École doctorale IAEM Lorraine

Analysis on singular space and operators algebras

THÈSE

présentée et soutenue publiquement le 30 septembre 2019

pour l'obtention du

Doctorat de l'Université de Lorraine

(mention Mathématiques)

par

Jérémy Mougel

Composition du jury

Rapporteurs :	Prof. Radu Purice	IMAR, Bucarest
	Prof. Serge Richard	Université de Nagoya
Examinateurs :	MCF. Paulo Carillo-Rouse	Univeristé Paul Sabatier, Toulouse III
	MCF. Lisette Jager	Université de Reims Champagne-Ardenne
	Prof. Hervé Oyono-Oyono	Université de Lorraine
	Prof. Angela Pasquale	Université de Lorraine
Directeur de thèse :	Prof. Victor Nistor	Université de Lorraine

Institut Élie Cartan de Lorraine — UMR 7502

Résumé de la thèse en français

Cette thèse porte sur l'étude du spectre essentiel de l'Hamiltonien du problème à N-corps en utilisant principalement les algèbres d'opérateurs et l'approche initiée par Georgescu. Nous faisons également un pont entre l'approche de Georgescu et l'approche développer par Melrose et Vasy qui la géométrie différentielle et plus particulièrement les éclatements de variétés à coins par rapport à une famille de sous-variétés. Commençons par quelques mots sur le problème à N-corps et les résultats sur le spectre essentiel de l'Hamiltonien déjà existants.

Motivation : L'Hamiltonien du problème à N-corps

Le sujet de recherche de cette thèse est l'étude d'opérateurs de type Schrödinger, en particulier l'opérateur modélisant l'énergie du problème à N-corps. Ces opérateurs sont d'une importance cruciale dans la mécanique quantique. Un exemple de système à N-corps est une molécule possédant N constituantes. L'opérateur qui modélise l'énergie de ce système est appelé *un Hamiltonien*. Si on néglige les champs magnétiques, l'énergie du système décrit par l'Hamiltonien H provient de deux sources différentes : La première est l'énergie libre du système est modélisée par le Laplacien Δ. La seconde source d'énergie est modélisé par un potentiel V qui est un opérateur de multiplication par la fonction V. Plus précisément, on a :

$$H = -\Delta + V$$

Une des premières approches qui fut couronnée de succès sur l'étude du spectre essentiel de l'opérateur H fut basée sur le théorème de spectre essentiel de Weyl. Un énoncé détaillé et une preuve de ce théorème peut être trouvé dans [52, Chapter XIII, Section 4]. Ce théorème nous dit en particulier que pour un opérateur auto-adjoint A, on a

$$\sigma_{ess}(A) = \sigma_{ess}(A + C),$$

où C est une perturbation relativement compact de A. Rappelons que C est une *perturbation relativement compact* de A si $D(A) \subset D(C)$ et si $C(A + i)^{-1}$ est compact. En particulier, pour $A = -\Delta$, il existe beaucoup de conditions explicites et suffisantes sur V qui permettent d'obtenir des perturbations relativement compact du Laplacien. Le résultat suivant en est un bon exemple.

Theorem 0.0.1 ([52], Theorem XIII.15)**.** *Soit $V \in L^p(\mathbb{R}^n) + L^\infty_\epsilon(\mathbb{R}^n)$ avec $p \geq \max\{2, \frac{n}{2}\}$ si $n \neq 4$ et $p > 2$ si $n = 4$. Sous ses hypothèses, V est une perturbation relativement compact de $-\Delta$ et*

$$\sigma_{ess}(-\Delta + V) = \sigma_{ess}(-\Delta) = [0, +\infty[. \tag{1}$$

Ici, $V \in L^p(\mathbb{R}^n) + L^\infty_\epsilon(\mathbb{R}^n)$ signifie qu'il existe une suite $V_k \in L^p(\mathbb{R}^n)$ (l'espace de Lebesgue usuel) tel que $V - V_k \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ et que $\|V - V_k\|_\infty \to 0$.

Donnons maintenant plus de détails sur l'Hamiltonien H et le potentiel V dans le cadre du problème à N-corps. On modélise la position de chaque corps du problème à N-corps par un élément de $\mathbb{R}^3$, nous considérons l'espace vectoriel réel $X := \mathbb{R}^{3N}$. L'opérateur H agit sur $L^2(X)$ et est donné par l'équation suivante :

$$H^{(N)} := -\Delta_{\mathbb{R}^{3N}} + \sum_{1\leq i\leq N} \frac{a_i}{\|x_i\|} + \sum_{1\leq i<j\leq N} \frac{b_{i,j}}{\|x_i - x_j\|},$$

où $x = (x_1, \ldots, x_N) \in X$ et $\|.\|$ est la norme euclidienne. Les constantes a_i et $b_{i,j}$ sont positives ou négatives en fonctions de si elle représente une force attractive ou une force répulsive. La fonction $\frac{b_{i,j}}{\|x_i - x_j\|}$ modélise l'interaction entre le i-ème corps et le j-ème corps. Cette fonction ne dépend seulement que la distance entre ces deux corps. La fonction $\frac{a_i}{\|x_i\|}$ apparait car nous supposons qu'il existe un corps très lourd placé à l'origine de X. Un exemple typique vérifiant cette hypothèse est un atome possèdent N-électrons dont le noyau est très lourd comparé aux électrons. On remarque que le potentiel de l'Hamiltonien du problème à N-corps ne tend pas vers zéro lorsque x tend vers l'infini. On ne peut donc pas appliquer le théorème du spectre essentiel de Weyl pour décrire le spectre essentiel de l'Hamilotien du problème à N-corps. Cependant, des résultats sur le spectre essentiel de l'Hamiltonien du problème à N-corps ont été obtenu par beaucoup d'autres chercheurs. En particulier, on peut citer Hunziker [29], Van Winter [58], et Žislin [61]. Le principal résultat obtenu est connu sous le du théorème HVZ, qui est à présent un résultat très classique du domaine d'étude qui nous intéresse. Nous reprenons l'énoncé de [57, Section 11, Theorem 11.2] pour énoncer le théorème HVZ dans le cadre d'un atome avec N-électrons

Theorem 0.0.2 (HVZ). *Soit $H^{(N)}$ l'opérateur définit dans l'équation* (1.3). *Alors $H^{(N)}$ est un opérateur auto-adjoint et borné inférieurement. De plus,*

$$\sigma_{ess}(H^{(N)}) = \inf\left(\sigma(H^{(N-1)})\right) = [\lambda^{N-1}, \infty[,$$

où λ^{N-1} est négative and représente le bas du spectre de $H^{(N-1)}$ and $H^{(N-1)}$, l'Hamiltonien du problème à $(N-1)$-corps.

Une interprétation physique de ce théorème est que l'énergie requise pour extraire un électron d'un atome qui en possèdent N est égale à $\lambda^N - \lambda^{N-1}$, où λ^N est le bas du spectre de $H^{(N)}$. La version classique et plus générale du théorème HVZ requiert beaucoup plus de notations. Nous conseillons [52, Theorem XIII.17] pour un énoncé précis.

Comme dis précédemment, le potentiel de l'Hamiltonien du problème à N-corps ne tends pas vers 0 quand x tends vers ∞. Le comportement du potentiel est très compliqué et donner à cause des singularités. Ces singularités ont lieux le long de ces sous-espaces :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_j &:= \{(x_1, x_2, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^{3N} |\, x_j = 0 \in \mathbb{R}^3\}\,, \quad 1 \leq j \leq N\,, \text{ et} \\ \mathcal{P}_{i,j} &:= \{(x_1, x_2, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^{3N} |\, x_i = x_j \in \mathbb{R}^3\}\,, \quad 1 \leq i < j \leq N\,. \end{aligned} \tag{2}$$

Ces sous-espaces sont les *plans de collisions*. Par exemple, si $x \in \mathcal{P}_{i,j}$, alors le i-ème et le j-ème corps se trouvent à la même positions et une collision se produit à lieux. Plusieurs collisions peuvent se produire simultanément, nous allons donc considérons $\mathcal{S}$ la famille des sous-espaces de X qui contient tous les plans de collisions et leurs intersections. Cela entraine que la famille de sous-espaces $\mathcal{S}$ de X est stable par intersections, autrement dit une *semi-lattice* de sous-espaces de X. Boutet de Monvel et Georgescu ont associé à chaque semi-lattice une C^*-algèbre graduée. Ils ont ensuite utilisé cette C^*-algèbre pour retrouver le théorème HVZ et obtenir des estimations de Mourre [6, 7, 8]. Une étude profonde et très complète de ces C^*-algèbres graduées a été mené par Mageira dans sa thèse de doctorat et les publications associées [34, 35].

Résume du contenu de la thèse et principaux résultats obtenus

Dans mon travail, j'ai poursuivi l'étude des Hamiltoniens du problème à N-corps avec des potentiels plus généraux en utilisant des méthodes algébrique et des méthodes géométriques. Plus précisément, en utilisant les C^*-algèbres pour déterminer le spectre essentiel de ces Hamiltoniens et en utilisant les variétés à coins et leurs éclatements pour ensuite mieux comprendre le spectre des C^*-algèbres apparus dans les preuves ainsi que le comportement des fonctions propres. Mon travail a donné lieux à quatre papiers de recherches. Les trois premiers sont déjà publiés est le dernier va bientôt être soumis. La thèse est basée en grande partie sur ces travaux. J'ai regroupé dans un chapitre séparé les outils mathématiques préliminaires communs a ces travaux afin d'éviter les répétitions.

Puisque nous considérons la compactification radiale d'un espace vectoriel réel dans chacun de nos papiers, nous la rappelons ici. Soit X un espace vectoriel réel de dimension finie et $\mathbb{S}_X$ l'ensemble des directions de X,c'est-à-dire, l'ensemble des demi-droites $\mathbb{R}_+^* v$, $v \in X \smallsetminus \{0\}$. La *compactification radiale* de X est l'ensemble $\overline{X} := X \sqcup \mathbb{S}_X$. Sa topologie est décrite dans la Sous-section 2.2.2. Sa structure lisse est une question soulevée dans le Chapitre 6. En particulier, une fonction de $\mathcal{C}(\overline{Z})$ est une fonction continue sur Z qui possède des limites radiales uniformes à l'infini.

Décrivons à présent rapidement le contenu principale et les résultats des chapitres de cette thèse, en particulier, des quatre papiers mentionnés précédemment. Des détails de ces résultats seront données dans le chapitre d'introduction, où une section est dédiée à chaque papier.

Le chapitre 2 est consacré à l'introduction des notions et des outils nécessaires aux autres chapitres (et donc des quatre papiers). Plus précisément, les trois premiers papiers possèdent beaucoup de notions communes. Ce chapitre permet sert donc à éviter les répétitions. Le chapitre 2 contient des rappels à propos des C^*-algèbres, de produits croisés, d'opérateurs de Fredholm, de compactifications et de familles exhaustives de représentations.

Le chapitre 3 s'inspire en grande partie des résultats de mon premier papier ("A refined HVZ-theorem for asymptotically homogeneous interactions and finitely many collison planes," en collaboration avec Nistor et Prudhon, publié dans *Rev. Roumaine Math. Pure Applic.*, 2017, 22 pages).

Plus précisément, nous étudions l'algèbre associée au problème à l'Hamiltonien du N-corps avec interactions qui sont asymptotiquement homogènes à l'infini sur un espace vectoriel réel de dimension finie X. On considère $\mathcal{S}$ une semi-lattice *finie* de sous-espace vectoriel de X et pour chaque espace $Y \in \mathcal{S}$, soit $v_Y \in \mathcal{C}(\overline{X/Y})$, Autrement dit, v_Y est une fonction continue sur le quotient X/Y qui possède des limites radiales uniformes à l'infini. (Rappelons que $\overline{X/Y}$ désigne la compactification sphérique du quotient $\overline{X/Y}$.) Nous considérons des Hamiltoniens de la forme

$$H \;:=\; -\Delta + \sum_{Y \in \mathcal{S}} v_Y\,. \tag{3}$$

Georgescu et Nistor ont déjà étudié le cas où $\mathcal{S}$ est la famille de *tous* les sous-espaces de X [27]. Le spectre de la C^*-algèbre obtenue est cependant différent du cas d'une semi-lattice finie. Certaines propriétés du cas d'une semi-lattice finie ne sont plus valables dans le cas d'une famille infinie. Enfaite, dans ce papier, parmi les choses présentées, nous préparons le terrain pour une identification plus précise du spectre de la C^*-algèbre (voir le chapitre 6).

Comme dans l'article [27], nous considérons également des Hamiltoniens plus généraux qui sont affiliés a un produit croisé de C^*-algèbre $\mathcal{E}_{\mathcal{S}}(X) \rtimes X$ bien choisi.

L'objectif initial de ce papier (ici chapitre) était de voir quels résultats de [27] s'appliquaient au cas où $\mathcal{S}$ est la semi-lattice contenant les plans de collisions et ceux qui n'étaient plus valides. Alors que les résultats sur le spectre essentiel des Hamiltoniens et les propriétés d'affiliations restent valident, le spectre de la C^*-algèbre correspondantes est sensiblement différents comme mentionnés précédemment. Une bonne description des spectres des C^*-algèbres pourraient être utilisées afin d'obtenir des résultats sur la régularité des fonctions propres des Hamiltoniens. Nos résultats permettent également d'avoir un nouveau point de vue sur les résultats de Georgescu et Nistor dans le papier sus-mentionné et plus généralement dans la théorie développée par Georgescu et ses collaborateurs. Par exemple, nous avons montré, dans notre cas, que la fermeture n'est pas nécessaire dans la décomposition du spectre essentiel. Plus précisément :

$$\sigma_{ess}(T) \;=\; \bigcup_{\alpha \in \mathcal{F}} \sigma(T_\alpha)\,, \tag{4}$$

où α parcourt une famille d'indices bien choisies. (En général, l'ensemble des indices est un ensemble d'obits pour une action de groupe). Ce résultat a servi de paradigme pour les papiers (ici chapitres) suivants. Nous obtenons également une description de la topologie via une application quotient de la topologie d'un spectre d'une C^*-algèbre introduit par Georgescu et qui est étudiée dans [42].

Le chapitre 4 reprend en grande partie les résutlats de mon deuxième papier ("Exhaustive families of representations of C^*-algebras associated to the N-body problem Hamiltonians with asymptotically homogeneous interactions," en collaboration avec Prudhon, publiée dans *C.R Math. Acad. Sci. Paris*, 2019, 5 pages), qui est une note. Dans cette note, nous poursuivons l'analyse de l'algèbre $\mathcal{E}_{\mathcal{S}}(X) \rtimes X$ introduite dans le chapitre 3 afin d'étudier des Hamiltoniens du problème à N-corps avec interactions correspondantes a une semilattice de sous-espaces vectorielles. Le principal nouveau résultat est que nous considérons l'action d'un groupe et que nous mettons en relief que l'algèbre que que nous étudions répond à une question poser par Melrose et Singer dans [39]. Nous considérons également des opérateurs de type Dirac and plus généralement, des opérateurs pseudo-différentiels. Voir la sous-section 1.4 pour plus de détails.

Le chapitre 5 reprends en grande partie les résultats de mon troisième papier ("Essential spectrum, quasi-orbits and compactifications : Application to the Heisenberg group," , publiée dans *Rev. Roumaine Math. Pure Applic.*, 2019, 19 pages). Plus précisément, nous remplaçons l'espace vectoriel sous-jacent X par le groupe de Heisenberg en dimension 3 et nous étudions quelles propriétés s'étendent à ce nouveau cadre non commutatif. Nous considérons toujours la compactification sphérique de H, cependant il y a de manière naturelles de la définir : la première étant de regarder H comme homéomorphe à $\mathbb{R}^3$ en utilisant l'application exponentielle. La seconde étant le plongement naturel de H dans $\mathbb{R}^3$ en passant par les matrices carrées de taille 3×3. Nous considérons ces deux choix, et un des principal résultats est une décomposition du spectre essentiel d'opérateur de type Schrödinger $T = -\Delta + V$, où V est une fonction continue à valeurs réelles sur $\overline{H}$, pour les deux types de compactifications. On remarque qu'on obtient des décompositions de spectre essentiel *différentes* pour chaque compactification alors que dans le cas commutatif, ils coïncident. Ce qui montre la nouvelle richesse de l'étude dans le cas d'un groupe non commutatif. Mon résultat étend le théorème HVZ de l'espace euclidien aux groupes de Heisenberg. On peut décrire un peu les constructions de ce chapitre. D'abord, l'action de H sur lui-même se prolonge en une action de H sur les deux compactifications. On détermine explicitement les quasi-orbites (fermeture d'orbites) de cette action. On s'inspirant du travail d [44], nous montrons que le spectre essentiel de toutes opérateurs T contenu (ou même affilié à) $\mathcal{C}(\overline{H}) \rtimes H$ est l'union des spectres d'une plus simple famille d'opérateurs $(T_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{F}}$. Cette famille est indexée par la famille $\mathcal{F}$ des quasi-orbits de $\overline{H} \smallsetminus H$ par rapport à l'action de H. Nous trouvons un résultat smilaire que celui obtenu dans l'équation (1.7). Ce résultat est valide pour les deux compactifications mais il dépend de la compactification choisie car les quasi-orbits varient en fonction de la compactification choisie.

Le chapitre 6 reprend en grande partie les résultats de mon quatrième papier ("A comparison of the Georgescu and Vasy spaces associated to the N-body problems," en collaboration avec Ammann et Nistor, soumis très prochainement). Plus précisément, Nous montrons que, l'espace introduit par Vasy afin de construire un calcul pseudo-différentiel adapté aux problèmes à N-corps, et que, le spectre de la C^*-algèbre introduite par Georgescu et étudié dans les chapitres 3 et 4, sont canoniquement les mêmes. Pour cela, nous avons fourni une description alternative des éclatements d'une variété à coins par rapport à une semi-lattice propre de sous-variétés bien choisies (i.e. p-sous-variétés). Nos résultats permettent de clarifier ceux de Georgescu et de Vasy. Le plus important et qu'ils ouvrent la voie à de futures applications en théorie spectrale pour l'Hamiltonien du problème à N-corps. En effet, chacune des deux approches (celle de Georgescu et celle de Vasy) possède ses propres avantages.