



AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

Observation et commande d'une classe de systèmes non linéaires temps discret

Thèse

présentée et soutenue publiquement le 14 Novembre 2018

pour l'obtention du

Doctorat de l'Université de Lorraine – France

(spécialité Automatique, Traitement du Signal et des Images, Génie Informatique)

et

Doctorat de l'Ecole Nationale d'Ingénieurs de Gabès – Tunisie

(spécialité Génie Électrique)

par

Noussaiba GASMI

Composition du jury

<i>Président :</i>	Catherine BONNET	Directrice de Recherche, INRIA Saclay-Ile-de-France & L2S-Centrale Supélec
<i>Rapporteurs :</i>	Tarek RAISSI Chaker JAMMAZI	Professeur, CNAM-Paris Maître de Conférences-HDR, Université de Carthage
<i>Examineurs :</i>	Isabelle FANTONI M. Naceur ABDELKRIM Mohamed BOUTAYEB Mohamed AOUN	Directrice de Recherche CNRS, LS2N-Nantes & HEUDYASIC-UTC Compiègne Professeur, Université de Gabès Professeur, Université de Lorraine (Directeur de thèse) Maître de Conférences-HDR, Université de Gabès (Directeur de thèse)

Mis en page avec la classe thloria.

Remerciements

Les travaux présentés dans ce mémoire ont été effectués au sein du Centre de Recherche en Automatique de Nancy (CRAN) et le Laboratoire Modélisation Analyse et Commande des Systèmes (MACS), sous la responsabilité scientifique de Monsieur Mohamed BOUTAYEB, Professeur à l'Université de Lorraine, et de Monsieur Mohamed AOUN, maître de conférences-HDR à l'Université de Gabès.

Même si les travaux de thèse sont souvent associés à l'autonomie et l'investissement personnel, il serait illusoire de nier que l'aboutissement de ce travail a été possible également via la participation, de près ou de loin, de nombreuses personnes. Les prochaines lignes ont pour objet l'expression de ma gratitude et de ma sympathie vis à vis de celles-ci.

J'adresse tous mes remerciements à Monsieur Tarek RAISSI, Professeur au CNAM-Paris, ainsi qu'à Monsieur Chaker JAMMAZI, Maître de Conférences-HDR à l'Université de Carthage, de l'honneur qu'ils m'ont fait en acceptant la charge d'être rapporteurs de cette thèse. Je leur suis reconnaissante pour le temps qu'ils ont bien voulu consacrer à cette tâche et à leurs nombreuses remarques et conseils qui m'ont permis d'améliorer grandement mon manuscrit de thèse.

Je remercie également Madame Isabelle FANTONI, Directrice de Recherche au CNRS, Madame Catherine BONNET, Directrice de Recherche à l'INRIA et Monsieur Mohamed Naceur ABDELKRIM, Professeur à l'Université de Gabès, pour l'enthousiasme avec lequel ils ont accepté de participer à ce jury et pour l'intérêt qu'ils ont accordé à ce travail de thèse et l'attention qu'ils lui ont réservé.

Je tiens à exprimer mes plus vifs remerciements à Monsieur Mohamed BOUTAYEB, Directeur de thèse et Professeur à l'Université de Lorraine. Je lui suis reconnaissante de ses conseils, ses encouragements ainsi que de la confiance dont il m'a toujours témoigné. Je ne pouvais souhaiter meilleur encadrement car tout en étant présent, il m'a laissé une autonomie de réflexion certaine. Sa sympathie, sa confiance, son écoute et son soutien ont été très appréciables.

J'exprime ma gratitude à Monsieur Mohamed AOUN, Maître de Conférences-HDR à l'université de Gabès et directeur de thèse, d'avoir accepté de me diriger pendant cette belle aventure, de m'avoir accordé sa confiance et permis d'effectuer cette thèse au sein de l'équipe du MACS. C'est à lui que je dois mon entrée dans le monde de la recherche ce dont je lui suis très reconnaissante.

Je tiens aussi à remercier Assem THABET, pour sa disponibilité, ses aides, son amitié et tous les encouragements qu'il m'a apportés tout au long de mes recherches. Merci de m'avoir prodigué de nombreux conseils pour bien débiter cette aventure.

Je voulais exprimer ma profonde reconnaissance envers Michel ZAZADZINSKI et Ali ZEMOUCHE pour leur aide continue. Merci de m'avoir permis de surmonter les difficultés rencontrées durant ces années passées à Longwy. Merci Michel et Ali pour votre sympathie, votre aide et votre confiance.

Je tiens bien évidemment à remercier l'ensemble des membres de CRAN-Longwy : Mohamed

DAROUACH, Marouane ALMA, Cedric DELATTRE, Latifa BOUTAT BADDAS, Hugues RAFARALAHY et Harouna SOULEY ALI pour leur accueil chaleureux et leur amitié. Je remercie mes amis Faiza, Abraham et Vittorio qui ont fait un bout de chemin avec moi et qui ont sûrement rendu la vie au labo plus agréable. Je tiens aussi à remercier les anciens membres de l'équipe ainsi que les stagiaires avec qui j'ai eu beaucoup d'échanges enrichissants. Mention spéciale à tous mes collègues thésards et docteurs du MACS avec qui j'ai partagé des moments très agréables, systématiques et parfois même difficiles. Pour moi l'aventure de la thèse est gravée à jamais dans mes pensées car en dépit de nos différences, la science nous a permis d'enrichir nos vies à travers le partage.

Mes remerciements vont également à mes collègues de l'IUT de Longwy ainsi qu'à mes étudiants sans oublier l'ensemble des personnels. Merci pour cette formidable aventure humaine que nous avons partagée et pour ces bons moments de rigolade !

Durant ces longues années, mes parents, Younes et Jamila, ma sœur Omayma ainsi que mon oncle Mohamed ont été toujours présents et m'ont apporté leur soutien moral et financier. Qu'ils trouvent ici toute ma reconnaissance.

Mention spéciale à mon amie et ma collègue Ahlem SASSI avec laquelle j'ai partagé l'expérience de la thèse et avec laquelle je termine celle-ci. Merci de m'avoir accompagnée « dans le bonheur et dans les épreuves ».

Enfin, j'adresse un grand merci à Ghazi qui a su faire preuve d'une grande patience, de compréhension, qui m'a accompagné et soutenu de façon permanente dans les moments difficiles tout au long de ces années, et qui m'a toujours encourager quand je baissais les bras.

Il me sera très difficile de remercier tout le monde car c'est grâce à l'aide de nombreuses personnes que j'ai pu mener cette thèse à son terme. Autant de phrases et d'expressions aussi éloquentes soit-elles ne sauraient exprimer ma gratitude et ma reconnaissance envers tous ceux qui m'ont aidé et soutenu.

*À mon père et ma mère
À Ghazi et Omayma
À tous ceux qui comptent pour moi*

Table des matières

Remerciements	i
Table des figures	xi
Symboles et Notations	xiii
Introduction Générale	xv

Chapitre 1

Etat de l'art sur l'estimation et la commande des systèmes à temps discret

1.1	Introduction	2
1.2	Généralités sur les systèmes à temps discret	2
1.2.1	Introduction	2
1.2.2	Systèmes dynamiques à temps discret	2
1.3	Observabilité des systèmes à temps discret	4
1.4	Stabilité des systèmes à temps discret	6
1.4.1	Notion de la stabilité	6
1.4.2	Stabilité au sens de Lyapunov	7
1.4.2.1	Méthode indirecte	7
1.4.2.2	Méthode directe	7
1.5	Observateur d'état des systèmes dynamiques à temps discret	8
1.5.1	Introduction	8
1.5.2	Observateurs des systèmes linéaires	8
1.5.2.1	Observateur de Luenberger	8
1.5.2.2	Filtre de Kalman	9
1.5.2.3	Observateur par intervalle	10
1.5.3	Observateurs des systèmes non linéaires	11
1.5.3.1	Observateur de Luenberger étendu	11
1.5.3.2	Filtre de Kalman Etendu (FKE)	11

1.5.3.3	Observateur à grand gain	12
1.5.4	Synthèse d'observateur pour les systèmes non linéaires : approches LMI	13
1.5.4.1	Cas des systèmes Lipschitz	14
1.5.4.2	Cas des systèmes « one-sided Lipschitz »	16
1.6	Commande des systèmes dynamiques à temps discret	17
1.6.1	Contrôlabilité	17
1.6.2	Commande rétroactive	18
1.6.2.1	Commande par retour d'état	18
1.6.2.2	Commande basée-observateur	19
1.6.2.3	Commande par retour de sortie statique	19
1.7	Etude des inégalités matricielles linéaires	20
1.7.1	Propriétés fondamentales	20
1.7.1.1	Introduction	20
1.7.1.2	Définitions relatives aux LMIs	21
1.7.1.3	Système de LMIs	21
1.7.2	Types de problèmes LMI	22
1.7.2.1	Problème de faisabilité LMI	22
1.7.2.2	Problème de programmation semi définie SDP	22
1.7.2.3	Problème de valeurs propres généralisé	23
1.7.2.4	Problème de maximisation de déterminant	23
1.7.2.5	Problème du cône de second ordre	23
1.7.3	Résolution des LMIs	24
1.7.3.1	Résolution numérique	24
1.7.3.2	Méthodes des points intérieurs	25
1.8	Conclusion	25

Chapitre 2

Estimation de l'état des systèmes non linéaires à temps discret

2.1	Introduction	28
2.2	Position du problème	28
2.3	Filtrage avec fenêtre de mesures glissante	30
2.3.1	Observateur de type $\mathcal{H}_\infty$ pour les systèmes Lipschitz	30
2.3.2	Observateur de type $\mathcal{H}_\infty$ pour les systèmes « one-sided Lipschitz »	33
2.4	Linéarisation des contraintes BMI	35
2.4.1	Solution particulière : Cas de deux mesures	36
2.4.2	Solution particulière : Le cas de M mesures	36
2.5	Discussion sur les avantages liés à l'introduction d'une fenêtre glissante	37

2.5.1	Rappel	37
2.5.2	Cas des systèmes Lipschitz	38
2.5.3	Cas des systèmes « one-sided Lipschitz »	40
2.5.4	Comparaison du point de vue complexité de calcul	41
2.6	Résultats de simulations	42
2.6.1	Cas des systèmes Lipschitz	42
2.6.1.1	Exemple 1 : Robot à bras articulé	42
2.6.1.2	Exemple 2 : Pendule inversé	46
2.6.2	Cas des systèmes « one-sided Lipschitz »	48
2.6.2.1	Résultats numériques	51
2.6.2.2	Résultats expérimentaux	54
2.7	Conclusion	55

Chapitre 3

Commande basée-observateur de type $\mathcal{H}_\infty$ pour les systèmes non linéaires

3.1	Introduction	58
3.2	Commande basée-observateur de type $\mathcal{H}_\infty$ pour les systèmes Lipschitz	58
3.2.1	Structure sans fenêtres glissantes	59
3.2.1.1	Position du problème	59
3.2.1.2	Analyse de la stabilité	61
3.2.2	Structure avec fenêtres glissantes	65
3.2.2.1	Position du problème	65
3.2.2.2	Analyse de la stabilité	67
3.2.2.3	Linéarisation de la contrainte BMI	68
3.2.2.4	Discussion sur les avantages liés à l'introduction d'une fenêtre glissante	69
3.2.3	Résultats de simulations	70
3.2.3.1	Exemple 1 : Robot à bras articulé	70
3.2.3.2	Exemple 2	71
3.2.3.3	Exemple 3	73
3.3	Commande basée-observateur de type $\mathcal{H}_\infty$ pour les systèmes « one-sided Lipschitz »	74
3.3.1	Structure sans fenêtres glissantes	74
3.3.1.1	Position du problème	74
3.3.1.2	Analyse de la stabilité	77
3.3.2	Structure avec fenêtres glissantes	79
3.3.2.1	Position du problème	80
3.3.2.2	Analyse de la stabilité	83

3.3.2.3	Linéarisation de la contrainte BMI	83
3.3.2.4	Discussion sur les avantages liés à l'introduction d'une fenêtre glissante	84
3.3.3	Résultats de simulations	85
3.4	Conclusion	86

Chapitre 4

Commande robuste basée-observateur de type $\mathcal{H}_\infty$ pour les systèmes Lipschitz

4.1	Introduction	90
4.2	Structure sans fenêtres glissantes	90
4.2.1	Position du problème	91
4.2.2	Analyse de la stabilité	93
4.3	Structure avec fenêtres glissantes	96
4.3.1	Position du problème	96
4.3.2	Analyse de la stabilité	98
4.3.3	Linéarisation de la contrainte BMI	99
4.3.4	Discussion sur les avantages liés à l'introduction d'une fenêtre glissante . .	100
4.4	Résultats de simulations	102
4.4.1	Exemple 1 : Robot à bras articulé	102
4.4.2	Exemple 2	105
4.5	Conclusion	107

Conclusion générale	111
---------------------	-----

Annexe A

Propriétés des fonctions non linéaires

A.1	Fonction Lipschitz	114
A.2	Fonction « one-sided Lipschitz »	115
A.3	Fonction quadratiquement bornée	115

Annexe B

Compléments mathématiques

B.1	Théorie des matrices	118
B.2	Complément et Lemme de Schur	118
B.3	Ensemble et fonction convexes	118
B.4	Relation de Young	119
B.5	Lemme de majoration	119

B.6	Discrétisation d'Euler	119
B.6.1	Cas d'un système linéaire	120
B.6.2	Cas d'un système non linéaire	120

Annexe C

Liste des publications

Bibliographie	125
----------------------	------------

Table des figures

1.1	Commande par retour d'état	18
1.2	Commande basée-observateur	19
1.3	Commande par retour de sortie statique	20
2.1	Robot à bras articulé	42
2.2	L'erreur d'estimation dans un contexte bruyant avec $\omega = 0$ pour $t < 1$ et $t > 2$. .	45
2.3	L'erreur d'estimation dans un contexte bruyant avec $\omega = 0$ pour $t < 1$ et $t > 2$ ($M = 2$)	46
2.4	L'erreur d'estimation dans un contexte bruyant avec $\omega = 0$ pour $t < 1$ et $t > 2$ ($M = 3$)	47
2.5	Pendule inversé	47
2.6	L'erreur d'estimation dans un contexte bruyant avec $\omega = 0$ pour $t < 1.5$ et $t > 2.5$	49
2.7	Les trajectoires de $x_1(k)$ et $x_2(k)$	52
2.8	L'erreur d'estimation dans un contexte bruyant avec $\omega = 0$ pour $t < 7$ et $t > 15$ ($M = 2$)	53
2.9	L'erreur d'estimation dans un contexte bruyant avec $\omega = 0$ pour $t < 7$ et $t > 15$ ($M = 3$)	53
2.10	Application en temps réel	54
2.11	Les trajectoires de $x_1(k)$ et $\hat{x}_1(k)$	55
2.12	Les trajectoires de $x_2(k)$ et $\hat{x}_2(k)$	55
3.1	Les trajectoires de l'état réel (ligne bleue) et l'état estimé (ligne rouge) en utilisant l'approche sans fenêtres glissantes	72
3.2	Les trajectoires de l'état réel (ligne bleue) et l'état estimé (ligne rouge) en utilisant l'approche avec fenêtres glissantes	73
3.3	Les trajectoires de l'état réel (ligne bleue) et l'état estimé (ligne rouge) en utilisant l'approche sans fenêtres glissantes	87
3.4	Les trajectoires de l'état réel (ligne bleue) et l'état estimé (ligne rouge) en utilisant l'approche avec fenêtres glissantes	87
4.1	Les trajectoires de l'état réel (ligne bleue) et l'état estimé (ligne rouge) en utilisant l'approche sans fenêtres glissantes	104
4.2	Les erreurs d'estimation en utilisant l'approche sans fenêtres glissantes	104
4.3	Les trajectoires de l'état réel (ligne bleue) et l'état estimé (ligne rouge) en utilisant l'approche avec fenêtres glissantes	105
4.4	Les erreurs d'estimation en utilisant l'approche avec fenêtres glissantes	105
4.5	Les trajectoires de l'état réel (ligne bleue) et l'état estimé (ligne rouge) en utilisant l'approche sans fenêtres glissantes	107

Table des figures

4.6	Les erreurs d'estimation en utilisant l'approche sans fenêtres glissantes	108
4.7	Les trajectoires de l'état réel (ligne bleue) et l'état estimé (ligne rouge) en utilisant l'approche avec fenêtres glissantes	108
4.8	Les erreurs d'estimation en utilisant l'approche avec fenêtres glissantes	109
A.1	Les ensembles de fonctions Lipschitz, « one-sided Lipschitz » et quadratiquement bornées	115

Symboles et Notations

Ensembles

$\mathbb{R}$	Ensemble des nombres réels
$\mathbb{R}^+$	Ensemble des nombres réels positifs
$\mathbb{C}$	Ensemble des nombres complexes
$\mathbb{N}$	Ensemble des entiers naturels
$\mathbb{N}^*$	Ensemble des entiers naturels non nuls
$\mathbb{R}^{n \times m}, \mathbb{C}^{n \times m}$	Ensemble des matrices réelles (resp. complexes) de dimension $n \times m$
$\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$	Espace réel (resp. complexe) euclidien de dimension n

Matrices, opérations et relations matricielles

I	Matrice identité de dimension appropriée
0	Matrice nulle de dimension appropriée
$I_n, I_{n \times M}$	Matrice identité de dimension $n \times n$ (resp. $n \times m$)
$M > 0$ ($M \geq 0$)	Matrice M symétrique définie (resp. semi-définie) positive
$M < 0$ ($M \leq 0$)	Matrice M symétrique définie (resp. semi-définie) négative
$\text{rang}(M)$	Rang de $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$
$\det(M)$	Déterminant de $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$
$\lambda_{\min}(M)$	La valeur propre minimale de M
$\lambda_{\max}(M)$	La valeur propre maximale de M
$\text{Re}(M)$	Partie réelle de M
$\text{Im}(M)$	Partie imaginaire de M
M^T, M^{-T}	Transposée de M (resp. de l'inverse de M) $\in \mathbb{R}^{n \times m}$
M^{-1}	Inverse de $M \in \mathbb{C}^{n \times n}, \det(M) \neq 0$
$\text{bloc-diag}(M_1, \dots, M_N)$	matrice bloc-diagonale constituée avec $M_1, \dots, M_N$ matrices
$\begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ (\star) & M_{22} \end{pmatrix}$	Matrice symétrique, le symbole $(\star)$ représente M_{12}^T

Normes

$\ \cdot \ $	Norme euclidienne d'un vecteur ou norme spectrale d'une matrice
$\ x \ _{l_2}$	Norme L_2 du signal $x \in L_2[0, \infty)$ ou $x \in l_2[0, \infty)$

Acronymes

LMI	<i>Linear Matrix Inequality</i> - Inégalité Matricielle Linéaire
BMI	<i>Bilinear Matrix Inequality</i> - Inégalité Matricielle Linéaire
LTV	<i>Linear Time Variant</i> - Linéaire à temps variant
LTI	<i>Linear Time Invariant</i> - Linéaire à temps invariant
FKE-FG	Filtre de Kalman Etendu à Fenêtre Glissante

Introduction Générale

« Une personne qui n’a jamais commis d’erreurs n’a jamais tenté d’innover. »

Albert Einstein

Le problème de la conception d’un observateur se pose naturellement sur une approche système, dès le besoin d’informations internes provenant de mesures externes directement disponibles. En général, on ne peut pas utiliser autant de capteurs que de signaux pour des raisons de coûts, de contraintes technologiques, etc. En effet, ces signaux peuvent être très nombreux et de différents types : ils sont généralement des signaux variant dans le temps caractérisant le système (variables d’état), des paramètres constants (paramètres de commande) et des signaux externes non mesurés (perturbations). Le besoin d’informations internes peut être motivé par différents objectifs : modélisation (identification), surveillance (détection de panne) ou pilotage (contrôle) du système. Tous ces objectifs sont effectivement requis conjointement pour maîtriser un système. Ceci fait du problème de reconstruction d’état (ou d’observateur) le cœur d’un problème de contrôle général. Le but de ce travail est de proposer de nouveaux outils pour la conception de l’observateur.

Au cours des dernières décennies, les observateurs ont été largement utilisés dans le contrôle du système et de nombreux autres domaines tels que les systèmes robotiques, les réseaux électriques, la communication sécurisée, etc. Les efforts récents sont axés sur la conception d’observateurs de systèmes non linéaires [Dey *et al.*, 2015, Liu *et al.*, 2016, Zemouche *et al.*, 2017, Benallouch *et al.*, 2018]. Il existe deux approches de base pour la conception d’observateur non linéaire : une basée sur une transformation non linéaire de coordonnées par laquelle la dynamique d’erreur admet une forme linéaire, ainsi la conception de l’observateur d’état est effectuée en utilisant des techniques linéaires [Krener et Respondek, 1985, Xia et Gao, 1989]. La deuxième approche est directement basée sur le modèle du système original [Arcak et Kokotovic, 2001a]. Cette dernière approche est également appelée la méthode de conception directe. Comme de nombreux systèmes réels sont des Lipschitz globaux en pratique, ou au moins localement Lipschitz, une attention particulière est portée à la conception d’observateurs pour les systèmes Lipschitz. Dans le travail de Thau [Thau, 1973], une condition suffisante assurant une stabilité asymptotique de la dynamique d’erreur d’estimation a été proposée. Rajamani [Rajamani, 1998] a déduit les conditions d’existence des observateurs pour les systèmes Lipschitz. Dans [Zhu et Z.Han, 2002], les auteurs ont montré que les conditions données dans [Rajamani, 1998] garantissaient aussi l’existence d’un observateur d’ordre réduit. Dans [Chen et Chen, 2007], une méthode de synthèse d’observateur robuste pour les systèmes non linéaires Lipschitz soumis à des perturbations a été développée. Les conditions de synthèse des observateurs pour les systèmes Lipschitz à temps discret ont été étudiées dans [Zemouche et Boutayeb, 2006].

Dans le même contexte, certains résultats ont été présentés, dans la littérature, en utilisant la fenêtre de mesures glissante avec le Filtre de Kalman Etendu (FKE-FG) et

ont prouvé la supériorité de cette approche par rapport au filtre classique. On peut citer les travaux de [Grandvallet *et al.*, 2009, Grandvallet *et al.*, 2010c, Grandvallet *et al.*, 2010b, Grandvallet *et al.*, 2010a, Grandvallet *et al.*, 2014] où les auteurs ont montré l'efficacité du FKE-FG pour l'estimation de l'attitude et des vitesses d'un projectile, et les travaux de [Thabet *et al.*, 2011, Thabet *et al.*, 2012a, Thabet *et al.*, 2012b, Thabet, 2012, Thabet *et al.*, 2015] où le FKE-FG est utilisé pour estimer l'état d'un réseau électrique. C'est dans ce cadre que s'inscrivent les travaux de cette thèse où une nouvelle méthode pour l'estimation de l'état des systèmes non linéaires à temps discret dans un contexte bruité est proposée. Inspirés par la synthèse d'observateurs pour les systèmes linéaires avec retards [Boutayeb, 2001, Sename, 2001], un nouveau type d'observateur $\mathcal{H}_\infty$ est proposé. L'idée consiste à ajouter une fenêtre de mesures glissante consécutives à la structure standard de l'observateur de Luenberger pour augmenter la quantité d'informations prise en compte lors de la synthèse du filtre, et donc accroître ses performances. En utilisant un nouveau vecteur de mesures retardées $(y(k), y(k-1), \dots, y(k-M+1))$, où M étant le nombre de mesures à considérer, le bassin d'attraction du filtre $\mathcal{H}_\infty$ devient plus large. Ainsi, un nouveau observateur de type $\mathcal{H}_\infty$ avec fenêtre glissante est construit. La nouvelle structure d'observateur proposé est par la suite utilisée pour synthétiser des nouvelles lois de commande. Deux types de systèmes non linéaires sont traités : Lipschitz et « one-sided Lipschitz ». D'ailleurs ceux sont les deux classes de systèmes non linéaires les plus répondues. Ce manuscrit est ainsi organisé en quatre chapitres.

Dans le **premier chapitre**, un état de l'art sur l'estimation d'état et la commande des systèmes linéaires et non linéaires à temps discret est présenté. Ce chapitre se subdivise en cinq volets. Il commence par présenter quelques généralités sur les systèmes à temps discret, plus particulièrement, les systèmes de dimension finie. Le deuxième volet s'intéresse à la présentation des définitions relatives à l'observabilité et la stabilité des systèmes. Ensuite, un rappel des différentes méthodes de conception d'observateur et de commande pour les systèmes linéaires et non linéaires est présenté. Enfin, un rappel sur les propriétés fondamentales des inégalités matricielles linéaires (LMIs) ainsi que leurs méthodes de résolutions sont proposées dans la dernière partie.

Le **deuxième chapitre** présente notre première contribution pour la synthèse des observateurs non linéaires des systèmes à temps discret sujet à des perturbations à énergie bornée. Une nouvelle méthode de conception d'observateur de type $\mathcal{H}_\infty$ est développée. Elle est basée sur l'ajout d'une fenêtre glissante à la structure classique d'un observateur. Des conditions de stabilité suffisantes et non restrictives sont obtenues. Ces conditions sont sous forme d'inégalité matricielle bilinéaire (BMI) transformée, à l'aide d'une approche appropriée, en un problème convexe. Les deux classes des systèmes Lipschitz et « one-sided Lipschitz » sont traitées. Une comparaison avec les observateurs sans fenêtre de mesures glissante a bien prouvé la supériorité de la nouvelle approche pour les deux classes de systèmes proposées. Des applications numériques illustrent l'efficacité de l'approche proposée.

Le **troisième chapitre** détaille notre deuxième contribution. Il présente une nouvelle méthodologie de commande basée-observateur de type $\mathcal{H}_\infty$ pour les classes de systèmes non linéaires : Lipschitz et « one-sided Lipschitz ». Il s'agit de trouver la commande permettant d'atteindre les objectifs souhaité. En utilisant une fonction de Lyapunov appropriée et certaines transformations algébriques judicieuses, des conditions suffisantes sous forme de LMI permettant de calculer simultanément les gains de l'observateur et du contrôleur sont obtenues. Une extension à la synthèse de lois de commande à base de fenêtres glissantes est présentée. Les

nouvelles contraintes obtenues sont moins restrictives que celles calculées en utilisant les formes standards de l'observateur et de la loi de commande. Des exemples numériques illustrent la validité et les performances de la méthodologie proposée.

Le **quatrième chapitre** s'intéresse à la conception de commande robuste basée-observateur de type $\mathcal{H}_\infty$ pour une classe de systèmes Lipschitz à temps discret, sujet à des perturbations à énergie bornée ainsi que des incertitudes de paramétriques. Les résultats obtenus dans le troisième chapitre sont étendus à la commande robuste. Des conditions suffisantes exprimées sous forme de LMI sont élaborées pour assurer la stabilité asymptotique du système en boucle fermée. Toutes les stratégies de commande développées le long de ce chapitre sont validées sur des exemples numériques.

Chapitre 1

Etat de l'art sur l'estimation et la commande des systèmes à temps discret

« Ne tenez pour certain que ce qui est démontré. »

Isaac Newton

Sommaire

1.1	Introduction	2
1.2	Généralités sur les systèmes à temps discret	2
1.2.1	Introduction	2
1.2.2	Systèmes dynamiques à temps discret	2
1.3	Observabilité des systèmes à temps discret	4
1.4	Stabilité des systèmes à temps discret	6
1.4.1	Notion de la stabilité	6
1.4.2	Stabilité au sens de Lyapunov	7
1.5	Observateur d'état des systèmes dynamiques à temps discret	8
1.5.1	Introduction	8
1.5.2	Observateurs des systèmes linéaires	8
1.5.3	Observateurs des systèmes non linéaires	11
1.5.4	Synthèse d'observateur pour les systèmes non linéaires : approches LMI	13
1.6	Commande des systèmes dynamiques à temps discret	17
1.6.1	Contrôlabilité	17
1.6.2	Commande rétroactive	18
1.7	Etude des inégalités matricielles linéaires	20
1.7.1	Propriétés fondamentales	20
1.7.2	Types de problèmes LMI	22
1.7.3	Résolution des LMIs	24
1.8	Conclusion	25

1.1 Introduction

L'objectif de ce chapitre est de faire un rappel de quelques concepts de base importants pour la compréhension du reste de ce mémoire. D'abord, une introduction aux systèmes à temps discret qui seront considérés dans cette étude ; ensuite, un rappel sur l'observabilité des systèmes linéaires et non linéaires. Il est utile de souligner que l'observabilité des systèmes non linéaires souvent dépend des signaux d'entrées mais aussi du choix des conditions initiales. Un état de l'art concernant les techniques de synthèse d'observateurs pour les systèmes linéaires et non linéaires à temps discret est présenté dans la troisième partie. Une importance majeure est accordée aux méthodes de synthèse d'observateur par approche LMI des systèmes à temps discret.

La quatrième partie de ce chapitre est dédiée aux définitions de la contrôlabilité et aux lois de commande pour les systèmes à temps discret. En fin, un rappel des propriétés fondamentales des LMIs ainsi qu'aux méthodes de résolutions est fourni, très utile pour la compréhension de la suite de ce travail.

1.2 Généralités sur les systèmes à temps discret

1.2.1 Introduction

Le comportement dynamique des systèmes physiques peut-être décrit par des équations différentielles non linéaire très souvent difficiles à résoudre de façon analytique. Afin de contourner ce problème, les chercheurs ont développés des outils numériques pouvant nous renseigner sur l'évolution temporelle de ces systèmes mais également prédire leurs comportements à un horizon donné. Ces outils numériques, devenus très sophistiqués et performants, consiste à transformer les modèles mathématiques en des équations à temps discret afin de les simuler sur ordinateur. Malgré une littérature abondante sur l'analyse et la synthèse des systèmes dynamiques à temps continu, peu de résultats concernent les systèmes à temps discret. Dans cette étude, nous nous intéressons à la conception d'observateurs et de contrôleurs pour une classe de systèmes non linéaires à temps discret. La principale motivation concerne non seulement le développement d'outils performants et moins restrictifs par l'utilisation d'une fenêtre glissante de mesures mais également une classe de systèmes non traitée par les approches temps continu.

Cette partie s'intéresse aux descriptions mathématiques des systèmes qui nous intéressent, à savoir les systèmes linéaires et non linéaires à temps discret. Les origines des systèmes linéaires sont souvent des systèmes non linéaires puisque de tels systèmes sont habituellement le résultat d'un processus de linéarisation de systèmes non linéaires, ou le résultat du processus de modélisation de systèmes dans lesquels les effets non linéaires ont été supprimés ou négligés.

1.2.2 Systèmes dynamiques à temps discret

Soit le système dynamique à temps discret suivant :

$$\begin{cases} x(k+1) &= f(k, x(k), u(k)) \\ y(k) &= h(k, x(k), u(k)) \end{cases} \quad (1.1)$$

où $x(k) \in \mathbb{R}^n$, $u(k) \in \mathbb{R}^m$ et $y(k) \in \mathbb{R}^p$ sont respectivement les vecteurs d'état, d'entrée et de sortie. $f : \mathbb{N} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $h : \mathbb{N} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$. Pour un k_0 donné, et pour une entrée $u(k)$, $k = k_0, k_0 + 1, \dots$, l'équation (1.1) admet une unique solution $x(k)$ pour tout

$k = k_0, k_0 + 1, \dots$. Sous ces conditions, $y(k)$ est unique pour $k = k_0, k_0 + 1, \dots$.

Le système (1.1) est dit linéaire si $f(k, x(k), u(k))$ et $h(k, x(k), u(k))$ sont deux fonctions linéaires. A partir de cet ensemble d'équations, un système LTV peut être déduit. Sa structure est la suivante :

$$\begin{cases} x(k+1) &= A(k)x(k) + B(k)u(k) \\ y(k) &= C(k)x(k) + D(k)u(k) \end{cases} \quad (1.2)$$

avec $A(k) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B(k) \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C(k) \in \mathbb{R}^{p \times n}$ et $D(k) \in \mathbb{R}^{p \times m}$.

Dans le cas où les matrices $A(k)$, $B(k)$, $C(k)$ et $D(k)$ sont constantes, on est en présence d'un système linéaire invariant. Ce système est décrit par

$$\begin{cases} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) &= Cx(k) + Du(k) \end{cases} \quad (1.3)$$

Linéarisation

La linéarisation d'un processus réside dans le remplacement de son modèle non linéaire par sa contrepartie linéaire dans une région définie et autour d'un point d'équilibre.

Soit le système non linéaire suivant :

$$x(k+1) = f(x(k), u(k)) \quad (1.4)$$

où $f(\cdot)$ est une fonction continue différentiable. Le point d'équilibre (x_e, u_e) pour le système (1.4) est défini par :

$$f(x_e, u_e) = x_e \quad (1.5)$$

Le système (1.4) peut s'écrire sous la forme générale de la manière suivante :

$$x_i(k+1) = f_i(x_1(k), \dots, x_n(k), u_1(k), \dots, u_m(k)), \quad i = 1, \dots, n \quad (1.6)$$

Soit $u_e = (u_{1e} \ u_{2e} \ \dots \ u_{me})$ une entrée constante qui oblige le système à atteindre un état d'équilibre constant $x_e = (x_{1e} \ x_{2e} \ \dots \ x_{ne})$ telle que $f(x_e, u_e) = 0$ soit vérifiée.

L'état d'équilibre est maintenant perturbé et les nouveaux vecteurs d'état et d'entrée sont définis comme suit :

$$x = x_e + \Delta x \quad (1.7)$$

$$u = u_e + \Delta u \quad (1.8)$$

Le développement de Taylor donne

$$\Delta x(k+1) = f(x_e(k) + \Delta x(k), u_e(k) + \Delta u(k)) = f(x_e, u_e) + \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x(k) + \frac{\partial f}{\partial u} \Delta u(k) + \dots \quad (1.9)$$

avec

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(x_e, u_e)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix} \quad (1.10)$$

et

$$\left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{(x_e, u_e)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial u_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial u_m} \end{pmatrix} \quad (1.11)$$

sont les matrices Jacobiennes de f , évaluées au point d'équilibre (x_e, u_e) .

Soit $A = \frac{\partial f}{\partial x}(x_e, u_e)$ et $B = \frac{\partial f}{\partial u}(x_e, u_e)$. Comme $f(x_e, u_e) = 0$, et en négligeant les termes de haut degrés, une approximation linéaire est obtenue sous la forme suivante :

$$\Delta x(k+1) = A\Delta x(k) + B\Delta u(k) \quad (1.12)$$

De la même manière, si les sorties du système sont de la forme

$$y_i(k) = h_i(x_1(k), \dots, x_n(k), u_1(k), \dots, u_m(k)), \quad i = 1, \dots, p \quad (1.13)$$

ou sous forme vectorielle

$$y(k) = h(x(k), u(k)) \quad (1.14)$$

alors, le développement en série de Taylor peut être réutilisé pour avoir une approximation linéaire des équations de sortie. Si,

$$y = y_e + \Delta y \quad (1.15)$$

alors, une approximation linéaire de l'équation de sortie est de la structure suivante :

$$\Delta y(k) = C\Delta x(k) + D\Delta u(k) \quad (1.16)$$

avec

$$C = \left. \frac{\partial h}{\partial x} \right|_{(x_e, u_e)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial h_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial h_p}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial h_p}{\partial x_n} \end{pmatrix} \quad (1.17)$$

et

$$D = \left. \frac{\partial h}{\partial u} \right|_{(x_e, u_e)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial h_1}{\partial u_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial h_p}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial h_p}{\partial u_m} \end{pmatrix} \quad (1.18)$$

L'ensemble des équations (1.12) et (1.16) sont les équations du modèle linéarisé autour de x_e .

1.3 Observabilité des systèmes à temps discret

Dans ce paragraphe, nous introduisons quelques définitions de l'observabilité d'une classe de systèmes non linéaires à temps discret.

Soit le système non linéaire décrit par :

$$\begin{cases} x(k+1) &= f(x(k), u(k)) \\ y(k) &= h(x(k)) \end{cases} \quad (1.19)$$

avec $x(k) \in \mathbb{R}^n$, $u(k) \in \mathbb{R}^m$ et $y(k) \in \mathbb{R}^p$. Pour chaque entrée $u(k)$ constante, $f(x(k), u(k))$ est un champ de vecteur $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^n$, et l'ensemble $h(x(k))$, $k = 1, \dots, p$ sont des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}$. La suite d'entrée admissibles est exprimée comme suit

$$u_l = \{u(k); 0 \leq k < p, u(k) \in U\} \quad (1.20)$$

La solution à l'instant $k \geq 0$ du système (1.19) soumis à la commande u_l et partant de la condition initiale $x(0) = x_0$ à l'instant $k = 0$ est désignée par $x_l^*(k, 0, x_0)$.

Définition 1.3.1 ([Nijmeijer, 1982]). *Soit deux états distincts x_0 et $\bar{x}_0$. Ces deux états sont discernables, si $\forall k \in \mathbb{N}$ et pour toute suite d'entrées admissibles u_l , les trajectoires $h(x_l^*(k, 0, x_0))$ et $h(x_l^*(k, 0, \bar{x}_0))$ sont différentes sur un même domaine de définition. u_l distingue donc les points x_0 et $\bar{x}_0$. Le système (1.19) est dit observable en $x_0 \in \mathbb{R}^n$, si l'ensemble des états indiscernables de x_0 ne contient que x_0 .* $\square$

Cette définition nécessite un test infini sur les états. Pour cette raison, le concept de N-observabilité est défini dans [Nijmeijer, 1982].

Définition 1.3.2 (N-observabilité forte [Nijmeijer, 1982]).

- Le système (1.19) est dit *N-fortement observable* en $x_0 \in \mathbb{R}^n$ si, pour tout $k = 0, \dots, N$ et toute suite d'entrées admissibles U_l , $h(x_l^*(k, 0, x_0)) = h(x_l^*(k, 0, \bar{x}_0))$ implique $x_0 = \bar{x}_0$, $\bar{x}_0 \in \mathbb{R}^n$. Dans ce cas, u_l est une entrée universelle pour le système (1.19) sur $[0, p[$.
- Le système (1.19) est dit *N-localement fortement observable* en $x_0 \in \mathbb{R}^n$ s'il existe un voisinage $\mathcal{V}_{x_0}$ de x_0 tel que pour $k = 0, \dots, N$, tout $\bar{x}_0 \in \mathcal{V}_{x_0}$ et toute suite admissible u_l , $h(x_l^*(k, 0, x_0)) = h(x_l^*(k, 0, \bar{x}_0))$ implique $x_0 = \bar{x}_0$.
- Le système (1.19) est dit *N-localement N-fortement observable* si les deux propriétés précédentes sont vraies pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

$\square$

Définition 1.3.3 (Observabilité uniforme [Albertini et Alessandro, 1996]). *Le système (1.19) est dit N-uniformément observable en $x_0 \in \mathbb{R}^n$ si, pour tout $k = 0, \dots, N$, pour tout $\bar{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ et toute suite d'entrées admissibles u_l , il existe un entier $N \in [n - 1, \infty[$ et une fonction $\alpha : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ continue et croissante tels que*

$$\sum_{k=0}^N \|h(x_l^*(k, 0, x_0)) - h(x_l^*(k, 0, \bar{x}_0))\| \geq \alpha \geq (\|x_0 - \bar{x}_0\|) \quad (1.21)$$

avec $\alpha(0) = 0$.

$\square$

L'observabilité au sens du rang du système non linéaire est définie comme suit :

Définition 1.3.4 ([Nijmeijer, 1982]). *Le système (1.19) est dit observable au sens du rang en $x_0 \in \mathbb{R}^n$ si*

$$\dim d\mathcal{O}(h)(x_0) = n \quad (1.22)$$

L'espace d'observation $\mathcal{O}(h)(x(k))$ est défini par

$$\mathcal{O}(h)(x(k)) = \text{span} \{h_i x(k), h_i \circ f_{u_{1k}}, \dots, h_i \circ f_{u_{1k}} \circ \dots \circ f_{u_{ik}} \mid 1 \leq i \leq p, u_{1k}, \dots, u_{ik} \in \mathbb{R}^m, x(k) \in \mathbb{R}^n\} \quad (1.23)$$

avec

$$d\mathcal{O}(h)(x_0) = \{d\Phi(x_0), \Phi \in \mathcal{O}(h)\} \quad (1.24)$$

- Le système (1.19) est observable au sens du rang s'il l'est pour tout $x(k) \in \mathbb{R}^n$;
- Le système (1.19) est localement fortement observable en $x_0 \in \mathcal{V}_{x_0}$ s'il est observable au sens du rang en $x(k) \in \mathbb{R}^n$;
- Si le système (1.19) est localement fortement observable, alors la condition du rang est vérifiée sur un ouvert $\Omega \in \mathbb{R}^n$.

□

1.4 Stabilité des systèmes à temps discret

1.4.1 Notion de la stabilité

Soit un système non linéaire à temps discret décrit par les équations suivantes :

$$\begin{cases} x(k+1) &= f(x(k), k) \\ x(k_0) &= x_0 \end{cases} \quad (1.25)$$

avec $x(k) \in \mathbb{R}^n$ et $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^n$. Soit $x(k, k_0, x_0)$ la solution de (1.25) à $k \geq k_0$ initialisée en x_0 à k_0 .

Les définitions de la stabilité, la stabilité uniforme, l'attractivité et la stabilité asymptotique sont les mêmes dans le cas temps continu et temps discret [Khalil, 2002]. Seule la définition de la stabilité exponentielle change.

Définition 1.4.1 (Stabilité). Si $\forall \varepsilon > 0$ et $\forall k_0 \geq 0$, il existe un scalaire $\alpha(\varepsilon, k_0) \geq 0$ tel que

$$\|x_0\| < \alpha(\varepsilon, k_0) \Rightarrow \|x(k, k_0, x_0)\| < \varepsilon, \quad \forall k \geq k_0,$$

alors l'origine est un point d'équilibre stable au sens de Lyapunov pour (1.25). Si non, l'origine est instable. □

Définition 1.4.2 (Stabilité uniforme). Si $\forall \varepsilon > 0$, il existe un scalaire $\alpha(\varepsilon) \geq 0$ tel que

$$\|x_0\| < \alpha(\varepsilon) \Rightarrow \|x(k, k_0, x_0)\| < \varepsilon, \quad \forall k \geq k_0,$$

alors l'origine est un point d'équilibre uniformément stable pour (1.25). □

Définition 1.4.3 (Attractivité). Si $\forall \varepsilon > 0$, il existe un scalaire $\alpha(\varepsilon) \geq 0$ tel que

$$\|x_0\| < \alpha(\varepsilon) \Rightarrow \lim_{k \rightarrow +\infty} x(k, k_0, x_0) = 0, \quad \forall k \geq k_0,$$

alors l'origine est un point d'équilibre attractif pour (1.25).

L'origine est un point d'équilibre globalement attractif si $\alpha(k_0) = +\infty$. □

Définition 1.4.4 (Stabilité exponentielle). S'il existe deux constantes $\beta > 0$ et $0 < \gamma < 1$ telles que

$$\|x(k, k_0, x_0)\| \leq \beta \|x_0\| \gamma^{(k-k_0)}, \quad \forall k \geq k_0 \geq 0, \quad \forall x_0 \in \mathcal{B}_r,$$

alors l'origine est un point d'équilibre localement exponentiellement stable pour (1.25).

L'origine est dite globalement exponentiellement stable si $\mathcal{B}_r = \mathbb{R}^n$. □

1.4.2 Stabilité au sens de Lyapunov

1.4.2.1 Méthode indirecte

Soit le système non linéaire suivant :

$$x(k+1) = f(x(k)) \quad (1.26)$$

En développant en série de Taylor autour d'un point d'équilibre x_e , et en négligeant les termes de haut degrés, le système non linéaire (1.26) est approximé par le modèle linéaire suivant :

$$\Delta x(k+1) = A\Delta x(k) \quad (1.27)$$

avec

$$A = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x_e} \quad (1.28)$$

$$\Delta x = x - x_e \quad (1.29)$$

Le système non linéaire (1.26) est asymptotiquement stable autour de x_e si et seulement si le système (1.27) est asymptotiquement stable, c'est à dire toutes les valeurs propres de A sont à l'intérieur du cercle unité.

Cette méthode est populaire vu la simplicité de son application. Cependant, si les valeurs propres de A ne sont pas toutes à l'intérieur du cercle unité, on ne peut pas conclure sur la stabilité, ce qui présente un désavantage. En effet, l'équilibre peut être stable ou instable. De plus, cette méthode est appliquée aux situations où les conditions initiales sont proches de l'équilibre. Mais elle ne fournit aucune indication quant à la proximité du point d'équilibre, ce qui peut être important dans des applications pratiques.

1.4.2.2 Méthode directe

Cette méthode dite méthode directe est une généralisation du concept de Lagrange de la stabilité de l'énergie potentielle minimale.

Soit le système non linéaire (1.26). On suppose que l'origine est un point d'équilibre du système et qu'il existe une fonction appelée fonction de Lyapunov, notée $V(x)$. Si cette fonction satisfait les propriétés suivantes :

- $V(0) = 0$;
- $V(x) > 0$ pour $x \neq 0$;
- $\Delta V(x) = V(k+1) - V(k) < 0$ tout au long de la trajectoire de (1.26) ;

alors l'origine est asymptotiquement stable.

Cette méthode dépend de l'existence d'une fonction de Lyapunov, qui est une fonction semblable à l'énergie, nulle à l'équilibre, définie positive partout ailleurs, et décroissante lorsque la trajectoire du système s'approche de l'équilibre. Cette méthode présente plusieurs avantages puisqu'elle :

- répond aux questions de stabilité des systèmes non linéaires ;
- détermine la stabilité asymptotique ainsi que la stabilité normale ;
- détermine la région de stabilité asymptotique ou le domaine d'attraction autour d'un point d'équilibre.

L'inconvénient majeur de cette méthode est qu'il n'y a pas une manière systématique d'obtenir des fonctions de Lyapunov.

Remarque 1.4.1. Soit le système linéaire à temps discret suivant :

$$\begin{cases} x(k+1) &= Ax(k) \\ y(k) &= Cx(k) \end{cases} \quad (1.30)$$

Soit la fonction de Lyapunov

$$V(k) = x^T(k)Px(k) \quad (1.31)$$

avec $P = P^T > 0$. Alors,

$$\Delta V(k) = V(k+1) - V(k) = x^T(k)(A^T P A - P)x(k) \quad (1.32)$$

Dans ce cas, le système (1.30) est asymptotiquement stable au sens de Lyapunov si, et seulement si, il existe une matrice $P > 0$ telle que

$$\Delta V(k) < 0 \Leftrightarrow A^T P A - P < 0 \quad (1.33)$$

□

1.5 Observateur d'état des systèmes dynamiques à temps discret

1.5.1 Introduction

Un observateur d'état est un système dynamique auxiliaire construit à partir du modèle, des entrées et des sorties afin de produire une estimation du vecteur d'état tout en garantissant une convergence asymptotique ou exponentielle.

Dans le cas déterministe, l'observateur de Luenberger et ses extensions ont été utilisés pour les systèmes LTI et une classe de systèmes non linéaires. Lorsque les paramètres du système sont inconnus et varient dans le temps, un observateur adaptatif est utilisé. Ce dernier, en plus d'estimer les états du système, est également utilisé pour estimer les paramètres. Dans le cas stochastique, on utilise le filtre de Kalman.

1.5.2 Observateurs des systèmes linéaires

Il est naturel que les difficultés de synthèse des observateurs pour les systèmes non linéaires n'apparaissent pas dans le cas des systèmes linéaires. Néanmoins, ils constituent une étape importante à partir de laquelle des extensions seront réalisées.

1.5.2.1 Observateur de Luenberger

Soit le système à temps discret suivant :

$$\begin{cases} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) &= Cx(k) \\ x(0) &= x_0 \end{cases} \quad (1.34)$$

où $x(k) \in \mathbb{R}^n$, $u(k) \in \mathbb{R}^m$ et $y(k) \in \mathbb{R}^p$ représentent, respectivement, le vecteur d'état, le vecteur d'entrée et le vecteur de sortie. $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ et $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ sont des matrices constantes.

L'observateur de Luenberger se base sur les techniques de placements de pôles. Il s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \hat{x}(k+1) &= A\hat{x}(k) + Bu(k) + L(y(k) - \hat{y}(k)) \\ \hat{y}(k) &= C\hat{x}(k) \end{cases} \quad (1.35)$$

où $\hat{x}(k)$ est l'état estimé de $x(k)$ et L est un gain assurant

$$\forall x_0 \text{ et } \hat{x}_0, \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} (x(k) - \hat{x}(k)) = 0 \quad (1.36)$$

L'erreur d'estimation entre l'état réel $x(k)$ et l'état estimé $\hat{x}(k)$ est exprimée par :

$$e(k) = x(k) - \hat{x}(k) \quad (1.37)$$

En partant de (1.37), la dynamique de l'erreur d'estimation est calculée :

$$e(k+1) = (A - LC)e(k) \quad (1.38)$$

Pour assurer la stabilité de l'erreur d'estimation, il suffit de trouver un gain L tel que la matrice $(A - LC)$ soit Schur stable, c'est à dire toutes ses valeurs propres sont à l'intérieur du cercle unité. La détectabilité du couple (A, C) est une condition nécessaire et suffisante de l'existence du gain L .

1.5.2.2 Filtre de Kalman

Dans cette section, l'un des principaux résultats de la théorie de l'estimation au cours des soixante dernières années sera présenté de façon succincte : Il s'agit du filtre de Kalman établi pour la première fois en 1960 [Kalman, 1960] pour les systèmes linéaires stochastiques à temps discret. Ensuite, en 1961, Kalman et Bucy [Kalman et Bucy, 1961] ont publié un théorème analogue pour les systèmes continus.

Le filtre de Kalman est basé sur une approche d'optimisation qui consiste à minimiser l'erreur quadratique de l'erreur d'estimation de la façon décrite ci-dessous.

Hypothèse du travail : Soit le système LTV :

$$\begin{cases} x_{k+1} &= A_k x_k + B_k u_k + w_{1,k} \\ y_k &= C_k x_k + w_{2,k} \end{cases} \quad (1.39)$$

où $w_{1,k}$ et $w_{2,k}$ sont des bruits gaussiens à moyenne nulle. $E[w_{1,k}] = E[w_{2,k}] = 0$ et $E[w_{1,k}w_{2,j}] = 0 \quad \forall k, \quad \forall j$.

Le filtre de Kalman associé au système (1.39) s'écrit de la manière suivante :

$$\hat{x}_{k+1} = \hat{x}_{k+1/k} + K_{k+1} (y_{k+1} - C_{k+1} \hat{x}_{k+1/k}) \quad (1.40a)$$

$$\hat{x}_{k+1/k} = A_k \hat{x}_k + B_k u_k \quad (1.40b)$$

$$P_{k+1} = \left(P_{k+1/k}^{-1} + C_{k+1}^T R_{k+1}^{-1} C_{k+1} \right)^{-1} \quad (1.40c)$$

$$P_{k+1/k} = A_k P_k A_k^T + Q_k \quad (1.40d)$$

$$K_{k+1} = P_{k+1/k} C_{k+1}^T (C_{k+1} P_{k+1/k} C_{k+1}^T + R_{k+1})^{-1} \quad (1.40e)$$

avec $P_0 > 0$.

$\hat{x}_{k+1}$ est l'estimation de x_{k+1} . $\hat{x}_{k+1/k}$ est la prédiction de x_{k+1} . $P_{k+1/k}$ et P_{k+1} sont, respectivement, les matrices de variance - covariance de l'erreur de prédiction et de l'erreur d'estimation. Q_k et R_{k+1} sont des matrices de covariance des bruits :

$$Q_k = E[w_{1,k}w_{1,k}^T]$$

$$R_{k+1} = E[w_{2,k+1}w_{2,k+1}^T]$$

1.5.2.3 Observateur par intervalle

Dans le contexte des observateurs par intervalles [Raissi *et al.*, 2012, Combastel, 2013, Mazenc *et al.*, 2013], le but est de déterminer deux trajectoires $\underline{x}(k)$ et $\bar{x}(k)$ telles que, à partir de certaines conditions initiales, l'état réel du système [Mazenc *et al.*, 2012, Efimov *et al.*, 2013] est borné de la façon suivante :

$$\underline{x}(k) \leq x(k) \leq \bar{x}(k), \quad \forall k \geq k_0 \quad (1.41)$$

Considérons le système linéaire à temps discret suivant :

$$\begin{cases} x(k+1) &= Ax(k) + w(k) \\ y(k) &= Cx(k) + v(k) \end{cases} ; \quad x(0) \in [\underline{x}_0, \bar{x}_0] \quad (1.42)$$

avec $\underline{w}(k) \leq w(k) \leq \bar{w}(k)$, $-V \leq v(k) \leq V$ sont les perturbations et les bruits, respectivement. La paire (A, C) est supposée être détectable.

La structure de l'observateur par intervalle pour un système linéaire à temps discret est reformulée comme suit :

$$\begin{cases} \bar{x}(k+1) = A\bar{x}(k) + |L|V + \bar{w}(k) + L(y(k) - C\bar{x}(k)) \\ \underline{x}(k+1) = A\underline{x}(k) - |L|V + \underline{w}(k) + L(y(k) - C\underline{x}(k)) \end{cases} \quad (1.43)$$

Les dynamiques des erreurs d'estimations $\bar{\varepsilon}(k)$ et $\underline{\varepsilon}(k)$ sont les suivantes :

$$\begin{cases} \bar{\varepsilon}(k+1) = (A - LC)\bar{\varepsilon}(k) + (|L|V + Lv(k)) + (\bar{w}(k) - w(k)) \\ \underline{\varepsilon}(k+1) = (A - LC)\underline{\varepsilon}(k) + (|L|V - Lv(k)) + (\bar{w}(k) - w(k)) \end{cases} \quad (1.44)$$

avec

$$\begin{cases} L^+ = \max(0, L) \\ L^- = L^+ - L \\ |L| = L^+ + L^- \end{cases} \quad (1.45)$$

- La relation $\underline{x}(k) \leq x(k) \leq \bar{x}(k)$ est assurée en se basant sur les suppositions $\underline{w}(k) \leq w(k) \leq \bar{w}(k)$, $-V \leq v(k) \leq V$ et par la construction de la matrice $(A - LC)$ non-négative.
- La stabilité est assurée si la matrice $(A - LC)$ soit Schur stable.

Lemme 1.5.1. Une matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est dite non-négative si tous ses éléments sont non-négatifs. $\square$

Lemme 1.5.2. Une matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est dite Schur stable si tous ses valeurs propres sont à l'intérieur du cercle unité. $\square$

Remarque 1.5.1. Il n'est pas toujours possible de trouver un gain L permettant à $(A - LC)$ d'être non-négative et Schur stable à la fois. Pour résoudre ce problème, un changement de coordonnées de la forme $z = Px$ est proposé, avec P est une matrice de transformation non singulière. $\square$

1.5.3 Observateurs des systèmes non linéaires

1.5.3.1 Observateur de Luenberger étendu

L'observateur de Luenberger étendu généralise le cas linéaire. Il est basé sur une linéarisation du modèle non linéaire au tour de chaque estimation de l'état.

Soit le système non linéaire suivant :

$$\begin{cases} x(k+1) &= f(x(k), u(k)) \\ y(k) &= h(x(k), u(k)) \end{cases} \quad (1.46)$$

où $x(k) \in \mathbb{R}^n$, $u(k) \in \mathbb{R}^m$ et $y(k) \in \mathbb{R}^p$ représentent, respectivement, le vecteur d'état, le vecteur d'entrée et le vecteur de sortie. $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, $h : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$ sont deux fonctions non linéaires.

L'observateur de Luenberger étendu est décrit par les équations suivantes :

$$\begin{cases} \hat{x}(k+1) &= f(\hat{x}(k), u(k)) + L(\hat{x}(k), u(k))(y(k) - \hat{y}(k)) \\ \hat{y}(k) &= h(\hat{x}(k), u(k)) \end{cases} \quad (1.47)$$

où $L(\hat{x}(k), u(k))$ est le gain d'observateur.

1.5.3.2 Filtre de Kalman Étendu (FKE)

De façon générale, le filtre de Kalman étendu est utilisé pour estimer l'état des systèmes dynamiques non linéaires. Il est basé sur la linéarisation au premier ordre des fonctions $f(\cdot)$ et $h(\cdot)$ autour de l'estimation à l'instant k . Les équations du filtre de Kalman classique sont ensuite appliquées [Boutayeb *et al.*, 1997, Boutayeb et Aubry, 1999, Brookner, 1998, Song et Grizzle, 1992]. Peu de preuves de la stabilité de ce type de filtre sont développées. Cependant, une preuve de convergence locale a été établie par Boutayeb et al. [Boutayeb *et al.*, 1997, Boutayeb et Aubry, 1999] pour le cas déterministe des systèmes à temps discret.

Considérons le système dynamique suivant :

$$\begin{cases} x_{k+1} &= f(x_k, u_k) + w_{1,k} \\ y_k &= h(x_k, u_k) + w_{2,k} \end{cases} \quad (1.48)$$

où les variables $w_{1,k}$ et $w_{2,k}$ sont des bruits gaussiens à moyenne nulle, avec $E[w_{1,k}] = E[w_{2,k}] = 0$ et $E[w_{1,k}w_{2,j}] = 0 \ \forall k, \ \forall j$.

Le filtre de Kalman étendu associé au système (1.48) est donné par :

$$\hat{x}_{k+1} = \hat{x}_{k+1/k} + K_{k+1} (y_{k+1} - h(\hat{x}_{k+1/k}, u_{k+1})) \quad (1.49a)$$

$$\hat{x}_{k+1/k} = f(\hat{x}_k, u_k) \quad (1.49b)$$

$$P_{k+1} = (I_n - K_{k+1}H_{k+1}) P_{k+1/k} \quad (1.49c)$$

$$P_{k+1/k} = F_k P_k F_k^T + Q_k \quad (1.49d)$$

$$K_{k+1} = P_{k+1/k} H_{k+1}^T (H_{k+1} P_{k+1/k} H_{k+1}^T + R_{k+1})^{-1} \quad (1.49e)$$

avec

$$F_k = F(\hat{x}_k, u_k) = \frac{\partial f}{\partial x}(\hat{x}_k, u_k)$$

$$H_k = H(\hat{x}_k, u_k) = \frac{\partial h}{\partial x}(\hat{x}_k, u_k)$$

et $P_0 > 0$.

Q_k et R_{k+1} sont des matrices de covariance de $w_{1,k}$ et $w_{2,k}$, avec

$$Q_k = E[w_{1,k}w_{1,k}^T]$$

$$R_{k+1} = E[w_{2,k+1}w_{2,k+1}^T]$$

1.5.3.3 Observateur à grand gain

L'observateur à grand gain, pour une classe de systèmes non linéaires déterministes, consiste à transformer le système originel en un système linéaire grâce à un changement de coordonnées approprié. Un système équivalent est ainsi obtenu pour lequel on peut construire un observateur linéaire. [Farza et M'Saad, 2003]. Le principe de cette transformation est rappelé ci-dessous.

Soit la classe des systèmes non linéaires s'écrivant sous la forme :

$$\begin{cases} x(k+1) &= f(x(k)) + g(x(k))u(k) \\ y(k) &= h(x(k)) \end{cases} \quad (1.50)$$

où $x(k) \in \mathbb{R}^n$, $u(k) \in \mathbb{R}^m$ et $y(k) \in \mathbb{R}^p$ désignent, respectivement, l'état, l'entrée et la sortie. $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ et $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ sont des fonctions non linéaires.

Soit le difféomorphisme ϕ tel que

$$\phi = \begin{pmatrix} h(x(k)) \\ L_f h(x(k)) \\ \vdots \\ L_f^{n-1} h(x(k)) \end{pmatrix} \quad (1.51)$$

En utilisant le difféomorphisme ϕ , le système (1.50) peut s'écrire comme suit :

$$\begin{cases} x(k+1) &= \begin{pmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ \vdots \\ x_{n-1}(k+1) \\ x_n(k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2(k) \\ x_3(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \\ \psi(x(k)) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g_1(x_1(k)) \\ g_2(x_1(k), x_2(k)) \\ \vdots \\ g_{n-1}(x_1(k), \dots, x_{n-1}(k)) \\ g_n(x_1(k), \dots, x_n(k)) \end{pmatrix} u(k) \\ &= F(x(k)) + G(x(k))u(k) \\ y(k) &= Cx(k) = x_1(k) \end{cases} \quad (1.52)$$

- $g_i(\bar{x}_i)$ est globalement Lipschitz, avec $\bar{x}_i = (x_1 \dots x_i)^T$;
- ψ est une fonction globalement Lipschitz et de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Si le système (1.50) est uniformément observable, alors l'observateur à grand gain s'écrit comme suit :

$$\hat{x}(k+1) = f(\hat{x}(k)) + g(\hat{x}(k))u(k) - S_\infty^{-1}C^T(C\hat{x}(k) - y(k)) \quad (1.53)$$

S_∞ est la solution de l'équation suivante :

$$-\omega S_\infty - A^T S_\infty - S_\infty A + C^T C = 0 \quad (1.54)$$

avec

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

La variable ω est choisie suffisamment grande pour régler la vitesse de convergence et elle vérifie l'inégalité suivante :

$$\|\hat{x}(k) - x(k)\| \leq K(\omega) e^{(-\frac{\omega}{3}k)} \|\hat{x}(0) - x(0)\| \quad (1.55)$$

avec $K(\omega) \geq 0$.

En augmentant ω , l'observateur à grand gain donne une réponse exponentielle plus rapide. Contrairement au filtre de Kalman étendu, ces observateurs sont des observateurs globaux à convergence exponentielle. En revanche, ils ne s'appliquent qu'à une classe restreinte de systèmes non linéaires. Aussi, malgré la popularité de l'observateur à grand gain, le choix du gain reste difficile. En effet en augmentant le gain pour gagner en rapidité, l'observateur devient de plus en plus sensible aux bruits de mesures.

1.5.4 Synthèse d'observateur pour les systèmes non linéaires : approches LMI

L'observateur de Thau [Thau, 1973], généralement connu sous le nom *observateur de Lipschitz* est utilisé pour les systèmes non linéaires dont l'étude de stabilité se fait suivant les méthodes semi linéaire. Le système concerné est composé d'une partie linéaire supposée observable et d'une partie non linéaire satisfaisant l'inégalité de Lipschitz [Raghavan et Hedrik, 1994, Rajamani, 1998, Hu, 2006].

Soit le système non linéaire décrit par les équations suivantes :

$$\begin{cases} x(k+1) &= Ax(k) + f(x(k)) \\ y(k) &= Cx(k) \end{cases} \quad (1.56)$$

où $x(k) \in \mathbb{R}^n$, $u(k) \in \mathbb{R}^m$ et $y(k) \in \mathbb{R}^p$ représentent, respectivement, le vecteur d'état, le vecteur d'entrée et le vecteur de sortie. $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ et $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ sont des matrices constantes et connues du système. La fonction f est une fonction non linéaire qui peut être de type Lipschitz, « one-sided Lipschitz » ou quadratique bornée. Les définitions de ces types de fonctions sont illustrées dans l'annexe A.

Ces différentes classes de fonctions non linéaires peuvent être représentées par les ensembles suivants :

$$\mathcal{S}_l = \{f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n : f \text{ est définie par A.1.2}\} \quad (1.57)$$

$$\mathcal{S}_{osl} = \{f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n : f \text{ est définie par A.2.1}\} \quad (1.58)$$

$$\mathcal{S}_{qb} = \{f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n : f \text{ est définie par A.3.1}\} \quad (1.59)$$

L'inclusion suivante est vérifiée :

$$\mathcal{S}_l \subset \mathcal{S}_{osl} \cap \mathcal{S}_{ql} \quad (1.60)$$

L'observateur de Luenberger a la forme suivante :

$$\begin{cases} \hat{x}(k+1) &= A\hat{x}(k) + f(\hat{x}(k)) + L(y(k) - \hat{y}(k)) \\ \hat{y}(k) &= C\hat{x}(k) \end{cases} \quad (1.61)$$

où $\hat{x}(k)$ représente l'estimé de l'état $x(k)$.

L'erreur d'estimation est définie par $e(k) = x(k) - \hat{x}(k)$. Alors la dynamique de l'erreur d'estimation est décrite par l'équation suivante :

$$e(k+1) = (A - LC)e(k) + \Delta f(k) \quad (1.62)$$

avec $\Delta f(k) = f(\hat{x}(k)) - f(x(k))$.

La littérature distingue l'étude de la synthèse de l'observateur selon le type de la fonction non linéaire.

1.5.4.1 Cas des systèmes Lipschitz

Trois cas se distinguent.

Cas 1. [Bara et al., 2005] $V(k) = e^T(k)Pe(k)$

En choisissant une fonction de Lyapunov de la forme $V(k) = e(k)^T Pe(k)$ et en utilisant la propriété de Lipschitz A.1.2 $\mu(\alpha^2 e^T(k)Pe(k) - \Delta f^T(k)\Delta f(k)) \geq 0$, l'étude de la stabilité du système (1.56) s'écrit sous la forme suivante :

Théorème 1.5.1. Soit $f \in \mathcal{S}_l$. La dynamique de l'erreur (1.62) converge asymptotiquement vers zéro s'il existe des matrices $P > 0$ et $R > 0$ de dimensions appropriées et un scalaire $\mu > 0$ tels que la LMI suivante est vérifiée :

$$\begin{pmatrix} -P + \mu\alpha^2 I_n & A^T P - C^T R & A^T P - C^T R \\ (\star) & P - \mu I & 0 \\ (\star) & (\star) & -P \end{pmatrix} < 0 \quad (1.63)$$

Le gain d'observateur est donné par $L = P^{-1}R^T$. □

Cas 2. [Bara et al., 2005] $V(k) = e^T(k)De(k) + \mu\Delta f^T(k)\Delta f(k)$

En choisissant une fonction de Lyapunov de la forme $V(k) = e^T(k)De(k) + \mu\Delta f^T(k)\Delta f(k)$ et en utilisant la propriété de Lipschitz A.1.2, avec

$$D = \frac{\epsilon}{1+\epsilon}P + \frac{\kappa}{1+\epsilon}Q \quad (1.64)$$

Le théorème suivant a été démontré dans [Zemouche et Boutayeb, 2006] :

Théorème 1.5.2. Soit $f \in \mathcal{S}_l$. La dynamique de l'erreur (1.62) converge asymptotiquement vers zéro s'il existe des matrices $P > 0$, $Q = Q^T > 0$ et R de dimensions appropriées et des scalaires $\epsilon, \mu \geq 0$, $\kappa \in \mathbb{R}$ tels que les inégalités matricielles suivantes sont vérifiées :

$$-P + \kappa Q + (1 + \epsilon)\mu\alpha^2 I \leq 0 \quad (1.65)$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{1+\epsilon}P - \frac{\kappa}{1+\epsilon}Q & A^T P - C^T R & A^T P - C^T R \\ (\star) & P - \mu I & 0 \\ (\star) & (\star) & -P \end{pmatrix} < 0 \quad (1.66)$$

Le gain d'observateur est donné par $L = P^{-1}R^T$. $\square$

Cas 3. [Zemouche et Boutayeb, 2006, Zhang et al., 2012c] $V(k) = e^T(k)Pe(k) + \Delta f^T(k)Q\Delta f(k)$

En choisissant une fonction de Lyapunov plus générale $V(k) = e^T(k)Pe(k) + \Delta f^T(k)Q\Delta f(k)$ et en utilisant la propriété de Lipschitz A.1.2, le résultat de l'étude de stabilité du système (1.56) est formulé par le théorème suivant :

Théorème 1.5.3. Soit $f \in \mathcal{S}_l$. La dynamique de l'erreur (1.62) converge asymptotiquement vers zéro s'il existe des matrices $P = P^T > 0$, $Q = Q^T$ et R de dimensions appropriées et des scalaires $\mu \geq 0$, $\kappa > 0$ tels que les LMIs suivantes sont vérifiées :

$$Q - \mu I \leq 0 \quad (1.67)$$

$$\begin{pmatrix} -P + \kappa\alpha^2 I_n & \eta(A^T P - C^T R) & \eta(A^T P - C^T R) \\ (\star) & \eta P - Q - \kappa I_n & 0 \\ (A^T P - C^T R)^T & 0 & -\eta P \end{pmatrix} < 0 \quad (1.68)$$

avec $\eta = 1 + \alpha^2$. $\square$

En partant de la même fonction de Lyapunov que celle du **cas 3**, une autre technique est proposée dans [Zemouche et Boutayeb, 2009]. Elle permet de chercher le scalaire μ en l'ajoutant comme une contrainte dans la LMI, contrairement au théorème précédent où le scalaire $\mu > 0$ est fixé a priori. Cette technique est illustrée par le théorème suivant :

Théorème 1.5.4. Soit $f \in \mathcal{S}_l$. La dynamique de l'erreur (1.62) converge asymptotiquement vers zéro s'il existe des matrices $P > \mu I_n$, $Q > 0$ et R de dimensions appropriées et des scalaires $\mu \geq 0$, $\kappa > 0$ tels que les LMIs suivantes sont vérifiées :

$$Q - \mu I \leq 0 \quad (1.69)$$

$$\begin{pmatrix} -P + \kappa\alpha^2 I_n & \eta(A^T P - C^T R) & \eta(A^T P - C^T R) \\ (\star) & \eta P - Q - \kappa I_n & 0 \\ (A^T P - C^T R)^T & 0 & -\eta P \end{pmatrix} < 0 \quad (1.70)$$

avec $\eta = 1 + \mu\alpha^2$. $\square$

Remarque 1.5.2. Pour la faisabilité des LMIs (1.63), (1.66), (1.5.3) et (1.70), il est nécessaire d'avoir $\alpha < 1$. Ceci présente une limitation pour les méthodes présentées. $\square$

Pour surmonter cette limitation, Zemouche et al. ont proposé la démarche suivante dans [Zemouche et Boutayeb, 2009] :

En réécrivant la fonction $f \in \mathcal{S}_l$ sous la forme suivante :

$$f(x) = \Pi_f \Psi \Gamma_f x \quad (1.71)$$

avec Ψ est α_Ψ Lipschitz, et en proposant la structure d'observateur suivante :

$$\hat{x}(k+1) = A\hat{x}(k) + \Psi(\Gamma_f \hat{x}(k) + K(y(k) - C\hat{x}(k)) + L(y(k) - C\hat{x}(k))) \quad (1.72)$$

et la fonction de Lyapunov :

$$V(k) = e^T(k)Pe(k) + \Delta \Psi^T(k)Q\Delta \Psi(k) \quad (1.73)$$

alors le résultat suivant est obtenu :

Théorème 1.5.5. *Soit $f \in \mathcal{S}_l$. La dynamique de l'erreur (1.62) converge asymptotiquement vers zéro s'il existe des matrices $P > 0$, $Q > 0$ et R de dimensions appropriées et des scalaires $\mu \geq 0$, $\kappa > 0$ tels que les LMIs suivantes sont vérifiées :*

$$Q - \mu I \leq 0 \quad (1.74)$$

$$\begin{pmatrix} -P & (\Gamma - KC)^T \\ (\star) & -\frac{1}{\mu}I_s \end{pmatrix} \leq 0 \quad (1.75)$$

$$\begin{pmatrix} -P & \eta(A^T P - C^T R)\Pi & \eta(A^T P - C^T R) & (\Gamma - KC)^T \\ (\star) & \eta\Pi^T P\Pi - Q - \kappa I_q & 0 & 0 \\ (\star) & (\star) & -\eta P & 0 \\ (\star) & (\star) & (\star) & -\frac{1}{\kappa\alpha_\Psi^2}I_s \end{pmatrix} < 0 \quad (1.76)$$

avec $\eta = 1 + \mu\alpha^2$. □

L'ajout du gain K a permis de réduire l'effet de la constante de Lipschitz et de rendre les conditions (1.74) et (1.76) faisables pour des non-linéarités $f \in \mathcal{S}_l$, avec $\alpha \geq 1$. Par contre, cette technique ne permet pas de résoudre les problèmes de $\alpha < 1$ pour tout $f \in \mathcal{S}_l$.

1.5.4.2 Cas des systèmes « one-sided Lipschitz »

La classe des systèmes « one-sided Lipschitz » est largement discutée dans le cas continu. Cependant, peu de résultats ont traité le cas discret. Dans [Zhang et al., 2012c], le résultat suivant a été démontré pour une classe de système de la forme de (1.56) telle que f est une fonction à la fois « one-sided Lipschitz » et quadratique bornée.

Théorème 1.5.6. *Soit $f \in \mathcal{S}_{osl} \cap \mathcal{S}_{qb}$. La dynamique de l'erreur (1.62) converge asymptotiquement vers zéro s'il existe des matrices $P > 0$ et R de dimensions appropriées et des scalaires $\epsilon_1 > 0$ et $\epsilon_2 > 0$ tels que la LMI suivante est vérifiée :*

$$\begin{pmatrix} -P + (\epsilon_1\rho + \epsilon_2\beta) & A^T P - C^T R + \frac{\gamma\epsilon_2 - \epsilon_1}{2}I_n & A^T P - C^T R \\ (\star) & P - \epsilon_2 I_n & 0 \\ (\star) & (\star) & -P \end{pmatrix} < 0 \quad (1.77)$$

Le gain d'observateur est donné par $L = P^{-1}R^T$. □

Etant donné $f \in \mathcal{S}_{osl} \cap \mathcal{S}_{qb}$ et le fait de choisir une fonction de Lyapunov $V(k) = e^T(k)Pe(k)$, la preuve du théorème précédent est immédiate.

1.6 Commande des systèmes dynamiques à temps discret

1.6.1 Contrôlabilité

Dans la littérature, il existe plusieurs définitions de la contrôlabilité en fonction de la classe des systèmes dynamiques étudiés [Klamka, 1991, Klamka, 1996, Klamka, 2002]. Un système continu ou discret est dit contrôlable, s'il existe une entrée qui peut conduire l'état d'un point a à un point b quelconque. Si cela est vrai pour toute condition initiale et à n'importe quel moment initial, le système est dit totalement contrôlable.

Considérons le système non linéaire discret décrit par l'équation vectorielle suivante :

$$x(k+1) = f(x(k), u(k)) \quad (1.78)$$

avec $k \in \mathbb{N}$. $x(k) \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état. $u(k) \in \mathbb{R}^m$ est le vecteur d'entrée. $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une fonction donnée. La condition initiale du vecteur non linéaire (1.78) est donnée par

$$x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n \quad (1.79)$$

Soit $U \subset \mathbb{R}^m$ un ensemble arbitraire donné. La suite d'entrée

$$u_l = \{u(k); 0 \leq k \leq l, u(k) \in U\} \quad (1.80)$$

est appelée la suite d'entrées admissibles. L'ensemble de tous les suites d'entrées admissibles de commande forment l'ensemble admissible de commande, noté U_l . Notons par $U^c \in \mathbb{R}^m$ le cône convexe fermé avec un sommet à zéro et $U^{c0} = U^c \cap \Omega^0$, avec Ω^0 est un voisinage de zéro.

Pour une condition initiale donnée (1.79), et pour une suite d'entrées arbitraires admissibles (1.80), il existe une solution unique de l'équation de récurrence non linéaire (1.78), qui peut être calculée par des itérations successives.

Pour étudier la contrôlabilité du système (1.78), le système à temps discret linéaire associé est décrit par l'équation suivante :

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \quad (1.81)$$

avec A et B sont deux matrices constantes de dimensions appropriées. Une matrice de transition A^k est définie pour le système linéaire discret (1.81). La solution $x(k)$ de (1.81), $\forall k > 0$, est donnée sous la forme compacte suivante :

$$x(k) = A^k x_0 + \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-i-1} Bu(i) \quad (1.82)$$

Pour les systèmes linéaires à temps discret, la matrice de contrôlabilité $\mathcal{C}_l$ [Klamka, 1991, Klamka, 1996] est définie comme suit :

$$\mathcal{C}_l = \left(B, AB, \dots, A^k B, \dots, A^{l-1} B \right) \quad (1.83)$$

Définition 1.6.1. Le système (1.78) est dit globalement U -contrôlable dans un intervalle $[0, l]$, si pour une condition initiale x_0 nulle et pour chaque vecteur $x^* \in \mathbb{R}^n$, il existe une suite de commandes admissibles $u_l = \{u(k); 0 \leq k \leq l, u(k) \in U\}$ telle que la solution correspondante de (1.78) satisfait la condition $x(p) = x^*$. $\square$

Définition 1.6.2. Le système (1.78) est dit localement U -contrôlable dans un intervalle $[0, l]$, si pour une condition initiale x_0 nulle et pour chaque vecteur $x^* \in \mathbb{R}^n$, il existe un voisinage de zéro $D \subset \mathbb{R}^n$ tel que pour chaque point $x^* \in D$, il existe une suite de commandes admissibles $u_l = \{u(k); 0 \leq k \leq l, u(k) \in U\}$ telle que la solution correspondante de (1.78) satisfait la condition $x(l) = x^*$. $\square$

Définition 1.6.3 ([Klamka, 1996]). Le système (1.78) est dit globalement $\mathbb{R}^m$ -contrôlable dans un intervalle $[0, l]$, si et seulement si la condition suivante est satisfaite :

$$\text{rang}(C_p) = n \quad (1.84)$$

$\square$

Définition 1.6.4 ([Klamka, 1996]). Le système (1.78) est dit localement Ω^0 -contrôlable dans un intervalle $[0, l]$, si et seulement si il est $\mathbb{R}^m$ -contrôlable dans l'intervalle $[0, l]$. $\square$

1.6.2 Commande rétroactive

En général, on distingue trois types de commandes rétroactives :

- la commande par retour d'état ;
- la commande basée-observateur ;
- la commande par retour de sortie.

1.6.2.1 Commande par retour d'état

La commande par retour d'état est une commande en boucle fermée comme indiquée dans la figure 1.1.

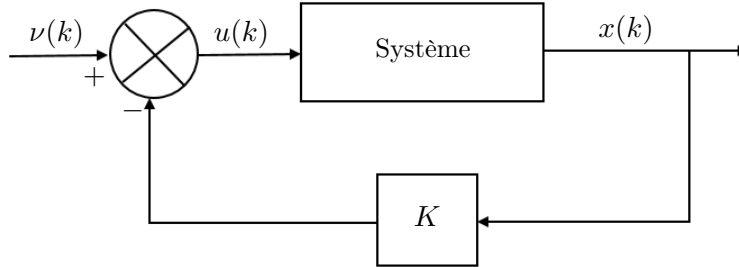


FIGURE 1.1 – Commande par retour d'état

Elle consiste à implémenter une loi de commande $u(k)$ qui prend en considération les différentes valeurs de l'état à chaque itération k . Parmi les travaux qui ont été publiés dans ce domaine, on peut citer [Allerhand et al., 2015, Kwon et al., 2015, Daiha et al., 2017, Hanba, 2017].

Soit le système suivant :

$$\begin{cases} x(k) &= Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) &= Cx(k) \end{cases} \quad (1.85)$$

où $x(k) \in \mathbb{R}^n$ et $u(k) \in \mathbb{R}^m$ représentent respectivement, l'état et la commande. $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ sont des matrices constantes de dimensions appropriées.

La loi de commande $u(k)$, appliquée au système (1.85), est décrite comme suit :

$$u(k) = -Kx(k) + \nu(k) \quad (1.86)$$

où $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ et $\nu(k)$ représentent respectivement, le gain de commande et la consigne.

Cependant, la mise en œuvre de ce type de commande nécessite d'avoir un certain nombre de capteurs permettant de fournir à chaque instant une valeur approximative de l'état. D'habitude, ces capteurs physiques sont coûteux ou même difficiles à réaliser pour des raisons techniques.

1.6.2.2 Commande basée-observateur

Dans la pratique, il est souvent difficile, parfois impossible, pour des raisons de coût et de mise en œuvre technique, de mesurer la totalité du vecteur d'état $x(k)$. Ainsi, pour surmonter cette difficulté, la loi de commande utilisée est basée sur un observateur (figure 1.2).

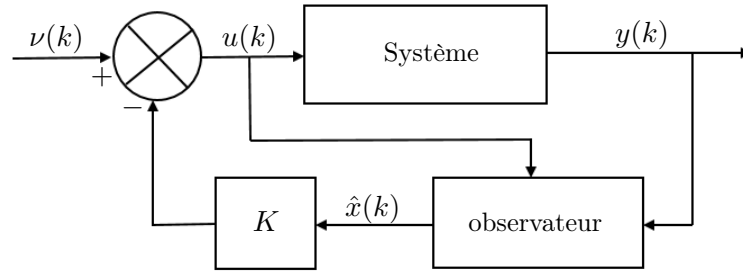


FIGURE 1.2 – Commande basée-observateur

L'observateur utilisé permet d'estimer les informations non directement mesurées au moyen de celles disponibles. Cette approche a fait l'objet de nombreux travaux, en voici quelques-uns [Ibrir *et al.*, 2005, Ibrir et Diopt, 2008, Heemels *et al.*, 2010, Grandvallet *et al.*, 2013, Benallouch *et al.*, 2014, Kheloufi *et al.*, Frej, 2017, Bel-Haj-Frej *et al.*, 2017].

Dans ce cas, la loi de commande à appliquer a la forme suivante :

$$u(k) = -K\hat{x}(k) + \nu(k) \quad (1.87)$$

où $\hat{x}(k)$ représente l'estimé de l'état $x(k)$.

1.6.2.3 Commande par retour de sortie statique

L'une des questions régulièrement abordée dans la théorie de contrôle est le problème de stabilisation par retour de sortie statique (figure 1.3).

Ce sujet est motivé, d'une part, par la non accessibilité de l'état et le manque d'informations via la sortie et, d'autre part, par la simplicité de sa mise en œuvre [Iwasaki et Skelton, 1995, Garcia *et al.*, 2001, Garcia *et al.*, 2003, Najson et Speyer, 2003, Du et Yang, 2008, Abbaszadeh et Marquez, 2008, Dong et Yang, 2009, Chang et Yang, 2014]. Parmi les différentes approches proposées sur ce sujet, on peut distinguer les méthodes basées sur les équations de Riccati [Rosinova *et al.*, 2003] ainsi que les approches convexes basées sur

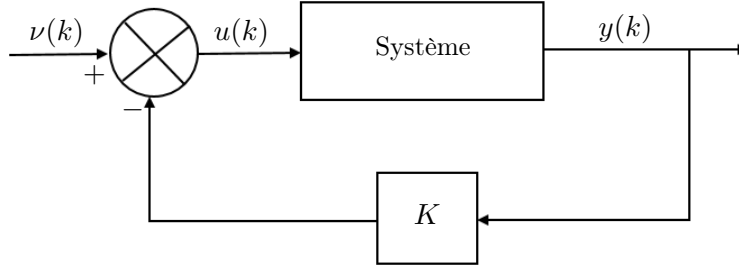


FIGURE 1.3 – Commande par retour de sortie statique

une formulation LMI [Bara *et al.*, 2005, Bara et Boutayeb, 2005]. En dépit de la variété des résultats existants dans la littérature, la commande par retour de sortie statique reste la moins appliquée à cause de la complexité de convergence des algorithmes suggérés.

Pour ce type de commande, le vecteur $u(k)$ s'écrit sous la forme suivante :

$$u(k) = -Ky(k) + v(k) \quad (1.88)$$

1.7 Etude des inégalités matricielles linéaires

1.7.1 Propriétés fondamentales

1.7.1.1 Introduction

La conception d'un contrôleur devrait en général satisfaire trois exigences de base :

- stabilité en boucle fermée ;
- performances : le contrôleur doit avoir certaines caractéristiques dynamiques telles que le temps de montée, dépassement, la bande passante, etc ;
- robustes : le contrôleur doit rester performant et stable, bien que le système soit affecté par des perturbations et des incertitudes.

Ces exigences sont généralement formulées sous forme d'un critère d'optimisation soumis à certaines contraintes ; par exemple des contraintes pratiques sur les variables du système. Les critères d'optimisation des méthodes de synthèse des contrôleurs étaient initialement basés sur les inégalités quadratiques gaussiennes (Linear Quadratic Gaussian Control) [Kwakernaak et Sivan, 1972, Matthew C. Turner, 2007] qui ont été généralisées par la suite à la conception de contrôleurs $\mathcal{H}_2$ [Zhou *et al.*, 1996]. Les bases d'un contrôle $\mathcal{H}_\infty$ robuste sont apparues après le développement de la théorie des petits gains [van der Schaft, 2016]. Pour les systèmes linéaires et les critères d'optimisation appropriés, tels que $\mathcal{H}_2$ et $\mathcal{H}_\infty$, la solution du problème d'optimisation est facilement trouvée en résolvant les équations de Riccati. Beaucoup de ces problèmes de contrôle optimal peuvent être énoncés en termes d'inégalités matricielles linéaires. Il est intéressant de noter que l'équivalence entre l'équation de Riccati et les formulations LMI a été montrée au début des années soixante-dix [Willems, 1971]. Cela a permis de résoudre les problèmes de contrôle optimaux en utilisant des méthodes LMI, car le problème d'optimisation LMI numérique est un problème convexe. Cependant, au cours des vingt dernières années, le développement d'outils numériques sophistiqués a permis de résoudre un certain nombre de LMIs d'une manière plus efficace.

L'une des principales attractions des LMIs est qu'elles peuvent être utilisées pour résoudre des problèmes impliquant plusieurs variables matricielles, tout en leur imposant différentes structures. Les méthodes d'optimisation LMI sont souples. Il est souvent relativement facile de transformer divers problèmes en tant que problèmes LMI pouvant être traités par des méthodes de synthèse convexes. De plus, dans de nombreux cas, l'utilisation des LMIs peut éliminer les restrictions associées aux méthodes conventionnelles et faciliter leurs extensions à des scénarios plus généraux. En effet, les méthodes LMI peuvent être appliquées dans les cas où les méthodes conventionnelles échouent. En égard ces avantages, les LMIs ont permis de développer de nombreuses techniques pour la conception de contrôleurs [Ibrir *et al.*, 2005, Ibrir, 2008, Kheloufi *et al.*, 2014, Kheloufi *et al.*, 2015, Kheloufi *et al.*, 2016, Bel-Haj-Frej *et al.*, 2017].

1.7.1.2 Définitions relatives aux LMIs

Définition 1.7.1. Une contrainte LMI est une contrainte sur un vecteur réel $x \in \mathbb{R}^m$ de la forme

$$F(x) = F_0 + \sum_{i=1}^m x_i F_i \geq 0 \quad (1.89)$$

avec $F_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sont des matrices symétriques données. □

Le problème de base des LMIs est le problème de la faisabilité. Il consiste à trouver x tel que l'inégalité (1.89) demeure vraie. Soit $F(x) > 0$ une relation affine en termes de x . Ici, la variable x est composée d'une ou de plusieurs matrices dont les colonnes sont empilées en tant que vecteur :

$$F(x) = F(X_1, \dots, X_n) \quad (1.90)$$

avec $X_i \in \mathbb{R}^{q_i \times p_i}$ est une matrice, $\sum_{i=1}^n q_i \times p_i = n$.

Les colonnes de toutes les variables matricielles sont empilées pour former une variable vectorielle unique. L'équation (1.90) peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} F(X_1, \dots, X_n) &= F_0 + G_1 X_1 H_1 + \dots + G_n X_n H_n \\ &= F_0 + \sum_{i=1}^n G_i X_i H_i > 0 \end{aligned} \quad (1.91)$$

où F_0, G_i, H_i sont des matrices connues et les X_i sont les variables matricielles à chercher.

1.7.1.3 Système de LMIs

Soit la contrainte LMI suivante :

$$\begin{aligned} F_1(X_1, \dots, X_n) &> 0 \\ &\vdots \\ F_p(X_1, \dots, X_n) &> 0 \end{aligned} \quad (1.92)$$

avec

$$F_j(X_1, \dots, X_n) = F_0 + \sum_{i=1}^n \bar{G}_i \bar{X}_i \bar{H}_{ij} > 0 \quad (1.93)$$

En définissant

$$\begin{aligned}\overline{F_0} &= \text{bloc} - \text{diag}(F_{01}, \dots, F_{0p}) \\ \overline{G_i} &= \text{bloc} - \text{diag}(G_{i1}, \dots, G_{ip}) \\ \overline{H_i} &= \text{bloc} - \text{diag}(H_{i1}, \dots, H_{ip}) \\ \overline{X_i} &= \text{bloc} - \text{diag}(X_i, \dots, X_i)\end{aligned}\tag{1.94}$$

l'inégalité suivante est obtenue :

$$F_{sys}(X_1, \dots, X_n) = \overline{F_0} + \sum_{i=1}^n G_i X_i H_{ij} > 0\tag{1.95}$$

Autrement dit, un système de LMIs peut être reformulé comme une seule LMI. Ceci dit qu'une seule LMI ne peut pas être distinguée d'un système de LMIs.

Une autre structure des systèmes de LMIs peut être rencontrée dans la littérature :

$$\begin{aligned}F_1(X_1, \dots, X_n) &> 0 \\ F_2(X_1, \dots, X_n) &> F_3(X_1, \dots, X_n)\end{aligned}\tag{1.96}$$

Ce système (1.96) peut être aussi réécrit sous la même forme que l'inégalité (1.95).

1.7.2 Types de problèmes LMI

Dans ce paragraphe, quelques problèmes liés aux LMIs sont présentés. Ils seront décrits de la même manière que dans la boîte à outils *MATLAB-LMI Toolbox*.

1.7.2.1 Problème de faisabilité LMI

Le premier type de problèmes LMI est le problème de faisabilité. Le but est de trouver une solution $(X_1, \dots, X_n)$ réalisable :

$$F(X_1, \dots, X_n) > 0\tag{1.97}$$

Ce problème peut être rencontré dans les techniques d'étude de stabilité. Prenons l'exemple d'un système s'écrivant sous la forme

$$x(k+1) = Ax(k)\tag{1.98}$$

Le problème de stabilité au sens de Lyapunov est reformulé sous contrainte LMI de la manière suivante :

$$A^T P A - P < 0\tag{1.99}$$

Il s'agit donc d'un problème de faisabilité LMI en $P > 0$.

1.7.2.2 Problème de programmation semi définie SDP

Ce type de problème implique la minimisation (ou la maximisation) de certaines fonctions scalaires linéaires $\alpha(\cdot)$ des variables matricielles, soumises à des contraintes LMI :

$$\begin{cases} \text{minimiser} & \alpha(X_1, \dots, X_n) \\ \text{sous la contrainte} & F(X_1, \dots, X_n) > 0 \end{cases}\tag{1.100}$$

Dans ce cas, l'objectif est d'optimiser certaines quantités tout en s'assurant que certaines contraintes LMI sont satisfaites. Si une formulation SDP est obtenue pour un problème posé, ce problème est alors considéré comme résolu si la démonstration prouve qu'il est faisable.

1.7.2.3 Problème de valeurs propres généralisé

Le problème de valeur propre généralisé est légèrement différent du problème précédent dans le sens où l'objectif du problème d'optimisation n'est pas réellement convexe, mais quasi-convexe. Il consiste à minimiser la valeur propre d'une paire de matrices qui dépendent de manière affine de variable, étant soumis à une contrainte LMI : variables matricielles, soumises à des contraintes LMI.

$$\begin{cases} \text{minimiser} & \lambda \\ \text{sous les contraintes} & F_1(X_1, \dots, X_n) + \lambda F_2(X_1, \dots, X_n) > 0 \\ & F_1(X_1, \dots, X_n) > 0 \\ & F_2(X_1, \dots, X_n) > 0 \end{cases} \quad (1.101)$$

Soit l'exemple du problème de maximisation du degré de stabilité d'une matrice A . Ce problème s'écrit de la manière suivante :

$$\begin{cases} \text{minimiser} & -\alpha \\ \text{sous les contraintes} & -A^T X - X A - 2\alpha X > 0 \\ & X > 0 \end{cases} \quad (1.102)$$

où α est un scalaire. Ce problème est un problème de valeurs propres généralisé puisqu'il suffit de poser $\lambda = -\alpha$, $F_2(X_1, \dots, X_n) = 2X$ et $F_1(X_1, \dots, X_n) = -A^T X - X A$ dans la relation (1.101).

1.7.2.4 Problème de maximisation de déterminant

L'objectif de ce problème est de maximiser le déterminant d'une matrice symétrique sous une contrainte. Ce problème est formulé comme suit :

$$\begin{cases} \text{minimiser} & \log(\det(F^{-1}(X_1, \dots, X_n))) \\ \text{sous la contrainte} & F(X_1, \dots, X_n) > 0 \end{cases} \quad (1.103)$$

Ce problème est convexe car la fonction objective est convexe.

1.7.2.5 Problème du cône de second ordre

Ce type de problème a la forme suivante :

$$\begin{cases} \text{minimiser} & e^T x \\ \text{sous la contrainte} & \|A_i x + B_i\| \leq c_i^T x + D_i \quad i = 1, \dots, n \end{cases} \quad (1.104)$$

avec les paramètres A_i , B_i , C_i , D_i et e sont donnés. Ce problème est dit problème du cône de second ordre puisque ses contraintes décrivent l'intersection d'espace affine avec le cône de second

ordre $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} \text{ tel que } \|x\| \leq t \right\}$.

Cette contrainte peut s'écrire sous la forme d'un problème SDP :

$$\begin{pmatrix} tI & x \\ x^T & t \end{pmatrix} \geq 0 \quad (1.105)$$

Différents exemples de ce type de problème sont fournis dans [Lobo et al., 1998].

1.7.3 Résolution des LMIs

1.7.3.1 Résolution numérique

Avec le développement de nouveaux outils informatiques plus puissants qu'avant, les méthodes algorithmiques de résolution des problèmes d'optimisation convexe ont connu naturellement une réussite incomparable. Dans le cas des problèmes LMI, la résolution de certains problèmes passe par une amélioration des solveurs LMI.

Dans ce paragraphe, quelques définitions relatives à la résolution numérique des problèmes d'optimisation sont présentées.

Définition 1.7.2 (Calculabilité [Garey et Johnson, 1990]). *Un problème est dit calculable lorsque sa résolution est prouvée être faisable par un certain algorithme en un nombre fini d'étapes.* $\square$

Lorsque le temps de résolution est une fonction de grandeur n^{100} , avec n étant la taille du problème, il est dit résoluble en temps polynomial. Pour cette raison, la définition de complexité est maintenant présentée.

Définition 1.7.3 (Complexité [Garey et Johnson, 1990]). *La complexité est définie comme la fonction qui lie le temps de résolution de l'algorithme à la taille du problème. Ce temps de résolution peut être une fonction exponentielle ou polynômiale de la taille du problème.* $\square$

Définition 1.7.4 (Temps polynômial [Garey et Johnson, 1990]). *Un problème est dit résoluble en temps polynômial lorsqu'il existe un algorithme de résolution dont le temps de calcul requis est une fonction polynômiale de la taille du problème.*

Généralement, la taille d'un problème est définie comme le nombre de variables utilisées dans la résolution ainsi que la capacité de la zone mémoire allouée à l'exécution de cette tâche. $\square$

Définition 1.7.5 (NP-difficile [Garey et Johnson, 1990]). *Un problème est dit NP-difficile lorsque le temps de calcul requis est une fonction du type a^n avec $a > 1$ et n est la taille du problème.* $\square$

Un problème de type BMI (inégalité matricielle bilinéaire) est un exemple de problème NP-difficile. Le problème LMI n'est pas à son tour NP-difficile puisqu'il est résoluble en temps polynômial. En général, la majorité des problèmes en automatique sont des problèmes NP-difficile par nature et nécessitent une formulation de type LMI pour les résoudre. Ceci peut introduire un conservatisme au niveau des résultats obtenus.

Définition 1.7.6 (Conservatisme [Magarotto, 1999]). *Une condition est dite conservative lorsqu'elle est trop contraignante ou pessimiste par rapport au problème considéré.* $\square$

Le dilemme entre complexité et conservatisme est fréquemment présent et influence les choix, autant théoriques que pratiques, effectués dans la méthodologie de résolution d'un problème. L'idée est d'augmenter le nombre de spécifications du problème afin d'obtenir une méthodologie de synthèse moins conservatrice, ce qui rend le problème NP-difficile. Pour diminuer la complexité de ce problème, certaines spécifications peuvent être approximées ou supprimées. De ce fait, le conservatisme de la solution obtenue est augmenté.

Ainsi le conservatisme est un problème souvent rencontré en passant d'un problème NP-difficile vers un problème convexe. Proposer donc des approches LMI visant à diminuer le conservatisme est une tâche délicate.

1.7.3.2 Méthodes des points intérieurs

Pour résoudre les problèmes d'optimisation linéaire, des algorithmes d'optimisation par points intérieurs ont été introduits par Karmarkar [Karmarkar, 1984]. Ces algorithmes ont été, par la suite, développés par Nesterov et Nemirovskii [Nesterov et Nemirovskii, 1988]. Ils sont performants pour la résolution des LMIs et ont suscité beaucoup d'améliorations [Nesterov et Nemirovskii, 1994, Gahinet et Nemirovski, 1997]. Une synthèse concernant ces algorithmes et leurs convergences peut être trouvée dans [Vandenberghe et Boyd, 1996].

1.8 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté quelques concepts de base qui seront utiles dans la suite de ce mémoire. La littérature sur la description des systèmes dynamiques est abondante. Un rappel des définitions relatives à l'observabilité et contrôlabilité des systèmes à temps discret a été fourni. L'état de l'art présenté dans la troisième partie concernait les techniques de synthèse d'observateur pour les systèmes linéaires et non linéaires à temps discret. Les définitions de la contrôlabilité et des différentes stratégies de commande rétroactive pour les systèmes à temps discret sont été ensuite présentées. La fin de ce chapitre a été dédiée aux propriétés fondamentales des LMIs, les différents types de contraintes ainsi que les méthodes de résolutions des LMIs. Dans la suite du mémoire, nos contributions dans ce domaine de recherche seront présentées. Une nouvelle technique de filtrage ainsi que des nouvelles lois de commande basée-observateur de type $\mathcal{H}_\infty$ à temps discret sont proposées. Deux classes de systèmes non linéaires sont abordées à savoir la classe des systèmes Lipschitz puis la classe des systèmes « one-sided Lipschitz ».

Chapitre 2

Estimation de l'état des systèmes non linéaires à temps discret

« Mesurez ce qui est mesurable et rendez mesurable ce qui ne l'est pas. »

Galileo Galilei

Sommaire

2.1	Introduction	28
2.2	Position du problème	28
2.3	Filtrage avec fenêtre de mesures glissante	30
2.3.1	Observateur de type $\mathcal{H}_\infty$ pour les systèmes Lipschitz	30
2.3.2	Observateur de type $\mathcal{H}_\infty$ pour les systèmes « one-sided Lipschitz »	33
2.4	Linéarisation des contraintes BMI	35
2.4.1	Solution particulière : Cas de deux mesures	36
2.4.2	Solution particulière : Le cas de M mesures	36
2.5	Discussion sur les avantages liés à l'introduction d'une fenêtre glissante	37
2.5.1	Rappel	37
2.5.2	Cas des systèmes Lipschitz	38
2.5.3	Cas des systèmes « one-sided Lipschitz »	40
2.5.4	Comparaison du point de vue complexité de calcul	41
2.6	Résultats de simulations	42
2.6.1	Cas des systèmes Lipschitz	42
2.6.2	Cas des systèmes « one-sided Lipschitz »	48
2.7	Conclusion	55

2.1 Introduction

Un estimateur ou un observateur d'état est un système dynamique auxiliaire qui reflète le comportement d'un système physique. Il fournit une estimation des états internes du système en utilisant les mesures d'entrée et de sortie disponibles.

Il est utile de noter que la plupart des procédés physiques ont un comportement non linéaire, ainsi une attention particulière a été accordée à l'estimation de l'état de ce type de systèmes [Gauthier *et al.*, 1992, Shaked et Berman, 1995, Arcak et Kokotovic, 2001b, Fan et Arcak, 2003]. Le problème de la conception d'observateur pour les systèmes non linéaires a été traité dans la littérature par de nombreux chercheurs et plusieurs méthodes ont été proposées pour les système Lipschitz [Rajamani, 1998, Zemouche et Boutayeb, 2006, Abbaszadeh et Marquez, 2008, Phanomchoeng et Rajamani, 2010, Zhang *et al.*, 2012c] et one-sided Lipschitz [Hu, 2006, Abbaszadeh et Marquez, 2010, Zhang *et al.*, 2012a, Zhang *et al.*, 2012b, Zhang *et al.*, 2014, Zhang *et al.*, 2015, Ahmad *et al.*, 2015]. Il s'est avéré que ces techniques fournissent des conditions de synthèse LMI restrictives. Malgré toutes les nouvelles propositions d'amélioration des techniques existantes, le problème de la conception d'observateurs pour les systèmes non linéaires reste un défi à résoudre.

Ce chapitre présente une nouvelle méthode de synthèse d'observateurs de type $\mathcal{H}_\infty$ non linéaires. Cette méthode est basée sur l'ajout d'une fenêtre glissante de mesures à la forme standard de l'observateur de Luenberger. L'idée consiste à élargir le bassin d'attraction et à améliorer le rejet de perturbations en utilisant un certain nombre de mesures précédentes ($y(k)$, $y(k-1)$, ..., $y(k-M+1)$), ce qui va permettre d'augmenter la précision ainsi que la robustesse d'estimation. Cette nouvelle formulation constitue un apport notable contrairement aux approches classiques ne considérant que la dernière mesure disponible.

Deux classes de systèmes non linéaires sont considérées : les systèmes Lipschitz dont la non-linéarité satisfait le lemme A.1.1 et les systèmes « one-sided Lipschitz » dont la non-linéarité est définie par A.2.1 et A.3.1. Des nouvelles contraintes LMI moins restrictive que celle existantes sont calculés pour ces deux types de systèmes. La supériorité de l'approche proposée est prouvée analytiquement à partir de la comparaison des contraintes LMI obtenues avec les contraintes calculés en utilisant l'approche classique. Des résultats de simulations sont présentés pour illustrer les performances des filtres $\mathcal{H}_\infty$ proposés.

2.2 Position du problème

Considérons un système non linéaire représenté par les équations suivantes :

$$\begin{cases} x(k+1) &= Ax(k) + Df(x(k), u(k)) + W_1\omega(k) \\ y(k) &= Cx(k) + W_2\omega(k) \end{cases} \quad (2.1)$$

où $x(k) \in \mathbb{R}^n$, $u(k) \in \mathbb{R}^m$, $y(k) \in \mathbb{R}^p$ et $\omega(k) \in \mathbb{R}^r$ représentent respectivement l'état, l'entrée, la sortie et la perturbation. $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $D \in \mathbb{R}^{n \times q}$, $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$, $W_1 \in \mathbb{R}^{n \times r}$ et $W_2 \in \mathbb{R}^{p \times r}$ sont des matrices constantes de dimensions adéquates. $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ représente la partie non linéaire du système.

Remarque 2.2.1. Notez que le fait d'utiliser le même vecteur de perturbations ω dans la dynamique de l'état et les sorties mesurées n'est pas une restriction parce que les matrices W_1 ,

W_2 et la dimension de ω sont arbitraires. En effet, si on suppose que dans la dynamique on a $Z_1\omega_1$, et dans l'équation de mesure, on a $Z_2\omega_2$, alors on peut toujours écrire $W_1 = \begin{pmatrix} Z_1 & 0 \end{pmatrix}$, $W_2 = \begin{pmatrix} 0 & Z_2 \end{pmatrix}$ et $\omega = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix}$, ce qui conduit à la forme (2.1). $\square$

Afin d'obtenir des conditions LMI plus générales et moins conservatrices par rapport aux méthodes existantes dans la littérature, on considère l'observateur à fenêtre glissante représenté par la structure suivante :

$$\hat{x}(k+1) = A\hat{x}(k) + Df(\hat{x}(k), u(k)) + \mathcal{L} \begin{pmatrix} y(k) - C\hat{x}(k) \\ y(k-1) - C\hat{x}(k-1) \\ \vdots \\ y(k-M+1) - C\hat{x}(k-M+1) \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

où $\hat{x}(k) \in \mathbb{R}^n$, M et $\mathcal{L}$ représentent respectivement l'estimation de l'état $x(k)$, le nombre de mesures et le gain d'observation.

Le système (2.1) peut être réécrit sous la forme augmentée suivante :

$$\mathcal{X}(k+1) = \mathcal{A}\mathcal{X}(k) + \mathcal{D}f(\mathcal{F}^T \mathcal{X}(k), u(k)) + \mathcal{W}_1 \varpi(k) \quad (2.3)$$

où

$$\begin{aligned} \mathcal{X}(k) &= \begin{pmatrix} x(k) \\ x(k-1) \\ \vdots \\ x(k-M+1) \end{pmatrix}, \quad \varpi(k) = \begin{pmatrix} \omega(k) \\ \omega(k-1) \\ \vdots \\ \omega(k-M+1) \end{pmatrix} \\ \mathcal{A} &= \begin{pmatrix} A & 0 & \cdots & 0 \\ I & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & I & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{W}_1 = \begin{pmatrix} W_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \mathcal{F} &= \begin{pmatrix} I_n \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{D} = \begin{pmatrix} D \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

En utilisant la notation ci-dessus, l'observateur (2.2) peut être, également, réécrit sous la forme suivante :

$$\hat{\mathcal{X}}(k+1) = \mathcal{A}\hat{\mathcal{X}}(k) + \mathcal{D}f(\mathcal{F}^T \hat{\mathcal{X}}(k), u(k)) + \mathcal{F}\mathcal{L}\mathcal{C}\varepsilon(k) + \mathcal{F}\mathcal{L}\mathcal{W}_2\varpi(k) \quad (2.4)$$

où

$\varepsilon(k) = \mathcal{X}(k) - \hat{\mathcal{X}}(k)$ représente l'erreur d'estimation

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} L_1 & L_2 & \cdots & L_M \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{C} = \text{bloc-diag} \left(\overbrace{\mathcal{C}, \dots, \mathcal{C}}^{M \text{ fois}} \right)$$

$$\mathcal{W}_2 = \text{bloc-diag} \left(\overbrace{W_2, \dots, W_2}^{M \text{ fois}} \right).$$

Par conséquent, la dynamique de l'erreur d'estimation est décrite comme suit :

$$\varepsilon(k+1) = (\mathcal{A} - \mathcal{F}\mathcal{L}\mathcal{C})\varepsilon(k) + \mathcal{D}\Delta f(k) + (\mathcal{W}_1 - \mathcal{F}\mathcal{L}\mathcal{W}_2)\varpi(k) \quad (2.5)$$

avec $\Delta f(k) = f(\mathcal{F}^T \mathcal{X}(k), u(k)) - f(\mathcal{F}^T \hat{\mathcal{X}}(k), u(k))$.

L'objectif consiste à reconstruire l'état $x(k)$ du système (2.3) avec une certaine précision malgré la présence du bruit $\omega(k)$. Cette précision sera déterminée de façon optimale. Sa valeur dépend des paramètres du système considéré.

2.3 Filtrage avec fenêtre de mesures glissante

Étant donné le système (2.1), le problème de conception d'observateur $\mathcal{H}_\infty$ revient à déterminer le gain $\mathcal{L}$ tel que l'erreur d'estimation $\varepsilon(k)$ satisfait le critère $\mathcal{H}_\infty$ décrit ci dessous :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x(k) - \hat{x}(k) = 0, \quad \text{pour } \omega(k) = 0 \quad (2.6)$$

$$\|x - \hat{x}\|_{l_2} \leq \lambda \|\omega\|_{l_2}, \quad \text{pour } \omega(k) \neq 0 \quad \text{et } x(0) - \hat{x}(0) = 0 \quad (2.7)$$

où λ est un scalaire positif à déterminer.

Afin de satisfaire les conditions (2.6) et (2.7), il suffit de trouver une fonction de Lyapunov $V(k)$ telle que

$$\Lambda = \Delta V(k) + (x(k) - \hat{x}(k))^T (x(k) - \hat{x}(k)) - \frac{\lambda^2}{M} \varpi^T(k) \varpi(k) < 0. \quad (2.8)$$

D'autre part, on a $x(k) = \mathcal{F}^T \mathcal{X}(k)$ et $\hat{x}(k) = \mathcal{F}^T \hat{\mathcal{X}}(k)$, ainsi $x(k) - \hat{x}(k) = \mathcal{F}^T \varepsilon(k)$. L'inégalité (2.8) devient, donc, équivalente à

$$\Lambda = \Delta V(k) + \varepsilon^T(k) \mathcal{F} \mathcal{F}^T \varepsilon(k) - \frac{\lambda^2}{M} \varpi^T(k) \varpi(k) < 0. \quad (2.9)$$

Pour résoudre ce problème d'optimisation, l'idée est d'utiliser la fonction classique de Lyapunov décrite par :

$$V(k) = \varepsilon^T(k) P \varepsilon(k) \quad (2.10)$$

où $P = P^T > 0$ représente la matrice de Lyapunov.

Dans la suite, deux classes différentes de systèmes non linéaires sont étudiées : une classe de systèmes Lipschitz et une classe de systèmes « one-sided Lipschitz ».

2.3.1 Observateur de type $\mathcal{H}_\infty$ pour les systèmes Lipschitz

Dans cette partie, une classe de systèmes Lipschitz est considérée. Cette classe satisfait le lemme A.1.1 de l'Annexe A.

La fonction non linéaire $f(\cdot)$ est globalement Lipschitz et elle a la forme suivante :

$$f(x(k)) \triangleq \begin{pmatrix} f_1(E_1 x(k), u(k)) \\ f_2(E_2 x(k), u(k)) \\ \vdots \\ f_q(E_q x(k), u(k)) \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

avec $E_i \in \mathbb{R}^{n_i \times n}$.

L'application du lemme A.1.1 à la fonction $f(\mathcal{F}^T \mathcal{X}(k), u(k))$ permet d'obtenir

$$\Delta f(k) = \sum_{i,j=1}^{q,n_i} f_{ij} H_{ij} E_i \mathcal{F}^T \varepsilon(k) \quad (2.12)$$

avec

$$\begin{aligned} \underline{\alpha}_{f_{ij}} &\leq f_{ij} \leq \bar{\alpha}_{f_{ij}} \\ f_{ij} &\triangleq f_{ij}(\epsilon_i^{\hat{\epsilon}_{i,j-1}}, \epsilon_i^{\hat{\epsilon}_{i,j}}) \\ \epsilon_i &= E_i \mathcal{F}^T \mathcal{X}(k) \\ \hat{\epsilon}_i &= E_i \mathcal{F}^T \hat{\mathcal{X}}(k) \\ H_{ij} &= e_q(i) e_{n_i}^T(j) \end{aligned}$$

Sans perte de généralité [Hassan et al., 2011], on suppose que

$$\underline{f}_{ij} \leq f_{ij} \leq \bar{f}_{ij}$$

avec $\underline{f}_{ij} = 0$ et $\bar{f}_{ij} = \bar{\alpha}_{f_{ij}} - \underline{\alpha}_{f_{ij}}$ et $A \triangleq A + D \sum_{i,j=1}^{q,n_i} \underline{\alpha}_{f_{ij}} H_{ij} E_i$.

L'équation (2.12) est équivalente à

$$\Delta f(k) = \Sigma \varepsilon(k) \quad (2.13)$$

avec

$$\Sigma = \sum_{i,j=1}^{q,n_i} f_{ij} H_{ij} E_i \mathcal{F}^T. \quad (2.14)$$

Ainsi, la dynamique de l'erreur d'estimation peut être réécrite comme suit :

$$\varepsilon(k+1) = (\mathcal{A} - \mathcal{F}\mathcal{L}\mathcal{C} + \mathcal{D}\Sigma)\varepsilon(k) + (\mathcal{W}_1 - \mathcal{F}\mathcal{L}\mathcal{W}_2)\varpi(k) \quad (2.15)$$

À ce stade, le corollaire suivant est présenté.

Corollaire 2.3.1. *Pour un niveau d'atténuation des perturbations $\lambda > 0$, le problème de conception d'observateur $\mathcal{H}_\infty$ avec fenêtre de mesures glissante correspondant au système (2.1) et l'observateur (2.2) est asymptotiquement stable au sens de Lyapunov s'il existe des matrices $S_{ij} \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}$ et $P = P^T > 0 \in \mathbb{R}^{n \times M}$ de dimensions appropriées telles que la BMI suivante soit faisable :*

minimiser λ en respectant

$$\left(\begin{array}{ccc} \left(\begin{array}{cc} -P + \mathcal{F}\mathcal{F}^T & 0 \\ (\star) & -\frac{\lambda^2}{M} I_{r \times M} \end{array} \right) & (\mathcal{A} - \mathcal{F}\mathcal{L}\mathcal{C})^T P & (\Theta_1 \cdots \Theta_q) \\ \left(\begin{array}{cc} (\star) & (\star) \end{array} \right) & -P & \\ & (\star) & -\Psi \Xi \end{array} \right) < 0 \quad (2.16)$$

avec

$$\begin{aligned}\Theta_i &= (\Theta_{i1} \quad \cdots \quad \Theta_{in_i}) \\ \Theta_{ij} &= \begin{pmatrix} \mathcal{D}H_{ij}S_{ij}^T \\ 0 \\ P\mathcal{F}E_i^T \end{pmatrix} \\ \Psi &= \text{bloc-diag} \quad (\Psi_1, \dots, \Psi_q) \\ \Psi_i &= \text{bloc-diag} \quad \left(\frac{2}{f_{i1}} I_{n_i}, \dots, \frac{2}{f_{in_i}} I_{n_i} \right) \\ \Xi &= \text{bloc-diag} \quad (\Xi_1, \dots, \Xi_q) \\ \Xi_i &= \text{bloc-diag} \quad (S_{i1}, \dots, S_{in_i})\end{aligned}$$

□

Démonstration. La variation $\Delta V(k)$ de la fonction de Lyapunov $V(k)$ est donnée par l'équation suivante :

$$\begin{aligned}\Delta V(k) &= V(k+1) - V(k) \\ &= \varepsilon^T(k) (\mathcal{M}^T P \mathcal{M} - P) \varepsilon(k) + \varepsilon^T(k) \mathcal{M}^T P \mathcal{N} \varpi(k) + \varpi^T(k) \mathcal{N}^T P \mathcal{M} \varepsilon(k) \\ &\quad + \varpi^T(k) \mathcal{N}^T P \mathcal{N} \varpi(k)\end{aligned} \quad (2.17)$$

avec

$$\mathcal{M} = \mathcal{A} - \mathcal{F}\mathcal{L}\mathcal{C} + \mathcal{D}\Sigma$$

et

$$\mathcal{N} = \mathcal{W}_1 - \mathcal{F}\mathcal{L}\mathcal{W}_2.$$

Ensuite, l'inégalité (2.9) peut être exprimée comme suit :

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \varepsilon(k) \\ \varpi(k) \end{pmatrix}^T \Pi \begin{pmatrix} \varepsilon(k) \\ \varpi(k) \end{pmatrix} < 0 \quad (2.18)$$

avec

$$\Pi = \begin{pmatrix} \mathcal{M}^T P \mathcal{M} - P + \mathcal{F}\mathcal{F}^T & \mathcal{M}^T P \mathcal{N} \\ (\star) & \mathcal{N}^T P \mathcal{N}^T - \frac{\lambda^2}{M} I_{r \times M} \end{pmatrix}. \quad (2.19)$$

Ce qui revient à chercher les matrices P et $\mathcal{L}$ telles que :

$$\Pi < 0 \quad (2.20)$$

En utilisant le lemme de Schur B.2.1, l'inégalité (2.20) est équivalente à :

$$\begin{pmatrix} -P + \mathcal{F}\mathcal{F}^T & 0 & \mathcal{M}^T P \\ (\star) & -\frac{\lambda^2}{M} I_{r \times M} & \mathcal{N}^T P \\ (\star) & (\star) & -P \end{pmatrix} < 0 \quad (2.21)$$

Cette inégalité peut être réécrite comme suit, en se basant sur (2.12) :

$$\begin{pmatrix} -P + \mathcal{F}\mathcal{F}^T & 0 & (\mathcal{A} - \mathcal{F}\mathcal{L}\mathcal{C})^T P \\ (\star) & -\frac{\lambda^2}{M} I_{r \times M} & (\mathcal{W}_1 - \mathcal{F}\mathcal{L}\mathcal{W}_2)^T P \\ (\star) & (\star) & -P \end{pmatrix} + \sum_{i,j=1}^{q,n_i} f_{ij} \times \left(\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ P\mathcal{F}E_i^T \end{pmatrix}}_{M_i^T} \underbrace{(H_{ij}^T \mathcal{D}^T \quad 0 \quad 0)}_{N_{ij}} + N_{ij}^T M_i \right) < 0. \quad (2.22)$$

Ensuite, en appliquant la reformulation de la relation de Young donnée par le lemme B.4.2, on obtient

$$M_i^T N_{ij} + N_{ij}^T M_i \leq \frac{1}{2} (M_i + S_{ij} N_{ij})^T S_{ij}^{-1} (M_i + S_{ij} N_{ij}). \quad (2.23)$$

Finalement, en utilisant l'équation (2.12), l'inégalité suivante est obtenue :

$$\begin{pmatrix} -P + \mathcal{F}\mathcal{F}^T & 0 & (\mathcal{A} - \mathcal{F}\mathcal{L}\mathcal{C})^T P \\ (\star) & -\frac{\lambda^2}{M} I_{r \times M} & (\mathcal{W}_1 - \mathcal{F}\mathcal{L}\mathcal{W}_2)^T P \\ (\star) & (\star) & -P \end{pmatrix} + \sum_{i,j=1}^{q,n_i} \frac{\bar{f}_{ij}}{2} (M_i + S_{ij} N_{ij})^T S_{ij}^{-1} (M_i + S_{ij} N_{ij}) < 0. \quad (2.24)$$

Par conséquent, en appliquant le lemme de Schur B.2.1, la BMI donnée par (2.16) est obtenue. Cela termine la preuve du Corollaire 2.3.1. $\square$

2.3.2 Observateur de type $\mathcal{H}_\infty$ pour les systèmes « one-sided Lipschitz »

Dans cette partie, une classe de systèmes « one-sided Lipschitz » est considérée. La partie non linéaire de cette classe est définie par A.2.1 et A.3.1 de l'Annexe A.

La fonction non linéaire $f(x(k), u(k))$ a la forme suivante :

$$f(x(k), u(k)) \triangleq f(Ex(k), u(k)) \quad (2.25)$$

avec $E \in \mathbb{R}^{q \times n}$.

La fonction $f(Ex(k), u(k))$ est « one-sided Lipschitz ». Selon la définition A.2.1, l'inégalité suivante est obtenue :

$$\langle f(Ex(k), u(k)) - f(E\hat{x}(k), u(k)), E(x(k) - \hat{x}(k)) \rangle \leq \rho \|E(x(k) - \hat{x}(k))\|^2 \quad (2.26)$$

avec $\rho \in \mathbb{R}$.

La fonction $f(Ex(k), u(k))$ est supposée aussi quadratiquement bornée. Selon la définition A.3.1, l'inégalité suivante est obtenue :

$$\|f(Ex(k), u(k)) - f(E\hat{x}(k), u(k))\|^2 \leq \beta \|E(x(k) - \hat{x}(k))\|^2 + \gamma \langle E(x(k) - \hat{x}(k)), f(Ex(k), u(k)) - f(E\hat{x}(k), u(k)) \rangle \quad (2.27)$$

avec $\beta \in \mathbb{R}$ et $\gamma \in \mathbb{R}$.

Ainsi, $f(\mathcal{F}^T \mathcal{X}(k), u(k)) = f(E\mathcal{F}^T \mathcal{X}(k), u(k))$ est à la fois « one-sided Lipschitz » et quadratiquement bornée telle que :

$$\langle \Delta f(k), E\mathcal{F}^T \varepsilon(k) \rangle \leq \rho \|E\mathcal{F}^T \varepsilon(k)\|^2 \quad (2.28)$$

$$\|\Delta f(k)\|^2 \leq \beta \|E\mathcal{F}^T \varepsilon(k)\|^2 + \gamma \langle E\mathcal{F}^T \varepsilon(k), \Delta f(k) \rangle \quad (2.29)$$

avec $\Delta f(k) = f(E\mathcal{F}^T \mathcal{X}(k), u(k)) - f(E\mathcal{F}^T \hat{\mathcal{X}}(k), u(k))$, $\varepsilon(k) = \mathcal{X}(k) - \hat{\mathcal{X}}(k)$, $\rho \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}$ et $\gamma \in \mathbb{R}$.

La procédure de conception de l'observateur $\mathcal{H}_\infty$ est détaillée dans le corollaire suivant.

Corollaire 2.3.2. *Pour un niveau d'atténuation des perturbations $\lambda > 0$, le problème de conception d'observateur $\mathcal{H}_\infty$ avec fenêtre de mesures glissante correspondant au système (2.1) et l'observateur (2.2) est asymptotiquement stable au sens de Lyapunov s'il existe des scalaires ρ , β , γ , $\mu_1 > 0$, $\mu_2 > 0$ et une matrice $P = P^T > 0$ de dimensions appropriées tels que la BMI suivante soit faisable :*

minimiser λ en respectant

$$\begin{pmatrix} (1, 1) & (\mathcal{A} - \mathcal{F}\mathcal{L}\mathcal{C})^T P \mathcal{D} + \frac{\mu_2 \gamma - \mu_1}{2} \mathcal{F} E^T & 0 & (\mathcal{A} - \mathcal{F}\mathcal{L}\mathcal{C})^T P \\ (\star) & \mathcal{D}^T P \mathcal{D} - \mu_2 I_q & \mathcal{D}^T P (\mathcal{W}_1 - \mathcal{F}\mathcal{L}\mathcal{W}_2) & 0 \\ (\star) & (\star) & -\frac{\lambda^2}{M} I_{r \times M} & (\mathcal{W}_1 - \mathcal{F}\mathcal{L}\mathcal{W}_2)^T P \\ (\star) & (\star) & (\star) & -P \end{pmatrix} < 0 \quad (2.30)$$

avec

$$(1, 1) = -P + \mathcal{F}\mathcal{F}^T + (\mu_1 \rho + \mu_2 \beta) \mathcal{F} E^T E \mathcal{F}^T.$$

□

Démonstration. La variation $\Delta V(k)$ de la fonction de Lyapunov $V(k)$ est donnée par l'équation suivante :

$$\begin{aligned} \Delta V(k) &= V(k+1) - V(k) \\ &= \varepsilon^T(k) (\mathcal{M}^T P \mathcal{M} - P) \varepsilon(k) + \varepsilon^T(k) \mathcal{M}^T P \mathcal{D} \Delta f(k) + \varepsilon^T(k) \mathcal{M}^T P \mathcal{N} \varpi(k) \\ &\quad + \Delta f^T(k) \mathcal{D}^T P \mathcal{M} \varepsilon(k) + \Delta f^T(k) \mathcal{D}^T P \mathcal{D} \Delta f(k) + \Delta f^T(k) \mathcal{D}^T P \mathcal{N} \varpi(k) \\ &\quad + \varpi^T(k) \mathcal{N}^T P \mathcal{M} \varepsilon(k) + \varpi^T(k) \mathcal{N}^T P \mathcal{D} \Delta f(k) + \varpi^T(k) \mathcal{N}^T P \mathcal{N} \varpi(k) \end{aligned} \quad (2.31)$$

avec

$$\mathcal{M} = \mathcal{A} - \mathcal{F}\mathcal{L}\mathcal{C}$$

et

$$\mathcal{N} = \mathcal{W}_1 - \mathcal{F}\mathcal{L}\mathcal{W}_2.$$

L'inégalité (2.9) est exprimée comme suit :

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \varepsilon(k) \\ \Delta f(k) \\ \varpi(k) \end{pmatrix}^T \Pi \begin{pmatrix} \varepsilon(k) \\ \Delta f(k) \\ \varpi(k) \end{pmatrix} \quad (2.32)$$

avec

$$\Pi = \begin{pmatrix} \mathcal{M}^T P \mathcal{M} - P + \mathcal{F} \mathcal{F}^T & \mathcal{M}^T P \mathcal{D} & \mathcal{M}^T P \mathcal{N} \\ (\star) & \mathcal{D}^T P \mathcal{D} & \mathcal{D}^T P \mathcal{N} \\ (\star) & (\star) & \mathcal{N}^T P \mathcal{N} - \frac{\lambda^2}{M} I_{r \times M} \end{pmatrix}. \quad (2.33)$$

Ce qui revient à chercher les matrices P et $\mathcal{L}$ telles que :

$$\Pi < 0 \quad (2.34)$$

D'autre part, à partir de (2.28) et (2.29), les inégalités suivantes sont remplies pour $\mu_1 > 0$ et $\mu_2 > 0$:

$$\begin{cases} \mu_1 \rho \varepsilon^T(k) \mathcal{F} E^T E \mathcal{F}^T \varepsilon(k) - \mu_1 \varepsilon^T(k) \mathcal{F} E^T \Delta f(k) \geq 0 \\ \mu_2 \beta \varepsilon^T(k) \mathcal{F} E^T E \mathcal{F}^T \varepsilon(k) + \mu_2 \gamma \varepsilon^T(k) \mathcal{F} E^T \Delta f(k) - \mu_2 \Delta f^T(k) \Delta f(k) \geq 0 \end{cases} \quad (2.35)$$

pour $\mu_1 > 0$ et $\mu_2 > 0$.

Ensuite, en ajoutant le terme à gauche de (2.35) dans (2.34), on obtient

$$\begin{pmatrix} (1, 1) & \mathcal{M}^T P \mathcal{D} + \frac{\mu_2 \gamma - \mu_1}{2} \mathcal{F} E^T & \mathcal{M}^T P \mathcal{N} \\ (\star) & \mathcal{D}^T P \mathcal{D} - \mu_2 I_q & \mathcal{D}^T P \mathcal{N} \\ (\star) & (\star) & \mathcal{N}^T P \mathcal{N} - \frac{\lambda^2}{M} I_{r \times M} \end{pmatrix} < 0 \quad (2.36)$$

avec

$$(1, 1) = \mathcal{M}^T P \mathcal{M} - P + \mathcal{F} \mathcal{F}^T + (\mu_1 \rho + \mu_2 \beta) \mathcal{F} E^T E \mathcal{F}^T.$$

Enfin, en utilisant le lemme de Schur B.2.1, l'inégalité (2.36) est équivalente à (2.30). Ceci termine la preuve du Corollaire 2.3.1. $\square$

2.4 Linéarisation des contraintes BMI

La synthèse du gain $\mathcal{L}$, dans les deux cas traité, conduit à résoudre un problème d'optimisation composé d'une inégalité matricielle bilinéaire (BMI), donc un problème non-convexe. Cette section est consacrée à la linéarisation des problèmes d'optimisation présentés dans les corollaires 2.3.1 et 2.3.2. Pour rendre la procédure de conception proposée traitable numériquement, une technique de conversion des contraintes BMI à des contraintes LMI solvable facilement par les solveurs numériques de Matlab est présentée.

Les BMIs (2.16) et (2.30) ne peuvent pas être résolues par un simple changement de variable à cause de la présence de la matrice $\mathcal{F}$. Par conséquent, certains changements de variables sont proposés pour résoudre ce problème d'optimisation. Ces changements de variables conduisent à une solution particulière.

Pour faciliter la tâche, une solution spécifique (pour $M = 2$) est proposée. Ensuite, cette solution sera généralisée pour le cas de M mesures.

2.4.1 Solution particulière : Cas de deux mesures

Dans ce cas, la matrice P est supposée avoir la forme particulière suivante :

$$P = \begin{pmatrix} P_{11} & \eta P_{11} \\ \eta P_{11} & P_{22} \end{pmatrix} \quad (2.37)$$

avec $0 < \eta < 1$.

La matrice $\mathcal{L}$ est de la forme suivante :

$$\mathcal{L} = (L_1 \quad L_2). \quad (2.38)$$

Ensuite, deux changements de variables peuvent être établis :

$$\begin{cases} R_1 &= L_1^T P_{11} \\ R_2 &= L_2^T P_{11}. \end{cases} \quad (2.39)$$

Par conséquent, les BMIs (2.16) et (2.30) sont transformées en LMIs pouvant être facilement résolues. Les gains de l'observateur $\mathcal{H}_\infty$ sont finalement donnés par

$$\begin{cases} L_1 &= P_{11}^{-1} R_1^T \\ L_2 &= P_{11}^{-1} R_2^T. \end{cases} \quad (2.40)$$

2.4.2 Solution particulière : Le cas de M mesures

Dans ce cas, la matrice P a la forme particulière suivante :

$$P = \begin{pmatrix} P_{11} & \eta_1 P_{11} & \cdots & \cdots & \eta_1 P_{11} \\ (\star) & P_{22} & \eta_2 P_{22} & \cdots & \eta_2 P_{22} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \eta_{M-1} P_{M-1, M-1} \\ (\star) & \cdots & \cdots & (\star) & P_{MM} \end{pmatrix} \quad (2.41)$$

avec $0 \leq \eta_i < 1$ pour $i \in \{1, \dots, M-1\}$.

La matrice $\mathcal{L}$ a la forme suivante :

$$\mathcal{L} = (L_1 \quad L_2 \quad \cdots \quad L_M). \quad (2.42)$$

Ensuite, M changements de variables peuvent être établis :

$$\begin{cases} R_1 &= L_1^T P_{11} \\ R_2 &= L_2^T P_{11} \\ &\vdots \\ R_M &= L_M^T P_{11}. \end{cases} \quad (2.43)$$

Cela conduit à des LMIs, qui peuvent être facilement résolue par les solveurs Matlab disponibles. Les gains de l'observateur $\mathcal{H}_\infty$ sont ensuite calculés comme suit :

$$\begin{cases} L_1 &= P_{11}^{-1} R_1^T \\ L_2 &= P_{11}^{-1} R_2^T \\ &\vdots \\ L_M &= P_{11}^{-1} R_M^T. \end{cases} \quad (2.44)$$

Remarque 2.4.1. Afin d'améliorer la faisabilité de la procédure proposée pour linéariser les contraintes obtenues, les paramètres η_i pour $i \in \{1, \dots, M-1\}$, sont choisis de telle sorte que $0 \leq \eta_i < 1$ pour $i \in \{1, \dots, M-1\}$. Ce choix est établi à partir de l'évaluation numérique des LMIs sur de nombreux exemples. $\square$

Remarque 2.4.2. Les BMIs (2.16) et (2.30) peuvent être converties en LMIs en utilisant (2.41), si η_i , pour $i \in \{1, \dots, M-1\}$, soient fixés à priori. Ces paramètres peuvent être déterminés en assignant des subdivisions uniformes de l'intervalle $(0, 1)$. $\square$

2.5 Discussion sur les avantages liés à l'introduction d'une fenêtre glissante

Dans cette partie, l'objectif est de mettre en évidence l'amélioration ajoutée par l'approche avec fenêtre de mesures glissante en la comparant à l'approche classique qui utilise une seule mesure. Dans un premier temps, le cas standard est étudié. Ensuite, il sera comparé à l'approche proposée.

2.5.1 Rappel

Selon l'approche classique, l'observateur $\mathcal{H}_\infty$ est défini pour :

$$\hat{x}(k+1) = A\hat{x}(k) + Df(\hat{x}(k), u(k)) + L(y(k) - C\hat{x}(k)). \quad (2.45)$$

Dans ce cas, l'erreur d'estimation est exprimée comme suit :

$$\varepsilon^*(k) = x(k) - \hat{x}(k). \quad (2.46)$$

Ensuite, la dynamique de l'erreur d'estimation est donnée par :

$$\varepsilon^*(k+1) = (A - LC)\varepsilon^*(k) + D\Delta f(k) + (W_1 - LW_2)\omega(k). \quad (2.47)$$

avec $\Delta f(k) = f(x(k), u(k)) - f(\hat{x}(k), u(k))$.

Comme dans le cas de l'approche avec fenêtre de mesures glissante, concevoir un observateur $\mathcal{H}_\infty$ revient à déterminer le gain L de telle sorte que l'erreur d'estimation $\varepsilon^*(k)$ satisfait le critère suivant :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon^*(k) = 0, \quad \text{pour } \omega(k) = 0 \quad (2.48)$$

$$\|\varepsilon^*\|_{l_2} \leq \lambda^* \|\omega\|_{l_2}, \quad \text{pour } \omega(k) \neq 0 \quad \text{et } \varepsilon^*(0) = 0 \quad (2.49)$$

où λ^* est un scalaire positif à déterminer.

Pour satisfaire ce critère, il suffit de trouver une fonction de Lyapunov $V^*(k)$ telle que

$$\Delta V^*(k) + \varepsilon^{*T}(k)\varepsilon^*(k) - \lambda^{*2}\omega(k)^T\omega(k) < 0 \quad (2.50)$$

avec $\Delta V^*(k) = V^*(k+1) - V^*(k)$.

La fonction classique de Lyapunov est choisie comme suit :

$$V^*(k) = \varepsilon^{*T}(k)P^*\varepsilon^*(k) \quad (2.51)$$

avec $P^* = P^{*T} > 0$.

2.5.2 Cas des systèmes Lipschitz

L'application du lemme A.1.1 sur la fonction $f(x(k), u(k))$ permet d'obtenir

$$\Delta f(k) = \sum_{i,j=1}^{q,n_i} f_{ij} H_{ij} E_i \varepsilon^*(k) = \Sigma \varepsilon^*(k) \quad (2.52)$$

avec

$$\begin{aligned} \underline{f}_{ij} &\leq f_{ij} \leq \bar{f}_{ij} \\ f_{ij} &\triangleq f_{ij}(\epsilon_i^{\hat{\epsilon}_{i,j-1}}, \epsilon_i^{\hat{\epsilon}_{i,j}}) \\ \epsilon_i &= E_i x(k) \\ \hat{\epsilon}_i &= E_i \hat{x}(k) \\ H_{ij} &= e_q(i) e_{n_i}^T(j). \end{aligned}$$

En suivant la même démarche, l'inégalité suivante est obtenue :

$$\begin{pmatrix} (A - LC + D\Sigma)^T P^* (A - LC + D\Sigma) - P^* + I_n & (A - LC + D\Sigma)^T P^* (W_1 - LW_2) \\ (\star) & (W_1 - LW_2)^T P^* (W_1 - LW_2) - \lambda^{*2} I_r \end{pmatrix} < 0 \quad (2.53)$$

En appliquant le lemme de Schur B.2.1, l'inégalité suivante est obtenue :

$$\begin{pmatrix} -P^* + I_n & 0 & (A - LC + D\Sigma)^T P^* \\ (\star) & -\lambda^{*2} I_r & (W_1 - LW_2)^T P^* \\ (\star) & (\star) & -P^* \end{pmatrix} < 0 \quad (2.54)$$

Puis en utilisant le fait que le système est Lipschitz (lemme A.1.1) ainsi que la reformulation du lemme de Young (lemme B.4.2), la contrainte suivante est obtenue :

miniser λ^* en respectant

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} -P^* + I_n & 0 & (A - LC + D\Sigma)^T P^* \\ (\star) & -\lambda^{*2} I_r & (W_1 - LW_2)^T P^* \\ (\star) & (\star) & -P^* \end{pmatrix} & (\Theta_1 \cdots \Theta_q) \\ (\star) & -\Psi \Xi \end{pmatrix} < 0 \quad (2.55)$$

avec

$$\begin{aligned} \Theta_i &= (\Theta_{i1} \cdots \Theta_{in_i}) \\ \Theta_{ij} &= \begin{pmatrix} DH_{ij} S_{ij}^T \\ 0 \\ PE_i^T \end{pmatrix} \\ \Psi &= \text{bloc-diag} \quad (\Psi_1, \dots, \Psi_q) \\ \Psi_i &= \text{bloc-diag} \quad \left(\frac{2}{\bar{f}_{i1}} I_{n_i}, \dots, \frac{2}{\bar{f}_{in_i}} I_{n_i} \right) \\ \Xi &= \text{bloc-diag} \quad (\Xi_1, \dots, \Xi_q) \end{aligned}$$

$$\Xi_i = \text{bloc} - \text{diag} \quad (S_{i1}, \dots, S_{in_i})$$

Dans ce cas, une contrainte linéaire est obtenue en utilisant le changement de variable suivant :

$$R = L^T P. \quad (2.56)$$

Maintenant, pour comparer les deux filtres, le cas $M = 2$ de l'observateur $\mathcal{H}_\infty$ avec fenêtre de mesures glissante est considéré. Ainsi les matrices suivantes sont définies :

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \begin{pmatrix} A & 0 \\ I_n & 0 \end{pmatrix}, \mathcal{D} = \begin{pmatrix} D \\ 0 \end{pmatrix} \\ \mathcal{F} &= \begin{pmatrix} I_n \\ 0 \end{pmatrix}, \mathcal{W}_1 = \begin{pmatrix} W_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \mathcal{C} &= \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}, \mathcal{W}_2 = \begin{pmatrix} W_2 & 0 \\ 0 & W_2 \end{pmatrix} \\ P &= \begin{pmatrix} P_1 & P_3 \\ P_3^T & P_2 \end{pmatrix}, \mathcal{L} = (L_1 \quad L_2). \end{aligned}$$

Ainsi, l'inégalité (2.16) est équivalente à

$$\left(\begin{pmatrix} -P_1 + I_n & -P_3 & 0 & 0 & \Pi_{15} & \Pi_{16} \\ (\star) & -P_2 & 0 & 0 & \Pi_{25} & \Pi_{26} \\ (\star) & (\star) & -\frac{\lambda^2}{2} I_r & 0 & \Pi_{35} & \Pi_{36} \\ (\star) & (\star) & (\star) & -\frac{\lambda^2}{2} I_r & \Pi_{45} & \Pi_{46} \\ (\star) & (\star) & (\star) & (\star) & -P_1 & -P_3 \\ (\star) & (\star) & (\star) & (\star) & (\star) & -P_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Theta_1 & \dots & \Theta_q \end{pmatrix} \right) < 0 \quad (2.57)$$

(★) -ΨΞ

avec

$$\Theta_i = (\Theta_{i1} \quad \dots \quad \Theta_{in_i})$$

$$\Theta_{ij} = \begin{pmatrix} DH_{ij} S_{ij}^T \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ P_1 E_i^T \\ P_3^T E_i^T \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \Pi_{15} &= (A + L_1 C + D \Sigma)^T P_1 + P_3^T \\ \Pi_{16} &= (A + L_1 C + D \Sigma)^T P_3 + P_2 \\ \Pi_{25} &= -C^T L_2^T P_1 \\ \Pi_{26} &= -C^T L_2^T P_3 \\ \Pi_{35} &= (E - L_1 F)^T P_1 \\ \Pi_{36} &= (E - L_1 F)^T P_3 \\ \Pi_{45} &= -F^T L_2^T P_1 \\ \Pi_{46} &= -F^T L_2^T P_3 \end{aligned}$$

Maintenant, en considérant la solution particulière suivante :

$$P = \begin{pmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{pmatrix}, \mathcal{L} = (L_1 \quad 0),$$

Il est utile de noter que cette solution particulière est également une solution de (2.55) pour $P_1 = P^*$, $P_2 > 0$ et $L_1 = L$ ce qui implique que toutes les solutions de (2.55) (cas classique) sont inclus dans les solutions de (2.16) (filtre avec fenêtre de mesures glissante). Ceci romène à conclure que l'observateur $\mathcal{H}_\infty$ avec fenêtre de mesures glissante (même avec seulement deux mesures) est moins restrictif que le filtre classique.

2.5.3 Cas des systèmes « one-sided Lipschitz »

D'après (2.26) et (2.27), $f(x(k), u(k))$ est à la fois « one-sided Lipschitz » et quadratiquement bornée telle que :

$$\langle \Delta f(k), E\varepsilon^*(k) \rangle \leq \rho \|E\varepsilon^*(k)\|^2 \quad (2.58)$$

$$\|\Delta f(k)\|^2 \leq \beta \|E\varepsilon^*(k)\|^2 + \gamma \langle E\varepsilon^*(k), \Delta f(k) \rangle \quad (2.59)$$

avec $\Delta f(k) = f(Ex(k), u(k)) - f(E\hat{x}(k), u(k))$, $\rho \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}$ et $\gamma \in \mathbb{R}$.

À partir de (2.58) et (2.59), les inégalités suivantes sont remplies pour $\mu_1 > 0$ et $\mu_2 > 0$:

$$\begin{cases} \mu_1 \rho \varepsilon^{*T}(k) E^T E \varepsilon^*(k) - \mu_1 \varepsilon^{*T}(k) E^T \Delta f(k) \geq 0 \\ \mu_2 \beta \varepsilon^{*T}(k) E^T E \varepsilon^*(k) + \mu_2 \gamma \varepsilon^{*T}(k) E^T \Delta f(k) - \mu_2 \Delta f^T(k) \Delta f(k) \geq 0. \end{cases} \quad (2.60)$$

Après tout calcul fait, l'inégalité suivante est obtenue :

$$\begin{pmatrix} \Pi_{11} & (A - LC)^T P^* D + \frac{\mu_2 \gamma - \mu_1}{2} E^T & (A - LC)^T P^* (W_1 - LW_2) \\ (\star) & D^T P^* D + \mu_2 I_q & D^T P^* (W_1 - LW_2) \\ (\star) & (\star) & (W_1 - LW_2)^T P^* (W_1 - LW_2) - \lambda^{*2} I_r \end{pmatrix} < 0 \quad (2.61)$$

avec

$$\Pi_{11} = (A - LC)^T P^* (A - LC) - P^* + I_n + (\mu_1 \rho + \mu_2 \beta) E^T E$$

L'application du lemme de Schur B.2.1, ramène à l'inégalité suivante :

$$\begin{pmatrix} \Pi_{11} & (A - LC)^T P^* D + \frac{\mu_2 \gamma - \mu_1}{2} E^T & 0 & (A - LC)^T P^* \\ (\star) & D^T P^* D + \mu_2 I_q & D^T P^* (W_1 - LW_2) & 0 \\ (\star) & (\star) & -\lambda^{*2} I_r & (W_1 - LW_2)^T P^* \\ (\star) & (\star) & (\star) & -P^* \end{pmatrix} < 0 \quad (2.62)$$

avec

$$\Pi_{11} = -P^* + I_n + (\mu_1 \rho + \mu_2 \beta) E^T E$$

Ainsi, une contrainte LMI est obtenue en utilisant le changement de variable (2.56).

Comme dans le cas des systèmes Lipschitz, l'observateur $\mathcal{H}_\infty$ avec une fenêtre glissante de deux mesures est considéré pour comparer les deux filtres. L'inégalité (2.30) est équivalente, dans ce cas, à :

$$\begin{pmatrix} \Pi_{11} & -P_3 & \Pi_{13} & 0 & 0 & \Pi_{16} & \Pi_{17} \\ (\star) & -P_2 & \Pi_{23} & 0 & 0 & \Pi_{26} & \Pi_{27} \\ (\star) & (\star) & D^T P_1 D - \mu_2 I_q & \Pi_{34} & \Pi_{35} & 0 & 0 \\ (\star) & (\star) & (\star) & -\frac{\lambda^2}{2} I_r & 0 & \Pi_{46} & \Pi_{47} \\ (\star) & (\star) & (\star) & (\star) & -\frac{\lambda^2}{2} I_r & \Pi_{56} & \Pi_{57} \\ (\star) & (\star) & (\star) & (\star) & (\star) & -P_1 & -P_3 \\ (\star) & (\star) & (\star) & (\star) & (\star) & (\star) & -P_2 \end{pmatrix} < 0 \quad (2.63)$$

avec

$$\begin{aligned} \Pi_{11} &= -P_1 + I_n + (\mu_1 \rho + \mu_2 \beta) E^T E \\ \Pi_{13} &= (A - L_1 C)^T P_1 D + P_3^T D + \frac{\mu_2 \gamma - \mu_1}{2} E^T \\ \Pi_{16} &= (A - L_1 C)^T P_1 + P_3^T \\ \Pi_{17} &= (A - L_1 C)^T P_3 + P_2 \\ \Pi_{23} &= -(L_2 C)^T P_1 D \\ \Pi_{26} &= -(L_2 C)^T P_1 \\ \Pi_{27} &= -(L_2 C)^T P_3 \\ \Pi_{34} &= D P_1 (W_1 - L_1 W_2) \\ \Pi_{35} &= -D P_1 L_2 W_2 \\ \Pi_{46} &= (W_1 - L_1 W_2)^T P_1 \\ \Pi_{47} &= (W_1 - L_1 W_2)^T P_3 \\ \Pi_{56} &= -(L_2 W_2)^T P_1 \\ \Pi_{57} &= -(L_2 W_2)^T P_3. \end{aligned}$$

Il est simple de constater que les matrices

$$P = \begin{pmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{pmatrix}, \mathcal{L} = (L \quad 0).$$

Cette solution particulière est aussi une solution de (2.62) pour $P_1 = P^*$, $P_2 > 0$ et $L_1 = L$, ce qui implique que toutes les solutions de (2.62) sont incluses dans les solutions de (2.30) (filtre avec fenêtre de mesures glissante).

Dans le cas des systèmes « one-sided Lipschitz », on peut conclure que l'observateur $\mathcal{H}_\infty$ avec fenêtre de mesures glissante (même avec seulement deux mesures) est moins restrictif que le filtre classique.

2.5.4 Comparaison du point de vue complexité de calcul

D'un point de vue complexité, deux types de problèmes sont distingués :

— **Complexité de calcul pendant la résolution des LMIs :**

Les LMIs trouvées sont résolues en utilisant l'un des « Solvers » Matlab LMI disponibles qui sont basés sur la méthode d'optimisation point intérieur pour trouver des solutions. Lorsque cet algorithme est appliqué à un problème linéaire convexe, il donne des résultats en temps polynomial. Par conséquent, lorsque des variables de décision sont ajoutées (cas du filtre de type $\mathcal{H}_\infty$ avec fenêtre glissante de mesures), cela conduit à faire plus d'itérations avant de trouver des solutions, alors l'algorithme prendra plus de temps,

mais non significatif en raison de la nature de *l'algorithme du point intérieur*. Ainsi, la complexité de calcul n'est pas fortement affectée.

— **Complexité de calcul pendant l'implémentation en temps réel :**

Pour le filtre de type $\mathcal{H}_\infty$ avec fenêtre de mesures glissante, la complexité de calcul pendant l'implémentation en temps réel est la même que le cas standard puisque les gains sont calculés hors ligne et sont constants pour tout $k \geq 1$.

2.6 Résultats de simulations

Dans cette section, l'efficacité des filtres $\mathcal{H}_\infty$ proposés pour les systèmes Lipschitz et les systèmes « one-sided Lipschitz », est vérifiée sur quelques exemples numériques.

2.6.1 Cas des systèmes Lipschitz

Pour mettre en évidence l'efficacité du filtre proposé pour les systèmes Lipschitz, deux exemples sont considérés : le premier exemple est celui d'un robot à bras articulé étudié dans [Raghavan et Hedrick, 1994], et le deuxième est celui d'un pendule inversé étudié dans [Zemouche et al., 2016].

2.6.1.1 Exemple 1 : Robot à bras articulé

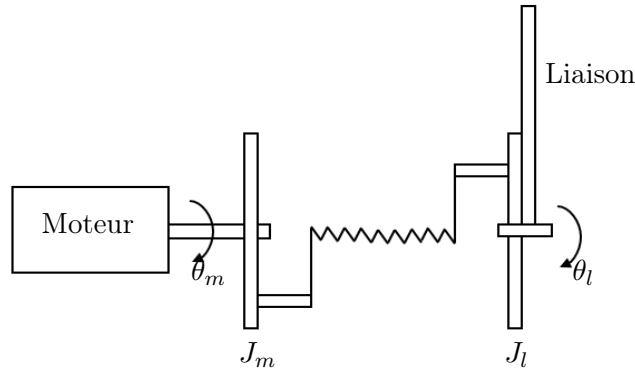


FIGURE 2.1 – Robot à bras articulé

Considérons le robot à bras articulé représenté par la figure 2.1. La dynamique du robot est décrite par les équations suivantes :

$$\begin{cases} \dot{\theta}_m &= \omega_m \\ \dot{\omega}_m &= \frac{\tau}{J_m}(\theta_l - \theta_m) - \frac{b}{J_m}\omega_m + \frac{K_\tau}{J_m}u \\ \dot{\theta}_l &= \omega_l \\ \dot{\omega}_l &= -\frac{\tau}{J_l}(\theta_l - \theta_m) - \frac{Mgh}{J_l}\sin(\theta_l) \end{cases} \quad (2.64)$$

où θ_m , ω_m , θ_l et ω_l sont respectivement les positions et vitesses du moteur et de la liaison. J_m et J_l sont l'inertie du moteur et de la liaison, $2h$ et M sont la longueur et la masse de la liaison, b représente le frottement visqueux, K_τ correspond au gain d'amplificateur. Les mesures sont la

position et la vitesse du moteur. En définissant $x(t) = (\theta_m \ \omega_m \ \theta_l \ \omega_l)$, le comportement du robot est décrit par les équations d'états suivantes :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_c x(t) + B_c u(t) + D_c f_c(x(t)) \\ y(t) = C_c x(t) \end{cases} \quad (2.65)$$

avec

$$A_c = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -48.6 & -1.25 & 48.6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 19.5 & 0 & -19.5 & 0 \end{pmatrix}, B_c = \begin{pmatrix} 0 \\ 21.6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$D_c = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, f_c(x(t)) = -3.33 \sin(x_3(t))$$

$$C_c = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La discrétisation d'Euler du système dynamique (2.65) donne

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) + Df(x(k)) \\ y(k) = Cx(k) \end{cases} \quad (2.66)$$

où $A = I_4 + TA_c$, $B = TB_c$, $D = D_c$, $f(x(k)) = Tf_c(x(t))$, $C = C_c$ et $T = 0.01s$ représente la période d'échantillonnage.

On suppose que les vecteurs d'état et de sortie du système sont affectés par un bruit sinusoïdal $\omega(k)$. Le modèle d'état du robot à bras articulé est donc décrit par :

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) + Df(x(k)) + W_1 \omega(k) \\ y(k) = Cx(k) + W_2 \omega(k) \end{cases} \quad (2.67)$$

$f(x(k))$ satisfait le lemme A.1.1 avec $\bar{\alpha}_{f_{13}} = 3.33T$, $\underline{\alpha}_{f_{13}} = -3.33T$, $\bar{f}_{13} = 3.33T - (-3.33T) = 6.66T$ et

$$A \triangleq \begin{pmatrix} 1 & T & 0 & 0 \\ -48.6T & 1 - 1.25T & 48.6T & 0 \\ 0 & 0 & 1 & T \\ 19.5T & 0 & -19.5T - 3.33T & 1 \end{pmatrix}$$

Premier cas

Dans le premier cas étudié, les vecteurs W_1 et W_2 suivants ont été choisis :

$$W_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } W_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Approche	$\lambda_{\min}$
Approche classique	2.3364
Filtre avec fenêtres glissantes ($M = 2$)	2.3345

TABLE 2.1 – Détermination de $\lambda_{\min}$.

Pour ce cas, les résultats de la résolution des LMIs données par l'approche proposée et l'approche classique sont décrits dans le tableau 2.1.

Les matrices de gains obtenues sont données ci-dessous :

- Approche classique :

$$L = \begin{pmatrix} 1.1899 & -0.1798 \\ -1.3148 & 2.3026 \\ -1.4589 & 2.5029 \\ 2.3006 & -1.3333 \end{pmatrix}$$

- Filtre avec fenêtre glissante ($M = 2$) :

$$L_1 = \begin{pmatrix} 1.1601 & -0.1501 \\ -1.2491 & 2.2369 \\ -1.5455 & 2.5894 \\ 2.2417 & -1.2747 \end{pmatrix}$$

$$L_2 = \begin{pmatrix} -0.0041 & 0.0041 \\ 0.0151 & -0.0151 \\ 0.0203 & -0.0203 \\ -0.0129 & 0.0129 \end{pmatrix}$$

Il est clair que la valeur de $\lambda_{\min}$ calculée par l'approche avec fenêtre glissante est plus petite que celle calculée par l'approche classique, ce qui prouve les meilleures performances de l'observateur $\mathcal{H}_{\infty}$ proposé.

Les gains L_1 et L_2 donnés par le filtre avec fenêtre glissante assurent la convergence de l'erreur d'estimation vers zéro comme illustré par des simulations dans la figure 2.2.

Deuxième cas

Dans le deuxième cas étudié, les vecteurs W_1 et W_2 ont les valeurs suivantes :

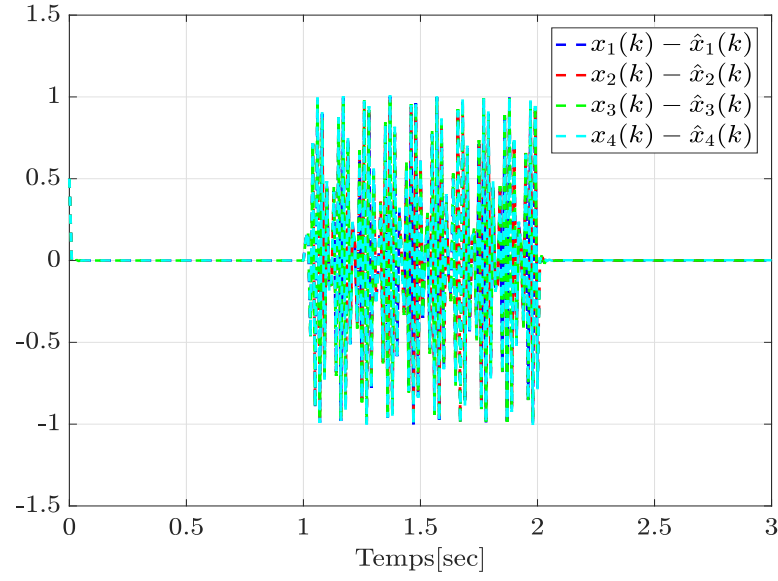
$$W_1 = 10^3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } W_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Les résultats de la résolution des LMIs données par l'approche proposée et la l'approche classique sont décrits dans le tableau 2.2.

Les paramètres du filtre correspondants dans chaque cas sont donnés comme suit :

- Filtre avec fenêtre glissante avec $M = 2$:

$$L_1 = \begin{pmatrix} 1.0009 & 0.0188 \\ -1.3058 & 2.3086 \\ -2.2285 & 3.3043 \\ -11.9040 & 13.1402 \end{pmatrix}$$

FIGURE 2.2 – L’erreur d’estimation dans un contexte bruyant avec $\omega = 0$ pour $t < 1$ et $t > 2$

Approche	$\lambda_{\min}$
Approche classique	non faisable
Filtre avec fenêtres glissantes ($M = 2$)	2.9004×10^3
Filtre avec fenêtres glissantes ($M = 3$)	2.4374×10^3

TABLE 2.2 – Détermination de $\lambda_{\min}$.

$$L_2 = \begin{pmatrix} 0.0265 & -0.0266 \\ 0.0251 & -0.0252 \\ 0.0263 & -0.0263 \\ 0.0933 & -0.0926 \end{pmatrix}$$

- Filtre avec fenêtre glissante avec $M = 3$:

$$L_1 = \begin{pmatrix} 1.0003 & 0.0107 \\ -1.0770 & 2.0674 \\ -1.3084 & 2.3599 \\ -1.6602 & 2.7023 \end{pmatrix}$$

$$L_2 = \begin{pmatrix} 0.0026 & -0.0016 \\ 0.0013 & -0.0003 \\ -0.0014 & 0.0025 \\ -0.0030 & 0.0041 \end{pmatrix}$$

$$L_3 = \begin{pmatrix} 0.0037 & -0.0036 \\ 0.0027 & -0.0027 \\ 0.0000 & -0.0000 \\ -0.0025 & 0.0025 \end{pmatrix}$$

Dans le deuxième cas, en augmentant les bruits qui affectent le système, l'approche standard échoue pour cet exemple, tandis que le filtre à fenêtre glissante donne des solutions pour $M = 2$ et $M = 3$, respectivement. Cela confirme la supériorité de l'approche proposée. De plus, la valeur de $\lambda_{\min}$ calculée pour $M = 3$ est plus petite que celle calculée pour $M = 2$, ce qui prouve qu'en augmentant le nombre de mesures, une meilleure performance est aussi obtenue. Les résultats de simulation pour $M = 2$ et $M = 3$ sont présentés dans les figures 2.3 et 2.4, respectivement.

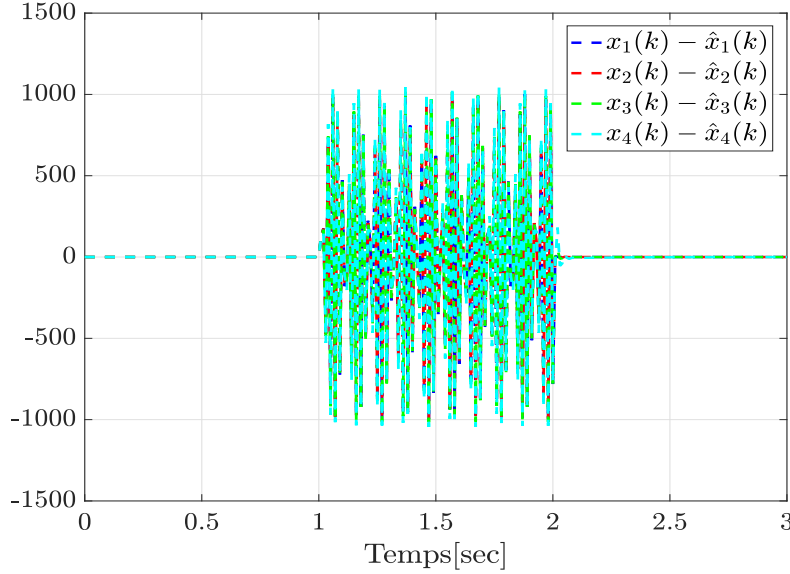


FIGURE 2.3 – L'erreur d'estimation dans un contexte bruyant avec $\omega = 0$ pour $t < 1$ et $t > 2$ ($M = 2$)

2.6.1.2 Exemple 2 : Pendule inversé

L'équation physique du mouvement du pendule inversé représenté par la figure 2.5 est la suivante :

$$\ddot{\theta}(t) - b\dot{\theta}(t) - \frac{g}{l} \sin(\theta(t)) = \frac{1}{ml^2} \tau(t) \quad (2.68)$$

où l , m , b et g sont, respectivement, la longueur de la tige, la masse du pendule, le coefficient d'amortissement et la constante de gravité. θ et τ représentent l'angle formé entre la tige et la verticale et l'actionneur, respectivement.

Soit $x(t) = (\theta(t) \ \dot{\theta}(t))^T$ et $b = -0.11$, Le modèle d'état associé au pendule inversé [Zemouche et al., 2016] est exprimé comme suit :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0.5 & b \end{pmatrix}}_{A_c} x(t) + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{D_c} \underbrace{0.5 \sin(x_1(t))}_{f_c(x(t))} \\ y(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}}_{C_c} x(t) \end{cases} \quad (2.69)$$

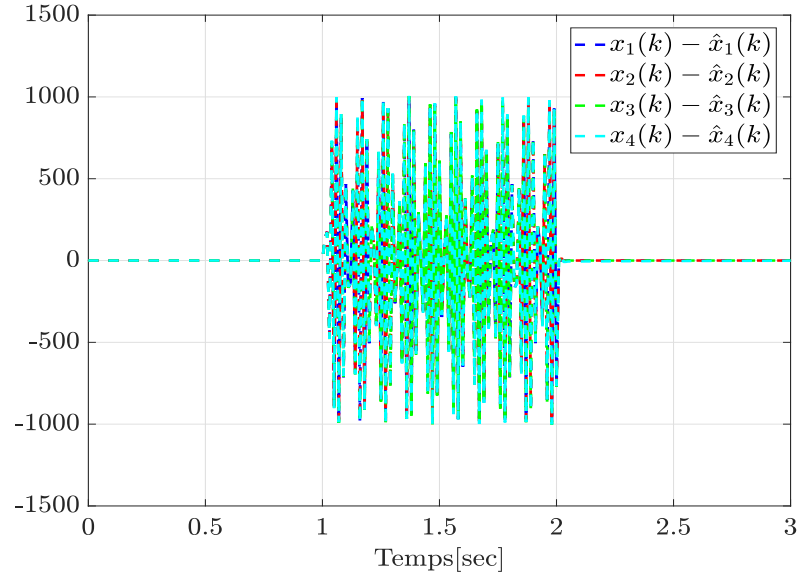


FIGURE 2.4 – L’erreur d’estimation dans un contexte bruyant avec $\omega = 0$ pour $t < 1$ et $t > 2$ ($M = 3$)

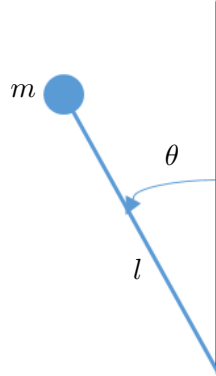


FIGURE 2.5 – Pendule inversé

La discrétisation d’Euler du système dynamique (2.68) donne

$$\begin{cases} x(k+1) = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & T \\ 0.5T & 1+bT \end{pmatrix}}_A x(k) + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_D \underbrace{0.5T \sin(x_1(t))}_{f(x(k))} \\ y(k) = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}}_C x(k) \end{cases} \quad (2.70)$$

où $T = 0.01s$ représente la période d’échantillonnage.

En supposant que les vecteurs d’état et de sortie du système sont affectés par un bruit sinusoïdal

$\omega(k)$. Le modèle du pendule inversé est donc décrit par :

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Df(x(k)) + W_1\omega(k) \\ y(k) = Cx(k) + W_2\omega(k) \end{cases} \quad (2.71)$$

avec :

$$W_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, W_2 = 0.1.$$

$f(x(k))$ satisfait le lemme A.1.1 avec $\bar{\alpha}_{f_{11}} = 0.5T$, $\underline{\alpha}_{f_{11}} = -0.5T$, $\bar{f}_{11} = T$ et

$$A \triangleq \begin{pmatrix} 1 & T \\ 0.5T - 0.5T & 1 + bT \end{pmatrix}.$$

La résolution des LMI calculée par l'approche avec fenêtre glissante, l'approche classique et le travail de [Zemouche et al., 2008] permet d'obtenir les résultats donnés par le tableau 2.3.

Approche	$\lambda_{\min}$
LMI (29) de [Zemouche et al., 2008]	1.3375
Approche classique	1.3220
Filtre avec fenêtres glissantes ($M = 2$)	1.3099

TABLE 2.3 – Détermination de $\lambda_{\min}$.

Les matrices de gains obtenues sont données ci-dessous :

- Approche de [Zemouche et al., 2008] :

$$L = \begin{pmatrix} 1.0101 \\ 1.0146 \end{pmatrix}$$

- Approche classique :

$$L = \begin{pmatrix} 1.0152 \\ 1.0142 \end{pmatrix}$$

- Filtre avec fenêtre glissante ($M = 2$) :

$$L_1 = \begin{pmatrix} 1.0163 \\ 1.0140 \end{pmatrix}$$

$$L_2 = \begin{pmatrix} 0.1112 \\ 0.1126 \end{pmatrix}$$

La valeur de $\lambda_{\min}$ calculée par le filtre avec fenêtre glissante est plus petite que celle calculée en utilisant l'approche de [Zemouche et al., 2008] ou l'approche classique, ce qui prouve que l'approche avec fenêtre glissante est plus performante. La figure 2.6 présente l'évolution de l'erreur d'estimation en utilisant l'observateur de type $\mathcal{H}_{\infty}$ avec fenêtre de mesures glissante.

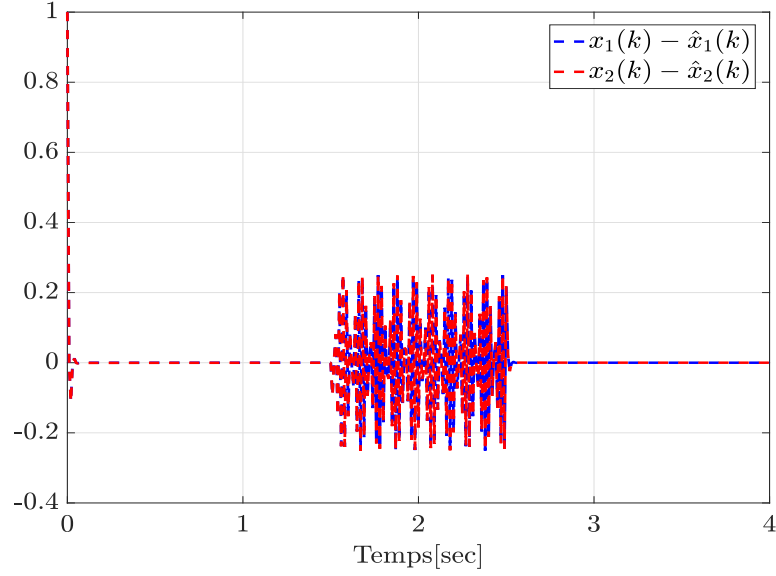
2.6.2 Cas des systèmes « one-sided Lipschitz »

Dans cette partie, un exemple d'un système non linéaire « one-sided Lipschitz » est présenté afin de montrer la supériorité du filtre proposé par rapport au filtre standard.

Considérons un système non linéaire décrit par les équations suivantes [Zhang et al., 2014] :

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) + Df(x(k)) + W_1\omega(k) \\ y(k) = Cx(k) + W_2\omega(k) \end{cases} \quad (2.72)$$

avec

FIGURE 2.6 – L'erreur d'estimation dans un contexte bruyant avec $\omega = 0$ pour $t < 1.5$ et $t > 2.5$

$$A = \begin{pmatrix} 1 - 11T & T \\ T & 1 - 9T \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, W_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$C = (1 \quad 3), W_2 = 1$$

$$f(x(k)) = T \begin{pmatrix} -x_1(x_1^2 + x_2^2) \\ -x_2(x_1^2 + x_2^2) \end{pmatrix}, u(k) = 3 \sin(kT).$$

où $T = 0.1s$ et $\omega(k)$ représentent, respectivement, la période d'échantillonnage et la perturbation aléatoire.

Propriété Lipschitz de la fonction $f(\cdot)$:

La première étape consiste à vérifier la propriété Lipschitz de la fonction $f(\cdot)$. Selon le théorème de la valeur moyenne et puisque $f(\cdot)$ est de classe $\mathcal{C}^1$, on a :

$$f(x) - f(\hat{x}) = J(x, \hat{x})(x - \hat{x}) \quad (2.73)$$

où $J(x, \hat{x})$ est la matrice jacobienne de $f(x)$ définie par :

$$J = T \begin{pmatrix} -3x_1^2 - x_2^2 & -2x_1x_2 \\ -2x_1x_2 & -3x_2^2 - x_1^2 \end{pmatrix}. \quad (2.74)$$

Comme J est une matrice symétrique, alors sa norme égale à son rayon spectral :

$$\|J\| \triangleq \max_{1 \leq i \leq 2} |\lambda_i(J)| = 3T(x_1^2 + x_2^2) \leq 3Tr^2. \quad (2.75)$$

Soit $\Gamma = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| \leq r\}$ désigne les domaines de fonctionnement de x . Un raisonnement simple peut montrer que :

$$\|f(x) - f(\hat{x})\| \leq 3Tr^2\|x - \hat{x}\|. \quad (2.76)$$

Cela signifie que, ce système est localement Lipschitz sur n'importe quel ensemble Γ avec une constante de Lipschitz égale à $3Tr^2$.

Propriété « one-sided Lipschitz » de la fonction $f(\cdot)$:

La deuxième étape consiste à vérifier la propriété « one-sided Lipschitz » de la fonction $f(\cdot)$:

$$\langle f(x) - f(\hat{x}), x - \hat{x} \rangle = T(x_1\hat{x}_1 + x_2\hat{x}_2)((x_1^2 + x_2^2) + (\hat{x}_1^2 + \hat{x}_2^2)) - T((x_1^2 + x_2^2)^2 + (\hat{x}_1^2 + \hat{x}_2^2)^2) \quad (2.77)$$

Or

$$\begin{aligned} x_1\hat{x}_1 + x_2\hat{x}_2 &= \frac{1}{2}((x_1^2 + x_2^2) + (\hat{x}_1^2 + \hat{x}_2^2) - (x_1 - \hat{x}_1)^2 - (x_2 - \hat{x}_2)^2) \\ &= \frac{1}{2}(\|x\|^2 + \|\hat{x}\|^2 - \|x - \hat{x}\|^2) \end{aligned} \quad (2.78)$$

et

$$x_1^2 + x_2^2 = \|x\|^2 \quad (2.79)$$

$$\hat{x}_1^2 + \hat{x}_2^2 = \|\hat{x}\|^2 \quad (2.80)$$

L'insertion de (2.78), (2.79) et (2.80), donne :

$$\begin{aligned} \langle f(x) - f(\hat{x}), x - \hat{x} \rangle &= \frac{T}{2}(\|x\|^2 + \|\hat{x}\|^2 - \|x - \hat{x}\|^2)(\|x\|^2 + \|\hat{x}\|^2) - T(\|x\|^4 + \|\hat{x}\|^4) \\ &= -\frac{T}{2}\|x - \hat{x}\|^2(\|x\|^2 + \|\hat{x}\|^2) + \frac{T}{2}(\|x\|^2 + \|\hat{x}\|^2)^2 - T(\|x\|^4 + \|\hat{x}\|^4) \\ &= -\frac{T}{2}\|x - \hat{x}\|^2(\|x\|^2 + \|\hat{x}\|^2) - \frac{T}{2}(\|x\|^2 - \|\hat{x}\|^2)^2 \\ &\leq 0. \end{aligned} \quad (2.81)$$

Ainsi, selon la définition A.2.1, $f(\cdot)$ est une fonction « one-sided Lipschitz » telle que $\rho = 0$.

Propriété quadratiquement bornée de la fonction $f(\cdot)$:

D'abord, le côté gauche de l'inégalité (A.7) de la définition A.3.1 est développé :

$$\begin{aligned} \|f(x) - f(\hat{x})\|^2 &= T^2\left((-x_1(x_1^2 + x_2^2) + \hat{x}_1(\hat{x}_1^2 + \hat{x}_2^2))^2 + (-x_2(x_1^2 + x_2^2) + \hat{x}_2(\hat{x}_1^2 + \hat{x}_2^2))^2\right) \\ &= T^2((x_1^2 + x_2^2)^3 + (\hat{x}_1^2 + \hat{x}_2^2)^3 - 2(x_1^2 + x_2^2)(\hat{x}_1^2 + \hat{x}_2^2)(x_1\hat{x}_1 + x_2\hat{x}_2)) \\ &= T^2(\|x\|^6 + \|\hat{x}\|^6 - \|x\|^2\|\hat{x}\|^2(\|x\|^2 + \|\hat{x}\|^2 - \|x - \hat{x}\|^2)) \\ &= T^2((\|x\|^2 - \|\hat{x}\|^2)(\|x\|^4 - \|\hat{x}\|^4) + \|x\|^2\|\hat{x}\|^2\|x - \hat{x}\|^2) \\ &= T^2((\|x\|^2 - \|\hat{x}\|^2)^2(\|x\|^2 + \|\hat{x}\|^2)\|x\|^2\|\hat{x}\|^2\|x - \hat{x}\|^2) \end{aligned} \quad (2.82)$$

De même, en utilisant (2.81), le côté droit de l'inégalité (A.7) de la définition A.3.1 devient

$$\begin{aligned} \langle f(x) - f(\hat{x}), x - \hat{x} \rangle + \beta\|x - \hat{x}\|^2 &= -\gamma\frac{T}{2}\|x - \hat{x}\|^2(\|x\|^2 + \|\hat{x}\|^2) - \gamma\frac{T}{2}(\|x\|^2 - \|\hat{x}\|^2)^2 \\ &\quad + \beta\|x - \hat{x}\|^2. \end{aligned} \quad (2.83)$$

Les expressions (2.82) et (2.83) remplissent la condition (A.7) de la définition A.3.1 si les inégalités suivantes sont vérifiées :

$$\begin{cases} \|x\|^2 + \|\hat{x}\|^2 \leq -\frac{\gamma}{2T} \\ \|x\|^2 \|\hat{x}\|^2 \leq \frac{\beta}{T^2} - \frac{\gamma}{2T} (\|x\|^2 + \|\hat{x}\|^2) \leq \frac{\beta}{T^2} + \frac{\gamma^2}{4T^2}. \end{cases} \quad (2.84)$$

pour tout $x \in \Gamma$ et $\hat{x} \in \Gamma$. Donc, la condition (A.7) de la définition A.3.1 est vérifiée si

$$\begin{cases} 2r^2 \leq -\frac{\gamma}{2T} \\ r^4 \leq \frac{\beta}{T^2} + \frac{\gamma^2}{4T^2} \end{cases} \quad (2.85)$$

et par conséquent si

$$r = \min \left(\left(-\frac{\gamma}{4T} \right)^{\frac{1}{2}}, \left(\frac{\beta}{T^2} + \frac{\gamma^2}{4T^2} \right)^{\frac{1}{4}} \right), \quad \gamma \leq 0, \quad \beta \geq \frac{-\gamma^2}{4}. \quad (2.86)$$

Alors $f(\cdot)$ est quadratiquement bornée dans Γ .

Notez que la région Γ peut être rendue arbitrairement grande en choisissant des valeurs appropriées de β et γ . Pour maximiser r dans la relation (2.86) avec une valeur donnée de γ , le paramètre β doit satisfaire

$$r = \left(-\frac{\gamma}{4T} \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\frac{\beta}{T^2} + \frac{\gamma^2}{4T^2} \right)^{\frac{1}{4}} \quad (2.87)$$

ce qui est équivalent à

$$\beta \geq -\frac{3\gamma^2}{16}. \quad (2.88)$$

Dans la suite, on choisit $\beta = 0.5$ et $\gamma = -141$.

2.6.2.1 Résultats numériques

L'évolution des composantes de l'état $x_1(k)$ et $x_2(k)$ est présentée dans la figure 2.7.

En résolvant les LMIs dans le cas standard et dans le cas de filtre à fenêtre glissante, les résultats donnés par le tableau 2.4 sont obtenus.

Approche	$\lambda_{\min}$
Approche classique	non faisable
Filtre avec fenêtres glissantes ($M = 2$)	9.8174
Filtre avec fenêtres glissantes ($M = 3$)	9.1701

TABLE 2.4 – Détermination de $\lambda_{\min}$.

Les paramètres du filtre correspondants dans chaque cas sont donnés comme suit :

- Filtre avec fenêtre glissante avec $M = 2$:

$$L_1 = \begin{pmatrix} 0.0302 \\ 0.0834 \end{pmatrix}$$

$$L_2 = \begin{pmatrix} 0.0000 \\ 0.0029 \end{pmatrix}$$

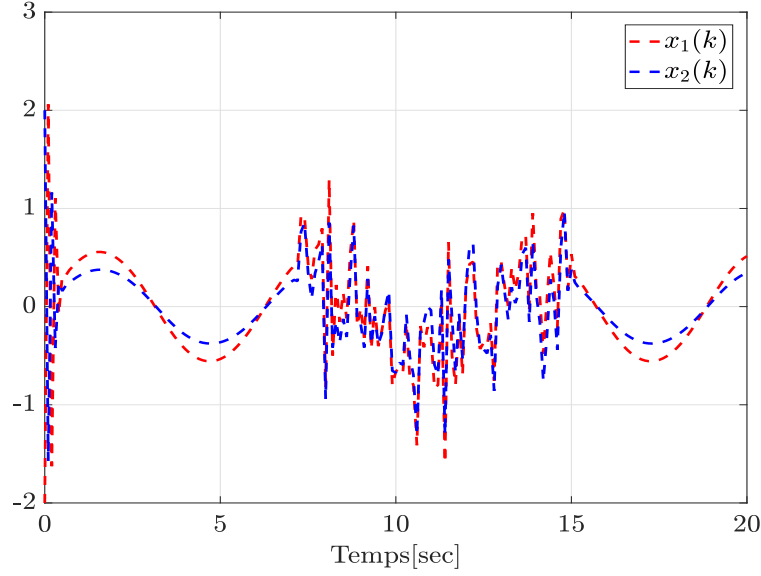


FIGURE 2.7 – Les trajectoires de $x_1(k)$ et $x_2(k)$

- Filtre avec fenêtre glissante avec $M = 3$:

$$L_1 = \begin{pmatrix} 0.0228 \\ 0.0731 \end{pmatrix}$$

$$L_2 = \begin{pmatrix} 0.0060 \\ 0.0044 \end{pmatrix}$$

$$L_3 = \begin{pmatrix} 0.0027 \\ 0.0040 \end{pmatrix}$$

La supériorité du filtre avec fenêtre glissante est très claire à partir du tableau 2.4. En effet, l'approche standard échoue pour cet exemple, tandis que le filtre avec fenêtre glissante donne des solutions pour $M = 2$ et $M = 3$, respectivement.

Comme on peut le remarquer, la valeur de $\lambda_{\min}$ calculée pour $M = 3$ est plus petite que celle calculée pour $M = 2$, ce qui signifie qu'en augmentant le nombre de mesures, une meilleure performance est obtenue. Les résultats de simulation pour $M = 2$ et $M = 3$ sont présentés dans les figures 2.8 et 2.9, respectivement. $\omega(k)$ est un bruit aléatoire tel que $|\omega(k)| < 1$.

La valeur moyenne de l'erreur pour chaque filtre est donnée par

$$e_{\text{moy}} = \frac{1}{N - k_0 + 1} \sum_{k=k_0}^N (e_1(k)^2 + e_2(k)^2)$$

avec

$$\begin{aligned} e_1(k) &= x_1(k) - \hat{x}_1(k) \\ e_2(k) &= x_2(k) - \hat{x}_2(k). \end{aligned}$$

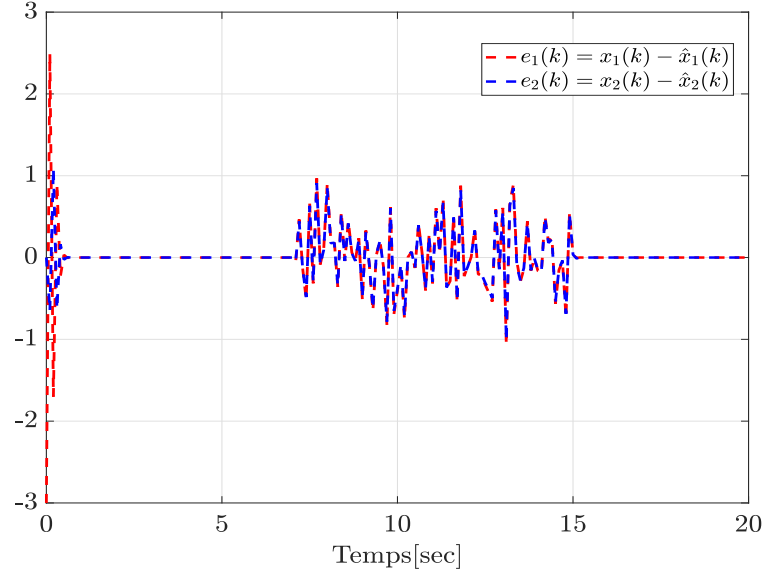


FIGURE 2.8 – L’erreur d’estimation dans un contexte bruyant avec $\omega = 0$ pour $t < 7$ et $t > 15$ ($M = 2$)

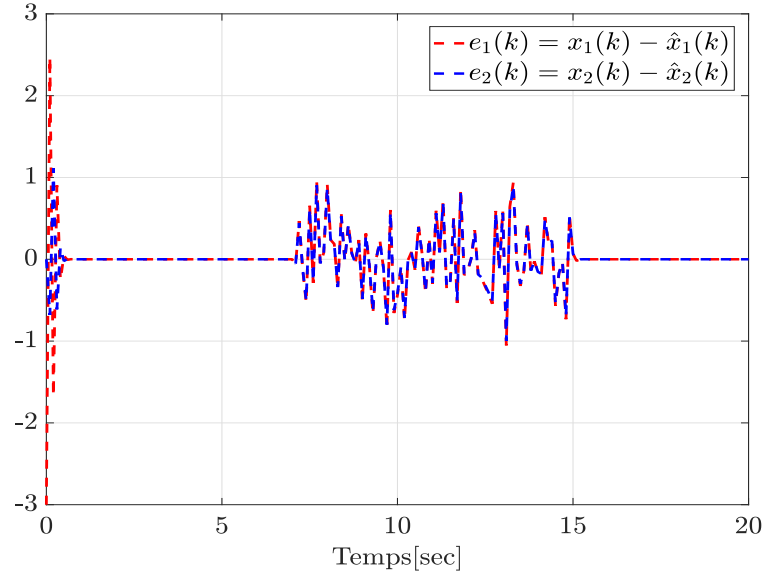


FIGURE 2.9 – L’erreur d’estimation dans un contexte bruyant avec $\omega = 0$ pour $t < 7$ et $t > 15$ ($M = 3$)

Au moment des simulations, le bruit est ajouté à partir de $t = 7s$ jusqu’à $t = 15s$, ce qui implique que $N = 150$ et $k_0 = 71$. Ainsi, la valeur moyenne de l’erreur a la forme suivante :

$$e_{\text{moy}} = \frac{1}{80} \sum_{k=71}^{150} (e_1(k)^2 + e_2(k)^2)$$

Les résultats sont donnés dans le tableau 2.5.

Approche	e_{moy}
Filtre avec fenêtre glissante ($M = 2$)	0.3911
Filtre avec fenêtre glissante ($M = 3$)	0.3889

TABLE 2.5 – Détermination de e_{moy} .

Il est clair que la valeur de e_{moy} calculée pour $M = 3$ est plus petite que celle calculée pour $M = 2$, ce qui confirme les meilleures performances du filtre à fenêtre glissante avec trois mesures.

2.6.2.2 Résultats expérimentaux

La carte ARDUINO MEGA 2560 est utilisée comme une interface Entrée/sortie (I/O interface) avec MATLAB Simulink. Après le chargement du firmware « adioserv.pde » dans la carte ARDUINO, la bibliothèque ARDUINO I/O library est ajoutée à la bibliothèque du Simulink. Ce mode d'implémentation est utilisé comme un émulateur de système en temps réel. Le modèle du système est développé sur Simulink en utilisant les fonctions MATLAB intégrées puis transféré à l'appareil Arduino comme « DSP target ». Le dispositif illustrant la mise en œuvre est donné par la figure 2.10.

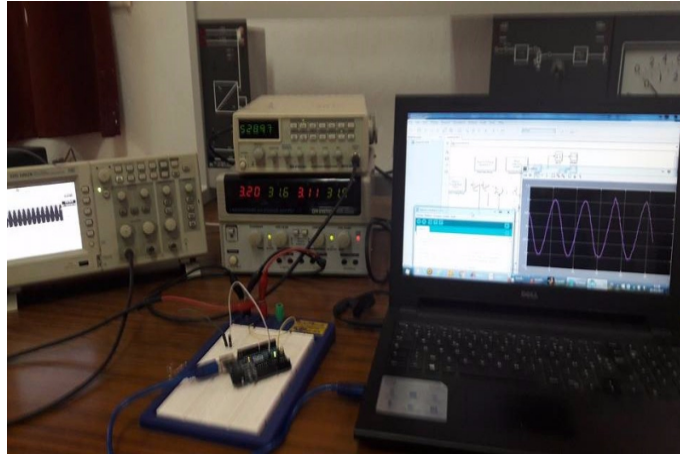
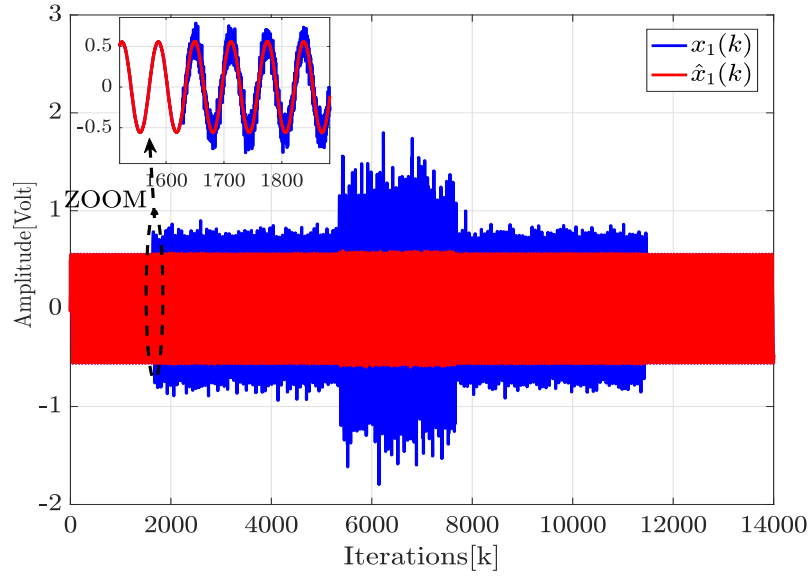
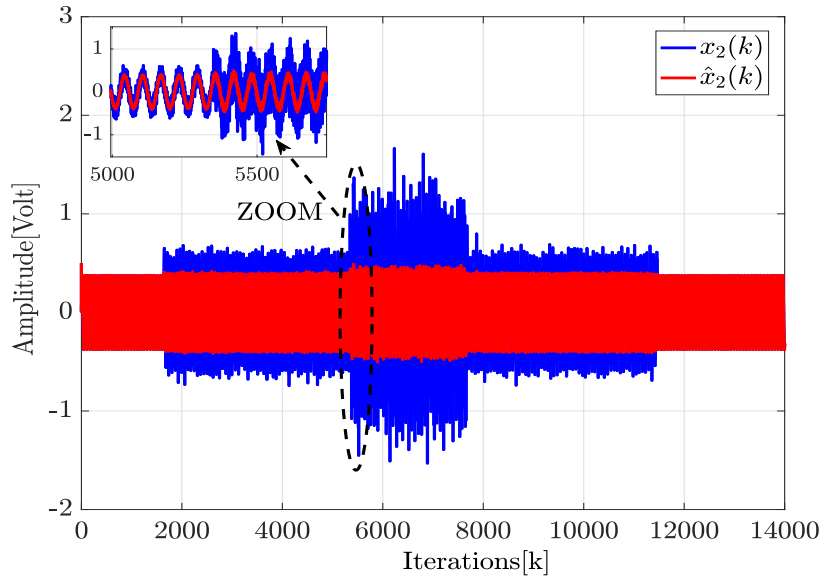


FIGURE 2.10 – Application en temps réel

Un bruit a été ajouté à l'état et à la mesure : il s'agit d'un signal sinusoïdal avec des fréquences variables entre 10Hz et 140Hz et une amplitude de $\pm 15\%$ de la valeur réelle de y . Les figures 2.11 et 2.12 présentent les trajectoires des différents composants du vecteur de l'état.

D'après les figures 2.11 et 2.12, l'état est bien estimé en utilisant l'observateur $\mathcal{H}_{\infty}$ avec fenêtre glissante.

FIGURE 2.11 – Les trajectoires de $x_1(k)$ et $\hat{x}_1(k)$ FIGURE 2.12 – Les trajectoires de $x_2(k)$ et $\hat{x}_2(k)$

2.7 Conclusion

Ce chapitre a présenté une nouvelle méthode de conception d'observateurs non linéaires de type $\mathcal{H}_\infty$. Deux classes de systèmes non linéaires ont été considérées : les systèmes Lipschitz et les systèmes « one-sided Lipschitz ». Les filtres $\mathcal{H}_\infty$ proposés offrent plus de degrés de liberté en raison de leur structure, ce qui induit des conditions LMI moins conservatrices par rapport

à celles obtenues en utilisant la structure standard de l'observateur de Luenberger. Malgré que la fenêtre de mesures glissante mène à une inégalité matricielle bilinéaire, il a été montré analytiquement que la technique de convexification proposée dans ce chapitre, pour convertir les contraintes BMI en LMI, permet d'obtenir des conditions LMI plus générales avec des variables de décision supplémentaires.

Les résultats obtenus sont validés par des simulations numériques sur différents exemples numériques. Les performances en termes de conditions de faisabilité, robustesse et temps de calcul ont été démontrées. Plusieurs exemples de simulation ont montré l'intérêt de l'approche proposée dans le cas des systèmes Lipschitz et « one-sided Lipschitz ».

Chapitre 3

Commande basée-observateur de type $\mathcal{H}_\infty$ pour les systèmes non linéaires

« Qui contrôle le passé contrôle l'avenir. »

Aldous Huxley

Sommaire

3.1	Introduction	58
3.2	Commande basée-observateur de type $\mathcal{H}_\infty$ pour les systèmes Lipschitz	58
3.2.1	Structure sans fenêtres glissantes	59
3.2.2	Structure avec fenêtres glissantes	65
3.2.3	Résultats de simulations	70
3.3	Commande basée-observateur de type $\mathcal{H}_\infty$ pour les systèmes « one-sided Lipschitz »	74
3.3.1	Structure sans fenêtres glissantes	74
3.3.2	Structure avec fenêtres glissantes	79
3.3.3	Résultats de simulations	85
3.4	Conclusion	86

3.1 Introduction

Le contrôle d'un procédé physique nécessite la connaissance de l'état du système décrivant la totalité de son comportement. Cependant, il est difficile, voir impossible, d'avoir accès à la totalité des composantes de l'état. Par conséquent, on distingue deux stratégies de loi de commande : la première utilise un retour de sortie et la deuxième est basée sur l'utilisation d'un observateur de l'état. Dans la littérature, de nombreux chercheurs se sont concentrés sur la conception de commande basée-observateur pour les systèmes non linéaires que ce soit en temps continu ou en temps discret [Pagilla et Zhu, 2004, Ibrir et al., 2005, Ibrir, 2008, Heemels et al., 2010, Grandvallet et al., 2013, Benallouch et al., 2014, Mao et al., 2014, Kheloufi et al., 2016].

Ce chapitre propose de nouvelles méthodes de synthèse de commande basée-observateur $\mathcal{H}_\infty$ pour les systèmes non linéaires à temps discret. Habituellement, la synthèse de commande basée-observateur pour les systèmes considérés conduit à la faisabilité d'une inégalité matricielle bilinéaire. La résolution d'une contrainte BMI est un problème d'optimisation NP-difficile alors que les LMIs sont des problèmes convexes facilement traitables par des algorithmes d'optimisation (LMI Toolboxes, ...). Linéariser une contrainte BMI est un défi très intéressant. Le but de ce chapitre est donc de développer de nouvelles conditions LMI assurant la convergence asymptotique du système considéré en boucle fermée. En raison de l'introduction d'une technique performante, le problème des BMIs habituel est transformé de manière équivalente en un problème plus approprié permettant, ainsi, d'obtenir des conditions LMI moins conservatives par rapport aux méthodes existantes dans la littérature. L'extension de cette méthode dans le cas de l'utilisation d'une fenêtre glissante dans la structure de l'observateur ainsi que celle du contrôleur est établie. Les contraintes obtenues sont plus générales et moins restrictives que les premières, considérées comme des solutions particulières. Les deux classes de systèmes non linéaires Lipschitz et « one-sided Lipschitz » sont utilisées. Pour bien illustrer l'efficacité et la supériorité de la méthode proposée, plusieurs exemples numériques avec comparaisons sont fournis.

3.2 Commande basée-observateur de type $\mathcal{H}_\infty$ pour les systèmes Lipschitz

L'idée consiste à présenter une nouvelle méthode de conception de commande basée-observateur de type $\mathcal{H}_\infty$ pour les systèmes Lipschitz à temps discret. Deux stratégies de commande sont proposées : la première utilise les structures standards de l'observateur de Luenberger avec un retour d'état classique et la deuxième utilise les mêmes structures mais en ajoutant deux fenêtres glissantes.

La classe des systèmes non linéaires considérée est la suivante :

$$\begin{cases} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) + Df(x(k)) + W_1\omega(k) \\ y(k) &= Cx(k) + W_2\omega(k) \end{cases} \quad (3.1)$$

où $x(k) \in \mathbb{R}^n$, $u(k) \in \mathbb{R}^m$, $y(k) \in \mathbb{R}^p$ et $\omega(k) \in \mathbb{R}^r$ représentent, respectivement, l'état, l'entrée, la sortie et la perturbation. $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$, $D \in \mathbb{R}^{n \times q}$, $W_1 \in \mathbb{R}^{n \times r}$ et $W_2 \in \mathbb{R}^{p \times r}$ sont des matrices constantes. $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^q$ est une fonction non linéaire supposée Lipschitz. Cette

fonction non liéaire est sous la forme

$$f(x(k)) = \begin{pmatrix} f_1(E_1x(k)) \\ f_2(E_2x(k)) \\ \vdots \\ f_q(E_qx(k)) \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

avec $E_i \in \mathbb{R}^{n_i \times n}$.

3.2.1 Structure sans fenêtres glissantes

3.2.1.1 Position du problème

On considère l'observateur de Luenberger suivant pour le système non linéaire (3.1) :

$$\begin{cases} \hat{x}(k+1) &= A\hat{x}(k) + Bu(k) + D \begin{pmatrix} f_1(E_1\hat{x}(k)) \\ f_2(E_2\hat{x}(k)) \\ \vdots \\ f_q(E_q\hat{x}(k)) \end{pmatrix} + L(y(k) - \hat{y}(k)) \\ \hat{y}(k) &= C\hat{x}(k) \end{cases} \quad (3.3)$$

couplé avec la loi de commande suivante :

$$u(k) = K\hat{x}(k) \quad (3.4)$$

où $\hat{x}(k)$ représente l'état estimé de $x(k)$.

Le gain de l'observateur L et le gain de la commande K sont des matrices inconnues à déterminer telles que $\hat{x}(k)$ converge asymptotiquement vers $x(k)$.

L'erreur d'estimation est définie comme suit :

$$e(k) = x(k) - \hat{x}(k). \quad (3.5)$$

Ensuite, la dynamique de l'erreur d'estimation $e(k+1)$ est donnée par :

$$e(k+1) = x(k+1) - \hat{x}(k+1). \quad (3.6)$$

En utilisant les équations (3.1), (3.3) et (3.4), $\hat{x}(k+1)$ et $e(k+1)$ peuvent être réécrites comme suit :

$$\hat{x}(k+1) = (A + BK)\hat{x}(k) + LCe(k) + Df(\hat{x}(k)) + LW_2\omega(k) \quad (3.7)$$

$$e(k+1) = (A - LC)e(k) + D(f(x(k)) - f(\hat{x}(k))) + (W_1 - LW_2)\omega(k) \quad (3.8)$$

Comme indiqué précédemment, $f(\cdot)$ est globalement Lipschitz. En supposant que $f(0) = 0$ et en appliquant le lemme A.1.1 de l'annexe A à cette fonction non linéaire, on obtient

$$f(\hat{x}(k)) = \sum_{i,j=1}^{q,n_i} \varphi_{ij} H_{ij} E_i \hat{x}(k) = \Sigma_1 \hat{x}(k) \quad (3.9)$$

et

$$f(x(k)) - f(\hat{x}(k)) = \sum_{i,j=1}^{q,n_i} \psi_{ij} H_{ij} E_i e(k) = \Sigma_2 e(k) \quad (3.10)$$

avec

$$\begin{aligned}
 \underline{\alpha}_{f_{ij}} &\leq \varphi_{ij} \leq \bar{\alpha}_{f_{ij}} \\
 \underline{\alpha}_{f_{ij}} &\leq \psi_{ij} \leq \bar{\alpha}_{f_{ij}} \\
 \varphi_{ij} &\triangleq \varphi_{ij}(\hat{\varrho}_i^{0_{i,j-1}}, \hat{\varrho}_i^{0_{i,j}}) \\
 \psi_{ij} &\triangleq \psi_{ij}(\hat{\varrho}_i^{\hat{\varrho}_{i,j-1}}, \hat{\varrho}_i^{\hat{\varrho}_{i,j}}) \\
 \varrho_i &= E_i x(k) \\
 \hat{\varrho}_i &= E_i \hat{x}(k) \\
 H_{ij} &= e_q(i) e_{n_i}^T(j).
 \end{aligned}$$

Sans perte de généralité [Hassan et al., 2011], on peut supposer que

$$\begin{aligned}
 \underline{f}_{ij} &\leq \varphi_{ij} \leq \bar{f}_{ij} \\
 \underline{f}_{ij} &\leq \psi_{ij} \leq \bar{f}_{ij}
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

avec $\underline{f}_{ij} = 0$ et $\bar{f}_{ij} = \bar{\alpha}_{f_{ij}} - \underline{\alpha}_{f_{ij}}$ et $A \triangleq A + D \sum_{i,j=1}^{q,n_i} \underline{\alpha}_{f_{ij}} H_{ij} E_i$.

Le système augmenté composé de l'état estimé et de l'erreur d'estimation est défini par :

$$\bar{x}(k+1) = \bar{A}\bar{x}(k) + \Sigma\bar{x}(k) + \bar{W}\omega(k) \tag{3.12}$$

avec

$$\begin{aligned}
 \bar{x}(k) &= \begin{pmatrix} \hat{x}(k) \\ e(k) \end{pmatrix}, \bar{A} = \begin{pmatrix} A + BK & LC \\ 0 & A - LC \end{pmatrix} \\
 \Sigma &= \begin{pmatrix} D \sum_{i,j=1}^{q,n_i} \varphi_{ij} H_{ij} E_i & 0 \\ 0 & D \sum_{i,j=1}^{q,n_i} \psi_{ij} H_{ij} E_i \end{pmatrix}, \bar{W} = \begin{pmatrix} LW_2 \\ W_1 - LW_2 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Pour synthétiser une commande basée-observateur de type $\mathcal{H}_\infty$, on doit trouver le gain de l'observateur L et le gain de la commande K tels que le système en boucle fermée (3.12) soit asymptotiquement stable et le critère $\mathcal{H}_\infty$ suivant soit garanti :

$$\|Ge\|_{l_2} \leq \lambda \|\omega\|_{l_2} \tag{3.13}$$

où G est une matrice connue et $\lambda > 0$ est le niveau d'atténuation des perturbations qui sera minimisé.

La résolution de ce problème revient à chercher une fonction de Lyapunov $V(k)$ telle que

$$\Lambda = \Delta V(k) + \bar{x}(k)^T \begin{pmatrix} 0 \\ G^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & G \end{pmatrix} \bar{x}(k) - \lambda^2 \omega^T(k) \omega(k) < 0. \tag{3.14}$$

c'est à dire

$$\Lambda = \Delta V(k) + \bar{x}(k)^T \mathbb{G} \bar{x}(k) - \lambda^2 \omega^T(k) \omega(k) < 0 \tag{3.15}$$

avec $\mathbb{G} = \begin{pmatrix} 0 \\ G^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & G^T G \end{pmatrix}$.

Soit la fonction de Lyapunov suivante :

$$V(k) = \bar{x}^T(k) P \bar{x}(k) \quad (3.16)$$

où $P = P^T > 0$ est la matrice de Lyapunov.

Pour résoudre ce genre de problème, la plupart des travaux existants sur la conception de lois de commande basées observateurs pour les systèmes linéaires et non linéaires. [Grandvallet *et al.*, 2013, Zemouche *et al.*, 2017] utilisent une forme particulière de la matrice $P = \text{bloc-diag}(P_1, P_2)$. Cette forme spécifique permet de simplifier le calcul et de surmonter le problème des bilinéarités. Mais, les LMIs qui en résultent restent restrictive à cause de l'utilisation de cette solution particulière. Dans cette contribution, une nouvelle forme de la matrice P est utilisée pour obtenir des nouvelles conditions LMI moins conservatives.

Considérons la forme suivante de la matrice de Lyapunov :

$$P = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12}^T & P_{22} \end{pmatrix}. \quad (3.17)$$

Soit $\Delta V(k) = V(k+1) - V(k)$. En utilisant (3.12) on obtient

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \bar{x}(k) \\ \omega(k) \end{pmatrix}^T \Pi \begin{pmatrix} \bar{x}(k) \\ \omega(k) \end{pmatrix} \quad (3.18)$$

avec

$$\Pi = \begin{pmatrix} (\bar{A} + \Sigma)^T P (\bar{A} + \Sigma) - P + \mathbb{G} & (\bar{A} + \Sigma)^T P \bar{W} \\ (\star) & \bar{W}^T P \bar{W} - \lambda^2 I_r \end{pmatrix}. \quad (3.19)$$

Notez que $\Lambda < 0$ est satisfaite si $\Pi < 0$. Ceci est équivalent à

$$\begin{pmatrix} -P + \mathbb{G} & 0 \\ 0 & -\lambda^2 I_r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (\bar{A} + \Sigma)^T \\ \bar{W}^T \end{pmatrix} P \begin{pmatrix} \bar{A} + \Sigma & \bar{W} \end{pmatrix} < 0. \quad (3.20)$$

En appliquant le lemme de Schur B.2.1 sur (3.20), on obtient

$$\begin{pmatrix} -P + \mathbb{G} & 0 & (\bar{A} + \Sigma)^T \\ (\star) & -\lambda^2 I_r & \bar{W}^T \\ (\star) & (\star) & -P^{-1} \end{pmatrix} < 0. \quad (3.21)$$

Il est évident que l'inégalité (3.21) ne contient pas de produits de termes inconnus pouvant poser des problèmes de bilinéarité. Cependant, la résolution directe de cette inégalité matricielle reste impossible avec les outils mathématiques disponibles. Ce problème est causé par l'existence d'une matrice inconnue avec son inverse (P et P^{-1}) dans la même contrainte. Pour surmonter ce problème, une méthode de conception utile est illustrée dans le paragraphe suivant.

3.2.1.2 Analyse de la stabilité

Dans ce paragraphe, la procédure de conception de la commande basée-observateur de type $\mathcal{H}_\infty$ proposée est détaillée. Des nouvelles conditions LMI sont présentées. La contribution principale est détaillée dans le théorème suivant.

Théorème 3.2.1. *Pour un niveau d'atténuation des perturbations $\lambda > 0$, le problème de la commande basée-observateur de type $\mathcal{H}_\infty$ correspondant au système (3.1), l'observateur (3.3) et la commande (3.4) est asymptotiquement stable au sens de Lyapunov s'il existe un scalaire δ et des matrices $\hat{P}_{11}, \hat{P}_{12}, P_{22}, \hat{Q}_{11}, Q_{22} \in \mathbb{R}^{n \times n}, S_{ij}, \tilde{S}_{ij}, \bar{S}_{ij} \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}, \hat{L} \in \mathbb{R}^{n \times q}$ et $\hat{K} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ tels que la LMI suivante soit faisable :*

minimiser λ en respectant

$$\begin{pmatrix} \Omega & (\Theta_1 & \cdots & \Theta_q) \\ (\star) & -\Psi \Xi \end{pmatrix} < 0 \quad (3.22)$$

avec

$$\Omega = \begin{pmatrix} -\hat{P}_{11} & -\hat{P}_{12} & 0 & \hat{Q}_{11}A^T + \hat{K}B^T & 0 \\ (\star) & G^TG - P_{22} & 0 & A^T(I_n - \delta Q_{22})^T + \delta C^T \hat{L}^T & A^T Q_{22}^T - C^T \hat{L}^T \\ (\star) & (\star) & -\lambda^2 I_r & W_1^T(I_n - \delta Q_{22})^T + \delta W_2^T \hat{L}^T & W_1^T Q_{22}^T - W_2^T \hat{L}^T \\ (\star) & (\star) & (\star) & \hat{P}_{11} - \hat{Q}_{11} - \hat{Q}_{11}^T & \hat{P}_{12} - I_n + \delta Q_{22} \\ (\star) & (\star) & (\star) & (\star) & P_{22} - Q_{22} - Q_{22}^T \end{pmatrix} \quad (3.23)$$

$$\Theta_i = (\Theta_{i1} \quad \cdots \quad \Theta_{in_i})$$

$$\Theta_{ij} = \begin{pmatrix} \hat{Q}_{11}E_i^T & 0 & 0 \\ 0 & E_i^T \tilde{S}_{ij}^T & E_i^T \bar{S}_{ij}^T \\ 0 & 0 & 0 \\ DH_{ij}S_{ij}^T & (I_n - \delta Q_{22})DH_{ij} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{22}DH_{ij} \end{pmatrix}$$

$$\Psi = \text{bloc-diag} \quad (\Psi_1, \dots, \Psi_q)$$

$$\Psi_i = \text{bloc-diag} \quad (\frac{2}{f_{i1}}I_{n_i}, \dots, \frac{2}{f_{in_i}}I_{n_i})$$

$$\Xi = \text{bloc-diag} \quad (\Xi_1, \dots, \Xi_q)$$

$$\Xi_i = \text{bloc-diag} \quad (\Xi_{i1}, \dots, \Xi_{in_i})$$

$$\Xi_{ij} = \text{bloc-diag} \quad (S_{ij}, \tilde{S}_{ij}, \bar{S}_{ij})$$

Lorsque la contrainte (3.22) est faisable, les matrices de gains sont données par $L = Q_{22}^{-1} \hat{L}$ et $K = \hat{K}^T \hat{Q}_{11}^{-T}$. $\square$

Démonstration. À notre connaissance, la meilleure façon de linéariser l'inégalité de Lyapunov dans ce cas est l'introduction d'une nouvelle variables dite « slack variables » [Oliveira et al., 1999, Daafouz et al., 2002]. Au début, on utilise le principe de congruence comme suit : on pré- et post-multiplie (3.21) par la matrice bloc-diag(I, I, Q) et la matrice bloc-diag(I, I, Q^T) respectivement. La contrainte suivante est, alors, obtenue :

$$\begin{pmatrix} -P + \mathbb{G} & 0 & (\bar{A} + \Sigma)^T Q^T \\ (\star) & -\lambda^2 I_r & \bar{W}^T Q^T \\ (\star) & (\star) & -QP^{-1}Q^T \end{pmatrix} < 0. \quad (3.24)$$

Ensuite, en utilisant l'inégalité $-QP^{-1}Q^T \leq P - Q - Q^T$ [Heemels et al., 2010], la contrainte suivante est obtenue :

$$\begin{pmatrix} -P + \mathbb{G} & 0 & (\bar{A} + \Sigma)^T Q^T \\ (\star) & -\lambda^2 I_r & \bar{W}^T Q^T \\ (\star) & (\star) & P - Q - Q^T \end{pmatrix} < 0. \quad (3.25)$$

où P est sous la forme (3.17). Ensuite, on propose la structure suivante de Q :

$$Q = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{pmatrix}. \quad (3.26)$$

En substituant (3.17) et (3.26) dans l'inégalité (3.25) et après quelques développements mathématiques, l'inégalité suivante est obtenue :

$$\begin{pmatrix} -P_{11} & -P_{12} & 0 & \Pi_{14} & \Pi_{15} \\ (\star) & G^T G - P_{22} & 0 & \Pi_{24} & \Pi_{25} \\ (\star) & (\star) & -\lambda^2 I_r & \Pi_{34} & \Pi_{35} \\ (\star) & (\star) & (\star) & P_{11} - Q_{11} - Q_{11}^T & P_{12} - Q_{12} - Q_{21}^T \\ (\star) & (\star) & (\star) & (\star) & P_{22} - Q_{22} - Q_{22}^T \end{pmatrix} < 0 \quad (3.27)$$

avec

$$\begin{aligned} \Pi_{14} &= (A + BK + D\Sigma_1)^T Q_{11}^T \\ \Pi_{15} &= (A + BK + D\Sigma_1)^T Q_{21}^T \\ \Pi_{24} &= (A + D\Sigma_2)^T Q_{12}^T + (LC)^T (Q_{11} - Q_{12})^T \\ \Pi_{25} &= (A + D\Sigma_2)^T Q_{22}^T + (LC)^T (Q_{21} - Q_{22})^T \\ \Pi_{34} &= W_1^T Q_{12}^T + (LW_2)^T (Q_{11} - Q_{12})^T \\ \Pi_{35} &= W_1^T Q_{22}^T + (LW_2)^T (Q_{21} - Q_{22})^T. \end{aligned}$$

Notez ici que le gain de l'observateur L est couplé à la fois avec $Q_{11} - Q_{12}$ et $Q_{21} - Q_{22}$. Pour éliminer ces termes bilinéaires, la première stratégie proposée consiste à éliminer ces termes bilinéaires en posant $Q_{11} - Q_{12} = 0$ et $Q_{21} - Q_{22} = 0$. Mais, puisque la matrice Q_{21} multiplie également le gain de la commande K dans Π_{15} , donc elle devrait être nulle. Ainsi, on peut choisir $Q_{12} = Q_{11}$ et on obtient $Q = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{11} \\ 0 & Q_{22} \end{pmatrix}$ comme dans [Kheloufi et al., 2016].

Cependant, pour obtenir des LMIs moins restrictives, une matrice Q_{12} plus générale est utilisée au lieu de Q_{11} . Autrement dit, on prend

$$Q = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ 0 & Q_{22} \end{pmatrix}. \quad (3.28)$$

où Q_{12} sera sélectionnée de manière appropriée après avoir utilisé le principe de congruence.

En multipliant (3.27) à gauche et à droite par la matrice bloc-diag($\hat{Q}_{11}, I, I, \hat{Q}_{11}, I$) et la matrice bloc-diag($\hat{Q}_{11}^T, I, I, \hat{Q}_{11}^T, I$) avec $\hat{Q}_{11} = Q_{11}^{-1}$ et en utilisant les notations $\hat{P}_{12} = \hat{Q}_{11} P_{12}$, $\hat{P}_{11} = \hat{Q}_{11} P_{11} \hat{Q}_{11}^T$ l'inégalité suivante est obtenue :

$$\begin{pmatrix} -\hat{P}_{11} & -\hat{P}_{12} & 0 & \Pi_{14} & 0 \\ (\star) & G^T G - P_{22} & 0 & \Pi_{24} & \Pi_{25} \\ (\star) & (\star) & -\lambda^2 I_r & \Pi_{34} & \Pi_{35} \\ (\star) & (\star) & (\star) & \hat{P}_{11} - \hat{Q}_{11} - \hat{Q}_{11}^T & \hat{P}_{12} - \hat{Q}_{11} Q_{12} \\ (\star) & (\star) & (\star) & (\star) & P_{22} - Q_{22} - Q_{22}^T \end{pmatrix} < 0 \quad (3.29)$$

avec

$$\begin{aligned} \Pi_{14} &= \hat{Q}_{11} (A + BK + D\Sigma_1)^T \\ \Pi_{24} &= (A + D\Sigma_2)^T (\hat{Q}_{11} Q_{12})^T + (LC)^T (I_n - \hat{Q}_{11} Q_{12})^T \\ \Pi_{25} &= (A - LC + D\Sigma_2)^T Q_{22}^T \\ \Pi_{34} &= W_1^T (\hat{Q}_{11} Q_{12})^T + (LW_2)^T (I_n - \hat{Q}_{11} Q_{12})^T \\ \Pi_{35} &= (W_1 - LW_2)^T Q_{22}^T. \end{aligned}$$

Ici, on peut remarquer que le gain L multiplie Q_{22} et $(I_n - \hat{Q}_{11}Q_{12})$ en même temps. Le meilleur choix pour surmonter ce problème est de prendre $I_n - \hat{Q}_{11}Q_{12} = Q_{22}$, ce qui revient à choisir $Q_{12} = Q_{11} - Q_{11}Q_{22}$.

De plus, on peut ajouter un scalaire δ pour obtenir une LMI plus relaxée. Ainsi, on obtient $Q_{12} = Q_{11} - \delta Q_{11}Q_{22}$. Donc, la matrice Q a la forme suivante :

$$Q = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{11} - \delta Q_{11}Q_{22} \\ 0 & Q_{22} \end{pmatrix}. \quad (3.30)$$

Ensuite, on obtient

$$\begin{pmatrix} -\hat{P}_{11} & -\hat{P}_{12} & 0 & \hat{Q}_{11}(A+BK)^T & 0 \\ (\star) & G^T G - P_{22} & 0 & A^T(I_n - \delta Q_{22})^T + \delta(LC)^T Q_{22}^T & (A - LC)^T Q_{22}^T \\ (\star) & (\star) & -\lambda^2 I_r & W_1^T(I_n - \delta Q_{22})^T + \delta(LW_2)^T Q_{22}^T & (W_1 - LW_2)^T Q_{22}^T \\ (\star) & (\star) & (\star) & \hat{P}_{11} - \hat{Q}_{11} - \hat{Q}_{11}^T & \hat{P}_{12} - I_n + \delta Q_{22} \\ (\star) & (\star) & (\star) & (\star) & P_{22} - Q_{22} - Q_{22}^T \end{pmatrix} \\ + \sum_{i,j=1}^{p,n_i} \varphi_{ij} (Y_i^T Z_{ij} + Z_{ij}^T Y_i) + \sum_{i,j=1}^{p,n_i} \psi_{ij} (\tilde{Y}_i^T \tilde{Z}_{ij} + \tilde{Z}_{ij}^T \tilde{Y}_i) + \sum_{i,j=1}^{p,n_i} \bar{\psi}_{ij} (\bar{Y}_i^T \bar{Z}_{ij} + \bar{Z}_{ij}^T \bar{Y}_i) < 0 \quad (3.31)$$

avec

$$Y_i^T = \begin{pmatrix} \hat{Q}_{11} E_i^T \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tilde{Y}_i^T = \begin{pmatrix} 0 \\ E_i^T \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \bar{Y}_i^T = \begin{pmatrix} 0 \\ E_i^T \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ Z_{ij} = (0 \quad 0 \quad 0 \quad H_{ij}^T D^T \quad 0) \\ \tilde{Z}_{ij} = (0 \quad 0 \quad 0 \quad H_{ij}^T D^T (I_n - Q_{22})^T \quad 0) \\ \bar{Z}_{ij} = (0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad H_{ij}^T D^T Q_{22}^T).$$

Maintenant, en appliquant le lemme B.4.2, défini dans l'annexe B, sur (3.31), on obtient

$$Y_i^T Z_{ij} + Z_{ij}^T Y_i \leq \frac{1}{2} (Y_i + S_{ij} Z_{ij})^T S_{ij}^{-1} (Y_i + S_{ij} Z_{ij}) \\ \bar{Y}_i^T \bar{Z}_{ij} + \bar{Z}_{ij}^T \bar{Y}_i \leq \frac{1}{2} (\bar{Y}_i + \bar{S}_{ij} \bar{Z}_{ij})^T \bar{S}_{ij}^{-1} (\bar{Y}_i + \bar{S}_{ij} \bar{Z}_{ij}) \\ \tilde{Y}_i^T \tilde{Z}_{ij} + \tilde{Z}_{ij}^T \tilde{Y}_i \leq \frac{1}{2} (\tilde{Y}_i + \tilde{S}_{ij} \tilde{Z}_{ij})^T \tilde{S}_{ij}^{-1} (\tilde{Y}_i + \tilde{S}_{ij} \tilde{Z}_{ij}).$$

Enfin, en utilisant l'équation de Q donnée par (3.30) et les changements de variables $\hat{K} = \hat{Q}_{11}K^T$ et $\hat{L} = Q_{22}L$, on peut obtenir la LMI décrite dans (3.22). $\square$

Remarque 3.2.1. Notez que (3.22) est une LMI si on fixe à priori δ . Ainsi, on utilise la méthode de maillage par rapport à δ , pour résoudre cette LMI. $\square$

3.2.2 Structure avec fenêtres glissantes

Dans cette partie, une nouvelle technique de commande basée-observateur de type $\mathcal{H}_\infty$ est fournie pour améliorer le résultat présenté dans la partie précédente. Une contrainte LMI moins restrictive sera obtenue. L'idée consiste à ajouter une fenêtre de mesures glissante à l'observateur de Luenberger et d'utiliser une nouvelle reformulation de la loi commande contenant des états retardés. L'utilisation des fenêtres glissantes permet d'augmenter le degré de liberté de la contrainte à vérifier.

3.2.2.1 Position du problème

Avant de donner la nouvelle structure de la loi de commande, on présente la forme de l'observateur considérée. Ainsi, pour le système (3.1), on considère l'observateur avec fenêtre glissante suivant :

$$\hat{x}(k+1) = A\hat{x}(k) + Bu(k) + Df(\hat{x}(k)) + \mathcal{L} \begin{pmatrix} y(k) - C\hat{x}(k) \\ y(k-1) - C\hat{x}(k-1) \\ \vdots \\ y(k-M+1) - C\hat{x}(k-M+1) \end{pmatrix} \quad (3.32)$$

où $\hat{x}(k)$, $\mathcal{L}$ et M représentent, respectivement, l'état estimé, le gain de l'observateur et le nombre de mesures.

Ensuite, l'équation d'état (3.1) peut être réécrite sous une nouvelle forme contenant les mesures retardées. Le nouveau vecteur d'état est décrit par :

$$\mathcal{X}(k+1) = \mathcal{A}\mathcal{X}(k) + \mathcal{B}u(k) + \mathcal{D}f(\mathcal{F}^T \mathcal{X}(k)) + \mathcal{W}_1 \varpi(k) \quad (3.33)$$

avec

$$\begin{aligned} \mathcal{X}(k) &= \begin{pmatrix} x(k) \\ x(k-1) \\ \vdots \\ x(k-M+1) \end{pmatrix}, \quad \varpi(k) = \begin{pmatrix} \omega(k) \\ \omega(k-1) \\ \vdots \\ \omega(k-N+1) \end{pmatrix} \\ \mathcal{A} &= \begin{pmatrix} A & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ I_n & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & I_n & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{W}_1 = \begin{pmatrix} W_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \mathcal{B} &= \begin{pmatrix} B \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{F} = \begin{pmatrix} I_n \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{D} = \begin{pmatrix} D \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ainsi, une nouvelle reformulation de l'observateur (3.32) est déduite :

$$\hat{\mathcal{X}}(k+1) = \mathcal{A}\hat{\mathcal{X}}(k) + \mathcal{B}u(k) + \mathcal{D}f(\mathcal{F}^T \hat{\mathcal{X}}(k)) + \mathcal{F}\mathcal{L}\mathcal{C}\varepsilon(k) + \mathcal{F}\mathcal{L}\mathcal{W}_2 \varpi(k) \quad (3.34)$$

où

$\varepsilon(k) = \mathcal{X}(k) - \hat{\mathcal{X}}(k)$ représente l'erreur d'estimation

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= (L_1 \quad L_2 \quad \cdots \quad L_M) \\ \mathcal{C} &= \text{bloc-diag} \left(\overbrace{C, \dots, C}^{M \text{ fois}} \right) \\ \mathcal{W}_2 &= \text{bloc-diag} \left(\overbrace{W_2, \dots, W_2}^{M \text{ fois}} \right).\end{aligned}$$

La nouvelle loi de commande est de la forme suivante :

$$u(k) = \sum_{i=1}^M K_i \hat{x}(k-i+1) \quad (3.35)$$

Cette loi de commande peut être réécrite comme suit :

$$u(k) = \mathcal{K} \hat{\mathcal{X}}(k) \quad (3.36)$$

avec

$$\mathcal{K} = (K_1 \quad K_2 \quad \cdots \quad K_M).$$

à partir de (3.9) et (3.10) et en utilisant le fait que $x(k) = \mathcal{F}^T \mathcal{X}(k)$ et $\hat{x}(k) = \mathcal{F}^T \hat{\mathcal{X}}(k)$, on obtient

$$f(\mathcal{F}^T \hat{\mathcal{X}}(k)) = \sum_{i,j=1}^{q,n_i} \varphi_{ij} H_{ij} E_i \mathcal{F}^T \hat{\mathcal{X}}(k) = \Sigma_1 \mathcal{F}^T \hat{\mathcal{X}}(k) \quad (3.37)$$

et

$$f(\mathcal{F}^T \mathcal{X}(k)) - f(\mathcal{F}^T \hat{\mathcal{X}}(k)) = \sum_{i,j=1}^{q,n_i} \psi_{ij} H_{ij} E_i \mathcal{F}^T \varepsilon(k) = \Sigma_2 \mathcal{F}^T \varepsilon(k). \quad (3.38)$$

À partir de (3.33), (3.34), (3.36), (3.37) et (3.38), l'état estimé et la dynamique de l'erreur d'estimation sont réécrits comme suit :

$$\hat{\mathcal{X}}(k+1) = (\mathcal{A} + \mathcal{BK} + \mathcal{D}\Sigma_1 \mathcal{F}^T) \hat{\mathcal{X}}(k) + \mathcal{FLC} \varepsilon(k) + \mathcal{FLW}_2 \varpi(k) \quad (3.39)$$

$$\varepsilon(k+1) = (\mathcal{A} - \mathcal{FLC} + \mathcal{D}\Sigma_2 \mathcal{F}^T) \varepsilon(k) + (\mathcal{W}_1 - \mathcal{FLW}_2) \varpi(k) \quad (3.40)$$

Ainsi, le système augmenté sera décrit par

$$\bar{x}(k+1) = \bar{A} \bar{x}(k) + \Sigma \bar{x}(k) + \bar{W} \varpi(k) \quad (3.41)$$

avec

$$\begin{aligned}\bar{x}(k) &= \begin{pmatrix} \hat{\mathcal{X}}(k) \\ \varepsilon(k) \end{pmatrix}, \quad \bar{A} = \begin{pmatrix} \mathcal{A} + \mathcal{BK} & \mathcal{FLC} \\ 0 & \mathcal{A} - \mathcal{FLC} \end{pmatrix} \\ \Sigma &= \begin{pmatrix} \mathcal{D} \sum_{i,j=1}^{q,n_i} \varphi_{ij} H_{ij} E_i \mathcal{F}^T & 0 \\ 0 & \mathcal{D} \sum_{i,j=1}^{q,n_i} \psi_{ij} H_{ij} E_i \mathcal{F}^T \end{pmatrix}, \quad \bar{W} = \begin{pmatrix} \mathcal{FLW}_2 \\ \mathcal{W}_1 - \mathcal{FLW}_2 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

3.2.2.2 Analyse de la stabilité

Tout d'abord, on introduit le corollaire suivant.

Corollaire 3.2.1. *Pour un niveau d'atténuation des perturbations $\lambda > 0$, le problème de la commande basée-observateur avec fenêtres glissantes de type $\mathcal{H}_\infty$ correspondant au système (3.1), l'observateur (3.32) et la commande (3.35) est asymptotiquement stable au sens de Lyapunov s'il existe un scalaire δ et des matrices $\hat{P}_{11}, \hat{P}_{12}, P_{22}, \hat{Q}_{11}, Q_{22} \in \mathbb{R}^{nM \times nM}$, $S_{ij}, \tilde{S}_{ij}, \bar{S}_{ij} \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}$, $\mathcal{L} \in \mathbb{R}^{n \times pM}$ et $\mathcal{K} \in \mathbb{R}^{m \times nM}$ tels que la BMI suivante soit faisable :*

minimiser λ en respectant

$$\begin{pmatrix} \Omega & (\Theta_1 & \cdots & \Theta_q) \\ (\star) & & -\Psi\Xi \end{pmatrix} < 0 \quad (3.42)$$

avec

$$\Omega = \begin{pmatrix} -\hat{P}_{11} & -\hat{P}_{12} & 0 & \hat{Q}_{11}(\mathcal{A} + \mathcal{BK})^T & 0 \\ (\star) & \mathcal{F}G^T G\mathcal{F}^T - P_{22} & 0 & \Omega_{24} & (\mathcal{A} - \mathcal{FLC})^T Q_{22}^T \\ (\star) & (\star) & -\frac{\lambda^2}{M} I_{r \times M} & \Omega_{34} & (\mathcal{W}_1 - \mathcal{FLW}_2)^T Q_{22}^T \\ (\star) & (\star) & (\star) & \hat{P}_{11} - \hat{Q}_{11} - \hat{Q}_{11}^T & \hat{P}_{12} - I_{n \times M} + \delta Q_{22} \\ (\star) & (\star) & (\star) & (\star) & P_{22} - Q_{22} - Q_{22}^T \end{pmatrix} \quad (3.43)$$

$$\begin{aligned} \Omega_{24} &= \mathcal{A}^T(I_{n \times M} - \delta Q_{22})^T + \delta(\mathcal{FLC})^T Q_{22}^T \\ \Omega_{34} &= \delta(\mathcal{FLW}_2)^T Q_{22}^T + \mathcal{W}_1^T(I_{n \times M} - \delta Q_{22})^T \end{aligned}$$

$$\Theta_i = (\Theta_{i1} \quad \cdots \quad \Theta_{in_i})$$

$$\Theta_{ij} = \begin{pmatrix} \hat{Q}_{11}\mathcal{F}E_i^T & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{F}E_i^T \tilde{S}_{ij}^T & \mathcal{F}E_i^T \bar{S}_{ij}^T \\ 0 & 0 & 0 \\ \mathcal{D}H_{ij}S_{ij}^T & (I_n - \delta Q_{22})\mathcal{D}H_{ij} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{22}\mathcal{D}H_{ij} \end{pmatrix}$$

$$\Psi = \text{bloc} - \text{diag} \quad (\Psi_1, \dots, \Psi_q)$$

$$\Psi_i = \text{bloc} - \text{diag} \quad \left(\frac{2}{f_{i1}} I_{n_i}, \dots, \frac{2}{f_{in_i}} I_{n_i} \right)$$

$$\Xi = \text{bloc} - \text{diag} \quad (\Xi_1, \dots, \Xi_q)$$

$$\Xi_i = \text{bloc} - \text{diag} \quad (\Xi_{i1}, \dots, \Xi_{in_i})$$

$$\Xi_{ij} = \text{bloc} - \text{diag} \quad (S_{ij}, \tilde{S}_{ij}, \bar{S}_{ij})$$

□

Démonstration. La synthèse de la commande basée-observateur avec fenêtres glissantes de type $\mathcal{H}_\infty$ correspondant au système augmenté (3.41) revient à chercher les gains $\mathcal{L}$ et $\mathcal{K}$ tels que le système en boucle fermée (3.41) soit asymptotiquement stable et le critère $\mathcal{H}_\infty$ suivant soit garanti :

$$\|G(x - \hat{x})\|_{l_2} \leq \lambda \|\omega\|_{l_2} \quad (3.44)$$

avec $\lambda > 0$.

La résolution de ce problème revient à chercher une fonction de Lyapunov $V(k)$ telle que

$$\Lambda = \Delta V(k) + \bar{x}(k)^T \bar{\mathcal{F}} \mathbb{G} \bar{\mathcal{F}}^T \bar{x}(k) - \frac{\lambda^2}{M} \varpi^T(k) \varpi(k) < 0. \quad (3.45)$$

avec $x(k) = \mathcal{F}^T \mathcal{X}(k)$, $\hat{x}(k) = \mathcal{F}^T \hat{\mathcal{X}}(k)$, $\bar{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} \mathcal{F} & 0 \\ 0 & \mathcal{F} \end{pmatrix}$ et $\mathbb{G} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & G^T G \end{pmatrix}$.

En suivant la même approche détaillée dans le paragraphe précédent et en utilisant les notations $\hat{P}_{11} = \hat{Q}_{11} P_{11} \hat{Q}_{11}^T$, $\hat{P}_{12} = \hat{Q}_{11} P_{12}$, on obtient la contrainte donnée par (3.42). $\square$

3.2.2.3 Linéarisation de la contrainte BMI

Pour linéariser la BMI donnée par (3.42), un changement de variables pour le terme couplé avec le gain de commande $\mathcal{K}$ est défini :

$$\hat{\mathcal{K}} = \hat{Q}_{11} \mathcal{K}^T. \quad (3.46)$$

Mais ce n'est pas le cas pour les termes couplés avec le gain de l'observateur $\mathcal{L}$ à cause de la matrice $\mathcal{F}$ qui est une matrice de rang plein colonne. Par conséquent, une solution particulière est proposée pour surmonter ce problème.

On propose la forme particulière suivante de la matrice Q_{22} :

$$Q_{22} = \begin{pmatrix} Q_{22}^{11} & \alpha_1 Q_{22}^{11} & \cdots & \cdots & \alpha_1 Q_{22}^{11} \\ \beta_1 Q_{22}^{11} & Q_{22}^{22} & \alpha_2 Q_{22}^{22} & \cdots & \alpha_2 Q_{22}^{22} \\ \vdots & \beta_2 Q_{22}^{22} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & Q_{22}^{M-1,M} \\ \beta_1 Q_{22}^{11} & \beta_2 Q_{22}^{22} & \cdots & Q_{22}^{M,M-1} & Q_{22}^{MM} \end{pmatrix} \quad (3.47)$$

avec

$$Q_{22}^{M-1,M} = \alpha_{M-1} Q_{22}^{M-1,M-1}$$

$$Q_{22}^{M,M-1} = \beta_{M-1} Q_{22}^{M-1,M-1}$$

$$0 \leq \alpha_i < 1 \text{ et } 0 \leq \beta_i < 1 \text{ pour } i \in \{1, \dots, M-1\}$$

Ensuite, les changements de variables suivants peuvent être définis :

$$\hat{L}_i = Q_{22}^{11} L_i, \text{ pour } i \in \{1, \dots, M\} \quad (3.48)$$

La BMI (3.42) est, alors, transformée en un problème convexe. Enfin, le gain de la commande et les gains de l'observateur sont calculés à partir des équations suivantes :

$$\mathcal{K} = \hat{\mathcal{K}}^T \hat{Q}_{11}^{-T} \quad (3.49)$$

$$L_i = (Q_{22}^{11})^{-1} \hat{L}_i, \text{ pour } i \in \{1, \dots, M\} \quad (3.50)$$

Remarque 3.2.2. Notez que (3.43) peut être transformée en LMI en utilisant (3.47), si on fixe à priori δ , α_i et β_i pour $i \in \{1, \dots, M-1\}$. δ peut être fixés en utilisant la méthode de grille « gridding method » et les paramètres α_i et β_i , pour $i \in \{1, \dots, M-1\}$, peuvent être fixés en assignant des subdivisions uniformes de l'intervalle $[0, 1]$. $\square$

3.2.2.4 Discussion sur les avantages liés à l'introduction d'une fenêtre glissante

Afin de comparer les deux commande basée-observateur proposées, on considère le cas d'une fenêtre glissante de taille $M = 2$ avec :

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ I_n & 0 \end{pmatrix}, \mathcal{B} = \begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix}, \mathcal{D} = \begin{pmatrix} D \\ 0 \end{pmatrix}, \mathcal{F} = \begin{pmatrix} I_n \\ 0 \end{pmatrix}, \mathcal{W}_1 = \begin{pmatrix} W_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{C} = \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}, \mathcal{W}_2 = \begin{pmatrix} W_2 & 0 \\ 0 & W_2 \end{pmatrix}$$

$$\hat{P}_{11} = \begin{pmatrix} \hat{P}_{11}^{11} & \hat{P}_{11}^{12} \\ \hat{P}_{11}^{12^T} & \hat{P}_{11}^{22} \end{pmatrix}, \hat{P}_{12} = \begin{pmatrix} \hat{P}_{12}^{11} & \hat{P}_{12}^{12} \\ \hat{P}_{12}^{21} & \hat{P}_{12}^{22} \end{pmatrix}, P_{22} = \begin{pmatrix} P_{22}^{11} & P_{22}^{12} \\ P_{22}^{12^T} & P_{22}^{22} \end{pmatrix}$$

$$\hat{Q}_{11} = \begin{pmatrix} \hat{Q}_{11}^{11} & \hat{Q}_{11}^{12} \\ \hat{Q}_{11}^{21} & \hat{Q}_{11}^{22} \end{pmatrix}, Q_{22} = \begin{pmatrix} Q_{22}^{11} & Q_{22}^{12} \\ Q_{22}^{21} & Q_{22}^{22} \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{L} = (L_1 \quad L_2), \mathcal{K} = (K_1 \quad K_2).$$

Ensuite, la contrainte suivante est obtenue à partir de (3.43) :

$$\begin{pmatrix} -\hat{P}_{11}^{11} & -\hat{P}_{11}^{12} & -\hat{P}_{11}^{12} & -\hat{P}_{11}^{12} & 0 & 0 & \Omega_{17} & \hat{Q}_{11}^{11} & 0 & 0 \\ (\star) & -\hat{P}_{11}^{22} & -\hat{P}_{11}^{21} & -\hat{P}_{11}^{22} & 0 & 0 & \Omega_{27} & \hat{Q}_{11}^{21} & 0 & 0 \\ (\star) & (\star) & H^T H - P_{22}^{11} & -P_{22}^{12} & 0 & 0 & \Omega_{37} & \Omega_{38} & \Omega_{39} & \Omega_{310} \\ (\star) & (\star) & (\star) & -P_{22}^{22} & 0 & 0 & \Omega_{47} & \Omega_{48} & \Omega_{49} & \Omega_{410} \\ (\star) & (\star) & (\star) & (\star) & -\frac{\mu^2}{2} I_r & 0 & \Omega_{57} & \Omega_{58} & \Omega_{59} & \Omega_{510} \\ (\star) & (\star) & (\star) & (\star) & (\star) & -\frac{\mu^2}{2} I_r & \Omega_{67} & \Omega_{68} & \Omega_{69} & \Omega_{610} \\ (\star) & (\star) & (\star) & (\star) & (\star) & (\star) & \Omega_{77} & \Omega_{78} & \Omega_{79} & \Omega_{710} \\ (\star) & (\star) & (\star) & (\star) & (\star) & (\star) & (\star) & \Omega_{88} & \hat{P}_{12}^{21} + Q_{22}^{21} & \Omega_{810} \\ (\star) & (\star) & (\star) & (\star) & (\star) & (\star) & (\star) & (\star) & \Omega_{99} & \Omega_{910} \\ (\star) & (\star) & (\star) & (\star) & (\star) & (\star) & (\star) & (\star) & (\star) & \Omega_{1010} \end{pmatrix} < 0 \quad (3.51)$$

avec

$$\begin{aligned} \Omega_{17} &= \hat{Q}_{11}^{11}(A + BK_1 + D\Sigma_1)^T + \hat{Q}_{11}^{12}(BK_2)^T & \Omega_{67} &= (L_2 W_2)^T Q_{22}^{11^T} \\ \Omega_{27} &= \hat{Q}_{11}^{21}(A + BK_1 + D\Sigma_1)^T + \hat{Q}_{11}^{22}(BK_2)^T & \Omega_{68} &= (L_2 W_2)^T Q_{22}^{21^T} \\ \Omega_{37} &= (A + D\Sigma_2)^T (I_n - \delta Q_{22}^{11})^T + (L_1 C)^T Q_{22}^{11^T} - \delta Q_{22}^{12^T} & \Omega_{69} &= -(L_2 W_2)^T Q_{22}^{11^T} \\ \Omega_{38} &= -\delta(A + D\Sigma_2)^T Q_{22}^{21^T} + (I_n - \delta Q_{22}^{22})^T + (L_1 C)^T Q_{22}^{21^T} & \Omega_{610} &= (L_2 W_2)^T Q_{22}^{21^T} \\ \Omega_{39} &= (A + D\Sigma_2 - L_1 C)^T Q_{22}^{11^T} + Q_{22}^{12^T} & \Omega_{77} &= \hat{P}_{11}^{11} - \hat{Q}_{11}^{11} - \hat{Q}_{11}^{11^T} \\ \Omega_{310} &= (A + D\Sigma_2 - L_1 C)^T Q_{22}^{21^T} + Q_{22}^{22^T} & \Omega_{78} &= \hat{P}_{11}^{12} - \hat{Q}_{11}^{12} - \hat{Q}_{11}^{21^T} \\ \Omega_{47} &= (L_2 C)^T Q_{22}^{11^T} & \Omega_{79} &= \hat{P}_{11}^{11} - I_n + Q_{22}^{11} \\ \Omega_{48} &= (L_2 C)^T Q_{22}^{21^T} & \Omega_{710} &= \hat{P}_{12}^{12} + Q_{22}^{12} \\ \Omega_{49} &= -(L_2 C)^T Q_{22}^{11^T} & \Omega_{88} &= \hat{P}_{11}^{22} - \hat{Q}_{11}^{22} - \hat{Q}_{11}^{22^T} \\ \Omega_{410} &= -(L_2 C)^T Q_{22}^{21^T} & \Omega_{810} &= \hat{P}_{12}^{22} - I_n + Q_{22}^{22} \\ \Omega_{57} &= (L_1 W_2)^T Q_{22}^{11^T} + W_1^T (I_n - \delta Q_{22}^{11})^T & \Omega_{99} &= P_{22}^{11} - Q_{22}^{11} - Q_{22}^{11^T} \\ \Omega_{58} &= (L_1 W_2)^T Q_{22}^{21^T} - W_1^T \delta Q_{22}^{21^T} & \Omega_{910} &= P_{22}^{12} - Q_{22}^{12} - Q_{22}^{21^T} \\ \Omega_{59} &= (W_1 - L_1 W_2)^T Q_{22}^{11^T} & \Omega_{1010} &= P_{22}^{22} - Q_{22}^{22} - Q_{22}^{22^T} \\ \Omega_{510} &= (W_1 - L_1 W_2)^T Q_{22}^{21^T} \end{aligned}$$

Si on considère la solution particulière suivante :

$$\begin{aligned}\hat{P}_{11} &= \begin{pmatrix} \hat{P}_{11}^{11} & 0 \\ 0 & \hat{P}_{11}^{22} \end{pmatrix}, \hat{P}_{12} = \begin{pmatrix} \hat{P}_{12}^{11} & 0 \\ 0 & \hat{P}_{12}^{22} \end{pmatrix}, P_{22} = \begin{pmatrix} P_{22}^{11} & 0 \\ 0 & P_{22}^{22} \end{pmatrix} \\ \hat{Q}_{11} &= \begin{pmatrix} \hat{Q}_{11}^{11} & 0 \\ 0 & \hat{Q}_{11}^{22} \end{pmatrix}, Q_{22} = \begin{pmatrix} Q_{22}^{11} & 0 \\ 0 & Q_{22}^{22} \end{pmatrix} \\ \mathcal{L} &= (L_1 \ 0), \mathcal{K} = (K_1 \ 0)\end{aligned}$$

Cette solution est également une solution de (3.22) pour $L = L_1$ et $K = K_1$. Par conséquent, toutes les solutions de (3.22) sont inclus dans les solution de (3.42). Ainsi, la commande basée-observateur avec fenêtres glissantes est moins restrictive que celle sans fenêtres glissantes.

3.2.3 Résultats de simulations

Dans ce paragraphe, le but est d'appliquer les résultats théoriques présentés dans les paragraphes précédents à des exemples numériques. Ainsi, trois exemples sont considérés pour illustrer les performances du schéma de conception proposé.

3.2.3.1 Exemple 1 : Robot à bras articulé

Le premier exemple à considérer est celui du robot à bras articulé étudié dans le paragraphe 2.6.1.1 du chapitre 2. Le modèle d'état à temps discret correspondant, en ajoutant un bruit aux vecteurs d'état et de sortie, est décrit par l'équation (3.1) avec

$$\begin{aligned}A &= \begin{pmatrix} 1 & T & 0 & 0 \\ -48.6T & 1 - 1.25T & 48.6T & 0 \\ 0 & 0 & 1 & T \\ 19.5T & 0 & -19.5T & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 21.6T \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, W_1 = \begin{pmatrix} T \\ T \\ T \\ T \end{pmatrix} \\ C &= (1 \ 0 \ 0 \ 0), W_2 = 0.1\end{aligned}$$

$$f(x(k)) = -3.33T \sin(x_3(k)) \text{ et } T = 0.01s.$$

$f(x(k))$ satisfait le lemme A.1.1 avec $\bar{\alpha}_{f_{13}} = 3.33T$, $\underline{\alpha}_{f_{13}} = -3.33T$, $\bar{f}_{13} = 3.33T - (-3.33T) = 6.66T$ et

$$A \triangleq \begin{pmatrix} 1 & T & 0 & 0 \\ -48.6T & 1 - 1.25T & 48.6T & 0 \\ 0 & 0 & 1 & T \\ 19.5T & 0 & -19.5T - 3.33T & 1 \end{pmatrix}$$

En résolvant les LMI données par les deux approches proposées, on obtient les résultats présentés dans le tableau 3.1.

Approche	$\lambda_{\min}$
Approche sans fenêtres glissantes	6.9660
Approche avec fenêtres glissantes ($M = 2$)	5.1434

TABLE 3.1 – Détermination de $\lambda_{\min}$.

Les valeurs des gains d'observateurs et des contrôleurs trouvés sont :

- Approche sans fenêtres glissantes :

$$L = \begin{pmatrix} 0.5947 \\ 5.6450 \\ 0.5072 \\ -0.9381 \end{pmatrix}$$

$$K = \begin{pmatrix} -17.4228 & -3.9515 & 5.9120 & -2.6312 \end{pmatrix}$$

- Approche avec fenêtres glissantes ($M = 2$) :

$$L_1 = \begin{pmatrix} 0.4676 \\ 3.7155 \\ 0.4036 \\ -0.5143 \end{pmatrix}$$

$$L_2 = \begin{pmatrix} 0.0605 \\ 0.5494 \\ 0.0562 \\ -0.0773 \end{pmatrix}$$

$$K_1 = \begin{pmatrix} -30.1871 & -4.6336 & 12.3466 & -5.1556 \end{pmatrix}$$

$$K_2 = \begin{pmatrix} 0.0327 & 0.0579 & 0.1545 & -0.0438 \end{pmatrix}.$$

La valeur de $\lambda_{\min}$ calculée par l'approche avec fenêtres glissantes est plus petite que celle calculée par la commande standard.

Les résultats de simulation en utilisant les deux approches proposées sont donnés par les figures 3.1 et 3.2. On suppose que le système est affecté par un bruit $\omega(k) = 0.5$ pour $6 < t < 8$ et $\omega(k) = 0$ ailleurs.

3.2.3.2 Exemple 2

On considère l'exemple étudié dans [Ibrir, 2008] avec un simple changement dans la matrice C . Le modèle d'état est décrit par (3.1) avec :

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 1.5 & 0 \\ 0.5 & \frac{3}{5} & 1 \\ 1 & -1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0.5 \\ \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, W_1 = \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.1 \\ 0.1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} -\frac{1}{9} & 0.5 & 1 \\ 0.2 & \frac{1}{6} & \frac{1}{9} \end{pmatrix}, W_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$f(x(k)) = \frac{x_1(k)}{7(1 + x_1^2(k))}.$$

La fonction non linéaire $f(x(k))$ satisfait le lemme A.1.1 avec $\bar{\alpha}_{f_{11}} = \frac{1}{7}$, $\underline{\alpha}_{f_{11}} = -\frac{1}{56}$, $\bar{f}_{11} = \frac{1}{7} - (-\frac{1}{56})$ et

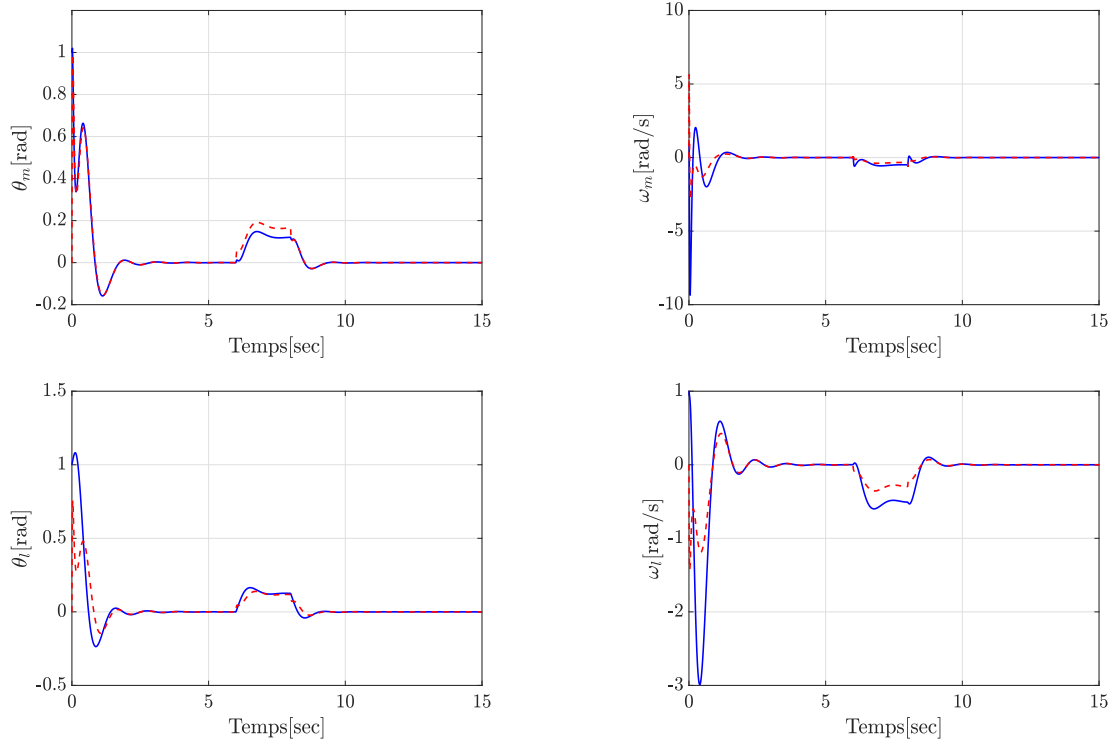


FIGURE 3.1 – Les trajectoires de l'état réel (ligne bleue) et l'état estimé (ligne rouge) en utilisant l'approche sans fenêtres glissantes

$$A \triangleq \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 1.5 & 0 \\ 0.5 - \frac{1}{56} & \frac{3}{5} & 1 \\ 1 & -1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

En résolvant les LMIs données par les approches proposées, on obtient les résultats présentés dans le tableau 3.2.

Approche	$\lambda_{\min}$
[Ibrir, 2008]	non faisable
[Kheloufi et al., 2014]	0.793
Approche sans fenêtres glissantes	0.3132
Approche avec fenêtres glissantes ($M = 2$)	0.2524

 TABLE 3.2 – Détermination de $\lambda_{\min}$.

Les valeurs de $\lambda_{\min}$ calculées par les deux approche proposées sont plus petites que celle donnée par l'approche de [Kheloufi et al., 2014]. Aussi, l'approche de [Ibrir, 2008] ne donne pas de résultats, ce qui confirme la supériorité de la méthode de conception proposée.

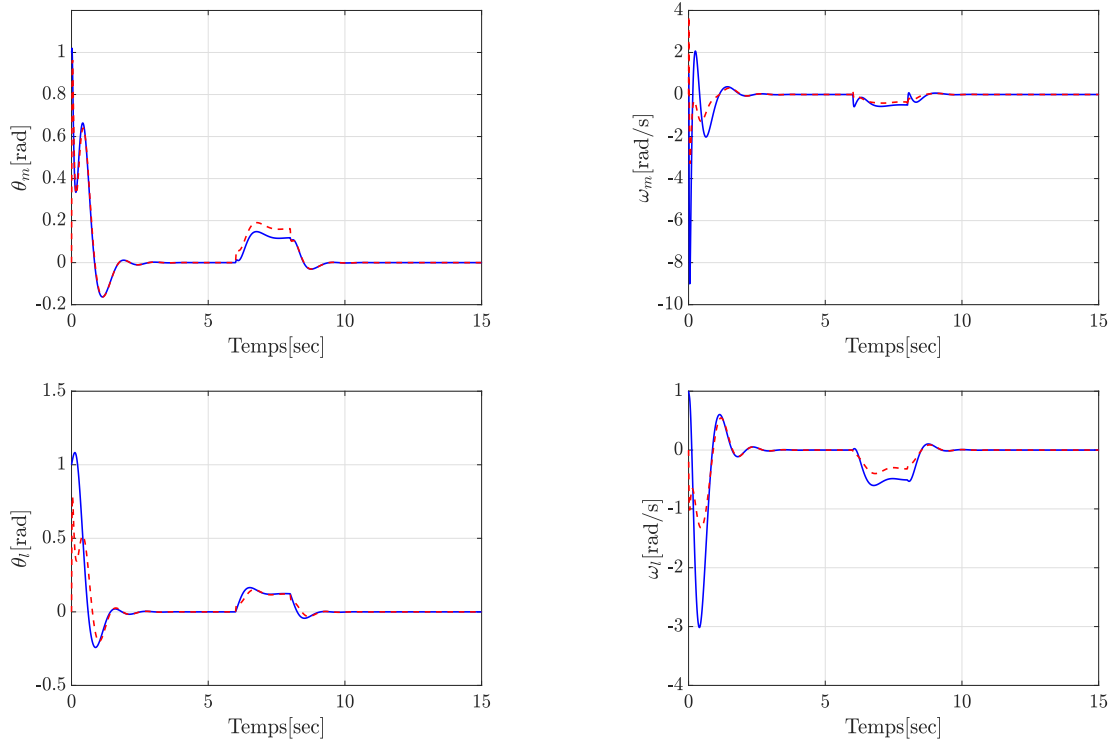


FIGURE 3.2 – Les trajectoires de l'état réel (ligne bleue) et l'état estimé (ligne rouge) en utilisant l'approche avec fenêtres glissantes

3.2.3.3 Exemple 3

On considère l'exemple étudié dans [Grandvallet *et al.*, 2013]. Le modèle d'état est décrit par (3.1) avec :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, W_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}, W_2 = 0$$

$$f(x(k)) = \epsilon \sin(x_2(k))$$

avec $\epsilon > 0$.

$f(x(k))$ satisfait le lemme A.1.1 avec $\bar{\alpha}_{f_{12}} = \epsilon$, $\underline{\alpha}_{f_{12}} = -\epsilon$ et $\bar{f}_{12} = \epsilon - (-\epsilon)$ et

$$A \triangleq \begin{pmatrix} 0 & 1 - \epsilon \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Pour montrer la supériorité de la méthode de conception proposée par rapport à [Ibrir, 2008, Ibrir et Diop, 2008, Grandvallet *et al.*, 2013], on cherche la valeur de $\epsilon_{\max}$ tolérée par chaque approche. Les résultats sont présentés dans le tableau 3.3.

D'après les valeurs trouvées, il est évident que la méthode de conception proposée présente plus de degré de liberté que les autres méthode.

Approche	$\epsilon_{\max}$
[Ibrir, 2008]	1
[Ibrir et Diop, 2008]	1630
[Grandvallet <i>et al.</i> , 2013]	31541
Approche sans fenêtres glissantes	644165
Approche avec fenêtres glissantes ($M = 2$)	10^7

TABLE 3.3 – Détermination de $\epsilon_{\max}$.

3.3 Commande basée-observateur de type $\mathcal{H}_\infty$ pour les systèmes « one-sided Lipschitz »

La commande des systèmes « one-sided Lipschitz » est un axe de recherche très intéressant qui a attiré l'attention de plusieurs chercheurs durant ces dernières décennies. La motivation importante pour l'étude de cette classe de systèmes non linéaires est due au nombre des systèmes physiques satisfaisant cette condition. Cependant la commande basée-observateur en temps discret des systèmes « one-sided Lipschitz » n'a pas été largement discutée par la communauté scientifique. La plus parts des travaux existants s'intéressent à la conception des lois de commande basée-observateur à temps continu [Wu *et al.*, 2014, Wu *et al.*, 2015, Ahmad et Rehan, 2016]. Alors que dans le cas des systèmes à temps discret et selon notre connaissance, on ne distingue qu'une seule approche proposée par Benallouch et al [Benallouch *et al.*, 2014, Benallouch *et al.*, 2015]. Ainsi, dans la suite, une nouvelle méthode de synthèse de loi de commande basée-observateur est proposée. De même, on introduit deux fenêtres glissantes afin de relaxer les conditions de stabilité.

Considérons la classe de systèmes non linéaires suivante :

$$\begin{cases} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) + f(x(k)) + W_1\omega(k) \\ y(k) &= Cx(k) + W_2\omega(k) \end{cases} \quad (3.52)$$

où $x(k) \in \mathbb{R}^n$, $u(k) \in \mathbb{R}^m$, $y(k) \in \mathbb{R}^p$ et $\omega(k) \in \mathbb{R}^r$ représentent, respectivement, l'état, l'entrée, la sortie et la perturbation. $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$, $W_1 \in \mathbb{R}^{n \times r}$ et $W_2 \in \mathbb{R}^{p \times r}$ sont des matrices constantes. $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ représente la fonction non linéaire.

3.3.1 Structure sans fenêtres glissantes

Dans cette partie, on considère les structures standards de la commande par retour d'état estimé et de l'observateur de Luenberger. Les étapes de la synthèse de la commande basée-observateur proposée sont détaillées dans les deux paragraphes suivants.

3.3.1.1 Position du problème

L'observateur de Luenberger correspondant au système (3.52) est le suivant :

$$\begin{cases} \hat{x}(k+1) &= A\hat{x}(k) + Bu(k) + f(\hat{x}(k)) + L(y(k) - \hat{y}(k)) \\ \hat{y}(k) &= C\hat{x}(k) \end{cases} \quad (3.53)$$

où $\hat{x}(k)$ et L représentent respectivement l'état estimé de $x(k)$ et le gain de l'observateur.

On propose d'appliquer une commande par retour d'état estimé de la forme suivante :

$$u(k) = K\hat{x}(k) \quad (3.54)$$

où K représente le gain de la commande.

L'erreur d'observation entre l'état réel et l'état estimé est donnée par

$$e(k) = x(k) - \hat{x}(k). \quad (3.55)$$

La dynamique de l'erreur d'observation est alors décrite comme suit :

$$e(k+1) = x(k+1) - \hat{x}(k+1). \quad (3.56)$$

Le développement des équations (3.53) et (3.56), en utilisant la loi de commande (3.54) conduit à

$$\hat{x}(k+1) = (A + BK)\hat{x}(k) + LCe(k) + f(\hat{x}(k)) + LW_2\omega(k) \quad (3.57)$$

$$e(k+1) = (A - LC)e(k) + \Delta f(k) + (W_1 - LW_2)\omega(k) \quad (3.58)$$

avec $\Delta f(k) = f(x(k)) - f(\hat{x}(k))$.

Ainsi, le système augmenté résultant est donné par l'équation suivante :

$$\bar{x}(k+1) = \bar{A}\bar{x}(k) + \bar{f}(k) + \bar{W}\omega(k) \quad (3.59)$$

avec

$$\bar{x}(k) = \begin{pmatrix} \hat{x}(k) \\ e(k) \end{pmatrix}, \quad \bar{A} = \begin{pmatrix} A + BK & LC \\ 0 & A - LC \end{pmatrix}$$

$$\bar{f}(k) = \begin{pmatrix} f(\hat{x}(k)) \\ \Delta f(k) \end{pmatrix}, \quad \bar{W} = \begin{pmatrix} LW_2 \\ W_1 - LW_2 \end{pmatrix}.$$

Le problème de la synthèse d'une commande basée-observateur de type $\mathcal{H}_\infty$ consiste à trouver deux gains K et L tels que le système en boucle fermée (3.59) soit asymptotiquement stable tout en respectant le critère $\mathcal{H}_\infty$. C'est à dire, chercher les gains K et L satisfaisant le critère suivant :

$$\|\bar{x}\|_{l_2} \leq \lambda \|\omega\|_{l_2} \quad (3.60)$$

où $\lambda > 0$ est le niveau d'atténuation des perturbations à minimiser.

Il suffit, donc, de trouver une fonction de Lyapunov $V(k)$ pour que

$$\Lambda = \Delta V(k) + \bar{x}(k)^T \bar{x}(k) - \lambda^2 \omega^T(k) \omega(k) < 0. \quad (3.61)$$

où la fonction de Lyapunov est considérée comme suit :

$$V(k) = \bar{x}^T(k) P \bar{x}(k) \quad (3.62)$$

avec $P = P^T > 0$.

Au lieu d'utiliser une matrice de Lyapunov P diagonale comme dans le travail de [Benallouch et al., 2014], une fonction symétrique est utilisée dans ce travail pour diminuer le conservatisme. Dans la suite la matrice P considérée a la forme suivante :

$$P = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12}^T & P_{22} \end{pmatrix}. \quad (3.63)$$

Par conséquent, en utilisant le développement de $\Delta V(k) = V(k+1) - V(k)$, on obtient :

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \bar{x}(k) \\ \bar{f}(k) \\ \omega(k) \end{pmatrix}^T \Pi \begin{pmatrix} \bar{x}(k) \\ \bar{f}(k) \\ \omega(k) \end{pmatrix} \quad (3.64)$$

avec

$$\Pi = \begin{pmatrix} \bar{A}^T P \bar{A} - P + I_{2n} & \bar{A}^T P & \bar{A}^T P \bar{W} \\ (\star) & P & P \bar{W} \\ (\star) & (\star) & \bar{W}^T P \bar{W} - \lambda^2 I_r \end{pmatrix}. \quad (3.65)$$

$f(\cdot)$ est supposée être à la foi « one-sided Lipschitz » et quadratiquement bornée telle que $f(0) = 0$. Ainsi, En utilisant les deux définitions A.2.1 et A.3.1, on peut obtenir

$$\langle f(\hat{x}(k)), \hat{x}(k) \rangle \leq \rho \|\hat{x}(k)\|^2 \quad (3.66)$$

$$\|f(\hat{x}(k))\|^2 \leq \beta \|\hat{x}(k)\|^2 + \gamma \langle \hat{x}(k), f(\hat{x}(k)) \rangle \quad (3.67)$$

$$\langle \Delta f(k), e(k) \rangle \leq \rho \|e(k)\|^2 \quad (3.68)$$

$$\|\Delta f(k)\|^2 \leq \beta \|e(k)\|^2 + \gamma \langle e(k), \Delta f(k) \rangle \quad (3.69)$$

avec $\rho \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}$ et $\gamma \in \mathbb{R}$.

Pour relaxer d'avantage la contrainte LMI à vérifier, quatre constantes μ_1, μ_2, μ_3 et μ_4 strictement positives sont introduites. Ainsi, les inégalités (3.66), (3.67), (3.68) et (3.69) sont équivalentes à :

$$\begin{cases} \mu_1 \rho \hat{x}^T(k) \hat{x}(k) - \mu_1 \hat{x}^T(k) f(\hat{x}(k)) \geq 0 \\ \mu_2 \beta \hat{x}^T(k) \hat{x}(k) + \mu_2 \gamma \hat{x}^T(k) f(\hat{x}(k)) - \mu_2 f^T(\hat{x}(k)) f(\hat{x}(k)) \geq 0. \\ \mu_3 \rho e^T(k) e(k) - \mu_3 e^T(k) \Delta f(k) \geq 0 \\ \mu_4 \beta e^T(k) e(k) + \mu_4 \gamma e^T(k) \Delta f(k) - \mu_4 \Delta f^T(k) \Delta f(k) \geq 0. \end{cases} \quad (3.70)$$

À partir de (3.70) et (3.64), on obtient l'inégalité suivante :

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \bar{x}(k) \\ \bar{f}(k) \\ \omega(k) \end{pmatrix}^T \Pi \begin{pmatrix} \bar{x}(k) \\ \bar{f}(k) \\ \omega(k) \end{pmatrix} \quad (3.71)$$

avec

$$\Pi = \begin{pmatrix} \bar{A}^T P \bar{A} - P + \Sigma_1 & \bar{A}^T P + \Sigma_2 & \bar{A}^T P \bar{W} \\ (\star) & P + \Sigma_3 & P \bar{W} \\ (\star) & (\star) & \bar{W}^T P \bar{W} - \lambda^2 I_r \end{pmatrix} \quad (3.72)$$

$$\Sigma_1 = \begin{pmatrix} (1 + \mu_1 \rho + \mu_2 \beta) I_n & 0 \\ (\star) & (1 + \mu_3 \rho + \mu_4 \beta) I_n \end{pmatrix} \quad (3.73)$$

$$\Sigma_2 = \begin{pmatrix} \frac{\mu_2\gamma - \mu_1}{2}I_n & 0 \\ (\star) & \frac{\mu_4\gamma - \mu_3}{2}I_n \end{pmatrix} \quad (3.74)$$

$$\Sigma_3 = \begin{pmatrix} -\mu_2 I_n & 0 \\ (\star) & -\mu_4 I_n \end{pmatrix} \quad (3.75)$$

Pour que Λ soit strictement négative, si et seulement si Π soit strictement négative, ce qui est équivalent à

$$\begin{pmatrix} -P + \Sigma_1 & \Sigma_2 & 0 \\ (\star) & \Sigma_3 & 0 \\ (\star) & (\star) & -\lambda^2 I_r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \bar{A}^T \\ I_{2n} \\ \bar{W}^T \end{pmatrix} P \begin{pmatrix} \bar{A} & I_{2n} & \bar{W} \end{pmatrix} < 0. \quad (3.76)$$

L'application du lemme de Schur B.2.1 sur (3.77) permet d'obtenir :

$$\begin{pmatrix} -P + \Sigma_1 & \Sigma_2 & 0 & \bar{A}^T \\ (\star) & \Sigma_3 & 0 & I_{2n} \\ (\star) & (\star) & -\lambda^2 I_r & \bar{W}^T \\ (\star) & (\star) & (\star) & -P^{-1} \end{pmatrix} < 0. \quad (3.77)$$

Comme dans le cas Lipschitz, on remarque que l'inégalité (3.77) contient les deux matrices P et P^{-1} en même temps. Pour surmonter ce problème, la même stratégie présentée dans le paragraphe 3.2.1.2 est appliquée. Les étapes permettant d'obtenir les nouvelles conditions LMI sont détaillées dans le paragraphe suivant.

3.3.1.2 Analyse de la stabilité

Théorème 3.3.1. *Pour un niveau d'atténuation des perturbations $\lambda > 0$, le problème de la commande basée-observateur de type $\mathcal{H}_\infty$ correspondant au système (3.52), l'observateur (3.53) et la commande (3.54) est asymptotiquement stable au sens de Lyapunov s'il existe des scalaires $\delta, \rho, \beta, \gamma, \mu_1 > 0, \mu_2 > 0, \mu_3 > 0, \mu_4 > 0$ et des matrices $\hat{P}_{11}, \hat{P}_{12}, P_{22}, \hat{Q}_{11}, Q_{22} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\hat{L} \in \mathbb{R}^{n \times q}$ et $\hat{K} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ tels que la LMI suivante soit faisable :*

minimiser λ en respectant

$$\begin{pmatrix} -\hat{P}_{11} & -\hat{P}_{12} & \kappa_3 \hat{Q}_{11} & 0 & 0 & \Pi_{16} & 0 & \hat{Q}_{11} \\ (\star) & -P_{22} + \kappa_2 I_n & 0 & \kappa_4 I_n & 0 & \Pi_{26} & A^T Q_{22}^T - C^T \hat{L}^T & 0 \\ (\star) & (\star) & -\mu_2 I_n & 0 & 0 & I_n & 0 & 0 \\ (\star) & (\star) & (\star) & -\mu_4 I_n & 0 & I_n - \delta Q_{22}^T & Q_{22}^T & 0 \\ (\star) & (\star) & (\star) & (\star) & -\lambda^2 I_r & \Pi_{56} & W_1^T Q_{22}^T - W_2^T \hat{L}^T & 0 \\ (\star) & (\star) & (\star) & (\star) & (\star) & \Pi_{66} & \hat{P}_{12} - I_n + \delta Q_{22} & 0 \\ (\star) & (\star) & (\star) & (\star) & (\star) & (\star) & P_{22} - Q_{22} - Q_{22}^T & 0 \\ (\star) & (\star) & (\star) & (\star) & (\star) & (\star) & (\star) & -\frac{1}{\kappa_1} I_n \end{pmatrix} < 0 \quad (3.78)$$

avec

$$\begin{cases} \kappa_1 &= 1 + \mu_1\rho + \mu_2\beta \\ \kappa_2 &= 1 + \mu_3\rho + \mu_4\beta \\ \kappa_3 &= \frac{\mu_2\gamma - \mu_1}{2} \\ \kappa_4 &= \frac{\mu_4\gamma - \mu_3}{2} \\ \Pi_{16} &= \hat{Q}_{11}A^T + \hat{K}B^T \\ \Pi_{26} &= A^T(I_n - \delta Q_{22})^T + \delta C^T \hat{L}^T \\ \Pi_{56} &= W_1^T(I_n - \delta Q_{22})^T + \delta W_2^T \hat{L}^T \\ \Pi_{66} &= \hat{P}_{11} - \hat{Q}_{11} - \hat{Q}_{11}^T. \end{cases}$$

Lorsque la contrainte (3.78) est faisable, les matrices de gains sont données par $L = Q_{22}^{-1}\hat{L}$ et $K = \hat{K}^T\hat{Q}_{11}^{-T}$. $\square$

Démonstration. Pour linéariser l'inégalité (3.77), une nouvelle matrice Q (« Slack variable ») est ajoutée. Ensuite, en multipliant les deux côtés de (3.77) par la matrice bloc-diag(I, I, I, Q) et la matrice bloc-diag(I, I, I, Q^T), la contrainte suivante est obtenue :

$$\begin{pmatrix} -P + \Sigma_1 & \Sigma_2 & 0 & \bar{A}^T Q^T \\ (\star) & \Sigma_3 & 0 & Q^T \\ (\star) & (\star) & -\lambda^2 I_r & \bar{W}^T Q^T \\ (\star) & (\star) & (\star) & -Q P^{-1} Q^T \end{pmatrix} < 0. \quad (3.79)$$

Ainsi, en utilisant l'inégalité $-Q P^{-1} Q^T \leq P - Q - Q^T$ [Heemels et al., 2010], on peut conclure que l'inégalité (3.77) est vérifiée si l'inégalité suivante est remplie :

$$\begin{pmatrix} -P + \Sigma_1 & \Sigma_2 & 0 & \bar{A}^T Q^T \\ (\star) & \Sigma_3 & 0 & Q^T \\ (\star) & (\star) & -\lambda^2 I_r & \bar{W}^T Q^T \\ (\star) & (\star) & (\star) & P - Q - Q^T \end{pmatrix} < 0. \quad (3.80)$$

où la matrice P est donnée par (3.63) et la matrice Q est donnée par :

$$Q = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{pmatrix}. \quad (3.81)$$

En introduisant (3.63) et (3.81) dans (3.80), on obtient l'inégalité suivante :

$$\begin{pmatrix} -P_{11} + \kappa_1 I_n & -P_{12} & \kappa_3 I_n & 0 & 0 & \Pi_{16} & \Pi_{17} \\ (\star) & -P_{22} + \kappa_2 I_n & 0 & \kappa_4 I_n & 0 & \Pi_{26} & \Pi_{27} \\ (\star) & (\star) & -\mu_2 I_n & 0 & 0 & Q_{11}^T & Q_{21}^T \\ (\star) & (\star) & (\star) & -\mu_4 I_n & 0 & Q_{12}^T & Q_{22}^T \\ (\star) & (\star) & (\star) & (\star) & -\lambda^2 I_r & \Pi_{56} & \Pi_{57} \\ (\star) & (\star) & (\star) & (\star) & (\star) & \Pi_{66} & P_{12} - Q_{12} - Q_{21}^T \\ (\star) & (\star) & (\star) & (\star) & (\star) & (\star) & P_{22} - Q_{22} - Q_{22}^T \end{pmatrix} < 0 \quad (3.82)$$

avec

$$\begin{aligned} \Pi_{16} &= (A + BK)^T Q_{11}^T \\ \Pi_{17} &= (A + BK)^T Q_{21}^T \\ \Pi_{26} &= A^T Q_{12}^T + (LC)^T (Q_{11} - Q_{12})^T \\ \Pi_{27} &= A^T Q_{22}^T + (LC)^T (Q_{21} - Q_{22})^T \\ \Pi_{56} &= W_1^T Q_{12}^T + (LW_2)^T (Q_{11} - Q_{12})^T \\ \Pi_{57} &= W_1^T Q_{22}^T + (LW_2)^T (Q_{21} - Q_{22})^T \\ \Pi_{66} &= P_{11} - Q_{11} - Q_{11}^T. \end{aligned}$$

Comme dans le cas des systèmes Lipschitz, on considère la structure suivante de la matrice Q :

$$Q = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ 0 & Q_{22} \end{pmatrix}. \quad (3.83)$$

En multipliant (3.82) à gauche et à droite par la matrice bloc-diag($\hat{Q}_{11}, I, I, I, I, \hat{Q}_{11}, I$) et la matrice bloc-diag($\hat{Q}_{11}^T, I, I, I, I, \hat{Q}_{11}^T, I$) avec $\hat{Q}_{11} = Q_{11}^{-1}$ et en considérant les changements de variables suivants :

$$\hat{P}_{12} = \hat{Q}_{11} P_{12}, \hat{P}_{11} = \hat{Q}_{11} P_{11} \hat{Q}_{11}^T$$

on obtient l'inégalité suivante :

$$\begin{pmatrix} -\hat{P}_{11} + \kappa_1 \hat{Q}_{11} \hat{Q}_{11}^T & -\hat{P}_{12} & \kappa_3 \hat{Q}_{11} & 0 & 0 & \Pi_{16} & 0 \\ (\star) & -P_{22} + \kappa_2 T_n & 0 & \kappa_4 I_n & 0 & \Pi_{26} & \Pi_{27} \\ (\star) & (\star) & -\mu_2 I_n & 0 & 0 & I_n & 0 \\ (\star) & (\star) & (\star) & -\mu_4 I_n & 0 & Q_{12}^T \hat{Q}_{11}^T & Q_{22}^T \\ (\star) & (\star) & (\star) & (\star) & -\lambda^2 I_r & \Pi_{56} & \Pi_{57} \\ (\star) & (\star) & (\star) & (\star) & (\star) & \Pi_{66} & \hat{P}_{12} - \hat{Q}_{11} Q_{12} \\ (\star) & (\star) & (\star) & (\star) & (\star) & (\star) & P_{22} - Q_{22} - Q_{22}^T \end{pmatrix} < 0 \quad (3.84)$$

avec

$$\begin{aligned} \Pi_{16} &= \hat{Q}_{11} (A + BK)^T \\ \Pi_{26} &= A^T (\hat{Q}_{11} Q_{12})^T + (LC)^T (I_n - \hat{Q}_{11} Q_{12})^T \\ \Pi_{27} &= (A - LC)^T Q_{22}^T \\ \Pi_{56} &= W_1^T (\hat{Q}_{11} Q_{12})^T + (LW_2)^T (I_n - \hat{Q}_{11} Q_{12})^T \\ \Pi_{57} &= (W_1 - LW_2)^T Q_{22}^T \\ \Pi_{66} &= \hat{P}_{11} - \hat{Q}_{11} - \hat{Q}_{11}^T. \end{aligned}$$

Afin d'éliminer les termes bilinéaires dans (3.84), et puisque le gain L est couplé à la fois avec Q_{22} et $(I_n - \hat{Q}_{11} Q_{12})$, un choix adéquat consiste à prendre

$$Q = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{11} - \delta Q_{11} Q_{22} \\ 0 & Q_{22} \end{pmatrix}. \quad (3.85)$$

En utilisant l'équation de Q donnée par (3.85) et les changements de variables $\hat{K} = \hat{Q}_{11} K^T$ et $\hat{L} = Q_{22} L$, le théorème 3.2.1 est, alors, prouvé. $\square$

Remarque 3.3.1. Comme pour δ , les scalaires μ_1 et μ_2 sont fixés a priori en utilisant la méthode de grille « gridding method » pour que (3.78) soit une LMI. $\square$

3.3.2 Structure avec fenêtres glissantes

Dans le but d'améliorer le rejet de perturbations et d'élargir le bassin d'attraction, une fenêtre dans la structure de l'observateur et de la loi de commande, respectivement, pour construire une nouvelle commande basée-observateur de type $\mathcal{H}_\infty$.

3.3.2.1 Position du problème

Pour le système (3.52), l'observateur avec fenêtre glissante suivant est considéré :

$$\hat{x}(k+1) = A\hat{x}(k) + Bu(k) + f(\hat{x}(k)) + \mathcal{L} \begin{pmatrix} y(k) - C\hat{x}(k) \\ y(k-1) - C\hat{x}(k-1) \\ \vdots \\ y(k-M+1) - C\hat{x}(k-M+1) \end{pmatrix} \quad (3.86)$$

où $\hat{x}(k)$, $\mathcal{L}$ et M représentent, respectivement, l'état estimé, le gain de l'observateur et le nombre de mesures.

Une forme générale de l'équation d'état (3.52) s'écrit comme suit :

$$\mathcal{X}(k+1) = \mathcal{A}\mathcal{X}(k) + \mathcal{B}u(k) + \mathcal{F}f(\mathcal{F}^T \mathcal{X}(k)) + \mathcal{W}_1 \varpi(k) \quad (3.87)$$

avec

$$\begin{aligned} \mathcal{X}(k) &= \begin{pmatrix} x(k) \\ x(k-1) \\ \vdots \\ x(k-M+1) \end{pmatrix}, \quad \varpi(k) = \begin{pmatrix} \omega(k) \\ \omega(k-1) \\ \vdots \\ \omega(k-N+1) \end{pmatrix} \\ \mathcal{A} &= \begin{pmatrix} A & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ I_n & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & I_n & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{W}_1 = \begin{pmatrix} W_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \mathcal{B} &= \begin{pmatrix} B \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{F} = \begin{pmatrix} I_n \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ensuite, l'équation de l'observateur (3.86) peut être réécrite comme suit :

$$\hat{\mathcal{X}}(k+1) = \mathcal{A}\hat{\mathcal{X}}(k) + \mathcal{B}u(k) + \mathcal{F}f(\mathcal{F}^T \hat{\mathcal{X}}(k)) + \mathcal{F}\mathcal{L}\mathcal{C}\varepsilon(k) + \mathcal{F}\mathcal{L}\mathcal{W}_2\varpi(k) \quad (3.88)$$

où

$\varepsilon(k) = \mathcal{X}(k) - \hat{\mathcal{X}}(k)$ représente l'erreur d'estimation

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= (L_1 \quad L_2 \quad \cdots \quad L_M) \\ \mathcal{C} &= \text{bloc-diag} \left(\overbrace{C, \dots, C}^{M \text{ fois}} \right) \\ \mathcal{W}_2 &= \text{bloc-diag} \left(\overbrace{W_2, \dots, W_2}^{M \text{ fois}} \right). \end{aligned}$$

La loi de commande proposée est de la forme

$$u(k) = \sum_{i=1}^M K_i \hat{x}(k-i+1). \quad (3.89)$$

L'expression (3.89) peut être réécrite comme suit :

$$u(k) = \mathcal{K} \hat{\mathcal{X}}(k) \quad (3.90)$$

avec

$$\mathcal{K} = (K_1 \quad K_2 \quad \cdots \quad K_M).$$

À partir de (3.90), on obtient

$$\hat{\mathcal{X}}(k+1) = (\mathcal{A} + \mathcal{BK}) \hat{\mathcal{X}}(k) + \mathcal{FLC} \varepsilon(k) + \mathcal{F}f(\mathcal{F}^T \hat{\mathcal{X}}(k)) + \mathcal{FLW}_2 \varpi(k) \quad (3.91)$$

et

$$\varepsilon(k+1) = (\mathcal{A} - \mathcal{FLC}) \varepsilon(k) + \mathcal{F} \Delta f(k) + (\mathcal{W}_1 - \mathcal{FLW}_2) \varpi(k) \quad (3.92)$$

avec $\Delta f(k) = f(\mathcal{F}^T \mathcal{X}(k)) - f(\mathcal{F}^T \hat{\mathcal{X}}(k))$.

Le système augmenté s'écrit alors comme suit :

$$\bar{x}(k+1) = \bar{A} \bar{x}(k) + \bar{\mathcal{F}} \bar{f}(k) + \bar{W} \varpi(k) \quad (3.93)$$

avec

$$\begin{aligned} \bar{x}(k) &= \begin{pmatrix} \hat{\mathcal{X}}(k) \\ \varepsilon(k) \end{pmatrix}, \quad \bar{A} = \begin{pmatrix} \mathcal{A} + \mathcal{BK} & \mathcal{FLC} \\ 0 & \mathcal{A} - \mathcal{FLC} \end{pmatrix} \\ \bar{\mathcal{F}} &= \begin{pmatrix} \mathcal{F} & 0 \\ 0 & \mathcal{F} \end{pmatrix}, \quad \bar{f}(k) = \begin{pmatrix} f(\mathcal{F}^T \hat{\mathcal{X}}(k)) \\ \Delta f(k) \end{pmatrix}, \quad \bar{W} = \begin{pmatrix} \mathcal{FLW}_2 \\ \mathcal{W}_1 - \mathcal{FLW}_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

La synthèse d'une commande basée-observateur avec fenêtres glissantes de type $\mathcal{H}_\infty$ consiste à chercher les gains $\mathcal{L}$ et $\mathcal{K}$ tels que le critère $\mathcal{H}_\infty$ suivant soit garanti :

$$\left\| \begin{pmatrix} \hat{x} \\ x(k) - \hat{x} \end{pmatrix} \right\|_{l_2} \leq \lambda \|\omega\|_{l_2} \quad (3.94)$$

avec $\lambda > 0$.

Pour tenir en compte du critère $\mathcal{H}_\infty$, on note par Λ la nouvelle fonction suivante :

$$\Lambda = \Delta V(k) + \bar{x}(k)^T \bar{\mathcal{F}} \bar{\mathcal{F}}^T \bar{x}(k) - \frac{\lambda^2}{M} \varpi^T(k) \varpi(k) < 0. \quad (3.95)$$

avec $x(k) = \mathcal{F}^T \mathcal{X}(k)$ et $\hat{x}(k) = \mathcal{F}^T \hat{\mathcal{X}}(k)$.

Soit $\Delta V(k) = V(k+1) - V(k)$ telle que la fonction $V(k)$ est donnée par (3.62). L'équation (3.95) est alors équivalente à :

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \bar{x}(k) \\ \bar{f}(k) \\ \omega(k) \end{pmatrix}^T \Pi \begin{pmatrix} \bar{x}(k) \\ \bar{f}(k) \\ \omega(k) \end{pmatrix} \quad (3.96)$$

avec

$$\Pi = \begin{pmatrix} \bar{A}^T P \bar{A} - P + \bar{\mathcal{F}} \bar{\mathcal{F}}^T & \bar{A}^T P \bar{\mathcal{F}} & \bar{A}^T P \bar{W} \\ (\star) & \bar{\mathcal{F}}^T P \bar{\mathcal{F}} & \bar{\mathcal{F}}^T P \bar{W} \\ (\star) & (\star) & \bar{W}^T P \bar{W} - \frac{\lambda^2}{M} I_{r \times M} \end{pmatrix}. \quad (3.97)$$

$f(\cdot)$ est supposée être à la foi « one-sided Lipschitz » et quadratiquement bornée telle que $f(0) = 0$. En utilisant le fait que $x(k) = \mathcal{F}^T \mathcal{X}(k)$ et $\hat{x}(k) = \mathcal{F}^T \hat{\mathcal{X}}(k)$, (3.70) peut être réécrite comme suit :

$$\begin{cases} \mu_1 \rho \hat{\mathcal{X}}^T(k) \mathcal{F} \mathcal{F}^T \hat{\mathcal{X}}(k) - \mu_1 \hat{\mathcal{X}}^T(k) \mathcal{F} f(\hat{x}(k)) \geq 0 \\ \mu_2 \beta \hat{\mathcal{X}}^T(k) \mathcal{F} \mathcal{F}^T \hat{\mathcal{X}}(k) + \mu_2 \gamma \hat{\mathcal{X}}^T(k) \mathcal{F} f(\hat{x}(k)) - \mu_2 f^T(\hat{x}(k)) f(\hat{x}(k)) \geq 0. \\ \mu_3 \rho \varepsilon^T(k) \mathcal{F} \mathcal{F}^T \varepsilon(k) - \mu_3 \varepsilon^T(k) \mathcal{F} \Delta f(k) \geq 0 \\ \mu_4 \beta \varepsilon^T(k) \mathcal{F} \mathcal{F}^T \varepsilon(k) + \mu_4 \gamma \varepsilon^T(k) \mathcal{F} \Delta f(k) - \mu_4 \Delta f^T(k) \Delta f(k) \geq 0 \end{cases} \quad (3.98)$$

Alors, l'inégalité $\Lambda < 0$ est garantie si et seulement si :

$$\begin{pmatrix} \bar{A}^T P \bar{A} - P + \Sigma_1 & \bar{A}^T P \bar{\mathcal{F}} + \Sigma_2 & \bar{A}^T P \bar{W} \\ (\star) & \bar{\mathcal{F}}^T P \bar{\mathcal{F}} + \Sigma_3 & \bar{\mathcal{F}}^T P \bar{W} \\ (\star) & (\star) & \bar{W}^T P \bar{W} - \frac{\lambda^2}{M} I_{r \times M} \end{pmatrix} < 0 \quad (3.99)$$

avec

$$\Sigma_1 = \begin{pmatrix} (1 + \mu_1 \rho + \mu_2 \beta) \mathcal{F} \mathcal{F}^T & 0 \\ (\star) & (1 + \mu_3 \rho + \mu_4 \beta) \mathcal{F} \mathcal{F}^T \end{pmatrix} \quad (3.100)$$

$$\Sigma_2 = \begin{pmatrix} \frac{\mu_2 \gamma - \mu_1}{2} \mathcal{F} & 0 \\ (\star) & \frac{\mu_4 \gamma - \mu_3}{2} \mathcal{F} \end{pmatrix} \quad (3.101)$$

$$\Sigma_3 = \begin{pmatrix} -\mu_2 I_n & 0 \\ (\star) & -\mu_4 I_n \end{pmatrix} \quad (3.102)$$

L'inégalité (3.99) est équivalente à

$$\begin{pmatrix} -P + \Sigma_1 & \Sigma_2 & 0 \\ (\star) & \Sigma_3 & 0 \\ (\star) & (\star) & -\frac{\lambda^2}{M} I_{r \times M} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \bar{A}^T \\ \bar{\mathcal{F}}^T \\ \bar{W}^T \end{pmatrix} P \begin{pmatrix} \bar{A} & \bar{\mathcal{F}} & \bar{W} \end{pmatrix} < 0. \quad (3.103)$$

En appliquant le lemme de Schur B.2.1 sur (3.103), on obtient :

$$\begin{pmatrix} -P + \Sigma_1 & \Sigma_2 & 0 & \bar{A}^T \\ (\star) & \Sigma_3 & 0 & \bar{\mathcal{F}}^T \\ (\star) & (\star) & -\frac{\lambda^2}{M} I_{r \times M} & \bar{W}^T \\ (\star) & (\star) & (\star) & -P^{-1} \end{pmatrix} < 0. \quad (3.104)$$

Dans la partie suivante, le résultat principal est présenté sous forme d'un corollaire.

3.3.2.2 Analyse de la stabilité

Tout d'abord, on introduit le corollaire suivant :

Corollaire 3.3.1. *Pour un niveau d'atténuation des perturbations $\lambda > 0$, le problème de la commande basée-observateur avec fenêtres glissantes de type $\mathcal{H}_\infty$ correspondant au système (3.52), l'observateur (3.86) et la commande (3.89) est asymptotiquement stable au sens de Lyapunov s'il existe des scalaires $\delta, \rho, \beta, \gamma, \mu_1 > 0, \mu_2 > 0, \mu_3 > 0, \mu_4 > 0$ et des matrices $\hat{P}_{11}, \hat{P}_{12}, P_{22}, \hat{Q}_{11}, Q_{22} \in \mathbb{R}^{nM \times nM}, \mathcal{L} \in \mathbb{R}^{n \times pM}$ et $\mathcal{K} \in \mathbb{R}^{m \times nM}$ tels que la BMI suivante soit faisable :*

minimiser λ en respectant

$$\begin{pmatrix} -\hat{P}_{11} & -\hat{P}_{12} & \kappa_3 \hat{Q}_{11} \mathcal{F} & 0 & 0 & \Pi_{16} & 0 & \hat{Q}_{11} \mathcal{F} \\ (\star) & -P_{22} + \mathcal{F} \mathcal{F}^T \kappa_2 & 0 & \kappa_4 \mathcal{F} & 0 & \Pi_{26} & \Pi_{27} & 0 \\ (\star) & (\star) & -\mu_2 I_n & 0 & 0 & \mathcal{F}^T & 0 & 0 \\ (\star) & (\star) & (\star) & -\mu_4 I_n & 0 & \Pi_{46} & \mathcal{F}^T Q_{22}^T & 0 \\ (\star) & (\star) & (\star) & (\star) & -\frac{\lambda^2}{M} I_{r \times M} & \Pi_{56} & \Pi_{57} & 0 \\ (\star) & (\star) & (\star) & (\star) & (\star) & \Pi_{66} & \Pi_{67} & 0 \\ (\star) & (\star) & (\star) & (\star) & (\star) & (\star) & \Pi_{77} & 0 \\ (\star) & (\star) & (\star) & (\star) & (\star) & (\star) & (\star) & -\frac{1}{\kappa_1} I_n \end{pmatrix} < 0 \quad (3.105)$$

avec

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= 1 + \mu_1 \rho + \mu_2 \beta \\ \kappa_2 &= 1 + \mu_3 \rho + \mu_4 \beta \\ \kappa_3 &= \frac{\mu_2 \gamma - \mu_1}{2} \\ \kappa_4 &= \frac{\mu_4 \gamma - \mu_3}{2} \\ \Pi_{16} &= \hat{Q}_{11} (\mathcal{A} + \mathcal{B} \mathcal{K})^T \\ \Pi_{26} &= \mathcal{A}^T (I_{n \times M} - \delta Q_{22})^T + \delta (\mathcal{F} \mathcal{L} \mathcal{C})^T Q_{22}^T \\ \Pi_{27} &= (\mathcal{A} - \mathcal{F} \mathcal{L} \mathcal{C})^T Q_{22}^T \\ \Pi_{46} &= \mathcal{F}^T (I_{n \times M} - \delta Q_{22}) \\ \Pi_{56} &= \mathcal{W}_1^T (I_{n \times M} - \delta Q_{22})^T + \delta (\mathcal{F} \mathcal{L} \mathcal{W}_2)^T Q_{22}^T \\ \Pi_{57} &= (\mathcal{W}_1^T - \mathcal{F} \mathcal{L} \mathcal{W}_2)^T Q_{22}^T \\ \Pi_{66} &= \hat{P}_{11} - \hat{Q}_{11} - \hat{Q}_{11}^T \\ \Pi_{67} &= \hat{P}_{12} - I_{n \times M} + \delta Q_{22} \\ \Pi_{77} &= P_{22} - Q_{22} - Q_{22}^T. \end{aligned}$$

□

Démonstration. En suivant la même approche détaillée dans le paragraphe précédent et en utilisant les notations $\hat{P}_{11} = \hat{Q}_{11} P_{11} \hat{Q}_{11}^T$ et $\hat{P}_{12} = \hat{Q}_{11} P_{12}$, on obtient la contrainte donnée par (3.105).

□

3.3.2.3 Linéarisation de la contrainte BMI

Pour linéariser l'inégalité (3.105), on procède de la même façon que dans le cas des systèmes Lipschitz (3.46)-(3.50).

3.3.2.4 Discussion sur les avantages liés à l'introduction d'une fenêtre glissante

On considère le cas $M = 2$ de la commande basée-observateur avec fenêtres glissantes pour comparer les deux résultats présentés pour les systèmes « one-sided Lipschitz » :

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \begin{pmatrix} A & 0 \\ I_n & 0 \end{pmatrix}, \mathcal{B} = \begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix}, \mathcal{F} = \begin{pmatrix} I_n \\ 0 \end{pmatrix}, \mathcal{W}_1 = \begin{pmatrix} W_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \mathcal{C} &= \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}, \mathcal{W}_2 = \begin{pmatrix} W_2 & 0 \\ 0 & W_2 \end{pmatrix} \\ \hat{P}_{11} &= \begin{pmatrix} \hat{P}_{11}^{11} & \hat{P}_{11}^{12} \\ \hat{P}_{11}^{12^T} & \hat{P}_{11}^{22} \end{pmatrix}, \hat{P}_{12} = \begin{pmatrix} \hat{P}_{12}^{11} & \hat{P}_{12}^{12} \\ \hat{P}_{12}^{21} & \hat{P}_{12}^{22} \end{pmatrix}, P_{22} = \begin{pmatrix} P_{22}^{11} & P_{22}^{12} \\ P_{22}^{12^T} & P_{22}^{22} \end{pmatrix} \\ \hat{Q}_{11} &= \begin{pmatrix} \hat{Q}_{11}^{11} & \hat{Q}_{11}^{12} \\ \hat{Q}_{11}^{21} & \hat{Q}_{11}^{22} \end{pmatrix}, Q_{22} = \begin{pmatrix} Q_{22}^{11} & Q_{22}^{12} \\ Q_{22}^{21} & Q_{22}^{22} \end{pmatrix} \\ \mathcal{L} &= (L_1 \quad L_2), \mathcal{K} = (K_1 \quad K_2).\end{aligned}$$

Ensuite, la contrainte suivante est obtenue à partir de (3.43) :

$$\left(\begin{array}{ccccccc} \begin{pmatrix} -\hat{P}_{11}^{11} & -\hat{P}_{11}^{12} \\ (\star) & -\hat{P}_{11}^{22} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -\hat{P}_{12}^{11} & -\hat{P}_{12}^{12} \\ -\hat{P}_{12}^{21} & -\hat{P}_{12}^{22} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \kappa_3 \hat{Q}_{11}^{11} & 0 \\ \kappa_3 \hat{Q}_{11}^{21} & 0 \end{pmatrix} & 0 & \Pi_{15} & 0 & \begin{pmatrix} \hat{Q}_{11}^{11} \\ \hat{Q}_{11}^{21} \end{pmatrix} \\ (\star) & \begin{pmatrix} -\kappa_2 I_n - P_{22}^{11} & -P_{22}^{12} \\ (\star) & -P_{22}^{22} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & \kappa_4 I_n \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & 0 & \Pi_{25} & \Pi_{26} & 0 \\ (\star) & (\star) & \Pi_{33} & 0 & \Pi_{35} & \Pi_{36} & 0 \\ (\star) & (\star) & (\star) & \Pi_{44} & \Pi_{45} & \Pi_{46} & 0 \\ (\star) & (\star) & (\star) & (\star) & \Pi_{55} & \Pi_{56} & 0 \\ (\star) & (\star) & (\star) & (\star) & (\star) & \Pi_{66} & 0 \\ (\star) & (\star) & (\star) & (\star) & (\star) & (\star) & -\frac{1}{\kappa_1} I_n \end{array} \right) < 0 \quad (3.106)$$

avec

$$\begin{aligned}\Pi_{15} &= \begin{pmatrix} \hat{Q}_{11}^{11}(A + BK_1 + D\Sigma_1)^T + \hat{Q}_{11}^{12}(BK_2)^T & \hat{Q}_{11}^{11} \\ \hat{Q}_{11}^{21}(A + BK_1 + D\Sigma_1)^T + \hat{Q}_{11}^{22}(BK_2)^T & \hat{Q}_{11}^{21} \end{pmatrix} \\ \Pi_{25} &= \begin{pmatrix} \Pi_{25}^{11} & -\delta(A + D\Sigma_2)^T Q_{22}^{21^T} + (I_n - \delta Q_{22}^{22})^T + (L_1 C)^T Q_{22}^{21^T} \\ (L_2 C)^T Q_{22}^{11^T} & (L_2 C)^T Q_{22}^{21^T} \end{pmatrix} \\ \Pi_{25}^{11} &= (A + D\Sigma_2)^T (I_n - \delta Q_{22}^{11})^T + (L_1 C)^T Q_{22}^{11^T} - \delta Q_{22}^{12^T} \\ \Pi_{26} &= \begin{pmatrix} (A + D\Sigma_2 - L_1 C)^T Q_{22}^{11^T} + Q_{22}^{12^T} & (A + D\Sigma_2 - L_1 C)^T Q_{22}^{21^T} + Q_{22}^{22^T} \\ -(L_2 C)^T Q_{22}^{11^T} & -(L_2 C)^T Q_{22}^{21^T} \end{pmatrix} \\ \Pi_{33} &= \begin{pmatrix} -\mu_2 I_n & 0 \\ (\star) & -\mu_4 I_n \end{pmatrix} \\ \Pi_{35} &= \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ I_n - \delta Q_{22}^{11^T} & -\delta Q_{22}^{21^T} \end{pmatrix} \\ \Pi_{36} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \delta Q_{22}^{11^T} & \delta Q_{22}^{21^T} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Pi_{44} &= \begin{pmatrix} -\frac{\lambda^2}{2}I_n & 0 \\ (\star) & -\frac{\lambda^2}{2}I_n \end{pmatrix} \\ \Pi_{45} &= \begin{pmatrix} (L_1W_2)^T Q_{22}^{11^T} + W_1^T(I_n - \delta Q_{22}^{11})^T & (L_1W_2)^T Q_{22}^{21^T} - W_1^T \delta Q_{22}^{21^T} \\ (L_2W_2)^T Q_{22}^{11^T} & (L_2W_2)^T Q_{22}^{21^T} \end{pmatrix} \\ \Pi_{46} &= \begin{pmatrix} (W_1 - L_1W_2)^T Q_{22}^{11^T} & (W_1 - L_1W_2)^T Q_{22}^{21^T} \\ -(L_2W_2)^T Q_{22}^{11^T} & (L_2W_2)^T Q_{22}^{21^T} \end{pmatrix} \\ \Pi_{55} &= \begin{pmatrix} \hat{P}_{11}^{11} - \hat{Q}_{11}^{11} - \hat{Q}_{11}^{11^T} & \hat{P}_{11}^{12} - \hat{Q}_{11}^{12} - \hat{Q}_{11}^{21^T} \\ (\star) & \hat{P}_{11}^{22} - \hat{Q}_{11}^{22} - \hat{Q}_{11}^{22^T} \end{pmatrix} \\ \Pi_{56} &= \begin{pmatrix} \hat{P}_{12}^{11} - I_n + Q_{22}^{11} & \hat{P}_{12}^{12} + Q_{22}^{12} \\ \hat{P}_{12}^{21} + Q_{22}^{21} & \hat{P}_{12}^{22} - I_n + Q_{22}^{22} \end{pmatrix} \\ \Pi_{66} &= \begin{pmatrix} P_{22}^{11} - Q_{22}^{11} - Q_{22}^{11^T} & P_{22}^{12} - Q_{22}^{12} - Q_{22}^{21^T} \\ (\star) & P_{22}^{22} - Q_{22}^{22} - Q_{22}^{22^T} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Soit la solution particulière suivante :

$$\begin{aligned}\hat{P}_{11} &= \begin{pmatrix} \hat{P}_{11}^{11} & 0 \\ 0 & \hat{P}_{11}^{22} \end{pmatrix}, \hat{P}_{12} = \begin{pmatrix} \hat{P}_{12}^{11} & 0 \\ 0 & \hat{P}_{12}^{22} \end{pmatrix}, P_{22} = \begin{pmatrix} P_{22}^{11} & 0 \\ 0 & P_{22}^{22} \end{pmatrix} \\ \hat{Q}_{11} &= \begin{pmatrix} \hat{Q}_{11}^{11} & 0 \\ 0 & \hat{Q}_{11}^{22} \end{pmatrix}, Q_{22} = \begin{pmatrix} Q_{22}^{11} & 0 \\ 0 & Q_{22}^{22} \end{pmatrix} \\ \mathcal{L} &= (L_1 \ 0), \mathcal{K} = (K_1 \ 0)\end{aligned}$$

Cette solution est également une solution de (3.78) pour $L = L_1$ et $K = K_1$. Par conséquent, toutes les solutions de (3.78) sont incluses dans les solution de (3.105). Ainsi, la commande basée-observateur avec fenêtres glissantes est moins restrictive que celle sans fenêtres glissantes.

3.3.3 Résultats de simulations

On considère le système décrit par le modèle d'état (3.52) avec

$$\begin{aligned}A &= \begin{pmatrix} 1+T & T \\ -T & 1+T \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} T \\ 5T \end{pmatrix}, W_1 = \begin{pmatrix} T \\ 0 \end{pmatrix} \\ C &= (1 \ 0), W_2 = 1\end{aligned}$$

$$f(x(k)) = T \begin{pmatrix} -x_1(x_1^2 + x_2^2) \\ -x_2(x_1^2 + x_2^2) \end{pmatrix} \text{ et } T = 0.001s.$$

La fonction $f(x(k))$ est définie par A.2.1 avec $\rho = 0$ et par A.3.1 avec $\beta = 0.5$ et $\gamma = -0.1$.

La résolution des LMIs données par les deux stratégies de commande proposées permet d'obtenir les résultats présentés dans le tableau 3.4.

avec

Approche	$\lambda_{\min}$
Approche sans fenêtres glissantes	4.3869
Approche avec fenêtres glissantes ($M = 2$)	3.9966

TABLE 3.4 – Détermination de $\lambda_{\min}$.

- Approche sans fenêtres glissantes :

$$L = \begin{pmatrix} 0.8101 \\ 5.3020 \end{pmatrix}$$

$$K = (-45.5340 \quad 6.5787)$$

- Approche avec fenêtres glissantes ($M = 2$) :

$$L_1 = \begin{pmatrix} 0.9102 \\ 5.4659 \end{pmatrix}$$

$$L_2 = \begin{pmatrix} 0.0026 \\ 0.0431 \end{pmatrix}$$

$$K_1 = (-43.3240 \quad 5.6890)$$

$$K_2 = (1.0097 \quad 0.2532).$$

La valeur de $\lambda_{\min}$ calculée par l'approche avec fenêtres glissantes est plus petite que celle calculée par la commande standard.

Les résultats de simulation en utilisant les deux approches proposées sont donnés par les figures 3.1 et 3.2 en prenant comme conditions initiales $x(0) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \end{pmatrix}^T$ et $\hat{x}(0) = \begin{pmatrix} -3 & -2 \end{pmatrix}^T$.

3.4 Conclusion

Dans ce chapitre, des nouvelles conditions LMI sont proposées pour résoudre le problème de la commande basée-observateur de type $\mathcal{H}_\infty$ pour les systèmes Lipschitz et les systèmes « one-sided Lipschitz » à temps discret. Pour traiter le problème standard de BMI correspondant à ces deux classes de systèmes non linéaires, une technique performante basée sur l'introduction d'une variable dite « slack variable » inspirée de [Bibi et al., 2017] a été utilisée pour obtenir des nouvelles contraintes linéaires pouvant être manipulées plus facilement. En effet, cette technique permet d'annuler certains termes bilinéaires compliqués résultants du couplage entre les paramètres de l'observateur et du contrôleur. Pour rendre la contribution plus cohérente, deux types de structures de commande basées observateur ont été proposés : La première structure est basée sur les formes standards de l'observateur de Luenberger et de la loi de commande par retour d'état. La deuxième mène à des conditions LMI plus générales. Cette structure implique deux fenêtres glissantes de mesures et d'états retardées, et permet ensuite d'introduire des variables de décision supplémentaires. À travers quelques exemples numériques, toutes les conditions LMI proposées ont été validées.

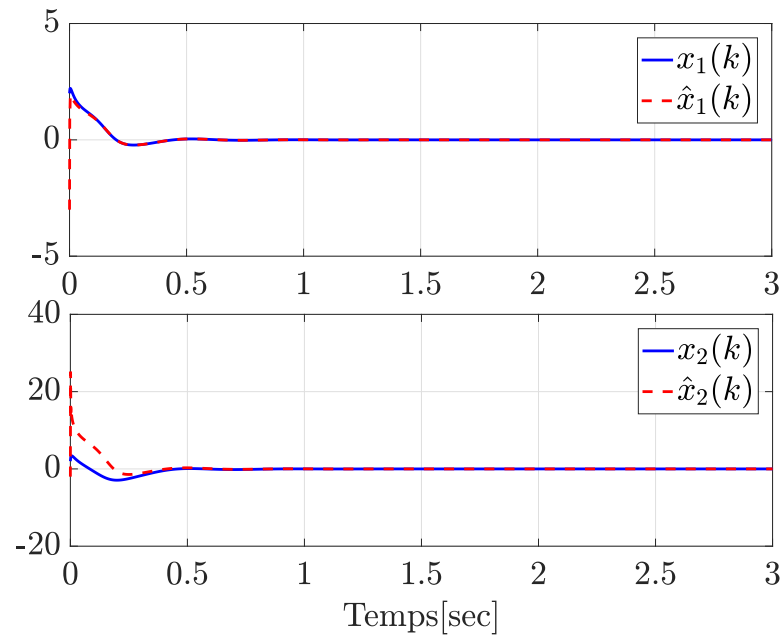


FIGURE 3.3 – Les trajectoires de l'état réel (ligne bleue) et l'état estimé (ligne rouge) en utilisant l'approche sans fenêtres glissantes

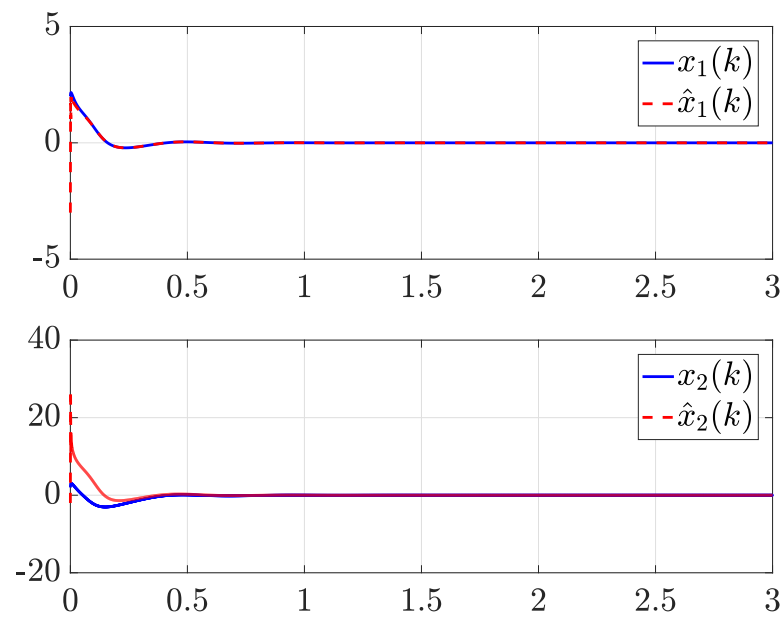


FIGURE 3.4 – Les trajectoires de l'état réel (ligne bleue) et l'état estimé (ligne rouge) en utilisant l'approche avec fenêtres glissantes

Chapitre 4

Commande robuste basée-observateur de type $\mathcal{H}_\infty$ pour les systèmes Lipschitz

« La connaissance progresse en intégrant en elle l'incertitude, non en l'exorcisant. »

Edgar Morin

Sommaire

4.1	Introduction	90
4.2	Structure sans fenêtres glissantes	90
4.2.1	Position du problème	91
4.2.2	Analyse de la stabilité	93
4.3	Structure avec fenêtres glissantes	96
4.3.1	Position du problème	96
4.3.2	Analyse de la stabilité	98
4.3.3	Linéarisation de la contrainte BMI	99
4.3.4	Discussion sur les avantages liés à l'introduction d'une fenêtre glissante	100
4.4	Résultats de simulations	102
4.4.1	Exemple 1 : Robot à bras articulé	102
4.4.2	Exemple 2	105
4.5	Conclusion	107

4.1 Introduction

Un modèle mathématique représente avec précision la dynamique des systèmes pragmatiques. Parfois, certaines erreurs de données, paramètres déconcertés, bruits environnementaux, perturbations ou bien même l'âge du système peuvent entraîner des erreurs de modélisation. Ces erreurs peuvent entraîner une déviation de la dynamique d'origine pendant la commande ou l'estimation d'état. De telles incertitudes pourraient entraîner une instabilité, un décalage, des discordances ou une dégradation des performances du contrôleur. Par conséquent, des méthodes robustes de stabilisation contre les incertitudes ont été proposées pour filtrer les perturbations et ces incertitudes et assurer un bon degré de sensibilité au bruit, de bonne performance et de robustesse [Li et De-Souza, 1997, Oliveira *et al.*, 1999, Ho et Lu, 2003, Kheloufi *et al.*, 2014, Song et S.He, 2015, Kheloufi *et al.*, 2015, Ahmad *et al.*, 2016, Ito et Dinh, 2018].

Dans ce chapitre, une nouvelle méthode de conception de commande basée-observateur pour une classe de systèmes Lipschitz à temps discret en présence de perturbations aléatoires et bornées et des incertitudes paramétriques affectant l'entrée et la sortie est proposée. En analysant la stabilité au sens de Lyapunov, en introduisant une variable dite « slack variable » [Heemels *et al.*, 2010] et en utilisant judicieusement la reformulation du lemme de Young, on montre que la solution du problème de commande par retour d'état basée-observateur en temps discret, exprimée en terme de LMI, est conditionnée par un ensemble de conditions d'optimisation convexes, simples et traitables numériquement. Les conditions de l'existence d'un problème d'optimisation LMI sont élaborées en utilisant dans un premier temps les formes standards de l'observateur de Luenberger et de la loi de commande par retour d'état estimé et dans un deuxième temps en introduisant une fenêtre de mesures glissante retardées dans la structure de l'observateur et une autre d'états retardés dans la structure de la loi de commande. Des exemples numériques sont fournis afin de montrer la validité et la supériorité des résultats proposés pour cette classe de systèmes non linéaires considérée.

4.2 Structure sans fenêtres glissantes

Dans cette partie, les étapes de la synthèse de deux lois de commande basée-observateur de type $\mathcal{H}_\infty$ pour les systèmes Lipschitz sont détaillées.

On considère la classe de système non linéaire suivante :

$$\begin{cases} x(k+1) &= (A + \Delta A(k))x(k) + Bu(k) + Df(x(k)) + W_1\omega(k) \\ y(k) &= (C + \Delta C(k))x(k) + W_2\omega(k) \end{cases} \quad (4.1)$$

où $x(k) \in \mathbb{R}^n$, $u(k) \in \mathbb{R}^m$, $y(k) \in \mathbb{R}^p$ et $\omega(k) \in \mathbb{R}^r$ représentent respectivement, l'état, l'entrée, la sortie et la perturbation. $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$, $D \in \mathbb{R}^{n \times q}$, $W_1 \in \mathbb{R}^{n \times r}$ et $W_2 \in \mathbb{R}^{p \times r}$ sont des matrices constantes. $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^q$ est une fonction non linéaire supposée Lipschitz.

$\Delta A(k)$ et $\Delta C(k)$ sont des matrices inconnues représentant des incertitudes paramétriques variables en fonction du temps :

$$\Delta A(k) = M_1 F(k) N_1 \quad (4.2a)$$

$$\Delta C(k) = M_2 F(k) N_2 \quad (4.2b)$$

où la matrice inconnue $F(k)$ satisfait la condition suivante :

$$F(k)^T F(k) \leq I. \quad (4.3)$$

Dans la suite, un premier résultat concernant la commande robuste basée-observateur de type $\mathcal{H}_\infty$ pour les systèmes Lipschitz à temps discret est présenté.

4.2.1 Position du problème

Pour le système non linéaire (4.1), on considère l'observateur de Luenberger suivant :

$$\begin{cases} \hat{x}(k+1) &= A\hat{x}(k) + Bu(k) + Df(\hat{x}(k)) + L(y(k) - \hat{y}(k)) \\ \hat{y}(k) &= C\hat{x}(k) \end{cases} \quad (4.4)$$

couplé avec la loi de commande suivante :

$$u(k) = K\hat{x}(k) \quad (4.5)$$

où $\hat{x}(k)$ représente l'état estimé.

Le gain de l'observateur L et le gain de la commande K sont des matrices inconnues à déterminer telles que le système en boucle fermée est asymptotiquement stable et satisfait le critère $\mathcal{H}_\infty$.

Soit $e(k) = x(k) - \hat{x}(k)$, l'erreur entre $x(k)$ et son estimé. La dynamique de l'erreur d'estimation $e(k+1) = x(k+1) - \hat{x}(k+1)$ est donnée par :

$$e(k+1) = (\Delta A(k) - L\Delta C(k))x(k) + (A - LC)e(k) + D\left(f(x(k)) - f(\hat{x}(k))\right) + (W_1 - LW_2)\omega(k). \quad (4.6)$$

En utilisant les équations (4.1) et (4.5), $x(k+1)$ peut être réécrit comme suit :

$$x(k+1) = \left((A + \Delta A(k)) + BK\right)x(k) - BKe(k) + Df(x(k)) + W_1\omega(k). \quad (4.7)$$

$f(\cdot)$ est une fonction non linéaire Lipschitz. Sans perdre de généralité, on suppose que $f(0) = 0$ et par l'application du lemme A.1.1 de l'annexe A, on obtient

$$f(\hat{x}(k)) = \sum_{i,j=1}^{q,n} \varphi_{ij} H_{ij} \hat{x}(k) = \Sigma_1(\Theta)x(k) \quad (4.8)$$

et

$$f(x(k)) - f(\hat{x}(k)) = \sum_{i,j=1}^{q,n} \psi_{ij} H_{ij} e(k) = \Sigma_2(\Theta)e(k) \quad (4.9)$$

avec

$$\begin{aligned} \underline{\alpha}_{f_{ij}} &\leq \varphi_{ij} \leq \bar{\alpha}_{f_{ij}} \\ \underline{\alpha}_{\psi_{ij}} &\leq \psi_{ij} \leq \bar{\alpha}_{\psi_{ij}} \\ \varphi_{ij} &\triangleq \varphi_{ij}(\hat{\varrho}_i^{0_{i,j-1}}, \hat{\varrho}_i^{0_{i,j}}) \\ \psi_{ij} &\triangleq \psi_{ij}(\hat{\varrho}_i^{\hat{\varrho}_{i,j-1}}, \hat{\varrho}_i^{\hat{\varrho}_{i,j}}) \\ \varrho_i &= x(k) \\ \hat{\varrho}_i &= \hat{x}(k) \\ H_{ij} &= e_q(i)e_n^T(j). \end{aligned}$$

Ainsi, le système en boucle fermée a la forme suivante :

$$\bar{x}(k+1) = \bar{A}\bar{x}(k) + \Sigma(\Theta)\bar{x}(k) + \bar{W}\omega(k) \quad (4.10)$$

avec

$$\bar{x}(k) = \begin{pmatrix} x(k) \\ e(k) \end{pmatrix}, \bar{A} = \begin{pmatrix} A + \Delta A(k) + BK & -BK \\ \Delta A(k) - L\Delta C(k) & A - LC \end{pmatrix}$$

$$\Sigma(\Theta) = \begin{pmatrix} D \sum_{i,j=1}^{p,n} \varphi_{ij} H_{ij} & 0 \\ 0 & D \sum_{i,j=1}^{p,n} \psi_{ij} H_{ij} \end{pmatrix}, \bar{W} = \begin{pmatrix} W_1 \\ W_1 - LW_2 \end{pmatrix}.$$

Le paramètre Θ appartient à l'ensemble convexe borné $\mathcal{H}_{qn}$ pour lequel l'ensemble des sommets est défini par

$$\mathcal{V}_{\mathcal{H}_{qn}} = \{\varphi, \psi \in \mathbb{R}^{q \times n} \text{ et } \varphi_{ij}, \psi_{ij} \in \{\underline{\alpha}_{f_{ij}}, \bar{\alpha}_{f_{ij}}\}\}. \quad (4.11)$$

Notre but est de chercher les gains K et L tels que le système en boucle fermée (4.10) soit asymptotiquement stable et que le critère $\mathcal{H}_\infty$ suivant soit respecté :

$$\|Ge\|_{l_2} \leq \lambda \|\omega\|_{l_2} \quad (4.12)$$

où G est une matrice connue et $\lambda > 0$ est le niveau d'atténuation des perturbations qui sera minimisé.

La résolution de ce problème est équivalente à trouver une fonction de Lyapunov $V(k)$ telle que

$$\Lambda = \Delta V(k) + \bar{x}(k)^T \begin{pmatrix} 0 \\ G^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & G \end{pmatrix} \bar{x}(k) - \lambda^2 \omega^T(k) \omega(k) < 0. \quad (4.13)$$

c'est à dire

$$\Lambda = \Delta V(k) + \bar{x}(k)^T \mathbb{G} \bar{x}(k) - \lambda^2 \omega^T(k) \omega(k) < 0 \quad (4.14)$$

avec $\Delta V(k) = V(k+1) - V(k)$ et $\mathbb{G} = \begin{pmatrix} 0 \\ G^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & G^T G \end{pmatrix}$.

Soit la fonction de Lyapunov suivante :

$$V(k) = \bar{x}^T(k) P \bar{x}(k) \quad (4.15)$$

où $P = P^T > 0$ est la matrice de Lyapunov.

La matrice de Lyapunov P a la forme suivante :

$$P = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12}^T & P_{22} \end{pmatrix}. \quad (4.16)$$

Λ est alors équivalente à :

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \bar{x}(k) \\ \omega(k) \end{pmatrix}^T \Pi \begin{pmatrix} \bar{x}(k) \\ \omega(k) \end{pmatrix} \quad (4.17)$$

avec

$$\Pi = \begin{pmatrix} (\bar{A} + \Sigma(\Theta))^T P (\bar{A} + \Sigma(\Theta)) - P + \mathbb{G} & (\bar{A} + \Sigma(\Theta))^T P \bar{W} \\ (\star) & \bar{W}^T P \bar{W} - \lambda^2 I_r \end{pmatrix}. \quad (4.18)$$

Ainsi, la condition (4.14) est vérifiée si et seulement si $\Pi < 0$, ce qui est équivalent, en appliquant le lemme de Schur B.2.1, à

$$\begin{pmatrix} -P^{-1} & \bar{A} + \Sigma(\Theta) & \bar{W} \\ (\star) & -P + \mathbb{G} & 0 \\ (\star) & (\star) & -\lambda^2 I_r \end{pmatrix} < 0. \quad (4.19)$$

La contrainte (4.19) est encore non résolue en raison de sa nature bilinéaire. Le paragraphe suivant propose une nouvelle approche pour surmonter cet obstacle grâce à une approche LMI basée sur une utilisation judicieuse de la reformulation de la relation de Young B.4.2. Ainsi, on obtient des conditions suffisantes moins conservatrices assurant la stabilité du système en boucle fermée (4.10).

4.2.2 Analyse de la stabilité

Dans ce paragraphe, on aborde le problème de la stabilisation basée-observateur du système (4.1) en utilisant l'observateur (4.4) et la loi de commande (4.5).

Théorème 4.2.1. *Pour un niveau d'atténuation des perturbations $\lambda > 0$, le problème de la commande robuste basée-observateur de type $\mathcal{H}_\infty$ correspondant au système (4.1), l'observateur (4.4) et la commande (4.5) est asymptotiquement stable au sens de Lyapunov si pour les scalaires positifs η_1, η_2 et η_3 , il existe des matrices définies $\hat{P}_{11}, \hat{P}_{12}, P_{22}, \hat{Q}_1, Q_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\hat{L} \in \mathbb{R}^{n \times q}$ et $\hat{K} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ telles que la LMI suivante soit faisable :*

minimiser λ en respectant

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \Xi_{11} & \hat{P}_{12} & \Xi_{13} & 0 & W_1 & -B\hat{K} \\ (\star) & \Xi_{22} & 0 & \Xi_{24} & \Xi_{25} & 0 \\ (\star) & (\star) & -\hat{P}_{11} & -\hat{P}_{12} & 0 & 0 \\ (\star) & (\star) & (\star) & \Xi_{44} & 0 & I_n \\ (\star) & (\star) & (\star) & (\star) & \Xi_{55} & 0 \\ (\star) & (\star) & (\star) & (\star) & (\star) & -\frac{1}{2}\hat{Q}_1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ Q_2 M_1 & \hat{L} M_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \hat{Q}_1 N_1^T & \hat{Q}_1 N_1^T & \hat{Q}_1 N_2^T \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ (\star) & \begin{pmatrix} -\frac{1}{\eta_2} I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (\star) & -\frac{1}{\eta_3} I & 0 & 0 & 0 \\ (\star) & (\star) & -\eta_1 I & 0 & 0 \\ (\star) & (\star) & (\star) & -\eta_2 I & 0 \\ (\star) & (\star) & (\star) & (\star) & -\eta_3 I \end{pmatrix} \end{pmatrix} < 0 \quad (4.20)$$

avec

$$\begin{aligned} \Xi_{11} &= \hat{P}_{11} - \hat{Q}_1 - \hat{Q}_1^T + \eta_1 M_1 M_1^T \\ \Xi_{13} &= (A + D\Sigma_1(\Theta))\hat{Q}_1^T + B\hat{K} \\ \Xi_{22} &= P_{22} - Q_2 - Q_2^T \\ \Xi_{24} &= Q_2(A + D\Sigma_2(\Theta)) - \hat{L}C \\ \Xi_{25} &= Q_2 W_1 - \hat{L}W_2 \\ \Xi_{44} &= -P_{22} + G^T G \\ \Xi_{55} &= -\lambda^2 I_r \\ \Theta &\in \mathcal{V}_{\mathcal{H}_{qn}}. \end{aligned}$$

Lorsque la contrainte (4.20) est faisable, les matrices de gains sont données par $L = Q_2^{-1}\hat{L}$ et $K = \hat{K}\hat{Q}_1^{-T}$. $\square$

Démonstration. Puisque les variables P et P^{-1} sont interdépendantes, elles ne devraient pas exister simultanément dans la même contrainte. Pour éliminer la matrice P^{-1} , l'idée consiste à introduire une matrice Q de dimension appropriée et à pré-multiplier (4.19) par la matrice bloc-diag(Q, I, I) et la post-multiplier par la matrice bloc-diag(Q^T, I, I). En utilisant l'inégalité $-QP^{-1}Q^T \leq P - Q - Q^T$, l'inégalité (4.19) est alors équivalente à

$$\begin{pmatrix} P - Q - Q^T & Q(\bar{A} + \Sigma(\Theta)) & Q\bar{W} \\ (\star) & -P + \mathbb{G} & 0 \\ (\star) & (\star) & -\lambda^2 I_r \end{pmatrix} < 0. \quad (4.21)$$

Soit la structure suivante de la variable Q :

$$Q = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{pmatrix}. \quad (4.22)$$

En utilisant (4.16) et (4.22), l'inégalité (4.21) s'écrit comme suit :

$$\begin{pmatrix} P_{11} - Q_{11} - Q_{11}^T & P_{12} - Q_{12} - Q_{21}^T & \Pi_{13} & \Pi_{14} & \Pi_{15} \\ (\star) & P_{22} - Q_{22} - Q_{22}^T & \Pi_{23} & \Pi_{24} & \Pi_{25} \\ (\star) & (\star) & -P_{11} & -P_{12} & 0 \\ (\star) & (\star) & (\star) & -P_{22} + G^T G & 0 \\ (\star) & (\star) & (\star) & (\star) & -\lambda^2 I_r \end{pmatrix} < 0 \quad (4.23)$$

avec

$$\begin{aligned} \Pi_{13} &= Q_{11}(A + \Delta A_k + BK + D\Sigma_1(\Theta)) + Q_{12}(\Delta A_k - L\Delta C_k) \\ \Pi_{14} &= -Q_{11}BK + Q_{12}(A - LC + D\Sigma_2(\Theta)) \\ \Pi_{15} &= Q_{11}W_1 + Q_{12}(W_1 - LW_2) \\ \Pi_{23} &= Q_{21}(A + \Delta A_k + BK + D\Sigma_1(\Theta)) + Q_{22}(\Delta A_k - L\Delta C_k) \\ \Pi_{24} &= -Q_{21}BK + Q_{22}(A - LC + D\Sigma_2(\Theta)) \\ \Pi_{25} &= Q_{21}W_1 + Q_{22}(W_1 - LW_2). \end{aligned}$$

Notez ici que le gain L est couplé avec Q_{12} et Q_{22} . De plus, le gain K est couplé avec Q_{11} et Q_{21} . Pour surmonter ce problème, on peut choisir $Q_{12} = Q_{21} = 0$. Alors, en notant $Q_1 = Q_{11}$ et $Q_2 = Q_{22}$, on obtient

$$Q = \begin{pmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{pmatrix} \quad (4.24)$$

En pré-multipliant et post-multipliant (4.23) par la matrice bloc-diag($\hat{Q}_1, I, I, \hat{Q}_1, I$) et la matrice bloc-diag($\hat{Q}_1^T, I, \hat{Q}_1^T, I, I$) avec $\hat{Q}_1 = Q_1^{-1}$ et en utilisant les notations $\hat{P}_{12} = \hat{Q}_1 P_{12}$, $\hat{P}_{11} = \hat{Q}_1 P_{11} \hat{Q}_1^T$, on obtient l'inégalité suivante :

$$\begin{pmatrix} \hat{P}_{11} - \hat{Q}_1 - \hat{Q}_1^T & \hat{P}_{12} & \Pi_{13} & -BK & W_1 \\ (\star) & P_{22} - Q_2 - Q_2^T & \Pi_{23} & Q_2(A - LC + D\Sigma_2(\Theta)) & Q_2(W_1 - LW_2) \\ (\star) & (\star) & -\hat{P}_{11} & -\hat{P}_{12} & 0 \\ (\star) & (\star) & (\star) & -P_{22} + G^T G & 0 \\ (\star) & (\star) & (\star) & (\star) & -\lambda^2 I_r \end{pmatrix} < 0 \quad (4.25)$$

avec

$$\begin{aligned} \Pi_{13} &= (A + \Delta A_k + BK + D\Sigma_1(\Theta))\hat{Q}_1^T \\ \Pi_{23} &= Q_2(\Delta A_k - L\Delta C_k)\hat{Q}_1^T. \end{aligned}$$

L'idée est de coupler le gain K , dans $-BK$, avec la matrice $\hat{Q}_1$. L'inégalité (4.25) peut s'écrire comme suit :

$$\begin{pmatrix} \hat{P}_{11} - \hat{Q}_1 - \hat{Q}_1^T & \hat{P}_{12} & \Pi_{13} & 0 & W_1 \\ (\star) & P_{22} - Q_2 - Q_2^T & \Pi_{23} & Q_2(A - LC + D\Sigma_2(\Theta)) & Q_2(W_1 - LW_2) \\ (\star) & (\star) & -\hat{P}_{11} & -\hat{P}_{12} & 0 \\ (\star) & (\star) & (\star) & -P_{22} + G^T G & 0 \\ (\star) & (\star) & (\star) & (\star) & -\lambda^2 I_r \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ I_n \\ 0 \end{pmatrix}}_{Y^T} \underbrace{\begin{pmatrix} -(BK)^T & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_Z + Z^T Y < 0. \quad (4.26)$$

Ainsi, en appliquant la reformulation du lemme de Young B.4.2 sur (4.26) avec $S = \hat{Q}_1$, l'inégalité suivante est obtenue :

$$\begin{pmatrix} \hat{P}_{11} - \hat{Q}_1 - \hat{Q}_1^T & \hat{P}_{12} & \Pi_{13} & 0 & W_1 & -BK\hat{Q}_1^T \\ (\star) & P_{22} - Q_2 - Q_2^T & \Pi_{23} & \Pi_{24} & \Pi_{25} & 0 \\ (\star) & (\star) & -\hat{P}_{11} & -\hat{P}_{12} & 0 & 0 \\ (\star) & (\star) & (\star) & -P_{22} + G^T G & 0 & I_n \\ (\star) & (\star) & (\star) & (\star) & -\lambda^2 I_r & 0 \\ (\star) & (\star) & (\star) & (\star) & (\star) & -\frac{1}{2}\hat{Q}_1 \end{pmatrix} < 0 \quad (4.27)$$

avec

$$\begin{aligned} \Pi_{24} &= Q_2(A - LC + D\Sigma_2(\Theta)) \\ \Pi_{25} &= Q_2(W_1 - LW_2). \end{aligned}$$

En utilisant le lemme B.5.1 et (4.2), on obtient

$$\begin{pmatrix} \hat{P}_{11} - \hat{Q}_1 - \hat{Q}_1^T & \hat{P}_{12} & \Pi_{13} & 0 & W_1 & -BK\hat{Q}_1^T \\ (\star) & P_{22} - Q_2 - Q_2^T & 0 & \Pi_{24} & Q_2(W_1 - LW_2) & 0 \\ (\star) & (\star) & -\hat{P}_{11} & -\hat{P}_{12} & 0 & 0 \\ (\star) & (\star) & (\star) & -P_{22} + G^T G & 0 & I_n \\ (\star) & (\star) & (\star) & (\star) & -\lambda^2 I_r & 0 \\ (\star) & (\star) & (\star) & (\star) & (\star) & -\frac{1}{2}\hat{Q}_1 \end{pmatrix} + \eta_1 Y_1 Y_1^T + \frac{1}{\eta_1} Z_1^T Z_1 + \eta_2 Y_2 Y_2^T + \frac{1}{\eta_2} Z_1^T Z_1 + \eta_3 Y_3 Y_3^T + \frac{1}{\eta_3} Z_2^T Z_2 < 0 \quad (4.28)$$

avec

$$\begin{aligned} \Pi_{13} &= (A + BK + D\Sigma_1(\Theta))\hat{Q}_1^T \\ Y_1 &= (M_1^T \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)^T \\ Y_2 &= (0 \ M_1^T Q_2^T \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)^T \\ Y_3 &= (0 \ M_2^T L^T Q_2^T \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)^T \\ Z_1 &= (0 \ 0 \ N_1 \hat{Q}_1^T \ 0 \ 0 \ 0) \\ Z_2 &= (0 \ 0 \ N_2 \hat{Q}_1^T \ 0 \ 0 \ 0). \end{aligned}$$

Ainsi en utilisant le lemme de Schur B.2.1 et en notant $\hat{K} = K\hat{Q}_1^T$ et $\hat{L} = Q_2L$, on obtient la contrainte décrite par (4.20). $\square$

Remarque 4.2.1. Notez que (4.20) est une LMI si on fixe à priori η_2 et η_3 . Ainsi, on peut soit utiliser la méthode de grille « gridding method » pour fixer ces paramètres, soit linéariser (4.20) par rapport à η_2 et η_3 en utilisant l'inégalité $\frac{-1}{\eta_i}I \leq -(2 - \eta_i)I$ pour $i \in \{1, 2\}$.

4.3 Structure avec fenêtres glissantes

Pour améliorer les résultats trouvés dans la section précédente, une fenêtre de mesures retardées est ajoutée à la structure de l'observateur et une fenêtre d'états retardés est ajoutée à la structure de la loi de commande. Les nouvelles structures considérées augmentent le degré de liberté de la contrainte à vérifier.

4.3.1 Position du problème

Pour le système (4.1), on considère l'observateur avec fenêtre de mesures glissante suivant :

$$\hat{x}(k+1) = A\hat{x}(k) + Bu(k) + Df(\hat{x}(k)) + \mathcal{L} \begin{pmatrix} y(k) - C\hat{x}(k) \\ y(k-1) - C\hat{x}(k-1) \\ \vdots \\ y(k-M+1) - C\hat{x}(k-N+1) \end{pmatrix} \quad (4.29)$$

où $\hat{x}(k)$, $\mathcal{L}$ et M représentent, respectivement, l'estimation de l'état, la matrice du gain de l'observateur et le nombre de mesures.

L'équation d'état (4.1) peut être réécrite sous une nouvelle forme contenant les mesures retardées. Ainsi, le nouveau vecteur d'état est décrit par

$$\mathcal{X}(k+1) = (\mathcal{A} + \Delta\mathcal{A}(k))\mathcal{X}(k) + \mathcal{B}u(k) + \mathcal{D}f(\mathcal{I}^T\mathcal{X}(k)) + \mathcal{W}_1\varpi(k) \quad (4.30)$$

avec

$$\begin{aligned} \mathcal{X}(k) &= \begin{pmatrix} x(k) \\ x(k-1) \\ \vdots \\ x(k-M+1) \end{pmatrix}, \quad \varpi(k) = \begin{pmatrix} \omega(k) \\ \omega(k-1) \\ \vdots \\ \omega(k-M+1) \end{pmatrix} \\ \mathcal{A} &= \begin{pmatrix} A & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ I_n & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & I_n & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B} = \begin{pmatrix} B \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \\ \Delta\mathcal{A}(k) &= \begin{pmatrix} \Delta A(k) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathcal{M}_1 F(k) \mathcal{N}_1 \end{aligned}$$

$$\mathcal{M}_1 = \begin{pmatrix} M_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \mathcal{N}_1 = \begin{pmatrix} N_1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{D} = \begin{pmatrix} D \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \mathcal{I} = \begin{pmatrix} I_n \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \mathcal{W}_1 = \begin{pmatrix} W_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La nouvelle reformulation de l'observateur à fenêtre glissante (4.29) est la suivante :

$$\hat{\mathcal{X}}(k+1) = \mathcal{A}\hat{\mathcal{X}}(k) + \mathcal{B}u(k) + \mathcal{D}f(\mathcal{I}^T \hat{\mathcal{X}}(k)) + \mathcal{I}\mathcal{L}\mathcal{C}\varepsilon(k) + \mathcal{I}\mathcal{L}\Delta\mathcal{C}(k)\mathcal{X}(k) + \mathcal{I}\mathcal{L}\mathcal{W}_2\varpi(k) \quad (4.31)$$

où

$\varepsilon(k) = \mathcal{X}(k) - \hat{\mathcal{X}}(k)$ représente l'erreur d'estimation

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} L_1 & L_2 & \cdots & L_M \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{C} = \text{bloc-diag} \left(\overbrace{C, \dots, C}^{M \text{ fois}} \right)$$

$$\Delta\mathcal{C}(k) = \text{bloc-diag} \left(\overbrace{\Delta C(k), \dots, \Delta C(k)}^{M \text{ fois}} \right) = \mathcal{M}_2 \mathcal{F}(k) \mathcal{N}_2$$

$$\mathcal{M}_2 = \text{bloc-diag} \left(\overbrace{M_2, \dots, M_2}^{M \text{ fois}} \right)$$

$$\mathcal{F}(k) = \text{bloc-diag}(F(k), \dots, F(k-M+1))$$

$$\mathcal{N}_2 = \text{bloc-diag} \left(\overbrace{N_2, \dots, N_2}^{M \text{ fois}} \right)$$

$$\mathcal{W}_2 = \text{bloc-diag} \left(\overbrace{W_2, \dots, W_2}^{M \text{ fois}} \right).$$

La loi de commande proposée a la forme suivante :

$$u(k) = \sum_{i=1}^M K_i \hat{x}(k-i+1) \quad (4.32)$$

Elle peut être réécrite comme suit :

$$u(k) = \mathcal{K}\hat{\mathcal{X}}(k) \quad (4.33)$$

avec

$$\mathcal{K} = \begin{pmatrix} K_1 & K_2 & \cdots & K_M \end{pmatrix}.$$

À partir de (4.8) et (4.9) et en utilisant le fait que $x(k) = \mathcal{I}^T \mathcal{X}(k)$ et $\hat{x}(k) = \mathcal{I}^T \hat{\mathcal{X}}(k)$, on obtient

$$f(\mathcal{I}^T \hat{\mathcal{X}}(k)) = \sum_{i,j=1}^{q,n_i} \varphi_{ij} H_{ij} E_i \mathcal{I}^T \hat{\mathcal{X}}(k) = \Sigma_1(\Theta) \mathcal{I}^T \hat{\mathcal{X}}(k) \quad (4.34)$$

et

$$f(\mathcal{I}^T \mathcal{X}(k)) - f(\mathcal{I}^T \hat{\mathcal{X}}(k)) = \sum_{i,j=1}^{q,n_i} \psi_{ij} H_{ij} E_i \mathcal{I}^T \varepsilon(k) = \Sigma_2(\Theta) \mathcal{I}^T \varepsilon(k). \quad (4.35)$$

En utilisant (4.34) et (4.35), l'état et la dynamique de l'erreur d'estimation sont exprimés comme suit :

$$\mathcal{X}(k+1) = (\mathcal{A} + \Delta \mathcal{A}(k) + \mathcal{B}\mathcal{K} + \mathcal{D}\Sigma_1(\Theta)\mathcal{I}^T) \mathcal{X}(k) - \mathcal{B}\mathcal{K}\varepsilon(k) + \mathcal{W}_1 \varpi(k) \quad (4.36)$$

$$\varepsilon(k+1) = (\Delta \mathcal{A}(k) - \mathcal{I}\mathcal{L}\Delta \mathcal{C}(k)) \mathcal{X}(k) + (\mathcal{A} - \mathcal{I}\mathcal{L}\mathcal{C} + \mathcal{D}\Sigma_2(\Theta)\mathcal{I}^T) \varepsilon(k) + (\mathcal{W}_1 - \mathcal{I}\mathcal{L}\mathcal{W}_2) \varpi(k) \quad (4.37)$$

Le système en boucle fermée et alors décrit par :

$$\bar{x}(k+1) = \bar{A}\bar{x}(k) + \Sigma(\Theta)\bar{x}(k) + \bar{W}\varpi(k) \quad (4.38)$$

avec

$$\begin{aligned} \bar{x}(k) &= \begin{pmatrix} \mathcal{X}(k) \\ \varepsilon(k) \end{pmatrix}, \bar{A} = \begin{pmatrix} \mathcal{A} + \Delta \mathcal{A}(k) + \mathcal{B}\mathcal{K} & -\mathcal{B}\mathcal{K} \\ \Delta \mathcal{A}(k) - \mathcal{I}\mathcal{L}\Delta \mathcal{C}(k) & \mathcal{A} - \mathcal{I}\mathcal{L}\mathcal{C} \end{pmatrix} \\ \Sigma(\Theta) &= \begin{pmatrix} \mathcal{D}\Sigma_1(\Theta)\mathcal{I}^T & 0 \\ 0 & \mathcal{D}\Sigma_2(\Theta)\mathcal{I}^T \end{pmatrix}, \bar{W} = \begin{pmatrix} \mathcal{W}_1 \\ \mathcal{W}_1 - \mathcal{I}\mathcal{L}\mathcal{W}_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

4.3.2 Analyse de la stabilité

Corollaire 4.3.1. *Pour un niveau d'atténuation des perturbations $\lambda > 0$, le problème de la commande robuste basée-observateur de type $\mathcal{H}_\infty$ correspondant au système (4.1), l'observateur (4.29) et la commande (4.32) est asymptotiquement stable au sens de Lyapunov si pour les scalaires positifs η_1 , η_2 et η_3 , il existe des matrices définies $\hat{P}_{11}$, $\hat{P}_{12}$, P_{22} , $\hat{Q}_1 > 0$, $Q_2 \in \mathbb{R}^{nM \times nM}$, $\mathcal{L} \in \mathbb{R}^{n \times pM}$ et $\mathcal{K} \in \mathbb{R}^{m \times nM}$ telles que la BMI suivante soit faisable :*

minimiser λ en respectant

$$\left(\begin{pmatrix} \Xi_{11} & \hat{P}_{12} & \Xi_{13} & 0 & \mathcal{W}_1 & \Xi_{16} \\ (\star) & \Xi_{22} & 0 & \Xi_{24} & \Xi_{25} & 0 \\ (\star) & (\star) & -\hat{P}_{11} & -\hat{P}_{12} & 0 & 0 \\ (\star) & (\star) & (\star) & \Xi_{44} & 0 & I_{n \times M} \\ (\star) & (\star) & (\star) & (\star) & \Xi_{55} & 0 \\ (\star) & (\star) & (\star) & (\star) & (\star) & -\frac{1}{2}\hat{Q}_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ Q_2 \mathcal{M}_1 & \Xi_{28} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \hat{Q}_1 \mathcal{N}_1^T & \hat{Q}_1 \mathcal{N}_1^T & \hat{Q}_1 \mathcal{N}_2^T \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\eta_2} I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (\star) & -\frac{1}{\eta_3} I & 0 & 0 & 0 \\ (\star) & (\star) & -\eta_1 I & 0 & 0 \\ (\star) & (\star) & (\star) & -\eta_2 I & 0 \\ (\star) & (\star) & (\star) & (\star) & -\eta_3 I \end{pmatrix} \right) < 0 \quad (4.39)$$

avec

$$\begin{aligned}
 \Xi_{11} &= \hat{P}_{11} - \hat{Q}_1 - \hat{Q}_1^T + \eta_1 \mathcal{M}_1 \mathcal{M}_1^T \\
 \Xi_{13} &= (\mathcal{A} + \mathcal{D}\Sigma_1(\Theta)\mathcal{I}^T + \mathcal{B}\mathcal{K})\hat{Q}_1^T \\
 \Xi_{16} &= -\mathcal{B}\mathcal{K}\hat{Q}_1^T \\
 \Xi_{22} &= P_{22} - Q_2 - Q_2^T \\
 \Xi_{24} &= Q_2(\mathcal{A} + \mathcal{D}\Sigma_2(\Theta)\mathcal{I}^T - \mathcal{I}\mathcal{L}\mathcal{C}) \\
 \Xi_{25} &= Q_2(\mathcal{W}_1 - \mathcal{I}\mathcal{L}\mathcal{W}_2) \\
 \Xi_{28} &= Q_2\mathcal{I}\mathcal{L}\mathcal{M}_2 \\
 \Xi_{44} &= -P_{22} + \mathcal{I}G^T G\mathcal{I}^T \\
 \Xi_{55} &= -\frac{\lambda^2}{M}I_{r \times M} \\
 \Theta &\in \mathcal{V}_{\mathcal{H}_{qn}}.
 \end{aligned}$$

□

Démonstration. La synthèse de la commande basée-observateur avec fenêtres glissantes de type $\mathcal{H}_\infty$ correspondant au système augmenté (4.38) consiste à chercher les gains $\mathcal{L}$ et $\mathcal{K}$ tels que le système en boucle fermée soit asymptotiquement stable et le critère $\mathcal{H}_\infty$ suivant soit vérifié :

$$\|G(x - \hat{x})\|_{l_2} \leq \lambda \|\omega\|_{l_2} \quad (4.40)$$

avec $\lambda > 0$.

Il faut, donc, chercher une fonction de Lyapunov $V(k)$ telle que

$$\Lambda = \Delta V(k) + \bar{x}(k)^T \bar{\mathcal{I}} \mathbb{G} \bar{\mathcal{I}}^T \bar{x}(k) - \frac{\lambda^2}{M} \varpi^T(k) \varpi(k) < 0. \quad (4.41)$$

avec $x(k) = \mathcal{I}^T \mathcal{X}(k)$, $\hat{x}(k) = \mathcal{I}^T \hat{\mathcal{X}}(k)$, $\bar{\mathcal{I}} = \begin{pmatrix} \mathcal{I} & 0 \\ 0 & \mathcal{I} \end{pmatrix}$ et $\mathbb{G} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & G^T G \end{pmatrix}$.

En suivant la même approche détaillée dans le paragraphe précédent et en utilisant les notations $\hat{P}_{11} = \hat{Q}_1 P_{11} \hat{Q}_1^T$, $\hat{P}_{12} = \hat{Q}_1 P_{12}$, on obtient la même contrainte donnée par (4.39). □

4.3.3 Linéarisation de la contrainte BMI

Pour linéariser la BMI (4.39), on procède de la même façon que la méthode présentée dans le paragraphe 3.3.2.3 du chapitre 3 : un changement de variables est choisi pour les termes couplés avec le gain de commande $\mathcal{K}$:

$$\hat{\mathcal{K}} = \mathcal{K} \hat{Q}_1^T. \quad (4.42)$$

Cependant, un simple changement de variables ne peut pas être appliqué pour les termes couplés avec le gain de l'observateur $\mathcal{L}$ à cause de la présence de la matrice $\mathcal{I}$. Alors, une forme particulière de la matrice Q_2 est proposée pour linéariser la BMI (4.39) :

$$Q_2 = \begin{pmatrix} Q_2^{11} & \alpha_1 Q_2^{11} & \cdots & \cdots & \alpha_1 Q_2^{11} \\ \beta_1 Q_2^{11} & Q_2^{22} & \alpha_2 Q_2^{22} & \cdots & \alpha_2 Q_2^{22} \\ \vdots & \beta_2 Q_2^{22} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & Q_2^{M-1,M} \\ \beta_1 Q_2^{11} & \beta_2 Q_2^{22} & \cdots & Q_2^{M,M-1} & Q_2^{MM} \end{pmatrix} \quad (4.43)$$

avec

$$Q_2^{M-1,M} = \alpha_{M-1} Q_2^{M-1,M-1}$$

$$Q_2^{M,M-1} = \beta_{M-1} Q_2^{M-1,M-1}$$

$$0 \leq \alpha_i < 1 \text{ et } 0 \leq \beta_i < 1 \text{ pour } i \in \{1, \dots, M-1\}$$

Par la suite, on peut définir les changements de variables suivants :

$$\hat{L}_i = Q_2^{11} L_i, \text{ pour } i \in \{1, \dots, M\} \quad (4.44)$$

Ainsi, la BMI (4.39) est, transformée en une LMI.

Enfin, les gains peuvent être générés à partir des équations suivantes :

$$\mathcal{K} = \hat{\mathcal{K}}^T \hat{Q}_1^{-T} \quad (4.45)$$

$$L_i = (Q_2^{11})^{-1} \hat{L}_i, \text{ pour } i \in \{1, \dots, M\} \quad (4.46)$$

Remarque 4.3.1. Notez que (4.39) peut être transformée en LMI en utilisant (4.43), si on fixe à priori η_2, η_3, α_i et β_i pour $i \in \{1, \dots, M-1\}$. α_i et β_i , pour $i \in \{1, \dots, M-1\}$, peuvent être fixés en assignant des subdivisions uniformes de l'intervalle $(0, 1)$. Pour η_2, η_3 , on peut utiliser la méthode de grille « gridding method » pour les fixer. D'un autre côté, nous pouvons aussi linéariser (4.39) par rapport à η_2 et η_3 en utilisant les inégalités $\frac{-1}{\eta_1} I \leq -(2 - \eta_1)I$ et $\frac{-1}{\eta_2} I \leq -(2 - \eta_2)I$. $\square$

4.3.4 Discussion sur les avantages liés à l'introduction d'une fenêtre glissante

On considère le cas $M = 2$ de la commande basée-observateur avec fenêtres glissantes telle que :

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \begin{pmatrix} A & 0 \\ I_n & 0 \end{pmatrix}, \mathcal{M}_1 = \begin{pmatrix} M_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathcal{N}_1 = \begin{pmatrix} N_1 & 0 \end{pmatrix} \\ \mathcal{B} &= \begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix}, \mathcal{D} = \begin{pmatrix} D \\ 0 \end{pmatrix}, \mathcal{I} = \begin{pmatrix} I_n \\ 0 \end{pmatrix}, \mathcal{W}_1 = \begin{pmatrix} W_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \mathcal{C} &= \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}, \mathcal{W}_2 = \begin{pmatrix} W_2 & 0 \\ 0 & W_2 \end{pmatrix} \\ \mathcal{M}_2 &= \begin{pmatrix} M_2 & 0 \\ 0 & M_2 \end{pmatrix}, \mathcal{N}_2 = \begin{pmatrix} N_2 & 0 \\ 0 & N_2 \end{pmatrix} \\ \hat{P}_{11} &= \begin{pmatrix} \hat{P}_{11}^{11} & \hat{P}_{11}^{12} \\ \hat{P}_{11}^{12^T} & \hat{P}_{11}^{22} \end{pmatrix}, \hat{P}_{12} = \begin{pmatrix} \hat{P}_{12}^{11} & \hat{P}_{12}^{12} \\ \hat{P}_{12}^{21} & \hat{P}_{12}^{22} \end{pmatrix}, P_{22} = \begin{pmatrix} P_{22}^{11} & P_{22}^{12} \\ P_{22}^{12^T} & P_{22}^{22} \end{pmatrix} \\ \hat{Q}_1 &= \begin{pmatrix} \hat{Q}_1^{11} & \hat{Q}_1^{12} \\ \hat{Q}_1^{12^T} & \hat{Q}_1^{22} \end{pmatrix}, Q_2 = \begin{pmatrix} Q_2^{11} & Q_2^{12} \\ Q_2^{21} & Q_2^{22} \end{pmatrix} \\ \mathcal{L} &= \begin{pmatrix} L_1 & L_2 \end{pmatrix}, \mathcal{K} = \begin{pmatrix} K_1 & K_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

La contrainte (4.39) est alors équivalente à

$$\left(\begin{array}{c} \left(\begin{array}{cccccc} \Xi_{11} & \hat{P}_{12} & \Xi_{13} & 0 & \mathcal{W}_1 & \Xi_{16} \\ (\star) & \Xi_{22} & 0 & \Xi_{24} & \Xi_{25} & 0 \\ (\star) & (\star) & -\hat{P}_{11} & -\hat{P}_{12} & 0 & 0 \\ (\star) & (\star) & (\star) & \Xi_{44} & 0 & I_n \\ (\star) & (\star) & (\star) & (\star) & \Xi_{55} & 0 \\ (\star) & (\star) & (\star) & (\star) & (\star) & -\frac{1}{2}\hat{Q}_1 \end{array} \right) & \left(\begin{array}{ccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \Xi_{27} & \Xi_{28} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Xi_{39} & \Xi_{39} & \Xi_{311} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \\ (\star) & \left(\begin{array}{ccccc} -\frac{1}{\eta_2}I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (\star) & -\frac{1}{\eta_3}I & 0 & 0 & 0 \\ (\star) & (\star) & -\eta_1 I & 0 & 0 \\ (\star) & (\star) & (\star) & -\eta_2 I & 0 \\ (\star) & (\star) & (\star) & (\star) & -\eta_3 I \end{array} \right) \end{array} \right) < 0 \quad (4.47)$$

avec

$$\begin{aligned} \Xi_{11} &= \begin{pmatrix} \hat{P}_{11}^{11} - \hat{Q}_1^{11} - \hat{Q}_1^{11T} + \eta_1 M_1 M_1^T & \hat{P}_{11}^{12} - 2\hat{Q}_1^{12} \\ (\star) & \hat{P}_{11}^{22} - \hat{Q}_1^{22} - \hat{Q}_1^{22T} \end{pmatrix} \\ \Xi_{13} &= \begin{pmatrix} (A + BK_1)\hat{Q}_1^{11T} + BK_2\hat{Q}_1^{12T} & (A + BK_1)\hat{Q}_1^{12} + BK_2\hat{Q}_1^{22T} \\ \hat{Q}_1^{11T}\hat{Q}_1^{12} & \end{pmatrix} \\ \Xi_{16} &= \begin{pmatrix} -BK_1\hat{Q}_1^{11T} - BK_2\hat{Q}_1^{12T} & -BK_1\hat{Q}_1^{12} - BK_2\hat{Q}_1^{22T} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \Xi_{22} &= \begin{pmatrix} P_{22}^{11} - Q_2^{11} - Q_2^{11T} & P_{22}^{12} - Q_2^{12} - Q_2^{21T} \\ (\star) & P_{22}^{22} - Q_2^{22} - Q_2^{22T} \end{pmatrix} \\ \Xi_{24} &= \begin{pmatrix} Q_2^{11}(A - L_1 C) + Q_2^{12} & -Q_2^{11}L_2 C \\ Q_2^{21}(A - L_1 C) + Q_2^{22} & -Q_2^{21}L_2 C \end{pmatrix} \\ \Xi_{25} &= \begin{pmatrix} Q_2^{11}(W_1 - L_1 W_2) & -Q_2^{11}L_2 W_2 \\ Q_2^{21}(W_1 - L_1 W_2) & -Q_2^{21}L_2 W_2 \end{pmatrix} \\ \Xi_{27} &= \begin{pmatrix} Q_2^{11}M_1 \\ Q_2^{21}M_1 \end{pmatrix} \\ \Xi_{28} &= \begin{pmatrix} Q_2^{11}L_1 M_2 & Q_2^{11}L_2 M_2 \\ Q_2^{21}L_1 M_2 & Q_2^{21}L_2 M_2 \end{pmatrix} \\ \Xi_{39} &= \begin{pmatrix} \hat{Q}_1^{11}N_1^T \\ \hat{Q}_1^{12T}N_1^T \end{pmatrix} \\ \Xi_{311} &= \begin{pmatrix} \hat{Q}_1^{11}N_2^T & \hat{Q}_1^{12}N_2^T \\ \hat{Q}_1^{12T}N_2^T & \hat{Q}_1^{22}N_2^T \end{pmatrix} \\ \Xi_{44} &= \begin{pmatrix} G^T G - P_{22}^{11} & -P_{22}^{12} \\ -P_{22}^{12T} & -P_{22}^{22} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\Xi_{55} = -\frac{\lambda^2}{M} I_{r \times M}.$$

Soit la solution particulière suivante de (4.39) :

$$\begin{aligned} \hat{P}_{11} &= \begin{pmatrix} \hat{P}_{11}^{11} & 0 \\ 0 & \hat{P}_{11}^{22} \end{pmatrix}, \hat{P}_{12} = \begin{pmatrix} \hat{P}_{12}^{11} & 0 \\ 0 & \hat{P}_{12}^{22} \end{pmatrix}, P_{22} = \begin{pmatrix} P_{22}^{11} & 0 \\ 0 & P_{22}^{22} \end{pmatrix} \\ \hat{Q}_1 &= \begin{pmatrix} \hat{Q}_1^{11} & 0 \\ 0 & \hat{Q}_1^{22} \end{pmatrix}, Q_2 = \begin{pmatrix} Q_2^{11} & 0 \\ 0 & Q_2^{22} \end{pmatrix} \\ \mathcal{L} &= (L_1 \ 0), \mathcal{K} = (K_1 \ 0). \end{aligned}$$

Cette solution est aussi solution de (4.20) pour tout $L_1 = L$ et $K_1 = K$. On peut conclure que toutes les solutions de (4.20) sont incluses dans l'ensemble de solutions de (4.39). Alors, la commande basée-observateur avec fenêtres glissantes de type $\mathcal{H}_\infty$ est la moins restrictive.

4.4 Résultats de simulations

Afin de valider les résultats présentés dans ce chapitre, deux exemples sont considérés. Les résultats obtenus montrent la supériorité des commandes proposées.

4.4.1 Exemple 1 : Robot à bras articulé

On considère l'exemple du robot à bras articulé étudié dans le paragraphe 2.6.1.1 du chapitre 2. En ajoutant du bruit et des incertitudes paramétriques à la représentation d'état du robot, ce dernier peut être décrit par le modèle d'état (4.1) avec

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 1 & T & 0 & 0 \\ -48.6T & 1 - 1.25T & 48.6T & 0 \\ 0 & 0 & 1 & T \\ 19.5T & 0 & -19.5T & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 21.6T \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ D &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, W_1 = \begin{pmatrix} T \\ 0 \\ T \\ T \end{pmatrix} \\ C &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, W_2 = \begin{pmatrix} 0.01 \\ 0.01 \end{pmatrix} \\ M_1 &= \begin{pmatrix} 0.01 \\ 0.01 \\ 0.01 \\ 0.01 \end{pmatrix}, N_1 = (0.01 \ 0.01 \ 0.01 \ 0.01) \\ M_2 &= \begin{pmatrix} 0.01 \\ 0.01 \end{pmatrix}, N_2 = (0.1 \ 0.1 \ 0.1 \ 0.1) \\ f(x(k)) &= -3.33T \sin(x_3(k)) \text{ et } F(k) = e^{-k}. \end{aligned}$$

La période d'échantillonnage T est choisie égale à $0.01s$ et la matrice $H = 0.1I_4$.

La fonction non linéaire $f(x(k))$ satisfait le lemme A.1.1 tel que l'ensemble des sommets est défini par

$$\mathcal{V}_{\mathcal{H}_{14}} = \{ \pm 3.33T \}.$$

Ainsi, en résolvant les LMIs données par les deux approches proposées, on obtient les résultats présentés dans le tableau 4.1.

Approche	$\lambda_{\min}$
Approche sans fenêtres glissantes	0.3945
Approche avec fenêtres glissantes ($M = 2$)	0.2487

TABLE 4.1 – Détermination de $\lambda_{\min}$.

Les valeurs des gains obtenus sont les suivantes :

- Approche sans fenêtres glissantes :

$$L = \begin{pmatrix} 0.9514 & 0.0490 \\ -1.7598 & 1.7616 \\ 0.2358 & 0.7654 \\ -4.0810 & 5.0881 \end{pmatrix}$$

$$K = \begin{pmatrix} -26.7862 & -2.2541 & 11.0265 & -6.7656 \end{pmatrix}$$

- Approche avec fenêtres glissantes ($M = 2$) :

$$L_1 = \begin{pmatrix} 0.9625 & 0.0382 \\ -1.7523 & 1.7563 \\ 0.0104 & 0.9929 \\ -6.1492 & 7.1714 \end{pmatrix}$$

$$L_2 = \begin{pmatrix} -0.0019 & 0.0023 \\ -0.0391 & 0.0626 \\ -0.0243 & 0.0375 \\ -0.1845 & 0.2785 \end{pmatrix}$$

$$K_1 = \begin{pmatrix} -27.1140 & -2.1521 & 11.3408 & -6.7691 \end{pmatrix}$$

$$K_2 = \begin{pmatrix} -0.1132 & -0.1132 & -0.1132 & -0.1133 \end{pmatrix}.$$

Nous confirmons donc que la valeur de $\lambda_{\min}$ calculée par l'approche avec fenêtres glissantes est plus petite que celle calculée par la commande standard.

On choisit comme conditions initiales $x(0) = (0.1 \ 0.5 \ 1 \ 0)^T$ et $\hat{x}(0) = (-1 \ -2 \ 1 \ 3)^T$.

Les résultats de simulation en utilisant l'approche sans fenêtres glissantes sont donnés par les figures 4.1 et 4.2.

Les résultats de simulation en utilisant l'approche avec fenêtres glissantes sont donnés par les figures 4.3 et 4.4.

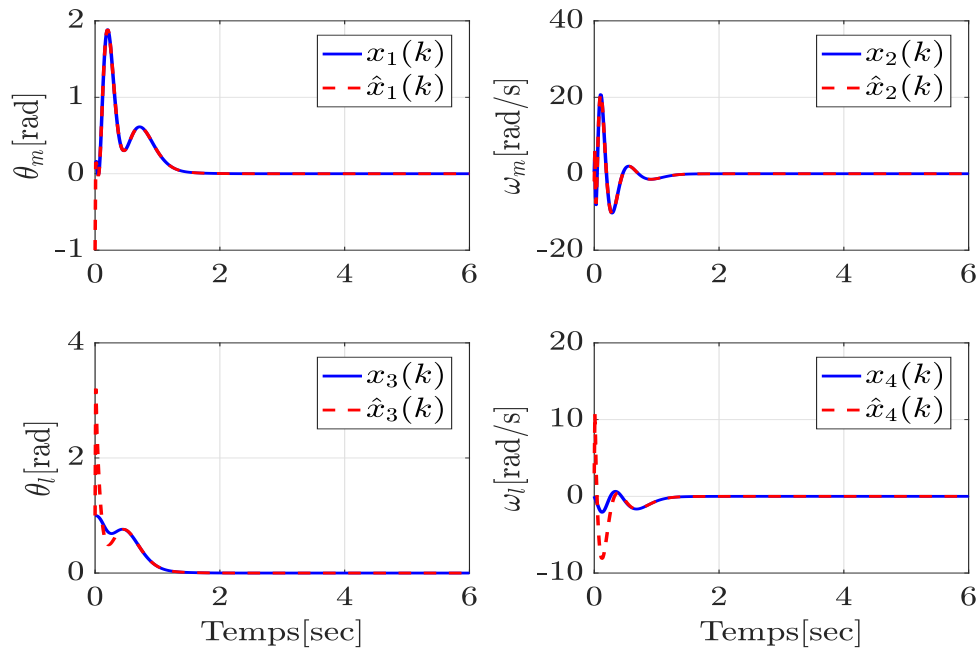


FIGURE 4.1 – Les trajectoires de l'état réel (ligne bleue) et l'état estimé (ligne rouge) en utilisant l'approche sans fenêtres glissantes

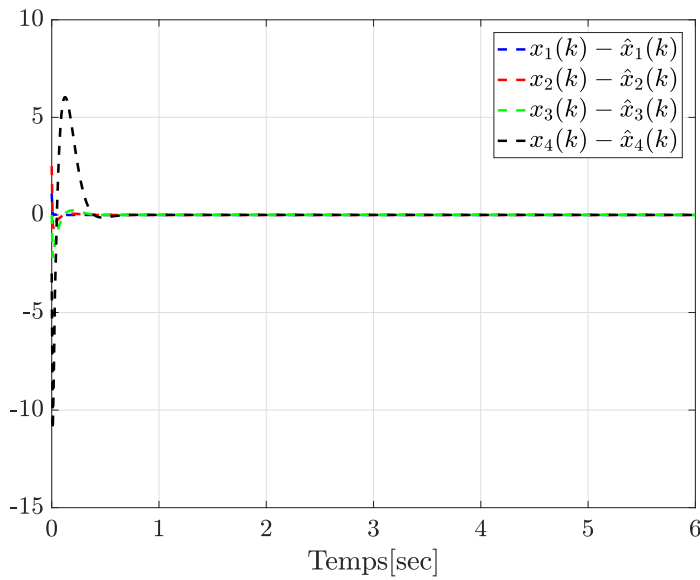


FIGURE 4.2 – Les erreurs d'estimation en utilisant l'approche sans fenêtres glissantes

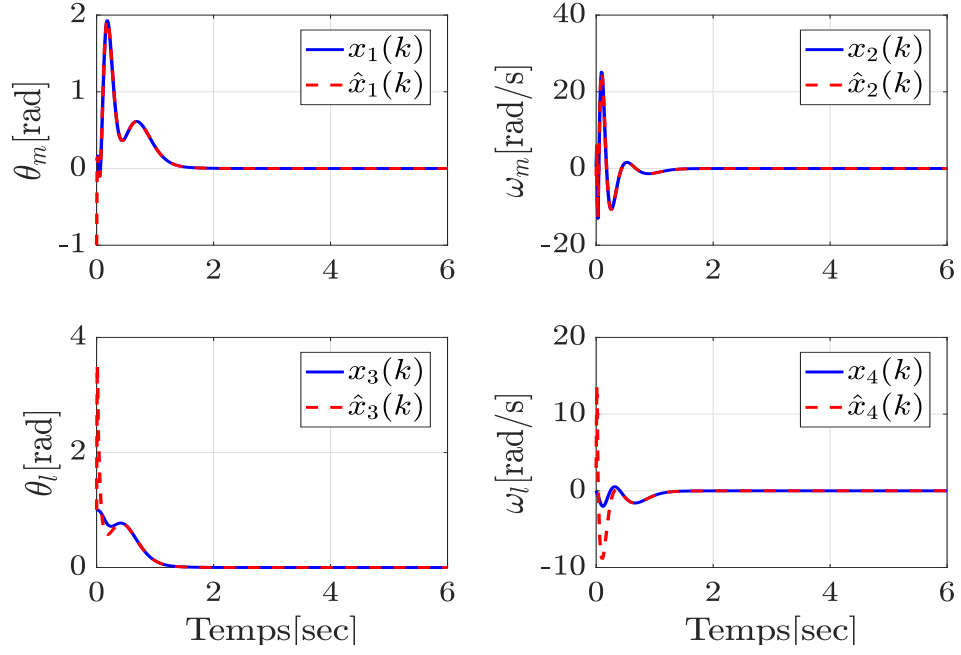


FIGURE 4.3 – Les trajectoires de l'état réel (ligne bleue) et l'état estimé (ligne rouge) en utilisant l'approche avec fenêtres glissantes

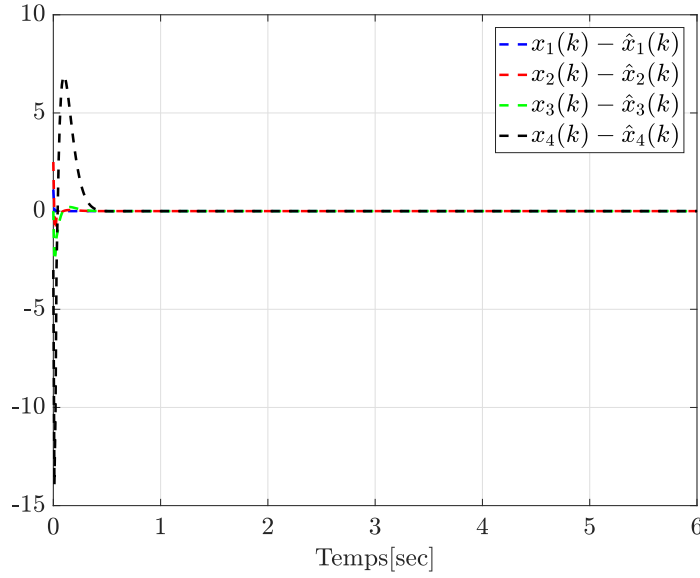


FIGURE 4.4 – Les erreurs d'estimation en utilisant l'approche avec fenêtres glissantes

4.4.2 Exemple 2

On considère le système étudié dans [Kheloufi *et al.*,]. Ce système est décrit par le modèle d'état (4.1) avec

$$\begin{aligned}
 A &= \begin{pmatrix} 0.2 & 0.1 & 0.4 \\ 0.6 & 1 & 0.5 \\ -0.3 & 0 & 0.3 \end{pmatrix}, M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0.1 & 0.3 \\ 0 & 0.2 \end{pmatrix}, N_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0.2 & 0 & 0.4 \end{pmatrix} \\
 B &= \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -0.4 & 0.5 \\ 0.6 & -0.4 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, W_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
 C &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0.3 \\ 0 & 0.8 \end{pmatrix}, N_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 \end{pmatrix}, W_2 = \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.2 \end{pmatrix} \\
 f(x(k)) &= \begin{pmatrix} 0.1 \sin(x_2(k)) \\ 0.2 \sin(x_3(k)) \\ 0.3 \sin(x_1(k)) \end{pmatrix} \text{ et } F(k) = \sin(k^4).
 \end{aligned}$$

$f(x(k))$ satisfait le lemme A.1.1 tel que l'ensemble des sommets est défini par

$$\mathcal{V}_{\mathcal{H}_{33}} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \pm 0.1 & 0 \\ 0 & 0 & \pm 0.2 \\ \pm 0.3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}. \quad (4.48)$$

Ainsi, en résolvant les LMIs données par les deux approches proposées, on obtient les résultats présentés dans le tableau 4.2.

Approche	$\lambda_{\min}$
[Kheloufi <i>et al.</i> ,]	2.3790
Approche sans fenêtres glissantes	1.6052
Approche avec fenêtres glissantes ($M = 2$)	1.4551

TABLE 4.2 – Détermination de $\lambda_{\min}$.

avec

- Approche sans fenêtres glissantes :

$$L = \begin{pmatrix} 0.4034 & -0.1235 \\ 1.1556 & -0.3755 \\ 0.2140 & -0.0923 \end{pmatrix}$$

$$K = \begin{pmatrix} 0.3407 & -0.0351 & -0.1467 \\ -0.2555 & -0.1046 & -0.1331 \end{pmatrix}$$

- Approche avec fenêtres glissantes ($M = 2$) :

$$L_1 = \begin{pmatrix} 0.4181 & -0.1258 \\ 1.1749 & -0.3818 \\ 0.2278 & -0.0960 \end{pmatrix}$$

$$L_2 = \begin{pmatrix} 0.0055 & -0.0030 \\ 0.0036 & -0.0025 \\ -0.0012 & 0.0003 \end{pmatrix}$$

$$K_1 = \begin{pmatrix} 0.3357 & -0.0392 & -0.1523 \\ -0.2507 & -0.1028 & -0.1311 \end{pmatrix}$$

$$K_2 = \begin{pmatrix} 0.0000 & 0.0000 & 0.0005 \\ 0.0000 & -0.0000 & -0.0042 \end{pmatrix}.$$

Les résultats de simulation des deux approches proposées sont donnés par les figures 4.5, 4.6, 4.7 et 4.8 telles que $x(0) = (10 \ 7 \ -5)^T$ et $\hat{x}(0) = (-1 \ 4 \ 1.5)^T$.

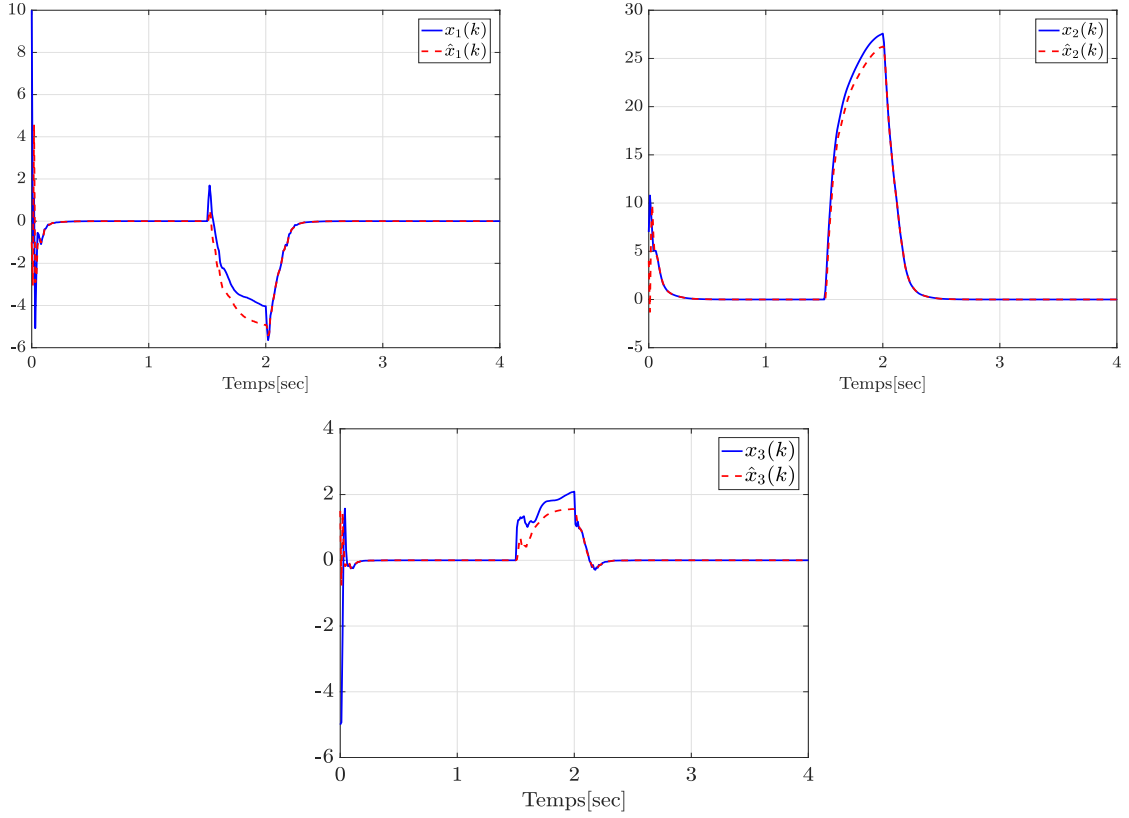


FIGURE 4.5 – Les trajectoires de l'état réel (ligne bleue) et l'état estimé (ligne rouge) en utilisant l'approche sans fenêtres glissantes

Nous confirmons donc que la valeur de $\lambda_{\min}$ calculée par l'approche avec fenêtres glissantes est plus petite que celle calculée par la commande standard.

4.5 Conclusion

Dans ce chapitre, une nouvelle méthode de synthèse de commande robuste basée-observateur de type $\mathcal{H}_\infty$ a été proposée pour une classe de systèmes Lipschitz à temps discret en présence de bruits et d'incertitudes paramétriques. Cette commande est sensée non seulement atténuer l'effet des bruits extérieurs, mais aussi être robuste vis-à-vis de l'ensemble des incertitudes présentes dans le modèle étudié. Une utilisation judicieuse de la reformulation du lemme de Young ainsi que l'introduction d'une variable dite « slack variable » ont permis de formuler le problème d'optimisation sous forme de LMIs moins restrictives. Une extension à la commande robuste basée-observateur avec fenêtres glissantes est, ensuite, proposée. Cette nouvelle stratégie intro-

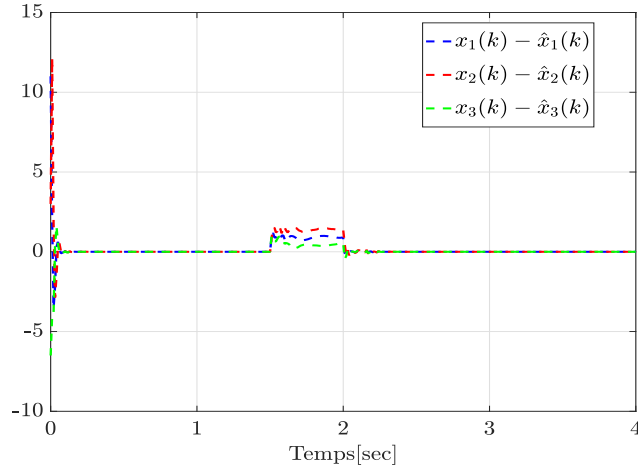


FIGURE 4.6 – Les erreurs d’estimation en utilisant l’approche sans fenêtres glissantes

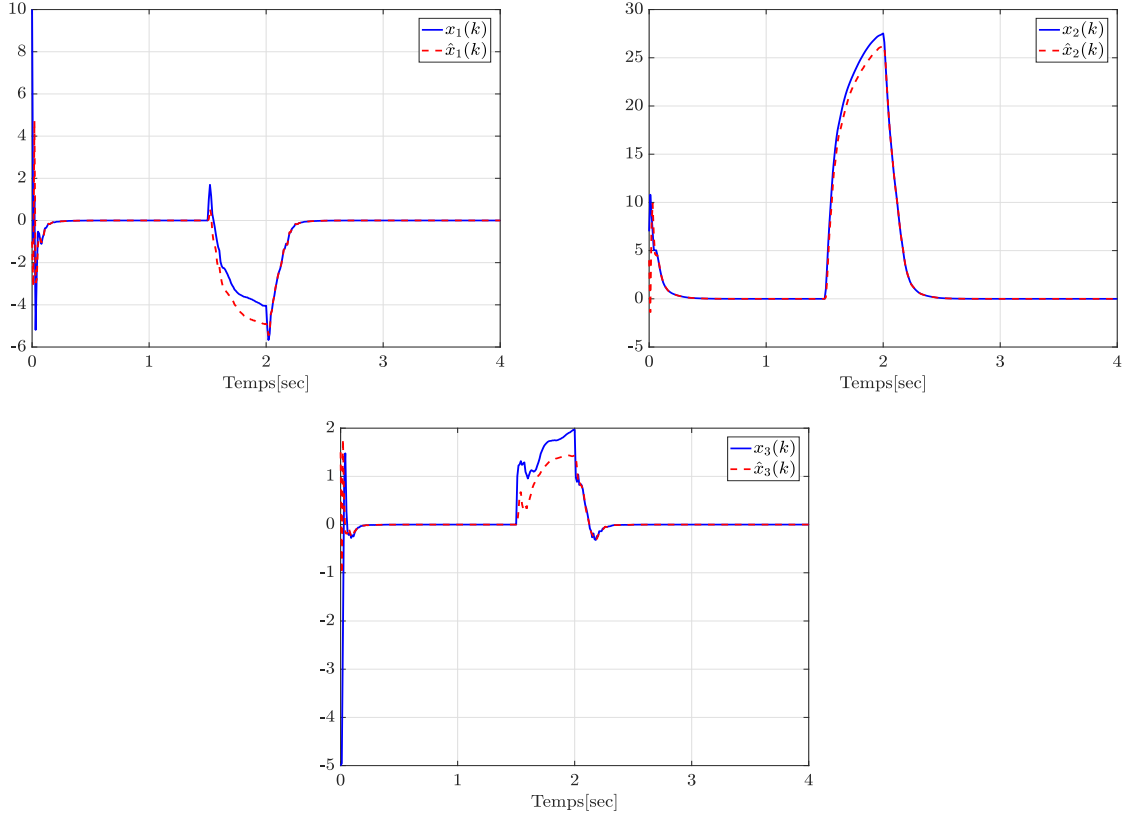


FIGURE 4.7 – Les trajectoires de l’état réel (ligne bleue) et l’état estimé (ligne rouge) en utilisant l’approche avec fenêtres glissantes

duit deux fenêtres glissantes de mesures et d’états retardées, respectivement, dans les structures standards de l’observateur de Luenberger et de la loi de commande par retour d’état estimé. Plusieurs simulations ont montré l’avantage de la méthode présentée par rapport à celles existantes dans la littérature.

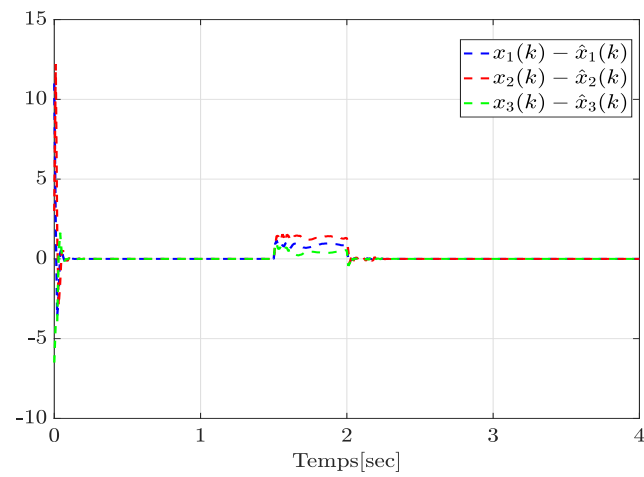


FIGURE 4.8 – Les erreurs d’estimation en utilisant l’approche avec fenêtres glissantes

Conclusion générale

Dans ce mémoire, quelques thèmes ont été abordés en ce qui concerne l'observation est la commande des systèmes non linéaires à temps discret. Un nouveau type d'observateur a été proposé et des nouvelles stratégies de commande ont été mises en évidence.

Le chapitre 1 a commencé par rappeler les définitions et les propriétés qui sont utilisées tout au long de ce mémoire. Les notions d'observabilité et de stabilité des systèmes linéaires et non linéaires à temps discret ont été fournies. Dans la deuxième partie, les différents types d'observateurs pour les systèmes à temps discret ont été rappelés. Un état de l'art des méthodes de synthèse d'observateurs a été ensuite détaillé. La présentation de ces méthodes permet de mettre l'accent sur les différents types de non-linéarités ainsi que sur les variétés des fonctions de Lyapunov utilisées pour l'étude de stabilité. Enfin, les notions relatives aux contraintes LMI ainsi qu'aux problèmes d'optimisations ont été discutés.

Le chapitre 2 a introduit les filtres $\mathcal{H}_\infty$ développés dans cette thèse. Une nouvelle méthodologie de synthèse d'observateurs non linéaires à gains constants pour les systèmes Lipschitz et les systèmes « one-sided Lipschitz » à temps discret a été présentée. L'idée principale consiste à ajouter une fenêtre de mesures glissante retardées ($y(k)$, $y(k-1)$, ..., $y(k-M+1)$) à la structure standard de l'observateur de Luenberger, ceci permet d'élargir le bassin d'attraction et d'augmenter la précision ainsi que la robustesse d'estimation. Des nouvelles contraintes LMI, moins restrictives que celles existantes, ont été synthétisées pour ces deux types de systèmes. Les performances de l'approche proposée ont été validées analytiquement à partir de la comparaison des contraintes LMI obtenues avec les contraintes calculées par l'approche classique. Des exemples ont illustré l'efficacité de la stratégie de conception d'observateur proposée.

Dans le chapitre 3, une nouvelle méthodologie de commande basée-observateur de type $\mathcal{H}_\infty$ a été proposée pour des classes de systèmes non linéaires à temps discret. Des contraintes BMI ont été obtenues. La résolution de BMI étant délicate, une technique de linéarisation a été développée. Pour se faire, des conditions LMIs moins conservatives ont été calculées à partir de ces BMIs, permettant ainsi de garantir la convergence asymptotique du système en boucle fermée. Par ailleurs, l'ajout de fenêtres glissantes dans la structure de l'observateur ainsi que celle du contrôleur a permis de relaxer et généraliser les contraintes obtenus par la synthèse d'une simple commande basée-observateur. La validité et l'efficacité des méthodes de conception proposées ont été montrées à travers des exemples numériques. Les comparaisons numériques fournies ont mis en évidence les performances des stratégies de commande proposées par rapport à certains résultats existants dans la littérature.

Dans le chapitre 4, les résultats obtenus dans le chapitre 3 ont été étendus aux systèmes non linéaires incertains. En effet, des nouvelles stratégies de commande robuste basée-observateur

de type $\mathcal{H}_\infty$ pour les systèmes Lipschitz en présence d'incertitudes paramétriques et de perturbations à énergie finie ont été proposées. Pour chaque stratégie, le problème de conception de commande basée-observateur a été formulé comme un problème d'optimisation LMI. De plus, le principe de congruence a été utilisé de façon judicieuse conduisant à inclure des variables supplémentaires et à annuler quelques termes bilinéaires. L'efficacité de chaque stratégie proposée a été illustrée par des simulations numériques.

Au-delà des sujets abordés dans cette thèse, des nouvelles questions peuvent également apparaître. Ces questions ainsi que d'autres problèmes intéressants semblent être des pistes de recherche qui méritent d'être approfondies :

- Il est vivement recommandé de valider le bon fonctionnement des résultats proposés dans cette thèse, que ce soit observateur ou commande, sur des expériences pratiques en conditions réelles ;
- Intégrer d'autres critères de performances ($\mathcal{H}_2, \dots$) pour la synthèse de nouvelles lois de commande ou faire du multicritère ($\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty, \dots$) ;
- Évaluer les performances des résultats présentés dans cette thèse en présence d'entrées inconnues ;
- Étudier l'effet de largeur de fenêtre glissante sur la qualité de l'estimation et déduire une largeur optimale au sens d'un critère donné ;
- Appliquer la technique de fenêtre de mesures glissante sur d'autres types d'observateurs (intervalle, grand gain, ...).

Annexe A

Propriétés des fonctions non linéaires

Sommaire

A.1	Fonction Lipschitz	114
A.2	Fonction « one-sided Lipschitz »	115
A.3	Fonction quadratiquement bornée	115

Dans cette annexe, des rappels de quelques propriétés des fonctions non linéaires utilisées dans ce mémoire sont présentés.

A.1 Fonction Lipschitz

Définition A.1.1. *Considérons les vecteurs suivants*

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \quad \text{et} \quad Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n .$$

Pour tout $r = 0, \dots, n$, on définit un vecteur auxiliaire $Y^{Z_r} \in \mathbb{R}^n$ correspondant à Y et Z comme suit :

$$\begin{cases} Y^{Z_l} = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_r \\ y_{r+1} \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} & \text{for } r = 1, \dots, n \\ Y^{Z_0} = Y \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

□

Maintenant, considérons une fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Ensuite, les deux Lemmes suivants sont équivalents :

Définition A.1.2 ([Vidyasagar, 1993]). *f est dite Lipschitz par rapport à son argument dans $\mathcal{D}$ s'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que :*

$$\|f(Y) - f(Z)\| \leq \alpha \|Y - Z\|, \quad \forall Y, Z \in \mathcal{D} \quad (\text{A.2})$$

où α est la constante de Lipschitz.

Si cette condition est valable partout dans $\mathbb{R}^n$, alors la fonction est dite globalement Lipschitz.

□

Lemme A.1.1 ([Zemouche et Boutayeb, 2013]). *f est globalement Lipschitz par rapport à son argument, c.-à-d. : $\forall i, j = 1, \dots, n$, il existe des fonctions*

$$f_{ij} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \quad (\text{A.3})$$

et des constantes $\underline{\alpha}_{f_{ij}}$ et $\bar{\alpha}_{f_{ij}}$, telles que

$$f(Y) - f(Z) = \sum_{i,j=1}^{n,n} f_{ij} H_{ij}(Y - Z), \quad \forall Y, Z \in \mathbb{R}^n \quad (\text{A.4})$$

et

$$\underline{\alpha}_{f_{ij}} \leq f_{ij} \leq \bar{\alpha}_{f_{ij}} \quad (\text{A.5})$$

où $f_{ij} \triangleq f_{ij}(Y^{Z_{j-1}}, Y^{Z_j})$ et $\mathcal{H}_{ij} = e_n(i)e_n^T(j)$.

□

A.2 Fonction « one-sided Lipschitz »

Définition A.2.1 ([Abbaszadeh et Marquez, 2010]). *f* est dite « one-sided Lipschitz » par rapport à son argument dans $\mathcal{D}$ s'il existe un réel ρ tel que :

$$\langle f(Y) - f(Z), Y - Z \rangle \leq \rho \|Y - Z\|^2, \quad \forall Y, Z \in \mathcal{D} \quad (\text{A.6})$$

□

De même que pour la propriété Lipschitz, la propriété « one-sided Lipschitz » peut être locale ou globale. Notez que tandis que la constante de Lipschitz doit être positive, ρ peut être positive, nulle ou même négative. En outre, toute fonction Lipschitz est également « one-sided Lipschitz ». Cependant, l'inverse n'est pas vrai.

A.3 Fonction quadratiquement bornée

Définition A.3.1 ([Abbaszadeh et Marquez, 2010]). *f* est dite quadratiquement bornée par rapport à son argument dans $\mathcal{D}$ s'il existe deux réels β et γ tels que :

$$\|f(Y) - f(Z)\|^2 \leq \beta \|Y - Z\|^2 + \gamma \langle Y - Z, f(Y) - f(Z) \rangle, \quad \forall Y, Z \in \mathcal{D} \quad (\text{A.7})$$

□

Il est clair que toute fonction Lipschitz est également quadratiquement bornée (par exemple avec $\beta > 0$ et $\gamma = 0$). Par contre, l'inverse n'est pas vrai. γ peut être n'importe quel nombre réel et n'est pas nécessairement positif. Et si γ est limité à être positif, ainsi à partir de la définition ci-dessus, *f* doit être Lipschitz ce qui n'est qu'un cas particulier.

Les relations entre les ensembles des fonctions Lipschitz, Lipschitz d'un côté et quadratiquement bornées (les lemmes A.1.2, A.1.1, A.2.1 et A.3.1) sont représentées par la figure suivante :

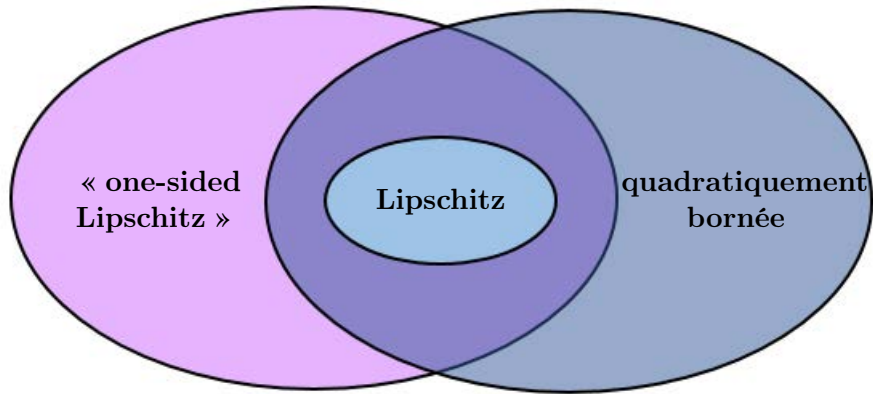


FIGURE A.1 – Les ensembles de fonctions Lipschitz, « one-sided Lipschitz » et quadratiquement bornées

Annexe B

Compléments mathématiques

Sommaire

B.1	Théorie des matrices	118
B.2	Complément et Lemme de Schur	118
B.3	Ensemble et fonction convexes	118
B.4	Relation de Young	119
B.5	Lemme de majoration	119
B.6	Discrétisation d'Euler	119
B.6.1	Cas d'un système linéaire	120
B.6.2	Cas d'un système non linéaire	120

Dans cette annexe, des rappels sur les notions mathématiques utilisées dans ce mémoire sont présentés.

B.1 Théorie des matrices

Définition B.1.1. Soit une matrice symétrique $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Cette matrice est dite :

- semi-définie négative $M \leq 0$ ssi $x^T M x \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0$;
- définie négative $M < 0$ ssi $x^T M x < 0, \forall x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0$;
- semi-définie positive $M \geq 0$ ssi $x^T M x \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0$;
- définie positive $M > 0$ ssi $x^T M x > 0, \forall x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0$;

B.2 Complément et Lemme de Schur

Définition B.2.1 (Complément de Schur [Boyd et al., 1994]). Soit une matrice A inversible. Le complément de Schur de A , dans la matrice M donnée par :

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

est la matrice $D - CA^{-1}B$. □

Lemme B.2.1 (Lemme de Schur [Boyd et al., 1994]). Pour $A = A^T$ et $C = C^T$,

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B^T & C \end{pmatrix} > 0$$

ssi

$$C - B^T A^{-1} B \text{ si } A > 0$$

ou, ssi

$$A - B^T C^{-1} B^T \text{ si } C > 0$$

□

B.3 Ensemble et fonction convexes

Définition B.3.1 (Ensemble Convexe). Un ensemble E est dit convexe si

$$\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \in E$$

$$\forall x_1, x_2 \in E \text{ et } \forall 0 \leq \lambda \leq 1$$

ceci signifie, géométriquement, que tout segment liant deux points quelconques appartenant à un ensemble convexe est inclus dans cet ensemble. □

Définition B.3.2 (Fonction Convexe). Soit $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Cette fonction est dite convexe si :

$$\phi(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda \phi(x_1) + (1 - \lambda)\phi(x_2)$$

pour tout $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ et pour tout $0 \leq \lambda \leq 1$.

La fonction ϕ est dite strictement convexe ssi :

$$\phi(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) < \lambda \phi(x_1) + (1 - \lambda)\phi(x_2)$$

pour tout $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ et pour tout $0 < \lambda < 1$. □

B.4 Relation de Young

Lemme B.4.1 (Relation de Young [Li et De-Souza, 1997]). *Soit M et N deux matrices données de dimensions appropriées. Ainsi, pour toute matrice S positive symétrique définie et de dimension appropriée, l'inégalité suivante est vraie :*

$$M^T N + N^T M \leq M^T S^{-1} M + N^T S N \quad (\text{B.1})$$

□

Lemme B.4.2 (Reformulation de la relation de Yong [Zemouche et al., 2017]). *Soit M et N deux matrices données de dimensions appropriées. Ainsi, pour toute matrice S positive symétrique définie et de dimension appropriée, l'inégalité suivante est vraie :*

$$M^T N + N^T M \leq \frac{1}{2} [M + S N]^T S^{-1} [M + S N] \quad (\text{B.2})$$

□

Démonstration. La preuve est évidente et déduite à partir de la relation de Young (B.1). En effet, on a

$$M^T N + N^T M = \frac{1}{2} (M^T N + N^T M) + \frac{1}{2} (M^T N + N^T M)$$

Par conséquent, en appliquant (B.1) sur le second terme seulement, on obtient :

$$\begin{aligned} M^T N + N^T M &\leq \frac{1}{2} (M^T N + N^T M) + \frac{1}{2} (M^T S^{-1} M + N^T S N) \\ &= \frac{1}{2} [M + S N]^T S^{-1} [M + S N]. \end{aligned}$$

□

La signification du lemme B.4.2 ne réside pas dans sa preuve qui est triviale, mais son principal plus à retenir est que seule la moitié de $M^T N + N^T M$ est majorée par la relation de Young.

B.5 Lemme de majoration

Lemme B.5.1 ([Petersen, 1987]). *Soit M , N et S trois matrices réelles avec $S^T S \leq I$, alors $\forall \eta > 0$, on a :*

$$M S N + N^T S^T M^T \leq \eta M M^T + \frac{1}{\eta} N^T N \quad (\text{B.3})$$

□

B.6 Discrétisation d'Euler

En mathématiques, la discrétisation est le processus de transfert de fonctions, de variables, d'équations et de modèles continus en d'autres discrets. Ce processus est généralement effectué dans un premier temps pour les rendre aptes à l'évaluation numérique et à la mise en œuvre sur des ordinateurs. La discrétisation concerne également la transformation d'équations différentielles continues en équations récurrentes discrètes, convenant au calcul numérique.

B.6.1 Cas d'un système linéaire

On considère le modèle d'espace d'état linéaire en temps continu suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= A_c x(t) + B_c u(t) \\ y(t) &= C_c x(t) + D_c u(t) \end{cases} \quad (\text{B.4})$$

En utilisant la méthode d'Euler, la dérivée d'état peut être approximée par

$$\dot{x}(t) = \frac{x(k+1) - x(k)}{T} \quad (\text{B.5})$$

où T est la période d'échantillonnage.

Par conséquent, l'équation d'état en temps continu est approximativement égale à

$$A_c x(t) + B_c u(t) = \frac{x(k+1) - x(k)}{T}. \quad (\text{B.6})$$

Ce qui donne

$$x(k+1) = (I + T A_c) x(k) + T B_c u(k). \quad (\text{B.7})$$

Puisque l'équation de sortie est une relation non dynamique, nous pouvons simplement écrire

$$y(k) = C_c x(k) + D_c u(k) \quad (\text{B.8})$$

c'est-à-dire que les matrices C_c et D_c sont inchangées lors de la discrétisation.

Ainsi, à partir de (B.7) et (B.8), la discrétisation d'Euler d'un système linéaire est donnée par :

$$\begin{cases} x(k+1) &= A_d x(k) + B_d u(k) \\ y(k) &= C_d x(k) + D_d u(k) \end{cases} \quad (\text{B.9})$$

avec

$$\begin{aligned} A_d &= I + T A_c \\ B_d &= T B_c \\ C_d &= C_c \\ D_d &= D_c \end{aligned}$$

B.6.2 Cas d'un système non linéaire

On considère le modèle d'espace d'état non linéaire en temps continu suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= A_c x(t) + B_c u(t) + f_c(x(t), u(t)) \\ y(t) &= C_c x(t) + D_c u(t) \end{cases} \quad (\text{B.10})$$

En appliquant la même démarche que dans le cas linéaire, on peut calculer la discrétisation d'Euler du système non linéaire (B.10) comme suit :

$$\begin{cases} x(k+1) &= A_d x(k) + B_d u(k) + f_d(x(k), u(k)) \\ y(k) &= C_d x(k) + D_d u(k) \end{cases} \quad (\text{B.11})$$

avec

$$\begin{aligned} A_d &= I + T A_c \\ B_d &= T B_c \\ f_d(x(k), u(k)) &= T f_c(x(t), u(t)) \\ C_d &= C_c \\ D_d &= D_c \end{aligned}$$

Remarque B.6.1. *Chaque fois que des données continues sont discrétisées, il y a toujours une certaine erreur de discrétisation. L'objectif est de réduire la quantité à un niveau jugé négligeable pour réussir à garder le même comportement du système initial (à temps continu). Pour cela, la période d'échantillonnage doit être bien choisie selon la nature et la dynamique du système, souvent très petite.* $\square$

Annexe C

Liste des publications

Revue internationale avec comité de lecture

1. N. Gasmi, M. Boutayeb, A. Thabet and M. Aoun, "Enhanced LMI Conditions for Observer-Based $\mathcal{H}_\infty$ Stabilization of Lipschitz Discrete-Time Systems", *European Journal of Control*, vol. 44, pp. 80-89, 2018.
2. N. Gasmi, M. Boutayeb, A. Thabet and M. Aoun, "Sliding Window Based Nonlinear $\mathcal{H}_\infty$ Filtering : Design and Experimental Results", *IEEE Transactions on Circuits and Systems II : Express Briefs*, 2018.
3. N. Gasmi, A. Thabet and M. Aoun, "New LMI Conditions for Reduced-Order Observer of Lipschitz Discrete-Time Systems : Numerical and Experimental Results", *International Journal of Automation & Computing*, 2018.
4. A. Thabet, N. Gasmi, "Observer Design for a Class of Nonlinear Discrete-Time Systems : Real Time Application to the One-Link Flexible Joint Robot", *International Journal of Computer Applications*, vol. 179, no. 37, pp. 1-6, April 2018.

Chapitres d'ouvrage de synthèse

1. N. Gasmi, M. Boutayeb, A. Thabet and M. Aoun, "Observer-Based Stabilization of Nonlinear Discrete-Time Systems Using Sliding Window of Delayed Measurements", in *Control and Application of Time-Delay Systems*, Elsevier (accepté).
2. N. Gasmi, M. Boutayeb, A. Thabet and M. Aoun, "Nonlinear Filtering Design for Discrete-Time Systems Using Sliding Window of Delayed Measurements", in *Control and Application of Time-Delay Systems*, Elsevier (accepté).

Conférences internationales avec comité de lecture

1. N. Gasmi, A. Thabet, M. Boutayeb and M. Aoun, "Observer Design for a Class of Nonlinear Discrete-Time Systems", in *Proc. The 16th International Conference on Sciences and Techniques of Automatic Control and Computer Engineering (STA'15)*, Monastir, Tunisia, pp. 799-804, 2015.
2. N. Gasmi, A. Thabet, M. Boutayeb and M. Aoun, "Observers for Nonlinear Lipschitz Discrete-Time Systems with Extension to $\mathcal{H}_\infty$ Filtering Design", in *Proc. The 13th Inter-*

- national Multi-Conference on Systems, Signals and Devices (SSD'16), Leipzig, Germany, pp. 364-369, 2016.
3. N. Gasmi, A. Thabet and M. Aoun, "A New LMI Based $\mathcal{H}_\infty$ Functional Observer for Lipschitz Discrete-Time Systems", in *The 14th International Workshop on Advanced Control and Diagnosis (ACD'17)*, Bucharest, Romania, 2017.
 4. N. Gasmi, M. Boutayeb, A. Thabet and M. Aoun, "Observer-Based $\mathcal{H}_\infty$ Stabilization for Lipschitz Discrete-Time Systems", in *The 26th Mediterranean Conference on Control and Automation (Med'18)*, Zadar, Croatia, pp. 771-775, 2018.
 5. N. Gasmi, M. Boutayeb, A. Thabet and M. Aoun, " $\mathcal{H}_\infty$ Sliding Window Observer Design for Lipschitz Discrete-Time Systems", in *The 7th International Conference on Systems and Control (ICSC'18)*, Valencia, Spain, 2018.

Conférences nationales avec comité de lecture

1. N. Gasmi, M. Boutayeb, A. Thabet and M. Aoun, "Filtrage avec Fenêtre Glissante de Mesures : Application à un Robot à Bras Articulé", in *Congrès National de la Recherche des IUT (CNRIUT'18)*, Aix-en-Provence, France, pp. 232-234, 2018.
2. N. Gasmi, M. Boutayeb, A. Thabet and M. Aoun, "Commande Basée Observateur d'un Robot à Bras Articulé", in *Congrès National de la Recherche des IUT (CNRIUT'18)*, Aix-en-Provence, France, pp. 235-237, 2018.

Bibliographie

- [Abbaszadeh et Marquez, 2010] ABBASZADEH, M. et MARQUEZ, H. (2010). Nonlinear observer design for one-sided Lipschitz systems. *In Proc. American Control Conference*, pages 5284–5289, Marriott Waterfront, Baltimore, MD, USA.
- [Abbaszadeh et Marquez, 2008] ABBASZADEH, M. et MARQUEZ, H. J. (2008). Robust $\mathcal{H}_\infty$ observer design for sampled-data Lipschitz nonlinear systems with exact and euler approximate models. *Automatica*, 44(3):799–806.
- [Ahmad et Rehan, 2016] AHMAD, S. et REHAN, M. (2016). On observer-based control of one-sided Lipschitz systems. *Journal of the Franklin Institute*, 353(4):903–916.
- [Ahmad et al., 2016] AHMAD, S., REHAN, M. et HONG, K. (2016). Observer-based robust control of one-sided Lipschitz nonlinear systems. *ISA Transactions*, 65:230–240.
- [Ahmad et al., 2015] AHMAD, S., R. MAJEED, HONG, K.-S. et REHAN, M. (2015). Observer design for one-sided Lipschitz nonlinear systems subject to measurement delays. *Mathematical Problems in Engineering*, 2015:Article ID 879492,13.
- [Albertini et Alessandro, 1996] ALBERTINI, F. et ALESSANDRO, D. (1996). *Remarks on the observability of nonlinear discrete time systems*, pages 155–162. Springer US, Boston, MA.
- [Allerhand et al., 2015] ALLERHAND, L., GERSHON, E. et SHAKED, U. (2015). State-feedback control of stochastic discrete-time linear switched systems with dwell time. *In ecc*, pages 452–457.
- [Arcak et Kokotovic, 2001a] ARCAK, M. et KOKOTOVIC, P. (2001a). Nonlinear observers : A circle criterion design and robustness analysis. *Automatica*, 37(12):1923–1930.
- [Arcak et Kokotovic, 2001b] ARCAK, M. et KOKOTOVIC, P. (2001b). Observer-based control of systems with slope-restricted nonlinearities. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 46(7):1146–1150.
- [Bara et al., 2005] BARA, G., ZEMOUCHE, A. et BOUTAYEB, M. (2005). Observer synthesis for Lipschitz discrete-time systems. *In IEEE International Symposium on Circuits and Systems*, volume 4, pages 3195–3198.
- [Bara et Boutayeb, 2005] BARA, G. I. et BOUTAYEB, M. (2005). Static output feedback stabilization with $\mathcal{H}_\infty$ performance for linear discrete-time systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 50(2):250–254.
- [Bel-Haj-Frej et al., 2017] BEL-HAJ-FREJ, G., BOUTAYEB, M., THABET, A., AOUN, M. et ZASADZINSKI, M. (2017). Decentralized observer-based control for interconnected nonlinear discrete-time systems. *In Mediterranean Conference on Control and Automation*, pages 1154–1158.
- [Benallouch et al., 2014] BENALLOUCH, M., BOUTAYEB, M. et TRINH, H. (2014). $\mathcal{H}_\infty$ observer-based control for discrete-time one-sided Lipschitz systems with unknown inputs. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 52(6):3751–3775.

- [Benallouch *et al.*, 2015] BENALLOUCH, M., BOUTAYEB, M. et TRINH, H. (2015). $\mathcal{H}_\infty$ observer-based control for discrete-time one-sided Lipschitz systems with unknown inputs. *In Proc. Conference on Decision and Control*, pages 6998–7003.
- [Benallouch *et al.*, 2018] BENALLOUCH, M., OUTBIB, R., BOUTAYEB, M. et LAROCHE, E. (2018). Robust observers for a class of nonlinear systems using PEM fuel cells as a simulated case study. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 26(1):291–298.
- [Bibi *et al.*, 2017] BIBI, H., BEDOUHENE, F., ZEMOUCHE, A., KARIMI, H. et KHELOUFI, H. (2017). Output feedback stabilization of switching discrete-time linear systems with parameter uncertainties. *Journal of the Franklin Institute*, 354(14):5895–5918.
- [Boutayeb, 2001] BOUTAYEB, M. (2001). Observers design for linear time-delay systems. *Systems & Control Letters*, 44(2):103–109.
- [Boutayeb et Aubry, 1999] BOUTAYEB, M. et AUBRY, C. (1999). A strong tracking extended kalman observer for nonlinear discrete-time systems. *IEEE Transaction on Automatic Control*, 44(8):1550–1556.
- [Boutayeb *et al.*, 1997] BOUTAYEB, M., RAFARALAHY, H. et DAROUACH, M. (1997). Convergence analysis of the extended kalman filter used as an observer for nonlinear deterministic discrete-time systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 42(4):581–586.
- [Boyd *et al.*, 1994] BOYD, S., GHAOUI, L. E., FERRON, E. et BALAKRISHNAN, V. (1994). *Linear matrix inequalities in systems and control theory*. Studies in Applied Mathematics SIAM, Philadelphia, 15 édition.
- [Brookner, 1998] BROOKNER, E. (1998). *Tracking and Kalman filtering made easy*. Wiley.
- [Chang et Yang, 2014] CHANG, X. H. et YANG, G. H. (2014). New results on output feedback $\mathcal{H}_\infty$ control for linear discrete-time systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 59(5):1355–1359.
- [Chen et Chen, 2007] CHEN, M. et CHEN, C. (2007). Robust nonlinear observer for Lipschitz nonlinear systems subject to disturbances. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 52(12):2365–2369.
- [Combastel, 2013] COMBASTEL, C. (2013). Stable interval observers in BBC for linear systems with Time-Varying input bounds. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 58(2):481–487.
- [Daafouz *et al.*, 2002] DAAFOUZ, J., RIEDINGER, P. et IUNG, C. (2002). Stability analysis and control synthesis for switched systems : A switched Lyapunov function approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 49(11):1883–1887.
- [Daiha *et al.*, 2017] DAIHA, H., EGIDIO, L., DEAECTO, G. et GEROMEL, J. (2017). $\mathcal{H}_\infty$ state feedback control design of discrete-time switched linear systems. *In Proc. Conference on Decision and Control*, pages 5882–5887.
- [Dey *et al.*, 2015] DEY, S., AYALEW, B. et PISU, P. (2015). Nonlinear robust observers for state-of-charge estimation of lithium-ion cells based on a reduced electrochemical model. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 23(5):1935–1942.
- [Dong et Yang, 2009] DONG, J. et YANG, G. (2009). Static output feedback $\mathcal{H}_\infty$ control of a class of nonlinear discrete-time systems. *Fuzzy Sets and Systems*, 160(19):2844–2859.
- [Du et Yang, 2008] DU, X. et YANG, G. (2008). Lmi conditions for $\mathcal{H}_\infty$ static output feedback control of discrete-time systems. *In Proc. Conference on Decision and Control*, pages 5450–5455.

-
- [Efimov *et al.*, 2013] EFIMOV, D., PERRUQUETTI, W., RAISSI, T. et ZOLGHADRI, A. (2013). Interval observers for time-varying discrete-time systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 58(12):3218–3224.
- [Fan et Arcak, 2003] FAN, X. et ARCAK, M. (2003). Observer design for systems with multivariable monotone nonlinearities. *Systems & Control Letters*, 50:319–330.
- [Farza et M'Saad, 2003] FARZA, M. et M'SAAD (2003). Discrete-time observer synthesis for a class of nonlinear systems. In *International Conference on Signals Systems Decision and Information Technology*.
- [Frej, 2017] FREJ, G. (2017). *Estimation et commande décentralisée pour les systèmes de grandes dimensions. Application aux réseau électriques*. Thèse de doctorat, Université de Lorraine, France.
- [Gahinet et Nemirovski, 1997] GAHINET, P. et NEMIROVSKI, A. (1997). The projective method for solving linear matrix inequalities. *Mathematical Programming*, 77(1):163–190.
- [Garcia *et al.*, 2003] GARCIA, G., PRADIN, B., TARBOURIECH, S. et ZENG, F. (2003). Robust stabilization and guaranteed cost control for discrete-time linear systems by static output feedback. *Automatica*, 39(9):1635–1641.
- [Garcia *et al.*, 2001] GARCIA, G., PRADIN, B. et ZENG, F. (2001). Stabilization of discrete time linear systems by static output feedback. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 46(12):1954–1958.
- [Garey et Johnson, 1990] GAREY, M. et JOHNSON, D. (1990). *Computers and Intractability. A Guide to the Theory of NP-Completeness*. W. H. Freeman & Co., New York, USA.
- [Gauthier *et al.*, 1992] GAUTHIER, J., HAMMOURI, H. et OTHMAN, S. (1992). A simple observer for nonlinear systems, applications to bioreactors. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 37(6):875–880.
- [Grandvallet *et al.*, 2009] GRANDVALLET, B., ZEMOUCHE, A., BOUTAYEB, M. et CHANGEY, S. (2009). Filtre de kalman Etendu avec fenêtre glissante : Application à la localisation de projectile. In *30^{èmes} Journées Doctorales / Journées Nationales MACS*.
- [Grandvallet *et al.*, 2010a] GRANDVALLET, B., ZEMOUCHE, A., BOUTAYEB, M. et CHANGEY, S. (2010a). Filtre à fenêtre glissante pour l'estimation de l'attitude et des vitesses d'un projectile. In *Conférence Internationale Francophone d'Automatique*.
- [Grandvallet *et al.*, 2010b] GRANDVALLET, B., ZEMOUCHE, A., BOUTAYEB, M. et CHANGEY, S. (2010b). A real-time sliding window filter for projectile attitude estimation. In *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference and Exhibit*.
- [Grandvallet *et al.*, 2010c] GRANDVALLET, B., ZEMOUCHE, A., BOUTAYEB, M. et CHANGEY, S. (2010c). A sliding window filter for real-time attitude independent TAM calibration. In *Proc. Conference on Decision and Control*, pages 467–472.
- [Grandvallet *et al.*, 2014] GRANDVALLET, B., ZEMOUCHE, A., BOUTAYEB, M. et CHANGEY, S. (2014). Real-time attitude-independent three-axis magnetometer calibration for spinning projectiles : A sliding window approach. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 22(1):255–264.
- [Grandvallet *et al.*, 2013] GRANDVALLET, B., ZEMOUCHE, A., SOULEY-ALI, H. et BOUTAYEB, M. (2013). New LMI condition for observer-based $\mathcal{H}_\infty$ stabilization of a class of nonlinear discrete-time systems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 51(1):784–800.
- [Hanba, 2017] HANBA, S. (2017). Controllability to the origin implies state-feedback stabilizability for discrete-time nonlinear systems. *Automatica*, 76:49 – 52.

- [Hassan *et al.*, 2011] HASSAN, L., ZEMOUCHE, A. et BOUTAYEB, M. (2011). $\mathcal{H}_\infty$ observers design for a class of nonlinear time-delay systems in descriptor form. *International Journal of Control*, 84(10):1653–1663.
- [Heemels *et al.*, 2010] HEEMELS, W., DAAFOUZ, J. et MILLERIOUX, G. (2010). Observer-based control of discrete-time LPV systems with uncertain parameters. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 55(9):2130–2135.
- [Ho et Lu, 2003] HO, D. et LU, G. (2003). Robust stabilization for a class of discrete-time nonlinear systems via output feedback : The unified LMI approach. *International Journal of Control*, 76(2):105–115.
- [Hu, 2006] HU, G. (2006). Observers for one-sided Lipschitz non-linear systems. *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, 23(4):395–401.
- [Ibrir, 2008] IBRIR, S. (2008). Static output feedback and guaranteed cost control of a class of discrete-time nonlinear systems with partial state measurements. *Nonlinear Analysis : Theory, Methods & Applications*, 68(7):1784–1792.
- [Ibrir et Diopt, 2008] IBRIR, S. et DIOPT, S. (2008). Novel LMI conditions for observer-based stabilization of Lipschitzian nonlinear systems and uncertain linear systems in discrete-time. *Applied Mathematics and Computation*, 206(2):579–588.
- [Ibrir *et al.*, 2005] IBRIR, S., XIE, W. et SU, C. (2005). Observer-based control of discrete-time Lipschitzian non-linear systems : application to one-link flexible joint robot. *International Journal of Control*, 78(6):385–395.
- [Ito et Dinh, 2018] ITO, H. et DINH, T. (2018). Interval observers for global feedback control of nonlinear systems with robustness with respect to disturbances. *European Journal of Control*, 39:68–77.
- [Iwasaki et Skelton, 1995] IWASAKI, T. et SKELTON, R. E. (1995). Parametrization of all stabilizing controllers via quadratic lyapunov functions. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 85(2):291–307.
- [Kalman, 1960] KALMAN, R. (1960). New approach to linear filtering and prediction problems. 82:35–45.
- [Kalman et Bucy, 1961] KALMAN, R. et BUCY, R. (1961). New results in linear filtering and prediction theory. 83:95–107.
- [Karmarkar, 1984] KARMARKAR, N. (1984). A new polynomial-time algorithm for linear programming. *Combinatorica*, 4(4):373–395.
- [Khalil, 2002] KHALIL, H. (2002). *Nonlinear Systems*. Pearson Education. Prentice Hall.
- [Kheloufi *et al.*, 2015] KHELOUFI, H., BEDOUHENE, F., ZEMOUCHE, A. et ALESSANDRI, A. (2015). Observer-based stabilisation of linear systems with parameter uncertainties by using enhanced LMI conditions. *International Journal of Control*, 88(6):1189–1200.
- [Kheloufi *et al.*, 2016] KHELOUFI, H., ZEMOUCHE, A., BEDOUHENE, F., BENNANI, C. et TRINH, H. (2016). New decentralized control design for interconnected nonlinear discrete-time systems with nonlinear interconnections. In *Proc. Conference on Decision and Control*, pages 6030–6035.
- [Kheloufi *et al.*,] KHELOUFI, H., ZEMOUCHE, A., BEDOUHENE, F. et SOULEY-ALI, H. A robust $\mathcal{H}_\infty$ observer-based stabilization method for systems with uncertain parameters and Lipschitz nonlinearities. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 26(9):1962–1979.

-
- [Kheloufi *et al.*, 2014] KHELOUFI, H., ZEMOUCHE, A., BEDOUHENE, F. et SOULEY-ALI, H. (2014). Robust $\mathcal{H}_\infty$ observer-based controller for Lipschitz nonlinear discrete-time systems with parameter uncertainties. *In Proc. Conference on Decision and Control*, pages 4336–4341.
- [Klamka, 1991] KLAMKA, J. (1991). *Controllability of dynamical systems*. Mathematics and its applications (Kluwer Academic Publishers) : East European series. Kluwer Academic Publishers.
- [Klamka, 1996] KLAMKA, J. (1996). Constrained controllability of nonlinear systems. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 201(2):365–374.
- [Klamka, 2002] KLAMKA, J. (2002). Controllability of nonlinear discrete systems. *In Proc. American Control Conference*, volume 6, pages 4670–4671.
- [Krener et Respondek, 1985] KRENER, A. et RESPONDEK, W. (1985). Nonlinear observer with linearizable error dynamics. *SIAM Journal of Control and Optimization*, 23(2):197–216.
- [Kwakernaak et Sivan, 1972] KWAKERNAAK, H. et SIVAN, R. (1972). *Linear optimal control systems*. Wiley Interscience.
- [Kwon *et al.*, 2015] KWON, N., PARK, B. et PARK, P. (2015). Improved $\mathcal{H}_\infty$ state-feedback control for discrete-time markovian jump systems with incomplete knowledge of transition probabilities. *In International Conference on Control, Automation and Systems*, pages 999–1004.
- [Li et De-Souza, 1997] LI, X. et DE-SOUZA, C. (1997). Criteria for robust stability and stabilization of uncertain linear systems with state delay. *Automatica*, 33(9):1657–1662.
- [Liu *et al.*, 2016] LIU, X., YU, Y., LI, Z. et IU, H. H. (2016). Polytopic $\mathcal{H}_\infty$ filter design and relaxation for nonlinear systems via tensor product technique. *Signal Processing*, 127:191 – 205.
- [Lobo *et al.*, 1998] LOBO, M., VANDENBERGHE, L., BOYD, S. et LEBRET, H. (1998). Applications of second-order cone programming. *Linear Algebra and its Applications*, 284(1):193–228. International Linear Algebra Society (ILAS) Symposium on Fast Algorithms for Control, Signals and Image Processing.
- [Magarotto, 1999] MAGAROTTO, E. (1999). *Approche LMI pour la synthèse de correcteurs et d’observateurs : Application aux systèmes spatiaux et bilinéaires*. Thèse de doctorat, Université Henri Poincaré - Nancy 1.
- [Mao *et al.*, 2014] MAO, X., LIU, W., HU, L., LUO, Q. et LU, J. (2014). Stabilization of hybrid stochastic differential equations by feedback control based on discrete-time state observations. *Systems & Control Letters*, 73:88–95.
- [Matthew C. Turner, 2007] MATTHEW C. TURNER, D. G. B. (2007). *Mathematical Methods for Robust and Nonlinear Control*. Springer Science & Business Media, Leicester, United Kingdom.
- [Mazenc *et al.*, 2013] MAZENC, F., DINH, T. et NICULESCU, S. (2013). Interval observers for discrete-time systems. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 24(17):2867–2890.
- [Mazenc *et al.*, 2012] MAZENC, F., DINH, T. N. et NICULESCU, S. I. (2012). Interval observers for discrete-time systems. *In Proc. Conference on Decision and Control*, pages 6755–6760.
- [Najson et Speyer, 2003] NAJSON, F. et SPEYER, J. L. (2003). Stabilization via output static feedback in discrete-time linear systems. *In Proc. Conference on Decision and Control*, volume 6, pages 6466–6473.

- [Nesterov et Nemirovskii, 1988] NESTEROV, Y. et NEMIROVSKII, A. (1988). *A General Approach to Polynomial-time Algorithm Design for Convex Programming*. Rapport technique, Centr. Econ. Math. Inst. USSR Acad. Sci., Moscow, Russia.
- [Nesterov et Nemirovskii, 1994] NESTEROV, Y. et NEMIROVSKII, A. (1994). *Interior-Point Polynomial Algorithms in Convex Programming*. Society for Industrial and Applied Mathematics.
- [Nijmeijer, 1982] NIJMEIJER, H. (1982). Observability of autonomous discrete time non-linear systems : a geometric approach. *International Journal of Control*, 36(5):867–874.
- [Oliveira et al., 1999] OLIVEIRA, M. D., GEROMEL, J. et HSU, L. (1999). LMI characterization of structural and robust stability : the discrete-time case. *Linear Algebra and its Applications*, 296(1-3):27–38.
- [Pagilla et Zhu, 2004] PAGILLA, P. et ZHU, Y. (2004). Controller and observer design for Lipschitz nonlinear systems. In *Proc. American Control Conference*, pages 2379–2384, Boston, Massachusetts, USA.
- [Petersen, 1987] PETERSEN, I. (1987). A stabilization algorithm for a class of uncertain linear systems. *Systems & Control Letters*, 8(4):351–357.
- [Phanomchoeng et Rajamani, 2010] PHANOMCHOENG, G. et RAJAMANI, R. (2010). Observer design for Lipschitz nonlinear systems using riccati equations. In *Proc. American Control Conference*, pages 6060–6065.
- [Raghavan et Hedrick, 1994] RAGHAVAN, S. et HEDRICK, J. (1994). Observer design for a class of nonlinear systems. *International Journal of Control*, 59(2):515–528.
- [Raghavan et Hedrik, 1994] RAGHAVAN, S. et HEDRIK, J. (1994). Observer design for a class of nonlinear systems. *International Journal of Control*, 59(2):515–528.
- [Raissi et al., 2012] RAISSI, T., EFIMOV, D. et ZOLGHADRI, A. (2012). Interval state estimation for a class of nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 57(1):260–265.
- [Rajamani, 1998] RAJAMANI, R. (1998). Observer for Lipschitz nonlinear systems. *IEEE Transaction on Automatic Control*, 43(3):397–401.
- [Rosinova et al., 2003] ROSINOVA, D., VESELY, V. et KUCERA, V. (2003). A necessary and sufficient condition for static output feedback stabilizability of linear discrete-time systems. *Kybernetika*, 39(4):447–459.
- [Sename, 2001] SENAME, O. (2001). New trends in design of observers for time-delay systems. *Kybernetika*, 37(4):427–458.
- [Shaked et Berman, 1995] SHAKED, U. et BERMAN, N. (1995). $\mathcal{H}_\infty$ nonlinear filtering of discrete-time processes. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 43(9):2205–2209.
- [Song et S.He, 2015] SONG, J. et S.HE (2015). Robust finite-time $\mathcal{H}_\infty$ control for one-sided Lipschitz nonlinear systems via state feedback and output feedback. *Journal of The Franklin Institute*, 352:3250–3266.
- [Song et Grizzle, 1992] SONG, Y. et GRIZZLE, J. (1992). The extended kalman filter as a local asymptotic observer for nonlinear discrete-time systems. In *Proc. American Control Conference*, pages 3365–3369.
- [Thabet, 2012] THABET, A. (2012). *Estimation de l'état pour la surveillance des systèmes de grandes dimensions. Application aux réseaux électriques*. Thèse de doctorat, Université de Gabès, Tunisie.

-
- [Thabet *et al.*, 2012a] THABET, A., BOUTAYEB, M. et ABDELKRIM, M. N. (2012a). On the state estimation for dynamic power system. *International Journal of Computer Applications*, 42(3):45–52.
- [Thabet *et al.*, 2015] THABET, A., BOUTAYEB, M. et ABDELKRIM, M. N. (2015). Real-time fault-voltage estimation for nonlinear dynamic power systems. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 30(2):284–296.
- [Thabet *et al.*, 2011] THABET, A., BOUTAYEB, M., DIDIER, G., CHNIBA, S. et ABDELKRIM, M. N. (2011). Applying extended kalman filter with moving horizon to fault estimation in power system. In *International conference on Sciences and Techniques of Automatic Control and Computer Engineering*.
- [Thabet *et al.*, 2012b] THABET, A., BOUTAYEB, M., DIDIER, G., CHNIBA, S. et ABDELKRIM, M. N. (2012b). Fault detection based on observer for nonlinear dynamic power system. *Energy and Power*, 2(2):9–16.
- [Thau, 1973] THAU, F. (1973). Observing the state of non-linear dynamic systems. *International Journal of Control*, 17(3):471–479.
- [van der Schaft, 2016] van der SCHAFT, A. (2016). *L₂-Gain and Passivity Techniques in Nonlinear Control*. Communications and Control Engineering. Springer International Publishing.
- [Vandenberghe et Boyd, 1996] VANDENBERGHE, L. et BOYD, S. (1996). Semidefinite programming. *SIAM Review*, 38(1):49–95.
- [Vidyasagar, 1993] VIDYASAGAR, M. (1993). *Nonlinear Systems Analysis*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 2nd édition.
- [Willems, 1971] WILLEMS, J. (1971). Least squares stationary optimal control and the algebraic Riccati equation. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 16(6):621–634.
- [Wu *et al.*, 2015] WU, R., ZHANG, W., F. SONG, Z. W. et GUO, W. (2015). Observer-based stabilization of one-sided Lipschitz systems with application to flexible link manipulator. *Advances in Mechanical Engineering*, 7(12):1–8.
- [Wu *et al.*, 2014] WU, R., ZHANG, W., LI, J. et WU, Z. (2014). Observer-based control of one-sided Lipschitz nonlinear systems. In *Proc. IEEE Chinese Guidance, Navigation and Control Conference*, pages 2375–2380.
- [Xia et Gao, 1989] XIA, X. et GAO, W. (1989). Nonlinear observer design by observer error linearization. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 27(1):199–216.
- [Zemouche et Boutayeb, 2006] ZEMOUCHE, A. et BOUTAYEB, M. (2006). Observer design for Lipschitz nonlinear systems : The discrete-time case. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II : Express Briefs*, 53(8):777–781.
- [Zemouche et Boutayeb, 2009] ZEMOUCHE, A. et BOUTAYEB, M. (2009). A unified $\mathcal{H}_\infty$ adaptive observer synthesis method for a class of systems with both Lipschitz and monotone nonlinearities. *Systems & Control Letters*, 58(4):282–288.
- [Zemouche et Boutayeb, 2013] ZEMOUCHE, A. et BOUTAYEB, M. (2013). On LMI conditions to design observers for Lipschitz nonlinear systems. *Automatica*, 49(2):585–591.
- [Zemouche *et al.*, 2008] ZEMOUCHE, A., BOUTAYEB, M. et BARA, G. (2008). Observers for a class of Lipschitz systems with extension to $\mathcal{H}_\infty$ performance analysis. *Systems & Control Letters*, 57(1):18–27.
- [Zemouche *et al.*, 2017] ZEMOUCHE, A., RAJAMANI, R., PHANOMCHOENG, G., BOULKROUNE, B., RAFARALAHY, H. et ZASADZINSKI, M. (2017). Circle criterion-based $\mathcal{H}_\infty$ observer design

- for Lipschitz and monotonic nonlinear systems - enhanced LMI conditions and constructive discussions. *Automatica*, 85:412–425.
- [Zemouche *et al.*, 2016] ZEMOUCHE, A., ZERROUGUI, M., BOULKROUNE, B., BEDOUHENE, F., SOULEY-ALI, H. et ZASADZINSKI, M. (2016). $\mathcal{H}_\infty$ observer-based stabilization for Lipschitz nonlinear systems. In *Proc. European Control Conference*, pages 2017–2022.
- [Zhang *et al.*, 2012a] ZHANG, W., H.SU, Y.LIANG et Z.HAN (2012a). Nonlinear observer design for one-sided Lipschitz systems : a linear matrix inequality approach. *IET Control Theory & Applications*, 6(9):1297–1303.
- [Zhang *et al.*, 2014] ZHANG, W., SU, H., SU, S. et WANG, D. (2014). Nonlinear $\mathcal{H}_\infty$ observer design for one-sided Lipschitz systems. *Neurocomputing*, 145(9):505–511,.
- [Zhang *et al.*, 2012b] ZHANG, W., SU, H., WANG, H. et HAN, Z. (2012b). Full-order and reduced-order observers for one-sided Lipschitz nonlinear systems using riccati equations. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 17(12):4968–4977.
- [Zhang *et al.*, 2015] ZHANG, W., SU, H., ZHU, F. et AZAR, G. (2015). Unknown input observer design for one-sided Lipschitz nonlinear systems. *Nonlinear Dynamics*, 79(2):1469–1479.
- [Zhang *et al.*, 2012c] ZHANG, W., SU, H., ZHU, F. et YUE, D. (2012c). Note on observers for discrete-time Lipschitz nonlinear systems. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II : Express Briefs*, 59(2):23–127.
- [Zhou *et al.*, 1996] ZHOU, K., DOYLE, J. et GLOVER, K. (1996). *Robust and Optimal Control*. Inc. Prentice-Hall, Upper Saddle River, NJ, USA.
- [Zhu et Z.Han, 2002] ZHU, F. et Z.HAN (2002). A note on observers for Lipschitz nonlinear systems. *IEEE Transaction on Automatic Control*, 47(10):1751–1754.

Résumé

L'analyse et la synthèse des systèmes dynamiques ont connu un développement important au cours des dernières décennies comme l'atteste le nombre considérable des travaux publiés dans ce domaine, et continuent d'être un axe de recherche régulièrement exploré. Si la plupart des travaux concernent les systèmes linéaires et non linéaires temps continu, peu de résultats ont été établis dans le cas temps discret. Les travaux de cette thèse portent sur l'observation et la commande d'une classe de systèmes non linéaires à temps discret. Dans un premier temps, le problème de synthèse d'observateur d'état utilisant une fenêtre de mesures glissante est abordé. Des conditions de stabilité et de robustesse moins restrictives sont déduites. Deux classes de systèmes non linéaires à temps discret sont étudiées : les systèmes de type Lipschitz et les systèmes « one-sided Lipschitz ». Ensuite, une approche duale a été explorée afin de déduire une loi de commande stabilisante basée sur un observateur. Les conditions d'existence d'un observateur et d'un contrôleur stabilisant les systèmes étudiés sont formulées sous forme d'un problème d'optimisation LMI. L'efficacité et la validité des approches présentées sont montrées à travers des exemples académiques.

Mots-clés: Systèmes à temps discret, Systèmes Lipschitz, Systèmes « one-sided Lipschitz », Optimisation LMI, Stabilité au sens de Lyapunov, Filtrage $\mathcal{H}_\infty$, Approche avec fenêtre glissante, Commande basée-observateur, Commande robuste, Critère $\mathcal{H}_\infty$, Incertitudes paramétriques.

Abstract

The analysis and synthesis of dynamic systems has undergone significant development in recent decades, as illustrated by the considerable number of published works in this field, and continue to be a research theme regularly explored. While most of the existing work concerns linear and nonlinear continuous-time systems, few results have been established in the discrete-time case. This thesis deals with the observation and control of a class of nonlinear discrete-time systems. First, the problem of state observer synthesis using a sliding window of measurements is discussed. Non-restrictive stability and robustness conditions are deduced. Two classes of discrete time nonlinear systems are studied : Lipschitz systems and one-side Lipschitz systems. Then, a dual approach was explored to derive a stabilizing control law based on observer-based state feedback. The conditions for the existence of an observer and a controller stabilizing the studied classes of nonlinear systems are expressed in term of LMI. The effectiveness and validity of the proposed approaches are shown through numerical examples.

Keywords: Discrete-time systems, Lipschitz systems, One-sided Lipschitz systems, LMI optimization, Lyapunov Stability, $\mathcal{H}_\infty$ filtering, Sliding window approach, Observer-based control, Robust control, $\mathcal{H}_\infty$ criterion, Parametric uncertainties.

