulier, le point tricritique est caractérisé par des exposants différents de ceux du modèle d'Ising. Enfin, on présentera nos résultats préliminaires sur le comportement critique au point tricritique en dimensions $D = 2$ et $D = 3$.

5.1 Présentation du modèle et état de l'art

On décrit dans un premier temps le modèle d'Ashkin-Teller classique et on présente son comportement critique dans le cas pur et le cas désordonné. La généralisation à N couleurs est également présentée. On discute ensuite la version quantique de ce modèle et en particulier les propriétés critiques du modèle à N couleurs désordonné unidimensionnel dans la limite de couplage faible par SDRG.

5.1.1 Description du modèle classique pur et comportement critique

Le modèle d'Ashkin-Teller [253] a été initialement introduit pour étudier les transitions ordre-désordre d'atomes adsorbés sur une surface dans le cas où chaque site peut être occupé par quatre types d'atomes (A,B,C,D). Quatre énergies d'interaction entre proches voisins sont considérées : ϵ_0 entre $A-A, B-B, C-C, D-D$, ϵ_1 entre $A-B, C-D$, ϵ_2 entre $A-C, B-D$ et ϵ_3 entre $A-D, B-C$. Une manière équivalente de formuler ce modèle consiste à considérer que sur chaque site i se trouvent deux spins classiques d'Ising σ et τ pouvant prendre deux valeurs 1 ou -1 . Le modèle d'Ashkin-Teller peut alors s'écrire comme deux modèles d'Ising couplés par une interaction à quatre spins [254]

$$H^{AT} = - \sum_{\langle i,j \rangle} [J_2^\sigma \sigma_i \sigma_j + J_2^\tau \tau_i \tau_j + J_4 \sigma_i \sigma_j \tau_i \tau_j + J_0] \quad (5.1)$$

où la somme s'étend sur les paires de voisins les plus proches et les constantes de couplages sont reliées aux ϵ_i par

$$\begin{aligned} -J_2^\sigma &= (\epsilon_0 + \epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon_3) / 4, & -J_2^\tau &= (\epsilon_0 + \epsilon_2 - \epsilon_3 - \epsilon_1) / 4, \\ -J_4 &= (\epsilon_0 + \epsilon_3 - \epsilon_1 - \epsilon_2) / 4, & -J_0 &= (\epsilon_0 + \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3) / 4. \end{aligned}$$

Si $J_4 = 0$, ce modèle est équivalent à deux modèles d'Ising découplés. Si, de plus, $J_2^\sigma \neq J_2^\tau$, le système possède deux températures critiques correspondant à celles de chacun des deux modèles d'Ising. Si $J_4 = J_2^\sigma = J_2^\tau$, ce modèle est équivalent au modèle de Potts à quatre états avec une énergie $-3J_4$ si les spins de Potts sont dans le même état et J_4 dans le cas contraire.

On considère le cas bidimensionnel isotrope, i.e. $J_2^\sigma = J_2^\tau = J_2$ et on note $K = J/k_b T$. Le diagramme de phase du modèle d'Ashkin-Teller bidimensionnel sur réseau carré a été obtenu par simulations Monte-Carlo et analyse de séries à haute et basse températures [255]. Il est représenté sur la figure 5.1. Il existe quatre phases :

1. une phase dite de Baxter où chaque modèle d'Ising est ferromagnétiquement ordonné indépendamment de l'autre, i.e. $\langle \sigma \rangle = \pm \langle \tau \rangle \neq 0$,
2. une phase paramagnétique où les deux modèles d'Ising sont désordonnés, i.e. $\langle \sigma \rangle = \langle \tau \rangle = 0$,
3. une phase produit $\langle \sigma \tau \rangle$ où les spins σ et τ sont individuellement désordonnés, i.e. $\langle \sigma \rangle = \langle \tau \rangle = 0$, mais où le produit des spins est ordonné $\langle \sigma \tau \rangle \neq 0$,
4. une phase produit antiferromagnétique qui est identique à la phase produit avec une alternance de signe de $\sigma_i \tau_i$ entre chaque site voisin. Le réseau considéré étant carré, il n'y a pas de frustration donc pas de phase verre de spins.

On s'intéresse plus particulièrement au cas $K_2, K_4 > 0$. Baxter a montré que le modèle à huit vertex possède une transition de phase dont l'exposant de la chaleur spécifique α varie continûment en fonction des poids associés à chaque configuration [131]. Grâce à un mapping du modèle d'Ashkin-Teller sur le modèle à huit vertex [254, 256], la transition entre le point E

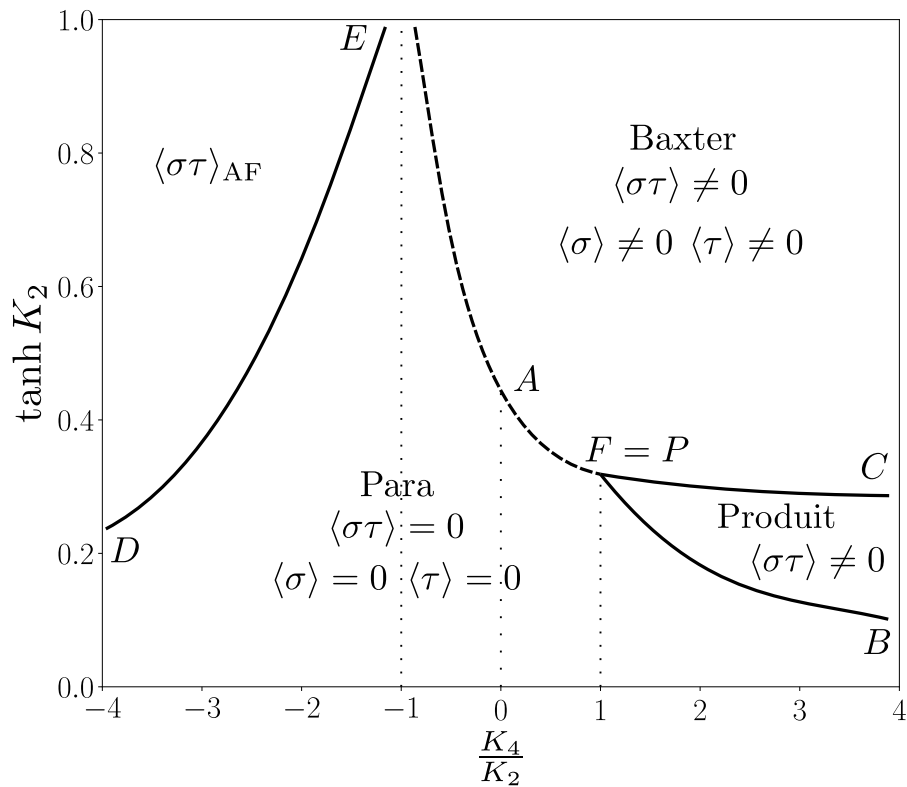


FIGURE 5.1 – Diagramme de phase de modèle d'Ashkin-Teller isotrope classique bidimensionnel issu de [255]. La courbe en pointillés correspond à la ligne de transition auto-duale le long de laquelle les exposants varient. Les courbes en traits pleins correspondent à des lignes de transition dans la classe d'universalité du modèle d'Ising.

et P (modèle de Potts à quatre états), passant par le point A (deux modèles d'Ising découplés), est connue par un argument de dualité [257]

$$\exp(-2K_4) = \sinh 2K_2. \quad (5.2)$$

Les exposants critiques varient continûment le long de cette ligne [257]

$$\alpha = (2 - 2y)/(3 - 2y) \quad \beta_m = (2 - y)/(24 - 16y) \quad \beta_e = (12 - 8y)^{-1} \quad (5.3)$$

avec $y = 2\mu/\pi$ et $\cos \mu = \frac{1}{2} [\exp(4K_4) - 1]$ pour $0 < \mu < 2\pi/3$. L'indice associé à l'exposant β permet de faire la distinction entre l'exposant critique β_m associé au terme magnétique $H \sum_i \sigma_i$ et l'exposant β_e associé au terme électrique (polarisation) $E \sum_i \sigma_i \tau_i$. L'exposant $x_m = \beta_m/\nu$ est constant sur toute la ligne et égal à $1/8$. Lorsque $K_4 = 0$ alors $y = 1$ et on retrouve bien les exposants $\alpha = 0$ et $\beta_m = 1/8$ du modèle d'Ising. Lorsque $4K_4 = \ln 3$, correspondant au point critique du modèle de Potts à quatre états, alors $y = 0$ et on retrouve $\alpha = 2/3$ et $\beta_m = 1/12$. Le point E correspond à $K_2 = -K_4$ et $K_2 \rightarrow +\infty$. Au point B , K_2 est négligeable devant K_4 , l'énergie d'une configuration de spin résulte donc essentiellement de l'interaction entre quatre spins. En introduisant $S_i = \sigma_i \tau_i$ une variable d'Ising effective prenant les valeurs 1 et -1 , l'énergie d'une configuration de spin se réduit à $\sum_{\langle ij \rangle} J_4 S_i S_j$. La transition entre la phase paramagnétique et ordonnée est du second ordre et les exposants critiques sont ceux du modèle d'Ising. Au point C , K_4 est très grand de sorte que le système est ordonné ferromagnétiquement. On peut considérer alors que $\langle S \rangle = 1$ et donc que $\sigma_i = \tau_i$. À une constante près, l'hamiltonien se réduit à $2 \sum_{\langle ij \rangle} J_2 \sigma_i \sigma_j$. Il existe donc une transition du second ordre entre une phase ordonnée $\langle \sigma \rangle \neq 0$ et une phase désordonnée appartenant à la classe d'universalité d'Ising. Deux lignes de transitions, du second ordre et appartenant à la classe d'universalité d'Ising, prennent naissance au point tricritique F correspondant au modèle de Potts à quatre états [258] pour rejoindre les points C et B .

En utilisant des arguments de symétries et des points particuliers du diagramme de phase connus exactement, Wu et Lin ont conjecturé que le modèle d'Ashkin-Teller anisotrope possède en général deux transitions et une seule dans le cas où deux couplages parmi $|J_2^\sigma|, |J_2^\tau|$ et $|J_4|$ sont égaux et supérieurs au troisième [259]. Cette prédiction a été vérifiée par simulation Monte-Carlo pour $J_2^\sigma/J_2^\tau = 1/2$, avec $J_2^\sigma, J_2^\tau > 0$ [260]. Deux transitions du second ordre sont systématiquement observées et une seule appartenant à la classe d'universalité du modèle de Potts à 4 états lorsque $J_4 = J_2^\sigma$. La limite de forte anisotropie, dont dérive la version quantique du modèle d'Ashkin-Teller, est discutée ultérieurement.

En dimensions $D = 3$, le diagramme de phase du modèle isotrope sur réseau cubique se distingue de celui en dimensions $D = 2$ par l'existence d'une nouvelle phase dans laquelle $\langle \sigma \tau \rangle = 0$ et $\langle \tau \rangle = 0$ et $\langle \sigma \rangle \neq 0$ (ou inversement) [255, 261]. Les lignes de transitions entre cette nouvelle phase et la phase de Baxter et la phase paramagnétique sont de nature diverses. Certaines sont du premier ordre, d'autres du second ordre voire même à la fois continue et du premier ordre en fonction du paramètre d'ordre [262]. En outre, l'ordre des transitions déjà

présentes en dimensions $D = 2$ diffère parfois. Comme mentionné au chapitre 3, le point P (modèle de Potts à quatre états) correspond, en dimensions $D = 3$, à une transition du premier ordre tandis que A (modèle d'Ising) reste du second ordre. La ligne de transition, $0 < K_4/K_2 \leq 1$ est très particulière car elle passe d'une transition du premier ordre (point F) à une transition arbitrairement faible du premier ordre à mesure que l'on s'approche du point A [263, 264]. De plus, le point P n'est plus confondu avec le point tricritique F . La ligne de transition entre les points F et B reste du premier ordre à proximité de F puis devient continue [265, 266]. Une nouvelle phase de Baxter a été récemment prédite dans l'approximation de champ moyen [267, 268].

Dans le cas anisotrope en dimensions $D = 3$, pour $J_2^\sigma/J_2^\tau = 1/2$ et $J_4, J_2^\sigma > 0$, des simulations Monte-Carlo indiquent la présence d'une ligne de transition du premier ordre entre la phase de Baxter et la phase paramagnétique joignant deux points multicritiques [260]. En dehors de cette ligne, les transitions sont toutes du second ordre. Ce scénario correspond à l'un des quatre diagramme de phase prédit par l'approximation de champ moyen.

Expérimentalement, le sélénium adsorbé sur une surface de Ni(100) présente trois phases, $p(2 \times 2)$, $c(2 \times 2)$ et désordonnée en fonction de la concentration et de la température. En étudiant les symétries du problème, Bak *et al.* concluent que ce système est une réalisation physique du modèle d'Ashkin-Teller [269]. Le modèle d'Ashkin-Teller permet également de décrire la réponse élastique d'une molécule d'ADN à une force et un couple externe [270], ou encore les interactions chimiques et magnétiques dans les alliages métalliques [271].

Le modèle d'Ashkin-Teller correspondant à $N = 2$ modèles d'Ising a été étendu au cas de N modèles d'Ising couplés deux à deux via une interaction à quatre spins. L'hamiltonien s'écrit [272]

$$H^{ATN} = - \sum_{\langle i,j \rangle} \left[\sum_{\alpha=1}^N J_2 \sigma_{\alpha,i} \sigma_{\alpha,j} + J_4 \sum_{\alpha \neq \beta}^N \sigma_{\alpha,i} \sigma_{\alpha,j} \sigma_{\beta,i} \sigma_{\beta,j} \right]. \quad (5.4)$$

L'indice α permet de distinguer les spins d'Ising de chaque couleur. Pour $N = 3$, une analyse du groupe de renormalisation et des calculs Monte-Carlo indiquent la présence d'une transition du premier ordre entre la phase paramagnétique et les phases de Baxter et produit (soit entre le point A et B présent sur la figure 5.1) lorsque $K_4/K_2 > 0$ en dimensions $D = 2$ et $D = 3$ [272]. Lorsque $K_4/K_2 < 0$, la transition est continue et appartient vraisemblablement à la classe d'universalité d'Ising en dimensions $D = 2$. La transition entre les phases de Baxter et produit (ligne entre les points F et C sur la figure 5.1) est du second ordre et appartient à la classe d'universalité d'Ising d'après des calculs basés sur l'analyse du spectre de la matrice de transfert [273]. En dimensions $D = 3$, un diagramme plus riche est obtenu avec de nouvelles phases séparées par des transitions du premier ou du second ordre [272].

Dans la limite $N \rightarrow +\infty$, le modèle bidimensionnel est exactement soluble [274]. Il n'existe plus qu'une seule transition séparant les phases de Baxter et paramagnétique. Elle est du premier ordre pour $K_4 > 0$ et du second ordre pour $K_4 < 0$. Pour $K_4 > 0$, la transition reste du premier ordre entre les phases de Baxter et paramagnétique pour des valeurs finies de N jusqu'à $N = 3$ [275].

5.1.2 Propriétés critiques en présence de désordre

En dimensions $D = 2$, les exposants critiques du modèle d'Ashkin-Teller isotrope pur à deux couleurs varient continûment le long de la ligne auto-duale liant le modèle d'Ising au modèle de Potts à $q = 4$ états. En particulier, l'exposant α varie de 0 à 1. D'après le critère de Harris [14], le désordre est pertinent et on s'attend à des propriétés critiques différentes de celles du cas pur. Néanmoins, par simulations Monte-Carlo, les exposants critiques du modèle d'Ashkin-Teller bidimensionnel sur réseau carré avec des liaisons désordonnées ne présentent pas de variations mesurables par rapport à ceux du cas pur anisotrope [276]. Un changement notable concerne la divergence de la chaleur spécifique avec la taille du système L au point critique qui passe de $C \sim \log L$ pour le modèle d'Ashkin-Teller désordonné et le modèle de Potts à quatre états à $C \sim \log \log L$ pour le modèle d'Ising désordonné.

En dimensions $D = 2$, pour le modèle d'Ashkin-Teller à $N > 2$ couleurs, les transitions du premier ordre deviennent du second ordre par ajout d'une quantité infinitésimale de désordre [15]. Des simulations Monte-Carlo du modèle à $N = 3$ couleurs avec une dilution de sites et avec des couplages aléatoires confirment la présence d'une transition du second ordre pour $K_4 > 0$. La classe d'universalité est celle du modèle d'Ising pur bidimensionnel avec des corrections logarithmiques [277]. Des simulations Monte-Carlo du modèle à $N = 4$ couleurs avec un désordre par dilution de sites arrivent à une conclusion identique [278]. Ces résultats sont consistants avec ceux provenant du groupe de renormalisation [279].

5.1.3 Modèle d'Ashkin-Teller quantique homogène

Dans la limite anisotrope extrême, le modèle d'Ashkin-Teller classique conduit à l'hamiltonien quantique effectif [240, 280]

$$H_Q^{AT} = - \sum_{\langle ij \rangle} \{ J(\sigma_i^z \sigma_j^z + \tau_i^z \tau_j^z) + h(\sigma_i^x + \tau_i^x) + \epsilon [J\sigma_i^z \sigma_j^z \tau_i^z \tau_j^z + h\tau_i^x \tau_j^x] \} \quad (5.5)$$

où la somme s'étend sur les paires de voisins les plus proches. σ_i^k, τ_i^k sont les matrices de Pauli avec $k = x, y, z$. Si $\epsilon = 0$, l'hamiltonien est constitué de deux modèles d'Ising découplés. Si $\epsilon = 1$, on retrouve le modèle de Potts à quatre états. On définit $\theta = J/h$.

On traite spécifiquement du cas unidimensionnel avec $\theta \geq 0$. En fonction de ϵ , trois cas sont à considérer [280] :

1. Pour $\epsilon > 1$, deux lignes critiques appartenant à la classe d'universalité d'Ising se rejoignent au point $\epsilon = 1$. Elles séparent trois phases, une phase désordonnée, une phase partiellement ordonnée avec $\langle \sigma^z \tau^z \rangle \neq 0$ et $\langle \sigma^z \rangle = \langle \tau^z \rangle = 0$ et une phase ordonnée $\langle \sigma^z \tau^z \rangle, \langle \sigma^z \rangle, \langle \tau^z \rangle \neq 0$.
2. Pour $-1 \leq \epsilon \leq 1$, le comportement critique est donné par le modèle à six vertex [281-283] qui est équivalent au modèle d'Ashkin-Teller quantique sur la ligne auto-duale donnée

par $\theta = 1$ [280]. Sur cette ligne, les exposants critiques varient continûment [280] :

$$x_T^{8V} = \frac{2}{\pi} \arccos(-\epsilon), \quad x_m = \frac{1}{8}, \quad x_p = \frac{1}{4x_T^{8V}}, \quad \nu = \frac{x_T^{8V}}{2x_T^{8V} - 1} \quad (5.6)$$

avec x_T^{8V} l'exposant critique associé à la fonction de corrélation de l'opérateur énergie du modèle à huit vertex, x_m, x_e ceux associés aux paramètres d'ordre magnétique $M = \sum_i \sigma_i^z$ et de polarisation $P = \sum_i \sigma_i^z \tau_i^z$. ν est l'exposant de la longueur de corrélation. Pour $-1/\sqrt{2} < \epsilon \leq 1$, la ligne critique sépare une phase ordonnée d'une phase désordonnée. Pour $-1 < \epsilon < -1/\sqrt{2}$, il existe une région critique autour de cette ligne dans laquelle les exposants varient continûment et l'exposant ν est formellement infini. Cette région est séparée de la phase ordonnée et désordonnée par des transitions de type BKT [280].

3. Pour $\epsilon < -1$, il n'existe plus qu'une seule phase où la polarisation $\sigma^z \tau^z$ est ordonnée antiferromagnétiquement et ce pour tout $\theta > 0$. Lorsque $\theta = 0$, l'hamiltonien peut être résolu exactement et le fondamental est dégénéré 2^N fois avec N le nombre de sites [280].

Ces prédictions théoriques ont été confirmées numériquement par des développements à hautes températures [280], par invariance conforme [284, 285] et en étudiant le comportement d'échelle de taille finie par diagonalisation exacte [286] et par groupe de renormalisation [287].

La forte anisotropie du modèle classique bidimensionnel nécessaire pour obtenir l'équivalent quantique unidimensionnel ajoute une région critique supplémentaire par rapport au cas isotrope. Pour le reste, les propriétés sont similaires au modèle classique.

Pour le modèle à N couleurs quantique unidimensionnel dans la limite $N \rightarrow +\infty$, l'état du fondamental possède une structure identique à celle du digramme de phase de l'équivalent classique bidimensionnel [288]. Ce comportement contraste fortement avec le cas $N = 2$ discuté précédemment.

5.1.4 Étude du modèle à N couleurs désordonné unidimensionnel par SDRG

On considère le cas général à N couleurs unidimensionnel de la version désordonnée de l'hamiltonien (5.5)

$$H_Q^{ATN} = - \sum_{\alpha=1}^N \sum_{i=1}^L (J_i \sigma_{\alpha,i}^z \sigma_{\alpha,i+1}^z + h_i \sigma_{\alpha,i}^x) - \sum_{\alpha < \beta}^N \sum_{i=1}^L (K_i \sigma_{\alpha,i}^z \sigma_{\alpha,i+1}^z \sigma_{\beta,i}^z \sigma_{\beta,i+1}^z + g_i \sigma_{\alpha,i}^x \sigma_{\beta,i}^x) \quad (5.7)$$

On introduit le rapport des couplages entre les deux modèles d'Ising défini par $\epsilon_{ij}^J = K_{ij}/J_{ij}$ et $\epsilon_i^h = g_i/h_i$. Dans la suite, on simplifie le problème en ne considérant que le cas où ces rapports sont uniformes $\epsilon_{ij}^J = \epsilon_i^h = \epsilon_I \geq 0$. ϵ_I est la valeur du rapport dans la distribution initiale des couplages.

On applique la SDRG dans la limite de couplage ϵ faible, c'est-à-dire lorsque le plus grand couplage Ω est ou bien un champ transverse h_i ou un couplage entre deux spins J_i .

1. Si $\Omega = h_i$, l'état du fondamental de l'hamiltonien local

$$H' = -h_i \sum_{\alpha=1}^N \sigma_{\alpha,i}^x - g_i \sum_{\alpha < \beta} \sigma_{\alpha,i}^x \sigma_{\beta,i}^x \quad (5.8)$$

est obtenu lorsque le spin i de chaque modèle d'Ising α est l'état propre de $\sum_{\alpha=1}^N \sigma_{\alpha,i}^x : |\rightarrow_1, \rightarrow_2, \dots, \rightarrow_N\rangle_i$ avec $\sigma_{\alpha,i}^x |\rightarrow_\alpha\rangle_i = |\rightarrow_\alpha\rangle_i$. Tous les spins i sont décimés et de nouveaux couplages à deux et quatre spins effectifs sont générés entre leurs voisins par perturbation au second ordre [289, 290]

$$\tilde{J}_i = \frac{J_{i-1}J_i}{h_i + (N-1)g_i}, \quad \tilde{K}_i = \frac{K_{i-1}K_i}{2[h_i + (N-2)g_i]}. \quad (5.9)$$

avec le rapport effectif associé

$$\tilde{\epsilon}_i^J = \frac{\tilde{K}_i}{\tilde{J}_i} = \frac{\epsilon_{i-1}^J \epsilon_i^J}{2} \frac{1 + (N-1)\epsilon_i^h}{1 + (N-2)\epsilon_i^h}. \quad (5.10)$$

2. Si $\Omega = J_i$, l'état fondamental de l'hamiltonien local

$$H' = - \sum_{\alpha=1}^N J_i \sigma_{\alpha,i}^z \sigma_{\alpha,i+1}^z - \sum_{\alpha < \beta} K_i \sigma_{\alpha,i}^z \sigma_{\alpha,i+1}^z \sigma_{\beta,i}^z \sigma_{\beta,i+1}^z \quad (5.11)$$

est obtenu lorsque les paires de spins voisins i et $i+1$ de chaque chaîne d'Ising sont ferromagnétiques i.e. $|\uparrow\uparrow\rangle$ ou $|\downarrow\downarrow\rangle$. Les champs effectifs couplés au macro-spin formé par ces paires sont [289, 290]

$$\tilde{h}_i = \frac{h_i h_{i+1}}{J_i + (N-1)K_i}, \quad \tilde{g}_i = \frac{g_i g_{i+1}}{2[J_i + (N-2)K_i]} \quad (5.12)$$

avec le rapport effectif associé

$$\tilde{\epsilon}_i^h = \frac{\tilde{g}_i}{\tilde{h}_i} = \frac{\epsilon_i^h \epsilon_{i+1}^h}{2} \frac{1 + (N-1)\epsilon_i^J}{1 + (N-2)\epsilon_i^J}. \quad (5.13)$$

Ces deux règles de décimation peuvent s'écrire sous la forme plus familière

$$\tilde{J}_i = \frac{J_{i-1}J_i}{h_i \kappa}, \quad \tilde{h}_i = \frac{h_i h_{i+1}}{J_i \kappa} \quad (5.14)$$

avec $\kappa = 1 + (N-1)\epsilon$. Le rapport ϵ est également renormalisé en

$$\tilde{\epsilon}_i = \frac{\epsilon_i^2 [1 + (N-1)\epsilon_i]}{2[1 + (N-2)\epsilon_i]}. \quad (5.15)$$

On peut vérifier que pour tout $\epsilon_i < \epsilon_c(N)$, le rapport renormalisé $\tilde{\epsilon}$ est inférieur à ϵ_i de sorte que la renormalisation entraîne le système vers $\epsilon \rightarrow 0$ et donc $\kappa \rightarrow 1$. Par conséquent, le

comportement critique est gouverné par le point fixe de désordre infini du modèle d'Ising pour tout N fini et pour tout $0 < \epsilon_I < \epsilon_c(N)$ [289]. La transition du premier ordre est devenue une transition continue après ajout de désordre, en accord avec le théorème d'Aizenman-Wehr [15, 70]. Lorsque $-1 < \epsilon < 0$, les couplages J et h peuvent être plus grands que ceux qui ont été décimés. Pour $-1/2 < \epsilon < 0$, l'exposant de la longueur de corrélation du système pur vaut $\nu < 2$ de sorte que, d'après le critère de Harris, le désordre est pertinent et on s'attend à un comportement critique gouverné par le point fixe de désordre infini du modèle d'Ising, même pour une quantité infinitésimale de désordre. Lorsque $-1 < \epsilon < -1/2$, le désordre n'est plus pertinent. Dans ce cas, comme pour le modèle d'horloge, le comportement critique dépend de l'intensité du désordre [240].

Lorsque $\epsilon > \epsilon_c(N)$, ϵ diverge au cours de la renormalisation et la procédure décrite précédemment n'est plus valable. Le couplage à quatre spins K et le champ transverse à deux spins g dominant le comportement du système. Lorsque $N \geq 3$, en utilisant une procédure de SDRG différente de celle présentée ci dessus, on montre que le comportement critique reste gouverné par un point fixe de désordre infini mais celui-ci n'est plus celui du modèle d'Ising à cause d'une plus grande symétrie de l'hamiltonien [290, 291]. Il n'y a pas de phase produit.

Les résultats présentés sont obtenus lorsque $\epsilon^J = \epsilon^h = \epsilon_I > 0$. Si du désordre est également introduit dans les rapports $\epsilon_i^J, \epsilon_i^h$, trois cas peuvent survenir (avec $N \geq 3, \epsilon > 0$) :

1. Si tous les ϵ_i^J et tous les ϵ_i^h sont inférieurs à $\epsilon_c(N)$, alors le résultat est identique au cas non désordonné car $\tilde{\epsilon}$ tend vers 0 lors de la renormalisation. Le comportement critique est gouverné par le point fixe de désordre infini du modèle d'Ising [16].
2. Si tous les ϵ_i^J et tous les ϵ_i^h sont plus grands que $\epsilon_c(N)$, alors $\tilde{\epsilon}$ ne peut que croître. Le comportement critique est gouverné par le point fixe de désordre infini spécifique à Ashkin-Teller [290, 291].
3. Si les ϵ_i^J et les ϵ_i^h sont répartis uniformément autour de $\epsilon_c(N)$, les procédures de SDRG ne sont plus valables. Pour le modèle à $N = 3$ couleurs, des simulations Monte-Carlo indiquent le retour d'une phase produit entre la phase de Baxter et la phase paramagnétique après $\epsilon_c(N)$ [292]. Les exposants critiques estimés sont compatibles avec ceux du modèle d'Ising quantique désordonné sur toutes les lignes de transition mais sans être suffisamment précis pour écarter d'autres scénarios.

5.2 Cas particulier du modèle à deux couleurs

Dans la section précédente, on a traité du cas à $N \geq 2$ couleurs dans la limite de couplage faible et $N \geq 3$ dans la limite de couplage fort. On détaille ici le cas $N = 2$ qui est celui que nous étudierons en dimensions $D > 1$ par la suite. On réécrit l'hamiltonien, en notant σ_i^k et τ_i^k les matrices de Pauli avec $k = x, y, z$ associées à chacun des deux modèles d'Ising couplés,

$$H_Q^{ATN2} = - \sum_{\langle ij \rangle} [J_{ij}(\sigma_i^z \sigma_j^z + \tau_i^z \tau_j^z) + K_{ij} \sigma_i^z \sigma_j^z \tau_i^z \tau_j^z] - \sum_i [h_i(\sigma_i^x + \tau_i^x) + g_i \sigma_i^x \tau_i^x]. \quad (5.16)$$

5.2.1 Règles de décimation

En toute généralité, chaque couplage h_i, g_i, K_{ij}, J_{ij} peut être décimé. Une procédure de renormalisation implique quatre spins (deux spins σ et deux spins τ) soit seize états. Dans le cas des décimations h_i et J_{ij} seuls quatre de ces seize états sont de plus basse énergie (explicités par la suite). Pour les décimations de g_i et K_{ij} , il y en a huit. Or, pour avoir une procédure de renormalisation consistante, il faut que la forme de l'hamiltonien soit inchangée. Il est nécessaire de considérer le second couplage le plus fort sur le même site pour lever la dégénérescence de ces huit états. Le schéma de la figure 5.2 illustre ce point en prenant l'exemple du cas $\Omega = K_{ij}$. L'hamiltonien $\mathcal{H}' = K_{ij}\sigma_i^z\sigma_j^z\tau_i^z\tau_j^z$ a seize états propres et 8 sont de plus basse énergie (rectangle rouge). L'ajout à \mathcal{H}' des contributions venant de J_{ij} (rectangle vert pomme) ou de g_i (rectangle vert forêt) permet de réduire à quatre le nombre d'états propres de plus basse énergie. Au total, le modèle d'Ashkin-Teller quantique désordonné requiert alors six règles de décimation.

On associe initialement à chaque site i de chaque modèle d'Ising un moment magnétique $\mu_i^\sigma = \mu_i^\tau = 1$ et une polarisation $p_i = 1$ à chaque couple de spins $\sigma_i^z\tau_i^z$. Par dualité, les six cas se déduisent de trois, que l'on détaille plus particulièrement. On généralise à toutes les dimensions $D \geq 1$ les règles de décimation [19] avec l'application de la règle du maximum :

1. Si le couplage le plus grand est la liaison $\Omega = J_{ij}$, le terme dominant de l'hamiltonien (5.16) est $\mathcal{H}' = -J_{ij}(\sigma_i^z\sigma_j^z + \tau_i^z\tau_j^z)$. La plus petite valeur propre de \mathcal{H}' est $-2J_{ij}$. Les vecteurs propres associés sont $|\tilde{s}\rangle = |k\rangle_i^\sigma \otimes |k\rangle_j^\sigma \otimes |v\rangle_i^\tau \otimes |v\rangle_j^\tau$ avec $k, v \in [\uparrow, \downarrow]$. Les deux spins σ se trouvent dans le même état et se comportent comme un macro-spin d'Ising avec deux états et un moment magnétique $\tilde{\mu}^\sigma = \mu_i^\sigma + \mu_j^\sigma$. Il en va de même pour les deux spins τ qui se comportent comme un macro-spin avec un moment magnétique $\tilde{\mu}^\tau = \mu_i^\tau + \mu_j^\tau$. La polarisation est $\tilde{p} = p_i + p_j$. En utilisant la théorie des perturbations au second ordre, chaque macro-spin est couplé à un champ transverse effectif

$$\tilde{h} = \frac{h_i h_j}{K_{ij} + J_{ij}}, \quad (5.17)$$

et les deux macro-spins sont couplés entre eux par le champ transverse effectif

$$\tilde{g} = \frac{g_i g_j}{2J_{ij}}. \quad (5.18)$$

Le rapport $\tilde{\epsilon}^h$ est renormalisé en

$$\tilde{\epsilon}^h = \frac{\tilde{g}}{\tilde{h}} = \epsilon_i^h \epsilon_j^h \frac{1 + \epsilon_{ij}^j}{2}. \quad (5.19)$$

Cette décimation est illustrée, pour le modèle unidimensionnel, sur la figure 5.3.

2. Si le couplage le plus grand est la liaison à quatre spins $\Omega = K_{ij}$ et $2J_{ij} > g_i, g_j^2$, le terme dominant de l'hamiltonien (5.16) est $\mathcal{H}' = -K_{ij}\sigma_i^z\sigma_j^z\tau_i^z\tau_j^z - J_{ij}(\sigma_i^z\sigma_j^z + \tau_i^z\tau_j^z)$.

2. A la différence de [19] qui considère le critère $J_{ij} > g_i, g_j$. On ne s'attend pas à ce que ce changement soit pertinent. Cette différence mineure se retrouvera dans les critères des décimations suivantes.

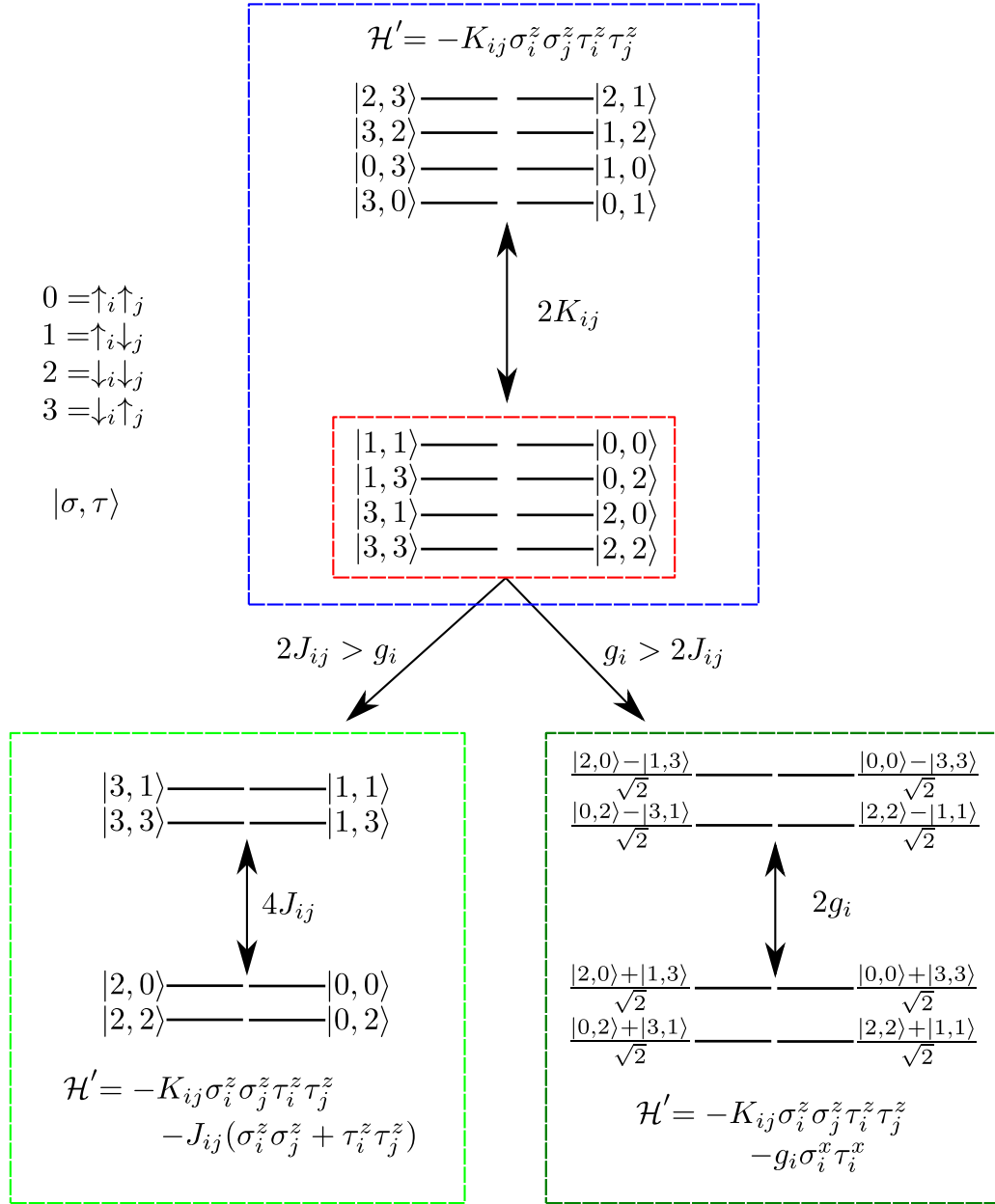


FIGURE 5.2 – Schéma illustrant la nécessité de prendre en compte le second plus grand couplage pour la décimation du plus grand couplage $\Omega = K_{ij}$. Les huit états propres (rectangle rouge) de \mathcal{H}' (rectangle bleu) ne peuvent être décrits par deux opérateurs $\tilde{\sigma}$ et $\tilde{\tau}$ laissant l'hamiltonien (5.16) invariant. L'ajout à \mathcal{H}' des couplages J_{ij} (rectangle vert pomme) ou du champ transverse à deux spins g_i (rectangle vert forêt) permet d'avoir un sous-espace de plus basse énergie ($-K_{ij} - 2J_{ij}$ ou $-K_{ij} - g_i$) de dimension 4. Il en va de même pour la décimation du plus grand couplage $\Omega = g_i$.

La plus petite valeur propre de \mathcal{H}' est $-K_{ij} - 2J_{ij}$. Les vecteurs propres associés sont $|\tilde{s}\rangle = |k\rangle_i^\sigma \otimes |k\rangle_j^\sigma \otimes |v\rangle_i^\tau \otimes |v\rangle_j^\tau$ avec $k, v \in [\uparrow, \downarrow]$. On obtient donc exactement le même résultat que s'il s'agissait de la décimation du couplage J_{ij} .

3. Si le couplage le plus grand est la liaison à quatre spins $\Omega = K_{ij}$ et $g_i > 2J_{ij}, g_j$ (le cas $g_j < g_i$ se traite de la même manière), le terme dominant de l'hamiltonien (5.16) est $\mathcal{H}' = -K_{ij}\sigma_i^z\sigma_j^z\tau_i^z\tau_j^z - g_i\sigma_i^x\tau_i^x$. La plus petite valeur propre de \mathcal{H}' est $-K_{ij} - g_i$. Les quatre vecteurs propres associés sont indiqués sur la figure 5.2 dans le rectangle vert forêt. Ces états sont comme mixtes. D'un côté, les moments magnétiques associé aux spins effectif $\tilde{\sigma}_j$ et $\tilde{\tau}_j$ de l'amas formé sont $\tilde{\mu}_j^u = \mu_j^u$ avec $u = \sigma, \tau$ de l'autre la polarisation est $\tilde{p} = p_i + p_j$. En utilisant la théorie des perturbations au second ordre, les spins effectifs $\tilde{\sigma}_j$ et $\tilde{\tau}_j$ sont couplés à un champ transverse effectif

$$\tilde{h}_j = \frac{2h_i h_j}{K_{ij}}, \quad (5.20)$$

et ils sont liés aux spins voisins k de i par les couplages

$$\tilde{J}_{jk} = \max\left(J_{jk}, \frac{2J_{ij}J_{ik}}{g_i}\right), \quad \tilde{K}_{jk} = \max\left(K_{jk}, K_{ik} + \frac{J_{ik}^2}{g_i}\right). \quad (5.21)$$

Une spécificité de la dimension $D > 1$ est que les spins k et l voisins de i sont liés par le couplage

$$\tilde{J}_{kl} = \max\left(J_{kl}, \frac{J_{il}J_{ik}}{g_i}\right) \quad (5.22)$$

et un nouvel opérateur couplant trois spins est généré :

$$-\frac{J_{il}J_{ik}}{g_i} [\sigma_i^z \tilde{\sigma}_j^z \tilde{\tau}_j^z \tau_k^z + \sigma_k^z \tilde{\sigma}_j^z \tilde{\tau}_j^z \tau_l^z]. \quad (5.23)$$

L'ajout de cet opérateur ne laisse plus invariant la forme de l'hamiltonien après une procédure de renormalisation. Dans la suite, on suppose que ce terme est non-pertinent et donc on n'en tient pas compte.

Mentionnons également ici deux difficultés liées à l'algorithme optimisé de SDRG utilisé par la suite :

- Il n'est pas possible de prendre en compte l'ajout $\frac{J_{ik}^2}{g_i}$ à K_{ik} (5.21). Étant donné qu'il tend à augmenter les couplages \tilde{K}_{jk} lorsqu'il est question d'une décimation d'un couplage K_{ij} , on suppose cet ajout non pertinent pour déterminer les propriétés critiques.
- Il n'est pas possible de générer des liaisons avec un facteur 2 comme \tilde{J}_{jk} (5.21) et d'autres sans ce facteur comme \tilde{J}_{kl} (5.22). On suppose alors que considérer

$$\tilde{J}_{kl} = \max\left(J_{kl}, \frac{2J_{il}J_{ik}}{g_i}\right) \quad (5.24)$$

ne change pas les propriétés critiques.

Des recherches complémentaires devront être menées afin de statuer sur la validité de ces approximations.

Le rapport $\tilde{\epsilon}_j^h$ est renormalisé en

$$\tilde{\epsilon}_j^h = \frac{g_j}{\tilde{h}_j} = \epsilon_j^h \frac{K_{ij}}{2h_i}. \quad (5.25)$$

Le rapport $\tilde{\epsilon}_{jk}^J$ peut prendre quatre valeurs différentes en fonction des couplages conservés après application de la règle du maximum. Cette décimation est illustrée, pour le modèle unidimensionnel, sur la figure 5.3.

4. Si le couplage le plus grand est le champ transverse à deux spins $\Omega = g_i$ et $K_{ij} > 2h_i$, avec K_{ij} le plus grand couplage à quatre spins impliquant le site i , tout est rigoureusement analogue au cas de la décimation 3.
5. Si le couplage le plus grand est le champs transverse à deux spins $\Omega = g_i$ et $2h_i > K_{ij}$, avec K_{ij} le plus grand couplage à quatre spins impliquant le site i , le terme dominant de l'hamiltonien (5.16) est $\mathcal{H}' = -g_i \sigma_i^x \tau_i^x - h_i (\sigma_i^x + \tau_i^x)$. Les spins σ_i et τ_i sont décimés (gelés dans l'état $|\rightarrow\rangle_i$) et de nouvelles liaisons à deux et quatre spins sont générées entre leurs voisins par perturbation au second ordre

$$\tilde{J}_{jk} = \max \left(J_{jk}, \frac{J_{ij} J_{ik}}{g_i + h_i} \right), \quad (5.26)$$

$$\tilde{K}_{jk} = \max \left(K_{jk}, \frac{K_{ij} K_{ik}}{2h_i} \right). \quad (5.27)$$

Le rapport renormalisé

$$\tilde{\epsilon}_{jk}^J = \frac{\tilde{K}_{jk}}{\tilde{J}_{jk}} \quad (5.28)$$

peut prendre quatre valeurs différentes en fonction des couplages conservés après application de la règle du maximum.

6. Si le couplage le plus grand est le champ transverse $\Omega = h_i$, tout est rigoureusement analogue au cas de la décimation 5.

Les six règles de décimation peuvent se regrouper deux par deux. Les règles 1, 2 forment des amas ordonnés aussi bien par rapport à σ^z et τ^z que $\sigma^z \tau^z$. Ainsi, dans la limite où il n'y a que des décimations 1 et 2, ce qui survient lorsque $J, K \gg h, g$, le système est dans la phase de Baxter pour $\epsilon > 0$. À l'inverse, les règles 5 et 6 gèlent les spins individuellement. Dans la limite où il n'y a que de telles décimations, i.e. $h, g \gg K, J$, le système est dans la phase paramagnétique pour $\epsilon > 0$. Les décimations 3 et 4 forment des amas encore jamais rencontrés pour les modèles de Potts et horloge. Elles ne surviennent que lorsque $\epsilon > 1$. Dans la limite où il n'y a que de telles décimations, l'état formé a une polarisation non nulle $\langle \sigma^z \tau^z \rangle \neq 0$ et une aimantation nulle $\langle \sigma^z \rangle = \langle \tau^z \rangle \rightarrow 0$, ce qui correspond à une phase produit.

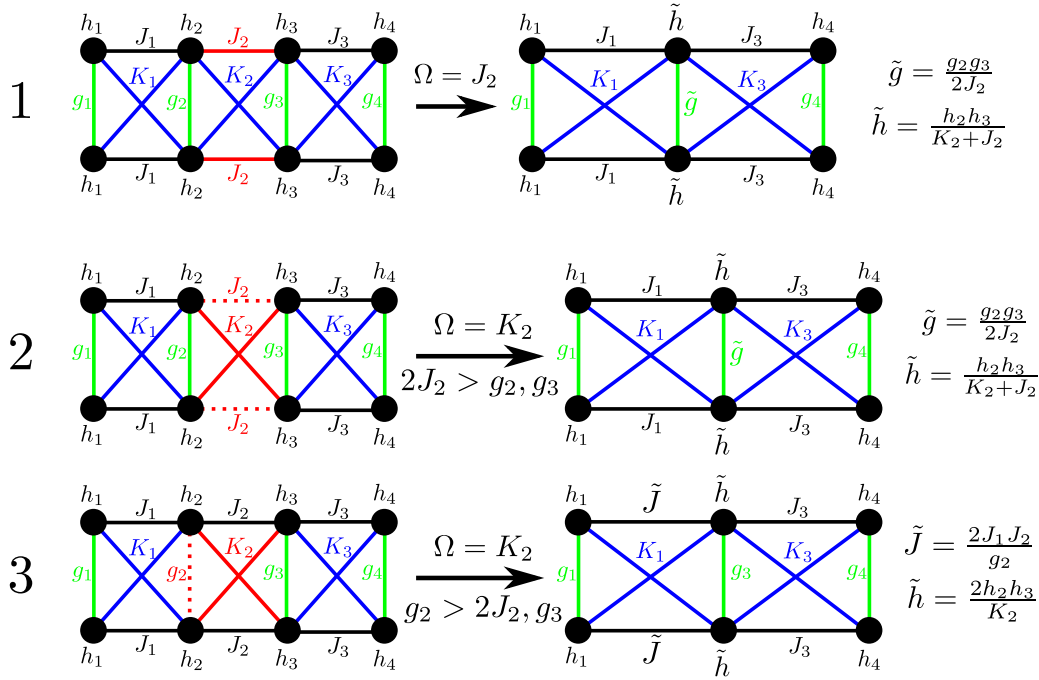


FIGURE 5.3 – Représentation schématique des trois premières règles de décimation décrites dans le cas unidimensionnel. Le rouge indique les plus grands couplages qui vont être décimés. Les pointillés indiquent les seconds plus grands couplages si nécessaire. Les couplages effectifs sont donnés explicitement à droite.

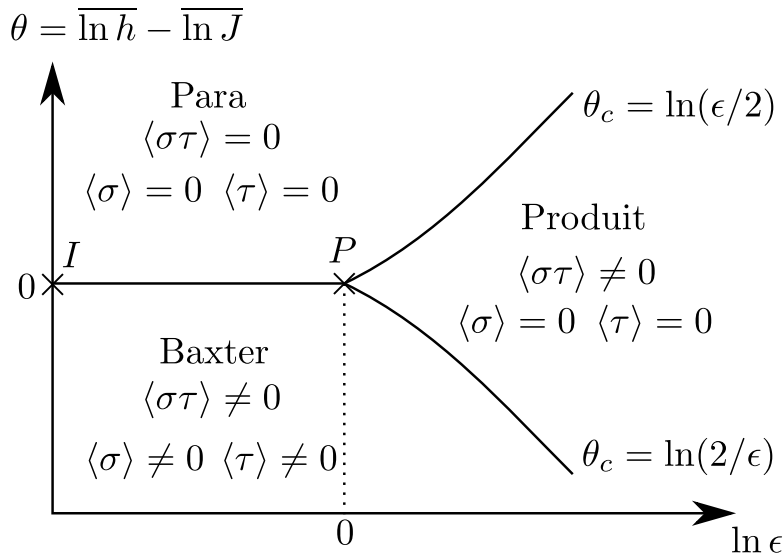


FIGURE 5.4 – Représentation schématique du diagramme de phase de l'état fondamental du modèle unidimensionnel d'Ashkin-Teller quantique désordonné [19]. Pour $\ln \epsilon < 0$, une transition de phase continue sépare les phases paramagnétique et de Baxter. Pour $\ln \epsilon > 0$, une phase produit sépare les phases paramagnétique et Baxter. Le point I correspond au modèle d'Ising et P au modèle de Potts à $q = 4$ états. Le point P est également un point tricritique. La ligne de transition entre les points I et P est connue exactement, de même que celles dans la limite $\ln \epsilon \rightarrow +\infty$ dont les pentes sont $\ln(\epsilon/2)$ et $\ln(2/\epsilon)$

5.2.2 Diagramme de phase en dimension $D = 1$

Le diagramme de phase de l'état fondamental du modèle d'Ashkin-Teller unidimensionnel quantique désordonné est représenté schématiquement sur la figure 5.4. Les positions des points I (deux modèles d'Ising découplés) et P (modèle de Potts à $q = 4$ états) sont connues exactement et se trouvent à $\theta = \overline{\ln h} - \overline{\ln J} = 0$ [16, 17]. Les transitions entre les phases paramagnétique et ferromagnétique pour $\epsilon < 1$, de même qu'entre les phases paramagnétique et produit et entre les phases de Baxter et produit pour $\epsilon > 1$ sont toutes continues et gouvernées par un point fixe de désordre infini appartenant à la classe d'universalité du modèle d'Ising désordonné unidimensionnel [19]. Le point P est un point tricritique situé à $\theta_c = 0$ et $\epsilon = 1$. Il possède deux directions instables correspondant aux lignes $\theta_c = 0$ et $\epsilon = 1$. Sur la ligne $\epsilon = 1$, les décimations (1-2) et (5-6) sont identiques et (3-4) ne peuvent survenir. Les règles de décimation sont identiques à celles du modèle de Potts à $q = 4$ états désordonné quantique. Le flot de renormalisation est donc identique à celui du modèle d'Ising désordonné quantique [17]. Les exposants critiques associés à la longueur de corrélation $\xi \sim |\theta - \theta_c|^{-\nu}$ et à l'aimantation $M \sim |\theta - \theta_c|^\beta$ sont ceux du modèle d'Ising quantique désordonné i.e. $\nu = 2$ et $\beta = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ [16]. Le long de la ligne $\theta = \theta_c$, les exposants associés à la longueur de corrélation $\xi \sim (\epsilon - 1)^{-\nu_\epsilon}$ et à la polarisation $M_P \sim (\epsilon - 1)^{\beta_\epsilon}$ sont [19]

$$\nu_\epsilon = \frac{8}{1 + \sqrt{7}}, \quad \beta_\epsilon = \frac{6 - 2\sqrt{5}}{1 + \sqrt{7}}. \quad (5.29)$$

Au voisinage du point critique, la polarisation présente le comportement d'échelle

$$M_p((\theta - \theta_c), \epsilon - 1) = b^{-\beta/\nu} M_p((\theta - \theta_c)b^{1/\nu}, (\epsilon - 1)b^{1/\nu_\epsilon}). \quad (5.30)$$

Si les rapports initiaux ϵ_i^h et ϵ_{ij}^J sont également désordonnés, les transitions entre les différentes phases sont inchangées si elles se trouvent suffisamment loin du point tricritique. Au point tricritique situé à $\theta_c = 0$ et $\epsilon = \epsilon_c$, le comportement critique de la longueur de corrélation $\xi \sim (\langle \ln \epsilon \rangle - \ln \epsilon_c)^{-\nu_\epsilon}$ et de la polarisation $M_p \sim (\langle \ln \epsilon \rangle - \ln \epsilon_c)^{\beta_\epsilon}$ font intervenir les exposants critiques estimés numériquement [19]

$$\nu_\epsilon = 2.48(15), \quad \beta = 0.474(20). \quad (5.31)$$

5.2.3 Comportement critique en dimensions $D = 2, 3$

On considère le cas où les rapports sont tous identiques initialement $\epsilon_{ij}^J = \epsilon_i^h = \epsilon_I \geq 0$. On distingue le cas où initialement les rapports sont tous plus petits que 1 du cas où il sont tous plus grands.

- On suppose $0 < \epsilon_I < 1$. Initialement, il ne se produit que des décimations de type 1 et 6. Si la décimation est de type 1, alors le rapport renormalisé $\tilde{\epsilon}^h$ (5.19) est plus faible que $\epsilon_i^h, \epsilon_j^h$ ³. Si la décimation est de type 6, \tilde{J}_{jk} (5.28) peut être comparé aux rapports

3. Ce qui suppose qu'à n'importe quelle étape de la renormalisation $\epsilon_i^h, \epsilon_j^h, \epsilon_{ij}^J < 1$.

$\epsilon_{ik}^J, \epsilon_{ij}^J$ et ϵ_{jk}^J (s'il existe). Les quatre cas possibles sont :

- Si $\tilde{J}_{jk} = J_{jk}$ et $\tilde{K}_{jk} = K_{jk}$ alors $\tilde{\epsilon}_{jk}^J = \epsilon_{jk}^J$.
- Si $\tilde{J}_{jk} = \frac{J_{ij}J_{ik}}{g_i+h_i}$ et $\tilde{K}_{jk} = \frac{K_{ij}K_{ik}}{2h_i}$ alors $\tilde{\epsilon}_{jk}^J = \epsilon_{ik}^J \epsilon_{ij}^J \frac{1+\epsilon_i^h}{2} < \epsilon_{ik}^J, \epsilon_{ij}^J$.
- Si $\tilde{J}_{jk} = J_{jk}$ et $\tilde{K}_{jk} = \frac{K_{ij}K_{ik}}{2h_i}$ alors

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{K}_{jk}}{J_{jk}} &= \frac{K_{ij}K_{ik}}{2h_i J_{jk}} < \epsilon_{ij}^J \epsilon_{ik}^J \frac{J_{ij}J_{ik}}{2h_i J_{jk}} \\ &< \epsilon_{ij}^J \epsilon_{ik}^J \frac{g_i + h_i}{2h_i} \\ &< \epsilon_{ij}^J \epsilon_{ik}^J. \end{aligned}$$

Le passage entre les deux dernières lignes vient de $h_i > g_i$ car la décimation 6 correspond à $\Omega = h_i$.

- Si $\tilde{J}_{jk} = \frac{J_{ij}J_{ik}}{g_i+h_i} > J_{jk}$ et $\tilde{K}_{jk} = K_{jk}$ alors $\tilde{\epsilon}_{jk}^J < \epsilon_{jk}^J$.

Dans tous les cas, $\tilde{\epsilon}_{jk}^J$ est plus petit ou égal à au moins un des rapports $\epsilon_{ik}^J, \epsilon_{ij}^J$ et ϵ_{jk}^J . Ainsi, si les rapports ϵ_J et ϵ_h sont initialement tous compris entre 0 et 1, alors les rapports renormalisés $\tilde{\epsilon}^J$ et $\tilde{\epsilon}^h$ seront nécessairement plus petits ou égaux que les rapports décimés. Les décimations sont alors systématiquement de type 1 ou 6 et conduisent aux phases de Baxter et paramagnétique. En outre, sur les lignes $\epsilon = 0$ et $\epsilon = 1$, la transition est continue et gouvernée par le point fixe de désordre infini du modèle d'Ising désordonné en dimensions D (d'après nos résultats sur le comportement critique du modèle de Potts). On s'attend alors à ce que ce soit également le cas sur toute la ligne de transition entre la phase de Baxter et paramagnétique pour $0 \leq \epsilon \leq 1$.

- On suppose $\epsilon_I > 1$. Initialement, il ne se produit que les décimations 2,3,4 et 5. Les décimations 2 et 5 étant identiques à 1 et 6, elles peuvent être traitées de la même manière (avec $\epsilon^J, \epsilon^h > 1$ et $g_i > h_i$) et impliquent que $\tilde{\epsilon}^J$ et $\tilde{\epsilon}^h$ ne peuvent qu'augmenter. En supposant Ω grand devant tous les autres couplages (ce qui est le cas au point critique de désordre infini), les couplages effectifs sont toujours plus grands que ceux décimés sauf dans un cas. Lors de la décimation de type 3, le couplage effectif \tilde{J}_{kl} (5.22) dépend de J_{ki}, J_{li} et g_i qui ne sont pas reliés entre eux par une condition particulière (pour une décimation de type 4, $\Omega = g_i$ donc $g_i \gg J_{ki}, J_{li}$). Ce cas survient principalement lors de la transition entre les phases de Baxter et produit où il y a une compétition entre les second plus grands couplages voisins J_{ij} et g_i sans que cela ne change les propriétés critiques car la décimation d'un couplage J_{ij} est équivalente à la décimation d'un couplage K_{ij} avec J_{ij} comme plus grand second voisin. Ainsi, si on suppose initialement tous les rapports $\epsilon^J, \epsilon^h > 1$, alors les rapports renormalisés $\tilde{\epsilon}^J$ et $\tilde{\epsilon}^h$ sont la plupart du temps plus grands ou égaux à ceux décimés. Les décimations sont alors presque systématiquement de type 2,3,4 ou 6 conduisant aux phases de Baxter, produit et paramagnétique dans tous les cas. On s'attend donc à ce que les transitions entre ces phases soient gouvernées par le point fixe de désordre infini du modèle d'Ising désordonné en dimensions D .

On discute plus particulièrement du point tricritique. En dimensions $D = 3$, pour le

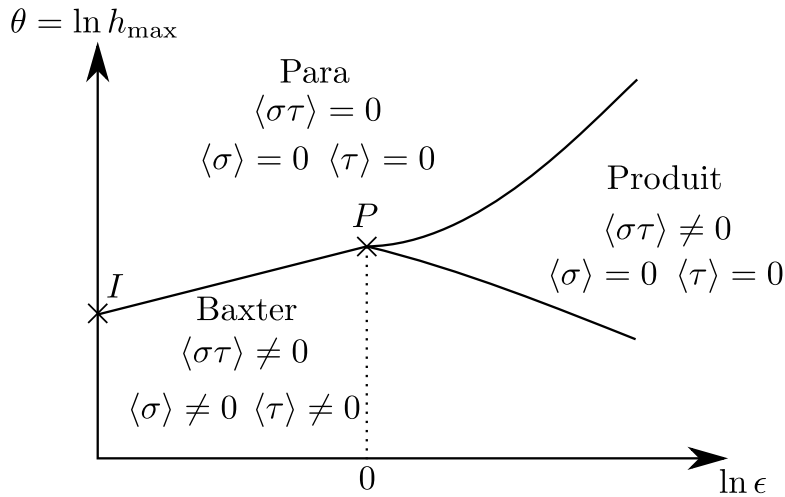


FIGURE 5.5 – Représentation schématisée du diagramme de phase de l'état fondamental du modèle d'Ashkin-Teller quantique désordonné en dimensions $D > 1$. Pour $\ln \epsilon < 0$, une transition de phase continue sépare les phases paramagnétique et de Baxter. Pour $\ln \epsilon > 0$, une phase produit sépare les phases paramagnétique et Baxter. Le point I correspond au modèle d'Ising et P au modèle de Potts à $q = 4$ états. Le point P est également un point tricritique. Les lignes de transition ne sont plus connues. Pour $\ln \epsilon > 0$, le paramètre de contrôle est $\theta = \ln g_{\max}$.

modèle d'Ashkin-Teller isotrope classique, les simulations Monte-Carlo montrent que le point correspondant au modèle de Potts à quatre états n'est plus un point tricritique [293]. Pour la version quantique désordonnée bidimensionnelle, il en va autrement. Supposons que l'on se situe au point P ($\epsilon = 1, \theta_c^P$) avec θ_c^P la position du point critique du modèle de Potts à quatre états. Si on choisit $\epsilon_I = 1 + u$ avec $u \ll 1$. Les décimations sont initialement de type 2 et 5. Ces décimations ne peuvent que faire augmenter ϵ_i^h et ϵ_{ij}^J jusqu'à ce que les décimations deviennent majoritairement de type 3 et 4 caractéristique de la présence d'une phase produit. Si la SDRG peut s'appliquer, le point P est la position du point tricritique même en dimensions $D \geq 1$.

A la différence du cas unidimensionnel, il y a plus de couplages J et K que de champs transverses h et g sur un réseau hypercubique. De plus, parce que seule la décimation 3 peut générer des couplages plus grands que ceux décimés, on s'attend à ce que la pente de la transition entre les phases de Baxter et produit soit plus faible qu'entre les phases produit et paramagnétique. Le diagramme de phase n'est donc plus symétrique et une représentation schématisée est donnée sur la figure 5.5

Si les rapports ϵ_{ij}^J et ϵ_i^h sont également désordonnés, les conclusions sont analogues à celles du cas unidimensionnel.

5.2.4 Algorithme utilisé

Les règles de décimation du modèle d'Ashkin-Teller présentées à la section 5.2 peuvent être reformulées en terme de décimation de nœuds et d'arêtes sur un graphe. On adopte les notations

utilisées pour les modèles de Potts et d'horloge en définissant

$$r_i^a = -\ln h_i, \quad r_i^b = -\ln g_i, \quad d_{ij}^a = -\ln J_{ij}, \quad d_{ij}^b = -\ln K_{ij}. \quad (5.32)$$

Avec ce formalisme, les règles de décimation deviennent :

1. si $\Omega = d_{ij}^a$ alors les poids des nœuds sont actualisés comme

$$\tilde{r}^a = r_i^a + r_j^a - d_{ij}^a + \ln \left(1 + e^{d_{ij}^a - d_{ij}^b} \right), \quad (5.33)$$

$$\tilde{r}^b = r_i^b + r_j^b - d_{ij}^a + \ln 2, \quad (5.34)$$

et le moment magnétique et la polarisation comme

$$\tilde{\mu} = \mu_i + \mu_j, \quad (5.35)$$

$$\tilde{p}_i = p_i + p_j. \quad (5.36)$$

2. si $\Omega = d_{ij}^b$ avec $d_{ij}^a - \ln 2 < r_i^b, r_j^b$, alors les poids des nœuds sont actualisés comme⁴

$$\tilde{r}^a = r_i^a + r_j^a - d_{ij}^b + \ln \left(1 + e^{d_{ij}^b - d_{ij}^a} \right), \quad (5.37)$$

$$\tilde{r}^b = r_i^b + r_j^b - d_{ij}^a + \ln 2, \quad (5.38)$$

et le moment magnétique et la polarisation comme

$$\tilde{\mu} = \mu_i + \mu_j, \quad (5.39)$$

$$\tilde{p}_i = p_i + p_j. \quad (5.40)$$

3. si $\Omega = d_{ij}^b$ avec $r_i^b < d_{ij}^a - \ln 2, r_j^b$ (raisonnement analogue si $r_j^a < r_i^a$) alors les poids des nœuds et arêtes sont actualisés comme

$$\tilde{r}^a = r_i^a + r_j^a - d_{ij}^b - \ln 2, \quad (5.41)$$

$$d_{jk}^a = \min \left(d_{jk}^a, d_{ij}^a + d_{ik}^a - r_i^b - \ln 2 \right), \quad (5.42)$$

$$d_{kl}^a = \min \left(d_{kl}^a, d_{ki}^a + d_{il}^a - r_i^b - \ln 2 \right), \quad (5.43)$$

$$d_{jk}^b = \min \left(d_{jk}^b, d_{ik}^b \right), \quad (5.44)$$

avec $k, l \neq j$ les voisins du site i , et le moment magnétique et la polarisation comme

$$\tilde{\mu} = \mu_j, \quad (5.45)$$

$$\tilde{p}_i = p_i + p_j. \quad (5.46)$$

4. si $\Omega = r_i^b$ avec $d_{ij}^b < d_{ik}^b, r_j^a - \ln 2$ pour tout k voisin actif de i , tout se passe comme pour

4. les actualisations \tilde{r}^a des décimations 1 et 2 sont identiques mais écrites de manière à limiter les erreurs liées à la précision machine.

la décimation 3.

5. si $\Omega = r_i^b$ et $r_i^a - \ln 2 < d_{ik}^b$ pour tout k voisin de i , alors les poids des arêtes avec les voisins j et k de i sont actualisés comme

$$d_{jk}^a = \min \left[d_{jk}^a, d_{ij}^a + d_{ik}^a - r_i^b + \ln \left(1 + e^{r_i^b - r_i^a} \right) \right], \quad (5.47)$$

$$d_{jk}^b = \min \left[d_{jk}^b, d_{ij}^b + d_{ik}^b - r_i^a + \ln 2 \right]. \quad (5.48)$$

6. si $\Omega = r_i^a$, alors les poids des arêtes avec les voisins j et k de i sont actualisés comme

$$d_{jk}^a = \min \left[d_{jk}^a, d_{ij}^a + d_{ik}^a - r_i^a + \ln \left(1 + e^{r_i^a - r_i^b} \right) \right], \quad (5.49)$$

$$d_{jk}^b = \min \left[d_{jk}^b, d_{ij}^b + d_{ik}^b - r_i^a + \ln 2 \right]. \quad (5.50)$$

Des détails se trouvent dans l'annexe A.3.

Le temps de calcul est plus important que pour le modèle d'horloge pour deux raisons. La première est qu'il est nécessaire d'utiliser deux graphes, l'un pour les variables r^a et d^a , l'autre pour les variables r^b et d^b . La seconde est qu'il est nécessaire de connaître les seconds voisins pour déterminer le type de décimation. Enfin, l'usage de la décimation globale et plus locale est ici rendue nécessaire par les décimations de type 3 qui peuvent générer des couplages J plus grands que ceux décimés. Les tailles et les nombres d'échantillons seront réduits en conséquence.

Il y a désormais deux paramètres d'ordre à considérer, le moment magnétique $\mu = \langle \sigma^z \rangle = \langle \tau^z \rangle$ et la polarisation $p = \langle \sigma^z \tau^z \rangle$. Pour déterminer les différentes transitions de phases, nous avons appliqué la méthode du doublement au moment magnétique et à la polarisation du dernier amas décimé du système doublé. Lorsqu'à la fois le moment magnétique et la polarisation du système doublé sont deux fois plus grands que ceux du modèle original, on peut conclure que le système est dans la phase de Baxter. Lorsque seule la polarisation est multipliée par deux, le système est dans la phase produit. Lorsque les deux paramètres d'ordre sont inchangés, le système est dans la phase paramagnétique.

5.3 Modèle d'Ashkin-Teller quantique désordonné à deux couleurs en dimensions $D > 1$

Nous présentons dans cette section nos résultats préliminaires concernant les propriétés du point tricritique et des transitions avec la phase produit.

5.3.1 Point tricritique

En dimensions $D > 1$ et pour $\epsilon \geq 1$, on définit, comme pour les modèles de Potts de d'horloge, le paramètre de contrôle $\theta = \ln g_{\max}$ où g_{\max} est donné par les distributions initiales

1D	L	1000	5000	10000	50000	100000	500000				
	$n_{\text{échantillons}}$	600000	730000	600000	110000	43000	8000				
2D	L	32	64	128	256	400	512	800	1024	1200	1600
	$n_{\text{échantillons}}$	630000	210000	120000	170000	68000	88000	48000	45000	28000	22000
3D	L	20	40	60	80	100	120				
	$n_{\text{échantillons}}$	930000	560000	190000	75000	72000	40000				

TABLE 5.1 – Tailles de système L et nombre d'échantillons considérés pour les dimensions $D = 1, 2, 3$ afin d'estimer l'exposant ν_ϵ .

des couplages

$$P(K_{ij}) = \frac{K_{ij}^{1/\Delta-1}}{\Delta}, \quad (0 < K_{ij} < 1) \quad (5.51)$$

$$R(g_i) = \frac{g_i^{1/\Delta-1}}{\Delta g_{\max}}, \quad (0 < g_i < g_{\max}). \quad (5.52)$$

Les couplages J_{ij} et h_i sont déterminés par $J_{ij} = K_{ij}/\epsilon_I$ et $h_i = g_i/\epsilon_I$.

Nous avons essayé d'obtenir pour chaque échantillon de désordre la position du point tricritique $(\epsilon_c^i(L), \theta_c^i(L))$ qui nous aurait permis, en exploitant le comportement de taille finie, de déterminer ν_ϵ et β_ϵ . Néanmoins, nous n'avons pas pu déterminer avec précision ces points. Pour un échantillon de désordre, les lignes de transition obtenues avec la méthode du doublement ne sont pas aussi régulières que celles schématisées sur la figure 5.5.

Nous avons estimé l'exposant ν_ϵ en considérant la forme d'échelle de la polarisation (5.30) lorsque $\theta = \theta_c^P$, avec θ_c^P la position du point critique du modèle de Potts à quatre états⁵,

$$M_p(\epsilon - 1) = L^{-\beta/\nu} f_p((\epsilon - 1)L^{1/\nu_\epsilon}) \quad (5.53)$$

avec f_p une fonction universelle. Comme discuté précédemment, $\epsilon = 1$ reste la position du point tricritique en dimensions $D > 1$. Pour limiter les fluctuations, plutôt que de se placer à $\theta = \theta_c^P$ pour chaque échantillon i de taille L , nous avons calculé la position du point pseudo-critique $\theta_c^i(L)$ en utilisant le même algorithme que pour le modèle de Potts étant donné que, pour $\epsilon = 1$, le modèle d'Ashkin-Teller correspond au modèle de Potts à $q = 4$ états. Puis, nous avons mesuré la polarisation de tous les échantillons pour différents rapports ϵ proches de 1 à $\theta = \theta_c^i(L)$ fixé.

Pour vérifier ce protocole, nous avons également considéré le cas unidimensionnel pour lequel les exposants critiques sont connus. On a représenté la variation de la polarisation redimensionnée $M_p L^{\beta/\nu}$ en fonction de la variable $(\epsilon - 1)L^{1/\nu_\epsilon}$ en dimensions $D = 1$ sur la figure 5.6, $D = 2$ sur la figure 5.7 et $D = 3$ sur la figure 5.8. Le nombre d'échantillons et les tailles de système considérées sont résumés dans la table 5.1. Dans le cas unidimensionnel, on a utilisé $\beta/\nu = 1 - \frac{1+\sqrt{5}}{4}$ connu exactement pour le modèle de Potts quantique désordonné à $q = 4$ états [16, 17]. Avec la valeur théorique $\nu_\epsilon = \frac{8}{1+\sqrt{7}}$ [19], les courbes pour les tailles L considérées se superposent comme attendu. En guise de comparaison, l'incrustation représente le cas $\nu_\epsilon = \nu = 2$.

5. Comme discuté dans la section 5.2.3, lorsque $\epsilon_i^h = \epsilon_{ij}^J = \epsilon_I$, le point tricritique se situe à $\epsilon_I = 1$ et $\theta = \theta_c^P$.

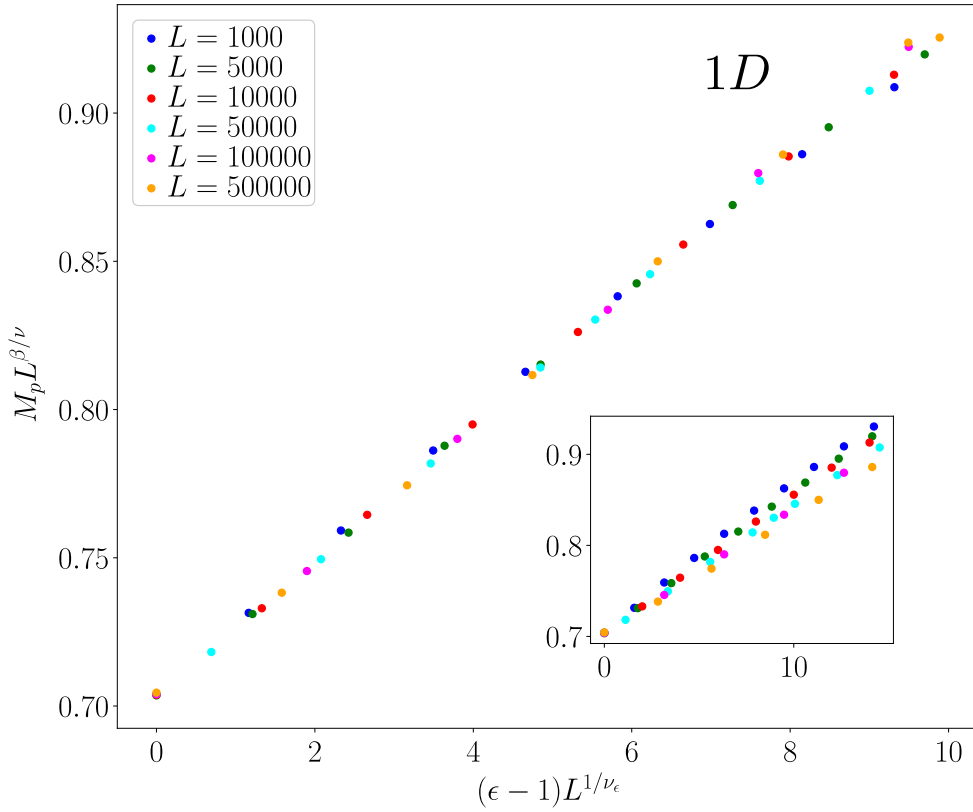


FIGURE 5.6 – Polarisation redimensionnée $M_p L^{\beta/\nu}$ en fonction de $(\epsilon - 1)L^{1/\nu_\epsilon}$ en dimension $D = 1$. Dans l'incrustation, l'exposant ν est utilisé plutôt que ν_ϵ . Les valeurs utilisées pour les exposants critiques sont $\beta/\nu = 1 - \frac{1+\sqrt{5}}{4}$, $\nu_\epsilon = \frac{8}{1+\sqrt{7}}$, $\nu = 2$.

Avec nos données, on peut en conclure que l'exposant critique ν_ϵ est différent de l'exposant ν et compatible avec la valeur théorique attendue. En dimensions $D = 2$ et $D = 3$, aucun exposant n'est connu exactement. On a choisi l'exposant β/ν en accord avec nos estimations des exposants critiques du modèle de Potts, soit $\beta/\nu = 0.983$ en dimensions $D = 2$ et $\beta/\nu = 1.840$ en dimensions $D = 3$. Au point tricritique ($\epsilon = 1$), les points correspondant aux tailles les plus petites ne se superposent pas sur les plus grandes. C'est le signe de la présence de corrections d'échelle comme discuté dans le chapitre 3. En utilisant, respectivement, $\nu_\epsilon = 1.41$ et $\nu_\epsilon = 1.15$, on obtient visuellement un bon recouvrement des différentes courbes. Néanmoins, l'estimation de ν_ϵ dépend du choix de la valeur de l'exposant β/ν . En fixant $\nu_\epsilon = \nu$ avec, respectivement, $\nu = 1.25$ et $\nu = 1$, nos données ne permettent pas d'obtenir un recouvrement des courbes pour les valeurs β/ν estimées pour le modèle de Potts. Nous en concluons que l'exposant ν_ϵ est différent de l'exposant ν en dimensions $D = 2$ et $D = 3$ et on estime $\nu_\epsilon^{2D} \simeq 1.41$ et $\nu_\epsilon^{3D} \simeq 1.15$.

5.3.2 Étude des deux transitions à $\epsilon > 1$

Lorsque $\epsilon > 1$, une phase produit se trouve entre les phases Baxter et paramagnétique. Pour étudier l'ordre de la transition et le comportement critique associé, nous avons fixé $\epsilon = 2$ et un désordre initial $\Delta = 2$. Pour chaque échantillon, on détermine les deux points pseudo-critique $\theta_{c1}^i(L)$ (transition Baxter/produit) et $\theta_{c2}^i(L)$ (transition produit/paramagnétique) par la mé-

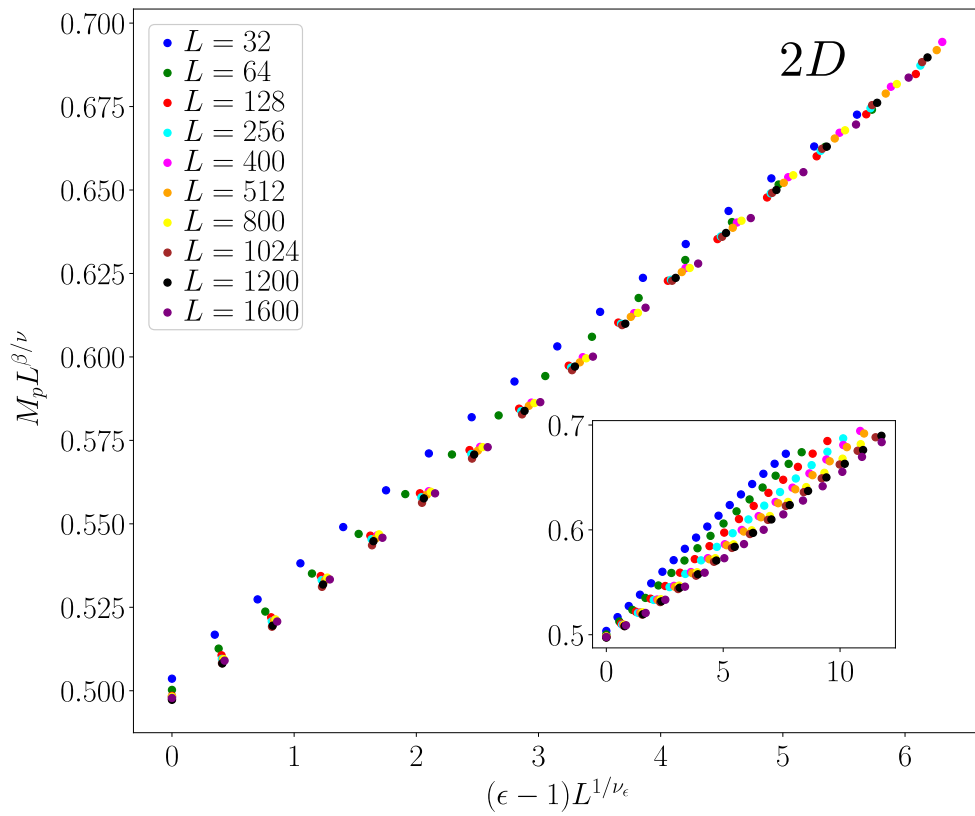


FIGURE 5.7 – Polarisation redimensionnée $M_p L^{\beta/\nu}$ en fonction de $(\epsilon - 1)L^{1/\nu_\epsilon}$ en dimensions $D = 2$. Dans l'incrustation, l'exposant ν est utilisé plutôt que ν_ϵ . Les valeurs utilisées pour les exposants critiques sont $\beta/\nu = 0.983$, $\nu_\epsilon = 1.41$, $\nu = 1.25$.

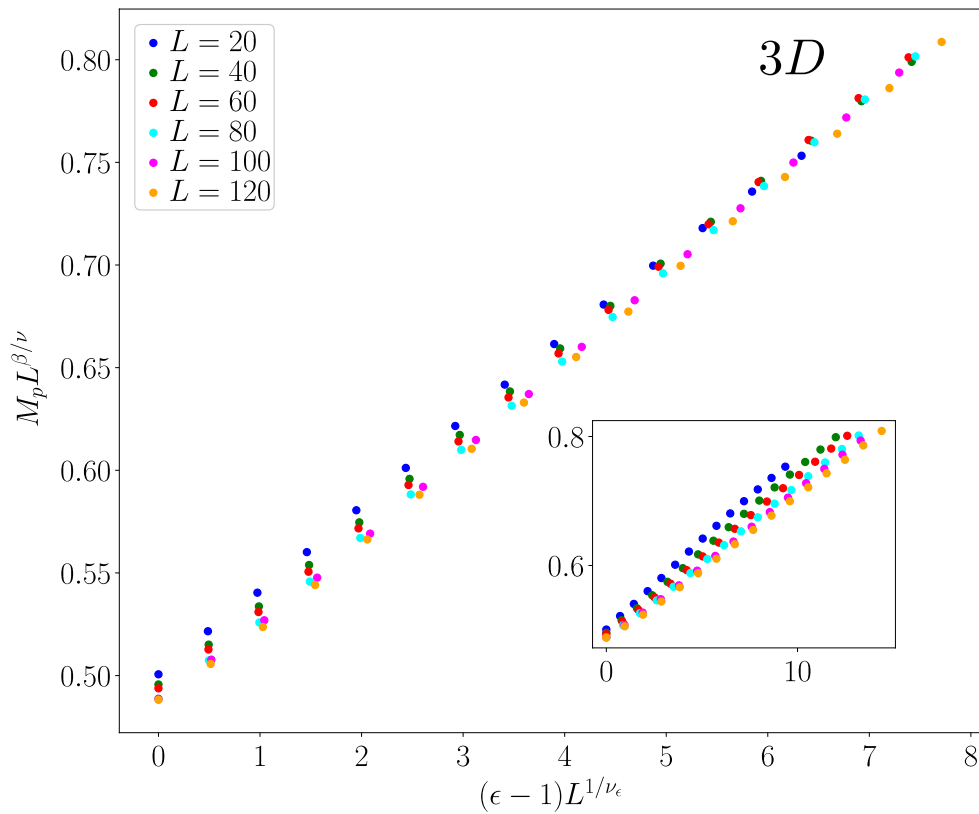


FIGURE 5.8 – Polarisation redimensionnée $M_p L^{\beta/\nu}$ en fonction de $(\epsilon - 1)^{1/\nu_\epsilon}$ en dimensions $D = 3$. Dans l'incrustation, l'exposant ν est utilisé plutôt que ν_ϵ . Les valeurs utilisées pour les exposants critiques sont $\beta/\nu = 1.84$, $\nu_\epsilon = 1.15$, $\nu = 1$.

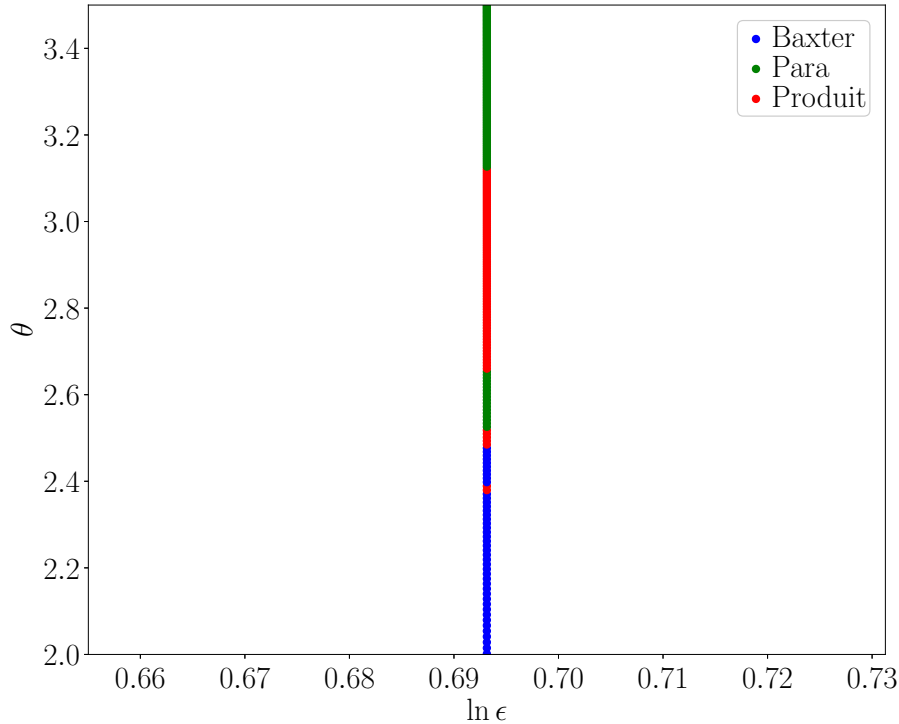


FIGURE 5.9 – Phases obtenues par méthode du doublement sur un échantillon de taille $L = 64$ pour plusieurs $\theta = \ln g_{\max}$ à $\epsilon_I = 2$. Au niveau de la transition attendue entre les phases de Baxter et produit, la méthode du doublement indique la présence d'une phase paramagnétique et une alternance entre phase de Baxter et phase produit. Il n'est alors pas possible de déterminer deux uniques transitions pour cet échantillon de désordre.

thode du doublement en considérant la structure du moment magnétique et de la polarisation du dernier amas décimé. Ces positions se sont révélées difficiles à déterminer. Pour certains échantillons de désordre, la méthode du doublement ne donne pas deux uniques transitions. Un exemple est donné à la figure 5.9. Nous avons vérifié sur quelques échantillons qu'on retrouve ce comportement également en partant de rapports initiaux ϵ plus élevés et de désordres initiaux Δ plus forts. Même si ces multiples pseudo-points critiques ne sont observés que pour une fraction seulement de l'ensemble des échantillons considérés, la forme des distributions de l'aimantation, polarisation et gap d'énergie en est très clairement affectée, rendant impossible toute tentative d'estimation des exposants critiques. Toutefois ces résultats préliminaires montrent qu'il existe une phase produit en dimensions $D > 1$ et qu'elle s'élargit avec ϵ de manière asymétrique. Malgré une incertitude sur la position des transitions pour certains échantillons, l'erreur commise reste dans le voisinage de la position attendue. En se plaçant à $\epsilon = 5$ et pour un désordre initial $\Delta = 3$, l'étude des distributions obtenues donne $\theta_{c1} \simeq 4.1$ pour la position de la transition entre les phases produit et paramagnétique, $\theta_{c2} \simeq 6$ pour celle entre les phases de Baxter et produit sachant que la position du point tricritique est $\theta_c^P \simeq 4.8$.

5.4 Conclusion

La SDRG a été appliquée au modèle d'Ashkin-Teller quantique désordonné à deux couleurs avec un rapport initial $\epsilon = \epsilon_I$ donné en dimensions $D = 2, 3$. Les propriétés critique du point tricritique situé à $\theta = \theta_c^P$ (position du point critique du modèle de Potts quantique désordonné à quatre états) et $\epsilon = 1$ ont été étudiées. Le long de la ligne $\epsilon = 1$, les exposants critiques ν et β sont ceux du modèle d'Ising quantique désordonné. Le long de la ligne $\theta = \theta_c^P$, des exposants distincts ν_ϵ et β_ϵ ont été déterminés analytiquement dans le cas unidimensionnel [19]. Numériquement, nous avons obtenu une valeur de l'exposant ν_ϵ compatible avec la prédiction théorique $\nu_\epsilon = \frac{8}{1+\sqrt{7}}$ en dimension $D = 1$, et estimé $\nu_\epsilon \simeq 1.41$ en dimensions $D = 2$ et $\nu_\epsilon \simeq 1.15$ en dimensions $D = 3$ qui sont incompatibles avec les estimations de l'exposant ν du modèle d'Ising quantique désordonné ($\nu^{2D} \simeq 1.24(1)$ et $\nu^{3D} \simeq 0.99(1)$). Avec la méthode du doublement, nous n'avons pu déterminer avec précision les positions des lignes de transitions entre la phase produit et les phases de Baxter et paramagnétique empêchant une estimation des exposants critiques. Les données obtenues indiquent, comme attendu, une asymétrie du diagramme de phase en dimensions $D > 1$.

Cette étude préliminaire sera poursuivie pour déterminer β_ϵ et les exposants critiques des lignes de transitions. Pour cela, nous ne rechercherons plus à déterminer la position pseudo-critique d'un échantillon ce qui pose des difficultés avec la méthode du doublement en considérant deux paramètres d'ordre. Nous nous positionnerons directement à θ_c^P et moyennerons sur un grand nombre d'échantillons pour obtenir la variation de la polarisation avec ϵ . Nous nous placerons à un rapport ϵ donné pour obtenir l'évolution de la polarisation et de l'aimantation avec θ . Nous devrions alors être en mesure de déterminer les positions des deux transitions de phases nous permettant ensuite de déterminer les exposants critiques associés.

Conclusions et perspectives

Fisher a montré que la méthode du groupe de renormalisation en désordre fort (SDRG) permet de prédire les propriétés critiques de systèmes gouvernés par un point fixe de désordre infini [16]. En effet, cette procédure itérative, bien que reposant sur une perturbation au second ordre, devient asymptotiquement exacte si les distributions des couplages deviennent infiniment larges. Sa simplicité en fait une méthode de choix pour explorer les propriétés critiques de modèles quantiques désordonnés en dimensions supérieures à un. Néanmoins, une implémentation naïve des règles de décimation souffre grandement de la dimensionnalité à cause de la multiplication du nombre de couplages lors de la décimation d'un spin. Pour pallier à ce problème, Kovács et Iglói ont proposé un algorithme optimisé basé sur la règle du maximum permettant de traiter des systèmes avec un nombre de spins de l'ordre d'un million indépendamment de la dimension [104]. Ils ont pu ainsi étudier le comportement critique du modèle d'Ising en dimensions $D = 2, 3$ et 4 [20, 103, 104]. Cet algorithme a été décrit et adapté aux règles de décimation du modèle de Potts et d'horloge dans le chapitre 2. On a notamment discuté la possibilité de décimer systématiquement le maximum global ou un maximum local à chaque itération sans que cela affecte le résultat final. La méthode du doublement permettant de déterminer la position du point pseudo-critique d'un échantillon a été également décrite. Enfin, les comportements d'échelle de la position des points pseudo-critiques, de l'aimantation et du gap d'énergie, conduisant aux estimations des exposants critiques ν , d_f et ψ , ont été présentées.

Ces outils ont été employés pour déterminer les propriétés critiques du modèle de Potts quantique désordonné à q états dans le chapitre 3. Pour $q = 2, 3, 5, 10, 20, 50$, un point fixe de désordre infini a été mis en évidence. En dimensions $D = 2$ et $D = 3$, malgré des corrections d'échelle dépendant de q , les estimations des exposants critiques ν et d_f sont compatibles dans les barres d'erreur. Il en va de même pour les estimations de l'exposant ψ mais les larges incertitudes ne peuvent exclure une légère dépendance avec q . Nos estimations restent toutes compatibles avec celles obtenues pour le modèle d'Ising par Kovács et Iglói [20, 103, 104]. Ainsi, nous en avons conclu que, comme pour le cas unidimensionnel [17], les propriétés critiques du modèle de Potts quantique désordonné sont indépendantes du nombre d'états q en dimensions $D = 2$ et $D = 3$. En dimensions $D = 2$, ces résultats confortent l'hypothèse de la "superuniversalité" des exposants critiques du modèle d'Ising quantique désordonné [164].

Nous nous sommes ensuite intéressés au modèle d'horloge quantique désordonné à $q = 2, 3, 5, 8, 10$ états en dimensions $D = 2$ et $D = 3$ dans le chapitre 4. Malgré un désordre pertinent conformément au critère de Harris [14], nous avons dû prendre en compte l'intensité

initiale du désordre des distributions des couplages. Un désordre suffisamment fort s'est avéré nécessaire pour observer les caractéristiques du point fixe de désordre infini, en particulier la dynamique activée. En deçà d'un désordre minimal dépendant de q , le flot de renormalisation est chaotique et les distributions des couplages ne sont pas infiniment larges indiquant a posteriori l'impossibilité d'utiliser la SDRG. Au delà, les estimations des exposants ν et ψ sont compatibles dans les barres d'erreur pour tous les nombres d'états q considérés. Bien que la différence soit faible (< 0.03), les exposants d_f ne sont pas compatibles en dimensions $D = 2$ et $D = 3$. Néanmoins, l'influence du désordre initial sur les estimations de d_f , les fortes corrections observées et la limitation de la taille à $L = 756$ à $2D$ et $L = 110$ à $3D$ rendent difficiles une estimation précise de d_f .

Enfin, nous nous sommes intéressés au modèle d'Ashkin-Teller quantique désordonné à deux couleurs en dimensions $D = 2$ et $D = 3$. À la différence des modèles précédemment étudiés, le modèle unidimensionnel présente une phase produit et un point tricritique dont les exposants critiques diffèrent de ceux du modèle d'Ising [19]. En dimensions 2 et 3, ce point tricritique est toujours présent et nous avons estimé les exposants critiques $\nu_\epsilon^{2D} \simeq 1.41$ et $\nu_\epsilon^{3D} \simeq 1.15$ qui sont incompatibles avec les exposants critiques $\nu^{2D} \simeq 1.24(1)$ et $\nu^{3D} \simeq 0.99(1)$ du modèle d'Ising quantique désordonné. Nous n'avons pas pu caractériser les transitions entre la phase produit et les phases de Baxter et paramagnétique. L'application de la méthode du doublement à deux paramètres d'ordre ne conduit pas à deux uniques transitions lorsque $\epsilon > 1$ pour un échantillon de désordre donné. Une extension naturelle de ce travail est de vérifier si la classe d'universalité de ces transitions en dimensions $D > 1$ correspond à celle d'Ising.

Au regard de la similitude des exposants critiques pour les modèles de Potts et d'horloge pour tous les nombre d'états q , on peut se demander s'il existe des situations dans lesquelles les exposants pourraient être différents. Par exemple, quel serait l'effet d'interactions à longue portée? Pour le modèle d'Ising en champ transverse en dimension $D = 1$ [294], $D = 2$ [295] et $D = 3$ [296], un point fixe de désordre fort (et non infini), obtenu par SDRG, contrôle les propriétés critiques lorsque l'interaction décroît algébriquement avec la distance. On ne peut exclure le fait que le changement de nature du point fixe induise une dépendance avec le nombre d'états q pour les modèles de Potts et d'horloge. En présence d'interactions décroissant sous forme d'exponentielles étirées, la chaîne d'Ising en champ transverse est gouvernée par un point fixe de désordre infini avec des exposants critiques dépendant de la force des interactions [297]. Il serait intéressant de vérifier si cette dépendance est indépendante du nombre d'états q pour les modèles de Potts et d'horloge. Toutefois, la chaotité du flot de renormalisation pour le modèle d'horloge pourrait être d'autant plus importante avec les interactions à longue portée et nécessiterait alors des précautions supplémentaires.

Il n'a été question que des propriétés critiques de volume en utilisant des conditions de bord périodiques. Or les propriétés critiques de surface, comme l'exposant associé à l'aimantation surfacique, sont différentes des propriétés critiques de volume pour le modèle d'Ising quantique désordonné en dimensions $D = 1$ [59, 298] et $D \geq 2$ [299]. Dans des modèles classiques avec des couplages distincts sur les surfaces, il peut se produire une transition surfacique résultant

de la mise en ordre de la couche surfacique tandis que le reste du système est désordonné [300-302]. En fonction des couplages de surface, les observables de surface peuvent présenter des singularités différentes lors d'une transition extraordinaire. Cet effet sur les modèles d'Ising, de Potts et d'horloge bidimensionnel ou tridimensionnel quantiques désordonnés n'a pas encore été étudié.

Enfin, seules les propriétés de l'état fondamental ont été étudiées. Une extension possible pourrait être d'explorer le spectre complet afin d'étudier la localisation à N corps [303-308]. En particulier, des procédures inspirées de la SDRG [309] ont été développées pour construire les intégrales locales du mouvement caractéristiques de la phase localisée à N corps [310]. On peut citer la RSRG-X [311-313] ou la SBRG [314, 315] pour obtenir tous les états du spectre en sélectionnant à chaque itération le sous espace de plus haute ou basse énergie, la RSRG-t [316, 317] pour étudier la dynamique unitaire en décimant les hautes fréquences ou des procédures de renormalisation permettant une description phénoménologique de la transition MBL [318-323]. Ces études portent sur des modèles unidimensionnels, et il serait alors intéressant d'étudier la faisabilité d'étendre ces procédures à des systèmes en dimensions $D > 1$.

Annexe A

Détails algorithmiques

A.1 Optimisation de l'algorithme de SDRG

Dans la section 2.1.3.1, on a vu qu'il était nécessaire d'enlever des nœuds inactifs après la décimation d'un autre nœud inactif si la nouvelle distance entre ces derniers est négative. On montre ici qu'il est possible (sans être obligatoire) d'enlever des nœuds inactifs suite à la formation d'un amas s'il n'est pas possible de générer des couplages plus grands que ceux décimés.

On suppose que l'on a utilisé l'algorithme de Dijkstra partant du nœud i et que l'on a $\Omega = J_{ij}$ (ou que J_{ij} est un maximum local). On montre alors qu'il est possible d'enlever du graphe tous les nœuds inactifs k faisant partie du chemin menant au plus proche voisin actif j de même que tous ceux se trouvant à une distance inférieure à $\delta_{ij}/2$ du nœud i . Sur la figure A.1, les nœuds inactifs pouvant être enlevés sont ceux se trouvant dans le cercle de rayon $\delta_{ij}/2$ autour de i , i.e. k_1 , et ceux faisant partie du chemin δ_{ij} en bleu, i.e. k_3 . Ces conditions impliquent que la distance entre le site inactif k et un autre nœud actif l (différent que i et j) est plus grande que la distance reliant k à i ou j i.e. $d_{kl} > d_{ki}$ ou $d_{kl} > d_{kj}$. En effet, si k se trouve sur le chemin le plus court partant de i alors si j est atteint cela implique que $d_{kj} < d_{kl}$. Et, si $d_{ki} < \delta_{ij}/2$, on sait que $d_{ik} + d_{kl} > \delta_{ij}$ donc $d_{ki} < d_{kl}$. Or, on peut donc enlever un tel nœud inactif étant donné que :

1. La distance reliant deux nœuds actifs l_1 et l_2 passant par le nœud inactif k , i.e. $\delta_{l_1 l_2}^k$, est plus grande que $\min(\delta_{l_1 i}^k, \delta_{l_1 j}^k)$ et $\min(\delta_{l_2 i}^k, \delta_{l_2 j}^k)$, sans perdre de généralité, on suppose que les chemins les plus courts sont ceux menant à i . En effet $\delta_{l_1 l_2}^k = d_{l_1 k} + d_{kl_2} > d_{l_1 k} + d_{ki} = \delta_{l_1 i}^k$ et on obtient de la même manière $\delta_{l_1 l_2}^k > \delta_{l_2 i}^k$. Ainsi, tant que le nouvel amas I , constitué des nœuds i et j , est actif, toutes les plus courtes distances passant par k passent également par I . Si l'amas avec $\tilde{r} \geq r_i + r_j - \delta_{ij} + \ln \kappa$ est inactivé alors

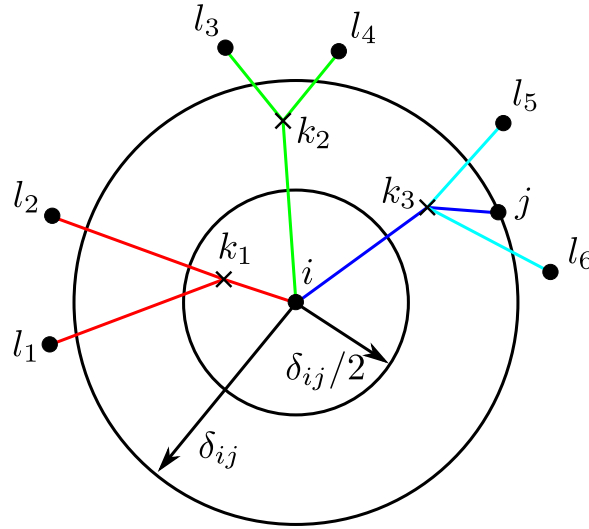


FIGURE A.1 – Représentation schématisée des nœuds inactifs atteints lors de l'utilisation de l'algorithme de Dijkstra partant du nœud i . Si $\delta_{ij} = \Omega$, alors le nœud inactif k_1 (resp. k_3) peut être enlevé car $d_{ik_1} < \delta_{ij}/2$ (resp. k_3 se trouve sur le chemin le plus court, en bleu, partant de i menant à j). Les couleurs rouge, vert, cyan et les nœuds inactifs associés k_1, k_2, k_3 illustrent les trois cas pouvant survenir.

la nouvelle distance

$$\begin{aligned}
 d'_{Ik} &= d_{Ik} - (\tilde{r} - \ln \kappa)/2 \\
 &\leq d_{Ik} + (\delta_{ij} - r_j - r_j)/2 \\
 &\leq \delta_{ij} - (r_i + r_j)/2 \\
 &\leq 0
 \end{aligned}$$

est négative et le nœud inactif k peut donc être enlevé en transférant ces voisins à I (comme explicité lors de la suppression d'un nœud inactif lors de l'inactivation d'un nœud).

2. Si un nœud actif l_1 est inactivé, alors la nouvelle distance d'_{l_1k} est positive impliquant que toutes les plus petites distances passant par k sont inchangées et aboutissent toujours à l'amas I . En effet, si $l_1 = \Omega$ alors $\delta_{l_1I}^k > r_{l_1}$. Donc $d'_{l_1k} = d_{l_1k} - (r_{l_1} - \ln \kappa)/2 > d_{l_1k} - \delta_{l_1I}^k/2 + \ln \kappa/2$. Or, $\delta_{l_1I}^k = d_{l_1k} + d_{kI}$ et $d_{l_1k} - \delta_{l_1I}^k/2 = (d_{l_1k} - d_{kI})/2 \geq 0$ (par hypothèse pour que k puisse être enlevé du graphe). Comme $\ln \kappa > 0$, on en conclut que $d'_{l_1k} > 0$.

Les nœuds inactifs satisfaisant ces conditions peuvent donc être enlevés après la fusion de deux nœuds de la même façon qu'ont été enlevés ceux après l'inactivation d'un nœud.

A.2 Adaptation de l'algorithme de SDRG au modèle d'horloge

Il y a deux difficultés majeures liées à la résolution numérique du modèle d'horloge par rapport au modèle de Potts en utilisant la SDRG. L'une est liée à l'utilisation de l'algorithme de Dijkstra qui est incompatible avec l'existence d'arêtes avec un poids négatif qui ne peuvent être enlevées. L'autre est liée à l'actualisation de l'arbre binaire permettant de déterminer le plus grand couplage.

A.2.1 Algorithme de Dijkstra dans un graphe avec des poids négatifs

Pour le modèle de Potts, un poids négatif ne pouvait survenir qu'entre deux nœuds inactifs. Pour le modèle d'horloge ce peut être également le cas entre un nœud actif j et un autre inactif i . En effet, Si un nœud i est inactivé alors $r_i < \delta_{ij} = d_{ij}$. Le poids de l'arête entre i et j est actualisé comme $d'_{ij} = d_{ij} - \frac{r_i - \ln \kappa}{2}$. Ce poids est positif si $d_{ij} > \frac{r_i - \ln \kappa}{2}$. C'est nécessairement le cas si $\ln \kappa \geq 0$ i.e. $\kappa \geq 1$. Pour $\kappa < 1$, cela dépend de l'écart entre d_{ij} et r_i . Contrairement au cas d'une arête avec un poids négatif entre deux nœuds inactifs qui peut être supprimée en enlevant l'un des deux noeuds, il n'est plus possible de procéder de même dans le cas d'une arête liant un nœud actif et inactif. Supprimer un nœud inactif dans ce cas revient à ne considérer plus que les liaisons entre un nœud et tous les autres nœuds voisins du nœud inactif, enlevant ainsi toutes les autres liaisons entre les autres nœuds entre eux. Ce ne peut être fait sans plus d'informations comme discuté dans l'annexe A.1.

Il existe des algorithmes, se substituant à l'algorithme de Dijkstra, pour déterminer les distances les plus courtes, lorsqu'il est possible d'en définir une, dans un graphe avec des poids négatifs. Dans le cas présent, l'algorithme de Dijkstra convient sans modification majeure étant donné qu'il permet de rechercher la distance la plus courte entre deux nœuds actifs et qu'une distance négative ne survient que si au moins un nœud actif est impliqué (entre deux nœuds inactifs, il est toujours possible d'enlever un noeud). Il suffit d'interdire que le nœud de de départ puisse être atteint à nouveau. Néanmoins, si l'algorithme termine nécessairement, le premier nœud actif trouvé n'est plus forcément le voisin le plus proche (voir figure A.2). Pour éviter cet écueil, nous avons ajouté la connaissance du poids le plus négatif S du graphe. L'algorithme de Dijkstra présenté précédemment 1 est modifié en

La condition d'arrêt de l'algorithme est que la plus petite distance trouvée entre deux nœuds actifs ne puisse plus être supplantée. Ce changement nécessite de procéder à plus d'itérations et d'autant plus que S est négatif.

Comme S peut varier au cours des itérations de la SDRG, nous avons créé un conteneur associatif liant un nœud actif et le poids de l'arête voisine la plus négative. En fonction si un nœud est inactivé ou enlevé du graphe, S est actualisé en prenant la plus petite valeur présente dans ce conteneur.

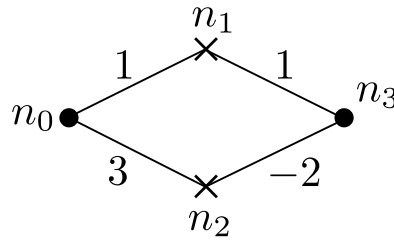


FIGURE A.2 – Graphe contenant deux nœuds actifs (n_0 et n_3) et deux nœuds inactifs (n_1 et n_2). Appliquer l’algorithme de Dijkstra partant de n_0 conduit à une distance $d_{n_0, n_3} = 2$ entre les deux nœuds actifs car $d_{n_0, n_1} < d_{n_0, n_2}$. Une erreur, liée à la présence d’une arête avec un poids négatif, a été commise car le chemin le plus court est celui passant par n_2 donnant $d_{n_0, n_3} = 1$.

Algorithm 2 Recherche de δ_i sur un graphe avec des poids négatifs

1: **Inputs:**

$G = (V, E)$ avec un poids d_{ij} pour chaque $e_{ij} \in E$

$V = V^0 \cup V^1$ avec $k \in V^0$ si actif, $k \in V^1$ si inactif

$i \in V^0$ nœud de départ

$S \leq 0$ le poids le plus négatif de G

2: **Initialize:**

$\delta_i^i = 0$

$\delta_k^i = +\infty, \forall k \neq i \in V$

$\delta_k^i = d_{ik}, \forall k$ voisin de i

$D = \{i\}$ ensemble des nœuds visités

j nœud le plus proche de i non visité ($\delta_j^i = \min_{k \notin D}(\delta_k^i)$)

$d_{\min} = +\infty$ plus petite distance entre i et un nœud actif noté k_{\min}

3: **while** $\delta_j^i + S < d_{\min}$ **do**

4: **if** $j \in V^1$ **then**

5: $\delta_k^i \leftarrow \min(\delta_k^i, \delta_j^i + d_{jk}), \forall k$ voisin de j

6: $D \leftarrow D \cup \{j\}$

7: **else**

8: **if** $d_{\min} > \delta_j^i$ **then**

9: $d_{\min} = \delta_j^i$

10: $k_{\min} = j$

11: $\delta_j^i = +\infty$

12: **end if**

13: **end if**

14: $j = \min_{k \notin D}(\delta_k^i)$

15: **end while**

16: **return** k_{\min}, d_{\min}

A.2.2 Actualisation de l'arbre binaire

Comme indiqué dans la sous-section 2.1.3.2, nous avons décidé d'utiliser un arbre binaire de recherche contenant les $\Omega_i = \min(r_i, \delta_i)$. Pour actualiser efficacement cette arbre, nous avons ajouté à chaque nœud i les grandeurs

1. indice du voisin v_i avec $v_i = j$ si $\Omega_i = \delta_i = \delta_{ij}$,
2. $\tilde{\Omega}_i$ l'ensemble des nœuds j tels que $\Omega_j = \delta_{ij}$.

On suppose qu'un tel arbre a été construit. On choisit sa plus petite valeur $\Omega = \min_i(\Omega_i)$. Deux cas surviennent

1. Si $\Omega = \Omega_i = \delta_{ij}$, un amas $I = \{i, j\}$ est formé (j venant de la variable v_i). Ω_I est calculé en utilisant l'algorithme de Dijkstra modifié présenté précédemment pour déterminer δ_I (sans qu'il soit nécessaire de l'atteindre si $\delta_k^I + S > r_I$ (voir algorithme 2) signifiant que $\Omega_I = r_I$) et on actualise $\tilde{\Omega}_I = \tilde{\Omega}_i \cup \tilde{\Omega}_j$.
2. Si $\Omega = r_i$, le nœud i est inactivé et toutes les liaisons voisines sont actualisées en ajoutant $-(r_i - \ln \kappa)/2$. Alors :
 - (a) il faut recalculer les Ω_j de tous les nœuds j qui ont $\Omega_j = \delta_{ij}$ i.e. $j \in \tilde{\Omega}_i$.
 - (b) il faut déterminer si des Ω_j ont pu être modifiés après actualisation des distances voisines de i . Pour cela, on utilise l'algorithme de Dijkstra modifié en partant de i pour déterminer tous les nœuds actifs avec la condition d'arrêt $\delta_k^i + d_{\min} + S > \Omega_{\max}$ avec $\Omega_{\max} = \max_i(\Omega_i)$ et $d_{\min} = \delta_k^i$ si aucun nœud actif n'a encore été trouvé. $\delta_k^i + d_{\min}$ correspond à la plus petite distance entre le nœud k et le nœud actif k_{\min} passant par i . Si k est un nœud actif, cette distance correspond à la plus petite distance générée par l'inactivation du nœud i reliant k et un autre nœud actif. S est ajouté pour être certain que c'est la plus petite trouvée (après être certain que d_{\min} est la plus petite distance entre i et le nœud actif le plus proche). Si k est un nœud actif et $\delta_k^i + d_{\min} < \Omega_k$ alors $\Omega_k = \delta_{k_{\min}k}$.

A noter que si $d_{\min} - (r_i - \ln \kappa)/2 > 0$, il est futile de continuer l'algorithme. Étant donné que pour un nœud actif $k \notin \tilde{\Omega}_i$, $\delta_{ik} = \delta_k^i + (r_i - \ln \kappa)/2 > \Omega_k$ alors $d_{\min} + \delta_{ik} > \Omega_k$ si $d_{\min} - (r_i - \ln \kappa)/2 > 0$. A noter également, que lors de l'utilisation de l'algorithme de Dijkstra, on peut en profiter pour déterminer les Ω_j avec $j \in \tilde{\Omega}_i$ si la distance $d_{\min} + \delta_j^i$ est plus petite que la valeur Ω_j avant inactivation de i .

A cause de la possibilité d'avoir un couplage plus grand que les couplages initiaux, le poids de certaines arêtes du graphe peut être négatif impliquant un changement dans l'algorithme de Dijkstra et un coût supplémentaire est nécessaire pour vérifier que l'inactivation d'un nœud n'a pas changé les minima locaux Ω_i stockés dans l'arbre binaire. Pour ces deux raisons, la complexité de l'algorithme est plus grande que pour l'algorithme de Potts.

A.3 Adaptation de l'algorithme de SDRG au modèle d'Ashkin-Teller

On généralise l'algorithme utilisé pour le modèle d'horloge afin de prendre en compte les quatre couplages h_i, g_i, J_{ij} et K_{ij} du modèle d'Ashkin-Teller quantique désordonné 5.16. On considère un graphe $G = (V, E)$ avec V l'ensemble des nœuds et E un ensemble d'arêtes e_{ij} reliant deux nœuds $(i, j) \in V^2$. À chaque nœud i est associé deux poids

$$r_i^a = -\ln h_i, \quad (\text{A.1})$$

$$r_i^b = -\ln g_i, \quad (\text{A.2})$$

le booléen l_i prenant la valeur 1 si le site i a été décimé (nœud inactif) et 0 autrement (nœud actif). On note V^0 l'ensemble des nœuds actifs et V^1 l'ensemble des nœuds inactifs. Chaque arête e_{ij} porte deux poids

$$d_{ij}^a = d_{ji}^a = -\ln J_{ij}, \quad (\text{A.3})$$

$$d_{ij}^b = d_{ji}^b = -\ln K_{ij}. \quad (\text{A.4})$$

Il n'est pas très lisible d'introduire plusieurs variables afin d'avoir une formulation générale pour actualiser les poids en fonction des décimations comme on l'a fait précédemment. On explicitera l'actualisation des poids au cas par cas par la suite. On note δ_{ij}^a et δ_{ij}^b les chemins les plus courts entre les nœuds i et j ne passant que par des nœuds inactifs et utilisant, respectivement, uniquement les poids d_{kl}^a et d_{kl}^b . Ils correspondent aux couplages J_{ij} et K_{ij} .

Les règles de décimation sont énumérées dans la section 5.2.4. Nous avons choisi de procéder à la décimation du maximum global à cause de la possibilité, via la décimations 3, de générer des couplages \tilde{J} plus grands que ceux initialement présents. C'est pourquoi, un poids d_{ij}^a peut être négatif sans possibilité d'y remédier (identique au cas décrit pour l'algorithme d'horloge) tandis que le poids d_{ij}^b est nécessairement positif ou nul. On conserve le poids le plus négatif $S = \min(\min_{e_{ij} \in E}(d_{ij}^a), 0)$ du graphe pour ne pas commettre d'erreur lors du calcul de la plus petite distance à l'aide de l'algorithme de Dijkstra. On construit un arbre binaire que l'on remplit avec les plus petits minima locaux $\Omega_i = \min(r_i^a, r_i^b, \delta_i^a, \delta_i^b)$, avec δ_i^a (δ_i^b) la plus petite distance entre le nœud actif i et un autre nœud actif en utilisant les poids d_{kl}^a (d_{kl}^b). Le calcul de Ω_i revient à déterminer δ_i^a et δ_i^b en utilisant l'algorithme de Dijkstra 2 et 1.

Si le minimum global $\Omega = \min_{i \in V^0}$ est r_i^b ou δ_{ij}^b , alors il faut calculer, respectivement, $\min(\delta_i^b, r_i^a)$ ou $\min(\delta_{ij}^a, r_i^b)$. δ_i^b et δ_{ij}^a se calculent avec l'algorithme de Dijkstra. À noter que le chemin pour obtenir δ_{ij}^a n'est pas forcément identique à celui utilisé pour δ_{ij}^b et la distance δ_{ij}^a n'est pas obligatoirement δ_i^a , il faut modifier le critère d'arrêt de l'algorithme pour que le nœud actif atteint soit j . On ne discute que des cas des décimations 3 à 6 car les décimations 1 et 2 n'impliquent pas d'actualisation de poids et sont algorithmiquement transparentes au regard des règles de décimation de la section 5.2.1.

1. Cas des décimations 3 et 4; si $\Omega = \delta_{ij}^b$ avec $r_i^b < \delta_{ij}^a, r_j^b$ ou si $\Omega = r_i^b$ avec $\delta_{ij}^b = \delta_i^b < r_j^a$.

On actualise le poids $d_{ij}^b = 0$ et les poids des arêtes entre i et chacun de ses voisins k

$$d_{ik}^a = d_{ik}^a - \frac{r_i^b + \ln 2}{2}. \quad (\text{A.5})$$

Le nœud i est inactivé.

2. Si $\Omega = r_i^a$. On actualise les poids des arêtes entre i et chacun de ses voisins k

$$d_{ik}^a = d_{ik}^a - \frac{r_i^a - \ln(1 + e^{r_i^a - r_i^b})}{2}, \quad (\text{A.6})$$

$$d_{ik}^b = d_{ik}^b - \frac{r_i^a - \ln 2}{2}. \quad (\text{A.7})$$

Le nœud i est inactivé.

3. Si $\Omega = r_i^b$ et $r_i^a < \delta_i^b$. On actualise les poids des arêtes entre i et chacun de ses voisins k

$$d_{ik}^a = d_{ik}^a - \frac{r_i^b - \ln(1 + e^{r_i^b - r_i^a})}{2}, \quad (\text{A.8})$$

$$d_{ik}^b = d_{ik}^b - \frac{r_i^a - \ln 2}{2}. \quad (\text{A.9})$$

Le nœud i est inactivé.

Si après inactivation du nœud i , le poids d_{ij} (aussi bien d_{ij}^a que d_{ij}^b) entre le nœud i et un nœud j inactif voisin est négatif, alors le nœud j est "supprimé" comme explicité dans la section 2.1.3.1. L'usage des guillemets provient que le nœud j n'est pas littéralement supprimé du graphe. Il se peut que d_{ij}^a soit négatif et d_{ij}^b non (et inversement). Ici, "supprimé" est à prendre dans le sens où, si $d_{ij}^a < 0$, les voisins $k \neq i$ de j sont redirigés vers i avec $d_{ik}^a = \min(d_{ik}^a, d_{ij}^a + d_{jk}^a)$ (identiquement si $d_{ij}^b < 0$).

Une fois le minimum global décimé, il faut actualiser l'arbre binaire. On procède exactement comme décrit pour l'algorithme d'horloge en introduisant les $\tilde{\Omega}_i$, afin de déterminer quels Ω_i il faut recalculer, et en vérifiant que, lors de la décimation 3, il n'y a pas eu de distances $\delta_{ij}^a < \Omega_i$ ou Ω_j . Pour toutes les autres décimations, il ne peut y avoir modification de Ω_i pour tout $i \in V^0$.

De nombreuses optimisations sont possibles

- Au lieu de calculer δ_i^a puis δ_i^b , les évaluer en même temps et s'arrêter lorsque le premier est trouvé lors de l'algorithme de Dijkstra (modulo la distance négative S).
- Mettre un critère d'arrêt initial de $d_{min} = \min(r_i^a, r_i^b)$ pour le calcul de Ω_i .
- Si lors du calcul de Ω_i , r_i^b ou δ_{ij}^b est le plus petit. Alors on continue l'algorithme de Dijkstra en évaluant plus que les chemins avec, respectivement, les poids d^b ou d^a .

L'algorithme d'Ashkin-Teller est plus lent que l'algorithme de Potts à cause de la gestion simultanée des distances δ^a et δ^b , de la recherche de second minima et de l'usage de la décimation globale.

Annexe B

Figures complémentaires pour le modèle de Potts

B.1 Distributions des points pseudo-critiques

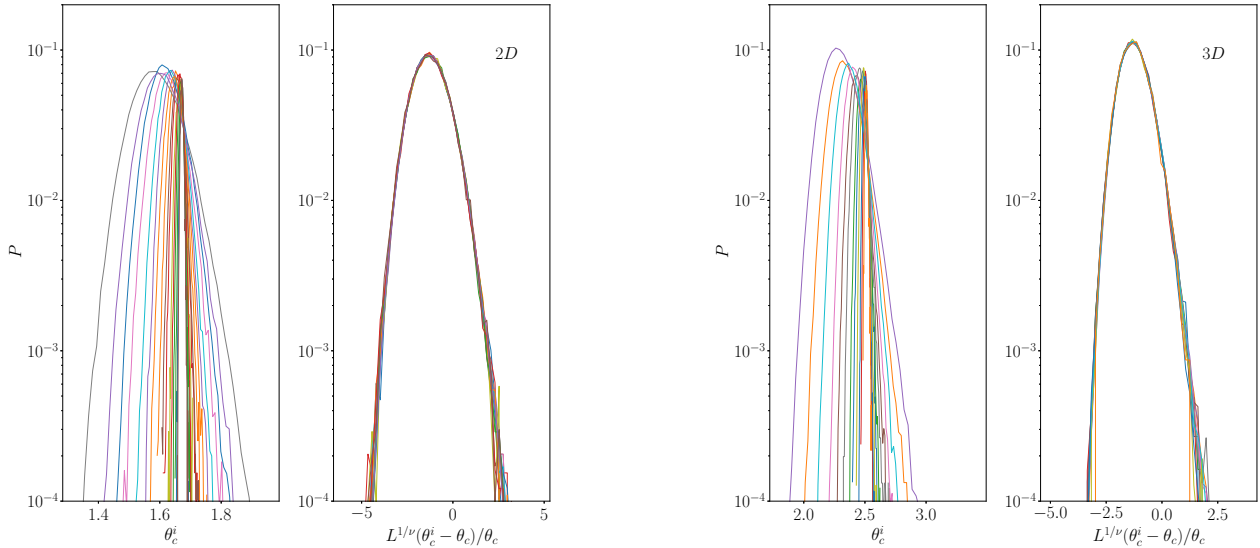


FIGURE B.1 – Distributions des points pseudo-critiques $\theta_c^i(L)$ et des variables d'échelle $u = L^{1/\nu}|\theta_c^i(L) - \theta_c|/\theta_c$ pour plusieurs tailles L du modèle d'Ising avec un désordre initial $\Delta = 1$ en dimensions $D = 2$ (gauche) et $D = 3$ (droite). Les distributions les plus larges $P_L(\theta_c^i)$ correspondent aux tailles les plus petites. Les variables ν et θ_c utilisées pour obtenir u se trouvent dans la table 3.3. Elles ont été déterminées en minimisant (3.21).

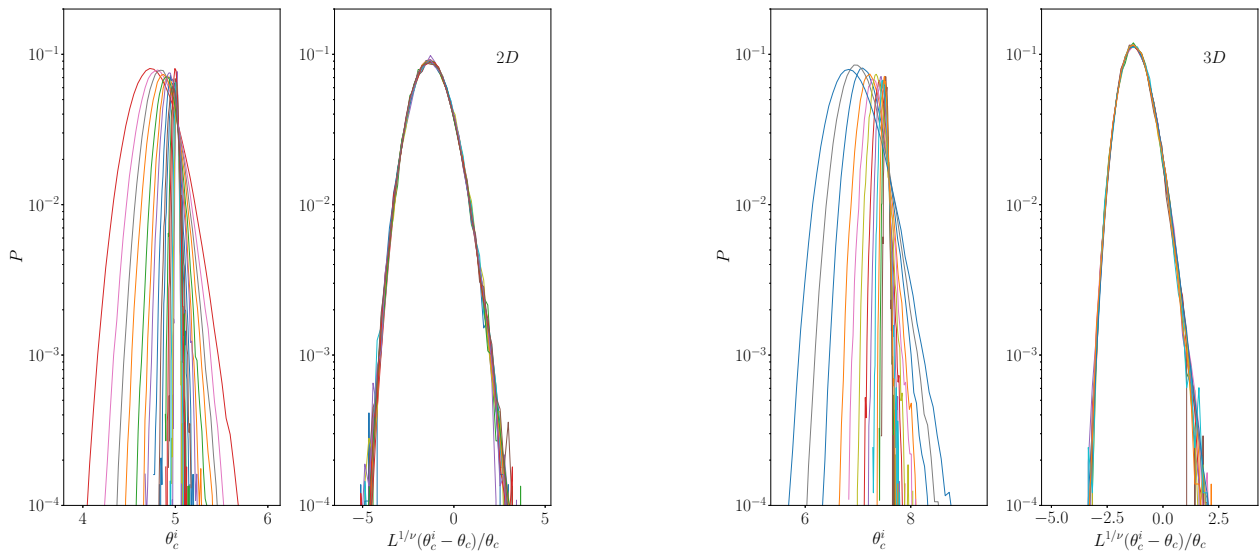


FIGURE B.2 – Modèle d’Ising avec $\Delta = 3$ en dimensions $D = 2$ (gauche) et $D = 3$ (droite). Légende identique à celle de la figure B.1.

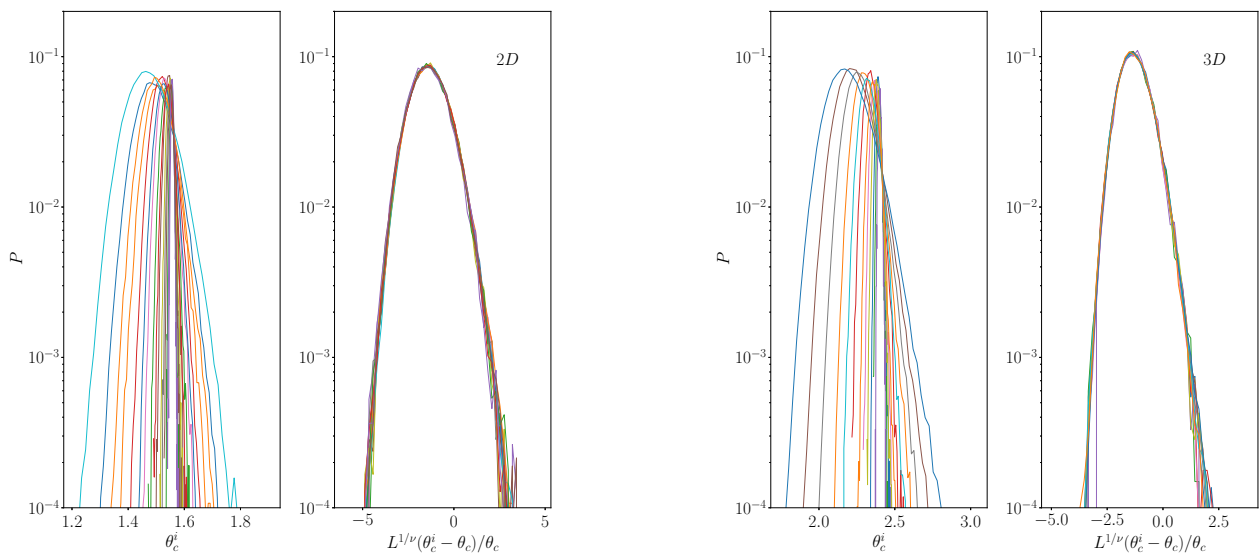


FIGURE B.3 – Modèle de Potts à $q = 3$ états avec $\Delta = 1$ en dimensions $D = 2$ (gauche) et $D = 3$ (droite). Légende identique à celle de la figure B.1.

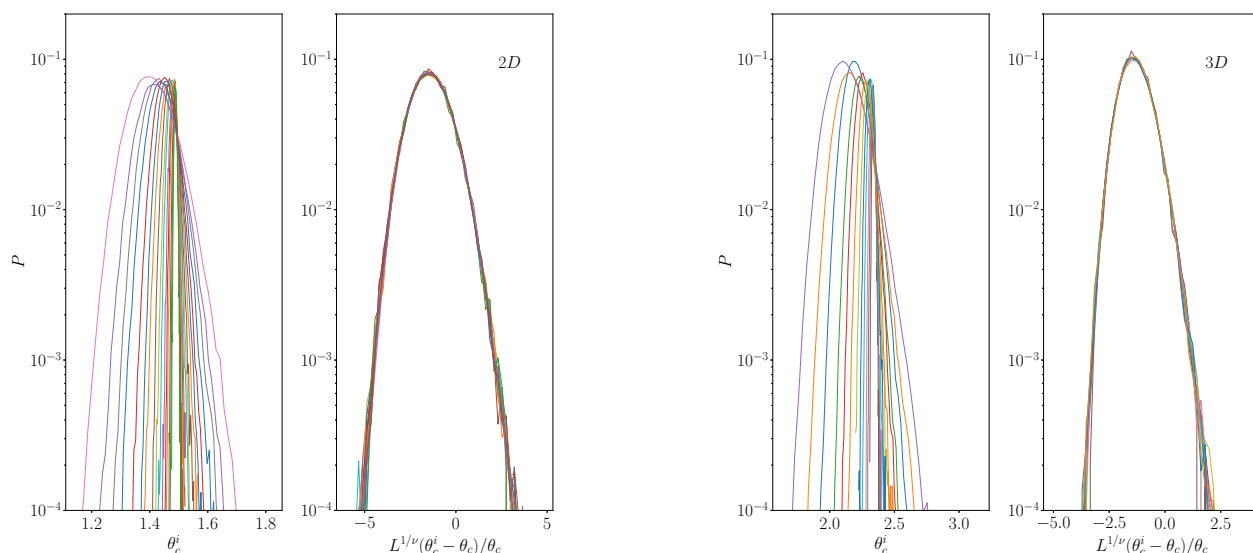


FIGURE B.4 – Modèle de Potts à $q = 5$ états avec $\Delta = 1$ en dimensions $D = 2$ (gauche) et $D = 3$ (droite). Légende identique à celle de la figure B.1.

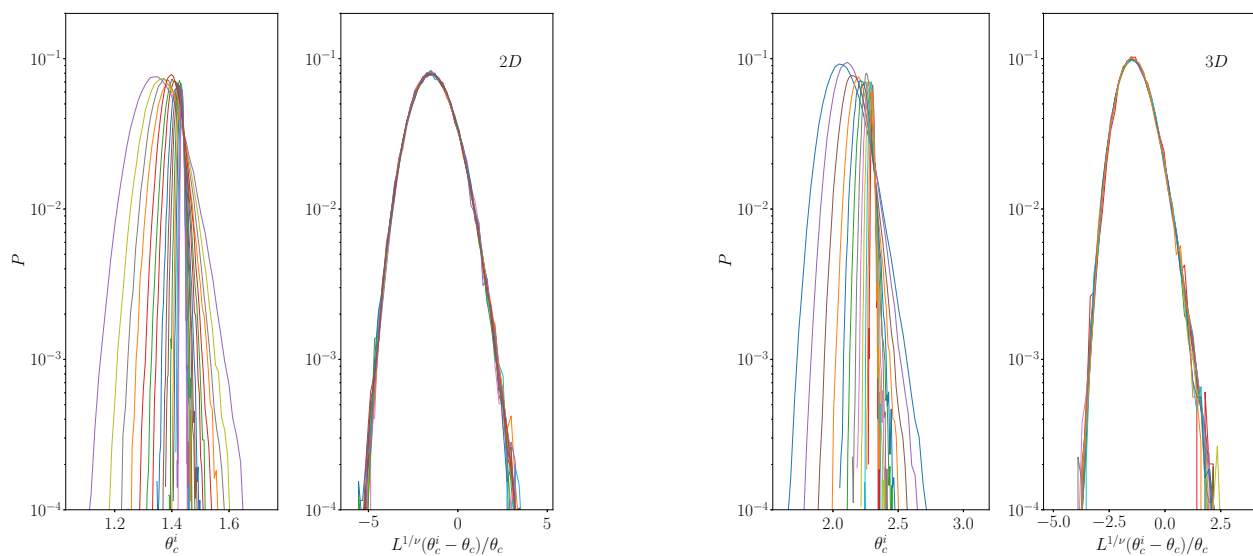


FIGURE B.5 – Modèle de Potts à $q = 20$ états avec $\Delta = 1$ en dimensions $D = 2$ (gauche) et $D = 3$ (droite). Légende identique à celle de la figure B.1.

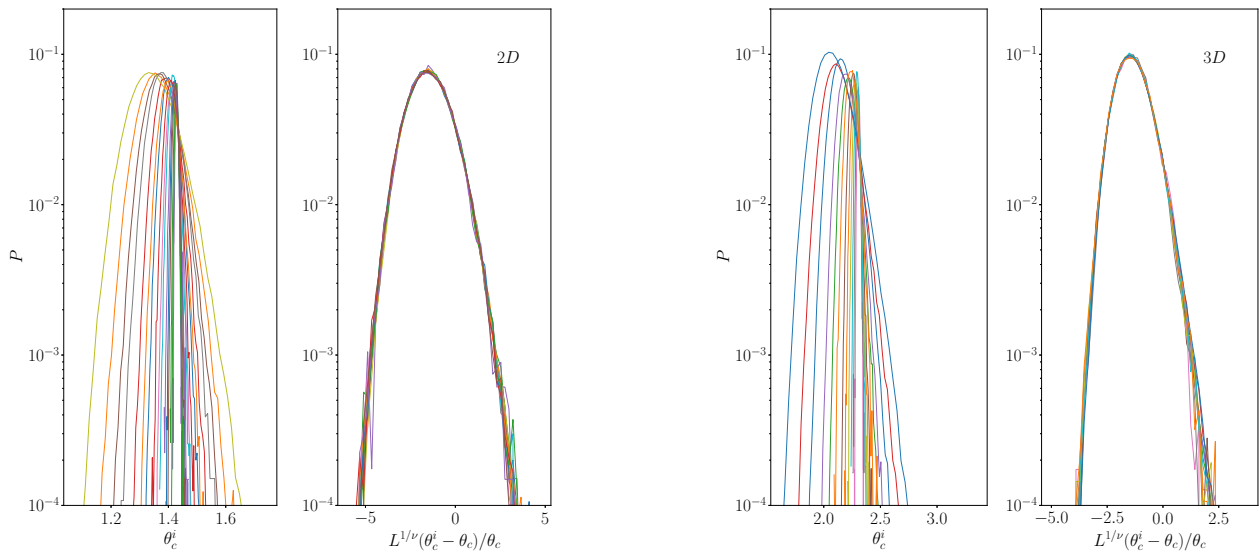


FIGURE B.6 – Modèle de Potts à $q = 50$ états avec $\Delta = 1$ en dimensions $D = 2$ (gauche) et $D = 3$ (droite). Légende identique à celle de la figure B.1.

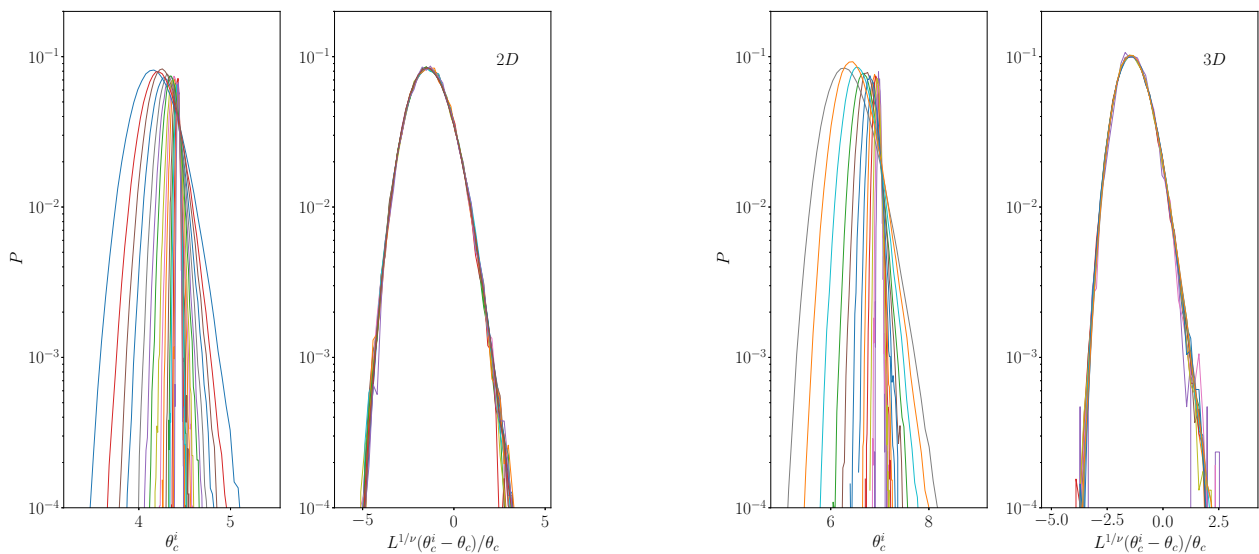


FIGURE B.7 – Modèle de Potts à $q = 50$ états avec $\Delta = 3$ en dimensions $D = 2$ (gauche) et $D = 3$ (droite). Légende identique à celle de la figure B.1.

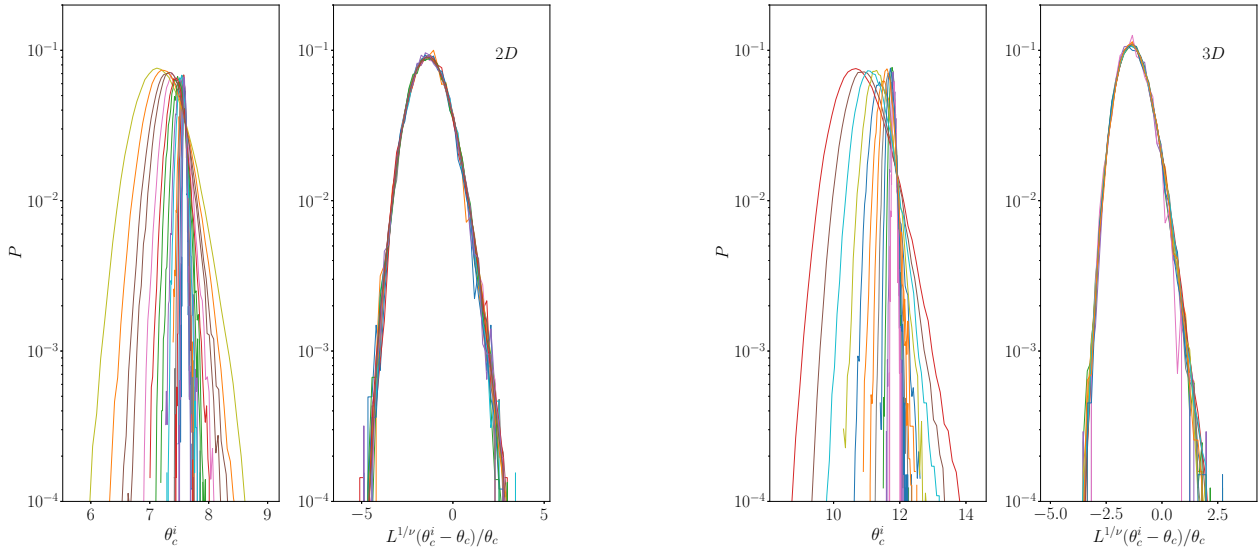


FIGURE B.8 – Modèle de Potts à $q = 50$ états avec $\Delta = 5$ en dimensions $D = 2$ (gauche) et $D = 3$ (droite). Légende identique à celle de la figure B.1.

B.2 Moyennes des points pseudo-critiques

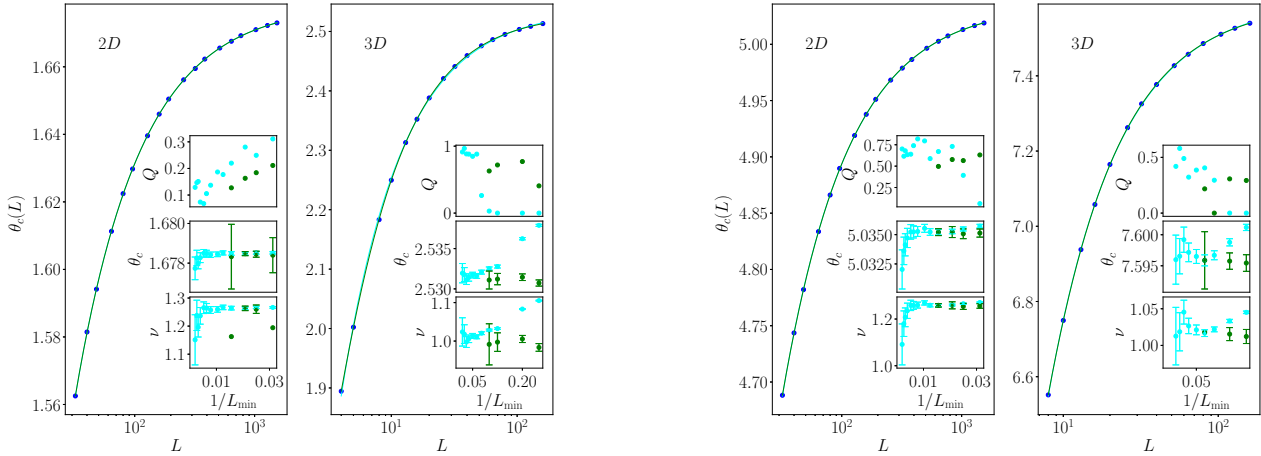


FIGURE B.9 – Moyenne des points pseudo-critiques $\theta_c(L) \equiv \overline{\theta_c^i(L)}$ du modèle d'Ising quantique désordonné en fonction de L avec un désordre initial $\Delta = 1$ (gauche) et $\Delta = 3$ (droite). La courbe cyan correspond à un ajustement simple suivant l'équation (3.22) tandis que la courbe verte à un ajustement complexe prenant en compte des corrections algébriques suivant l'équation (3.24). Dans les graphiques incrustés sont représentées la qualité de l'ajustement Q et la variation des paramètres optimaux ν_s et θ_c obtenus en procédant à un ajustement simple (en cyan) et complexe (en vert) en fonction de la plus petite taille L_{\min} considérée. Si aucune barre d'erreur n'est indiquée, cela signifie que l'erreur est plus grande que la fenêtre et donc que l'ajustement réalisé est peu exploitable.

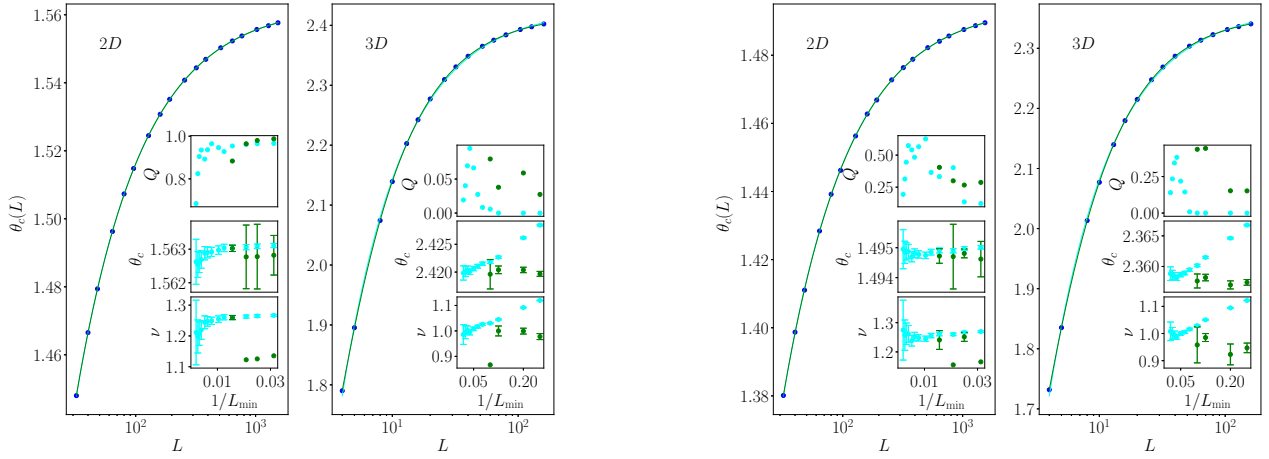


FIGURE B.10 – Modèle de Potts à $q = 3$ états (gauche) et $q = 5$ états (droite) avec $\Delta = 1$. Légende identique à celle de la figure B.9.

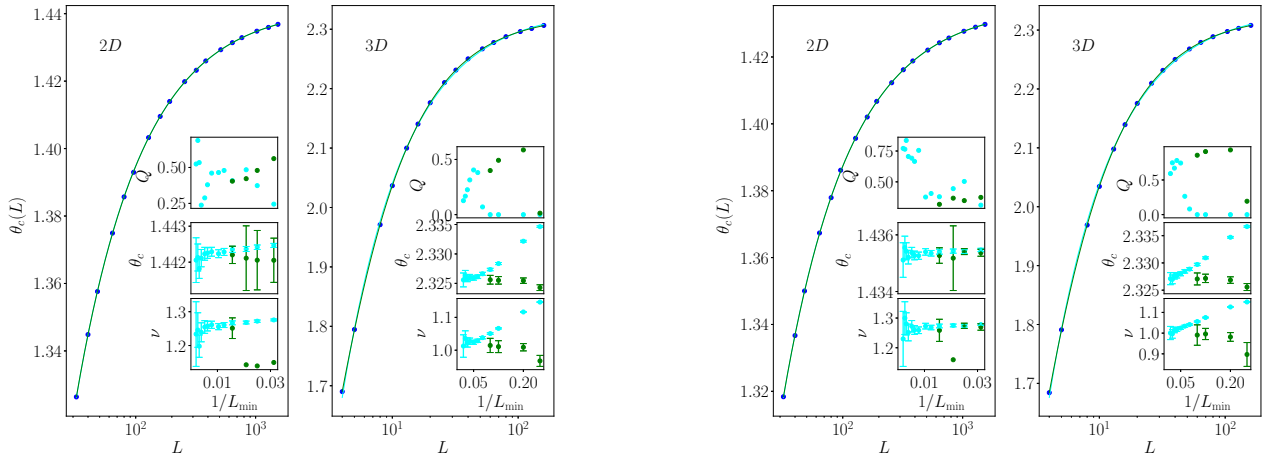


FIGURE B.11 – Modèle de Potts à $q = 20$ états (gauche) et $q = 50$ états (droite) avec $\Delta = 1$. Légende identique à celle de la figure B.9.

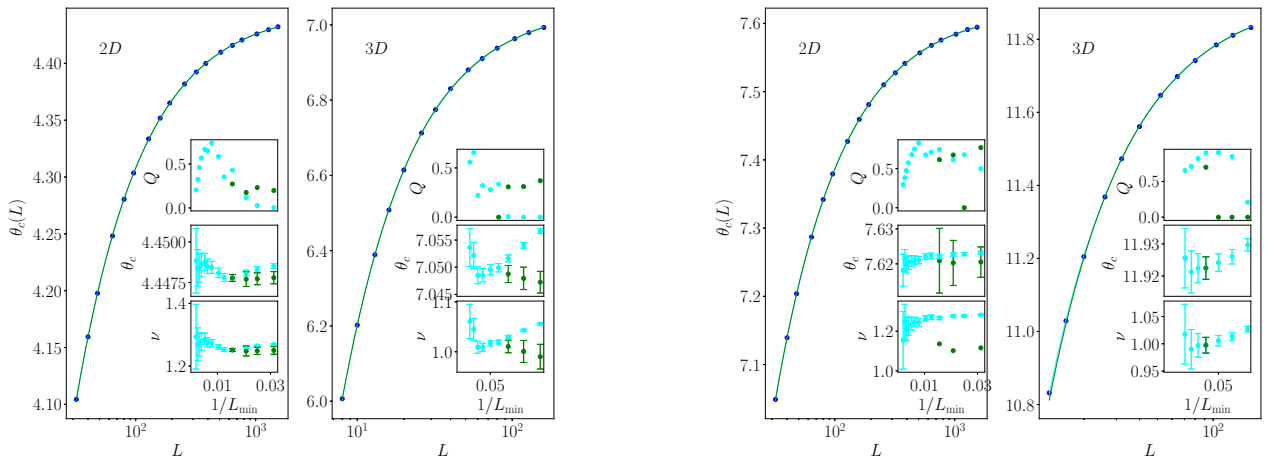


FIGURE B.12 – Modèle de Potts à $q = 50$ états avec $\Delta = 3$ (gauche) et $\Delta = 5$ (droite). Légende identique à celle de la figure B.9.

B.3 Écart-types des points pseudo-critiques

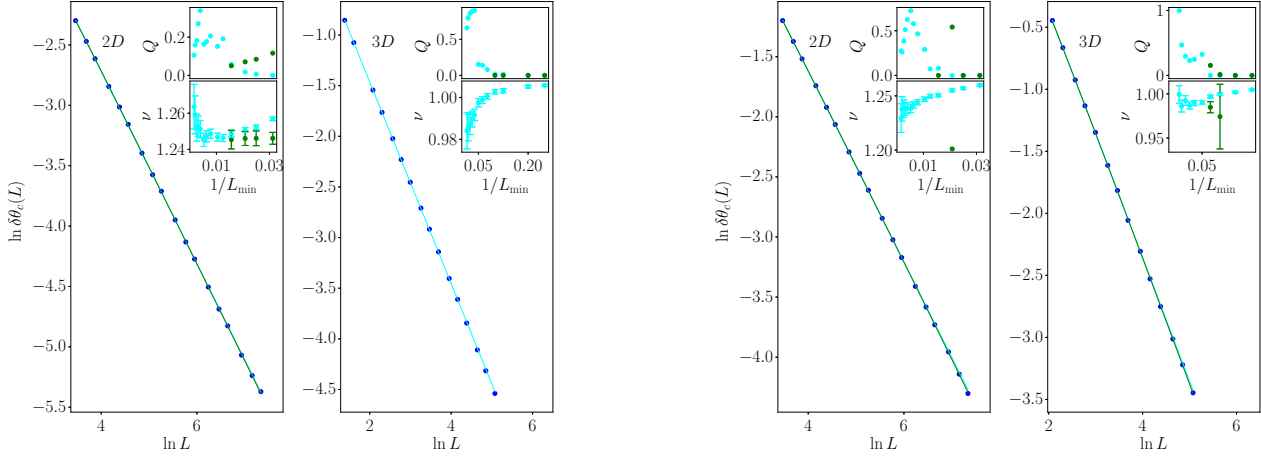


FIGURE B.13 – Logarithme de l'écart-type des points pseudo-critiques $\ln \delta\theta_c(L)$ du modèle d'Ising quantique désordonné en fonction de L avec un désordre initial $\Delta = 1$ (gauche) et $\Delta = 3$ (droite). La courbe cyan correspond à un ajustement, dit simple, suivant l'équation (3.25) tandis que la courbe verte à un ajustement, dit complexe, prenant en compte des corrections algébriques suivant l'équation (3.26). Dans les graphiques incrustés sont représentés la qualité de l'ajustement Q et l'exposant ν_w obtenu en procédant à un ajustement simple (en cyan) et complexe (en vert) en fonction de la plus petite taille L_{\min} considérée dans cet ajustement.

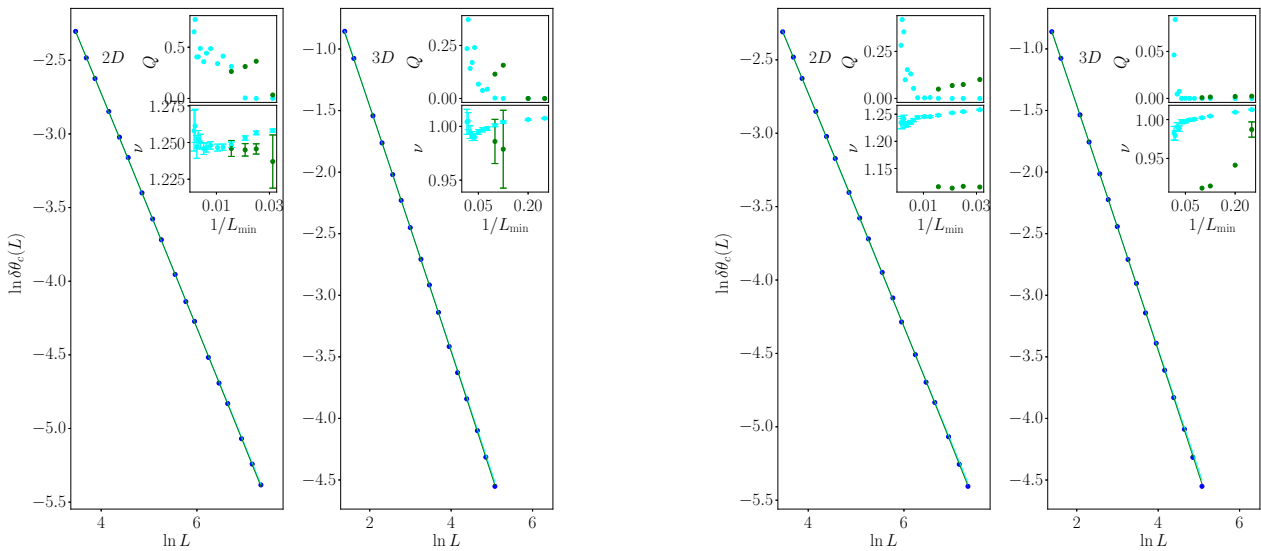


FIGURE B.14 – Modèle de Potts à $q = 3$ états (gauche) et $q = 5$ états (droite) avec $\Delta = 1$. Légende identique à celle de la figure B.13.

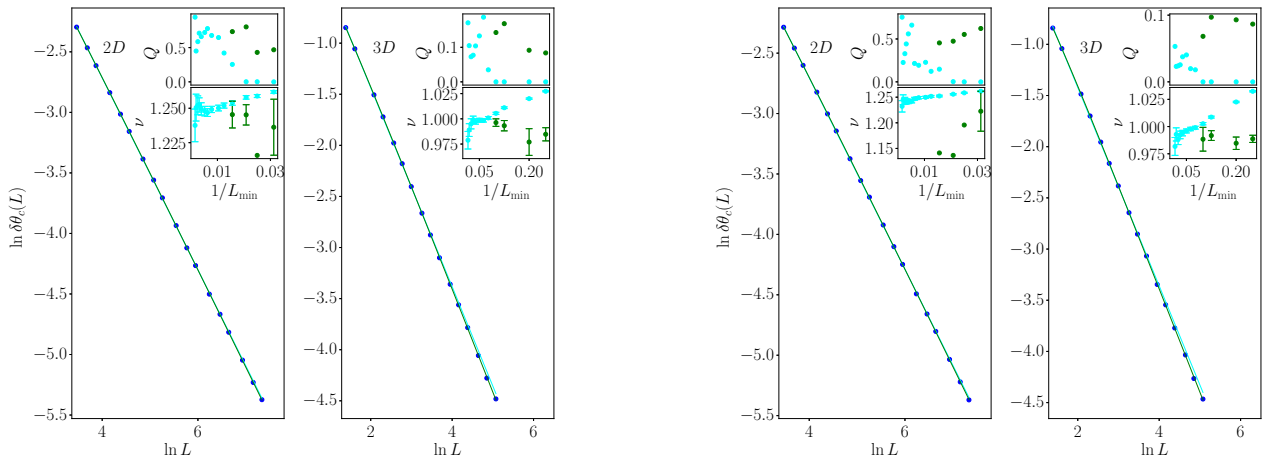


FIGURE B.15 – Modèle de Potts à $q = 20$ états (gauche) et $q = 50$ états (droite) avec $\Delta = 1$. Légende identique à celle de la figure B.13.

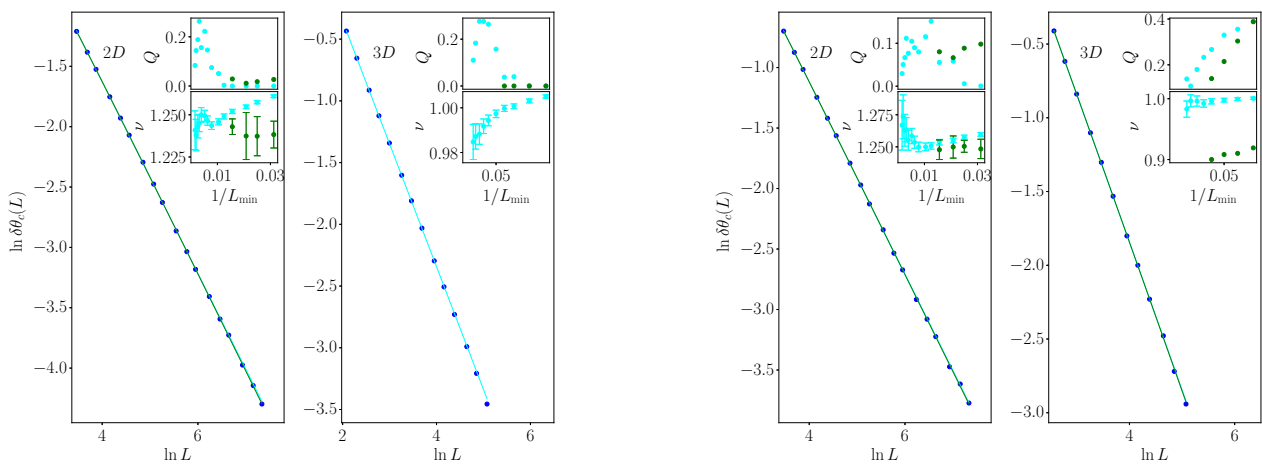


FIGURE B.16 – Modèle de Potts à $q = 50$ états avec $\Delta = 3$ (gauche) et $\Delta = 5$ (droite). Légende identique à celle de la figure B.13.

B.4 Moyennes des moments magnétiques

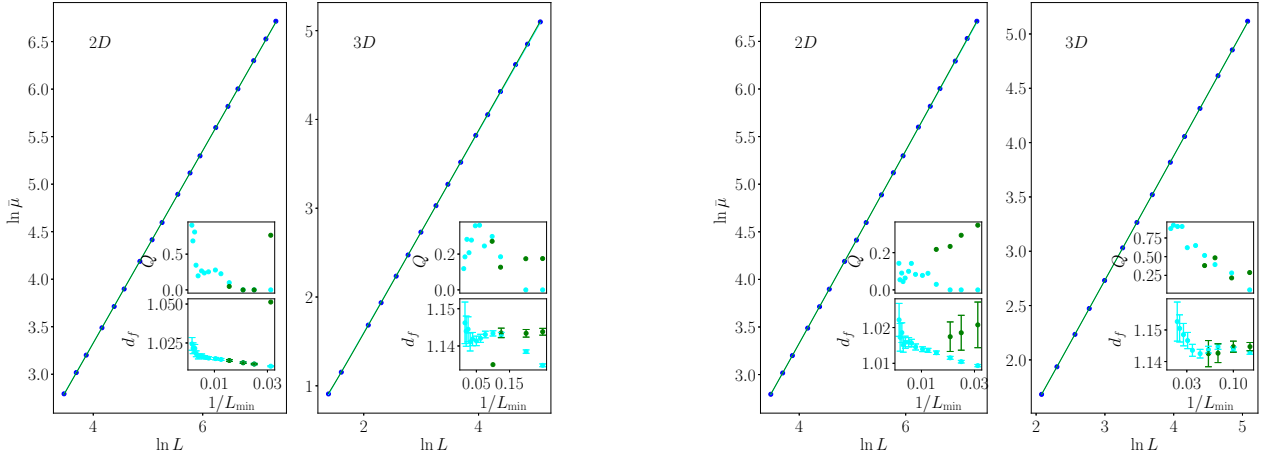


FIGURE B.17 – Logarithme de la moyenne des moments magnétiques des derniers amas $\ln \bar{\mu}$ du modèle d'Ising quantique désordonné en fonction de L avec un désordre initial $\Delta = 1$ (gauche) et $\Delta = 3$ (droite). La courbe cyan correspond à un ajustement, dit simple, suivant (3.28) tandis que la courbe verte à un ajustement, dit complexe, prenant en compte des corrections algébriques suivant (3.29). Dans les graphiques incrustés sont représentées la qualité de l'ajustement Q et la variation de l'exposant optimal d_f obtenu en procédant à un ajustement simple (en cyan) et complexe (en vert), en fonction de la plus petite taille L_{\min} considérée dans cet ajustement.

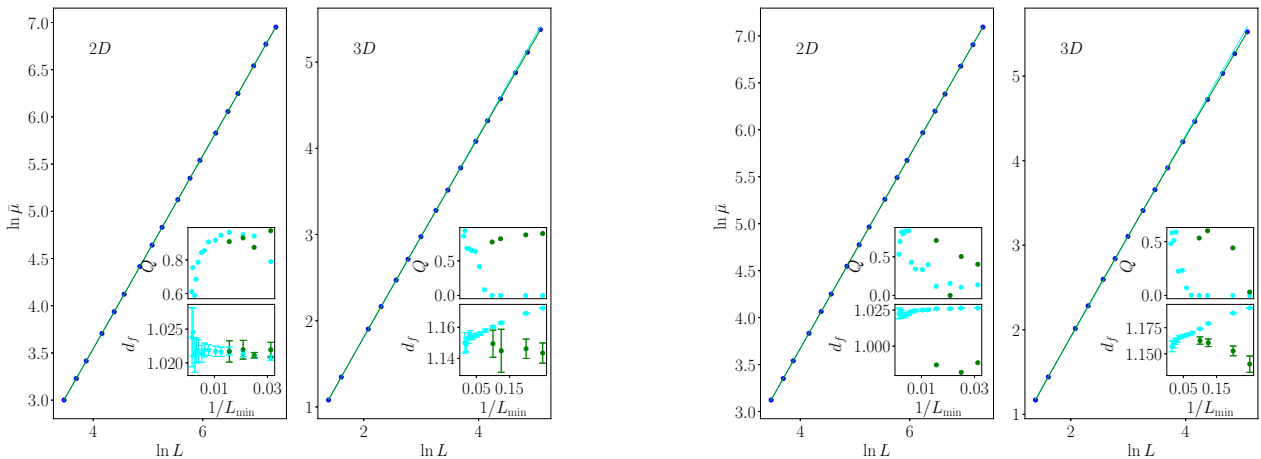


FIGURE B.18 – Modèle de Potts à $q = 3$ états (gauche) et $q = 5$ états (droite) avec $\Delta = 1$. Légende identique à celle de la figure B.17.

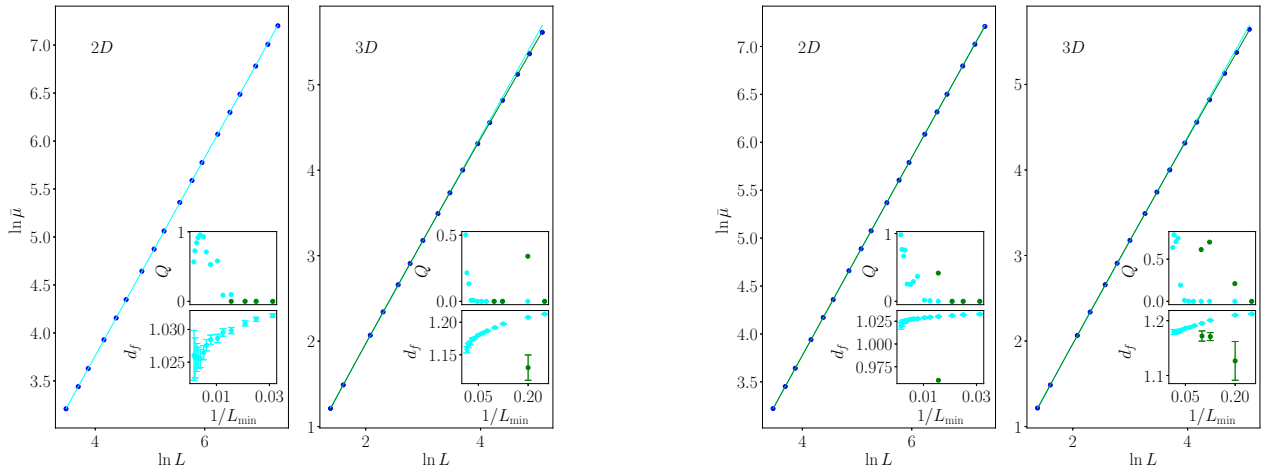


FIGURE B.19 – Modèle de Potts à $q = 20$ états (gauche) et $q = 50$ états (droite) avec $\Delta = 1$. Légende identique à celle de la figure B.17.

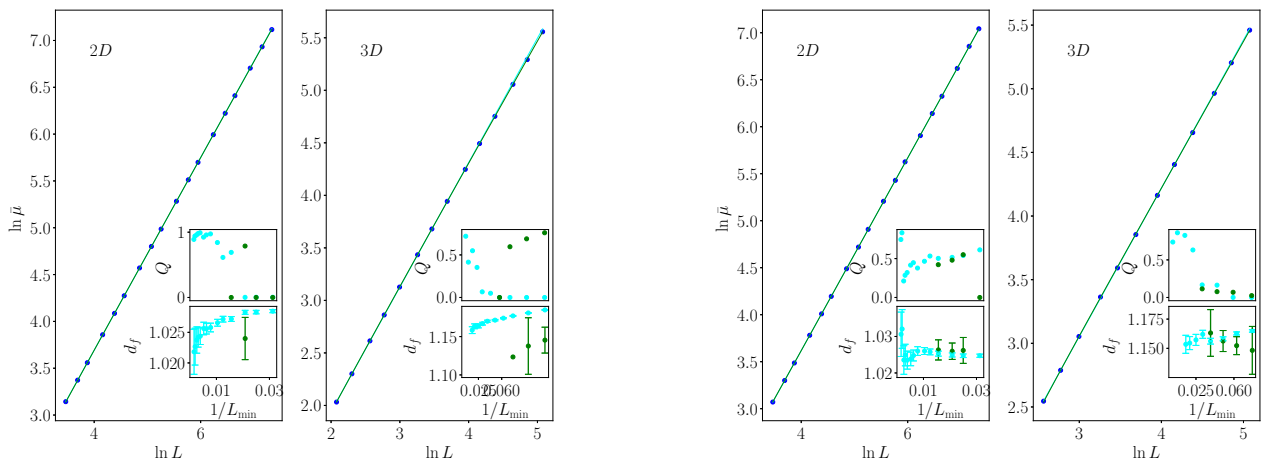


FIGURE B.20 – Modèle de Potts à $q = 50$ états avec $\Delta = 3$ (gauche) et $\Delta = 5$ (droite). Légende identique à celle de la figure B.17.

B.5 Moyennes des logarithmes des gaps d'énergie

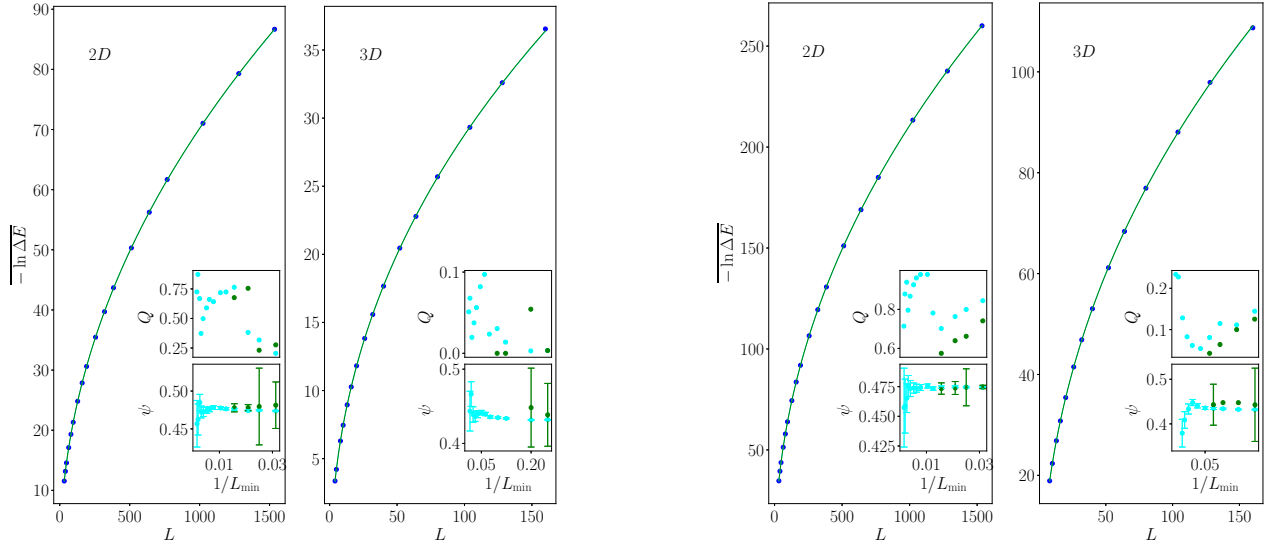


FIGURE B.21 – Moyenne du logarithme du gap d'énergie des derniers amas $-\ln \Delta E$ du modèle d'Ising quantique désordonné en fonction de L avec un désordre initial $\Delta = 1$ (gauche) et $\Delta = 3$ (droite). La courbe cyan correspond à un ajustement, dit simple, suivant l'équation (3.30) tandis que la courbe verte à un ajustement, dit complexe, prenant en compte des corrections algébriques suivant l'équation (3.31). Dans les graphiques incrustés sont représentés la qualité de l'ajustement Q et l'exposant optimal ψ , obtenu en procédant à un ajustement simple (en cyan) et complexe (en vert), en fonction de la plus petite taille L_{\min} considérée dans cet ajustement.

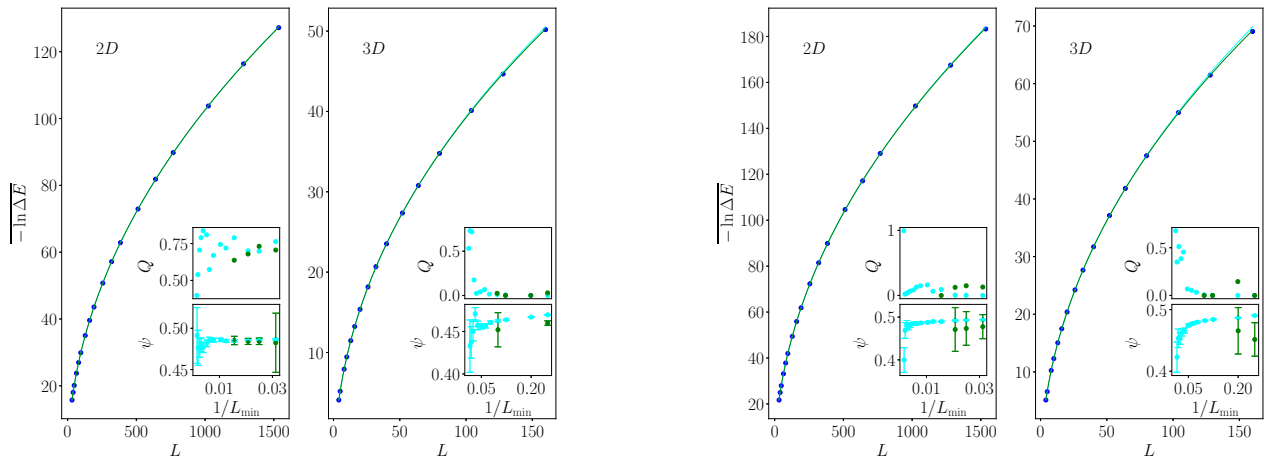


FIGURE B.22 – Modèle de Potts à $q = 3$ états (gauche) et $q = 5$ états (droite) avec $\Delta = 1$. Légende identique à celle de la figure B.21.

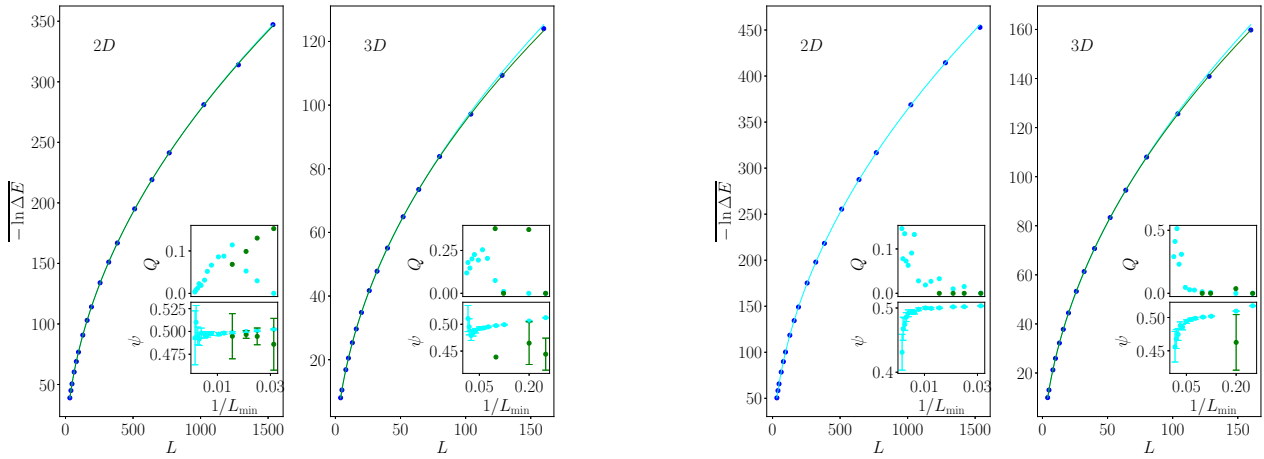


FIGURE B.23 – Modèle de Potts à $q = 20$ états (gauche) et $q = 50$ états (droite) avec $\Delta = 1$. Légende identique à celle de la figure B.21.

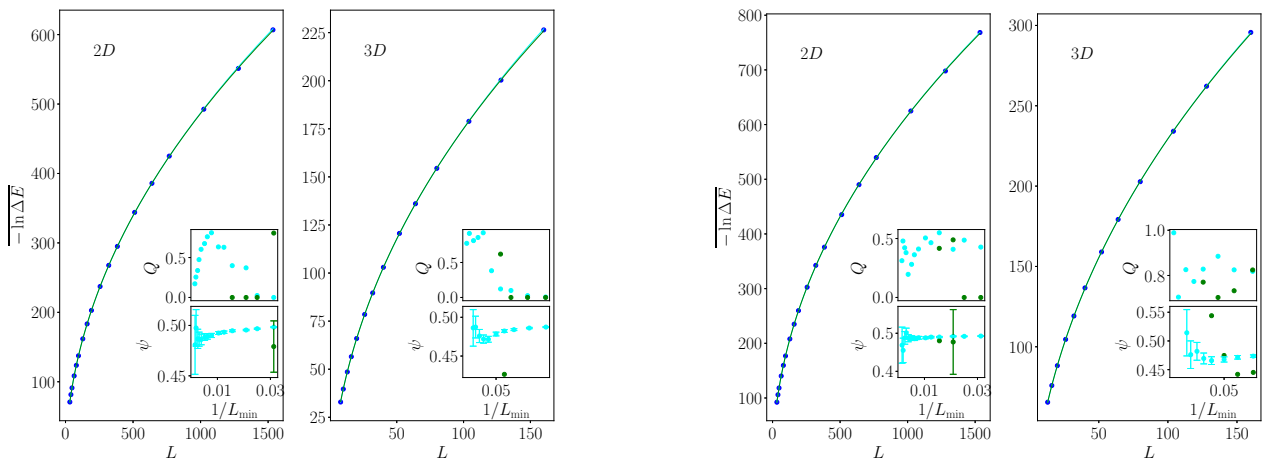


FIGURE B.24 – Modèle de Potts à $q = 50$ états avec $\Delta = 3$ (gauche) et $\Delta = 5$ (droite). Légende identique à celle de la figure B.21.

B.6 Distributions des gaps d'énergie

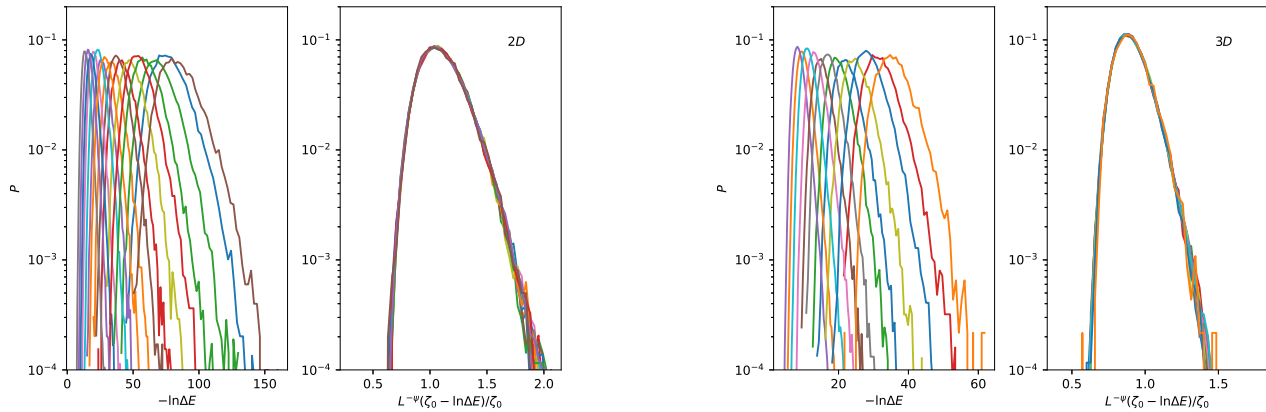


FIGURE B.25 – Distributions $P_L(\zeta)$, avec $\zeta = -\ln \Delta E$ et ΔE le gap d'énergie entre l'état fondamental et le premier niveau excité, du modèle d'Ising avec un désordre initial $\delta = 1$ et distributions $P_L((\zeta_0 + \zeta)L^{-\psi})$ avec ζ_0 et ψ des coefficients choisis pour obtenir le meilleur recouvrement des courbes entre les différentes tailles de systèmes L . Les couleurs indiquent des tailles L différentes croissantes de gauche à droite pour $P(\zeta)$. Les couples de paramètres (ζ_0, ψ) utilisés se trouvent dans la table 3.5.

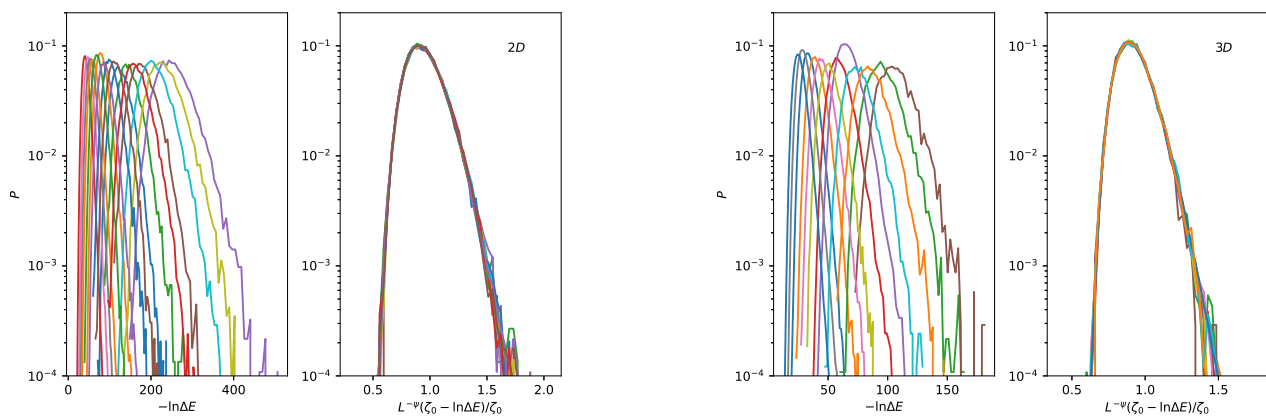


FIGURE B.26 – Modèle d'Ising avec $\Delta = 3$ en dimensions $D = 2$ (gauche) et $D = 3$ (droite). Légende identique à celle de la figure B.25.

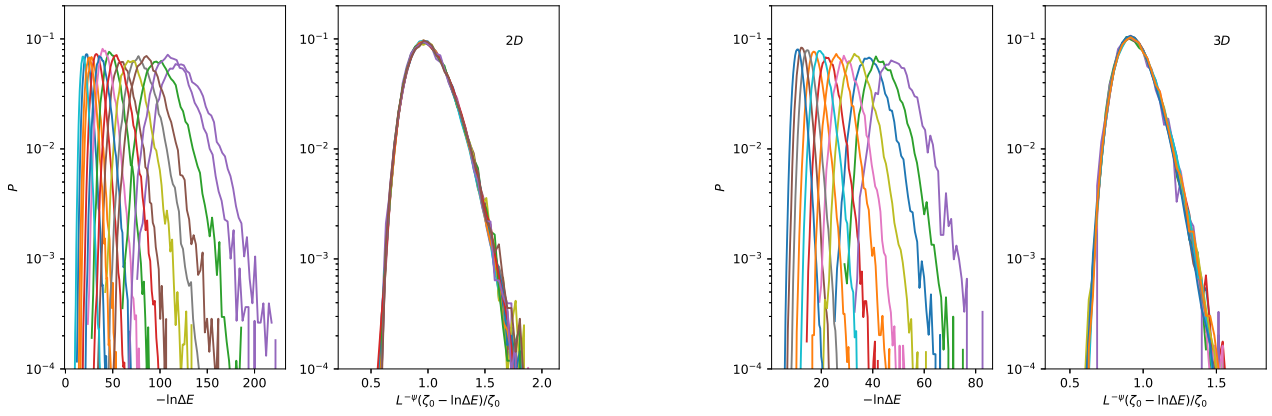


FIGURE B.27 – Modèle de Potts à $q = 3$ états avec $\Delta = 1$ en dimensions $D = 2$ (gauche) et $D = 3$ (droite). Légende identique à celle de la figure B.25.

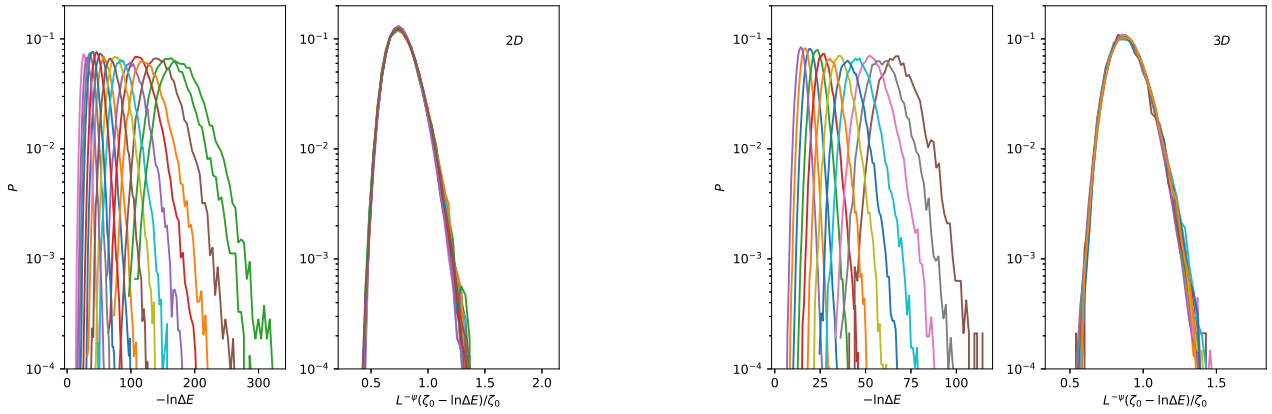


FIGURE B.28 – Modèle de Potts à $q = 5$ états avec $\Delta = 1$ en dimensions $D = 2$ (gauche) et $D = 3$ (droite). Légende identique à celle de la figure B.25.

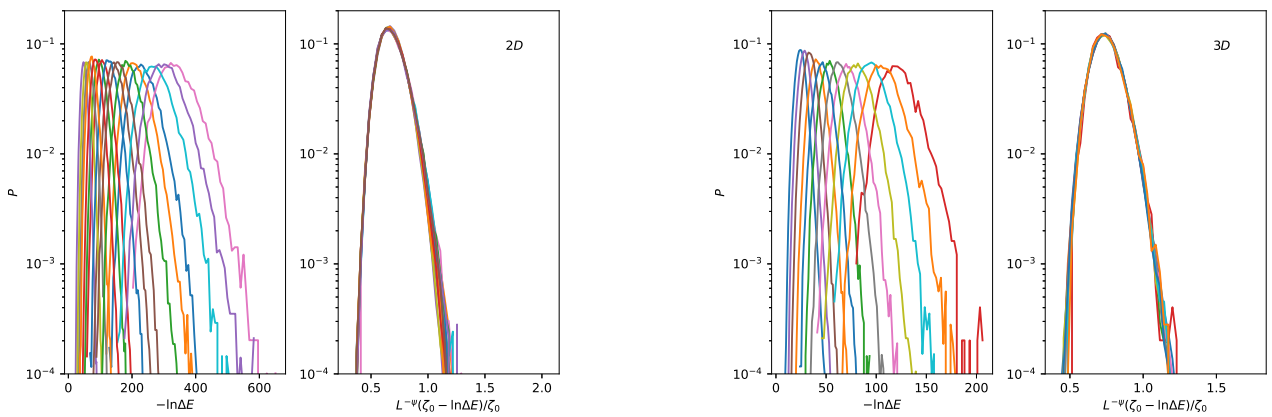


FIGURE B.29 – Modèle de Potts à $q = 20$ états avec $\Delta = 1$ en dimensions $D = 2$ (gauche) et $D = 3$ (droite). Légende identique à celle de la figure B.25.

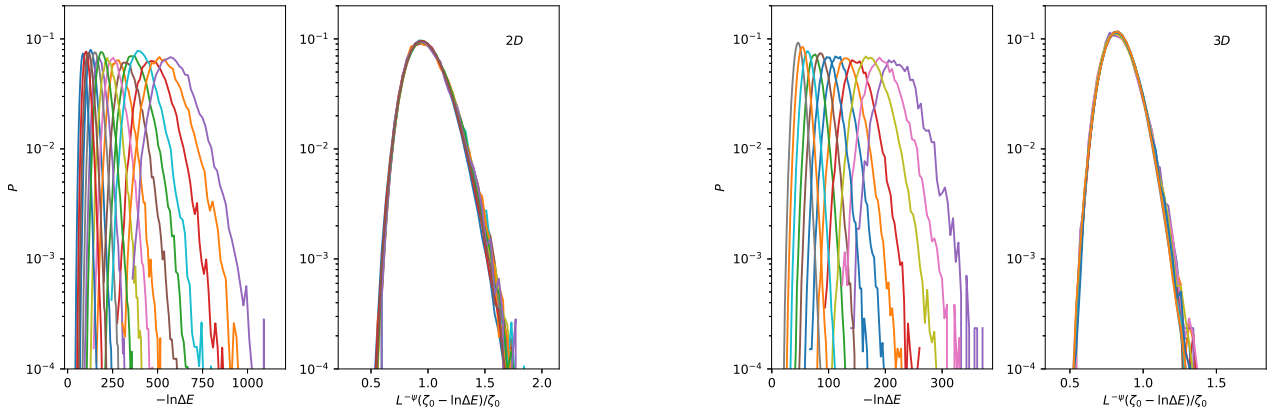


FIGURE B.30 – Modèle de Potts à $q = 50$ états avec $\Delta = 3$ en dimensions $D = 2$ (gauche) et $D = 3$ (droite). Légende identique à celle de la figure B.25.

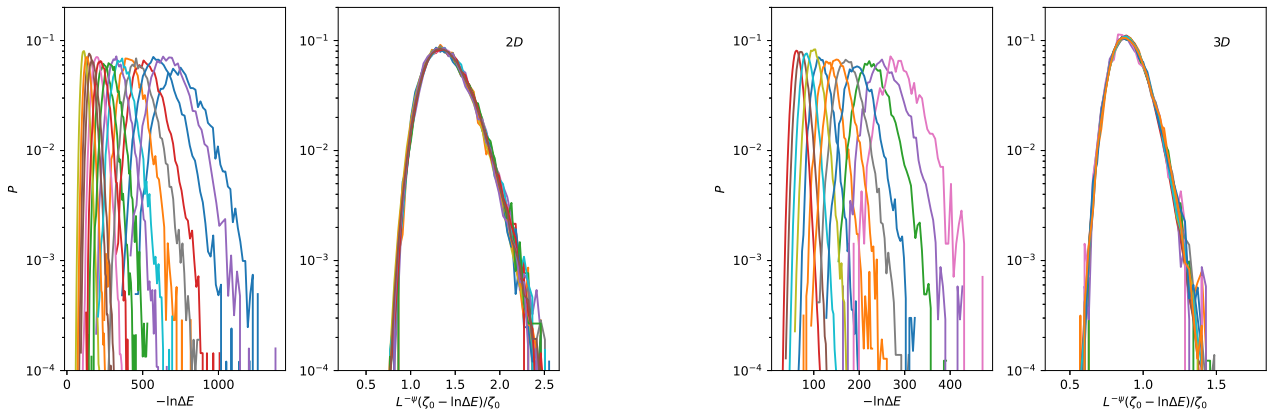


FIGURE B.31 – Modèle de Potts à $q = 50$ états avec $\Delta = 5$ en dimensions $D = 2$ (gauche) et $D = 3$ (droite). Légende identique à celle de la figure B.25.

Annexe C

Figures complémentaires pour le modèle d'horloge

C.1 Distributions des points pseudo-critiques

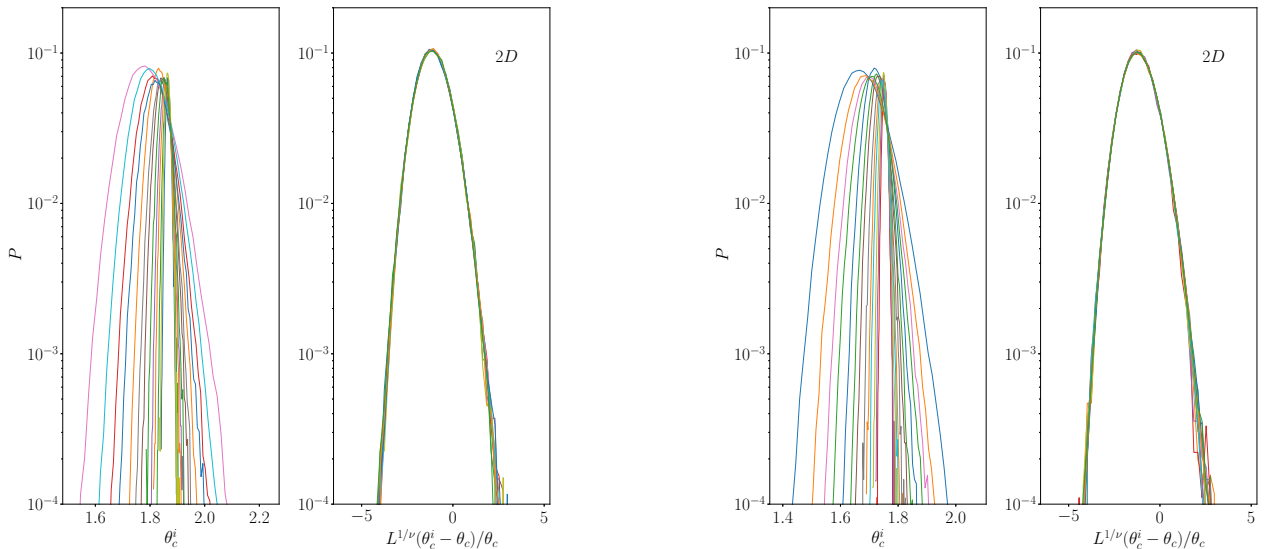


FIGURE C.1 – Distributions des points pseudo-critiques $\theta_c^i(L)$ et des variables d'échelle $u = L^{1/\nu}|\theta_c^i(L) - \theta_c|/\theta_c$ pour plusieurs tailles L du modèle d'horloge à $q = 5$ états avec un désordre initial $\Delta = 1$ (à gauche) et $\Delta = 2$ (à droite) en dimensions $D = 2$. Les distributions les plus larges $P_L(\theta_c^i)$ correspondent aux tailles les plus petites. Les variables ν et θ_c utilisées pour obtenir u se trouvent dans la table 4.3. Elles ont été déterminées en minimisant (3.21).

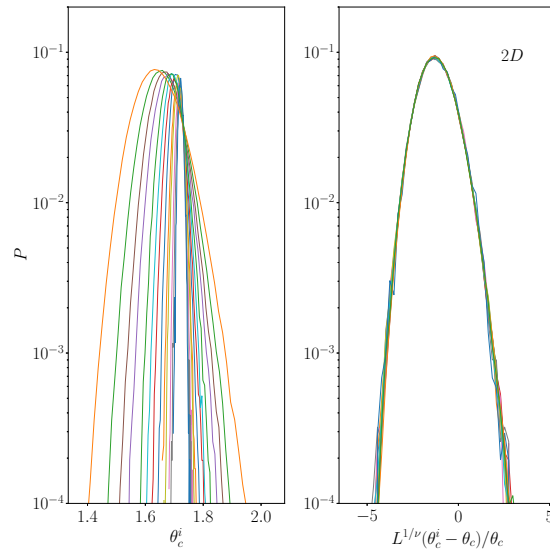


FIGURE C.2 – Modèle d'horloge à $q = 5$ états en dimensions $D = 2$ avec $\Delta = 3$. Légende identique à celle de la figure C.1.

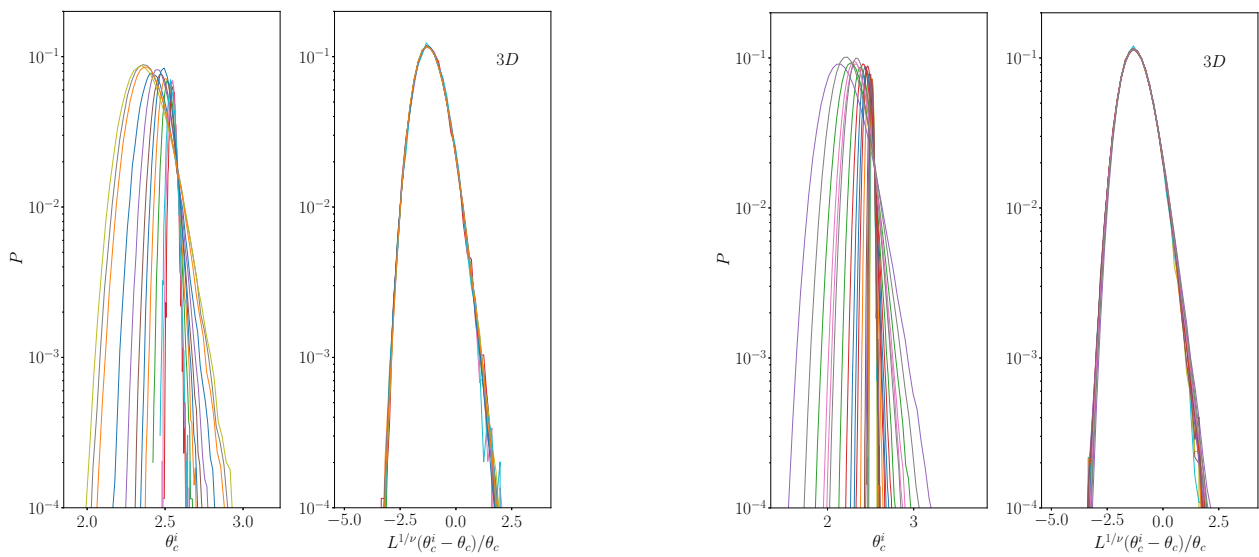


FIGURE C.3 – Modèle d'horloge à $q = 5$ états en dimensions $D = 3$ avec $\Delta = 3$ (à gauche) et $\Delta = 8$ (à droite). Légende identique à celle de la figure C.1.

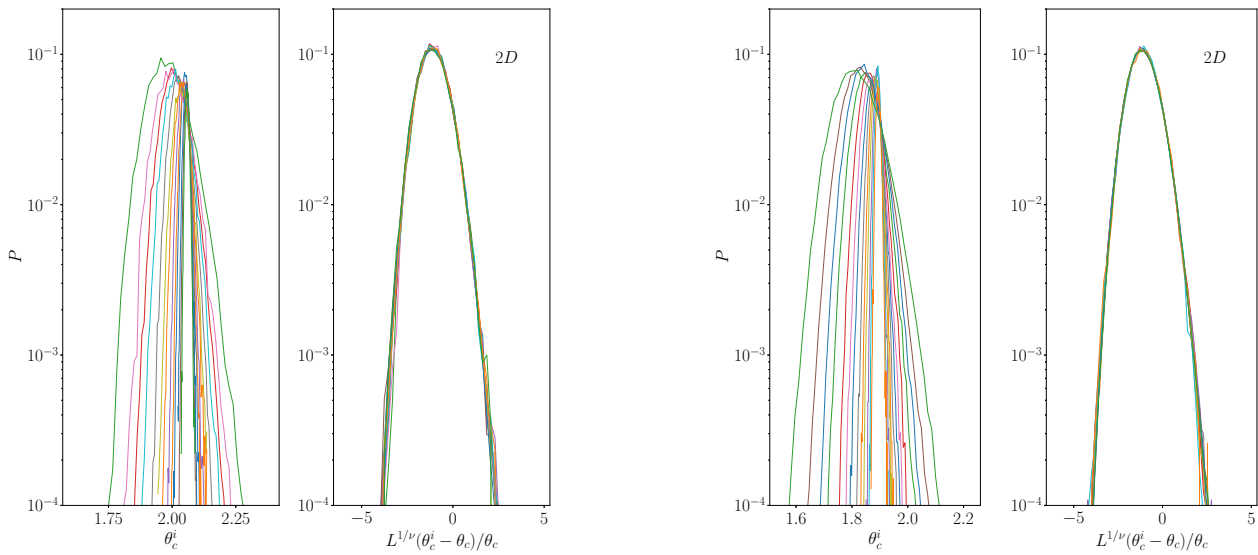


FIGURE C.4 – Modèle d’horloge à $q = 8$ états en dimensions $D = 2$ avec $\Delta = 2$ (à gauche) et $\Delta = 3$ (à droite). Légende identique à celle de la figure C.1.

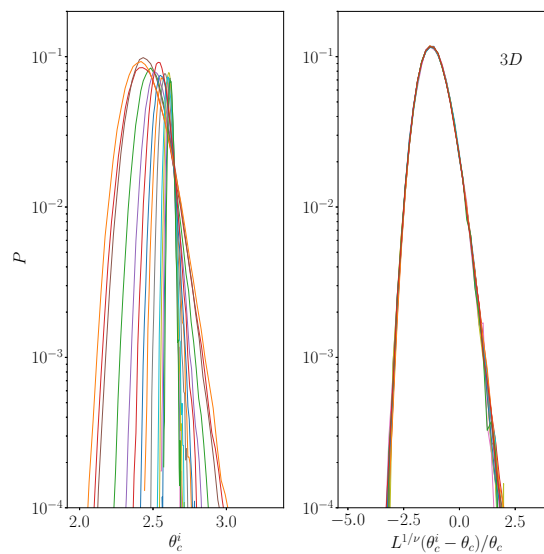


FIGURE C.5 – Modèle d’horloge à $q = 8$ états en dimensions $D = 3$ avec $\Delta = 5$. Légende identique à celle de la figure C.1.

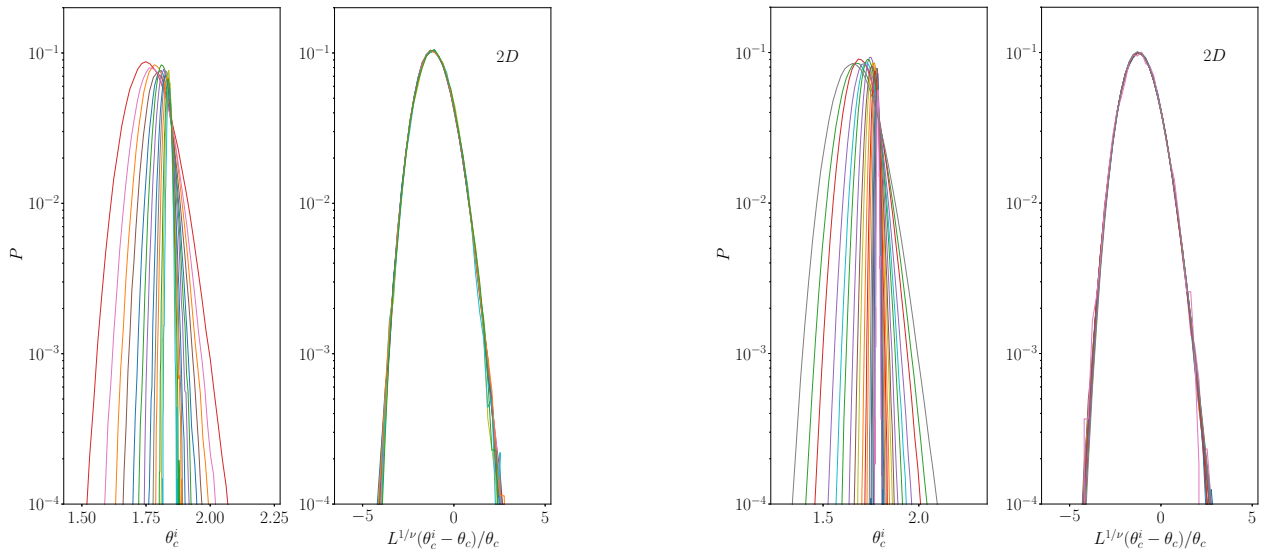


FIGURE C.6 – Modèle d'horloge à $q = 10$ états en dimensions $D = 2$ avec $\Delta = 5$ (à gauche) et $\Delta = 7$ (à droite). Légende identique à celle de la figure C.1.

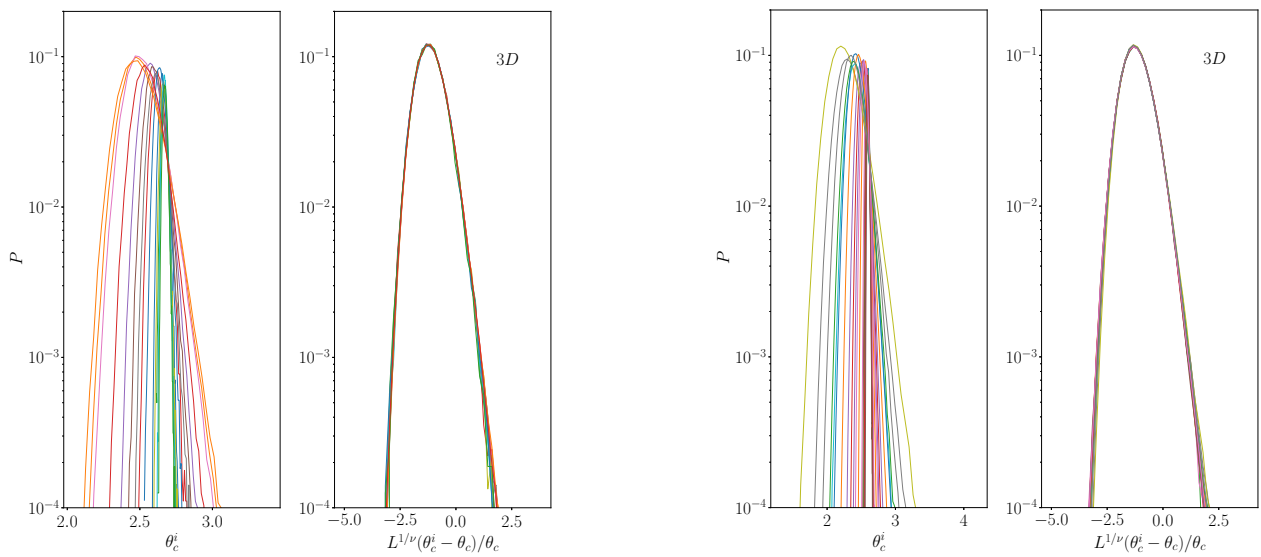


FIGURE C.7 – Modèle d'horloge à $q = 10$ états en dimensions $D = 3$ avec $\Delta = 5$ (à gauche) et $\Delta = 8$ (à droite). Légende identique à celle de la figure C.1.

C.2 Écarts-types des points pseudo-critiques

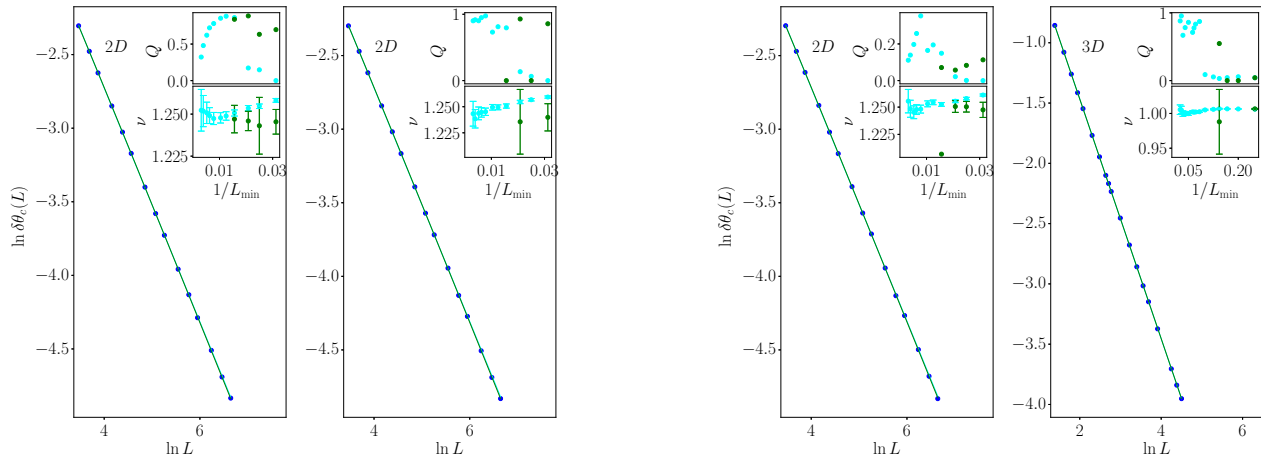


FIGURE C.8 – Logarithme de l'écart-type des points pseudo-critiques $\ln \delta\theta_c(L)$ du modèle d'horloge à cinq états quantique désordonné en fonction de L . Le désordre initial utilisé est, de gauche à droite, $\Delta = 1, \Delta = 2, \Delta = 3$ ($2D$). La courbe cyan correspond à un ajustement, dit simple, suivant l'équation (3.25) tandis que la courbe verte à un ajustement, dit complexe, prenant en compte des corrections algébriques suivant l'équation (3.26). Dans les graphiques incrustés sont représentés la qualité de l'ajustement Q et l'exposant ν_w obtenu en procédant à un ajustement simple (en cyan) et complexe (en vert) en fonction de la plus petite taille L_{\min} considérée dans cet ajustement.

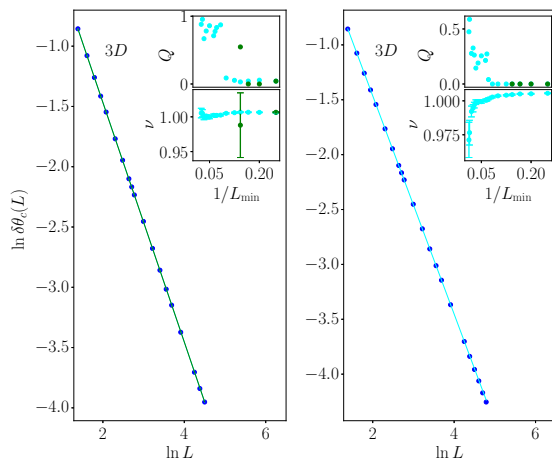


FIGURE C.9 – Modèle d'horloge à $q = 5$ états. Le désordre initial utilisé est, de gauche à droite, $\Delta = 3, \Delta = 8$ ($3D$). Légende identique à celle de la figure C.8.

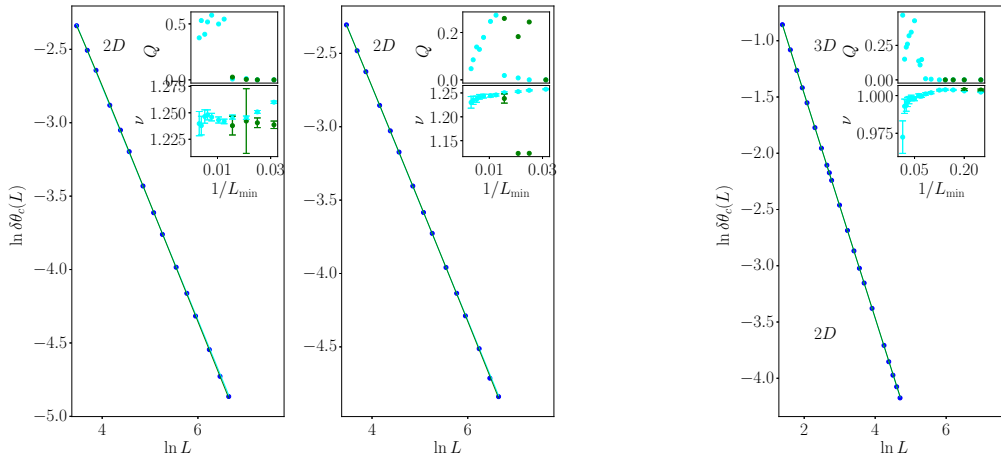


FIGURE C.10 – Modèle d'horloge à $q = 8$ états. Le désordre initial utilisé est, de gauche à droite, $\Delta = 2, \Delta = 3$ ($2D$) et $\Delta = 5$ ($3D$). Légende identique à celle de la figure C.8.

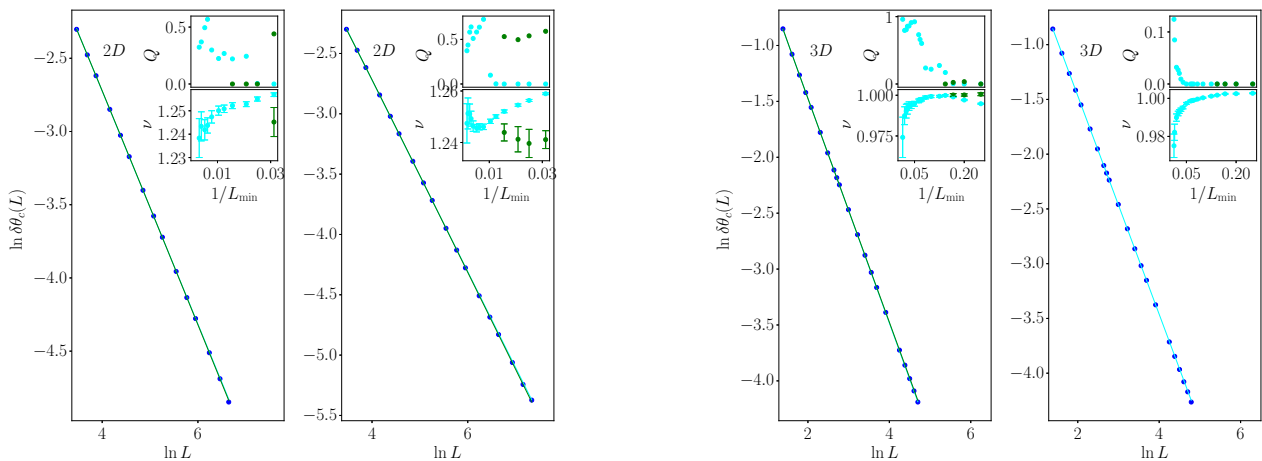


FIGURE C.11 – Modèle d'horloge à $q = 10$ états. Le désordre initial utilisé est, de gauche à droite, $\Delta = 5, \Delta = 7$ ($2D$) et $\Delta = 5, \Delta = 8$ ($3D$). Légende identique à celle de la figure C.8.

C.3 Moyennes des points pseudo-critiques

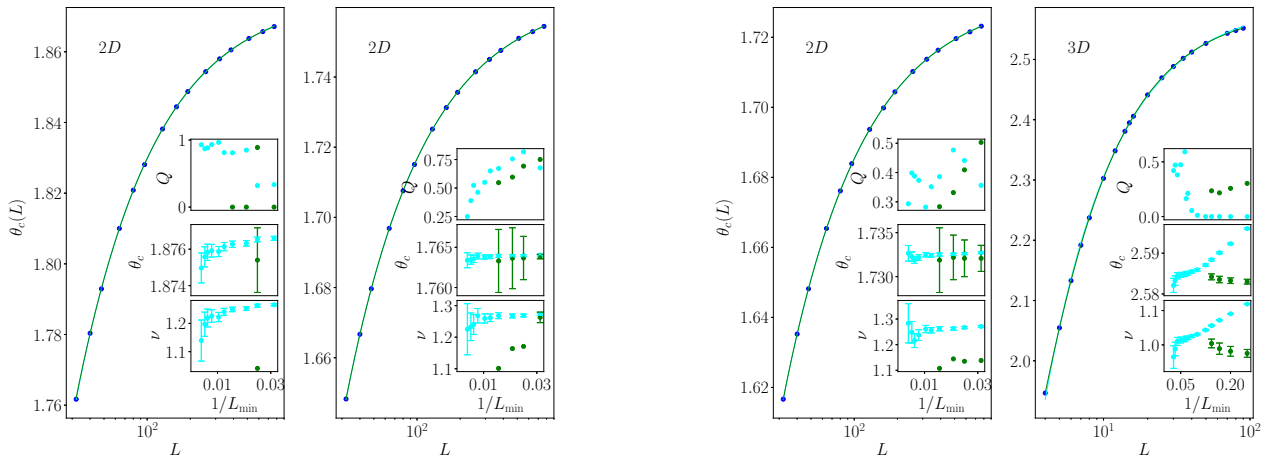


FIGURE C.12 – Moyenne des points pseudo-critiques $\theta_c(L) \equiv \overline{\theta_c^i(L)}$ du modèle d’horloge à cinq états quantique désordonné en fonction de L . Le désordre initial utilisé est, de gauche à droite, $\Delta = 1, \Delta = 2, \Delta = 3$ ($2D$). La courbe cyan correspond à un ajustement simple suivant l’équation (3.22) tandis que la courbe verte à un ajustement complexe prenant en compte des corrections algébriques suivant l’équation (3.24). Dans les graphiques incrustés sont représentées la qualité de l’ajustement Q et la variation des paramètres optimaux ν_s et θ_c obtenus en procédant à un ajustement simple (en cyan) et complexe (en vert) en fonction de la plus petite taille L_{\min} considérée. Si aucune barre d’erreur n’est indiquée, cela signifie que l’erreur est plus grande que la fenêtre et donc que l’ajustement réalisé est peu exploitable.

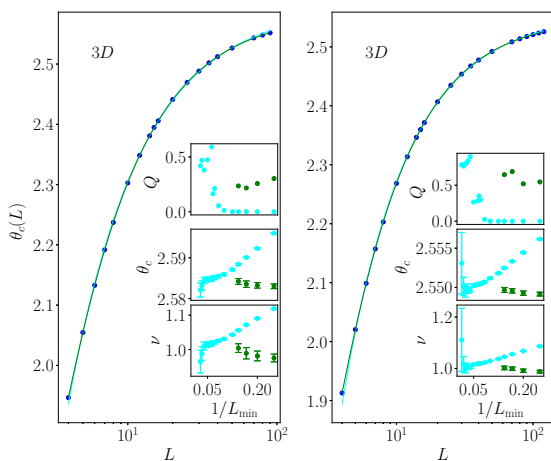


FIGURE C.13 – Modèle d’horloge à $q = 5$ états. Le désordre initial utilisé est, de gauche à droite, $\Delta = 3, \Delta = 8$ ($3D$). Légende identique à celle de la figure C.12.

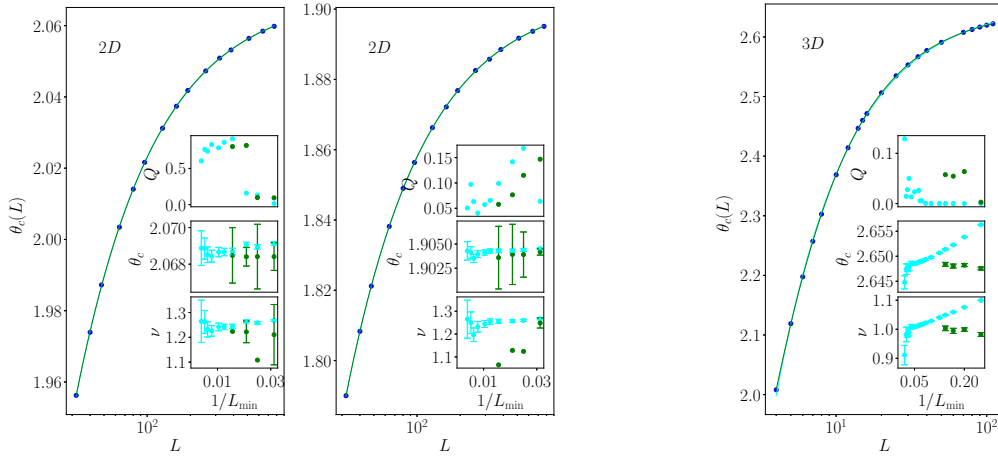


FIGURE C.14 – Modèle d'horloge à $q = 8$ états. Le désordre initial utilisé est, de gauche à droite, $\Delta = 2$, $\Delta = 3$ (2D) et $\Delta = 5$ (3D). Légende identique à celle de la figure C.12.

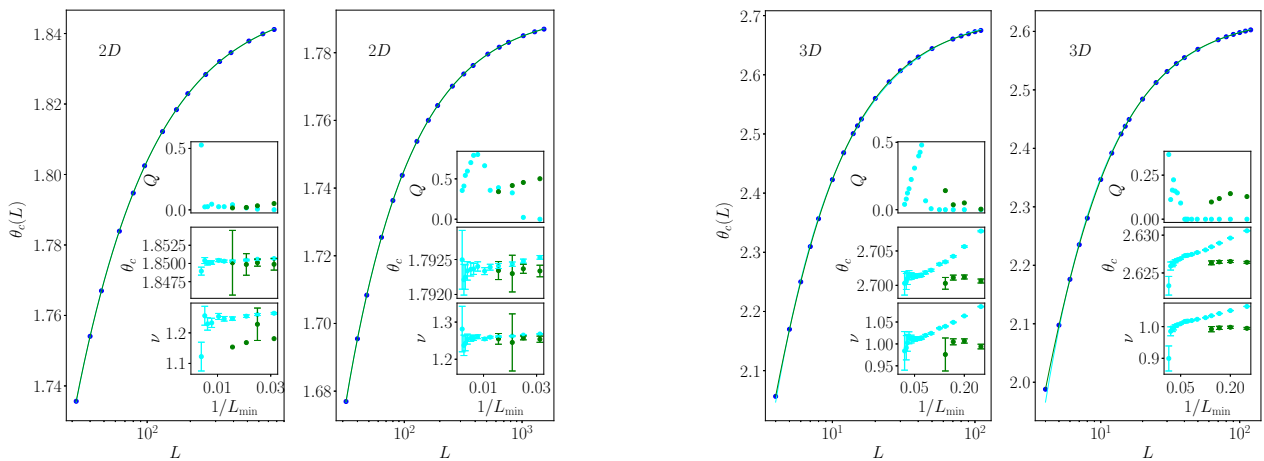


FIGURE C.15 – Modèle d'horloge à $q = 10$ états. Le désordre initial utilisé est, de gauche à droite, $\Delta = 5$, $\Delta = 7$ (2D) et $\Delta = 5$, $\Delta = 8$ (3D). Légende identique à celle de la figure C.12.

C.4 Moyennes des moments magnétiques

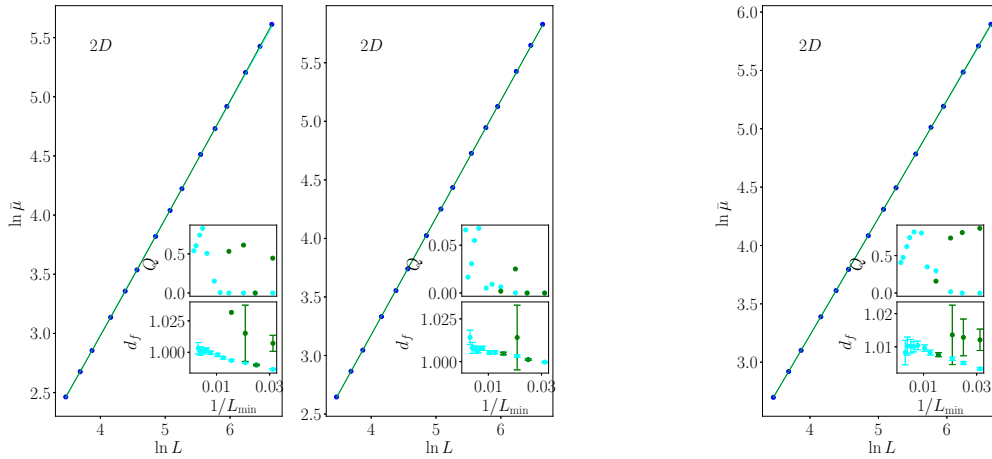


FIGURE C.16 – Logarithme de la moyenne des moments magnétiques des derniers amas $\ln \bar{\mu}$ du modèle d’horloge à cinq états quantique désordonné en fonction de L . Le désordre initial utilisé est, de gauche à droite, $\Delta = 1, \Delta = 2, \Delta = 3$ ($2D$). La courbe cyan correspond à un ajustement, dit simple, suivant (3.28) tandis que la courbe verte à un ajustement, dit complexe, prenant en compte des corrections algébriques suivant (3.29). Dans les graphiques incrustés sont représentées la qualité de l’ajustement Q et la variation de l’exposant optimal d_f obtenu en procédant à un ajustement simple (en cyan) et complexe (en vert), en fonction de la plus petite taille L_{\min} considérée dans cet ajustement.

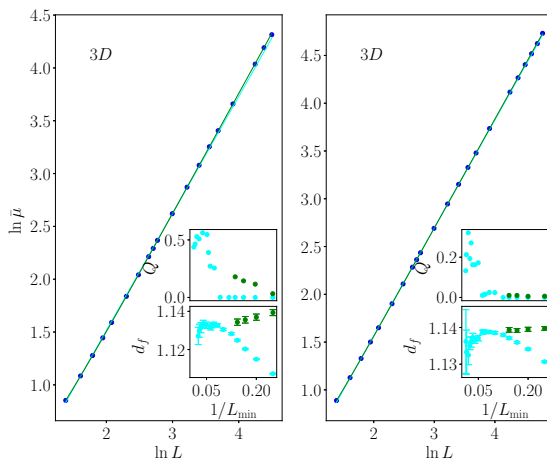


FIGURE C.17 – Modèle d’horloge à $q = 5$ états. Le désordre initial utilisé est, de gauche à droite, $\Delta = 3, \Delta = 8$ ($3D$). Légende identique à celle de la figure C.16.

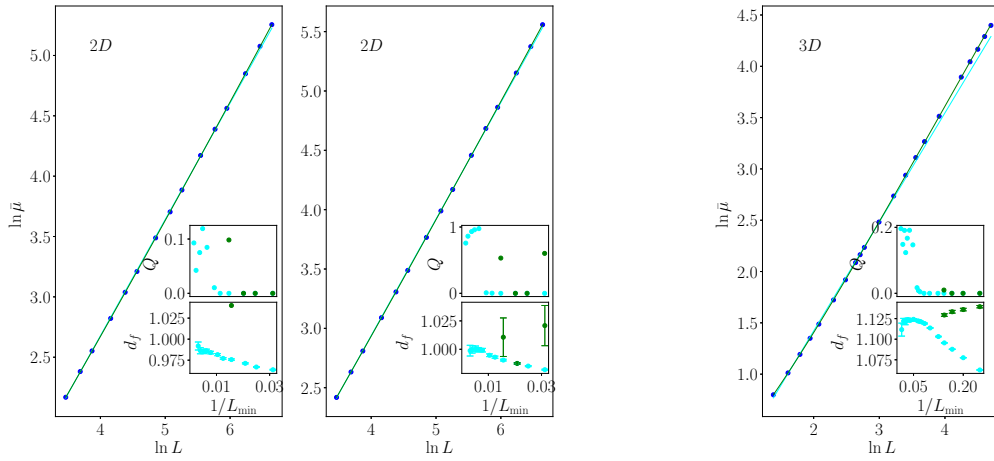


FIGURE C.18 – Modèle d'horloge à $q = 8$ états. Le désordre initial utilisé est, de gauche à droite, $\Delta = 2, \Delta = 3$ ($2D$) et $\Delta = 5$ ($3D$). Légende identique à celle de la figure C.16.

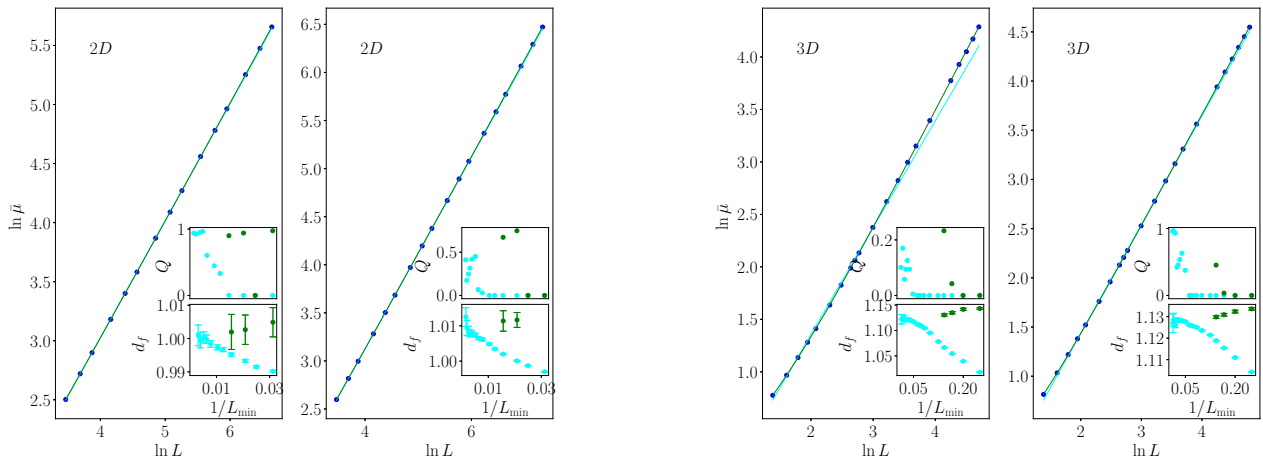


FIGURE C.19 – Modèle d'horloge à $q = 10$ états. Le désordre initial utilisé est, de gauche à droite, $\Delta = 5, \Delta = 7$ ($2D$) et $\Delta = 5, \Delta = 8$ ($3D$). Légende identique à celle de la figure C.16.

C.5 Moyennes des logarithmes des gaps d'énergie

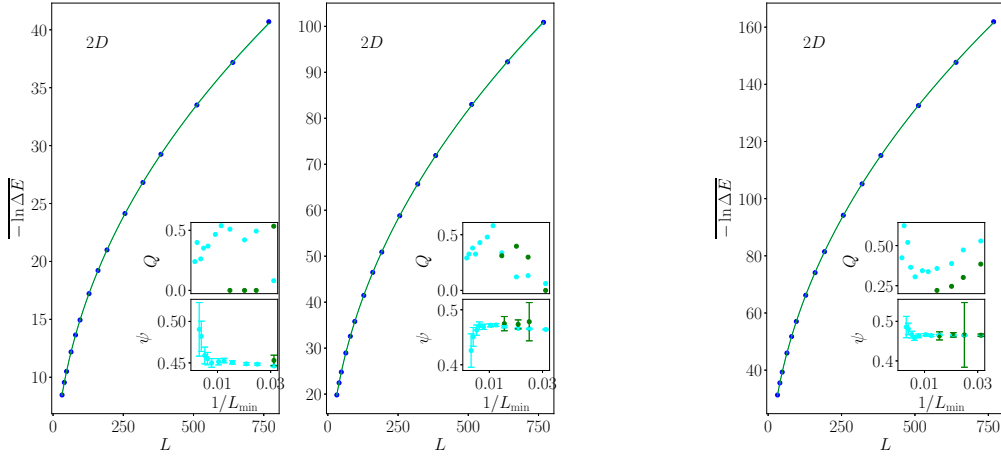


FIGURE C.20 – Moyenne du logarithme du gap d'énergie des derniers amas $-\overline{\ln \Delta E}$ du modèle d'horloge à cinq états quantique désordonné en fonction de L . Le désordre initial utilisé est, de gauche à droite, $\Delta = 1, \Delta = 2, \Delta = 3$ ($2D$). La courbe cyan correspond à un ajustement, dit simple, suivant l'équation (3.30) tandis que la courbe verte à un ajustement, dit complexe, prenant en compte des corrections algébriques suivant l'équation (3.31). Dans les graphiques incrustés sont représentés la qualité de l'ajustement Q et l'exposant optimal ψ , obtenu en procédant à un ajustement simple (en cyan) et complexe (en vert), en fonction de la plus petite taille L_{\min} considérée dans cet ajustement.

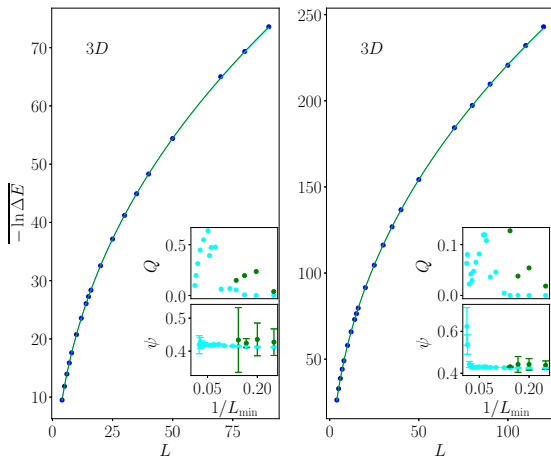


FIGURE C.21 – Modèle d'horloge à $q = 5$ états. Le désordre initial utilisé est, de gauche à droite, $\Delta = 3, \Delta = 8$ ($3D$). Légende identique à celle de la figure C.20.

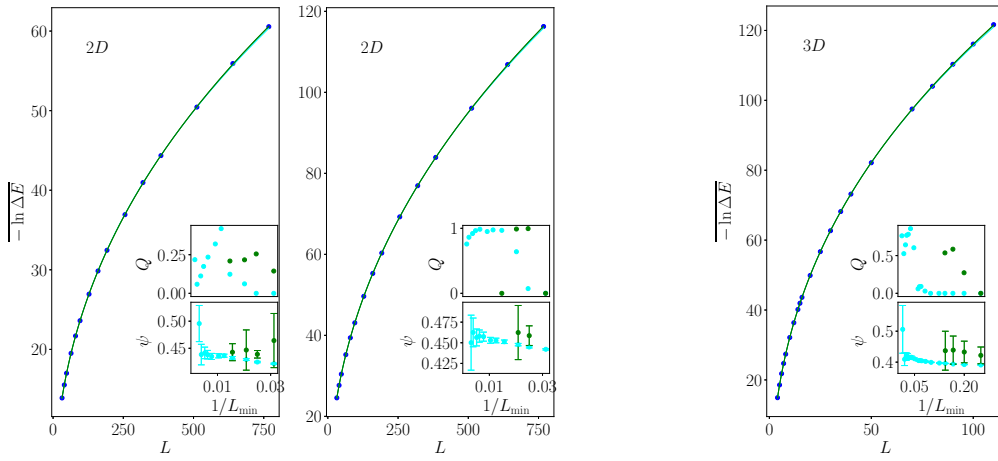


FIGURE C.22 – Modèle d'horloge à $q = 8$ états. Le désordre initial utilisé est, de gauche à droite, $\Delta = 2, \Delta = 3$ (2D) et $\Delta = 5$ (3D). Légende identique à celle de la figure C.20.

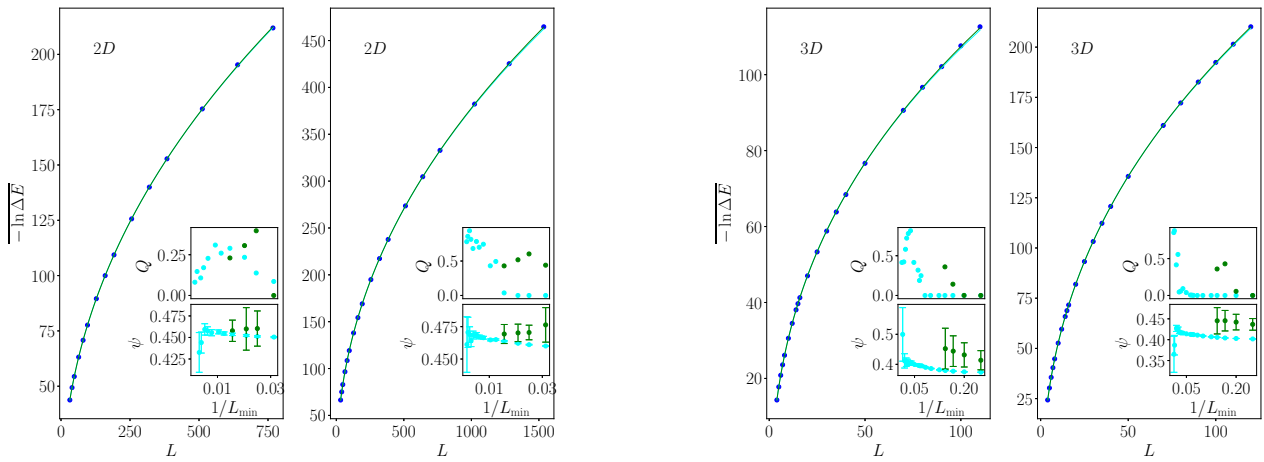


FIGURE C.23 – Modèle d'horloge à $q = 10$ états. Le désordre initial utilisé est, de gauche à droite, $\Delta = 5, \Delta = 7$ (2D) et $\Delta = 5, \Delta = 8$ (3D). Légende identique à celle de la figure C.20.

C.6 Distributions des gaps d'énergie

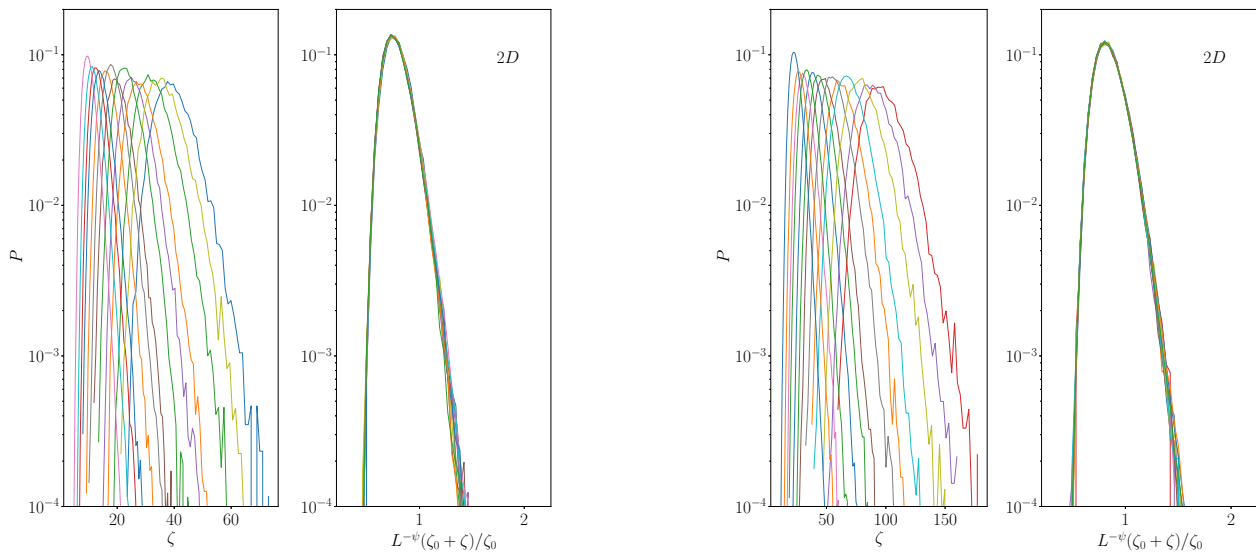


FIGURE C.24 – Distributions $P_L(\zeta)$, avec $\zeta = -\ln \Delta E$ et ΔE le gap d'énergie entre l'état fondamental et le premier niveau excité, du modèle d'horloge à $q = 5$ états avec un désordre initial $\Delta = 1$ (à gauche) et $\Delta = 2$ (à droite) et distributions $P_L((\zeta_0 + \zeta)L^{-\psi})$ avec ζ_0 et ψ des coefficients choisis pour obtenir le meilleur recouvrement des courbes entre les différentes tailles de systèmes L . Les courbes de différentes couleur indiquent des tailles L différentes croissantes de gauche à droite pour $P(\zeta)$. Les couples de paramètres (ζ_0, ψ) utilisés se trouvent dans la table 4.5.

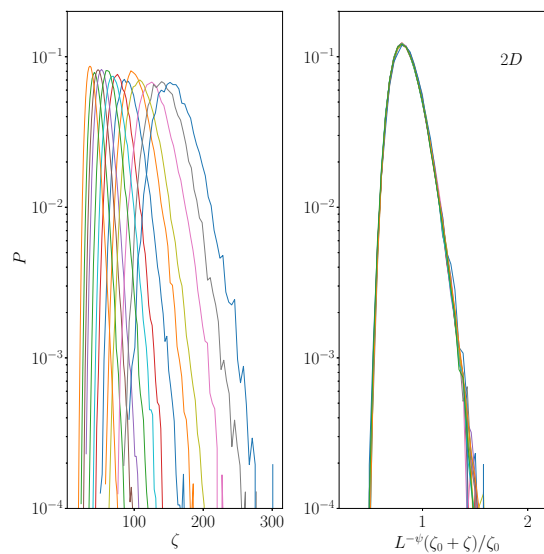


FIGURE C.25 – Modèle d'horloge à $q = 5$ états en dimensions $D = 2$ avec $\Delta = 3$. Légende identique à celle de la figure C.24.

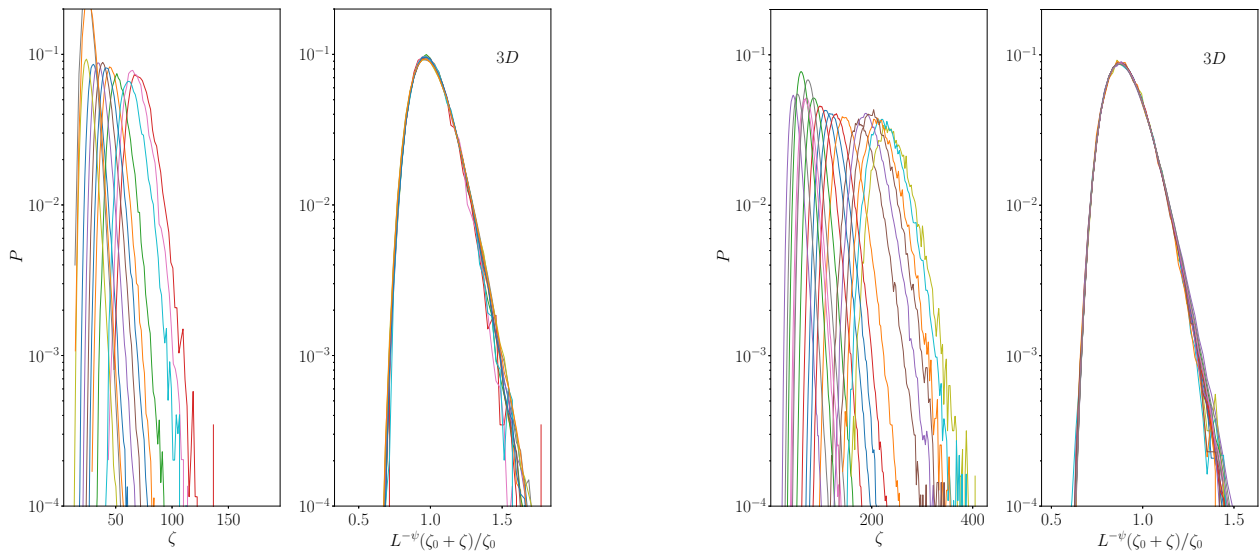


FIGURE C.26 – Modèle d'horloge à $q = 5$ états en dimensions $D = 3$ avec $\Delta = 3$ (à gauche) et $\Delta = 8$ (à droite). Légende identique à celle de la figure C.24.

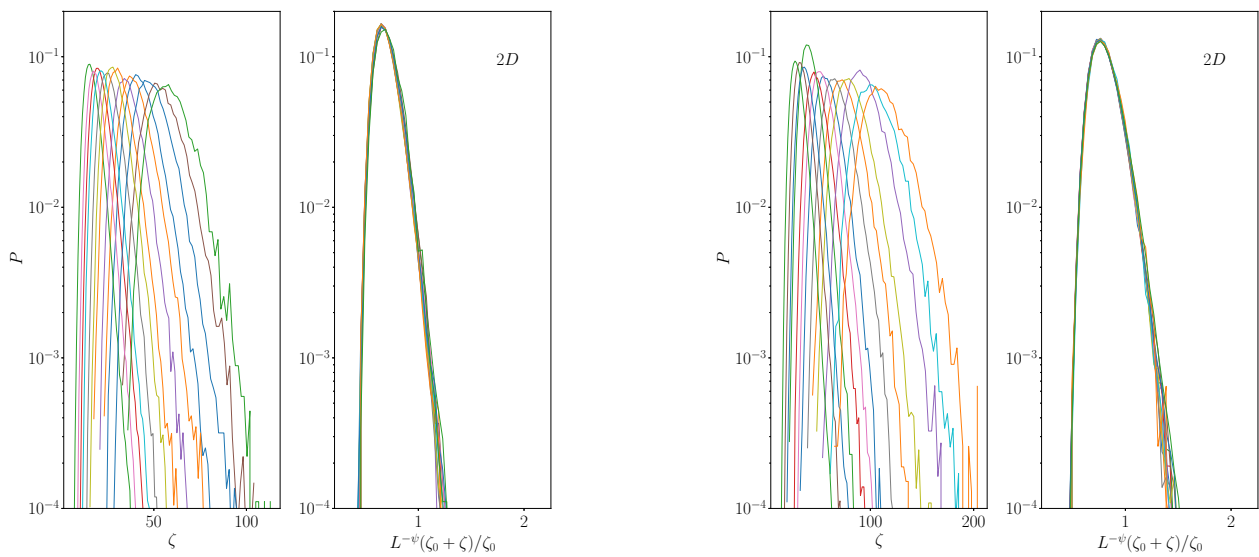


FIGURE C.27 – Modèle d'horloge à $q = 8$ états en dimensions $D = 2$ avec $\Delta = 2$ (à gauche) et $\Delta = 3$ (à droite). Légende identique à celle de la figure C.24.

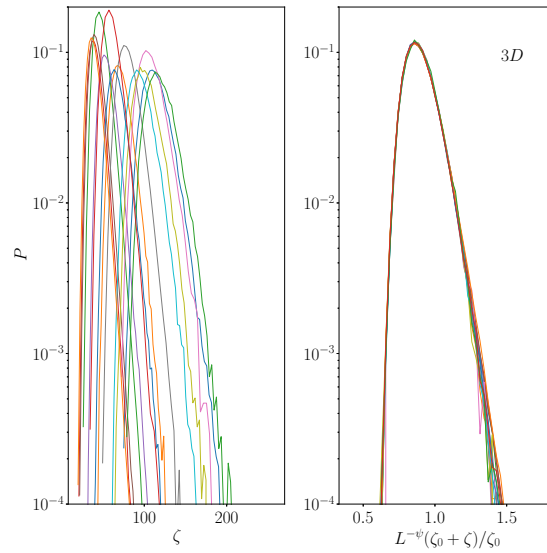


FIGURE C.28 – Modèle d’horloge à $q = 8$ états en dimensions $D = 3$ avec $\Delta = 5$ (à gauche). Légende identique à celle de la figure C.24.

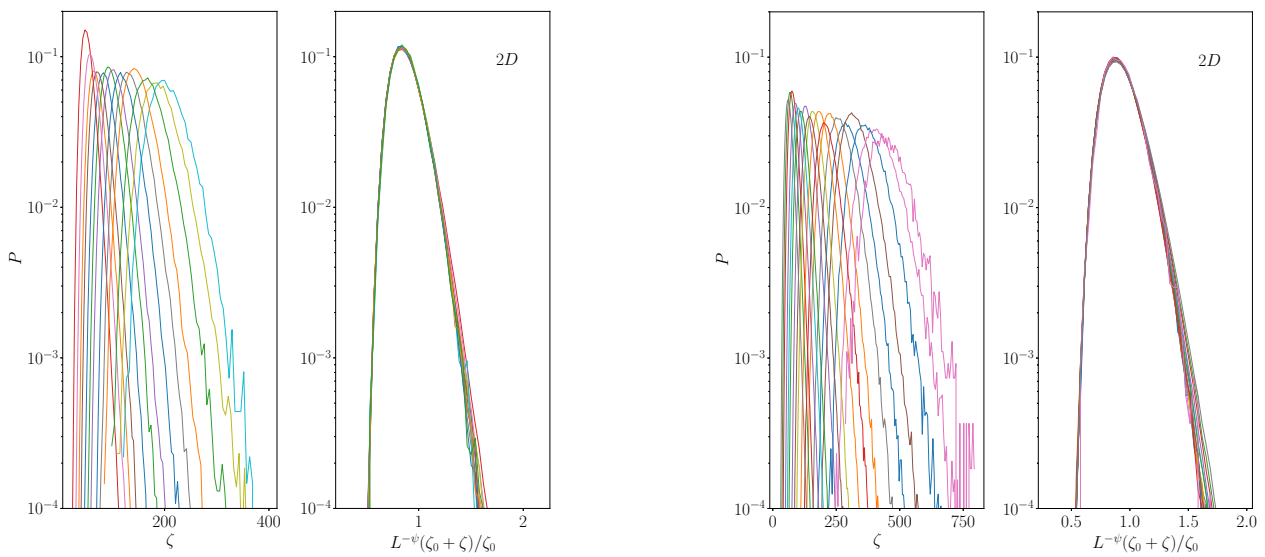


FIGURE C.29 – Modèle d’horloge à $q = 10$ états en dimensions $D = 2$ avec $\Delta = 5$ (à gauche) et $\Delta = 7$ (à droite). Légende identique à celle de la figure C.24.

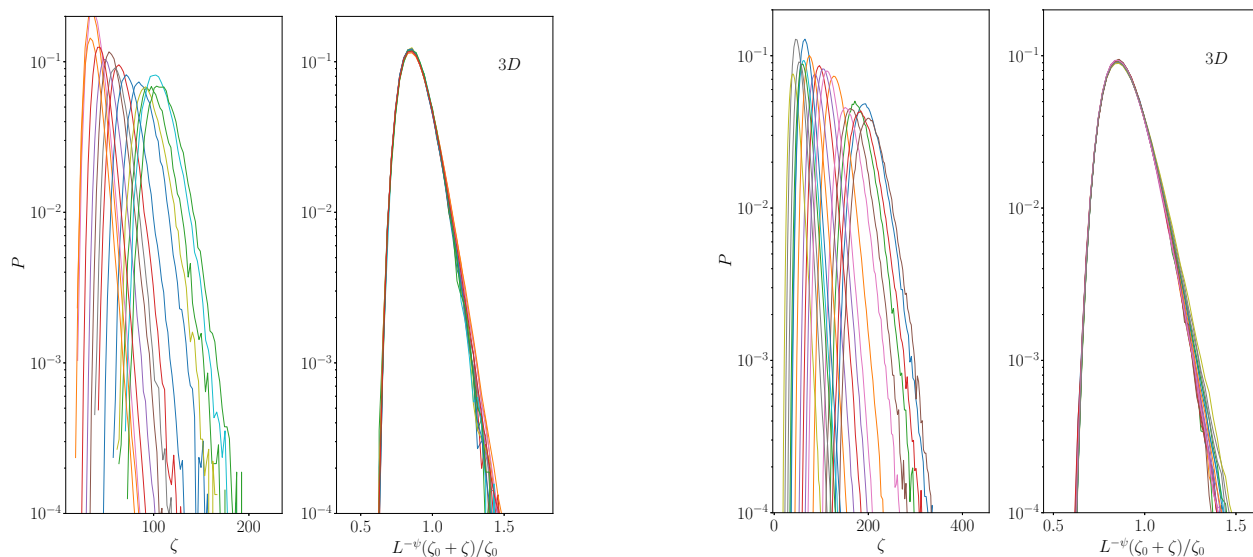


FIGURE C.30 – Modèle d’horloge à $q = 10$ états en dimensions $D = 3$ avec $\Delta = 5$ (à gauche) et $\Delta = 8$ (à droite). Légende identique à celle de la figure C.24.

Bibliographie

1. CAGNIARD DE LATOUR, C. Exposé de quelques résultats obtenus par l'action combinée de la chaleur et de la compression sur certains liquides, tels que l'eau, l'alcool, l'éther sulfurique et l'essence de pétrole rectifiée. *Annales de chimie et de physique* **21**, 127-132 (1822).
2. ANDREWS, T. XVIII. The Bakerian Lecture.—On the continuity of the gaseous and liquid states of matter. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* **159**, 575-590 (1869).
3. LANDAU, L. D. On the theory of phase transitions. I. *Phys. Z. Sowjet.* **11**, 26 (1937).
4. ONSAGER, L. Crystal Statistics. I. A Two-Dimensional Model with an Order-Disorder Transition. *Physical Review* **65**, 117-149 (1944).
5. WILSON, K. G. Renormalization Group and Critical Phenomena. I. Renormalization Group and the Kadanoff Scaling Picture. *Physical Review B* **4**, 3174-3183 (1971).
6. WILSON, K. G. & KOGUT, J. The renormalization group and the epsilon expansion. *Physics Reports* **12**, 75-199 (1974).
7. FISCHER, K. H. & HERTZ, J. A. *Spin Glasses* (Cambridge University Press, Cambridge, 1991).
8. LUCK, J. M. *Systèmes désordonnés unidimensionnels* (Commissariat à l'énergie atomique, 1992).
9. CRISANTI, A., PALADIN, G. & VULPIANI, A. *Products of random matrices in statistical physics* (Springer, 1993).
10. PARISI, G. *Field theory, disorder and simulations* (World Scientific, 1993).
11. MEZARD, M., PARISI, G. & VIRASORO, M. A. *Spin glass theory and beyond* (World Scientific, 2004).
12. MYDOSH, J. A. *Spin Glasses : An Experimental Introduction* 280 p. (CRC Press, London, 2014).
13. ANDERSON, P. W. Absence of Diffusion in Certain Random Lattices. *Physical Review* **109**, 1492-1505 (1958).
14. HARRIS, A. B. Effect of random defects on the critical behaviour of Ising models. *Journal of Physics C : Solid State Physics* **7**, 1671-1692 (1974).

15. AIZENMAN, M. & WEHR, J. Rounding of first-order phase transitions in systems with quenched disorder. *Physical Review Letters* **62**, 2503-2506 (1989).
16. FISHER, D. S. Critical behavior of random transverse-field Ising spin chains. *Physical Review B* **51**, 6411-6461 (1995).
17. SENTHIL, T. & MAJUMDAR, S. N. Critical Properties of Random Quantum Potts and Clock Models. *Physical Review Letters* **76**, 3001-3004 (1996).
18. HRAHSHEH, F. & VOJTA, T. Disordered Bosons in One Dimension : From Weak- to Strong-Randomness Criticality. *Physical Review Letters* **109**, 265303 (2012).
19. HRAHSHEH, F., NARAYANAN, R., HOYOS, J. A. & VOJTA, T. Strong-randomness infinite-coupling phase in a random quantum spin chain. *Physical Review B* **89**, 014401 (2014).
20. KOVÁCS, I. A. & IGLÓI, F. Infinite-disorder scaling of random quantum magnets in three and higher dimensions. *Physical Review B* **83**, 174207 (2011).
21. EHRENFEST, P. *Phasenumwandlungen im ueblichen und erweiterten Sinn, classifiziert nach den entsprechenden Singularitaeten des thermodynamischen Potentiales* (NV Noord-Hollandsche Uitgevers Maatschappij, 1933).
22. ISING, E. Beitrag zur Theorie des Ferromagnetismus. *Zeitschrift für Physik* **31**, 253-258 (1925).
23. WIDOM, B. Equation of State in the Neighborhood of the Critical Point. *The Journal of Chemical Physics* **43**, 3898-3905 (1965).
24. KADANOFF, L. P. Scaling laws for ising models near T_c . *Physics Physique Fizika* **2**, 263-272 (1966).
25. KADANOFF, L. P. *et al.* Static Phenomena Near Critical Points : Theory and Experiment. *Reviews of Modern Physics* **39**, 395-431 (1967).
26. FISHER, M. E. The theory of equilibrium critical phenomena. *Reports on Progress in Physics* **30**, 615-730 (1967).
27. GRIFFITHS, R. B. Thermodynamic Functions for Fluids and Ferromagnets near the Critical Point. *Physical Review* **158**, 176-187 (1967).
28. WEISS, P. L'hypothèse du champ moléculaire et la propriété ferromagnétique. *J. Phys. Theor. Appl.* **6**, 661-690 (1907).
29. BRAGG, W. L. & WILLIAMS, E. J. The effect of thermal agitation on atomic arrangement in alloys. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character* **145**, 699-730 (1934).
30. GOLDENFELD, N. *Lectures on phase transitions and the renormalization group* (CRC Press, 2018).
31. GREINER, M., MANDEL, O., ESSLINGER, T., HÄNSCH, T. W. & BLOCH, I. Quantum phase transition from a superfluid to a Mott insulator in a gas of ultracold atoms. *Nature* **415**, 39-44 (2002).

32. RÜEGG, C. *et al.* Quantum Magnets under Pressure : Controlling Elementary Excitations in TiCuCl_3 . *Physical Review Letters* **100**, 205701 (2008).
33. D'IORIO, M., PUDALOV, V. M. & SEMENCHINSKY, S. G. Magnetic field induced transitions between quantized hall and insulator states in a dilute 2D electron gas. *Physics Letters A* **150**, 422-426 (1990).
34. JIANG, H. W., JOHNSON, C. E., WANG, K. L. & HANNAHS, S. T. Observation of magnetic-field-induced delocalization : Transition from Anderson insulator to quantum Hall conductor. *Physical Review Letters* **71**, 1439-1442 (1993).
35. WANG, T., CLARK, K. P., SPENCER, G. F., MACK, A. M. & KIRK, W. P. Magnetic-field-induced metal-insulator transition in two dimensions. *Physical Review Letters* **72**, 709-712 (1994).
36. KRAVCHENKO, S. V. *et al.* Temperature-induced transitions between insulator, metal, and quantum Hall states in a two-dimensional electron system. *Journal of Physics : Condensed Matter* **7**, L41-L48 (1995).
37. KRAVCHENKO, S. V. *et al.* Scaling of an anomalous metal-insulator transition in a two-dimensional system in silicon at $B=0$. *Physical Review B* **51**, 7038-7045 (1995).
38. LÖHNEYSSEN, H. v. *et al.* Non-Fermi-liquid behavior in a heavy-fermion alloy at a magnetic instability. *Physical Review Letters* **72**, 3262-3265 (1994).
39. MATHUR, N. D. *et al.* Magnetically mediated superconductivity in heavy fermion compounds. *Nature* **394**, 39-43 (1998).
40. HEUSER, K., SCHEIDT, E.-W., SCHREINER, T. & STEWART, G. R. Inducement of non-Fermi-liquid behavior with a magnetic field. *Physical Review B* **57**, R4198-R4201 (1998).
41. SACHDEV, S. *Quantum Phase Transitions* 2^e éd. (Cambridge University Press, Cambridge, 2011).
42. TROTTER, H. F. On the product of semi-groups of operators. *Proceedings of the American Mathematical Society* **10**, 545-551 (1959).
43. SUZUKI, M. Relationship between d-Dimensional Quantal Spin Systems and (d+1)-Dimensional Ising Systems : Equivalence, Critical Exponents and Systematic Approximants of the Partition Function and Spin Correlations. *Progress of Theoretical Physics* **56**, 1454-1469 (1976).
44. KOGUT, J. B. An introduction to lattice gauge theory and spin systems. *Reviews of Modern Physics* **51**, 659-713 (1979).
45. JORDAN, P. & WIGNER, E. Über das Paulische Äquivalenzverbot. *Zeitschrift für Physik* **47**, 631-651 (1928).
46. BOGOLJUBOV, N. N. On a new method in the theory of superconductivity. *Il Nuovo Cimento (1955-1965)* **7**, 794-805 (1958).

47. PFEUTY, P. The one-dimensional Ising model with a transverse field. *Annals of Physics* **57**, 79-90 (1970).
48. CHAKRABORTY, P. B., HENELIUS, P., KJØNSBERG, H., SANDVIK, A. W. & GIRVIN, S. M. Theory of the magnetic phase diagram of Li Ho F 4. *Physical Review B* **70**, 144411 (2004).
49. BITKO, D., ROSENBAUM, T. F. & AEPPLI, G. Quantum Critical Behavior for a Model Magnet. *Physical Review Letters* **77**, 940-943 (1996).
50. REICH, D. H. *et al.* Dipolar magnets and glasses : Neutron-scattering, dynamical, and calorimetric studies of randomly distributed Ising spins. *Physical Review B* **42**, 4631-4644 (1990).
51. WU, W., ELLMAN, B., ROSENBAUM, T., AEPPLI, G. & REICH, D. From classical to quantum glass. *Physical Review Letters* **67**, 2076-2079 (1991).
52. WU, W., BITKO, D., ROSENBAUM, T. F. & AEPPLI, G. Quenching of the nonlinear susceptibility at a $T = 0$ spin glass transition. *Physical Review Letters* **71**, 1919-1922 (1993).
53. BROOKE, J., BITKO, D., F, T., ROSENBAUM, n. & AEPPLI, G. Quantum Annealing of a Disordered Magnet. *Science* **284**, 779-781 (1999).
54. SCHECHTER, M. LiHo_xY_(1-x)F₄ as a random-field Ising ferromagnet. *Physical Review B* **77**, 020401 (2008).
55. COLDEA, R. *et al.* Quantum criticality in an Ising chain : experimental evidence for emergent E8 symmetry. *Science (New York, N.Y.)* **327**, 177-180 (2010).
56. STINCHCOMBE, R. B. Ising model in a transverse field. I. Basic theory. *Journal of Physics C : Solid State Physics* **6**, 2459-2483 (1973).
57. VOJTA, T. *Phases and phase transitions in disordered quantum systems* in (2013), 188-247.
58. DHAR, A. & YOUNG, A. P. Ensemble dependence in the random transverse-field Ising chain. *Physical Review B* **68**, 134441 (2003).
59. IGLÓI, F. & RIEGER, H. Random transverse Ising spin chain and random walks. *Physical Review B* **57**, 11404-11420 (1998).
60. PÁZMÁNDI, F., SCALETTAR, R. T. & ZIMÁNYI, G. T. Revisiting the Theory of Finite Size Scaling in Disordered Systems : nu Can Be Less than 2/d. *PHYSICAL REVIEW LETTERS* **79**, 4 (1997).
61. WISEMAN, S. & DOMANY, E. Finite-Size Scaling and Lack of Self-Averaging in Critical Disordered Systems. *Physical Review Letters* **81**, 22-25 (1998).
62. BERNARDET, K., PÁZMÁNDI, F. & BATROUNI, G. G. Disorder Averaging and Finite-Size Scaling. *Physical Review Letters* **84**, 4477-4480 (2000).

63. AHARONY, A., HARRIS, A. B. & WISEMAN, S. Critical Disordered Systems with Constraints and the Inequality $\nu > 2/d$. *Physical Review Letters* **81**, 252-255 (1998).
64. PFEUTY, P. An exact result for the 1D random Ising model in a transverse field. *Physics Letters A* **72**, 245-246 (1979).
65. MONTHUS, C. Finite-size scaling properties of random transverse-field Ising chains : Comparison between canonical and microcanonical ensembles for the disorder. *Physical Review B* **69**, 054431 (2004).
66. FISHER, D. S. & YOUNG, A. P. Distributions of gaps and end-to-end correlations in random transverse-field Ising spin chains. *Physical Review B* **58**, 9131-9141 (1998).
67. CHAYES, J. T., CHAYES, L., FISHER, D. S. & SPENCER, T. Finite-Size Scaling and Correlation Lengths for Disordered Systems. *Physical Review Letters* **57**, 2999-3002 (1986).
68. WEINRIB, A. & HALPERIN, B. I. Critical phenomena in systems with long-range-correlated quenched disorder. *Physical Review B* **27**, 413-427 (1983).
69. GREENBLATT, R. L., AIZENMAN, M. & LEBOWITZ, J. L. Rounding of First Order Transitions in Low-Dimensional Quantum Systems with Quenched Disorder. *Physical Review Letters* **103**, 197201 (2009).
70. AIZENMAN, M., GREENBLATT, R. L. & LEBOWITZ, J. L. Proof of rounding by quenched disorder of first order transitions in low-dimensional quantum systems. *Journal of Mathematical Physics* **53**, 023301 (2012).
71. CARDY, J. & JACOBSEN, J. L. Critical Behavior of Random-Bond Potts Models. *Physical Review Letters* **79**, 4063-4066 (1997).
72. WISEMAN, S. & DOMANY, E. Lack of self-averaging in critical disordered systems. *Physical Review E* **52**, 3469-3484 (1995).
73. WISEMAN, S. & DOMANY, E. Self-Averaging, Distribution of Pseudo-Critical Temperatures and Finite Size Scaling in Critical Disordered Systems. *Physical Review E* **58**, 2938-2951 (1998).
74. AHARONY, A. & HARRIS, A. B. Absence of Self-Averaging and Universal Fluctuations in Random Systems near Critical Points. *Physical Review Letters* **77**, 3700-3703 (1996).
75. GRIFFITHS, R. B. Nonanalytic Behavior Above the Critical Point in a Random Ising Ferromagnet. *Physical Review Letters* **23**, 17-19 (1969).
76. THILL, M. J. & HUSE, D. A. Equilibrium behaviour of quantum Ising spin glass. *Physica A : Statistical Mechanics and its Applications* **214**, 321-355 (1995).
77. RIEGER, H. & YOUNG, A. P. Griffiths singularities in the disordered phase of a quantum Ising spin glass. *Physical Review B* **54**, 3328-3335 (1996).
78. GUO, M., BHATT, R. N. & HUSE, D. A. Quantum Griffiths Singularities in the Transverse-Field Ising Spin Glass. *Physical Review B* **54**, 3336-3342 (1996).

79. BRAY, A. J. Nature of the Griffiths phase. *Physical Review Letters* **59**, 586-589 (1987).
80. BRAY, A. J. Dynamics of dilute magnets above T_c . *Physical Review Letters* **60**, 720-723 (1988).
81. RANDERIA, M., SETHNA, J. P. & PALMER, R. G. Low-Frequency Relaxation in Ising Spin-Glasses. *Physical Review Letters* **54**, 1321-1324 (1985).
82. DOMB, C. Singularities of the dilute Ising ferromagnet. *Journal of Physics C : Solid State Physics* **7**, 2677-2680 (1974).
83. HARRIS, A. B. Nature of the "Griffiths" singularity in dilute magnets. *Physical Review B* **12**, 203-207 (1975).
84. IMRY, Y. Griffiths singularity in finite macroscopically large dilute Ising models. *Physical Review B* **15**, 4448-4450 (1977).
85. MCCOY, B. M. & WU, T. T. Random Impurities as the Cause of Smooth Specific Heats Near the Critical Temperature. *Physical Review Letters* **21**, 549-551 (1968).
86. MCCOY, B. M. & WU, T. T. Theory of a Two-Dimensional Ising Model with Random Impurities. I. Thermodynamics. *Physical Review* **176**, 631-643 (1968).
87. MCCOY, B. M. & WU, T. T. Theory of a Two-Dimensional Ising Model with Random Impurities. II. Spin Correlation Functions. *Physical Review* **188**, 982-1013 (1969).
88. TEANEY, D. T., van der HOEVEN, B. J. C. & MORUZZI, V. L. Singular Behavior of a Ferromagnet in Nonzero Field. *Physical Review Letters* **20**, 722-724 (1968).
89. Van der HOEVEN, B. J. C., TEANEY, D. T. & MORUZZI, V. L. Magnetic Equation of State and Specific Heat of EuS Near the Curie Point. *Physical Review Letters* **20**, 719-722 (1968).
90. KLEINERT, H. & SCHULTE-FROHLINDE, V. *Critical Properties of [Greek Letter Phi] 4-theories* (World Scientific Publishing Company Incorporated, 2001).
91. SENTHIL, T. *Quantum phase transitions in random spin systems* (Yale University, 1997).
92. MA, S.-k., DASGUPTA, C. & HU, C.-k. Random Antiferromagnetic Chain. *Physical Review Letters* **43**, 1434-1437 (1979).
93. DASGUPTA, C. & MA, S.-k. Low-temperature properties of the random Heisenberg antiferromagnetic chain. *Physical Review B* **22**, 1305-1319 (1980).
94. FISHER, D. S. Random transverse field Ising spin chains. *Physical Review Letters* **69**, 534-537 (1992).
95. FISHER, D. S. Random antiferromagnetic quantum spin chains. *Physical Review B* **50**, 3799-3821 (1994).
96. PICH, C., YOUNG, A. P., RIEGER, H. & KAWASHIMA, N. Critical Behavior and Griffiths-McCoy Singularities in the Two-Dimensional Random Quantum Ising Ferromagnet. *Physical Review Letters* **81**, 5916-5919 (1998).

97. RIEGER, H. & KAWASHIMA, N. Application of a continuous time cluster algorithm to the two-dimensional random quantum Ising ferromagnet. *The European Physical Journal B* **9**, 233-236 (1999).
98. MOTRUNICH, O., MAU, S.-C., HUSE, D. A. & FISHER, D. S. Infinite-randomness quantum Ising critical fixed points. *Physical Review B* **61**, 1160-1172 (2000).
99. LIN, Y.-C., KAWASHIMA, N., IGLÓI, F. & RIEGER, H. Numerical Renormalization Group Study of Random Transverse Ising Models in One and Two Space Dimensions. *Progress of Theoretical Physics Supplement* **138**, 479-488 (2000).
100. LIN, Y.-C., IGLÓI, F. & RIEGER, H. Entanglement Entropy at Infinite-Randomness Fixed Points in Higher Dimensions. *Physical Review Letters* **99**, 147202 (2007).
101. YU, R., SALEUR, H. & HAAS, S. Entanglement entropy in the two-dimensional random transverse field Ising model. *Physical Review B* **77**, 140402 (2008).
102. KOVÁCS, I. A. & IGLÓI, F. Universal logarithmic terms in the entanglement entropy of 2d, 3d and 4d random transverse-field Ising models. *EPL (Europhysics Letters)* **97**, 67009 (2012).
103. KOVÁCS, I. A. & IGLÓI, F. Renormalization group study of the two-dimensional random transverse-field Ising model. *Physical Review B* **82**, 054437 (2010).
104. KOVÁCS, I. A. & IGLÓI, F. Renormalization group study of random quantum magnets. *Journal of Physics : Condensed Matter* **23**, 404204 (2011).
105. NIGHTINGALE, M. P. Scaling theory and finite systems. *Physica A : Statistical Mechanics and its Applications* **83**, 561-572 (1976).
106. BALLESTEROS, H., FERNÁNDEZ, L., MARTÍN-MAYOR, V. & MUÑOZ SUDUPE, A. New universality class in three dimensions? : the antiferromagnetic RP2 model. *Physics Letters B* **378**, 207-212 (1996).
107. AMIT, D. J. & MARTIN-MAYOR, V. *Field theory, the renormalization group, and critical phenomena : graphs to computers* (World Scientific Publishing Company, 2005).
108. MONTHUS, C. & GAREL, T. Random transverse field Ising model in dimension $d > 1$: scaling analysis in the disordered phase from the directed polymer model. *Journal of Physics A : Mathematical and Theoretical* **45**, 095002 (2012).
109. FISHER, D. S. Phase transitions and singularities in random quantum systems. *Physica A : Statistical Mechanics and its Applications* **263**, 222-233 (1999).
110. DIJKSTRA, E. W. A note on two problems in connexion with graphs. *Numerische mathematik* **1**, 269-271 (1959).
111. FREDMAN, M. L. & TARJAN, R. E. Fibonacci heaps and their uses in improved network optimization algorithms. *Journal of the ACM* **34**, 596-615 (1987).
112. KNUTH, D. E. *The Art of Computer Programming, Vol. 1 : Fundamental Algorithms* Third (Addison-Wesley, Reading, Mass., 1997).

113. MONTHUS, C. & GAREL, T. Distribution of pseudo-critical temperatures and lack of self-averaging in disordered Poland-Scheraga models with different loop exponents. *The European Physical Journal B* **48**, 393-403 (2005).
114. GAREL, T. & MONTHUS, C. Numerical study of the disordered Poland-Scheraga model of DNA denaturation. *Journal of Statistical Mechanics : Theory and Experiment* **2005**, P06004 (2005).
115. POTTS, R. B. Some generalized order-disorder transformations. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* **48**, 106-109 (1952).
116. WU, F. Y. The Potts model. *Reviews of Modern Physics* **54**, 235-268 (1982).
117. BAXTER, R. J. Potts model at the critical temperature. *Journal of Physics C : Solid State Physics* **6**, L445-L448 (1973).
118. BAXTER, R. J., TEMPERLEY, H. N. V., ASHLEY, S. E. & EDWARDS, S. Triangular Potts model at its transition temperature, and related models. *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences* **358**, 535-559 (1978).
119. HERRMANN, H. J. Monte Carlo simulation of the three-dimensional Potts model. *Zeitschrift für Physik B Condensed Matter* **35**, 171-175 (1979).
120. JENSEN, S. J. K. & MOURITSEN, O. G. Is the Phase Transition of the Three-State Potts Model Continuous in Three Dimensions? *Physical Review Letters* **43**, 1736-1739 (1979).
121. BLÖTE, H. W. J. & SWENDSEN, R. H. First-Order Phase Transitions and the Three-State Potts Model. *Physical Review Letters* **43**, 799-802 (1979).
122. AHARONY, A. & PYTTE, E. First- and second-order transitions in the Potts model near four dimensions. *Physical Review B* **23**, 362-367 (1981).
123. KRAMERS, H. A. & WANNIER, G. H. Statistics of the Two-Dimensional Ferromagnet. Part I. *Physical Review* **60**, 252-262 (1941).
124. BEFFARA, V. & DUMINIL-COPIN, H. *The self-dual point of the two-dimensional random-cluster model is critical for $q \geq 1$* 2013.
125. FORTUIN, C. M. & KASTELEYN, P. W. On the random-cluster model : I. Introduction and relation to other models. *Physica* **57**, 536-564 (1972).
126. SWENDSEN, R. H. & WANG, J.-S. Nonuniversal critical dynamics in Monte Carlo simulations. *Physical Review Letters* **58**, 86-88 (1987).
127. WOLFF, U. Collective Monte Carlo Updating for Spin Systems. *Physical Review Letters* **62**, 361-364 (1989).
128. WHITNEY, H. The Coloring of Graphs. *Annals of Mathematics* **33**, 688-718 (1932).

129. TEMPERLEY, H. N. V., LIEB, E. H. & EDWARDS, S. F. Relations between the ‘percolation’ and ‘colouring’ problem and other graph-theoretical problems associated with regular planar lattices : some exact results for the ‘percolation’ problem. *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences* **322**, 251-280 (1971).
130. BAXTER, R. J., KELLAND, S. B. & WU, F. Y. Equivalence of the Potts model or Whitney polynomial with an ice-type model. *Journal of Physics A : Mathematical and General* **9**, 397-406 (1976).
131. BAXTER, R. J. Eight-Vertex Model in Lattice Statistics. *Physical Review Letters* **26**, 832-833 (1971).
132. NIJS, M. P. M. d. A relation between the temperature exponents of the eight-vertex and q-state Potts model. *Journal of Physics A : Mathematical and General* **12**, 1857-1868 (1979).
133. PEARSON, R. B. Conjecture for the extended Potts model magnetic eigenvalue. *Physical Review B* **22**, 2579-2580 (1980).
134. NIENHUIS, B., RIEDEL, E. K. & SCHICK, M. Magnetic exponents of the two-dimensional q-state Potts model. *Journal of Physics A : Mathematical and General* **13**, L189-L192 (1980).
135. NIENHUIS, B. Critical behavior of two-dimensional spin models and charge asymmetry in the Coulomb gas. *Journal of Statistical Physics* **34**, 731-761 (1984).
136. DOTSENKO, V. S. & FATEEV, V. A. Four-point correlation functions and the operator algebra in 2D conformal invariant theories with central charge $C \leq 1$. *Nuclear Physics B* **251**, 691-734 (1985).
137. Di FRANCESCO, P., SALEUR, H. & ZUBER, J. B. Relations between the Coulomb gas picture and conformal invariance of two-dimensional critical models. *Journal of Statistical Physics* **49**, 57-79 (1987).
138. GLIOZZI, F. & RAGO, A. Critical exponents of the 3d Ising and related models from conformal bootstrap. *Journal of High Energy Physics* **2014**, 42 (2014).
139. ALEXANDER, S. Lattice gas transition of He on Grafoil. A continuous transition with cubic terms. *Physics Letters A* **54**, 353-354 (1975).
140. BRETZ, M. Ordered Helium Films on Highly Uniform Graphite—Finite-Size Effects, Critical Parameters, and the Three-State Potts Model. *Physical Review Letters* **38**, 501-505 (1977).
141. DOMANY, E., SCHICK, M. & WALKER, J. S. Classification of Order-Disorder Transitions in Common Adsorbed Systems : Realization of the Four-State Potts Model. *Physical Review Letters* **38**, 1148-1151 (1977).

142. DOMANY, E., SCHICK, M., WALKER, J. S. & GRIFFITHS, R. B. Classification of continuous order-disorder transitions in adsorbed monolayers. *Physical Review B* **18**, 2209-2217 (1978).
143. DOMANY, E. & SCHICK, M. Classification of continuous order-disorder transitions in adsorbed monolayers. II. *Physical Review B* **20**, 3828-3836 (1979).
144. NAKAJIMA, Y. *et al.* Critical scattering at the order-disorder phase transition of Si(111)-3x3 R30-Au surface : A phase transition with particle exchange. *Physical Review B* **55**, 8129-8135 (1997).
145. VOGES, C. & PFNÜR, H. Experimental determination of the phase-transition critical exponents alpha and eta by integrating methods. *Physical Review B* **57**, 3345-3355 (1998).
146. MUKAMEL, D., FISHER, M. E. & DOMANY, E. Magnetization of Cubic Ferromagnets and the Three-Component Potts Model. *Physical Review Letters* **37**, 565-568 (1976).
147. BARBARA, B., ROSSIGNOL, M. F. & BAK, P. First-order transitions and tricritical points in DyAl₂ : A realisation of the three-state Potts model. *Journal of Physics C : Solid State Physics* **11**, L183-L186 (1978).
148. LYKKE JACOBSEN, J. & CARDY, J. Critical behaviour of random-bond Potts models : a transfer matrix study. *Nuclear Physics B* **515**, 701-742 (1998).
149. CHATELAIN, C. & BERCHE, B. Finite-Size Scaling Study of the Surface and Bulk Critical Behavior in the Random-Bond Eight-State Potts Model. *Physical Review Letters* **80**, 1670-1673 (1998).
150. CHATELAIN, C. & BERCHE, B. Universality and multifractal behaviour of spin-spin correlation functions in disordered Potts models. *Nuclear Physics B* **572**, 626-650 (2000).
151. DELFINO, G. Exact Results for Quenched Bond Randomness at Criticality. *Physical Review Letters* **118**, 250601 (2017).
152. BALLESTEROS, H. G. *et al.* Critical behavior in the site-diluted three-dimensional three-state Potts model. *Physical Review B* **61**, 3215-3218 (2000).
153. YIN, J. Q., ZHENG, B. & TRIMPER, S. Dynamic Monte Carlo simulations of the three-dimensional random-bond Potts model. *Physical Review E* **72**, 036122 (2005).
154. CHATELAIN, C., BERCHE, B., JANKE, W. & BERCHE, P. E. Softening of first-order transition in three-dimensions by quenched disorder. *Physical Review E* **64**, 036120 (2001).
155. CHATELAIN, C., BERCHE, B., JANKE, W. & BERCHE, P.-E. Monte Carlo study of phase transitions in the bond-diluted 3D 4-state Potts model. *Nuclear Physics B* **719**, 275-311 (2005).
156. STEPHEN, M. J. & MITTAG, L. Pseudo-Hamiltonians for the Potts model at the critical point. *Physics Letters A* **41**, 357-358 (1972).
157. SÓLYOM, J. & PFEUTY, P. Renormalization-group study of the Hamiltonian version of the Potts model. *Physical Review B* **24**, 218-229 (1981).

158. HAMER, C. J. Q-state Potts models in Hamiltonian field theory for $Q \geq 4$ in $(1+\epsilon)$ dimensions. *Journal of Physics A : Mathematical and General* **14**, 2981-3003 (1981).
159. BAXTER, R. J. Magnetisation discontinuity of the two-dimensional Potts model. *Journal of Physics A : Mathematical and General* **15**, 3329-3340 (1982).
160. HAMER, C. J., AYDIN, M., OITMAA, J. & HE, H.-X. The 3-state Potts model in $(2+1)$ dimensions. *Journal of Physics A : Mathematical and General* **23**, 4025-4038 (1990).
161. SCHULZ, M. D., DUSUEL, S., ORÚS, R., VIDAL, J. & SCHMIDT, K. P. Breakdown of a perturbed Zn topological phase. *New Journal of Physics* **14**, 025005 (2012).
162. DAI, Y.-W., CHO, S. Y., BATCHELOR, M. T. & ZHOU, H.-Q. Degenerate ground states and multiple bifurcations in a two-dimensional q-state quantum Potts model. *Physical Review E* **89**, 062142 (2014).
163. AGRAWAL, U., GOPALAKRISHNAN, S. & VASSEUR, R. Quantum Criticality in the 2D Quasiperiodic Potts Model. *Physical Review Letters* **125**, 265702 (2020).
164. KANG, B., PARAMESWARAN, S. A., POTTER, A. C., VASSEUR, R. & GAZIT, S. Superuniversality from disorder at two-dimensional topological phase transitions. *Physical Review B* **102**, 224204 (2020).
165. POWELL, M. J. D. An efficient method for finding the minimum of a function of several variables without calculating derivatives. *The Computer Journal* **7**, 155-162 (1964).
166. VIRTANEN, P. *et al.* SciPy 1.0 : Fundamental Algorithms for Scientific Computing in Python. *Nature Methods* **17**, 261-272 (2020).
167. VAN ROSSUM, G. & DRAKE JR, F. L. *Python reference manual* (Centrum voor Wiskunde en Informatica Amsterdam, 1995).
168. VAN ROSSUM, G. & DRAKE, F. L. *Python 3 Reference Manual* (CreateSpace, Scotts Valley, CA, 2009).
169. BRODTKORB, P. A. & D'ERRICO, J. *numdifftools 0.9.11* 2015.
170. BATES, D. M. & WATTS, D. G. *Nonlinear regression analysis and its applications XIV*, 365 (Wiley, New York [u.a.], 1988).
171. MORÉ, J. J. in *Numerical analysis* 105-116 (Springer, 1978).
172. YOUNG, P. Everything you wanted to know about Data Analysis and Fitting but were afraid to ask. *arXiv :1210.3781 [cond-mat, physics :physics]* (2014).
173. MERMIN, N. D. & WAGNER, H. Absence of Ferromagnetism or Antiferromagnetism in One- or Two-Dimensional Isotropic Heisenberg Models. *Physical Review Letters* **17**, 1133-1136 (1966).
174. HOHENBERG, P. C. Existence of Long-Range Order in One and Two Dimensions. *Physical Review* **158**, 383-386 (1967).

175. COLEMAN, S. There are no Goldstone bosons in two dimensions. *Communications in Mathematical Physics* **31**, 259-264 (1973).
176. BEREZINSKII, V. Destruction of long-range order in one-dimensional and two-dimensional systems possessing a continuous symmetry group. II. Quantum systems. *Sov. Phys. JETP* **34**, 610-616 (1972).
177. KOSTERLITZ, J. M. & THOULESS, D. J. Long range order and metastability in two dimensional solids and superfluids. (Application of dislocation theory). *Journal of Physics C : Solid State Physics* **5**, L124-L126 (1972).
178. KOSTERLITZ, J. M. & THOULESS, D. J. Ordering, metastability and phase transitions in two-dimensional systems. *Journal of Physics C : Solid State Physics* **6**, 1181-1203 (1973).
179. FISHER, M. E., BARBER, M. N. & JASNOW, D. Helicity Modulus, Superfluidity, and Scaling in Isotropic Systems. *Physical Review A* **8**, 1111-1124 (1973).
180. KUMANO, Y., HUKUSHIMA, K., TOMITA, Y. & OSHIKAWA, M. Response to a twist in systems with Z_p symmetry : The two-dimensional p-state clock model. *Physical Review B* **88**, 104427 (2013).
181. ELITZUR, S., PEARSON, R. B. & SHIGEMITSU, J. Phase structure of discrete Abelian spin and gauge systems. *Physical Review D* **19**, 3698-3714 (1979).
182. VILLAIN, J. Theory of one- and two-dimensional magnets with an easy magnetization plane. II. The planar, classical, two-dimensional magnet. *Journal de Physique* **36**, 581-590 (1975).
183. JOSÉ, J. V., KADANOFF, L. P., KIRKPATRICK, S. & NELSON, D. R. Renormalization, vortices, and symmetry-breaking perturbations in the two-dimensional planar model. *Physical Review B* **16**, 1217-1241 (1977).
184. TOBOCHNIK, J. Properties of the q -state clock model for $q = 4, 5$, and 6. *Physical Review B* **26**, 6201-6207 (1982).
185. CHALLA, M. S. S. & LANDAU, D. P. Critical behavior of the six-state clock model in two dimensions. *Physical Review B* **33**, 437-443 (1986).
186. HWANG, C.-O. Six-state clock model on the square lattice : Fisher zero approach with Wang-Landau sampling. *Physical Review E* **80**, 042103 (2009).
187. LAPILLI, C. M., PFEIFER, P. & WEXLER, C. Universality Away from Critical Points in Two-Dimensional Phase Transitions. *Physical Review Letters* **96**, 140603 (2006).
188. YAMAGATA, A. & ONO, I. Phase transitions of the 6-clock model in two dimensions. *Journal of Physics A : Mathematical and General* **24**, 265-275 (1991).
189. TOMITA, Y. & OKABE, Y. Probability-changing cluster algorithm for two-dimensional XY and clock models. *Physical Review B* **65**, 184405 (2002).

190. BORISENKO, O., CORTESE, G., FIORE, R., GRAVINA, M. & PAPA, A. Numerical study of the phase transitions in the two-dimensional $Z(5)$ vector model. *Physical Review E* **83**, 041120 (2011).
191. CHATELAIN, C. DMRG study of the Berezinskii–Kosterlitz–Thouless transitions of the 2D five-state clock model. *Journal of Statistical Mechanics : Theory and Experiment* **2014**, P11022 (2014).
192. CHEN, Y., XIE, Z.-Y. & YU, J.-F. Phase transitions of the five-state clock model on the square lattice. *Chinese Physics B* **27**, 080503 (2018).
193. SURUNGAN, T., MASUDA, S., KOMURA, Y. & OKABE, Y. Berezinskii–Kosterlitz–Thouless transition on regular and Villain types of q -state clock models. *Journal of Physics A : Mathematical and Theoretical* **52**, 275002 (2019).
194. LI, Z.-Q. *et al.* Critical properties of the two-dimensional q -state clock model. *Physical Review E* **101**, 060105 (2020).
195. LI, G., PAI, K. H. & GU, Z.-C. *Accurate simulation of q -state clock model* arXiv :2009.10695 (arXiv, 2020).
196. CHEN, H., HOU, P., FANG, S. & DENG, Y. Monte Carlo study of duality and the Berezinskii-Kosterlitz-Thouless phase transitions of the two-dimensional q -state clock model in flow representations. *Physical Review E* **106**, 024106 (2022).
197. BRITO, A. F., REDINZ, J. A. & PLASCAK, J. A. Two-dimensional XY and clock models studied via the dynamics generated by rough surfaces. *Physical Review E* **81**, 031130 (2010).
198. CHEN, J. *et al.* Phase Transition of the q -State Clock Model : Duality and Tensor Renormalization. *Chinese Physics Letters* **34**, 050503 (2017).
199. HONG, S. & KIM, D.-H. Logarithmic finite-size scaling correction to the leading Fisher zeros in the p -state clock model : A higher-order tensor renormalization group study. *Physical Review E* **101**, 012124 (2020).
200. BLANKSCHTEIN, D., MA, M., BERKER, A. N., GREST, G. S. & SOUKOULIS, C. M. Orderings of a stacked frustrated triangular system in three dimensions. *Physical Review B* **29**, 5250-5252 (1984).
201. AJIRO, Y., INAMI, T. & KADOWAKI, H. Magnetic Phase Transition of the Triangular Lattice Antiferromagnet CsMnI₃. *Journal of the Physical Society of Japan* **59**, 4142-4147 (1990).
202. SCHOLTEN, P. D. & IRAKLIOTIS, L. J. Critical behavior of the q -state clock model in three dimensions. *Physical Review B* **48**, 1291-1294 (1993).
203. MIYASHITA, S. Nature of the Ordered Phase and the Critical Properties of the Three Dimensional Six-State Clock Model. *Journal of the Physical Society of Japan* **66**, 3411-3420 (1997).

204. OSHIKAWA, M. Ordered phase and scaling in Z_n models and the three-state antiferromagnetic Potts model in three dimensions. *Physical Review B* **61**, 3430-3434 (2000).
205. XU, W., SUN, Y., LV, J.-P. & DENG, Y. High-precision Monte Carlo study of several models in the three-dimensional $U(1)$ universality class. *Physical Review B* **100**, 064525 (2019).
206. CAMPOSTRINI, M., HASENBUSCH, M., PELISSETTO, A., ROSSI, P. & VICARI, E. Critical behavior of the three-dimensional XY universality class. *Physical Review B* **63**, 214503 (2001).
207. KOS, F., POLAND, D., SIMMONS-DUFFIN, D. & VICHI, A. Precision islands in the Ising and $O(N)$ models. *Journal of High Energy Physics* **2016**, 36 (2016).
208. HOVE, J. & SUDBØ, A. Criticality versus q in the $(2+1)$ -dimensional Z_q clock model. *Physical Review E* **68**, 046107 (2003).
209. BORISENKO, O. *et al.* Critical behavior of 3D $Z(N)$ lattice gauge theories at zero temperature. *Nuclear Physics B* **879**, 80-97 (2014).
210. ZINN-JUSTIN, J. *Quantum Field Theory and Critical Phenomena; 4th ed.* (Clarendon Press, Oxford, 2002).
211. SURUNGAN, T. & OKABE, Y. Kosterlitz-Thouless transition in planar spin models with bond dilution. *Physical Review B* **71**, 184438 (2005).
212. BERCHE, B., FARIÑAS-SÁNCHEZ, A. I., HOLOVATCH, Y. & PAREDES, R. Influence of quenched dilution on the quasi-long-range ordered phase of the 2d XY model. *The European Physical Journal B - Condensed Matter and Complex Systems* **36**, 91-98 (2003).
213. WYSIN, G. M., PEREIRA, A. R., MARQUES, I. A., LEONEL, S. A. & COURA, P. Z. Extinction of the Berezinskii-Kosterlitz-Thouless phase transition by nonmagnetic disorder in planar symmetry spin models. *Physical Review B* **72**, 094418 (2005).
214. SUN, Y.-Z., LIANG, J.-C., XU, S.-L. & YI, L. Berezinskii-Kosterlitz-Thouless phase transition of 2D dilute generalized XY model. *Physica A : Statistical Mechanics and its Applications* **389**, 1391-1399 (2010).
215. WU, R. P. H., LO, V.-c. & HUANG, H. Critical behavior of two-dimensional spin systems under the random-bond six-state clock model. *Journal of Applied Physics* **112**, 063924 (2012).
216. MOON, K. & GIRVIN, S. M. Critical Behavior of Superfluid ^4He in Aerogel. *Physical Review Letters* **75**, 1328-1331 (1995).
217. GOLDNER, L. S., MULDER, N. & AHLERS, G. Second sound very near T_λ . *Journal of Low Temperature Physics* **93**, 131-182 (1993).
218. CHAN, M. H. W., BLUM, K. I., MURPHY, S. Q., WONG, G. K. S. & REPPY, J. D. Disorder and the Superfluid Transition in Liquid ^4He . *Physical Review Letters* **61**, 1950-1953 (1988).

219. WONG, G. K. S., CROWELL, P. A., CHO, H. A. & REPPY, J. D. Superfluid critical behavior in 4He-filled porous media. *Physical Review Letters* **65**, 2410-2413 (1990).
220. MULDER, N., MEHROTRA, R., GOLDNER, L. S. & AHLERS, G. Superfluid density from heat-pulse propagation near the lambda line in 4He-aerogel systems. *Physical Review Letters* **67**, 695-698 (1991).
221. CHAN, M., MULDER, N. & REPPY, J. Helium in Aerogel. *Physics Today* **49**, 30-37 (1996).
222. VÁSQUEZ R., C., PAREDES V., R., HASMY, A. & JULLIEN, R. New Universality Class for the Three-Dimensional XY Model with Correlated Impurities : Application to 4He in Aerogels. *Physical Review Letters* **90**, 170602 (2003).
223. NIKOLAOU, M., WALLIN, M. & WEBER, H. Critical Scaling Properties at the Superfluid Transition of 4He in Aerogel. *Physical Review Letters* **97**, 225702 (2006).
224. KAWAMURA, H. & TANEMURA, M. Chiral order in a two-dimensional XY spin glass. *Physical Review B* **36**, 7177-7180 (1987).
225. HUSE, D. A. & SEUNG, H. S. Possible vortex-glass transition in a model random superconductor. *Physical Review B* **42**, 1059-1061 (1990).
226. FISHER, M. P. A., TOKUYASU, T. A. & YOUNG, A. P. Vortex variable-range-hopping resistivity in superconducting films. *Physical Review Letters* **66**, 2931-2934 (1991).
227. REGER, J. D., TOKUYASU, T. A., YOUNG, A. P. & FISHER, M. P. A. Vortex-glass transition in three dimensions. *Physical Review B* **44**, 7147-7150 (1991).
228. DEKKER, C., WÖLTGENS, P. J. M., KOCH, R. H., HUSSEY, B. W. & GUPTA, A. Absence of a finite-temperature vortex-glass phase transition in two-dimensional YB₂Cu₃O_(7- δ) films. *Physical Review Letters* **69**, 2717-2720 (1992).
229. KOSTERLITZ, J. M. & SIMKIN, M. V. Numerical Study of a Superconducting Glass Model. *Physical Review Letters* **79**, 1098-1101 (1997).
230. WENGEL, C. & YOUNG, A. P. Common universality class for the three-dimensional vortex glass and chiral glass. *Physical Review B* **56**, 5918-5924 (1997).
231. MAUCOURT, J. & GREMPPEL, D. R. Scaling of domain-wall energies in the three-dimensional gauge glass model. *Physical Review B* **58**, 2654-2657 (1998).
232. OLSON, T. & YOUNG, A. P. Finite temperature ordering in the three-dimensional gauge glass. *Physical Review B* **61**, 12467-12473 (2000).
233. KATZGRABER, H. G. & YOUNG, A. P. Nature of the spin-glass state in the three-dimensional gauge glass. *Physical Review B* **64**, 104426 (2001).
234. AKINO, N. & KOSTERLITZ, J. M. Domain wall renormalization group study of the XY model with quenched random phase shifts. *Physical Review B* **66**, 054536 (2002).
235. LEE, L. W. & YOUNG, A. P. Single Spin and Chiral Glass Transition in Vector Spin Glasses in Three Dimensions. *Physical Review Letters* **90**, 227203 (2003).

236. MATSUO, H. & NOMURA, K. Berezinskii–Kosterlitz–Thouless transitions in the six-state clock model. *Journal of Physics A : Mathematical and General* **39**, 2953 (2006).
237. ZHANG, B. Perturbative study of the one-dimensional quantum clock model. *Physical Review E* **102**, 042110 (2020).
238. PATIL, P., SHAO, H. & SANDVIK, A. W. Unconventional $U(1)$ to Z_q crossover in quantum and classical q-state clock models. *Physical Review B* **103**, 054418 (2021).
239. *Density-matrix renormalization : A new numerical method in physics. Proceedings, Seminar and Workshop, Dresden, Germany, August 24-September 18, 1998* (éd. PESCHEL, I., KAULKE, N., WANG, X. Q. & HALLBERG, K.) (Springer, Berlin, 1999).
240. CARLON, E., LAJKÓ, P. & IGLÓI, F. Disorder Induced Cross-Over Effects at Quantum Critical Points. *Physical Review Letters* **87**, 277201 (2001).
241. BRAY, A. J. & MOORE, M. A. Chaotic Nature of the Spin-Glass Phase. *Physical Review Letters* **58**, 57-60 (1987).
242. BERTHIER, L. & BIROLI, G. Theoretical perspective on the glass transition and amorphous materials. *Reviews of Modern Physics* **83**, 587-645 (2011).
243. MCKAY, S. R., BERKER, A. N. & KIRKPATRICK, S. Spin-Glass Behavior in Frustrated Ising Models with Chaotic Renormalization-Group Trajectories. *Physical Review Letters* **48**, 767-770 (1982).
244. SVRAKIC, N. M., KERTESZ, J. & SELKE, W. Hierarchical lattice with competing interactions : an example of a nonlinear map. *Journal of Physics A : Mathematical and General* **15**, L427-L432 (1982).
245. BERKER, A. N. & MCKAY, S. R. Hierarchical models and chaotic spin glasses. *Journal of Statistical Physics* **36**, 787-793 (1984).
246. MIGDAL, A. A. Gauge Transitions in Gauge and Spin Lattice Systems. *Sov.Phys.JETP* **42**, 743 (1975).
247. KADANOFF, L. P. Notes on Migdal's recursion formulas. *Annals of Physics* **100**, 359-394 (1976).
248. BANAVAR, J. R. & BRAY, A. J. Chaos in spin glasses : A renormalization-group study. *Physical Review B* **35**, 8888-8890 (1987).
249. DERRIDA, B., ECKMANN, J. -.-P. & ERZAN, A. Renormalisation groups with periodic and aperiodic orbits. *Journal of Physics A : Mathematical and General* **16**, 893-906 (1983).
250. MOROZOV, A. & NIEMI, A. J. Can renormalization group flow end in a Big Mess? *Nuclear Physics B* **666**, 311-336 (2003).
251. CURTRIGHT, T. L., JIN, X. & ZACHOS, C. K. Renormalization Group Flows, Cycles, and c -Theorem Folklore. *Physical Review Letters* **108**, 131601 (2012).

252. ECKMANN, J.-P., KAMPHORST, S. O. & RUELLE, D. Recurrence Plots of Dynamical Systems. **4**, 973-977 (1987).
253. ASHKIN, J. & TELLER, E. Statistics of Two-Dimensional Lattices with Four Components. *Physical Review* **64**, 178-184 (1943).
254. FAN, C. On critical properties of the Ashkin-Teller model. *Physics Letters A* **39**, 136 (1972).
255. DITZIAN, R. V., BANAVAR, J. R., GREY, G. S. & KADANOFF, L. P. Phase diagram for the Ashkin-Teller model in three dimensions. *Physical Review B* **22**, 2542-2553 (1980).
256. WEGNER, F. J. Duality relation between the Ashkin-Teller and the eight-vertex model. *Journal of Physics C : Solid State Physics* **5**, L131-L132 (1972).
257. BAXTER, R. J. *Exactly solved models in statistical mechanics* (1982).
258. KNOPS, H. J. F. A branch point in the critical surface of the Ashkin-Teller model in the renormalization group theory. *Journal of Physics A : Mathematical and General* **8**, 1508-1512 (1975).
259. WU, F. Y. & LIN, K. Y. Two phase transitions in the Ashkin-Teller model. *Journal of Physics C : Solid State Physics* **7**, L181-L184 (1974).
260. BEKHECHI, S., BENYOUSSEF, A., ELKENZ, A., ETTAKI, B. & LOULIDI, M. Phase transitions in the anisotropic Ashkin-Teller model. *Physica A : Statistical Mechanics and its Applications* **264**, 503-514 (1999).
261. MUSIAŁ, G. A Monte Carlo study of the mixed phase region in the 3D Ashkin-Teller model. *physica status solidi (b)* **236**, 486-489 (2003).
262. WOJTKOWIAK, Z. & MUSIAŁ, G. Wide crossover in the 3D Ashkin-Teller model. *Physica A : Statistical Mechanics and its Applications* **513**, 104-111 (2019).
263. ARNOLD, P. & ZHANG, Y. Monte Carlo study of very weakly first-order transitions in the three-dimensional Ashkin-Teller model. *Nuclear Physics B* **501**, 803-837 (1997).
264. JEZIOREK-KNIOŁA, D., MUSIAŁ, G. & WOJTKOWIAK, Z. Arbitrarily Weak First Order Phase Transitions in the 3D Standard Ashkin-Teller Model by MC Computer Experiments. *Acta Physica Polonica A* **127**, 327-329 (2015).
265. MUSIAŁ, G. Monte Carlo analysis of the tricritical behavior in a three-dimensional system with a multicomponent order parameter : The Ashkin-Teller model. *Physical Review B* **69**, 024407 (2004).
266. SZUKOWSKI, G., KAMIENIARZ, G. & MUSIAŁ, G. Verification of Ising phase transitions in the three-dimensional Ashkin-Teller model using Monte Carlo simulations. *Physical Review E* **77**, 031124 (2008).
267. SANTOS, J., ROSA, D. & SÁ BARRETO, F. New Baxter phase in the Ashkin-Teller model on a cubic lattice. *Physics Letters A* **382**, 272-275 (2018).

268. SANTOS, J. P., AVILA, J. A. J., ROSA, D. S. & FRANCISCO, R. M. Multicritical phase diagram of the three-dimensional Ashkin-Teller model including metastable and unstable phases. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials* **469**, 35-39 (2019).
269. BAK, P. *et al.* Phase Diagram of Selenium Adsorbed on the Ni(100) Surface : A Physical Realization of the Ashkin-Teller Model. *Physical Review Letters* **54**, 1539-1542 (1985).
270. ZHE, C., PING, W. & YING-HONG, Z. Ashkin-Teller Formalism for Elastic Response of DNA Molecule to External Force and Torque. *Communications in Theoretical Physics* **49**, 525-528 (2008).
271. SLUITER, M. & KAWAZOE, Y. Magnetism and chemical interactions in metallic alloys. *Science Reports of the Research Institutes* **40**, 301-306 (1995).
272. GREST, G. S. & WIDOM, M. N -color Ashkin-Teller model. *Physical Review B* **24**, 6508-6515 (1981).
273. MARTINS, M. J. & FELICIO, J. R. D. d. Phase diagram of the N-colour Ashkin-Teller model. *Journal of Physics A : Mathematical and General* **21**, 1117-1121 (1988).
274. FRADKIN, E. N -Color Ashkin-Teller Model in Two Dimensions : Solution in the Large-N Limit. *Physical Review Letters* **53**, 1967-1970 (1984).
275. SHANKAR, R. Ashkin-Teller and Gross-Neveu models : New relations and results. *Physical Review Letters* **55**, 453-456 (1985).
276. WISEMAN, S. & DOMANY, E. Critical behavior of the random-bond Ashkin-Teller model : A Monte Carlo study. *Physical Review E* **51**, 3074-3086 (1995).
277. ZHU, Q., WAN, X., NARAYANAN, R., HOYOS, J. A. & VOJTA, T. Emerging criticality in the disordered three-color Ashkin-Teller model. *Physical Review B* **91**, 224201 (2015).
278. IBRAHIM, A. K. & VOJTA, T. Emerging critical behavior at a first-order phase transition rounded by disorder. *Fortschritte der Physik* **65**, 1600018 (2017).
279. CARDY, J. Effect of random impurities on fluctuation-driven first-order transitions. *Journal of Physics A : Mathematical and General* **29**, 1897-1904 (1996).
280. KOHMOTO, M., den NIJS, M. & KADANOFF, L. P. Hamiltonian studies of the d=2 Ashkin-Teller model. *Physical Review B* **24**, 5229-5241 (1981).
281. LIEB, E. H. Exact Solution of the Problem of the Entropy of Two-Dimensional Ice. *Physical Review Letters* **18**, 692-694 (1967).
282. LIEB, E. H. Exact Solution of the Two-Dimensional Slater KDP Model of a Ferroelectric. *Physical Review Letters* **19**, 108-110 (1967).
283. LIEB, E. & WU, F. in *Phase Transitions and Critical Phenomena* Cyril Domb, Melville S. Green (1972).
284. GEHLEN, G. v. & RITTENBERG, V. The Ashkin-Teller quantum chain and conformal invariance. *Journal of Physics A : Mathematical and General* **20**, 227-237 (1987).

285. BRIDGEMAN, J. C., O'BRIEN, A., BARTLETT, S. D. & DOHERTY, A. C. MERA for Spin Chains with Continuously Varying Criticality. *Physical Review B* **91**, 165129 (2015).
286. ALCARAZ, F. C. & FELICIO, J. R. D. d. Finite size studies of the Ashkin-Teller model. *Journal of Physics A : Mathematical and General* **17**, L651-L655 (1984).
287. IGLOI, F. & SOLYOM, J. Phase diagram and critical properties of the (1+1)-dimensional Ashkin-Teller model. *Journal of Physics A : Mathematical and General* **17**, 1531-1545 (1984).
288. CECCATTO, H. A. Quantum N-colour Ashkin-Teller model : exact solution in the large-N limit. *Journal of Physics A : Mathematical and General* **24**, 2829-2834 (1991).
289. GOSWAMI, P., SCHWAB, D. & CHAKRAVARTY, S. Rounding by Disorder of First-Order Quantum Phase Transitions : Emergence of Quantum Critical Points. *Physical Review Letters* **100**, 015703 (2008).
290. BARGHATHI, H., HRAHSHEH, F., HOYOS, J. A., NARAYANAN, R. & VOJTA, T. Strong-randomness phenomena in quantum Ashkin-Teller models. *Physica Scripta* **T165**, 014040 (2015).
291. HRAHSHEH, F., HOYOS, J. A. & VOJTA, T. Rounding of a first-order quantum phase transition to a strong-coupling critical point. *Physical Review B* **86**, 214204 (2012).
292. IBRAHIM, A. K. & VOJTA, T. Monte Carlo simulations of the disordered three-color quantum Ashkin-Teller chain. *Physical Review B* **95**, 054403 (2017).
293. MUSIAŁ, G., JEZIOREK-KNIOŁA, D. & WOJTKOWIAK, Z. Monte Carlo examination of first-order phase transitions in a system with many independent order parameters : Three-dimensional Ashkin-Teller model. *Physical Review E* **103**, 062124 (2021).
294. JUHÁSZ, R., KOVÁCS, I. A. & IGLÓI, F. Random transverse-field Ising chain with long-range interactions. *EPL (Europhysics Letters)* **107**, 47008 (2014).
295. JUHÁSZ, R., KOVÁCS, I. A. & IGLÓI, F. Long-range epidemic spreading in a random environment. *Physical Review E* **91**, 032815 (2015).
296. KOVÁCS, I. A., JUHÁSZ, R. & IGLÓI, F. Long-range random transverse-field Ising model in three dimensions. *Physical Review B* **93**, 184203 (2016).
297. JUHÁSZ, R. Infinite-disorder critical points of models with stretched exponential interactions. *Journal of Statistical Mechanics : Theory and Experiment* **2014**, P09027 (2014).
298. PESCHEL, I. Surface magnetization in inhomogeneous two-dimensional Ising lattices. *Physical Review B* **30**, 6783-6784 (1984).
299. KOVÁCS, I. A. & IGLÓI, F. Boundary critical phenomena of the random transverse Ising model in $D \geq 2$ dimensions. *Physical Review B* **87**, 024204 (2013).
300. BINDER, K. in *Phase Transitions and Critical Phenomena* Cyril Domb, Joel L. Lebowitz (Academic Press, 1983).

301. DIEHL, H. in *Phase Transitions and Critical Phenomena* Cyril Domb, Joel L. Lebowitz (Academic Press, 1986).
302. PLEIMLING, M. Critical phenomena at perfect and non-perfect surfaces. *Journal of Physics A : Mathematical and General* **37**, R79-R115 (2004).
303. PAL, A. & HUSE, D. A. Many-body localization phase transition. *Physical Review B* **82**, 174411 (2010).
304. KJÄLL, J. A., BARDARSON, J. H. & POLLMANN, F. Many-body localization in a disordered quantum Ising chain. *Physical Review Letters* **113**, 107204 (2014).
305. NANDKISHORE, R. & HUSE, D. A. Many body localization and thermalization in quantum statistical mechanics. *Annual Review of Condensed Matter Physics* **6**, 15-38 (2015).
306. IMBRIE, J. Z. On Many-Body Localization for Quantum Spin Chains. *Journal of Statistical Physics* **163**, 998-1048 (2016).
307. ALET, F. & LAFLORENCIE, N. Many-body localization : an introduction and selected topics. *Comptes Rendus Physique* (2018).
308. ABANIN, D. A., ALTMAN, E., BLOCH, I. & SERBYN, M. *Colloquium* : Many-body localization, thermalization, and entanglement. *Reviews of Modern Physics* **91**, 021001 (2019).
309. ALTMAN, E. & VOSK, R. Universal dynamics and renormalization in many body localized systems. *Annual Review of Condensed Matter Physics* **6**, 383-409 (2015).
310. IMBRIE, J. Z., ROS, V. & SCARDICCHIO, A. Review : Local Integrals of Motion in Many-Body Localized systems. *Annalen der Physik* **529**, 1600278 (2017).
311. PEKKER, D., REFAEL, G., ALTMAN, E., DEMLER, E. & OGANESYAN, V. Hilbert-Glass Transition : New Universality of Temperature-Tuned Many-Body Dynamical Quantum Criticality. *Physical Review X* **4**, 011052 (2014).
312. HUANG, Y. & MOORE, J. E. Excited-state entanglement and thermal mutual information in random spin chains. *Physical Review B* **90**, 220202 (2014).
313. VASSEUR, R., FRIEDMAN, A. J., PARAMESWARAN, S. A. & POTTER, A. C. Particle-hole symmetry, many-body localization, and topological edge modes. *Physical Review B* **93**, 134207 (2016).
314. YOU, Y.-Z., QI, X.-L. & XU, C. Entanglement holographic mapping of many-body localized system by spectrum bifurcation renormalization group. *Physical Review B* **93**, 104205 (2016).
315. SLAGLE, K., YOU, Y.-Z. & XU, C. Disordered XYZ spin chain simulations using the spectrum bifurcation renormalization group. *Physical Review B* **94**, 014205 (2016).
316. VOSK, R. & ALTMAN, E. Many-Body Localization in One Dimension as a Dynamical Renormalization Group Fixed Point. *Physical Review Letters* **110**, 067204 (2013).

317. BUKOV, M., D'ALESSIO, L. & POLKOVNIKOV, A. Universal high-frequency behavior of periodically driven systems : from dynamical stabilization to Floquet engineering. *Advances in Physics* **64**, 139-226 (2015).
318. VOSK, R., HUSE, D. A. & ALTMAN, E. Theory of the Many-Body Localization Transition in One-Dimensional Systems. *Physical Review X* **5**, 031032 (2015).
319. POTTER, A. C., VASSEUR, R. & PARAMESWARAN, S. A. Universal Properties of Many-Body Delocalization Transitions. *Physical Review X* **5**, 031033 (2015).
320. ZHANG, L., ZHAO, B., DEVAKUL, T. & HUSE, D. A. Many-body localization phase transition : A simplified strong-randomness approximate renormalization group. *Physical Review B* **93**, 224201 (2016).
321. MORNINGSTAR, A. & HUSE, D. A. Renormalization-group study of the many-body localization transition in one dimension. *Physical Review B* **99**, 224205 (2019).
322. GOREMYKINA, A., VASSEUR, R. & SERBYN, M. Analytically Solvable Renormalization Group for the Many-Body Localization Transition. *Physical Review Letters* **122**, 040601 (2019).
323. DUMITRESCU, P. T., VASSEUR, R. & POTTER, A. C. Scaling Theory of Entanglement at the Many-Body Localization Transition. *Physical Review Letters* **119**, 110604 (2017).