



AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>



UNIVERSITE DE LORRAINE
ECOLE DOCTORALE
"Ressources Procédés Produits Environnement"

THESE

présentée par

M. Romuald VERJUS

le 08/01/2015

en vue de l'obtention du

DOCTORAT DE L'UNIVERSITE DE LORRAINE

Spécialité : Mécanique, Génie civil.

(Arrêté du 7 août 2006)

**Contribution à la modélisation des processus de
sédimentation : étude numérique à l'échelle de la particule.**

JURY :

M. Eric CLIMENT	Professeur à l'INP-ENSEEIH	Rapporteur
M. Farhang RADJAI	Directeur de Recherche CNRS au LMGC	Rapporteur
M. Alexander EZERSKY	Professeur à l'Université de Caen	Examineur
M. Philippe SERGENT	Directeur technique au CEREMA	Examineur
M. Sylvain GUILLOU	Maître de Conférences (HDR) à l'Université de Caen	Co-directeur de thèse
M. Jean-Régis ANGILELLA	Professeur à l'Université de Caen	Co-directeur de thèse
M. Michel BUES	Professeur à l'Université de Lorraine	Directeur de thèse

Table des matières

I	Introduction générale	5
I.1	Contexte	5
I.1.1	Généralités sur le transport hydrosédimentaire	5
I.1.2	Vers une étude numérique du transport sédimentaire à l'échelle de la particule	7
I.2	Ecoulements particuliers : définitions et caractérisations	9
I.2.1	Nombre de Reynolds particulaire	9
I.2.2	Nombre de Stokes particulaire	11
I.3	La sédimentation : un phénomène complexe à l'échelle microscopique	11
I.3.1	Sédimentation d'une particule	12
I.3.2	Sédimentation d'un doublet de particules	12
I.3.3	Sédimentation d'un grand nombre de particules	14
I.4	Objectifs de la thèse	15
II	Méthodologie numérique : <i>Direct-Forcing/Fictitious-Domain</i>	17
II.1	Introduction : tour d'horizon des méthodes lagrangiennes complètement résolues.	17
II.1.1	Méthodes des domaines réels	18
II.1.2	Méthodes des Domaines Fictifs	19
II.2	Développement d'un algorithme DF/FD	21
II.2.1	Formulation en Domaine Fictif	22
II.2.2	Schéma numérique	25
	a) Sous-problème fluide	26
	b) Sous-problème particulaire	27
II.3	Conclusion	33

III Validation de la méthode	35
III.1 Ecoulements autour d'un disque avec vitesse imposée.	35
III.1.1 Ecoulement autour d'un cylindre fixe	37
a) Cas 1 : $W/D = 4$	37
b) Cas 2 : $W/D = 32$	39
c) Cas 3 : $W/D = 4$ avec la deuxième version M_2	43
III.1.2 Ecoulement autour d'un cylindre oscillant	43
III.2 Sédimentation d'une particule en milieu confiné	46
III.2.1 Sédimentation d'un disque en milieu confiné	49
a) Sédimentation à bas nombre de Reynolds $Re_p = 0.1$	49
b) Sédimentation d'un disque initialement excentré ($Re_p = 200$).	51
c) Sédimentation d'un disque initialement excentré ($6.93 \leq Re_p \leq 693.6$).	53
III.3 Sédimentation d'un doublet de particules	62
III.3.1 Sédimentation de deux particules à bas nombre de Reynolds	62
III.3.2 Sédimentation de deux particules sans collisions pour des régimes inertiels	63
III.3.3 Drafting Kissing and Tumbling	66
III.4 Sédimentation d'un grand nombre de particules	68
III.5 Conclusion	70
IV Sédimentation d'une particule en milieu confiné : étude du phénomène de surviesse.	75
IV.1 Introduction	76
IV.2 Influence de l'inertie du fluide sur la vitesse de chute U_{s0} d'une particule centrée ($Y = 0$)	79
IV.3 Sédimentation d'une particule excentrée ($Y \neq 0$)	82
IV.3.1 Calcul de la vitesse de sédimentation U_s en fonction de l'excentrement e	82
IV.3.2 Etude des efforts hydrodynamiques en fonction de l'excentrement e	84
IV.4 Rotation de la particule en fonction de l'excentrement : justification de l'hypothèse de vitesse de rotation nulle en proche paroi	91
IV.5 Influence de la rotation de la particule sur la migration horizontale	92

IV.6 Conclusion du chapitre	94
V Sédimentation d'un doublet de particules en milieu confiné : dynamique complexe et chaos.	97
V.1 Introduction	98
V.2 Doublement de période, cascade sous-harmonique et chaos ($120 \leq F \leq 200$) .	100
V.3 Une deuxième route vers le chaos : nouvelle structure et quasi-périodicité ($400 \leq F \leq 530$)	106
V.4 Conclusion du chapitre : diagramme de bifurcation global	110
VI Sédimentation d'une suspension de particules à bas nombre de Reynolds.	113
VI.1 Introduction	113
VI.2 Description phénoménologique et variation de l'interface fluide-particules $H(t)$	116
VI.3 Vitesse de chute moyenne en fonction de la fraction volumique Φ	117
VI.4 Conclusion	119
Conclusion générale et perspectives	121
Bibliographie	125
Table des figures	133
Liste des tableaux	145

Chapitre I

Introduction générale

I.1 Contexte

Cette thèse est réalisée dans le contexte du transport hydrosédimentaire. Les sédiments jouent en effet un rôle fondamental dans les échanges environnementaux, la géomorphologie côtière et estuarienne. Ils impactent grandement le développement des activités humaines en milieu côtier. Ainsi, une bonne connaissance du comportement des sédiments à long terme est un enjeu fondamental en sciences environnementales comme en science de l'ingénieur.

I.1.1 Généralités sur le transport hydrosédimentaire

Trois processus régissent la dynamique sédimentaire : le transport, la sédimentation et l'érosion (Cf. Figure [I.1](#)). Les particules situées sur le fond marin subissent des efforts hydrodynamiques qui tendent à les mettre en mouvement. C'est le phénomène d'érosion. Le déplacement des particules qui en résulte constitue le phénomène de transport, sous forme de charriage, de saltation ou de suspension (voir par exemple [Guillou et al. \(2011\)](#) et références incluses). Lorsque l'intensité de l'écoulement n'est plus suffisante pour maintenir les particules en suspension, celles-ci chutent : c'est la sédimentation. Ces trois processus, que l'on peut qualifier de phénomènes à petite échelle, ont des conséquences à très grande échelle comme l'envasement des estuaires ou l'érosion du trait de côte. Ils sont alors à considérer en conjonction avec les forçages hydrodynamiques tels que la houle, la marée, les courants, ... Cette vision simplifiée du transport sédimentaire n'est bien-sûr pas suffisante. En effet, les modes de transport, de sé-

dimentation, d'érosion sont très dépendants du type de sédiments. Des différences apparaissent pour les sédiments cohésifs (diamètre $< 63 \mu m$) et pour les sédiments non-cohésifs (diamètre $> 63 \mu m$). Pour les matériaux non-cohésifs, le transport de la particule n'est lié qu'à la nature de celle-ci (forme, masse volumique ...) et aux forçages hydrodynamiques. Pour les particules cohésives, les gradients physico-chimiques, l'activité biologique ainsi que l'histoire du sédiment ont des conséquences majeures sur ces processus ([Winterwerp et van Kesteren \(2004\)](#)). Cependant, nous sommes encore très loin de pouvoir prendre en compte tous ces phénomènes dans les modèles de transport sédimentaire. L'approche couramment utilisée pour modéliser le com-

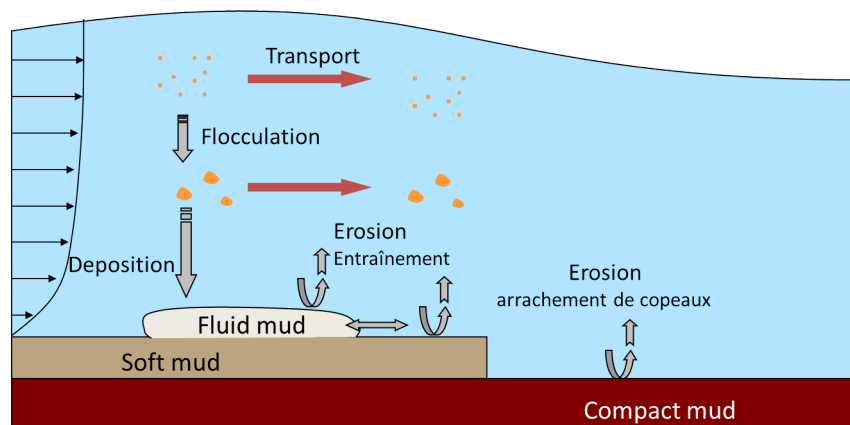


FIGURE I.1 – Schématisation des processus hydrosédimentaires estuariens (d'après [Guillou et al. \(2011\)](#)).

portement de macro-systèmes comme les estuaires ou les zones côtières, consiste à décomposer la zone d'étude en plusieurs domaines de concentrations différentes (par exemple [Amoudry et Souza \(2011\)](#)). Dans le cas le plus simple, le domaine d'étude se décompose en deux sous-domaines : le fond solide, au dessus duquel se trouve une suspension de faible concentration (Cf. figure I.1). Parfois un troisième domaine est considéré, pour prendre en compte le charriage ou la crème de vase. Dans la suspension, la concentration en particules est supposée très faible et les interactions fluide-particules sont négligées. Le sédiment est alors supposé transporté par le fluide comme un traceur, excepté que celui-ci a une vitesse de chute. L'autre sous-domaine, le fond solide, est un réservoir de sédiments qui, selon les conditions hydrodynamiques, va se remplir ou s'éroder. Pour des sédiments cohésifs, les phénomènes de consolidation et de tassement sont modélisés ([Guillou et al. \(2011\)](#)). L'échange entre les deux domaines est pris en compte par le biais de lois de transfert qui modélisent les flux de dépôt et d'érosion. Ces lois sont souvent très approximatives. Par exemple, la flocculation, les interactions entre le fluide et

les particules, les interactions entre particules, l'effet de la géométrie des particules, etc. sont dans la majorité des cas négligés.

L'objectif de cette thèse est d'apporter des éléments pour améliorer notre compréhension des interactions hydrodynamiques entre inclusions, et d'analyser en particulier leurs effets sur le phénomène de sédimentation.

I.1.2 Vers une étude numérique du transport sédimentaire à l'échelle de la particule

Il existe deux types d'approche pour étudier les écoulements particuliers. Soit on considère l'ensemble des phases comme un fluide équivalent ("approche continue"), soit on s'attache à décrire le comportement des phases séparément ("approche discrète"), en tenant compte des interactions entre les différentes phases (transfert de masse, de quantité de mouvement et d'énergie. . .). Du fait de la complexité de ces phénomènes couplés, il est à l'heure actuelle impossible d'avoir une approche unifiée pour toutes les situations d'écoulements multiphasiques. Le choix de l'approche est donc lié à la taille du système étudié (Cf. figure I.2). Pour décrire des écoulements à l'échelle macroscopique, seule la première approche est envisageable car il est impossible de tenir compte de chacune des interactions entre les différentes phases. Cette approche conduit ainsi à écrire des équations de transport pour les quantités physiques à grande échelle et à modéliser l'influence des phénomènes à petites échelles, via les lois de fermetures. Ce type d'approche est très utilisé, mais peut donner des résultats approximatifs, voire erronés, dans de nombreux cas. En effet, la qualité de la modélisation à grande échelle est intrinsèquement liée à la qualité des lois de fermeture. Ainsi, une meilleure compréhension des phénomènes d'interactions permettrait de prédire le comportement de ces écoulements avec une bien plus grande précision.

L'approche discrète est essentiellement utilisée aux échelles mésoscopiques et microscopiques. Elle permet d'obtenir des informations sur les interactions entre les phases dans des cas simples et plus théoriques. Elle est indispensable pour valider ou fournir des modèles de fermeture. Ces deux approches sont donc indissociables et complémentaires si l'on veut étudier les écoulements multiphasiques avec le plus d'exactitude possible.

Si l'approche continue est en général eulérienne pour les deux phases, l'approche discrète

utilise en revanche une description lagrangienne pour la phase particulaire.

Cette description permet de modéliser les phénomènes à l'échelle de la particule, et est elle-même séparée en deux familles ([Joseph \(2002\)](#)) : les modèles lagrangiens approchés et les modèles lagrangiens complètement résolus. Dans les modèles approchés, les particules sont assimilées à des points matériels ([Zhu et al. \(2007\)](#), [Zhu et al. \(2008\)](#)) ou à des paquets de particules ([Andrews et O'rourke \(1996\)](#), [Patankar et Joseph \(2001\)](#)). Dans les modèles "point-particle", on résout les équations de Navier-Stokes contenant éventuellement un terme source pour tenir compte de la rétroaction des particules sur le fluide. La connaissance de la vitesse du fluide et de ses gradients permet alors de déterminer l'effort exercé sur chacune des particules. Les interactions hydrodynamiques entre particules, les efforts de cohésion et les efforts de contact sont modélisés de façon plus ou moins précise. Ces méthodes permettent de simuler le comportement d'un nombre important de particules. On peut trouver un très grand nombre d'applications dans les articles de revue de [Zhu et al. \(2007\)](#) et de [Zhu et al. \(2008\)](#). Notons que la "Stokesian Dynamics" ([Brady et Bossis \(1988\)](#), [Sierou et Brady \(2001\)](#)) peut aussi être assimilée à un modèle approché dans le sens où c'est sur la phase fluide que l'on réalise une hypothèse simplificatrice (en négligeant le terme d'inertie). Dans les modèles complètement résolus ([Hu et al. \(1992\)](#), [Ladd \(1994\)](#), [Glowinski et al. \(1999\)](#), [Patankar et al. \(2000\)](#), [Uhlmann \(2005\)](#), [Yu et Shao \(2007\)](#)) qui sont aussi appelés modèles numériques directs pour les écoulements particuliers, on considère que la particule est non-ponctuelle et que son diamètre est plus grand que la taille de la maille fluide. Les efforts hydrodynamiques agissant sur chaque particule sont alors rigoureusement calculés, seuls les efforts de contact sont modélisés. C'est cette approche qui sera utilisée dans cette thèse.

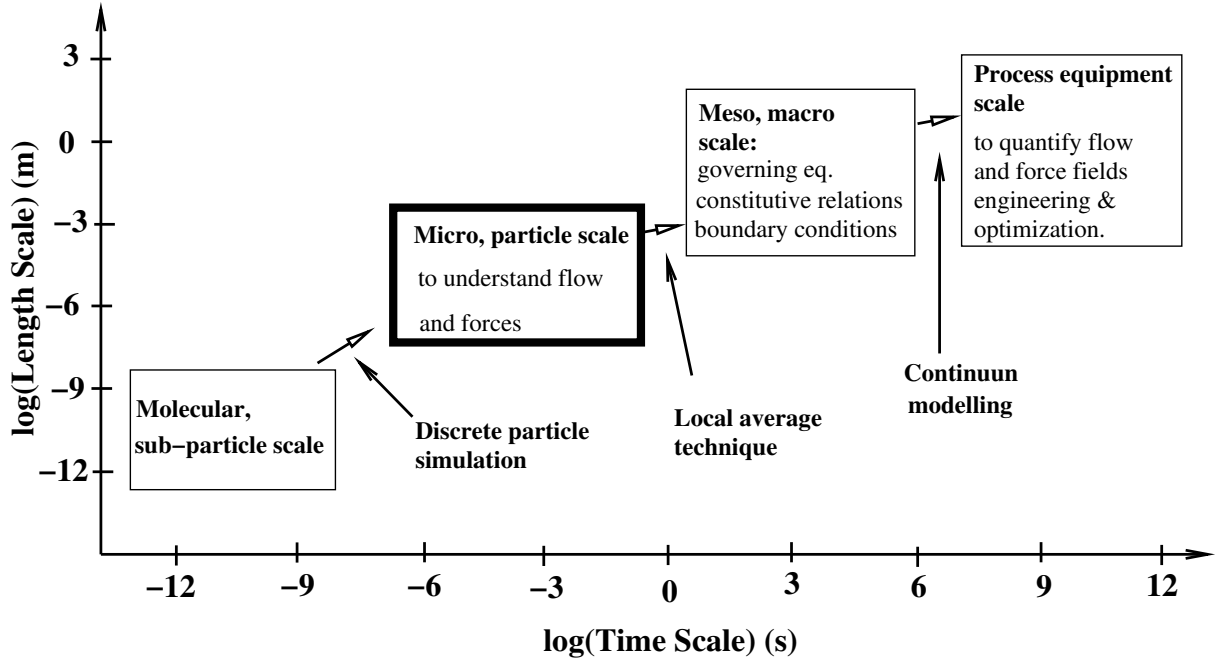


FIGURE I.2 – Schématisation des différentes approches aux différentes échelles spatio-temporelles (d’après [Zhu et al. \(2007\)](#)).

I.2 Ecoulements particuliers : définitions et caractérisations

Considérons une particule rigide en mouvement dans un fluide incompressible et newtonien. Nous rappelons dans cette section quelques définitions de base relatives au mouvement de cette particule.

I.2.1 Nombre de Reynolds particulaire

Le nombre de Reynolds particulaire, noté R_{ep} est défini à partir de la vitesse relative entre le fluide et la particule :

$$R_{ep} = \frac{|\mathbf{U} - \mathbf{u}_\infty|D}{\nu} \quad (\text{I.1})$$

où $\mathbf{U}$ est la vitesse de la particule et $\mathbf{u}_\infty$ la vitesse du fluide à l’infini, D est le diamètre de la particule¹ et ν est la viscosité cinématique du fluide. On distingue souvent quatre régimes d’écoulement : le régime de Stokes, un régime inertiel avec sillage stationnaire, un régime inertiel avec sillage périodique et le régime turbulent. La figure I.3 présente une visualisation de la structure de l’écoulement autour d’un cylindre pour les différents régimes.

1. Dans le cas non-sphérique, le diamètre est défini comme la plus grande distance entre deux points de la particule.

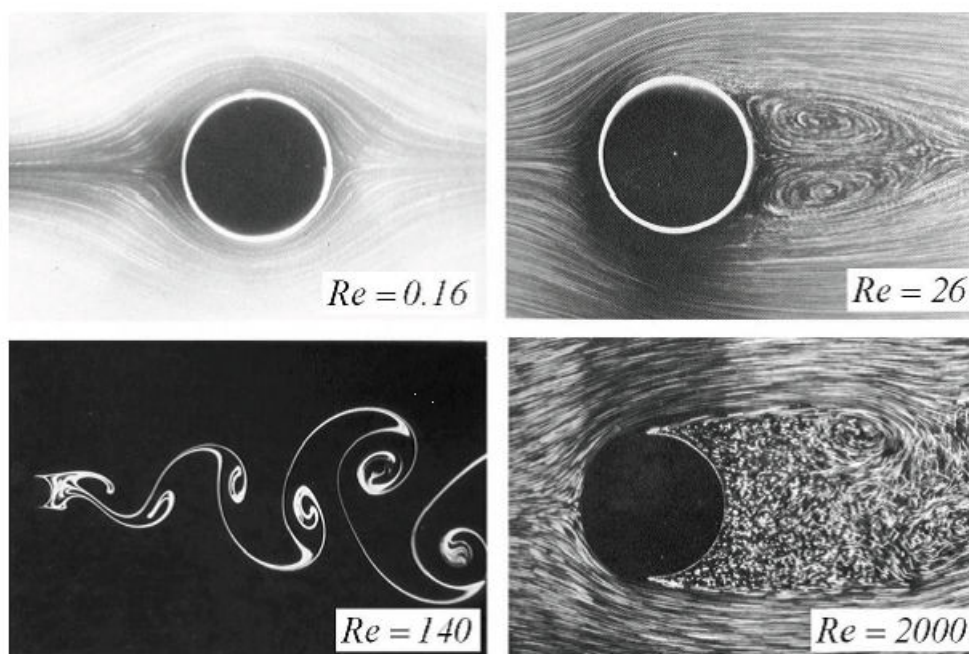


FIGURE I.3 – Visualisation de l'écoulement autour d'un cylindre fixe à différents nombres de Reynolds ([Van Dyke \(1982\)](#)) : (a) le régime de Stokes, (b) un régime inertiel avec sillage stationnaire, (c) un régime inertiel avec sillage périodique et (d) le régime turbulent.

En régime de Stokes, l'écoulement est dit rampant. Les effets inertiels sont absents² et comme on peut le remarquer sur la vignette (a), les lignes de courant sont symétriques par rapport aux axes horizontaux et verticaux du cylindre.

Lorsque l'on sort du régime de Stokes, on parle d'écoulements à nombres de Reynolds finis. Dans ces cas, l'inertie ne peut plus être négligée et cela se traduit par une dissymétrie de l'écoulement entre l'amont et l'aval de la particule (Cf. Figure I.3 (b)). Une des particularités de cet écoulement est la création de recirculations à l'aval de l'obstacle. La taille de ces recirculations va augmenter avec le nombre de Reynolds.

Lorsque le nombre de Reynolds particulière est de l'ordre de 100 (pour un cylindre), l'écoulement est toujours laminaire mais des tourbillons se détachent périodiquement dans le sillage de l'obstacle (Cf. Figure I.3 (c)).

Dès que le nombre de Reynolds atteint quelques milliers, le sillage devient turbulent (Cf. Figure I.3 (d)). Ce régime est rarement atteint dans le cadre du transport sédimentaire et ne sera

2. Notons toutefois que pour un cylindre en milieu infini, la solution stationnaire des équations de Stokes n'existe pas. Il est nécessaire d'avoir soit un domaine borné soit un nombre de Reynolds non nul pour obtenir une solution.

donc pas discuté par la suite.

Dans le cas du transport sédimentaire, seuls les trois premiers régimes d'écoulement sont représentatifs. En effet, le nombre de Reynolds de sédiments en suspension varie en général de 10^{-6} pour des argiles à 4.10^2 pour les sables les plus grossiers (*Chauchat (2007)*).

I.2.2 Nombre de Stokes particulaire

Le nombre de Stokes particulaire est défini comme le rapport du temps de réponse de la particule sur le temps caractéristique de l'écoulement (*Crowe et Tsuji (1998)*). Il mesure donc l'inertie de l'inclusion et s'écrit, pour une particule sphérique :

$$St_p = \frac{\tau_p}{\tau_f} = \frac{1}{9} \frac{\rho_p}{\rho_f} Re_p \quad (I.2)$$

où τ_f est le temps convectif et τ_p est le temps de réponse de la particule :

$$\tau_p = \frac{2\rho_p a^2}{9\mu} \quad (I.3)$$

Lorsque $St_p \ll 1$, la particule va très rapidement répondre à une sollicitation du fluide et se comporter comme un traceur. *A contrario*, dès que $St_p \gg 1$, le fluide n'aura aucune influence sur le déplacement de la particule (écoulement granulaire). Ce paramètre est aussi le plus pertinent pour décrire les collisions entre les particules (*Joseph (2003)*). Dès lors que $St_p \ll 1$, les collisions sont inélastiques. Dans cette thèse, la masse volumique de la particule est proche de celle du fluide : le nombre de Stokes reste peu élevé et nos régimes sont peu collisionnels.

I.3 La sédimentation : un phénomène complexe à l'échelle microscopique

La sédimentation a lieu lorsque les efforts hydrodynamiques ne sont plus suffisants pour maintenir la particule en suspension. Celle-ci chute alors sous l'effet de la gravité. Il est couramment admis qu'une particule à petit nombre de Reynolds dans un domaine infini chute à vitesse constante après un court régime transitoire : la sédimentation dans ce cas est relativement simple. Il n'en va pas de même lorsqu'elle chute en milieu confiné ou en présence d'autres par-

ticules. Les interactions hydrodynamiques induites par les particules et les parois vont induire une sédimentation que l'on peut qualifier de complexe. Certains de ces comportements complexes sont présentés dans les sections suivantes. Ils seront étudiés en détail dans les chapitres IV et V.

I.3.1 Sédimentation d'une particule

Dans le cas d'une sphère seule qui sédimente dans un fluide newtonien et dans un milieu infini, la vitesse de chute peut être obtenue analytiquement, à Reynolds nul, et s'écrit (Cf. [Stokes \(1851\)](#)) :

$$U_s = \frac{(\rho_p - \rho_f)D^2g}{18\mu} \quad (\text{I.4})$$

En présence de parois verticales, la particule est ralentie. La formule ci-dessus doit alors être multipliée par une fonction d'entravement qui dépend du rapport entre la largeur du canal et le diamètre de la particule (Cf. [Happel et Brenner \(1965\)](#)). En deux dimensions, la sédimentation d'un disque entre deux parois présente un effet inattendu : la vitesse de sédimentation est maximale lorsque la particule est excentrée ([Harper et Chang \(1967\)](#), [Hu \(1995\)](#)). Ce phénomène sera analysé au chapitre IV à l'aide du code de calcul qui sera présenté au chapitre suivant.

I.3.2 Sédimentation d'un doublet de particules

Deux particules qui sédimentent vont interagir l'une avec l'autre par le biais d'interactions hydrodynamiques et d'interactions interparticulaires. Elles peuvent ainsi former des structures plus ou moins stables au cours du temps. Considérons le cas de deux sphères qui sédimentent, en régime de Stokes et en milieu infini, dans un fluide au repos. Pour ce cas, du fait de la réversibilité des équations de Stokes, la distance entre les particules ainsi que leur orientation restent identiques tout au long du processus ([Kim et Karrila \(1991\)](#)). Elles chutent plus rapidement qu'une particule isolée. La vitesse des particules est maximale lorsqu'elles sont alignées suivant la verticale et minimale lorsqu'elles sont alignées suivant l'horizontale. Les particules vont de plus avoir une vitesse horizontale, entièrement déterminée par leur orientation initiale.

Lorsqu'elles sédimentent à nombre de Reynolds fini, les deux sphères vont basculer pour s'orienter suivant une position préférentielle horizontale. Une fois cette position atteinte, les particules s'écartent l'une de l'autre jusqu'à ce qu'elles cessent d'interagir ([Jayaweera et al.](#)

(1964)). Des résultats analogues sont obtenus pour de longs cylindres (*Jayaweera et Mason (1965)*)).

Pour des régimes plus inertiels (R_{ep} de l'ordre de 10), *Fortes et al. (1987)* ont mis en évidence un processus qu'ils ont nommé le phénomène de *Drafting, Kissing and Tumbling* (Cf. Figure I.4). La particule suiveuse va accélérer dans le sillage de la meneuse, puis celles-ci vont entrer en collision. Elles vont alors basculer et la suiveuse dépasse la meneuse.

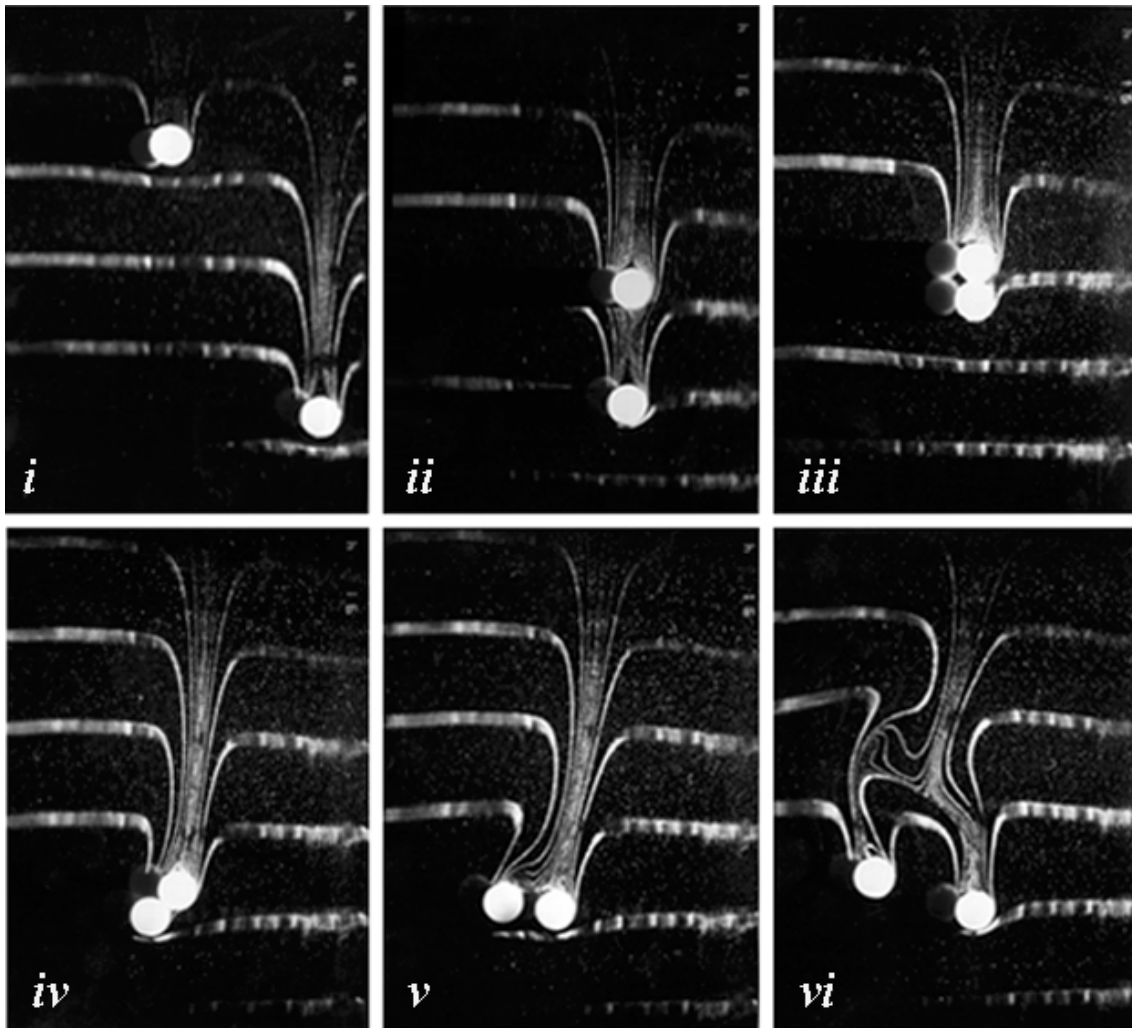


FIGURE I.4 – Phénomène *Drafting, Kissing and Tumbling* (DKT) : (i) et (ii) les particules se rapprochent l'une de l'autre par un phénomène d'aspiration, (iii) elles entrent en contact, (iv) et (v) le long corps formé par les deux sphères est instable et les particules basculent. (vi) Les particules s'éloignent l'une de l'autre (d'après *Joseph (2002)*)).

En deux dimensions, il y a peu de données concernant la sédimentation de deux disques, si ce n'est pour le phénomène DKT (voir par exemple *Feng et al. (1994)*, *Ladd (1994)*, *Hu*

(1996), *Glowinski et al.* (2001), *Uhlmann* (2005)). A bas nombre de Reynolds fini et en milieu confiné, des comportements complexes apparaissent : structures sédimentaires stationnaires ou périodiques présentant des séries de bifurcations menant à une sédimentation chaotique (*Aidun et Ding* (2003)). Cette dynamique complexe rend difficile la prédiction de la vitesse de sédimentation. Ce point sera tout particulièrement examiné au chapitre V.

I.3.3 Sédimentation d'un grand nombre de particules

Pour une suspension de particules en milieu confiné dans toutes les directions, l'augmentation de la concentration en matière solide va réduire l'espace entre les particules, ce qui va les ralentir. On parle alors de vitesse de chute entravée. Considérons une colonne de sédimentation de particules monodisperses uniformément réparties dans un fluide au repos (Cf. Figure I.5). Les particules vont commencer à chuter et deux zones distinctes apparaissent : le voisinage du fond, où les particules sont immobiles et la concentration élevée, au dessus de laquelle se trouve une suspension de concentration égale à la concentration initiale. Le déplacement des particules va créer un courant de retour qui va augmenter la traînée qui s'applique sur celles-ci. Ce phénomène d'entravement sera d'autant plus important que la fraction volumique est élevée.

Pour des sphères, *Richardson et Zaki* (1954) ont montré expérimentalement que la vitesse de chute de la suspension est égale à celle d'une particule unique multipliée par une fonction d'entravement de la forme :

$$f(\alpha_s) = (1 - \alpha_s)^n \quad (\text{I.5})$$

où α_s est la fraction volumique solide et l'exposant n est généralement égal à 5. En deux dimensions, *Höfler et Schwarzer* (2000) ont montré numériquement que la vitesse chute de disques suit aussi une loi de puissance avec un exposant n proche de 4. Leurs résultats ont été obtenus avec un domaine bipériodique et en modélisant le contre-écoulement en imposant un gradient de pression vertical. Nous revisitons leur calcul au chapitre VI en utilisant un domaine totalement fermé.



FIGURE I.5 – Schématisation du phénomène de sédimentation en colonne : la suspension, de fraction volumique initiale α_0 (en gris) est uniformément répartie dans un fluide au repos. Lorsque les particules sédimentent on distingue trois domaines : un domaine fluide (blanc), un domaine ayant la même fraction volumique initiale (gris) et le fond (en noir) qui a atteint la fraction volumique maximale. A la fin du processus, toutes les particules sont sur le fond.

I.4 Objectifs de la thèse

L'objectif de la thèse sera ainsi de développer un outil numérique pour analyser les phénomènes de sédimentation complexes brièvement décrits dans les sections précédentes.

Au chapitre II, nous présentons la méthode utilisée dans cette thèse. Elle est basée sur l'approche de "Direct-Forcing/Fictitious-Domain" de [Yu et Shao \(2007\)](#). Le chapitre III porte sur la validation du code de calcul à partir de cas test classiques issus de la littérature. Au chapitre IV nous analysons la sédimentation et le phénomène de survitesse d'un disque unique en milieu confiné. Le cas d'un doublet de particules et de sa dynamique complexe est présenté au chapitre V. Enfin, nous étudions la sédimentation d'un grand nombre de particules en milieu confiné au chapitre VI.

Chapitre II

Méthodologie numérique :

Direct-Forcing/Fictitious-Domain

Dans ce chapitre, nous présentons la méthode de calcul que nous avons développée durant cette thèse, la méthode Direct-Forcing/Fictitious-Domain de [Yu et Shao \(2007\)](#). Tout d'abord, nous présentons une étude bibliographique sur les modèles complètement résolus pour justifier le choix de notre méthode. Ensuite, nous présentons en détail la formulation en domaine fictif. Enfin, la dernière partie porte sur le schéma numérique et ses différents paramètres.

II.1 Introduction : tour d'horizon des méthodes lagrangiennes complètement résolues.

Les modèles lagrangiens complètement résolus (ou méthodes "directes") ne nécessitent pas d'équations de fermeture pour les interactions hydrodynamiques. La taille des particules est grande devant celle de la maille fluide. Dans ces méthodes, on considère les équations de Navier-Stokes pour la phase fluide et les équations de Newton pour la phase discrète. Les modèles complètement résolus sont généralement classés en deux catégories. La première catégorie ("*Boundary-fitted*" ou BF) regroupe les techniques dans lesquelles les particules sont considérées comme des frontières du domaine fluide. La seconde catégorie regroupe les méthodes des Domaines Fictifs ("*non-Boundary-fitted*" ou DF) où les particules et le fluide sont considérés comme un seul domaine.

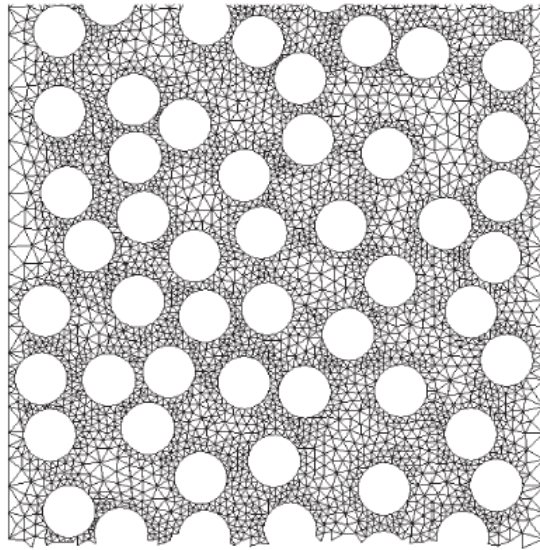


FIGURE II.1 – Maillage conforme bidimensionnel (*Prosperetti et Tryggvason (2007)*)

II.1.1 Méthodes des domaines réels

Dans cette catégorie de méthodes, le principe est de mailler uniquement la phase fluide avec un maillage conforme (Cf. figure II.1). La surface des particules est ainsi une frontière du domaine fluide. Les techniques les plus utilisées sont les méthode "Arbitrary-Lagrangian-Eulerian" (*Hu et al. (1992)*, *Hu (1996)*, *Hu et al. (2001)*) et la "Stabilized Space-Time" (*Tezduyar et al. (1992)*, *Prosperetti et Tryggvason (2007)*). Les différences entre ces techniques portent essentiellement sur la formulation du problème et la façon de gérer l'évolution du maillage fluide au cours du temps (voir par exemple *Prosperetti et Tryggvason (2007)* et références incluses). Les équations de Navier-Stokes sont généralement résolues sur un maillage non-structuré mobile avec la méthode des éléments finis. Lorsque les particules se déplacent, le maillage varie au cours du temps. On doit donc remailler le domaine fluide à chaque pas de temps et projeter les anciennes solutions sur le nouveau maillage. D'autres techniques permettent de supprimer le remaillage à chaque pas de temps en transportant les nœuds du maillage fluide. Par exemple, *Tezduyar et al. (1992)* proposent de résoudre une équation linéaire d'élasticité pour le mouvement des nœuds du maillage en fonction du déplacement des frontières. *Hu (1996)*, propose quant à lui de résoudre une équation de Poisson pour la vitesse des nœuds du maillage. Lorsque le maillage devient trop déformé, un nouveau maillage est alors généré et les champs fluides doivent être projetés. Un avantage majeur de ces méthodes est qu'elles per-

mettent une description très détaillée de l'écoulement proche des particules. Cette méthode a été appliquée avec succès à des cas de sédimentation, de fluidisation et d'érosion dans un fluide newtonien ou non (voir par exemple [Joseph \(2002\)](#), [Prosperetti et Tryggvason \(2007\)](#)).

On peut remarquer cependant que le remaillage et l'utilisation d'un maillage non-structuré entraînent un coût de calcul non-négligeable. Pour cette raison, nous avons opté pour une méthode de Domaines *Fictifs*, moins coûteuse, présentée ci-dessous.

II.1.2 Méthodes des Domaines Fictifs

Dans ces méthodes, le maillage est généralement fixe et structuré. Les particules peuvent être représentées par un ensemble de points discrétisant leur contour ou leur volume. On résout les équations de Navier-Stokes sur un domaine comprenant le fluide et le volume occupé par les particules. Le fluide est contraint à respecter le mouvement de corps rigide à l'intérieur et à la surface de la particule ([Glowinski et al. \(1999\)](#)) ou seulement sur la surface ([Mittal et Iaccarino \(2005\)](#)). Les méthodes de cette catégorie se différencient par la manière d'imposer le mouvement de corps rigide. Nous proposons maintenant de détailler deux de ces techniques qui sont à la base de la méthode développée dans cette thèse.

Méthodes IBM

La méthode des frontières immergée (IBM) a initialement été développée par [Peskin \(1977\)](#) afin de simuler les mouvements des membranes dans le cœur. Les parois sont discrétisées par une série de points qui vont se déplacer sous l'action du fluide. Leur déformation est calculée à partir d'équations constitutives (loi de Hooke). Les efforts qui en résultent sont alors transmis au fluide au moyen d'un terme de forçage dans l'équation de quantité de mouvement. Ces méthodes sont généralement qualifiées de "continues". Cette technique a beaucoup évolué et de nombreuses variantes ont émergé ([Mittal et Iaccarino \(2005\)](#), [Prosperetti et Tryggvason \(2007\)](#), [Haeri et Shrimpton \(2012\)](#)). Dans ce type de méthode, les équations de Navier-Stokes sont général résolues par différences finies ou volumes finis.

L'approche continue est aussi utilisée dans le cas de parois rigides. Le principe est le même que celui décrit précédemment, avec un paramètre de raideur beaucoup plus important pour assurer une quasi-rigidité ([Lai et Peskin \(2000\)](#)). Il est important de noter que la valeur de la

raideur dépend des cas étudiés car la méthode peut être instable (*Mittal et Iaccarino (2005)*). Il existe des variantes de la méthode portant essentiellement sur la formulation de l'équation constitutive.

L'approche continue dans le cas de frontières rigides est majoritairement utilisée pour des écoulements autour d'objets fixes et à bas nombre de Reynolds, du fait des instabilités qu'elle peut engendrer. Citons tout de même les travaux de *Höfler et Schwarzer (2000)* qui simulent des sphères mobiles avec cette méthode. Cependant, nous avons choisi de ne pas utiliser cette méthode pour les raisons de stabilité que nous avons évoquées précédemment. Nous utiliserons au contraire une méthode avec forçage direct ("Direct-Forcing/Immersed-Boundary" d'*Uhlmann (2005)*, notée DF/IB) où le terme de forçage n'est plus obtenu à partir d'une relation constitutive mais directement à partir de la vitesse "désirée" dans l'objet rigide. Dans cette technique, les contours sont discrétisés par des points matériels auxquels sont associés des volumes discrets (points colocalisés). Les fonctions d'interpolation discrètes (*Peskin (2002)*) servent à transférer les variables entre le maillage du fluide et les points colocalisés¹. La DF/IB permet aussi d'obtenir les efforts hydrodynamiques sans avoir à calculer le frottement sur le contour de la particule. Cependant, cette méthode est instable pour des particules de densité proche de celle du fluide. De plus, il est nécessaire de calculer explicitement les efforts hydrodynamiques à chaque pas de temps. Il existe cependant des méthodes permettant d'éviter ces inconvénients. Nous les présentons dans la section suivante.

Méthode des Multiplicateurs de Lagrange Distribués

Glowinski et al. (1999) ont développé une méthode ("Distributed Lagrange Multiplier based Fictitious Domain", DLM/FD) permettant de simuler des écoulements avec particules libres sans avoir à calculer explicitement les efforts hydrodynamiques. Le principe, là encore, est de résoudre les équations fluides sur tout le domaine et de forcer le fluide à l'intérieur des particules à respecter le mouvement de corps rigide. Ceci est fait par une formulation variationnelle : on minimise l'écart entre la vitesse fluide et la vitesse désirée, ce qui introduit des multiplicateurs

1. Il est important de noter que dans ces diverses méthodes, l'interpolation entre les nœuds fluides et solides joue un rôle crucial (voir *Uhlmann (2005)*, *Yang et al. (2009)*, *Lee et al. (2011)*). C'est la raison pour laquelle nous avons testé différentes fonctions d'interpolation (voir chapitre III).

de Lagrange dans les équations de transport². Cette formulation est alors résolue par éléments finis (*Glowinski et al. (2001)*, *Pan et Glowinski (2002)*, *Yu et al. (2002)*, *Wachs (2009)*). Ce schéma numérique coûte cher en temps de calcul car les vitesses des particules et les multiplicateurs de Lagrange sont obtenus à partir d'un schéma implicite.

Plusieurs schémas numériques ont été proposés pour réduire les temps de calcul. Par exemple, *Sharma et Patankar (2005)* proposent un schéma numérique plus rapide dans lequel la phase fluide est résolue avec une méthode des volumes finis et les vitesses des particules sont obtenues explicitement. *Veeramani et al. (2007)* et *Yu et Shao (2007)* ont eux aussi proposé des schémas numériques totalement explicites. Ces trois méthodes ne sont plus tout à fait des méthodes DLM/FD (*Veeramani et al. (2007)* les appellent non-DLM/FD) car la contrainte de mouvement rigide à l'intérieur de la particule est utilisée pour obtenir une expression explicite pour les vitesses des particules. Le multiplicateur de Lagrange est alors remplacé par une "force de volume". Les différences entre ces trois méthodes non-DLM/FD portent essentiellement sur le schéma numérique, l'expression explicite des vitesses des particules et leur discrétisation.

Pour cette thèse, nous avons choisi une méthode de type non-DLM/FD. Nous avons préféré celle de *Yu et Shao (2007)* pour d'une part la représentation explicite des particules et d'autre part la simplicité des fonctions d'interpolation.

II.2 Développement d'un algorithme DF/FD

Nous avons donc choisi d'implémenter la méthode DF/FD de *Yu et Shao (2007)* car elle est totalement explicite et ne nécessite pas de relations de fermeture pour le calcul des interactions hydrodynamiques. Comme avec la DF/IB, la particule est représentée simplement par des points colocalisés. Elle a aussi l'avantage de rester stable pour des particules de densité proche ou égale à celle du fluide. Enfin, les efforts hydrodynamiques ne sont pas calculés explicitement à chaque pas de temps.

Nous proposons maintenant de décrire plus en détail cette méthode en commençant par sa formulation en domaine fictif. Nous présentons ensuite les caractéristiques de notre schéma numérique.

2. *Patankar et Hu (2000)* proposent une autre version de la formulation variationnelle dans laquelle le taux de déformation est minimisé à l'intérieur de la particule.

II.2.1 Formulation en Domaine Fictif

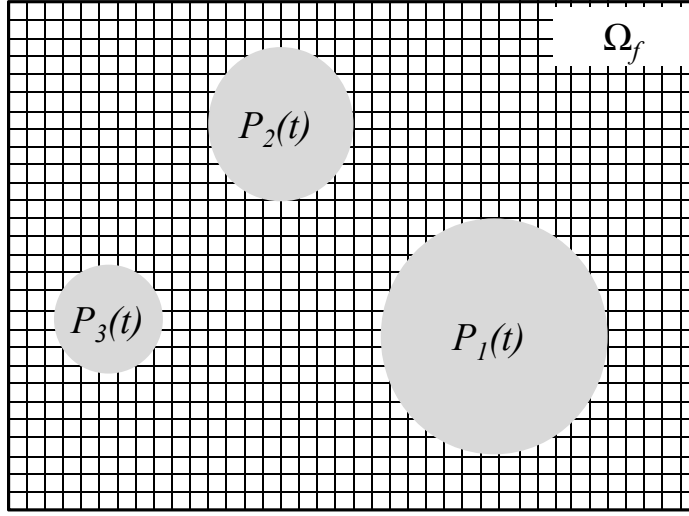


FIGURE II.2 – **Formulation en domaine fictif** : schéma du domaine d'étude. Ω_f est le domaine fluide. Chaque particule occupe un domaine noté $P_i(t)$. Leurs frontières sont respectivement notées $\partial\Omega_f$ pour le fluide et $\partial P_i(t)$ pour les particules. La formulation en domaine fictif s'effectue sur le domaine simplifié $\Omega = \Omega_f \cup P_i(t)$.

Nous considérons un domaine Ω_f contenant un fluide newtonien incompressible. Ses frontières sont notées $\partial\Omega_f$. Les particules rigides sont notées $P_i(t)$ (ici l'indice i représente le numéro de la particule). Les surfaces des particules sont notées $\partial P_i(t)$. L'ensemble du domaine $\Omega_f \cup P_i(t)$ est noté Ω . Le domaine Ω est représenté sur la figure II.2. Pour la phase fluide nous écrivons les équations de Navier-Stokes :

$$\rho_f \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} \text{ dans } \Omega_f, \quad (\text{II.1})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \text{ dans } \Omega_f, \quad (\text{II.2})$$

où $\mathbf{u}$ est le champ de vitesse du fluide et $\boldsymbol{\sigma}$ est le tenseur des contraintes :

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I}_d + 2\mu\mathbf{D}(\mathbf{u}) \quad (\text{II.3})$$

où p est la pression et $\mathbf{D}(\mathbf{u})$ est le tenseur des taux de déformation :

$$\mathbf{D}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u} + {}^t\nabla\mathbf{u}) \quad (\text{II.4})$$

Pour la phase particulaire, nous devons résoudre les équations de Newton qui s'écrivent :

$$m_i \frac{d\mathbf{U}_i}{dt} = \mathbf{F}_{hi} + m_i \left(1 - \frac{\rho_f}{\rho_{pi}}\right) \mathbf{g} \quad (\text{II.5})$$

où $\mathbf{U}_i(t)$ est le vecteur vitesse du centre de la i^{me} particule, m_i est sa masse, ρ_{pi} sa masse volumique, $\mathbf{F}_{hi}$ est l'effort du fluide sur la particule (hors poussée d'Archimède) et ρ_f est la masse volumique du fluide. Le théorème du moment cinétique, au centre de la particule, s'écrit :

$$\frac{d(\mathbf{J}_i \boldsymbol{\omega}_i)}{dt} = \mathbf{T}_{hi} \quad (\text{II.6})$$

où $\boldsymbol{\omega}_i(t)$ est la vitesse de rotation de la i^{me} particule, $\mathbf{J}_i$ est son tenseur d'inertie, et $\mathbf{T}_{hi}$ est le moment exercé par le fluide sur la particule. La condition aux limites entre la phase particulaire et la phase fluide est la condition de non-glissement sur la surface de la particule qui s'écrit :

$$\mathbf{u} = \mathbf{U}_i + \boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{r} \text{ sur } \partial P_i(t). \quad (\text{II.7})$$

Les efforts hydrodynamiques sont obtenus à partir de :

$$\mathbf{F}_{hi} = \int_{\partial P_i(t)} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}_{iext} dl \quad (\text{II.8})$$

$$\mathbf{T}_{hi} = \int_{\partial P_i(t)} \mathbf{r} \times (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}_{iext}) dl \quad (\text{II.9})$$

avec dl , un petit élément d'arc (en deux dimensions) sur le contour de la particule. La pression hydrostatique est prise en compte directement dans p . De ce fait la poussée d'Archimède est ajoutée explicitement à l'équation (II.5).

L'équation (II.1) est étendue au volume occupé par la particule $P_i(t)$ en lui ajoutant une force volumique $\boldsymbol{\lambda}$ pour contraindre le fluide à respecter un mouvement de corps rigide (équation (II.7)). Les équations de Navier-Stokes à l'intérieur de la particule s'écrivent alors :

$$\rho_f \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\lambda} \text{ dans } P_i(t), \quad (\text{II.10})$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{U}_i + \boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{r} \text{ dans } P_i(t). \quad (\text{II.11})$$

Nous cherchons maintenant à obtenir une formulation sur tout le domaine Ω . Intégrons tout d'abord (II.10) et $\mathbf{r} \times$ II.10 sur la particule, nous obtenons :

$$\mathbf{F}_{hi} = - \int_{P_i(t)} \boldsymbol{\lambda} dS + \frac{\rho_f m_i}{\rho_{pi}} \frac{d\mathbf{U}_i}{dt}, \quad (\text{II.12})$$

$$\mathbf{T}_{hi} = - \int_{P_i(t)} \mathbf{r} \times \boldsymbol{\lambda} dS + \frac{\rho_f}{\rho_{pi}} \frac{d(\mathbf{J}_i \boldsymbol{\omega}_i)}{dt}. \quad (\text{II.13})$$

dS est un petit élément de surface de la particule bidimensionnelle. En remplaçant $\mathbf{F}_{hi}$ et $\mathbf{T}_{hi}$ par (II.12) et (II.13) dans (II.8) et (II.9), respectivement, on obtient :

$$(1 - \frac{\rho_f}{\rho_{pi}}) m_i \left(\frac{d\mathbf{U}_i}{dt} - \mathbf{g} \right) = - \int_{P_i(t)} \boldsymbol{\lambda} dS, \quad (\text{II.14})$$

$$(1 - \frac{\rho_f}{\rho_{pi}}) \frac{d(\mathbf{J}_i \boldsymbol{\omega}_i)}{dt} = - \int_{P_i(t)} \mathbf{r} \times \boldsymbol{\lambda} dS. \quad (\text{II.15})$$

Pour résumer, la formulation en domaine fictif s'écrit :

$$\rho_f \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) = -\nabla p + \mu \Delta \mathbf{u} + \boldsymbol{\lambda} \text{ dans } \Omega, \quad (\text{II.16})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \text{ dans } \Omega, \quad (\text{II.17})$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{U}_i + \boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{r} \text{ dans } P_i(t), \quad (\text{II.18})$$

$$(1 - \frac{\rho_f}{\rho_{pi}}) m_i \left(\frac{d\mathbf{U}_i}{dt} - \mathbf{g} \right) = - \int_{P_i(t)} \boldsymbol{\lambda} dS, \quad (\text{II.19})$$

$$(1 - \frac{\rho_f}{\rho_{pi}}) \frac{d(\mathbf{J}_i \boldsymbol{\omega}_i)}{dt} = - \int_{P_i(t)} \mathbf{r} \times \boldsymbol{\lambda} dS. \quad (\text{II.20})$$

Pour adimensionner ces équations, les paramètres suivants sont introduits : soient L_c une longueur, U_c une vitesse, L_c/U_c un temps, $\rho_f U_c^2$ une pression et $\rho_f U_c^2 / L_c$ une force de volume. La formulation en domaine fictif adimensionnée s'écrit :

$$\frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial t^*} + (\mathbf{u}^* \cdot \nabla^*) \mathbf{u}^* = -\nabla^* p^* + \frac{\nabla^{2*} \mathbf{u}^*}{R_e} + \boldsymbol{\lambda}^* \text{ dans } \Omega, \quad (\text{II.21})$$

$$\nabla^* \cdot \mathbf{u}^* = 0 \text{ dans } \Omega, \quad (\text{II.22})$$

$$\mathbf{u}^* = \mathbf{U}_i^* + \boldsymbol{\omega}_i^* \times \mathbf{r}^* \text{ dans } P_i(t), \quad (\text{II.23})$$

$$(1 - \frac{1}{\rho_{ri}})V_{pi}^*(\frac{d\mathbf{U}_i^*}{dt^*} - F_r \frac{\mathbf{g}}{g}) = - \int_{P_i(t)} \boldsymbol{\lambda}^* dS^*, \quad (\text{II.24})$$

$$(1 - \frac{1}{\rho_{ri}})\frac{d(\mathbf{J}_i^* \boldsymbol{\omega}_i^*)}{dt^*} = - \int_{P_i(t)} \mathbf{r}^* \times \boldsymbol{\lambda}^* dS^*. \quad (\text{II.25})$$

ρ_{ri} est la masse volumique adimensionnée ($\rho_{ri} = \frac{\rho_{pi}}{\rho_f}$). R_e est le nombre de Reynolds défini par $R_e = \frac{U_c L_c}{\nu}$ et F_r est le nombre de Froude qui s'écrit $F_r = \frac{g L_c}{U_c^2}$. S_{pi}^* est la surface adimensionnée définie par $S_{pi}^* = \frac{m_i}{\rho_{pi} L_c^2}$ et $\mathbf{J}_i^*$ est le moment d'inertie adimensionné qui s'écrit $\mathbf{J}_i^* = \frac{\mathbf{J}_i}{\rho_{pi} L_c^4}$. Dans la suite de l'étude, nous n'utiliserons que les paramètres adimensionnés et, pour simplifier la rédaction, l'indice (*) sera supprimé.

II.2.2 Schéma numérique

Première version du schéma numérique M_1

Le problème est découpé en deux sous-problèmes avec une méthode à pas fractionnaire : un sous-problème pour le fluide et un sous-problème pour la phase particulaire.

1. Sous-problème fluide, calcul d'une vitesse intermédiaire $\mathbf{u}^*$ et de la pression p (en intégrant le terme convectif par un schéma temporel d'Adams-Bashforth d'ordre 2, et le terme diffusif par un schéma temporel de Crank-Nicholson d'ordre 2) :

$$\frac{\mathbf{u}^* - \mathbf{u}^n}{\Delta t} = -\nabla p^n + \frac{1}{2}(3(\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u})^n - (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u})^{n-1}) + \frac{1}{2}(\frac{1}{R_e} \nabla^2 \mathbf{u}^n + \frac{1}{R_e} \nabla^2 \mathbf{u}^*) + \boldsymbol{\lambda}^n \quad (\text{II.26})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u}^* = 0 \quad (\text{II.27})$$

2. Sous-problème particulaire :

$$\frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^*}{\Delta t} = \boldsymbol{\lambda}^{n+1} - \boldsymbol{\lambda}^n, \quad (\text{II.28})$$

$$\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{U}_i^{n+1} + \boldsymbol{\omega}_i^{n+1} \times \mathbf{r}, \quad (\text{II.29})$$

$$(1 - \frac{1}{\rho_{ri}})V_{pi}(\frac{d\mathbf{U}_i^{n+1}}{dt} - F_r \frac{\mathbf{g}}{g}) = - \int_{P_i(t)} \boldsymbol{\lambda}^{n+1} dS, \quad (\text{II.30})$$

$$(1 - \frac{1}{\rho_{ri}})\frac{d(\mathbf{J}_i \boldsymbol{\omega}_i^{n+1})}{dt} = - \int_{P_i(t)} \mathbf{r} \times \boldsymbol{\lambda}^{n+1} dS. \quad (\text{II.31})$$

Ces deux sous-problèmes sont résolus sur deux maillages distincts (un pour le domaine Ω et un

pour la particule $P_i(t)$.

a) Sous-problème fluide

Le premier sous-problème est un problème de Navier-Stokes classique. Pour sa résolution, nous avons utilisé le code de simulation numérique directe SUDRES (SURfactant Drag REDuction Study) de [Guillou et Makhloufi \(2007\)](#) dont nous rappelons ici les éléments essentiels. Le code SUDRES est basé sur l'algorithme de projection de [Chorin \(1968\)](#)-[Temam \(1969\)](#) et la méthode des différences finies. L'algorithme de projection consiste en une décomposition temporelle en deux étapes par l'introduction d'une autre vitesse intermédiaire notée $\mathbf{u}^\sharp$. Cela permet de découpler la résolution de la vitesse et de la pression. L'algorithme de résolution est le suivant :

$$\frac{\mathbf{u}^\sharp - \mathbf{u}^n}{\Delta t} = -\nabla p^n + \frac{1}{2}(3(\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u})^n - (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u})^{n-1}) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_e} \nabla^2 \mathbf{u}^n + \frac{1}{R_e} \nabla^2 \mathbf{u}^\sharp\right) + \boldsymbol{\lambda}^n \quad (\text{II.32})$$

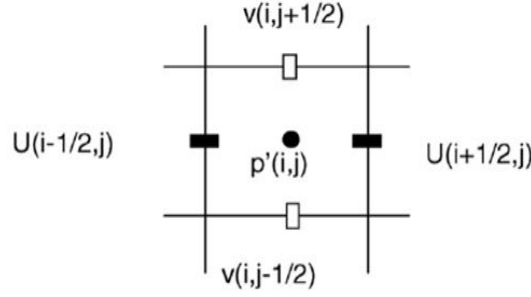
$$\Delta(p^{n+1} - p^n) = \frac{\nabla \cdot \mathbf{u}^\sharp}{\Delta t} \quad (\text{II.33})$$

$$\frac{\mathbf{u}^* - \mathbf{u}^\sharp}{\Delta t} = -\nabla(p^{n+1} - p^n) \quad (\text{II.34})$$

Ici, l'exposant n dénote le temps discret auquel est liée la variable. Le pas de temps est calculé de façon à respecter la condition de Courant-Friedrich-Lewy (CFL) qui s'écrit :

$$CFL = \alpha \left(\frac{|u|}{\Delta x} + \frac{|v|}{\Delta y} + \frac{|w|}{\Delta z} \right) \leq 1 \quad (\text{II.35})$$

où α est un facteur de sécurité. Pour la discrétisation spatiale du problème, nous avons utilisé un maillage entrelacé décalé (Cf. Figure [II.3](#)) qui permet de supprimer les oscillations paires-impaires. Le maillage est uniforme dans toutes les directions ce qui signifie que $\Delta x = \Delta y = \Delta z = h$, où h est la taille d'une maille. Les dérivées spatiales sont approchées par des différences de second-order centrées en espace. L'équation [\(II.32\)](#) est une équation d'advection-diffusion résolue avec la méthode de double balayage. L'équation [\(II.33\)](#) est une équation de Poisson qui peut être résolue, dans le cas d'un maillage cartésien uniforme, en utilisant un solveur basé sur la FCT (Fast Cosinus Transform) disponible dans la librairie FISHPACK. Celle-ci est adaptée pour les maillages conformes, réguliers et les calculs non-parallélisés (voir par


 FIGURE II.3 – **Sous-problème fluide** : maillage entrelacé et décalé.

exemple [Uhlmann \(2004\)](#)).

b) Sous-problème particulaire

Nous présentons les équations discrétisées que nous allons résoudre pour la phase particulaire. Les vitesses fluides sont supposées identiques d'un maillage à l'autre. Les expressions des vitesses des particules $\mathbf{U}_i^{n+1}$ et $\boldsymbol{\omega}_i^{n+1}$ s'obtiennent en remplaçant (II.7) dans (II.28) et les équations s'écrivent :

$$\boldsymbol{\lambda}^{n+1} = \frac{\mathbf{U}_i^{n+1} - \mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega}_i^{n+1} - \mathbf{u}^*}{\Delta t} - \boldsymbol{\lambda}^n. \quad (\text{II.36})$$

En intégrant (II.36) et (II.36) $\times \mathbf{r}$ sur $P_i(t)$ et en remplaçant ces équations dans (II.30) et (II.31), on obtient :

$$\rho_{ri} V_d \frac{\mathbf{U}_i^{n+1}}{\Delta t} = (\rho_{ri} - 1) V_d \left(\frac{\mathbf{U}_i^n}{\Delta t} - F_r \frac{\mathbf{g}}{g} \right) + \int_{\Omega_{pi}} \left(\frac{\mathbf{u}^*}{\Delta t} - \boldsymbol{\lambda}^n \right) dS \quad (\text{II.37})$$

$$\rho_{ri} \frac{J_i \cdot \boldsymbol{\omega}_i^{n+1}}{\Delta t} = (\rho_r - 1) \left(\frac{J_i \cdot \boldsymbol{\omega}_i^n}{\Delta t} \right) + \int_{\omega^n} \mathbf{r} \times \left(\frac{\mathbf{u}^*}{\Delta t} - \boldsymbol{\lambda}^n \right) dS \quad (\text{II.38})$$

Deuxième version du schéma numérique M_2

Dans la version présentée ci-dessus (dite "méthode 1", notée M_1 , due essentiellement à [Yu et Shao \(2007\)](#)), nous avons :

$$\frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^*}{\Delta t} = \boldsymbol{\lambda}^{n+1} - \boldsymbol{\lambda}^n. \quad (\text{II.39})$$

[Yu et Shao \(2007\)](#) proposent de remplacer cette équation par ("méthode 2", notée M_2) :

$$\frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^*}{\Delta t} = \lambda^{n+1}. \quad (\text{II.40})$$

Dans ce cas, les solutions présentent une très forte dépendance au pas de temps et au nombre de Reynolds. [Yu et al. \(2002\)](#) ont montré numériquement que la solution dépend alors du rapport $\Delta t/R_e$ et que la méthode n'est pas adaptée aux écoulements à bas nombre de Reynolds et que M_1 est préférable. Cependant nous verrons au chapitre suivant que la méthode M_2 permet de réduire les oscillations numériques sur les efforts hydrodynamiques et est plus adaptée aux grands nombres de Reynolds.

Discrétisation des particules

La discrétisation des particules est un point clé du problème. Dans la DF/FD et la DF/IB, la particule est discrétisée avec des points collocatifs auxquels est associé un volume discret ΔV , et sur lesquels sont définis les pseudo-forces de volume λ . L'arrangement des points lagrangiens est de grande importance pour des raisons de stabilité et de précision. Premièrement, les distances entre les points doivent être strictement supérieures à h pour la stabilité du calcul ([Glowinski et al. \(1999\)](#)) mais ne doivent pas être trop éloignées de cette valeur afin d'améliorer la précision des résultats. Deuxièmement, il est nécessaire d'avoir une distribution de points la plus homogène possible, afin de limiter les oscillations causées par les interpolations ([Yu et Shao \(2007\)](#)). La figure II.4 a) présente le cas de discrétisation d'une particule circulaire uniquement sur son contour. Le nombre de points qui discrétisent la particule est égal à N . Celui-ci s'obtient à partir de la relation :

$$N = \frac{\pi D}{\gamma h} \quad (\text{II.41})$$

avec γ un facteur sans dimension pour régler l'espace entre les points. Ce facteur peut avoir des valeurs comprises entre 1 et 2. [Yu et Shao \(2007\)](#) préconisent d'utiliser $\gamma = 1.45$, afin qu'il ne soit pas possible d'avoir deux points lagrangiens dans une même maille fluide. Dans le cas d'une discrétisation sur le contour, le volume discret associé à chaque point lagrangien prend une valeur arbitraire. En règle générale, on utilise $\Delta V = h^2$. La valeur du volume discret a très peu d'influence sur les résultats tant qu'il est assez proche de cette valeur ([Uhlmann \(2005\)](#)).

La discrétisation du contour n'est utilisée que pour des cas d'étude pour lesquels la vitesse des particules est imposée. Lorsque les particules sont libres, celles-ci doivent être discrétisées sur

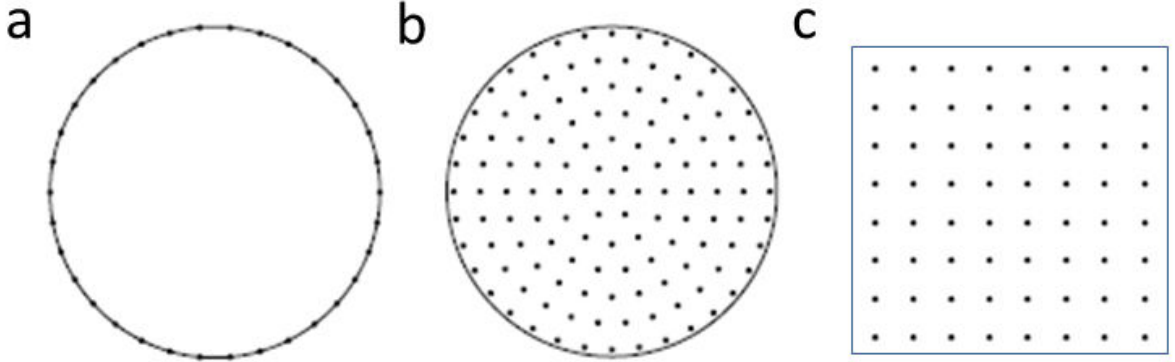


FIGURE II.4 – **Sous-problème particulaire** : discrétisation des particules avec la 'Collocation Point Method' (CPM) : a) la particule est uniquement discrétisée sur son contour, b) la particule circulaire est discrétisée à l'intérieur, c) discrétisation d'une particule carrée à l'intérieur.

toute leur surface (pour des problèmes en deux dimensions). Dans le cas de parallélépipèdes, l'arrangement des points lagrangiens est évident (Cf. Figure II.4 c)). Dans le cas d'un disque, l'arrangement des points n'est pas trivial pour assurer une distribution homogène. [Yu et al. \(2002\)](#) proposent de discrétiser la particule comme sur la figure II.4 b). Une représentation analogue a aussi été proposée par [Uhlmann \(2004\)](#). La particule est décomposée en N_r cercles concentriques. Chaque cercle est ensuite discrétisé par $6i$ points Lagrangiens (i varie de 1 à N_r). Le nombre de points total N_p est obtenu à partir de la relation :

$$N_p = 1 + 3(N_r(N_r + 1)) \quad (\text{II.42})$$

Dans le cas d'une discrétisation à l'intérieur de la particule, le volume discret (surface discrète en deux dimensions) est calculé par $\Delta V = V_d/N_p$. Cette discrétisation facilite le calcul des intégrales dans les équations (II.37) et (II.38). La méthode des rectangles est utilisée et les intégrales sont calculées avec la formule suivante :

$$\int_{P_i(t)} f dS = \sum_{l=1}^{N_p} f_L(\mathbf{X}_l) \Delta V \quad (\text{II.43})$$

avec $f_L(\mathbf{X}_L)$ la valeur discrète de f sur les points colcatifs de position $\mathbf{X}_L$.

Interpolations

Les vitesses fluides sont définies sur le maillage eulérien et les pseudo-forces de volume sont définies sur la particule. Pour résoudre le sous-problème fluide, la force de volume λ doit être interpolée sur le maillage fluide. Pour le sous problème particulaire, les vitesses fluides $\mathbf{u}^*$ sont interpolées sur la particule. En règle générale, les points qui discrétisent la particule ne coïncident pas avec les nœuds du maillage fluide. Dans ce cas, ces opérations sont réalisées comme dans les méthodes de frontières immergées ([Uhlmann \(2005\)](#)) en utilisant des fonctions d'interpolation discrètes δ_h . Ces fonctions, en trois dimensions, sont définies par :

$$\delta_h(\mathbf{r}) = d_h(r_x)d_h(r_y)d_h(r_z) \quad (\text{II.44})$$

avec r_x, r_y, r_z , les projections suivant les trois axes du vecteur position $\mathbf{r}$ (Cf. figure [II.5](#)). On peut trouver dans la littérature de nombreuses formes de $d(r)$ ([Yang et al. \(2009\)](#)). Pour les écoulements particuliers, deux formes sont particulièrement utilisées. La fonction chapeau ([Yu et Shao \(2007\)](#)) et la fonction de [Roma et al. \(1999\)](#) qui s'écrivent :

1. fonction chapeau [Yu et Shao \(2007\)](#)

$$\begin{cases} d(r) = 1 - \left|\frac{r}{h}\right|, \text{ si } |r| < h \\ d(r) = 0, \text{ sinon} \end{cases} \quad (\text{II.45})$$

2. fonction 3-points [Roma et al. \(1999\)](#)

$$\begin{cases} d(r) = \frac{1}{3}(1 + \sqrt{1 - 3\left|\frac{r}{h}\right|^2}), \text{ si } |r| \leq 0.5h \\ d(r) = \frac{1}{6}(5 - 3\left|\frac{r}{h}\right| - \sqrt{1 - 3(1 - \left|\frac{r}{h}\right|^2)}), \text{ si } 0.5h < |r| \leq 1.5h \\ d(r) = 0, \text{ sinon} \end{cases} \quad (\text{II.46})$$

La fonction chapeau a un support de deux mailles fluides tandis que la fonction de Roma en a trois. Il existe de nombreuses fonctions avec un support plus élevé (i.e. [Yang et al. \(2009\)](#)). Cependant, lorsque la particule est discrétisée à l'intérieur et sur son contour, le nombre d'opérations devient tout de suite très important avec des fonctions ayant un support plus élevé. Par conséquent, les coûts de calcul deviennent trop importants. La fonction chapeau est utilisée

dans la version initiale de [Yu et Shao \(2007\)](#) ainsi que pour discrétiser les multiplicateurs de Lagrange comme dans [Glowinski et al. \(1999\)](#). Comparativement à la fonction de Roma, elle présente deux avantages pour les écoulement particuliers. Le premier est que la fonction chapeau est plus efficace en terme de temps de calcul. Le second est que, lorsqu'une particule s'approche très près d'un mur ou d'une autre particule (de l'ordre d'une maille fluide), il n'est pas nécessaire d'introduire de traitement particulier. Néanmoins, des oscillations importantes peuvent apparaître sur les efforts hydrodynamiques. Les fonctions d'ordre plus élevé peuvent considérablement réduire les oscillations (Cf. [Lee et al. \(2011\)](#)). La fonction de [Roma et al. \(1999\)](#) coûte plus cher que la fonction chapeau mais elle est plus adaptée pour les maillages entrelacés-décalés. Nous testerons ces deux fonctions dans le prochain chapitre.

Pour interpoler une quantité discrète f entre le maillage eulérien et le maillage lagrangien, les

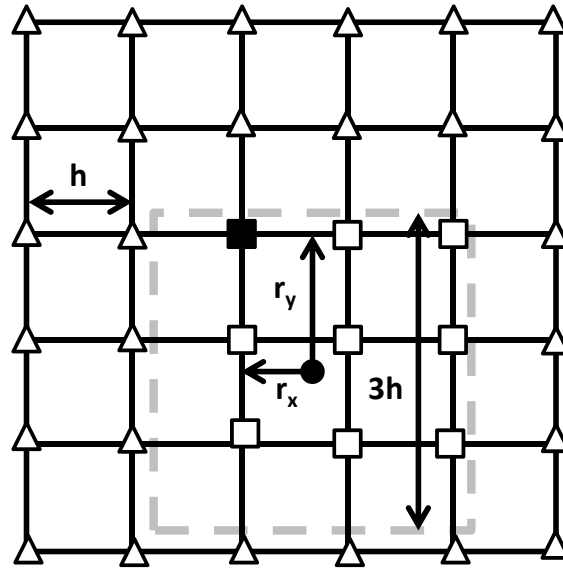


FIGURE II.5 – **Sous-problème particulière** : schématisation des supports d'interpolation pour la fonction discrète de [Roma et al. \(1999\)](#). Le point colocal est représenté par le rond noir. Le support de la fonction d'interpolation en deux dimensions est représenté par le carré en pointillés de côté $3h$. Les nœuds marqués par des carrés sont pris en compte pour l'interpolation tandis que la fonction discrète est nulle pour ceux marqués par des triangles.

relations suivantes sont utilisées (Cf. [Uhlmann \(2004\)](#)) :

$$f_{E \rightarrow L} : f_L(\mathbf{X}_l) = \sum_i f_E(\mathbf{x}_i) \delta_h(\mathbf{X}_l - \mathbf{x}_i) \quad (\text{II.47})$$

$$f_{L \rightarrow E} : f_E(\mathbf{x}_i) = \sum_l f_L(\mathbf{x}_l) \delta_h(\mathbf{X}_l - \mathbf{x}_i) \Delta V_l^* \quad (\text{II.48})$$

où $f_L(\mathbf{X}_l)$ et $f_E(\mathbf{x}_i)$ représentent les valeurs lagrangiennes et eulériennes de f aux coordonnées $\mathbf{X}_l$ du maillage lagrangien et $\mathbf{x}_i$ du maillage eulérien, respectivement. Ici, ΔV_l^* représente le rapport du volume discret associé à un point colocal sur l'aire d'une maille fluide (h^2).

Modèle de contact

Dans les modèles complètement résolus, lorsque les particules sont proches les unes des autres ou proches d'une paroi (d'une distance de l'ordre d'une maille fluide h), la dynamique du fluide interstitiel est mal calculée. Il est alors impossible d'avoir une résolution assez élevée pour prendre en compte les efforts de lubrification. De ce fait, les particules peuvent se chevaucher. Il est donc nécessaire d'introduire un modèle de contact. Deuxièmement, du fait de la technique utilisée, il est pour le moment nécessaire d'avoir une distance de sureté pour qu'un point eulérien ne puisse pas recevoir la contribution de deux particules. Pour le développement du code,

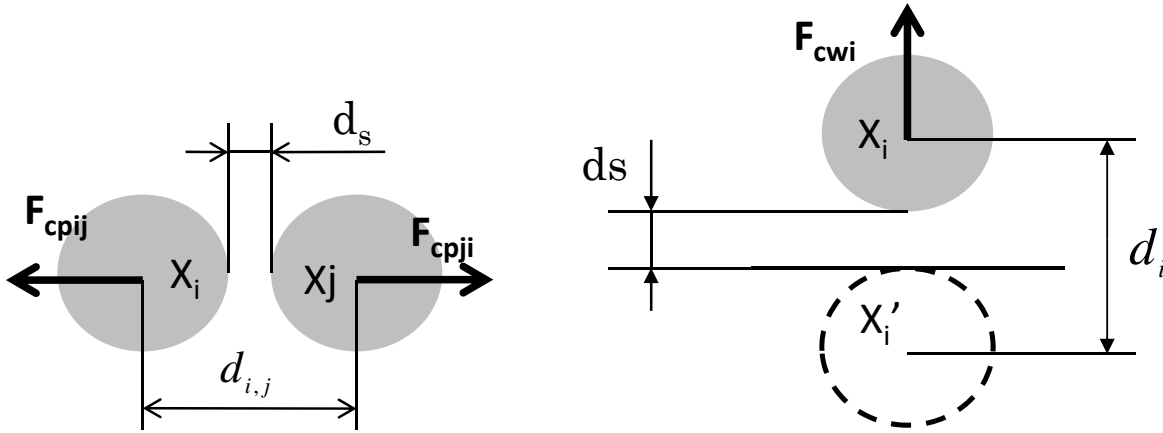


FIGURE II.6 – **Sous-problème particulière** : schéma du modèle de contact de [Glowinski et al. \(1999\)](#).

nous avons choisi d'utiliser un modèle très simple qui consiste à introduire une force de répulsion normale (les efforts tangentiels de contact sont négligés) lorsque les particules sont proches les unes des autres ([Glowinski et al. \(1999\)](#)). On considère deux disques de rayons R_i et R_j centrés en $\mathbf{X}_i$ et $\mathbf{X}_j$, respectivement. La distance entre les deux centres est notée $d_{ij} = |\mathbf{X}_i - \mathbf{X}_j|$. La zone de sureté est notée d_s . Lorsque la distance entre deux particules est de la taille de la zone de sûreté, [Glowinski et al. \(1999\)](#) proposent de modéliser la force de répulsion inter-particulaire

par :

$$\begin{cases} \mathbf{F}_{cpij} = \frac{1}{\epsilon_p}(\mathbf{X}_i - \mathbf{X}_j)(R_i + R_j + d_s - d_{ij})^2 & \text{si } d_{ij} \leq (R_i + R_j + d_s) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{II.49})$$

où ϵ_p est un petit paramètre positif de "raideur" à déterminer pour chaque cas d'étude. Pour traiter les contacts avec les parois latérales, un disque fantôme est considéré. Il est de rayon égal à R_i et se trouve à une position $\mathbf{X}'_j$, en dehors du domaine, de façon à être tangent à la paroi (Cf. figure II.6). La force de répulsion pariétale F_{cwi} est alors modélisée par :

$$\begin{cases} \mathbf{F}_{cwi} = \frac{1}{\epsilon_w}(\mathbf{X}_i - \mathbf{X}'_j)(2R_i + d_s - d'_{ij})^2 & \text{si } d'_{ij} \leq (2R_j + d_s) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{II.50})$$

avec $\epsilon_w = \epsilon_p/2$ et $d'_{ij} = |\mathbf{X}_i - \mathbf{X}'_j|$.

Dans nos simulations, le code de calcul s'arrête si les particules viennent à se chevaucher ou à chevaucher le mur. Les deux efforts sont calculés à partir des positions calculées au pas de temps précédent. L'équation (II.37) s'écrit alors :

$$\rho_{ri} V_d \frac{\mathbf{U}_i^{n+1}}{\Delta t} = (\rho_{ri} - 1) V_d \left(\frac{\mathbf{U}_i^n}{\Delta t} - F_r \frac{\mathbf{g}}{g} \right) + \int_{\Omega_{pi}} \left(\frac{\mathbf{u}^*}{\Delta t} - \boldsymbol{\lambda}^n \right) dS + \mathbf{F}_{cwi}^n + \mathbf{F}_{cpij}^n \quad (\text{II.51})$$

Au chapitre suivant, nous testerons ce modèle de collision avec deux cas test classiques : le DKT (décrit au chapitre I) et l'instabilité de Rayleigh-Taylor (Cf. *Glowinski et al.* (1999), *Feng et Michaelides* (2004)).

II.3 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons justifié notre choix d'implémenter la méthode DF/FD de *Yu et Shao* (2007) dans le code SUDRES de *Guillou et Makhloufi* (2007). Nous avons présenté en détail la formulation en domaines fictifs ainsi que le schéma numérique qui en découle. Dans le prochain chapitre, nous analysons l'influence du paramétrage numérique du code de calcul sur la précision des résultats. Nous comparons aussi les deux schémas numériques M_1 et M_2 décrits à la page 28. Pour ce faire, notre étude portera sur de nombreux cas test pour une vaste

gamme de régimes d'écoulement.

Chapitre III

Validation de la méthode

Dans le chapitre précédent, la méthode que nous avons développée a été présentée en détail. Nous présentons maintenant plusieurs cas de validation afin de tester la fiabilité du code dans le cas d'un objet fixe, d'un objet avec mouvement imposé puis d'un objet libre. Les derniers cas tests porteront sur des particules libres en interaction. Nous ne considérons que des cas bidimensionnels.

III.1 Ecoulements autour d'un disque avec vitesse imposée.

Cette première section porte sur deux cas tests : l'écoulement autour d'un cylindre fixe et l'écoulement autour d'un cylindre oscillant. Le cas du cylindre fixe est un cas très classique. Il va nous permettre de voir comment les paramètres numériques (discrétisation, pas de temps, fonction d'interpolation ...) affectent les efforts hydrodynamiques. Le second cas test a été initié par [Uhlmann \(2005\)](#). Cet auteur a mis en évidence l'existence d'oscillations numériques (appelées 'Spurious Force Oscillations' (SFO) par [Lee et al. \(2011\)](#)) dans les méthodes IBM. La fréquence spatiale des oscillations est fonction de la taille de la maille fluide. Ce cas test critique a permis à [Uhlmann \(2005\)](#) d'écarter un certain nombre de méthodes inadaptées à la modélisation des écoulements particuliers. Le domaine de calcul est schématisé sur la figure [III.1](#). D est le diamètre de la particule, W est la largeur du domaine et L , sa longueur. Les coordonnées horizontales et verticales sont notées X et Y , respectivement. La vitesse du fluide u_∞ est imposée en entrée et sur les parois latérales. En sortie, nous avons imposé une condition

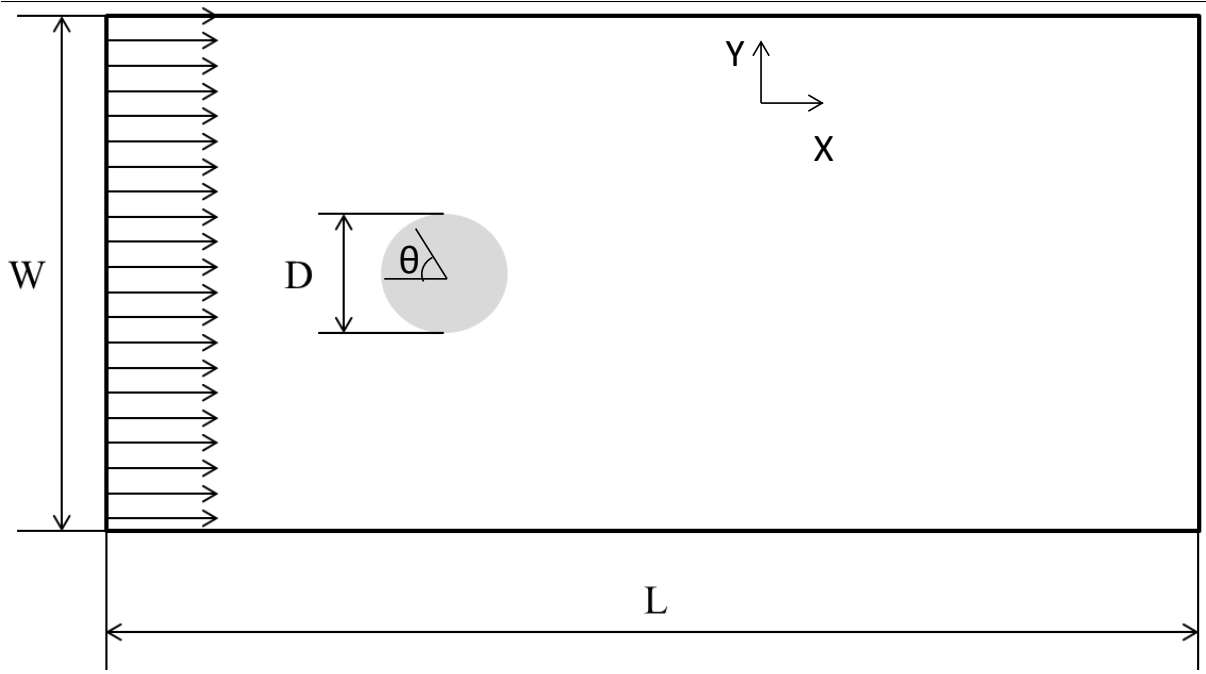


FIGURE III.1 – **Écoulement autour d'un disque ayant une vitesse imposée** : schéma du domaine de calcul. D est le diamètre de la particule, W est la largeur du domaine et L , sa longueur.

aux limites convective :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + c \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial X} = 0 \quad (\text{III.1})$$

où $c = u_\infty$. Une condition de Neumann sur tout le domaine est imposée pour la pression. Deux discrétisations de la particule sont testées (voir Chapitre II, section II.2.2 page 28) : la première consiste à discrétiser uniquement le contour pour comparer nos résultats avec ceux de [Yu et Shao \(2007\)](#), la deuxième discrétise intégralement la particule pour préparer notre étude aux écoulements particuliers. Dans cette étude, nous faisons varier le nombre de Reynolds particulaire, défini par :

$$Re_p = \frac{u_\infty D}{\nu} \quad (\text{III.2})$$

Pour calculer les coefficients de traînée et de portance, nous calculons les efforts hydrodynamiques en intégrant l'équation de quantité de mouvement de la formulation en domaine fictif (eq. (II.10) page 23) sur la particule et nous obtenons :

$$F_h = - \int_P \lambda dV + \int_P \frac{d\mathbf{u}}{dt} dV \quad (\text{III.3})$$

Lorsque la particule est uniquement discrétisée sur son contour, l'intégrale de la dérivée temporelle permet d'obtenir de meilleurs résultats (*Yu et Shao (2007)*). Les coefficients de traînée et de portance sont alors obtenus avec :

$$C_D = \frac{2F_{h//}}{\rho_f D u_\infty^2} \quad (\text{III.4})$$

$$C_L = \frac{2F_{h\perp}}{\rho_f D u_\infty^2} \quad (\text{III.5})$$

Nous définissons le coefficient de pression $C_p = (p - p_\infty) / (\frac{1}{2} \rho_f u_\infty^2)$, avec p_∞ la pression au loin. En présence de lâchers tourbillonnaires périodiques, nous définissons le nombre de Strouhal $S_t = fD/u_\infty$ où f est la fréquence de l'écoulement. Les paramètres sont adimensionnés par u_∞ pour la vitesse, D pour la longueur et ρ_f pour la masse volumique.

III.1.1 Écoulement autour d'un cylindre fixe

a) Cas 1 : $W/D = 4$

Un cylindre est placé au centre du domaine de largeur $W = 4D$. La particule est distante de six diamètres de l'entrée et la longueur totale du domaine est de vingt cinq diamètres afin que la sortie ait peu d'influence sur les résultats. Nous faisons varier le nombre de Reynolds Re_p de 0.5 à 100. La particule est uniquement discrétisée sur son contour. Pour cette étude, nous avons testé trois maillages différents qui correspondent à $h = D/16$, $D/32$ et $D/64$. Le pas de temps Δt varie de 0.00025 à 0.01 pour $Re_p = 100$. L'espacement entre les points colocalisés est fixé à $\gamma = 1.45$. Nous avons pris la fonction d'interpolation chapeau pour être dans la même configuration que *Yu et Shao (2007)*.

La figure III.2 présente les lignes de courant et les contours de vorticité pour différents nombres de Reynolds caractéristiques. Sur la vignette a), pour $Re_p = 0.5$, les lignes de courant sont symétriques. Sur la vignette b), l'inertie du fluide devient importante et on voit très clairement l'apparition de cellules de recirculation à l'aval de la particule. Sur la vignette c), la taille des cellules de recirculation augmente et enfin sur la vignette d) les vortex se détachent périodiquement de la particule. La dynamique de l'écoulement est ainsi en accord qualitatif avec les mesures expérimentales de *Van Dyke (1982)*.

La table III.1 référence les coefficients de traînée obtenus pour les trois maillages. Nous les

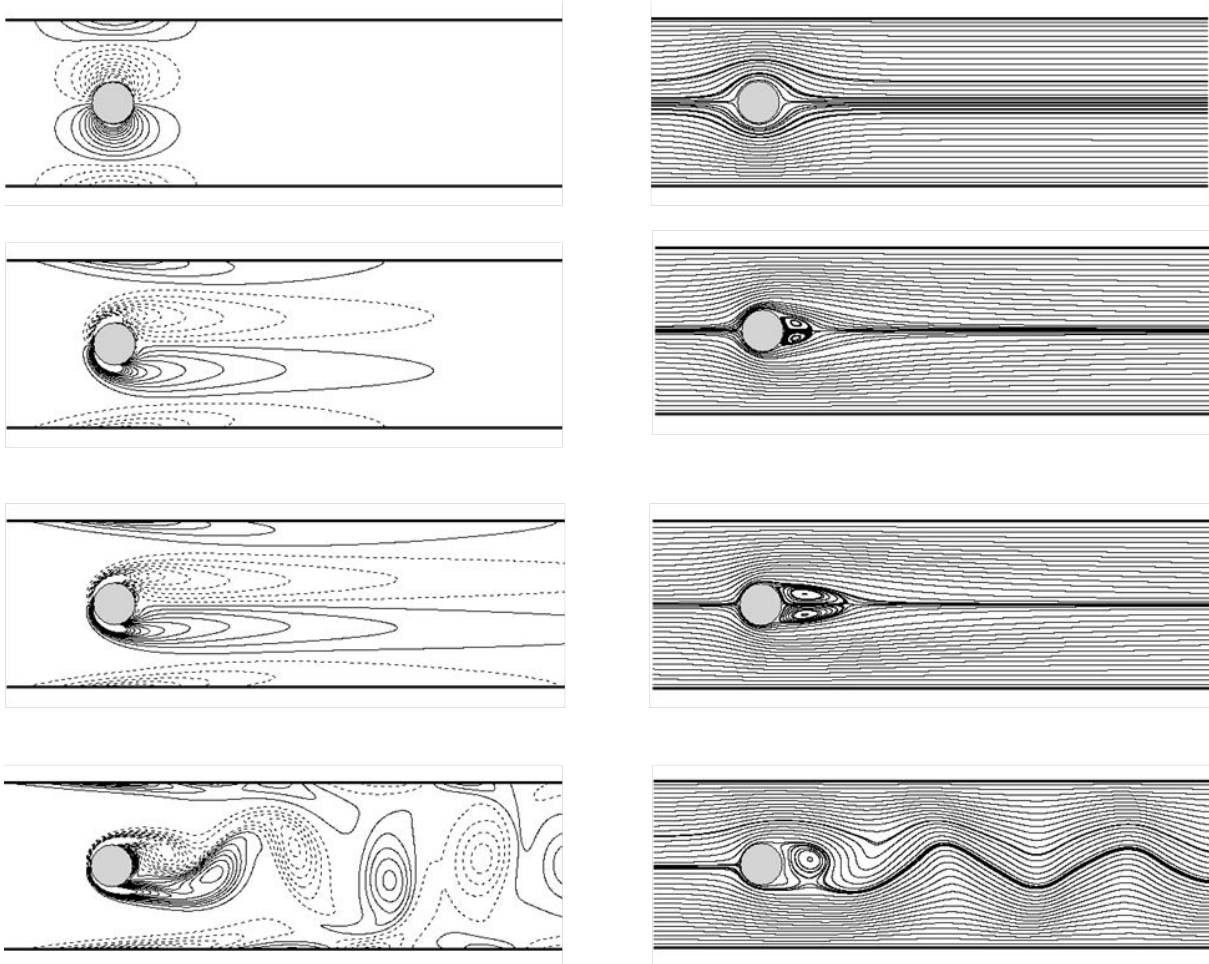


FIGURE III.2 – **Écoulement autour d'un cylindre fixe** : contours de vorticité (à gauche) et lignes de courant (à droite) pour quatre régimes d'écoulement caractéristiques ($Re_p = 0.5, 20, 40$ et 100).

avons comparé avec les résultats numériques de [Yu et Shao \(2007\)](#), obtenus avec leur méthode spectrale et leur méthode DF/FD. Quelque soit le régime d'écoulement ou le maillage utilisé, les coefficients de traînée obtenus avec notre méthode sont toujours supérieurs à ceux obtenus avec la méthode spectrale. Cela est très certainement dû à la taille de leur domaine de calcul et à leurs conditions aux limites de sortie. Ces informations ne sont pas indiquées dans leur article. Malgré cette légère différence, le constat est identique. Plus le maillage est grossier et plus la différence avec la méthode spectrale est importante. La surestimation des coefficients de traînée avec des méthodes des domaines fictifs de ce type est bien connue ([Uhlmann \(2005\)](#), [Yu et Shao \(2007\)](#)). Les frontières des particules ne sont pas clairement définies puisque les points colocalisés représentent un volume discret. Pour remédier à ce problème, il est nécessaire de rétracter le dernier cercle qui discrétise la particule d'une distance Δa comprise entre 0 et

TABLE III.1 – **Écoulement autour d'un cylindre fixe** ($W/D = 4$) : coefficients de traînée obtenus pour trois maillages ($h = D/16, D/32, D/64$) comparés avec les résultats de *Yu et Shao* (2007) obtenus avec une méthode DF/FD et une méthode spectrale.

Re_p	0.5	1	5	10	20	40	100
présente étude $D/16, \Delta a = 0$	93.00	46.68	10.28	6.05	3.96	2.84	2.16
présente étude $D/16, \Delta a = h/4$	89.13	44.75	9.88	5.82	3.81	2.72	2.06
présente étude $D/32, \Delta a = 0$	90.34	46.68	10.01	5.89	3.85	2.75	2.08
présente étude $D/32, \Delta a = h/5$	88.37	44.37	9.80	5.78	3.77	2.70	2.01
présente étude $D/64, \Delta a = 0$	89.11	44.73	9.88	5.83	3.80	2.72	2.06
présente étude $D/64, \Delta a = h/5$	88.13	44.29	9.77	5.76	3.76	2.69	2.00
<i>Yu et Shao</i> (2007) $D/16, \Delta a = 0$	91.28	45.82	10.10	5.942	3.882	2.778	2.119
<i>Yu et Shao</i> (2007) $D/16, \Delta a = h/4$	87.78	44.07	9.733	5.736	3.748	2.677	2.007
<i>Yu et Shao</i> (2007) $D/32, \Delta a = 0$	89.51	44.94	9.915	5.839	3.813	2.723	2.099
<i>Yu et Shao</i> (2007) $D/32, \Delta a = h/5$	88.12	44.25	9.772	5.759	3.762	2.682	2.03
<i>Yu et Shao</i> (2007) $D/64, \Delta a = 0$	88.75	44.56	9.837	5.795	3.785	2.702	2.042
<i>Yu et Shao</i> (2007) $D/64, \Delta a = h/5$	87.99	44.19	9.759	5.751	3.756	2.681	2.024
<i>Yu et Shao</i> (2007) méthode spectrale	87.95	44.16	9.75	5.75	3.76	2.68	

$h/2$. Nous avons donc relancé les calculs pour les différents maillages avec différentes zones de rétractation (Cf. Table III.1). Les résultats obtenus avec rétractation sont bien plus proches des valeurs de références. Ainsi, plutôt que de mailler plus finement le domaine, il est préférable d'adapter la distance de rétractation et de se caler aux valeurs théoriques ou expérimentales.

Plusieurs autres tests ont été lancés en faisant varier le pas de temps, le volume discret ΔV_l^* ainsi que l'espacement γ entre les points colocalisés. Dans le cas du cylindre fixe, la variation de ces paramètres a très peu d'influence sur les coefficients de traînée obtenus. *Yu et Shao* (2007) ont fait les mêmes observations.

b) Cas 2 : $W/D = 32$

Maintenant, le cylindre est placé au centre d'un domaine de longueur et de largeur égales à trente deux diamètres. Nous avons réalisé ce test car il est très documenté dans la littérature et permet de valider les efforts hydrodynamiques, les coefficients de pression, la taille des cellules de recirculation et le nombre de Strouhal. Trois régimes d'écoulement sont étudiés pour ce cas ($Re_p = 20, 40$ et 100).

Nous avons utilisé deux maillages que l'on notera m_1 et m_2 (notés m_{1b} et m_{2b} lorsque la particule est discrétisée sur son ensemble) qui comptent respectivement 513×513 noeuds et

1025x1025 noeuds, soit une taille de maille $h = D/16$ et $h = D/32$. Le pas de temps Δt est égal à 0.003. La particule est dans un premier temps discrétisée uniquement sur son contour. L'espace entre les points colocalisés est fixé à $\gamma = 1.25$ et le volume associé à chaque point est fixé à $\Delta V_l = h^2$. Pour ce cas, nous avons aussi testé une discrétisation complète de la particule ($N_r = 7$ pour m_{1b} et $N_r = 13$ pour m_{2b} , d'après les recommandations de [Yu et Shao \(2007\)](#)). Deux fonctions d'interpolation sont testées, la fonction chapeau et la fonction de [Roma et al. \(1999\)](#) qui sont notées δ_2 et δ_3 (voir équations (II.45) et (II.46) à la page 30).

TABLE III.2 – **Ecoulement autour d'un cylindre fixe** ($W/D = 32$) : Coefficients de traînée et taille des recirculations obtenus pour deux différents maillages m_1 et m_2 (notés m_{1b} et m_{2b} lorsque la particule est discrétisée sur son ensemble) et deux différentes fonctions d'interpolations δ_2 et δ_3 pour des nombres de Reynolds particuliers égaux à 20 et 40. Pour le cas $R_{ep} = 100$, les coefficients de traînée, de portance ainsi que le nombre de Strouhal sont présentés. Les résultats sont comparés avec les résultats issus de la littérature.

	$R_{ep} = 20$		$R_{ep} = 40$		$R_{ep} = 100$		
	C_D	L_r	C_D	L_r	C_D	C_L	S_t
présente étude $m_1 \delta_2$	2.11	0.85	1.59	2.12	1.430 ± 0.011	0 ± 0.345	0.160
présente étude $m_2 \delta_2$	2.10	0.91	1.57	2.19	1.380 ± 0.011	0 ± 0.340	0.164
présente étude $m_1 \delta_3$	2.13	0.89	1.58	2.23	1.395 ± 0.010	0 ± 0.321	0.159
présente étude $m_2 \delta_3$	2.13	0.92	1.58	2.24	1.374 ± 0.008	0 ± 0.335	0.165
présente étude $m_{2b} \delta_2$	2.14	0.98	1.60	2.32	1.392 ± 0.009	0 ± 0.310	0.163
présente étude $m_{2b} \delta_3$	2.14	0.95	1.60	2.33	1.385 ± 0.008	0 ± 0.318	0.164
Silva et al. (2003)	2.04	1.02	1.54	2.53			
Ye et al. (1999)	2.03	0.92	1.52	2.27			
Park et al. (1998)	2.01	0.95	1.51	2.31	1.33 ± 0.008	0 ± 0.332	0.165
Uhlmann (2005)					1.501 ± 0.011	± 0.349	0.172
Liu et al. (1998)					1.350 ± 0.013	± 0.339	0.165

La table III.2 présente les coefficients de traînée, ainsi que la taille des recirculations derrière la particule L_r , pour $R_{ep} = 20$ et 40. Les résultats sont assez proches des résultats obtenus avec d'autres modèles numériques. Dans la majorité des cas, notre code surestime les valeurs des coefficients de traînée et de portance. Cette surestimation est très certainement liée au confinement (voir [Uhlmann \(2005\)](#)). En effet, la largeur des domaines est bien plus grande pour [Park et al. \(1998\)](#) et [Ye et al. \(1999\)](#) qui obtiennent les coefficients de traînée minimaux. De plus, nos tests ont été réalisés sans zone de rétractation ($\Delta a = 0$). Les résultats d'[Uhlmann \(2005\)](#) sont très largement supérieurs à nos résultats et à ceux issus de la littérature. Son domaine est cependant moins large que le nôtre. Au vu de la variabilité des résultats trouvés dans la litté-

ture, les résultats obtenus avec le code fournissent des résultats satisfaisants quelles que soient la discrétisation de la particule et la fonction d'interpolation utilisée. On notera tout de même que les coefficients de traînée et de portance obtenus avec la fonction d'interpolation δ_3 sont toujours inférieurs à ceux obtenus avec la fonction δ_2 .

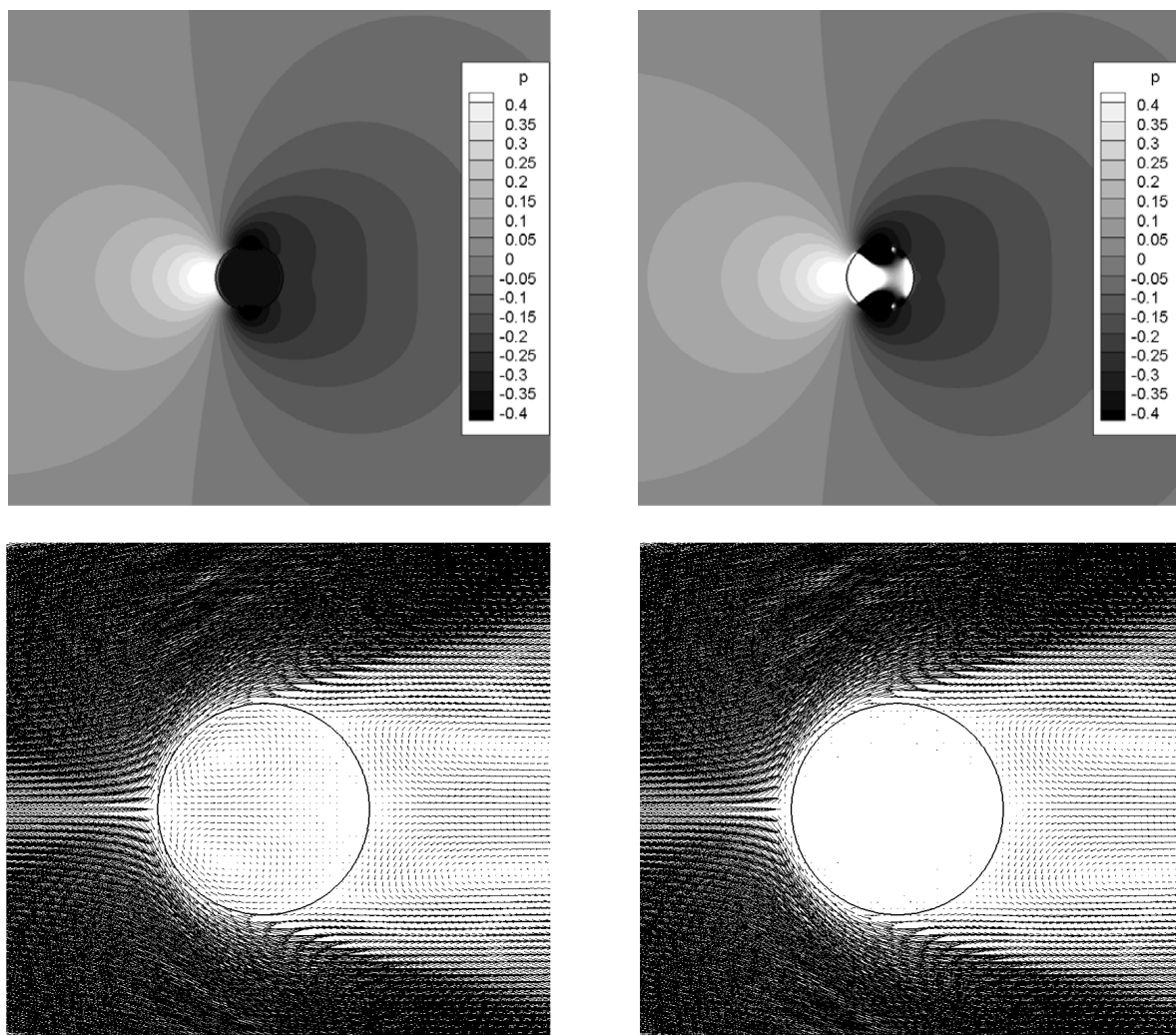


FIGURE III.3 – **Ecoulement autour d'un cylindre fixe dans un canal large** : visualisation des contours de pression et des vecteurs au voisinage du disque pour $Re_p = 40$. A gauche la particule est discrétisée sur son contour et à droite la particule est totalement discrétisée. Lorsque la particule est maillée sur tout son domaine, il n'y a pas de contre-écoulement à l'intérieur mais une pression interne va se développer au cours du temps.

Lorsque la particule est discrétisée sur toute sa surface, les valeurs obtenues sont très légèrement supérieures à celles obtenues avec une discrétisation sur le contour uniquement. La différence reste tout de même très faible. La figure III.3 présente les contours de pression et les vecteurs vitesses autour de la particule pour les deux discrétisations. Lorsque la particule

n'est discrétisée que sur son contour, un contre-écoulement se développe à l'intérieur tandis que lorsqu'elle est totalement discrétisée, la vitesse est nulle à l'intérieur mais une pression s'y développe (alors qu'elle est nulle dans le premier cas). Cette pression peut alors présenter de forts sauts au niveau de l'interface. Cette pression intérieure ne semble pas avoir d'influence sur l'écoulement extérieur. La figure III.4 présente le coefficient de pression C_p moyenné au cours du temps, obtenu avec une particule discrétisée complètement. Ces résultats sont comparés à ceux de *Park et al.* (1998) et *Uhlmann* (2005). La pression est mesurée à partir du nœud de pression le plus proche d'un point colocalif, à l'extérieur de la particule. Les résultats sont en accord avec ceux de ces deux auteurs. Cela confirme que la pression intérieure de la particule a très peu d'influence dans le cas d'un cylindre fixe.

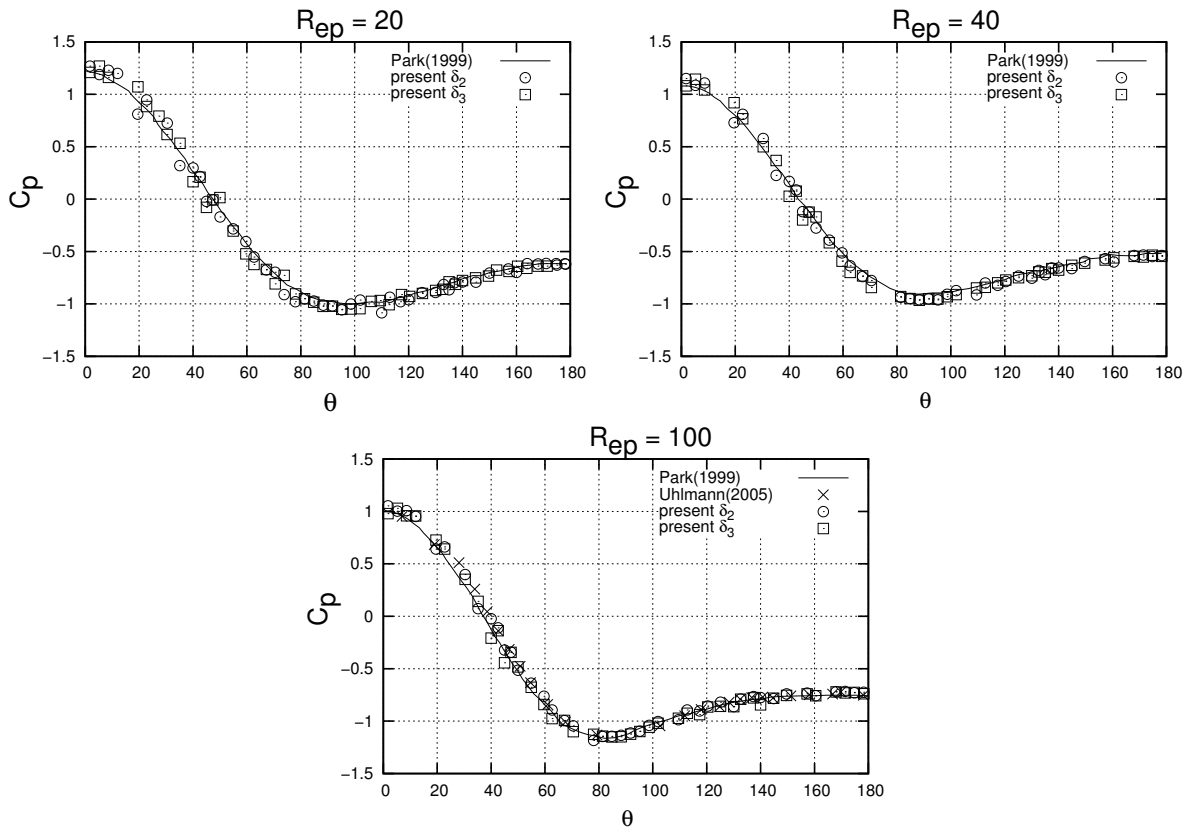


FIGURE III.4 – **Écoulement autour d'un cylindre fixe ($W/D=32$)** : coefficient de pression moyenné en temps C_p (pour une particule maillée intérieurement) en fonction de l'angle pour $Re_p = 20, 40$ et 100 , comparés à des résultats issus de la littérature. Les fonctions d'interpolation et le maillage intérieur n'ont pas d'influence sur les résultats.

TABLE III.3 – **Écoulement autour d'un cylindre fixe (deuxième version du code)** : coefficients de traînée obtenus à partir d'une deuxième version de la DF/FD. Cette fois-ci, les résultats présentent une forte dépendance au pas de temps et au nombre de Reynolds comme l'ont constaté [Yu et al. \(2002\)](#).

	$\Delta t = 0.001$	$\Delta t = 0.0005$	$\Delta t = 0.0001$	$\Delta t = 0.00005$	Yu et Shao (2007)
$C_D(0.5)$	77.38	81.81	86.87	87.75	87.95
$C_D(1)$	41.08	42.52	44.06	44.31	44.16
$C_D(5)$	9.64	9.73	9.81	9.83	9.754
$C_D(10)$	5.73	5.76	5.78	5.79	5.749
$C_D(20)$	3.778	3.773	3.766	3.761	3.756
$C_D(40)$	2.704	2.697	2.669	2.664	2.682

c) Cas 3 : $W/D = 4$ avec la deuxième version M_2

Pour terminer cette section, nous avons à nouveau lancé le premier cas $W/D = 4$, mais avec la deuxième version du schéma numérique M_2 (Cf. page 28). La particule est totalement discrétisée avec $N_r = 13$ et une distance de rétractation $\Delta a = h/3$ est utilisée. La taille de la maille fluide est $h = D/32$. Nous avons fait varier le pas de temps. Les résultats sont présentés dans la table III.3. Ils confirment bien cette dépendance au pas de temps et au nombre de Reynolds. Néanmoins, l'adéquation avec les résultats de [Yu et Shao \(2007\)](#) est de bonne qualité pour des pas de temps assez faible. Nous avons tracé les contours de pressions sur la figure III.5. Tout comme dans la première version de la méthode, la pression va se développer à l'intérieur de la particule. Par contre, nous constatons que la variation de pression ne présente pas de sauts ou de discontinuité sur le contour comme dans la première version du code. Cela vient du fait que la force de volume λ^{n+1} n'est calculée qu'après la pression p^{n+1} .

III.1.2 Écoulement autour d'un cylindre oscillant

Nous imposons maintenant un mouvement de translation oscillatoire à la particule, perpendiculairement à l'écoulement. Pour ce cas, la particule est discrétisée totalement. Le domaine de calcul est $[-1.2, 1.2] \times [-1.2, 1.2]$. La particule est placée initialement en $(-0.645, -0.009)$. Le nombre de Reynolds particulaire est fixé à 185. Le mouvement vertical est défini à partir de la relation $y(t) = 0.2D \cos(2\pi f_f t)$. La fréquence du forçage f_f est égale à 0.8 fois la fréquence naturelle de détachement de vortex f . Dans notre cas $f_f = 0.52$. Le maillage comprends 1025x1025 noeuds, soit $D/h = 39.4$. La particule est discrétisée par $N_r = 17$. La distance de

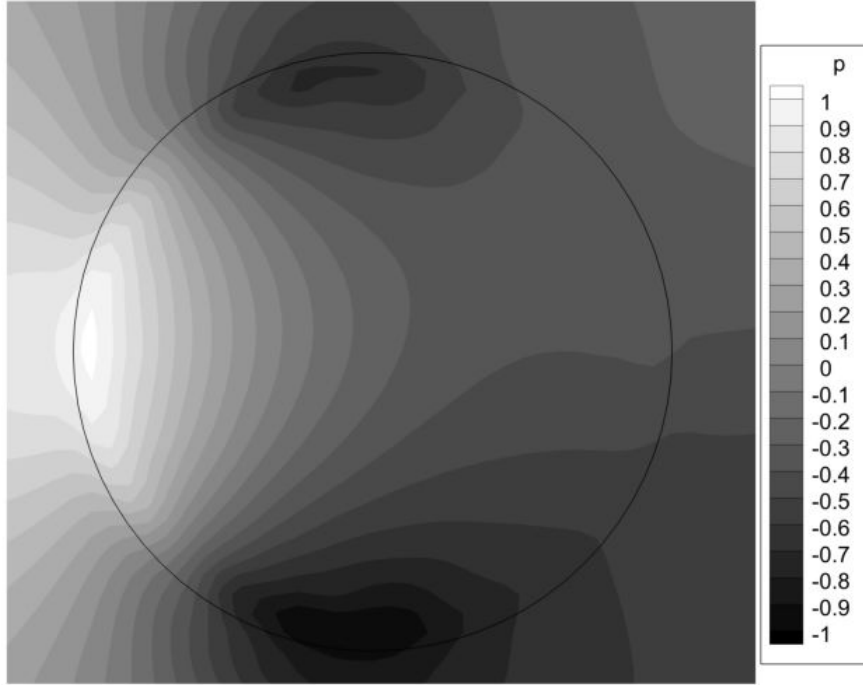


FIGURE III.5 – **Ecoulement autour d'un cylindre fixe (deuxième version du code)** : contours de pression. Contrairement à la première version, la pression ne présente pas de discontinuité.

rétractation est fixée à $\Delta a = h/3$. Les fonctions d'interpolation testées sont les mêmes que pour le cas précédent et gardent la même notation (δ_2 et δ_3).

La figure III.6 présente l'évolution spatiale du coefficient de traînée et du coefficient de portance pour les différents cas. Le plus remarquable dans ces résultats, est la présence d'oscillations dont la fréquence est fonction de la taille de la maille fluide h . La fonction d'interpolation δ_3 permet de réduire substantiellement ces oscillations par rapport à δ_2 . [Uhlmann \(2005\)](#) explique que la diminution des oscillations en utilisant une fonction d'interpolation d'ordre plus élevé permet d'avoir une représentation plus lisse de la particule, c'est-à-dire que la force est distribuée sur plus de points environnant la particule. Ces résultats sont confirmés par [Yang et al. \(2009\)](#) et [Lee et al. \(2011\)](#).

En dehors du maillage et de la fonction d'interpolation, [Lee et al. \(2011\)](#) évoquent une troisième source d'oscillations qui est la discontinuité de la pression sur le contour de la particule. Précédemment, nous avons vu que la pression se développe à l'intérieur de la particule et que cette pression peut présenter de fortes variations à la traversée du contour. Nous avons vu aussi que dans la version M_2 , il n'y plus de saut de pression. La figure III.7 présente ainsi le même cas réalisé avec la deuxième méthode : la continuité de la pression conduit à des résultats de

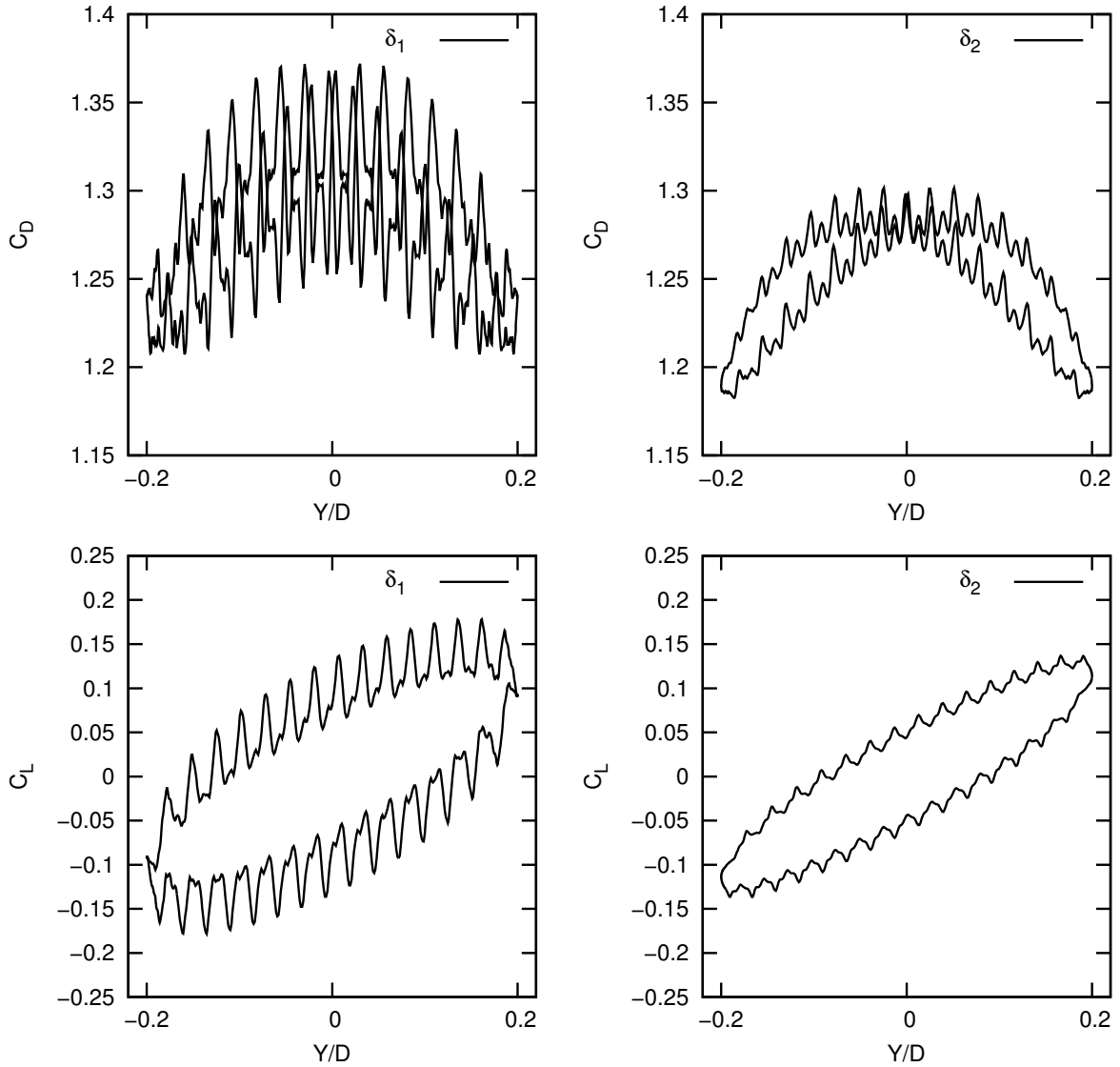


FIGURE III.6 – **Ecoulement autour d'un cylindre oscillant** ($W/D = 26.666$, $Re_p = 185$) : coefficients de traînée et de portance en fonction de la position latérale du disque pour deux fonctions d'interpolations. La fonction δ_3 permet de réduire drastiquement les oscillations.

meilleure qualité. Encore une fois, la fonction d'interpolation δ_3 fournit les résultats beaucoup plus lisses que δ_2 .

Dans la suite de ce chapitre, nous travaillerons uniquement avec la fonction d'interpolation δ_3 qui est plus adaptée pour les maillages entrelacés-décalés.

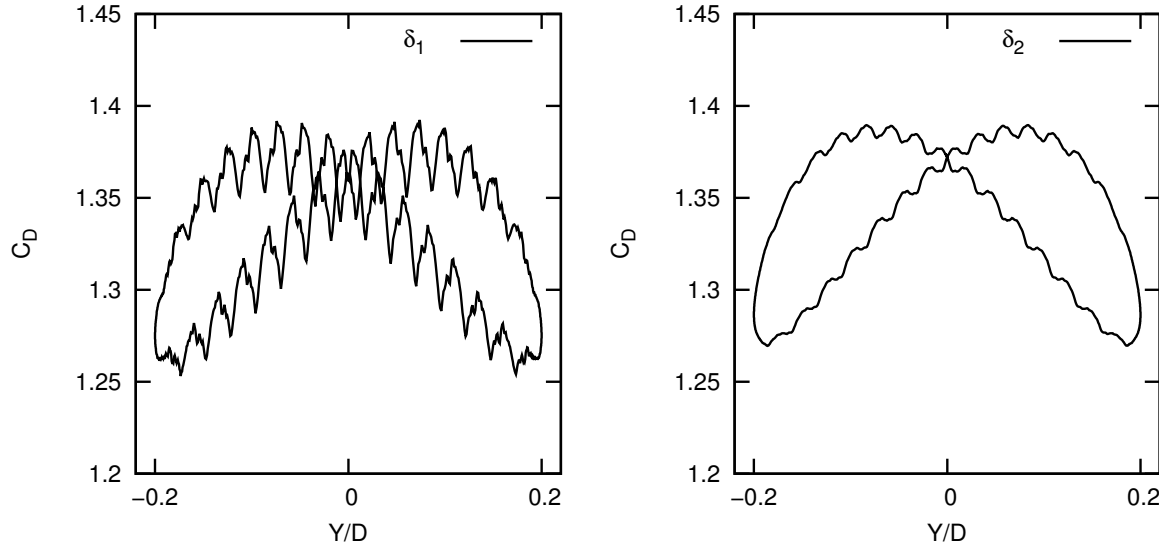


FIGURE III.7 – **Ecoulement autour d’un cylindre oscillant** ($W/D = 26.666$, $Re_p = 185$) : coefficients de traînée en fonction de la position latérale du disque obtenus avec la deuxième version du code pour deux fonctions d’interpolations. Comparativement au cas précédent, l’absence de saut de pression réduit l’amplitude des oscillations. La fonction δ_3 permet aussi de réduire drastiquement les oscillations.

III.2 Sédimentation d’une particule en milieu confiné

Nous nous intéressons maintenant à plusieurs cas de sédimentation d’une particule circulaire unique dans un fluide au repos. Nos résultats sont comparés avec ceux de la littérature. La figure III.8 présente notre domaine d’étude. W est la largeur du domaine, D est le diamètre de la particule. Y est la coordonnée horizontale et X la coordonnée verticale. Le domaine est fermé par une paroi horizontale sur le fond et par deux parois verticales (condition de non-glissement). Il est ouvert sur le dessus (pression imposée et $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = 0$).

Pour toutes les simulations de cette section, nous avons utilisé un domaine de calcul particulier (Cf. figure III.9). Pour pouvoir simuler la sédimentation de particules sur des temps très longs, nous ne pouvons pas utiliser des domaines de longueur *infinie*. A la place, [Yu et al. \(2002\)](#) ont proposé d’utiliser un domaine de longueur fini mais évoluant avec la position verticale de la particule. Dès que celle-ci est au-dessous d’une position verticale X_{lim} choisie arbitrairement, nous interdisons à la particule d’aller plus bas, en la décalant vers le haut d’une maille fluide h : sa nouvelle hauteur est ainsi $X + h$. L’ensemble des paramètres ($\mathbf{u}$, p et λ) est alors décalé vers le haut d’une maille fluide (par exemple $\mathbf{u}_{(i,j)} = \mathbf{u}_{(i,j-1)}$), sauf sur la paroi horizontale du fond où les paramètres restent inchangés. Dans nos simulations, et pour pouvoir comparer nos

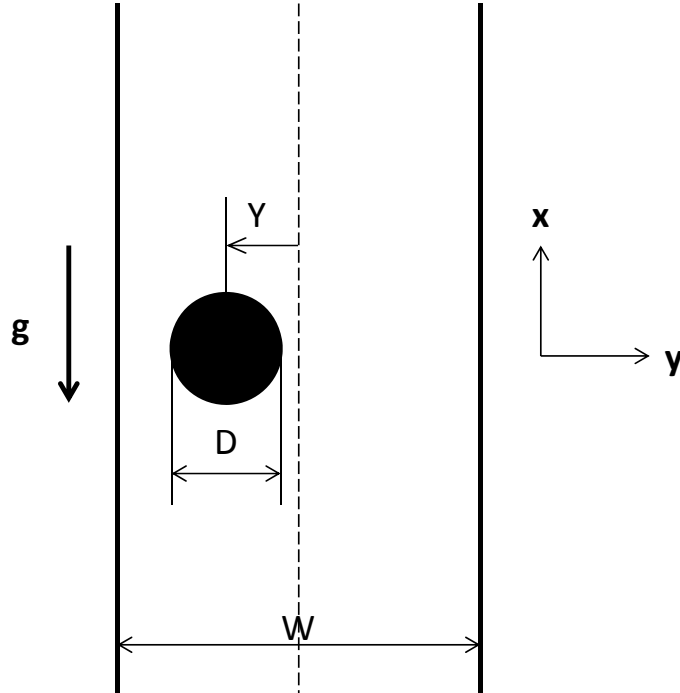


FIGURE III.8 – **Sédimentation d'une particule unique** : représentation schématique de la sédimentation d'une particule en milieu confiné. W est la largeur du canal, Y est la coordonnée horizontale.

résultats avec la littérature, nous avons paramétré notre domaine comme celui de [Wachs \(2009\)](#), soit une longueur $L = 20D$, une largeur $W = 4D$ et la position X_{lim} est distante de $6D$ du fond.

A bas nombre de Reynolds (écoulement rampant), il existe une relation analytique pour déterminer la vitesse de chute dans le cas d'un cylindre qui sédimente en milieu confiné ([Happel et Brenner \(1965\)](#)) :

$$U_s^{HB} = \frac{D^2}{16K\mu}(\rho_p - \rho_f)g \quad \text{en régime de Stokes} \quad (\text{III.6})$$

où K est une constante permettant de prendre en compte l'influence des parois latérales :

$$K = \frac{1}{\ln W^* + 0.9157 + \frac{1.7244}{W^{*2}} - \frac{1.7302}{W^{*4}} + \frac{2.4056}{W^{*6}} - \frac{4.5913}{W^{*8}}} \quad (\text{III.7})$$

où $W^* = W/D$. Lorsque l'inertie devient plus importante, il n'y a pas d'expression analytique

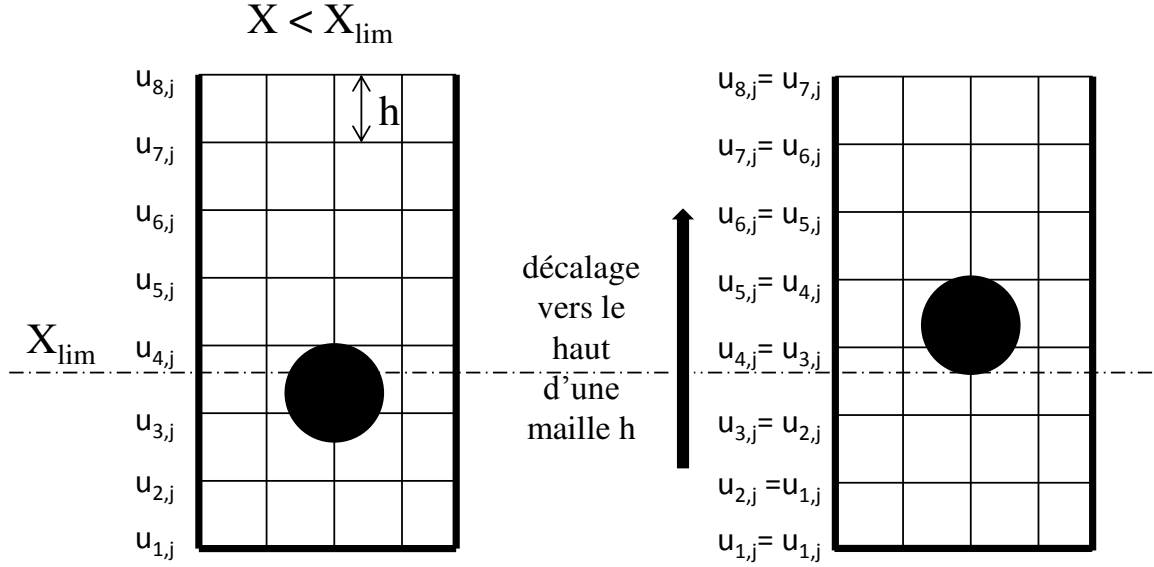


FIGURE III.9 – **Domaine 'infini' pour étudier la sédimentation** : schéma du domaine 'infini'. Lorsque le centre de la particule atteint une position inférieure à X_{lim} , sa nouvelle position est décalée vers le haut d'une distance h (taille de la maille fluide). Les grandeurs fluides et la pseudo-force de volume sont décalés eux-aussi d'une maille sur le dessus. Sur le fond du domaine (ici $u_{1,j}$), les paramètres restent inchangés.

pour U_s .

Il est nécessaire de choisir une vitesse de référence pour adimensionner les grandeurs de nos simulations. Nous utilisons le système d'unités ¹ :

$$\rho_f, D \text{ et } U_c \quad (III.8)$$

où U_c est une vitesse caractéristique choisie différemment suivant que nos simulations sont fortement ou faiblement inertielles. Dans le cas des régimes faiblement inertiels, nous prenons :

$$U_c = U_s^{HB}$$

Dans les cas plus inertiels, nous prendrons (*Yu et al. (2002)*, *Wachs (2009)*) :

$$U_c = \sqrt{\frac{\Pi D}{2}(\rho_r - 1)g} \quad (III.9)$$

1. Sauf indication contraire. En effet, certains de nos cas test seront réalisés dans le système d'unités des auteurs auxquels nous voulons nous comparer.

Ces choix nous permettent de comparer plus directement nos résultats avec la littérature. Nous définissons le nombre de Reynolds particulaire R_{ep} calculé à partir de cette vitesse caractéristique U_c :

$$R_{ep} = \frac{U_c D}{\nu} \quad (\text{III.10})$$

Nous testerons les deux méthodes décrites précédemment. Les simulations sont réalisées avec la fonction d'interpolation de [Roma et al. \(1999\)](#). Le confinement du domaine est $W/D = 4$.

III.2.1 Sédimentation d'un disque en milieu confiné

Dans un premier temps, nous nous intéressons à trois cas de sédimentation d'un disque unique. Le premier porte sur la sédimentation d'une particule de masse volumique $\rho_r = 1.1$ avec $R_{ep} = 0.1$. Nous faisons varier différents paramètres du schéma (discrétisation de la particule, pas de temps, zone de rétractation ...) pour justifier la paramétrisation de nos futures études. Pour ce premier cas test, nous n'utilisons que la première version du schéma numérique M_1 ².

Le deuxième cas test porte sur la sédimentation d'une particule excentrée $Y/D = 1$ pour $R_{ep} = 200$. Nous testons les paramètres du schéma et les deux méthodes.

Enfin, nous terminons notre étude par un cas de sédimentation d'une particule excentrée, pour une vaste gamme de nombres de Reynolds, et nous comparons nos résultats à des simulations numériques directes issues de la littérature ([Feng et al. \(1994\)](#), [Yu et al. \(2002\)](#), [Wachs \(2009\)](#)).

a) Sédimentation à bas nombre de Reynolds $R_{ep} = 0.1$

Pour ce premier cas, la particule est initialement placée au centre du domaine avec une vitesse initiale nulle. Le fluide est au repos. La vitesse est adimensionnée par (III.6). Deux maillages sont testés : $h = D/16$ et $h = D/32$. La discrétisation de la particule est fixée à $Nr = 6, 7, 8$ pour le cas $h = D/16$ et $Nr = 13, 14, 15$ pour le cas où $h = D/32$. Différentes distances de rétractation sont testées ($h/2 \geq \Delta a \geq 0$). Le pas de temps varie de 0.0002 à 0.001.

La figure III.10, présente l'évolution temporelle de la vitesse de chute réduite U_s pour dif-

2. Comme nous l'avons vu pour l'écoulement autour d'un cylindre fixe, la deuxième méthode n'est clairement pas adaptée car elle nécessite des pas de temps très faibles pour les écoulements à bas R_{ep} .

férents pas de temps. La rétractation est fixée à $\Delta a = h/3$. Les vitesses obtenues dans ce cas, sont en très bonne adéquation avec la relation (III.6). Le pas de temps a très peu d'influence sur la convergence des résultats. L'erreur maximale par rapport à la valeur analytique est de 1.5% ($h = D/16$ et $\Delta t = 0.001$). Pour un maillage plus fin, l'erreur n'excède pas 0.5%. La figure III.11 présente l'évolution temporelle de la vitesse de chute pour différentes discrétisations (variation de N_r). Le choix de N_r a très peu d'influence. La figure III.12 présente l'évolution temporelle de la vitesse de chute pour différentes distances de rétractation. Nous observons que celle-ci a une influence très importante. Plus la distance de rétractation est grande et plus la traînée est faible, comme nous l'avons déjà remarqué pour l'écoulement autour d'un objet fixe. L'erreur maximale par rapport à la solution analytique est de 4% pour $h = D/16$ et $\Delta a = h/2$. Pour $h = D/16$ une rétractation de $\Delta a = h/4$ permet d'avoir une erreur de 0.27%. Pour le maillage plus fin, l'influence de la zone de rétractation se fait moins ressentir.

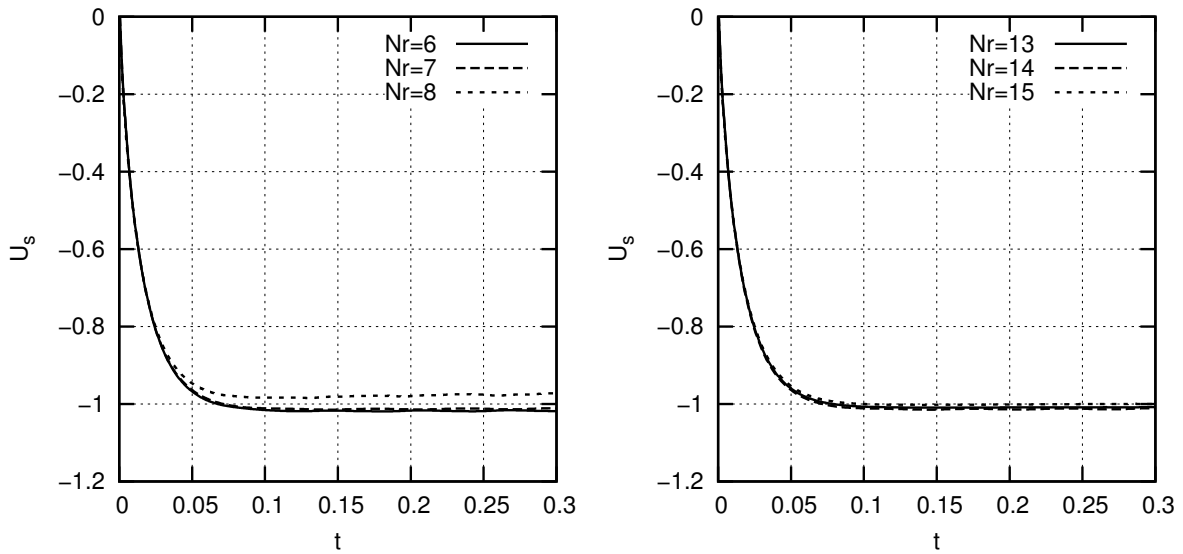


FIGURE III.10 – **Sédimentation d'une particule unique à $R_{ep} = 0.1$** : évolution temporelle de la vitesse de chute ($W = 4D$, $R_{ep} = 0.1$, $\Delta t = 0.001$, $\rho_p = 1.1$) pour différentes discrétisations de la particule. A gauche $h = D/16$ et à droite $h = D/32$.

Par conséquent pour $R_{ep} = 0.1$, et la version M_1 , nos résultats montrent que le pas de temps et le nombre de cercles qui discrétisent la particule ont très peu d'effet sur les vitesses de chute. La zone de rétractation Δa est le paramètre qui a le plus d'influence. Ce même constat a été fait par [Yu et Shao \(2007\)](#) et nous confirmons leurs résultats. Bien que les résultats soient très corrects avec $h = D/16$, nous conseillons d'utiliser $h = D/32$ car la solution est beaucoup moins sensible au paramétrage.

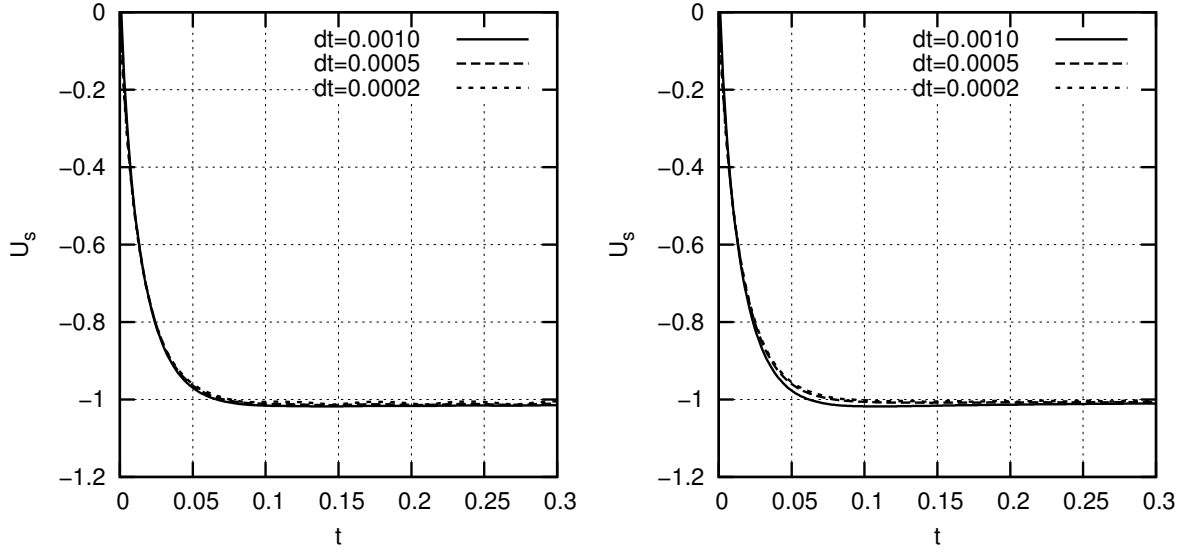


FIGURE III.11 – **Sédimentation d'une particule unique à $R_{ep} = 0.1$** : évolution temporelle de la vitesse de chute ($W = 4D$, $R_{ep} = 0.1$, $\Delta a = h/3$, $\rho_p = 1.1$, $\Delta t = 0.0005$) pour différentes discrétisations de la particule. A gauche $h = D/16$ et à droite $h = D/32$.

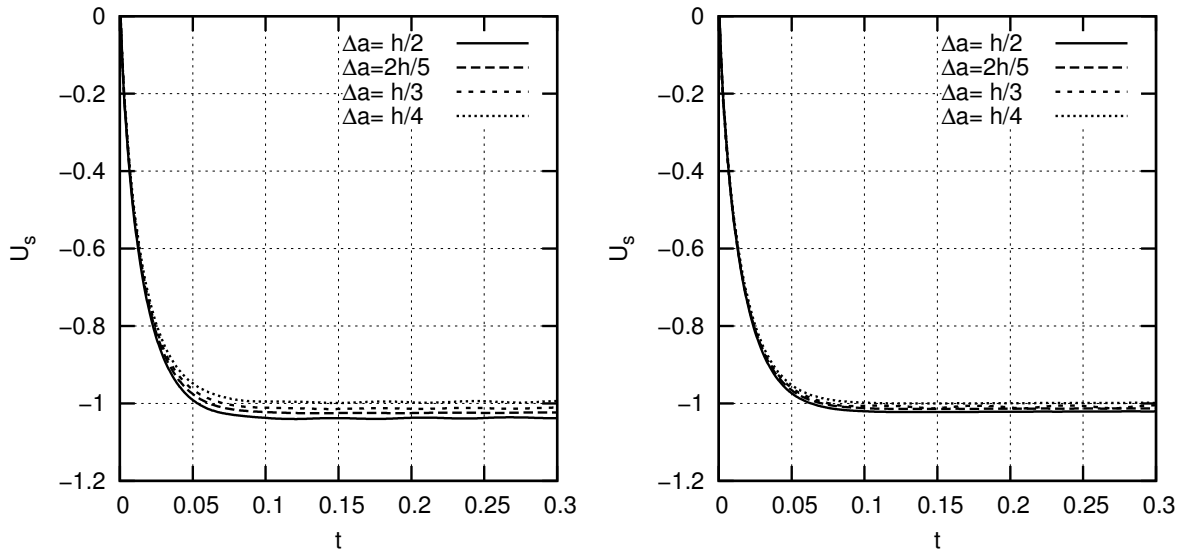


FIGURE III.12 – **Sédimentation d'une particule unique à $R_{ep} = 0.1$** : évolution temporelle de la vitesse de chute ($W = 4D$, $R_{ep} = 0.1$, $\rho_p = 1.1$, $\Delta t = 0.0005$) pour différentes distances de rétractation. A gauche $h = D/16$ et à droite $h = D/32$.

b) Sédimentation d'un disque initialement excentré ($R_{ep} = 200$).

Pour valider le code et vérifier sa convergence, nous avons réalisé un test de la sédimentation d'une particule initialement excentrée d'un diamètre par rapport au centre du domaine. Pour ce test, le nombre de Reynolds, calculé à partir de l'équation (III.9), est $R_{ep} = 200$. Les deux versions du schéma numérique sont testées. Le maillage est fixé à $h = D/32$ ($N_r = 13$) et nous

choisissons une distance de rétractation $\Delta a = h/3$. Nous faisons uniquement varier le pas de temps.

Les figures III.13 et III.14 présentent les trajectoires des particules et les vitesses pour nos différents tests. Durant sa migration vers le centre du domaine, la particule va se mettre à osciller périodiquement sur l'horizontale, à cause des détachements de vortex. Elle va terminer sa course au centre du domaine où elle va continuer d'osciller. Les vitesses de chutes ne présentent pas de différences notables. Cependant, les vitesses de translation horizontales et de rotation présentent de très fortes oscillations que l'on peut attribuer aux SFO. La convergence des résultats avec le schéma numérique M_1 est très mauvaise. Les oscillations ne sont pas présentes avec le schéma M_2 (figure III.14). Cependant, comme nous pouvions nous y attendre, la dépendance au pas de temps est visible, surtout pour $t = 0.01$. Pour les deux autres pas de temps, mis à part lors de la première transition, les amplitudes des vitesses sont très proches. Pour les trois cas, la trajectoire de la particule converge bien vers le centre du domaine à la fin des simulations.

Un maillage plus fin permet de diminuer les oscillations des efforts hydrodynamiques (Uhlmann (2005)). De plus, pour ces régimes très inertiels, il est nécessaire de mailler plus finement pour avoir une meilleure représentation de la particule. Nous avons donc relancé ces calculs avec un maillage deux fois plus fin ($h = D/64$ et $N_r = 28$). La figure III.15 présente les trajectoires et les vitesses de la particule en fonction du temps, pour M_1 . Les trajectoires présentent une bien meilleure convergence. Cependant, les oscillations sur la vitesse de rotation ont diminué mais sont encore non-négligeables. En comparaison avec ce cas, nous avons tracé les mêmes courbes pour M_2 . Les résultats présentent une très bonne convergence sur les trajectoires et les vitesses de translation. On pourra tout de même noter une différence non-négligeable sur la vitesse de rotation ω lors de la première transition. Cependant, lorsque la particule atteint le centre du domaine, l'amplitude de ω pour les différents cas ne présente pas de différences significatives. Par conséquent, pour les régimes très inertiels, la méthode M_2 semble beaucoup plus adéquate pour simuler les écoulements particuliers. La première méthode peut présenter des oscillations sur les efforts hydrodynamiques. Ces oscillations peuvent encore être réduites en utilisant un maillage plus fin. Cependant, les temps de calcul deviennent trop importants. Nous allons maintenant confronter notre méthode à d'autres résultats numériques issus de la littérature .

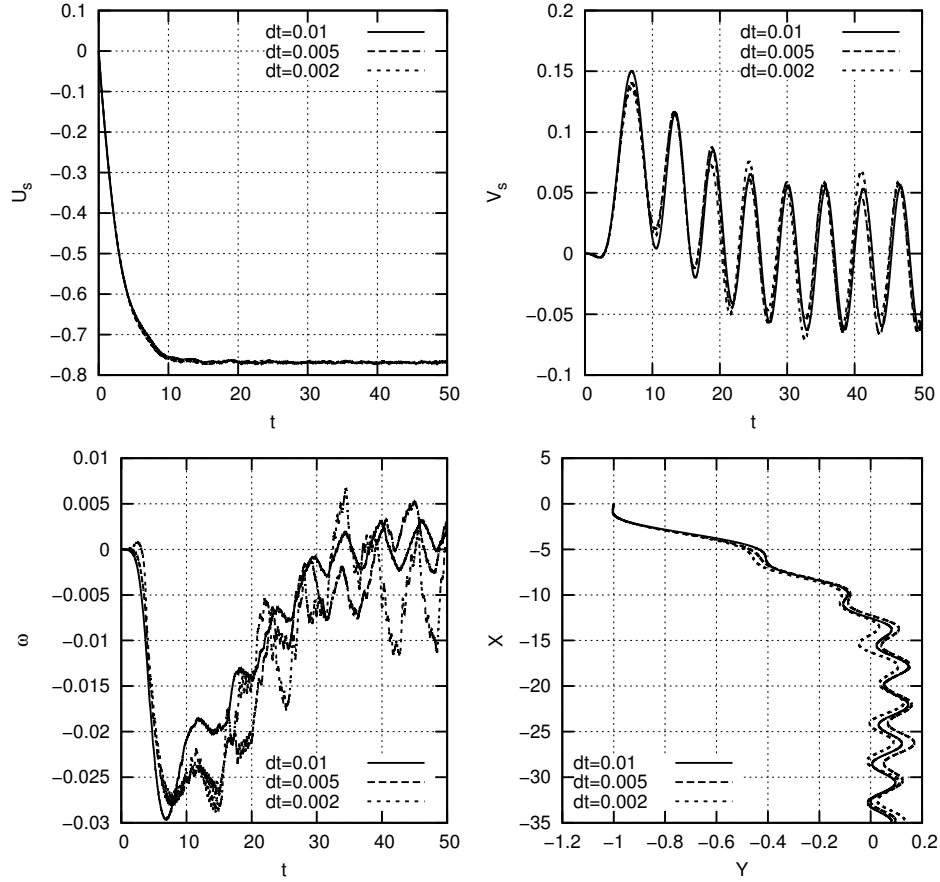


FIGURE III.13 – **Sédimentation d'une particule initialement excentrée** ($R_{ep} = 200$, schéma numérique M_1 , $h = D/32$) : trajectoire et variation temporelle des vitesses (U_s , V_s et ω) de la particule pour différents pas de temps.

c) Sédimentation d'un disque initialement excentré ($6.93 \leq R_{ep} \leq 693.6$).

Il n'existe pas de solutions analytiques ou de résultats expérimentaux applicables en deux dimensions à des régimes inertiels ($R_{ep} \geq 1$). Nous allons donc comparer nos résultats avec les résultats numériques de [Feng et al. \(1994\)](#), [Yu et al. \(2002\)](#) et [Wachs \(2009\)](#) pour le cas d'une particule initialement excentrée d'un diamètre ($Y/D = 1$) par rapport au centre du domaine. Pour cette étude, nous faisons varier la masse volumique. Le nombre de Reynolds est calculé à partir de la vitesse U_c donnée par la relation (III.9) et $6.93 \leq R_{ep} \leq 693.6$. Nous proposons dans un premier temps de faire une comparaison sur les coefficients de traînée C_D qui sont obtenus à partir de la relation ([Wachs \(2009\)](#)) :

$$C_D = \frac{2F_D}{\rho_f D U_s^2} = \frac{1}{U_s^{*2}} \quad (\text{III.11})$$

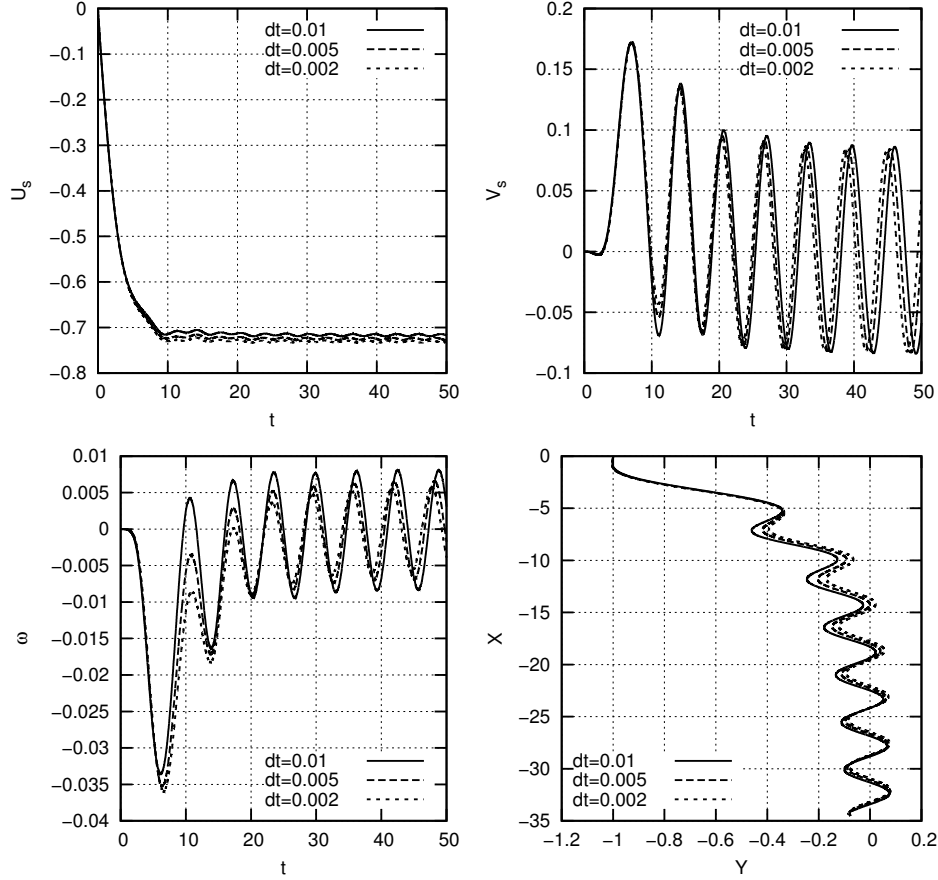


FIGURE III.14 – **Sédimentation d'une particule initialement excentrée** ($R_{ep} = 200$, schéma numérique M_2 , $h = D/32$) : trajectoire et variation temporelle des vitesses (U_s , V_s et ω) de la particule pour différents pas de temps.

avec U_s^* la vitesse terminale de chute U_s adimensionnée par la vitesse caractéristique U_c . Nous définissons aussi le nombre de Reynolds terminal de chute R_{eT} qui est égal à :

$$R_{eT} = \frac{U_s D}{\nu} = R_{ep} U_s^* \quad (\text{III.12})$$

Les paramètres numériques sont présentés dans la table III.4. Pour ce test, le maillage est fixé à $h = 1/32$ (discrétisation de la particule $N_r = 13$) pour les cas les moins inertiels ($6.93 \leq R_{ep} \leq 138.7$) et $h = 1/64$ (discrétisation de la particule $N_r = 28$) pour les deux cas les plus inertiels ($R_{ep} = 346.8$ et 696.6). La distance de rétractation est fixée à $\Delta a = h/3$. Les deux versions du schéma numérique sont testées. La table III.5 présente une comparaison entre nos coefficients de traînée et ceux de [Wachs \(2009\)](#) et [Yu et al. \(2002\)](#). Quelle que soit la méthode utilisée, les coefficients de traînée sont en bon accord avec ces deux publications. En prenant

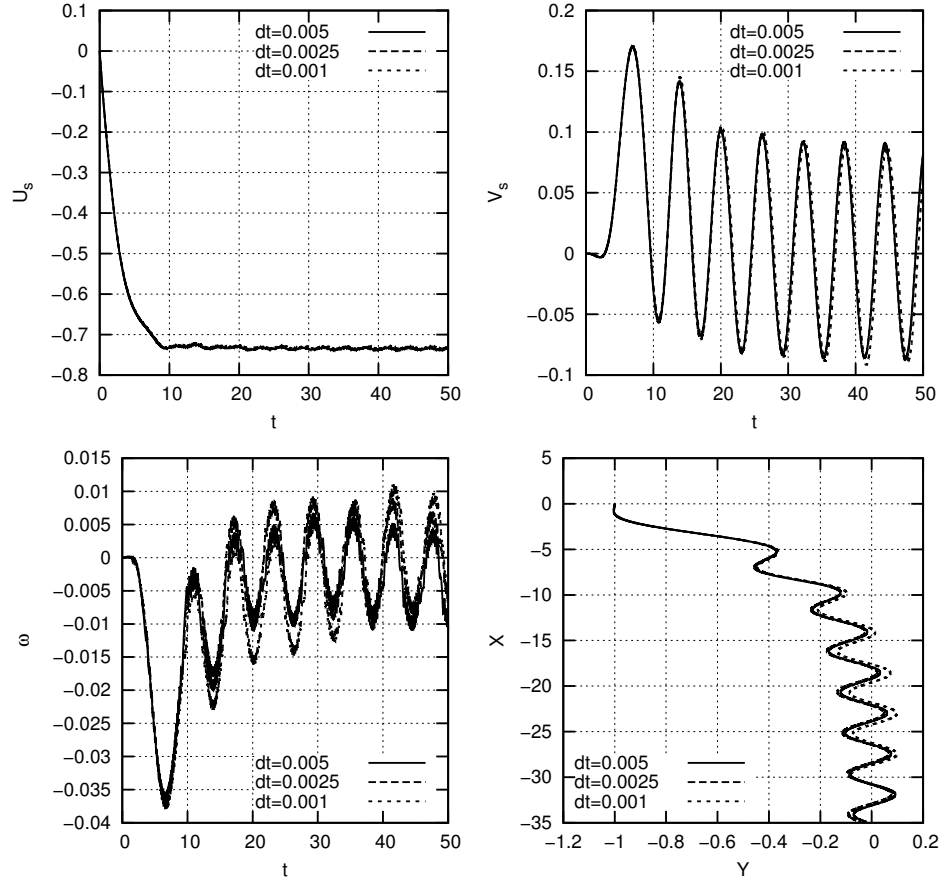


FIGURE III.15 – **Sédimentation d'une particule initialement excentrée** ($R_{ep} = 200$, schéma numérique M_1 , $h = D/64$) : trajectoire et variation temporelle des vitesses (U_s , V_s et ω) de la particule pour différents pas de temps.

le coefficient de traînée de [Wachs \(2009\)](#) comme référence, l'erreur maximale pour M_1 est de 9.5% pour $R_{ep} = 138.7$. Pour M_2 , l'erreur maximale est d'environ 4% pour $R_{ep} = 696.6$.

[Feng et al. \(1994\)](#) distinguent cinq régimes d'écoulement :

1. Régime A (apériodique) : la particule converge de façon monotone vers le centre du domaine puis chute à vitesse constante ($0.1 < R_{eT} < 2$).
2. Régime B : oscillations rapidement amorties autour de l'axe du domaine ($2 < R_{eT} < R_{ecrit}$).
3. Régime C : faibles oscillations peu amorties autour de l'axe du domaine ($R_{ecrit} < R_{eT} < 60$).
4. Régime D : oscillations périodiques autour du centre du domaine ($60 < R_{eT} < 300$).
5. Régime E : oscillations irrégulières ($R_{ep} > 300$).

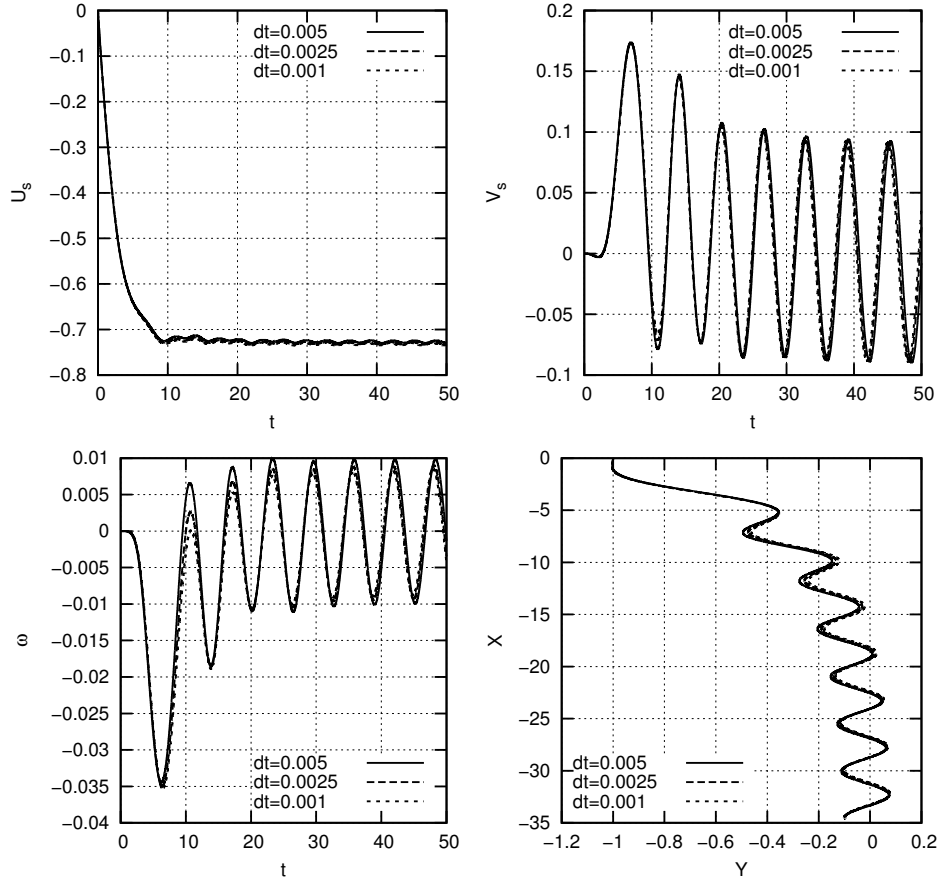


FIGURE III.16 – **Sédimentation d'une particule initialement excentrée** ($R_{ep} = 200$, schéma numérique M_2 , $h = D/64$) : trajectoire et variation temporelle des vitesses (U_s , V_s et ω) de la particule pour différents pas de temps.

Ici R_{ecrit} varie selon les auteurs ($R_{ecrit} = 50.6$ pour [Feng et al. \(1994\)](#), $R_{ecrit} = 42.3$ pour [Wachs \(2009\)](#)). Le régime E n'est pas présent dans les simulations de [Yu et al. \(2002\)](#) et de [Wachs \(2009\)](#). Seul le régime D est présent.

Nous avons tenté de retrouver les régimes décrits ci-dessus. Ces différents régimes dépendent de la nature de l'écoulement à l'aval du disque. La figure III.17 présente les contours de vorticité pour les différents cas obtenus avec la méthode M_1 . Il sont en très bon accord avec les résultats de [Yu et al. \(2002\)](#) et de [Wachs \(2009\)](#). La figure III.18 présente une comparaison entre nos trajectoires et celles de [Yu et al. \(2002\)](#) et de [Wachs \(2009\)](#). On peut voir qu'il n'existe pas de différence substantielle tant que $R_{ep} < 138.7$. On notera une légère différence entre les méthodes M_1 et M_2 pour $R_{ep} = 69.36$: la trajectoire calculée avec M_1 présente de faibles oscillations autour de l'axe du domaine (Régime C comme [Yu et al. \(2002\)](#) et [Wachs \(2009\)](#)), tandis que celle obtenue avec M_2 est toujours dans le régime B. Ceci est très certainement dû à ce que

TABLE III.4 – **Sédimentation d'une particule excentrée** : paramètres physiques et numériques pour nos simulations

ρ_r	1.0002	1.002	1.01	1.02	1.03	1.08	1.5	3
Re_p	6.93	21.94	49.04	69.36	84.95	138.7	346.8	696.6
Δt	0.002	0.004	0.005	0.0055	0.006	0.008	0.0045	0.005

 TABLE III.5 – **Sédimentation d'une particule excentrée** : coefficients de traînée et nombre de Reynolds terminal de chute obtenus avec les deux schémas numériques M_1 et M_2 (Cf. page 28). Les résultats sont comparés avec ceux de [Wachs \(2009\)](#) et de [Yu et al. \(2002\)](#).

Re_p	6.93	21.94	49.04	69.36	84.95	138.7	346.8	696.6
$C_D M_1$	42.01	6.49	3.17	2.57	2.29	1.89	1.77	1.75
$C_D M_2$	41.09	6.34	3.18	2.60	2.36	1.99	1.77	1.83
C_D Wachs (2009)	40.09	6.37	3.26	2.68	2.446	2.09	1.785	1.764
C_D Yu et al. (2002)	38.10	6.09		2.59	2.37	2.25		1.79
$Re_T M_1$	1.07	8.61	27.54	43.26	56.14	100.9	260.67	526.56
$Re_T M_2$	1.08	8.71	27.46	43.00	55.3	98.19	257	521.93
Re_T Wachs (2009)	1.09	8.69	27.16	42.30	54.3	96.02	259.5	522
Re_T Yu et al. (2002)	1.12	8.89		43.1	55.3	96.5		518

le Reynolds terminal de chute est très proche de Re_{crit} ($Re_T = 43.26$ avec M_1 et $Re_T = 43$ avec M_2), de sorte que des différences, même faibles, entre les divers schémas peuvent avoir des conséquences importantes sur les trajectoires.

Les deux derniers régimes d'écoulements sont très inertiels et il y a une grande différence entre nos trajectoires et ceux de la littérature lors de la transition. Cependant cette différence disparaît dès que la particule a atteint son régime asymptotique aux temps longs. Seul le régime D est présent dans nos résultats. Ceci est en accord avec les résultats de [Yu et al. \(2002\)](#) et [Wachs \(2009\)](#) mais contredit ceux de [Feng et al. \(1994\)](#).

Les figures [III.19](#) et [III.20](#) présentent la vitesse horizontale V_s et la vitesse de rotation ω en fonction du temps pour les deux schémas M_1 et M_2 . Les vitesses horizontales des deux méthodes ne présentent pas de différences majeures. On notera tout de même une légère différence sur l'amplitude de la vitesse lors de l'apparition de vortex dans le sillage de la particule. La vitesse de rotation ne présente pas de différence pour les nombre de Reynolds $Re_p \leq 21.94$. Cependant, pour des nombres de Reynolds plus importants, la vitesse de rotation va rapidement se dégrader. Des oscillations parasites apparaissent avec la méthode M_1 , identiques à celles rencontrées pour le cas $Re_p = 200$. Les solutions obtenues avec la méthode M_2 ne présentent pas

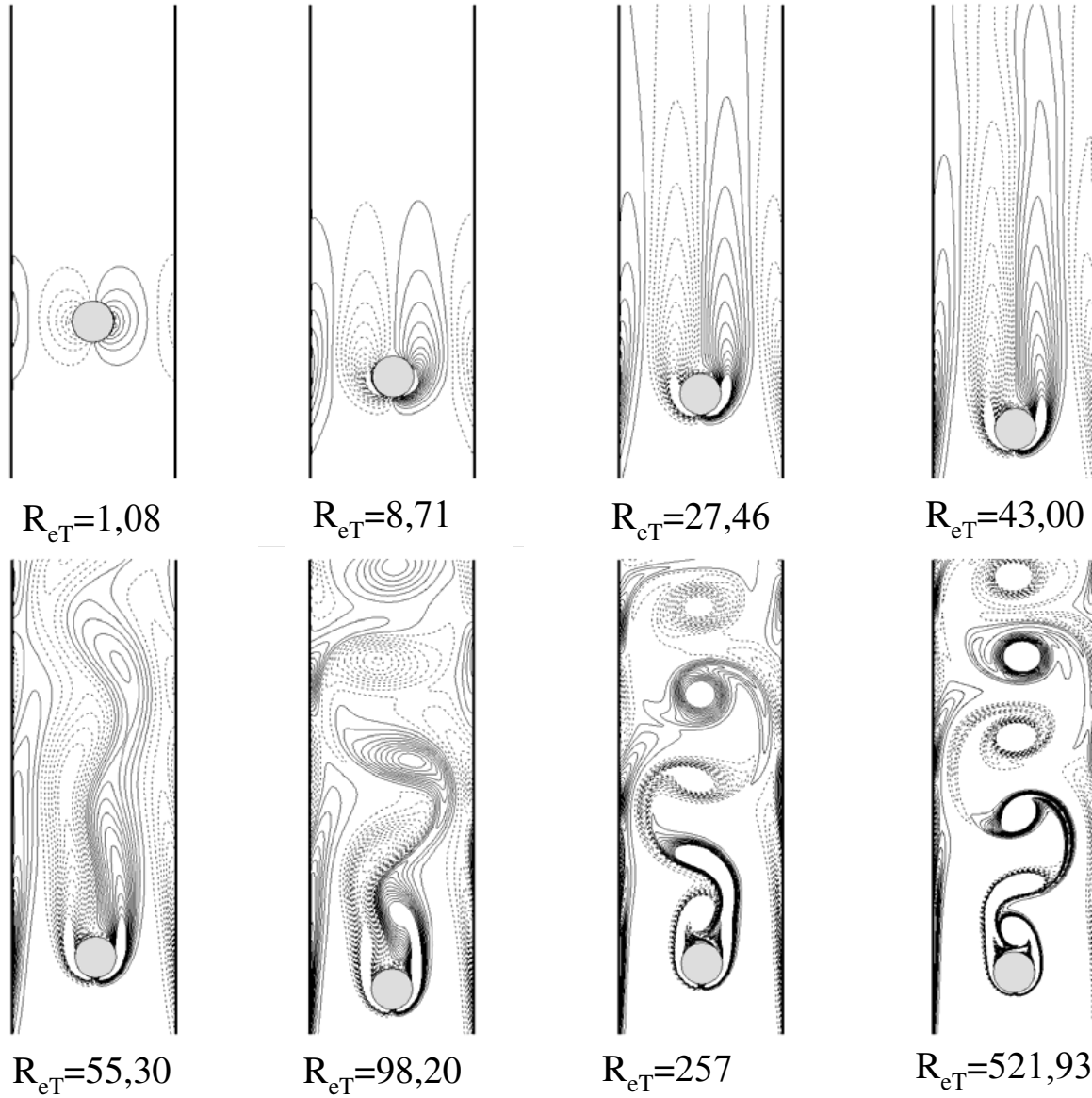


FIGURE III.17 – **Sédimentation d'un disque excentré** : contours de vorticité (vingt-six iso-contours équirépartis entre -2 et $+2$, les pointillées représentent les isovaleurs négatives) pour les différents régimes d'écoulement. Les résultats obtenus avec la méthode M_1 sont présentés.

ce type d'oscillations.

Ainsi, ces simulations montrent que la méthode M_1 est adaptée aux petits nombres de Reynolds alors que M_2 est plus adaptée aux régimes inertiels.

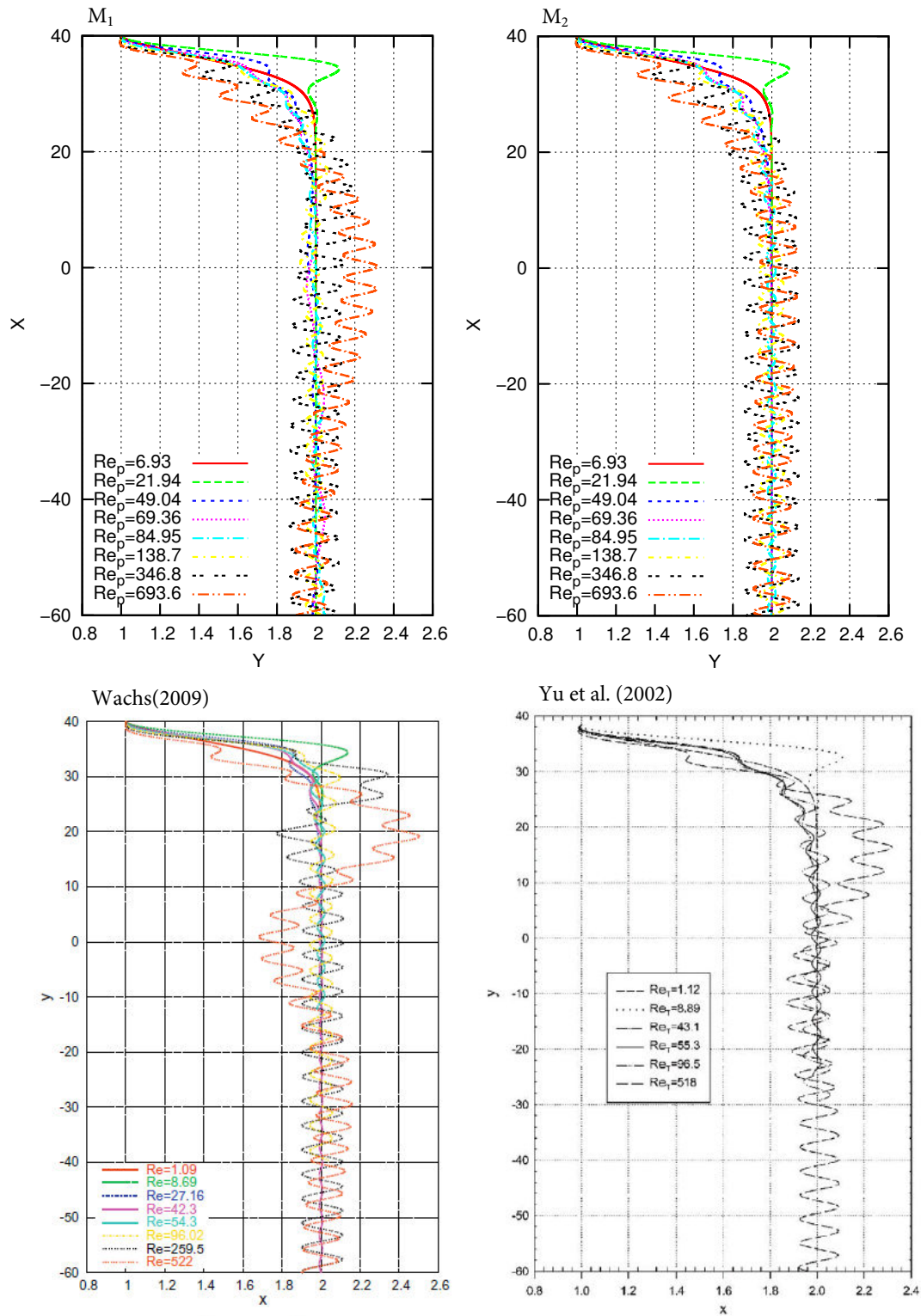


FIGURE III.18 – **Sédimentation d'un disque excentré** : trajectoires des particules obtenues avec les deux versions du schéma numérique et celles de *Wachs (2009)* et de *Yu et al. (2002)*. Les trajectoires sont quasiment identiques sauf pour les deux cas les plus inertiels.

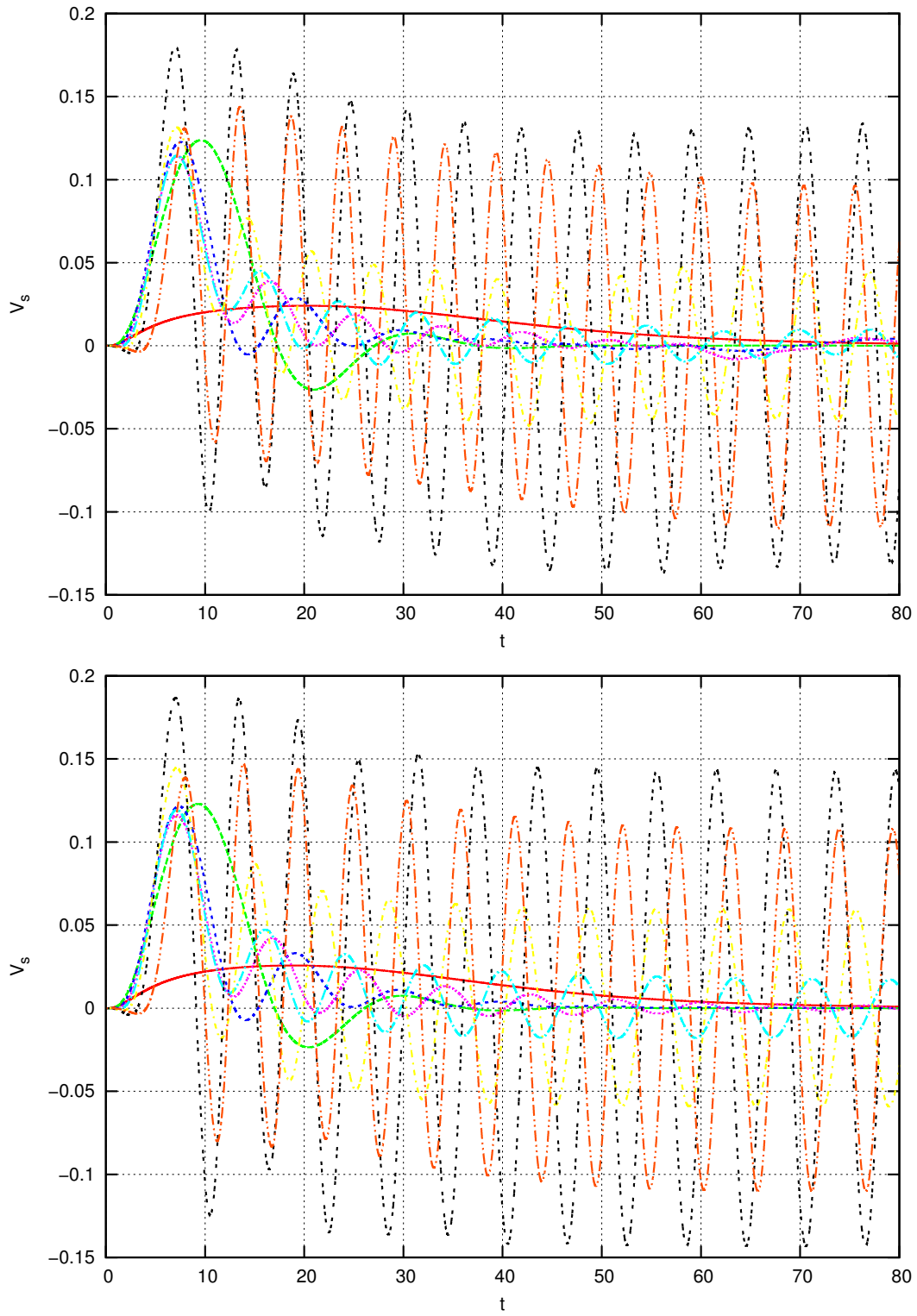


FIGURE III.19 – **Sédimentation d'un disque excentré** : vitesse horizontale V_s des particules obtenues avec les deux versions du schéma numérique.

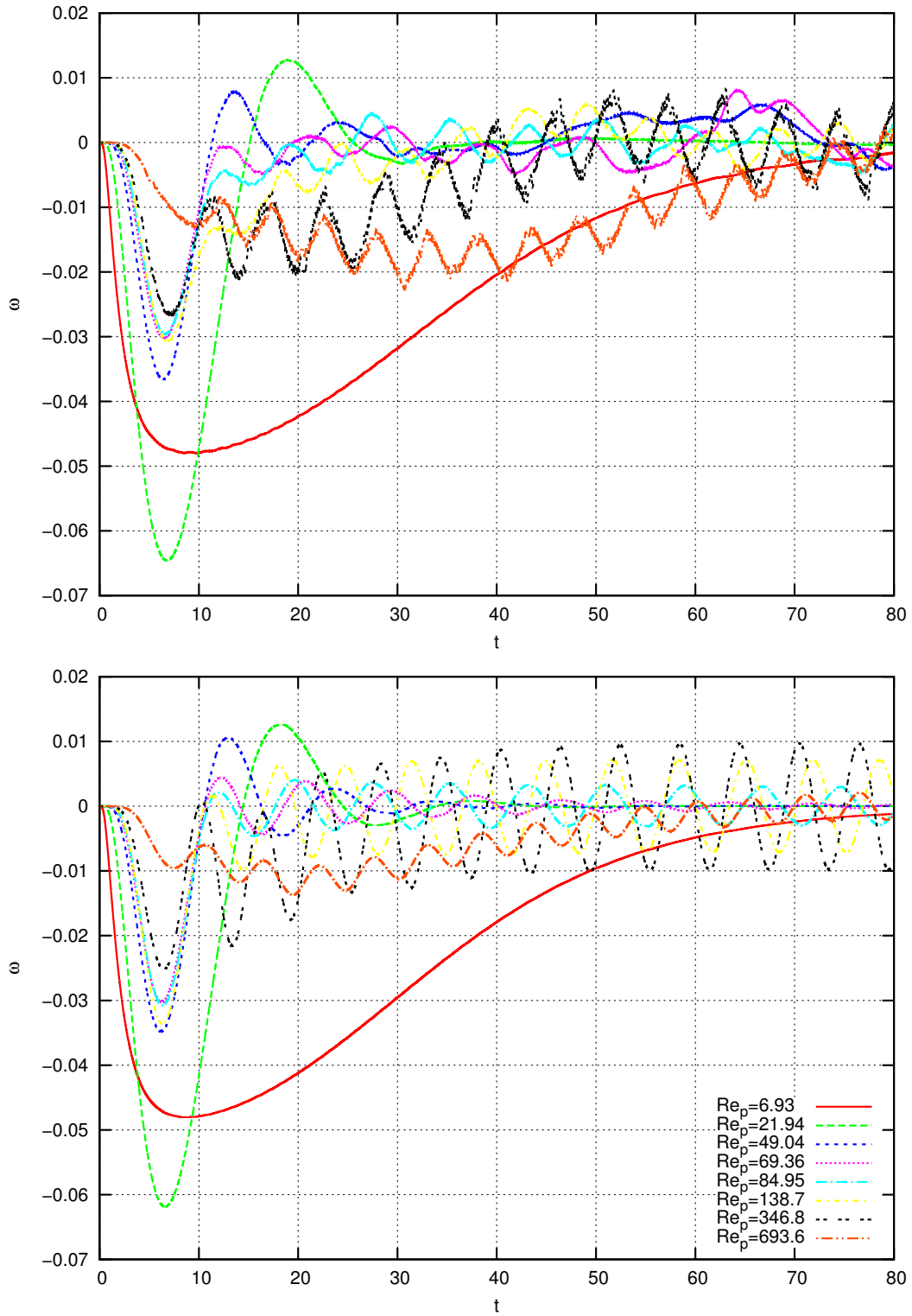


FIGURE III.20 – **Sédimentation d'un disque excentré** : vitesse de rotation ω des particules obtenue avec les deux versions du schéma numérique.

III.3 Sédimentation d'un doublet de particules

Nous nous intéressons maintenant aux interactions hydrodynamiques et interparticulaires. Afin d'étudier ces phénomènes, nous avons réalisé des tests de sédimentation pour deux particules circulaires en milieu confiné pour différents régimes d'écoulement. Pour tous les cas qui sont présentés, la fonction d'interpolation de [Roma et al. \(1999\)](#) est utilisée et la distance de rétractation est fixée à $\Delta a = h/3$. Nous utilisons le schéma M_1 pour les tests à petit nombre de Reynolds et M_2 pour les plus hauts nombres de Reynolds.

III.3.1 Sédimentation de deux particules à bas nombre de Reynolds

Nous voulons montrer que le modèle est capable de représenter les structures rencontrées expérimentalement. La masse volumique de la particule est égale à $\rho_r = 1.1$. Dans le premier cas, le doublet de particules est placé verticalement à mi-distance du centre du domaine et leurs centres sont distants de deux diamètres. Ici, le confinement est fixé à $W/D = 8$ et le domaine, totalement fermé, est de longueur $160D$. Le pas de temps est fixé à 0.001. La taille de la maille est fixée à $h = 1/32$, et $Re_p = 2$. La particule est discrétisée par $N_r = 13$ cercles. Les grandeurs sont adimensionnées par ρ_f , D , U_c , avec U_c donnée par la vitesse d'[Happel et Brenner \(1965\)](#) (équation (III.6)).

La figure III.21 présente l'évolution des particules au cours du temps. On nomme "meneuse", la particule qui se trouve initialement le plus bas. L'autre particule est la particule "suiveuse". Les particules vont tout d'abord se rapprocher l'une de l'autre sans jamais se toucher, puis elles basculent pour tendre vers une position horizontale éphémère. Elles rejoindront ensuite une position oblique et oscillante qu'elles garderont aux temps longs. Ces comportements sont en accord qualitatif avec [Feng et al. \(1994\)](#).

Afin d'analyser l'influence du maillage sur ce comportement, nous avons refait cette simulation avec deux maillages différents $m1$ ($h = D/16$) et $m2$ ($h = D/32$). La figure III.22 présente l'évolution temporelle des caractéristiques cinématiques des particules dans les deux cas. Il apparaît que pour le maillage grossier, les solutions peuvent présenter des oscillations numériques à hautes fréquences. Comme pour une particule unique, le maillage le plus fin est préférable.

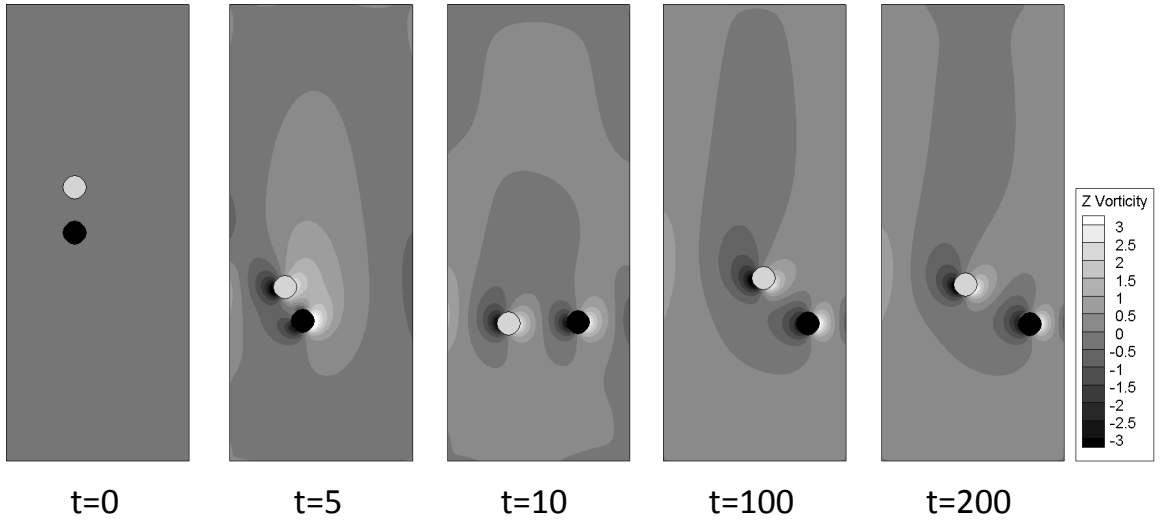


FIGURE III.21 – **Sédimentation d'un doublet de particule à bas R_{ep}** : champs de vorticités pour deux particules qui chutent dans un milieu confiné pour $R_{ep} = 2$ et $W/D = 8$

III.3.2 Sédimentation de deux particules sans collisions pour des régimes inertiels

Ce deuxième cas test fait intervenir deux particules de même taille mais de masse volumique différente. Il a été initié par [Uhlmann \(2005\)](#). Dans cette réalisation, il n'y a pas de contact entre les particules durant le processus de sédimentation et il n'est donc pas nécessaire d'introduire de stratégie pour modéliser les collisions. Le système d'unités utilisé est celui d'[Uhlmann \(2005\)](#), afin de permettre une comparaison directe avec cet auteur. Le domaine de calcul est $[0, 10] \times [-1, 1]$. Le nombre de Reynolds terminal de chute est $R_{eT} = 280$. La masse volumique est égale à 1.5 pour la particule que l'on nommera P_1 et à 1.25 pour P_2 . Elles sont placées à $(0.8, 0.13)$ et $(1.2, -0.13)$, respectivement. Pour ce test, la gravité est vers la droite. La taille de la maille fluide est $h = 1/200$. Les particules sont discrétisées par $N_r = 17$. Le pas de temps est fixé à 0.001. Ce cas test a été réalisé, dans un premier temps, avec le schéma M_1 et les résultats montrent de très fortes oscillations numériques. Nous présentons uniquement les résultats obtenus avec le schéma numérique M_2 , mieux adapté aux régimes inertiels.

La figure [III.23](#) présente l'évolution des particules et du champ de vorticité au cours du temps. Le détachement tourbillonnaire est clairement visible. Durant le processus de sédimentation la particule la plus lourde dépasse la plus légère sans la toucher. La figure [III.24](#) présente une comparaison avec les résultats d'[Uhlmann \(2005\)](#). Nous observons un excellent accord

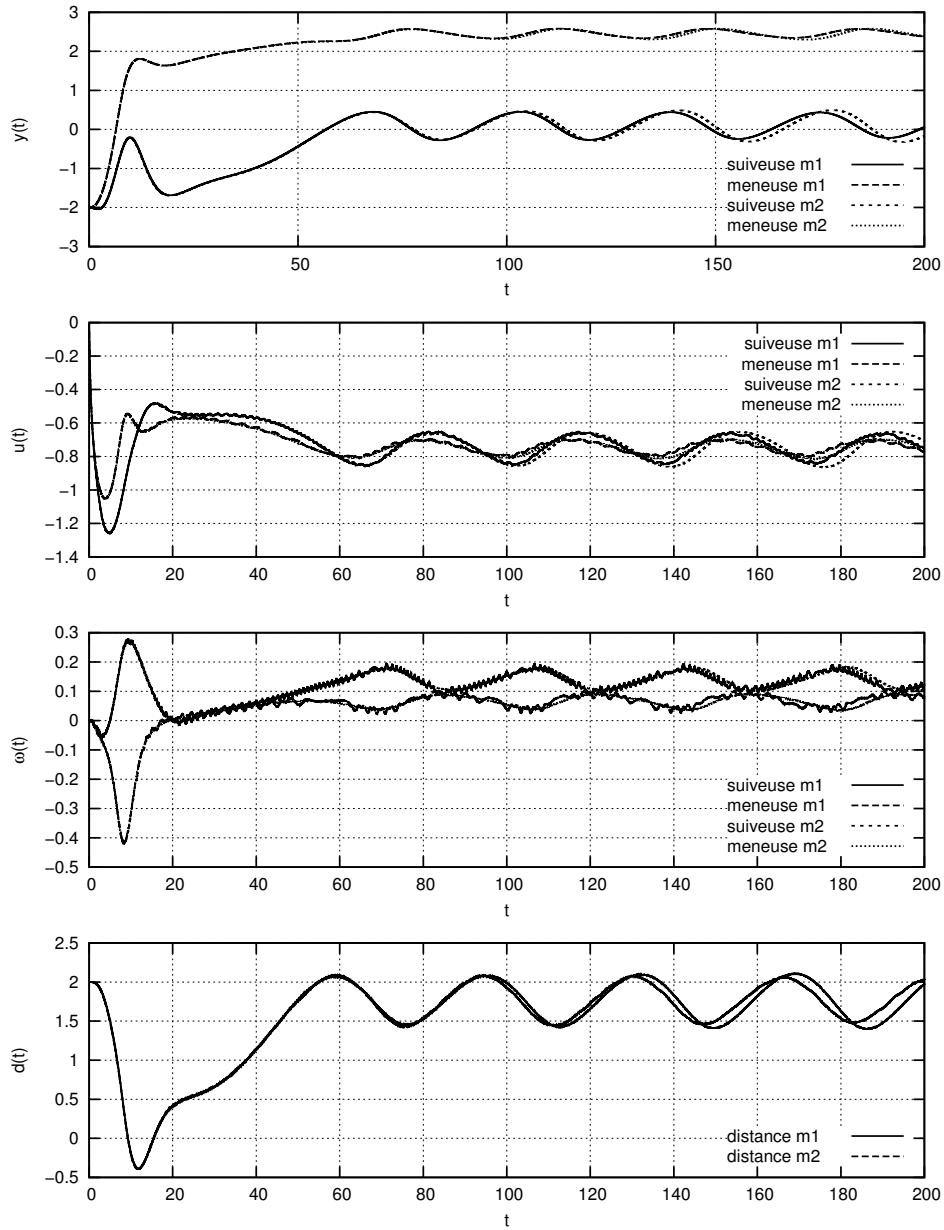


FIGURE III.22 – **Sédimentation d'un doublet de particule à bas R_{ep}** : évolution temporelle, de haut en bas, de la position latérale des particules, de leur vitesse de chute, de leur vitesse de rotation et de leur distance. Le maillage m_2 ($h = D/32$) permet de réduire drastiquement les oscillations numériques.

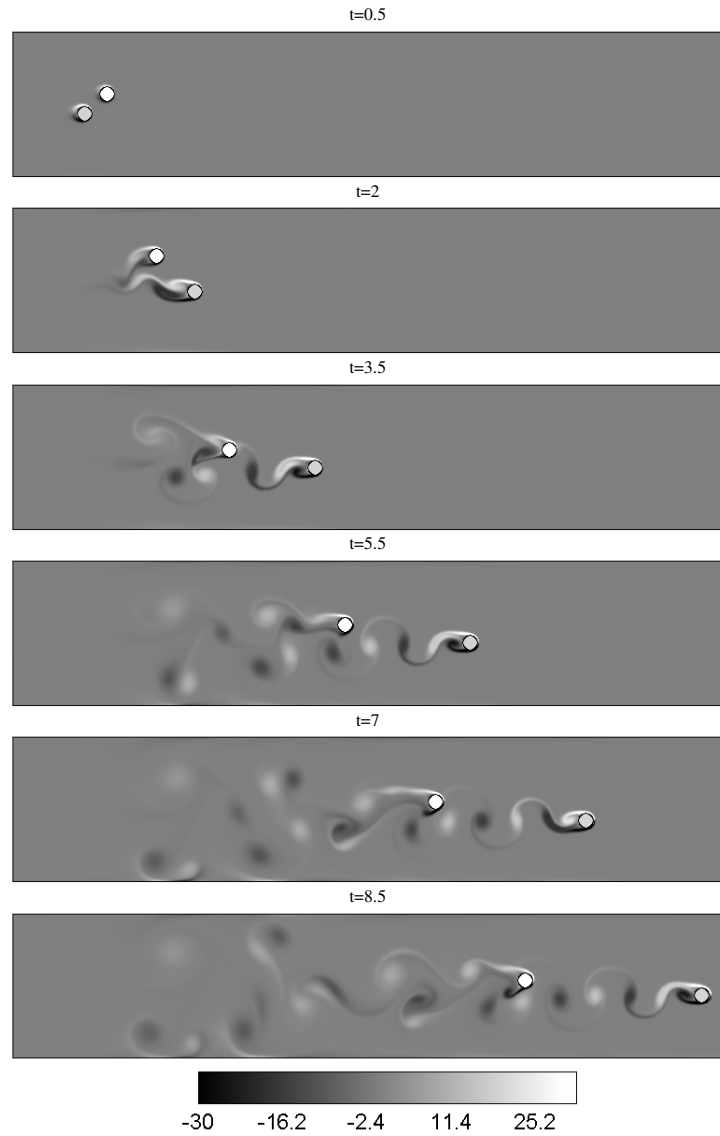


FIGURE III.23 – **Sédimentation de deux particules à haut nombre de Reynolds** : évolution temporelle des positions et du champ de vorticité pour deux particules de masse volumique différente chutant dans un milieu confiné. La particule grise est la plus lourde (P_1), la blanche est la particule P_2 .

quantitatif.

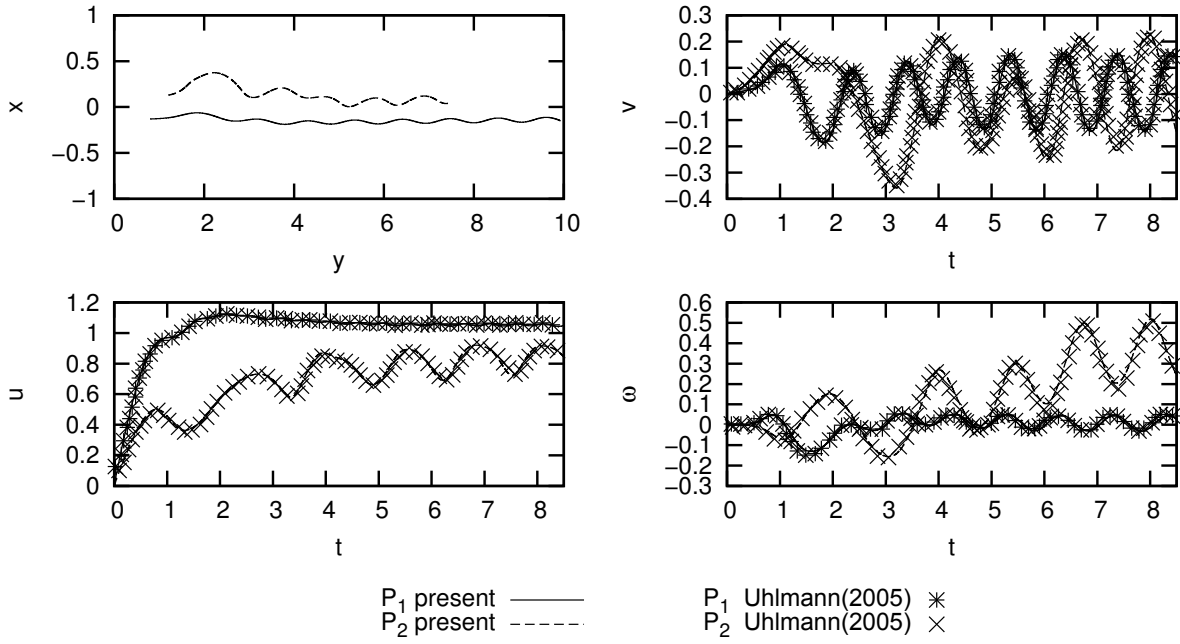


FIGURE III.24 – **Sédimentation de deux particules à haut nombre de Reynolds** : trajectoires et évolution temporelle des positions et des vitesses de deux particules de masse volumique différente qui chutent dans un milieu confiné. Les résultats sont comparés à ceux d’[Uhlmann \(2005\)](#).

III.3.3 Drafting Kissing and Tumbling

Le phénomène de ‘Drafting, Kissing and Tumbling’ (DKT) est un cas test classique lors de la validation de modèles numériques complètement résolus ([Glowinski et al. \(2001\)](#), [Uhlmann \(2005\)](#)), qui a été étudié expérimentalement par [Fortes et al. \(1987\)](#).

Le système d’unités utilisé dans cette section est celui d’[Uhlmann \(2005\)](#), afin de permettre une comparaison directe avec cet auteur. Le domaine de calcul est $[6, 0] \times [-1, 1]$. Contrairement au cas précédent, les particules vont entrer en collision suite à un effet d’aspiration. Les paramètres utilisés pour le modèle de contact sont $\epsilon = 1.10^{-7}$ et une distance de sécurité est égale à $3h$ (Cf. [II.49](#) page 33). Les particules sont de même diamètre ($D = 0.25$) et la même masse volumique ($\rho_p = 1.5$). La gravité est vers la droite. Leurs positions initiales sont $(1, 0.001)$ pour la particule, notée P_1 et $(1.5, -0.001)$, notée P_2 . Ce cas correspond à celui d’[Uhlmann \(2005\)](#) dans lequel les particules sont légèrement décalées pour provoquer le DKT³. La taille de la maille fluide est égale à $h = 1/256$, soit $D/h = 64$. Le pas de temps est fixé à 0.00005.

La figure [III.25](#) présente l’évolution temporelle des trajectoires et des vitesses des parti-

3. Lorsque les particules sont alignées suivant l’horizontale, comme pour [Glowinski et al. \(1999\)](#) ou [Feng et al. \(1994\)](#), le DKT n’apparaît pas, sauf si le maillage est dissymétrique.

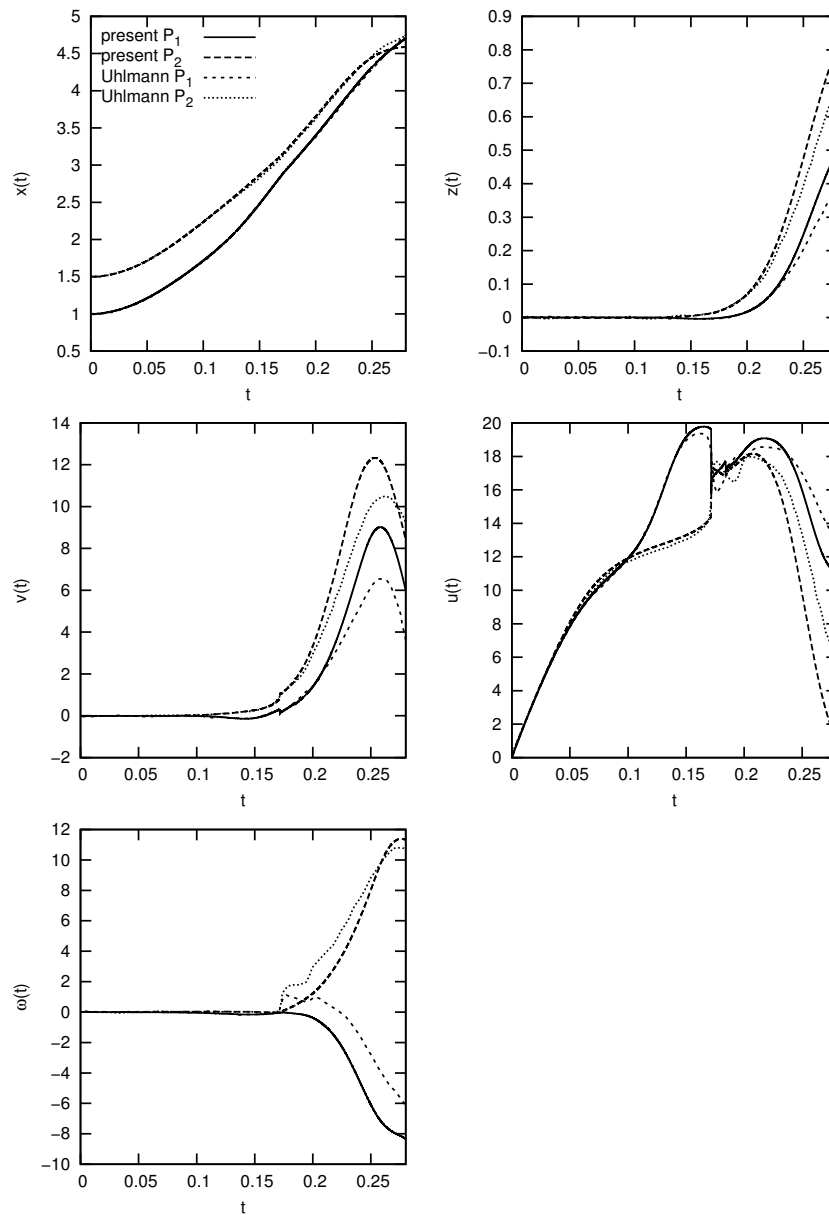


FIGURE III.25 – **Sédimentation d'un doublet de particules avec DKT** : évolutions temporelles des positions et des vitesses des particules lors du phénomène de 'Drafting, Kissing and Tumbling'. Les résultats sont comparés avec ceux d'[Uhlmann \(2005\)](#).

cules. Au début des simulations, la particule suiveuse accélère dans le sillage de la particule meneuse. Celles-ci vont ensuite entrer en contact, puis basculer pour ensuite s'écarter l'une de l'autre. Qualitativement, le phénomène de DKT est bien reproduit (Cf. [Fortes et al. \(1987\)](#)). La comparaison quantitative avec les résultats d'[Uhlmann \(2005\)](#) est moins bonne que dans le cas précédent. Avant le contact entre les particules, les résultats présentent une bonne concordance tant que le modèle de contact n'entre pas en jeu. Comme le modèle de contact utilisé par cet auteur est le même que le nôtre, ces différences sont à chercher dans les paramètres numériques. En effet, le paramètre de rétractation, la distance entre les points colocalisés ou encore le schéma numérique sont légèrement différents des nôtres. Les résultats sont tout de même comparables.

III.4 Sédimentation d'un grand nombre de particules

Nous nous intéressons maintenant à la sédimentation de 504 particules dans un milieu confiné. Le système d'unités utilisé est celui de [Glowinski et al. \(1999\)](#), afin de permettre une comparaison directe avec cet auteur. Le domaine de calcul est $[-1 : 1] \times [-1 : 1]$. Les disques ont un diamètre de 0.0625 et une masse volumique de 1.01. Les particules sont initialement placées comme sur la figure [III.26](#) (28 particules suivant l'horizontale et de 18 suivant la verticale). La première rangée de particules est décalée de $3D/8$ par rapport à la paroi du dessus. L'écart entre chaque particules est fixé à $D/8$. L'écart de la première particule avec le mur gauche est égal à $3D/8$ pour les lignes impaires et à $2D/8$ pour les lignes paires. Au départ de la simulation, le fluide et les particules sont au repos. Le maillage comporte 512×512 noeuds. Les particules sont discrétisées par $N_r = 7$ cercles. Le pas de temps est fixé à 0.0005. Pour le modèle de contact, la zone de sécurité est égale à $1.5h$ et ϵ est égal à 8.15×10^{-5} . Le nombre de Reynolds étant petit, les simulations sont réalisées avec la méthode M_1 . Les figures [III.26](#) - [III.34](#) présentent l'évolution du phénomène de sédimentation. Lors des trois premiers instants, les particules commencent à sédimenter. Les plus proches des murs sont ralenties par la présence du mur. Des deux coté du domaine, une partie des particules commence à chuter plus rapidement. Le contre-écoulement engendré par le déplacement de ces particules, laisse les particules se trouvant au centre du domaine en suspension. Des vortex vont alors se créer au voisinage des parois latérales et au centre du domaine. Ce processus s'apparente à une instabilité de Rayleigh-Taylor ([Glowinski et al. \(1999\)](#)). Le comportement des particules est très semblable à celui simulé par [Glowinski](#)

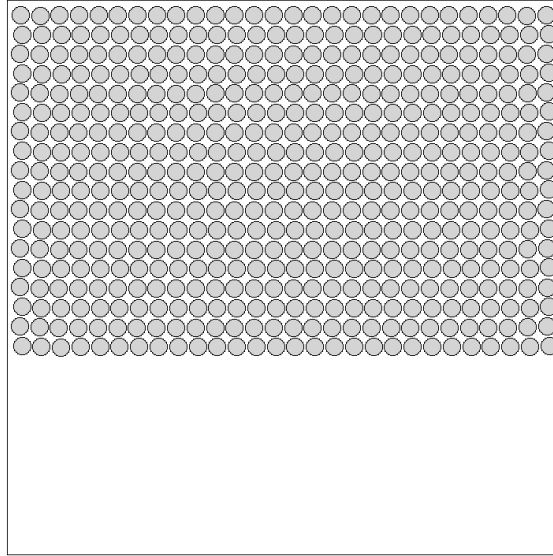


FIGURE III.26 – Sédimentation de 504 particules dans un domaine confiné : $t=0$

et al. (1999) et *Feng et Michaelides* (2004). On notera que pour *Glowinski et al.* (1999), les particules sont toutes posées sur le fond à $t = 24$. Comme pour le cas précédent, cela vient très certainement de la différence des paramètres du modèle de contact.

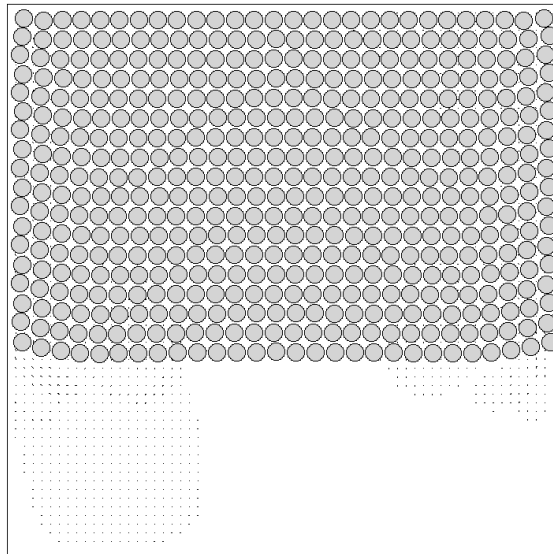


FIGURE III.27 – Sédimentation de 504 particules dans un domaine confiné : $t=1$.

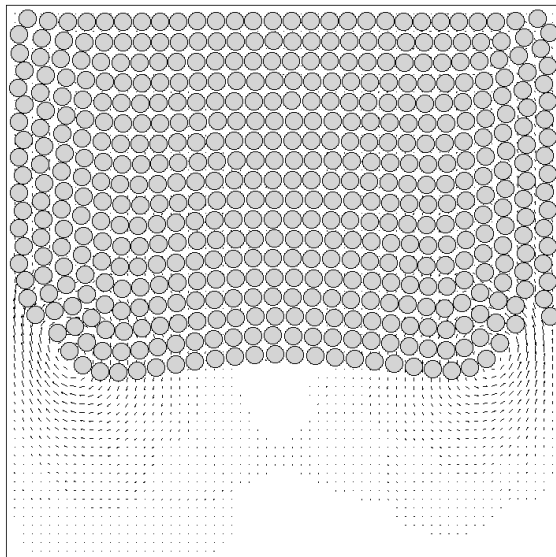


FIGURE III.28 – Sédimentation de 504 particules dans un domaine confiné : $t=2$.

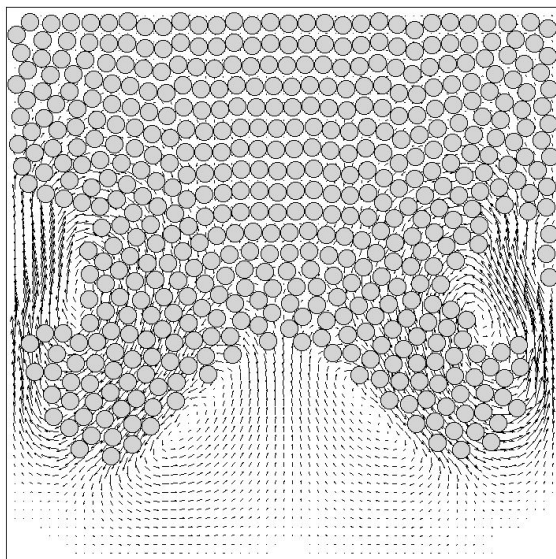
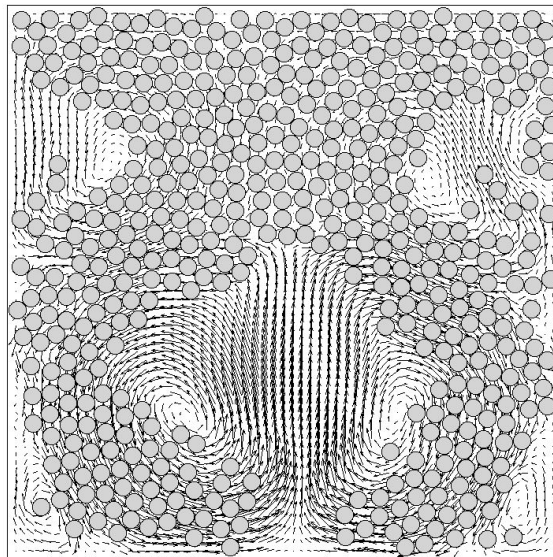
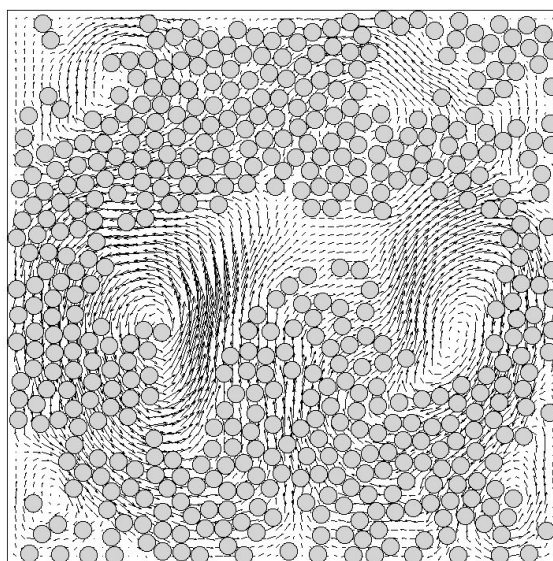


FIGURE III.29 – Sédimentation de 504 particules dans un domaine confiné : $t=3$.

III.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons testé notre schéma numérique, dans ses deux versions, à partir de différents cas de validation. Dans le cas de l'écoulement autour d'un disque fixe, les efforts hydrodynamiques obtenus sont en bon accord avec ceux issus de la littérature quelle que soit la version utilisée. Le cas du cylindre oscillant fait apparaître des oscillations numériques dans les efforts hydrodynamiques, caractéristiques des méthodes de domaines fictifs. Les résultats montrent clairement que la fonction d'interpolation chapeau ne fournit pas des résultats accep-

FIGURE III.30 – Sédimentation de 504 particules dans un domaine confiné : $t=4$.FIGURE III.31 – Sédimentation de 504 particules dans un domaine confiné : $t=5$.

tables. La fonction de [Roma et al. \(1999\)](#) permet de réduire substantiellement les oscillations. De plus, la deuxième version du schéma numérique (voir page [II.40](#)) donne de meilleurs résultats pour ce cas test, car elle conduit à une pression continue sur le contour. Les cas test de sédimentation ont permis de confirmer que la première version du code est très adaptée aux écoulements à bas nombre de Reynolds particulaire. Par contre, pour des régimes assez inertiels, des oscillations numériques apparaissent et la deuxième version du code de calcul est bien plus adaptée. La sédimentation d'un doublet de particules confirme cette observation. Enfin, nous

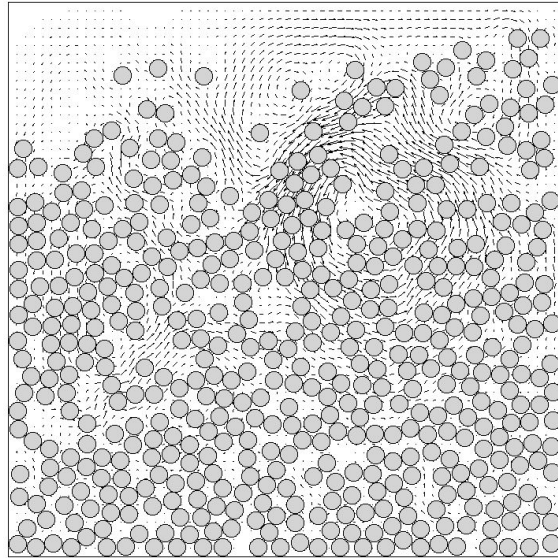


FIGURE III.32 – Sédimentation de 504 particules dans un domaine confiné : $t=8$.

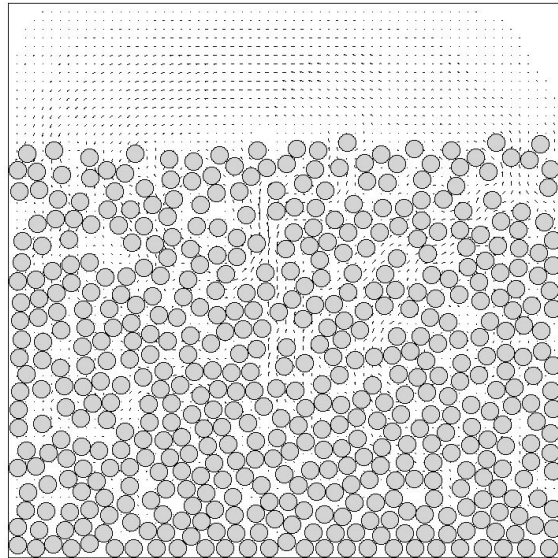


FIGURE III.33 – Sédimentation de 504 particules dans un domaine confiné : $t=12$.

avons réalisé un cas de sédimentation avec un nombre important de particules où les collisions font partie intégrante du phénomène. Les résultats sont en bon accord avec ceux de la littérature.

Dans les trois chapitres suivants nous analysons des phénomènes de sédimentation complexe à bas nombre de Reynolds. Conséquences des divers essais réalisés dans ce chapitre, nous avons choisis d'utiliser la première version du schéma numérique ainsi que la fonction d'interpolation de [Roma et al. \(1999\)](#).

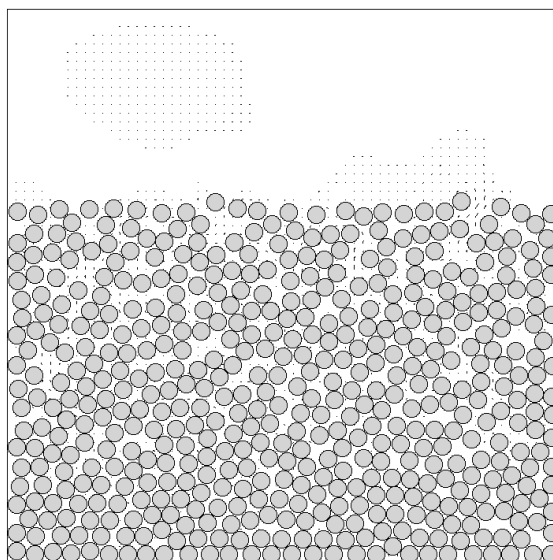


FIGURE III.34 – Sédimentation de 504 particules dans un domaine confiné : $t=24$.

Chapitre IV

Sédimentation d'une particule en milieu confiné : étude du phénomène de survitesse.

Dans ce chapitre, nous utilisons le code de calcul présenté dans les pages précédentes, avec la première version, pour étudier la sédimentation d'une particule unique en milieu confiné à bas nombres de Reynolds particuliers finis. Dans le cas d'une particule centrée, nous étudions l'influence de l'inertie du fluide sur la vitesse de chute. Dans le cas d'une particule décentrée, nous retrouvons à petits nombres de Reynolds ($R_{ep} \ll 1$), le phénomène de survitesse mis en évidence par [Harper et Chang \(1967\)](#). Nous montrons que cette survitesse est très sensible à l'inertie du fluide et au confinement. Afin de mieux comprendre l'origine de cette survitesse, nous avons réalisé une étude de l'influence de la pression et du frottement sur la vitesse de chute. En proche paroi et à bas nombre de Reynolds, nous montrons que l'emploi de la théorie de la lubrification est pleinement justifiée. Enfin, nous étudions la vitesse de rotation de la particule ([Liu et al. \(1993\)](#)). Nous retrouvons le phénomène de rotation "anormale", c'est-à-dire que la particule tourne comme si elle voulait remonter le mur. Cependant, en supprimant le degré de liberté de rotation de l'inclusion, nous montrons que la rotation de la particule a peu d'effet sur la vitesse de chute dans le cas de nombres de Reynolds faibles mais finis ($R_{ep} \leq 10$).

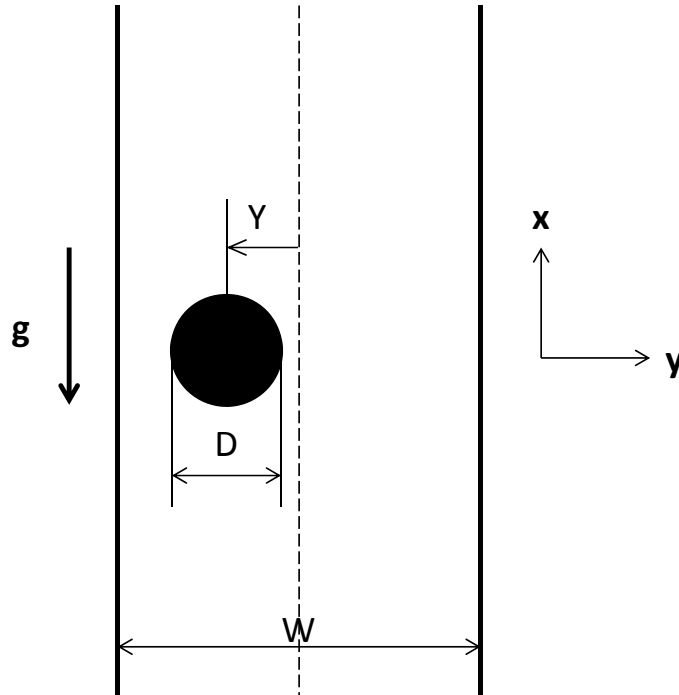


FIGURE IV.1 – Représentation schématique de la sédimentation d'une particule en milieu confiné. W est la largeur du canal, Y est l'excentrement (nous utiliserons aussi $e = 2Y/W$ comme excentrement adimensionné).

IV.1 Introduction

Considérons un disque unique, de masse volumique supérieure à celle du fluide, placé dans un canal vertical contenant un fluide newtonien au repos. Ce canal est supposé infini dans la direction verticale et de largeur W (Cf. figure IV.1). Bien apparemment très classique, ce problème présente une grande complexité : il n'existe pas de formule générale pour déterminer la vitesse de chute de l'objet. En régime de Stokes et en présence de parois latérales, il existe diverses expressions pour la vitesse de chute d'une particule centrée, c'est-à-dire placée exactement au centre du canal (*Happel et Brenner* (1965), *De Mestre et Russel* (1975), *Harper et Chang* (1967), *Dvinsky et Popel* (1987) ...). Afin de discuter plus en détail ces résultats bibliographiques, nous notons Y la coordonnée horizontale du centre de la particule, ayant pour origine l'axe du canal. Nous définissons trois vitesses de sédimentation :

- U_s : la vitesse de chute de la particule pour Y quelconque et avec un nombre de Reynolds

quelconque,

- U_{s0} : la vitesse de chute de cette même particule sédimentant le long de l'axe $Y = 0$, avec un nombre de Reynolds quelconque,
- U_c : la vitesse de chute de la particule sédimentant le long de l'axe $Y = 0$, avec un nombre de Reynolds égal à 0.

Et nous définissons deux nombre de Reynolds :

- R_{ep} : le nombre de Reynolds particulaire calculé à partir de la vitesse U_c qui est égal à DU_c/ν .
- R_{eT} : le nombre de Reynolds terminal de chute calculé à partir de la vitesse U_s qui est égal à DU_s/ν .

A bas nombre de Reynolds particulaire, de façon assez surprenante, le disque a une vitesse de chute U_s supérieure à U_{s0} lorsqu'il est excentré ([Feng et al. \(1996\)](#)). Ce phénomène de "survitesse pariétale" a été mis en évidence analytiquement par [Harper et Chang \(1967\)](#). Quelques études numériques ont confirmé ce résultat analytique pour des nombres de Reynolds inférieurs à 0.1 ([Feng et al. \(1996\)](#) et [Champmartin \(2006\)](#)). [Hu \(1995\)](#) a étudié numériquement la sédimentation d'une particule excentrée en supprimant deux degrés de liberté (la rotation et le déplacement horizontal) pour des nombre de Reynolds de 0.1, 1 et 10 avec un modèle ALE. Il a notamment montré que la survitesse est très sensible au confinement et à l'inertie du fluide. Il a en outre montré qu'en proche paroi, la théorie de la lubrification permet de bien décrire l'effort de traînée qui agit sur la particule.

L'objectif de ce chapitre est de revisiter le phénomène de survitesse pariétale avec la DF/FD et d'étendre l'étude de [Hu \(1995\)](#) en tenant compte de la rotation de la particule.

Dans le cas où le nombre de Reynolds est non-nul, les vitesses U_s et U_{s0} sont inconnues. Leurs expressions à Reynolds nul sont connues et sont présentées ci-dessous.

La vitesse de chute U_c d'un disque placé au centre du domaine $Y = 0$ a déjà été rencontrée au chapitre III. Elle a pour expression ([Happel et Brenner \(1965\)](#)) :

$$U_c = U_s^{HB} = \frac{D^2}{16K\mu}(\rho_p - \rho_f)g \quad (\text{IV.1})$$

avec K une constante qui permet de prendre en compte l'influence des parois latérales, donnée par :

$$K = \frac{1}{\ln W_* + 0.9157 + \frac{1.7244}{W_*^2} - \frac{1.7302}{W_*^4} + \frac{2.4056}{W_*^6} - \frac{4.5913}{W_*^8}} \quad (\text{IV.2})$$

où $W_* = W/D$ représente le rapport de la largeur du domaine sur le diamètre de la particule. La validité de cette expression pour des nombre de Reynolds finis sera analysée dans la section suivante.

De même, à nombre de Reynolds nul et pour une particule excentrée, il existe une expression analytique de la traînée (par unité de longueur) d'une particule avec une vitesse imposée ([Harper et Chang \(1967\)](#)) que l'on peut relier à U_s :

$$F_D = \frac{4\pi\mu U_s}{\ln(W) - K(e)} \quad (\text{IV.3})$$

où $e = 2Y/W$ est l'excentrement adimensionné par rapport au centre du domaine et $K(e)$ est une fonction représentée sur la figure IV.2. De cette expression nous obtenons la vitesse de chute U_s :

$$U_s = \frac{D^2 \rho_p g}{16\mu} (\ln(W) - K(e)) \quad (\text{IV.4})$$

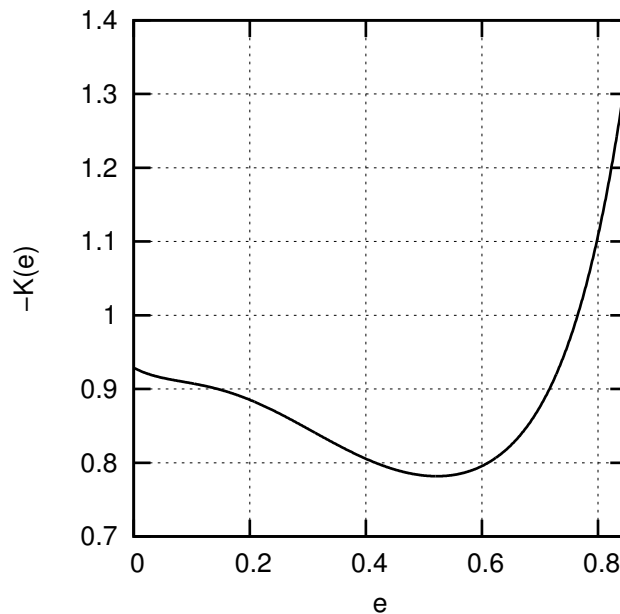


FIGURE IV.2 – La fonction $-K(e)$ apparaissant dans l'expression de la traînée d'[Harper et Chang \(1967\)](#).

Dans le cas où le nombre de Reynolds est non-nul, il n'existe pas d'expression générale de U_s . Citons toutefois, l'analyse de [Champmartin \(2006\)](#) qui a généralisé l'expression (IV.4) à un nombre de Reynolds égal à 0.1. A partir d'une étude numérique (méthode des volumes finis (FLUENT)), il obtient une formule empirique permettant de déterminer l'excentrement e pour lequel la force de traînée adimensionnée $F_D/(\mu U_s)$ est minimale (soit une vitesse de chute U_s maximale) :

$$\frac{e}{e_{max}} = 0.543 + \frac{0.560}{W} \quad (IV.5)$$

avec e_{max} l'excentrement maximal pour lequel la particule est en contact avec le mur.

Ces résultats étant très partiels, nous avons décidé d'analyser plus systématiquement l'influence de l'inertie du fluide sur la sédimentation : la section IV.2 concerne la sédimentation de la particule le long de l'axe $Y = 0$, et la section IV.3 porte sur la sédimentation d'une particule excentrée $Y \neq 0$. Enfin les sections IV.4 et IV.5 portent sur l'influence de la rotation de la particule sur sa vitesse de chute.

Dans les simulations de ce chapitre, les diverses quantités seront adimensionnées par ρ_f , U_c et D . Le rapport des masses volumiques $\rho_p/\rho_f = 1.1$.

IV.2 Influence de l'inertie du fluide sur la vitesse de chute U_{s0} d'une particule centrée ($Y = 0$)

La vitesse caractéristique U_c sera utilisée comme référence dans toute cette section. En particulier, nous définissons le nombre de Reynolds particulaire :

$$R_{ep} = \frac{U_c D}{\nu} \quad (IV.6)$$

Il est communément admis que la vitesse U_c donnée par l'équation (IV.1) reste valable même à Reynolds fini. Afin de vérifier son domaine de validité, nous avons effectué une série de simulations en faisant varier le nombre de Reynolds ($0.05 \leq R_{ep} \leq 10$) et le confinement ($2 \leq W/D \leq 16$). Le domaine est identique au cas de validation (au paragraphe III.2 page 46) avec une longueur de $20D$. Le pas du maillage est $h = D/32$, le pas de temps $\Delta t U_c/D$

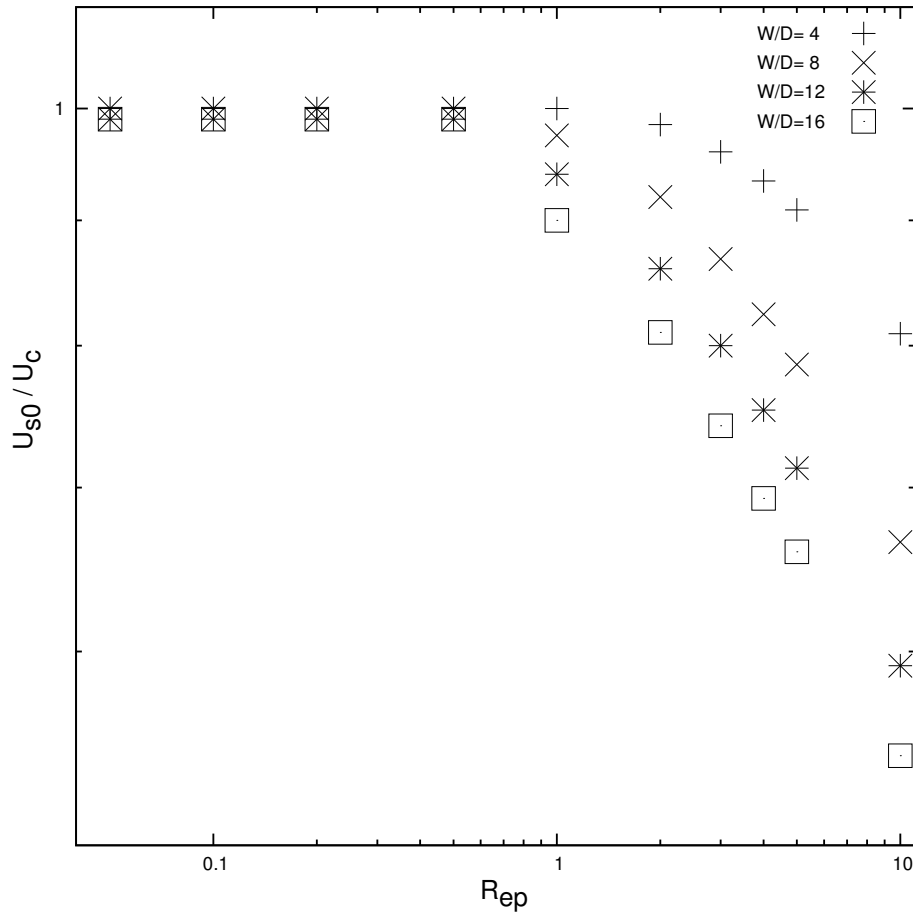


FIGURE IV.3 – **Sédimentation d'une particule centrée** ($Y = 0$) : variation de la vitesse de chute U_{s0} adimensionnée par U_c (équation (IV.1)), en fonction du nombre de Reynolds particulaire. Les effets d'inertie sont négligeables tant que $Re_p \leq 0.5$. Pour des régimes d'écoulements plus importants, les effets d'inertie vont considérablement affecter la vitesse de chute. Cette figure montre que l'augmentation du confinement a pour effet de retarder ces effets d'inertie.

varie de $2 \cdot 10^{-6}$ à 0.0025 pour des nombres de Reynolds allant de $Re_p = 0.05$ à 10. La zone de rétraction est fixée à $\Delta a = h/3$. La densité de la particule est fixée à 1.1.

La figure IV.3 présente l'évolution de la vitesse de chute d'une particule centrée, notée U_{s0} , adimensionnée par U_c , en fonction du nombre de Reynolds particulaire. Pour des nombres de Reynolds inférieurs à 0.5, les effets d'inertie ont très peu d'influence sur la vitesse de chute, et celle-ci est très bien décrite par l'équation (IV.1). A partir de $Re_p > 1$, l'influence de l'inertie sur la vitesse de chute est d'autant plus importante que le confinement est faible.

Afin d'illustrer l'influence de l'inertie en fonction du rapport de confinement, nous présentons les contours de vorticité (Cf. Figures IV.4 et IV.5) pour $W/D = 4$ et 16 et pour trois régimes d'écoulement ($Re_p = 0.1, 1$ et 10). Lorsque $W/D = 4$ (Cf. Figure IV.4), l'écoulement

est quasi-symétrique pour des nombres de Reynolds égaux à 0.1 et 1 tandis qu'il présente une très forte dissymétrie pour $Re_p = 10$. Lorsque $W/D = 16$ (Cf. Figure IV.5), la dissymétrie de l'écoulement liée à l'inertie est déjà très marquée pour $Re_p = 1$ et encore plus pour $Re_p = 10$. On peut donc ainsi conclure que le confinement a pour effet de retarder les effets d'inertie. Ce résultat était attendu car il a déjà été observé pour des cylindres fixes (par exemple *Sahin et Owens* (2004), *Singha et Sinhamahapatra* (2010)). *Hu* (1995) a déjà observé ce résultat.

Nous verrons dans la section suivante que l'inertie du fluide a un effet considérable sur cette survitesse pariétale.

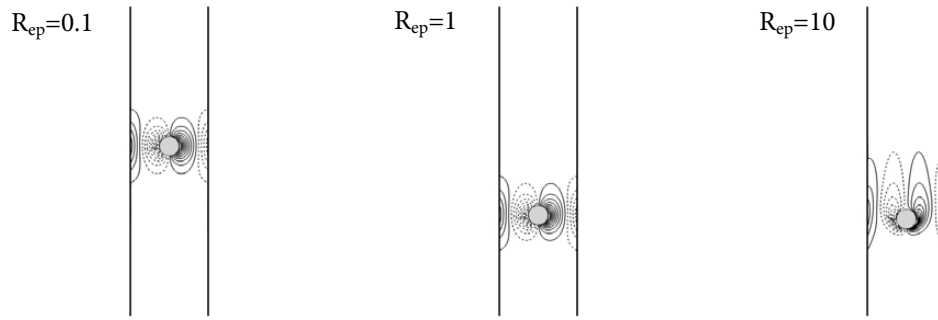


FIGURE IV.4 – **Sédimentation d'une particule centrée** ($Y = 0$ et $W/D = 4$) : visualisation des contours de vortécité (vingt isocontours équirépartis entre -5 et $+5$, les pointillées représentent les isovaleurs négatives), pour trois nombres de Reynolds $Re_p = 0.1, 1$ et 10 . Pour $Re_p = 0.1$ et 1 , l'écoulement est quasi-symétrique par rapport à l'axe horizontal de la particule. Lorsque $Re_p = 10$, la dissymétrie de l'écoulement liée à l'inertie est très marquée.

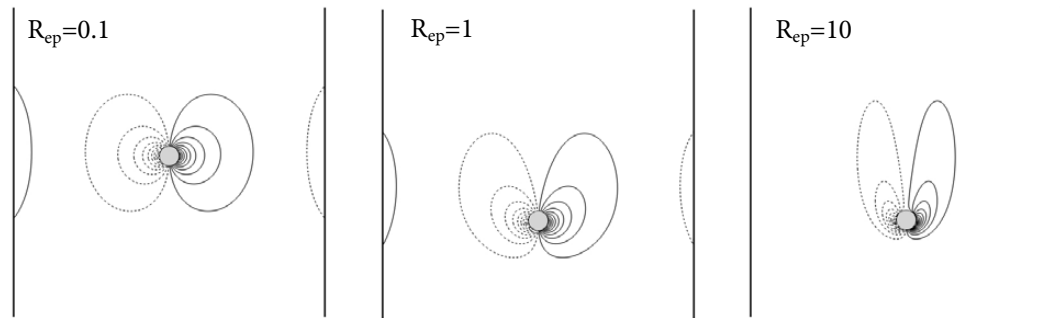


FIGURE IV.5 – **Sédimentation d'une particule centrée** ($Y = 0$ et $W/D = 16$) : visualisation des contours de vortécité (vingt isocontours équirépartis entre -2 et $+2$, les pointillées représentent les isovaleurs négatives), pour trois nombres de Reynolds $Re_p = 0.1, 1$ et 10 . Pour $Re_p = 0.1$, l'écoulement à l'amont et à l'aval de la particule reste symétrique mais pour $Re_p = 1$, la dissymétrie de l'écoulement est déjà très marquée ce qui prouve qu'un fort confinement va retarder les effets d'inertie.

IV.3 Sédimentation d'une particule excentrée ($Y \neq 0$)

Nous nous intéressons maintenant à la sédimentation d'une particule initialement excentrée pour les mêmes régimes d'écoulements. Nous calculons tout d'abord la vitesse de chute d'une particule pour cinq excentrement e différents, pour quatre confinements ($W/D = 4, 8, 12$ et 16) et pour trois nombres de Reynolds ($Re_p = 0.1, 1$ et 2). La rotation est libre, par contre seule la translation verticale est autorisée.

Pour ces simulations, la longueur du domaine est fixée à $20D$ pour $W/D = 4$ et $W/D = 8$ et à $40D$ pour $W/D = 12$ et $W/D = 16$. Le pas du maillage est $h = D/32$. Le pas de temps est fixé à 0.00002 pour $Re_p = 0.1$, à 0.0001 pour $Re_p = 1$ et à 0.0002 pour $Re_p = 2$. Les diverses quantités sont adimensionnées par ρ_f , U_c et D . La densité de la particule est égale à 1.1 .

IV.3.1 Calcul de la vitesse de sédimentation U_s en fonction de l'excentrement e

Les figures IV.6 présentent l'évolution des vitesses terminales de chute U_s , rapportées à la vitesse centrée U_{s0} , en fonction de l'excentrement e , pour différents régimes d'écoulement et différents confinements. La courbe en pointillés est la vitesse de chute à $Re_p = 0$, obtenue à partir de la traînée de [Harper et Chang \(1967\)](#) (équation (IV.4)). Nos résultats sont proches de cette courbe pour $Re_p = 0.1$ et s'en éloignent lorsque Re_p augmente. Lorsque $W/D = 4$, la différence entre nos résultats et la vitesse de chute obtenue à partir de la traînée de [Harper et Chang \(1967\)](#) est assez importante. En effet, l'expression de la force de traînée a été obtenue pour une largeur du domaine W grande devant le diamètre D du disque. Ces simulations confirment qu'à faible Re_p la vitesse terminale de chute n'est pas maximale lorsque la particule est au centre du domaine : la position où la particule a une vitesse maximale se trouve proche de $e = 0.5$ en accord avec l'expression (IV.5) due à [Champmartin \(2006\)](#). La survitesse relative peut atteindre 24% pour $Re_p = 0.1$ et $W/D = 4$. Nous observons que cette survitesse diminue très rapidement lorsque W/D augmente. Par exemple, pour le même régime d'écoulement (Cf. figure IV.6) et pour $W/D = 16$, la survitesse n'est plus que de 4,5%. Pour ce nombre de Reynolds, [Champmartin \(2006\)](#) propose la relation empirique suivante, obtenue pour un disque ayant une vitesse imposée et sans rotation, qui permet d'estimer l'amplitude du minimum de

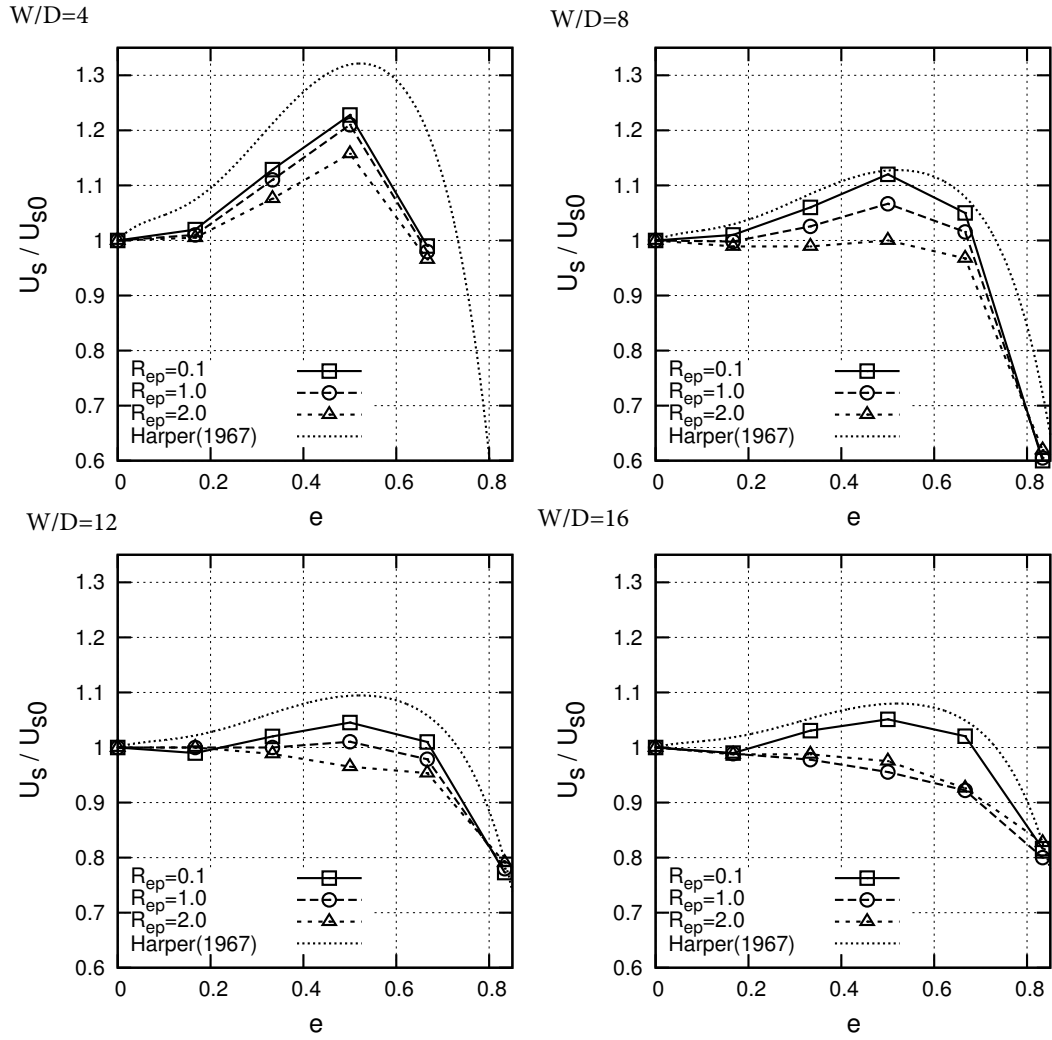


FIGURE IV.6 – **Sédimentation d'une particule excentrée** : vitesse de chute U_s , adimensionnée par la vitesse d'une particule centrée U_{s0} , en fonction de l'excentrement e , pour différents confinements et différents nombres de Reynolds. Les symboles représentent nos simulations et la courbe en pointillés correspond à $Re_p = 0$ (*Harper et Chang (1967)*). La survitesse peut atteindre 25% à petit Reynolds et fort confinement. Celle-ci diminue avec l'augmentation de W et de Re_p jusqu'à disparaître complètement.

traînée et qui peut s'écrire en terme de vitesse de chute :

$$\frac{U_{s0}}{U_s} = 1 - \frac{0.72D}{W} \quad \text{avec} \quad R_{ep} = 0.1 \quad (\text{IV.7})$$

La comparaison entre nos résultats lorsque $R_{ep} = 0.1$ et ceux calculés avec la formule (IV.7) est donnée dans la table IV.3.1. Les résultats sont en très bon accord. Il est important de noter que la rotation dans nos cas a un effet négligeable sur l'amplitude de la survitesse pour ce nombre de Reynolds très faible.

Pour $R_{ep} > 0.1$, cette survitesse diminue et finit par disparaître complètement. [Hu \(1995\)](#) a étudié ce phénomène avec un modèle ALE pour des nombres de Reynolds compris entre 0.1 et 10 et nos résultats confirment les siens. Nous observons en effet qu'en augmentant R_{ep} , la vitesse de sédimentation devient une fonction monotone décroissante de e (Cf. figure IV.6), c'est-à-dire qu'il n'y a plus de survitesse. Ce phénomène est retardé par le confinement.

TABLE IV.1 – **Sédimentation d'une particule excentrée à $R_{ep} = 0.1$** : résultats de la survitesse comparés avec la formule (IV.7) de [Champmartin \(2006\)](#) (obtenue pour une particule qui ne tourne pas) pour différents confinements. Les résultats sont en bon accord. La rotation de la particule ne semble avoir aucun effet sur l'amplitude la survitesse.

W/D	4	8	12	16
DF/FD	1.24	1.12	1.05	1.045
eq.(IV.7)	1.22	1.099	1.063	1.047

IV.3.2 Etude des efforts hydrodynamiques en fonction de l'excentrement e

Afin d'analyser l'influence de l'inertie du fluide sur la survitesse, nous proposons d'étudier les contributions séparées des efforts¹ de pression et de frottement sur l'existence de la survitesse de la particule.

1. Pour calculer les efforts hydrodynamiques, nous utilisons la formule (III.3) donnée au chapitre III à la page 36. Nous rappelons cette formule ici :

$$\mathbf{F}_H = - \int_P \lambda dS + \int_P \frac{d\mathbf{U}}{dt} dS \quad (\text{IV.8})$$

La contribution de la pression est calculée en intégrant la pression interpolée sur les points collocatifs décrivant le contour de la particule. La contribution du frottement est obtenue par soustraction de l'effort de pression à l'effort hydrodynamique total.

Les efforts hydrodynamiques agissant sur la particule se décomposent en une contribution des efforts de pression $\mathbf{F}_p$ et de frottement $\mathbf{F}_\mu$, soit :

$$\mathbf{F}_H = \mathbf{F}_p + \mathbf{F}_\mu = - \int_{\partial P} p \mathbf{n}_{ext} dl + \int_{\partial P} 2\mu \mathbf{D}(\mathbf{u}) \mathbf{n}_{ext} dl \quad (\text{IV.9})$$

Nous décomposons la force hydrodynamique en un effort vertical de traînée F_D et un effort horizontal de portance F_L . Les contributions de la pression et du frottement sur la traînée et la portance sont notées F_{Dp} (la traînée de forme), $F_{D\mu}$ et F_{Lp} , $F_{L\mu}$, respectivement. Tous les calculs réalisés dans cette section montrent que $F_{Dp} \geq F_{D\mu}$ et $F_{Lp} \geq F_{L\mu}$.

Efforts hydrodynamiques en présence de survitesse.

La figure IV.7 (a) présente l'évolution de la traînée de forme adimensionnée $F_{Dp}/(\mu U_s)$ et de la traînée de frottement $F_{D\mu}/(\mu U_s)$ avec l'excentrement e , pour un confinement $W/D = 4$ et pour $R_{ep} = 0.1$. Nous observons que la traînée de forme est toujours supérieure à celle de frottement. Ces quantités sont très dépendantes de e . Lorsque la particule est proche de la paroi ($e \simeq e_{max}$), la différence entre les deux efforts est très importante, probablement à cause des efforts de lubrification qui seront discutés plus loin. Lorsque la particule sédimente à $e \simeq 0.5$, les deux efforts adimensionnés sont à leur minimum, de sorte que la vitesse de sédimentation est à son maximum : cette position correspond à la survitesse. Au centre du domaine $e = 0$, la contribution de la pression et du frottement sont environ du même ordre de grandeur $F_{Dp}/F_{D\mu} \simeq 1.1$, en accord avec les résultats numériques de [Richou et al. \(2005\)](#).

Les efforts adimensionnés de portance présentent les mêmes caractéristiques : $F_{Lp} \geq F_{L\mu}$ (Cf. figure IV.7 (b)). La force de portance augmente avec e jusqu'à $e \simeq 0.5$. Elle est maximale lorsque la vitesse de chute est maximale pour $e = 0.5$ puis va diminuer lorsque la particule est de plus en plus proche du mur. Le rapport de l'effort induit par la pression sur celui induit par le frottement varie très peu avec e et il vaut $F_{Lp}/F_{L\mu} \simeq 1.9$.

Efforts hydrodynamiques sans survitesse.

Comme nous l'avons vu dans la section précédente, pour un plus faible confinement $W/D = 16$

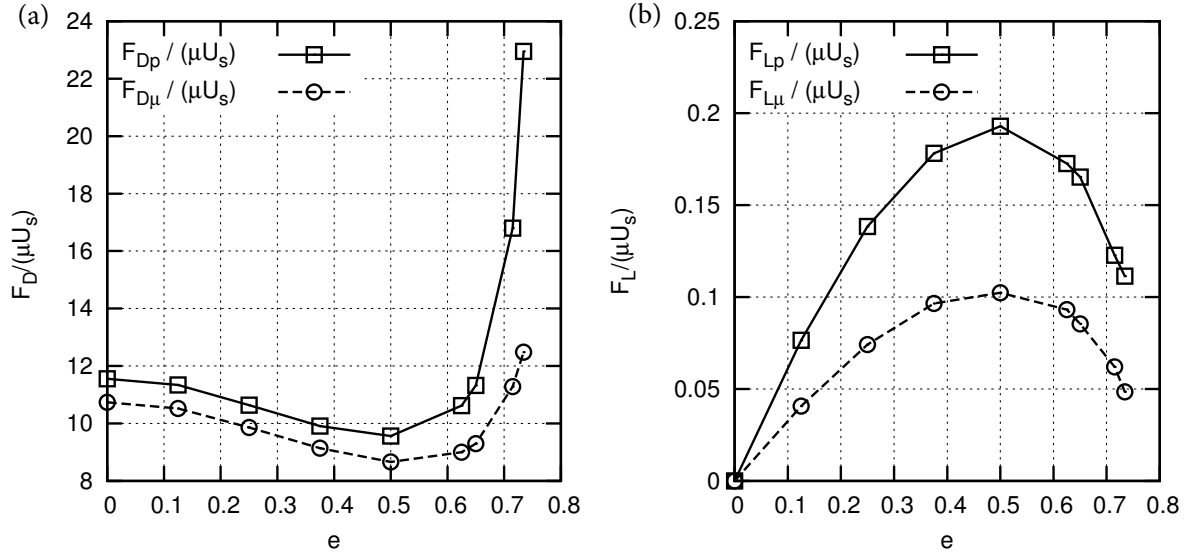


FIGURE IV.7 – **Efforts hydrodynamiques en présence de survitesse** : influence des efforts induits par le frottement et par la pression en fonction de l'excentrement e pour $W/D = 4$ et $R_{ep} = 0.1$. (a) efforts adimensionnés de traînée de frottement $F_{D\mu}/(\mu U_s)$ et de pression $F_{Dp}/(\mu U_s)$. Les deux efforts présentent un minimum à $e = 0.5$. Proche de la paroi, la pression est le paramètre qui a le plus d'influence sur l'effort de traînée. (b) Efforts adimensionnés de portance de frottement $F_{L\mu}/(\mu U_s)$ et de pression $F_{Lp}/(\mu U_s)$. L'effort est maximal lorsque $e = 0.5$ et la pression contribue deux fois plus que le frottement à l'effort de portance.

et un nombre de Reynolds $R_{ep} = 2$, il n'y a plus de survitesse. La figure IV.8 (a) présente l'évolution de $F_{Dp}/(\mu U_s)$ et de $F_{D\mu}/(\mu U_s)$ en fonction de e dans ce cas. Contrairement au cas précédent, les efforts sont maintenant des fonctions monotones croissantes de e , quasiment identiques jusqu'au voisinage de la paroi.

Tant que $e < 0.5$, les efforts sont quasiment constants comme si le mur avait un effet uniforme sur la vitesse de chute. Dans ce cas, le rapport des efforts vaut alors $F_{Dp}/F_{D\mu} \simeq 1$. A l'approche du mur latéral, les deux efforts augmentent et l'effort induit par la pression devient beaucoup plus important que celui de frottement, comme dans le cas précédent. Là encore il s'agit d'un effet de lubrification.

La figure IV.8 (b) présente l'évolution des efforts adimensionnés de portance induits par la pression $F_{Lp}/(\mu U_s)$ et par le frottement $F_{L\mu}/(\mu U_s)$. Ces deux efforts sont quasiment identiques sauf en proche paroi.

Théorie de la lubrification en proche paroi à bas nombre de Reynolds

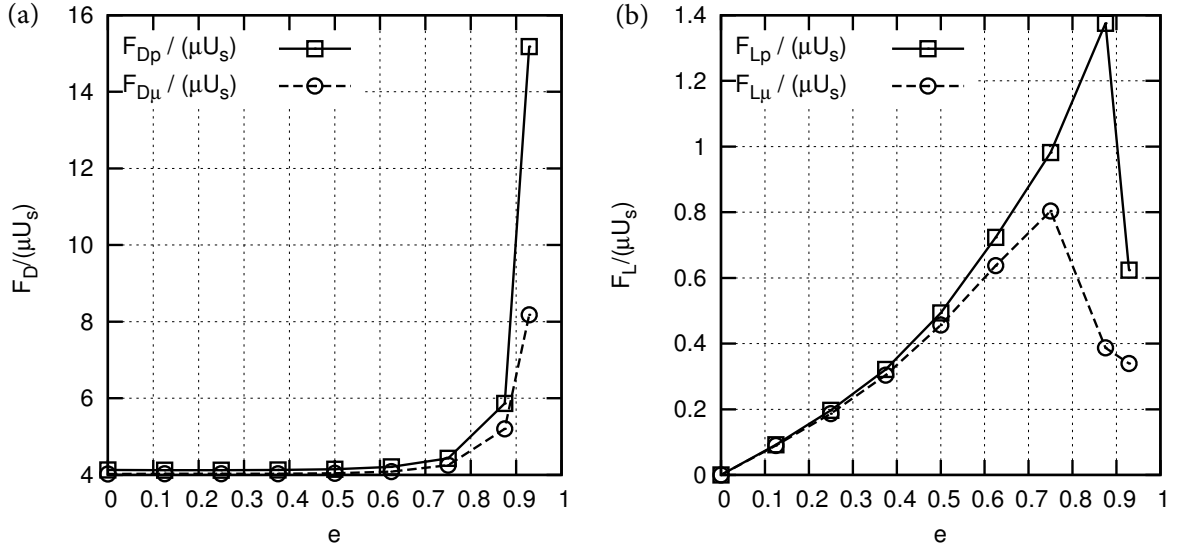


FIGURE IV.8 – **Efforts hydrodynamiques sans survitesse** : influence des efforts induits par le frottement et par la pression en fonction de l'excentrement e pour $W/D = 16$ et $R_{ep} = 2$. (a) efforts adimensionnés de traînée de frottement $F_{D\mu}/(\mu U_s)$ et de pression $F_{Dp}/(\mu U_s)$. Les efforts de traînée induits par la pression et par le frottement augmentent de façon monotone avec e . L'effort induit par la pression contribue autant que le frottement à la traînée totale lorsque $e < 0.5$. Ensuite la force de pression devient dominante. (b) Efforts adimensionnés de portance de frottement $F_{L\mu}/(\mu U_s)$ et de pression $F_{Lp}/(\mu U_s)$. L'effort de pression augmente avec e . L'effort de frottement atteint un maximum pour $e = 0.75$ et chute lorsque la particule se rapproche du mur. La force induite par la pression ne fait qu'augmenter jusqu'à $e = 0.75$ puis va très rapidement diminuer.

Les calculs présentés dans les sections précédentes montrent qu'au voisinage de la paroi, la traînée de forme domine très largement la traînée de frottement. Afin de vérifier cette tendance, nous avons utilisé la théorie de la lubrification pour calculer séparément ces deux traînées. Nous considérons l'espace entre le cylindre et le mur le plus proche (figure IV.9 (b)). La distance adimensionnée entre la paroi et le cylindre s'écrit :

$$\epsilon = \frac{W}{D} - \frac{2Y}{D} - 1 \quad (\text{IV.10})$$

Dans le référentiel barycentrique de la particule, la paroi monte avec une vitesse U_s , l'écoulement est stationnaire. La pression du fluide dans cet interstice est décrite, en l'absence d'effet inertiel, par l'équation de Reynolds :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(h_L^3 \frac{\partial p}{\partial x} \right) = 6\mu \frac{\partial (U_s h_L)}{\partial x} \quad (\text{IV.11})$$

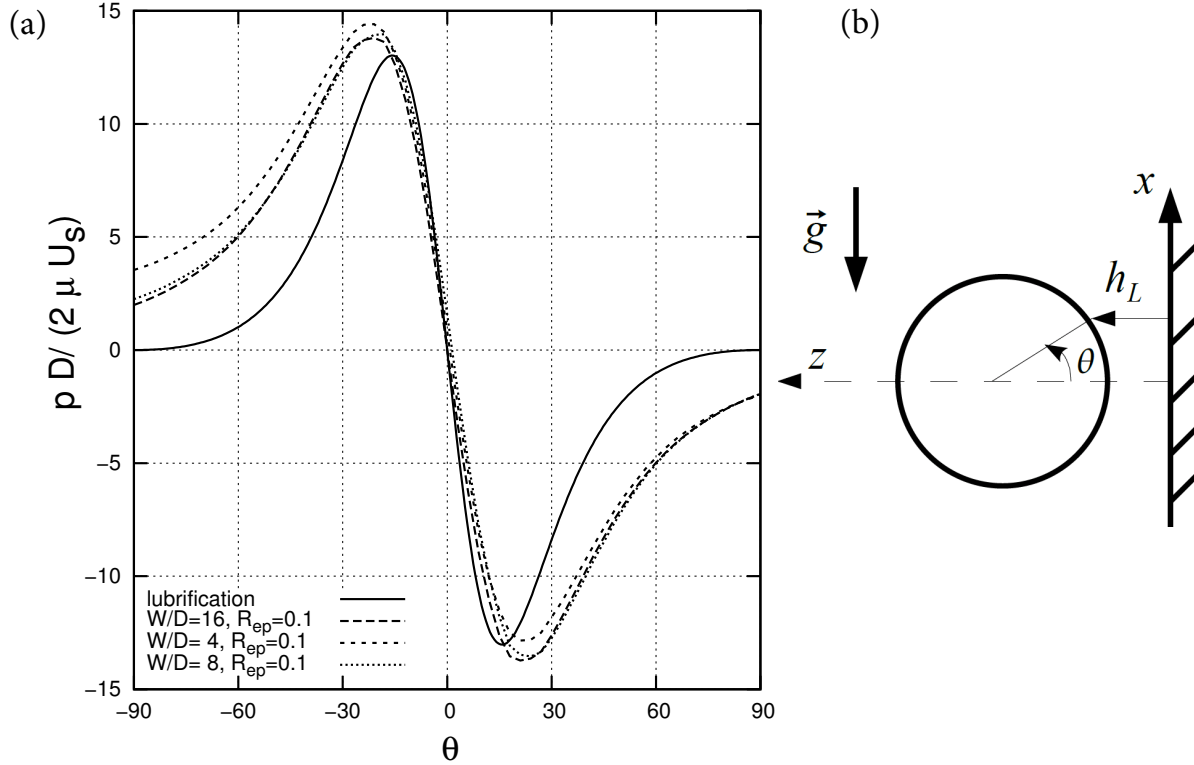


FIGURE IV.9 – **Théorie de la lubrification en proche paroi à bas nombre de Reynolds** : (a) profil angulaire de pression adimensionnée $pD/(2\mu U_s)$. La ligne pleine correspond à la théorie de la lubrification (équation (IV.13)). Les lignes en pointillé correspondent à nos simulations numériques ($\epsilon = 0.14$). (b) Système de coordonnées utilisé pour la théorie de la lubrification.

où la coordonnée x est présentée sur la figure IV.9 (b) et $h_L(x)$ est l'épaisseur du film. Nous avons de plus supposé que le disque ne tourne pas en proche paroi, comme le suggèrent nos simulations (voir section IV.4) ainsi que celles de *Hu* (1995). Il vient en intégrant :

$$h_L^3 \frac{\partial p}{\partial x} = 6\mu U_s h_L + A_0 \quad (\text{IV.12})$$

On en déduit le profil angulaire de pression ($x = D/2 \sin \theta$) :

$$p(\theta) = \frac{12\mu U_s}{D} F_1(\epsilon, \cos \theta) + \frac{4A_0}{D^2} F_2(\epsilon, \cos \theta) \quad (\text{IV.13})$$

où

$$F_i(\epsilon, X) = \int_X^1 \frac{u}{(\epsilon + 1 - u)^{1+i} \sqrt{1 - u^2}} du \quad (\text{IV.14})$$

La constante d'intégration A_0 est obtenue en prenant comme condition aux limites : $p(\pi/2) =$

0 ($= p(-\pi/2)$) :

$$A_0 = -3\mu DU_s \frac{F_1(\epsilon, 0)}{F_2(\epsilon, 0)} \quad (\text{IV.15})$$

La figure IV.9 (a) montre le profil de pression théorique (équation (IV.13)) et celui obtenu numériquement pour un cylindre chutant à $\epsilon = 0.14$ avec $W/D = 4, 8$ et 16 et $R_{ep} = 0.1$. Les profils sont relativement proches jusqu'à des angles de 30° . Au delà des maxima de pression, la concordance est beaucoup moins bonne. Cela est dû à la condition de pression nulle en $\pm\pi/2$: cette condition ne correspond pas tout à fait à nos simulations du fait de la présence de l'autre paroi. De plus, la distance entre la paroi et le mur, pour ces simulations, n'est pas très petite.

En effet, le code de calcul ALE de [Hu \(1995\)](#) permet d'obtenir des résultats en très proche paroi $\epsilon \simeq 0.01$. Pour de grands domaines et en très proche paroi, ses résultats confirment que la pression tend vers zéro en $\pi/2$.

A partir de ce profil de pression², nous pouvons calculer la contrainte visqueuse :

$$\tau_{xz} = \mu \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{2} p'(x)(2z - h_L) - \mu \frac{U_s}{h_L} \quad (\text{IV.16})$$

A la paroi cette contrainte vaut :

$$\tau_{xz}|_{z=0} = \frac{8\mu U_s}{D} \frac{\cos \theta - 1}{(1 + \epsilon - \cos \theta)^2} \quad (\text{IV.17})$$

Nous en déduisons la force verticale exercée par le fluide sur le cylindre F_D , qui est exactement égale à celle exercée par le mur sur le fluide en régime permanent :

$$F_D = - \int_{-D/2}^{D/2} \tau_{xz}|_{z=0} dx = -4\mu U_s A_1(\epsilon) \quad (\text{IV.18})$$

avec

$$A_1(\epsilon) = 2 \int_0^1 \frac{u(u-1)}{(1+\epsilon-u)^2 \sqrt{1-u^2}} du \simeq -\frac{\sqrt{2}\pi}{2\sqrt{\epsilon}} + O(1) \quad (\text{IV.19})$$

Nous obtenons ainsi le résultat classique :

$$\frac{F_D}{\mu U_s} = \frac{2\sqrt{2}\pi}{\sqrt{\epsilon}} + O(1) \quad (\text{IV.20})$$

2. Dans ses calculs, [Hu \(1995\)](#) ne retient que le terme en F_2 , ce qui n'est pas correct : cette seule contribution ne permet pas de retrouver ses résultats numériques.

La seule contribution de la pression est obtenue par intégration de l'équation (IV.13) sur la demi-surface du cylindre en regard du mur³. En intégrant par partie pour éviter d'intégrer directement F_1 et F_2 , nous obtenons :

$$\frac{F_{Dp}}{\mu U_s} = -12B_1(\epsilon) + 12\frac{F_1(\epsilon, 0)}{F_2(\epsilon, 0)}B_2(\epsilon) \quad (\text{IV.21})$$

avec

$$B_i(\epsilon) = \int_0^1 \frac{u^2}{(\epsilon + 1 - u)^{i+1} \sqrt{1 - u^2}} du \quad (\text{IV.22})$$

Au premier ordre en ϵ , nous obtenons :

$$\frac{F_{Dp}}{\mu U_s} = \frac{2\sqrt{2}\pi}{\sqrt{\epsilon}} + O(1) \quad (\text{IV.23})$$

et :

$$\frac{F_{D\mu}}{\mu U_s} = O(1) \quad (\text{IV.24})$$

Ainsi, la théorie de la lubrification montre que la traînée de forme domine très largement la traînée de frottement au voisinage de la paroi, comme nous l'avons observé dans nos simulations. Ceci est dû à ce que lorsque ϵ tend vers 0, la surpression dans le convergent devient très importante.

Nous avons comparé nos résultats en proche paroi avec l'expression (IV.20) (Cf. table IV.3.2). En très proche paroi, la formule (IV.20) donne une très bonne estimation de l'effort de traînée. Le nombre de Reynolds basé sur l'épaisseur du film à la gorge du convergent $Re_{lub} = U_s h_L(0)/\nu$ est très faible, ce qui justifie l'approximation de lubrification pour le calcul des efforts. On notera tout de même que pour $W/D = 4$ et $\epsilon = 0.14$, l'erreur est élevée (18%) pour les raisons que nous avons évoquées précédemment. Néanmoins lorsque la particule est très proche du mur et le domaine est assez large, la théorie de la lubrification décrit très bien l'effort qui agit sur la particule.

3. Comme suggéré par [Hu \(1995\)](#), nous négligeons l'écoulement sur l'autre demi-face du cylindre. Nous avons vérifié avec nos simulations que cette contribution était effectivement négligeable dans le cas où la particule est vraiment très proche de la paroi.

TABLE IV.2 – **Sédimentation d'une particule en proche paroi** : comparaison entre les efforts hydrodynamiques obtenus numériquement et la formule (IV.23). Le faible nombre de Reynolds dans le convergent $R_{elub} = U_s h_L(0)/\nu$ justifie l'emploi de la théorie de la lubrification pour décrire ce cas.

W/D	R_{ep}	ϵ	R_{eT}	R_{elub}	eq. (IV.20)	$F_D/(\mu U_s)$
4	0.1	0.14	$8.175 \cdot 10^{-2}$	$5.7 \cdot 10^{-3}$	23.748	28.08
4	0.1	$6.25 \cdot 10^{-2}$	$6.48 \cdot 10^{-2}$	$2 \cdot 10^{-3}$	35.543	35.429
8	0.1	0.14	$4.58 \cdot 10^{-2}$	$3.2 \cdot 10^{-3}$	23.748	23.08
8	0.1	$6.25 \cdot 10^{-2}$	$3.49 \cdot 10^{-2}$	$1.1 \cdot 10^{-3}$	35.543	35.429
16	0.1	0.14	$3.02 \cdot 10^{-2}$	$2.1 \cdot 10^{-3}$	23.748	22.827
16	2	0.14	$5.72 \cdot 10^{-1}$	$4.04 \cdot 10^{-2}$	23.748	23.365

IV.4 Rotation de la particule en fonction de l'excentrement : justification de l'hypothèse de vitesse de rotation nulle en proche paroi

Dans les sections précédentes, nous avons supposé que la particule ne tourne pas au voisinage de la paroi. Cette hypothèse est vérifiée lorsque la particule est au centre du canal ($Y = 0$) puisque l'écoulement est parfaitement symétrique dans ce cas précis. Par contre, dès que la particule est excentrée, la dissymétrie de l'écoulement est plus prononcée et un couple hydrodynamique apparaît (Cf. figure IV.10). Ce couple hydrodynamique tend à faire tourner la particule dans le sens "anormal" (comme si la particule voulait remonter le mur ([Liu et al. \(1993\)](#))). Ainsi, afin de vérifier l'hypothèse de rotation nulle en proche paroi, nous avons réalisé des séries de calculs, dont deux sont présentés ici : $W/D = 4$; $R_{ep} = 0.1$ et $W/D = 16$; $R_{ep} = 2$.

La figure IV.11 montre pour les deux cas, que la vitesse de rotation adimensionnée de la particule est nulle au centre. Pour $W/D = 4$, son maximum est en $e \simeq 0.5$, qui correspond à la position de la survitesse. Ceci pourrait suggérer que la survitesse de sédimentation correspondrait aussi à une survitesse de rotation. Cependant d'autres calculs, qui ne seront pas présentés ici, montrent clairement une indépendance totale entre ces deux phénomènes. Enfin, la vitesse de rotation diminue rapidement et tend vers zéro lorsque l'on s'approche de la paroi. La tendance est à peu près similaire pour un écoulement plus inertiel et un petit confinement.

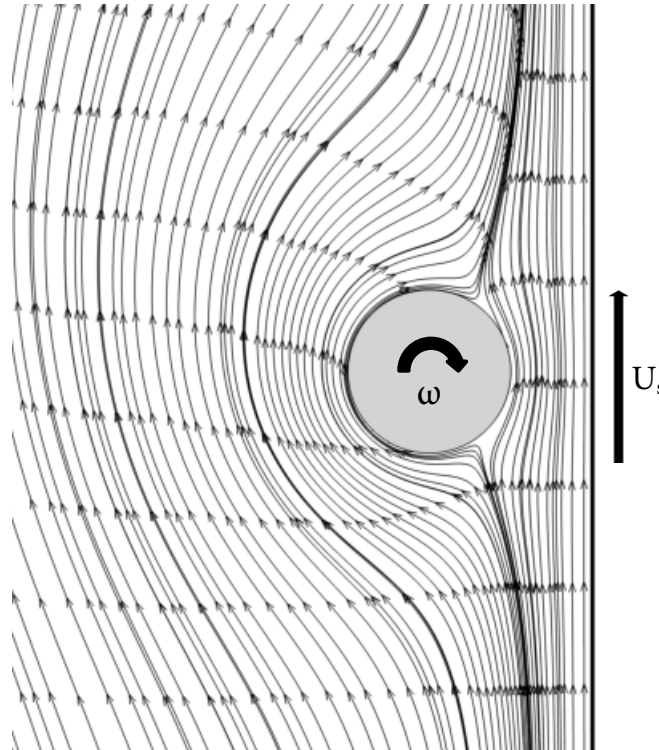


FIGURE IV.10 – **Rotation 'anormale' d'une particule excentrée** : lignes de courant tracées dans le repère barycentrique de la particule. Les lignes de courant montrent une forte dissymétrie.

IV.5 Influence de la rotation de la particule sur la migration horizontale

[Feng et al. \(1994\)](#) suggèrent que la rotation de la particule est un des mécanismes majeur de la migration horizontale. Au contraire, d'après [Crowe et Tsuji \(1998\)](#), la rotation d'une sphère à bas nombre de Reynolds a très peu d'effet sur les efforts de portance et de traînée, pour de très nombreux cas. Pour vérifier l'effet de la rotation sur le mouvement horizontal et la survitesse, nous avons réalisé deux simulations avec un domaine identique au cas précédent, et avec les paramètres suivants : $W = 4D$, $R_{ep} = 1$ et $R_{ep} = 5$, $\rho_p = 1.1$. La particule est initialement excentrée par rapport à l'axe d'une distance de $1.45D$ afin qu'il y ait au moins deux mailles de fluide entre le mur et la particule. Nous avons dans un cas laissé la particule libre de tourner et dans le deuxième cas, nous avons imposé une vitesse de rotation nulle. Les figures [IV.12](#) et [IV.13](#) présentent la variation de la vitesse de chute U_s et de la vitesse de migration horizontale V_s en fonction de $e = 2Y/W$, pour $R_{ep} = 1$ et $R_{ep} = 5$, respectivement. Lorsque $R_{ep} = 1$,

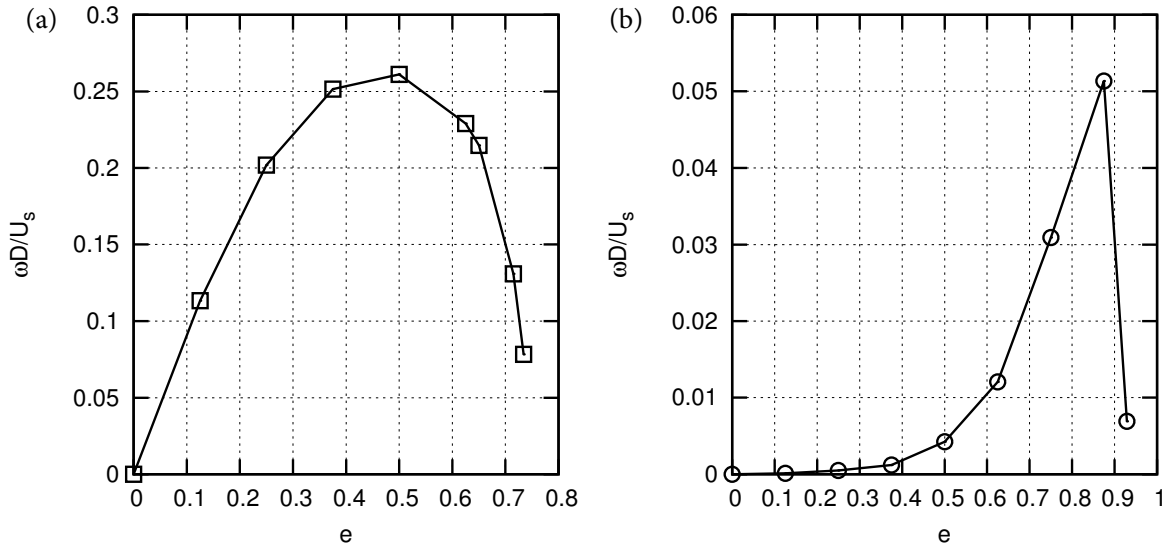


FIGURE IV.11 – **Vitesse de rotation d’une particule excentrée** : évolution de la vitesse de rotation adimensionnée $\omega D/U_s$ en fonction de l’excentrement e (a) cas $W/D = 4$ et $Re_p = 0.1$. La vitesse de rotation est nulle au centre et maximale pour la même position que la survitesse ($e \simeq 0.5$). Elle diminue très rapidement lorsque la particule est proche du mur et la tendance de la courbe laisse suggérer que la vitesse de rotation tend vers 0 en proche paroi. (b) cas $W/D = 16$ et $Re_p = 2$. La vitesse de rotation augmente jusqu’à $e \simeq 0.875$ puis chute très rapidement lorsque la particule est proche de la paroi.

la différence entre les deux cas est très faible. En effet, l’excentrement e pour lequel la traînée est minimale est identique dans les deux cas. La valeur de la survitesse est très légèrement différente dans le cas avec rotation (quelques %). L’effet de la rotation est plus important en ce qui concerne la vitesse de migration horizontale. Pour $Re_p = 5$ (Cf. figure IV.13), le constat est à peu près identique. Nous avons lancé d’autres simulations pour des nombres de Reynolds particuliers supérieurs (jusqu’à $Re_p = 20$) et, là encore, nous n’obtenons pas de différences majeures entre les deux cas. Ces résultats montrent donc que, contrairement à ce que suggèrent [Feng et al. \(1994\)](#), la rotation a un effet mineur sur la sédimentation, même lorsque l’inertie du fluide est prise en compte.

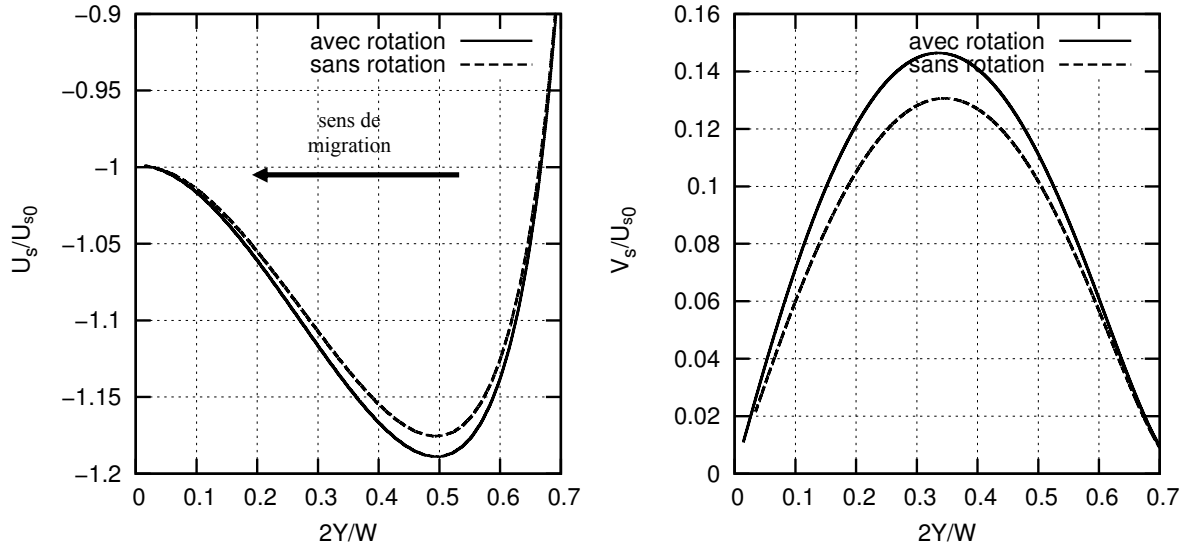


FIGURE IV.12 – **Influence de la rotation sur la sédimentation d'une particule** : à gauche, variation de la vitesse de chute U_s et à droite de la vitesse horizontale V_s , adimensionnées par la vitesse de chute d'une particule centrée U_{s0} en fonction de son excentrement e . Le nombre de Reynolds est $Re_p = 1$. La rotation influence peu la dynamique de la particule.

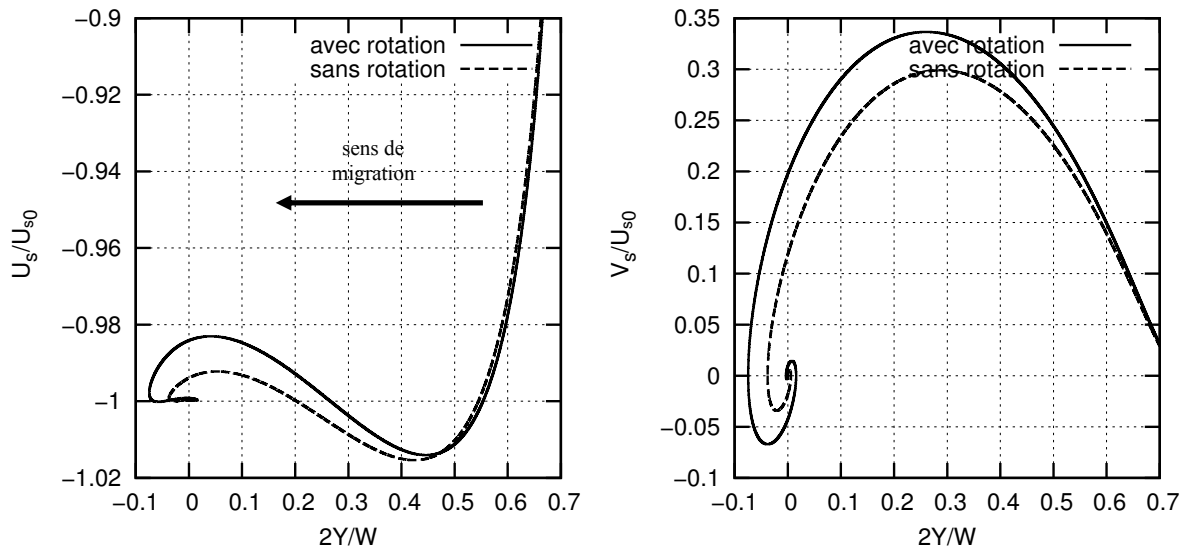


FIGURE IV.13 – **Influence de la rotation sur la sédimentation d'une particule** : commentaire identique à la figure IV.12 avec $Re_p = 5$.

IV.6 Conclusion du chapitre

Dans ce chapitre nous avons montré que dans le cas d'une particule centrée, la vitesse de chute est très sensible à l'inertie du fluide et au confinement. Les effets d'inertie sont retardés par le confinement. Dans le cas excentré, le phénomène de survitesse disparaît en régime inertiel. Les efforts hydrodynamiques induits par la pression sont toujours supérieurs à ceux in-

duits par le frottement. Cette différence s'accroît avec l'excentrement : le rapport de ces deux forces diverge à l'approche de la paroi. La théorie de la lubrification confirme cette tendance. De plus, cette théorie permet de prédire avec une bonne précision les efforts hydrodynamiques au voisinage de la paroi, ce qui suggère que les efforts sur l'autre demi-face du cylindre sont négligeables lorsque le confinement est faible. Nous observons que la vitesse de rotation présente, comme la vitesse de chute, un maximum sur une position excentrée. Cette position n'est pas, en général, la même que celle de la survitesse de chute. La vitesse de rotation tend à s'annuler en proche paroi. Enfin, en bloquant le degré de liberté de rotation, nous montrons que celui-ci a une influence minime sur la vitesse de chute.

Chapitre V

Sédimentation d'un doublet de particules en milieu confiné : dynamique complexe et chaos.

Nous analysons maintenant la sédimentation d'un doublet de particules. A fort confinement ($W/D = 4$), nous retrouvons la dynamique complexe observée par [Aidun et Ding \(2003\)](#) et [Feng et al. \(1994\)](#) (hystérésis, doublement de période, cascade sous-harmonique et enfin chaos). Nous étendons ensuite leur étude à des régimes plus inertiels en faisant varier la force volumique adimensionnée. Tout d'abord, le chaos laisse place à un phénomène classique de 'Drafting, Kissing and Tumbling' qui se répète périodiquement dans le temps. Pour une force volumique plus importante, le DKT bifurque vers une structure horizontale originale. Cette structure a un domaine d'existence limité. En augmentant encore la force volumique, nous observons une autre succession de bifurcations menant à une dynamique chaotique et à un nouvel attracteur étrange. Cette transition vers le chaos se fait par la route de la quasi-périodicité : un équilibre stable, un régime périodique, un régime quasi-périodique à deux périodes et un régime chaotique. Enfin, nous terminons ce chapitre en donnant le diagramme de bifurcation global.

V.1 Introduction

Divers auteurs ont montré que la dynamique d'un doublet de particule peut exhiber des structures complexes en milieu confiné, pour des régimes d'écoulements (i.e. des nombres de Reynolds) assez faibles. Le comportement complexe le plus souvent décrit dans la littérature est incontestablement le phénomène DKT ("Drafting, Kissing and Tumbling", [Fortes et al. \(1987\)](#), [Feng et al. \(1994\)](#), [Hu \(1996\)](#), [Glowinski et al. \(1999\)](#), [Uhlmann \(2005\)](#) ...). Par contre, d'autres comportements tout aussi complexes (bifurcations, cascades sous-harmonique, chaos) ont été mis en évidence ([Aidun et Ding \(2003\)](#)) mais restent très peu étudiés.

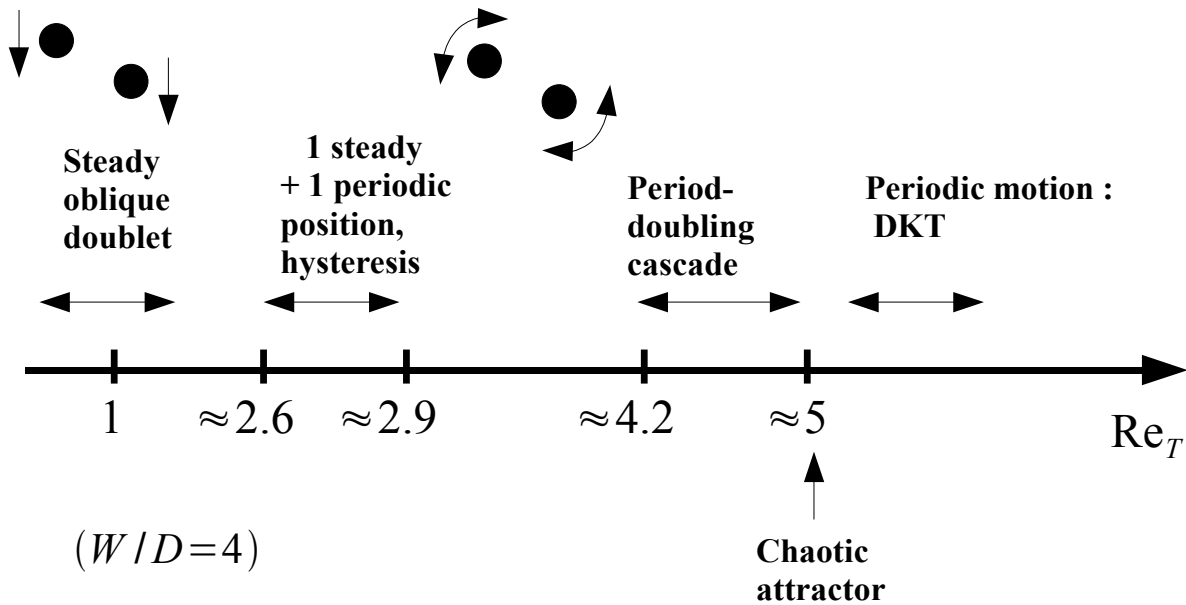


FIGURE V.1 – Régimes dynamiques d'un doublet de particules en milieu confiné en fonction du régime d'écoulement mis en évidence par [Aidun et Ding \(2003\)](#) et [Feng et al. \(1994\)](#) : pour un nombre de Reynolds terminal de chute de l'ordre de 2, les particules forment un doublet oblique stable. Cette structure bifurque vers une structure oblique oscillante qui va devenir chaotique après un phénomène de cascades sous-harmonique. Enfin, dès que l'inertie devient importante, la dynamique des particules est régie par le phénomène de Drafting, Kissing and Tumbling.

[Aidun et Ding \(2003\)](#) ont analysé numériquement la sédimentation de deux disques en milieu confiné pour la seule valeur $W/D = 4$ pour $2 \leq Re_T \leq 6$. Comme ces auteurs, nous définissons le nombre de Reynolds terminal de chute :

$$Re_T = \frac{U_s D}{\nu} \quad (V.1)$$

où U_s désigne maintenant la vitesse de chute *moyennée* sur les temps longs et les deux particules.

Aidun et Ding (2003) observent (Cf. figure V.1) :

- (i) des régimes de sédimentation stationnaires à bas Reynolds, où les disques vont se placer de façon oblique par rapport aux parois ("doublet oblique", figure V.3).
- (ii) A plus grand nombre de Reynolds, des régimes périodiques où les particules sédimentent en oscillant.
- (iii) Une hystérésis dans laquelle les particules peuvent atteindre différents régimes de sédimentation (stationnaire ou périodique) déterminés par leur position initiale.
- (iv) Pour leurs plus grands nombres de Reynolds, une cascade sous-harmonique conduisant à une sédimentation chaotique.

Les deux premiers comportements avaient déjà été observés par *Feng et al.* (1994) pour des confinements $W/D = 4$ et 8 . Pour des régimes plus inertiels, il semble admis que les phénomènes de collision et d'aspiration persistent, quelque soit le nombre de Reynolds. Afin de vérifier ce point, nous proposons de revisiter l'étude d'*Aidun et Ding* (2003) et de l'étendre l'étude à des régimes plus inertiels.

Choix du paramètre de contrôle

Tout comme *Aidun et Ding* (2003), nous avons choisi de faire varier le poids adimensionnel de la particule :

$$F = \frac{\pi}{4} G (\rho_r - 1) \quad (V.2)$$

avec G , le nombre de Galilée qui s'écrit :

$$G = \frac{D^3 g}{\nu^2} \quad (V.3)$$

Dans ce chapitre, les masses volumiques du fluide et des particules sont égales à $\rho_f = 1 \text{ g/cm}^3$ et $\rho_p = 1.002 \text{ g/cm}^3$, respectivement. La viscosité cinématique est égale à $\nu = 0.25 \text{ cm}^2/\text{s}$. Enfin le diamètre de la particule $D = 1 \text{ cm}$.

Du point de vue numérique, nous avons choisi les paramètres suivants pour toutes ces simulations : la taille de la maille fluide $h = D/32$, le domaine utilisé est identique à celui décrit au paragraphe IV.2 page 79 et a une taille de $20 \times W$, le pas de temps est fixé à 0.0005 pour toutes

ces simulations.

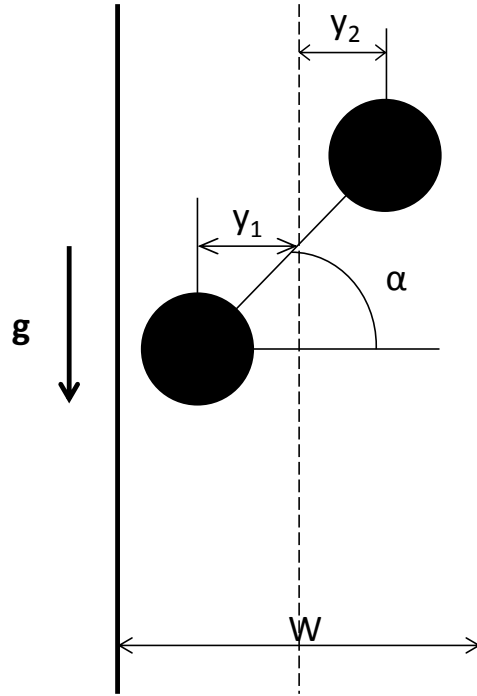


FIGURE V.2 – Représentation schématique de la sédimentation d'un doublet de particules en milieu confiné.

V.2 Doublement de période, cascade sous-harmonique et chaos

$$(120 \leq F \leq 200)$$

[Aidun et Ding \(2003\)](#) ont étudié la sédimentation d'un doublet de particules pour $120 \leq F \leq 200$. Pour cette gamme de force volumique, nos calculs sont en bon accord avec ces auteurs. Le comportement des particules et le nombre de Reynolds terminal R_{eT} sont présentés dans cette section.

La figure [V.5](#) présente R_{eT} en fonction de F . Nous observons, en augmentant F , que deux structures sédimentaires stables coexistent (Cf. figure [V.4](#)). La branche inférieure est un doublet oblique stationnaire, et la branche supérieure est un doublet oblique qui oscille périodiquement avec une période T bien déterminée ($T = 1.814s$ pour $F = 145.217$). Dans le plan (F, R_{eT}) , ces deux structures correspondent à deux branches induisant un phénomène d'hystérésis (Cf. figure [V.5](#)). La branche inférieure correspond au doublet oblique stationnaire.



FIGURE V.3 – **Sédimentation de deux particules** : structure stationnaire en doublet oblique pour deux particules à un nombre de Reynolds terminal de chute $R_{eT} = 1.78$ et un confinement $W/D = 8$. D’après [Feng et al. \(1994\)](#)

Elles sont toutes les deux stables lorsque F est compris entre 130.74 et 147.63. Dans ce cas, la structure sédimentaire est entièrement déterminée par la position initiale des particules : les particules injectées dans le bassin d’attraction de la branche inférieure sédimenteront avec une structure de doublet oblique stationnaire, alors que celles injectées dans le bassin d’attraction de la branche supérieure sédimenteront avec une structure oblique oscillante. C’est dans ce second cas que la sédimentation sera la plus rapide (Cf. figure V.5). Pour les deux branches, la distance moyenne entre les particules est à peu-près identique ($\simeq 1.8 \pm 0.1D$) mais l’orientation moyenne est d’environ 20° pour la branche inférieure et 45° pour la branche supérieure. Pour un doublet de sphères, un alignement sur la verticale conduit à une vitesse de chute plus rapide que celle de sphères alignées horizontalement (voir par exemple [Guazzelli et al. \(2011\)](#)).

Ces résultats sont très proches de ceux de [Aidun et Ding \(2003\)](#), cependant ces auteurs observent que la branche inférieure est oscillante alors qu’elle est clairement stationnaire dans nos calculs, tout comme dans ceux de [Feng et al. \(1994\)](#). Cette différence peut être liée au code de calcul, une méthode DF/FD dans notre cas, ALE dans le cas de [Feng et al. \(1994\)](#) et méthode LBM pour l’étude d’[Aidun et Ding \(2003\)](#). Les oscillations décrites dans l’article d’[Aidun et](#)

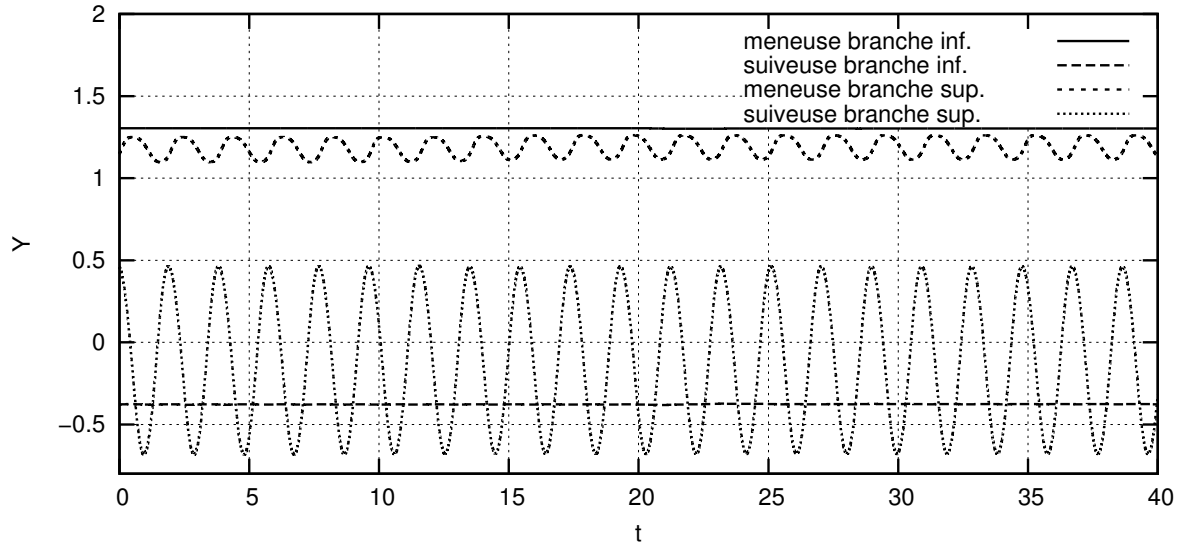


FIGURE V.4 – **Fort confinement** $W/D = 4$ et **Reynolds de l'ordre de l'unité** : évolution temporelle des positions transversales du doublet de particules pour $F = 136.77$. Deux structures coexistent pour ce même F qui apparaissent selon la position initiale des particules : la structure oblique stable et la structure oblique oscillante.

[Ding \(2003\)](#) sont de très faible amplitude sur la branche inférieure, $0.025D$, soit de l'ordre de sa maille fluide ($h = 0.03125D$). Nous avons lancé des calculs avec un maillage deux fois plus fin ($h = 1/64$) et un pas de temps très faible et nous trouvons toujours une structure qui se stabilise dans le temps.

La branche inférieure devient instable dès que $F = 147.63$ et seule la branche supérieure persiste au delà de cette valeur. Augmenter encore F conduit à une dynamique extrêmement complexe : la branche supérieure présente un doublement de période pour $F \simeq 146$ qui se reproduit à plusieurs reprises si l'on augmente encore F . La période de la structure sédimentaire passe alors de la valeur T à $2T$, $4T$... Il apparaît donc un phénomène de cascade sous-harmonique conduisant à une sédimentation chaotique du doublet de particules. La figure [V.6](#) montre le premier doublement de période $T \rightarrow 2T$. La figure [V.7](#) montre les deux derniers doublements de période que nous avons pu simuler ($4T$ et $8T$). La transition de $2T \rightarrow 4T$ a lieu pour $154.56 < F \leq 156.07$. La transition de $4T \rightarrow 8T$ a lieu pour $157.58 < F \leq 159.09$. La figure [V.8 \(a\)](#) montre la dynamique dans le plan (Y_1, Y_2) après un grand nombre de doublements de période : un attracteur chaotique assez similaire à celui de [Aidun et Ding \(2003\)](#) apparaît.

Pour des régimes d'écoulements plus importants, la structure sédimentaire redevient périodique. En effet, le phénomène 'Drafting Kissing and Tumbling' va se reproduire périodiquement

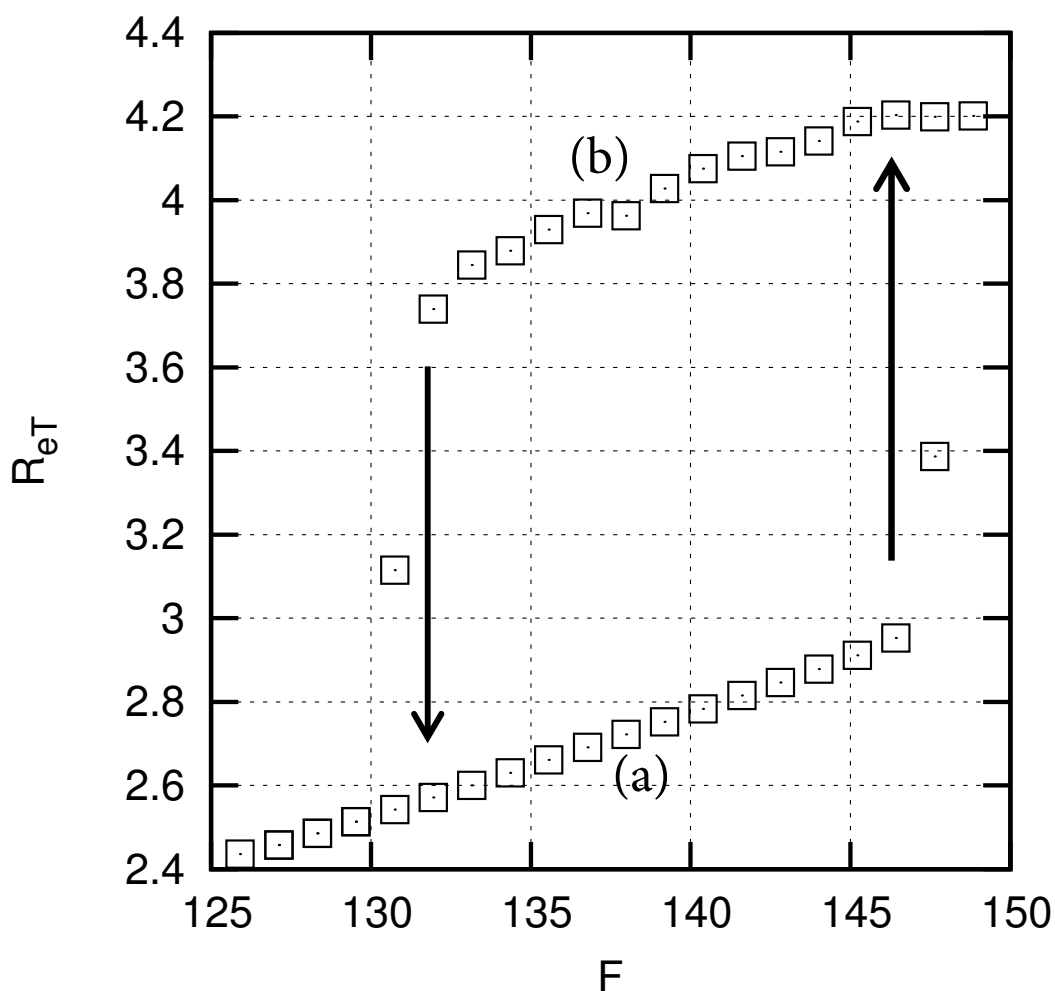


FIGURE V.5 – **Hystérésis pour** $130.74 \leq F \leq 147.63$: apparition d'un phénomène d'hystérésis dans le plan (F, R_{eT}) . Deux structures sédimentaires stables coexistent : doublet oblique stationnaire (a), doublet oblique oscillant (b). Le doublet oblique oscillant sédimente plus rapidement car l'orientation du doublet est plus proche de l'horizontale pour la branche inférieure.

(Cf. figure V.8 (b)). Par rapport au cas chaotique, les collisions font partie intégrante du phénomène.

Influence de la rotation propre des particules sur les structures sédimentaires obliques

Feng et al. (1994) et *Aidun et Ding* (2003) estiment que la structure oblique résulte d'un effet Magnus lié à la rotation des particules qui va s'opposer à l'action de répulsion des murs latéraux. Cependant, au chapitre précédent, nous avons vu que l'influence de la rotation est

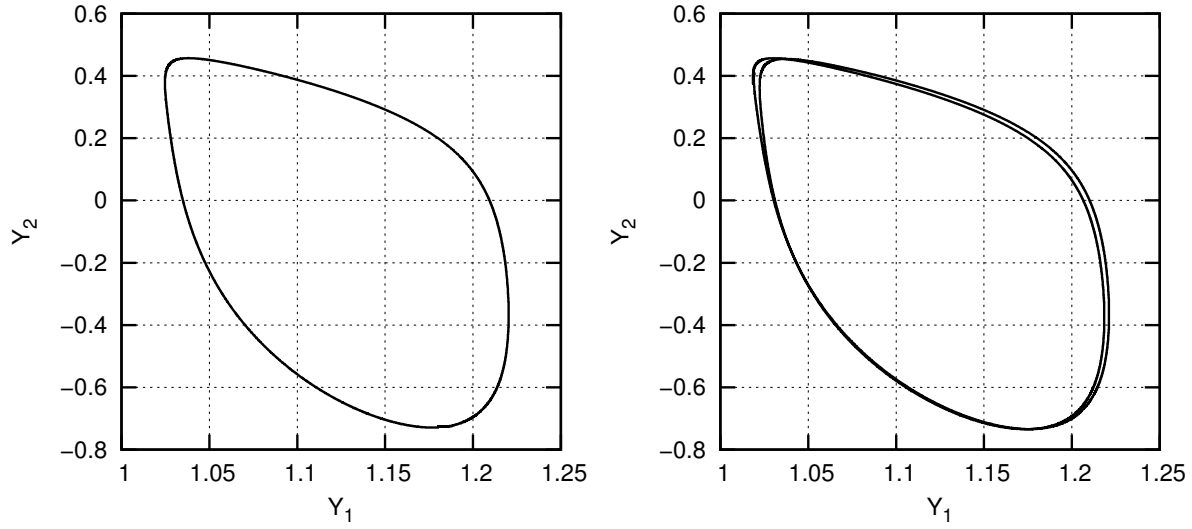


FIGURE V.6 – **Cascades sous-harmonique** : doublement de période dans de plan (Y_1, Y_2) . Figure de gauche : $F = 145.217$. Figure de droite : $F = 146.423$.

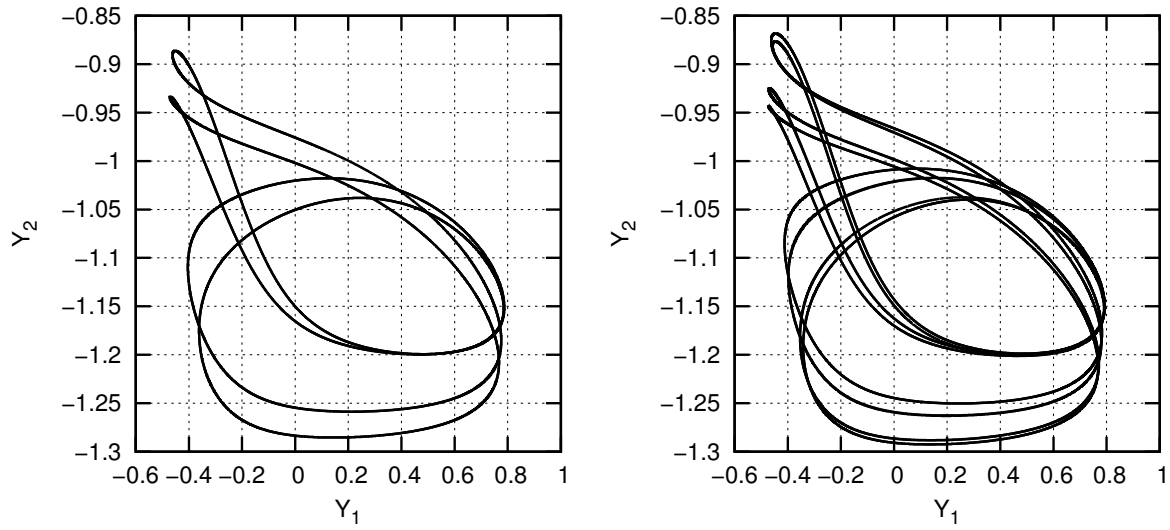


FIGURE V.7 – **Cascades sous-harmonique** : Période-4 et période-8 dans de plan (Y_1, Y_2) . Figure de gauche : $F = 156.07$. Figure de droite : $F = 159.09$.

minime sur les vitesses de chute et de migration d'une particule unique. Nous avons donc réalisé des simulations en bloquant la rotation des particules pour les comparer avec les résultats obtenus avec rotation.

La figure V.9 présente la dynamique des particules dans le plan (Y_1, Y_2) . Les trajectoires montrent clairement que la rotation n'a pas d'influence sur l'existence de la structure sédimentaire. Cependant, comme pour le cas d'une particule unique, la rotation a tout de même un effet

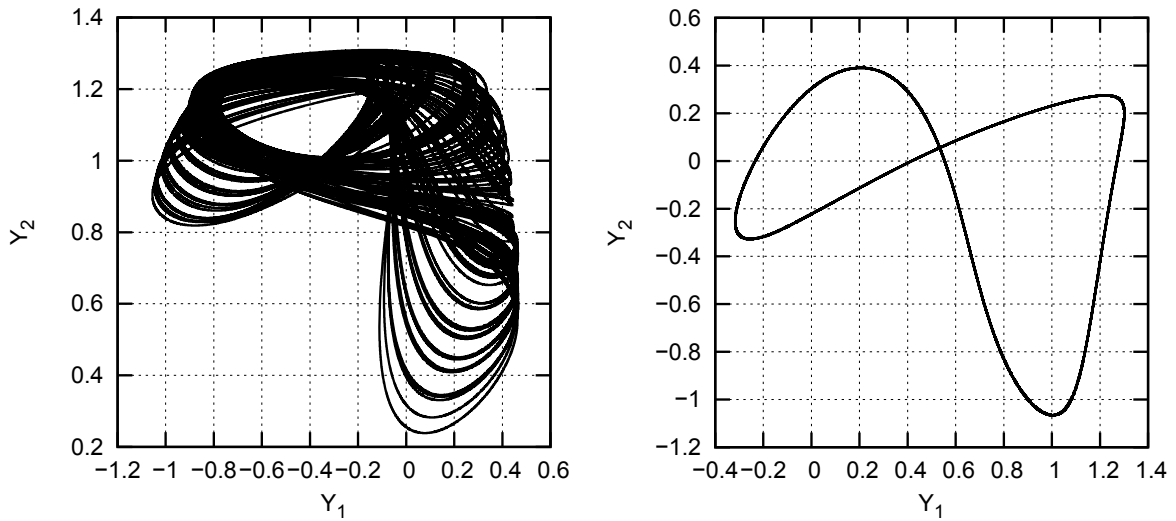


FIGURE V.8 – **Attracteur étrange et DKT** : (a) attracteur chaotique dans de plan (Y_1, Y_2) et phénomène pour $F = 197.68$. (b) DKT pour des régimes d'écoulements plus important pour $F = 241.61$.

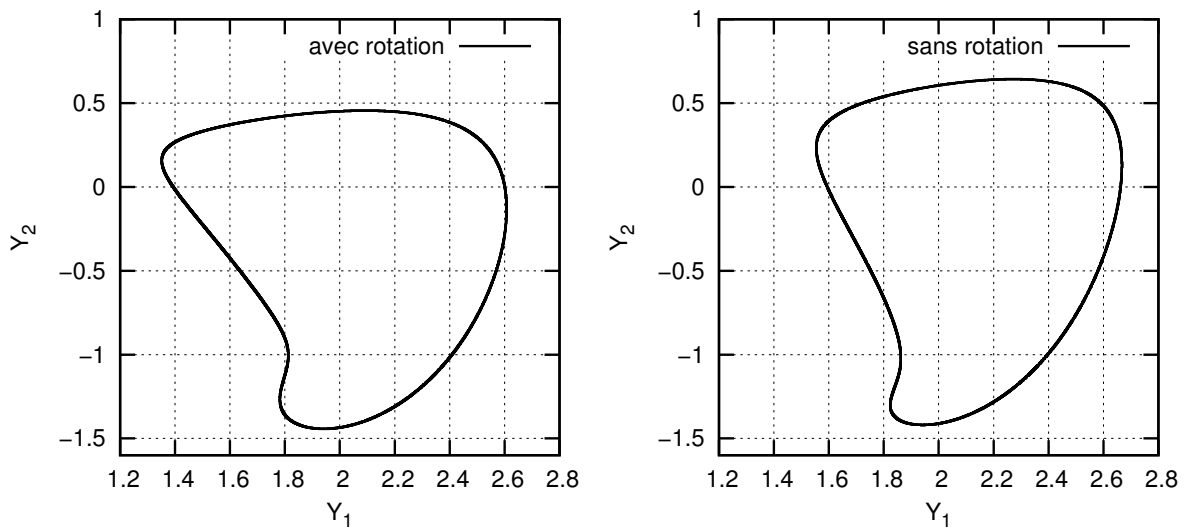


FIGURE V.9 – **Influence de la rotation sur l'existence de la structure oblique** : comparaison des trajectoires d'un doublet de particules (dans le deuxième cas, la rotation est supprimée) dans le plan (Y_1, Y_2) . La rotation n'a pas d'influence sur l'existence de la structure oblique.

non-négligeable sur les efforts horizontaux. Cela a de légères conséquences sur l'amplitude des oscillations et sur les positions moyennes d'équilibre. La rotation des particules ne peut pas expliquer à elle-seule l'existence de cette structure particulière.

V.3 Une deuxième route vers le chaos : nouvelle structure et quasi-périodicité ($400 \leq F \leq 530$)

Proche de $F \simeq 400$, nous observons que le phénomène DKT disparaît et laisse place à une structure horizontale stable (Cf. figure V.10). Son existence est indépendante de la position initiale des particules. A notre connaissance, cette structure n'avait jamais été observée pour ce confinement. Dans cette configuration, les particules sont symétriques par rapport à l'axe vertical du canal. Leur sens de rotation est celui d'une particule qui roulerait sur le mur le plus proche durant sa chute. La dynamique des deux particules, au voisinage de cette position horizontale, devient périodique puis chaotique avec l'augmentation de F . Contrairement au DKT, la dynamique que nous observons est seulement régie par les interactions hydrodynamiques. Nous proposons maintenant de détailler cette nouvelle route vers le chaos.

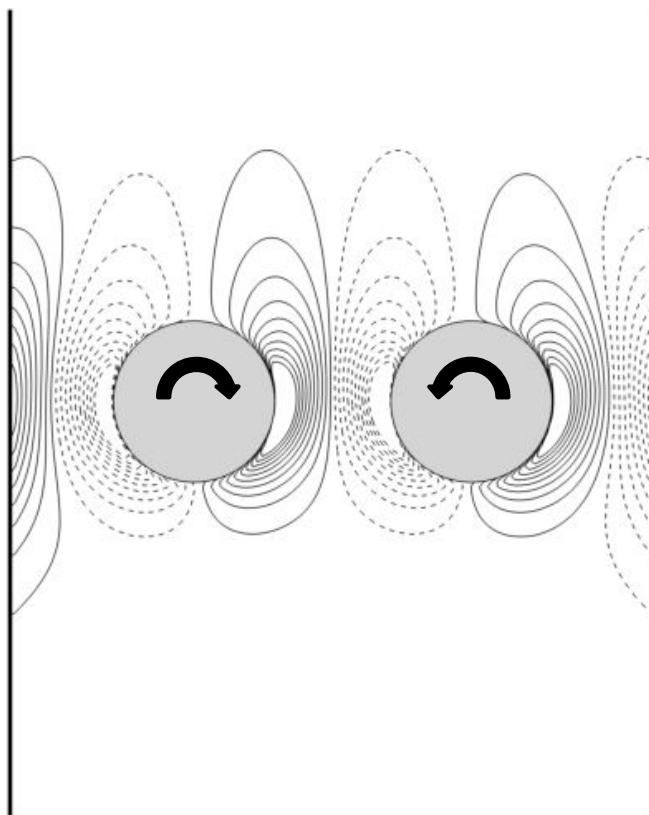


FIGURE V.10 – **Structure horizontale symétrique stable** $F = 400.12$: la structure formée par les particules est symétrique par rapport à l'axe vertical du domaine. Le sens de rotation est indiqué sur la figure. Les contours de vorticité montrent une parfaite symétrie de l'écoulement suivant l'axe vertical.

La figure V.11 présente la dynamique des particules dans le plan (Y_1, Y_2) pour un poids adimensionnel $F = 402.1$, ainsi que son spectre de puissance du signal $Y_1(t)$. La trajectoire est périodique de fréquence $f_1 \simeq 0.369 Hz$. En augmentant F ($F \simeq 420$), la trajectoire reste périodique et les premiers harmoniques de f_1 apparaissent (Cf. figure V.12). La dynamique des particules dans le plan de phase (Y_1, Y_2) décrit alors un cycle périodique. La taille du cycle va augmenter avec l'augmentation du poids adimensionnel F .

La dynamique périodique perdure jusqu'à $F \simeq 486$. A partir de cette valeur, la dynamique des particules devient quasi-périodique à deux fréquences, f_1 et f_2 . Un exemple est donné sur la figure V.13. Dans ce cas, les positions des différents pics du spectre de puissance du signal $Y_1(t)$ sont des combinaisons linéaires des fréquences f_1 et f_2 comme nous le montrons sur la figure V.14.

Enfin lorsque $F \simeq 507$, le spectre de puissance du signal $Y_1(t)$ devient complètement bruité, caractéristique d'une dynamique chaotique (Cf. figure V.15).

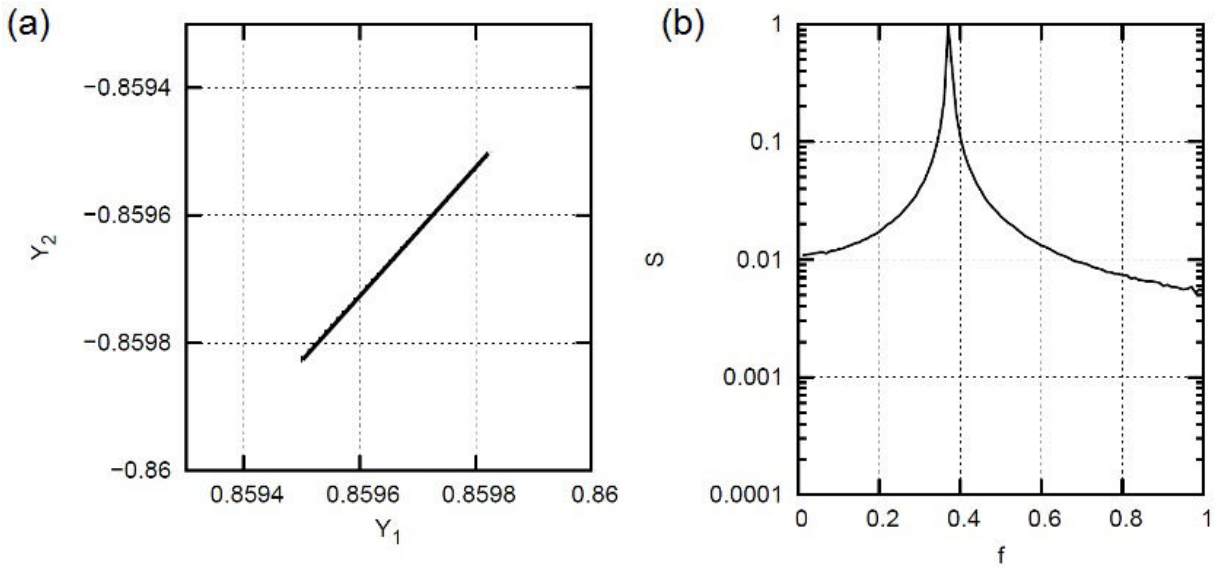


FIGURE V.11 – **Structure horizontale périodique** ($F = 402.12$) : (a) dynamique périodique dans le plan (Y_1, Y_2) . (b) spectre de puissance du signal $Y_1(t)$. La fréquence est $f_1 = 0.369 Hz$.

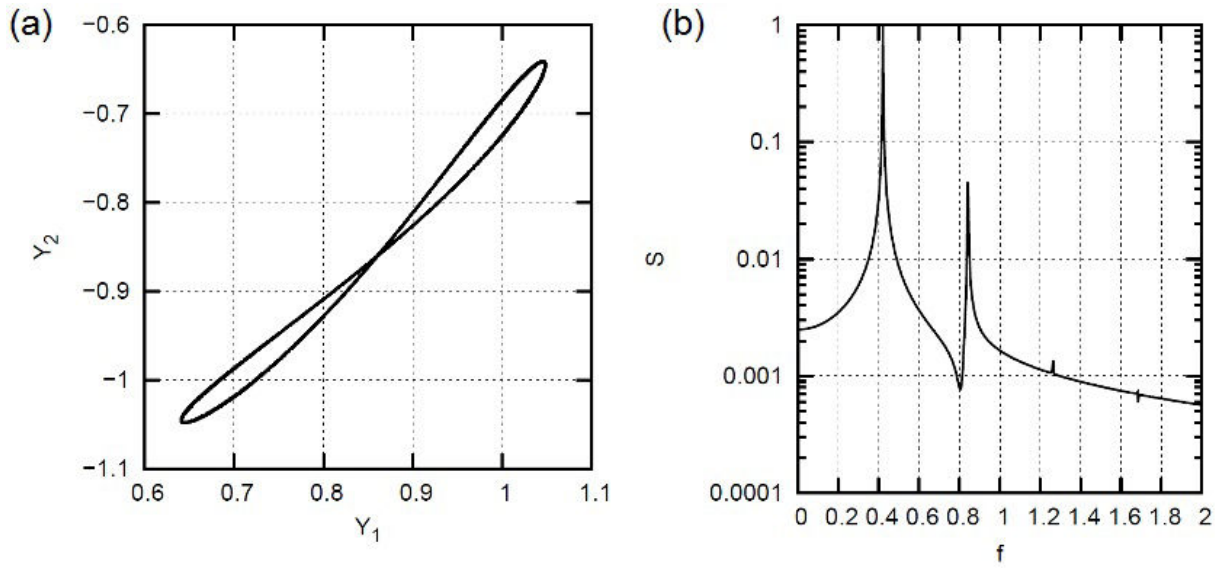


FIGURE V.12 – **Structure horizontale périodique à deux périodes** ($F = 480$) : (a) dynamique périodique dans le plan (Y_1, Y_2) . (b) spectre de puissance du signal $Y_1(t)$. Le spectre de puissance fait apparaître les harmoniques de la fréquence f_1 ($f_1 \simeq 0.421 Hz$).

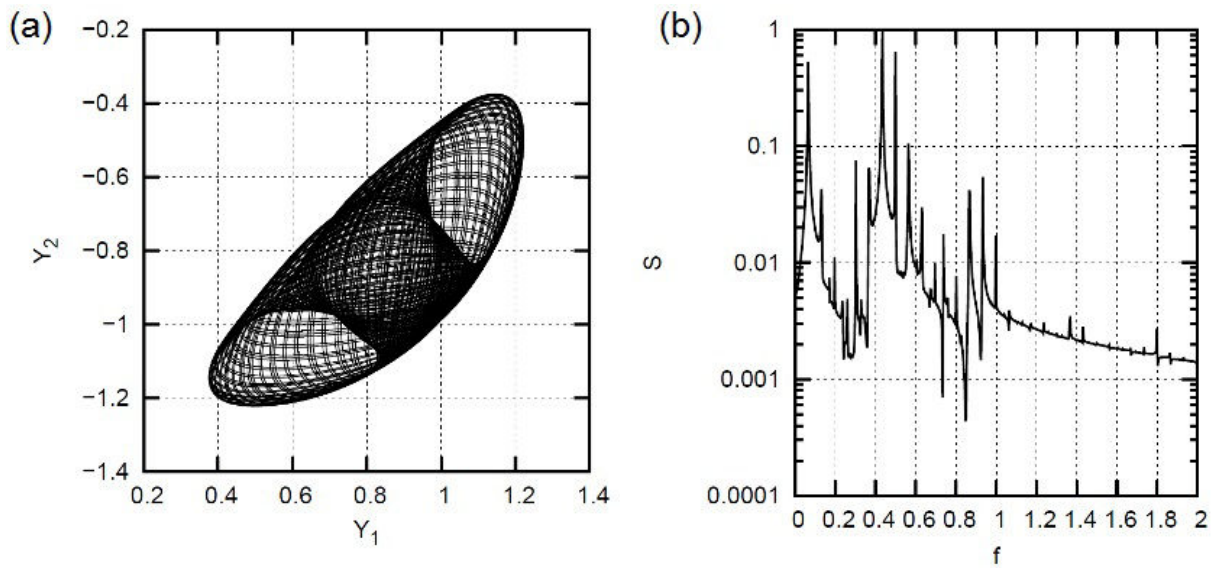


FIGURE V.13 – **Structure horizontale quasi-périodique à deux fréquences** ($F = 489.5$) : (a) dynamique quasi-périodique dans le plan (Y_1, Y_2) . (b) spectre de puissance du signal $Y_1(t)$. Le signal est quasi-périodique de fréquences $f_1 \simeq 0.434 Hz$ et $f_2 \simeq 0.064 Hz$.

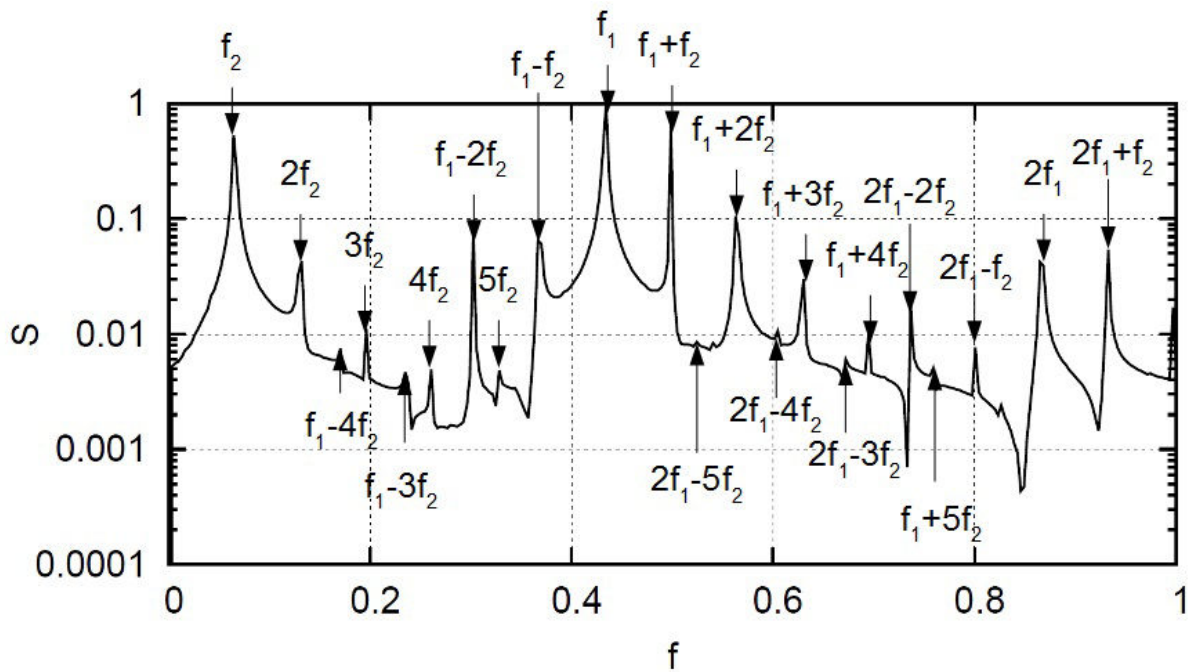


FIGURE V.14 – **Structure horizontale quasi-périodique à deux fréquences** ($F = 489.5$) : spectre de puissance du signal $Y_1(t)$. Les positions des pics du spectre de puissance sont des combinaisons linéaires des fréquences f_1 et f_2 ($f_1 \simeq 0.434 \text{ Hz}$ et $f_2 \simeq 0.064 \text{ Hz}$), caractéristiques d'un signal quasi-périodique à deux fréquences.

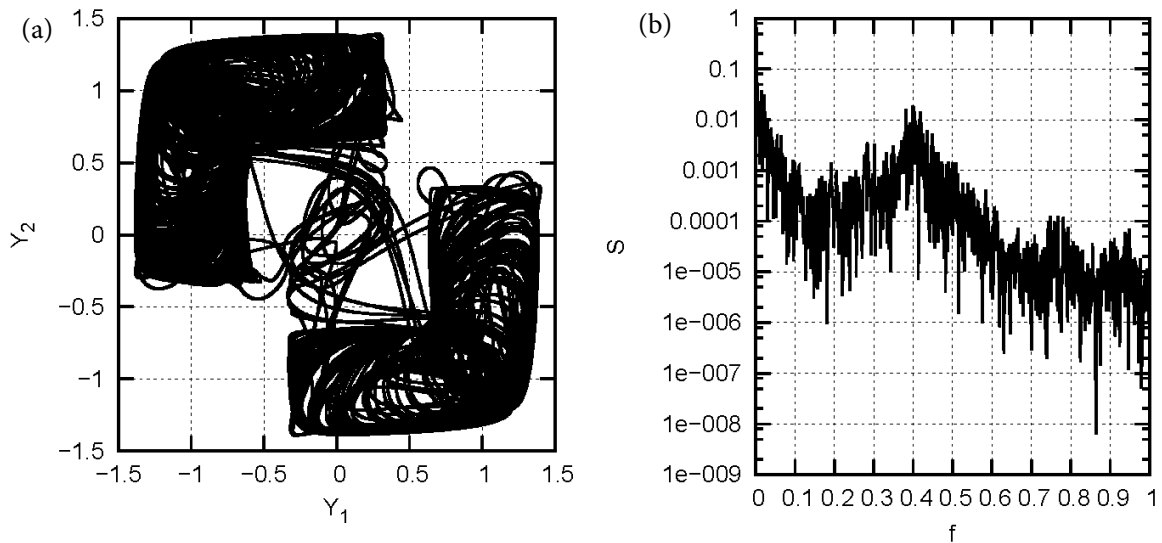


FIGURE V.15 – **Chaos** ($F = 527.78$) : (a) dynamique chaotique dans le plan (Y_1, Y_2) . (b) spectre de puissance du signal $Y_1(t)$. Le signal est bruité, caractéristique d'une dynamique chaotique.

Nos résultats suggèrent donc une route vers le chaos *via* un régime quasi-périodique en accord avec la théorie de Ruelle-Takens ([Ruelle et Takens \(1971\)](#)) :

- (i) une position d'équilibre horizontale stable ($F < 402$)
- (ii) un régime périodique de période f_1 ($402 \leq F < 486$)
- (iii) un régime quasi-périodique à deux fréquences f_1 et f_2 ($486 \leq F < 507$)
- (iv) un attracteur chaotique pour $F \geq 507$

V.4 Conclusion du chapitre : diagramme de bifurcation global

Conséquence de la dynamique complexe et des diverses bifurcations étudiées dans les sections précédentes, la vitesse terminale de chute du doublet est une fonction fortement non-linéaire de F . La figure [V.16](#) présente l'évolution de R_{eT} en fonction de F pour toute la gamme examinée dans cette thèse. La vitesse de chute est avant tout déterminée par la structure formée par les particules. Cette structure est dépendante, dans certains cas, de la position initiale des particules. Pour une même force, il est donc nécessaire de connaître la position initiale du doublet pour pouvoir prédire sa vitesse de chute. Pour $120 \leq F \leq 200$, nous retrouvons les deux états découverts par [Aidun et Ding \(2003\)](#), suivis par une cascade sous-harmonique et un attracteur chaotique. Le DKT est visible pour $250 \leq F \leq 300$ et il coexiste avec la nouvelle structure horizontale pour $F \lesssim 400$, puis disparaît. La structure horizontale correspond à une sédimentation relativement lente par rapport au DKT. Elle bifurque à plusieurs reprises (un équilibre stable, un régime périodique et un régime quasi-périodique à deux périodes). Cette quasi-périodicité mène à un nouvel attracteur chaotique.

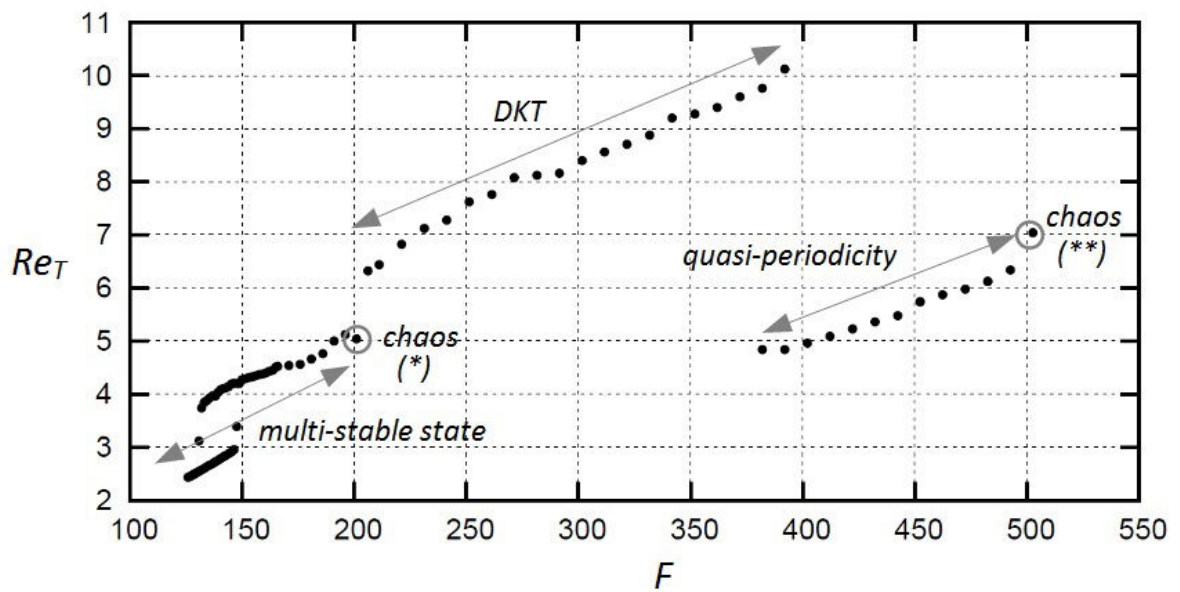


FIGURE V.16 – Evolution du nombre de Reynolds terminal de chute Re_T avec F . Les deux points marqués d'un astérisque correspondent à une sédimentation chaotique : (*) attracteur d'[Aidun et Ding \(2003\)](#), (**) attracteur mis en évidence dans cette thèse.

Chapitre VI

Sédimentation d'une suspension de particules à bas nombre de Reynolds.

Dans ce chapitre, nous analysons la sédimentation d'un grand nombre de particules dans un domaine fermé. Nous comparons nos résultats aux deux seules références connues ([Wachmann et al. \(1998\)](#), [Höfler et Schwarzer \(2000\)](#)). Nos résultats sont en désaccord avec ceux de [Wachmann et al. \(1998\)](#), lesquels ont été obtenus avec une méthode de particules ponctuelles ("four way-coupling"). Par contre, nous sommes en accord avec les résultats de [Höfler et Schwarzer \(2000\)](#) qui ont été obtenus avec une méthode IBM. A la fin du processus de sédimentation et à forte concentration, l'interface fluide-particules a un comportement qualitativement proche des sédiments cohésifs. Cet effet paradoxal est attribué au caractère bidimensionnel de notre écoulement.

VI.1 Introduction

Le sédimentation d'un grand nombre de particules dans une colonne à été très étudiée depuis les années 50. La compréhension de ce phénomène présente un grand intérêt dans l'industrie ou les sciences environnementales. La loi empirique la plus utilisée pour prédire la vitesse moyenne de suspensions de *sphères* en fonction de la concentration est sans aucun doute celle

de [Richardson et Zaki \(1954\)](#) :

$$U_s = U_{s0}(1 - \Phi)^{n(R_{ep}, W/D)} \quad (\text{VI.1})$$

où U_s est la vitesse moyenne de chute de la suspension définie plus bas, U_{s0} est la vitesse de Stokes d'une sphère en milieu infini, Φ est la fraction volumique solide et n est un exposant empirique. Il dépend du nombre de Reynolds ($R_{ep} = U_{s0}D/\nu$) et du paramètre de confinement (W/D) (voir par exemple [Peker et Helvaci \(2007\)](#)). La relation donnée par [Richardson et Zaki \(1954\)](#) est valable pour une vaste gamme de confinements et de nombres de Reynolds, mais n'est pas applicable directement à la sédimentation de disques. Il existe cependant très peu de références bibliographiques sur le problème bidimensionnel, si ce n'est les études numériques de [Wachmann et al. \(1998\)](#) avec un modèle "point-particle" et [Höfler et Schwarzer \(2000\)](#) avec un modèle de type frontière immergée.

Ces auteurs considèrent la sédimentation de disques à R_{ep} de l'ordre de l'unité et deux confinements ($W/D = 18$ et $R_{ep} \simeq 1$ pour [Wachmann et al. \(1998\)](#), un domaine bipériodique et $R_{ep} \simeq 0.1$ pour [Höfler et Schwarzer \(2000\)](#)). Ils observent que la vitesse de chute suit une loi de type Richardson- Zaki (RZ) avec un exposant $n \simeq 3.3$ pour [Wachmann et al. \(1998\)](#) et $n \simeq 3.8$ pour [Höfler et Schwarzer \(2000\)](#), à condition de prendre une vitesse de référence U_{s0} égale à celle d'un disque unique qui chute au centre du domaine. Ces références étant très partielles, nous avons décidé de mener des simulations avec notre code de calcul pour deux confinements ($W/D = 11$ et 22) dans lesquels nous avons testé deux viscosités ($\nu = 0.05\text{cm}^2/\text{s}$ et $\nu = 0.25\text{cm}^2/\text{s}$), soient quatre nombres de Reynolds particuliers R_{ep} compris entre 0.1 et 2.6. Notre objectif est de vérifier la validité de la loi de puissance de type RZ en deux dimensions et d'analyser l'évolution de n avec le confinement W/D et le nombre de Reynolds R_{ep} .

Le domaine de calcul (Cf. Figure [VI.1](#)) est fermé et sa longueur $L = 200D$. Initialement, les particules sont uniformément réparties dans tout le domaine sur une hauteur $H_0 = 176D$. On note $H(t)$, la hauteur de l'interface fluide-particules à l'instant t . Pour chaque nombre de Reynolds et chaque paramètre de confinement, nous avons fait six simulations correspondant à six fractions volumiques initiales différentes ($0.026 \leq \Phi \leq 0.32$). La taille de la maille fluide est $h = D/16$ et le pas de temps est égal à 0.0005 pour $R_{ep} = 0.11$ à 0.002 pour $R_{ep} = 2.6$. La densité des particules est $\rho_p = 1.1$ et leur diamètre $D = 800\mu\text{m}$. La durée des simulations

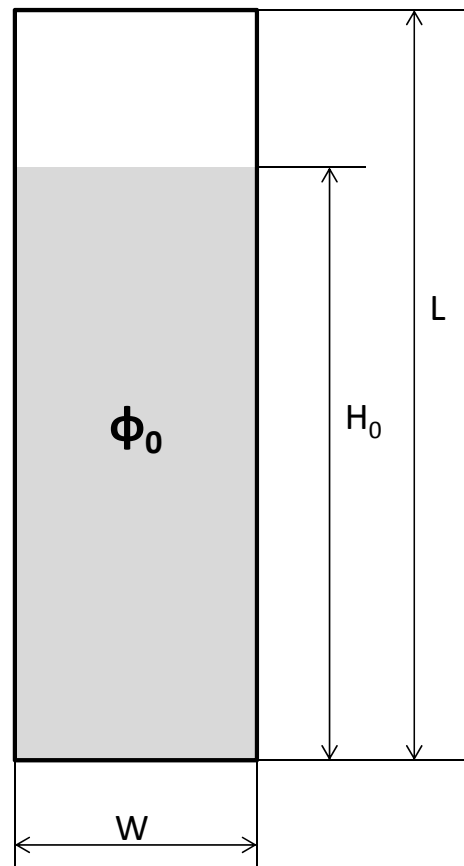


FIGURE VI.1 – Représentation schématique de la sédimentation d'un grand nombre de particules en milieu confiné. W est la largeur du canal, H_0 est la hauteur initiale de la suspension de fraction volumique Φ_0 .

varie de deux semaines pour $\Phi = 0.026$ et $W/D = 11$ à un mois et demi pour $Phi = 0.32$ et $W/D = 22$.

Nous présentons, dans un premier temps, une description phénoménologique du processus de sédimentation en deux dimensions. Dans un deuxième temps, nous présentons l'évolution de la hauteur $H(t)$ de l'interface fluide-particules en fonction du temps. Enfin, nous calculons la vitesse de chute en fonction de la fraction volumique solide (Φ) obtenue pour les différents cas. Ces vitesses seront comparées à la loi de type RZ.

VI.2 Description phénoménologique et variation de l'interface fluide-particules $H(t)$

La figure VI.2 présente l'évolution temporelle du processus de sédimentation. A l'instant $t = 0$, les particules sont réparties de façon homogène dans tout le domaine. Après quelques instants la structure initiale va se déstabiliser et se mettre en mouvement. Proche du fond, on retrouve une interface séparant un domaine très concentré d'un autre domaine ayant conservé la concentration initiale. Ceci est consistant avec le phénomène de sédimentation en colonne décrit expérimentalement par [Winterwerp et van Kesteren \(2004\)](#).

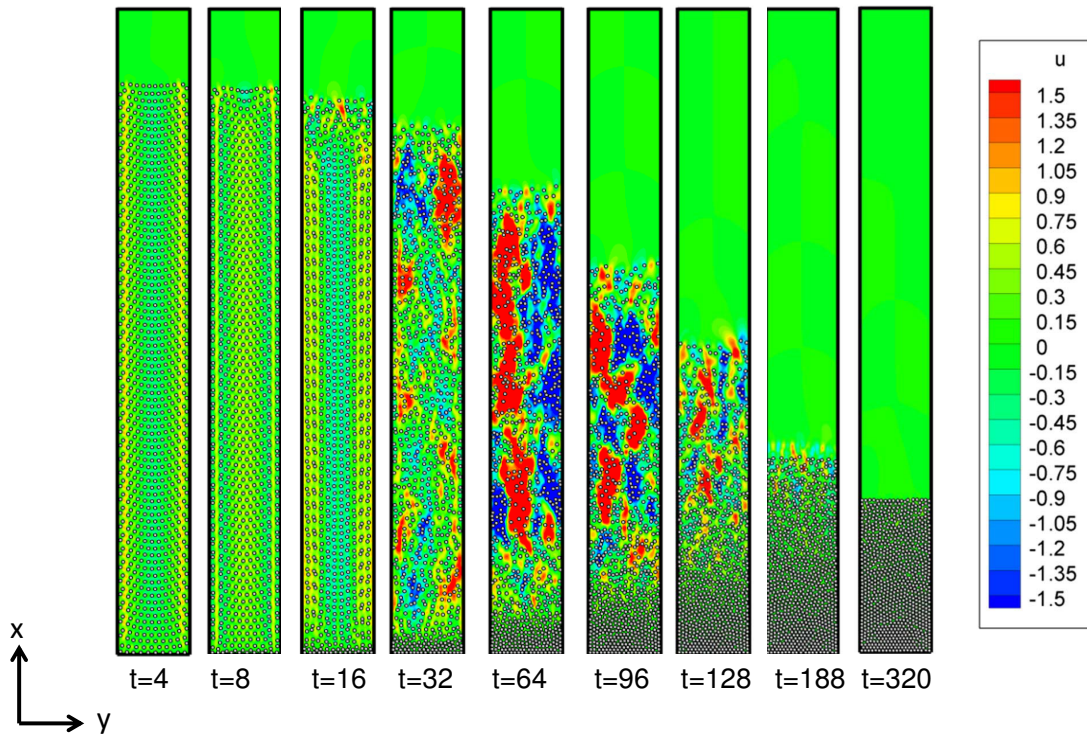


FIGURE VI.2 – **Sédimentation d'un grand nombre de particules** : visualisation de l'évolution de la suspension.

La figure VI.3 présente l'évolution temporelle de la hauteur de l'interface $H(t)/H_0$ pour les cas $W/D = 22$ et $\nu = 0.05 \text{ cm}^2/\text{s}$. Après que le processus ait commencé, la vitesse de l'interface est constante. Pour les plus faibles fractions volumiques ($\Phi = 0.026$ et 0.058), les particules sont soit dans la suspension, soit dans le lit. En effet, sur ces deux courbes, nous remarquons une cassure nette à $t \simeq 230 \text{ s}$ lorsque $\Phi = 0.026$ et à $t \simeq 300 \text{ s}$ lorsque $\Phi = 0.058$. Tandis que pour les fractions volumiques plus élevées, il existe une zone tampon de fraction vo-

luminique intermédiaire qui s'apparente au phénomène de chute entravée des sédiments cohésifs. Plus la fraction volumique est élevée et plus cette zone tampon est importante. Pour une suspension de sphères non-cohésives, cette zone tampon n'existe pas. Or nous l'observons dans nos simulations où les forces de cohésion sont absentes. Ce paradoxe vient très certainement du fait qu'à forte concentration et en deux dimensions, le fluide a beaucoup plus de mal à être expulsé et des phénomènes de blocage peuvent subvenir. Ces simulations mettent donc en évidence un effet de "blocage bidimensionnel".

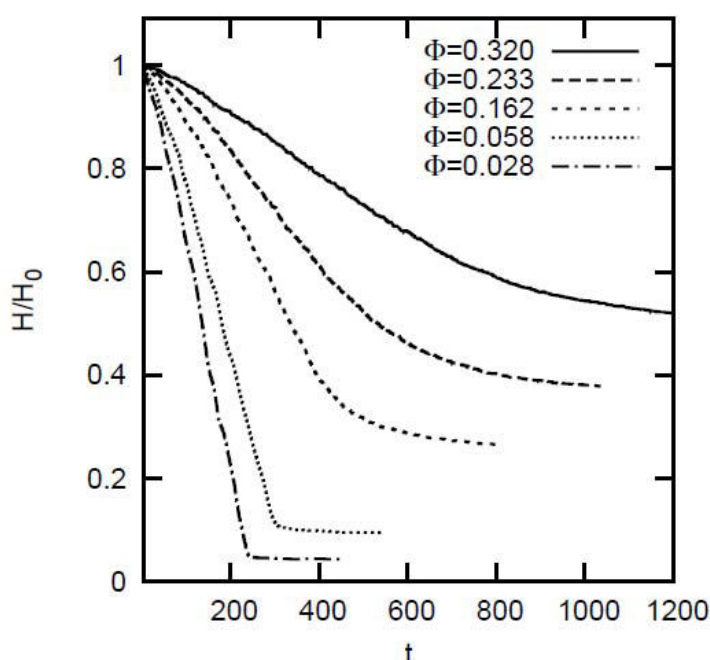


FIGURE VI.3 – **Sédimentation d'un grand nombre de particules** : évolution de la hauteur de l'interface entre le fluide et la suspension.

VI.3 Vitesse de chute moyenne en fonction de la fraction volumique Φ

Nous proposons maintenant de calculer la vitesse de chute en fonction de la fraction volumique solide Φ pour nos différents cas d'étude. Pour obtenir la vitesse de chute moyenne de la suspension, nous avons calculé la pente de $H(t)$ lorsque la vitesse de l'interface est constante. Une variante de cette méthode consiste à réaliser une moyenne spatio-temporelle sur une aire de contrôle. Nous avons rejeté cette méthode car à très faible concentration, le nombre d'inclu-

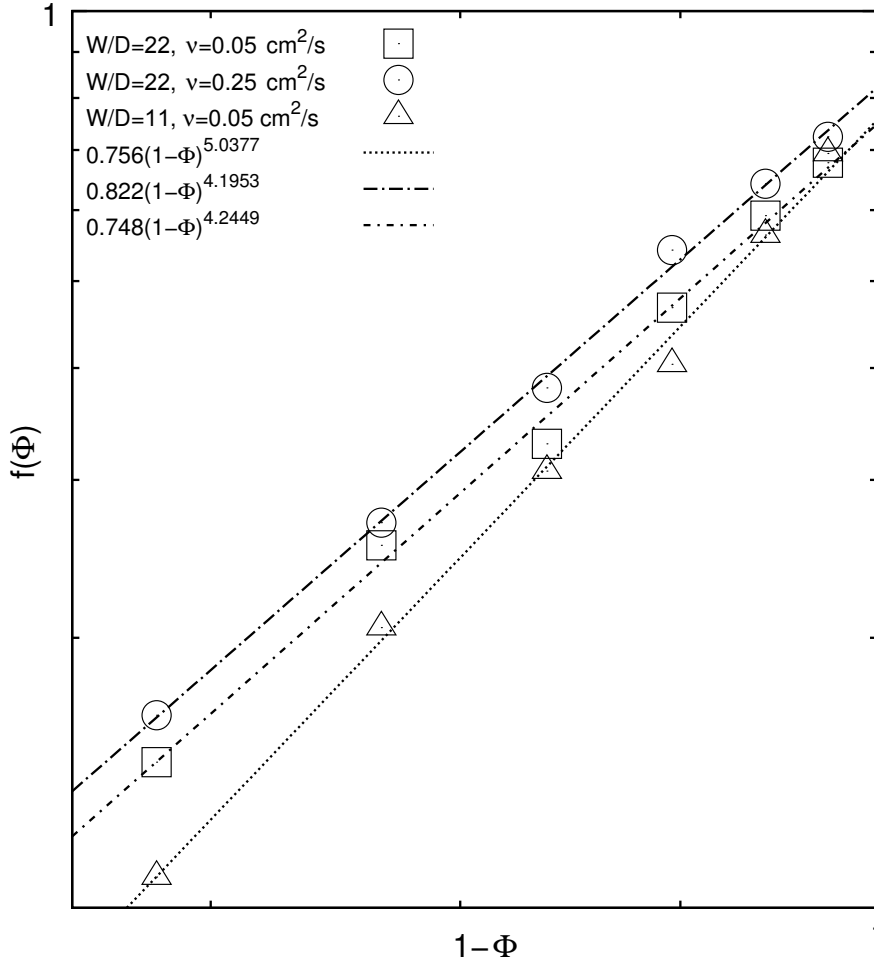


FIGURE VI.4 – **Sédimentation d'un grand nombre de particules** : évolution de la vitesse moyenne de sédimentation U_s , adimensionnée par la vitesse de chute d'une particule centrée U_{s0} , en fonction de la fraction volumique fluide $(1 - \Phi)$.

sions n'est pas suffisant pour obtenir des résultats convenables ([Crowe et Tsuji \(1998\)](#)). En effet, d'après ces mêmes auteurs, les moyennes d'ensemble doivent être réalisées avec un échantillon de 10^5 particules pour que celles-ci aient un sens. Pour notre fraction volumique maximale ($\Phi = 0.32$), nous ne simulons que 1666 inclusions.

La figure VI.4 présente l'évolution de la vitesse de chute U_s adimensionnée par U_{s0} en fonction de la fraction volumique fluide $(1 - \Phi)$ pour les trois différents cas. Les courbes en loi de puissance ont été ajoutées sur la courbe, avec celles obtenues par [Wachmann et al. \(1998\)](#) et par [Höfler et Schwarzer \(2000\)](#). Nous observons que nos résultats sont relativement bien décrits

par une loi de puissance de type RZ de la forme :

$$U_s = U_{s0}K(1 - \Phi)^n \quad (\text{VI.2})$$

avec K et n données sur la figure VI.4. Premièrement, nous observons que le confinement a un effet important sur la valeur n . Tout comme pour des sphères, le confinement le plus fort ($W/D = 11$) créé un entravement plus important. Deuxièmement, le régime d'écoulement a peu d'effet sur la valeur de l'exposant n , si ce n'est une légère diminution de celui-ci avec l'augmentation du nombre de Reynolds. Ceci est aussi observé pour des sphères (Cf. [Peker et Helvaci \(2007\)](#)).

La valeur $n = 3.3$ proposée par [Wachmann et al. \(1998\)](#), obtenue avec un modèle numérique 'point-particle' pour un confinement $W/D = 18$, est très sous-évaluée. Ceci peut être dû à une mauvaise prise en compte des échanges de quantité de mouvement entre la phase continue et la phase discrète. L'exposant $n = 3.8$ obtenu par [Höfler et Schwarzer \(2000\)](#) pour un domaine bipériodique est en bonne adéquation avec nos résultats.

VI.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié la sédimentation d'un grand nombre de particules dans un domaine fermé. Nous avons observé que la vitesse de chute de l'interface fluide-particules varie en loi de puissance avec la fraction volumique fluide (comme dans [Richardson et Zaki \(1954\)](#)) mais avec un exposant proche de 4, alors qu'il est généralement égal à 5 en trois dimensions. Nous confirmons ainsi les résultats de [Höfler et Schwarzer \(2000\)](#) ($n = 3.8$). Cet exposant augmente avec le confinement. Nous observons de plus un phénomène de blocage, inattendu pour des particules non-cohésives, dû au caractère 2D de la suspension.

Conclusion générale et perspectives

Dans cette thèse nous avons développé un code de simulation numérique directe, à partir d'une méthode particulièrement bien adaptée aux inclusions mobiles avec densité proche de celle du fluide. Nous l'avons validé sur de nombreux cas test puis nous l'avons utilisé pour analyser la sédimentation complexe de particules bidimensionnelles en milieu confiné.

La méthode est basée sur une approche de domaines fictifs (Chapitre II). Elle consiste à résoudre les équations de Navier-Stokes sur un domaine étendu comprenant le fluide et les particules. Le fluide qui se trouve à l'intérieur des inclusions est contraint à respecter un mouvement de corps rigide. Parmi le grand nombre de techniques de ce type, nous avons choisi la méthode "Direct-Forcing/Fictitious-Domain" de [Yu et Shao \(2007\)](#). Elle permet de résoudre explicitement les écoulements particuliers et ne nécessite pas de relation constitutive pour la résolution des efforts hydrodynamiques. De plus, elle est stable même si les particules ont une densité proche ou égale à celle du fluide, et ne nécessite pas un calcul explicite des efforts hydrodynamiques.

Notre algorithme est proposé en deux versions (notées M_1 et M_2 , Cf. page 28). La première permet d'obtenir des résultats précis pour les écoulements à bas nombre de Reynolds mais devient instable pour des régimes assez inertiels. La seconde version n'est pas adaptée aux écoulement à bas nombre de Reynolds car sa précision est de l'ordre de $\Delta t/R_e$. Cependant, nous avons observé qu'elle est particulièrement bien adaptée aux écoulements plus inertiels.

Au chapitre III, nous avons donc testé notre schéma numérique, dans ses deux versions, à partir de différents cas de validation : cylindre fixe, cylindre oscillant et cylindre libre de se mouvoir sous l'effet des efforts extérieurs. Un très bon accord quantitatif avec les principaux résultats de la littérature a été retrouvé dans ces divers cas. Ces résultats montrent que la fonction d'interpolation de [Roma et al. \(1999\)](#) est particulièrement bien adaptée à notre schéma numérique.

Nous avons analysé la sédimentation d'une particule unique en milieu confiné (Chapitre IV). La vitesse de chute reste proche de celle calculée en régime de Stokes tant que le nombre de Reynolds Re_p est inférieur 0.5. Au delà, l'inertie du fluide joue un rôle important. Cet effet est retardé par le confinement. Dans le cas d'une particule excentrée, nous retrouvons la survitesse de [Harper et Chang \(1967\)](#) et montrons que celle-ci diminue puis disparaît avec l'augmentation de Re_p . Nous revisitons la théorie de la lubrification et montrons qu'elle donne de bons résultats pour les efforts hydrodynamiques en proche paroi. Enfin nous montrons que la rotation a un effet mineur sur la migration horizontale et sur la vitesse de chute.

La sédimentation d'un doublet de particules (Chapitre V) en milieu confiné montre une dynamique beaucoup plus complexe. En augmentant graduellement le poids adimensionnel, nous retrouvons le comportement global trouvé par [Aidun et Ding \(2003\)](#) : états multiples et hystérésis, cascade sous-harmonique et attracteur chaotique. Cette succession de bifurcations est suivie d'un régime de DKT dont nous montrons qu'il peut coexister avec une structure sédimentaire en doublet horizontal, jamais observée à notre connaissance. Cette structure horizontale correspond à une sédimentation lente. En augmentant encore graduellement le poids adimensionnel des particules, nous observons que ce doublet horizontal bifurque vers un nouvel attracteur chaotique, par la voie de la quasi-périodicité. En effet, cette structure bifurque à trois reprises : sédimentation en doublet horizontal stationnaire, puis périodique, puis quasi-périodique à deux périodes, et chaos. Nous terminons ce chapitre en donnant le diagramme de bifurcation global, reliant le nombre de Reynolds terminal au poids adimensionnel des inclusions. La complexité du phénomène de sédimentation y est clairement visible : diverses branches coexistent, correspondant à diverses vitesses de sédimentation et à des dynamiques très différentes.

La sédimentation d'un grand nombre de particules dans un domaine fermé fait l'objet du dernier chapitre de la thèse (Chapitre VI). Nous observons que la vitesse de chute de l'interface fluide-particules suit une loi de puissance en fonction de la fraction volumique du fluide, similaire à celle observée en trois dimensions ([Richardson et Zaki \(1954\)](#)), mais avec un exposant proche de 4. Cet exposant dépend du confinement. Enfin, nous observons un phénomène de blocage, comme dans le cas de particules cohésives. Cet effet inattendu peut être interprété comme une conséquence du caractère bidimensionnel de l'étude.

Comme perspective de cette thèse, une étude détaillée de la structure du nouvel attracteur, mis en évidence au chapitre V, pourrait être réalisée. Le calcul de sa dimension fractale, mais

aussi son évolution lorsque l'on augmente le poids adimensionnel de la particule, permettrait de compléter le diagramme de bifurcation que nous avons obtenu (Cf. figure V.16). Nous avons déjà en partie étudié cette question, et avons observé un retour à la périodicité en forme de doublet oblique oscillant, lorsque le poids adimensionnel $F \geq 500$. De même, l'effet du confinement sur ces divers comportements complexes pourra être étudié par de nouveaux calculs. En particulier, le nouvel attracteur et la dynamique chaotique existent-ils encore dans des domaines plus larges ? Dans un domaine très large, la dynamique du doublet est forcément régulière (*Jayaweera et al. (1964)*). L'existence d'un confinement critique au-dessus duquel les phénomènes complexes apparaissent est à examiner.

Dans le cas d'un grand nombre de particules, il serait intéressant de déterminer la valeur de l'exposant n (équation (VI.2)) en fonction du nombre de Reynolds et du confinement, comme cela a été fait en trois dimensions (voir par exemple *Peker et Helvaci (2007)*). Il serait aussi intéressant de réaliser les mêmes tests pour des particules polydispersées. Dans une étude préliminaire (Cf. figure VI.5, ci-dessous), nous avons réalisé une première série de simulations d'une suspension d'une centaine de particules tri-dispersées. Nous retrouvons les comportements usuels de ségrégation. Une étude plus quantitative est à mener.

Enfin, toutes les études présentées ici pourront être étendues aux cas de particules de formes quelconques. La discrétisation par points colocalisés nous permet, en effet, de ne pas être limité sur les formes des particules. Cependant, il est avant tout nécessaire d'implémenter une autre stratégie plus réaliste pour la gestion des contacts (voir par exemple *Wachs (2009)*, *Topin et al. (2011)*).

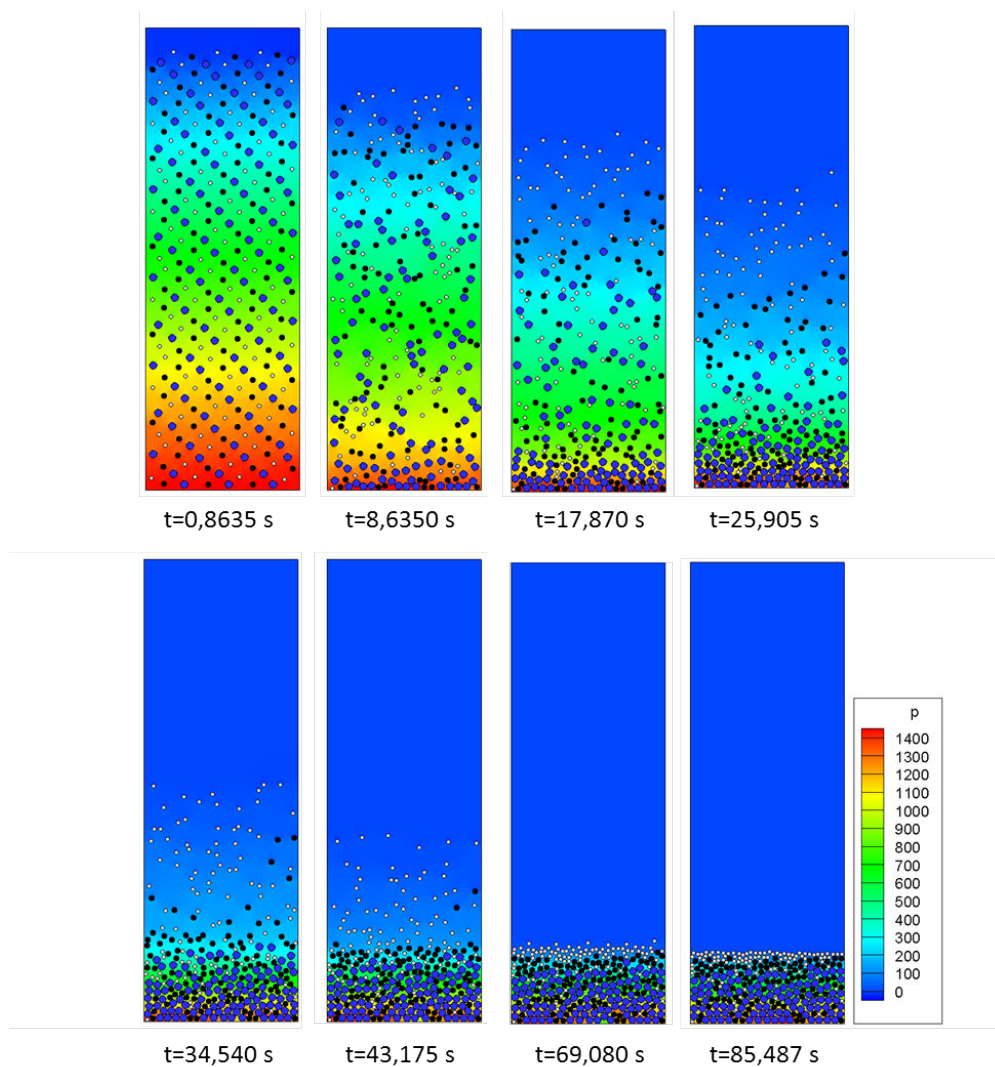


FIGURE VI.5 – **Perspective** : sédimentation d’une suspension de particules tri-dispersées à bas nombre de Reynolds ($R_{ep} = 0.1$), pour une fraction volumique solide initiale $\Phi = 0.107$. Simulations réalisées avec la version M_1 du code développé dans cette thèse (voir [Verjus et Guilou \(2013\)](#)).

Bibliographie

- Aidun, C. K., et E.-J. Ding (2003), Dynamics of particle sedimentation in a vertical channel : Period-doubling bifurcation and chaotic state, *Physics of Fluids*, 15, 1612. [14](#), [97](#), [98](#), [99](#), [100](#), [101](#), [102](#), [103](#), [110](#), [111](#), [122](#), [140](#), [142](#)
- Amoudry, L. O., et A. J. Souza (2011), Deterministic coastal morphological and sediment transport modeling : A review and discussion, *Reviews of Geophysics*, 49(2). [6](#)
- Andrews, M., et P. O’rourke (1996), The multiphase particle-in-cell (MP-PIC) method for dense particulate flows, *International Journal of Multiphase Flow*, 22(2), 379–402. [8](#)
- Brady, J. F., et G. Bossis (1988), Stokesian dynamics, *Annual Review of Fluid Mechanics*, 20, 111–157, doi :10.1146/annurev.fl.20.010188.000551. [8](#)
- Champmartin, S. (2006), Matrice de résistance et description du mouvement d’une particule en interaction hydrodynamique et conséquences du confinement asymétrique sur les phénomènes de transfert, Ph.D. thesis, Université d’Angers. [77](#), [79](#), [82](#), [84](#), [146](#)
- Chauchat, J. (2007), Contribution à la modélisation diphasique du transport sédimentaire en milieu côtier et estuarien, Ph.D. thesis, Université de Caen Basse-Normandie. [11](#)
- Chorin, A. J. (1968), Numerical solution of the Navier-Stokes equations, *Mathematics of computation*, 22(104), 745–762. [26](#)
- Crowe, S. M., C.T., et Y. Tsuji (1998), *Multiphase Flows With Droplets and Particles*, CRC Press. [11](#), [92](#), [118](#)
- De Mestre, N., et W. Russel (1975), Low-Reynolds-number translation of a slender cylinder near a plane wall, *Journal of Engineering Mathematics*, 9(2), 81–91. [76](#)

- Dvinsky, A., et A. Popel (1987), Motion of a rigid cylinder between parallel plates in stokes flow : Part 1 : Motion in a quiescent fluid and sedimentation, *Computers & Fluids*, 15(4), 391 – 404, doi :[http://dx.doi.org/10.1016/0045-7930\(87\)90031-4](http://dx.doi.org/10.1016/0045-7930(87)90031-4). [76](#)
- Feng, J., H. H. Hu, et D. D. Joseph (1994), Direct simulation of initial value problems for the motion of solid bodies in a newtonian fluid. Part 1. Sedimentation, *Journal of Fluid Mechanics*, 261, 95–134. [13](#), [49](#), [53](#), [55](#), [56](#), [57](#), [62](#), [66](#), [92](#), [93](#), [97](#), [98](#), [99](#), [101](#), [103](#), [140](#)
- Feng, J., P. Huang, et D. Joseph (1996), Dynamic simulation of sedimentation of solid particles in an Oldroyd-B fluid, *Journal of Non-Newtonian Fluid mechanics*, 63(1), 63–88. [77](#)
- Feng, Z.-G., et E. E. Michaelides (2004), The immersed boundary-lattice Boltzmann method for solving fluid–particles interaction problems, *Journal of Computational Physics*, 195(2), 602–628. [33](#), [69](#)
- Fortes, A. F., D. D. Joseph, et T. S. Lundgren (1987), Nonlinear mechanics of fluidization of beds of spherical particles, *Journal of Fluid Mechanics*, 177, 467–83. [13](#), [66](#), [68](#), [98](#)
- Glowinski, R., T.-W. Pan, T. Hesla, et D. Joseph (1999), A distributed Lagrange multiplier/fictitious domain method for particulate flows, *International Journal of Multiphase Flow*, 25(5), 755 – 794, doi :[10.1016/S0301-9322\(98\)00048-2](https://doi.org/10.1016/S0301-9322(98)00048-2). [8](#), [19](#), [20](#), [28](#), [31](#), [32](#), [33](#), [66](#), [68](#), [69](#), [98](#), [134](#)
- Glowinski, R., T. Pan, T. Hesla, D. Joseph, et J. Périaux (2001), A Fictitious Domain Approach to the Direct Numerical Simulation of Incompressible Viscous Flow past Moving Rigid Bodies : Application to Particulate Flow, *Journal of Computational Physics*, 169(2), 363 – 426, doi :[10.1006/jcph.2000.6542](https://doi.org/10.1006/jcph.2000.6542). [14](#), [21](#), [66](#)
- Guazzelli, E., J. Morris, et S. Pic (2011), *A Physical Introduction to Suspension Dynamics*, Cambridge Texts in Applied Mathematics, 256 pp., Cambridge University Press. [101](#)
- Guillou, S., et R. Makhloufi (2007), Effect of a shear-thickening rheological behaviour on the friction coefficient in a plane channel flow : A study by Direct Numerical Simulation, *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 144(2–3), 73 – 86, doi :[10.1016/j.jnnfm.2007.03.008](https://doi.org/10.1016/j.jnnfm.2007.03.008). [26](#), [33](#)

- Guillou, S., J. Thiébot, J. Chauchat, R. Verjus, A. Besq, D. Nguyen, et K. Pouv (2011), *The Filling Dynamics of an Estuary : From the Process to the Modelling*, chap. 6, pp. 125 –146, INTECH, doi :10.5772/19933. [5](#), [6](#), [133](#)
- Haeri, S., et J. Shrimpton (2012), On the application of immersed boundary, fictitious domain and body-conformal mesh methods to many particle multiphase flows, *International Journal of Multiphase Flow*, 40(0), 38 – 55, doi :10.1016/j.ijmultiphaseflow.2011.12.002. [19](#)
- Happel, J., et H. Brenner (1965), Low reynolds number hydrodynamics, 1965. [12](#), [47](#), [62](#), [76](#), [77](#)
- Harper, E. Y., et I.-D. Chang (1967), Drag on a cylinder between parallel walls in Stokes' flow, *Physics of Fluids (1958-1988)*, 10(1), 83–88. [12](#), [75](#), [76](#), [77](#), [78](#), [82](#), [83](#), [122](#), [138](#)
- Höfler, K., et S. Schwarzer (2000), Navier-Stokes simulation with constraint forces : Finite-difference method for particle-laden flows and complex geometries, *Physical Review E*, 61(6), 7146. [14](#), [20](#), [113](#), [114](#), [118](#), [119](#)
- Hu, H. (1996), Direct simulation of flows of solid-liquid mixtures, *International Journal of Multiphase Flow*, 22(2), 335 – 352, doi :10.1016/0301-9322(95)00068-2. [13](#), [18](#), [98](#)
- Hu, H. H. (1995), Motion of a circular cylinder in a viscous liquid between parallel plates, *Theoretical and Computational Fluid Dynamics*, 7(6), 441–455. [12](#), [77](#), [81](#), [84](#), [88](#), [89](#), [90](#)
- Hu, H. H., D. D. Joseph, et M. J. Crochet (1992), Direct simulation of fluid particle motions, *Theoretical and Computational Fluid Dynamics*, 3, 285–306, 10.1007/BF00717645. [8](#), [18](#)
- Hu, H. H., N. Patankar, et M. Zhu (2001), Direct Numerical Simulations of Fluid-Solid Systems Using the Arbitrary Lagrangian-Eulerian Technique, *Journal of Computational Physics*, 169(2), 427 – 462, doi :10.1006/jcph.2000.6592. [18](#)
- Jayaweera, K., B. Mason, et G. Slack (1964), The behaviour of clusters of spheres falling in a viscous fluid Part 1. Experiment, *Journal of Fluid Mechanics*, 20(01), 121–128. [12](#), [123](#)
- Jayaweera, K. O. L. F., et B. J. Mason (1965), The behaviour of freely falling cylinders and cones in a viscous fluid, *Journal of Fluid Mechanics*, 22, 709–720, doi :10.1017/S002211206500109X. [13](#)

- Joseph, D. D. (2002), Interrogations of direct numerical simulation of solid-liquid flow, *Web based book* : http://www.efluids.com/efluids/books/efluids_books.htm. 8, 13, 19, 133
- Joseph, G. (2003), Collisional dynamics of macroscopic particles in a viscous fluid, Ph.D. thesis, California Institute of Technology. 11
- Kim, S., et S. Karrila (1991), *Microhydrodynamics : Principles And Selected Applications*, Dover Civil and Mechanical Engineering Series, dover, 1991 ed., 507 pp., Dover. 12
- Ladd, A. J. (1994), Numerical simulations of particulate suspensions via a discretized Boltzmann equation. Part 1. Theoretical foundation, *Journal of Fluid Mechanics*, 271, 285–309. 8, 13
- Lai, M.-C., et C. S. Peskin (2000), An immersed boundary method with formal second-order accuracy and reduced numerical viscosity, *Journal of Computational Physics*, 160(2), 705–719, doi :10.1006/jcph.2000.6483. 19
- Lee, J., J. Kim, H. Choi, et K.-S. Yang (2011), Sources of spurious force oscillations from an immersed boundary method for moving-body problems, *Journal of Computational Physics*, 230(7), 2677 – 2695, doi :10.1016/j.jcp.2011.01.004. 20, 31, 35, 44
- Liu, C., X. Zheng, et C. Sung (1998), Preconditioned multigrid methods for unsteady incompressible flows, *Journal of Computational Physics*, 139(1), 35 – 57, doi :<http://dx.doi.org/10.1006/jcph.1997.5859>. 40
- Liu, Y., J. Nelson, J. Feng, et D. Joseph (1993), Anomalous rolling of spheres down an inclined plane, *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 50(2–3), 305 – 329, doi :[http://dx.doi.org/10.1016/0377-0257\(93\)80036-B](http://dx.doi.org/10.1016/0377-0257(93)80036-B). 75, 91
- Mittal, R., et G. Iaccarino (2005), Immersed Boundary Methods, *Annual Review of Fluid Mechanics*, 37, 239–261, doi :10.1146/annurev.fluid.37.061903.175743. 19, 20
- Pan, T.-W., et R. Glowinski (2002), Direct Simulation of the Motion of Neutrally Buoyant Circular Cylinders in Plane Poiseuille Flow, *Journal of Computational Physics*, 181(1), 260 – 279, doi :10.1006/jcph.2002.7123. 21

- Park, J., K. Kwon, et H. Choi (1998), Numerical solutions of flow past a circular cylinder at Reynolds numbers up to 160, *KSME International Journal*, 12, 1200–1205, doi :10.1007/BF02942594. 40, 42
- Patankar, N., et H. Hu (2000), A numerical investigation of the detachment of the trailing particle from a chain sedimenting in Newtonian and viscoelastic fluids, *Journal of Fluids Engineering*, 122(3), 517–521. 21
- Patankar, N., et D. Joseph (2001), Modeling and numerical simulation of particulate flows by the Eulerian–Lagrangian approach, *International Journal of Multiphase Flow*, 27(10), 1659–1684. 8
- Patankar, N., P. Singh, D. Joseph, R. Glowinski, et T.-W. Pan (2000), A new formulation of the distributed Lagrange multiplier/fictitious domain method for particulate flows, *International Journal of Multiphase Flow*, 26(9), 1509 – 1524, doi :10.1016/S0301-9322(99)00100-7. 8
- Peker, S. M., et S. Helvaci (2007), 4 - motion of particles in fluids, in *Solid-Liquid Two Phase Flow*, chap. 4, pp. 245 – 289, Elsevier, Amsterdam, doi :10.1016/B978-044452237-5.50006-0. 114, 119, 123
- Peskin, C. S. (1977), Numerical analysis of blood flow in the heart, *Journal of Computational Physics*, 25(3), 220–252, doi :10.1016/0021-9991(77)90100-0. 19
- Peskin, C. S. (2002), The immersed boundary method, *Acta Numerica*, 11, 479–517, doi :http://dx.doi.org/10.1017/S0962492902000077. 20
- Prosperetti, A., et G. Tryggvason (2007), *Computational Methods For Multiphase Flow*, Cambridge books online, 470 pp., Cambridge University Press. 18, 19, 133
- Richardson, J., et W. Zaki (1954), Sedimentation and fluidisation : Part i, *Trans. Instn. Chem. Engrs.*, 32(0), 35 – 53, doi :10.1016/S0263-8762(97)80006-8. 14, 114, 119, 122
- Richou, A. B., A. Ambari, M. Lebey, et J. Naciri (2005), Drag force on a circular cylinder midway between two parallel plates at Part 2 : moving uniformly (numerical and experimental) , *Chemical Engineering Science*, 60(10), 2535 – 2543, doi :http://dx.doi.org/10.1016/j.ces.2004.08.050. 85

- Roma, A. M., C. S. Peskin, et M. J. Berger (1999), An Adaptive Version of the Immersed Boundary Method, *Journal of Computational Physics*, 153(2), 509 – 534, doi :10.1006/jcph.1999.6293. [30](#), [31](#), [40](#), [49](#), [62](#), [71](#), [72](#), [121](#), [134](#)
- Ruelle, D., et F. Takens (1971), On the nature of turbulence, *Communications in mathematical physics*, 20(3), 167–192. [110](#)
- Sahin, M., et R. G. Owens (2004), A numerical investigation of wall effects up to high blockage ratios on two-dimensional flow past a confined circular cylinder, *Physics of Fluids (1994-present)*, 16(5), 1305–1320. [81](#)
- Sharma, N., et N. A. Patankar (2005), A fast computation technique for the direct numerical simulation of rigid particulate flows, *Journal of Computational Physics*, 205(2), 439 – 457, doi :10.1016/j.jcp.2004.11.012. [21](#)
- Sierou, A., et J. F. Brady (2001), Accelerated Stokesian dynamics simulations, *Journal of Fluid Mechanics*, 448, 115–146. [8](#)
- Silva, A. L. E., A. Silveira-Neto, et J. Damasceno (2003), Numerical simulation of two-dimensional flows over a circular cylinder using the immersed boundary method, *Journal of Computational Physics*, 189(2), 351 – 370, doi :10.1016/S0021-9991(03)00214-6. [40](#)
- Singha, S., et K. Sinhamahapatra (2010), Flow past a circular cylinder between parallel walls at low Reynolds numbers, *Ocean Engineering*, 37(8), 757–769. [81](#)
- Stokes, G. (1851), *the Effect of the Internal Friction of Fluids on the Motion of Pendulums*, Transactions of the Cambridge Philosophical Society, Pitt Press. [12](#)
- Temam, R. (1969), Sur l’approximation de la solution des équations de Navier-Stokes par la méthode des pas fractionnaires (I), *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 32(2), 135–153. [26](#)
- Tezduyar, T., M. Behr, S. Mittal, et J. Liou (1992), A new strategy for finite element computations involving moving boundaries and interfaces–The deforming-spatial-domain/space-time procedure : II. Computation of free-surface flows, two-liquid flows, and flows with drifting cylinders, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 94(3), 353 – 371, doi : 10.1016/0045-7825(92)90060-W. [18](#)

- Topin, V., F. Dubois, Y. Monerie, F. Perales, et A. Wachs (2011), Micro-rheology of dense particulate flows : Application to immersed avalanches, *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 166(1â2), 63 – 72, doi :10.1016/j.jnnfm.2010.10.006. [123](#)
- Uhlmann, M. (2004), New results on the simulation of particulate flows, Technical Report No. 1038, CIEMAT, Madrid, Spain, ISSN 1135-9420. [27](#), [29](#), [31](#)
- Uhlmann, M. (2005), An immersed boundary method with direct forcing for the simulation of particulate flows, *Journal of Computational Physics*, 209(2), 448 – 476, doi :10.1016/j.jcp.2005.03.017. [8](#), [14](#), [20](#), [28](#), [30](#), [35](#), [38](#), [40](#), [42](#), [44](#), [52](#), [63](#), [66](#), [67](#), [68](#), [98](#), [137](#)
- Van Dyke, M. (1982), *An album of fluid motion*, An Album of Fluid Motion, Parabolic Press. [10](#), [37](#), [133](#)
- Veeramani, C., P. Minev, et K. Nandakumar (2007), A fictitious domain formulation for flows with rigid particles : A non-Lagrange multiplier version, *Journal of Computational Physics*, 224(2), 867 – 879, doi :10.1016/j.jcp.2006.10.028. [21](#)
- Verjus, R., et S. Guilou (2013), Study of polydisperse particulate systems with a "Direct-Forcing/Fictitious Domain" method, in *proceedings THESIS2013*, (2), 4p. [124](#), [143](#)
- Wachmann, B., W. Kalthoff, S. Schwarzer, et H. J. Herrmann (1998), Collective drag and sedimentation : comparison of simulation and experiment in two and three dimensions, *Granular Matter*, 1(2), 75–82. [113](#), [114](#), [118](#), [119](#)
- Wachs, A. (2009), A DEM-DLM/FD method for direct numerical simulation of particulate flows : Sedimentation of polygonal isometric particles in a newtonian fluid with collisions, *Computers & Fluids*, 38(8), 1608 – 1628, doi :10.1016/j.compfluid.2009.01.005. [21](#), [47](#), [48](#), [49](#), [53](#), [54](#), [55](#), [56](#), [57](#), [59](#), [123](#), [136](#), [145](#)
- Winterwerp, J. C., et W. G. M. van Kesteren (2004), *Introduction to the Physics of Cohesive Sediment Dynamics in the Marine Environment*, Developments in Sedimentology, 576 pp., Elsevier. [6](#), [116](#)
- Yang, X., X. Zhang, Z. Li, et G.-W. He (2009), A smoothing technique for discrete delta functions with application to immersed boundary method in moving boundary simulations, *Jour-*

nal of Computational Physics, 228(20), 7821 – 7836, doi :10.1016/j.jcp.2009.07.023. [20](#), [30](#), [44](#)

Ye, T., R. Mittal, H. Udaykumar, et W. Shyy (1999), An Accurate Cartesian Grid Method for Viscous Incompressible Flows with Complex Immersed Boundaries, *Journal of Computational Physics*, 156(2), 209 – 240, doi :10.1006/jcph.1999.6356. [40](#)

Yu, Z., et X. Shao (2007), A direct-forcing fictitious domain method for particulate flows, *Journal of Computational Physics*, 227(1), 292 – 314, doi :10.1016/j.jcp.2007.07.027. [8](#), [15](#), [17](#), [21](#), [27](#), [28](#), [30](#), [31](#), [33](#), [36](#), [37](#), [38](#), [39](#), [40](#), [43](#), [50](#), [121](#), [145](#)

Yu, Z., N. Phan-Thien, Y. Fan, et R. I. Tanner (2002), Viscoelastic mobility problem of a system of particles, *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 104(2-3), 87 – 124, doi :10.1016/S0377-0257(02)00014-9. [21](#), [28](#), [29](#), [43](#), [46](#), [48](#), [49](#), [53](#), [54](#), [56](#), [57](#), [59](#), [136](#), [145](#)

Zhu, H., Z. Zhou, R. Yang, et A. Yu (2007), Discrete particle simulation of particulate systems : Theoretical developments, *Chemical Engineering Science*, 62(13), 3378 – 3396, doi : 10.1016/j.ces.2006.12.089. [8](#), [9](#), [133](#)

Zhu, H., Z. Zhou, R. Yang, et A. Yu (2008), Discrete particle simulation of particulate systems : A review of major applications and findings, *Chemical Engineering Science*, 63(23), 5728 – 5770, doi :10.1016/j.ces.2008.08.006. [8](#)

Table des figures

I.1	Schématisation des processus hydrosédimentaires estuariens (d'après Guillou et al. (2011)).	6
I.2	Schématisation des différentes approches aux différentes échelles spatio-temporelles (d'après Zhu et al. (2007)).	9
I.3	Visualisation de l'écoulement autour d'un cylindre fixe à différents nombres de Reynolds (Van Dyke (1982)) : (a) le régime de Stokes, (b) un régime inertiel avec sillage stationnaire, (c) un régime inertiel avec sillage périodique et (d) le régime turbulent.	10
I.4	Phénomène <i>Drafting, Kissing and Tumbling</i> (DKT) : (i) et (ii) les particules se rapprochent l'une de l'autre par un phénomène d'aspiration, (iii) elles entrent en contact, (iv) et (v) le long corps formé par les deux sphères est instable et les particules basculent. (vi) Les particules s'éloignent l'une de l'autre (d'après Joseph (2002)).	13
I.5	Schématisation du phénomène de sédimentation en colonne : la suspension, de fraction volumique initiale α_0 (en gris) est uniformément répartie dans un fluide au repos. Lorsque les particules sédimentent on distingue trois domaines : un domaine fluide (blanc), un domaine ayant la même fraction volumique initiale (gris) et le fond (en noir) qui a atteint la fraction volumique maximale. A la fin du processus, toutes les particules sont sur le fond.	15
II.1	Maillage conforme bidimensionnel (Prosperetti et Tryggvason (2007))	18

II.2	Formulation en domaine fictif : schéma du domaine d'étude. Ω_f est le domaine fluide. Chaque particule occupe un domaine noté $P_i(t)$. Leurs frontières sont respectivement notées $\partial\Omega_f$ pour le fluide et $\partial P_i(t)$ pour les particules. La formulation en domaine fictif s'effectue sur le domaine simplifié $\Omega = \Omega_f \cup P_i(t)$	22
II.3	Sous-problème fluide : maillage entrelacé et décalé.	27
II.4	Sous-problème particulaire : discrétisation des particules avec la 'Collocation Point Method' (CPM) : a) la particule est uniquement discrétisée sur son contour, b) la particule circulaire est discrétisée à l'intérieur, c) discrétisation d'une particule carrée à l'intérieur.	29
II.5	Sous-problème particulaire : schématisation des supports d'interpolation pour la fonction discrète de Roma et al. (1999) . Le point colocatif est représenté par le rond noir. Le support de la fonction d'interpolation en deux dimensions est représenté par le carré en pointillé de côté $3h$. Les nœuds marqués par des carrés sont pris en compte pour l'interpolation tandis que la fonction discrète est nulle pour ceux marqués par des triangles.	31
II.6	Sous-problème particulaire : schéma du modèle de contact de Glowinski et al. (1999)	32
III.1	Ecoulement autour d'un disque ayant une vitesse imposée : schéma du domaine de calcul. D est le diamètre de la particule, W est la largeur du domaine et L , sa longueur.	36
III.2	Ecoulement autour d'un cylindre fixe : contours de vorticité (�� gauche) et lignes de courant (�� droite) pour quatre régimes d'écoulement caractéristiques ($Re_p = 0.5, 20, 40$ et 100).	38
III.3	Ecoulement autour d'un cylindre fixe dans un canal large : visualisation des contours de pression et des vecteurs au voisinage du disque pour $Re_p = 40$. A gauche la particule est discrétisée sur son contour et à droite la particule est totalement discrétisée. Lorsque la particule est maillée sur tout son domaine, il n'y a pas de contre-écoulement à l'intérieur mais une pression interne va se développer au cours du temps.	41

III.4	Ecoulement autour d'un cylindre fixe ($W/D=32$) : coefficient de pression moyenné en temps C_p (pour une particule maillée intérieurement) en fonction de l'angle pour $Re_p = 20, 40$ et 100 , comparés à des résultats issus de la littérature. Les fonctions d'interpolation et le maillage intérieur n'ont pas d'influence sur les résultats.	42
III.5	Ecoulement autour d'un cylindre fixe (deuxième version du code) : contours de pression. Contrairement à la première version, la pression ne présente pas de discontinuité.	44
III.6	Ecoulement autour d'un cylindre oscillant ($W/D = 26.666, Re_p = 185$) : coefficients de traînée et de portance en fonction de la position latérale du disque pour deux fonctions d'interpolations. La fonction δ_3 permet de réduire drastiquement les oscillations.	45
III.7	Ecoulement autour d'un cylindre oscillant ($W/D = 26.666, Re_p = 185$) : coefficients de traînée en fonction de la position latérale du disque obtenus avec la deuxième version du code pour deux fonctions d'interpolations. Comparativement au cas précédent, l'absence de saut de pression réduit l'amplitude des oscillations. La fonction δ_3 permet aussi de réduire drastiquement les oscillations.	46
III.8	Sédimentation d'une particule unique : représentation schématique de la sédimentation d'une particule en milieu confiné. W est la largeur du canal, Y est la coordonnée horizontale.	47
III.9	Domaine 'infini' pour étudier la sédimentation : schéma du domaine 'infini'. Lorsque le centre de la particule atteint une position inférieure à X_{lim} , sa nouvelle position est décalée vers le haut d'une distance h (taille de la maille fluide). Les grandeurs fluides et la pseudo-force de volume sont décalés eux-aussi d'une maille sur le dessus. Sur le fond du domaine (ici $u_{1,j}$), les paramètres restent inchangés.	48
III.10	Sédimentation d'une particule unique à $Re_p = 0.1$: évolution temporelle de la vitesse de chute ($W = 4D, Re_p = 0.1, \Delta t = 0.001, \rho_p = 1.1$) pour différentes discrétisations de la particule. A gauche $h = D/16$ et à droite $h = D/32$	50

III.11	Sédimentation d'une particule unique à $R_{ep} = 0.1$: évolution temporelle de la vitesse de chute ($W = 4D$, $R_{ep} = 0.1$, $\Delta a = h/3$, $\rho_p = 1.1$, $\Delta t = 0.0005$) pour différentes discrétisations de la particule. A gauche $h = D/16$ et à droite $h = D/32$.	51
III.12	Sédimentation d'une particule unique à $R_{ep} = 0.1$: évolution temporelle de la vitesse de chute ($W = 4D$, $R_{ep} = 0.1$, $\rho_p = 1.1$, $\Delta t = 0.0005$) pour différentes distances de rétractation. A gauche $h = D/16$ et à droite $h = D/32$.	51
III.13	Sédimentation d'une particule initialement excentrée ($R_{ep} = 200$, schéma numérique M_1, $h = D/32$) : trajectoire et variation temporelle des vitesses (U_s, V_s et ω) de la particule pour différents pas de temps.	53
III.14	Sédimentation d'une particule initialement excentrée ($R_{ep} = 200$, schéma numérique M_2, $h = D/32$) : trajectoire et variation temporelle des vitesses (U_s, V_s et ω) de la particule pour différents pas de temps.	54
III.15	Sédimentation d'une particule initialement excentrée ($R_{ep} = 200$, schéma numérique M_1, $h = D/64$) : trajectoire et variation temporelle des vitesses (U_s, V_s et ω) de la particule pour différents pas de temps.	55
III.16	Sédimentation d'une particule initialement excentrée ($R_{ep} = 200$, schéma numérique M_2, $h = D/64$) : trajectoire et variation temporelle des vitesses (U_s, V_s et ω) de la particule pour différents pas de temps.	56
III.17	Sédimentation d'un disque excentré : contours de vorticité (vingt-six iso-contours equirépartis entre -2 et $+2$, les pointillées représentent les isovaleurs négatives) pour les différents régimes d'écoulement. Les résultats obtenus avec la méthode M_1 sont présentés.	58
III.18	Sédimentation d'un disque excentré : trajectoires des particules obtenues avec les deux versions du schéma numérique et celles de Wachs (2009) et de Yu et al. (2002). Les trajectoires sont quasiment identiques sauf pour les deux cas les plus inertiels.	59
III.19	Sédimentation d'un disque excentré : vitesse horizontale V_s des particules obtenues avec les deux versions du schéma numérique.	60

III.20	Sédimentation d'un disque excentré : vitesse de rotation ω des particules obtenue avec les deux versions du schéma numérique.	61
III.21	Sédimentation d'un doublet de particule à bas Re_p : champs de vorticités pour deux particules qui chutent dans un milieu confiné pour $Re_p = 2$ et $W/D = 8$	63
III.22	Sédimentation d'un doublet de particule à bas Re_p : évolution temporelle, de haut en bas, de la position latérale des particules, de leur vitesse de chute, de leur vitesse de rotation et de leur distance. Le maillage m_2 ($h = D/32$) permet de réduire drastiquement les oscillations numériques.	64
III.23	Sédimentation de deux particules à haut nombre de Reynolds : évolution temporelle des positions et du champ de vortacité pour deux particules de masse volumique différente chutant dans un milieu confiné. La particule grise est la plus lourde (P_1), la blanche est la particule P_2	65
III.24	Sédimentation de deux particules à haut nombre de Reynolds : trajectoires et évolution temporelle des positions et des vitesses de deux particules de masse volumique différente qui chutent dans un milieu confiné. Les résultats sont comparés à ceux d' Uhlmann (2005)	66
III.25	Sédimentation d'un doublet de particules avec DKT : évolutions temporelles des positions et des vitesses des particules lors du phénomène de 'Drafting, Kissing and Tumbling'. Les résultats sont comparés avec ceux d' Uhlmann (2005)	67
III.26	Sédimentation de 504 particules dans un domaine confiné : $t=0$	69
III.27	Sédimentation de 504 particules dans un domaine confiné : $t=1$	69
III.28	Sédimentation de 504 particules dans un domaine confiné : $t=2$	70
III.29	Sédimentation de 504 particules dans un domaine confiné : $t=3$	70
III.30	Sédimentation de 504 particules dans un domaine confiné : $t=4$	71
III.31	Sédimentation de 504 particules dans un domaine confiné : $t=5$	71
III.32	Sédimentation de 504 particules dans un domaine confiné : $t=8$	72
III.33	Sédimentation de 504 particules dans un domaine confiné : $t=12$	72
III.34	Sédimentation de 504 particules dans un domaine confiné : $t=24$	73

IV.1	Représentation schématique de la sédimentation d'une particule en milieu confiné. W est la largeur du canal, Y est l'excentrement (nous utiliserons aussi $e = 2Y/W$ comme excentrement adimensionné).	76
IV.2	La fonction $-K(e)$ apparaissant dans l'expression de la traînée d' <i>Harper et Chang</i> (1967).	78
IV.3	Sédimentation d'une particule centrée ($Y = 0$) : variation de la vitesse de chute U_{s0} adimensionnée par U_c (équation (IV.1)), en fonction du nombre de Reynolds particulaire. Les effets d'inertie sont négligeables tant que $Re_p \leq 0.5$. Pour des régimes d'écoulements plus importants, les effets d'inertie vont considérablement affecter la vitesse de chute. Cette figure montre que l'augmentation du confinement a pour effet de retarder ces effets d'inertie.	80
IV.4	Sédimentation d'une particule centrée ($Y = 0$ et $W/D = 4$) : visualisation des contours de vorticité (vingt isocontours equir�partis entre -5 et $+5$, les pointillées représentent les isovaleurs négatives), pour trois nombres de Reynolds $Re_p = 0.1, 1$ et 10 . Pour $Re_p = 0.1$ et 1 , l'écoulement est quasi-symétrique par rapport à l'axe horizontal de la particule. Lorsque $Re_p = 10$, la dissymétrie de l'écoulement liée à l'inertie est très marquée.	81
IV.5	Sédimentation d'une particule centrée ($Y = 0$ et $W/D = 16$) : visualisation des contours de vorticité (vingt isocontours equir�partis entre -2 et $+2$, les pointillées représentent les isovaleurs négatives), pour trois nombres de Reynolds $Re_p = 0.1, 1$ et 10 . Pour $Re_p = 0.1$, l'écoulement à l'amont et à l'aval de la particule reste symétrique mais pour $Re_p = 1$, la dissymétrie de l'écoulement est déjà très marquée ce qui prouve qu'un fort confinement va retarder les effets d'inertie.	81
IV.6	Sédimentation d'une particule excentrée : vitesse de chute U_s , adimensionnée par la vitesse d'une particule centrée U_{s0} , en fonction de l'excentrement e , pour différents confinements et différents nombres de Reynolds. Les symboles représentent nos simulations et la courbe en pointillés correspond à $Re_p = 0$ (<i>Harper et Chang</i> (1967)). La survitesse peut atteindre 25% à petit Reynolds et fort confinement. Celle-ci diminue avec l'augmentation de W et de Re_p jusqu'à disparaître complètement.	83

IV.7	Efforts hydrodynamiques en présence de survitesse : influence des efforts induits par le frottement et par la pression en fonction de l'excentrement e pour $W/D = 4$ et $Re_p = 0.1$. (a) efforts adimensionnés de traînée de frottement $F_{D\mu}/(\mu U_s)$ et de pression $F_{Dp}/(\mu U_s)$. Les deux efforts présentent un minimum à $e = 0.5$. Proche de la paroi, la pression est le paramètre qui a le plus d'influence sur l'effort de traînée. (b) Efforts adimensionnés de portance de frottement $F_{L\mu}/(\mu U_s)$ et de pression $F_{Lp}/(\mu U_s)$. L'effort est maximal lorsque $e = 0.5$ et la pression contribue deux fois plus que le frottement à l'effort de portance.	86
IV.8	Efforts hydrodynamiques sans survitesse : influence des efforts induits par le frottement et par la pression en fonction de l'excentrement e pour $W/D = 16$ et $Re_p = 2$. (a) efforts adimensionnés de traînée de frottement $F_{D\mu}/(\mu U_s)$ et de pression $F_{Dp}/(\mu U_s)$. Les efforts de traînée induits par la pression et par le frottement augmentent de façon monotone avec e . L'effort induit par la pression contribue autant que le frottement à la traînée totale lorsque $e < 0.5$. Ensuite la force de pression devient dominante. (b) Efforts adimensionnés de portance de frottement $F_{L\mu}/(\mu U_s)$ et de pression $F_{Lp}/(\mu U_s)$. L'effort de pression augmente avec e . L'effort de frottement atteint un maximum pour $e = 0.75$ et chute lorsque la particule se rapproche du mur. La force induite par la pression ne fait qu'augmenter jusqu'à $e = 0.75$ puis va très rapidement diminuer.	87
IV.9	Théorie de la lubrification en proche paroi à bas nombre de Reynolds : (a) profil angulaire de pression adimensionnée $pD/(2\mu U_s)$. La ligne pleine correspond à la théorie de la lubrification (équation (IV.13)). Les lignes en pointillé correspondent à nos simulations numériques ($\epsilon = 0.14$). (b) Système de coordonnées utilisé pour la théorie de la lubrification.	88
IV.10	Rotation 'anormale' d'une particule excentrée : lignes de courant tracées dans le repère barycentrique de la particule. Les lignes de courant montrent une forte dissymétrie.	92

IV.11	Vitesse de rotation d'une particule excentrée : évolution de la vitesse de rotation adimensionnée $\omega D/U_s$ en fonction de l'excentrement e (a) cas $W/D = 4$ et $Re_p = 0.1$. La vitesse de rotation est nulle au centre et maximale pour la même position que la survitesse ($e \simeq 0.5$). Elle diminue très rapidement lorsque la particule est proche du mur et la tendance de la courbe laisse suggérer que la vitesse de rotation tend vers 0 en proche paroi. (b) cas $W/D = 16$ et $Re_p = 2$. La vitesse de rotation augmente jusqu'à $e \simeq 0.875$ puis chute très rapidement lorsque la particule est proche de la paroi.	93
IV.12	Influence de la rotation sur la sédimentation d'une particule : à gauche, variation de la vitesse de chute U_s et à droite de la vitesse horizontale V_s , adimensionnées par la vitesse de chute d'une particule centrée U_{s0} en fonction de son excentrement e . Le nombre de Reynolds est $Re_p = 1$. La rotation influence peu la dynamique de la particule.	94
IV.13	Influence de la rotation sur la sédimentation d'une particule : commentaire identique à la figure IV.12 avec $Re_p = 5$	94
V.1	Régimes dynamiques d'un doublet de particules en milieu confiné en fonction du régime d'écoulement mis en évidence par Aidun et Ding (2003) et Feng et al. (1994) : pour un nombre de Reynolds terminal de chute de l'ordre de 2, les particules forment un doublet oblique stable. Cette structure bifurque vers une structure oblique oscillante qui va devenir chaotique après un phénomène de cascades sous-harmonique. Enfin, dès que l'inertie devient importante, la dynamique des particules est régie par le phénomène de Drafting, Kissing and Tumbling.	98
V.2	Représentation schématique de la sédimentation d'un doublet de particules en milieu confiné.	100
V.3	Sédimentation de deux particules : structure stationnaire en doublet oblique pour deux particules à un nombre de Reynolds terminal de chute $Re_T = 1.78$ et un confinement $W/D = 8$. D'après Feng et al. (1994)	101

V.4	Fort confinement $W/D = 4$ et Reynolds de l'ordre de l'unité : évolution temporelle des positions transversales du doublets de particules pour $F = 136.77$. Deux structures coexistent pour ce même F qui apparaissent selon la position initiales des particules : la structure oblique stable et la structure oblique oscillante.	102
V.5	Hystérésis pour $130.74 \leq F \leq 147.63$: apparition d'un phénomène d'hystérésis dans le plan (F, R_{eT}) . Deux structures sédimentaires stables coexistent : doublet oblique stationnaire (a), doublet oblique oscillant (b). Le doublet oblique oscillant sédimente plus rapidement car l'orientation du doublet est plus proche de l'horizontale pour la branche inférieure.	103
V.6	Cascades sous-harmonique : doublement de période dans de plan (Y_1, Y_2) . Figure de gauche : $F = 145.217$. Figure de droite : $F = 146.423$	104
V.7	Cascades sous-harmonique : Période-4 et période-8 dans de plan (Y_1, Y_2) . Figure de gauche : $F = 156.07$. Figure de droite : $F = 159.09$	104
V.8	Attracteur étrange et DKT : (a) attracteur chaotique dans de plan (Y_1, Y_2) et phénomène pour $F = 197.68$. (b) DKT pour des régimes d'écoulements plus important pour $F = 241.61$	105
V.9	Influence de la rotation sur l'existence de la structure oblique : comparaison des trajectoires d'un doublet de particules (dans le deuxième cas, la rotation est supprimée) dans le plan (Y_1, Y_2) . La rotation n'a pas d'influence sur l'existence de la structure oblique.	105
V.10	Structure horizontale symétrique stable $F = 400.12$: la structure formée par les particules est symétrique par rapport à l'axe vertical du domaine. Le sens de rotation est indiqué sur la figure. Les contours de vorticité montrent une parfaite symétrie de l'écoulement suivant l'axe vertical.	106
V.11	Structure horizontale périodique ($F = 402.12$) : (a) dynamique périodique dans le plan (Y_1, Y_2) . (b) spectre de puissance du signal $Y_1(t)$. La fréquence est $f_1 = 0.369 Hz$	107

V.12	Structure horizontale périodique à deux périodes ($F = 480$) : (a) dynamique périodique dans le plan (Y_1, Y_2). (b) spectre de puissance du signal $Y_1(t)$. Le spectre de puissance fait apparaître les harmoniques de la fréquence f_1 ($f_1 \simeq 0.421 Hz$).	108
V.13	Structure horizontale quasi-périodique à deux fréquences ($F = 489.5$) : (a) dynamique quasi-périodique dans le plan (Y_1, Y_2). (b) spectre de puissance du signal $Y_1(t)$. Le signal est quasi-périodique de fréquences $f_1 \simeq 0.434 Hz$ et $f_2 \simeq 0.064 Hz$	108
V.14	Structure horizontale quasi-périodique à deux fréquences ($F = 489.5$) : spectre de puissance du signal $Y_1(t)$. Les positions des pics du spectre de puissance sont des combinaisons linéaires des fréquences f_1 et f_2 ($f_1 \simeq 0.434 Hz$ et $f_2 \simeq 0.064 Hz$), caractéristiques d'un signal quasi-périodique à deux fréquences.	109
V.15	Chaos ($F = 527.78$) : (a) dynamique chaotique dans le plan (Y_1, Y_2). (b) spectre de puissance du signal $Y_1(t)$. Le signal est bruité, caractéristique d'une dynamique chaotique.	109
V.16	Evolution du nombre de Reynolds terminal de chute R_{eT} avec F . Les deux points marqués d'un astérisque correspondent à une sédimentation chaotique : (*) attracteur d' <i>Aidun et Ding</i> (2003), (**) attracteur mis en évidence dans cette thèse.	111
VI.1	Représentation schématique de la sédimentation d'un grand nombre de particules en milieu confiné. W est la largeur du canal, H_0 est la hauteur initiale de la suspension de fraction volumique Φ_0	115
VI.2	Sédimentation d'un grand nombre de particules : visualisation de l'évolution de la suspension.	116
VI.3	Sédimentation d'un grand nombre de particules : évolution de la hauteur de l'interface entre le fluide et la suspension.	117
VI.4	Sédimentation d'un grand nombre de particules : évolution de la vitesse moyenne de sédimentation U_s , adimensionnée par la vitesse de chute d'une particule centrée U_{s0} , en fonction de la fraction volumique fluide $(1 - \Phi)$. . .	118

VI.5	Perspective : sédimentation d'une suspension de particules tri-dispersées à bas nombre de Reynolds ($R_{ep} = 0.1$), pour une fraction volumique solide initiale $\Phi = 0.107$. Simulations réalisées avec la version M_1 du code développé dans cette thèse (voir Verjus et Guilou (2013)).	124
------	--	-----

Liste des tableaux

III.1	Ecoulement autour d'un cylindre fixe ($W/D = 4$) : coefficients de traînée obtenus pour trois maillages ($h = D/16, D/32, D/64$) comparés avec les résultats de Yu et Shao (2007) obtenus avec une méthode DF/FD et une méthode spectrale.	39
III.2	Ecoulement autour d'un cylindre fixe ($W/D = 32$) : Coefficients de traînée et taille des recirculations obtenus pour deux différents maillages m_1 et m_2 (notés m_{1b} et m_{2b} lorsque la particule est discrétisée sur son ensemble) et deux différentes fonctions d'interpolations δ_2 et δ_3 pour des nombres de Reynolds particuliers égaux à 20 et 40. Pour le cas $Re_p = 100$, les coefficients de traînée, de portance ainsi que le nombre de Strouhal sont présentés. Les résultats sont comparés avec les résultats issus de la littérature.	40
III.3	Ecoulement autour d'un cylindre fixe (deuxième version du code) : coefficients de traînée obtenus à partir d'une deuxième version de la DF/FD. Cette fois-ci, les résultats présentent une forte dépendance au pas de temps et au nombre de Reynolds comme l'ont constaté Yu et al. (2002)	43
III.4	Sédimentation d'une particule excentrée : paramètres physiques et numériques pour nos simulations	57
III.5	Sédimentation d'une particule excentrée : coefficients de traînée et nombre de Reynolds terminal de chute obtenus avec les deux schémas numériques M_1 et M_2 (Cf. page 28). Les résultats sont comparés avec ceux de Wachs (2009) et de Yu et al. (2002)	57

IV.1	Sédimentation d'une particule excentrée à $R_{ep} = 0.1$: résultats de la survitesse comparés avec la formule (IV.7) de <i>Champmartin</i> (2006) (obtenue pour une particule qui ne tourne pas) pour différents confinements. Les résultats sont en bon accord. La rotation de la particule ne semble avoir aucun effet sur l'amplitude la survitesse.	84
IV.2	Sédimentation d'une particule en proche paroi : comparaison entre les efforts hydrodynamiques obtenus numériquement et la formule (IV.23). Le faible nombre de Reynolds dans le convergent $R_{elub} = U_s h_L(0)/\nu$ justifie l'emploi de la théorie de la lubrification pour décrire ce cas.	91

Contribution à la modélisation des processus de sédimentation : étude numérique à l'échelle de la particule.

Dans cette thèse, nous avons développé un code de simulation numérique directe particulièrement bien adapté à l'étude des écoulements à phase dispersée. Le schéma numérique est basé sur une technique de domaines fictifs. Dans un premier temps, nous l'avons validé sur de nombreux cas test puis nous l'avons utilisé pour étudier la sédimentation complexe de particules bidimensionnelles en milieu confiné. Trois cas ont été analysés : sédimentation d'une particule unique, sédimentation d'un doublet de particules et enfin sédimentation d'un grand nombre de particules.

Dans le premier cas nous retrouvons le phénomène de survitesse qui apparaît pour une particule excentrée à bas nombre de Reynolds. Nous montrons que cette survitesse est très sensible à l'inertie du fluide : elle diminue lorsqu'on augmente le nombre de Reynolds, jusqu'à disparaître complètement. Cet effet est retardé par le confinement. Enfin, nous avons étudié les efforts en proche paroi à l'aide de la théorie de la lubrification.

Dans le cas d'un doublet de particules, nous retrouvons les comportements complexes observés dans la littérature (hystérésis, cascade sous-harmonique et chaos). Nous montrons qu'une nouvelle série de bifurcations et un nouvel attracteur apparaissent pour des particules plus pesantes. Il s'agit là d'une transition vers le chaos par la voie de la quasi-périodicité. Nous donnons le diagramme de bifurcation étendu. Sur ce diagramme, la nouvelle branche que nous avons mise en évidence correspond à une structure en doublet horizontal, conduisant à une sédimentation lente.

Dans le cas d'un grand nombre de particules, nous montrons que la vitesse de chute de l'interface fluide-particules suit une loi de type Richardson-Zaki, mais avec un exposant d'environ 4. Tout comme pour des sphères, la valeur de cet exposant dépend du confinement. Enfin, nous observons un phénomène de blocage, inattendu pour des particules non-cohésives, dû au caractère bidimensionnel de la suspension.

Mots-clés : modélisation numérique, domaine fictif, écoulement diphasique, sédimentation.

Numerical modeling of the sedimentation processes : micro-scale numerical study.

In the present thesis, a fully-resolved numerical code has been developed for the analysis of particle-laden flows. A fictitious domain method is used. First, this numerical tool has been validated by using classical benchmarks. It has then been used to simulate the complex sedimentation of particles in three generic two-dimensional configurations : a single particle, a particle pair and a large number of particles in a confined domain.

In the first case, the peak-velocity of an off-centred inclusion is recovered at low-Reynolds number. It is shown that this peak-velocity is very sensitive to fluid inertia : the peak-velocity decreases when the Reynolds number increases. This effect is delayed by the confinement.

The very complex dynamics of a pair of particles sedimenting in a confined domain, observed in the literature, is recovered (hysteresis, period-doubling cascade and chaos). It is shown that a new series of bifurcations, leading to a new attractor, emerges when the non-dimensional particle weight is increased. This new transition corresponds to a quasi-periodic route. The extended bifurcation diagram is given. The new branch discovered in this work corresponds to a nearly horizontal particle doublet, with a slow settling velocity.

In the case of the settling of large number of particles, a RZ-like law is recovered for the sedimentation velocity of the fluid-particle interface. The exponent is close to 4, in contrast with the case of spheres. Finally, the sedimentation velocity at the end of the settling process is observed to be significantly reduced, like for cohesive sediments. This unexpected behaviour is related to the two-dimensionality of the suspension.

Keywords : numerical modeling, fictitious domain, multiphase flow, sedimentation.
