



AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

THÈSE

Pour l'obtention du grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE LORRAINE

Faculté des Sciences et Technologies

Diplôme National - Arrêté du 7 août 2006

ÉCOLE DOCTORALE INFORMATIQUE, AUTOMATIQUE,
ÉLECTRONIQUE-ÉLECTROTECHNIQUE ET MATHÉMATIQUES

DÉPARTEMENT DE FORMATION DOCTORALE MATHÉMATIQUES

DOMAINE DE RECHERCHE : MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

Présentée par

Julien SAINTE-MARIE

Contribution à l'intégration des cycles biogéochimiques dans les modèles de croissance forestiers à base phénoménologique. Dynamique saisonnière du couvert forestier et décomposition de la matière organique du sol.

Directeur de thèse : **M. Henrot Antoine**

Co-direction : **M. Saint-André Laurent**

Soutenue le 9 septembre 2014

Devant la Commission d'Examen

Composition du jury :

M. Ågren Göran	Professeur Sveriges lantbruksuniversitet	Rapporteur
M. Cournède Paul-Henry	Professeur Ecole Centrale Paris	Rapporteur
M. Bontemps Jean-Daniel	IPEF enseignant-chercheur AgroParisTech	Président du jury
M. Champagnat Nicolas	Chargé de recherche INRIA	Examineur
M. Fontaine Sébastien	Chargé de recherche INRA	Invité
M. Henrot Antoine	Professeur Ecole des Mines de Nancy	Directeur de thèse
M. Saint-André Laurent	Directeur de recherche INRA/CIRAD	Directeur de thèse
M. Barrandon Matthieu	Maitre de conférence Université de Lorraine	Encadrement



UMR Institut Elie Cartan de Lorraine,
Université de Lorraine,
54506 Vandoeuvre-lès-Nancy.



UR Biogéochimie des Ecosystèmes Forestiers,
Centre INRA de Nancy,
54280 Champenoux.

"Si nous connaissions toutes les lois de la Nature, nous n'aurions besoin que d'un fait, ou de la description d'un seul phénomène réel, pour tirer toutes les conclusions particulières à ce point. Actuellement nous ne connaissons que quelques lois, et notre conclusion se trouve faussée, non pas, cela va sans dire, par suite de nulle confusion ou irrégularité dans la Nature, mais par suite de notre ignorance des éléments essentiels dans le calcul. Nos notions de loi et d'harmonie sont généralement limitées à ces exemples que nous découvrons ; mais l'harmonie qui résulte d'un beaucoup plus grand nombre de lois apparemment en conflit, et réellement en accord, non par nos découvertes, est encore plus surprenante. Les lois particulières sont comme nos points de vue, de même qu'aux yeux du voyageur un contour de montagne varie à chaque pas et possède un nombre infini de profils, quoique absolument une seule forme. Même entrouverte ou percée de part en part, on ne saisit pas la montagne en sa totalité."

Henry David Thoreau - Walden ou la vie dans les bois.

"Et Jésus leur répondit : c'est à cause de votre incrédulité : car en vérité je vous dis, que si vous aviez de la foi, aussi gros qu'un grain de semence de moutarde, vous diriez à cette montagne : transporte-toi d'ici là, et elle s'y transporterait ; et rien ne vous serait impossible."

Evangelie selon Saint Matthieu - ch.17, v.20.

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier le Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche, l'Université de Lorraine, l'Institut national de la recherche agronomique et l'Office national des forêts pour le financement de cette thèse.

Ensuite, je tiens à remercier chaleureusement Antoine Henrot, Laurent Saint-André et Matthieu Barrandon pour leur disponibilité humaine et professionnelle au cours de ces quatre années. Ils ont chacun su à leur manière me faire bénéficier de leur expérience individuelle. Je tiens tout particulièrement à remercier Matthieu pour le temps qu'il a régulièrement consacré à la vérification de mon travail.

Je souhaite remercier l'équipe du CRDPI de Pointe-Noire pour son accueil chaleureux ainsi que le CIRAD et le projet Climafrica pour le financement de ma participation à la campagne de terrain d'avril 2012 .

J'adresse mes remerciements à Göran Ågren pour son accueil amical à l'université d'Uppsala (Sveriges lantbruksuniversitet - SLU) en novembre 2012 ainsi qu'au programme COST qui a financé cette collaboration scientifique.

Je souhaite remercier l'ensemble des chercheurs, des membres administratifs et techniques de l'équipe Biogéochimie des Ecosystèmes Forestiers, de l'institut Elie Cartan et de l'école doctorale IAEM pour leur disponibilité.

Je tiens à saluer l'ensemble des stagiaires, doctorants et post-doctorants avec qui j'ai échangé pendant cette thèse.

J'adresse une pensée particulière à Emeline et Pierre-Joseph avec qui j'ai partagé plus qu'un bureau.

Pour finir, j'adresse un grand merci à l'ensemble de mes proches et de ma famille qui m'ont aidé durant quatre ans à porter ce travail au quotidien.

Table des matières

Remerciements	i
Table des matières	iii
1 Introduction	1
1.1 Les cycles biogéochimiques des écosystèmes forestiers	3
1.2 Complexité et granulométrie de modèle	6
1.3 Etat de l’art succinct de la modélisation forestière	8
1.4 Démarche de modélisation	9
1.4.1 Les modèles à base dendrométrique comme point de départ	9
1.4.2 Quelles évolutions ?	11
2 Le rôle central de la canopée - Modèle Stand Leaf Cohorts Dynamics	13
2.1 Rôle dans les cycles biogéochimiques et modélisation	14
2.2 Modèle SLCD	15
2.3 Description du modèle	16
2.3.1 Variables d’entrée du modèle	16
2.3.2 Dynamique de la population de feuilles	16
2.3.3 Variables de sortie	19
3 Applications du modèle Stand Leaf Cohorts Dynamics : <i>Eucalyptus grandis</i>, Itatinga (Brésil), <i>Fagus sylvatica</i> L., Hesse et <i>Quercus petraea</i>, Barbeau (France)	21
4 Modélisation de la dynamique de la matière organique du sol	47
4.1 Contexte	48
4.2 Présentation du modèle général	49
4.2.1 Théorie de la qualité	49
4.2.2 Mise en équations	49

Table des matières

4.3	Troncature du modèle	54
4.4	Formulation explicite d'un cas particulier	57
4.4.1	Choix de modélisation	57
4.4.2	Troncature du modèle	58
4.5	Objectifs	60
5	Etude des solutions du modèle de décomposition de la matière organique	61
5.1	Résultats fondamentaux	62
5.1.1	Equations différentielles ordinaires dans les espaces de Banach	62
5.1.2	Espaces fonctionnels	64
5.2	Solutions dans $L^{1,N} \cap C_0(\mathbb{R}_+)$	66
5.2.1	Notations et formalisation du système d'équations	66
5.2.2	Courbes caractéristiques	67
5.2.3	Méthode des caractéristiques	77
5.2.4	Equations différentielles pour la concentration en carbone	81
5.2.5	Equations différentielles pour la concentration en nutriment	97
5.2.6	Synthèse des résultats et expression des solutions	109
5.2.7	Application à la formulation particulière du modèle	112
5.3	Etat stationnaire	114
5.3.1	Existence et unicité	114
5.3.2	Convergence	116
6	Etude de la troncature du modèle à l'aide de différences finies	117
6.1	Introduction	118
6.1.1	Hypothèse de troncature	118
6.1.2	Restriction de l'opérateur intégral à un compact	118
6.1.3	Résultats généraux	121
6.2	Différences finies pour les équations du carbone et des nutriments	122
6.2.1	Notations	122
6.2.2	Schéma numérique	123
6.3	Différences finies pour les solutions stationnaires	136
6.3.1	Notations	136
6.3.2	Schéma numérique	136
6.4	Test de l'hypothèse de troncature	140
6.4.1	Méthode	140

6.4.2	Résultats	146
6.4.3	Discussion	152
6.5	Quelques exemples de simulations	154
6.5.1	Peigne de qualité	154
6.5.2	Apport constant quelconque	158
7	Conclusions et perspectives	163
7.1	Contributions à la modélisation des cycles biogéochimiques	165
7.1.1	Cycle géochimique	165
7.1.2	Cycle biologique	166
7.2	Perspectives	167
7.2.1	Modélisation du cycle de l'eau	167
7.2.2	Modélisation de la chimie du sol	167
A	Résultats divers	171
A.1	Chapitre 4 : Résolution explicite du modèle tronqué	172
A.2	Chapitre 5	175
A.2.1	Preuve proposition 5.1.3	175
A.2.2	Preuve proposition 5.1.4	175
	Bibliographie	177
	Table des figures	187
	Liste des tableaux	189
	Liste des abréviations	191
	Résumé	194

Table des matières

Chapitre 1

Introduction

Le développement croissant de l'activité humaine soumet les écosystèmes forestiers à une pression de plus en plus élevée. L'augmentation régulière de la déforestation (FAO, 2012), qu'elle soit engendrée par la démographie croissante ou l'exploitation industrielle (FAO, 2011) pose la question des conséquences du changement d'utilisation des terres ainsi que la durabilité des écosystèmes.

A ces questions socio-économiques s'ajoute la nécessité d'anticiper l'impact des changements climatiques, l'évolution des dépôts atmosphériques (Goudie, 2009) et de l'altération des sols (Klaminder *et al.*, 2011). D'autre part, la transition énergétique des énergies fossiles vers les énergies renouvelables voulue par les politiques globales (ONU, 2005) requiert de définir dans quelle mesure la forêt peut être mise à contribution sans accélérer l'appauvrissement des sols et l'altération de la qualité de l'eau. Le Grenelle et la directive européenne 2009/28/CE ont fixé comme objectif d'atteindre 23% d'énergies renouvelables dans la consommation totale énergétique finale métropolitaine pour 2020 soit 20 Mtep d'énergies renouvelables en plus par rapport à 2006 (Rapport de la journée « Cellule Biomasse », 2012). Le rapport ADEME 2013 (Contribution de l'ADEME à l'élaboration de visions énergétiques 2030-2050 - Synthèse) vise 35% d'énergies renouvelables dans le mix énergétique à l'horizon 2030 ; et pour le mix chaleur, la biomasse sera la principale filière contributrice puisqu'elle devra représenter près de 45%.

La communauté scientifique, en relation avec les gestionnaires forestiers, travaille depuis plus de trente ans à l'élaboration d'outils d'aide à la décision. La modélisation y prend une part importante, chaque discipline consacrée à l'étude des écosystèmes forestiers (écologie, écophysiologie, biogéochimie, ...) ayant une méthodologie propre. Cependant, ces différentes approches disciplinaires utilisées jusqu'à aujourd'hui ne permettent pas une évaluation simultanée de l'influence des changements globaux et de la gestion des services écosystémiques sur la pérennité des forêts. La nécessité d'amor-

Chapitre 1. Introduction

cer une nouvelle génération de modèles s'appuyant sur la remise en jeu des concepts fondateurs des différentes approches existantes s'impose aujourd'hui comme une nécessité de premier plan.

1.1 Les cycles biogéochimiques des écosystèmes forestiers

Les écosystèmes forestiers s'inscrivent dans un cadre spatio-temporel bien défini. La spatialité de ces écosystèmes se définit selon deux axes. Sur le plan vertical, ils sont contenus dans un gradient allant de la roche-mère aux couches basses de l'atmosphère. Sur un plan horizontal, la variabilité de la composition des sols et son impact sur la composition biologique des écosystèmes se caractérise aussi bien à l'échelle de la parcelle qu'à celle du bassin versant. Les processus en jeu au sein des écosystèmes forestiers s'échelonnent de la variation infra horaire au siècle.

Selon le rapport sur la science et la technologie n°27 de l'Académie des Sciences, l'étude des écosystèmes forestiers se situe à l'interface de trois domaines scientifiques : la biologie, la chimie et les géosciences (fig.1.1). Le recoupement de ces disciplines au cours du XX^{ème} siècle a abouti à la spécification de la biogéochimie. Dans son acception la plus large elle est définie comme la géochimie de la biosphère. Elle recouvre l'étude des interactions entre le vivant et les éléments chimiques fondamentaux. Cette thèse se concentre sur la biogéochimie des écosystèmes forestiers.

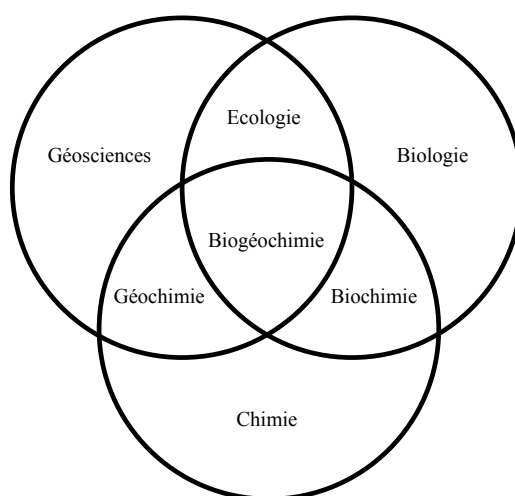


Figure 1.1 – Place de la biogéochimie parmi les disciplines scientifiques (tiré de Georges (2007)).

Le cycle biogéochimique de l'écosystème forestier correspond à l'ensemble des processus de mobilisation et de libération des éléments minéraux. Ce cycle est décomposable en trois sous-cycles interagissant les uns sur les autres (fig.1.2) :

- le sous-cycle géochimique : caractérise l'ouverture du cycle biogéochimique à l'ensemble des échanges avec l'atmosphère (dépôts atmosphériques), à la fixation symbiotique de l'azote et aux pertes de nutriments par drainage vers les eaux de surface et les nappes phréatiques ;
- le sous-cycle biologique : correspond aux échanges d'éléments minéraux entre le sol et la

Chapitre 1. Introduction

plante ; prélèvement racinaire du sol vers la plante, ou restitution de la plante vers le sol (chutes de litières, récrétion) ; plus ce cycle est dominant, plus l'écosystème est autonome ;

- le sous-cycle biochimique : correspond aux échanges entre les différents organes de la plante pérenne notamment les phénomènes de translocation d'éléments minéraux entre les tissus de la plante généralement des plus vieux vers les plus jeunes.

Cette hiérarchisation en sous-cycles se décline pour chaque élément chimique constitutif de l'écosystème (ex : C, O, N, P, K, S, Ca, Na, Al, Fe...). Quelle que soit leur situation géographique, les écosystèmes forestiers partagent cette structure de fonctionnement. La variabilité des essences, des sols et des conditions climatiques modifient l'équilibre entre ces trois cycles. A cela s'ajoute l'impact des aménagements forestiers : sylviculture, amendements, fertilisation et exportation de biomasse (Ranger, 2007).

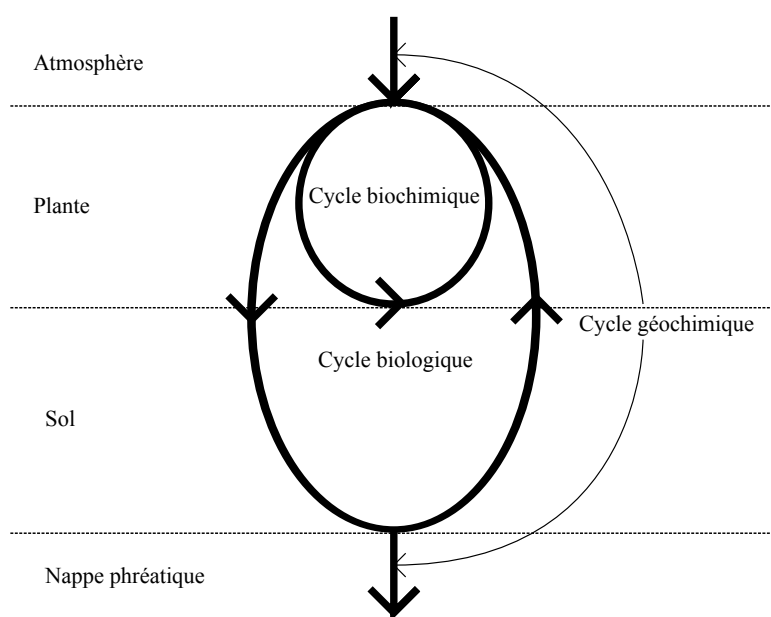


Figure 1.2 – Sous-cycles biogéochimiques au sein de l'écosystème forestier.

Les interactions entre les différents cycles biogéochimiques se caractérisent par des flux entre les compartiments de l'écosystème. Ranger et Turpault (1999) ont proposé un schéma conceptuel (fig.1.3) permettant l'analyse de ces échanges. Cependant, une part des flux proposés sont difficiles voire impossibles à quantifier expérimentalement. Ainsi, l'estimation de ces flux sur le long terme est un défi majeur proposé aux modélisateurs.

1.1 Les cycles biogéochimiques des écosystèmes forestiers

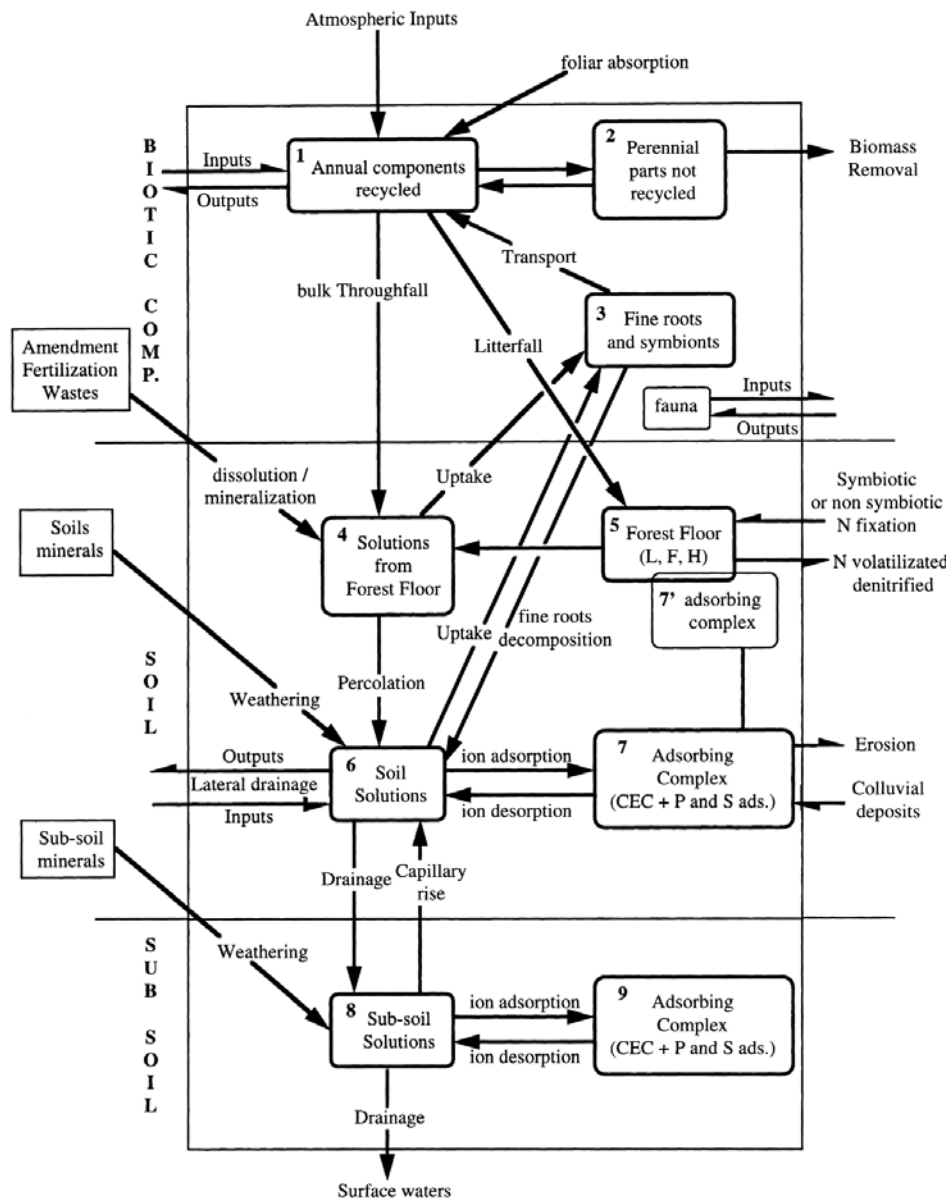


Figure 1.3 – Schéma conceptuel du cycle biogéochimique de l'écosystème forestier (tiré de Ranger et Turpault (1999)).

1.2 Complexité et granulométrie de modèle

Les écosystèmes forestiers sont par essence des systèmes dynamiques complexes : les cycles du carbone, de l'eau et des nutriments interagissent à diverses échelles de temps et d'espace. La diversité des processus écologiques impliqués nécessite la définition du rôle que doit tenir la modélisation dans l'étude de tels systèmes.

La notion de complexité utilisée dans cette thèse s'appuiera sur les travaux épistémologiques de Henri Poincaré (1854-1912) :

" [...] ceux qui ne croient pas que les lois naturelles doivent être simples, sont encore obligés souvent de faire comme s'ils le croyaient. Ils ne pourraient se soustraire entièrement à cette nécessité sans rendre impossible toute généralisation et par conséquent toute science." [...]

"Si nous étudions l'histoire de la science, nous voyons se produire deux phénomènes pour ainsi dire inverses : tantôt c'est la simplicité qui se cache sous des apparences complexes, tantôt c'est au contraire la simplicité qui est apparente et qui dissimule des réalités extrêmement compliquées." [...]

"Sans doute, si nos moyens d'investigation devenaient de plus en plus pénétrants, nous découvririons le simple sous le complexe, puis le complexe sous le simple, puis de nouveau le simple sous le complexe, et ainsi de suite, sans que nous puissions prévoir quel sera le dernier terme. Il faut bien s'arrêter quelque part, et pour que la science soit possible, il faut s'arrêter quand on a trouvé la simplicité. C'est là le seul terrain sur lequel nous pourrions élever l'édifice de nos généralisations." [...]

"Qu'importe alors que la simplicité soit réelle, ou qu'elle recouvre une vérité complexe ? Qu'elle soit due à l'influence des grands nombres, qui nivelle les différences individuelles, qu'elle soit due à la grandeur ou à la petitesse de certaines quantités qui permettent de négliger certains termes, dans tous les cas, elle n'est pas due au hasard. Cette simplicité, réelle ou apparente a toujours une cause. Nous pourrions donc toujours faire le même raisonnement, et si une loi simple a été observée dans plusieurs cas particuliers, nous pourrions légitimement supposer qu'elle sera encore vraie dans les cas analogues. Nous y refuser serait attribuer au hasard un rôle inadmissible." (Poincaré, 1902)

Poincaré considérait que la progression de la science n'est possible que lorsque le scientifique s'attache à généraliser des lois simples malgré l'évidence de la complexité des phénomènes naturels.

Or, une loi simple est toujours associée à un domaine de validité spatio-temporel déterminé pour lequel cette loi est vérifiable expérimentalement. Nous appellerons "grain" de la loi ce domaine de validité. Le choix de cette terminologie est motivé par la volonté de rejoindre le concept de granulométrie de modèle proposé par Saint-André (2013) et que nous aborderons par la suite. La "simplicité" apparaît alors de manière locale, à un grain donné. Ce critère n'est évidemment pas objectif et dépend de la simplicité du formalisme utilisé (généralement mathématique). Toute écriture d'un formalisme de type mathématique pour une loi est en soi un exercice de modélisation.

Ce que nous appelons communément modélisation, correspond à la modélisation dite intégrative. Elle consiste à proposer une combinaison de lois simples, de même grain, dans le but de représenter un phénomène décomposable en sous-phénomènes. La question de la "complexité" dans la modélisation d'un phénomène se pose dès lors que : i) l'observation du phénomène ne suggère au scientifique aucune loi simple (qu'elle soit statistique ou déterministe), ii) le phénomène est perçu comme la résultante de la combinaison de sous-phénomènes, représentables par des lois ou modèles simples de grains disjoints. Cette définition du rapport simplicité/complexité a pour avantage de limiter l'utilisation de cette terminologie aux systèmes de représentation et non pas aux phénomènes naturels.

1.3 Etat de l'art succinct de la modélisation forestière

La notion de grain permet de classifier les nombreuses stratégies utilisées pour établir la production de bois, la séquestration en carbone, la fertilité des sites et les ressources en eau. Saint-André (2013) synthétise ces différentes approches et identifie trois familles de modèles :

- issus de la dendrométrie (Fagacees (Dhote, 1996), Eucalypt-Dendro (Saint-André *et al.*, 2002, 2008, 2005)). Ces modèles phénoménologiques reposent sur des lois empiriques basées sur l'observation des mensurations des arbres au sein d'un peuplement. Ils permettent de prendre en compte directement les scénarios de sylviculture et restituent la production de carbone ainsi que le couplage carbone/éléments minéraux au sein de la biomasse. Ils ne tiennent pas compte explicitement du climat et des cycles biogéochimiques.
- issus de l'écophysiologie où l'on pourra citer les modèles Castanea (Davi *et al.*, 2005, Dufrene *et al.*, 2005), G'Day (Corbeels *et al.*, 2005a,b) ou encore Balance (Roetzer *et al.*, 2010). Ces modèles essentiellement mécanistes proposent un couplage fonctionnel entre les cycles du carbone et de l'eau, prennent en compte le climat de manière explicite mais ne proposent pas d'approches efficaces pour répercuter la fertilité des sols et la gestion forestière sur l'allocation de la biomasse.
- issus de la biogéochimie tels que Safe (Sverdrup *et al.*, 2006), ForSVA (Arp et Oja, 1997, Oja et Arp, 1997) et ForNBM (Zhu *et al.*, 2003a,b). Ces modèles proposent une description des processus biogéochimiques du sol : altération des minéraux, minéralisation de la matière organique, chimie. Le climat et les propriétés du sol sont explicitement pris en compte. Ils tiennent difficilement compte de l'activité biologique du sol et d'une part du cycle biologique (prélèvement et allocation des minéraux par les végétaux).

Ces approches recouvrent une part très importante des processus clés impliqués dans le fonctionnement des écosystèmes forestiers. Cependant, les différences de granulométrie empêchent un couplage direct de ces approches. Du fait de la complexité des écosystèmes forestiers, une simple juxtaposition de ces modèles ne permettra pas de saisir l'ensemble des interactions entre le sol, la végétation et l'atmosphère.

1.4 Démarche de modélisation

Pour proposer une nouvelle modélisation des processus, il est fondamental de s'attacher à une granulométrie imposée puis de questionner chacune des approches de modélisation actuelles. L'objectif est de formuler de nouvelles lois pour chaque processus de l'écosystème : i) propres à la granulométrie fixée, ii) tenant compte des informations apportées par d'autres grains de modélisation et iii) reposant sur une approche disciplinaire solide pour chaque compartiment de l'écosystème.

Pour illustrer cette démarche, considérons par exemple la modélisation de la production de biomasse. Les lois empiriques d'Eichhorn, associées à la théorie Assmann et l'hypothèse de Langsaeter (dendrométrie) fournissent une estimation solide de la productivité à l'échelle du peuplement alors que le modèle Farquhar *et al.* (1980) (écophysiologie) se concentre sur la photosynthèse (échelle cellule - de l'heure à la journée). Ces deux approches traitent dans le fond la même question, à savoir la production de matière organique (MO), mais opèrent à des grains totalement différents. La première n'est pas mécaniste et repose sur la notion d'indice de fertilité alors que la seconde prend en compte notamment l'effet de la concentration en CO₂ atmosphérique sur la photosynthèse.

La question illustrant notre réflexion sera alors la suivante : "Est-il possible d'amender les lois issues de la dendrométrie (directement ou avec une loi complémentaire) pour prendre en compte l'effet de la fertilisation en CO₂ sur la production de MO telle que constatée par le modèle de Farquhar ?"

Il est évident que la difficulté fondamentale réside dans le saut d'échelle. Entre la photosynthèse brute et la production globale, le nombre de médiations via d'autres processus est très élevé voire incalculable. Ce questionnement n'est pas récent et a déjà été soulevée en particulier dans la progression du modèle ForSafe (Wallman *et al.*, 2005) ;

1.4.1 Les modèles à base dendrométrique comme point de départ

1.4.1.1 Concept fondateur : lois d'Eichhorn

Dans le paysage des modèles dédiés au fonctionnement des écosystèmes forestiers, les modèles phénoménologiques Fagacees (hêtre - tempéré) et Eucalypt-Dendro (eucalyptus - tropical) proposent un moteur de simulation de croissance reposant sur les lois dendrométriques empiriques d'Eichhorn et la théorie d'Assmann (Assmann, 1970).

Rappelons ici les lois fondamentales de la dendrométrie :

1. La hauteur dominante d'un peuplement équienne, monospécifique et de couvert fermé, n'est fonction que de l'âge, de l'essence, et des conditions de station,

Chapitre 1. Introduction

2. Le volume spécifique d'un peuplement équienne, monospécifique et de couvert fermé, n'est fonction que de la hauteur dominante (Eichhorn, 1904),

Précisons que dans le cas des plantations congolaises d'eucalyptus, ces lois ont été amendées afin de tenir compte de la densité du peuplement considéré (Saint-André *et al.*, 2002).

Ces lois empiriques associées à des lois d'allométrie permettent la modélisation de la croissance et de la production de biomasse des écosystèmes équienues et mono-spécifiques sous des climats variés et à des échelles temporelles allant de l'année au siècle suivant les essences considérées. En pratique, les modèles susmentionnés formalisent ces lois par des équations différentielles ordinaires (EDOs).

1.4.1.2 Indice de fertilité

Ces modèles reposent sur le concept d'indice de fertilité (Bontemps et Bouriaud, 2014). Cette variable est déterminée dès lors que la hauteur dominante du peuplement est connue à un âge donné. Elle permet d'estimer la productivité de l'écosystème à n'importe quel âge. L'avantage majeur de ce concept est qu'il permet l'utilisation de ces modèles sur la base de mesures in situ peu coûteuses en ressources humaines, matérielles et temporelles.

Néanmoins, l'indice de fertilité englobe l'ensemble des conditions biophysiques de l'écosystème et les paramètres de ces modèles sont associés à des conditions environnementales particulières. Il est alors nécessaire de respecter ces conditions lors de l'utilisation du modèle. La différenciation de l'influence du climat et des cycles biogéochimiques sur la production et la croissance est alors impossible ce qui constitue une limitation majeure dans le cadre de la gestion des changements globaux.

La revue de Bontemps et Bouriaud (2014) met en évidence que le concept d'indice de fertilité peut théoriquement être dépassé au vu des avancées récentes de la modélisation. En effet, plusieurs modèles à granulométrie semblable à celle des modèles dendrométriques mais basés sur des concepts tirés de l'écophysiologie sont capables d'estimer cet indice.

L'objet de cette thèse est d'apporter une contribution à l'introduction de l'influence du climat et des cycles biogéochimiques dans la famille des modèles dendrométriques. L'objectif final est d'éliminer le concept d'indice de fertilité et de rendre les relations du modèle à l'environnement explicites tout en gardant la granulométrie des modèles dendrométriques. La granulométrie associée est celle du mois et considère les écosystèmes de l'échelle de l'arbre à celle du peuplement.

1.4.2 Quelles évolutions ?

L'élaboration d'un outil de modélisation plus générique passe par une prise en compte de l'ensemble des processus de l'écosystème forestier à des échelles ciblées. Dans notre approche, la révision du concept d'indice de fertilité est nécessaire et implique l'intégration des cycles géochimiques et biologiques aux modèles phénoménologiques basés sur les lois d'Eichhorn. La chimie du sol (altération, minéralisation, percolation, drainage, ...) constitue l'interface entre ces deux cycles.

La méthodologie mise en œuvre dans les modèles ForSafe et Profile (Sverdrup, 2009) est actuellement l'une des plus performante pour restituer le fonctionnement de ce compartiment de l'écosystème. Rendre possible l'utilisation de Safe (Alveteg, 1998), sous compartiment pour la chimie du sol de ForSafe, est l'un de nos objectifs à moyen terme. Au regard de la figure 1.4, il est essentiel de souligner que le rôle d'interface entre les cycles biologiques et géochimiques joué par la chimie du sol ne peut être appréhendé qu'après plusieurs phases de modélisation préalables : i) intégration du cycle de l'eau (drainage, volume des solutions de sol), ii) intégration de la décomposition de la matière organique du sol (MOS) (minéralisation, activité des micro-organismes, relation entre pH et MO et de son influence sur le modèle Safe (Alveteg, 1998)).

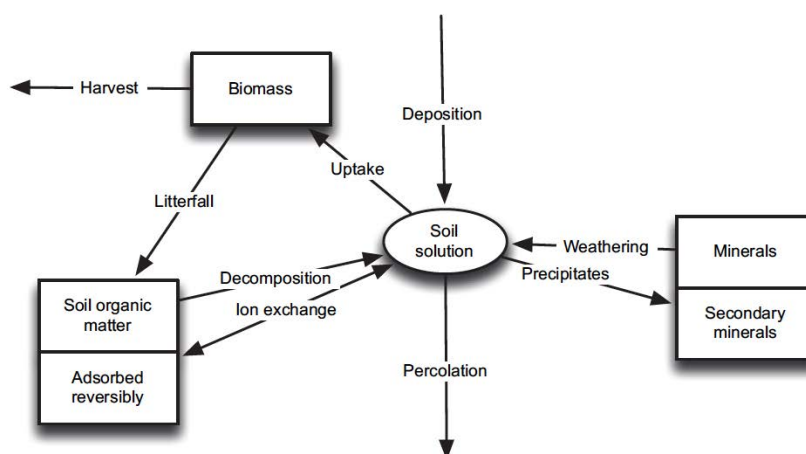


Figure 1.4 – Compartiments de l'écosystème et flux dans le modèle ForSafe (tiré de Sverdrup (2009)).

1.4.2.1 Cycle géochimique

L'intégration du climat et du cycle de l'eau est une étape indispensable avant toute intégration du cycle géochimique. Il est nécessaire de maîtriser l'intégralité du cycle de l'eau (précipitations, évaporation, transpiration, infiltration, drainage) avant d'étudier la perte d'éléments minéraux par

Chapitre 1. Introduction

drainage, l'altération des minéraux et la chimie du sol. L'intégration du cycle de l'eau et du climat a été envisagée avec le modèle Biljou (Granier *et al.*, 1999). Ce modèle de type sol-végétation-atmosphère-transfert (SVAT) à base journalière est fondé sur trois types d'entrées :

- météorologique : évapotranspiration potentielle ¹, précipitations et rayonnement global ;
- végétation : indice foliaire ² (ou leaf area index (LAI) dans le monde anglophone) ;
- sol : nombre d'horizons, puis pour chaque horizon : profondeur, pourcentage de racines fines, réserve utile, humidité pondérale à pF=4,2, densité apparente.

L'incorporation du moteur de la transpiration végétale du modèle Biljou dans une approche à base dendrométrique a requis l'élaboration du modèle Stand Leaf Cohorts Dynamics (SLCD) estimant les fluctuations saisonnières du couvert végétal (chap.2, 3).

1.4.2.2 Cycle biologique

La modélisation du cycle biologique est indispensable à tout amendement des modèles à base dendrométrique tel qu'envisagé dans cette thèse. L'approche dendrométrique permet d'estimer le contenu du bois en éléments minéraux et permet au forestier de quantifier les exportations d'éléments minéraux selon les traitements sylvicoles. Cependant, la restitution d'éléments minéraux vers le sol par les chutes de litière et leur dégradation n'est pas prise en compte. L'ensemble de la chaîne allant de la plante, plus spécifiquement la feuille (résorption et chute), passant par la décomposition de la MO de la litière jusqu'aux horizons organiques du sol doit être intégrée. Deux nécessités apparaissent : i) estimer la production de litière saisonnière (chap.2,3) et ii) sa dégradation le long d'un profil vertical de sol (chap.4,5,6).

1. Obtenue à partir de la formule de Penman

2. L'indice foliaire est une grandeur sans dimension, qui exprime la surface foliaire d'un arbre, d'un peuplement, d'un écosystème ou d'un biome par unité de surface de sol. Selon l'échelle à laquelle on s'intéresse, l'unité de surface de sol peut être le m², l'hectare, le km².

Chapitre 2

Le rôle central de la canopée - Modèle Stand Leaf Cohorts Dynamics

Les modèles empiriques de croissance et de production restituent des tendances de production de biomasse foliaire de l'échelle annuelle à l'échelle décennale (ex. Eucalypt-Dendro (Saint-André *et al.*, 2002, 2008, 2005)). Nous nous sommes appuyés sur ces estimations pour développer une nouvelle méthode de simulation du couvert foliaire forestier. L'idée directrice est qu'un simple modèle probabiliste régissant la dynamique mensuelle de cohortes de feuilles a une flexibilité suffisante pour restituer la dynamique de l'indice foliaire (LAI) et de la production de litières, aussi bien pour les peuplements permanents que pour les décidus. Nous avons développé le modèle probabiliste SLCD afin de simuler la dynamique de la canopée ainsi que ses interactions avec le climat, le cycle de l'eau et des nutriments.

2.1 Rôle dans les cycles biogéochimiques et modélisation

La dynamique du couvert foliaire joue un rôle majeur dans la régulation des flux au sein de l'écosystème forestier. Elle est impliquée dans chaque sous-cycle biogéochimique : i) cycle biochimique : les feuilles sont le siège de la photosynthèse donc de la production de carbone et sont impliquées dans la résorption d'éléments minéraux lors de sénescence des feuilles ; ii) cycle biologique : la foliation et la maintenance des feuilles requiert l'allocation d'éléments minéraux (K,Ca,Mg,P,N) et la production de litière foliaire permet de restituer ces éléments au sol forestier ; iii) cycle géochimique : la réponse de la forêt aux variations climatiques et aux intrants atmosphériques dépend fortement de la dynamique de la canopée ; la fermeture du couvert influence le cycle de l'eau, l'apport en rayonnement et l'interception des dépôts atmosphériques.

L'influence du couvert végétal est importante dans les modèles écophysiologiques (ex : G'Day (Corbeels *et al.*, 2005a,b) ; Castanea (Davi *et al.*, 2005, Dufrene *et al.*, 2005)), leurs estimations de productivité (croissance des arbres et séquestration du carbone) étant particulièrement sensibles aux variations de LAI. Le LAI est également utilisé dans les modèles de transpiration (Chouhury et Monteith, 1988, Fisher *et al.*, 2009, Granier *et al.*, 1999, Jung *et al.*, 2010, Shuttleworth et Wallace, 1985) ainsi que pour estimer la fraction du rayonnement photosynthétique actif absorbé par la végétation (Gower *et al.*, 1999, Nouvellon *et al.*, 2000). Aussi, ces modèles requièrent des estimations de LAI d'autant plus fiables lorsqu'ils sont employés sur de longues périodes. Plusieurs méthodes sont disponibles pour estimer le LAI (Breda, 1999) : directe à partir de mesures sur la litière sèche (Nouvellon *et al.*, 2010), ou indirecte par mesure satellite (Le Maire *et al.*, 2011) ou par mesure optique avec un analyseur de couvert tel que LAI2000 (Licor) ou photographie hémisphérique.

Indépendamment du LAI, l'estimation de la production de litière foliaire permet de définir l'apport en MO pour des modèles de décomposition (Bosatta et Agren, 1996, d'Annunzio *et al.*, 2008). Elle est indispensable pour envisager une modélisation complète des cycles biogéochimiques.

Par ailleurs, la question des changements globaux a fortement motivé le développement récent des modèles dédiés à la phénologie (Richardson *et al.*, 2013). A l'échelle planétaire, il apparaît que les facteurs climatiques les plus influents sur la phénologie des écosystèmes tempérés et boréaux sont bien identifiés, alors que la phénologie des forêts tropicales est peu étudiée et comprise. Plusieurs études basées sur des observations satellites (Botta *et al.*, 2000, Jolly *et al.*, 2005, Stoeckli *et al.*, 2008) ont défini des indicateurs climatiques permettant d'estimer la dynamique des couverts forestiers mondiaux. Les variables climatiques associées sont simples (déficit de pression de vapeur, photopériode, température minimale) et permettent d'identifier les facteurs les plus limitant de la dynamique foliaire.

2.2 Modèle SLCD

Chabot et Hicks (1982) et Kikuzawa et Lechowicz (2011) ont mis en évidence que le renouvellement foliaire peut être considéré dans son ensemble comme le résultat d'une stratégie d'optimisation de la croissance forestière et de l'efficacité d'utilisation du carbone. Par conséquent, les changements observés dans la foliation et la sénescence ont pour but l'optimisation de l'activité photosynthétique. Dans cette approche, chaque feuille possède un potentiel photosynthétique déclinant au cours du temps (Kitajima *et al.*, 2002, 1997b). Les processus impliqués dans la sénescence s'enclenchent dès lors que le potentiel de production en carbone de la feuille est inférieur au coût en carbone de maintien de la feuille. Indépendamment de la théorie de l'optimisation, la canopée est soumise à des stress biotiques (ex : insectes (Lowman, 1992, Lowman et Heatwole, 1992)) et abiotiques (ex : le gel (Silva *et al.*, 2009)) engendrant une chute ou une disparition prématurée de la feuille.

Le modèle SLCD considère le renouvellement de la canopée comme la combinaison de trois processus successifs : i) bourgeonnement/émergence de la feuille, ii) développement de la feuille, iii) sénescence et abscission de la feuille. De manière concrète, la probabilité de vie ou de mort de chaque feuille est considérée au sein de chaque cohorte de feuilles de la canopée. Ces probabilités sont fonctions d'indices environnementaux définis sur une base bibliographique. Ainsi, le modèle propose, conditionnellement aux probabilités choisies et sous des hypothèses associées au processus de foliation, une évaluation quantitative de la dynamique de la canopée. Cette donnée est par nature très difficile à évaluer expérimentalement et nous pouvons espérer que la modélisation permettra d'identifier et de hiérarchiser les facteurs climatiques les plus influents.

Le modèle a été conçu initialement pour les plantations monospécifiques d'*eucalyptus* (Sainte-Marie *et al.*, 2012). En supposant que l'ensemble des écosystèmes forestiers sont régis par des processus communs de croissance et d'interactions avec l'environnement, SLCD a été étendu aux forêts tempérées pour proposer une approche générale (chap.3).

Notre approche présente plusieurs intérêts :

- elle se distingue d'une analyse statistique usuelle car elle se base sur des hypothèses fortes sur les processus biologiques mis en jeu,
- elle définit une probabilité de chute pour chaque feuille basée sur la littérature permettant ainsi de conserver un lien fort et renouvelable au cours du temps avec l'écologie,
- elle correspond à la granulométrie actuelle des modèles dendrométriques et phénoménologiques, économe en ressources informatiques et adaptable à une gamme variées d'interactions avec l'environnement.

2.3 Description du modèle

2.3.1 Variables d'entrée du modèle

Afin de travailler avec le même grain que les modèles dendrométriques, le modèle SLCD considère la dynamique de la canopée à un pas de temps mensuel. Nous noterons $k \in \mathbb{N}^*$ l'âge en mois de la forêt étudiée.

D'autre part, la volonté de combiner SLCD avec le modèle Biljou nous pousse à considérer des données climatiques journalières comme variables d'entrées.

L'estimation de biomasse foliaire non saisonnière (fournie par exemple par le modèle à base dendrométrique E-Dendro) sera notée B .

Le modèle requiert également des informations sur la surface (s) et la masse (m) foliaire au sein du peuplement.

2.3.2 Dynamique de la population de feuilles

SLCD considère la canopée comme une population de feuilles distribuées en classes d'âge mensuelles i appelées cohortes. L'âge d'une feuille est déterminé par sa période d'attachement à l'arbre c.-à-d. la différence entre le mois où l'âge de la feuille est considéré et le mois de bourgeonnement. Si une feuille est tombée, son âge égale la durée entre le mois de bourgeonnement et le mois d'abscission. Remarquons que l'âge i d'une feuille est toujours inférieur à l'âge k du peuplement.

La population totale de feuilles au sein de la canopée au mois k est notée $N(k) \in \mathbb{N}$. Elle est la somme des populations de chaque cohorte présente au sein de la canopée :

$$(2.1) \quad N(k) = \sum_{i \geq 1} N^i(k)$$

où $N^i(k) \in \mathbb{N}$ est le nombre de feuilles au sein de la cohorte d'âge i le mois k .

Le nombre de feuilles tombées au cours du mois k au sein d'une cohorte d'âge i est noté $N_F^i(k)$.

Chaque mois k , le modèle SLCD effectue deux opérations successives qui permettent de simuler la dynamique de ces populations (voir Figure 2.1) : (1) vieillissement ou mortalité des feuilles et (2) production de nouvelles feuilles. L'étape (1) repose sur la définition de la probabilité de chute de chaque feuille.

L'itération de ces deux étapes sur plusieurs mois consécutifs définit un processus de branchement avec immigration (Harris, 1963, Olofsson, 1996).

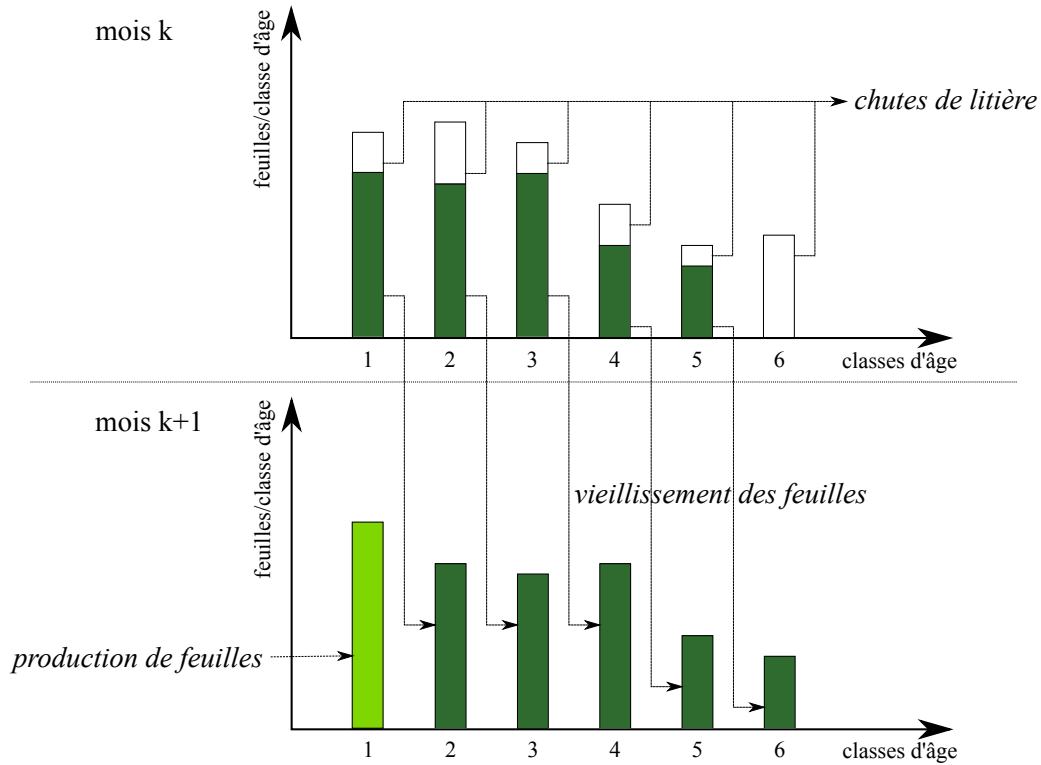


Figure 2.1 – Description du processus itératif du modèle SLCD. Les processus clés du modèle figurent en italique. Le vieillissement des feuilles et leur chute dépendent des probabilités de chutes associées à chaque cohorte. La création de nouvelles feuilles est estimée après le vieillissement des feuilles. Elle dépend de l'espace disponible au sein de la canopée (Θ) et des conditions de foliation (φ) (voir 2.3.2.2).

2.3.2.1 Mortalité et croissance des feuilles

La dynamique des cohortes repose sur la définition d'une probabilité pour chaque feuille d'être maintenue ou non dans le couvert. Cette probabilité sera notée $p_F^i(k)$ pour une feuille au sein d'une cohorte d'âge i au mois k . Nous l'appellerons par la suite *probabilité de chute*.

Chaque site d'étude requiert la formulation d'hypothèses ad hoc sur la phénologie pour définir ces probabilités de chutes. Ces hypothèses peuvent dépendre de l'âge de la forêt, des processus de sénescence de l'essence considérée, de l'âge de la feuille, et des conditions climatiques et environnementales. Une contrainte majeure de cette approche est de réussir à les formaliser et à les combiner. Ceci s'effectue en deux temps :

- * une fonction appelée *indice de chute*, à valeur dans $[0, 1]$, est définie pour chaque processus phénologique impliqué dans la chute foliaire ; plus sa valeur est proche de 1, plus les chances de chutes pour la feuille sont élevées ;
- * une *fonction combinatoire* permet d'associer ces processus afin de définir les probabilités de

Chapitre 2. Le rôle central de la canopée - Modèle Stand Leaf Cohorts Dynamics

chute.

Afin d'illustrer cette démarche, fixons arbitrairement q indices de chute notés $(p_j^i(k))_{j \in \{1, q\}}$ et associés à une cohorte d'âge i le mois k . La probabilité de chute $p_F^i(k)$ est alors définie par :

$$(2.2) \quad p_F^i(k) = f(p_1^i(k), p_2^i(k), \dots, p_q^i(k)),$$

où $f : [0, 1]^q \rightarrow [0, 1]$ est la *fonction combinatoire* (ou encore appelé *opérateur d'agrégation* dans la littérature) définie de la manière suivante :

$$(2.3) \quad f(p_1, \dots, p_q) = 1 - \prod_{j=1}^q (1 - p_j^{\alpha_j}).$$

Les nombres réels positifs $\alpha_1, \dots, \alpha_q$ sont des paramètres permettant d'optimiser l'association des indices de chute. Cette fonction combinatoire vérifie la propriété :

$$(2.4) \quad \text{si } p_1^i = 1 \text{ ou } \dots p_q^i = 1, \text{ alors } f(p_1^i, \dots, p_q^i) = 1.$$

Ainsi, si une condition létale est satisfaite pour une cohorte de feuille c.-à-d. si l'indice de chute associé est égal à 1, la propriété ci-dessus assure la chute de toutes les feuilles de la cohorte considérée.

Au mois k , le nombre de feuilles $N^i(k)$ d'âge $i \geq 2$ est obtenu à partir de la population $N^{i-1}(k-1)$ en utilisant la loi binomiale $\mathcal{B}(N^{i-1}(k-1), p_F^{i-1}(k-1))$. Le nombre de feuilles mortes est obtenu à partir de la relation suivante :

$$(2.5) \quad N_F^{i-1}(k-1) + N^i(k) = N^{i-1}(k-1).$$

2.3.2.2 Production de feuilles

La production de $N^1(k)$ nouvelles feuilles repose sur deux hypothèses :

1. La canopée peut accueillir un nombre limité de feuilles. Cette hypothèse impose une borne supérieure à $N(k)$.
2. La taille maximale de la canopée dépend de l'âge k de la plantation. Le nombre maximal de feuilles sera noté $N_{max}(k)$. En fonction des conditions de station, la population totale de feuille $N(k)$ peut atteindre $N_{max}(k)$.

Nous avons choisis d'associer les variations de $N_{max}(k)$ à celles de $B(k)$. Notons $\bar{m}$ la masse moyenne d'une feuille au sein de la canopée. Alors, la quantité $B(k)/\bar{m}$ correspond formellement

à un nombre de feuille. Nous supposons que cette quantité est proportionnelle à $N_{max}(k)$:

$$(2.6) \quad N_{max}(k) = \lfloor \lambda \frac{B(k)}{\bar{m}} \rfloor,$$

où λ est une constante positive et $\lfloor . \rfloor$ est la fonction partie entière.

Connaissant la capacité maximale $N_{max}(k)$ de la canopée au mois k et le nombre de feuilles $\sum_{i \geq 2} N^i(k)$ étant restée attachées, il est possible de définir l'espace disponible pour de nouvelles feuilles, noté Θ et donné par la différence :

$$(2.7) \quad \Theta(k) = N_{max}(k) - \sum_{i \geq 2} N^i(k).$$

Il reste à définir sous quelles conditions l'espace disponible est comblé par la création de nouvelles feuilles. Il est nécessaire d'intégrer des hypothèses sur les processus de création de feuilles propres à chaque cas d'étude. Dans chaque cas, une *fonction de foliation* φ à valeurs dans $[0, 1]$ est définie. Plus sa valeur est proche de 1, plus les conditions sont favorables à la mise en place de nouvelles feuilles.

La combinaison de Θ et φ donne la production de nouvelles feuilles :

$$(2.8) \quad N^1(k) = \lfloor \Theta(k) \varphi(k) \rfloor.$$

2.3.3 Variables de sortie

La simulation de la quantité saisonnière de biomasse foliaire (B_{season}), de chute de litière (LF) et de LAI est obtenue en associant à la dynamique de population des informations sur la surface (s) et la masse (m) individuelle des feuilles :

$$(2.9) \quad B_{season}(k) = \sum_{i \geq 1} N^i(k) m(k, i),$$

$$(2.10) \quad LAI(k) = \sum_{i \geq 1} N^i(k) s(k, i),$$

$$(2.11) \quad LF(k) = \sum_{i \geq 1} N_F^i(k) m(k, i).$$

Si certaines informations ne sont pas disponibles sur la masse ou la surface des feuilles, il est possible d'utiliser des variables supplémentaires tels que la masse surfacique d'une feuille ("leaf mass area", LMA) ou son inverse ("specific leaf area", SLA) pour obtenir les données manquantes :

$$(2.12) \quad m(k, i) = LMA(k) s(k, i) = SLA^{-1}(k) s(k, i).$$

Chapitre 3

Applications du modèle Stand Leaf Cohorts Dynamics : *Eucalyptus grandis*, Itatinga (Brésil), *Fagus sylvatica* L., Hesse et *Quercus petraea*, Barbeau (France)

Résumé (Traduction de l'abstract de l'article)

De nombreuses incertitudes pèsent sur la compréhension de la réponse du *LAI* face aux changements climatiques au sein des écosystèmes forestiers. D'une part, les modèles empiriques de croissance et de production ("Growth&Yields models" (G&Yms)) estiment de manière robuste la croissance des arbres à l'échelle de la parcelle, de l'année à la décennie ; et d'autre part, le *LAI* est une variable clé des modèles mécanistes ("Process-based models" (PBM)) dans l'estimation de la croissance des arbres à des échelles de temps courtes. Combler l'écart entre ces modèles par une combinaison de leurs approches de modélisation peut améliorer l'estimation de la croissance forestière, et par suite, des flux de carbone, d'eau et de nutriments.

Notre étude a eu pour objectif d'estimer les changements mensuels de *LAI* répondant aux variations climatiques à partir de mesures éparses de biomasse et de surface foliaire. Le modèle probabiliste de population de feuilles SLCD a été conçu pour simuler le renouvellement foliaire. La population de feuilles a été distribuée en cohortes mensuelles, et la taille de la population totale a été limitée conditionnellement à l'âge et à la productivité de la forêt. Une fonction de foliation et des probabilités régissant le vieillissement et la chute des feuilles ont permis d'estimer la dynamique du feuillage.

Chapitre 3. Applications du modèle Stand Leaf Cohorts Dynamics : *Eucalyptus grandis*, Itatinga (Brésil), *Fagus sylvatica* L., Hesse et *Quercus petraea*, Barbeau (France)

Leurs formulations dépendent de l'environnement de la forêt.

Le modèle a été appliqué à trois espèces croissantes dans des conditions de sol et de climat contrastées. Dans les plantations tropicales brésiliennes d'eucalyptus à feuillage permanent, la phénologie a été décrite en introduisant 8 paramètres. L'ajustement des paramètres à partir de données de chutes de litières et de LAI obtenues sur une rotation complète a été effectué à l'aide d'une méthode d'optimisation multi-objectif reposant sur un algorithme évolutionnaire. Des données de validation ont été obtenues sur une seconde parcelle. Les variations saisonnières de LAI ont été restituées fidèlement dans les deux cas ($R^2 = 0.898$ ajustement, $R^2 = 0.698$ validation). Les chutes de litières ont été simulées correctement ($R^2 = 0.562$ ajustement, $R^2 = 0.4018$ validation) et les estimations pourront être améliorées dans des travaux futurs en utilisant des données de validation supplémentaires. Dans deux forêts tempérées françaises à feuillage caduque (chêne et hêtre), nous avons adaptés les modules phénologiques du modèle CASTANEA pour simuler la dynamique du feuillage et les mesures de LAI ont permis de valider le modèle SLCD. Les phases phénologiques ont été simulées fidèlement dans les deux cas. Cependant, la simulation de LAI_{max} n'est pas satisfaisante dans le cas du hêtre et nécessitera des approfondissements futurs.

Notre approche probabiliste devrait contribuer à l'amélioration des estimations de la dynamique du LAI . Le formalisme du modèle est général et adaptable aux forêts de feuillus dans une large gamme de conditions écologiques.

A new probabilistic canopy dynamics model (SLCD) that is suitable for evergreen and deciduous forest ecosystems.

Sainte-Marie J.^{a,b,*}, Saint-André L.^{b,c}, Nouvellon Y.^{c,f}, Laclau J.-P.^{c,e}, Roupsard O.^{c,d}, le Maire G.^c, Delpierre N.^g, Henrot A.^a, Barrandon M.^a

^aUniversité de Lorraine, UMR Institut Elie Cartan, F-54506 Vandoeuvre-lès-Nancy, France

^bINRA, Biogéochimie des Ecosystèmes Forestiers, F-54280 Champenoux, France

^cCIRAD, UMR Eco&Sols, F-34060 Montpellier, France

^dCATIE, Tropical Agricultural Research and Higher Education Center, 7170 Turrialba, Costa Rica

^eDepartamento Recursos Naturais, Universidade Estadual de São Paulo, UNESP, Botucatu, SP 18610-307, Brazil

^fUSP, Universidade de São Paulo, ESALQ, Departamento de Ciências Atmosféricas, IAG, CEP 05508-900 São Paulo, Brazil

^gUniv. Paris-Sud, Laboratoire Ecologie Systématique et Evolution, UMR8079, Orsay, F-91405, France

Abstract

There are strong uncertainties regarding *LAI* dynamics in forest ecosystems in response to climate change. While empirical growth & yield models (G&YMs) provide good estimations of tree growth at the stand level on a yearly to decennial scale, process-based models (PBMs) use *LAI* dynamics as a key variable for enabling the accurate prediction of tree growth over short time scales. Bridging the gap between PBMs and G&YMs could improve the prediction of forest growth and, therefore, carbon, water and nutrient fluxes by combining modeling approaches at the stand level.

Our study aimed to estimate monthly changes of leaf area in response to climate variations from sparse measurements of foliage area and biomass. A leaf population probabilistic model (SLCD) was designed to simulate foliage renewal. The leaf population was distributed in monthly cohorts, and the total population size was limited depending on forest age and productivity. Foliage dynamics were driven by a foliation function and the probabilities ruling leaf ageing or fall. Their formulation depends on the forest environment.

The model was applied to three tree species growing under contrasting climates and soil types. In tropical Brazilian evergreen broadleaf eucalypt plantations, the phenology was described using 8 parameters. A multi-objective evolutionary algorithm method (MOEA) was used to fit the model parameters on litterfall and *LAI* data over an entire stand rotation. Field measurements from a second eucalypt stand were used to validate the model. Seasonal *LAI* changes were accurately rendered for both sites ($R^2 = 0.898$ adjustment, $R^2 = 0.698$ validation). Litterfall production was correctly simulated ($R^2 = 0.562$, $R^2 = 0.4018$ validation) and may be improved by using additional validation data in future work. In two French temperate deciduous forests (beech and oak), we adapted phenological sub-modules of the CASTANEA model to simulate canopy dynamics, and SLCD was validated using *LAI* measurements. The phenological patterns were simulated with good accuracy in the two cases studied. However, LAI_{max} was not accurately simulated in the beech forest, and further improvement is required.

Our probabilistic approach is expected to contribute to improving predictions of *LAI* dynamics. The model formalism is general and suitable to broadleaf forests for a large range of ecological conditions.

Keywords: climate changes, canopy dynamics, probabilistic model, process-based model (PBM), growth & yield model (G&YM)

1. Introduction

Global changes lead to increases in environmental stresses in forest ecosystems. Forest managers have to define forestry policies that combine economic constraints and ecosystem sustainability. Improving our comprehension

*Institut Elie Cartan, Université de Lorraine, B.P. 70239, 54506 Vandoeuvre-lès-Nancy Cedex, France
+33(0)3 83 68 45 90
Email address: juliensaintemarie@gmail.com (Sainte-Marie J.)

of the factors that influence the global functioning of forest ecosystems is a major challenge in addressing global changes. Modeling tools are to be improved to explicitly account for both silvicultural practices and the environment in the predictions of forest productivities. A multi-disciplinary approach is suggested by Reyer et al. (2013) to assess vegetation responses to global changes.

Saint-André (2013) classified the current modeling approaches in forest science into three disciplinary classes, highlighting their strengths and limitations:

- forestry and biometry with growth and yield models (G&YMs) such as FAGACEES (Dhote, 1996) or E-DENDRO (Saint-André et al., 2002, 2005, 2008). These empirical models accurately estimate wood production and nutrient allocation within tree components, are relevant over long periods of time and account for silvicultural practices. However, climate, water cycling and the biogeochemical cycles of nutrients are not explicitly considered. Their use is limited to the sites and climates considered for the calibration, which is likely to considerably limit their use in the context of climate change.
- ecophysiology using process-based models (PBMs) such as CASTANEA (Dufrene et al., 2005; Davi et al., 2005), G'DAY (Corbeels et al., 2005a,b; Marsden et al., 2013), BILJOU (Granier et al., 1999) or BALANCE (Roetzer et al., 2010). These mechanistic models simulate the coupling of carbon and water cycles. They explicitly consider the climate but exhibit poor performance in simulations of the effects of silvicultural practices on biomass allocation within tree components.
- biogeochemistry and soil chemistry models such as SAFE (Sverdrup et al., 2006), FORSVA (Arp and Oja, 1997; Oja and Arp, 1997) or FORNBM (Zhu et al., 2003a,b)). These models provide a consistent description of soil biogeochemical processes (mineral weathering, soil organic matter mineralization and soil solution chemistry). However, the description of nutrient uptake and dry matter allocation within trees is still under development.

These approaches consider a large variability in spatial and temporal scales, which implies that a simple juxtaposition is not sufficient to model the functioning of the whole ecosystem. It is therefore necessary to establish new modeling strategies to assess forest sustainability under various climatic and silvicultural scenarios. This idea is already applied in the model FORSAFE in the context of biochemistry (Wallman et al., 2005) or in the global vegetation model ORCHIDEE (Bellassen et al., 2010, 2011). These works highlight the large number of interactions between cycles, which generate feedback effects that are difficult to model.

The Stand Leaf Cohorts Dynamics (SLCD) model was developed in the context of improving G&YMs (Sainte-Marie et al., 2012). We expect that introducing climate, phenology and biogeochemical cycles in these models can improve their capacity to simulate soil-plant interactions and tree growth, along with considering management practices and changes in the environment. Modeling of canopy phenology is an essential step towards the development of comprehensive models that include water and nutrient balances in the predictions of tree growth. SLCD aims to (1) provide relevant estimations of seasonal *LAI* to drive PBM such as BILJOU (Granier et al., 1999); (2) introduce phenology in foliar biomass estimations provided by G&YMs such as FAGACEES (beech) and E-DENDRO (eucalypt); and (3) estimate the amounts of leaf production and litterfall. This paper focuses on phenology and does not consider the coupling of models. The association between G&YMs, PBMs and phenological estimations forms the basis for further works. However, to illustrate our global modeling method, we propose an example of models combined with flowcharts dedicated to *eucalypt* plantations (Fig.1).

Foliage dynamics play a key role in PBMs (e.g., G'DAY, CASTANEA). PBM simulations of carbon sequestration and tree growth are very sensitive to leaf area index (*LAI*) variations and require reliable estimations of *LAI* to be used over long time periods. *LAI* is used to drive forest transpiration models (e.g., Shuttleworth and Wallace (1985); Chouhury and Monteith (1988); Granier et al. (1999); Fisher et al. (2009); Jung et al. (2010)) and to determine the fraction of photosynthetically active radiation (*PAR*) absorbed by the vegetation (e.g., Gower et al. (1999); Nouvellon et al. (2000)). *LAI* can be measured in various ways (Breda, 1999), as follows: direct estimations by destructive sampling (Nouvellon et al., 2010), indirect estimations by satellite remote sensing (le Maire et al., 2011) or using optical devices such as LAI2000 (Licor) or hemispherical photographs.

In addition to the issue of the *LAI* estimate, litterfall production is the main organic matter input in decomposition models (e.g., Bosatta and Agren (1996); d'Annunzio et al. (2008)). Litterfall simulation is essential for enabling further modeling developments that incorporate nutrient cycling.

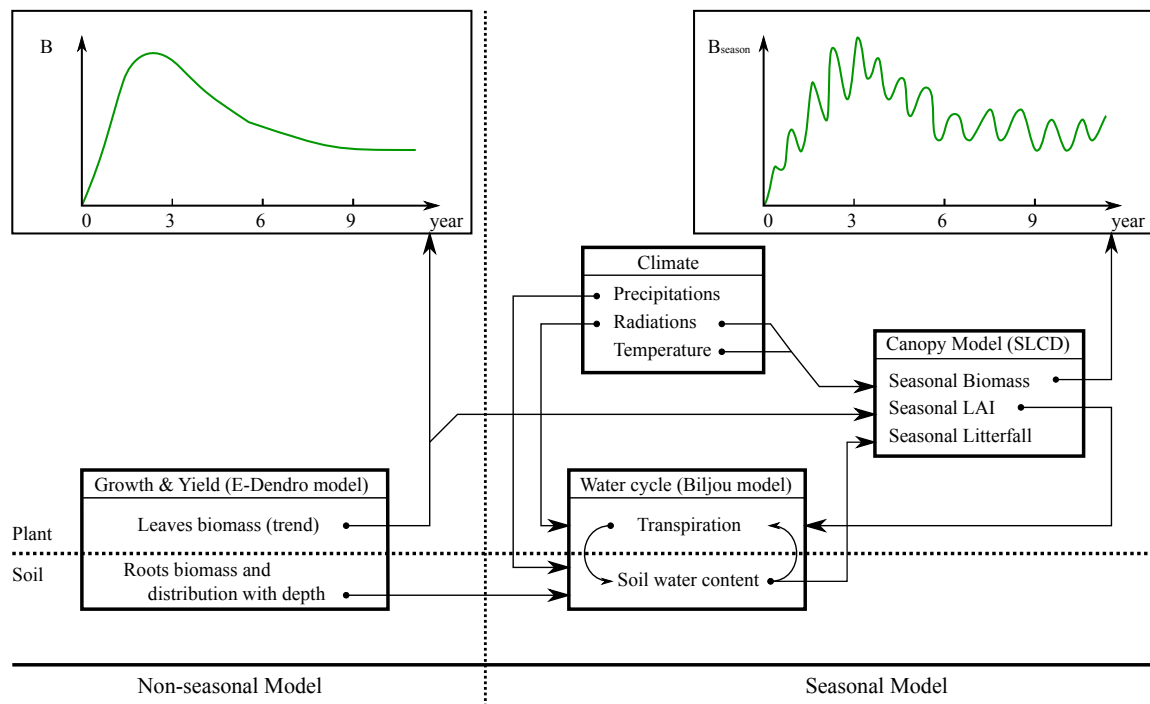


Figure 1: Flowchart of the integrative modeling approach used to introduce seasonality in growth & yield models and assessing the influence of stand growth, foliar biomass and climate on the water cycle.

The model combination was focused on eucalypt plantations and combines the growth & yield model E-DENDRO, the process-based model of stand transpiration BILJOU and the Stand Leaf Canopy Dynamics model (SLCD). Climatic data drive both the BILJOU and SLCD. There is feedback between BILJOU and SLCD: the seasonal Leaf Area Index (LAI) is an input of BILJOU and drives the forest transpiration rate and, thus, the soil water content; then, the drought stress (DS) is calculated and used in SLCD. This feedback provides a description of the influence of forest growth, climate and foliage dynamics on the water cycle.

The work presented in this article focused on SLCD calibration. DS was obtained from measurements. Future work will focus on the combination of BILJOU and SLCD.

Chabot and Hicks (1982) and Kikuzawa and Lechowicz (2011) showed that canopy renewal can be considered the result of forest growth optimization and carbon-use efficiency. Therefore, the optimization of photosynthetic activity would be driving canopy dynamics through rapid changes in leaf expansion and leaf mortality rates. In this approach, each leaf has a photosynthetic potential that declines over time (Kitajima et al., 1997a,b, 2002). Senescence processes are initiated if the leaf photosynthetic potential is lower than the cost of leaf attachment. Independent of this optimization theory, abiotic stresses such as frost (Silva et al., 2009) and drought (Chabot and Hicks, 1982) and biotic stresses such as herbivory (Lowman and Heatwole, 1992) are likely to cause premature leaf fall or disappearance.

Recently, phenology modeling was initiated under climate change pressure and is still under development (Richardson et al., 2013). While climatic factors driving boreal and temperate phenology are well identified, the modeling of tropical phenology is poorly studied and understood. Satellite data-based studies (Botta et al., 2000; Jolly et al., 2005; Stoeckli et al., 2008) proposed global climatic indicators to predict phenology. Simple climatic indexes are associated with climatic variables (vapor pressure deficit, photoperiod, minimum temperature) and are used to identify the most limiting factor in canopy dynamics.

In this study, we aimed to simulate *LAI* dynamics and litterfall at the stand level with a modeling tool that takes advantage of the large diversity of modeling approaches in forest science. We developed a new method to simulate *LAI* dynamics and litterfall production based on sparse measurements taken on a few days. We hypothesized that a simple probabilistic model (hereafter named SLCD) based on monthly leaf cohort dynamics had sufficient flexibility for accurately simulating *LAI* dynamics and litterfall production for both fast-growing evergreen plantations and deciduous temperate forests. SLCD is, by construction, designed to enable further developments by considering feedback from water and nutrient cycles. SLCD includes functions that consider leaf appearance, growth and fall, thereby accounting for the environment.

Our modeling approach was applied at three sites covered by tropical evergreen eucalypt plantations in Brazil and temperate deciduous forest in France essentially composed of beech (Hesse site) and oak (Barbeau site).

2. Materials & Methods

2.1. Description of the SLCD model

Table 1 provides a summary of the model variables.

2.1.1. Model inputs

According to G&YM time scales, SLCD has a monthly time step $k \in \mathbb{N}^*$ for the stand age, but to ensure a connection with PBMs such as BILJOU, we used daily climatic data to drive the leaf phenology. The time variable d is used when daily data are considered.

The required climatic data for each site are detailed below.

In addition, to account for the advantages of growth and yield models (sound principles based upon Eichhorn's rule, Assmann's yield level theory and Langsaeter hypothesis), the trend of biomass with stand age (denoted B), without seasonal variations, is used as an input variable in the SLCD model (Fig.1).

Information on the individual leaf mass (m) and individual leaf surface (s) is required to estimate the model outputs. These data were obtained from measurements in this study and may depend on leaf age (see 2.2.3) and forest age.

2.1.2. Leaf population dynamics

Foliage turnover is a combination of three successive processes: (1) bud burst/leaf emergence; (2) leaf expansion; and (3) leaf senescence/abscission. SLCD considers the foliage to be a population of leaves that are distributed by monthly classes of age i named cohorts. Leaf age is defined as the difference between the current month and budburst month. After falling, the age of the leaf is defined as the duration between emergence and abscission. Note that the age i of a leaf is always less than or equal to the stand age k .

The population $N_{(k)} \in \mathbb{N}$ of leaves carried by the forest at month k is given by

$$N_{(k)} = \sum_{i \geq 1} N_{(k)}^i \quad (1)$$

Table 1: List of variables, types (T), symbols and units used to execute and calibrate SLCD. The variables are classified in 3 types: I, input variable; S, state variable; and O, output variable. Variables with no type specified are mentioned in the article but not explicitly used in SLCD.

(a) Climate and soil water

Variable	T	Symb.	Unit
Daily mean temperature	I	T	$^{\circ}\text{C}$
Drought stress	I	DS	-
Global radiation	I	R_g	$\text{MJ} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{month}^{-1}$
Monthly mean temperature	I	T_m	$^{\circ}\text{C}$
Photosynthetic active radiation	I	PAR	$\text{MJ} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{month}^{-1}$
Photoperiod	I	π	$\text{hours} \cdot \text{day}^{-1}$
Relative extractable water	I	REW	-

(b) Canopy

Variable	T	Symb.	Unit
Foliar biomass trend	I	B	$\text{kg} \cdot \text{m}^{-2}$
Leaf mass	I	m	kg_{leaf}
Leaf mass area	I	LMA	$\text{kg}_{leaf} \cdot \text{m}_{leaf}^{-2}$
Leaf mean mass	I	$\bar{m}$	kg_{leaf}
Leaf mean surface	I	$\bar{s}$	m_{leaf}^2
Specific leaf area	I	SLA	$\text{m}_{leaf}^2 \cdot \text{kg}_{leaf}^{-1}$
Dead leaf population of age i	S	N_F^i	leaf
Leaf population	S	N	leaf
Leaf age	S	i	month
Leaf population of age i	S	N^i	leaf
Maximal leaf population	S	N_{max}	leaf
Production pressure on leaf fall	S	δ	-
Space available for new leaves	S	θ	leaf
Stand age	S	k	month
Seasonal foliar biomass	O	B_{season}	$\text{kg} \cdot \text{m}^{-2}$
Leaf area index	O	LAI	$\text{m}_{leaf}^2 \cdot \text{m}_{soil}^{-2}$
Litterfall	O	LF	$\text{kg} \cdot \text{m}^{-2}$
Normalized Difference Vegetation Index	-	$NDVI$	-
Plant area index	-	PAI	$\text{m}_{vegetation}^2 \cdot \text{m}_{soil}^{-2}$

where $N_F^i(k) \in \mathbb{N}$ is the number of leaves of age i at month k . We also introduced the number $N_F^i(k)$ of leaves of age i that fell during month k . Seasonal simulations of foliar biomass (B_{season}), litterfall (LF) and leaf area index (LAI) are obtained by coupling cohort dynamics and single-leaf surface and mass.

Two successive modeling steps, for each month k , are used to model cohorts' dynamics (Fig.2). The iteration of these two steps establishes a probabilistic dynamic model for the foliage demography. This model is a branching process with immigration (Harris, 1963; Olofsson, 1996).

Leaf mortality. It is necessary to determine the probability that each leaf is abscised or maintained on the tree. A probability is assigned to each cohort, and the *fall probability* for a leaf of age i at month k is denoted $p_F^i(k)$.

For each study site, a phenological hypothesis is required to define fall probabilities that may depend on leaf age, forest age, senescence processes and climatic and environmental variables. A major issue is determining how to formalize and combine all of these factors.

First, a function named *fall index* is defined for each phenological process involved in leaf fall. Each fall index function generates a real number included in $[0, 1]$. The number and the type of functions vary among the study sites (see below).

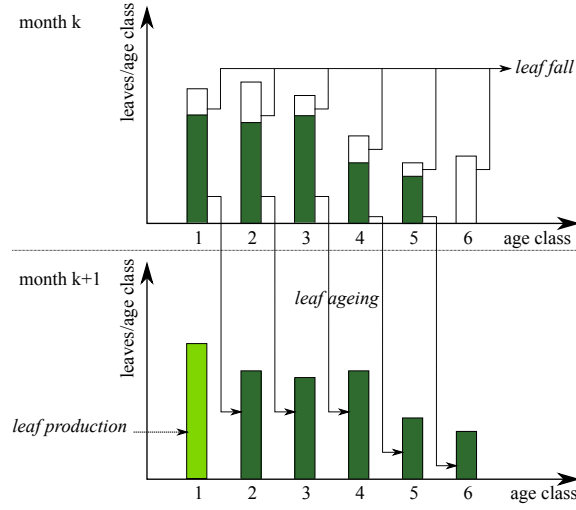


Figure 2: Iterative process of the SLCD model. Successive processes driving canopy dynamics are denoted in italics. Leaf fall and ageing result from fall probabilities. The creation of new leaves occurs after leaf ageing, when the total number of leaves still attached has been estimated. Leaf production is driven by the non-seasonal biomass time series B given by growth & yield models and the foliation function φ .

Second, fall indexes are combined to define the fall probability. For a cohort of age i , let us consider q fall indexes $(p_j^{i(k)})_{j \in \{1, q\}}$. Then, the probability $p_F^{i(k)}$ is defined as follows:

$$p_F^{i(k)} = f(p_1^{i(k)}, p_2^{i(k)}, \dots, p_q^{i(k)}), \quad (2)$$

where $f : [0, 1]^q \rightarrow [0, 1]$ is the *combinatory function* defined as follows:

$$f(p_1, \dots, p_q) = 1 - \prod_{j=1}^q (1 - p_j^{\alpha_j}). \quad (3)$$

The positive real numbers $\alpha_1, \dots, \alpha_q$ are parameters used during model fitting to optimize the combination of fall indexes. The combinatory function satisfies

$$\text{if it exists } j \in \{0, q\} \text{ such that } p_j^i = 1, \text{ then } f(p_1^i, \dots, p_q^i) = 1. \quad (4)$$

This property ensures leaf fall if a lethal event occurs (i.e., at least one fall index is equal to one).

The number of leaves $N^i(k)$ of age $i \geq 2$ is obtained from the population $N^{i-1}(k-1)$ using the binomial law $\mathcal{B}(N^{i-1}(k-1), p_F^{i-1}(k-1))$. This law also provides the number of fallen leaves $N_F^{i-1}(k-1)$, which satisfies the following equality:

$$N_F^{i-1}(k-1) + N^i(k) = N^{i-1}(k-1). \quad (5)$$

Leaf production. The production of new leaves $N^1(k)$ is determined for each month k . First, we assume that the total number of leaves attached in the forest crown is limited by the crown size. Second, we assume that the *maximal number of leaves* is linked to the trend of stand foliar biomass per meter square $B(k)$. Let us denote the maximal number of leaves that can hold forest crown as $N_{max}(k)$. Depending on the season, the total population $N(k)$ may be lower than or equal to $N_{max}(k)$.

We also define the mean leaf mass $\bar{m}(k)$ as follows:

$$\bar{m}(k) = \sum_{i \leq 1} \frac{N^i(k) m(i, k)}{N(k)}. \quad (6)$$

Then, the term $B(k)/\bar{m}(k)$ corresponds formally to a number of leaves, and we assume its proportionality with $N_{max}(k)$. Because $B(k)/\bar{m}(k)$ is an average estimate of the leaves held in the tree crown, $N_{max}(k)$ may exceed $B(k)/\bar{m}(k)$. Thus, we introduce the positive constant λ , and then

$$N_{max}(k) = \lfloor \lambda \frac{B(k)}{\bar{m}(k)} \rfloor, \quad (7)$$

where $\lfloor \cdot \rfloor$ is the nearest integer function.

Then, it is possible to define the *space available for new leaves*. It is denoted as θ and is calculated as the difference between the maximal number of leaves and the total number of leaves attached to the trees:

$$\theta(k) = \max \left(0, N_{max}(k) - \sum_{i \geq 2} N^i(k) \right). \quad (8)$$

It is necessary to determine when this available space is filled with new leaves. To integrate our assumptions on leaf creation processes, we define a *foliation function*, denoted as φ (see 2.2.4 and 2.3.1). It expresses the proportion of the available space used to create new leaves. Its value is included in $[0, 1]$ and depends on our foliation assumptions. When the environmental conditions are more favorable to foliation, the value of φ is higher. The combination of θ and φ yields the production of young leaves:

$$N^1(k) = \lfloor \theta(k) \varphi(k) \rfloor. \quad (9)$$

The expression $N^1(k)$ (eq. 9) is a feedback loop influenced by environmental conditions. The maximal number of leaves constrains the leaf production by saturation of the tree crown.

2.1.3. Model outputs

To obtain B_{season} , LAI and LF , we used information on the mean leaf mass (m) and surface (s) in every cohort:

$$B_{season}(k) = \sum_{i \geq 1} N^i(k) m(k,i), \quad (10)$$

$$LAI(k) = \sum_{i \geq 1} N^i(k) s(k,i), \quad (11)$$

$$LF(k) = \sum_{i \geq 1} N_F^i(k) m(k,i). \quad (12)$$

If information on m or on s are lacking, additional variables such as the leaf mass area (LMA) can be used to fill in the missing data as follows:

$$m(k,i) = LMA(k) s(k,i) = \frac{s(k,i)}{S LA(k)}. \quad (13)$$

2.2. Tropical evergreen eucalypt plantations

Over the last twenty years, the intensive monitoring of biomass dynamics in eucalypt plantations (Laclau et al., 2000; Stape et al., 2004) has led to the design of several biomass models (e.g., E-DENDRO (Saint-André et al., 2002), G'DAY (Corbeels et al., 2005a) and CABALA (Battaglia et al., 2004)). The biomass predictions of these models combined with leaf traits and SLCD may contribute to the improvement of the PBMs used to manage these plantations (Fig.1).

This article considers the phenology of Brazilian eucalypt plantations. A review was used to establish parametric functions simulating leaf emergence and abscission. Parameters were fitted on monthly litterfall measurements and remote sensing estimates of LAI (see Laclau et al. (2010), le Maire et al. (2011) and le Maire et al. (2013) for details). Given the high number of parameters, a multi-objective evolutionary algorithm method (MOEA) was chosen for model fitting (Van Veldhuizen and Lamont, 2000). Model validation was performed for an independent data set obtained from a second stand situated nearby.

2.2.1. Study site 1: *Eucalyptus*, Itatinga, Brazil

The Itatinga Experimental Station (23°02' S and 48°38' W) is covered with *Eucalyptus grandis* (W. Hill ex Maiden) plantations. The mean annual rainfall spanning the 15 years before our study was 1360 mm. The average annual temperature was 20°C. The seasonal cold period occurred from June to September, with an absolute minimum of 4.8°C recorded in July 2000, along with minimum temperature values below 5°C for a few days each year. The relief was typical of the western plateau of São Paulo, with a gentle wavy topography. The experimental site was located on a hilltop (slope < 3%) at an altitude of 850 m. The soils were very deep Ferralsols (> 15 m) developed on Cretaceous sandstone, Marília formation, Bauru group, with a clay content ranging from 14% in the A1 horizon to 23% in deep soil layers. This study focused on two experimental plantations, E101 and E137, as described in Laclau et al. (2009) and le Maire et al. (2013), respectively. The same mono-progeny of *E. grandis* seedlings was planted in April 2004 in E101 and May 2003 in E137. The stocking density was slightly lower in E137 than in E101 (1111 vs 1666 trees ha⁻¹), and nitrogen (N) fertilizers were not applied in E137, whereas they were applied at 120 kg N ha⁻¹ for the first 1.5 years after planting in E101. The other silvicultural practices were similar in the two experiments. The positive effect of fertilizers on biomass production was only significant the first two years after planting at our study site, and the total aboveground biomass produced was similar in E101 and E137 at the end of the rotation (unpublished data).

2.2.2. Climatic and environmental data

Global radiation (R_g) measurements were obtained from UNESP university at Botucatu (30 km from the study site). Other climatic data used in SLCD were measured at the Itatinga experimental station (a distance < 1 km from the E101 and E137 experimental sites).

An estimate of the monthly drought stress DS was defined based on the soil water content measurements. Its definition is based on the daily relative extractable water (REW). REW is the ratio between the amount of water available in soil and the maximal amount of water extractable from the soil.

REW was computed from soil water content measurements collected every 1-7 days down to a depth of 3 m with TDR probes (Time Domain Reflectometry, Trase soil moisture, CA, USA). Granier et al. (1999) defined a critical threshold $REW_c = 0.4$ under which the ecosystem is submitted to drought limitation. Each day d in month k , if $REW_{(d,k)} \geq REW_c$, the daily drought stress is $REW_c - REW_{(d,k)}$. DS on month k is defined as the sum of daily stresses occurring in month k :

$$DS(k) = \sum_{d \in month(k)} \max(0, REW_c - REW_{(d,k)}). \quad (14)$$

2.2.3. Foliage measurements

The same methodology was used to estimate stand LAI in E101 and E137 and is fully described in Laclau et al. (2010).

Measurements of B_{season} and LAI were obtained once a year at the end of the rainy season, with destructive sampling over the 6 years of the rotation cycle. An additional measurement was performed seven months after planting. The variations in LAI were interpolated between these annual LAI field measurements using satellite images, as in le Maire et al. (2013). Briefly, MODIS reflectances in red and NIR wavebands, at a resolution of 250 m and a frequency of 16 days, have been used to invert a canopy reflectance model and retrieve LAI , as in le Maire et al. (2011). The MODIS pixel chosen in the present study belongs to a large eucalyptus stand of the same age and clonality, which was near the E101 experimental site. This inverted LAI time series was then normalized to fit the annual field measurements taken in E101 (see le Maire et al. (2013)). As a consequence, the seasonal dynamics of LAI between two field measurements could be estimated fairly well.

LF was collected monthly.

Changes in leaf mass throughout the leaf life span were measured in E101 by Laclau et al. (2010) for our *E. grandis* seedlings, which led to the following empirical relationship:

$$m(i) = 3.5 \cdot 10^{-4} (1 - e^{-0.82 \cdot i}), \quad (15)$$

where i is the monthly leaf age.

SLA was estimated in E101 annually at the end of each rainy season from destructive measurements of LAI using the following relationship:

$$SLA = \frac{LAI}{B}. \quad (16)$$

Missing monthly data were predicted using a cubic spline interpolation.

2.2.4. Phenology and model formulation

Leaf production. In tropical evergreen forests, radiation peaks and drought effects were identified as the major driving force behind the tropical ecosystem phenology (Bradley et al., 2011). Monitoring of Australian eucalypt forests (Pook, 1984a,b, 1985; Pook et al., 1997) highlighted a strong correlation among leaf production, leaf loss and water availability.

We assumed that drought stress slowed foliation. When the drought stress DS exceeded a critical threshold DS_{crit} , foliation decreased proportionally to DS . The foliation function φ was given by the following expression:

$$\varphi(k) = \begin{cases} 1, & \text{if } DS(k) \leq DS_{crit}, \\ \max(0, 1 - \nu_{DS}(DS(k) - DS_{crit})), & \text{else,} \end{cases} \quad (17)$$

where ν_{DS} and DS_{crit} were two positive parameters to be adjusted.

Wright and Van Schaick (1994) also associated leaf production to peaks of irradiance. Simulations including this effect were also performed, with poor results (unpublished data).

Leaf ageing. Leaf traits are influenced by seasonality, forest age and nutrient availability (Hikosaka, 2005; Laclau et al., 2009; Pornon et al., 2011). SLA decreases with tree age (England and Attiwill, 2006; Nouvellon et al., 2010), which corresponds to an increase in self-shading in the crown. The dynamics of the SLA values measured in E101 over the entire rotation period exhibited this tendency. Variations in the leaf mass m are given by eq.15.

Leaf fall. According to the carbon balance optimization theory, a favorable light regime speeds up leaf fall (Reich et al., 2004; Vincent, 2006). Moreover, photosynthesis is enhanced during favorable temperature periods (Battaglia et al., 1998), which accelerate leaf fall.

Self-shading among leaves was observed in tropical forests (Ackerly and Bazzaz, 1995; Ackerly, 1999) and eucalypt plantations (Whitehead and Beadle, 2004). An increase in LAI led to an increase in self-shading, which delayed leaf fall at the bottom of the crown. This vertical gradient is associated with an increase in leaf thickness at the bottom of the crown. Thus, the variability in the leaf lifespan was influenced by the leaf position in the crown, and a faster renewal of foliage occurred at the top of canopy.

Reductions in stomatal conductance during droughts slow down photosynthetic activity and delay leaf fall (Kikuzawa and Lechowicz, 2011), while severe droughts cause litterfall peaks. Under water shortage conditions, leaf shedding seems to be a complex and adaptative behaviour to hydrous stress: a study of the eucalypt response to two drought periods Pook (1986) showed that the trees protected themselves by promptly shedding some of their leaves.

We define a unique fall index p_{R_g} for the effect of radiation on leaf fall, calculated as the quantity of energy received by the tree crown at month k i months ($i \leq k$) from the time series of R_g . The Beer-Lambert law for radiation extinction through the canopy was used to estimate the influence of LAI on the amount of energy received. We assume that drought stress reduces the energy received. We define the amount of energy absorbed by the foliage at month k over a period of i months as follows:

$$E^i(k) = \sum_{j=k-i}^k \frac{R_g(j)(1 - e^{-0.48 LAI(j)})}{1 + \beta_{DS} DS(j)}, \quad (18)$$

where β_{DS} is a parameter to be fit. The extinction coefficient value (0.48) was determined based on previous studies (Roupsard et al., 2008). We assume that the effect of radiation on leaf fall increased proportionally with the energy received. Furthermore, the leaf traits changed over the whole rotation. Because SLA decreased in both experiments, the leaves were thicker at the end of the rotation. According to the carbon balance optimization theory, we assume

that the thick leaves positioned at the bottom of tree crown were more likely to have a higher lifespan than thinner leaves.

In addition, litterfall peaks were observed when LAI increased. We assume that new incoming leaves were accelerating the fall of older leaves. Rather than using a simple difference in LAI values between two successive months, we estimated the production pressure on litterfall (noted δ) using

$$\delta(k) = \frac{LAI(k)}{B(k)SLA(k)} - \frac{LAI(k-1)}{B(k-1)SLA(k-1)}. \quad (19)$$

The product $B \times SLA$ is equivalent to a leaf area index trend depending on the plantation age. We chose to divide LAI by B and SLA to normalize the variations in LAI . δ is an index without unit.

Finally, we assume that a minimal amount of energy E_{min} had to be reached before leaf fall occurred and that the fall index p_{R_g} was defined by

$$p_{R_g}^i(k) = \min \left(1, \beta_{R_g} \max(0, 1 + \beta_{PP} \delta(k-1)) \dots \right. \\ \left. SLA(k) \max(0, E^i(k) - E_{min}) \right), \quad (20)$$

where β_{R_g} and E_{min} were two parameters to be fit.

2.2.5. Model fitting

Model fitting was performed on a dataset collected from E101. We simulated an entire rotation from the first leaf fall one year after planting, in April 2005, to a few months before harvesting in September 2009.

Input variables. The model was designed to be driven by the biomass time series B given by a G&YM. When these data were missing, we replaced them by a time series that had the same features, namely, the stand age-related estimates of foliar biomass without seasonal variations. We chose to set B as the annual measurements of B_{season} and to predict missing data using cubic spline interpolation. Considering the annual gap between measurements and the regularity of the splines, the obtained time series B was assumed to be equivalent to the G&YM predictions.

Surfaces of leaves s were obtained each month using eq.15 and SLA estimates.

Fitting method. Model fitting was performed on LF and LAI measurements simultaneously. We selected an objective to minimize for each one:

$$\|LAI_{mea} - LAI_{sim}\|_2 = \left(\sum_{k=1}^n (LAI_{mea(k)} - LAI_{sim(k)})^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (21)$$

$$\|LF_{mea} - LF_{sim}\|_4 = \left(\sum_{k=1}^n (LF_{mea(k)} - LF_{sim(k)})^4 \right)^{\frac{1}{4}}, \quad (22)$$

where $n = 72$ was the number of measurements. A classical l^2 norm was tested, and the resulting LF flushes were underestimated. We chose to consider the l^4 norm for LF for simulations considering the large LF flushes.

The existence of a unique group of parameters minimizing both objectives simultaneously was very unlikely. Indeed, a group of parameters minimizing one objective may not necessarily minimize the other. Thus, the notion of Pareto efficiency was used to determine the set of simulations that was considered to be the best compromise among the objectives to minimize. The set of simulations that were Pareto efficient, i.e., the set of best compromises, is called the Pareto front. A genetic algorithm method was used to evaluate the Pareto front. This method described by Van Veldhuizen and Lamont (2000) is classified as a multi-objective evolutionary algorithm method (MOEA) and is implemented in the MATLAB optimization toolbox.

Eight parameters were fitted with multi-objective optimization. Three parameters were related to foliation: λ , ν_{DS} and DS_{crit} . A single fall index for radiation effect p_{R_g} was defined by 4 parameters: β_{DS} , β_{R_g} , β_{PP} and E_{min} . Recall that a combinatory function (eq.3) introduced an additional parameter α_{R_g} . We used this parameter to optimize model

Table 2: Model adjustment results (Site 1): parameter values, research interval & units.

Param.	Value	Res. int.	Unit
λ	1.0563	[1 , 1.3]	-
ν_{DS}	0.2203	[0 , 1]	-
DS_{crit}	1.5709	[0 , 8]	-
β_{DS}	0.7544	[0 , 10]	-
β_{PP}	7.4423	[0 , 10]	-
β_{R_g}	$2.5493 \cdot 10^{-5}$	[0 , $5 \cdot 10^{-4}$]	$\text{kg}_{leaf} \cdot \text{MJ}^{-1} \cdot \text{month}$
E_{min}	308.17	[0 , 10^4]	$\text{MJ} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{month}^{-1}$
αR_g	1.3310	[0 , 10]	-

fitting, although a unique fall index was defined. Each parameter was researched in a relevant interval with regard to the associated variables (Tab.2).

The Pareto front was obtained, and the efficiency of the simulations (R^2) for both LAI and LF was considered to exclude irrelevant groups of parameters. Finally, we selected the best estimate of the cumulative LF production over the whole rotation.

Model validation. The methodology used to determine model inputs was identical to that used in the E101 experiment. The fitted set of parameters was tested on the dataset collected in E137 from 36 to 59 months after planting. The lack of REW data shortened the validation period.

2.3. Deciduous temperate ecosystems

In the case of French forests, monthly leaf production, expansion and fall probability were established using phenological sub-modules of the daily-based PBM CASTANEA. The parameters used were taken from previous studies (Davi et al., 2008; Delpierre, 2009; Delpierre et al., 2009), and no calibration was required. These simulations aimed to assess the formalism suitability of SLCD and its compatibility with PBMs and daily-based models. SLCD validation was performed on LAI_{max} (beech) and foliage dynamics measurements (beech and oak).

2.3.1. Phenology and model formulation

In deciduous temperate ecosystems, foliation and senescence are essentially triggered by variations in the photoperiod. The influence of the latter depends on altitudinal and temperature gradients. A warm spring accelerates foliation processes, and senescence is favored by cold autumnal temperatures. Water availability is also a limiting factor (Delpierre et al., 2009; Fracheboud et al., 2009; Lebourgeois et al., 2008; Vitasse et al., 2009a,b,c).

Bud burst. Delpierre (2009) defined a three-parameter model to determine the date of bud burst.

The end of winter dormancy day was noted as $D_{startBB}$. After this date, the model considers the daily mean temperature T exceeding the base temperature T_{baseBB} :

$$R_{BB}(d) = T(d) \mathbb{1}_{\{T(d) \geq T_{baseBB}\}}, \quad (23)$$

and cumulates them:

$$S_{BB}(d) = \sum_{j=D_{startBB}}^d R_{BB}(j). \quad (24)$$

The date of bud burst D_{BB} is obtained when S_{BB} reaches the critical value F_{critBB} .

This daily CASTANEA sub-model was used to define the foliation function with a simple formulation:

$$\varphi(k) = \mathbb{1}_{\{D_{BB} \in \text{month}(k)\}}. \quad (25)$$

Leaf expansion. Davi et al. (2008) described the CASTANEA sub-model used to simulate leaf expansion.

The leaf growth was assumed to be proportional to the cumulative daily temperature after bud burst. The full expansion is reached when the sum equals the critical value $F_{critexp}$:

$$S_{exp}(d) = \min \left(F_{critexp}, \sum_{j=D_{BB}}^d T(j) \right). \quad (26)$$

The value used in the SLCD model for leaf expansion each month is the value of the ratio $S_{exp}/F_{critexp}$ at the end of the month.

Leaf senescence. The CASTANEA senescence sub-model was described by Delpierre et al. (2009).

Senescence processes are initiated when the daily photoperiod $\pi(d)$ is lower than a threshold $\pi_{startsen}$. It defines the day $D_{startsen}$ that corresponds to the beginning of senescence processes.

$$R_{sen}(d) = (T_{base\,sen} - T(d))^x \left(\frac{\pi(d)}{\pi_{startsen}} \right)^y \mathbb{1}_{\{T(d) < T_{startsen}\}} \quad (27)$$

$$S_{sen}(d) = \min \left(F_{critsen}, \sum_{j=D_{startsen}}^d R_{sen}(j) \right) \quad (28)$$

The value used in the SLCD model for the monthly fall index p_{sen} is the value of the ratio $S_{sen}/F_{critsen}$ at the end of the month.

Table 3: Parameters of the CASTANEA sub-models used for sites 2 and 3: parameters, values, & origin

(a) Bud burst				
Parameter	Site 2	Site 3	Unit	Source
$D_{startBB}$	91	55	day	Delpierre (2009)
T_{baseBB}	4.6	4	°C	Delpierre (2009)
F_{critBB}	190	410	°C	Delpierre (2009)
(b) Leaf expansion				
Parameter	Site 2	Site 3	Unit	Source
$F_{critexp}$	424	424	°C	Davi et al. (2008)
(c) Leaf senescence				
Parameter	Site 2	Site 3	Unit	Source
$\pi_{startsen}$	12.5	14.5	day	Delpierre et al. (2009)
$T_{base\,sen}$	25	26.5	°C	Delpierre et al. (2009)
x	2	2	-	Delpierre et al. (2009)
y	2	0	-	Delpierre et al. (2009)
$F_{critsen}$	5160	10178	°C	Delpierre et al. (2009)

2.3.2. Beech, Hesse, France (site 2)

Site description. The experimental plot was located in the state forest of Hesse, France (48°40'N, 7°05'E, elevation 300 m), which was (90%) composed of beech (*Fagus sylvatica* L.). The other tree species present were *Carpinus betulus*, *Betula alba*, *Fraxinus excelsior*, *Prunus avium*, *Quercus petraea* and *Larix decidua*. The understorey vegetation was very sparse. The annual precipitation was 820 mm, and the average annual temperature was 9.2°C. The soil type was intermediate between a luvisol and a stagnic luvisol. The clay content ranged between 25 and 35% within a 0-100 cm depth and was approximately 40% below 100 cm. A complete description of the site is given by Granier et al. (2000).

Input data. Climatic data required to perform simulations included the calculated daily photoperiod π (method described by Allen et al. (1998)) and the daily mean temperature T obtained from in-situ flux towers (Longdoz, personal communication).

In the case of deciduous forests, the spring foliar biomass production equals the autumnal litterfall. In the case of the Hesse site, annual LF measurements were recorded. Because the study focused on phenological phases in French sites, we chose to define B based on annual LF measurements.

The leaf mean surface at full expansion ($10.7 \text{ cm}^2 \cdot \text{leaf}^{-1}$) and the mean LMA ($80 \text{ g} \cdot \text{m}^{-2}$) were measured (Granier, Personal communication). Equation 13 was used to determine the leaf mean mass $\bar{m}$ at full expansion.

Model validation. Foliage dynamics were simulated from January 1997 to December 2008. The model performance was assessed using the maximal annual LAI measurements and estimates of forest cover dynamics. The parameters used in the phenological functions are given in Table 3.

The forest cover dynamics was estimated using the Plant Area Index (PAI). PAI was estimated using the inversion of the Beer-Lambert law for radiation absorption $R_g^{soil} = R_g \exp(-k_{R_g} \times PAI)$. Daily radiations at the soil level R_g^{soil} and above the tree crown R_g were obtained from in-situ flux towers. The maximal values of PAI_{max} were modified to compare the phenology of the measured PAI and the simulated LAI .

2.3.3. Oak, Barbeau, France (site 3)

Site description. The plot is located in Barbeau, France ($48^\circ 28' \text{N}$, $2^\circ 46' \text{E}$) and is composed of oak (*Quercus petraea*). The annual precipitation was 670 mm, and the average annual temperature was 10.8°C . The soil type was a leached soil with pseudogley. The clay content was 15% within a 0-30 cm depth and was approximately 30% for the entire profile. The site is described by Delpierre (2009).

Input data. The climatic data required to perform simulations were the calculated daily photoperiod π (method described in Allen et al. (1998)) and the daily mean temperature T obtained from in-situ flux towers.

In this study site, no LF data were obtained to measure the foliar biomass trend B . The annual maximal LAI values were obtained from measurements (2009) and modeling results (2006-2008). The annual B was estimated using the relationship:

$$B = LAI_{max} LMA. \quad (29)$$

Davi et al. (2008) obtained LMA from a top canopy LMA_{max} measurement and a Beer-Lambert extinction profile equation depending on LAI and the extinction coefficient $k_{LMA} = 0.187$:

$$LMA = LMA_{max} \frac{1 - e^{-k_{LMA} LAI}}{k_{LMA} LAI}. \quad (30)$$

The leaf traits mean leaf surface ($20.37 \text{ cm}^2 \cdot \text{leaf}^{-1}$) and LMA_{max} ($105 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-2}$) were measured.

Model validation. Foliage dynamics were simulated from January 2005 to December 2009. The parameters used in the phenological functions are given in Table 3. The model performance was assessed using measurements of PAI dynamics. Using a similar method as that used for site 2, PAI data were calculated from measurements of PAR extinction through the tree crown.

3. Results

3.1. Eucalyptus, Itatinga, Brazil (Site 1)

Model adjustment. Eight parameters were fitted on the E101 stand data (Table 2). LAI was simulated with good accuracy ($R^2 = 0.898$, $RMS E = 0.144$). LAI was slightly overestimated (2.8%).

The periodicity of LAI was well simulated, with a slight decay between the measured and simulated time series (Fig.3).

LF was rendered with lower accuracy ($R^2 = 0.562$, $RMSE = 40835$). The total LF production over the whole rotation was underestimated by 17.8%, due to inaccurate estimations for a few months (the 12th, 36th and 57th). The

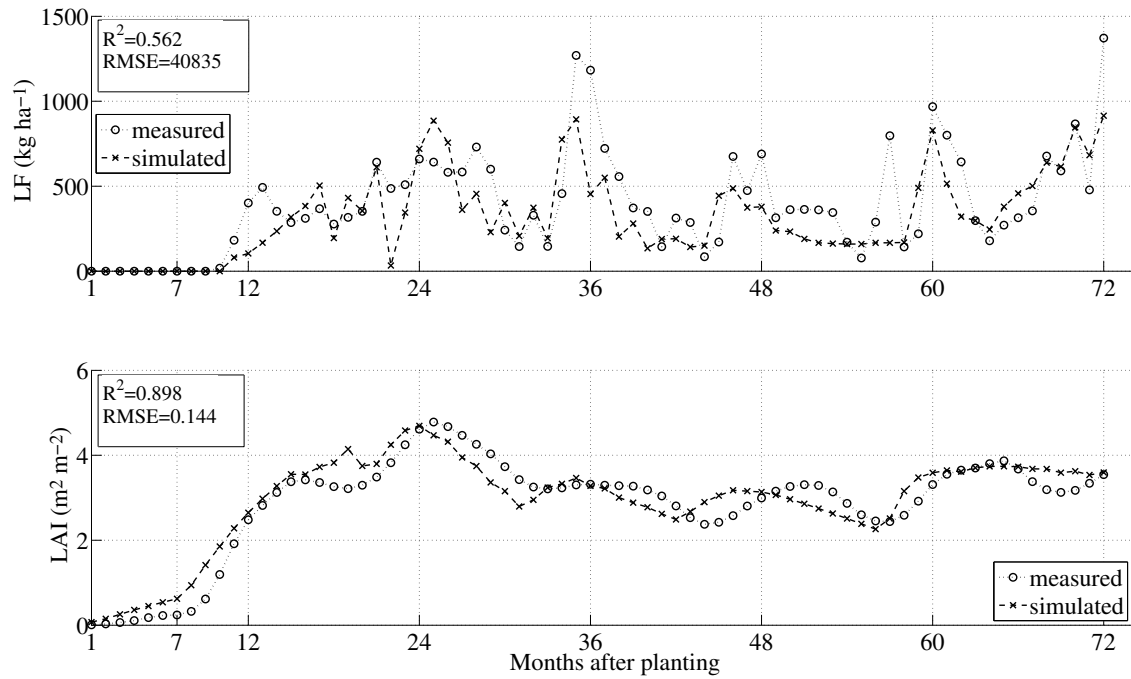


Figure 3: Comparison of the measured and simulated data in the E101 plantation (site 1) over the whole rotation: litterfall (LF) (above) and leaf area index (LAI) (below).

measured LF followed an annual pattern marked by annual peaks since the age of 36 months. A similar pattern was observed in the LF simulations over the whole rotation (Fig.3 and 4).

The simulated annual mean leaf lifespan increased from 3.1 months between 1 and 12 months after planting to 9.06 months between 49 and 60 months after planting. A lower mean lifespan (5.5 months) was simulated between 61 and 72 months after planting.

The simulated annual maximal leaf lifespan increased from 15 months during the first year after planting (the seedlings were five months old at the time of planting) to 32 months during the 6th year after planting. These elevated values were related to small leaf populations remaining attached to trees for several years.

Model validation. The periodicity of the LAI predictions ($R^2 = 0.698$, $RMSE = 0.449$) was respected over the validation period (Fig. 5). The average LAI simulated over the whole validation period was 4.27, compared to 4.06 for the average measurements, representing an overestimation of 6.55%. The amplitude of the simulated LAI time series was smaller than the measured amplitude of LAI (Fig.6).

The periodicity of the LF production peaks was respected ($R^2 = 0.4018$, $RMSE = 221.41$). Two production peaks around the 37th and 57th months were overestimated, and the total LF production was overestimated by 37% over the whole validation period.

3.2. Beech, Hesse, France (Site 2)

The measured yearly maximal LAI was well estimated in most cases. However, it was strongly overestimated in 2006 (35.32%) and underestimated in 1998 and 2008 (18.25 and 14.29 %, respectively). Smaller differences were observed in 1999, 2001 and 2007 (Fig.11).

Measurements of the LAI dynamics exhibited a gap in 2000, 2001, 2002, 2003 and 2005 (Fig. 10). In the remaining years, the LAI dynamics simulations corresponded to the measurements, except in 1998 and 1999, where an offset of one month was observed in senescence. Besides, the leaf emergence and growth were simulated with good accuracy.

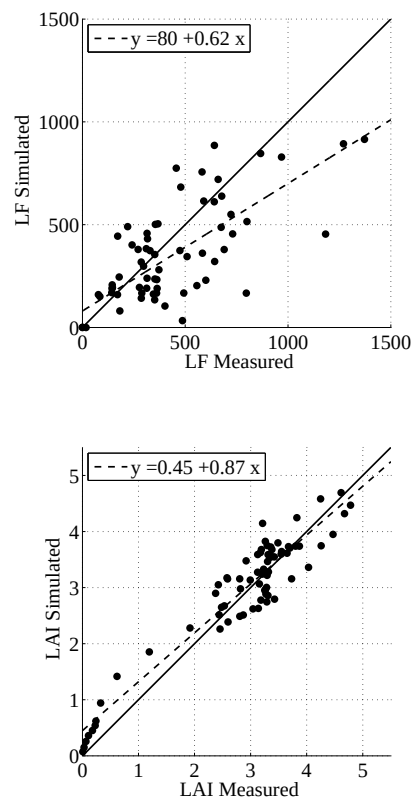


Figure 4: Comparison of the measured and simulated data in the E101 stand (site 1): first-order linear regression for litterfall (*LF*) (above) and leaf area index (*LAI*) (below).

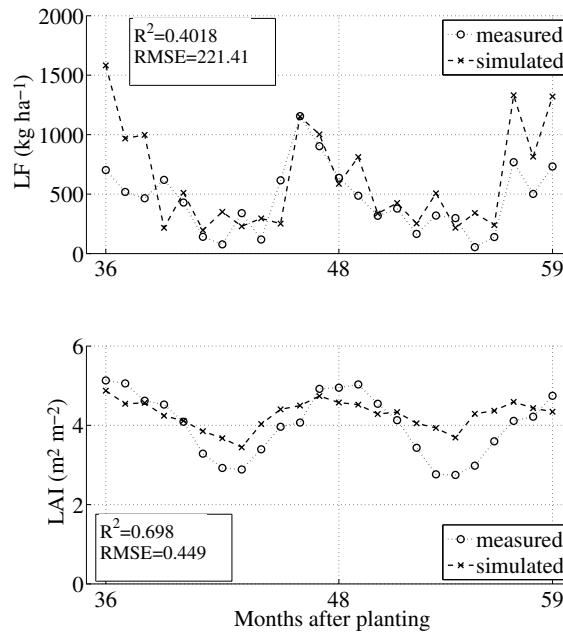


Figure 5: Comparison of the measured and simulated data in the E137 stand (site 1): litterfall (LF) (above) and leaf area index (LAI) (below).

The data highlighted two LAI increase phases. The first phase was fast and simulated accurately. The second phase was slow and occurred between May and October in most years. This phenomenon was not taken into account in the simulation.

3.3. Oak, Barbeau, France (Site 3)

The bud burst and leaf growth patterns were respected. A one-month delay was observed in leaf senescence in 2006 and 2007 (Fig.12).

4. Discussion

4.1. Evergreen eucalypt plantation (Brazil)

Several attempts were made to determine the most influent factors involved in the phenology of these plantations.

Limiting effects on foliation due to low temperatures and low radiation levels were tested, as was the water availability effect. We finally excluded these effects, which did not specifically improve the simulations. The main factor driving foliation is the water availability, as suggested by Pook's studies (Pook, 1984a,b, 1985; Pook et al., 1997).

A unique fall index was used in this study. This restriction was due to the limited amount of validation data. Nevertheless, a second fall index related to severe drought was tested (unpublished data) and used to simulate the LF peak, which occurred in the 57th iteration after planting on the E101 stand (Fig.3). An extended validation set is required to validate this fall index. An estimation of the soil water content over the whole E137 experimental site using the BILJOU model is ongoing work. Note that the combinatory function (eq.3) was tested and was sufficient for introducing additional fall indexes.

Our model then confirmed that the effects of both radiation (leaf fall) and drought (foliation and leaf fall) were the major driving forces behind tropical ecosystem phenology. It also highlighted a strong internal regulation process of phenology. Indeed, LAI was used to determine both the fraction of energy absorbed by the tree crown (eq.18)

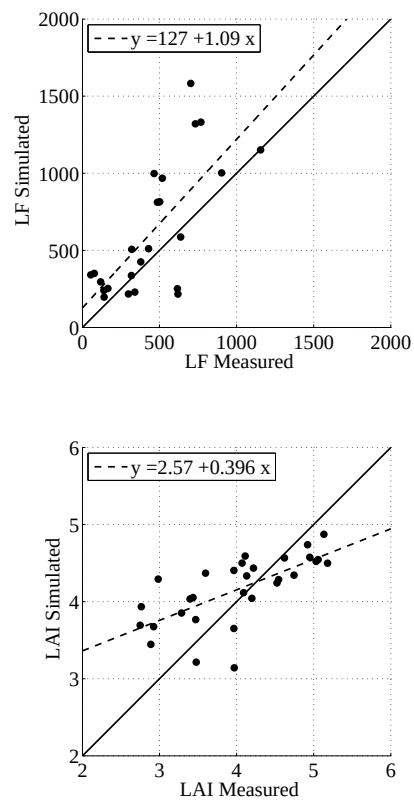


Figure 6: Comparison of the measured and simulated data in the E137 plantation (site 1): first-order linear regression for litterfall (*LF*) (above) and leaf area index (*LAI*) (below).

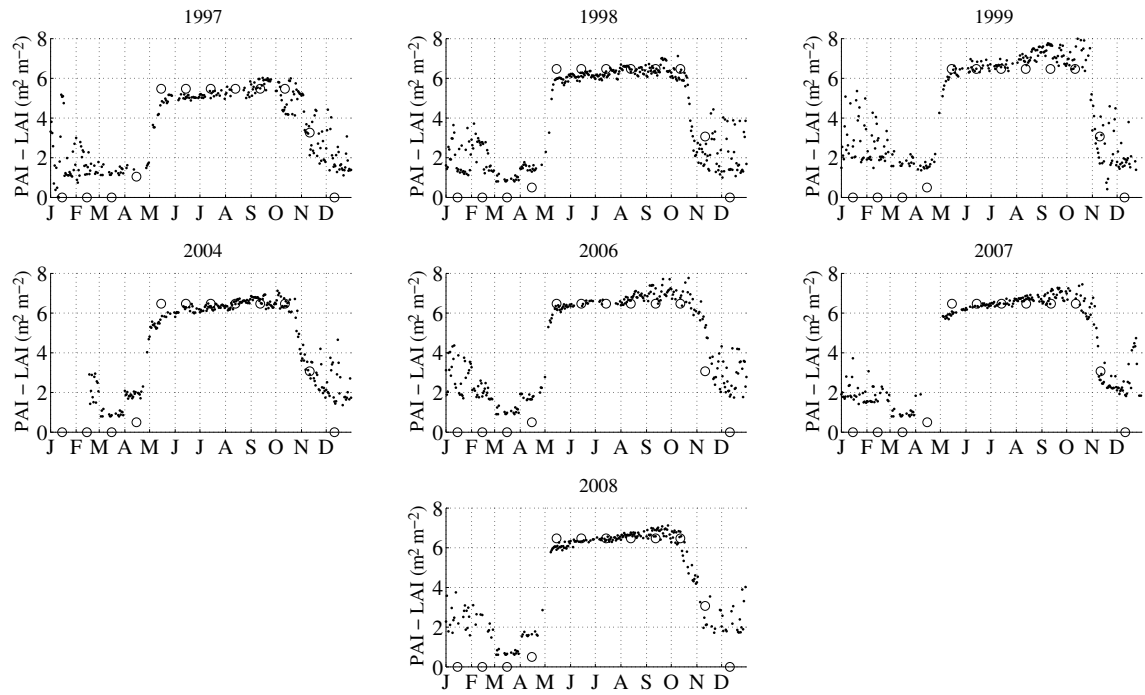


Figure 7: Comparison of the plant area index (*PAI*) dynamics measurements (●) and simulated leaf area index (*LAI*) (○) in site 2.

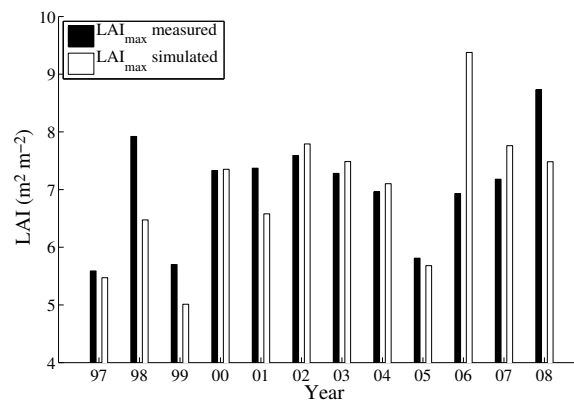


Figure 8: Comparison of the measured and simulated annual maximal values of the leaf area index (*LAI*) in site 2. An elevated difference was observed in 1998, 2006 and 2008.

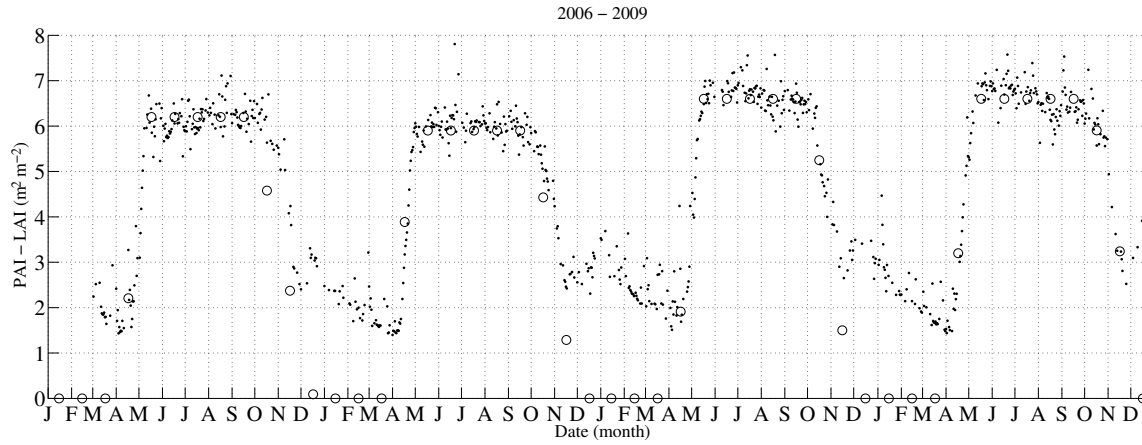


Figure 9: Comparison of the plant area index (PAI) dynamics measurements (●) and simulated leaf area index (LAI) (○) between 2006 and 2009 in site 3. The phenology was well predicted, except in autumn 2006, when the senescence occurred too early for prediction.

and the production pressure on litterfall (eq.19). Several possibilities without internal regulation processes were unsuccessfully tested to estimate the impact of radiation on LF . Some modeling attempts were also performed without considering the influence of a decrease in SLA on p_{R_g} , with poor results for both LAI and LF .

Variations in the mean leaf lifespan correspond to the results obtained by Laclau et al. (2009), which were close to the values calculated using the 3-PG model (Almeida et al., 2004). Elevated leaf maximal ages (> 1 year) have been reported in the literature. Whitehead and Beadle (2004) cited several studies on eucalypt native forests, where a substantial portion of leaves survived for up to 18 month or 2 years. In the case of *Eucalyptus maculata* native forests, some leaves survived up to 3 years (Pook, 1984a).

The E101 and E137 experimental sites were strongly fertilized, and nitrogen and potassium fertilization regimes influenced the leaf longevity and leaf traits (Laclau et al., 2009). Further improvements in SLCD require investigations addressing the role of tree nutrition on leaf longevity. In addition, the lower stocking density in E137 than in E101 influenced the crown architecture, and the resulting consequences on leaf longevity deserve further attention.

4.2. Deciduous ecosystem (France)

From the point of view of the SLCD formalism, considering deciduous ecosystems was easier than considering evergreen ecosystems. The phenological phases were clear, and a simple adaptation of the phenological sub-modules of CASTANEA model was sufficient to render the phenology with good accuracy in both cases.

However, shifts in the maximal LAI simulation were observed in the Hesse site. In this case, differences in the LAI_{max} simulations can be attributed to the constant leaf traits used during the whole simulation.

4.3. Model development

In the case of the evergreen ecosystems, the phenology is difficult to model. One strength of our approach is simultaneously estimating litterfall production and LAI variations using a formulation that incorporates the tree physiology. We expect that our model may be used to determine the main processes involved in leaf production and the net primary production of evergreen ecosystems.

This study highlights the need to investigate the interaction between foliage and nutrient cycling to improve the SLCD model. Indeed, SLCD is strongly sensitive to leaf traits, which are strongly influenced by nutrient availability (Hikosaka, 2005; Pornon et al., 2011). In addition, the impact climate on leaf traits has to be considered (Wright et al., 2005).

Due to its formalism, SLCD can be further enhanced with future investigations. It is possible to perform model coupling with biogeochemical models in a manner similar to coupling with PBM. Thus, introduction of the role of nutrients in foliage dynamics is possible in the general modeling framework presented in the Introduction to this paper.

In every study site, *LAI* was simulated with a good accuracy. Because stand transpiration is driven by *LAI* in a PBM such as BILJOU, the efficiency of SLCD is sufficient for performing a combination of models, as shown in Figure 1. In the case of deciduous ecosystems, our study is in the preliminary phase of coupling G&YM FAGACEES, PBM BILJOU and SLCD. Because SLCD predictions are dependent on the annual foliar biomass estimation, the accuracy of such a coupling will strongly depend on annual biomass estimations given by FAGACEES.

The development of a complex model results in an increase in the number of required parameters. Furthermore, a complete monitoring of forest ecosystems is rare. Thus, modelers often face the issue of sparse data from various compartments of a forest ecosystem. Our study demonstrates that MOEAs are able to fit complex models based on several variables. Recent developments in MOEAs indicate good prospects for the future development of complex forest ecosystem models.

5. Conclusion

The SLCD model was designed for use in a coupling of models, combining the advantages of G&YMs and PBMs at the stand level. In Brazilian eucalypt plantations, *LAI* and *LF* were globally predicted with good accuracy and may be improved by using complementary validation data and introducing the influence of climate and nutrients on leaf traits. In deciduous forest ecosystems, the suitability of the model formalism was established with the successful introduction of phenological sub-modules of the CASTANEA model. In every case, SLCD opens new perspectives in the development of a new generation of soil-plant models.

Acknowledgments

The authors would like to thank André Granier and Bernard Longdoz for their help in the study of the Hesse data.

This article was given financial support by “Ministère de l’enseignement supérieur et de la recherche”, “Université de Lorraine” and “Office National des Forêt”. This work was supported by a grant overseen by the French National Research Agency (ANR) as part of the “Investissements d’Avenir” program (ANR-11-LABX-0002-01, Lab of Excellence ARBRE), the European community (CARBOAFRICA, CLIMAFRICA) and the French national network SOERE F-ORE-T.

References

- Ackerly, D., May 1999. Self-shading, carbon gain and leaf dynamics: a test of alternative optimality models. *Oecologia* 119 (3), 300–310.
- Ackerly, D. D., Bazzaz, F. A., Mar 1995. Leaf dynamics, self-shading and carbon gain in seedlings of a tropical pioneer tree. *Oecologia* 101 (3), 289–298.
- Allen, R. . . G. ., Pereira, L. . . S. ., Raes, D. ., Smith, M. ., 1998. Crop evapotranspiration: guidelines for computing crop water requirements. FAO Irrigation and Drainage Paper (56), xxvi + 300 pp.–xxvi + 300 pp.
- Almeida, A. C., Landsberg, J. J., Sands, P. J., May 2004. Parameterisation of 3-pg model for fast-growing eucalyptus grandis plantations. *Forest Ecology and Management* 193 (1-2), 179–195.
- Arp, P. A., Oja, T., 1997. A forest soil vegetation atmosphere model (forsva) .1. concepts. *Ecological Modelling* 95 (2-3), 211–224.
- Battaglia, M., Cherry, M., Beadle, C., Sands, P., Hingston, A., 1998. Prediction of leaf area index in eucalypt plantations: effects of water stress and temperature. *Tree Physiology* 18 (8-9), 521–528.
- Battaglia, M., Sands, P., White, D., Mummery, D., May 2004. Cabala: a linked carbon, water and nitrogen model of forest growth for silvicultural decision support. *Forest Ecology and Management* 193 (1-2), 251–282.
- Bellassen, V., le Maire, G., Dhote, J., Ciais, P., Viovy, N., Oct 2010. Modelling forest management within a global vegetation model part 1: Model structure and general behaviour. *Ecological Modelling* 221 (20), 2458–2474.
- Bellassen, V., le Maire, G., Guin, O., Dhote, J., Ciais, P., Viovy, N., Jan 2011. Modelling forest management within a global vegetation model-part 2: Model validation from a tree to a continental scale. *Ecological Modelling* 222 (1), 57–75.
- Bosatta, E., Agren, G., 1996. Theoretical analyses of carbon and nutrient dynamics in soil profiles. *Soil Biology and Biochemistry* 28 (10-11), 1523 – 1531.
- Botta, A., Viovy, N., Ciais, P., Friedlingstein, P., Monfray, P., 2000. A global prognostic scheme of leaf onset using satellite data. *Global Change Biology* 6 (7), 709–725.
- Bradley, A., V. Gerard, F., Barbier, N., Weedon, G. P., Anderson, L. O., Huntingford, C., Aragao, L. E. O. C., Zelazowski, P., Arai, E., JUN 2011. Relationships between phenology, radiation and precipitation in the amazon region. *Global Change Biology* 17 (6), 2245–2260.

- Breda, N. ., 1999. The leaf area index of forest canopies: measurement, variability and functional role. *Revue Forestiere Francaise* 51 (2), 135–150.
- Chabot, B. F., Hicks, D. J., 1982. The ecology of leaf life spans. *Annual Review of Ecology and Systematics* 13, 229–259.
- Chouhury, B. J., Monteith, J. L., 1988. A 4-layer model for the heat-budget of homogeneous land surfaces. *Quarterly Journal of The Royal Meteorological Society* 114 (480), 373–398.
- Corbeels, M., McMurtrie, R., Pepper, D., O'Connell, A., 2005a. A process-based model of nitrogen cycling in forest plantations part i. structure, calibration and analysis of the decomposition model. *Ecological Modelling* 187 (4), 426–448.
- Corbeels, M., McMurtrie, R., Pepper, D., O'Connell, A., 2005b. A process-based model of nitrogen cycling in forest plantations. part ii. simulating growth and nitrogen mineralisation of eucalyptus globulus plantations in south-western australia. *Ecological Modelling* 187 (4), 449–474.
- d'Annunzio, R., Zeller, B., Nicolas, M., Dhote, J. F., Saint-Andre, L., 2008. Decomposition of european beech (*fagus sylvatica*) litter: Combining quality theory and n-15 labelling experiments. *Soil Biology and Biochemistry* 40 (2), 322–333.
- Davi, H., Barbaroux, C., Dufrene, E., Francois, C., Montpied, P., Breda, N., Badeck, F., Mar 2008. Modelling leaf mass per area in forest canopy as affected by prevailing radiation conditions. *Ecological Modelling* 211 (3-4), 339–349.
- Davi, H., Dufrene, E., Granier, A., Le Dantec, V., Barbaroux, C., Francois, C., Breda, N., Jul 2005. Modelling carbon and water cycles in a beech forest part ii: Validation of the main processes from organ to stand scale. *Ecological Modelling* 185 (2-4), 387–405.
- Delpierre, N., 2009. Etude du déterminisme des variations interannuelles des échanges carbonés entre les écosystèmes forestiers européens et l'atmosphère : une approche basée sur la modélisation des processus. Ph.D. thesis, Université Paris XI.
- Delpierre, N., Dufrene, E., Soudani, K., Ulrich, E., Cecchini, S., Boe, J., Francois, C., 2009. Modelling interannual and spatial variability of leaf senescence for three deciduous tree species in france. *Agricultural and Forest Meteorology* 149 (6-7), 938–948.
- Dhote, J. F., 1996. A model of even-aged beech stands productivity with process-based interpretations. *Annales des Sciences Forestières* 53 (1), 1–20.
- Dufrene, E., Davi, H., Francois, C., le Maire, G., Le Dantec, V., Granier, A., Jul 2005. Modelling carbon and water cycles in a beech forest part i: Model description and uncertainty analysis on modelled nee. *Ecological Modelling* 185 (2-4), 407–436.
- England, J. R., Attiwill, P. M., 2006. Changes in leaf morphology and anatomy with tree age and height in the broadleaved evergreen species, *eucalyptus regnans* f. muell. *Trees: Structure and Function* 20 (1), 79–90.
- Fisher, J., Malhi, Y., Bonal, D., Rocha, H. R. d., Araujo, A. C. d., Gamo, M., Goulden, M., Hirano, T., Huete, A., Kondo, H., Kumagai, T., Loescher, H., Miller, S., Nobre, A., Nouvellon, Y., Oberbauer, S., Panuthai, S., Rouspard, O., Saleska, S., Tanaka, K., Tanaka, N., Tu, K., Randow, C. v., 2009. The land-atmosphere water flux in the tropics. *Global Change Biology* 15 (11), 2694–2714.
- Fracheboud, Y., Luquez, V., Bjorken, L., Sjoedin, A., Tuominen, H., Jansson, S., 2009. The control of autumn senescence in european aspen. *Plant Physiology* 149 (4), 1982–1991.
- Gower, S. T., Kucharik, C. J., Norman, J. M., Oct 1999. Direct and indirect estimation of leaf area index, f(apar), and net primary production of terrestrial ecosystems. *Remote sensing of environment* 70 (1), 29–51.
- Granier, A., Biron, P., Lemoine, D., 2000. Water balance, transpiration and canopy conductance in two beech stands. *Agricultural and Forest Meteorology* 100 (4), 291–308.
- Granier, A., Breda, N., Biron, P., Villette, S., 1999. A lumped water balance model to evaluate duration and intensity of drought constraints in forest stands. *Ecological Modelling* 116 (2-3), 269–283.
- Harris, T. E., 1963. *The Theory of Branching Processes* (Dover Books on Advanced Mathematics). Dover Pubns.
- Hikosaka, K., 2005. Leaf canopy as a dynamic system: Ecophysiology and optimality in leaf turnover. *Annals of Botany* 95 (3), 521 – 533.
- Jolly, W. M., Nemani, R., Running, S. W., 2005. A generalized, bioclimatic index to predict foliar phenology in response to climate. *Global Change Biology* 11 (4), 619–632.
- Jung, M., Reichstein, M., Ciais, P., Seneviratne, S. I., Sheffield, J., Goulden, M. L., Bonan, G., Cescatti, A., Chen, J., de Jeu, R., Dolman, A. J., Eugster, W., Gerten, D., Gianelle, D., Gobron, N., Heinke, J., Kimball, J., Law, B. E., Montagnani, L., Mu, Q., Mueller, B., Oleson, K., Papale, D., Richardson, A. D., Rouspard, O., Running, S., Tomelleri, E., Viovy, N., Weber, U., Williams, C., Wood, E., Zaehle, S., Zhang, K., Oct 2010. Recent decline in the global land evapotranspiration trend due to limited moisture supply. *Nature* 467 (7318), 951–954.
- Kikuzawa, K., Lechowicz, M., 2011. *Ecology of leaf longevity*. Ecological Research Monographs. Springer.
- Kitajima, K., Mulkey, S., Samaniego, M., Wright, S., DEC 2002. Decline of photosynthetic capacity with leaf age and position in two tropical pioneer tree species. *American Journal of Botany* 89 (12), 1925–1932.
- Kitajima, K., Mulkey, S., Wright, S., MAY 1997a. Decline of photosynthetic capacity with leaf age in relation to leaf longevities for five tropical canopy tree species. *American Journal of Botany* 84 (5), 702–708.
- Kitajima, K., Mulkey, S., Wright, S., FEB 1997b. Seasonal leaf phenotypes in the canopy of a tropical dry forest: Photosynthetic characteristics and associated traits. *Oecologia* 109 (4), 490–498.
- Laclau, J. P., Almeida, J. C. R., Goncalves, J. L. M., Saint-Andre, L., Ventura, M., Ranger, J., Moreira, R. M., Nouvellon, Y., 2009. Influence of nitrogen and potassium fertilization on leaf lifespan and allocation of above-ground growth in eucalyptus plantations. *Tree Physiology* 29 (1), 111–124.
- Laclau, J. P., Bouillet, J. P., Ranger, J., 2000. Dynamics of biomass and nutrient accumulation in a clonal plantation of eucalyptus in congo. *Forest ecology and management* 128 (3), 181–196.
- Laclau, J. P., Ranger, J., Goncalves, J. L. D., Maquere, V., Krusche, A. V., M'Bou, A. T., Nouvellon, Y., Saint-Andre, L., Bouillet, J. P., Piccolo, M. D., Deleporte, P., 2010. Biogeochemical cycles of nutrients in tropical eucalyptus plantations main features shown by intensive monitoring in congo and brazil. *Forest ecology and management* 259 (9), 1771–1785.
- le Maire, G., Marsden, C., Verhoef, W., Ponzoni, F. J., Lo Seen, D., Begue, A., Stape, J.-L., Nouvellon, Y., 2011. Leaf area index estimation with modis reflectance time series and model inversion during full rotations of eucalyptus plantations. *Remote sensing of environment* 115 (2), 586–599.
- le Maire, G. I., Nouvellon, Y., Christina, M., Ponzoni, F. J., Goncalves, J. L., Bouillet, J., Laclau, J.-P., 2013. Tree and stand light use efficiencies over a full rotation of single- and mixed-species eucalyptus grandis and acacia mangium plantations. *Forest Ecology and Management* 288, 31–42.
- Lebourgeois, F., Pierrat, J. C., Perez, V., Piedallu, C., Cecchini, S., Ulrich, E., 2008. Phenological timing in french temperate forests - a study on

- stands in the renecofor network. *Revue Forestiere Francaise* 60 (3).
- Lowman, M. D., Heatwole, H., 1992. Spatial and temporal variability in defoliation of australian eucalypts. *Ecology* 73 (1), 129–142.
- Marsden, C., Nouvellon, Y., Laclau, J.-P., Corbeels, M., McMurtrie, R. E., Stape, J., Epron, D., le Maire, G., 2013. Modifying the g'day process-based model to simulate the spatial variability of eucalyptus plantation growth on deep tropical soils. *Forest Ecology and Management* (article in press).
- Nouvellon, Y., Begue, A., Moran, M. S., Lo Seen, D., Rambal, S., Luquet, D., Chehbouni, G., Inoue, Y., 2000. Par extinction in shortgrass ecosystems: effects of clumping, sky conditions and soil albedo. *Agricultural and Forest Meteorology* 105 (1/3), 21–41.
- Nouvellon, Y., Laclau, J. P., Epron, D., Kinana, A., Mabiala, A., Roupsard, O., Bonnefond, J. M., le Maire, G., Marsden, C., Bontemps, J. D., Saint-Andre, L., 2010. Within-stand and seasonal variations of specific leaf area in a clonal eucalyptus plantation in the republic of congo. *Forest ecology and management* 259 (9), 1796–1807.
- Oja, T., Arp, P. A., 1997. A forest soil vegetation atmosphere model (forsva) .2. application to northern tolerant hardwoods. *Ecological Modelling* 95 (2-3), 225–247.
- Olofsson, P., 1996. General branching processes with immigration. *Journal of Applied Probability* 33 (4), 940–948.
- Pook, E. W., 1984a. Canopy dynamics of eucalyptus maculata hook. 1. distribution and dynamics of leaf populations. *Australian journal of botany* 32 (4), 387–403.
- Pook, E. W., 1984b. Canopy dynamics of eucalyptus maculata hook. 2. canopy leaf-area balance. *Australian journal of botany* 32 (4), 405–413.
- Pook, E. W., 1985. Canopy dynamics of eucalyptus maculata hook. 3. effects of drought. *Australian journal of botany* 33 (1), 65–79.
- Pook, E. W., 1986. Canopy dynamics of eucalyptus maculata hook. 4. contrasting responses to 2 severe droughts. *Australian journal of botany* 34 (1), 1–14.
- Pook, E. W., Gill, A. M., Moore, P. H. R., 1997. Long-term variation of litter fall, canopy leaf area and flowering in a eucalyptus maculata forest on the south coast of new south wales. *Australian journal of botany* 45 (5), 737–755.
- Pornon, A., Marty, C., Winterton, P., Lamaze, T., AUG 2011. The intriguing paradox of leaf lifespan responses to nitrogen availability. *Functional Ecology* 25 (4), 796–801.
- Reich, P., Uhl, C., Walters, M., Prugh, L., Ellsworth, D., FEB 2004. Leaf demography and phenology in amazonian rain forest: A census of 40 000 leaves of 23 tree species. *Ecological Monographs* 74 (1), 3–23.
- Reyer, C. P. O., Leuzinger, S., Rammig, A., Wolf, A., Bartholomeus, R. P., Bonfante, A., de Lorenzi, F., Dury, M., Gloning, P., Abou Jaoude, R., Klein, T., Kuster, T. M., Martins, M., Niedrist, G., Riccardi, M., Wohlfahrt, G., de Angelis, P., de Dato, G., Francois, L., Menzel, A., Pereira, M., Jan 2013. A plant's perspective of extremes: terrestrial plant responses to changing climatic variability. *Global Change Biology* 19 (1), 75–89.
- Richardson, A. D., Keenan, T. F., Migliavacca, M., Ryu, Y., Sonnentag, O., Toomey, M., Feb 2013. Climate change, phenology, and phenological control of vegetation feedbacks to the climate system. *Agricultural and Forest Meteorology* 169, 156–173.
- Roetzer, T., Leuchner, M., Nunn, A. J., JUL 2010. Simulating stand climate, phenology, and photosynthesis of a forest stand with a process-based growth model. *International Journal of Biometeorology* 54 (4), 449–464.
- Roupsard, O., Dauzat, J., Nouvellon, Y., Deueau, A., Feintrenie, L., Saint-Andre, L., Miallet-Serra, I., Braconnier, S., Bonnefond, J.-M., Berbigier, P., Epron, D., Jourdan, C., Navarro, M., Bouillet, J.-P., Apr 2008. Cross-validating sun-shade and 3d models of light absorption by a tree-crop canopy. *Agricultural and Forest Meteorology* 148 (4), 549–564.
- Saint-André, L., Apr 2013. Intégration des cycles biogéochimiques dans les modèles de croissance à base dendrométrique. concepts - forces et limites de l'approche. Habilitation à diriger la recherche - Ecole doctorale RP2E.
- Saint-André, L., Laclau, J.-P., Bouillet, J.-P., Deleporte, P., Miabala, A., Ognouabi, N., Bailleres, H., Nouvellon, Y., Moukini, R., 2002. Integrative modelling approach to assess the sustainability of the eucalyptus plantations in congo. Fourth Workshop.
- Saint-André, L., Laclau, J. P., Deleporte, P., Gava, J. L., Goncalves, J. L. M., Mendham, D., Nzila, J. D., Smith, C., Toit, B. d., Xu, D. P., Sankaran, K. V., Marien, J. N., Nouvellon, Y., Bouillet, J. P., Ranger, J., 2008. Slash and litter management effects on eucalyptus productivity: a synthesis using a growth and yield modelling approach. Site management and productivity in tropical plantation forests: Proceedings of workshops in Piracicaba (Brazil), 22-26 November 2004 and Bogor (Indonesia), 6-9 November 2006, 173–189.
- Saint-André, L., M'bou, A. T., Mabiala, A., Mouvondy, W., Jourdan, C., Roupsard, O., Deleporte, P., Hamel, O., Nouvellon, Y., 2005. Age-related equations for above- and below-ground biomass of a eucalyptus hybrid in congo. *Forest ecology and management* 205 (1-3), 199–214.
- Sainte-Marie, J., Henrot, A., Saint-André, L., Barrandon, M., Nouvellon, Y., Roupsard, O., Laclau, J. P., 2012. Modeling the environmental and seasonal influence on canopy dynamic and litterfall of even-aged forest ecosystems by a model coupling growth and yield and process-based approaches. In: press, I. (Ed.), *Plant Growth Modeling, Simulation, Visualization and Applications: Proceedings - PMA'12*. pp. 324 – 331.
- Shuttleworth, W. J., Wallace, J. S., 1985. Evaporation from spare crops - an energy combination theory. *Quarterly Journal of The Royal Meteorological Society* 111 (469), 839–855.
- Silva, A. L. L., da Oliveira, Y., de Alcantara, G. B., de Santos, M., dos Quoirin, M., da Silva, A. L. L., de Oliveira, Y., de Alcantara, G. B., dos Santos, M., 2009. Chilling and frost tolerance in eucalypt leaves. *Biociencias* 17 (1), 86–90.
- Stape, J., Binkley, D., Ryan, M., 2004. Eucalyptus production and the supply, use and efficiency of use of water, light and nitrogen across a geographic gradient in brazil. *Forest ecology and management* 193 (1-2), 17–31.
- Stoeckli, R., Rutishauser, T., Dragoni, D., O'Keefe, J., Thornton, P. E., Jolly, M., Lu, L., Denning, A. S., 2008. Remote sensing data assimilation for a prognostic phenology model. *Journal of geophysical research-biogeosciences* 113 (G4), G04021.
- Sverdrup, H., Thelin, G., Robles, M., Stjernquist, I., Sorensen, J., 2006. Assessing nutrient sustainability of forest production for different tree species considering ca, mg, k, n and p at bjornstorp estate, sweden. *Biochemistry* 81 (2), 219–238.
- Van Veldhuizen, D. A., Lamont, G. B., 2000. Multiobjective evolutionary algorithms: Analyzing the state-of-the-art. *Evolutionary computation* 8 (2), 125–147.
- Vincent, G., 2006. Leaf life span plasticity in tropical seedlings grown under contrasting light regimes. *Annals of Botany* 97 (2), 245–255.
- Vitasse, Y., Delzon, S., Bresson, C. C., Michalet, R., Kremer, A., 2009a. Altitudinal differentiation in growth and phenology among populations of temperate-zone tree species growing in a common garden. *Canadian Journal of Forest Research - Revue canadienne de recherche forestière* 39 (7), 1259–1269.
- Vitasse, Y., Delzon, S., Dufrene, E., Pontailleur, J. Y., Louvet, J. M., Kremer, A., Michalet, R., 2009b. Leaf phenology sensitivity to temperature in

- European trees: Do within-species populations exhibit similar responses? *Agricultural and Forest Meteorology* 149 (5), 735–744.
- Vitasse, Y., Porte, A. J., Kremer, A., Michalet, R., Delzon, S., 2009c. Responses of canopy duration to temperature changes in four temperate tree species: relative contributions of spring and autumn leaf phenology. *Oecologia* 161 (1), 187–198.
- Wallman, P., Svensson, M. G. E., Sverdrup, H., Belyazid, S., 2005. Forsafe - an integrated process-oriented forest model for long-term sustainability assessments. *Forest ecology and management* 207 (1-2), 19–36.
- Whitehead, D., Beadle, C., MAY 17 2004. Physiological regulation of productivity and water use in eucalyptus: a review. *Forest ecology and management* 193 (1-2), 113–140.
- Wright, I., Reich, P., Cornelissen, J., Falster, D., Groom, P., Hikosaka, K., Lee, W., Lusk, C., Niinemets, U., Oleksyn, J., Osada, N., Poorter, H., Warton, D., Westoby, M., SEP 2005. Modulation of leaf economic traits and trait relationships by climate. *Global Ecology and Biogeography* 14 (5), 411–421.
- Wright, S., Van Schaick, C., 1994. Light and phenology of tropical trees. *American Naturalist* 143 (1), 192–199.
- Zhu, Z. X., Arp, P. A., Meng, F. R., Bourque, C. P. A., Foster, N. W., 2003a. A forest nutrient cycling and biomass model (forbmb) based on year-round, monthly weather conditions - part ii: Calibration, verification, and application. *Ecological Modelling* 170 (1), 13–27.
- Zhu, Z. X., Arp, P. A., Meng, F. R., Bourque, C. P. A., Foster, N. W., 2003b. A forest nutrient cycling and biomass model (forbmb) based on year-round, monthly weather conditions, part 1: assumption, structure and processing. *Ecological Modelling* 169 (2-3), 347–360.

Chapitre 3. Applications du modèle Stand Leaf Cohorts Dynamics : *Eucalyptus grandis*, Itatinga (Brésil), *Fagus sylvatica* L., Hesse et *Quercus petraea*, Barbeau (France)

.

Chapitre 4

Modélisation de la dynamique de la matière organique du sol

La décomposition de la MOS est un processus clé du cycle des éléments minéraux au sein des écosystèmes forestiers. Elle est le produit de l'activité de la biodiversité du sol c.-à-d. la macrofaune, la mésofaune, la microfaune, et les assemblages d'espèces fongiques et bactériennes. La production de composés organiques et minéraux résultante est une composante importante de la biodisponibilité en éléments minéraux dans le sol. L'élaboration d'un modèle de chimie du sol pertinent requiert une modélisation préalable de la décomposition de la MOS (cf. 1.4.2.2).

4.1 Contexte

La communauté scientifique a produit depuis les années 70 plus de 250 modèles dédiés à l'étude de l'évolution de la MOS intégrant de degrés divers de complexité et de non linéarités (Manzoni et Porporato, 2009). Les échelles spatiales considérées vont du μm à la centaine de km et les échelles temporelles de l'heure au siècle. Parmi cette multiplicité d'approches, Göran Ågren et Ernesto Bosatta ont développé à partir des années 80 une théorie originale de la décomposition de la MO reposant sur différents couples d'équations intégral-différentielles.

L'introduction du concept de qualité (détaillé dans 4.2.1) caractérisant l'hétérogénéité de la MO est à la base de la formulation de ces modèles. Bosatta et Agren (1985) présentent un premier modèle reposant sur la théorie de la qualité (révisé dans Bosatta et Agren (1991)) permettant la modélisation de la décomposition d'un substrat hétérogène de MO. La complexité de son formalisme le place en marge des approches classiques, ces dernières reposant usuellement sur des équations différentielles de cinétique chimique.

L'essentiel de la littérature postérieure consacrée aux modèles de qualité considère le substrat sans distribution spatiale. Elle inclut de nombreux travaux allant de la modélisation *in situ* et l'analyse de modèle (Agren *et al.*, 1996, Bosatta et Agren, 2002, 2003). Il est à noter qu'une attention particulière a été portée sur le lien entre le concept abstrait de qualité et l'expérimentation *in situ* (Agren et Bosatta, 1996). Par ailleurs, cette approche non spatiale a permis de développer un modèle dédié à la dynamique du carbone et de l'azote de la litière foliaire (d'Annunzio, 2008, d'Annunzio *et al.*, 2008).

Bosatta et Agren (1996) ont proposé une variante du modèle intégrant l'évolution de la MO le long d'un profil vertical de sol qui n'a pour l'instant pas été prolongée dans la littérature. Or, ce modèle présente à priori de nombreux avantages pour l'élaboration de modèles écosystémiques : i) son formalisme très général, en particulier celui d'"activité des décomposeurs" (voir 4.2), permet d'envisager une intégration progressive des concepts issus de la microbiologie sans modification fondamentale des propriétés mathématiques du modèle, ii) l'intégration de la dimension verticale permet d'envisager la modélisation de nombreuses interactions entre le sol et la plante en considérant notamment les profils racinaires.

4.2 Présentation du modèle général

Les éléments proposés par Bosatta et Agren (1996) et Agren et Bosatta (1998) permettent de donner une description détaillée du modèle que nous étudierons dans les chapitres suivants.

4.2.1 Théorie de la qualité

Les décomposeurs de la MOS sont regroupés en une même entité appelée communauté des décomposeurs. Elle représente de manière indifférenciée les communautés bactériennes et microbiennes agissant sur la MO. L'activité de la macrofaune et la mésofaune n'est pas prise en compte ici.

La théorie de la qualité, introduite par Bosatta et Agren (1985), consiste à associer à chaque atome présent dans la MO, une qualité notée q évoluant au cours du temps. Cette variable d'état caractérise la réactivité de la MO face à l'activité des décomposeurs :

- une qualité faible correspond à la MO peu réactive à l'activité des décomposeurs, dite MO récalcitrante (ex. lignine) ;
- une qualité élevée correspond à la MO fortement assimilable par la communauté des décomposeurs.

Les concentrations de carbone et d'éléments minéraux sont alors vues comme des distributions suivant la qualité (fig.4.1). Cette approche permet de ne pas détailler la composition chimique de la MO tout en tenant compte de son hétérogénéité. Ainsi, plutôt que de considérer une quantité totale indifférenciée de MO, le modèle représente l'évolution verticale et temporelle de distributions de carbone et de nutriments suivant leur qualité.

4.2.2 Mise en équations

4.2.2.1 Equation pour la concentration en carbone

La décomposition d'un substrat de MOS par l'action d'une biomasse de décomposeurs dans une couche de sol d'épaisseur dz à une profondeur $z \in \mathbb{R}_+$ (en cm) se caractérise par l'évolution de la densité de carbone du substrat, notée $\rho_c(q, z, t)$ (en $\text{g}_C \cdot \text{q}^{-1} \cdot \text{cm}^{-1}$) où la variable continue $q \in \mathbb{R}_+$ caractérise la qualité. Ainsi, $\rho_c(q, z, t) dz dq$ est la quantité de carbone dans l'intervalle de qualité $[q, q + dq]$, dans la couche de sol $[z, z + dz]$, à l'instant $t \in \mathbb{R}_+$.

De même, la densité de carbone au sein de la biomasse des décomposeurs dans l'intervalle de qualité $[q, q + dq]$, dans la couche de sol $[z, z + dz]$, à l'instant $t \in \mathbb{R}_+$ est notée $\rho_{dc}(q, z, t)$. Son évolution

Chapitre 4. Modélisation de la dynamique de la matière organique du sol

est définie grâce aux fonctions et aux hypothèses suivantes :

- $P(q,z,t)$ (en $g_{biom} \cdot t^{-1} \cdot cm^{-1} \cdot q^{-1}$) est le taux de croissance de la biomasse des décomposeurs correspondant à l'assimilation de carbone de qualité q à la profondeur z .
- $e(q) \in [0, 1]$ est l'efficience d'utilisation du carbone de qualité q par les décomposeurs. Elle caractérise les pertes de carbone dans le sol par la respiration des décomposeurs.
- $f_c \in]0, 1[$ (en $g_C \cdot g_{biom}^{-1}$) est la concentration en carbone de la communauté des décomposeurs qui sera considérée indépendante de la qualité.
- $D(q,q')$ (en q^{-1}) exprime le taux de conversion de carbone assimilé par les décomposeurs de qualité q' en carbone de qualité q . D est une fonction de dispersion et vérifie la propriété $\int_0^{+\infty} D(q,q') dq = 1$.
- $\mu_{dec}(q)$ caractérise la biomasse associée à la mortalité des décomposeurs.
- La vitesse de transport de particules de MO de qualité q à la profondeur z est notée $v(q,z)$ (en $cm \cdot t^{-1}$). La dépendance en q permet de prendre en compte les variations de mobilité des particules de MO selon leur nature alors que la dépendance en z permet de prendre en compte les variations des paramètres environnementaux tels que la porosité du sol. La vitesse v est supposée strictement positive et bornée : $v \in L^\infty(\mathbb{R}_+^2)$ et $v > 0$.
- Enfin, nous supposons que la biomasse des décomposeurs ne subit pas de transport vertical c.-à-d. $\frac{\partial \rho_{dc}}{\partial z} = 0$.

La figure 4.1 résume la construction du modèle, centrée sur l'activité des décomposeurs.

L'écriture des équations de masse au sein de la couche de sol $[z, z + dz]$ donne les équations :

$$(4.1) \quad \frac{\partial \rho_c(q,z,t)}{\partial t} = -f_c \frac{P(q,t)}{e(q)} + \mu_{dc}(q,z,t) \rho_{dc}(q,z,t) - \frac{\partial}{\partial z} [v(q,z) \rho_c(q,z,t)],$$

$$(4.2) \quad \frac{\partial \rho_{dc}(q,z,t)}{\partial t} = \int_0^{+\infty} f_c D(q,q') P(q',t) dq' - \mu_{dc}(q,z,t) \rho_{dc}(q,z,t).$$

Nous introduisons à ce stade l'hypothèse adiabatique suivante : la biomasse de décomposeurs répond très rapidement aux changements de disponibilité du substrat. Ainsi, ρ_{dc} est supposée être à l'état stationnaire c.-à-d. $\frac{\partial \rho_{dc}(q,z,t)}{\partial t} = 0$ ce qui donne :

$$(4.3) \quad \frac{\partial \rho_c(q,z,t)}{\partial t} = -f_c \frac{P(q,t)}{e(q)} + \int_0^{+\infty} f_c D(q,q') P(q',t) dq' - \frac{\partial}{\partial z} [v(q,z) \rho_c(q,z,t)],$$

$$(4.4) \quad 0 = \int_0^{+\infty} f_c D(q,q') P(q',t) dq' - \mu_{dc}(q,z,t) \rho_{dc}(q,z,t).$$

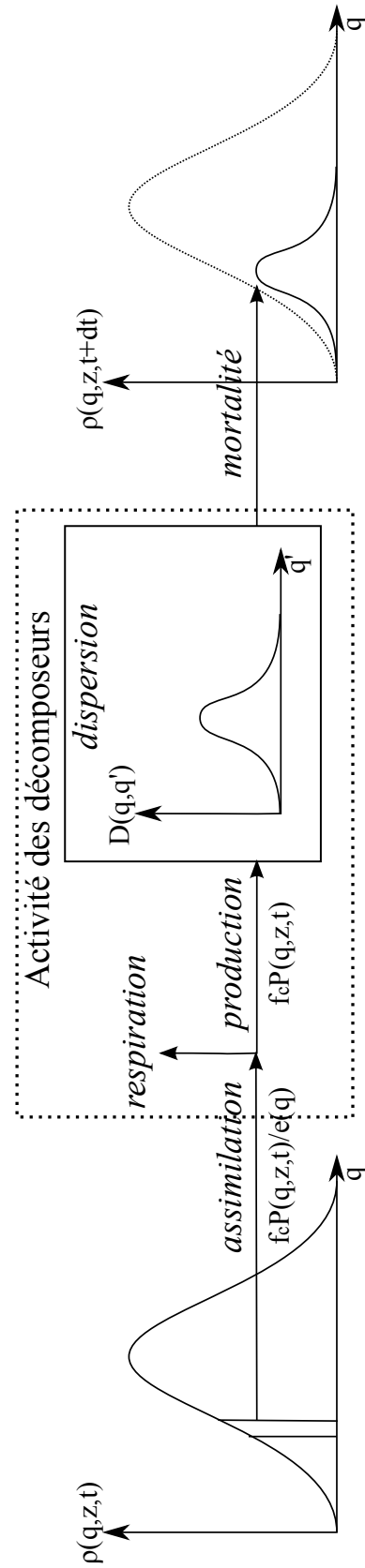


Figure 4.1 – Activité des décomposeurs sur la concentration en carbone de la matière organique du sol à la profondeur z . L'activité des décomposeurs sur le carbone contenu dans la MOS est la combinaison de quatre processus : i) assimilation par les décomposeurs, ii) production de CO_2 par la respiration, iii) production de décomposeurs et dispersion de la qualité du carbone et iv) retour au substrat du sol de composés organiques par la mortalité des décomposeurs. Ces quatre phases sont évidemment dépendantes de la nature des composés de MO considérés et donc de la qualité q . La caractérisation de l'hétérogénéité de la MOS ainsi que son changement de composition au cours de temps sous l'action des décomposeurs constitue la force du modèle.

Chapitre 4. Modélisation de la dynamique de la matière organique du sol

Pour achever la formulation de l'équation du carbone, nous supposons que le taux de croissance de la biomasse des décomposeurs $P(q,z,t)$ est proportionnel à la densité de carbone de qualité q :

$$(4.5) \quad P(q,z,t) = u(q,z)\rho_c(q,z,t).$$

Le coefficient de proportionnalité $u(q,z)$ (en $\text{g}_{biom} \cdot \text{g}_c^{-1} \cdot \text{t}^{-1}$) est le taux de croissance des décomposeurs par unité de carbone de qualité q . Il peut varier en fonction de la profondeur car il dépend de paramètres comme la température et l'humidité qui varient en fonction de la profondeur. Ce taux est positif et borné : $u \in L^\infty(\mathbb{R}_+^2)$ et $u \geq 0$.

Nous obtenons ainsi l'équation aux dérivées partielles (EDP) d'évolution de la concentration de carbone :

$$(4.6) \quad \frac{\partial \rho_c}{\partial t}(q,z,t) = -\frac{f_c u(q,z)}{e(q)} \rho_c(q,z,t) + f_c \int_0^{+\infty} D(q,q') u(q',z) \rho_c(q',z,t) dq' - \frac{\partial}{\partial z} [\nu(q,z) \rho_c(q,z,t)].$$

Nous lui associons la condition initiale :

$$(4.7) \quad \rho_c(q,z,0) = \rho_0^c(q,z), \quad \forall q, z \geq 0,$$

et la condition de bord (par exemple les apports par cohortes de litière) :

$$(4.8) \quad \rho_c(q,0,t) = \sigma^c(q,t), \quad \forall q, t \geq 0.$$

4.2.2.2 Equation pour la concentration en nutriment

La densité d'un nutriment n (par exemple N,P,K,S,Ca,Mg,...) au sein de la MO est notée $\rho_n(q,z,t)$ (en $\text{g}_n \cdot \text{q}^{-1} \cdot \text{cm}^{-1}$) et alors, $\rho_n(q,z,t) dz dq$ est la quantité de ce nutriment dans l'intervalle de qualité $[q, q + dq]$, dans la couche de sol $[z, z + dz]$, à l'instant $t \in \mathbb{R}_+$. Cette définition est semblable à celle du carbone mais l'EDP régissant sa dynamique est différente. Nous supposons que la taille de la communauté des décomposeurs est limitée par la quantité de carbone du substrat ce qui implique que la dynamique de n est régulée par l'utilisation du carbone par les décomposeurs. Ainsi, pour un prélèvement de carbone de qualité q , un prélèvement en nutriment issu de la MO en décomposition est effectué à la même qualité. Le transport vertical des nutriments associés à la MO est associé à celui du carbone donc la vitesse de transport vertical ν est la même que celle du carbone. La concentration en n au sein des décomposeurs est notée $f_n \in]0, 1[$ (en $\text{g}_n \cdot \text{g}_{biom}^{-1}$).

Nous obtenons l'EDP d'évolution suivante :

$$(4.9) \quad \frac{\partial \rho_n}{\partial t}(q, z, t) = -\frac{f_c u(q, z)}{e(q)} \rho_n(q, z, t) + f_n \int_0^{+\infty} D(q, q') u(q', z) \rho_c(q', z, t) dq' - \frac{\partial}{\partial z} [\nu(q, z) \rho_n(q, z, t)].$$

Nous lui associons la condition initiale :

$$(4.10) \quad \rho_n(q, z, 0) = \rho_0^n(q, z), \quad \forall q, z \geq 0$$

et la condition de bord :

$$(4.11) \quad \rho_n(q, 0, t) = \sigma^n(q, t), \quad \forall q, t \geq 0.$$

4.3 Troncature du modèle

Précisons que le terme de troncature utilisé ici permet de résumer plusieurs manipulations du modèle général permettant de s'affranchir de la notion de distribution de qualité en considérant les quantités totales de carbone et de nutriments (moments d'ordre 0) et une qualité moyenne. Ces manipulations modifient la dynamique de la MO et nous étudierons plus loin de quelle manière.

Plus en détail, Bosatta et Agren (1996) n'ont pas étudié directement les solutions des équations 4.6 et 4.9. En utilisant les moments en q d'ordre 0 et 1 définis ci-dessous, les équations 4.6 et 4.9 ont été tronquées afin de considérer un nouveau système d'EDPs décrivant la dynamique des moments en q d'ordre 0 et de la qualité moyenne $\hat{q}$ définie ci-dessous.

Définition 4.3.1 (*Moment en q des distributions/Qualité moyenne*)

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, les moments d'ordre k en q des solutions ρ_c et ρ_n sont définis à une profondeur z et un temps t fixés par :

$$(4.12) \quad \Phi_k^c(z, t) = \frac{1}{k!} \int_0^{+\infty} q^k \rho_c(q, z, t) dq,$$

$$(4.13) \quad \Phi_k^n(z, t) = \frac{1}{k!} \int_0^{+\infty} q^k \rho_n(q, z, t) dq.$$

Soit alors la qualité moyenne définie par :

$$(4.14) \quad \hat{q}(z, t) = \frac{\Phi_1^c}{\Phi_0^c}(z, t),$$

Nous présenterons ici rapidement la méthode de troncature utilisée. Le détail des calculs est donné en annexe de Bosatta et Agren (1996).

En intégrant les équations de concentration 4.6, 4.9 et en dérivant $\hat{q}$ par rapport au temps, nous obtenons les trois relations suivantes :

$$(4.15a) \quad \partial_t \Phi_0^c(z, t) = - \int_{\mathbb{R}_+} [k(q, z) \rho_c(q, z, t) + \partial_z [v(q, z) \rho_c(q, z, t)]] dq,$$

$$(4.15b) \quad \partial_t \Phi_0^n(z, t) = - \int_{\mathbb{R}_+} \left[\frac{u(q, z)}{e(q)} \rho_n(q, z, t) + \partial_z [v(q, z) \rho_n(q, z, t)] \right] dq - \int_{\mathbb{R}_+} f_n u(q, z) \rho_c(q, z, t) dq,$$

$$(4.15c) \quad \partial_t \hat{q}(z, t) = - \frac{1}{\Phi_0^c(z, t)} \int_{\mathbb{R}_+} [(\hat{q}(z, t) - q) (k(q, z) \rho_c(q, z, t) - \partial_z [v(q, z) \rho_c(q, z, t)]) - \eta_1(q) u(q, z) \rho_c(q, z, t)] dq.$$

où ont été posés :

$$\begin{aligned} \eta_1(q) &= \int_{\mathbb{R}_+} (q - q') D(q', q) dq', \\ k(q, z) &= \frac{1 - e(q)}{e(q)} f_c u(q, z). \end{aligned}$$

Il convient également de définir le devenir des conditions initiales 4.7-4.10 et des conditions de bord 4.8-4.11. Nous ne préciserons pas s'il s'agit de carbone ou d'un nutriment car le formalisme est similaire :

$$\begin{aligned} \Phi_0(z, 0) &= \int_{\mathbb{R}_+} \rho_0(q, z) dq, & \Phi_0(0, t) &= \int_{\mathbb{R}_+} \sigma(q, t) dq, \\ \Phi_1(z, 0) &= \int_{\mathbb{R}_+} q \rho_0(q, z) dq, & \Phi_1(0, t) &= \int_{\mathbb{R}_+} q \sigma(q, t) dq, \\ \hat{q}(z, 0) &= \frac{\Phi_0(z, 0)}{\Phi_1(z, 0)}, & \hat{q}(0, t) &= \frac{\Phi_0(0, t)}{\Phi_1(0, t)}. \end{aligned}$$

Le système d'équation 4.15 ne permet pas d'obtenir de relation différentielle explicite sur la concentration et la qualité moyenne. Pour obtenir des relations satisfaisantes, il est nécessaire d'effectuer une troncature du modèle. Cette dernière est effectuée en supposant que la dispersion de la distribution de concentration de carbone et de nutriment suivant la qualité est contenue dans un voisinage de la qualité moyenne $\hat{q}$. D'un point de vue biologique, il s'agit d'une hypothèse forte, restant à valider. Nous supposons qu'il existe également les développements du type suivant :

$$\begin{aligned} k(q, z) &= k(\hat{q}, z) + (q - \hat{q}) \partial_q k(\hat{q}, z) + \dots, \\ v(q, z) &= v(\hat{q}, z) + (q - \hat{q}) \partial_q v(\hat{q}, z) + \dots, \\ u(q, z) &= u(\hat{q}, z) + (q - \hat{q}) \partial_q u(\hat{q}, z) + \dots, \\ \eta_1(q, z) &= \eta_1(\hat{q}, z) + (q - \hat{q}) \partial_q \eta_1(\hat{q}, z) + \dots \end{aligned}$$

Chapitre 4. Modélisation de la dynamique de la matière organique du sol

Le système tronqué obtenu est :

$$(4.16a) \quad \partial_t \Phi_0^c(z,t) + \partial_z \left[\nu(\hat{q},z) \Phi_0^c(z,t) \right] = -k(\hat{q},z) \Phi_0^c(z,t),$$

$$(4.16b) \quad \partial_t \Phi_0^n(z,t) + \partial_z \left[\nu(\hat{q},z) \Phi_0^n(z,t) \right] = -\frac{u(\hat{q},z)}{e(\hat{q})} \Phi_0^n(z,t) + f_n u(\hat{q},z) \Phi_0^c(z,t),$$

$$(4.16c) \quad \partial_t \hat{q}(z,t) + \nu(\hat{q},z) \partial_z \hat{q}(z,t) = -\eta_1(\hat{q}) u(\hat{q},z).$$

L'étude des moments d'ordre 0 présente plusieurs intérêts. Elle permet de s'affranchir de la caractérisation explicite de la qualité et permet d'obtenir des solutions explicites pour certaines formulations particulières.

Néanmoins, la troncature du modèle repose sur l'hypothèse de faible dispersion de la MO que nous souhaitons approfondir pour plusieurs raisons :

- Bosatta et Agren (1996) ne s'intéressent qu'à l'état stationnaire du système tronqué. Nous souhaitons le comparer numériquement avec l'état stationnaire du modèle non tronqué afin d'étudier l'effet de la troncature en fonction de la dispersion de la MO.
- la suppression des moments d'ordre élevés peut modifier significativement l'évolution des solutions dans le cas non stationnaire et induire une forte différence entre les solutions du modèle général et du modèle tronqué.

La troncature repose sur des hypothèses fortes sur le comportement des équations originelles. Nous devons caractériser ces hypothèses.

4.4 Formulation explicite d'un cas particulier

4.4.1 Choix de modélisation

L'analyse numérique des modèles proposés dans Bosatta et Agren (1996) requiert l'explicitation des termes de l'EDP. Les différentes publications de G. Ågren et E. Bosatta reprennent dans la majorité des cas les formules suivantes :

$$(4.17) \quad e(q) = e_0,$$

$$(4.18) \quad u(q) = u_0 q^\beta,$$

où $e_0 \in]0, 1[$, u_0 et β sont des constantes réelles strictement positives.

Pour la vitesse du transport vertical de la MO, nous conservons la première approche proposée dans Bosatta et Agren (1996) :

$$(4.19) \quad v(q, z) = v_0 > 0.$$

Une formulation explicite de l'opérateur D est également nécessaire. Cet opérateur définit une famille de fonctions dont les propriétés caractérisent la stabilisation de la MO du sol. Pour $q' > 0$ fixé, $D(q, q')$ est une fonction de q décrivant de quelle manière la communauté des décomposeurs transforme une qualité de carbone q' en carbone de qualité q . Bosatta et Agren (2003) ont proposé deux formulations pour l'opérateur D (nous reprenons ici les notations de l'article) :

$$(4.20) \quad D^{\text{II}}(q, q') = \frac{\alpha + 1}{q'^{\alpha+1}} q^\alpha \mathbb{1}_{\{q \leq q'\}},$$

$$(4.21) \quad D^{\text{III}}(q, q') = \frac{\alpha}{q^2} e^{-\alpha(\frac{1}{q} - \frac{1}{q'})} \mathbb{1}_{\{q \leq q'\}}.$$

Ces deux formulations illustrent l'hypothèse de stricte décroissance de la qualité. Le modèle I est donné dans Agren et Bosatta (1998) et ne sera pas étudié ici car il ne repose pas sur une formulation explicite du noyau D . Notons que l'hypothèse $\int_0^{+\infty} D(q, q') = 1$ est bien vérifiée dans chacun des cas. Dans cette thèse, nous nous focaliserons sur le modèle II. Par soucis de concision, nous noterons $D^{\text{II}} = D$.

Les équations 4.6 et 4.9 deviennent :

$$(4.22) \quad \frac{\partial \rho_c}{\partial t}(q, z, t) = -\frac{f_c u_0 q^\beta}{e_0} \rho_c(q, z, t) - v_0 \frac{\partial \rho_c}{\partial z}(q, z, t) + f_c(\alpha + 1) u_0 q^\alpha \int_q^{+\infty} q'^{\beta-\alpha-1} \rho_c(q', z, t) dq',$$

$$(4.23) \quad \frac{\partial \rho_n}{\partial t}(q, z, t) = -\frac{f_c u_0 q^\beta}{e_0} \rho_n(q, z, t) - v_0 \frac{\partial \rho_n}{\partial z}(q, z, t) + f_n(\alpha + 1) u_0 q^\alpha \int_q^{+\infty} q'^{\beta-\alpha-1} \rho_c(q', z, t) dq'.$$

Remarque 4.4.1

Précisons que cette formulation particulière sera adaptée dans les chapitres suivants afin de correspondre au cadre théorique que nous aurons alors défini.

4.4.2 Troncature du modèle

Nous reprenons ici la discussion engagée dans la partie précédente. Aucune étude formelle n'a permis au cours de cette thèse de proposer des résultats généraux quand à la différence entre le modèle originel et le modèle tronqué. C'est pourquoi nous avons restreint l'étude des hypothèses de troncature à une analyse numérique dans le cadre du cas particulier que nous avons défini.

Donnons ici l'expression des solutions du modèle tronqué dans ce cas particulier. Il est nécessaire de calculer la quantité suivante pour expliciter le système tronqué :

$$\eta_1(\hat{q}) = \int_0^{+\infty} (\hat{q} - q) D(q, \hat{q}) dq = \int_0^{+\infty} (\hat{q} - q)(\alpha + 1) \frac{q^\alpha}{(\hat{q})^{\alpha+1}} \mathbb{1}_{\{q \leq \hat{q}\}} dq = \frac{\hat{q}}{\alpha + 2}.$$

Nous obtenons alors le système tronqué ci-dessous :

$$(4.24a) \quad \partial_t \hat{q}(z, t) + v_0 \partial_z \hat{q}(z, t) + \frac{f_c}{\alpha + 2} u_0 \hat{q}(z, t)^{\beta+1} = 0,$$

$$(4.24b) \quad \partial_t \Phi_0^c(z, t) + v_0 \partial_z \Phi_0^c(z, t) + f_c \frac{1 - e_0}{e_0} u_0 \hat{q}(z, t)^\beta \Phi_0^c(z, t) = 0,$$

$$(4.24c) \quad \partial_t \Phi_0^n(z, t) + v_0 \partial_z \Phi_0^n(z, t) + \frac{f_c u_0}{e_0} \hat{q}(z, t)^\beta \Phi_0^n(z, t) = f_n u_0 \hat{q}(z, t)^\beta \Phi_0^c(z, t).$$

ainsi que le système stationnaire associé :

$$(4.25a) \quad v_0 \partial_z \hat{q}^\infty(z) + \frac{f_c}{\alpha + 2} u_0 \hat{q}^\infty(z)^{\beta+1} = 0,$$

$$(4.25b) \quad v_0 \partial_z \Phi_0^{c,\infty}(z) + f_c \frac{1 - e_0}{e_0} u_0 (\hat{q}^\infty(z))^\beta \Phi_0^{c,\infty}(z) = 0,$$

$$(4.25c) \quad v_0 \partial_z \Phi_0^{n,\infty}(z) + \frac{f_c u_0}{e_0} (\hat{q}^\infty(z))^\beta \Phi_0^{n,\infty}(z) = f_n u_0 (\hat{q}^\infty(z))^\beta \Phi_0^{c,\infty}(z).$$

4.4 Formulation explicite d'un cas particulier

Nous étudierons les solutions de ces systèmes avec les conditions initiales

$$\begin{cases} \hat{q}(0, t) = \hat{q}_0 \mathbb{1}_{\{t \geq 0\}} \\ \Phi_0^c(0, t) = I_0^c \mathbb{1}_{\{t \geq 0\}}, \\ \Phi_0^n(0, t) = I_0^n \mathbb{1}_{\{t \geq 0\}}. \end{cases}$$

qui correspondent à un apport constant de MO de qualité moyenne $\hat{q}_0$ à partir de $t = 0$ et

$$\begin{cases} \hat{q}^\infty(0) = \hat{q}_0, \\ \Phi_0^{c,\infty}(0) = I_0^c, \\ \Phi_0^{n,\infty}(0) = I_0^n. \end{cases}$$

qui correspondent à l'apport constant associé dans le cas stationnaire. Ainsi, $\forall t, t_0 \in \mathbb{R}$, la solution de ce problème de Cauchy est donnée par la solution du problème stationnaire

$$(4.26) \quad \hat{q}^\infty(z) = \left(\frac{1}{\hat{q}_0^\beta} + f_c u_0 \frac{\beta}{\alpha + 2} \frac{z}{v_0} \right)^{-1/\beta},$$

$$(4.27) \quad \Phi_0^{c,\infty}(z) = I_0^c \left(1 + f_c u_0 \hat{q}_0^\beta \frac{\beta}{\alpha + 2} \frac{z}{v_0} \right)^{\frac{-(1-e_0)(\alpha+2)}{e_0\beta}},$$

$$(4.28) \quad \Phi_0^{n,\infty}(z) = \left(I_0^n - I_0^c \frac{f_n e_0}{f_c} \right) \left(1 + f_c u_0 \hat{q}_0^\beta \frac{\beta}{\alpha + 2} \frac{z}{v_0} \right)^{\frac{-(\alpha+2)}{e_0\beta}} + I_0^c \frac{f_n e_0}{f_c},$$

et la méthode des caractéristiques

$$(4.29) \quad \hat{q}(z, t) = \hat{q}^\infty(z) \mathbb{1}_{\{t \geq \frac{z}{v_0}\}},$$

$$(4.30) \quad \Phi_0^c(z, t) = \Phi_0^{c,\infty}(z) \mathbb{1}_{\{t \geq \frac{z}{v_0}\}},$$

$$(4.31) \quad \Phi_0^n(z, t) = \Phi_0^{n,\infty}(z) \mathbb{1}_{\{t \geq \frac{z}{v_0}\}}.$$

La résolution de ce problème de Cauchy est donnée en annexe A.1.

4.5 Objectifs

Notre objectif est de définir un cadre mathématique rendant compatibles les travaux de Bosatta et Agren (1996) avec la granulométrie imposée par notre démarche globale de modélisation. Cette thèse propose : i) une analyse théorique du modèle intégro-différentiel, ii) une analyse numérique d'une formulation particulière du modèle et iii) une discussion sur l'hypothèse de simplification utilisée dans Bosatta et Agren (1996) pour étudier l'état stationnaire du modèle.

Dans le chapitre 5, nous considérerons les propriétés mathématiques du modèle de décomposition de la MOS originel. Nous étudierons l'unicité et l'existence de solutions du modèle originel (eq.4.6 -4.9) dans des espaces fonctionnels adaptés à l'étude des moments en q d'ordre 0 et 1 des solutions (def.4.3.1) auxquelles nous ajouterons des hypothèses de régularité des solutions suivant la qualité.

Dans le chapitre 6, l'analyse numérique du modèle reposera sur l'étude d'un schéma de différence finies appliqué à un cas particulier introduit dans ce chapitre (voir 4.4) afin i) d'étudier la troncature du modèle et d'engager une réflexion sur les hypothèses sous-jacentes et ii) de proposer un modèle pertinent pour notre approche générale de modélisation.

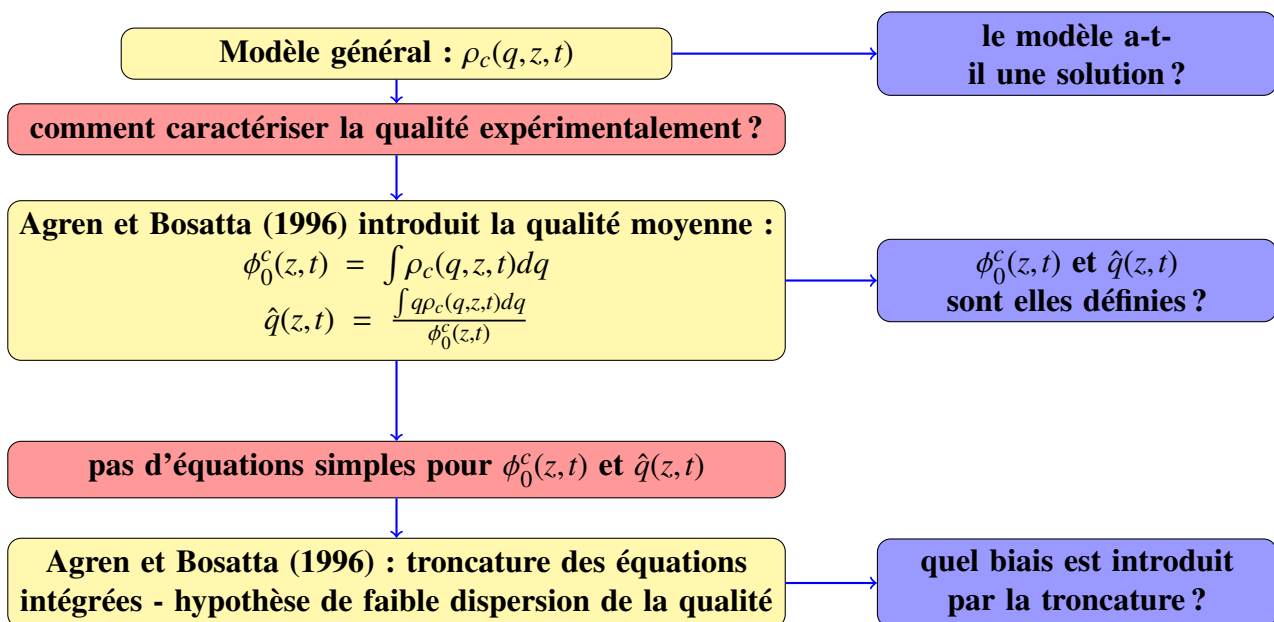


Figure 4.2 – Résumé des questionnements mentionnés et étudiés au cours de cette thèse dans le cas du carbone. Les boîtes en jaune et rouge rappellent le cheminement de l'article Bosatta et Agren (1996) menant à la troncature du modèle. Les questions mathématiques en bleu ont été étudiées au cours de la thèse.

Chapitre 5

Etude des solutions du modèle de décomposition de la matière organique

Ce chapitre a pour objectif de mettre en évidence les hypothèses nécessaires à l'existence et l'unicité de solutions aux équations 4.6 et 4.9. Ces solutions doivent notamment : i) vérifier les hypothèses sur les moments formulées par Bosatta et Agren (1996) (def.4.3.1) et ii) avoir une régularité suffisante pour mettre en œuvre une méthode d'analyse numérique convergente (chap.6). Nous avons donc complété la liste des hypothèses déjà formulées en 4.2.2 afin d'assurer l'existence de solutions continues, positives, à limite nulle en $+\infty$, intégrables et admettant des moments jusqu'à l'ordre $N \in \mathbb{N}^*$ fixé pour la qualité q ; de classe C^1 en temps t et en espace z . L'identification de ces hypothèses s'est effectuée par la mise en œuvre de la méthode des caractéristiques, utilisée de manière classique dans la résolution des problèmes de transport (pour la biologie, voir notamment Perthame (2007)) et plus généralement dans l'étude des problèmes différentiels hyperboliques. Nous avons vérifié que la formulation particulière proposée en 4.4 satisfait ces hypothèses.

Dans ce chapitre, nous introduisons tout d'abord les définitions et les résultats fondamentaux essentiels à l'étude des équations 4.6 et 4.9. Sont notamment introduits les espaces de Banach $L^{1,N} \cap \mathcal{C}_0(\mathbb{R}_+)$ permettant de satisfaire les propriétés attendues suivant la qualité q . Nous démontrons dans une seconde partie l'existence et l'unicité de solutions dans les espaces de Banach $L^{1,N} \cap \mathcal{C}_0(\mathbb{R}_+)$ et de classe C^1 en temps et en espace, puis nous appliquons ce résultat à la formulation particulière. Enfin, nous étudions dans une troisième partie l'existence et l'unicité d'une solution stationnaire ainsi que la convergence des solutions générales vers cet état stationnaire dans le cas d'un apport constant de MO.

5.1 Résultats fondamentaux

5.1.1 Equations différentielles ordinaires dans les espaces de Banach

Nous présentons ici l'ensemble des résultats fondamentaux essentiels à l'étude du modèle. Pour les démonstrations, nous renvoyons à Dieudonné (1963), Deimling (1977), Lang (1983) et Cartan (1967).

Théorème 5.1.1 (Cauchy-Lipschitz : Existence et unicité globale)

Soient E un espace de Banach, I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ et $f : I \times E \rightarrow E$ une application continue telle que f est globalement L -lipschitzienne sur E c.-à-d. il existe une constante $L > 0$ indépendante de t telle que

$$(5.1) \quad \forall t \in I, \quad \forall u, v \in E, \quad \|f(t, u) - f(t, v)\|_E \leq L\|u - v\|_E.$$

Alors pour tout $(t_0, u_0) \in I \times E$, il existe une unique solution globale u au problème de Cauchy :

$$(5.2) \quad \begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)), \\ u(t_0) = u_0. \end{cases}$$

La solution peut également être exprimée sous sa forme intégrale :

$$\forall t \in I, \quad u(t) = u_0 + \int_{t_0}^t f(s, u(s)) ds.$$

Proposition 5.1.1

Soient deux solutions globales u et $\hat{u}$ au problème de Cauchy 5.2 de conditions initiales respectives u_0 et $\hat{u}_0$. L'écart entre les solutions au temps t est estimé par l'inégalité :

$$\forall t \in I, \quad \|u(t) - \hat{u}(t)\|_E \leq e^{L|t-t_0|} \|u_0 - \hat{u}_0\|_E.$$

Dans le résultat ci-dessous, nous précisons la dépendance de la solution maximale $u(t, u_0)$ du problème de Cauchy en fonction de la donnée initiale $u_0 \in E$.

Proposition 5.1.2 (Continuité en fonction des paramètres)

1. Pour tout $J \subset I$ compact contenant t_0 dans son intérieur, l'application $E \rightarrow \mathcal{C}(J; E)$ qui à u_0 associe $u(\cdot, u_0)$ est lipschitzienne. Ceci implique la continuité de l'application $(t, u_0) \mapsto$

$u(t, u_0)$.

2. Supposons de plus que f dépend continûment d'un paramètre λ appartenant à un espace topologique F . Si f est localement lipschitzienne sur E , de constante de Lipschitz indépendante de λ c.-à-d. :

$$(5.3) \quad \forall t \in I, \quad \forall \lambda \in V, \quad \forall u, v \in E, \quad \|f(t, u, \lambda) - f(t, v, \lambda)\|_E \leq L\|u - v\|_E \quad (0 \leq L),$$

alors, la solution au problème de Cauchy est notée $u_\lambda(\cdot, u_0)$ et l'application $(t, \lambda) \mapsto u_\lambda(\cdot, u_0)$ est continue sur $I \times L$.

L'étude de la différentiabilité de la solution par rapport à un paramètre et à la condition initiale sera également nécessaire.

Théorème 5.1.2 (Dérivabilité en fonction des paramètres)

1. Différentiabilité par rapport à la donnée initiale u_0 .

Soit $f(t, u)$ une application continue d'un ouvert $U \subset I \times E$ à valeurs dans E . Supposons que la différentielle $D_u f(t, u)$ existe et soit une fonction continue de $(t, u) \in U$ (c'est en particulier le cas lorsque f est de classe $\mathcal{C}^1$). Alors, $u(t, u_0)$ est, comme fonction de $(t, u_0) \in I \times E$, une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.

2. Différentiabilité par rapport à un paramètre.

Soit l'équation différentielle

$$(5.4) \quad \frac{du}{dt} = f(t, u, \lambda),$$

où $\lambda \in F$ (F est un espace de Banach). Supposons que :

- f est continue dans un ouvert $U \subset \mathbb{R} \times E \times L$,
- les applications $D_u f(t, u, \lambda) \in \mathcal{L}(E, E)$ et $D_\lambda f(t, u, \lambda) \in \mathcal{L}(L, E)$ existent et sont des fonctions continues de $(t, u, \lambda) \in U$.

Soit $(t_0, u_0, \lambda_0) \in U$ et I un intervalle compact (tel que $t_0 \in I$) dans lequel l'équation

$$\frac{du}{dt} = f(t, u, \lambda_0)$$

a une solution $u(t)$ telle que $u(t_0) = u_0$. Alors, pour tout $\tilde{u}_0$ assez proche de u_0 et λ assez proche de λ_0 , l'équation 5.4 possède dans I , une solution $u = u(t, \tilde{u}_0, \lambda)$ telle que $u(t_0, \tilde{u}_0, \lambda) = \tilde{u}_0$. Alors, $u(t, \tilde{u}_0, \lambda)$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ en $(t, \tilde{u}_0, \lambda)$.

5.1.2 Espaces fonctionnels

5.1.2.1 Espaces $L^{1,N}(\mathbb{R}_+)$

La définition de la troncature dans Bosatta et Agren (1996) repose sur l'existence des moments d'ordre 0 et 1 en q pour la concentration en carbone ρ_c à toute profondeur z et en tout temps t (def.4.3.1). Il apparait donc naturel de chercher une solution du modèle originel satisfaisant ces propriétés d'intégration.

La famille d'espace de Banach définie ci-dessous a été choisie afin de fournir un cadre fonctionnel compatible avec les hypothèses de l'article (existence des moments jusqu'à l'ordre N) et avec l'application du théorème 5.1.1 (espaces de Banach).

Elle permet d'étudier l'existence et l'unicité de solutions dans un cas plus général que celui requis initialement. Pour se ramener aux hypothèses de Bosatta et Agren (1996), il suffira de poser $N = 1$.

Définition 5.1.1 (Espaces $L^{1,N}(\mathbb{R}_+)$)

Soit la famille de $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels :

$$(5.5) \quad \forall N \in \mathbb{N} \quad L^{1,N}(\mathbb{R}_+) = \left\{ \varphi \in L^1(\mathbb{R}_+) \mid \forall j \in \{0, N\}, q \mapsto q^j \varphi(q) \in L^1(\mathbb{R}_+) \right\}.$$

La norme $\|\cdot\|_{L^{1,N}(\mathbb{R}_+)}$ est définie de la manière suivante :

$$\forall \varphi \in L^{1,N}(\mathbb{R}_+), \quad \|\varphi\|_{L^{1,N}(\mathbb{R}_+)} = \sum_{j=0}^N \|q \mapsto q^j \varphi(q)\|_{L^1(\mathbb{R}_+)}.$$

Remarque 5.1.1

$L^{1,0}(\mathbb{R}_+) = L^1(\mathbb{R}_+)$ et $\|\cdot\|_{L^{1,0}(\mathbb{R}_+)} = \|\cdot\|_{L^1(\mathbb{R}_+)}$. Rappelons que $L^1(\mathbb{R}_+)$ est un espace de Banach (Brezis, 1983).

Proposition 5.1.3

$\forall n \in \mathbb{N}, L^{1,n}(\mathbb{R}_+)$ est un espace de Banach.

La démonstration de ce résultat est donnée en annexe A.2.1.

5.1.2.2 Espace $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}_+)$

Afin d'assurer la continuité des solutions suivant la qualité, nous reprenons la définition de l'espace de Banach $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}_+)$ donnée dans Colmez (2009).

Définition 5.1.2 (Espaces $C_b(\mathbb{R}_+)$, $C_c(\mathbb{R}_+)$ et $C_0(\mathbb{R}_+)$)

L'espace $C_b(\mathbb{R}_+)$ des fonctions continues bornées de $\mathbb{R}_+$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ muni de la norme $\|\cdot\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+)}$ de la convergence uniforme :

$$\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+)} = \sup_{x \in \mathbb{R}_+} |f(x)|,$$

est un espace de Banach.

Soit $C_c(\mathbb{R}_+)$ le sous-espace de fonctions continues à support compact de $\mathbb{R}_+$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

L'espace $C_0(\mathbb{R}_+)$ des fonctions continues tendant vers 0 en $+\infty$ est défini comme étant l'adhérence de $C_c(\mathbb{R}_+)$ dans $C_b(\mathbb{R}_+)$ avec les inclusions strictes suivantes :

$$C_c(\mathbb{R}_+) \subset C_0(\mathbb{R}_+) \subset C_b(\mathbb{R}_+).$$

$C_0(\mathbb{R}_+)$ est un espace de Banach pour la norme $\|\cdot\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+)}$.

5.1.2.3 Espaces $L^{1,N} \cap C_0(\mathbb{R}_+)$

Proposition 5.1.4 (Espaces $L^{1,N} \cap C_0(\mathbb{R}_+)$)

L'espace $L^{1,N} \cap C_0(\mathbb{R}_+)$ muni de la norme

$$\|\cdot\|_{L^{1,N} \cap C_0(\mathbb{R}_+)} = \|\cdot\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+)} + \|\cdot\|_{L^{1,N}(\mathbb{R}_+)}$$

est un espace de Banach.

La démonstration de ce résultat est donnée en annexe A.2.2.

5.2 Solutions dans $L^{1,N} \cap \mathcal{C}_0(\mathbb{R}_+)$

5.2.1 Notations et formalisation du système d'équations

Nous proposons de reformuler les équations aux dérivées partielles (EDP) 4.6 et 4.9 :

$$(5.6a) \quad \frac{\partial \rho_c}{\partial t}(q, z, t) + v(q, z) \frac{\partial \rho_c}{\partial z}(q, z, t) = F_c(q, z, \rho_c(q, z, t)),$$

$$(5.6b) \quad \frac{\partial \rho_n}{\partial t}(q, z, t) + v(q, z) \frac{\partial \rho_n}{\partial z}(q, z, t) = F_n(q, z, \rho_n(q, z, t))$$

où

$$(5.7a) \quad F_c(q, z, \rho) = K(q, z)\rho(q, z, t) + f_c \int_{\mathbb{R}_+} D(q, q')u(q', z)\rho(q', z, t)dq',$$

$$(5.7b) \quad F_n(q, z, \rho) = K(q, z)\rho(q, z, t) + f_n \int_{\mathbb{R}_+} D(q, q')u(q', z)\rho_c(q', z, t)dq'$$

où nous avons posé

$$K(q, z) = -\frac{f_c u(q, z)}{e(q)} - \frac{\partial v}{\partial z}(q, z).$$

Nous leur associons les conditions initiales :

$$(5.8a) \quad \rho_c(q, z, 0) = \rho_0^c(q, z) \quad \forall (q, z) \in \mathbb{R}_+^2,$$

$$(5.8b) \quad \rho_n(q, z, 0) = \rho_0^n(q, z) \quad \forall (q, z) \in \mathbb{R}_+^2;$$

ainsi que les conditions de bord :

$$(5.9a) \quad \rho_c(q, 0, t) = \sigma^c(q, t) \quad \forall (q, t) \in \mathbb{R}_+^2,$$

$$(5.9b) \quad \rho_n(q, 0, t) = \sigma^n(q, t) \quad \forall (q, t) \in \mathbb{R}_+^2.$$

Nous imposons également les conditions de continuité suivantes (au sens de la norme $L^{1,N} \cap \mathcal{C}_0(\mathbb{R}_+)$) pour assurer la cohérence du modèle :

$$(5.10a) \quad \lim_{t \rightarrow 0} \sigma^c(\cdot, t) = \lim_{z \rightarrow 0} \rho_0^c(\cdot, z) = \rho_0^c(\cdot, 0),$$

$$(5.10b) \quad \lim_{t \rightarrow 0} \sigma^n(\cdot, t) = \lim_{z \rightarrow 0} \rho_0^n(\cdot, z) = \rho_0^n(\cdot, 0).$$

La résolution du système 5.6-5.8-5.9 s'effectuera par la méthode des caractéristiques.

5.2.2 Courbes caractéristiques

La méthode des caractéristiques permet de déterminer le chemin parcouru par chaque particule de MO. Ce chemin est appelé *courbe caractéristique* et permet de déterminer la provenance de la MO de qualité q présente à une profondeur z à l'instant t . Suivant la provenance de la MO (conditions initiales ou conditions de bord) nous déterminerons grâce à un changement de variable, plusieurs familles d'équations différentielles ordinaires (EDOs) déterminant l'évolution le long des caractéristiques des distributions en qualité du carbone et des nutriments.

5.2.2.1 Solutions maximales

Soient les problèmes de Cauchy définis pour $(q, z, t) \in \mathbb{R}_+^3$:

$$(5.11) \quad \begin{cases} \frac{dZ}{ds}(q, z, t, s) = v(q, Z(q, z, t, s)), \\ Z(q, z, t, t) = z. \end{cases}$$

Le choix de s comme variable de temps dans cette partie permettra d'éviter toute ambiguïté de notation dans la suite du chapitre.

Le domaine de définition temporel des caractéristiques sera d'abord étendu à $\mathbb{R}$. Il suffira de tronquer les solutions pour se placer dans les conditions du problème 5.6-5.8-5.9. Cette prolongation du domaine temporel facilitera la définition des courbes caractéristiques ainsi que les projections sur le bord du domaine suivant les caractéristiques.

Théorème 5.2.1 (Existence et unicité des courbes caractéristiques)

Supposons que l'application $(q, z) \mapsto v(q, z)$ est continue, bornée, strictement positive sur $\mathbb{R}_+^2$. Supposons de plus que $z \mapsto v(q, z)$ est de classe $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+)$. Alors, chaque problème de Cauchy défini pour $(q, z, t) \in \mathbb{R}_+^3$ fixé admet une unique solution maximale $s \mapsto Z(q, z, t, s)$ de classe $\mathcal{C}^1([T_-(q, z, t), +\infty[)$:

$$(5.12) \quad \begin{aligned} Z : \mathbb{R}_+^3 \times [T_-(q, z, t), +\infty[&\rightarrow \mathbb{R}_+ \\ (q, z, t, s) &\mapsto Z(q, z, t, s). \end{aligned}$$

De plus, on a :

- $q \mapsto Z(q, z, t, s)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$,
- $(z, t) \mapsto Z(q, z, t, s)$ est de classe $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+^2)$,
- $\lim_{s \rightarrow T_-} Z(q, z, t, s) = 0$ ce qui permet de prolonger Z par continuité.

Le caractère autonome de l'équation du problème de Cauchy 5.11 assure également la propriété

suivante :

$$(5.13) \quad \forall z \in \mathbb{R}_+, \forall t \in \mathbb{R}, \forall s \in J(q, z, 0) = [T_-(q, z, 0), +\infty[, \quad Z(q, z, t, t+s) = Z(q, z, 0, s).$$

Les solutions vérifient également pour tout $(x, y, t_0) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2$ tels que $x = Z(q, 0, t_0, y)$:

$$(5.14) \quad \forall s \in J(q, 0, t_0) = J(q, x, y), \quad Z(q, x, y, s) = Z(q, 0, t_0, s).$$

Dans la suite du chapitre, les hypothèses de ce théorème seront supposées vérifiées.

Remarque 5.2.1

Les conditions de régularité imposées à v dans le théorème sont choisies à dessein. Elles permettent de garantir la régularité des caractéristiques nécessaire à la résolution de l'EDP. En fait, l'existence et l'unicité de solutions est assurée dès lors que : i) $(q, z) \mapsto v(q, z)$ est continue et ii) $z \mapsto v(q, z)$ est localement lipschitzienne. Nous soulignons également que la régularité de Z suivant q est identique à celle de l'application $q \mapsto v(q, z)$ (lem.5.2.3).

Démonstration : Considérons dans un premier temps l'équation différentielle ordinaire (EDO) suivante :

$$(5.15) \quad \frac{dZ}{ds}(q, s) = v(q, Z(q, s)).$$

Il s'agit d'une équation autonome en Z dépendant d'un paramètre q . La dépendance des solutions suivant q est donnée par le lemme 5.2.3. Ainsi, nous écrirons dans un premier temps le problème de la manière suivante :

$$(5.16) \quad \frac{dZ}{ds}(s) = v(Z(s)).$$

Dans cette partie, le couple $(z, t) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ est vu comme condition initiale du problème de Cauchy 5.16 et non comme une variable de l'EDP. Alors, le problème de Cauchy

$$\begin{cases} \frac{dZ}{ds} = v(Z), \\ Z(t) = z. \end{cases}$$

admet une unique solution maximale de classe $\mathcal{C}^1$ définie sur un intervalle $J(z, t) \subset \mathbb{R}$ contenant t si l'application v est continue et localement lipschitzienne en z . Comme le problème est autonome, la relation 5.13 est obtenue immédiatement. L'unicité des solutions maximales assure la propriété 5.14.

Remarque 5.2.2 (Prolongation sur le bord du domaine)

Précisons que le problème de Cauchy ci-dessus peut être prolongé à $\mathbb{R}$ tout entier en z si nous choisissons de prolonger l'application $(q, z) \mapsto v(q, z)$ aux valeurs négatives de z en posant pour tout $q \in \mathbb{R}^+$, $v(q, z) = v(q, 0)$ pour tout $z < 0$. Le résultat d'existence et d'unicité est alors identique et assure le prolongement du résultat d'existence et d'unicité sur $\mathbb{R}_+$ à tout couple de conditions initiales $(z, t) \in \mathbb{R}_+^2$.

Afin d'étudier les propriétés de la solution, étudions le problème équivalent suivant :

$$(5.17) \quad Z(s) = Z(z, t, s) = z + \int_t^s v(Z(z, t, x)) dx, \quad \forall s \in J(z, t).$$

Nous avons les résultats généraux suivants :

Lemme 5.2.1 (Monotonie, Signe, Majoration)

L'application $s \mapsto Z(s)$ est strictement croissante, positive. De plus,

$$0 \leq |Z(s)| \leq z + |s - t| \|v\|_{L^\infty}, \quad \forall s \in J(z, t).$$

Démonstration : La stricte positivité de v nous assure la stricte croissance de l'application $s \mapsto Z(s)$. L'hypothèse $z > 0$ assure la positivité de Z . La majoration est obtenue de la manière suivante :

$$\begin{aligned} |Z(s)| &\leq z + \left| \int_t^s v(Z(x)) dx \right|, \\ &\leq z + |s - t| \|v\|_{L^\infty}. \end{aligned}$$

■

Etudions maintenant l'intervalle $J(z, t) = (T_-, T_+)$.

Lemme 5.2.2 (Domaine de définition des caractéristiques)

Nous sommes assurés que $J(z, t) = (T_-, +\infty[$ avec $T_- > -\infty$ et $\lim_{\substack{s \rightarrow T_- \\ s > T_-}} |Z(s)| = 0$. Z se prolonge par continuité en posant $Z(T_-) = 0$.

Démonstration : D'après Demailly (2006), nous avons d'une part les possibilités suivantes :

- soit $T_+ = +\infty$,
- soit $T_+ < +\infty$ et $\lim_{\substack{s \rightarrow T_+ \\ s < T_+}} |Z(s)| = +\infty$.

Le lemme 5.2.1 nous assure que $T_+ = +\infty$ donc $J(z, t) = (T_-, +\infty[$.

D'autre part, nous avons :

- soit $T_- = -\infty$,

- soit $T_- > -\infty$ et $\lim_{\substack{s \rightarrow T_- \\ s > T_-}} |Z(s)| = 0$,
- soit $T_- > -\infty$ et $\lim_{\substack{t \rightarrow T_- \\ s < T_-}} |Z(s)| = +\infty$.

Le lemme 5.2.1 exclut le dernier cas pour T_- . La première possibilité est exclue car chaque caractéristique est obtenue par translation de la caractéristique issue de $(z, t) = (0, 0)$ (voir relation 5.13 avec $z = 0$ et la remarque 5.2.2). ■

Demailly (2006) donne le lemme suivant :

Lemme 5.2.3 (Dépendance des caractéristiques en q et (z, t))

Si l'application $(q, z) \mapsto v(q, z)$ est continue et localement lipschitzienne en z , l'application $(q, s) \mapsto Z(q, z, t, s)$ est continue. De plus, pour tout (z, t) fixés,

- si v est localement lipschitzienne en q , alors $(q, s) \mapsto Z(q, z, t, s)$ est localement lipschitzienne en q .
- si v est de classe C^k et admet une dérivée partielle $\frac{\partial v}{\partial q}$ de classe C^k , alors $(q, s) \mapsto Z(q, z, t, s)$ est de classe C^{k+1} .

La dépendance de la solution en fonction de la conditions initiale (z, t) est identique à celle de s car ces paramètres sont implicites dans l'expression de v . ■

5.2.2.2 Flot et chemin des particules de MO

Définition 5.2.1 (Chemin des particules)

Soit l'ouvert

$$(5.18) \quad \Omega = \{(q, t_0, s) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times]0, +\infty[\}.$$

et soit l'application

$$(5.19) \quad \begin{aligned} \Psi : \quad \Omega &\rightarrow \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times]0, +\infty[\\ (q, t_0, s) &\mapsto (q, t, z), \end{aligned}$$

où

$$\begin{cases} t = t_0 + s, \\ z = Z(q, 0, t_0, t_0 + s). \end{cases}$$

L'application Ψ admet un prolongement par continuité pour $s = 0$ en posant $\Psi(q, t_0, 0) = (q, t_0, 0)$.

Cette application associe le graphe de chaque caractéristique à son origine sur le bord du domaine.

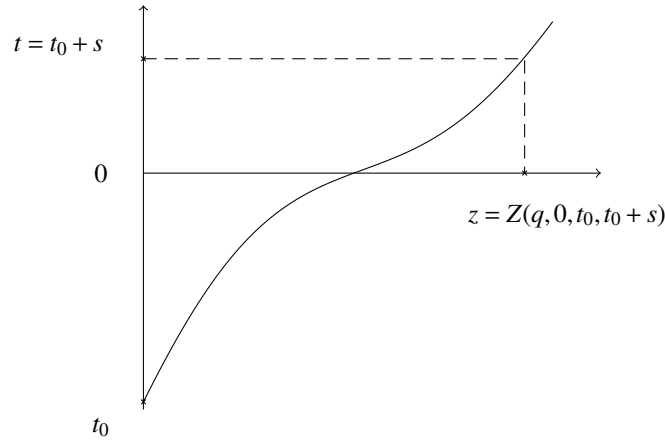


Figure 5.1 – Exemple de chemin de particules.

Elle caractérise les "chemins" parcourus par la MO. Ainsi, une particule de qualité q présente à l'instant t_0 à la surface ($z = 0$) atteindra la profondeur z à l'instant $t = t_0 + s$. Notre objectif est d'étudier si l'application Ψ est inversible afin d'associer à tout point (q, z, t) son origine sur le bord.

Théorème 5.2.2 (Projection sur le bord du domaine selon les caractéristiques)

L'application

$$(5.20) \quad \begin{aligned} \Psi^{-1} : \quad]0, +\infty[\times \mathbb{R} \times]0, +\infty[&\rightarrow \Omega \\ (q, t, z) &\mapsto (q, t_0, s), \end{aligned}$$

est continue.

Pour tout q fixé, l'application $(z, t) \mapsto \Psi^{-1}(q, z, t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$. L'application Ψ^{-1} admet un prolongement par continuité en $z = 0$ en posant $\Psi^{-1}(q, t, 0) = (q, t, 0)$.

Démonstration : Rappelons le théorème d'inversion globale :

Théorème 5.2.3 (Théorème d'inversion globale)

Soit Π une application de $\mathcal{U}$ dans $\mathbb{R}^n$.

- $\mathcal{U}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$,
- Π est injective et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{U}$.

Alors Π est un $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme si et seulement si son jacobien ne s'annule pas sur $\mathcal{U}$.

La régularité de Ψ en q n'est pas suffisante pour appliquer le théorème d'inversion globale. Nous considérons alors :

Théorème 5.2.4

La famille de fonctions $(\Psi_q)_{q \in]0, +\infty[}$ définie de la manière suivante :

$$(5.21) \quad \begin{aligned} \Psi_q : \mathbb{R} \times]0, +\infty[&\rightarrow \mathbb{R} \times]0, +\infty[\\ (t_0, s) &\mapsto (t, z), \end{aligned}$$

est une famille de $\mathcal{C}^1$ -difféomorphismes.

Démonstration : Fixons $q \in \mathbb{R}_+$. L'application Ψ_q est de classe $\mathcal{C}^1$ et injective. Il reste donc à étudier le jacobien de Ψ_q . Introduisons au préalable le lemme suivant :

Lemme 5.2.4 (Dérivation par rapport à la condition initiale)

L'application $(q, t, s) \mapsto \frac{\partial Z(q, 0, t, s)}{\partial t}$ est continue, strictement négative. De plus,

$$(5.22) \quad \frac{\partial Z}{\partial t}(q, 0, t, s) = -v(q, Z(q, 0, t, s)).$$

Démonstration : Rappelons la relation 5.13 :

$$\forall z \in \mathbb{R}_+, \forall t \in \mathbb{R}, \forall s \in J(q, z, 0) = [T_-(q, z, 0), +\infty[, \quad Z(q, z, t, t+s) = Z(q, z, 0, s).$$

Alors,

$$\begin{aligned} \partial_t(Z(q, 0, t, s)) &= \partial_t(Z(q, 0, 0, s-t)), \\ &= -\partial_s Z(q, 0, 0, s-t), \\ &= -v(q, Z(q, 0, 0, s-t)), \\ &= -v(q, Z(q, 0, t, s)). \end{aligned}$$

Ce résultat nous assure la continuité et la stricte négativité de $(q, t, s) \mapsto \frac{\partial Z(q, 0, t, s)}{\partial t}$. ■

Revenons au Jacobien :

$$\begin{aligned}
 J_{\Psi_q}(s,t) &= \begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial s}(t,s) & \frac{\partial z}{\partial t_0}(t,s) \\ \frac{\partial t}{\partial s}(t,s) & \frac{\partial t}{\partial t_0}(t,s) \end{vmatrix}, \\
 &= \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial s}(Z(q,0,t_0,t_0+s)) & \frac{\partial}{\partial t_0}(Z(q,0,t_0,t_0+s)) \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \\
 &= \begin{vmatrix} \nu(Z(q,0,t_0,t_0+s)) & \nu(Z(q,0,t_0,t_0+s)) + \frac{\partial Z}{\partial t_0}(q,0,t_0,t_0+s) \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \\
 &= -\partial_{t_0} Z(q,0,t_0,t_0), \\
 &= \nu(q, Z(q,0,t_0,t_0)), \\
 &= \nu(q, 0).
 \end{aligned}$$

Comme $\nu > 0$, $J_{\Psi_q}(t,s) > 0$ pour tout $(t,s) \in \mathbb{R} \times]0, +\infty[$ ce qui garanti que l'application Ψ_q est un $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme sur $\mathbb{R} \times]0, +\infty[$. ■

Il reste à montrer que Ψ^{-1} admet un prolongement par continuité en $z = 0$. A q fixé, nous montrons que l'application Ψ_q^{-1} admet un prolongement par continuité. Soit $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $]0, +\infty[$ convergente et de limite $z = 0$. Soient les suites $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(t_{0,n})_{n \in \mathbb{N}}$ définies par $\Psi_q^{-1}(z_n, t) = (s_n, t_{0,n})$. De plus, on a $s_n + t_n = t$ et $z_n = Z(q, 0, t_{0,n}, t_{0,n} + s_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. La suite $(t_{0,n})_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée donc il existe une sous suite convergente $(\tilde{t}_{0,n})_{n \in \mathbb{N}}$. Notons sa limite $\tilde{t}_0$. Alors, $\lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = 0 = Z(q, 0, \tilde{t}_0, t)$ ce qui implique que $t = \tilde{t}_0$ par unicité des caractéristiques. Ainsi, $s = 0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n$. ■

5.2.2.3 Domaines de définition pour les équations aux dérivées partielles

Nous considérons maintenant le domaine temporel associé aux EDP c.-à-d. nous nous ramenons aux temps positifs. Ceci nous pousse à distinguer deux cas de figure suivant la valeur de $T_-(q, z, t)$. Soient les domaines suivants :

$$(5.23a) \quad \Omega_t = \{(q, z, t) \in \mathbb{R}_+^3 \text{ tel que } T_-(q, z, t) < 0\},$$

$$(5.23b) \quad \Omega_0 = \{(q, z, t) \in \mathbb{R}_+^3 \text{ tel que } T_-(q, z, t) = 0\},$$

$$(5.23c) \quad \Omega_z = \{(q, z, t) \in \mathbb{R}_+^3 \text{ tel que } T_-(q, z, t) > 0\}.$$

Notre objectif est de définir une application associant à chaque point $(q, z, t) \in \mathbb{R}_+^3$ un point sur le bord du domaine.

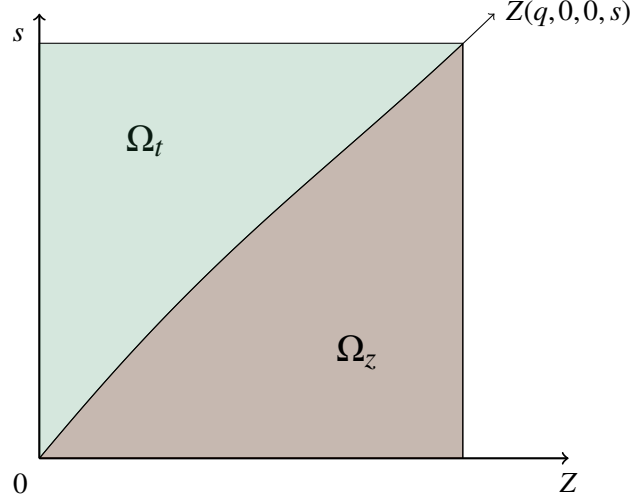


Figure 5.2 – Distinction des domaines de définition des EDPs.

Définition 5.2.2 (Retour sur le bord du domaine)

Soit la famille d'applications $(\pi_q)_{\{q \in \mathbb{R}_+\}}$ définie par :

$$(5.24) \quad \begin{aligned} \pi_q : \quad \mathbb{R}_+^2 &\rightarrow \quad \mathbb{R}_+^2 \\ (z, t) &\mapsto \pi_q(z, t) = ((t_0)_+, z_0) = ((t_0)_+, Z(q, 0, t_0, (t_0)_+)). \end{aligned}$$

où l'application $(\cdot)_+$ correspond à la partie positive et $t_0(q, z, t) = (\Psi_q^{-1})_1(z, t)$. Les applications π_q ainsi définies sont continues.

Nous étudions la différentiabilité des applications π_q . Il faut distinguer trois cas de figure :

- si $(q, z, t) \in \Omega_t$, $\pi_q(z, t) = (t_0(q, z, t), 0)$,
- si $(q, z, t) \in \mathbb{R}_+^3$ tels que $z = Z(q, 0, 0, t)$, $\pi_q(z, t) = (0, 0)$,
- si $(q, z, t) \in \Omega_z$, $\pi_q(z, t) = (0, Z(q, 0, t_0(q, z, t), 0))$.

Proposition 5.2.1 (Régularité du retour à l'origine)

Pour tout $q \in \mathbb{R}_+$, l'application π_q est de classe C^1 sur chacun des domaines Ω_t et Ω_z . Les applications $(z, t) \mapsto \partial_z \pi_q(z, t)$ et $(z, t) \mapsto \partial_t \pi_q(z, t)$ ne sont pas continues sur Ω_0 .

Démonstration : Tout d'abord, calculons $\frac{\partial t_0}{\partial z}$ et $\frac{\partial t_0}{\partial t}$. Rappelons que pour tout $(q, z, t) \in \mathbb{R}_+^3$, la relation $z =$

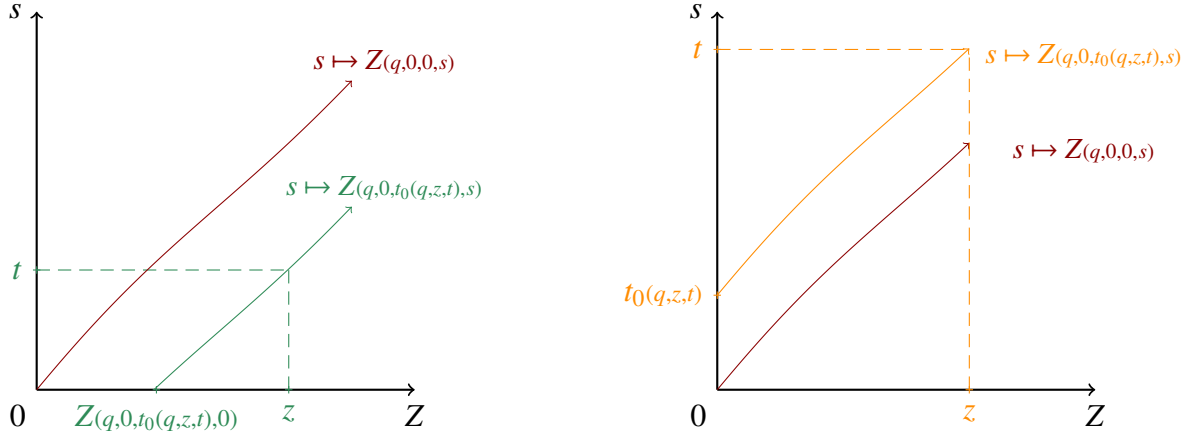


Figure 5.3 – Illustration de la construction des applications π_q par troncature suivant le domaine de définition des EDPs : $(q, z, t) \in \Omega_z$ (à gauche) et $(q, z, t) \in \Omega_t$ (à droite).

$Z(q, 0, t_0(q, z, t), t)$ est vérifiée. Ainsi :

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{\partial t_0}{\partial z}(q, z, t) \frac{\partial Z}{\partial t_0}(q, 0, t_0, t), \\ 0 &= \frac{\partial t_0}{\partial t}(q, z, t) \frac{\partial Z}{\partial t_0}(q, 0, t_0, t) + \underbrace{\frac{\partial Z}{\partial t}(q, 0, t_0, t)}_{=v(q, z)}. \end{aligned}$$

Le lemme 5.2.4 nous assure que :

$$(5.25) \quad \frac{\partial t_0}{\partial z}(q, z, t) = \frac{-1}{v(q, z)} < 0,$$

$$(5.26) \quad \frac{\partial t_0}{\partial t}(q, z, t) = -1 < 0.$$

Si $(q, z, t) \in \Omega_t$, $\pi_q(z, t) = (t_0(q, z, t), 0)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \pi_q}{\partial z}(z, t) &= \left(\frac{\partial t_0}{\partial z}(q, z, t), 0 \right) = \left(\frac{-1}{v(q, z)}, 0 \right), \\ \frac{\partial \pi_q}{\partial t}(z, t) &= \left(\frac{\partial t_0}{\partial t}(q, z, t), 0 \right) = (-1, 0). \end{aligned}$$

Chapitre 5. Etude des solutions du modèle de décomposition de la matière organique

Si $(q, z, t) \in \Omega_z$, $\pi_q(z, t) = (0, Z(q, 0, t_0(q, z, t), t))$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \pi_q}{\partial z}(z, t) &= \left(0, \frac{\partial t_0}{\partial z}(q, z, t) \frac{\partial Z}{\partial t_0}(q, 0, t_0, 0)\right) = (0, 1), \\ \frac{\partial \pi_q}{\partial t}(z, t) &= \left(0, \frac{\partial t_0}{\partial t}(q, z, t) \frac{\partial Z}{\partial t_0}(q, 0, t_0, 0)\right) = (0, \nu(q, z)).\end{aligned}$$

La régularité de ν assure que π_q est au moins de classe $\mathcal{C}^1$ sur chacun des domaines Ω_t et Ω_z .

Soit $(q, x, y) \in \Omega_0$ fixé. Soient $(x_n^1)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(x_n^2)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites de $\mathbb{R}_+$ convergentes vers $x \in \mathbb{R}_+$ et telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(x_n^1, y) \in \Omega_t$ et $(x_n^2, y) \in \Omega_z$. Alors,

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\partial \pi_q}{\partial z} \right)_1(x_n^1, y) &\neq 0, \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\partial \pi_q}{\partial z} \right)_1(x_n^2, y) &= 0.\end{aligned}$$

Ceci prouve que l'application $\frac{\partial \pi}{\partial z}$ n'admet pas de prolongement par continuité sur Ω_0 . Nous pouvons montrer de la même manière que $\frac{\partial \pi}{\partial t}$ n'admet pas de prolongement par continuité sur Ω_0 . ■

5.2.3 Méthode des caractéristiques

5.2.3.1 Changement de variable

Pour tout $(q, z, t) \in \mathbb{R}_+^3$, posons les changements de variables suivants pour tout $s \in J(q, z, t) = \left[\left(\pi_q(z, t) \right)_1, +\infty \right[$:

$$(5.27a) \quad r = s - t,$$

$$(5.27b) \quad \rho_{(z,t)}^c(q, r) = \rho_c(q, Z(q, z, t, s), s),$$

$$(5.27c) \quad \rho_{(z,t)}^n(q, r) = \rho_n(q, Z(q, z, t, s), s),$$

$$(5.27d) \quad K_{(z,t)}(q, r) = K(q, Z(q, z, t, s), s),$$

$$(5.27e) \quad u_{(z,t)}(q, r) = u(q, Z(q, z, t, s), s).$$

Nous obtenons immédiatement que $r \in \left[\left(\pi_q(z, t) \right)_1 - t, +\infty \right[$ et que $\forall (z, t) \in \mathbb{R}_+^2$, nous avons $K_{(z,t)}, u_{(z,t)} \in L^\infty(\mathbb{R}_+^2)$ avec :

$$\begin{aligned} \|K_{(z,t)}\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+^2)} &\leq \|K\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+^2)}, \\ \|u_{(z,t)}\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+^2)} &\leq \|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+^2)}. \end{aligned}$$

Le changement de variable étant défini, nous nous ramenons au bord du domaine $\Omega_t \cup \Omega_0 \cup \Omega_z$ grâce à la relation 5.14.

- Pour tout $(q, z, t) \in \Omega_t$, tel que $Z(q, z, t, s) = Z(q, 0, t_0(q, z, t), s)$ pour tout $s \in [t_0(q, z, t), +\infty[$, nous avons :

$$\begin{aligned} \rho_{(0,t_0)}^c(q, r) &= \rho_c(q, Z(q, 0, t_0, s), s), \\ &= \rho_c(q, Z(q, z, t, s), s), \\ &= \rho_{(z,t)}^c(q, r). \end{aligned}$$

- Pour tout $(q, z, t) \in \Omega_0$, tel que $Z(q, z, t, s) = Z(q, 0, 0, s)$ pour tout $s \in [0, +\infty[$, nous avons :

$$\begin{aligned} \rho_{(0,0)}^c(q, r) &= \rho_c(q, Z(q, 0, 0, s), s), \\ &= \rho_c(q, Z(q, z, t, s), s), \\ &= \rho_{(z,t)}^c(q, r). \end{aligned}$$

- Pour tout $(q, z, t) \in \Omega_z$, tel que $Z(q, z, t, s) = Z(q, 0, t_0(q, z, t), s)$ pour tout $s \in [0, +\infty[$, nous avons :

$$\begin{aligned}\rho_{(0, Z(q, 0, t_0, 0)=z_0)}^c(q, r) &= \rho_c(q, Z(q, 0, t_0, s), s), \\ &= \rho_c(q, Z(q, z, t, s), s), \\ &= \rho_{(z, t)}^c(q, r).\end{aligned}$$

Nous pouvons appliquer le changement de variable à l'équation 5.6a :

$$\begin{aligned}\partial_r(\rho_{(z, t)}^c(q, r)) &= \partial_r(\rho_c(q, Z(q, z, t, s), s)), \\ &= \partial_r(\rho_c(q, Z(q, z, t, t+r), t+r)), \\ &= \partial_r(Z(q, z, t, t+r))\partial_2\rho_c(q, Z(q, z, t, t+r), t+r) + \partial_3\rho_c(q, Z(q, z, t, t+r), t+r), \\ &= \nu(q, Z(q, z, t, t+r))\partial_2\rho_c(q, Z(q, z, t, t+r), t+r) + \partial_3\rho_c(q, Z(q, z, t, t+r), t+r), \\ &= F_c(\rho_{(z, t)}^c(q, r), q, Z(q, z, t, t+r)) \\ &= K_{(z, t)}(q, r)\rho_{(z, t)}^c(q, r) + f_c \int_{\mathbb{R}_+} D(q, q')u_{(z, t)}(q', r)\rho_{(z, t)}^c(q', r)dq' .\end{aligned}$$

De même, l'équation 5.6b nous donne :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho_{(z, t)}^n}{\partial s}(q, r) &= F_n(\rho_{(z, t)}^n(q, r), q, Z(q, z, t, t+r)), \\ &= K_{(z, t)}(q, r)\rho_{(z, t)}^n(q, r) + f_c \int_{\mathbb{R}_+} D(q, q')u_{(z, t)}(q', r)\rho_{(z, t)}^c(q', r)dq' .\end{aligned}$$

5.2.3.2 Problèmes de Cauchy

5.2.3.2.1 Equation du carbone Le changement de variable impose la considération de trois problèmes de Cauchy distincts. L'objectif sera de montrer l'existence et l'unicité de solutions à ces problèmes dans l'espace de Banach $E = L^{1,N} \cap \mathcal{C}_0(\mathbb{R}_+)$ à l'aide du théorème 5.1.1. Ainsi, nous considérerons les conditions initiales $\rho_0^c(\cdot, z)$, $\rho_0^c(\cdot, 0)$ et $\sigma^c(\cdot, t)$ comme des éléments de E . Les problèmes de Cauchy ainsi définis sont les suivants :

$$(5.28) \quad \text{Pour } z_0 \in \mathbb{R}_+, \quad \begin{cases} \frac{\partial \rho_{(z_0,0)}^c}{\partial t}(\cdot, t) = H_1(z_0, \rho_{(z_0,0)}^c, t), & \forall t \geq 0, \\ \rho_{(z_0,0)}^c(\cdot, 0) = \rho_0^c(\cdot, z_0) \end{cases}$$

$$(5.29) \quad \text{Pour } t_0 \in \mathbb{R}_+, \quad \begin{cases} \frac{\partial \rho_{(0,t_0)}^c}{\partial t}(\cdot, t) = H_2(t_0, \rho_{(0,t_0)}^c, t), & \forall t \geq 0, \\ \rho_{(0,t_0)}^c(\cdot, 0) = \sigma^c(\cdot, t_0) \end{cases}$$

$$(5.30) \quad \text{et,} \quad \begin{cases} \frac{\partial \rho_{(0,0)}^c}{\partial t}(\cdot, t) = H_0(\rho_{(0,0)}^c, t), & \forall t \geq 0, \\ \rho_{(0,0)}^c(\cdot, 0) = \rho_0^c(\cdot, 0) \end{cases}$$

où nous avons introduit les champs de vecteurs

$$(5.31) \quad \begin{aligned} H_0 : E \times \mathbb{R}_+ &\rightarrow E \\ (\rho, t) &\mapsto H_0(\rho, t). \end{aligned}$$

$$(5.32) \quad \begin{aligned} H_1 : \mathbb{R}_+^* \times E \times \mathbb{R}_+ &\rightarrow E \\ (z_0, \rho, t) &\mapsto H_1(z_0, \rho, t). \end{aligned}$$

$$(5.33) \quad \begin{aligned} H_2 : \mathbb{R}_+^* \times E \times \mathbb{R}_+ &\rightarrow E \\ (t_0, \rho, t) &\mapsto H_2(t_0, \rho, t). \end{aligned}$$

et où nous avons posé

$$\begin{aligned} H_0(\rho, t) : q &\mapsto K_{(0,0)}(q, t)\rho(q) + f_c \int_{\mathbb{R}_+} D(q, q')u_{(0,0)}(q', t)\rho(q')dq', \\ H_1(z_0, \rho, t) : q &\mapsto K_{(z_0,0)}(q, t)\rho(q) + f_c \int_{\mathbb{R}_+} D(q, q')u_{(z_0,0)}(q', t)\rho(q')dq', \\ H_2(t_0, \rho, t) : q &\mapsto K_{(0,t_0)}(q, t)\rho(q) + f_c \int_{\mathbb{R}_+} D(q, q')u_{(0,t_0)}(q', t)\rho(q')dq', \end{aligned}$$

5.2.3.2.2 Equation des nutriments Comme précédemment, le changement de variable impose la considération de trois problèmes de Cauchy distincts dont nous montrerons l'existence et l'unicité de solutions dans E . Ainsi, nous considérons les conditions initiales $\rho_0^n(\cdot, z)$, $\rho_0^n(\cdot, 0)$ et $\sigma^n(\cdot, t)$ comme

Chapitre 5. Etude des solutions du modèle de décomposition de la matière organique

des éléments de E . Les problèmes de Cauchy ainsi définis sont les suivants :

$$(5.34) \quad \text{Pour } z_0 \in \mathbb{R}_+, \quad \begin{cases} \frac{\partial \rho_{(z_0,0)}^n}{\partial t}(\cdot, t) = H_1^n(z_0, \rho_{(z_0,0)}^n, t), & \forall t > 0, \\ \rho_{(z_0,0)}^n(\cdot, 0) = \rho_0^n(\cdot, z_0) \end{cases}$$

$$(5.35) \quad \text{Pour } t_0 \in \mathbb{R}_+, \quad \begin{cases} \frac{\partial \rho_{(0,t_0)}^n}{\partial t}(\cdot, t) = H_2^n(t_0, \rho_{(0,t_0)}^n, t), & \forall t > 0, \\ \rho_{(0,t_0)}^n(\cdot, 0) = \sigma^n(\cdot, t_0) \end{cases}$$

$$(5.36) \quad \text{et,} \quad \begin{cases} \frac{\partial \rho_{(0,0)}^n}{\partial t}(\cdot, t) = H_0^n(\rho_{(0,0)}^n, t), & \forall t \geq 0, \\ \rho_{(0,0)}^n(\cdot, 0) = \rho_0^n(\cdot, 0) \end{cases}$$

où nous avons introduit les champs de vecteurs

$$(5.37) \quad \begin{aligned} H_0^n : E \times \mathbb{R}_+ &\rightarrow E \\ (\rho, t) &\mapsto H_0^n(\rho, t). \end{aligned}$$

$$(5.38) \quad \begin{aligned} H_1^n : \mathbb{R}_+^* \times E \times \mathbb{R}_+ &\rightarrow E \\ (z_0, \rho, t) &\mapsto H_1^n(z_0, \rho, t). \end{aligned}$$

$$(5.39) \quad \begin{aligned} H_2^n : \mathbb{R}_+^* \times E \times \mathbb{R}_+ &\rightarrow E \\ (t_0, \rho, t) &\mapsto H_2^n(t_0, \rho, t). \end{aligned}$$

et où nous avons posé

$$\begin{aligned} H_0^n(\rho, t) : q &\mapsto K_{(0,0)}(q, t)\rho(q) + f_n \int_{\mathbb{R}_+} D(q, q') u_{(0,0)}(q', t) \rho_{(0,0)}^c(q', t) dq', \\ H_1^n(z_0, \rho, t) : q &\mapsto K_{(z_0,0)}(q, t)\rho(q) + f_n \int_{\mathbb{R}_+} D(q, q') u_{(z_0,0)}(q', t) \rho_{(z_0,0)}^c(q', t) dq', \\ H_2^n(t_0, \rho, t) : q &\mapsto K_{(0,t_0)}(q, t)\rho(q) + f_n \int_{\mathbb{R}_+} D(q, q') u_{(0,t_0)}(q', t) \rho_{(0,t_0)}^c(q', t) dq', \end{aligned}$$

5.2.4 Equations différentielles pour la concentration en carbone

5.2.4.1 Etude des problèmes de Cauchy 5.28 et 5.29

Nous étudions dans un premier temps l'existence et l'unicité de solutions aux problèmes de Cauchy 5.28 et 5.29 puis nous étudierons la régularité des solutions du problème en fonction des paramètres z_0 et t_0 . Afin de simplifier l'expression des résultats, nous notons $V = (\{0\} \times \mathbb{R}_+^*) \cup (\mathbb{R}_+^* \times \{0\}) \subset \mathbb{R}^2$ le bord du domaine de définition de l'EDP dont nous avons exclu le point $(0,0)$.

Théorème 5.2.5 (Existence et unicité - Positivité des solutions)

Soit $N \in \mathbb{N}$ fixé. Supposons que :

1. $(q, z) \mapsto K(q, z)$ est continue,
2. D vérifie les hypothèses suivantes :

$$(5.40a) \quad \forall j \in \{0, N\}, \exists M > 0 \text{ tel que } \forall q' \in \mathbb{R}_+, \int_{\mathbb{R}_+} q^j D(q, q') dq \leq M q'^j,$$

$$(5.40b) \quad M' = \sup_{q \in \mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}_+} D(q, q') dq' < +\infty,$$

$$(5.40c) \quad \forall q_0 \in \mathbb{R}_+, \lim_{q \rightarrow +\infty} \int_0^{q_0} D(q, q') dq' = 0,$$

$$(5.40d) \quad q \mapsto \int_{\mathbb{R}_+} D(q, q') dq' \text{ est continue.}$$

Alors, il existe une unique solution globale $t \mapsto \rho_{(z_0, 0)}^c(\cdot, t)$ (resp. $t \mapsto \rho_{(0, t_0)}^c(\cdot, t)$) appartenant à $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, E)$ au problème de Cauchy 5.28 (resp. 5.29).

De plus, chacune des solutions aux problèmes de Cauchy est positive si $D \geq 0$.

Démonstration : Introduisons un formalisme général. La démonstration du théorème d'existence et d'unicité nous amène à étudier deux problèmes de Cauchy sur E semblables :

$$(5.41) \quad \text{pour } z_0 \in \mathbb{R}_+^*, \quad \begin{cases} \frac{d}{dt}(\rho_{z_0}(t, x_1)) = H_1(z_0, \rho_{z_0}, t), \\ \rho_{z_0}(0, x_1) = x_1, \end{cases}$$

$$(5.42) \quad \text{pour } t_0 \in \mathbb{R}_+^*, \quad \begin{cases} \frac{d}{dt}(\rho_{t_0}(t, x_2)) = H_2(t_0, \rho_{t_0}, t), \\ \rho_{t_0}(0, x_2) = x_2, \end{cases}$$

où $x_1, x_2 \in E$.

Introduisons tout d'abord un résultat préliminaire.

Lemme 5.2.5

Les champs de vecteurs H_1 et H_2 sont bien définis.

Démonstration : Nous montrons le résultat pour le champ de vecteurs H_1 . La démonstration est similaire pour H_2 . Assurons nous que pour tout $z_0 \in \mathbb{R}_+^*$, $\rho \in E$ et $t \in \mathbb{R}_+$ fixés, l'application

$$H_1(z_0, \rho, t) : q \mapsto K_{(z_0, 0)}(q, t)\rho(q) + f_c \int_{\mathbb{R}_+} D(q, q')u_{(z_0, 0)}(q', t)\rho(q')dq'$$

est une application de E .

1. Montrons premièrement que l'application $H_1(z_0, \rho, t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.

La continuité de l'application $q \mapsto K_{(z_0, 0)}(q, t)$ pour tout $z_0, t \in \mathbb{R}_+$ est assurée par la continuité des applications $(q, z) \mapsto K(q, z)$ et $q \mapsto Z(q, z_0, 0, t)$. Ceci nous assure la continuité de l'application $q \mapsto K_{(z_0, 0)}(q, t)\rho(q)$.

Il reste à montrer la continuité de l'application $q \mapsto \int_{\mathbb{R}_+} D(q, q')u_{(z_0, 0)}(q', t)\rho(q')dq'$. Soient $\varepsilon > 0$ et $q_0 \in \mathbb{R}_+$ fixés. Alors, comme $q_0 \mapsto \int_{\mathbb{R}_+} D(q_0, q')dq'$ est continue, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $q \in]q_0 - \eta, q_0 + \eta[\cap \mathbb{R}_+$, nous avons $\int_{\mathbb{R}_+} |D(q_0, q') - D(q, q')|dq' \leq \varepsilon$. Ainsi,

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\mathbb{R}_+} D(q_0, q')u_{(z_0, 0)}(q', t)\rho(q')dq' - \int_{\mathbb{R}_+} D(q, q')u_{(z_0, 0)}(q', t)\rho(q')dq' \right|, \\ & \leq \|u\|_{L^\infty} \|\rho\|_{L^\infty} \int_{\mathbb{R}_+} |D(q_0, q') - D(q, q')|dq', \\ & \leq \|u\|_{L^\infty} \|\rho\|_{L^\infty} \varepsilon, \end{aligned}$$

ce qui assure la continuité de $q \mapsto \int_{\mathbb{R}_+} D(q, q')u_{(z_0, 0)}(q', t)\rho(q')dq'$.

2. Montrons maintenant que $\lim_{q \rightarrow +\infty} H_1(z_0, \rho, t)(q) = 0$.

Comme $K_{(z_0, 0)} \in L^\infty$ et $\rho \in E$, nous obtenons que $\lim_{q \rightarrow +\infty} K_{(z_0, 0)}(q, t)\rho(q) = 0$.

Montrons maintenant que $\lim_{q \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}_+} D(q, q')u_{(z_0, 0)}(q', t)\rho(q')dq' = 0$. Comme $\rho \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}_+)$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un réel $q_0 > 0$ tel que, pour tout $q' \geq q_0$, nous sommes assurés que $|\rho(q')| \leq \varepsilon$. Ainsi,

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\mathbb{R}_+} D(q, q')u_{(z_0, 0)}(q', t)\rho(q')dq' \right|, \\ & \leq \int_0^{q_0} |D(q, q')u_{(z_0, 0)}(q', t)\rho(q')|dq' + \int_{q_0}^{+\infty} |D(q, q')u_{(z_0, 0)}(q', t)\rho(q')|dq', \\ & \leq \|u_{(z_0, 0)}\|_{L^\infty} \left(\sup_{q \in [0, q_0]} |\rho(q)| + M' \right) \varepsilon, \end{aligned}$$

ce qui assure $\lim_{q \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}_+} D(q, q')u_{(z_0, 0)}(q', t)\rho(q')dq' = 0$.

3. La preuve que $H_1(z_0, \rho, t) \in L^{1,N}(\mathbb{R}_+)$ est donnée dans la démonstration du lemme 5.2.6. ■

Plaçons nous dans le cadre du théorème 5.1.1 pour chacune de ces deux applications. z_0 et t_0 étant des paramètres, nous travaillerons pour le moment à $z_0, t_0 \in \mathbb{R}_+^*$ fixés. Il est nécessaire de montrer que $H_1(z_0, \cdot, \cdot)$ et $H_2(t_0, \cdot, \cdot)$ sont continues sur $E \times \mathbb{R}_+$ et globalement lipschitziennes sur E . Nous étudierons uniquement $H_1(z_0, \cdot, \cdot)$, la démonstration étant semblable pour $H_2(t_0, \cdot, \cdot)$.

Nous montrerons premièrement que pour tout $\rho \in E$ fixé, $t \mapsto H_1(z_0, \rho, t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$, puis nous montrerons dans un second temps un lemme assurant la continuité de $H_1(z_0, \cdot, \cdot)$ sur $\mathbb{R}_+ \times E$ ainsi que la propriété globale de Lipschitz.

1. Soit $\rho \in E$ fixé. Montrons que $H_1(z_0, \rho, \cdot)$ est continue par rapport à t . Soient $\varepsilon > 0$ et $t \in \mathbb{R}_+$ fixés. Considérons alors, pour $\tilde{t} \in \mathbb{R}_+^*$, $\|H_1(z_0, \rho, t) - H_1(z_0, \rho, \tilde{t})\|_E$. Comme $\rho \in E$, nous sommes assurés de l'existence de $q_0, q_1 > 0$ tels que :

$$\begin{cases} \forall q \geq q_0, & |\rho(q)| \leq \varepsilon, \\ \forall j \in \{0, N\}, & \int_{q_1}^{+\infty} q^j |\rho(q)| dq \leq \varepsilon. \end{cases}$$

- (a) Considérons dans un premier temps $\|H_1(z_0, \rho, t) - H_1(z_0, \rho, \tilde{t})\|_{L^\infty}$.

$$\begin{aligned} & |H_1(z_0, \rho, t)(q) - H_1(z_0, \rho, \tilde{t})(q)| \\ & \leq |K_{(z_0,0)}(q, t) - K_{(z_0,0)}(q, \tilde{t})| |\rho(q)| + f_c \int_{\mathbb{R}_+} D(q, q') |u_{(z_0,0)}(q', t) - u_{(z_0,0)}(q', \tilde{t})| |\rho(q')| dq'. \end{aligned}$$

D'une part, comme $K_{(z_0,0)}$ est continue, nous avons pour tout $\tilde{t}$ suffisamment proche de t ,

$$|K_{(z_0,0)}(q, t) - K_{(z_0,0)}(q, \tilde{t})| |\rho(q)| \leq \begin{cases} 2\|K\|_{L^\infty} \varepsilon, & q \geq q_0, \\ \|\rho\|_{L^\infty} \varepsilon, & q < q_0. \end{cases}$$

et d'autre part, comme $u_{(z_0,0)}$ est continue, nous avons pour tout $\tilde{t}$ suffisamment proche de t ,

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}_+} D(q, q') |u_{(z_0,0)}(q', t) - u_{(z_0,0)}(q', \tilde{t})| |\rho(q')| dq', \\ & \leq \int_0^{q_0} D(q, q') |u_{(z_0,0)}(q', t) - u_{(z_0,0)}(q', \tilde{t})| |\rho(q')| dq' + 2\|u\|_{L^\infty} M' \varepsilon, \\ & \leq \varepsilon \|\rho\|_{L^\infty} M' + 2\|u\|_{L^\infty} M' \varepsilon. \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $\tilde{t}$ suffisamment proche de t ,

$$\|H_1(z_0, \rho, t) - H_1(z_0, \rho, \tilde{t})\|_{L^\infty} \leq \varepsilon (\max(2\|K\|_{L^\infty}, \|\rho\|_{L^\infty}) + f_c M' (\|\rho\|_{L^\infty} + 2\|u\|_{L^\infty})).$$

(b) Considérons maintenant $\|H_1(z_0, \rho, t) - H_1(z_0, \rho, \tilde{t})\|_{L^{1,N}}$.

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}_+} q^j |H_1(z_0, \rho, t)(q) - H_1(z_0, \rho, \tilde{t})(q)| dq, \\ & \leq \int_{\mathbb{R}_+} q^j |K_{(z_0,0)}(q,t) - K_{(z_0,0)}(q,\tilde{t})| |\rho(q)| dq + f_c \int_{\mathbb{R}_+^2} D(q,q') |u_{(z_0,0)}(q',t) - u_{(z_0,0)}(q',\tilde{t})| |\rho(q')| dq dq', \\ & \leq \int_{\mathbb{R}_+} q^j |\rho(q)| (|K_{(z_0,0)}(q,t) - K_{(z_0,0)}(q,\tilde{t})| + f_c M |u_{(z_0,0)}(q,t) - u_{(z_0,0)}(q,\tilde{t})|) dq. \end{aligned}$$

D'une part, pour tout $\tilde{t}$ suffisamment proche de t , nous avons

$$\int_0^{q_1} q^j |\rho(q)| (|K_{(z_0,0)}(q,t) - K_{(z_0,0)}(q,\tilde{t})| + f_c M |u_{(z_0,0)}(q,t) - u_{(z_0,0)}(q,\tilde{t})|) dq \leq \varepsilon \|q^j \rho(q)\|_{L^1}.$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} & \int_{q_1}^{+\infty} q^j |\rho(q)| (|K_{(z_0,0)}(q,t) - K_{(z_0,0)}(q,\tilde{t})| + f_c M |u_{(z_0,0)}(q,t) - u_{(z_0,0)}(q,\tilde{t})|) dq, \\ & \leq 2(\|K\|_{L^\infty} + f_c M \|u\|_{L^\infty}) \varepsilon. \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $\tilde{t}$ suffisamment proche de t ,

$$\|H_1(z_0, \rho, t) - H_1(z_0, \rho, \tilde{t})\|_{L^{1,N}} \leq \varepsilon (\|\rho\|_{L^{1,N}} + 2(N+1)(\|K\|_{L^\infty} + f_c M \|u\|_{L^\infty})).$$

En conclusion, nous avons montré que pour tout $\tilde{t}$ suffisamment proche de t ,

$$\|H_1(z_0, \rho, t) - H_1(z_0, \rho, \tilde{t})\|_E \leq C\varepsilon$$

avec C une constante indépendante de t et $\tilde{t}$, ce qui assure la continuité de l'application H_1 par rapport à t .

- Comme H_1 est linéaire par rapport à ρ , étudier le caractère Lipschitzien de H_1 suivant ρ revient à étudier si elle est linéaire bornée suivant ρ i.e. continue en 0 sur E . Démontrer l'existence et l'unicité revient donc à prouver que H_1 est lipschitzienne par rapport à ρ . Nous énonçons maintenant un lemme permettant de montrer la continuité ainsi que la condition de Lipschitz par rapport à ρ . Nous utiliserons un abus de notation afin de proposer un résultat applicable aux champs de vecteurs H_1 et H_2 .

Notation 5.2.1

Pour tout $(z_0, t_0) \in V$, nous notons :

- si $(z_0, t_0) = (z_0, 0)$, $H_{(z_0, t_0)} = H_1(z_0, \dots)$,
- si $(z_0, t_0) = (0, t_0)$, $H_{(z_0, t_0)} = H_2(t_0, \dots)$,

Lemme 5.2.6 ($H_{(z_0, t_0)}$ *linéaire bornée par rapport à ρ*)

Soit $N \in \mathbb{N}^*$ fixé. Supposons que les hypothèses 5.40 sont vérifiées.

Alors, pour tout $(z_0, t_0) \in V$, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$,

$$H_{(z_0, t_0)}(\cdot, t) : E \rightarrow E,$$

$$\rho \mapsto K_{(z_0, t_0)}(\cdot, t)\rho + f_c \int_{\mathbb{R}_+} D(\cdot, q') u_{(z_0, t_0)}(q', t) \rho(q') dq',$$

est linéaire, continue de constante de continuité C_L indépendante de (z_0, t_0) et t . De plus,

$$C_L \leq \|K\|_{L^\infty} + \max(M, M') f_c \|u\|_{L^\infty}.$$

Démonstration : Soient $\rho \in E$, $(z_0, t_0) \in V$ et $t \in \mathbb{R}_+$ fixés.

(a) Commençons par considérer la norme $\|\cdot\|_{L^\infty}$:

$$\begin{aligned} |H_{(z_0, t_0)}(\rho, t)(q)| &\leq |K_{(z_0, t_0)}(q, t)\rho(q)| + f_c \int_{\mathbb{R}_+} |D(q, q') u_{(z_0, t_0)}(q', t) \rho(q')| dq', \\ &\leq \|K_{(z_0, t_0)}\|_{L^\infty} \|\rho\|_{L^\infty} + f_c \|u_{(z_0, t_0)}\|_{L^\infty} \|\rho\|_{L^\infty} \int_{\mathbb{R}_+} |D(q, q')| dq'. \end{aligned}$$

Nous obtenons :

$$\|H_{(z_0, t_0)}(\rho, t)\|_{L^\infty} \leq (\|K\|_{L^\infty} + M' f_c \|u\|_{L^\infty}) \|\rho\|_{L^\infty}.$$

(b) Considérons maintenant la norme $\|\cdot\|_{L^{1,N}}$.

$$\|H_{(z_0, t_0)}(\rho, t)\|_{L^{1,N}} = \sum_{j=0}^N \|q^j H_{(z_0, t_0)}(\rho, t)\|_{L^1}.$$

Soit $j \in \{0, N\}$ fixé.

$$\begin{aligned}
 \|q^j H_{(z_0, t_0)}(\rho, t)\|_{L^1} &= \int_{\mathbb{R}_+} \left| q^j K_{(z_0, t_0)}(q, t) \rho(q) + f_c \int_{\mathbb{R}_+} q^j D(q, q') u_{(z_0, t_0)}(q', t) \rho(q') dq' \right| dq, \\
 &\leq \|K_{(z_0, t_0)}\|_{L^\infty} \|q^j \rho\|_{L^1} + f_c \|u_{(z_0, t_0)}\|_{L^\infty} \iint_{\mathbb{R}_+^2} q^j |D(q, q') \rho(q')| dq' dq, \\
 &\leq \|K_{(z_0, t_0)}\|_{L^\infty} \|q^j \rho\|_{L^1} + f_c \|u_{(z_0, t_0)}\|_{L^\infty} \int_{\mathbb{R}_+} |\rho(q')| \int_{\mathbb{R}_+} q^j |D(q, q')| dq dq', \\
 &\leq \|K_{(z_0, t_0)}\|_{L^\infty} \|q^j \rho\|_{L^1} + M f_c \|u_{(z_0, t_0)}\|_{L^\infty} \|q^j \rho\|_{L^1}.
 \end{aligned}$$

Nous obtenons :

$$\begin{aligned}
 \|H_{(z_0, t_0)}(\rho, t)\|_{L^{1, N}} &\leq (\|K_{(z_0, t_0)}\|_{L^\infty} + M f_c \|u_{(z_0, t_0)}\|_{L^\infty}) \sum_{j=0}^N \|q^j \rho\|_{L^1}, \\
 &\leq (\|K\|_{L^\infty} + M f_c \|u\|_{L^\infty}) \|\rho\|_{L^{1, N}}.
 \end{aligned}$$

■

La continuité de $H_1(z_0, \cdot, \cdot)$ par rapport à t et l'indépendance de la constante C_L par rapport à t dans le lemme nous assure la continuité de $H_1(z_0, \cdot, \cdot)$ sur $E \times \mathbb{R}_+$. Le lemme achève donc de prouver l'existence et l'unicité de solutions globales.

Il reste à montrer la positivité des solutions. Comme pour le lemme précédent, nous donnons le résultat pour tout $(z_0, t_0) \in V$. Posons $w_{(z_0, t_0)}(q, t) = \rho_{(z_0, t_0)}^c(q, t) \exp\left(-\int_{t_0}^t K_{(z_0, t_0)}(q, s) ds\right)$. Comme $q \mapsto K_{(z_0, t_0)}(q, t)$ et $q \mapsto \rho_{(z_0, t_0)}^c(q, t)$ sont continues, $q \mapsto w_{(z_0, t_0)}(q, t)$ est continue.

Par ailleurs,

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial w_{(z_0, t_0)}}{\partial t}(q, t) &= \left[\frac{\partial \rho_{(z_0, t_0)}^c}{\partial t}(q, t) - \rho_{(z_0, t_0)}^c(q, t) K_{(z_0, t_0)}(q, t) \right] \exp\left(-\int_{t_0}^t K_{(z_0, t_0)}(q, s) ds\right), \\
 &= \exp\left(-\int_{t_0}^t K_{(z_0, t_0)}(q, s) ds\right) f_c \int_{\mathbb{R}_+} D(q, q') u_{(z_0, t_0)}(q', t) \rho_{(z_0, t_0)}^c(q', t) dq', \\
 &= f_c \int_{\mathbb{R}_+} D(q, q') u_{(z_0, t_0)}(q', t) \exp\left(-\int_{t_0}^t (K_{(z_0, t_0)}(q', s) - K_{(z_0, t_0)}(q, s)) ds\right) w_{(z_0, t_0)}(q', t) dq'.
 \end{aligned}$$

Posons $W_{(z_0, t_0)}(q, q', t) = f_c D(q, q') u_{(z_0, t_0)}(q', t) \exp\left(-\int_{t_0}^t (K_{(z_0, t_0)}(q', s) - K_{(z_0, t_0)}(q, s)) ds\right)$ et nous obtenons :

$$\frac{\partial w_{(z_0, t_0)}}{\partial t}(q, t) = \int_{\mathbb{R}_+} W_{(z_0, t_0)}(q, q', t) w_{(z_0, t_0)}(q', t) dq'.$$

Remarquons que $W(\cdot, \cdot, \cdot) \geq 0$.

Prouvons le résultat par l'absurde. Supposons qu'il existe $T \geq t_0$ et $q_0 \geq 0$ tels que $w_{(z_0, t_0)}$ s'annule

et sa dérivée temporelle est strictement négative :

- pour tout $t \in [t_0, T]$, pour tout $q \geq 0$, $w_{(z_0, t_0)}(q, t) \geq 0$,
- $w_{(z_0, t_0)}(q_0, T) = 0$,
- $\frac{\partial w_{(z_0, t_0)}}{\partial t}(q_0, T) < 0$.

Or, $0 > \frac{\partial w_{(z_0, t_0)}}{\partial t}(q_0, T) = \int_{\mathbb{R}_+} \underbrace{W_{(z_0, t_0)}(q, q', T)}_{\geq 0} \underbrace{w_{(z_0, t_0)}(q', T)}_{\geq 0} dq'$ ce qui est contradictoire. Il y a donc

deux possibilités :

- soit $w_{(z_0, t_0)}(q_0, T) \neq 0$,
- soit $\frac{\partial w_{(z_0, t_0)}}{\partial t}(q_0, T) \geq 0$.

Dans tous les cas, $w_{(z_0, t_0)}$ est positive ou nulle. Comme $w_{(z_0, t_0)}$ et $\rho_{(z_0, t_0)}^c$ ont le même signe, nous sommes assurés de la positivité des solutions. ■

Il reste à étudier la régularité des solutions en fonction des paramètres z_0 et t_0 . Etudier la régularité par rapport à z_0 et t_0 revient à déterminer comment se comportent les solutions ρ^c en passant de caractéristiques en caractéristiques.

Théorème 5.2.6 (Continuité en fonction de z_0 et t_0)

Supposons que pour tout $q \in \mathbb{R}_+$ les applications $z \mapsto K(q, z)$ et $z \mapsto u(q, z)$ sont continues. Supposons de plus que les applications

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* \rightarrow E & & \mathbb{R}_+^* \rightarrow E \\ z_0 \mapsto \rho_0^c(., z_0). & \text{et} & t_0 \mapsto \sigma^c(., t_0). \end{array}$$

sont continues. Alors l'application $(z_0, t) \mapsto \rho_{(z_0, 0)}^c(., t)$ (resp. $(t_0, t) \mapsto \rho_{(0, t_0)}^c(., t)$) est continue.

Démonstration : Nous montrons ce résultat uniquement pour z_0 , la démonstration étant similaire pour t_0 .

Le théorème est la résultante de la combinaison des deux résultats de la proposition 5.1.2. Considérons le formalisme introduit dans la démonstration du théorème d'existence. La variable z_0 intervient de deux manières : en tant que paramètre du champ de vecteurs H_1 et en tant que paramètre de la condition initiale x_1 .

Dans cette démonstration, nous montrerons que la solution $(t \mapsto \rho_{z_0}(t, x_1))$ est continue dans E dans un voisinage de x_1 . Nous montrerons également sa dépendance continue en fonction z_0 . L'introduction de l'hypothèse de continuité de l'application $z_0 \mapsto x_1(z_0)$ achèvera la démonstration.

La proposition 5.1.2 assure immédiatement la régularité de la solution dans un voisinage de x_1 . Il reste à montrer la continuité du champ de vecteurs H_1 . Il faudra également montrer que H_1 est globalement Lipschitzien en ρ , de constante de Lipschitz indépendante de z_0 et t .

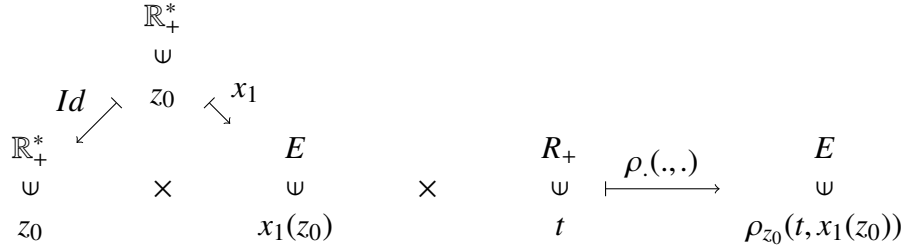


Figure 5.4 – Rôle du paramètre z_0 comme paramètre du champ de vecteur et de la condition initiale.

Le lemme 5.2.6 nous assure que la constante de Lipschitz est indépendante de z_0 et t . Il reste alors à montrer la continuité de H_1 . Comme la constante de Lipschitz C_L est indépendante de z_0 et t , il suffira de montrer la continuité par rapport à (z_0, t) .

Soient $\varepsilon > 0$, $z_0, t \in \mathbb{R}_+$ et $\rho \in E$ fixés. Il faut déterminer l'existence d'une constante $\eta > 0$ telle que pour tout $z_1 \in \mathbb{R}_+$, tel que $|z_0 - z_1| + |t_0 - t_1| < \eta$, nous avons $\|H_1(z_0, \rho, t_0) - H_1(z_1, \rho, t_0)\|_E \leq \varepsilon$.

1. Considérons premièrement $\|H_1(z_0, \rho, t_0) - H_1(z_1, \rho, t_1)\|_{L^{1,N}}$. Pour tout $j \in \{0, N\}$:

$$\begin{aligned} & \|q^j (H_1(z_0, \rho, t_0)(q) - H_1(z_1, \rho, t_1)(q))\|_{L^1} \\ & \leq \int_{\mathbb{R}_+} q^j |\rho(q)| \left(|K_{(z_0,0)}(q, t_0) - K_{(z_1,0)}(q, t_1)| + f_c M |u_{(z_0,0)}(q, t_0) - u_{(z_1,0)}(q, t_1)| \right) dq. \end{aligned}$$

Rappelons que les applications $z \mapsto K(q, z)$, $z \mapsto u(q, z)$ et $(q, z_0, t) \mapsto Z(q, z_0, 0, t)$ sont continues ce qui assure la continuité des applications $(z_0, t) \mapsto K_{(z_0,0)}(q, t)$ et $(z_0, t) \mapsto u_{(z_0,0)}(q, t)$.

Alors, par une démonstration semblable à celle de la continuité de $H_1(z_0, ., .)$ en t (voir démonstration du théorème précédent), nous sommes assurés que pour tout $z_1, t_1 \in \mathbb{R}_+$ suffisamment proches de z_0 et t_0 , nous avons

$$\|H_1(z_0, \rho, t_0) - H_1(z_1, \rho, t_1)\|_{L^{1,N}} \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

2. Considérons maintenant $\|H_1(z_0, \rho, t_0) - H_1(z_1, \rho, t_1)\|_{L^\infty}$.

$$\begin{aligned} & |H_1(z_0, \rho, t_0)(q) - H_1(z_1, \rho, t_1)(q)| \\ & \leq |\rho(q)| |K_{(z_0,0)}(q, t_0) - K_{(z_1,0)}(q, t_1)| + f_c \int_{\mathbb{R}_+} D(q, q') |u_{(z_0,0)}(q', t_0) - u_{(z_1,0)}(q', t_1)| |\rho(q')| dq'. \end{aligned}$$

En reprenant également la démonstration du théorème précédent, nous obtenons que pour tout $z_1, t_1 \in \mathbb{R}_+$ suffisamment proche de z_0 et t_0 ,

$$\|H_1(z_0, \rho, t_0) - H_1(z_1, \rho, t_1)\|_{L^\infty} \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Finalement, nous avons prouvé que

$$\|H_1(z_0, \rho, t_0) - H_1(z_1, \rho, t_1)\|_E \leq \varepsilon,$$

ce qui achève la démonstration le théorème. ■

Théorème 5.2.7 (Dérivabilité en fonction de z_0 et t_0)

Supposons que :

1. pour tout $q \in \mathbb{R}_+$ les applications $z \mapsto K(q, z)$ et $z \mapsto u(q, z)$ sont de classe $\mathcal{C}^1$,
2. les applications $(q, z) \mapsto \frac{\partial K}{\partial z}(q, z)$ et $(q, z) \mapsto \frac{\partial u}{\partial z}(q, z)$ sont bornées,
3. il existe une constante strictement positive α_v telle que pour tout $(q, z) \in \mathbb{R}_+^2$, $\alpha_v \leq v(q, z)$.

Si l'application

$$\begin{aligned} \mathbb{R}_+ &\rightarrow E \\ z_0 &\mapsto \rho_0^c(., z_0). \end{aligned}$$

est de classe $\mathcal{C}^1$, alors la solution $(z_0, t) \mapsto \rho_{(z_0, 0)}^c(., t)$ au problème de Cauchy 5.28 est de classe $\mathcal{C}^1$.

De même, si l'application

$$\begin{aligned} \mathbb{R}_+ &\rightarrow E \\ t_0 &\mapsto \sigma^c(., t_0). \end{aligned}$$

est de classe $\mathcal{C}^1$, alors la solution $(t_0, t) \mapsto \rho_{(0, t_0)}^c(., t)$ au problème de Cauchy 5.29 est de classe $\mathcal{C}^1$.

En outre, les applications $q \mapsto \partial_{z_0} \rho_{(z_0, 0)}^c(q, t)$ et $q \mapsto \partial_{t_0} \rho_{(0, t_0)}^c(q, t)$ appartiennent à E .

Démonstration : Nous nous intéressons tout d'abord au problème de Cauchy 5.28.

La démonstration de ce résultat est une application du théorème 5.1.2. Nous reprenons le formalisme introduit dans les précédentes démonstrations. Considérant la figure 5.4, nous montrerons tout d'abord la dérivabilité de la solution par rapport à la condition initiale x_1 puis, nous étudierons la différentiabilité par rapport à z_0 du champ de vecteurs H_1 . L'introduction de l'hypothèse de continue différentiabilité de l'application $z_0 \mapsto x_1(z_0)$ achèvera la démonstration.

1. Ici, nous considérons $z_0 \in \mathbb{R}_+^*$ fixé. Montrer la différentiabilité de la solution $(t \mapsto \rho_{z_0}(t, x_1))$ en fonction de x_1 revient à montrer que la différentielle partielle $D_\rho H_1(z_0, \rho, t) \in \mathcal{L}(E)$ existe et est une fonction continue en (ρ, t) vu comme élément de $E \times \mathbb{R}_+$. Or, comme l'application $\rho \mapsto H_1(z_0, \rho, t)$ est linéaire continue, sa différentielle en tout point est donc elle-même, c.-à-d. $D_\rho H_1(z_0, \rho, t) = H_1(z_0, ., t)$. Ainsi, $(\rho, t) \mapsto D_\rho H_1(z_0, \rho, t)$ est continue sur $E \times \mathbb{R}_+$.

Alors, le premier résultat du théorème 5.1.2 nous assure que l'application $(t, x_1) \mapsto \rho_{z_0}(t, x_1)$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+ \times E)$.

2. L'étude de la différentiabilité de la solution en fonction de z_0 est démontrée à l'aide de la seconde partie du théorème 5.1.2. L'application de ce dernier requiert d'étudier la différentiabilité en ρ et z_0 du champ de vecteur H_1 (eq. 5.32).

Nous venons de voir que l'application $D_\rho H_1(z_0, \rho, t) = H_1(z_0, \cdot, t) \in \mathcal{L}(E)$. Par ailleurs, l'application $(z_0, \rho, t) \mapsto H_1(z_0, \cdot, t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^* \times E \times \mathbb{R}_+$ pour la norme $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(E)}$ (nous rappelons que $\|D_\rho H_1(z_0, \rho, t)\|_{\mathcal{L}(E)} = \sup_{\|f\|_E=1} \|H_1(z_0, f, t)\|_E$). Ce résultat découle alors des propriétés que nous avons déjà montrées sur H_1 .

Pour montrer la différentiabilité de $(t \mapsto \rho_{z_0}(t, x_1)) \in E$ par rapport à z_0 , il reste à montrer que l'application $D_{z_0} H_1(z_0, \rho, t) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_+^*, E)$ existe et est continue par rapport à $(z_0, \rho, t) \in \mathbb{R}_+^* \times E \times \mathbb{R}_+$.

Introduisons l'application F_1 qui nous permettra de définir la différentielle $D_{z_0} H_1(z_0, \rho, t)$.

Lemme 5.2.7

Soit l'application

$$(5.43) \quad \begin{aligned} F_1 : \mathbb{R}_+^* \times E \times \mathbb{R}_+ &\rightarrow E, \\ (z_0, \rho, t) &\mapsto F_1(z_0, \rho, t), \end{aligned}$$

où

$$(5.44) \quad F_1(z_0, \rho, t)(q) = \partial_{z_0} K_{(z_0, 0)}(q, t) \rho(q) + f_c \int_{\mathbb{R}_+} D(q, q') \partial_{z_0} u_{(z_0, 0)}(q', t) \rho(q') dq'.$$

Alors F_1 est définie, continue, globalement lipschitzienne sur E , de constante de Lipschitz indépendante de t et z_0 si les points 1, 2 et 3 du théorème 5.2.7 sont vérifiés.

Démonstration : Montrons tout d'abord que F_1 est bien définie c.-à-d. $F_1(z_0, \rho, t) \in E$ pour tout $(z_0, \rho, t) \in \mathbb{R}_+^* \times E \times \mathbb{R}_+$. La démonstration de ce résultat s'apparente à la preuve du lemme 5.2.5. En effet, constatons tout d'abord que $Z(q, z_0, 0, t) = Z(q, 0, t_0(q, z_0, 0), t)$. Rappelons que $u_{(z_0, 0)}(q, t) = u(q, Z(q, z_0, 0, t))$ et $K_{(z_0, 0)}(q, t) = K(q, Z(q, z_0, 0, t))$. Comme $z_0 \mapsto Z(q, z_0, 0, t)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ (voir Th.5.2.1) et comme les applications $z \mapsto u(q, z)$ et $z \mapsto K(q, z)$ sont de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+)$ par hypothèse, les applications $z_0 \mapsto u_{(z_0, 0)}(q, t)$ et $z_0 \mapsto K_{(z_0, 0)}(q, t)$ sont de classe $\mathcal{C}^1$. Nous avons alors le résultat suivant :

$$\begin{aligned} \partial_{z_0} Z(q, z_0, 0, t) &= \frac{\partial t_0}{\partial z}(q, z_0, 0) \frac{\partial Z}{\partial t_0}(q, 0, t_0(q, z_0, 0), t), \\ &= \frac{\nu(q, Z(q, 0, t_0(q, z_0, 0), t))}{\nu(q, z_0)}, \\ &= \frac{\nu(q, Z(q, z_0, 0, t))}{\nu(q, z_0)}, \end{aligned}$$

et par suite, les relations suivantes sont vérifiées :

$$\begin{aligned}
 \partial_{z_0} u_{(z_0,0)}(q,t) &= \partial_{z_0} Z(q, z_0, 0, t) \partial_z u(q, Z(q, z_0, 0, t)), \\
 &= \frac{\nu(q, Z(q, z_0, 0, t))}{\nu(q, z_0)} \partial_z u(q, Z(q, z_0, 0, t)), \\
 |\partial_{z_0} u_{(z_0,0)}(q,t)| &\leq \frac{\|\nu\|_{L^\infty}}{\alpha_\nu} \|\partial_z u\|_{L^\infty}, \\
 \partial_{z_0} K_{(z_0,0)}(q,t) &= \partial_{z_0} Z(q, z_0, 0, t) \partial_z K(q, Z(q, z_0, 0, t)), \\
 &= \frac{\nu(q, Z(q, z_0, 0, t))}{\nu(q, z_0)} \partial_z K(q, Z(q, z_0, 0, t)), \\
 |\partial_{z_0} K_{(z_0,0)}(q,t)| &\leq \frac{\|\nu\|_{L^\infty}}{\alpha_\nu} \|\partial_z K\|_{L^\infty}.
 \end{aligned}$$

Ainsi, $F_1(z_0, \rho, t)$ et $H_1(z_0, \rho, t)$ ont la même forme (voir lemme 5.2.5). Comme les applications $z \mapsto K(q, z)$ et $z \mapsto u(q, z)$ sont de classe $\mathcal{C}^1$, les éléments de démonstration du lemme 5.2.5 assurent que $F_1(z_0, \rho, t) \in E$.

En outre, en utilisant à nouveau l'analogie entre F_1 et H_1 , nous pouvons montrer que : i) l'application $\rho \mapsto F_1(z_0, \rho, t)$ est linéaire, globalement lipschitzienne, de constante de Lipschitz indépendante de z_0 et t , ii) les applications $z_0 \mapsto F_1(z_0, \rho, t)$ et $t \mapsto F_1(z_0, \rho, t)$ sont continues et par suite, iii) F_1 est continue sur $\mathbb{R}_+^* \times E \times \mathbb{R}_+$. ■

Il reste maintenant à prouver que $D_{z_0} H_1(z_0, \rho, t)$ est bien définie par

$$\begin{aligned}
 (5.45) \quad D_{z_0} H_1(z_0, \rho, t) : \quad \mathbb{R}_+^* &\rightarrow E, \\
 x &\mapsto x F_1(z_0, \rho, t).
 \end{aligned}$$

Afin de prouver ce résultat, montrons que pour tout $(\rho, t) \in E \times \mathbb{R}_+$, pour tout $z, z_0 \in \mathbb{R}_+^*$ suffisamment proches,

$$\|H_1(z, \rho, t) - H_1(z_0, \rho, t) - (z - z_0) F_1(z_0, \rho, t)\|_E = o(|z - z_0|).$$

Le premier membre de l'égalité est bien défini car chacune des applications est à valeurs dans E . Ainsi, il faut montrer que

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\|H_1(z, \rho, t) - H_1(z_0, \rho, t) - (z - z_0) F_1(z_0, \rho, t)\|_E}{|z - z_0|} = 0.$$

Chapitre 5. Etude des solutions du modèle de décomposition de la matière organique

Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Considérons dans un premier temps pour tout $q \in \mathbb{R}_+$,

$$\begin{aligned} & H_1(z, \rho, t)(q) - H_1(z_0, \rho, t)(q) - (z - z_0)F_1(z_0, \rho, t)(q), \\ &= (K_{(z,0)}(q, t) - K_{(z_0,0)}(q, t) - (z - z_0)\partial_{z_0}K_{(z_0,0)}(q, t))\rho(q) \\ &+ f_c \int_{\mathbb{R}_+} D(q, q')(u_{(z,0)}(q', t) - u_{(z_0,0)}(q', t) - (z - z_0)\partial_{z_0}u_{(z_0,0)}(q', t))\rho(q')dq'. \end{aligned}$$

D'après le théorème des accroissements finis, il existe $\tilde{z}, \hat{z} \in]\min(z_0, z), \max(z_0, z)[$ tels que :

$$\begin{aligned} K_{(z,0)}(q, t) - K_{(z_0,0)}(q, t) &= (z - z_0)\partial_{z_0}K_{(\tilde{z},0)}(q, t), \\ u_{(z,0)}(q, t) - u_{(z_0,0)}(q, t) &= (z - z_0)\partial_{z_0}u_{(\hat{z},0)}(q, t). \end{aligned}$$

Ainsi, nous avons

$$\begin{aligned} & \frac{|H_1(z, \rho, t)(q) - H_1(z_0, \rho, t)(q) - (z - z_0)F_1(z_0, \rho, t)(q)|}{|z - z_0|}, \\ & \leq \left[\left| \partial_{z_0}K_{(\tilde{z},0)} - \partial_{z_0}K_{(z_0,0)} \right|(q, t)|\rho(q')| + f_c \int_{\mathbb{R}_+} D(q, q') \left| \partial_{z_0}u_{(\hat{z},0)} - \partial_{z_0}u_{(z_0,0)} \right|(q', t)|\rho(q')|dq' \right]. \end{aligned}$$

En reprenant à nouveau le point 1a de la démonstration du théorème 5.2.5, nous montrons que pour tout z suffisamment proche de z_0 ,

$$\frac{\|H_1(z, \rho, t) - H_1(z_0, \rho, t) - (z - z_0)F_1(z_0, \rho, t)\|_E}{|z - z_0|} \leq \varepsilon,$$

ce qui nous assure que $D_{z_0}H_1(z_0, \rho, t) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_+^*, E)$ existe et est bien définie par l'équation 5.45. De plus, la continuité de F_1 sur $\mathbb{R}_+^* \times E \times \mathbb{R}_+$ assure la continuité de $(z_0, \rho, t) \mapsto D_{z_0}H_1(z_0, \rho, t)$. Ce résultat achève de prouver la différentiabilité de $(t \mapsto \rho_{z_0}(t, x_1))$ par rapport à z_0 .

Finalement, comme $z_0 \mapsto x_1(z_0)$ est de classe $\mathcal{C}^1$, l'application $z_0 \mapsto \rho_{z_0}(t, x_1(z_0))$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et nous pouvons écrire

$$D_{z_0}[\rho_{z_0}(t, x_1(z_0))] = D_{z_0}\rho_{z_0}(t, x_1(z_0)) + D_{z_0}x_1(z_0) \times D_{x_1}\rho_{z_0}(t, x_1(z_0)).$$

3. Il reste à montrer que $(q \mapsto \partial_{z_0}\rho_{(z_0,0)}^c(q, t)) \in E$.

Nous venons de montrer que l'application $\rho : (z_0, t) \mapsto \rho_{z_0}(t, \rho_0(z_0)) = \rho_{(z_0,0)}^c(q, t)$ est différentiable en z_0 . Ainsi, nous savons que pour tout $t \in \mathbb{R}_+$,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left\| \frac{\rho(z_0 + h, t) - \rho(z_0, t)}{h} - D_1\rho(z_0, t)(1) \right\|_E = 0.$$

Ainsi, nous avons la convergence suivante dans E :

$$\left(q \mapsto \frac{\rho(z_0 + h, t) - \rho(z_0, t)}{h} \right) \xrightarrow[h \rightarrow 0]{E} D_1 \rho(z_0, t)(1).$$

Or, la convergence dans E assure la convergence uniforme et donc la convergence ponctuelle. Ainsi, pour tout $q \in \mathbb{R}_+$,

$$\begin{aligned} D_1 \rho(z_0, t)(1)(q) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\rho(z_0 + h, t)(q) - \rho(z_0, t)(q)}{h}, \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\rho_{(z_0+h,0)}^c(q, t) - \rho_{(z_0,0)}^c(q, t)}{h}, \\ &= \partial_{z_0} \rho_{(z_0,0)}^c(q, t). \end{aligned}$$

Ainsi, $q \mapsto \partial_{z_0} \rho_{(z_0,0)}^c(q, t)$ est un élément de E .

Nous montrons maintenant le résultat analogue pour les solutions du problème de Cauchy 5.29. Les champs de vecteurs H_1 et H_2 étant semblables, nous mettrons essentiellement en lumière les différences significatives dans la preuve.

Nous montrerons tout d'abord la dérivabilité de la solution par rapport à la condition initiale x_2 puis, nous étudierons la différentiabilité par rapport à t_0 du champ de vecteurs H_2 . L'introduction de l'hypothèse de continue différentiabilité de l'application $t_0 \mapsto x_2(t_0)$ achèvera la démonstration.

1. Montrer la différentiabilité de la solution ($t \mapsto \rho_{t_0}(t, x_2)$) en fonction de x_2 revient à montrer que la dérivée partielle $D_\rho H_2(t_0, \rho, t)$ existe et est une fonction continue de (ρ, t) comme élément de $E \times \mathbb{R}_+$. La preuve est identique à celle vue précédemment ce qui assure que l'application $(t, x_2) \mapsto \rho_{t_0}(t, x_2)$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+ \times E)$.
2. L'étude de la dérivabilité de la solution en fonction de t_0 requiert d'étudier la différentiabilité en ρ et t_0 du champ de vecteurs H_2 (eq. 5.33).

Nous venons de montrer que l'application $D_\rho H_2(t_0, \rho, t) = H_2(t_0, \cdot, t) \in \mathcal{L}(E)$. Nous montrons également de manière analogue au point précédent que l'application $(t_0, \rho, t) \mapsto H_2(t_0, \cdot, t)$ est continue.

Pour montrer la différentiabilité de $(t \mapsto \rho_{t_0}(t, x_2)) \in E$ par rapport à t_0 , il reste à montrer que l'application $D_{t_0} H_2(t_0, \rho, t) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_+^*, E)$ existe et est continue (t_0, ρ, t) .

Introduisons l'application F_2 qui nous permettra de définir la différentielle $D_{t_0} H_2(t_0, \rho, t)$.

Lemme 5.2.8

Soit l'application

$$(5.46) \quad \begin{aligned} F_2 : \mathbb{R}_+^* \times E \times \mathbb{R}_+ &\rightarrow E, \\ (t_0, \rho, t) &\mapsto F_2(t_0, \rho, t), \end{aligned}$$

où

$$(5.47) \quad F_2(t_0, \rho, t)(q) = \partial_{t_0} K_{(0, t_0)}(q, t) \rho(q) + f_c \int_{\mathbb{R}_+} D(q, q') \partial_{t_0} u_{(0, t_0)}(q', t) \rho(q') dq'.$$

Alors F_2 est définie, continue, globalement lipschitzienne sur E , de constante de Lipschitz indépendante de t et t_0 si les points 1 et 2 du théorème 5.2.7 sont vérifiés.

Démonstration : La démonstration est identique à celle du lemme 5.2.7. La seule différence porte sur les termes suivants :

$$\begin{aligned} \partial_{t_0} u_{(0, t_0)}(q, t) &= \partial_{t_0} Z(q, 0, t_0, t - t_0) \partial_z u(q, Z(q, 0, t_0, t - t_0)), \\ &= -v(q, Z(q, 0, t_0, t - t_0)) \partial_z u(q, Z(q, 0, t_0, t - t_0)), \\ |\partial_{t_0} u_{(0, t_0)}(q, t)| &\leq \|v\|_{L^\infty} \|\partial_z u\|_{L^\infty}, \\ \partial_{t_0} K_{(0, t_0)}(q, t) &= \partial_{t_0} Z(q, 0, t_0, t - t_0) \partial_z K(q, Z(q, 0, t_0, t - t_0)), \\ &= -v(q, Z(q, 0, t_0, t - t_0)) \partial_z K(q, Z(q, 0, t_0, t - t_0)), \\ |\partial_{t_0} K_{(0, t_0)}(q, t)| &\leq \|v\|_{L^\infty} \|\partial_z K\|_{L^\infty}. \end{aligned}$$

■

Comme dans le théorème précédent, nous montrons que $D_{t_0} H_2(t_0, \rho, t) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_+^*, E)$ existe et est bien définie par

$$(5.48) \quad \begin{aligned} D_{t_0} H_2(t_0, \rho, t) : \mathbb{R}_+^* &\rightarrow E, \\ x &\mapsto x F_2(t_0, \rho, t). \end{aligned}$$

De plus, $(t_0, \rho, t) \mapsto D_{t_0} H_2(t_0, \rho, t)$ est continue ce qui achève de prouver la différentiabilité de $(t \mapsto \rho_{t_0}(t, x_2))$ par rapport à t_0 .

Finalement, comme $t_0 \mapsto x_2(t_0)$ est de classe $\mathcal{C}^1$, l'application $t_0 \mapsto \rho_{t_0}(t, x_2(t_0))$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et nous pouvons écrire

$$D_{t_0} [\rho_{t_0}(t, x_2(t_0))] = D_{t_0} \rho_{t_0}(t, x_2(t_0)) + D_{t_0} x_2(t_0) \times D_{x_2} \rho_{t_0}(t, x_2(t_0)).$$

3. La preuve que l'application $(q \mapsto \partial_{t_0} \rho_{(0,t_0)}^c(q,t)) \in E$ est identique à celle vue précédemment. ■

5.2.4.2 Etude du problème de Cauchy 5.30 et régularité

Remarquons premièrement qu'une simple adaptation de la démonstration du théorème 5.2.5 permet de montrer :

Théorème 5.2.8

Soit $N \in \mathbb{N}$ fixé. Supposons que :

1. pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ fixés, $q \mapsto K_{(0,0)}(q,t)$ est continue,
2. D vérifie les hypothèses 5.40.

Alors, il existe une unique solution globale $t \mapsto \rho_{(0,0)}^c(\cdot, t)$ appartenant à $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, E)$ au problème de Cauchy 5.30.

Il est nécessaire de déterminer le comportement des solutions des problèmes de Cauchy lorsque z_0 ou t_0 tendent vers 0.

Théorème 5.2.9 (Recollement continu en $(0,0)$ des solutions)

L'application $t \mapsto \rho_{(z_0,0)}^c(\cdot, t) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, E)$ (resp. $t \mapsto \rho_{(0,t_0)}^c(\cdot, t)$) converge uniformément sur tout compact vers $t \mapsto \rho_{(0,0)}^c(\cdot, t)$ lorsque $z_0 \rightarrow 0$ (resp. $t_0 \rightarrow 0$). Ainsi, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, les applications $z_0 \mapsto \rho_{(z_0,0)}^c(\cdot, t)$ et $t_0 \mapsto \rho_{(0,t_0)}^c(\cdot, t)$ admettent un prolongement par continuité en 0 au sens de la norme $\|\cdot\|_E$.

Démonstration : Nous montrerons le résultat pour $z_0 \mapsto \rho_{(z_0,0)}^c(\cdot, t)$. La démonstration est à nouveau identique pour $t_0 \mapsto \rho_{(0,t_0)}^c(\cdot, t)$.

Nous utiliserons les différents formalismes introduits jusqu'ici pour clarifier la démonstration. Nous reprenons le problème de Cauchy 5.41 où nous posons $x_1 = \rho_0^c(\cdot, z_0)$:

$$\text{pour } z_0 \in \mathbb{R}_+^*, \quad \begin{cases} \partial_t (\rho_{z_0}(t, \rho_0^c(\cdot, z_0))) = H_1(z_0, \rho_{z_0}, t), \\ \rho_{z_0}(0, \rho_0^c(\cdot, z_0)) = \rho_0^c(\cdot, z_0) \end{cases} .$$

Puis, nous posons le problème de Cauchy

$$\begin{cases} \partial_t \rho_0(t) = H_0(\rho_0, t), \\ \rho_0(0) = \rho_0^c(\cdot, 0) \end{cases} ,$$

Nous voulons montrer que, pour tout $t > 0$, $\lim_{z_0 \rightarrow 0} \|\rho_{z_0}(t, \rho_0^c(\cdot, z_0)) - \rho_0(t)\|_E = 0$

Chapitre 5. Etude des solutions du modèle de décomposition de la matière organique

1. Nous montrons premièrement, à l'aide de la proposition 5.1.1, que pour tout $t \in \mathbb{R}_+$,

$$\|\rho_{z_0}(t, \rho_0^c(\cdot, z_0)) - \rho_{z_0}(t, \rho_0^c(\cdot, 0))\|_E \leq e^{C_L t} \|\rho_0^c(\cdot, z_0) - \rho_0^c(\cdot, 0)\|_E,$$

où C_L est la constante de Lipschitz du lemme 5.2.6.

2. Considérons maintenant $\|\rho_{z_0}(t, \rho_0^c(\cdot, 0)) - \rho_0(t)\|_E$.

Posons $w(z_0, t) = \rho_{z_0}(t, \rho_0^c(\cdot, 0)) - \rho_0(t)$. Nous obtenons alors le problème de Cauchy

$$(5.49) \quad \begin{cases} \partial_t(w(z_0, t)) = H_1(z_0, w(z_0, t), t) + B(z_0, t), \\ w(z_0, 0) = 0_E, \end{cases}$$

où nous avons posé $B(z_0, t) = H_1(z_0, (\rho_0(t), t) - H_0(\rho_0(t), t)$ qui vérifie la propriété suivante pour tout $T > 0$:

$$\lim_{z_0 \rightarrow 0} \left(\sup_{t \in [0, T]} \|B(z_0, t)\|_E \right) = 0.$$

Alors, nous avons pour tout $T \in \mathbb{R}_+$,

$$\begin{aligned} w(z_0, T) &= \int_0^T (H_1(z_0, w(z_0, t), t) + B(z_0, t)) dt, \\ \|w(z_0, T)\|_E &\leq \int_0^T \|H_1(z_0, w(z_0, t), t)\|_E dt + \int_0^T \|B(z_0, t)\|_E dt, \\ \|w(z_0, T)\|_E &\leq C_L \int_0^T \|w(z_0, t)\|_E dt + T \sup_{t \in [0, T]} \|B(z_0, t)\|_E. \end{aligned}$$

Nous appliquons alors le lemme de Grönwall. Ainsi, pour tout $\tilde{T} \in \mathbb{R}_+$ fixé et pour tout $T \in [0, \tilde{T}]$, nous avons

$$\begin{aligned} \|w(z_0, T)\|_E &\leq T \sup_{t \in [0, T]} \|B(z_0, t)\|_E + C_L \int_0^T s \sup_{t \in [0, s]} \|B(z_0, t)\|_E \exp\left(\int_s^T C_L du\right) ds, \\ \|w(z_0, T)\|_E &\leq \underbrace{\tilde{T} \sup_{t \in [0, \tilde{T}]} \|B(z_0, t)\|_E}_{\xrightarrow{z_0 \rightarrow 0} 0} (1 + \tilde{T} C_L \exp(\tilde{T} C_L)). \end{aligned}$$

Ainsi, nous pouvons conclure que pour tout $t \in [0, \tilde{T}]$, $\|\rho_{z_0}(t, \rho_0^c(\cdot, 0)) - \rho_0(t)\|_E \xrightarrow{z_0 \rightarrow 0} 0$. ■

5.2.5 Equations différentielles pour la concentration en nutriment

Nous supposons que les hypothèses d'existence et d'unicité du théorème 5.2.5 sont vérifiées. Ceci assure l'existence et l'unicité de ρ^c .

5.2.5.1 Etude des problèmes de Cauchy 5.34 et 5.35

Nous étudions dans un premier temps l'existence et l'unicité de solutions aux problèmes de Cauchy 5.34 et 5.35 puis nous étudierons la régularité des solutions du problème en fonction des paramètres z_0 et t_0 .

Théorème 5.2.10 (Existence et unicité - Positivité des solutions)

Soit $N \in \mathbb{N}$ fixé. Si les hypothèses du théorème 5.2.5 sont vérifiées, alors, il existe une unique solution globale $t \mapsto \rho_{(z_0,0)}^n(\cdot, t)$ (resp. $t \mapsto \rho_{(0,t_0)}^n(\cdot, t)$) appartenant à $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, E)$ au problème de Cauchy 5.34 (resp. 5.35).

De plus, chacune des solutions aux problèmes de Cauchy est positive si $D \geq 0$.

Démonstration : Introduisons un formalisme général analogue à celui utilisé pour le carbone. La démonstration du théorème d'existence et d'unicité nous amène à étudier les deux problèmes de Cauchy sur E suivants :

$$(5.50) \quad \text{Pour } z_0 \in \mathbb{R}_+^*, \quad \begin{cases} \frac{d}{dt}(\rho_{z_0}^n(t, x_3)) = H_1^n(z_0, \rho_{z_0}^n, t), \\ \rho_{z_0}^n(0, x_3) = x_3, \end{cases}$$

$$(5.51) \quad \text{Pour } t_0 \in \mathbb{R}_+^*, \quad \begin{cases} \frac{d}{dt}(\rho_{t_0}^n(t, x_4)) = H_2^n(t_0, \rho_{t_0}^n, t), \\ \rho_{t_0}^n(0, x_4) = x_4, \end{cases}$$

où $x_3, x_4 \in E$.

Introduisons tout d'abord un résultat préliminaire.

Lemme 5.2.9

Les champs de vecteurs H_1^n et H_2^n sont bien définis.

Démonstration : La démonstration est analogue à celle du lemme 5.2.5. ■

Plaçons nous dans le cadre du théorème 5.1.1 pour chacune de ces deux applications. z_0 et t_0 étant des paramètres, nous travaillerons pour le moment à $z_0, t_0 \in \mathbb{R}_+^*$ fixés. Il est nécessaire de montrer que $H_1^n(z_0, \cdot, \cdot)$ et $H_2^n(t_0, \cdot, \cdot)$ sont continues sur $E \times \mathbb{R}_+$ et lipschitziennes sur E . Nous étudierons uniquement $H_1^n(z_0, \cdot, \cdot)$, la démonstration étant semblable pour $H_2^n(t_0, \cdot, \cdot)$.

Chapitre 5. Etude des solutions du modèle de décomposition de la matière organique

1. Montrons que $t \mapsto H_1^n(z_0, \rho, t)$ est continue pour tout $(\rho, t) \in E \times \mathbb{R}_+$ fixés. Soient $\varepsilon > 0$ et $t \in \mathbb{R}_+$ fixés. Considérons alors, pour $\tilde{t} \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\begin{aligned} \|H_1^n(z_0, \rho, t) - H_1^n(z_0, \rho, \tilde{t})\|_E &\leq \| (K_{(z_0,0)}(\cdot, t) - K_{(z_0,0)}(\cdot, \tilde{t})) \rho \|_E \\ &\quad + f_n \left\| \int_{R_+} D(\cdot, q') \left(u_{(z_0,0)}(q', t) \rho_{(z_0,0)}^c(q', t) - u_{(z_0,0)}(q', \tilde{t}) \rho_{(z_0,0)}^c(q', \tilde{t}) \right) dq' \right\|_E. \end{aligned}$$

Nous avons déjà vu en étudiant les équations du carbone que $\| (K_{(z_0,0)}(\cdot, t) - K_{(z_0,0)}(\cdot, \tilde{t})) \rho \|_E \leq \varepsilon$ pour tout $\tilde{t}$ suffisamment proche de t .

Il reste à montrer que pour tout $\tilde{t}$ suffisamment proche de t ,

$$\left\| \int_{R_+} D(\cdot, q') \left(u_{(z_0,0)}(q', t) \rho_{(z_0,0)}^c(q', t) - u_{(z_0,0)}(q', \tilde{t}) \rho_{(z_0,0)}^c(q', \tilde{t}) \right) dq' \right\|_E \leq \varepsilon.$$

Or, nous avons

$$\begin{aligned} &u_{(z_0,0)}(q', t) \rho_{(z_0,0)}^c(q', t) - u_{(z_0,0)}(q', \tilde{t}) \rho_{(z_0,0)}^c(q', \tilde{t}), \\ &= u_{(z_0,0)}(q', t) \left(\rho_{(z_0,0)}^c(q', t) - \rho_{(z_0,0)}^c(q', \tilde{t}) \right) + \rho_{(z_0,0)}^c(q', \tilde{t}) \left(u_{(z_0,0)}(q', t) - u_{(z_0,0)}(q', \tilde{t}) \right). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} &\left\| \int_{R_+} D(\cdot, q') \left(u_{(z_0,0)}(q', t) \rho_{(z_0,0)}^c(q', t) - u_{(z_0,0)}(q', \tilde{t}) \rho_{(z_0,0)}^c(q', \tilde{t}) \right) dq' \right\|_E \\ &\leq \left\| \int_{R_+} D(\cdot, q') u_{(z_0,0)}(q', t) \left(\rho_{(z_0,0)}^c(q', t) - \rho_{(z_0,0)}^c(q', \tilde{t}) \right) dq' \right\|_E \\ &\quad + \left\| \int_{R_+} D(\cdot, q') \rho_{(z_0,0)}^c(q', \tilde{t}) \left(u_{(z_0,0)}(q', t) - u_{(z_0,0)}(q', \tilde{t}) \right) dq' \right\|_E. \end{aligned}$$

D'après le théorème des accroissements finis, il existe $\hat{t} \in [t, \tilde{t}]$ (ou $[\tilde{t}, t]$) tel que

$$\rho_{(z_0,0)}^c(q', t) - \rho_{(z_0,0)}^c(q', \tilde{t}) = (t - \tilde{t}) \partial_t \rho_{(z_0,0)}^c(q', \hat{t}),$$

et alors, comme $\partial_t \rho_{(z_0,0)}^c(\cdot, \hat{t}) \in E$, nous pouvons montrer que $\int_{R_+} D(\cdot, q') u_{(z_0,0)}(q', t) \partial_t \rho_{(z_0,0)}^c(q', \hat{t}) dq' \in E$ par des raisonnements analogues à ceux utilisés précédemment. Ainsi,

$$\begin{aligned} &\left\| \int_{R_+} D(\cdot, q') u_{(z_0,0)}(q', t) \left(\rho_{(z_0,0)}^c(q', t) - \rho_{(z_0,0)}^c(q', \tilde{t}) \right) dq' \right\|_E \\ &= |t - \tilde{t}| \left\| \int_{R_+} D(\cdot, q') u_{(z_0,0)}(q', t) \partial_t \rho_{(z_0,0)}^c(q', \hat{t}) dq' \right\|_E, \\ &\leq \varepsilon, \end{aligned}$$

pour tout $\tilde{t}$ suffisamment proche de t . Par ailleurs, en reprenant les méthodes vues lors la démonstration du théorème 5.2.5, nous pouvons également montrer que pour tout $\tilde{t}$ suffisamment proche de t ,

$$\left\| \int_{R_+} D(\cdot, q') u_{(z_0, 0)}(q', t) (\rho_{(z_0, 0)}^c(q', t) - \rho_{(z_0, 0)}^c(q', \tilde{t})) dq' \right\|_E \leq \varepsilon,$$

ce qui achève de prouver la continuité de H_1^n par rapport à t .

2. Nous énonçons un lemme permettant de montrer que l'application H_1^n est continue et globalement lipschitzienne par rapport à ρ . Nous utilisons à nouveau l'abus de notation introduit dans le lemme 5.2.6.

Lemme 5.2.10 ($H_{(z_0, t_0)}^n$ globalement lipschitzienne par rapport à ρ)

Sous les hypothèses du théorème 5.2.5, l'application $H_{(z_0, t_0)}^n(\cdot, \cdot)$ est globalement $\|K\|_{L^\infty}$ -lipschitzienne sur E pour tout $(z_0, t_0) \in V$ et pour tout $\rho_1, \rho_2 \in E$:

$$\begin{aligned} \|H_{(z_0, t_0)}^n(\rho_1, t) - H_{(z_0, t_0)}^n(\rho_2, t)\|_E &\leq \|K_{(z_0, t_0)}\|_{L^\infty} \|\rho_1 - \rho_2\|_E, \\ &\leq \|K\|_{L^\infty} \|\rho_1 - \rho_2\|_E. \end{aligned}$$

La constante de Lipschitz $\|K\|_{L^\infty}$ est indépendante de (z_0, t_0) et t .

Démonstration : Soient $\rho_1, \rho_2 \in E$ et $t \in \mathbb{R}_+$ fixés.

- (a) Commençons par considérer la norme $\|\cdot\|_{L^{1,N}}$:

$$\begin{aligned} H_{(z_0, t_0)}^n(\rho_1, t) - H_{(z_0, t_0)}^n(\rho_2, t) &= K_{(z_0, t_0)}(\cdot, t)(\rho_1 - \rho_2), \\ \|H_{(z_0, t_0)}^n(\rho_1, t) - H_{(z_0, t_0)}^n(\rho_2, t)\|_{L^{1,N}} &= \sum_{j=0}^N \|q \mapsto q^j K_{(z_0, t_0)}(q)(\rho_1(q) - \rho_2(q))\|_{L^1}, \\ &\leq \|K_{(z_0, t_0)}\|_{L^\infty} \sum_{j=0}^N \|q \mapsto q^j(\rho_1(q) - \rho_2(q))\|_{L^1}, \\ &\leq \|K_{(z_0, t_0)}\|_{L^\infty} \|\rho_1 - \rho_2\|_{L^{1,N}}. \end{aligned}$$

- (b) Considérons maintenant la norme $\|\cdot\|_{L^\infty}$.

$$\|H_{(z_0, t_0)}^n(\rho_1, t) - H_{(z_0, t_0)}^n(\rho_2, t)\|_{L^\infty} \leq \|K_{(z_0, t_0)}\|_{L^\infty} \|\rho_1 - \rho_2\|_{L^\infty}.$$

■

Ce lemme permet dans un premier temps de montrer la continuité de l'application $H_1^n(z_0, \cdot, \cdot)$ sur $E \times \mathbb{R}_+$. Enfin, démontrer l'existence et l'unicité revient à prouver que H_1^n est lipschitzienne par rapport à ρ . Le lemme achève donc de prouver l'existence et l'unicité de solutions globales.

Il reste à montrer la positivité des solutions. Comme pour le lemme précédent, nous donnons le

résultat pour tout $(z_0, t_0) \in V$. Posons $w_{(z_0, t_0)}(q, t) = \rho_{(z_0, t_0)}^n(q, t) e^{\left(-\int_{t_0}^t K_{(z_0, t_0)}(q, s) ds\right)}$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_{(z_0, t_0)}}{\partial t}(q, t) &= \left[\frac{\partial \rho_{(z_0, t_0)}^n}{\partial t}(q, t) - \rho_{(z_0, t_0)}^n(q, t) K_{(z_0, t_0)}(q, t) \right] e^{\left(-\int_{t_0}^t K_{(z_0, t_0)}(q, s) ds\right)}, \\ &= e^{\left(-\int_{t_0}^t K_{(z_0, t_0)}(q, s) ds\right)} f_n \int_{\mathbb{R}_+} D(q, q') u_{(z_0, t_0)}(q', t) \rho_{(z_0, t_0)}^c(q', t) dq', \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

De plus, $w_{(z_0, t_0)}(q, 0) = \rho_{(z_0, t_0)}^n(q, 0) \geq 0$, ce qui assure la positivité de $w_{(z_0, t_0)}$ et par suite celle de $\rho_{(z_0, t_0)}^n$. ■

Il reste à étudier la régularité des solutions en fonction des paramètres z_0 et t_0 .

Théorème 5.2.11 (Continuité en fonction de z_0 et t_0)

Supposons que pour tout $q \in \mathbb{R}_+$ les applications $z \mapsto K(q, z)$ et $z \mapsto u(q, z)$ sont continues. Supposons de plus que les applications

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* \rightarrow E & & \mathbb{R}_+^* \rightarrow E \\ z_0 \mapsto \rho_0^n(., z_0). & \text{et} & t_0 \mapsto \sigma^n(., t_0). \end{array}$$

sont continues. Alors l'application $(z_0, t) \mapsto \rho_{(z_0, 0)}^n(., t)$ (resp. $(t_0, t) \mapsto \rho_{(0, t_0)}^n(., t)$) est continue.

Démonstration : Nous montrons uniquement ce résultat pour z_0 , la démonstration étant similaire pour t_0 .

Le théorème est la résultante de la combinaison des deux résultats de la proposition 5.1.2. Considérons le formalisme introduit dans la démonstration du théorème d'existence. La variable z_0 intervient de deux manières : en tant que paramètre du champ de vecteurs H_1^n et en tant que paramètre de la condition initiale x_3 . La figure 5.4 proposée dans l'étude des équations du carbone illustre cette dépendance qui reste valable pour les équations des nutriments.

Dans cette démonstration, nous montrerons que la solution $(t \mapsto \rho_{z_0}^n(t, x_3))$ est continue dans E dans un voisinage de x_1 . Nous montrerons également sa dépendance continue en fonction z_0 . L'introduction de l'hypothèse de continuité de l'application $z_0 \mapsto x_3(z_0)$ achèvera la démonstration.

La proposition 5.1.2 nous assure immédiatement de la régularité de la solution dans un voisinage de x_3 .

L'étude de la continuité des solutions en fonction de z_0 requiert d'étudier si le champ de vecteur H_1^n est continu, Lipschitzien en ρ , de constante de Lipschitz indépendante de z_0 .

Nous montrons dans un premier temps la continuité de H_1^n par rapport à (z_0, t) . Le lemme 5.2.10 finira de prouver la continuité de H_1^n sur $\mathbb{R}_+^* \times E \times \mathbb{R}_+$ et la propriété de Lipschitz par rapport à ρ .

Soient $\varepsilon > 0$, $z_0 \in \mathbb{R}_+^*$, $t_0 \in \mathbb{R}_+$ et $\rho \in E$ fixés. Considérons pour $z \in \mathbb{R}_+^*$ et $t \in \mathbb{R}_+$ la majoration suivante :

$$\begin{aligned}
 & \|H_1^n(z, \rho, t) - H_1^n(z_0, \rho, t)\|_E \\
 &= \left\| (K_{(z,0)}(\cdot, t) - K_{(z_0,0)}(\cdot, t_0))\rho + f_n \int_{\mathbb{R}_+} D(\cdot, q') (u_{(z,0)}(q', t) \rho_{(z,0)}^c(q', t) - u_{(z_0,0)}(q', t_0) \rho_{(z_0,0)}^c(q', t_0)) dq' \right\|_E, \\
 &\leq \left\| (K_{(z,0)}(\cdot, t) - K_{(z_0,0)}(\cdot, t_0))\rho \right\|_E + f_n \left\| \int_{\mathbb{R}_+} D(\cdot, q') (u_{(z,0)}(q', t) \rho_{(z,0)}^c(q', t) - u_{(z_0,0)}(q', t_0) \rho_{(z_0,0)}^c(q', t_0)) dq' \right\|_E, \\
 &\leq \left\| (K_{(z,0)}(\cdot, t) - K_{(z_0,0)}(\cdot, t_0))\rho \right\|_E + f_n \left\| \int_{\mathbb{R}_+} D(\cdot, q') (u_{(z,0)}(q', t) - u_{(z_0,0)}(q', t_0)) \rho_{(z,0)}^c(q', t) dq' \right\|_E \\
 &\quad + f_n \|u\|_{L^\infty} \left\| \int_{\mathbb{R}_+} D(\cdot, q') (\rho_{(z,0)}^c(q', t) - \rho_{(z_0,0)}^c(q', t_0)) dq' \right\|_E.
 \end{aligned}$$

Nous avons déjà prouvé lors de l'étude du carbone que pour z et t suffisamment proche de z_0 et t_0 ,

$$\left\| (K_{(z,0)}(\cdot, t) - K_{(z_0,0)}(\cdot, t_0))\rho \right\|_E \leq \varepsilon,$$

et en reprenant la démonstration précédente,

$$\left\| \int_{\mathbb{R}_+} D(\cdot, q') (u_{(z,0)}(q', t) - u_{(z_0,0)}(q', t_0)) \rho_{(z,0)}^c(q', t) dq' \right\|_E \leq \varepsilon.$$

Il reste donc à considérer $\left\| \int_{\mathbb{R}_+} D(\cdot, q') (\rho_{(z,0)}^c(q', t) - \rho_{(z_0,0)}^c(q', t_0)) dq' \right\|_E$. Nous avons d'une part

$$\int_{\mathbb{R}_+} D(\cdot, q') |\rho_{(z,0)}^c(q', t) - \rho_{(z_0,0)}^c(q', t_0)| dq' \leq M' \left\| \rho_{(z,0)}^c(\cdot, t) - \rho_{(z_0,0)}^c(\cdot, t_0) \right\|_{L^\infty},$$

et d'autre part, pour tout $j \in \{0, N\}$,

$$\int_{\mathbb{R}_+} q^j \int_{\mathbb{R}_+} D(\cdot, q') |\rho_{(z,0)}^c(q', t) - \rho_{(z_0,0)}^c(q', t_0)| dq' dq \leq M \left\| q \mapsto q^j (\rho_{(z,0)}^c(q, t) - \rho_{(z_0,0)}^c(q, t_0)) \right\|_{L^1},$$

ce qui nous assure que

$$\left\| \int_{\mathbb{R}_+} D(\cdot, q') (\rho_{(z,0)}^c(q', t) - \rho_{(z_0,0)}^c(q', t_0)) dq' \right\|_E \leq \max(M, M') \underbrace{\left\| \rho_{(z,0)}^c(\cdot, t) - \rho_{(z_0,0)}^c(\cdot, t_0) \right\|_E}_{\substack{\leq \varepsilon \\ \text{lorsque } z \rightarrow z_0 \text{ et } t \rightarrow t_0}},$$

car l'application $(z_0, t) \mapsto \rho_{(z_0,0)}^c(\cdot, t)$ est continue.

Ces résultats achèvent de prouver la continuité de H_1^n et par suite la continuité des solutions par rapport à z_0 . ■

Nous montrons maintenant le résultat de régularité suivant :

Théorème 5.2.12 (Dérivabilité en fonction de z_0 et t_0)

Supposons que :

1. pour tout $q \in \mathbb{R}_+$ les applications $z \mapsto K(q, z)$ et $z \mapsto u(q, z)$ sont de classe $\mathcal{C}^1$,
2. les applications $(q, z) \mapsto \frac{\partial K}{\partial z}(q, z)$ et $(q, z) \mapsto \frac{\partial u}{\partial z}(q, z)$ sont bornées,
3. il existe une constante strictement positive α_v telle que pour tout $(q, z) \in \mathbb{R}_+^2$, $\alpha_v \leq v(q, z)$,

Si l'application

$$\begin{aligned} \mathbb{R}_+ &\rightarrow E \\ z_0 &\mapsto \rho_0^n(., z_0). \end{aligned}$$

est de classe $\mathcal{C}^1$, alors la solution $(z_0, t) \mapsto \rho_{(z_0, 0)}^n(., t)$ au problème de Cauchy 5.34 est de classe $\mathcal{C}^1$.

De même, si l'application

$$\begin{aligned} \mathbb{R}_+ &\rightarrow E \\ t_0 &\mapsto \sigma^n(., t_0). \end{aligned}$$

est de classe $\mathcal{C}^1$, alors la solution $(t_0, t) \mapsto \rho_{(0, t_0)}^n(., t)$ au problème de Cauchy 5.35 est de classe $\mathcal{C}^1$.

En outre, les applications $q \mapsto \partial_{t_0} \rho_{(0, t_0)}^n(q, t)$ et $q \mapsto \partial_{z_0} \rho_{(z_0, 0)}^n(q, t)$ appartiennent à E .

Démonstration : La preuve étant similaire pour z_0 et t_0 , nous détaillerons uniquement la preuve dans le premier cas. La démonstration de ce résultat est une application du théorème 5.1.2. Nous reprenons le formalisme introduit dans les précédentes démonstrations. Comme dans le cas de l'étude de la continuité, nous montrerons tout d'abord la dérivabilité de la solution par rapport à la condition initiale x_3 puis, nous étudierons la différentiabilité par rapport à z_0 du champ de vecteurs H_1^n . L'introduction de l'hypothèse de continue différentiabilité de l'application $z_0 \mapsto x_3(z_0)$ achèvera la démonstration.

1. Montrer la différentiabilité de la solution $(t \mapsto \rho_{z_0}^n(t, x_3))$ en fonction de x_3 revient à montrer que pour tout $z_0 \in \mathbb{R}_+^*$ fixé, la différentielle partielle $D_\rho H_1^n(z_0, \rho, t) \in \mathcal{L}(E)$ existe et est une fonction continue de (ρ, t) comme élément de $E \times \mathbb{R}_+$. Remarquons que $H_1^n(z_0, \rho + h, t) - H_1^n(z_0, \rho, t) : q \mapsto K_{(z_0, 0)}(q, t)h(q)$. Or, l'application $h \mapsto (q \mapsto K_{(z_0, 0)}(q, t)h(q))$ est linéaire, continue. Ainsi, nous sommes assurés que :

$$\begin{aligned} D_\rho H_1^n(z_0, \rho, t) : E &\rightarrow E \\ h &\mapsto (q \mapsto K_{(z_0, 0)}(q, t)h(q)). \end{aligned}$$

Il reste à montrer que l'application

$$\begin{aligned} E \times \mathbb{R}_+ &\rightarrow \mathcal{L}(E) \\ (\rho, t) &\mapsto D_\rho H_1^n(z_0, \rho, t) \end{aligned}$$

est continue.

Notons que $\|D_\rho H_1^n(z_0, \rho, t)\|_{\mathcal{L}(E)} = \sup_{\|h\|_E=1} \|D_\rho H_1^n(z_0, \rho, t)(h)\|_E$. Nous devons considérer

$$\begin{aligned} \|D_\rho H_1^n(z_0, \rho_1, t_1) - D_\rho H_1^n(z_0, \rho_2, t_2)\|_{\mathcal{L}(E)} &= \sup_{\|h\|_E=1} \|D_\rho H_1^n(z_0, \rho_1, t_1)(h) - D_\rho H_1^n(z_0, \rho_2, t_2)(h)\|_E, \\ &= \sup_{\|h\|_E=1} \|(K_{(z_0,0)}(\cdot, t_1) - K_{(z_0,0)}(\cdot, t_2))h(\cdot)\|_E, \\ &\xrightarrow{t_1 \rightarrow t_2} 0, \end{aligned}$$

ce qui assure la continuité de $(\rho, t) \mapsto D_\rho H_1^n(z_0, \rho, t)$. Alors, le premier résultat du théorème 5.1.2 nous assure que l'application $(t, x_3) \mapsto \rho_{z_0}^n(t, x_3)$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+ \times E)$.

2. L'étude de la différentiabilité de la solution en fonction de z_0 est démontrée à l'aide de la seconde partie du théorème 5.1.2. L'application de ce dernier requiert d'étudier la différentiabilité en ρ et z_0 du champ de vecteurs H_1^n (eq. 5.38).

Nous venons de voir que l'application $D_\rho H_1^n(z_0, \rho, t) \in \mathcal{L}(E)$. Il reste à montrer la continuité de $(z_0, \rho, t) \mapsto D_\rho H_1^n(z_0, \rho, t)$ est continue. Ce résultat s'obtient de la même manière qu'au point précédent en considérant $\|D_\rho H_1^n(z_1, \rho_1, t_1) - D_\rho H_1^n(z_2, \rho_2, t_2)\|_{\mathcal{L}(E)}$ et le fait que $\rho \mapsto D_\rho H_1^n(z_0, \rho, t)$ est globalement lipschitzienne, de constante de Lipschitz indépendante de z_0 et t .

Pour montrer la différentiabilité de $(t \mapsto \rho_{z_0}^n(t, x_3)) \in E$ par rapport à z_0 , il est reste à montrer que l'application $D_{z_0} H_1^n(z_0, \rho, t) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_+^*, E)$ existe et est continue par rapport à $(z_0, \rho, t) \in \mathbb{R}_+^* \times E \times \mathbb{R}_+$.

Introduisons l'application F_1^n qui nous permettra de définir la différentielle $D_{z_0} H_1^n(z_0, \rho, t)$.

Lemme 5.2.11

Soit l'application

$$(5.52) \quad \begin{aligned} F_1^n : \mathbb{R}_+^* \times E \times \mathbb{R}_+ &\rightarrow E, \\ (z_0, \rho, t) &\mapsto F_1^n(z_0, \rho, t), \end{aligned}$$

où

$$(5.53) \quad \begin{aligned} F_1^n(z_0, \rho, t)(q) &= \partial_{z_0} K_{(z_0,0)}(q, t) \rho(q) + f_n \int_{\mathbb{R}_+} D(q, q') \partial_{z_0} u_{(z_0,0)}(q', t) \rho_{(z_0,0)}^c(q', t) dq' \\ &\quad + f_n \int_{\mathbb{R}_+} D(q, q') u_{(z_0,0)}(q', t) \partial_{z_0} \rho_{(z_0,0)}^c(q', t) dq'. \end{aligned}$$

Alors F_1^n est définie, continue, globalement lipschitzienne sur E , de constante de Lipschitz indépendante de t et z_0 si et seulement si les points 1, 2 et 3 du théorème 5.2.12 sont vérifiés.

Démonstration : Ce lemme se prouve de manière analogue au lemme 5.2.7.

Comme les applications $\rho, \partial_{z_0} \rho_{(z_0,0)}^c(\cdot, t), \rho_{(z_0,0)}^c(\cdot, t) \in E$, la définition de F_1^n est triviale. Pour s'en

Chapitre 5. Etude des solutions du modèle de décomposition de la matière organique

convaincre, il suffit de reprendre les éléments des démonstrations précédentes.

De même, nous pouvons prouver de manière triviale que $\rho \mapsto F_1^n(z_0, \rho, t)$ est $\|\partial_z K\|_\infty \frac{\|v\|_\infty}{\alpha_v}$ lipschitzienne. De plus, la constante de Lipschitz est indépendante de z_0 et t .

Alors, montrer que $z_0 \mapsto F_1^n(z_0, \rho, t)$ et $t \mapsto F_1^n(z_0, \rho, t)$ sont continues suffit à assurer la continuité de $(z_0, \rho, t) \mapsto F_1^n(z_0, \rho, t)$ sur $\mathbb{R}_+^* \times E \times \mathbb{R}_+$. Ce résultat est assuré par la continuité pour tout $q \in \mathbb{R}_+$ des applications $z \mapsto \partial_z K(q, z)$, $(z_0, t) \mapsto Z(q, z_0, 0, t)$, $z \mapsto \partial_z u(q, z)$ et $z \mapsto u(q, z)$. ■

Il reste maintenant à prouver que $D_{z_0} H_1^n(z_0, \rho, t)$ est définie par

$$(5.54) \quad \begin{aligned} D_{z_0} H_1^n(z_0, \rho, t) : \mathbb{R}_+^* &\rightarrow E, \\ x &\mapsto x F_1^n(z_0, \rho, t). \end{aligned}$$

Afin de prouver ce résultat, montrons que pour tout $(\rho, t) \in E \times \mathbb{R}_+$, pour tout $z_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et $h \in \mathbb{R}$ suffisamment proche de 0,

$$\|H_1^n(z_0 + h, \rho, t) - H_1^n(z_0, \rho, t) - h F_1^n(z_0, \rho, t)\|_E = o(|h|).$$

Le premier membre de l'égalité est bien défini car chacune des applications est dans E . Ainsi, il faut montrer que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|H_1^n(z_0 + h, \rho, t) - H_1^n(z_0, \rho, t) - h F_1^n(z_0, \rho, t)\|_E}{|h|} = 0.$$

Soit $\varepsilon > 0$ fixé.

Comme dans la démonstration du théorème 5.2.7, nous utilisons le théorème des accroissements finis. Il existe $\tilde{z}, \hat{z}, \bar{z} \in]z_0 - |h|, z_0 + |h|$ tels que :

$$\begin{aligned} K_{(z_0+h,0)}(q, t) - K_{(z_0,0)}(q, t) &= h \partial_{z_0} K_{(\tilde{z},0)}(q, t), \\ u_{(z_0+h,0)}(q, t) - u_{(z_0,0)}(q, t) &= h \partial_{z_0} u_{(\hat{z},0)}(q, t), \\ \rho_{(z_0+h,0)}^c(q, t) - \rho_{(z_0,0)}^c(q, t) &= h \partial_{z_0} \rho_{(\bar{z},0)}^c(q, t). \end{aligned}$$

Ainsi, nous avons

$$\begin{aligned}
 & \frac{\|H_1^n(z_0 + h, \rho, t) - H_1^n(z_0, \rho, t) - hF_1^n(z_0, \rho, t)\|_E}{|h|} \\
 & \leq \|(\partial_{z_0} K_{(\tilde{z}, 0)}(\cdot, t) - \partial_{z_0} K_{(z_0, 0)}(\cdot, t))\rho(\cdot)\|_E \\
 & \quad + f_n \left\| \int_{\mathbb{R}_+} D(\cdot, q') (\partial_{z_0} u_{(\tilde{z}, 0)}(q', t) - \partial_{z_0} u_{(z_0, 0)}(q', t)) \rho_{(z_0+h, 0)}^c(q', t) dq' \right\|_E \\
 & \quad + f_n \|\partial_z u\|_{L^\infty} \frac{\|v\|_{L^\infty}}{\alpha_v} \left\| \int_{\mathbb{R}_+} D(\cdot, q') (\rho_{(z_0+h, 0)}^c(q', t) - \rho_{(z_0, 0)}^c(q', t)) dq' \right\|_E \\
 & \quad + f_n \|u\|_{L^\infty} \frac{\|v\|_{L^\infty}}{\alpha_v} \left\| \int_{\mathbb{R}_+} D(\cdot, q') (\partial_{z_0} \rho_{(\tilde{z}, 0)}^c(q', t) - \partial_{z_0} \rho_{(z_0, 0)}^c(q', t)) dq' \right\|_E.
 \end{aligned}$$

Nous avons déjà montré pour des termes semblables, que $\|(\partial_{z_0} K_{(\tilde{z}, 0)}(\cdot, t) - \partial_{z_0} K_{(z_0, 0)}(\cdot, t))\rho(\cdot)\|_E \leq \varepsilon$ pour h suffisamment proche de 0. Il reste trois termes à considérer.

(a) Considérons $\left\| \int_{\mathbb{R}_+} D(\cdot, q') (\partial_{z_0} u_{(\tilde{z}, 0)}(q', t) - \partial_{z_0} u_{(z_0, 0)}(q', t)) \rho_{(z_0+h, 0)}^c(q', t) dq' \right\|_E$.

i. Commençons par la norme $\|\cdot\|_\infty$.

La continuité de $z_0 \mapsto \rho_{(z_0+h, 0)}^c(\cdot, t)$ nous assure qu'il existe $h_0 > 0$ tel que pour tout $h \in]-h_0, h_0[$, nous avons

$$\left\| \rho_{(z_0+h, 0)}^c(\cdot, t) - \rho_{(z_0, 0)}^c(\cdot, t) \right\|_E \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ceci est en particulier vrai pour la norme $\|\cdot\|_\infty$ ainsi nous avons

$$\sup_{q \in \mathbb{R}_+} \left| \rho_{(z_0+h, 0)}^c(q, t) - \rho_{(z_0, 0)}^c(q, t) \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Donc, pour tout $q \in \mathbb{R}_+$, nous avons

$$\left| \rho_{(z_0+h, 0)}^c(q, t) \right| \leq \left| \rho_{(z_0, 0)}^c(q, t) \right| + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Par ailleurs, il existe $q_0 \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $q \geq q_0$, nous avons $\left| \rho_{(z_0, 0)}^c(q, t) \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$, ainsi, nous sommes assurés que pour tout $q \geq q_0$ et $h \in]-h_0, h_0[$, $\left| \rho_{(z_0+h, 0)}^c(q, t) \right| \leq \varepsilon$.

Enfin, nous avons d'une part pour h suffisamment proche de 0 :

$$\int_0^{q_0} D(q, q') \left| \partial_{z_0} u_{(\tilde{z}, 0)}(q', t) - \partial_{z_0} u_{(z_0, 0)}(q', t) \right| \rho_{(z_0+h, 0)}^c(q', t) dq' \leq \varepsilon M' \sup_{\omega \in [0, h_0]} \|\rho_{(z_0+\omega, 0)}^c(\cdot, t)\|_{L^\infty},$$

et d'autre part :

$$\int_{q_0}^{+\infty} D(q, q') \left| \partial_{z_0} u_{(\tilde{z}, 0)}(q', t) - \partial_{z_0} u_{(z_0, 0)}(q', t) \right| \rho_{(z_0+h, 0)}^c(q', t) dq' \leq \varepsilon M' 2 \|\partial_z u\|_{L^\infty} \frac{\|v\|_{L^\infty}}{\alpha_v}.$$

ii. Considérons maintenant la norme $\|\cdot\|_{L^{1,N}}$.

Chapitre 5. Etude des solutions du modèle de décomposition de la matière organique

Pour tout $j \in \{0, N\}$ nous devons considérer le terme

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}_+} q^j \int_{\mathbb{R}_+} D(q, q') (\partial_{z_0} u_{(\hat{z}, 0)}(q', t) - \partial_{z_0} u_{(z_0, 0)}(q', t)) \rho_{(z_0+h, 0)}^c(q', t) dq' dq \\ &= M \int_{\mathbb{R}_+} q^j |\partial_{z_0} u_{(\hat{z}, 0)}(q, t) - \partial_{z_0} u_{(z_0, 0)}(q, t)| \rho_{(z_0+h, 0)}^c(q, t) dq. \end{aligned}$$

La continuité de $z_0 \mapsto \rho_{(z_0+h, 0)}^c(\cdot, t)$ nous assure qu'il existe $h_0 > 0$ tel que pour tout $h \in]-h_0, h_0[$, nous avons

$$\left\| \rho_{(z_0+h, 0)}^c(\cdot, t) - \rho_{(z_0, 0)}^c(\cdot, t) \right\|_{L^{1,N}} \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Par ailleurs, il existe $q_1 \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $j \in \{0, N\}$, $\int_{q_1}^{+\infty} q^j \rho_{(z_0, 0)}^c(q, t) dq \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

Coupons l'intégrale en deux termes. Pour h suffisamment proche de 0,

$$\begin{aligned} \int_0^{q_1} q^j |\partial_{z_0} u_{(\hat{z}, 0)}(q, t) - \partial_{z_0} u_{(z_0, 0)}(q, t)| \rho_{(z_0+h, 0)}^c(q, t) dq &\leq \varepsilon \int_0^{q_1} q^j \rho_{(z_0+h, 0)}^c(q, t) dq, \\ &\leq \underbrace{\varepsilon \left\| q \mapsto q^j \rho_{(z_0+h, 0)}^c(q, t) \right\|_{L^{1,N}}}_{\substack{\xrightarrow{h \rightarrow 0} \left\| q \mapsto q^j \rho_{(z_0, 0)}^c(q, t) \right\|_{L^{1,N}} \\ \text{car } z_0 \mapsto \rho_{(z_0, 0)}^c(\cdot, t) \text{ est continue}}} \end{aligned}$$

Il reste à étudier le terme

$$\begin{aligned} & \int_{q_1}^{+\infty} q^j |\partial_{z_0} u_{(\hat{z}, 0)}(q, t) - \partial_{z_0} u_{(z_0, 0)}(q, t)| \rho_{(z_0+h, 0)}^c(q, t) dq, \\ &\leq 2 \|\partial_z u\|_{L^\infty} \frac{\|v\|_{L^\infty}}{\alpha_v} \int_{q_1}^{+\infty} q^j \rho_{(z_0+h, 0)}^c(q, t) dq, \\ &\leq 2 \|\partial_z u\|_{L^\infty} \frac{\|v\|_{L^\infty}}{\alpha_v} \left(\int_{q_1}^{+\infty} q^j |\rho_{(z_0+h, 0)}^c(q, t) - \rho_{(z_0, 0)}^c(q, t)| dq + \int_{q_1}^{+\infty} q^j \rho_{(z_0, 0)}^c(q, t) dq \right), \\ &\leq 2 \|\partial_z u\|_{L^\infty} \frac{\|v\|_{L^\infty}}{\alpha_v} \left(\underbrace{\left\| q \mapsto q^j (\rho_{(z_0+h, 0)}^c(q, t) - \rho_{(z_0, 0)}^c(q, t)) \right\|_{L^1}}_{\substack{\leq \varepsilon \\ \text{si } h \text{ est suffisamment proche de 0}}} + \varepsilon \right), \\ &\leq 4 \|\partial_z u\|_{L^\infty} \frac{\|v\|_{L^\infty}}{\alpha_v} \varepsilon. \end{aligned}$$

(b) Considérons $\left\| \int_{\mathbb{R}_+} D(\cdot, q') (\rho_{(z_0+h, 0)}^c(q', t) - \rho_{(z_0, 0)}^c(q', t)) dq' \right\|_E$. Comme dans la démonstration du point précédent, la continuité de $z_0 \mapsto \rho_{(z_0, 0)}^c(\cdot, t)$ nous assure que

$$\left\| \int_{\mathbb{R}_+} D(\cdot, q') (\rho_{(z_0+h, 0)}^c(q', t) - \rho_{(z_0, 0)}^c(q', t)) dq' \right\|_E \leq \max(M, M') \underbrace{\left\| \rho_{(z_0+h, 0)}^c(\cdot, t) - \rho_{(z_0, 0)}^c(\cdot, t) \right\|_E}_{\substack{\leq \varepsilon \\ \text{lorsque } h \rightarrow 0}}.$$

(c) Considérons $\left\| \int_{\mathbb{R}_+} D(\cdot, q') (\partial_{z_0} \rho_{(\bar{z}, 0)}^c(q', t) - \partial_{z_0} \rho_{(z_0, 0)}^c(q', t)) dq' \right\|_E$.

De manière analogue au point précédent, nous montrons que

$$\left\| \int_{\mathbb{R}_+} D(\cdot, q') (\rho_{(z_0+h, 0)}^c(q', t) - \rho_{(z_0, 0)}^c(q', t)) dq' \right\|_E \leq \max(M, M') \underbrace{\left\| \partial_{z_0} \rho_{(z_0+h, 0)}^c(\cdot, t) - \partial_{z_0} \rho_{(z_0, 0)}^c(\cdot, t) \right\|_E}_{\substack{\leq \varepsilon \\ \text{lorsque } h \rightarrow 0}}.$$

Ces majorations nous assurent que $D_{z_0} H_1^n(z_0, \rho, t) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_+^*, E)$ existe et est bien définie par l'équation 5.54. De plus, la continuité de F_1^n sur $\mathbb{R}_+^* \times E \times \mathbb{R}_+$ assure la continuité de $(z_0, \rho, t) \mapsto D_{z_0} H_1^n(z_0, \rho, t)$. Ce résultat achève de prouver la différentiabilité de $(t \mapsto \rho_{z_0}^n(t, x_3))$ par rapport à z_0 .

Finalement, comme $z_0 \mapsto x_3(z_0)$ est de classe $\mathcal{C}^1$, l'application $z_0 \mapsto \rho_{z_0}(t, x_3(z_0))$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et nous pouvons écrire

$$D_{z_0} [\rho_{z_0}^n(t, x_3(z_0))] = D_{z_0} \rho_{z_0}^n(t, x_3(z_0)) + D_{x_3} x_3(z_0) \times D_{x_3} \rho_{z_0}^n(t, x_3(z_0)).$$

3. Il reste à montrer que $(q \mapsto \partial_{z_0} \rho_{(z_0, 0)}^n(q, t)) \in E$. La démonstration est la même que celle du théorème 5.2.7. ■

5.2.5.2 Etude du problème de Cauchy 5.36 et régularité

Remarquons premièrement qu'une simple adaptation de la démonstration du théorème 5.2.10 permet de montrer :

Théorème 5.2.13

Soit $N \in \mathbb{N}$ fixé. Supposons que :

1. pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ fixés, $q \mapsto K_{(0,0)}(q, t)$ est continue,
2. D vérifie les hypothèses 5.40.

Alors, il existe une unique solution globale $t \mapsto \rho_{(0,0)}^n(\cdot, t)$ appartenant à $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, E)$ au problème de Cauchy 5.36.

De manière similaire au résultat pour le carbone, nous montrons le théorème suivant :

Théorème 5.2.14 (Recollement continu en $(0, 0)$ des solutions)

L'application $t \mapsto \rho_{(z_0, 0)}^n(\cdot, t) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, E)$ (resp. $t \mapsto \rho_{(0, t_0)}^n(\cdot, t)$) converge uniformément sur tout compact vers $t \mapsto \rho_{(0, 0)}^n(\cdot, t)$ lorsque $z_0 \rightarrow 0$ (resp. $t_0 \rightarrow 0$). Ainsi, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, les applications $z_0 \mapsto \rho_{(z_0, 0)}^n(\cdot, t)$ et $t_0 \mapsto \rho_{(0, t_0)}^n(\cdot, t)$ admettent un prolongement par continuité en 0 au sens de la norme $\|\cdot\|_E$.

Chapitre 5. Etude des solutions du modèle de décomposition de la matière organique

Démonstration : Le principe de la démonstration est le même que celui du recollement pour les solutions du carbone. En reprenant le même formalisme, nous précisons que la différence la plus notable apparait au point 2 de la démonstration. Le problème de Cauchy étudié est :

$$(5.55) \quad \begin{cases} \partial_t(w^n(z_0, t)) = K_{(z_0, 0)}(\cdot, t)w^n(z_0, t) + B(z_0, t), \\ w(z_0, 0) = 0_E, \end{cases}$$

où nous avons posé

$$w(z_0, t) = \rho_{z_0}^n(t, \rho_0^n(\cdot, 0)) - \rho_0^n(t),$$

et

$$B(z_0, t) = (K_{(z_0, 0)}(\cdot, t) - K_{(0, 0)}(\cdot, t))\rho_0^n(t) + f_n \int_{\mathbb{R}_+} D(\cdot, q') (u_{(z_0, 0)}\rho_{(z_0, 0)}^c - u_{(0, 0)}\rho_{(0, 0)}^c) dq',$$

qui vérifie la propriété suivante pour tout $T > 0$:

$$\lim_{z_0 \rightarrow 0} \left(\sup_{t \in [0, T]} \|B(z_0, t)\|_E \right) = 0.$$

La fin de la démonstration est alors identique en tout point. ■

5.2.6 Synthèse des résultats et expression des solutions

Synthétisons dans un premier temps les résultats d'existence et d'unicité de solutions.

Synthèse .1 (Existence et unicité)

Nous supposons que :

1. l'application $(q, z) \mapsto v(q, z)$ est continue, bornée, strictement positive sur $\mathbb{R}_+^2$,
2. l'application $z \mapsto v(q, z)$ est de classe $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+)$ pour tout $q \in \mathbb{R}_+$,
3. l'application $(q, z) \mapsto K(q, z)$ est continue, bornée.
4. le noyau D vérifie :

$$\forall j \in \{0, N\}, \exists M > 0 \text{ tel que } \forall q' \in \mathbb{R}_+, \int_{\mathbb{R}_+} q^j D(q, q') dq \leq M q'^j,$$

$$M' = \sup_{q \in \mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}_+} D(q, q') dq' < +\infty,$$

$$\forall q_0 \in \mathbb{R}_+, \lim_{q \rightarrow +\infty} \int_0^{q_0} D(q, q') dq' = 0,$$

$$q \mapsto \int_{\mathbb{R}_+} D(q, q') dq' \text{ est continue,}$$

Par ailleurs,

- pour tout $z \in \mathbb{R}_+^*$, $\rho_0^c(\cdot, z), \rho_0^n(\cdot, z) \in L^{1,N} \cap \mathcal{C}_0(\mathbb{R}_+)$,
- pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, $\sigma_0^c(\cdot, z), \sigma_0^n(\cdot, z) \in L^{1,N} \cap \mathcal{C}_0(\mathbb{R}_+)$,

et

$$\lim_{t \rightarrow 0} \sigma^c(\cdot, t) = \lim_{z \rightarrow 0} \rho_0^c(\cdot, z) = \rho_0^c(\cdot, 0),$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \sigma^n(\cdot, t) = \lim_{z \rightarrow 0} \rho_0^n(\cdot, z) = \rho_0^n(\cdot, 0).$$

Alors, les solutions globales $t \mapsto \rho_{(z_0, 0)}^c(\cdot, t)$, $t \mapsto \rho_{(0, t_0)}^c(\cdot, t)$ et $t \mapsto \rho_{(0, 0)}^c(\cdot, t)$ aux problèmes de Cauchy 5.28, 5.29 et 5.30 appartiennent à $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, L^{1,N} \cap \mathcal{C}_0(\mathbb{R}_+))$ et sont positives.

De même, les solutions globales $t \mapsto \rho_{(z_0, 0)}^n(\cdot, t)$, $t \mapsto \rho_{(0, t_0)}^n(\cdot, t)$ et $t \mapsto \rho_{(0, 0)}^n(\cdot, t)$ aux problèmes de Cauchy 5.34, 5.35 et 5.36 appartiennent à $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, L^{1,N} \cap \mathcal{C}_0(\mathbb{R}_+))$ et sont positives.

Synthèse .2 (Régularité)

1. Supposons que

- $z \mapsto u(q, z)$ est continue pour tout $q \in \mathbb{R}_+$,
- $z_0 \mapsto \rho_0^c(\cdot, z_0)$ et $t_0 \mapsto \sigma^c(\cdot, t_0)$ sont continues sur $\mathbb{R}_+^*$.
- $z_0 \mapsto \rho_0^n(\cdot, z_0)$ et $t_0 \mapsto \sigma^n(\cdot, t_0)$ sont continues sur $\mathbb{R}_+^*$.

Alors les applications $(z_0, t) \mapsto \rho_{(z_0,0)}^c(., t)$ et $(t_0, t) \mapsto \rho_{(0,t_0)}^c(., t)$ sont continues sur $\mathbb{R}_+^*$. De même, les applications $(z_0, t) \mapsto \rho_{(z_0,0)}^n(., t)$ et $(t_0, t) \mapsto \rho_{(0,t_0)}^n(., t)$ sont continues sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, les applications $z_0 \mapsto \rho_{(z_0,0)}^c(., t)$, $z_0 \mapsto \rho_{(z_0,0)}^n(., t)$, $t_0 \mapsto \rho_{(0,t_0)}^c(., t)$ et $t_0 \mapsto \rho_{(0,t_0)}^n(., t)$ admettent un prolongement par continuité en 0 au sens de la norme $\|\cdot\|_{L^{1,N} \cap \mathcal{C}_0(\mathbb{R}_+)}$.

2. Supposons que

- $z \mapsto K(q, z)$ et $z \mapsto u(q, z)$ sont de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^*)$ pour tout $q \in \mathbb{R}_+$,
- $(q, z) \mapsto \partial_z K(q, z)$ et $(q, z) \mapsto \partial_z u(q, z)$ sont continues, bornées,
- il existe $\alpha_v > 0$ tel que $v(q, z) \geq \alpha_v$ pour tout $(q, z) \in \mathbb{R}_+^2$,
- $z_0 \mapsto \rho_0^c(., z_0)$ et $t_0 \mapsto \sigma^c(., t_0)$ sont de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^*)$.
- $z_0 \mapsto \rho_0^n(., z_0)$ et $t_0 \mapsto \sigma^n(., t_0)$ sont de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^*)$.

Alors les applications $(z_0, t) \mapsto \rho_{(z_0,0)}^c(., t)$ et $(t_0, t) \mapsto \rho_{(0,t_0)}^c(., t)$ sont de la classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^*)$. De même, les applications $(z_0, t) \mapsto \rho_{(z_0,0)}^n(., t)$ et $(t_0, t) \mapsto \rho_{(0,t_0)}^n(., t)$ sont de la classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^*)$.

Nous distinguerons l'expression des solutions en fonction des domaines Ω_0 , Ω_t et Ω_z .

1. Pour tout $(q, z, t) \in \Omega_z$:

$$(5.56a) \quad \rho_c(q, z, t) = \rho_{(\pi_q)_2(z,t)}^c(q, t),$$

$$(5.56b) \quad \rho_n(q, z, t) = \rho_{(\pi_q)_2(z,t)}^n(q, t).$$

2. Pour tout $(q, z, t) \in \Omega_t$:

$$(5.57a) \quad \rho_c(q, z, t) = \rho_{(\pi_q)_1(z,t)}^c(q, t - (\pi_q)_1(z, t)),$$

$$(5.57b) \quad \rho_n(q, z, t) = \rho_{(\pi_q)_1(z,t)}^n(q, t - (\pi_q)_1(z, t)).$$

3. Pour tout $(q, z, t) \in \Omega_0$:

$$(5.58a) \quad \rho_c(q, z, t) = \rho_{(0,0)}^c(q, t),$$

$$(5.58b) \quad \rho_n(q, z, t) = \rho_{(0,0)}^n(q, t).$$

Nous avons déjà montré grâce aux théorèmes 5.2.9 et 5.2.14 que les applications ρ_c et ρ_n sont continues.

Théorème 5.2.15 (Recollement $\mathcal{C}^1$ des solutions en $(0,0)$)

Si les conditions

$$\lim_{t \rightarrow 0} \partial_t \sigma^c(\cdot, t) + \nu(\cdot, 0) \lim_{z \rightarrow 0} \partial_z \rho_0^c(\cdot, 0) = H_0(\sigma_c(\cdot, 0), 0)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \partial_t \sigma^n(\cdot, t) + \nu(\cdot, 0) \lim_{z \rightarrow 0} \partial_z \rho_0^n(\cdot, 0) = H_0^n(\sigma_n(\cdot, 0), 0)$$

sont vérifiées, alors les applications $t \mapsto \rho_c(q, z, t)$ et $z \mapsto \rho_c(q, z, t)$ sont de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+)$. Nous avons le même résultat pour ρ_n .

Démonstration : Nous montrerons ce résultat dans le cas du carbone. La démonstration est rigoureusement la même pour les nutriments.

Pour déterminer la condition de recollement $\mathcal{C}^1$, il est nécessaire de prolonger le problème de Cauchy 5.29 aux valeurs négatives de temps. Ce faisant, nous reprenons la même méthodologie que pour l'étude des caractéristiques. Nous avons alors considéré le problème de Cauchy pour tout temps, pour nous ramener aux temps positifs.

Ainsi, l'extension du problème de Cauchy requiert la prolongation du champ de vecteurs H_2 aux valeurs de temps négatives. Nous noterons $\bar{H}_2 : \mathbb{R} \times E \times [t_0, +\infty[\rightarrow E$ ce champ de vecteurs étendu. Alors, si nous considérons un prolongement de la condition de bord noté $\bar{\sigma}^c \in E$ de classe $\mathcal{C}^1$ en temps, nous pouvons montrer que le problème de Cauchy

$$(5.59) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt} \bar{\rho}_{(0,t_0)}^c(\cdot, t) = \bar{H}_2(t_0, \bar{\rho}_{(0,t_0)}^c(\cdot, t), t), & \forall t \geq t_0 \\ \bar{\rho}_{(0,t_0)}^c(\cdot, t_0) = \bar{\sigma}^c(\cdot, t_0). \end{cases}$$

admet une unique solution. Les éléments de démonstration sont les mêmes que ceux vu dans les théorèmes d'existence, d'unicité et de régularité des parties précédentes.

Supposons maintenant que $\rho_0^c(\cdot, z_0) = \bar{\rho}_{(0,t_0)}^c(\cdot, 0)$ pour tout z_0 tel que $z_0 = Z(q, 0, t_0, 0)$, alors, par unicité, la solution du problème restreint coïncide avec la solution du problème étendu pour les temps positifs. Alors, nous sommes assurés du recollement $\mathcal{C}^1$ des solutions $\rho_{(0,t_0)}^c$ et $\rho_{(z_0,0)}^c$ sur la caractéristique issue de $(0,0)$.

Il reste à exprimer la condition nécessaire que doivent vérifier les conditions initiales et de bord du problème restreint. L'identification des solutions en $t_0 = 0$ nous donne l'égalité :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt_0} \bar{\sigma}^c(\cdot, t_0)|_{t_0=0} &= H_1(z_0, \rho_{(z_0,0)}(\cdot, 0), 0) + \frac{\partial Z}{\partial t}(q, 0, 0, 0) \partial_{z_0} \rho_{(z_0,0)}^c(\cdot, 0), \\ \partial_t \sigma^c(\cdot, 0) &= H_0(\sigma_c(\cdot, 0), 0) - \nu(\cdot, 0) \partial_z \rho_0^c(\cdot, 0). \end{aligned}$$

■

5.2.7 Application à la formulation particulière du modèle

Nous sommes ici confrontés à une première difficulté. En effet, l'existence et l'unicité de solutions repose sur l'hypothèse $u \in L^\infty(\mathbb{R}_+^2)$ qui n'est pas vérifiée ici. Une adaptation est donc nécessaire afin de se placer dans le cadre d'étude de ce chapitre. La notion de qualité infinie n'étant pas pertinente du point de vue conceptuel, il est raisonnable de proposer une troncature de la fonction u en la considérant constante au delà d'une valeur q_{max} à déterminer. Une simple adaptation donne la formule suivante :

$$(5.60) \quad u(q) = \begin{cases} u_0 q^\beta \mathbb{1}_{[0, q_{max}]}(q), \\ u_0 q_{max}^\beta \mathbb{1}_{[q_{max}, +\infty]}(q). \end{cases}$$

Le choix de q_{max} sera détaillé au chapitre suivant.

Vérifions maintenant si les hypothèses des synthèses .1 et .2 sont vérifiées.

1. Comme $v(q, z) = v_0$, les hypothèses concernant v sont trivialement vérifiées.
2. Vérifions que $q \mapsto K(q, z)$ est continue, bornée.

Nous avons la formule suivante :

$$K(q, z) = -f_c \frac{u_0 q^\beta}{e_0}$$

qui nous assure la continuité désirée. Il restera néanmoins à borner cette fonction pour tout $q \geq q_0$ (pour une valeur de $q_0 \in \mathbb{R}_+$ bien choisie) de la manière suivante :

$$K(q, z) = K(q_0, z), \quad \forall q \geq q_0$$

afin d'assurer que $K(q, z) \in L^\infty(\mathbb{R}^2)^2$. Cette troncature coïncide avec celle de u .

3. La continuité de u et K est trivialement vérifiée.
4. Les dérivées partielles $\partial_z K$ et $\partial_z u$ sont identiquement nulles.
5. Considérons si le noyau D choisi pour notre application numérique satisfait les hypothèses 5.40.

Pour tout $j \in [0, N]$, nous avons la relation suivante :

$$\int_{\mathbb{R}_+} q^j D(q, q') dq = \frac{\alpha + 1}{j + \alpha + 1} q'^j \leq q'^j,$$

donc $M = 1$.

D'autre part, pour tout $q \in \mathbb{R}_+$,

$$\int_{\mathbb{R}_+} D(q, q') dq' = \frac{\alpha + 1}{\alpha} = M'.$$

Montrons que $\lim_{q \rightarrow +\infty} \int_0^{q_0} D(q, q') dq'$ pour tout $q_0 \in \mathbb{R}_+$:

$$\int_0^{q_0} D(q, q') dq' = (\alpha + 1) q^\alpha \int_{\min(q, q_0)}^{q_0} \frac{dq'}{(q')^{\alpha+1}} \xrightarrow{q \rightarrow +\infty} 0.$$

Montrons que $I : q \mapsto \int_{\mathbb{R}_+} D(q, q') dq'$ est continue. Soit $q_0 \in \mathbb{R}_+$ et h tel que $q_0 + h \in \mathbb{R}_+$. Considérons :

$$\begin{aligned} |I(q_0 + h) - I(q_0)| &= \left| \int_{\mathbb{R}_+} (D(q_0 + h, q') - D(q_0, q')) dq' \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}_+} |D(q_0 + h, q') - D(q_0, q')| dq' \\ &\leq (\alpha + 1) \int_{\mathbb{R}_+} \left| \frac{(q_0 + h)^\alpha}{(q')^{\alpha+1}} \mathbb{1}_{\{q_0 + h \leq q'\}} - \frac{q_0^\alpha}{(q')^{\alpha+1}} \mathbb{1}_{\{q_0 \leq q'\}} \right| dq' \\ &\leq (\alpha + 1) \left(\int_{q_0}^{q_0 + h} \frac{q^\alpha}{(q')^{\alpha+1}} + \int_{q_0 + h}^{+\infty} \frac{((q_0 + h)^\alpha - q_0^\alpha)}{(q')^{\alpha+1}} dq' \right) \\ &\leq 2 \frac{\alpha + 1}{\alpha} \underbrace{\left(1 - \frac{q_0^\alpha}{(q_0 + h)^\alpha} \right)}_{\xrightarrow{h \rightarrow 0} 0} \end{aligned}$$

Ce résultat prouve la continuité de I .

L'ensemble de ces résultats assure l'existence d'une unique solution. La régularité des solutions dépendra de la régularité des conditions initiales.

5.3 Etat stationnaire

Dans cette partie nous nous intéressons au cas de l'apport constant de MO au cours du temps. Nous montrons l'existence et l'unicité de solutions au problème stationnaire et la convergence du modèle vers cet état stationnaire.

5.3.1 Existence et unicité

Considérons ici les solutions du problème stationnaire 5.61 notées ρ_c^∞ pour le carbone et ρ_n^∞ pour les nutriments. Les équations du problème stationnaire sont :

$$(5.61) \quad \begin{aligned} 0 &= -\frac{f_c u(q,z)}{e(q)} \rho_c^\infty(q,z) + f_c \int_{\mathbb{R}_+} D(q,q') u(q',z) \rho_c^\infty(q',z) dq' - \frac{\partial}{\partial z} [v(q,z) \rho_c^\infty(q,z)], \\ 0 &= -\frac{f_n u(q,z)}{e(q)} \rho_n^\infty(q,z) + f_n \int_{\mathbb{R}_+} D(q,q') u(q',z) \rho_n^\infty(q',z) dq' - \frac{\partial}{\partial z} [v(q,z) \rho_n^\infty(q,z)]. \end{aligned}$$

et les conditions au bord associées sont :

$$(5.62) \quad \begin{cases} \rho_c^\infty(q,0) = \sigma_c^\infty(q), \\ \rho_n^\infty(q,0) = \sigma_n^\infty(q). \end{cases}$$

Une simple réécriture de ces équations avec les notations utilisées précédemment nous donne :

$$\begin{aligned} \partial_z \rho_c^\infty(q,z) &= F_c(q,z, \rho_c^\infty(q,z)), \\ \partial_z \rho_n^\infty(q,z) &= F_n(q,z, \rho_n^\infty(q,z)). \end{aligned}$$

Théorème 5.3.1 (*Existence et unicité de solution du problème stationnaire*)

Sous les hypothèses du théorème 5.2.5, il existe une unique solution $(\rho_c^\infty, \rho_n^\infty) \in (C^1(\mathbb{R}_+, E))^2$ au problème de Cauchy défini par les équations 5.61 et les conditions initiales associées.

Démonstration : La démonstration du théorème repose sur l'application du théorème 5.1.1 aux champs de vecteurs

$$\begin{aligned} F_c : \quad \mathbb{R}_+ \times E &\rightarrow E \\ (z, \rho) &\mapsto F_c(\cdot, z, \rho), \\ F_n : \quad \mathbb{R}_+ \times E &\rightarrow E \\ (z, \rho) &\mapsto F_n(\cdot, z, \rho) \end{aligned}$$

Les hypothèses du théorème 5.2.5 assurent la définition de ces deux applications. De plus, le lemme

suivant assure l'existence et l'unicité de solutions :

Lemme 5.3.1

L'application F_c est linéaire bornée sur E c.-à-d. globalement lipschitzienne sur E et l'application F_n est globalement lipschitzienne sur E . Les constantes de Lipschitz sont indépendantes de z .

Démonstration : Montrons que $F_c : \mathbb{R}_+ \times E \rightarrow E$ est linéaire bornée. Soient $q, z \in \mathbb{R}_+$ fixés et $\rho_1, \rho_2, \rho_c \in E$ fixé. Alors,

$$\begin{aligned} \|F_c(\cdot, z, \rho)\|_{L^{1,N}} &= \sum_{k=0}^n \|q \mapsto q^k F_c(\rho, q, z)\|_{L^1}, \\ &\leq \sum_{k=0}^n \left(\|K\|_{L^\infty} \int_{\mathbb{R}_+} q^k |\rho(q)| dq + f_c \|u\|_{L^\infty} \int_{\mathbb{R}_+} |\rho(q')| \int_{\mathbb{R}_+} q^j D_{(q,q')} dq dq' \right), \\ &\leq \sum_{k=0}^n (\|K\|_{L^\infty} + f_c M \|u\|_{L^\infty}) \|q^k \rho\|_{L^1}, \\ &\leq (\|K\|_{L^\infty} + f_c M \|u\|_{L^\infty}) \|\rho\|_{L^{1,N}}. \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} |F_c(q, z, \rho)| &\leq \|K\|_{L^\infty} \|\rho\|_{L^\infty} + f_c \|u\|_{L^\infty} M' \|\rho\|_{L^\infty}, \\ \|F_c(\cdot, z, \rho)\|_{L^\infty} &\leq \|\rho\|_{L^\infty} (\|K\|_{L^\infty} + f_c \|u\|_{L^\infty} M'), \end{aligned}$$

Montrons que $F_n : \mathbb{R}_+ \times E \rightarrow E$ est globalement lipschitzienne sur E . Soient $q, z \in \mathbb{R}_+$ fixés et $\rho \in E$ fixé. Alors,

$$\begin{aligned} \|F_n(\cdot, z, \rho_1) - F_n(\cdot, z, \rho_2)\|_{L^{1,N}} &= \sum_{k=0}^n \|q^k (F_n(q, z, \rho_1) - F_n(q, z, \rho_2))\|_{L^1}, \\ &\leq \sum_{k=0}^n \|K\|_{L^\infty} \int_{\mathbb{R}_+} q^k |\rho_1(q) - \rho_2(q)| dq, \\ &\leq \|K\|_{L^\infty} \|\rho_1 - \rho_2\|_{L^{1,N}}, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} |F_n(q, z, \rho_1) - F_n(q, z, \rho_2)| &\leq \|K\|_{L^\infty} \|\rho_1 - \rho_2\|_{L^\infty}, \\ \|F_n(\cdot, z, \rho_1) - F_n(\cdot, z, \rho_2)\|_{L^\infty} &\leq \|K\|_{L^\infty} \|\rho_1 - \rho_2\|_{L^\infty}. \end{aligned}$$

■

Il reste à montrer la continuité des applications F_c et F_n . La propriété de Lipschitz globale restreint cette preuve à l'étude de la continuité des applications $z \mapsto F_c(\cdot, z, \rho)$ et $z \mapsto F_n(\cdot, z, \rho)$. Ce résultat s'obtient

facilement en reprenant les éléments de démonstration du lemme 5.2.5. ■

5.3.2 Convergence

L'objectif de cette partie est d'étudier le comportement des solutions ρ_c et ρ_n si nous supposons qu'à partir de l'instant $t = 0$, les conditions de bord σ^c et σ^n sont constantes et égales à σ_∞^c et σ_∞^n .

Théorème 5.3.2

Si nous supposons que $\sigma^c = \sigma_\infty^c$, alors nous sommes assurés que pour tout $(q, z, t) \in \Omega_t$, $\rho_c(q, z, t) = \rho_c^\infty(q, z, t)$. Autrement dit, pour tout $t > 0$ et $q \in \mathbb{R}_+$, la solution ρ_c est identique à la solution stationnaire jusqu'à la profondeur $z = Z(q, 0, 0, t)$. De la même manière, nous sommes assurés que pour tout $z > 0$ fixé, la solution ρ_c converge ponctuellement vers la solution stationnaire qui est atteinte à l'instant t vérifiant $z = Z(q, 0, 0, t)$.

Ce résultat est identique pour ρ_n .

Démonstration : Commençons par étudier le cas où $(q, z, t) \in \Omega_t$. Nous posons alors $w_c(q, z, t) = \rho_c(q, z, t) - \rho_c^\infty(q, z) \in E$ qui vérifie le problème suivant pour tout $(q, z, t) \in \Omega_t$:

$$\begin{cases} \partial_t w_c(q, z, t) + v(q, z) \partial_z w_c(q, z, t) = F_c(q, z, w_c), \\ w(q, 0, t) = 0. \end{cases}$$

En considérant à nouveau la méthode des caractéristiques comme précédemment, posons $w_{t_0}^c(q, t) = w(q, Z(q, 0, t_0, t + t_0), t + t_0)$ qui est alors solution du problème

$$\begin{cases} w_{t_0}^c(q, t) = G_c(q, 0, t_0, w_{t_0}^c, t), & t \geq 0 \\ w_{t_0}^c(q, 0) = 0. \end{cases}$$

En appliquant le théorème 5.2.5 et en considérant que l'EDO ci dessus est linéaire, nous sommes assurés que $w_{t_0}^c \equiv 0$ ce qui donne le résultat.

La preuve est identique pour ρ_n . ■

Chapitre 6

Etude de la troncature du modèle à l'aide de différences finies

Ce chapitre i) propose une méthode numérique stable permettant de simuler la décomposition de la MO dans le sol et capable de prendre en compte à terme la production de litières simulées par le modèle SLCD, ii) discute l'hypothèse de troncature du modèle présentée dans Bosatta et Agren (1996) et estime sur un exemple précis, la différence entre le modèle original et le modèle tronqué et iii) propose des exemples de simulations.

6.1 Introduction

6.1.1 Hypothèse de troncature

La troncature introduite dans Bosatta et Agren (1996) repose sur l'hypothèse que la distribution de carbone suivant la qualité est faiblement dispersée autour d'une qualité moyenne évoluant en temps et en profondeur. Afin de tester cette hypothèse, nous souhaitons étudier dans ce chapitre l'évolution le long d'un profil vertical de sol d'un apport constant de MO, dont la distribution en qualité est centrée autour d'une qualité maximale q_0 et dont la dispersion σ_c est variable. Nous comparerons alors les variables $\hat{q}$ et Φ_0^c (def.4.3.1) résultantes estimées par le modèle originel puis par le modèle tronqué et nous quantifierons alors le biais introduit par la troncature en fonction de la dispersion de la distribution de carbone. Cet apport constant est alors défini de la manière suivante :

Définition 6.1.1 (Conditions de bord - Apport constant)

Soient les apports constants de MO σ^c et σ^n définis de la manière suivante :

$$(6.1) \quad \sigma^c(q) = I_0^c \frac{e^{-(q-q_0)^2/2\sigma_c^2}}{\int_0^{q_{max}} e^{-(q-q_0)^2/2\sigma_c^2} \mathbb{1}_{\{q \leq q_{max}\}},$$

$$(6.2) \quad \sigma^n(q) = I_0^n \frac{e^{-(q-q_0)^2/2\sigma_n^2}}{\int_0^{q_{max}} e^{-(q-q_0)^2/2\sigma_n^2} \mathbb{1}_{\{q \leq q_{max}\}},$$

où I_0^c (resp. I_0^n) est la quantité totale de carbone (resp. de nutriment) apportée en surface, q_0 est la qualité maximale de l'apport et σ_c et σ_n sont les dispersions des distributions de carbone et de nutriment autour de la qualité q_0 . Ces distributions sont illustrées par la figure 6.1.

Cette formulation de l'apport en MO permettra d'identifier les différences essentielles entre les deux modèles du point de vue mathématique. Elle n'est pas nécessairement représentative d'une distribution réelle de qualité pour une litière particulière. La question de la caractérisation de la qualité des chutes de litière estimées par le modèle SLCD ne sera pas abordée dans cette thèse.

6.1.2 Restriction de l'opérateur intégral à un compact

La difficulté essentielle rencontrée dans l'élaboration d'une méthode numérique convergente pour résoudre les équations 4.6 et 4.9 est la gestion du terme intégral. Il serait avantageux de pouvoir restreindre l'intégrale à un compact c.-à-d. d'être assuré de l'existence d'un q_{max} tel que :

$$\int_0^{+\infty} D(q, q') u(q', z) \rho_c(q', z, t) dq' = \int_0^{q_{max}} D(q, q') u(q', z) \rho_c(q', z, t) dq'.$$

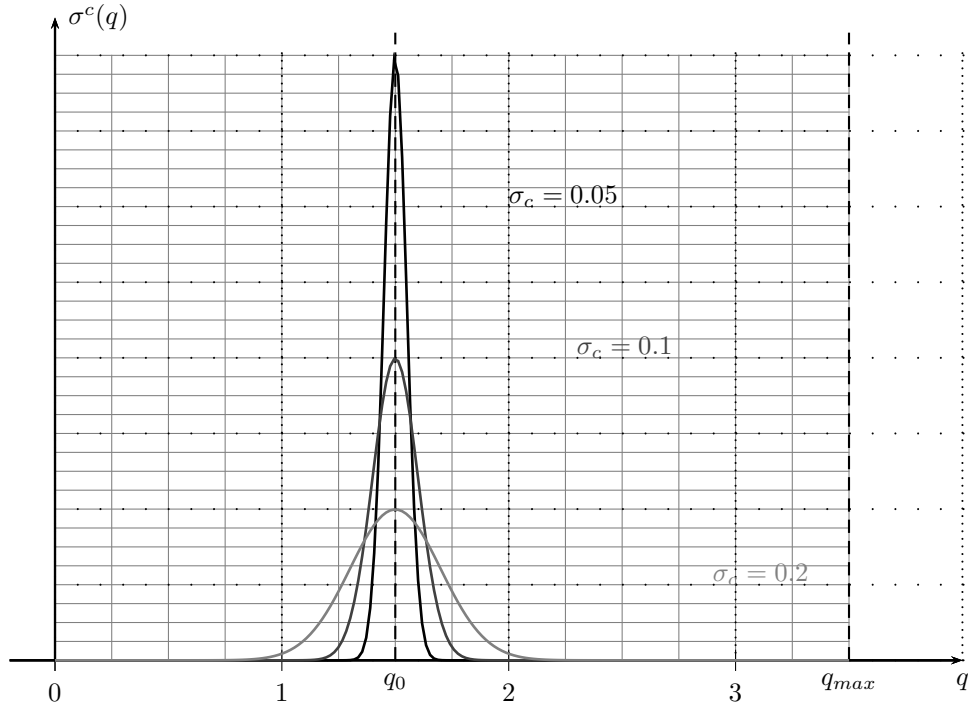


Figure 6.1 – Exemples d’apports constants de MO. Ces différentes formulations permettront de tester la validité de l’hypothèse de troncature en fonction des variations de q_0 et σ_c .

Dans notre cas d’étude particulier, nous pouvons utiliser le théorème suivant :

Théorème 6.1.1 (Conservation du support)

Supposons que $\rho_0^c, \rho_0^n, \sigma^c, \sigma^n \in E$ sont à support compact dans la direction de q et notons :

$$q_{max} = \inf \{ q \mid \text{supp}(\rho_0^c), \text{supp}(\rho_0^n), \text{supp}(\sigma^c), \text{supp}(\sigma^n) \subset [0, q] \times \mathbb{R}_+ \}.$$

Nous supposerons de plus que :

$$D(q, q') = E(q, q') \mathbf{1}_{\{q \leq q'\}}.$$

Alors les solutions ρ_c et ρ_n aux problèmes 4.6-4.11 ont leur support suivant q inclus dans $[0, q_{max}]$.

Démonstration : Pour montrer ce résultat, nous reprenons la méthode des caractéristiques. Prouver le

Chapitre 6. Etude de la troncature du modèle à l'aide de différences finies

théorème 6.1.1 revient à considérer la solution du problème

$$\begin{cases} \partial_t \rho^c(q, t) = -f_c \frac{u(q, t)}{e(q)} \rho^c(q, t) + f_c \int_q^{+\infty} E(q, q') u(q', t) \rho^c(q', t) dq', \\ \rho^c(q, t_0) = g(q, t_0) \in E, \end{cases}$$

où g est à support compact inclus dans $[0, q_{\max}]$. Le but est de montrer que pour tout $q \geq q_{\max}$ et $t \geq t_0$, $\rho^c(q, t) = 0$.

Montrons ce résultat par l'absurde. Supposons $\exists t_1 \geq t_0, \exists q_1 \geq q_0$ tel que $\rho^c(q_1, t_1) > 0$. Comme $\rho^c(q, \cdot) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, E)$ pour tout q , $\exists t_2 \in [t_0, t_1]$ tel que :

$$\begin{cases} \rho^c(q, t_2) = 0, \forall q \geq q_0 \\ \partial_t \rho^c(q_1, t_2) \neq 0 \end{cases}$$

or

$$\partial_t \rho^c(q_1, t_2) = -f_c \frac{u(q_1, t_2)}{e(q_1)} \underbrace{\rho^c(q_1, t_2)}_{=0} + f_c \int_{q_1}^{+\infty} E(q_1, q') u(q', t_2) \underbrace{\rho^c(q', t_2)}_{=0} dq' = 0,$$

ce qui est contradictoire. Ce résultat étant démontré, la preuve pour ρ_n est triviale. ■

Le noyau D que nous avons choisi satisfait les conditions du théorème 6.1.1 et ainsi, les équations 4.22 et 4.23 deviennent :

$$(6.3) \quad \frac{\partial \rho_c}{\partial t}(q, z, t) = -\frac{f_c u_0 q^\beta}{e_0} \rho_c(q, z, t) - \nu_0 \frac{\partial \rho_c}{\partial z}(q, z, t) + f_c (\alpha + 1) u_0 q^\alpha \int_q^{q_{\max}} q'^{\beta-\alpha-1} \rho_c(q', z, t) dq',$$

$$(6.4) \quad \frac{\partial \rho_n}{\partial t}(q, z, t) = -\frac{f_c u_0 q^\beta}{e_0} \rho_n(q, z, t) - \nu_0 \frac{\partial \rho_n}{\partial z}(q, z, t) + f_n (\alpha + 1) u_0 q^\alpha \int_q^{q_{\max}} q'^{\beta-\alpha-1} \rho_c(q', z, t) dq'.$$

6.1.3 Résultats généraux

Nous introduisons ici quelques définitions et propriétés générales associées à l'étude des systèmes linéaires (Quarteroni *et al.*, 2007).

Définition 6.1.2 (*Matrices monotones*)

Une matrice A est monotone si et seulement si, A est inversible et les coefficients de A^{-1} sont tous positifs ou nuls. La propriété suivante est également vérifiée : soit x tel que $Ax \geq 0$ (les inégalités sont à prendre composantes par composantes), alors $x \geq 0$.

Définition 6.1.3 (*M-matrice*)

A est une M -matrice ssi elle est monotone et ses coefficients non diagonaux sont négatifs ou nuls.

Proposition 6.1.1 (*Critère des M-matrices*)

Si les points suivants sont vérifiés,

1. $a_{i,j} \leq 0$, pour tout $i \neq j$,
2. $\sum_j a_{i,j} \geq 0$ pour tout i ,
3. A est inversible,

alors A est une M -matrice.

6.2 Différences finies pour les équations du carbone et des nutriments

Dans le cas de l'application directe de la méthode des différences finies aux équations 6.3 et 6.4, nous proposerons une méthode de résolution pour un apport non constant au cours du temps avec une condition initiale non nulle. Ceci permet notamment d'envisager l'utilisation des estimations de production de litière du modèle SLCD.

6.2.1 Notations

Nous pouvons reformuler le problème initial pour le carbone de la manière suivante, pour tout $q \in [0, q_{max}]$:

$$(6.5) \quad \begin{cases} \mathcal{F}\rho_c(q, z, t) = 0, \\ \rho_c(q, 0, t) = \sigma^c(q, t), \quad \forall t \in [0, t_{max}], \\ \rho_c(q, z, 0) = \rho_0^c(q, z), \quad \forall z \in [0, z_{max}], \end{cases}$$

et pour les nutriments, nous obtenons :

$$(6.6) \quad \begin{cases} \mathcal{D}\rho_n(q, z, t) = \frac{f_n}{f_c} \mathcal{I}\rho_c(q, z, t), \\ \rho_n(q, 0, t) = \sigma^n(q, t), \quad \forall t \in [0, t_{max}], \\ \rho_n(q, z, 0) = \rho_0^n(q, z), \quad \forall z \in [0, z_{max}], \end{cases}$$

où nous pouvons poser $\mathcal{F} = \mathcal{D} - \mathcal{I}$ et

$$(6.7) \quad \mathcal{D}\rho(q, z, t) = \frac{\partial \rho}{\partial t}(q, z, t) + v_0 \frac{\partial \rho}{\partial z}(q, z, t) + f_c \frac{u_0}{e_0} q^\beta \rho(q, z, t),$$

$$(6.8) \quad \mathcal{I}\rho(q, z, t) = f_c(\alpha + 1)u_0 q^\alpha \int_q^{q_{max}} q'^{\beta-\alpha-1} \rho(q', z, t) dq'.$$

6.2.2 Schéma numérique

6.2.2.1 Maillage

Nous fixons une profondeur maximale z_{max} et un temps de simulation maximal t_{max} . Nous notons les pas de discrétisation en espace Δ_z , en qualité Δ_q et en temps Δ_t . Ils sont définis par :

$$(6.9) \quad \begin{cases} \Delta_q = q_{max}/N_q, \\ \Delta_z = z_{max}/N_z, \\ \Delta_t = t_{max}/N_t. \end{cases}$$

Nous noterons également les points de discrétisation de la manière suivante :

$$(6.10) \quad \begin{cases} q_i = (i-1)\Delta_q, & \forall i \in \llbracket 1, N_q + 1 \rrbracket; \\ z_j = (j-1)\Delta_z, & \forall j \in \llbracket 1, N_z + 1 \rrbracket; \\ t_k = (k-1)\Delta_t, & \forall k \in \llbracket 1, N_t + 1 \rrbracket. \end{cases}$$

Nous avons ainsi défini $N_q + 1$ points de discrétisation pour q , $N_z + 1$ points de discrétisation pour z et $N_t + 1$ points de discrétisation pour t .

Nous noterons alors :

$$(6.11) \quad \begin{cases} \rho_c^{(k)}(i, j) = \rho_c(q_i, z_j, t_k), \\ \rho_n^{(k)}(i, j) = \rho_n(q_i, z_j, t_k). \end{cases}$$

Par la suite, nous utiliserons pour tout $j \in \llbracket 1, N_z + 1 \rrbracket$:

$$(6.12) \quad P_c^{(k)}(j) = \left(\rho_c^{(k)}(1, j), \rho_c^{(k)}(2, j), \dots, \rho_c^{(k)}(N_q + 1, j) \right)^\top \in \mathcal{M}_{N_q+1,1},$$

$$(6.13) \quad P_n^{(k)}(j) = \left(\rho_n^{(k)}(1, j), \rho_n^{(k)}(2, j), \dots, \rho_n^{(k)}(N_q + 1, j) \right)^\top \in \mathcal{M}_{N_q+1,1},$$

puis par concaténation :

$$(6.14) \quad P_c^{(k)} = \left(P_c^{(k)}(1)^\top, P_c^{(k)}(2)^\top, \dots, P_c^{(k)}(N_z + 1)^\top \right)^\top \in \mathcal{M}_{(N_q+1) \times (N_z+1), 1},$$

$$(6.15) \quad P_n^{(k)} = \left(P_n^{(k)}(1)^\top, P_n^{(k)}(2)^\top, \dots, P_n^{(k)}(N_z + 1)^\top \right)^\top \in \mathcal{M}_{(N_q+1) \times (N_z+1), 1}.$$

6.2.2.2 Opérateurs discrets et consistance du schéma

Nous introduisons alors les opérateurs discrets D et I définis d'une part, pour tout $i \in \llbracket 1, N_q + 1 \rrbracket$, $j \in \llbracket 2, N_z + 1 \rrbracket$, $k \in \llbracket 1, N_t + 1 \rrbracket$,

$$(6.16) \quad Dv(i, j, k) = \frac{1}{\Delta_t} (v(i, j, k) - v(i, j, k-1)) + v_0 \frac{1}{\Delta_z} (v(i, j, k) - v(i, j-1, k)) + f_c \frac{u_0}{e_0} \Delta_q^\beta (i-1)^\beta v(i, j, k),$$

et d'autre part, pour tout $j \in \llbracket 1, N_z + 1 \rrbracket$, $k \in \llbracket 1, N_t + 1 \rrbracket$,

$$(6.17) \quad \begin{cases} Iv(1, j, k) = Iv(N_q + 1, j, k) = 0, \\ Iv(i, j, k) = f_c(\alpha + 1)u_0\Delta_q^\beta \left(\frac{(i-1)^{\beta-1}}{2} v(i, j, k) + \dots \right. \\ \left. \sum_{l=i+1}^{N_q} \left(\frac{i-1}{l-1} \right)^\alpha (l-1)^{\beta-1} v(l, j, k) + \left(\frac{i-1}{N_q} \right)^\alpha \frac{N_q^{\beta-1}}{2} v(N_q + 1, j, k) \right), \quad \forall i \in \llbracket 2, N_q \rrbracket. \end{cases}$$

L'opérateur $\mathcal{D}$ est alors approché par l'opérateur aux différences fines décentré en amont en espace et implicite en temps D et où I est une estimation explicite en temps de l'opérateur intégral $\mathcal{I}$ par la méthode des trapèzes. Nous obtenons alors le schéma numérique implicite-explicite suivant pour l'équation du carbone, pour tout $i \in \llbracket 1, N_q + 1 \rrbracket$:

$$(6.18) \quad \begin{cases} D\rho_c^{(k)}(i, j) - I\rho_c^{(k-1)}(i, j) = 0, & \forall j \in \llbracket 2, N_z + 1 \rrbracket, k \in \llbracket 2, N_t + 1 \rrbracket, \\ \rho_c^{(k)}(i, 1) = \sigma^c(q_i, t_k), & \forall k \in \llbracket 2, N_t + 1 \rrbracket, \\ \rho_c^{(1)}(i, j) = \rho_0^c(q_i, z_j), & \forall j \in \llbracket 1, N_z + 1 \rrbracket, \end{cases}$$

et pour les équations associées aux nutriments, pour tout $i \in \llbracket 1, N_q + 1 \rrbracket$:

$$(6.19) \quad \begin{cases} D\rho_n^{(k)}(i, j) = \frac{f_n}{f_c} I\rho_c^{(k-1)}(i, j), & \forall j \in \llbracket 2, N_z + 1 \rrbracket, k \in \llbracket 2, N_t + 1 \rrbracket, \\ \rho_n^{(k)}(i, 1) = \sigma^n(q_i, t_k), & \forall k \in \llbracket 2, N_t + 1 \rrbracket, \\ \rho_n^{(1)}(i, j) = \rho_0^n(q_i, z_j), & \forall j \in \llbracket 1, N_z + 1 \rrbracket. \end{cases}$$

Le théorème ci-dessous assure que le schéma implicite-explicite ainsi défini est consistant.

6.2 Différences finies pour les équations du carbone et des nutriments

Théorème 6.2.1 (Consistance du schéma implicite-explicite)

Le schéma numérique 6.18-6.19 associé au problème intégral-différentiel 6.5-6.6 est consistant d'ordre 0 c.-à-d. pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $h > 0$ tel que pour tous $\Delta_t, \Delta_z, \Delta_q \leq h$, pour tous $i \in \llbracket 1, N_q + 1 \rrbracket$, $j \in \llbracket 2, N_z + 1 \rrbracket$, $k \in \llbracket 1, N_t \rrbracket$,

$$\begin{aligned} |D\rho_c(q_i, z_j, t_{k+1}) - I\rho_c(q_i, z_j, t_k)| &\leq \varepsilon, \\ \left| D\rho_n(q_i, z_j, t_{k+1}) - \frac{f_n}{f_c} I\rho_c(q_i, z_j, t_k) \right| &\leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Démonstration : Nous montrons ce résultat pour ρ_c . La démonstration du résultat pour ρ_n reprend exactement les mêmes arguments.

La régularité de ρ_c et l'application de la formule de Taylor-Young nous assurent que pour tout $i \in \llbracket 1, N_q + 1 \rrbracket$, $j \in \llbracket 2, N_z + 1 \rrbracket$, $k \in \llbracket 1, N_t \rrbracket$,

$$\begin{aligned} \partial_t \rho_c(q_i, z_j, t_{k+1}) &= \frac{1}{\Delta_t} (\rho_c(q_i, z_j, t_{k+1}) - \rho_c(q_i, z_j, t_k)) + \epsilon_t(q_i, z_j, t_{k+1}, \Delta_t), \\ \partial_z \rho_c(q_i, z_j, t_{k+1}) &= \frac{1}{\Delta_z} (\rho_c(q_i, z_j, t_{k+1}) - \rho_c(q_i, z_{j-1}, t_{k+1})) + \epsilon_z(q_i, z_j, t_{k+1}, \Delta_z), \end{aligned}$$

où ϵ_t et ϵ_z sont des applications continues, bornées sur $[0, q_{\max}] \times [0, z_{\max}] \times [0, t_{\max}]$ et telles que pour tout (q, z, t) , $\lim_{\Delta_t \rightarrow 0} \epsilon_t(q, z, t, \Delta_t) = \lim_{\Delta_z \rightarrow 0} \epsilon_z(q, z, t, \Delta_z) = 0$. Nous avons alors :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta_t} (\rho_c(q_i, z_j, t_{k+1}) - \rho_c(q_i, z_j, t_k)) &= \partial_t \rho_c(q_i, z_j, t_{k+1}) - \epsilon_t(q_i, z_j, t_{k+1}, \Delta_t), \\ &= -\nu_0 \partial_z \rho_c(q_i, z_j, t_{k+1}) - f_c \frac{u_0}{e_0} q_i^\beta \rho_c(q_i, z_j, t_{k+1}) - \epsilon_t(q_i, z_j, t_{k+1}, \Delta_t) \\ &\quad + (\alpha + 1) f_c u_0 q_i^\alpha \int_{q_i}^{q_{N_q+1}} (q')^{\beta-\alpha-1} \rho_c(q', z_j, t_{k+1}) dq'. \end{aligned}$$

Ceci assure que

$$D\rho_c(q_i, z_j, t_{k+1}) + \epsilon_z(q_i, z_j, t_{k+1}, \Delta_z) + \epsilon_t(q_i, z_j, t_{k+1}, \Delta_t) = \mathcal{I}\rho_c(q_i, z_j, t_{k+1}).$$

Il reste à considérer $\mathcal{I}\rho_c(q_i, z_j, t_{k+1})$:

$$\begin{aligned} \mathcal{I}\rho_c(q_i, z_j, t_{k+1}) &= \mathcal{I}\rho_c(q_i, z_j, t_k) + \mathcal{I}\rho_c(q_i, z_j, t_{k+1}) - \mathcal{I}\rho_c(q_i, z_j, t_k), \\ &= \mathcal{I}\rho_c(q_i, z_j, t_k) + \mathcal{I}(\rho_c(q_i, z_j, t_{k+1}) - \rho_c(q_i, z_j, t_k)). \end{aligned}$$

Le théorème des valeurs intermédiaires et la régularité de ρ_c nous assurent qu'il existe une application

continue,

$$\xi_{i,j,k} : [q_i, q_{\max}] \rightarrow [t_k, t_{k+1}],$$

telle que

$$\rho_c(q_i, z_j, t_{k+1}) - \rho_c(q_i, z_j, t_k) = \Delta_t \partial_t \rho_c(q', z_j, \xi_{i,j,k}(q')).$$

Alors, nous avons,

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(\rho_c(q_i, z_j, t_{k+1}) - \rho_c(q_i, z_j, t_k)) &= \Delta_t f_c u_0 q_i^\alpha \int_{q_i}^{q_{\max}} (q')^{\beta-\alpha-1} \partial_t \rho_c(q', z_j, \xi_{i,j,k}(q')) dq', \\ &= \epsilon_{\exp}(q_i, z_j, t_k, \Delta_t), \end{aligned}$$

et $\lim_{\Delta_t \rightarrow 0} \epsilon_{\exp}(q_i, z_j, t_k, \Delta_t) = 0$ pour tout $i \in \llbracket 1, N_q + 1 \rrbracket$, $j \in \llbracket 2, N_z + 1 \rrbracket$, $k \in \llbracket 1, N_t \rrbracket$. Alors nous avons

$$D\rho_c(q_i, z_j, t_{k+1}) + \epsilon_z(q_i, z_j, t_{k+1}, \Delta_z) + \epsilon_t(q_i, z_j, t_{k+1}, \Delta_t) = \mathcal{I}\rho_c(q_i, z_j, t_k) + \epsilon_{\exp}(q_i, z_j, t_k, \Delta_t).$$

Il reste à estimer l'erreur de troncature dans la méthode des trapèzes.

$$\begin{aligned} \int_{q_i}^{q_{N_q+1}} q_i^\alpha (q')^{\beta-\alpha-1} \rho_c(q', z_j, t_k) dq' &= \sum_{l=i}^{N_q+1} \int_{q_l}^{q_{l+1}} \underbrace{q_i^\alpha (q')^{\beta-\alpha-1} \rho_c(q', z_j, t_k)}_{g(i,j,k,q')} dq' \\ &= \sum_{l=i}^{N_q+1} \frac{\Delta_q}{2} (g(i, j, k, q_{l+1}) + g(i, j, k, q_l)) + \epsilon(i, j, k, l). \end{aligned}$$

Alors nous avons

$$\begin{aligned} |\epsilon(i, j, k, l)| &= \left| \int_{q_l}^{q_{l+1} + \frac{\Delta_q}{2}} (g(i, j, k, q') - g(i, j, k, q_l)) dq' + \int_{q_l + \frac{\Delta_q}{2}}^{q_{l+1}} (g(i, j, k, q') - g(i, j, k, q_{l+1})) dq' \right|, \\ &\leq \frac{\Delta_q}{2} \left(\sup_{q' \in [q_l, \frac{\Delta_q}{2}]} |g(i, j, k, q') - g(i, j, k, q_l)| + \sup_{q' \in [\frac{\Delta_q}{2}, q_{l+1}]} |g(i, j, k, q') - g(i, j, k, q_{l+1})| \right), \\ &\leq \Delta_q \omega_{i,j,k} \left(\frac{\Delta_q}{2} \right), \end{aligned}$$

où $\omega_{i,j,k}$ est le module de continuité de l'application $g(i, j, k, \cdot)$. Pour la définition du module de continuité, nous renvoyons à Demailly (2006). Alors, en définissant $\omega = \sup_{i,j,k} \omega_{i,j,k}$, nous sommes assurés que

$$|\mathcal{I}\rho_c(q_i, z_j, t_k) - I\rho_c(q_i, z_j, t_k)| \leq \omega \left(\frac{\Delta_q}{2} \right)$$

où $\lim_{\Delta_q \rightarrow 0} \omega \left(\frac{\Delta_q}{2} \right) = 0$ ce qui achève la démonstration. ■

6.2 Différences finies pour les équations du carbone et des nutriments

6.2.2.3 Formulation matricielle et stabilité numérique du schéma

Avant d'étudier la stabilité et la convergence de ce schéma, nous allons proposer la formulation matricielle de ce schéma afin de mettre en évidence ses propriétés.

Définition 6.2.1 (Nombre de Courant)

Posons $c_0 = \nu_0 \frac{\Delta_t}{\Delta_z}$.

Introduisons maintenant les matrices $A, B, C \in \mathcal{M}_{N_q+1}$:

$$(6.20) \quad A = (a_{i,l}), \quad \begin{cases} a_{i,i} = f_c(\alpha+1)u_0\Delta_q^\beta \frac{(i-1)^{\beta-1}}{2}, \quad i \in \llbracket 2, N_q \rrbracket, \\ a_{i,l} = f_c(\alpha+1)u_0\Delta_q^\beta \left(\frac{i-1}{l-1}\right)^\alpha (l-1)^{\beta-1}, \quad i \in \llbracket 2, N_q \rrbracket, l \in \llbracket i+1, N_q \rrbracket, \\ a_{i,N_q+1} = f_c(\alpha+1)u_0\Delta_q^\beta \left(\frac{i-1}{N_q}\right)^\alpha \frac{N_q^{\beta-1}}{2}, \quad i \in \llbracket 2, N_q \rrbracket, \\ a_{i,l} = 0 \quad \text{sinon,} \end{cases}$$

$$(6.21) \quad B = (b_{i,l}), \quad \begin{cases} b_{i,i} = 1 + c_0 + \Delta_t f_c \frac{u_0}{e_0} \Delta_q^\beta (i-1)^\beta, \\ b_{i,l} = 0 \quad \text{si } i \neq l, \end{cases}$$

$$(6.22) \quad C = -c_0 \mathbb{I}_{N_q+1}.$$

Nous pouvons alors introduire pour tout $k \in \llbracket 1, N_t \rrbracket$, les relations matricielles ci dessous :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} I_d & & & (0) \\ & C & B & \\ & & & \\ (0) & & & C & B \end{pmatrix}}_{=B} P_c^{(k+1)} = \underbrace{\begin{pmatrix} (0) & \text{---} & (0) \\ & I_d + \Delta_t A & & (0) \\ & & & \\ (0) & & & I_d + \Delta_t A \end{pmatrix}}_{=C} P_c^{(k)} + S_c^{(k+1)}$$

$$\mathcal{B}P_c^{(k+1)} = \begin{pmatrix} (0) & \text{-----} & (0) \\ \vdots & \text{-----} & \vdots \\ (0) & \text{-----} & (0) \end{pmatrix} P_n^{(k)} + \frac{f_n}{f_c} \Delta_t \begin{pmatrix} (0) & \text{-----} & (0) \\ \vdots & \text{-----} & \vdots \\ (0) & \text{-----} & (0) \end{pmatrix} P_c^{(k)} + S_n^{(k+1)}$$

où nous avons défini les suites des vecteurs d'apport en MO pour $k \in \llbracket 2, N_t + 1 \rrbracket$:

$$(6.23) \quad S_c^{(k)} = \left(P_c^{(k)}(1)^\top, 0, \dots, 0 \right)^\top \in \mathcal{M}_{(N_q+1) \times (N_z+1), 1},$$

$$(6.24) \quad S_n^{(k)} = \left(P_n^{(k)}(1)^\top, 0, \dots, 0 \right)^\top \in \mathcal{M}_{(N_q+1) \times (N_z+1), 1},$$

avec

$$(6.25) \quad P_c^{(k)}(1) = \left(\sigma^c(q_1, t_k), \dots, \sigma^c(q_{N_q+1}, t_k) \right)^\top \in \mathcal{M}_{N_q+1, 1},$$

$$(6.26) \quad P_n^{(k)}(1) = \left(\sigma^n(q_1, t_k), \dots, \sigma^n(q_{N_q+1}, t_k) \right)^\top \in \mathcal{M}_{N_q+1, 1},$$

et où la condition initiale est définie par

$$(6.27) \quad P_c^{(1)} = \left(P_c^{(1)}(1)^\top, \dots, P_c^{(1)}(N_z+1)^\top \right)^\top \in \mathcal{M}_{(N_q+1) \times (N_z+1), 1},$$

$$(6.28) \quad P_n^{(1)} = \left(P_n^{(1)}(1)^\top, \dots, P_n^{(1)}(N_z+1)^\top \right)^\top \in \mathcal{M}_{(N_q+1) \times (N_z+1), 1},$$

avec

$$(6.29) \quad P_c^{(1)}(j) = \left(\rho_0^c(q_1, z_j), \dots, \rho_0^c(q_{N_q+1}, z_j) \right)^\top \in \mathcal{M}_{N_q+1, 1},$$

$$(6.30) \quad P_n^{(1)}(j) = \left(\rho_0^n(q_1, z_j), \dots, \rho_0^n(q_{N_q+1}, z_j) \right)^\top \in \mathcal{M}_{N_q+1, 1}.$$

Etudions maintenant les propriétés des matrices ainsi définies. Considérons la matrice $\mathcal{B}$.

Proposition 6.2.1

La matrice $\mathcal{B}$ est une M-matrice. Sa norme est donnée, pour tout $\Delta_t, \Delta_z > 0$, par

$$(6.31) \quad \|\mathcal{B}\|_\infty = 1 + 2c_0 + \Delta_t f_c \frac{u_0}{e_0} q_{\max}^\beta.$$

6.2 Différences finies pour les équations du carbone et des nutriments

$\mathcal{B}$ est inversible et les coefficients de sa matrice inverse $\mathcal{B}^{-1}$ sont tous positifs ou nuls et

$$(6.32) \quad \|\mathcal{B}^{-1}\|_{\infty} = 1.$$

Le conditionnement $K_{\infty}(\mathcal{B})$ de la matrice $\mathcal{B}$ est alors majoré, pour tout $\Delta_t, \Delta_z > 0$, par

$$(6.33) \quad K_{\infty}(\mathcal{B}) = \|\mathcal{B}\|_{\infty} \|\mathcal{B}^{-1}\|_{\infty} \leq 1 + 2c_0 + \Delta_t f_c \frac{u_0}{e_0} q_{max}^{\beta}.$$

Démonstration : La matrice $\mathcal{B}$ est clairement inversible. Une simple reprise de la formulation de $\mathcal{B}$ permet de calculer sa norme.

La proposition 6.1.1 suffit à montrer la positivité de $\mathcal{B}^{-1}$.

Les matrices B et C sont inversibles et commutent (matrices diagonales à coefficients diagonaux non nuls). Grâce à la méthode du pivot de Gauss, en posant $E = -CB^{-1}$, nous pouvons définir $\mathcal{B}^{-1}$ par blocs :

$$\mathcal{B}^{-1} = \begin{pmatrix} I_d & & & & \\ & E^1 & B^{-1} & & \\ & & E^1 B^{-1} & B^{-1} & \\ & & & \ddots & \\ & & & & E^1 B^{-1} & B^{-1} \end{pmatrix} \quad (0)$$

La matrice $E \in \mathcal{M}_{N_q+1}$ est une matrice diagonale et pour tout $i \in \llbracket 1, N_q + 1 \rrbracket$,

$$e_{i,i} = \frac{-c_{i,i}}{b_{i,i}} = \frac{c_0}{1 + c_0 + \Delta_t f_c \frac{u_0}{e_0} \Delta_q^{\beta} (i-1)^{\beta}}.$$

Précisons immédiatement que $\|E\|_{\infty} = \frac{c_0}{1+c_0}$ et $\|\mathcal{B}^{-1}\|_{\infty} = \frac{1}{1+c_0}$.

En considérant la positivité de la matrice $\mathcal{B}^{-1}$ et sa formulation par bloc, il apparait que sa norme

est atteinte sur la première ligne ou sur la dernière (par blocs) :

$$\begin{aligned}
 \|\mathcal{B}^{-1}\|_{\infty} &= \max \left(1, \max_{i \in \llbracket 1, N_q+1 \rrbracket} \left(e_{i,i}^{N_z} + \sum_{j=1}^{N_z-1} e_{i,i}^j b_{i,i}^{-1} + b_{i,i}^{-1} \right) \right), \\
 &= \max \left(1, \left(\frac{c_0}{1+c_0} \right)^{N_z} + \frac{1}{1+c_0} \sum_{j=1}^{N_z-1} \left(\frac{c_0}{1+c_0} \right)^j + \frac{1}{1+c_0} \right), \\
 &= \max \left(1, \left(\frac{c_0}{1+c_0} \right)^{N_z} + \frac{c_0}{(1+c_0)^2} \frac{1 - \left(\frac{c_0}{1+c_0} \right)^{N_z-1}}{1 - \frac{c_0}{1+c_0}} + \frac{1}{1+c_0} \right), \\
 &= 1.
 \end{aligned}$$

Considérons maintenant la matrice $\mathcal{C}$.

Proposition 6.2.2

Les matrices A et $\mathcal{A}$ ont la même norme et nous avons la majoration suivante :

$$(6.34) \quad \|\mathcal{A}\|_{\infty} = \|A\|_{\infty} \leq 2f_c u_0(\alpha + 1)q_{\max}^{\beta}.$$

Démonstration : La matrice $\mathcal{A}$ est une matrice diagonale par bloc, chaque bloc étant égal à la matrice A .

Il est alors évident que $\|\mathcal{A}\|_{\infty} = \|A\|_{\infty}$. Considérons alors $\|A\|_{\infty}$:

$$\begin{aligned}
 |a_{i,l}| &\leq N_q^{\beta-1} f_c(\alpha + 1)u_0\Delta_q^{\beta}, \\
 &\leq f_c u_0(\alpha + 1)q_{\max}^{\beta-1}\Delta_q.
 \end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned}
 \sum_{l=1}^{N_q+1} |a_{i,l}| &\leq (N_q + 1)f_c u_0(\alpha + 1)q_{\max}^{\beta-1}\Delta_q, \\
 \max_{i \in \llbracket 1, N_q+1 \rrbracket} \sum_{l=1}^{N_q+1} |a_{i,l}| &\leq f_c u_0(\alpha + 1)q_{\max}^{\beta} + f_c u_0(\alpha + 1)q_{\max}^{\beta-1}\Delta_q.
 \end{aligned}$$

Et donc

$$\|A\|_{\infty} \leq 2f_c u_0(\alpha + 1)q_{\max}^{\beta}.$$

Ces propriétés matricielles nous permettent de montrer la positivité et la stabilité du schéma.

6.2 Différences finies pour les équations du carbone et des nutriments

Proposition 6.2.3 (Positivité du schéma implicite-explicite)

Quelque soit $k \in \llbracket 1, N_t + 1 \rrbracket$, nous sommes assurés que $P_c^{(k)}$ et $P_n^{(k)}$ sont positifs ou nuls composante par composante.

Démonstration : Rappelons que pour tout $k \in \llbracket 1, N_t \rrbracket$,

$$P_c^{(k+1)} = \mathcal{B}^{-1} \mathcal{C} P_c^{(k)} + \mathcal{B}^{-1} S_c^{(k+1)}.$$

Rappelons également que $S_c^{(k)} \geq 0$ pour tout $k \in \llbracket 2, N_t + 1 \rrbracket$ et $P_c^{(1)} \geq 0$. Alors, comme $\mathcal{B}^{-1} \geq 0$ et $\mathcal{C} \geq 0$, nous sommes assurés par récurrence que $P_c^{(k)} \geq 0$. La démonstration est semblable pour $P_n^{(k)}$. ■

Théorème 6.2.2 (Stabilité inconditionnelle du schéma implicite-explicite)

Le schéma numérique 6.18-6.19 vérifie la propriété suivante pour tout $k \in \llbracket 1, N_t + 1 \rrbracket$,

$$(6.35) \quad \|P_c^{(k)}\|_\infty \leq e^{t_{\max} \|A\|_\infty} \left(\sup_{z \in [0, z_{\max}]} \|\rho_0^c(\cdot, z)\|_{L^\infty} + \sup_{t \in [0, t_{\max}]} \|\sigma_c(\cdot, t)\|_{L^\infty} \right) = C_{\max},$$

$$(6.36) \quad \|P_n^{(k)}\|_\infty \leq \max \left(\sup_{z \in [0, z_{\max}]} \|\rho_0^n(\cdot, z)\|_{L^\infty}, \sup_{t \in [0, t_{\max}]} \|\sigma_n(\cdot, t)\|_{L^\infty} \right) + \frac{f_n}{f_c} t_{\max} \|A\|_\infty C_{\max},$$

ce qui assure la stabilité inconditionnelle du schéma.

Démonstration : Soit $\Delta_t > 0$ fixé.

1. Considérons le schéma numérique associé à l'équation du carbone. Définissons tout d'abord, la suite $(u_n)_{n \in \llbracket 1, N_t + 1 \rrbracket}$ par :

$$u_1 = \sup_{z \in [0, z_{\max}]} \|\rho_0^c(\cdot, z)\|_{L^\infty} + \sup_{t \in [0, t_{\max}]} \|\sigma_c(\cdot, t)\|_{L^\infty},$$

et $u_{n+1} = \alpha u_n$ où nous avons posé $\alpha = 1 + \Delta_t \|A\|_\infty$. Alors, pour tout $n \in \llbracket 1, N_t + 1 \rrbracket$, $u_n = \alpha^{n-1} u_1$.

Nous allons montrer par récurrence que pour tout $n \in \llbracket 1, N_t + 1 \rrbracket$, nous avons $\|P_c^{(n)}\|_\infty \leq u_n$. Le résultat est évident pour $n = 0$. Supposons maintenant la propriété vérifiée à un rang n fixé. Montrons alors que $\|P_c^{(n+1)}\|_\infty \leq u_{n+1}$.

- (a) Nous montrons tout d'abord que $\|\mathcal{C} P_c^{(n)} + S_c^{(n+1)}\|_\infty \leq u_{n+1}$. Posons $v = \|P_c^{(n)}\|_\infty (1, 1, \dots, 1)^\top \in \mathcal{M}_{(N_q+1) \times (N_z+1), 1}$ ce qui assure que $0 \leq u - P_c^{(n)}$. Comme $0 \leq \mathcal{C}$, nous sommes assurés que $0 \leq \mathcal{C}(v - P_c^{(n)})$ et donc,

$$\mathcal{C} P_c^{(n)} \leq \mathcal{C} v.$$

Par ailleurs, si nous posons

$$\begin{aligned} v_1 &= (v_{N_q+2}, \dots, v_{(N_q+1) \times (N_z+1)})^\top \in \mathcal{M}_{(N_q+1) \times N_z, 1}, \\ \bar{P}_c^{(n)} &= (P_c^{(n)}(2)^\top, \dots, P_c^{(n)}(N_z+1)^\top)^\top \in \mathcal{M}_{(N_q+1) \times N_z, 1}, \end{aligned}$$

nous sommes assurés de l'inégalité

$$(I_d + \Delta_t \mathcal{A}) v_1 \leq (I_d + \Delta_t \|\mathcal{A}\|_\infty) \left\| \bar{P}_c^{(n)} \right\|_\infty (1_{1, N_q+1}, \dots, 1_{1, N_q+1})^\top.$$

Considérons maintenant la matrice $\mathcal{C}$. Le résultat ci-dessus nous assure que

$$\begin{aligned} \mathcal{C}v &\leq (I_d + \Delta_t \|\mathcal{A}\|_\infty) v, \\ \|\mathcal{C}v\|_\infty &\leq (1 + \Delta_t \|\mathcal{A}\|_\infty) \left\| P_c^{(n)} \right\|_\infty, \\ \left\| \mathcal{C}P_c^{(n)} \right\|_\infty &\leq \alpha \left\| P_c^{(n)} \right\|_\infty. \end{aligned}$$

De plus, vu la formulation par blocs de $\mathcal{C}$ (première ligne de 0), nous sommes assurés que

$$\begin{aligned} \left\| \mathcal{C}P_c^{(n)} + S_c^{(n+1)} \right\|_\infty &\leq \max \left(\left\| \mathcal{C}P_c^{(n)} \right\|_\infty, \left\| S_c^{(n+1)} \right\|_\infty \right), \\ &\leq \max \left(\alpha \left\| P_c^{(n)} \right\|_\infty, \left\| S_c^{(n+1)} \right\|_\infty \right), \\ &\leq \max(\alpha^n u_1, u_1), \\ &\leq \alpha^n u_1, \\ &\leq u_{n+1}, \end{aligned}$$

- (b) Posons $w = (1, \dots, 1)^\top \in \mathcal{M}_{(N_q+1) \times (N_z+1), 1}$. Remarquons tout d'abord que $\mathcal{B}w \geq w \geq 0$. Alors, comme $u_{n+1} > 0$, nous avons :

$$\begin{aligned} u_{n+1}w &\leq \mathcal{B}u_{n+1}w, \\ u_{n+1}w - \mathcal{B}P_c^{(n+1)} &\leq \mathcal{B}u_{n+1}w - \mathcal{B}P_c^{(n+1)}, \\ u_{n+1}w - (\mathcal{C}P_c^{(n)} + S_c^{(n+1)}) &\leq \mathcal{B}(u_{n+1}w - P_c^{(n+1)}), \\ 0 &\leq \mathcal{B}(u_{n+1}w - P_c^{(n+1)}). \end{aligned}$$

Comme $\mathcal{B}$ est une M-matrice, elle est monotone. Aussi, $u_{n+1}w - P_c^{(n+1)} \geq 0$ et donc $u_{n+1} \geq \left\| P_c^{(n+1)} \right\|_\infty$.

6.2 Différences finies pour les équations du carbone et des nutriments

Nous avons donc montré que pour tout $n \in \llbracket 1, N_t + 1 \rrbracket$,

$$\begin{aligned} \|P_c^{(n)}\|_\infty &\leq (1 + \Delta_t \|A\|_\infty)^{n-1} \left(\sup_{z \in [0, z_{\max}]} \|\rho_0^c(\cdot, z)\|_{L^\infty} + \sup_{t \in [0, t_{\max}]} \|\sigma_c(\cdot, t)\|_{L^\infty} \right), \\ \|P_c^{(n)}\|_\infty &\leq \left(1 + \frac{t_{\max}}{N_t} \|A\|_\infty \right)^{N_t} \left(\sup_{z \in [0, z_{\max}]} \|\rho_0^c(\cdot, z)\|_{L^\infty} + \sup_{t \in [0, t_{\max}]} \|\sigma_c(\cdot, t)\|_{L^\infty} \right), \\ \|P_c^{(n)}\|_\infty &\leq e^{t_{\max} \|A\|_\infty} \left(\sup_{z \in [0, z_{\max}]} \|\rho_0^c(\cdot, z)\|_{L^\infty} + \sup_{t \in [0, t_{\max}]} \|\sigma_c(\cdot, t)\|_{L^\infty} \right). \end{aligned}$$

2. Considérons maintenant le schéma associé à l'équation des nutriments. Vu la relation matricielle associée et la norme $\|\mathcal{B}^{-1}\|_\infty = 1$, nous sommes assurés de l'inégalité suivante :

$$(6.37) \quad \|P_n^{(k+1)}\|_\infty \leq \max \left(\|P_n^{(k)}\|_\infty + \frac{f_n}{f_c} \Delta_t \|A\|_\infty \|P_c^{(k)}\|_\infty, \|S_n^{(k+1)}\|_\infty \right).$$

Introduisons la suite croissante $(c_k)_{k \in \llbracket 1, N_t + 1 \rrbracket}$ définie par

$$c_k = \max \left(\sup_{t \in [0, t_{\max}]} \|\sigma^n(\cdot, t)\|_{L^\infty}, \sup_{z \in [0, z_{\max}]} \|\rho_0^n(\cdot, z)\|_{L^\infty} \right) + \frac{f_n}{f_c} (k-1) \Delta_t \|A\|_\infty C_{\max}.$$

Montrons par récurrence que pour tout $k \in \llbracket 1, N_t + 1 \rrbracket$, $\|P_n^{(k)}\|_\infty \leq c_k$.

Si $k = 1$,

$$\begin{aligned} c_1 &= \max \left(\sup_{t \in [0, t_{\max}]} \|\sigma^n(\cdot, t)\|_{L^\infty}, \sup_{z \in [0, z_{\max}]} \|\rho_0^n(\cdot, z)\|_{L^\infty} \right), \\ \|P_n^{(1)}\|_\infty &\leq \sup_{z \in [0, z_{\max}]} \|\rho_0^n(\cdot, z)\|_{L^\infty} \leq c_1. \end{aligned}$$

Supposons que la propriété est vérifiée jusqu'à un rang $k \in \llbracket 1, N_t \rrbracket$ fixé. Alors, grâce à l'inégalité 6.37, nous avons

$$\begin{aligned} \|P_n^{(k+1)}\|_\infty &\leq \max \left(c_k + \frac{f_n}{f_c} \Delta_t \|A\|_\infty C_{\max}, \sup_{t \in [0, t_{\max}]} \|\sigma^n(\cdot, t)\|_{L^\infty} \right), \\ &\leq c_k + \frac{f_n}{f_c} \Delta_t \|A\|_\infty C_{\max}, \\ &\leq c_{k+1}. \end{aligned}$$

Ainsi comme la suite $(c_k)_{k \in \llbracket 1, N_t + 1 \rrbracket}$ est croissante, nous sommes assurés que pour tout $k \in \llbracket 1, N_t \rrbracket$,

$$\|P_n^{(k)}\|_\infty \leq \max \left(\sup_{z \in [0, z_{\max}]} \|\rho_0^n(\cdot, z)\|_{L^\infty}, \sup_{t \in [0, t_{\max}]} \|\sigma_n(\cdot, t)\|_{L^\infty} \right) + \frac{f_c}{f_n} t_{\max} \|A\|_\infty C_{\max}.$$

■

6.2.2.4 Convergence du schéma

Théorème 6.2.3 (Convergence)

Le schema 6.18-6.19 est convergent.

Remarque 6.2.1

Le manque de régularité des solutions nous empêche d'estimer la vitesse de convergence du schéma numérique. Pour obtenir un schéma d'ordre 1, nous avons besoin de solutions de classe au moins $\mathcal{C}^2$.

Démonstration : Soit $\varepsilon > 0$ fixé. En reprenant le résultat de consistance et la formulation matricielle du schéma numérique, nous obtenons l'égalité suivante :

$$\mathcal{B}(P_c^{(k+1)} - P_c(k+1)) - \mathcal{C}(P_c^{(k)} - P_c(k)) = \Delta_t \delta,$$

où nous avons $\|\delta\|_\infty \leq \varepsilon$, et où nous avons posé

$$P_c(k) = (\rho_c(q_1, z_1, t_k), \dots, \rho_c(q_{N_q+1}, z_1, t_k), \rho_c(q_1, z_2, t_k), \dots, \rho_c(q_{N_q+1}, z_{N_z+1}, t_k))^T.$$

Alors, nous posons $e^{(k)} = P_c^{(k)} - P_c(k)$ et nous obtenons la relation suivante :

$$\begin{aligned} \mathcal{B}e^{(k+1)} &= \mathcal{C}e^{(k)} + \Delta_t \delta, \\ &\leq \left((1 + \Delta_t \|A\|_\infty) \|e^{(k)}\|_\infty + \Delta_t \varepsilon \right) (1, \dots, 1)^T. \end{aligned}$$

de plus, $\|\mathcal{B}^{-1}\|_\infty = 1$, ce qui nous assure que

$$\|e^{(k+1)}\|_\infty \leq (1 + \Delta_t \|A\|_\infty) \|e^{(k)}\|_\infty + \Delta_t \varepsilon.$$

Introduisons la suite (x_k) vérifiant $x_{k+1} = (1 + \Delta_t \|A\|_\infty) x_k + \Delta_t \varepsilon$ et $x_1 = 0$. Cette suite majore alors la suite $(\|e^{(k)}\|_\infty)$. Introduisons alors la suite $y_k = x_k + \frac{\varepsilon}{\|A\|_\infty}$ qui vérifie alors $y_1 = \frac{\varepsilon}{\|A\|_\infty}$ et $y_{k+1} = (1 + \Delta_t \|A\|_\infty) y_k$. Alors, $y_k = (1 + \Delta_t \|A\|_\infty)^{k-1} y_1$ ce qui assure que pour tout $k \in \llbracket 1, N_t + 1 \rrbracket$,

$$\begin{aligned} x_k &= y_k - \frac{\varepsilon}{\|A\|_\infty}, \\ &= (1 + \Delta_t \|A\|_\infty)^{k-1} y_1 - \frac{\varepsilon}{\|A\|_\infty}, \\ &\leq (1 + \Delta_t \|A\|_\infty)^{N_t} \frac{\varepsilon}{\|A\|_\infty} - \frac{\varepsilon}{\|A\|_\infty}, \\ &\leq \frac{e^{t_{\max} \|A\|_\infty} - 1}{\|A\|_\infty} \varepsilon, \\ \|e^{(k)}\|_\infty &\leq \frac{e^{t_{\max} \|A\|_\infty} - 1}{\|A\|_\infty} \varepsilon. \end{aligned}$$

6.2 Différences finies pour les équations du carbone et des nutriments

La convergence du schéma 6.19 est obtenue de manière similaire en utilisant la consistance et la stabilité démontrées précédemment. ■

6.3 Différences finies pour les solutions stationnaires

Nous proposons maintenant un schéma numérique convergent pour estimer la solution stationnaire des équations 6.3-6.4.

6.3.1 Notations

Nous pouvons reformuler le problème stationnaire pour le carbone de la manière suivante pour tout $q \in [0, q_{max}]$:

$$(6.38) \quad \begin{cases} \mathcal{D}_\infty \rho_c^\infty(q, z) = \mathcal{I} \rho_c^\infty(q, z), \\ \rho_c^\infty(q, 0) = \sigma^c(q), \end{cases}$$

où $\mathcal{I}$ est défini comme dans la partie précédente et nous pouvons poser

$$(6.39) \quad \mathcal{D}_\infty \rho^\infty(q, z) = \nu_0 \frac{\partial \rho^\infty}{\partial z}(q, z) + f_c \frac{u_0}{e_0} q^\beta \rho^\infty(q, z).$$

Pour les nutriments, nous obtenons :

$$(6.40) \quad \begin{cases} \mathcal{D}_\infty \rho_n^\infty(q, z) = \frac{f_n}{f_c} \mathcal{I} \rho_c^\infty(q, z), \\ \rho_n^\infty(q, z) = \sigma^n(q), \end{cases}$$

6.3.2 Schéma numérique

6.3.2.1 Maillage

La définition du maillage est identique à celle de la partie précédente. Nous noterons :

$$(6.41) \quad \begin{cases} \rho_c^\infty(i, j) = \rho_c^\infty(q_i, z_j), \\ \rho_n^\infty(i, j) = \rho_n^\infty(q_i, z_j). \end{cases}$$

Par la suite, nous utiliserons pour tout $j \in \llbracket 1, N_z + 1 \rrbracket$:

$$(6.42) \quad P_c^\infty(j) = \left(\rho_c^\infty(1, j), \rho_c^\infty(2, j), \dots, \rho_c^\infty(N_q + 1, j) \right)^\top \in \mathcal{M}_{N_q+1,1},$$

$$(6.43) \quad P_n^\infty(j) = \left(\rho_n^\infty(1, j), \rho_n^\infty(2, j), \dots, \rho_n^\infty(N_q + 1, j) \right)^\top \in \mathcal{M}_{N_q+1,1}.$$

6.3.2.2 Opérateur discret

Nous introduisons l'opérateur discret D_∞ défini pour tout $i \in \llbracket 1, N_q + 1 \rrbracket$, $j \in \llbracket 2, N_z + 1 \rrbracket$, par

$$(6.44) \quad D_\infty v(i, j) = v_0 \frac{1}{\Delta_z} (v(i, j) - v(i, j-1)) + f_c \frac{u_0}{e_0} \Delta_q^\beta (i-1)^\beta v(i, j).$$

D_∞ est approché par l'opérateur aux différences fines décentré en amont en espace D_∞ . En reprenant la définition de l'opérateur discret I définis dans la partie précédente, nous obtenons le schéma numérique implicite-explicite suivant pour l'équation du carbone, pour tout $i \in \llbracket 1, N_q + 1 \rrbracket$:

$$(6.45) \quad \begin{cases} D_\infty \rho_c^\infty(i, j) - I \rho_c^\infty(i, j-1) = 0, & \forall j \in \llbracket 2, N_z + 1 \rrbracket, \\ \rho_c^\infty(i, 1) = \sigma^c(q_i), \end{cases}$$

et pour l'équation associée aux nutriments, pour tout $i \in \llbracket 1, N_q + 1 \rrbracket$:

$$(6.46) \quad \begin{cases} D_\infty \rho_n^\infty(i, j) = \frac{f_n}{f_c} I \rho_c^\infty(i, j-1), & \forall j \in \llbracket 2, N_z + 1 \rrbracket, \\ \rho_n^\infty(i, 1) = \sigma^n(q_i). \end{cases}$$

En reprenant les éléments de démonstration du théorème 6.2.1, nous avons le théorème suivant :

Théorème 6.3.1 (Consistance du schéma implicite-explicite stationnaire)

Le schéma numérique 6.45-6.46 associé au problème intégral-différentiel 6.38-6.40 est consistant d'ordre 0 c.-à-d. pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $h > 0$ tel que pour tous $\Delta_z, \Delta_q \leq h$, pour tous $i \in \llbracket 1, N_q + 1 \rrbracket$, $j \in \llbracket 2, N_z + 1 \rrbracket$,

$$\begin{aligned} |D_\infty \rho_c^\infty(q_i, z_j) - I \rho_c^\infty(q_i, z_j)| &\leq \varepsilon, \\ \left| D_\infty \rho_n^\infty(q_i, z_j) - \frac{f_n}{f_c} I \rho_c^\infty(q_i, z_j) \right| &\leq \varepsilon. \end{aligned}$$

6.3.2.3 Formulation matricielle et stabilité numérique du schéma

Nous introduisons la matrice diagonale $B_\infty \in \mathcal{M}_{N_q+1}$ définie pour tout $i \in \llbracket 1, N_q + 1 \rrbracket$ par $b_{i,i} = 1 + f_c \frac{u_0}{v_0 e_0} \Delta_z \Delta_q^\beta (i-1)^\beta$. Nous obtenons immédiatement le résultat ci-dessous :

Proposition 6.3.1

La matrice B_∞ est inversible et

$$\|B_\infty\|_\infty = 1 + f_c \frac{u_0}{v_0 e_0} \Delta_z q_{max}^\beta,$$

$$\|B_\infty^{-1}\|_\infty = 1.$$

En reprenant la matrice A définie précédemment, nous obtenons les relations matricielles suivantes pour tout $j \in \llbracket 1, N_z \rrbracket$:

$$(6.47) \quad B_\infty P_c^\infty(j+1) = \left(I_d + \frac{\Delta_z}{v_0} A \right) P_c^\infty(j),$$

$$(6.48) \quad B_\infty P_n^\infty(j+1) = P_n^\infty(j) + \frac{f_n}{f_c} \frac{\Delta_z}{v_0} A P_c^\infty(j).$$

Théorème 6.3.2 (Stabilité inconditionnelle du schéma implicite-explicite stationnaire)

Le schéma numérique 6.45-6.46 vérifie la propriété suivante pour tout $j \in \llbracket 1, N_z \rrbracket$,

$$(6.49) \quad \|P_c^\infty(j)\|_\infty \leq e^{z_{max}\|A\|_\infty} \|\sigma_c\|_{L^\infty} = C_{max}^\infty,$$

$$(6.50) \quad \|P_n^\infty(j)\|_\infty \leq \|\sigma_n\|_{L^\infty} + \frac{f_n}{f_c} \frac{z_{max}}{v_0} \|A\|_\infty C_{max}^\infty,$$

ce qui assure la stabilité inconditionnelle du schéma.

Démonstration : Soit $\Delta_z > 0$ fixé.

1. Pour le carbone, nous reprenons l'égalité 6.47. Les propriétés de B_∞ nous assurent que pour tout $j \in \llbracket 1, N_z + 1 \rrbracket$:

$$\begin{aligned} \|P_c^\infty(j+1)\|_\infty &\leq \left(1 + \frac{\Delta_z}{v_0} \|A\|_\infty \right) \|P_c^\infty(j)\|_\infty, \\ &\leq \left(1 + \frac{\Delta_z}{v_0} \|A\|_\infty \right)^{j-1} \|P_c^\infty(1)\|_\infty, \\ &\leq \left(1 + \frac{\Delta_z}{v_0} \|A\|_\infty \right)^{N_z} \|\sigma_c\|_{L^\infty}, \\ &\leq C_{max}^\infty. \end{aligned}$$

6.3 Différences finies pour les solutions stationnaires

2. Pour les nutriments, nous reprenons l'égalité 6.48. Nous obtenons alors pour tout $j \in \llbracket 1, N_z + 1 \rrbracket$:

$$\begin{aligned}
 \|P_n^\infty(j+1)\|_\infty &\leq \|P_n^\infty(j)\|_\infty + \frac{\Delta_z}{\nu_0} \|A\|_\infty \|P_c^\infty(j)\|_\infty, \\
 &\leq \|P_n^\infty(j)\|_\infty + \frac{\Delta_z}{\nu_0} \|A\|_\infty C_{max}^\infty, \\
 &\leq \|P_n^\infty(1)\|_\infty + \frac{(j-1)\Delta_z}{\nu_0} \|A\|_\infty C_{max}^\infty, \\
 &\leq \|\sigma_n\|_{L^\infty} + \frac{z_{max}}{\nu_0} \|A\|_\infty C_{max}^\infty.
 \end{aligned}$$

■

6.3.2.4 Convergence du schéma

Théorème 6.3.3 (Convergence)

Le schema 6.45-6.46 est convergent.

Démonstration : La preuve est semblable à celle du théorème 6.3.1.

■

6.4 Test de l'hypothèse de troncature

6.4.1 Méthode

Nous nous limiterons essentiellement ici à la comparaison des variables $\hat{q}$ et Φ_0^c . Les résultats concernant ρ_n et Φ_0^n sont présents essentiellement à titre d'illustration.

6.4.1.1 Variables

Nous avons à notre disposition les variables synthétisées dans la table 6.4.1.1 pour étudier l'hypothèse de troncature. L'hypothèse de troncature reposant sur l'hypothèse de faible dispersion en qualité

Table 6.1 – Synthèse des variables disponibles pour étudier l'hypothèse de troncature.

(a) cas général

Modèle général		Modèle tronqué	
Variable	Source	Variable	Source
$\hat{q}$	calculés avec def.4.3.1 et la méthode des rectangles à droite (Quarteroni <i>et al.</i> , 2007) à partir de ρ_c et ρ_n (schéma numérique 6.2).	$\hat{q}_{tronc}$	calcul explicite en 4.4.2
Φ_0^c		$\Phi_{0,tronc}^c$	
Φ_0^n		$\Phi_{0,tronc}^n$	

(b) cas stationnaire

Modèle général		Modèle tronqué	
Variable	Source	Variable	Source
$\hat{q}^\infty$	obtenus à partir de ρ_c^∞ et ρ_n^∞ estimés avec le schéma numérique vu en 6.3 et la méthode rectangles à droite.	$\hat{q}_{tronc}^\infty$	calcul explicite en 4.4.2
$\Phi_0^{c,\infty}$		$\Phi_{0,tronc}^{c,\infty}$	
$\Phi_0^{n,\infty}$		$\Phi_{0,tronc}^{n,\infty}$	

de la MO, nous avons comparé les solutions exactes du modèle tronqué (voir 4.4.2) aux estimations du modèle général.

6.4.1.2 Simulations

L'ensemble des variables de la Table 6.4.1.1 ont été estimées le long d'un profil de sol de profondeur $z_{max} = 20$ cm sur une période de $t_{max} = 30$ ans. Les qualités considérées varient entre 0 et $q_{max} = 2$. La concentration initiale de carbone dans le sol ρ_0^c a été supposée nulle et l'apport σ^c supposé constant au cours du temps (voir def.6.1.1). Cette simulation a été reproduite pour les valeurs

6.4 Test de l'hypothèse de troncature

suivantes des paramètres q_0 et σ_c :

$$q_0 \in \{0.6, 0.8, 1, 1.2, 1.4\},$$

$$\sigma_c \in \{0.01, 0.05, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5\}.$$

Le tableau 6.2 récapitule les paramètres utilisés lors de la simulation.

Table 6.2 – Liste des paramètres du modèle (tirés de Bosatta et Agren (1996)) et du maillage utilisés pour étudier l'hypothèse de troncature.

(a) Modèle			
Paramètre	Valeur	Unité	Signification
f_c	0.5	$g_C \cdot g_{biom}^{-1}$	concentration en carbone des décomposeurs
f_n	0.04	$g_n \cdot g_{biom}^{-1}$	concentration en nutriment n des décomposeurs
e_0	0.25	-	efficience d'utilisation du carbone les décomposeurs
ν_0	10^{-2}	$cm \cdot an^{-1}$	vitesse de transport de particules de MO
α	13.5	-	intervient dans la formulation 4.20 de D , le taux de conversion de C assimilé par les décomposeurs de qualité q' en carbone de qualité q
u_0	7.3×10^{-2}	$g_{biom} \cdot g_c^{-1} \cdot an^{-1}$	interviennent dans la formulation 4.17 de u , le taux de
β	7	-	croissance des décomposeurs par unité de C de qualité q
(b) Schéma numérique			
Paramètre	Valeur	Unité	Signification
N_t	360	-	nombre d'intervalles de discrétisation pour t
N_z	200	-	nombre d'intervalles de discrétisation pour z
N_q	10^3	-	nombre d'intervalles de discrétisation pour q
Δ_t	8.33×10^{-2}	an	pas de discrétisation en t
Δ_z	10^{-3}	cm	pas de discrétisation en z
Δ_q	2×10^{-3}	q	pas de discrétisation en q

6.4.1.3 Validation du maillage

La pertinence du maillage a tout d'abord été évaluée en étudiant la convergence du schéma numérique dédié aux solutions stationnaires en fonction de Δ_z . Les normes l^1 et l^2 de l'écart relatif sur le maillage introduit par la division du pas Δ_z par 10 sont inférieures à 1% le long du profil de sol pour Φ_0^c et inférieures à 0.5% pour $\hat{q}$ et ce, pour les différentes valeurs des paramètres σ_c et q_0 testées dans cette partie. La figure 6.2 illustre cette convergence pour des valeurs particulières de σ_c et q_0 .

Nous considérerons donc que le maillage choisi permet d'obtenir une estimation convenable de la

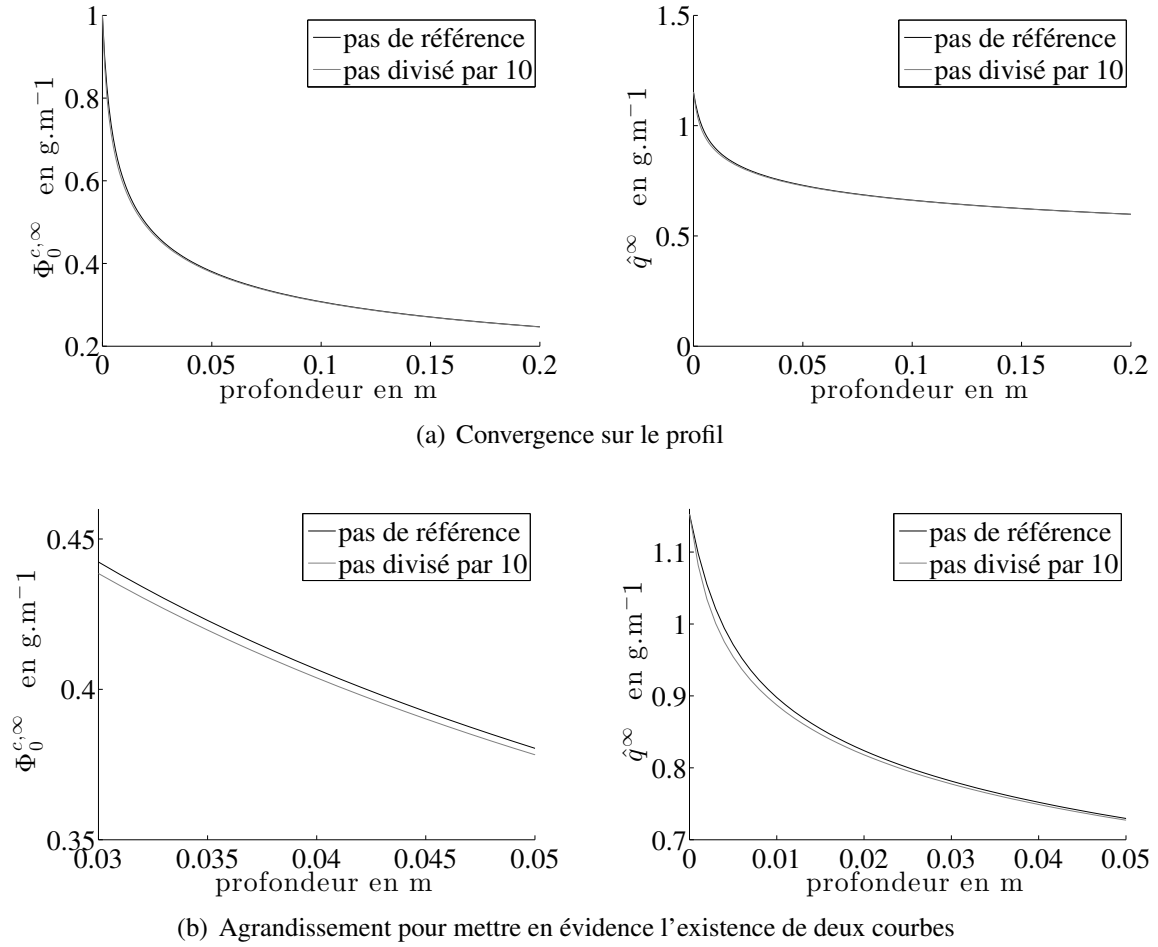


Figure 6.2 – Convergence du schéma numérique pour les solutions stationnaires pour $q_0 = 1.2$ et $\sigma_c = 0.5$. La différence entre les deux courbes étant peu visible sur la figure du haut, le figure du bas permet de mettre en évidence l'existence de deux courbes.

solution stationnaire. Grâce au théorème 5.3.2 (convergence des solutions vers les solutions stationnaires dans le cas d'un apport constant), cette hypothèse sera suffisante pour étudier la convergence du modèle dans le cas non-stationnaire en nous concentrant uniquement sur le pas temporel Δ_t .

Afin d'évaluer la pertinence du choix de Δ_t , nous avons étudié la distance entre la solution du schéma général et la solution du schéma stationnaire au bout de 30 ans en fonction des paramètres de l'apport constant (tab.6.3). L'ensemble des quotients $\frac{\|\rho_c - \rho_c^\infty\|_1}{\|\rho_c^\infty\|_1}$ sont inférieurs à 0.036 ce qui permet de supposer que notre maillage est suffisamment fin pour assurer la convergence de la solution générale vers la solution stationnaire.

Enfin, la figure 6.3 illustre la convergence des modèles généraux et tronqués vers leur état stationnaire dans un cas particulier. La même convergence a été observée pour les autres paramètres.

L'ensemble de ces résultats permet de supposer que le maillage choisi est pertinent pour étudier

6.4 Test de l'hypothèse de troncature

l'hypothèse de troncature.

Table 6.3 – Comparaison des normes l^1 sur le maillage de ρ_c^∞ avec la distance $|\rho_c - \rho_c^\infty|$ entre la solution du schéma général et la solution du schéma stationnaire en fonction des paramètres q_0 et σ_c au bout de 30 ans.

σ_c	Normes	q_0				
		0.6	0.8	1	1.2	1.4
0.01	$\ \rho_c^\infty\ _1$	9.7×10^{-1}	7.9×10^{-1}	3.9×10^{-1}	1.3×10^{-1}	5.1×10^{-2}
	$\ \rho_c - \rho_c^\infty\ _1$	2.5×10^{-6}	1.1×10^{-4}	8.8×10^{-4}	1.6×10^{-3}	1.8×10^{-3}
0.05	$\ \rho_c^\infty\ _1$	9.6×10^{-1}	7.8×10^{-1}	4.0×10^{-1}	1.4×10^{-1}	5.2×10^{-2}
	$\ \rho_c - \rho_c^\infty\ _1$	4.2×10^{-6}	1.3×10^{-4}	8.8×10^{-4}	1.6×10^{-3}	1.8×10^{-3}
0.1	$\ \rho_c^\infty\ _1$	9.5×10^{-1}	7.6×10^{-1}	4.1×10^{-1}	1.6×10^{-1}	5.7×10^{-2}
	$\ \rho_c - \rho_c^\infty\ _1$	1.3×10^{-5}	1.9×10^{-4}	8.8×10^{-4}	1.6×10^{-3}	1.8×10^{-3}
0.2	$\ \rho_c^\infty\ _1$	9.0×10^{-1}	7.1×10^{-1}	4.4×10^{-1}	2.1×10^{-1}	8.4×10^{-2}
	$\ \rho_c - \rho_c^\infty\ _1$	8.1×10^{-5}	3.5×10^{-4}	8.7×10^{-4}	1.4×10^{-3}	1.7×10^{-3}
0.3	$\ \rho_c^\infty\ _1$	8.4×10^{-1}	6.7×10^{-1}	4.6×10^{-1}	2.6×10^{-1}	1.3×10^{-1}
	$\ \rho_c - \rho_c^\infty\ _1$	2.0×10^{-4}	4.7×10^{-4}	8.8×10^{-4}	1.3×10^{-3}	1.6×10^{-3}
0.4	$\ \rho_c^\infty\ _1$	7.7×10^{-1}	6.3×10^{-1}	4.7×10^{-1}	3.1×10^{-1}	1.9×10^{-1}
	$\ \rho_c - \rho_c^\infty\ _1$	3.2×10^{-4}	5.7×10^{-4}	8.8×10^{-4}	1.2×10^{-3}	1.5×10^{-3}
0.5	$\ \rho_c^\infty\ _1$	7.2×10^{-1}	6.0×10^{-1}	4.7×10^{-1}	3.5×10^{-1}	2.4×10^{-1}
	$\ \rho_c - \rho_c^\infty\ _1$	4.3×10^{-4}	6.4×10^{-4}	8.8×10^{-4}	1.1×10^{-3}	1.3×10^{-3}

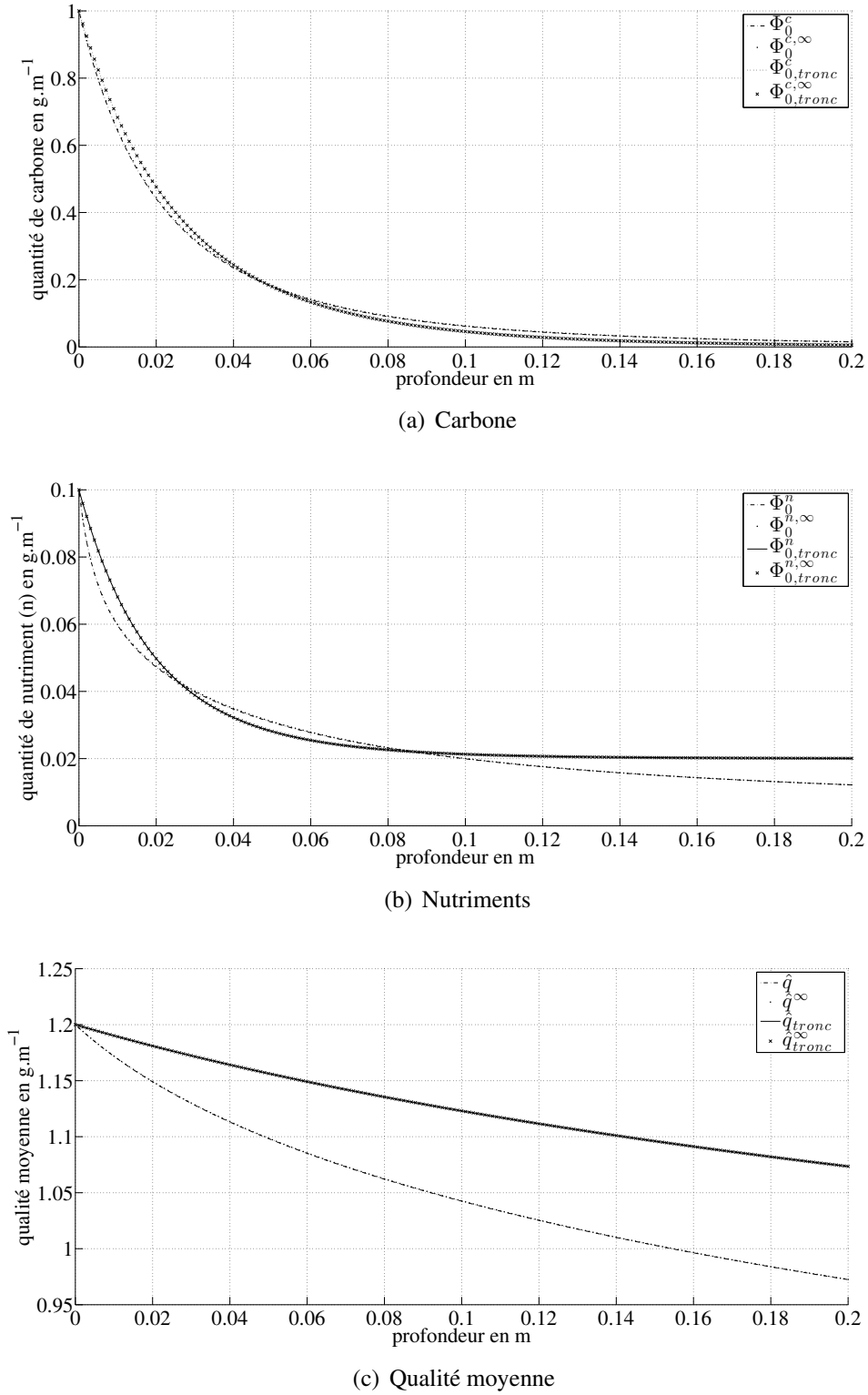


Figure 6.3 – Comparaison des variables du modèle tronqué et du modèle général au bout de 30 ans le long d'un profil de sol de 20 cm pour des apports constant définis par $\sigma_c = 0.1$, $\sigma_n = 0.3$, $I_0^c = 1$ et $I_0^n = 0.1$ et $q_0 = 1.2$.

6.4.1.4 Critères de comparaison

Nous calculons la norme l^1 et la norme l^2 de l'écart relatif sur le maillage entre le modèle originel et le modèle tronqué. Ces écarts sont estimés sur le maillage c.-à-d. pour tous $j \in \llbracket 1, N_z + 1 \rrbracket, k \in \llbracket 1, N_t + 1 \rrbracket$, par

$$\begin{aligned} e_r^\phi(q_0, \sigma_c)(j, k) &= \frac{\Phi_0^c(j, k) - \phi_{0, \text{tronc}}^c(j, k)}{\Phi_0^c(j, k)}, \\ e_r^{\hat{q}}(q_0, \sigma_c)(j, k) &= \frac{\hat{q}(j, k) - \hat{q}_{\text{tronc}}(j, k)}{\hat{q}(j, k)}, \end{aligned}$$

et alors, nous avons pour la norme l^1 ,

$$\begin{aligned} \|e_r^\phi(q_0, \sigma_c)\|_{l^1} &= \frac{1}{(N_z + 1)(N_t + 1)} \sum_{j, f} |e_r^\phi(q_0, \sigma_c)(j, k)|, \\ \|e_r^{\hat{q}}(q_0, \sigma_c)\|_{l^1} &= \frac{1}{(N_z + 1)(N_t + 1)} \sum_{j, f} |e_r^{\hat{q}}(q_0, \sigma_c)(j, k)|, \end{aligned}$$

et pour la norme l^2 ,

$$\begin{aligned} \|e_r^\phi(q_0, \sigma_c)\|_{l^2} &= \frac{1}{(N_z + 1)^{\frac{1}{2}}(N_t + 1)^{\frac{1}{2}}} \left(\sum_{j, f} (e_r^\phi(q_0, \sigma_c)(j, k))^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \\ \|e_r^{\hat{q}}(q_0, \sigma_c)\|_{l^2} &= \frac{1}{(N_z + 1)^{\frac{1}{2}}(N_t + 1)^{\frac{1}{2}}} \left(\sum_{j, f} (e_r^{\hat{q}}(q_0, \sigma_c)(j, k))^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

6.4.2 Résultats

En dépit de la convergence du modèle général vers le modèle stationnaire, nous avons choisi de présenter les résultats pour les deux modèles afin de souligner leur équivalence au lecteur dans le cas de l'apport constant (cas général : fig.6.4-6.5-6.6, cas stationnaire : fig.6.7-6.8). Nous commenterons uniquement les résultats pour le modèle général.

La figure 6.4 met clairement en évidence une corrélation positive entre l'écart relatif et la dispersion. L'évolution de $e_r^{\hat{q}}(q_0, \sigma_c)$ en fonction de σ_c est homogène quelque soient q_0 et les normes considérées. En revanche, l'évolution de $e_r^{\phi}(q_0, \sigma_c)$ pour les valeurs de q_0 supérieure à 1 n'est pas clair. Après une décroissance rapide de l'écart relatif, nous constatons une forte augmentation entre $\sigma_c = 0.05$ et 0.3 pour $q_0 \geq 1.2$, puis une légère décroissance. Le figure 6.6 permet de comprendre qualitativement l'origine de ce phénomène. Pour $q_0 \geq 1$, nous constatons une intersection entre les courbes représentatives de $\Phi_{0,tronc}^c$ et Φ_0 d'autant plus marquée que les valeurs de σ_c augmentent. Ceci permet de supposer que le comportement particulier observé dans la figure 6.4 a pour origine cette intersection.

Il ressort des figures 6.5 et 6.6 qu'une faible augmentation de la dispersion ($\sigma_c \leq 0.1$) n'engendre pas d'augmentation significative de l'écart entre les deux modèles que ce soit pour $\hat{q}$ et Φ_0^c .

La perte de précision sur la qualité moyenne le long du profil de sol est d'autant plus élevée que q_0 est élevé (fig.6.5). D'autre part, à q_0 fixé, la part de MO de qualité élevée est d'autant plus importante et dégradée rapidement que la dispersion σ_c est importante. Or, la MO de qualité élevée étant assimilée très rapidement par les décomposeurs, sa décroissance est rapide dans le profil de sol. Ceci permet de comprendre la corrélation négative entre la décroissance de $\hat{q}$ et Φ_0^c et la dispersion σ_c (fig.6.5).

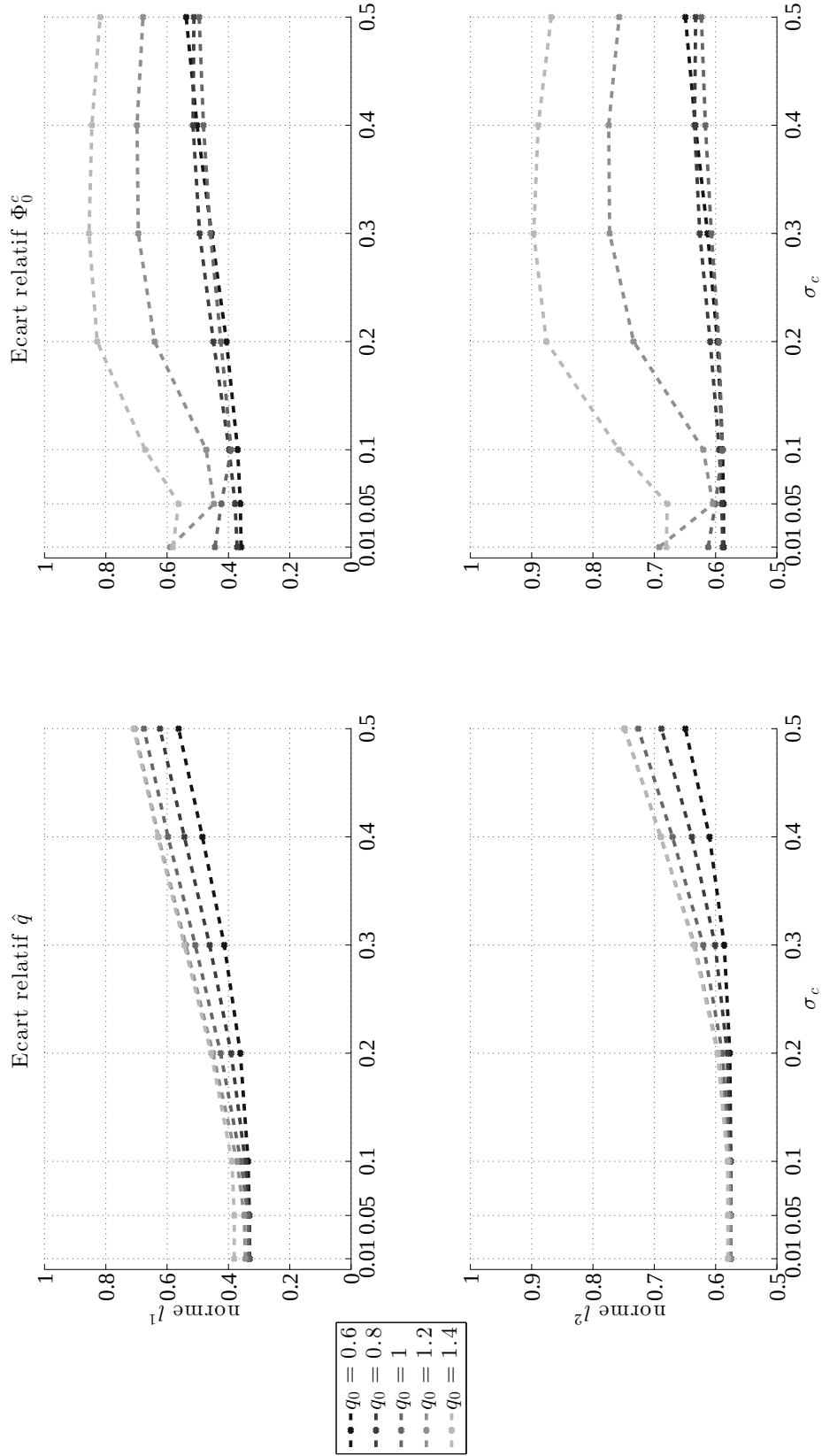


Figure 6.4 – Représentation des normes l^1 et l^2 des écarts relatifs sur la totalité du maillage (en z et t) pour les variables $\hat{q}$ et ϕ_0^ϵ en fonction des paramètres q_0 et σ_c de l'apport constant de MO.

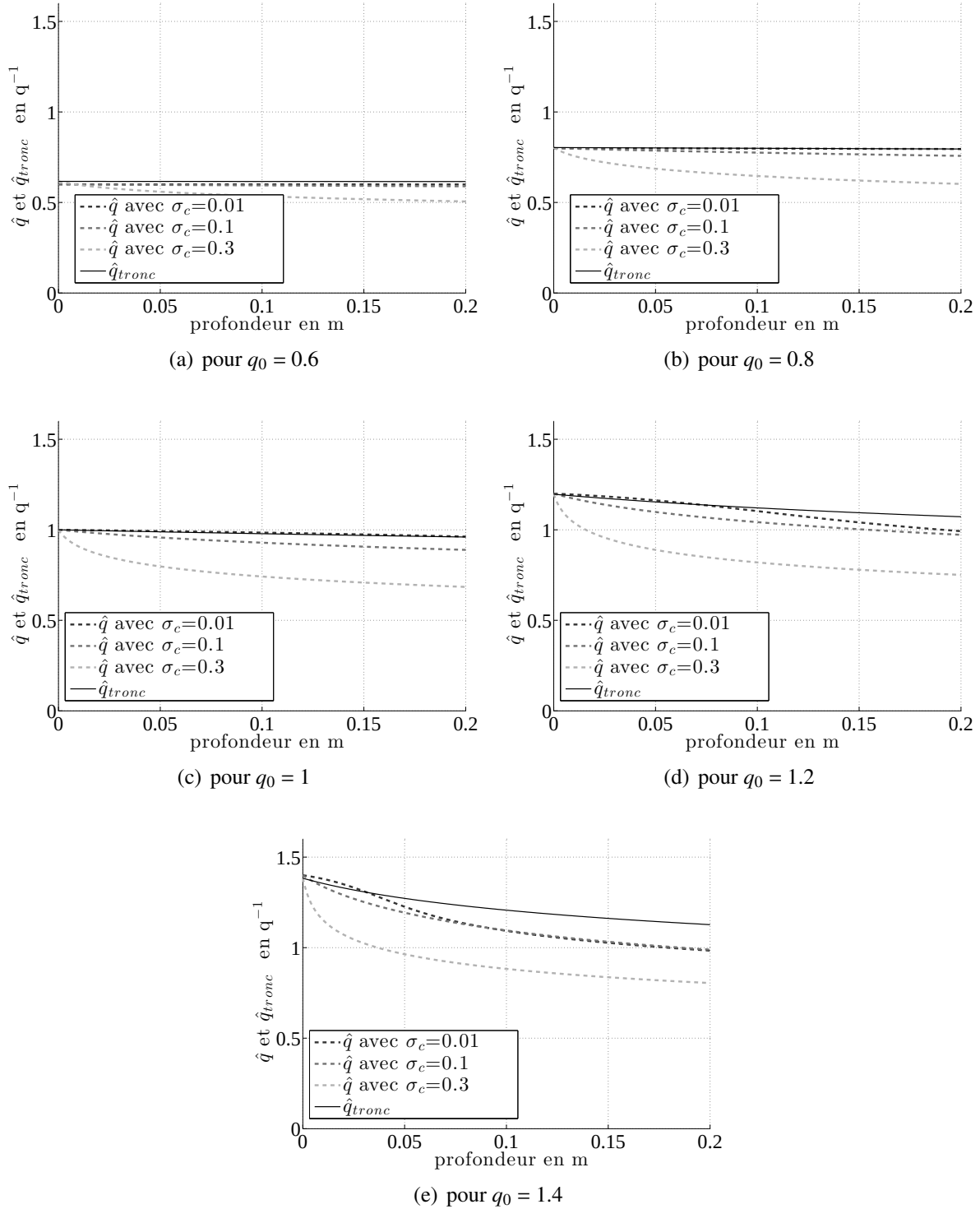


Figure 6.5 – Représentation de $\hat{q}$ pour différentes valeurs de σ_c et $\hat{q}_{tronc}$ sur un profil de sol de 20 cm au bout de 30 ans. Ces différents graphiques mettent en évidence l'influence de la dispersion σ_c de l'apport initial sur l'évolution de la quantité de carbone dans le sol.

6.4 Test de l'hypothèse de troncature

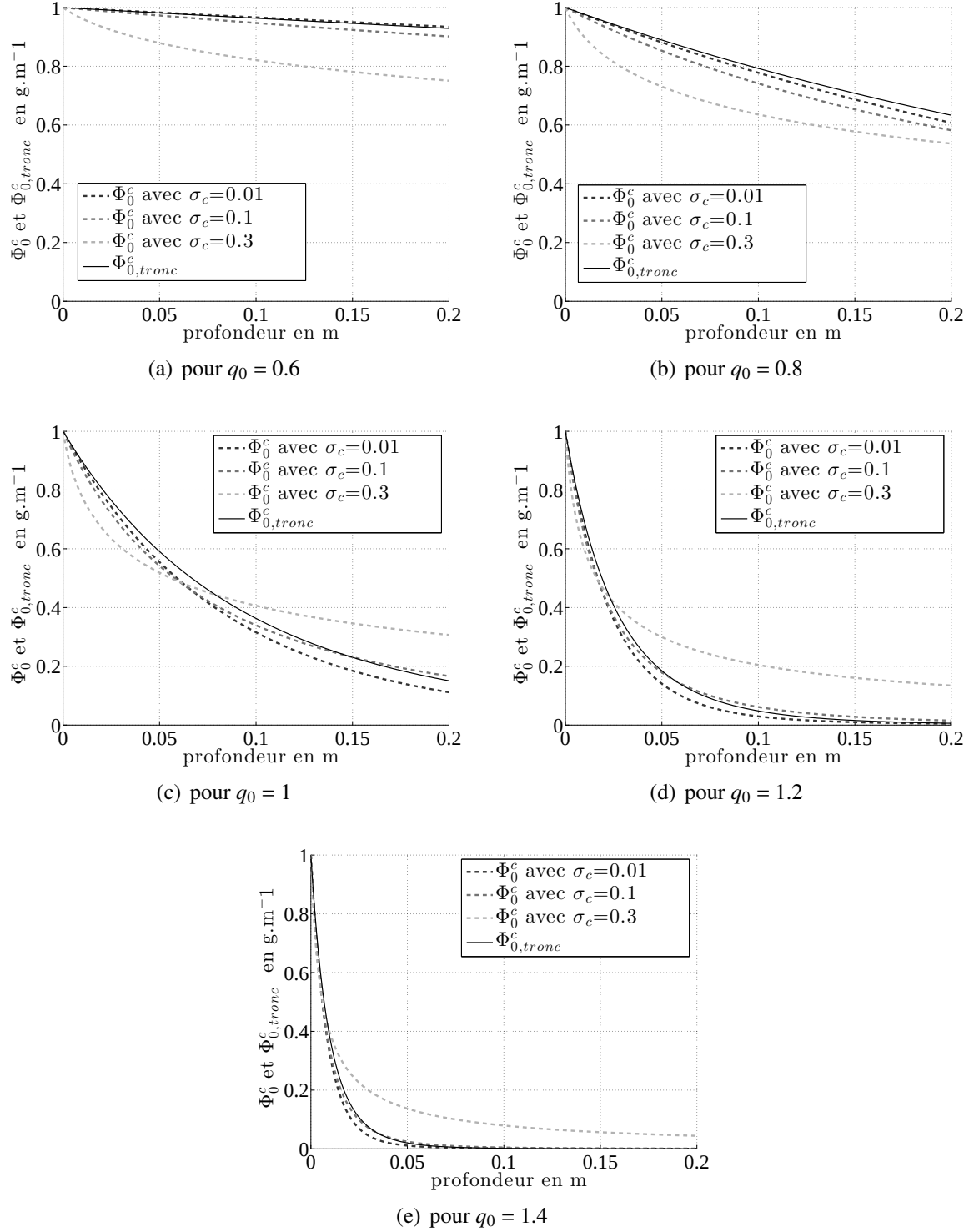


Figure 6.6 – Représentation de Φ_0^c pour différentes valeurs de σ_c et $\Phi_{0,tronc}^c$ sur un profil de sol de 20 cm au bout de 30 ans. Ces différents graphiques mettent en évidence l'influence de la dispersion σ_c de l'apport initial sur l'évolution de la quantité de carbone dans le sol.

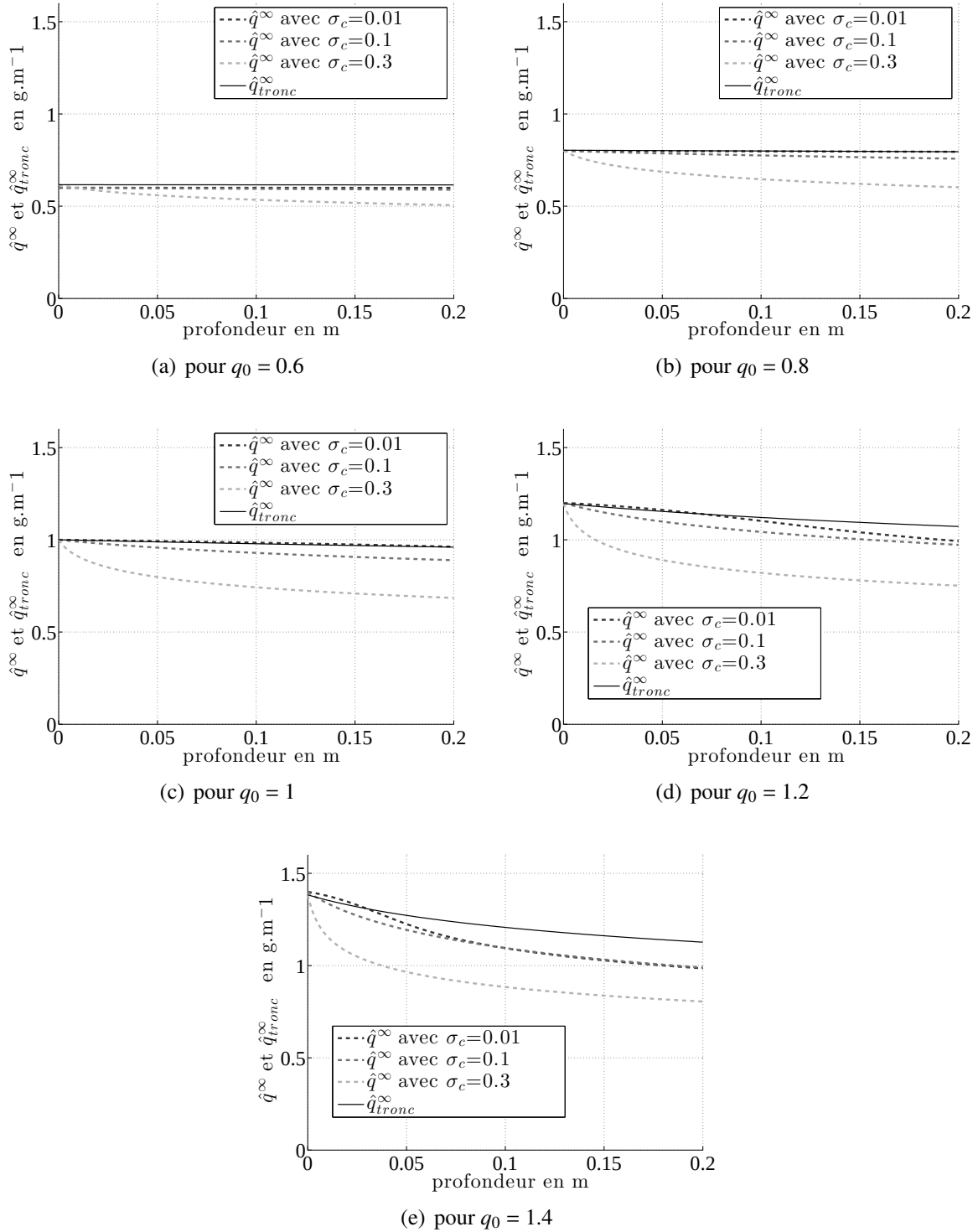


Figure 6.7 – Représentation de $\hat{q}^\infty$ pour différentes valeurs de σ_c et $\hat{q}_{tronc}$ sur un profil de sol de 20 cm au bout de 30 ans. Ces différents graphiques mettent en évidence l'influence de la dispersion σ_c de l'apport initial sur l'état stationnaire de la quantité de carbone dans le sol.

6.4 Test de l'hypothèse de troncature

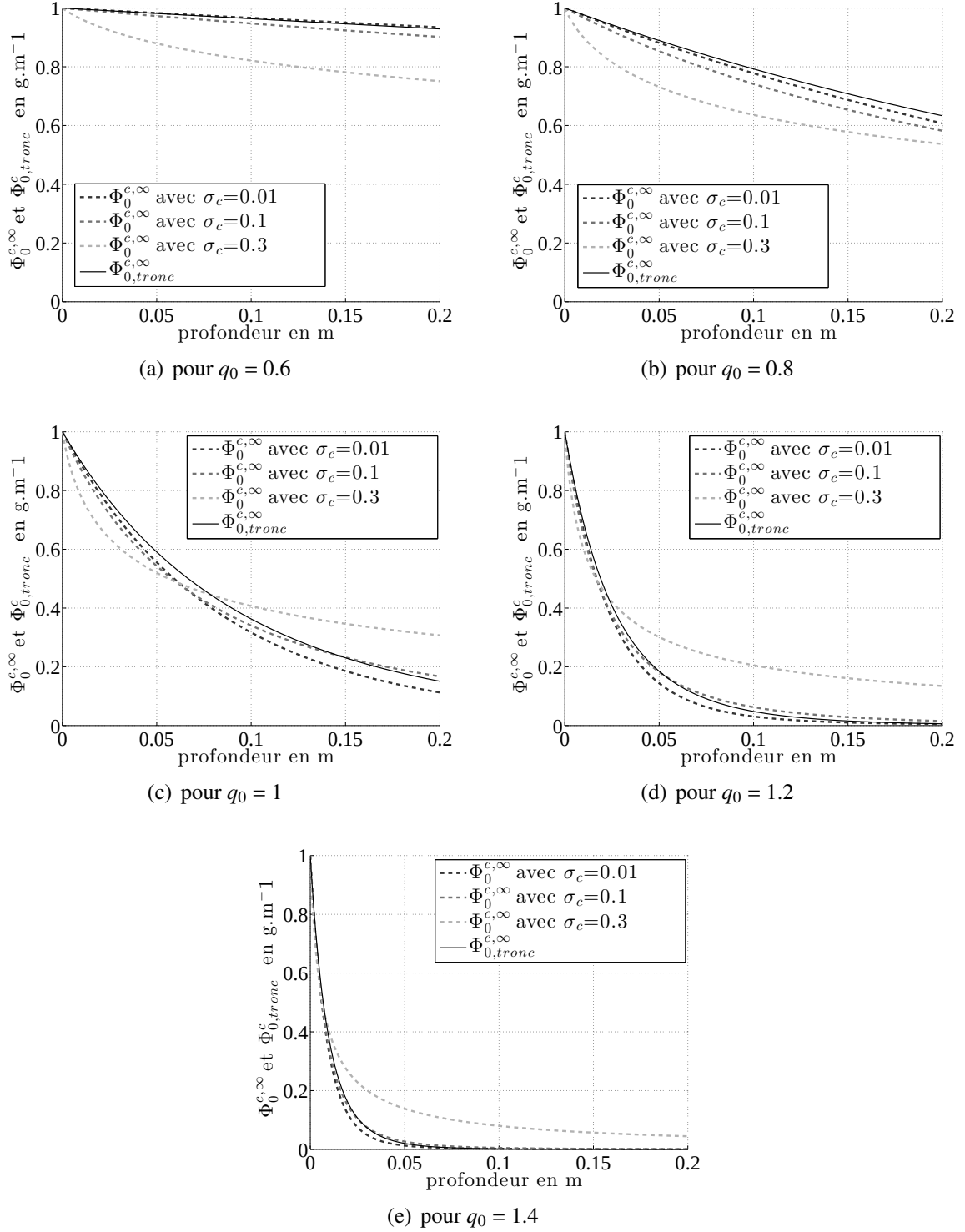


Figure 6.8 – Représentation de $\Phi_0^{c,\infty}$ pour différentes valeurs de σ_c et $\Phi_{0,tronc}^{c,\infty}$ sur un profil de sol de 20 cm au bout de 30 ans. Ces différents graphiques mettent en évidence l'influence de la dispersion σ_c de l'apport initial sur l'état stationnaire de la quantité de carbone dans le sol.

6.4.3 Discussion

Nous nous concentrons dans un premier temps au cas des substrats faiblement hétérogènes et concentrés autour d'une qualité moyenne $\hat{q}$. Les résultats montrent clairement que l'hypothèse de troncature est de moins en moins valide à mesure que la dispersion σ_c et le maximum q_0 augmentent. Ce phénomène est d'autant plus fort que l'apport constant est fortement dégradable ($q_0 > 1$). Inversement, la troncature est relativement stable pour la MO récalcitrante ($q_0 < 1$).

Ces constatations conduisent à une première difficulté concernant les choix de modélisation. En effet, à apport constant σ^c identique, l'utilisation du modèle tronqué pour une étude en temps long de la décomposition de la MOS restituera une valeur de $\hat{q}$ globalement surestimée par rapport à celle du modèle général et d'autant plus importante que q_0 est élevé. En supposant qu'une caractérisation explicite du lien entre la qualité et la nature des composés organo-chimiques de la MOS soit connue, ce biais conduit à une erreur d'appréciation significative sur la nature de la MOS.

Ainsi, l'hypothèse de troncature effectuée dans Bosatta et Agren (1996) est suffisante pour étudier l'état stationnaire de la MOS pour des substrats faiblement hétérogènes et sous réserve de bien définir la qualité moyenne q_0 de l'apport constant.

La perte de précision constatée pour une dispersion forte ($\sigma_c > 0.1$) et une qualité élevée ($q_0 > 1$) indique que le modèle tronqué n'est pas suffisant pour caractériser l'évolution de l'hétérogénéité de la MOS. Les exemples qui seront fournis en 6.5 confirmeront cette assertion. Vu la granulométrie de notre approche de modélisation et la nécessité de caractériser les propriétés de la MO, il apparaît que l'utilisation des méthodes numériques introduites dans ce chapitre permet d'apporter une caractérisation plus précise de la MOS.

Si la volonté d'associer le concept de qualité à une description plus explicite de la MO se confirme, il est nécessaire de choisir une des deux approches. En effet, dans le cas de l'étude de substrats fortement hétérogènes, la définition de la qualité ne peut être la même dans les deux modèles à moins de minimiser le rôle de la MO à qualité élevée lors de la définition de l'apport de MO dans le modèle tronqué.

Précisons que l'évaluation de ρ_c sur le maillage utilisé ici (Tab.6.2) requiert un temps de calcul d'environ 10 min (sous Matlab[®] avec un processeur 2.3 GHz Intel Core i7[®] et une mémoire de 4 Go 1333 MHz DDR3). Plusieurs pistes peuvent être explorées pour optimiser ce temps de calcul : i) utiliser une machine plus performante, l'ordinateur portable utilisé ici pouvant être aisément remplacé par un poste fixe beaucoup plus performant pour un coût raisonnable ; et ii) engager une réflexion sur la vitesse de convergence de la méthode numérique ce qui permettrait éventuellement d'alléger le maillage et par suite, le temps de calcul. Nous pouvons néanmoins considérer que l'évaluation du

6.4 Test de l'hypothèse de troncature

modèle général est relativement peu coûteuse en temps de calcul et permet de conserver la notion de distribution de qualité. Ce modèle est alors une solution de remplacement satisfaisante au modèle tronqué, compatible avec l'approche dynamique du modèle général et sa caractérisation de la composition de la MOS.

6.5 Quelques exemples de simulations

Nous proposons dans cette partie quelques sorties du modèle pour différents apports de MO.

6.5.1 Peigne de qualité

Nous simulons ici l'évolution le long d'un profil de sol d'un peigne de qualité. Ceci permettra d'illustrer les éléments mis en lumière lors de l'étude de l'hypothèse de troncature.

En reprenant les paramètres du tableau 6.2, nous simulons l'évolution d'un apport constant de MO constitué d'une somme de pics de qualité réguliers (fig.6.9). La quantité totale de l'apport en nutriment n est ici 10 fois inférieure à celle du carbone. Leurs distributions en qualité sont supposées

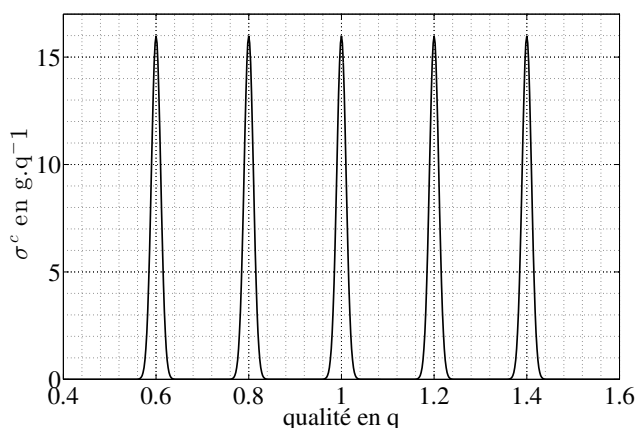


Figure 6.9 – Peigne de qualité.

égales. Cet exemple permet d'illustrer par exemple le cas d'un peuplement mélangé, avec plusieurs essences dans l'étage dominant et produisant des litières de qualités différentes.

La figure 6.10 permet de mettre à nouveau en évidence l'influence considérable de la dispersion de l'apport de MO. Nous constatons à nouveau que la perte rapide des éléments de qualité élevé provoque une décroissance rapide de Φ_0^c , Φ_0^n et $\hat{q}$ (fig.6.10).

Les figures 6.11 et 6.12 permettent de rendre compte de la variabilité de la consommation du carbone par la communauté des décomposeurs.

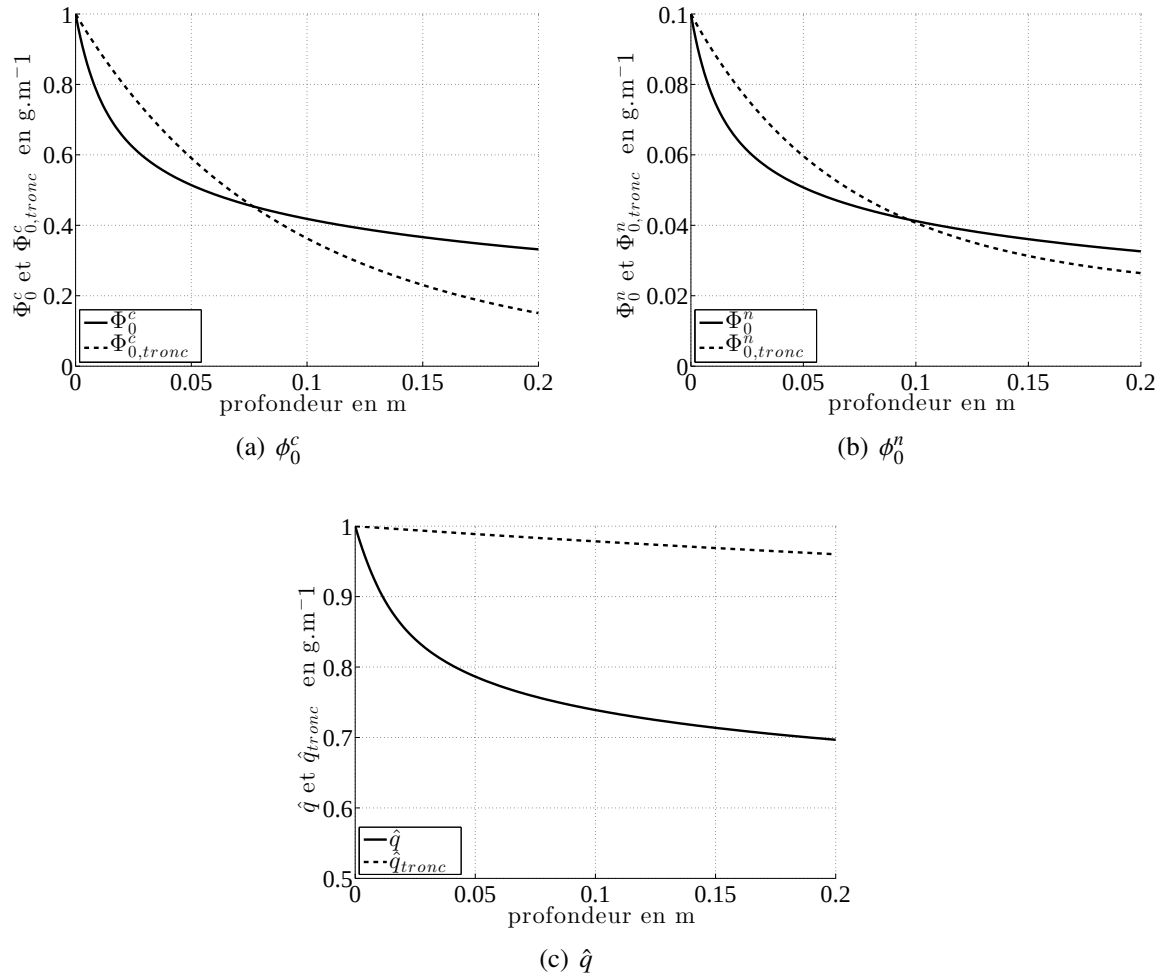


Figure 6.10 – Représentation de Φ_0^c , Φ_0^n et $\hat{q}$ sur un profil de sol de 20 cm au bout de 30 ans pour le modèle initial et le modèle tronqué. Ces différents graphiques mettent en évidence l’influence de l’hétérogénéité sur l’évolution du carbone dans le sol et confirme que l’utilisation du modèle général est plus adaptée à notre granulométrie.

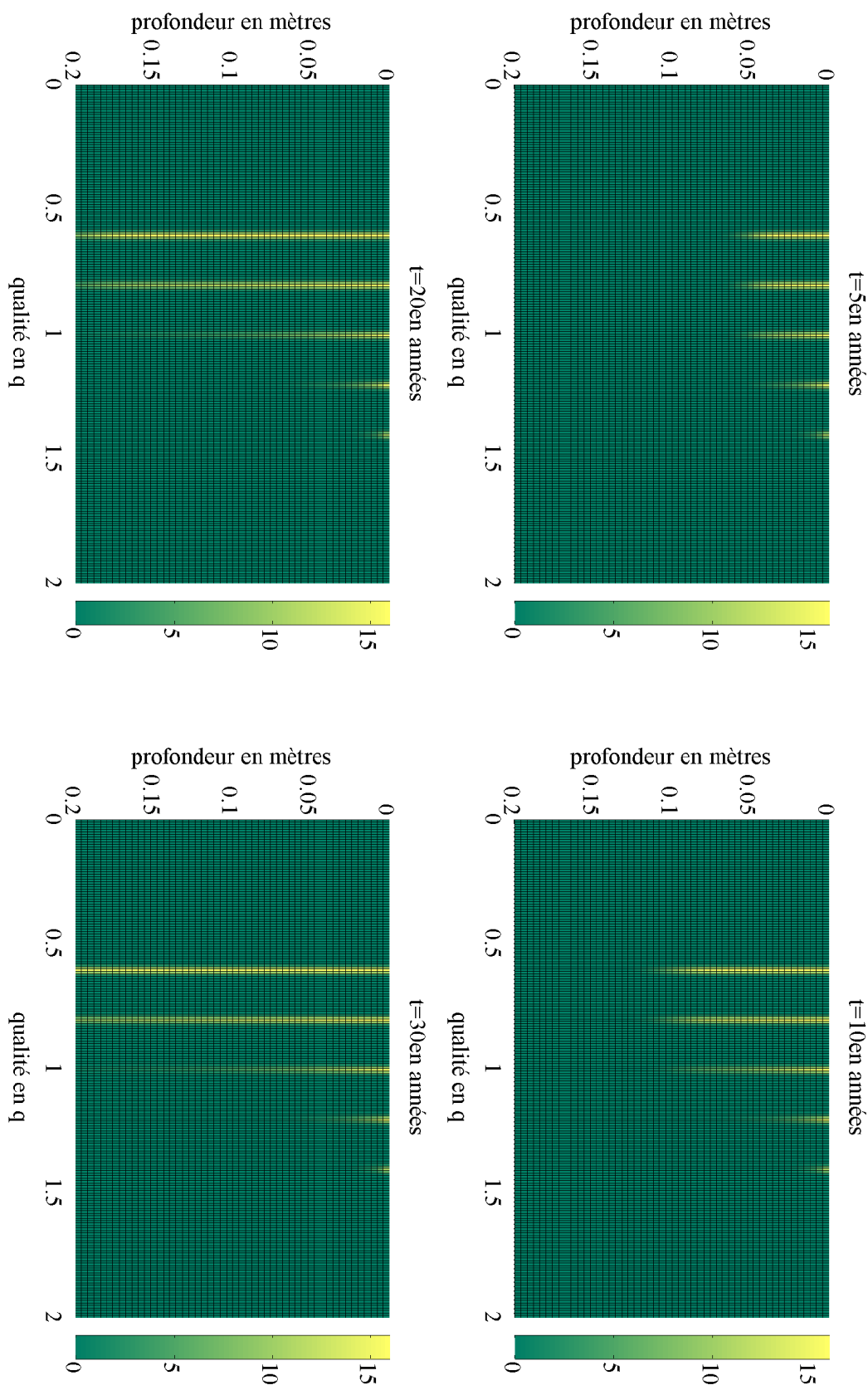


Figure 6.11 – Evolution dans le profil de sol de la distribution de carbone ρ_c .

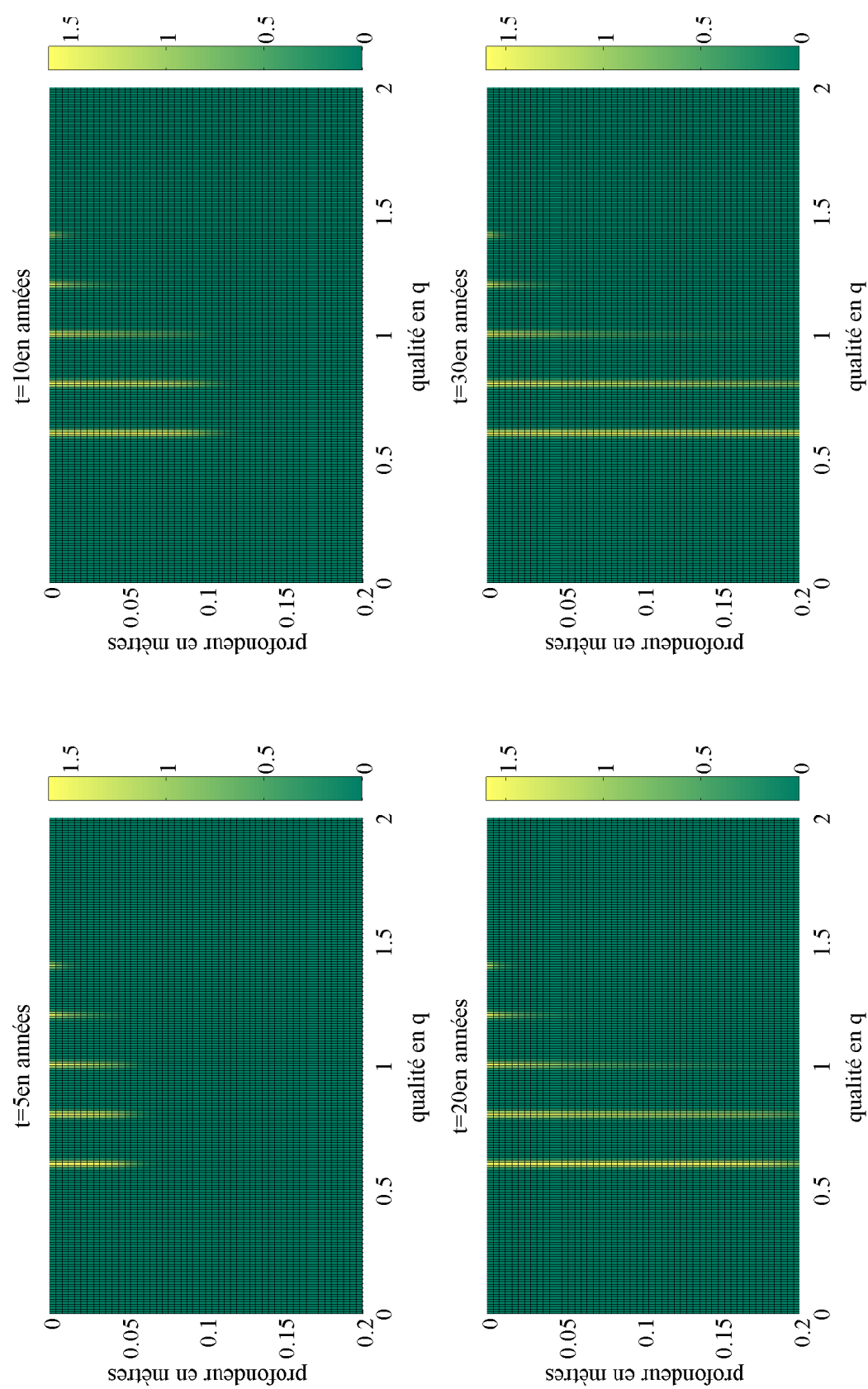


Figure 6.12 – Evolution dans le profil de sol de la distribution de nutriment ρ_n .

6.5.2 Apport constant quelconque

Nous proposons ici une dernière illustration (fig.6.15 et 6.16) du comportement de ρ_c et ρ_n dans le cas d'un apport constant quelconque (fig.6.13). La figure 6.14 permet de mettre en évidence l'impact sur les solutions Φ_0^c , Φ_0^n et $\hat{q}$.

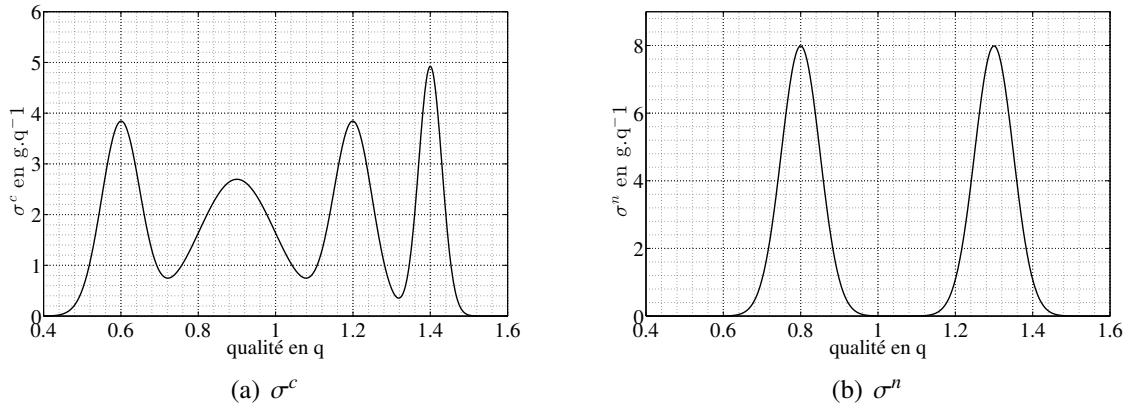


Figure 6.13 – Apports quelconques de MO.

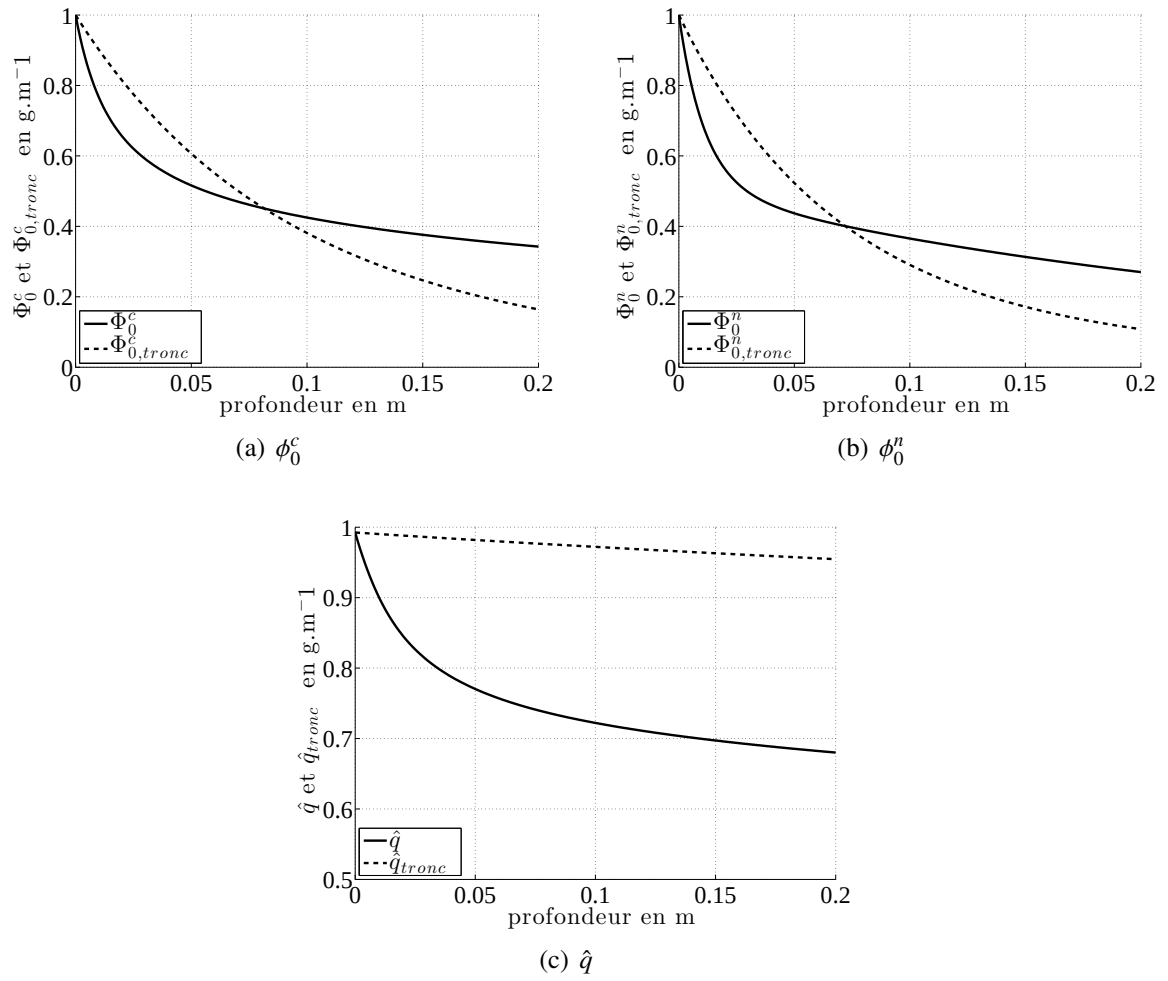


Figure 6.14 – Représentation de Φ_0^c , Φ_0^n et $\hat{q}$ sur un profil de sol de 20 cm au bout de 30 ans pour le modèle initial et le modèle tronqué. Ces différents graphiques mettent en évidence l’influence de l’hétérogénéité sur l’évolution du carbone dans le sol.

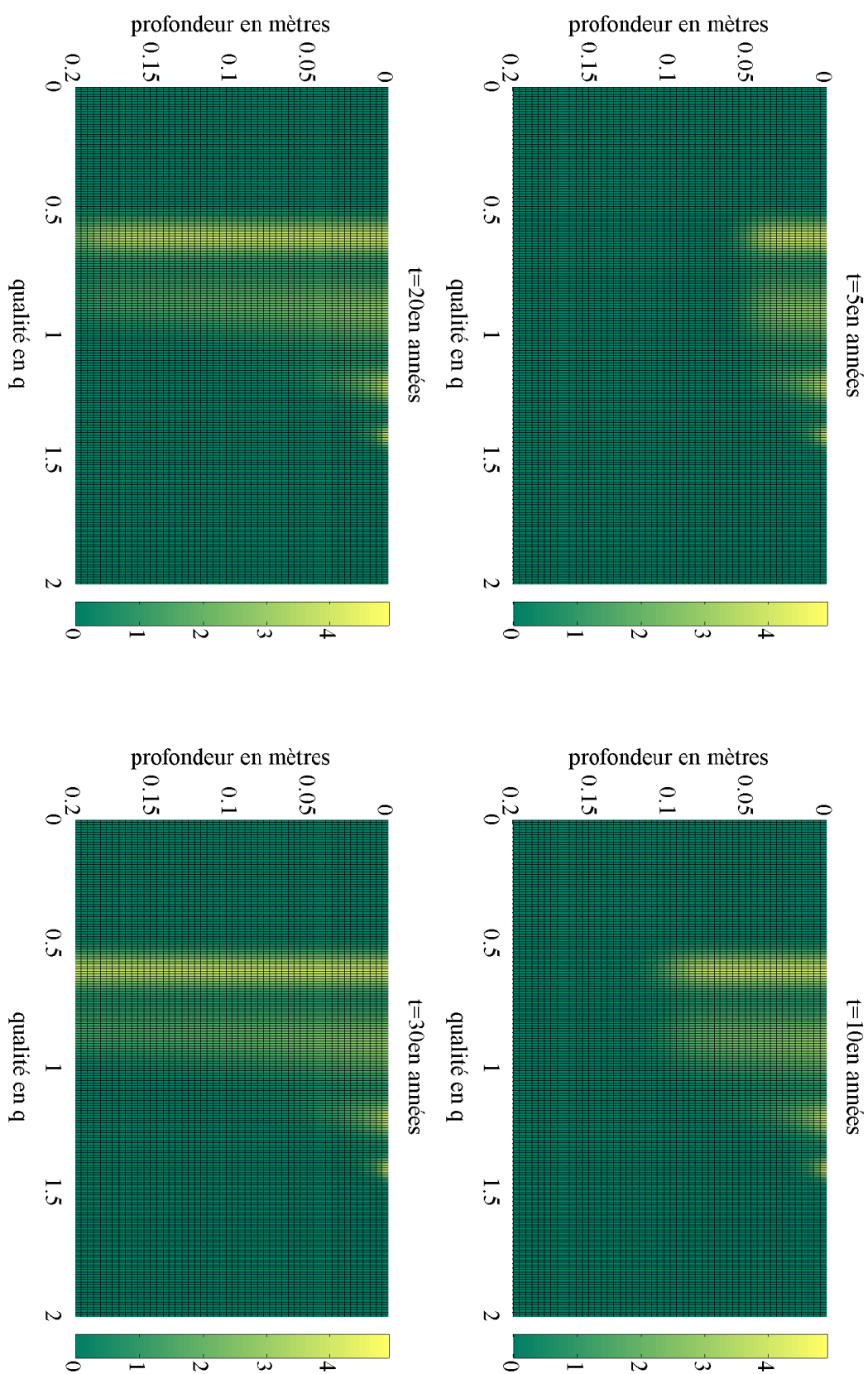


Figure 6.15 – Evolution dans le profil de sol de la distribution de carbone ρ_c .

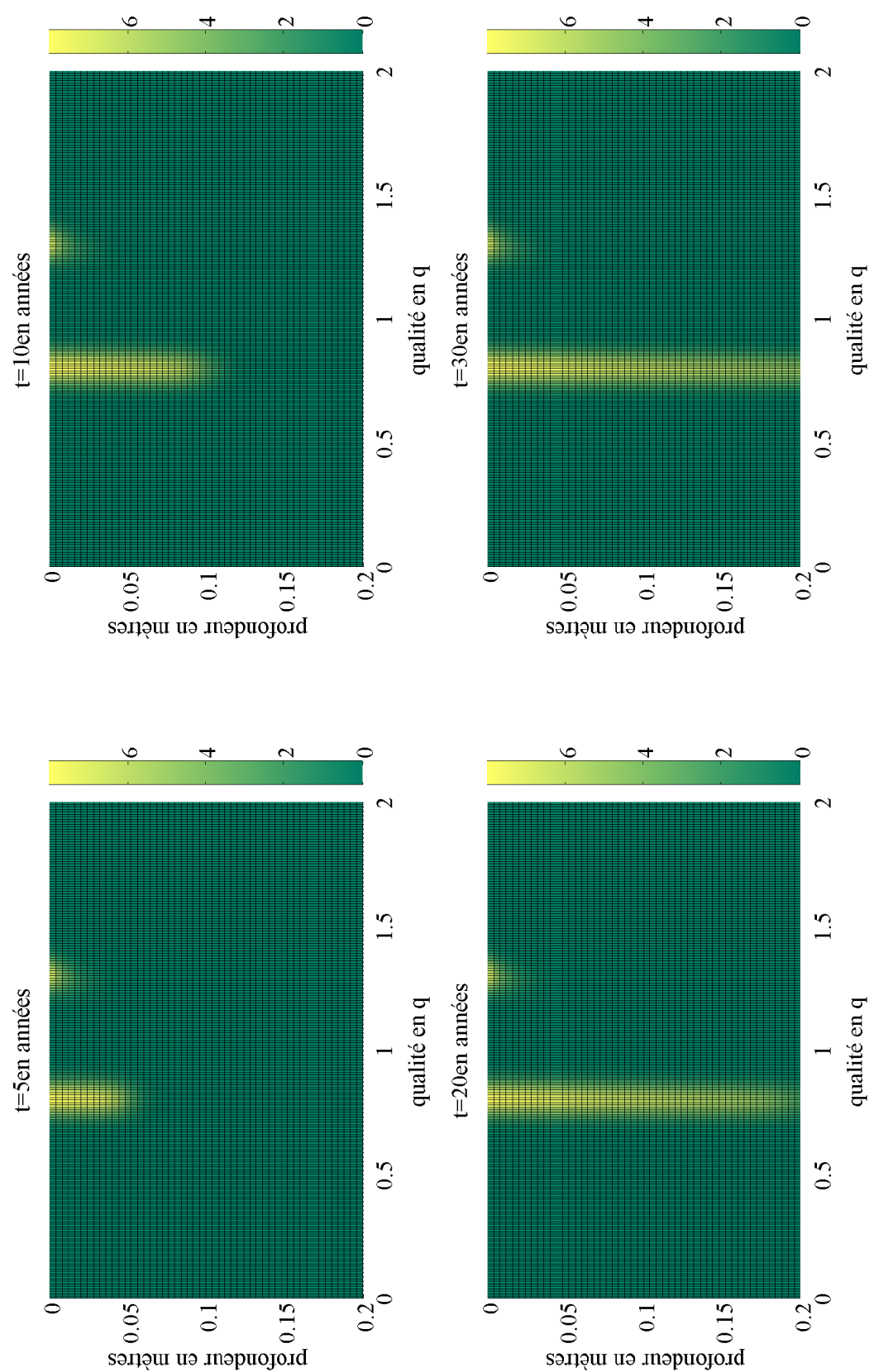


Figure 6.16 – Evolution dans le profil de sol de la distribution de carbone ρ_h .

Chapitre 7

Conclusions et perspectives

Ce chapitre a pour objectif de mettre en valeur les conclusions particulières des chapitres précédents en étudiant les avancées et les perspectives de modélisation rendues possibles par cette thèse. La figure 7.1 illustre et synthétise le travail effectué ainsi que les perspectives de développement de l'approche générale de modélisation présentée en 1.4. Ces travaux seront notamment portés au sein du projet QLSPIMS ¹(labex ARBRE) qui a débuté en 2013. La synthèse des travaux proposée ici s'inscrit d'ors et déjà dans ce projet.

1. http://mycor.nancy.inra.fr/ARBRE/?page_id=364

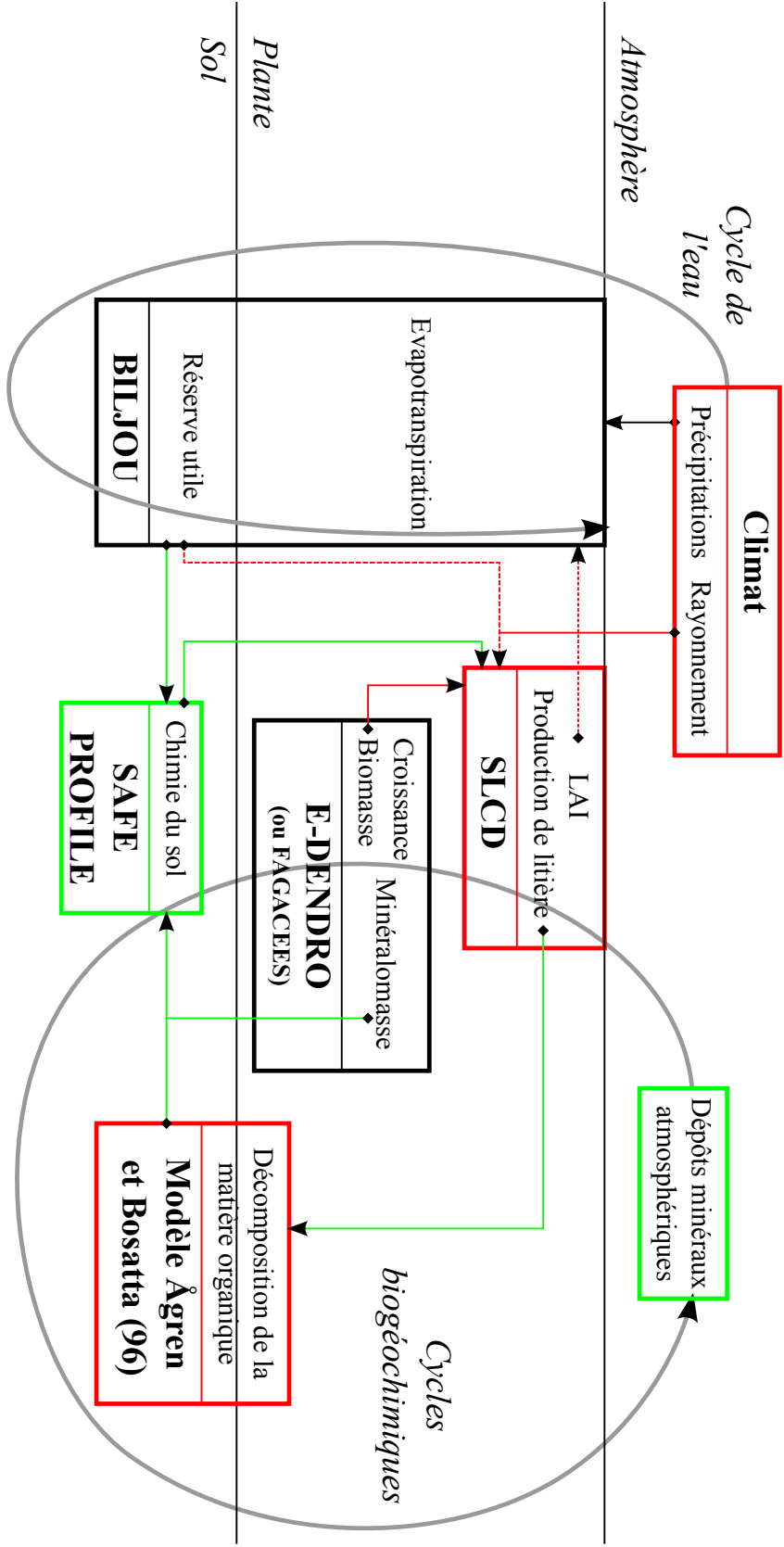


Figure 7.1 – Etat de la modélisation à la fin de cette thèse et perspectives d'associations de modèles pour l'élaboration d'une nouvelle approche du couplage sol-plante-atmosphère. Les compartiments de l'écosystème et les modèles associés entourés : i) en noir sont les modèles déjà existants au début de cette thèse, ii) en rouge sont les éléments considérés dans cette thèse, les liens en pointillés rouges ont été considérés au cours de cette thèse mais ne sont pas détaillés dans ce manuscrit, et iii) en vert seront considérés dans la phase de modélisation à venir au sein du projet QLSPIMS.

7.1 Contributions à la modélisation des cycles biogéochimiques

7.1.1 Cycle géochimique

Rappelons que l'un des objectifs de cette thèse était de rendre possible la modélisation du cycle de l'eau dans les modèles à base dendrométriques afin d'estimer à terme la perte d'éléments minéraux par drainage (voir 1.4.2.1). La nécessité principale était de simuler les variations saisonnières d'indice foliaire (LAI) indispensables à l'utilisation de modèles de type SVAT simulant la transpiration (Chouhury et Monteith, 1988, Fisher *et al.*, 2009, Granier *et al.*, 1999, Jung *et al.*, 2010, Shuttleworth et Wallace, 1985).

Dans ce contexte, l'avancée essentielle de notre travail est l'introduction du modèle SLCD capable de restituer la phénologie de la biomasse foliaire en intégrant les interactions avec les conditions environnementales et les estimations de croissance des modèles dendrométriques (chap.2-3). L'estimation saisonnière de LAI résultante permet de poser les bases d'une intégration progressive du cycle de l'eau, associant la robustesse des modèles dendrométriques à celle des modèles de type SVAT tel que Biljou (fig.7.2). Cette thèse a permis de mettre au point un code informatique Matlab[®] combinant les modèles E-Dendro, Biljou et SLCD. Son fonctionnement a déjà pu être testé sur des jeux de données fictifs. Ces résultats n'ont pas été présentés dans ce manuscrit.

Les possibilités de SLCD ont été mises en évidence par Sainte-Marie *et al.* (2014). Il a pu être appliqué aussi bien à un contexte tempéré qu'à un contexte tropical. Son formalisme général a permis notamment l'introduction de concepts issus d'autres modèles (utilisation des sous modules phénologiques du modèle écophysologique Castanea). Ceci démontre une relative souplesse d'utilisation et une ouverture à des améliorations futures. En particulier, la méthode d'ajustement de paramètre utilisée dans l'article (optimisation multi-objectif reposant sur un algorithme évolutionnaire) est suffisamment générale pour être utilisée de manière systématique avec SLCD.

Plusieurs hypothèses sur la phénologie des eucalyptus issues de la littérature ont été utilisées avec succès. Notre modèle confirme que les effets combinés de la sécheresse (foliation et chute de litières) et du rayonnement solaire (chutes de litières) sont les moteurs principaux de la phénologie de ces écosystèmes. Une forte régulation interne associée aux variations de LAI a également été mise en évidence. Le LAI : i) influence la quantité d'énergie absorbée par le feuillage et donc l'épuisement de leur potentiel photosynthétique et ii) permet d'estimer la pression exercée par la production de nouvelles feuilles sur la durée de vie des anciennes. Ces points démontrent la capacité d'investigation de SLCD qui permet d'apporter un éclairage supplémentaire sur la phénologie mal comprise de ces

écosystèmes.

Il convient de souligner que le SLCD fait la jonction entre l'échelle de temps mensuelle correspondant à la granulométrie des modèles dendrométriques et des données climatiques journalières correspondant à la granulométrie des modèles écophysologiques.

7.1.2 Cycle biologique

Nous avons identifié la nécessité d'estimer la production de litière foliaire ainsi que la décomposition de la MOS pour poursuivre l'intégration du cycle biologique aux modèles à base dendrométrique (voir 1.4.2.2).

L'élaboration du modèle SLCD a permis d'apporter une réponse à la première nécessité, en restituant une estimation de la production de litières foliaires mensuelles. Lors de l'étude de sites tempérés (chap.3), la reprise des équations de Castanea a permis de restituer des estimations saisonnières pertinentes de production de litières. Dans le cadre tropical, la poursuite des investigations sur la phénologie de ces écosystèmes est nécessaire pour améliorer la restitution de la périodicité des chutes de litières. Ceci repose notamment sur la prise en compte de la disponibilité en éléments minéraux sur la longévité des feuilles (voir discussion chap.3).

La décomposition de la MO a été considérée pour estimer le devenir des chutes de litières. L'étude du modèle Bosatta et Agren (1996) (chap.4,5,6) est le prolongement naturel des travaux de Remi d'Annunzio concernant la dynamique de la décomposition de la litière foliaire.

Grâce aux éléments mathématiques développés ici, nous avons à notre disposition plusieurs approches possibles pour modéliser la dynamique de la MOS reposant sur la théorie de la qualité : i) une approche en temps long basée sur l'utilisation du modèle tronqué tiré de Bosatta et Agren (1996) et ii) une approche à finesse variable, dépendant de la complexité des fonctions introduites dans le modèle originel (chap.6). Cette thèse se concentre sur la litière foliaire mais est capable de prendre en compte n'importe quel type de litière organique (branches, écorces,...). De plus, ce modèle est capable de prendre en compte aussi bien les apports réguliers que ponctuels (ex : apport de rémanents).

Le résultat mathématique essentiel de cette thèse est la mise en évidence dans le chapitre 5 des hypothèses nécessaires à l'existence d'une solution au modèle intégro-différentiel formulé par Bosatta et Agren (1996) et détaillée au chapitre 4. L'introduction de schémas numériques convergents pour une formulation particulière du modèle (chap.6) constitue une base de travail pour une utilisation avancée de la théorie de la qualité dans la modélisation de la décomposition de la MOS.

7.2 Perspectives

7.2.1 Modélisation du cycle de l'eau

L'élaboration du modèle SLCD a permis de proposer une association de modèles (dendrométrique, Biljou (SVAT), SLCD) qui doit désormais être mise en œuvre (fig.7.2). La recherche de données de validation permettant de confirmer la pertinence de notre association de modèles est désormais nécessaire. Celles d'ors et déjà collectées au sein des réseaux F-ORE-T² (sites ateliers) et RENECOFOR³ permettent d'envisager cette étape de validation sereinement dans le cadre d'étude tempérée. Pour les sites d'étude tropicaux, les partenariats mis en œuvre lors de l'élaboration de l'article Sainte-Marie *et al.* (2014) pourront à nouveau être sollicités.

Par ailleurs, l'application de notre modèle aux plantations congolaises d'eucalyptus, cadre de développement du modèle dendrométrique E-Dendro, constituera une nouvelle opportunité de validation et de perfectionnement du modèle dans un futur proche. Ce travail s'effectuera dans la continuité des projets Carboafrika⁴ et Climafrica⁵.

Plusieurs axes de recherche sont envisageables le développement particulier du modèle SLCD :

1. la validation du couplage de modèle permettra d'envisager l'extension de jeux de données à trous. Ce cas de figure se présente pour l'étude des plantations d'eucalyptus brésiliennes (Sainte-Marie *et al.*, 2014). Ceci devrait permettre l'amélioration des simulations de chutes de litières et par suite de la compréhension de la phénologie complexe des écosystèmes tropicaux.
2. l'intégration de l'influence de la disponibilité en éléments minéraux sur la phénologie est nécessaire pour optimiser les estimations du modèle SLCD. Cette intégration doit reposer sur l'intégration des cycles biogéochimiques à notre association générale de modèles.

7.2.2 Modélisation de la chimie du sol

Plusieurs pistes sont désormais à explorer pour améliorer le modèle de décomposition de la MOS :

1. mettre au point une méthodologie permettant de caractériser la qualité des litières produites par le modèle SLCD.
2. engager une réflexion sur l'introduction de l'activité de la macrofaune et de la mésofaune sur la décomposition de la MOS. Par exemple, l'activité des vers peut engendrer un brassage de

2. <http://www.gip-ecofor.org/f-ore-t/>

3. <http://www.onf.fr/renecofor/@@index.html>

4. http://www.carboafrika.net/index_en.asp

5. http://www.climafrika.net/index_en.jsp

Chapitre 7. Conclusions et perspectives

la MO et nécessiter l'ajout d'un terme additionnel aux équations du modèle conduisant à une analyse mathématique différente.

3. étudier les hypothèses nécessaires pour augmenter la régularité des solutions. Ceci permettra notamment d'obtenir des informations sur la vitesse de convergence du schéma numérique.
4. étudier la stabilité du schéma semi-implicite avec une vitesse v dépendant de q et z . L'étude de cette dépendance est indispensable pour étudier finement la décomposition suivant la composition, la porosité, et le nombre d'horizons du sol. Cette approche pourrait permettre d'associer les caractéristiques du sol utilisées par exemple par Biljou au modèle de décomposition de la MO.
5. reprendre les jeux de données existants au sein de l'unité Biogéochimie des Ecosystèmes Forestiers et des réseaux associés pour appliquer la méthodologie de modélisation que nous avons introduite. Notre approche peut notamment s'appliquer aux diverses expériences de marquage isotopique des litières forestières.

Il est important de souligner ici, que la MOS joue un rôle important dans le modèle Safe dont l'utilisation est envisagée pour modéliser la chimie du sol. En effet, la dissolution de MO y influence les équilibres ioniques au sein de la solution du sol (Alveteg, 1998). Il en résulte une variation non négligeable des éléments chimiques dissouts qui peuvent être soit prélevés par la plante (cycle biologique) soit drainés en profondeur (cycle géochimique) (van der Heijden *et al.*, 2013). A cet égard, l'orientation future de la modélisation nécessite l'évaluation quantitative de l'influence de la MOS dans Safe ainsi qu'une étude du lien entre la notion de qualité et la composition de la MOS.

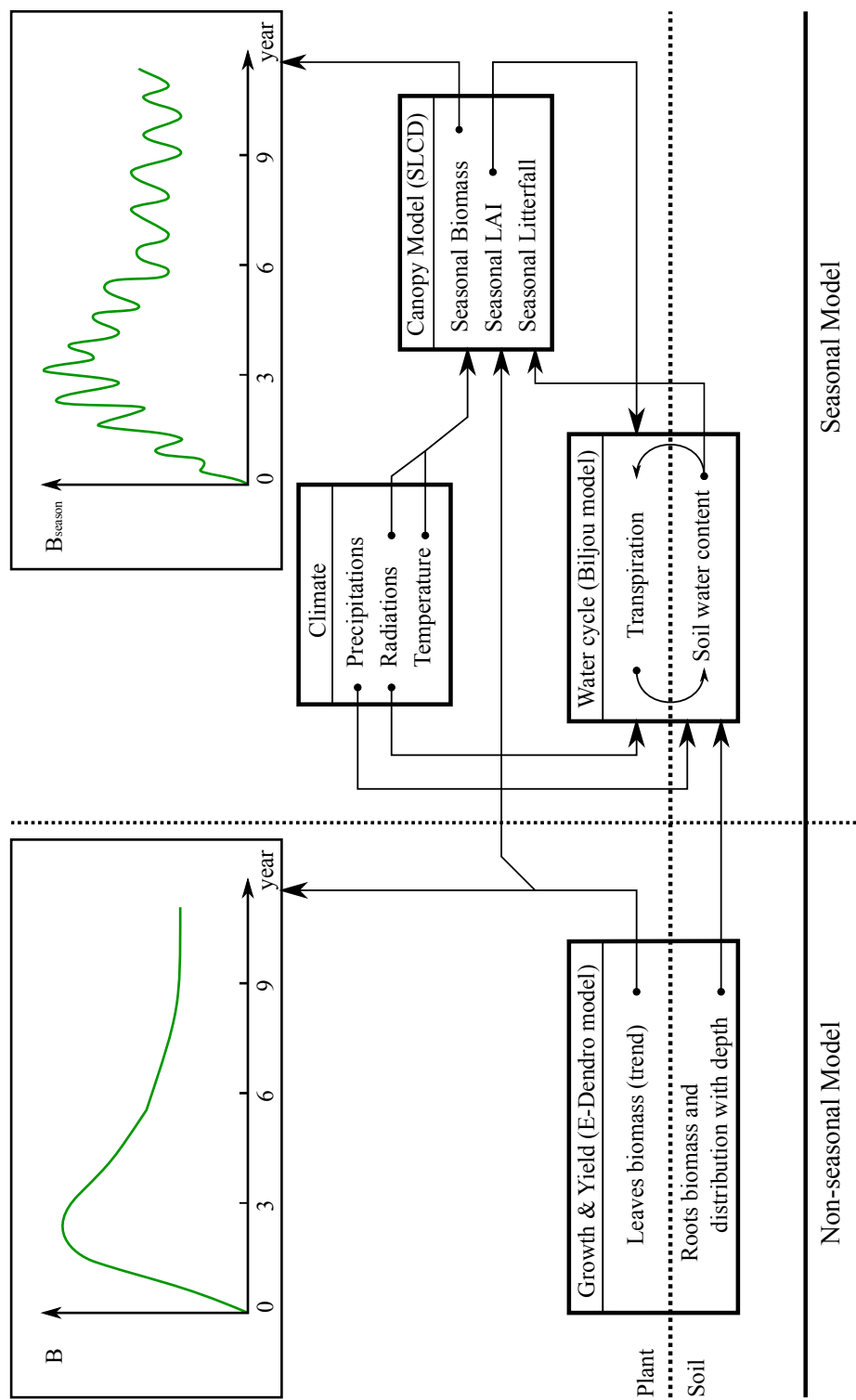


Figure 7.2 – Modélisation des variations saisonnières de la canopée et du cycle de l'eau grâce à l'association des modèles Biljou, SLCD et E-Dendro. Cette figure met en évidence le rôle central des simulations de *LAI* tel qu'identifié au chapitre 2.

Annexe A

Résultats divers

A.1 Chapitre 4 : Résolution explicite du modèle tronqué

Cette partie détaille la résolution du problème de Cauchy présenté en 4.4.2. Nous utilisons la méthode des caractéristiques pour résoudre ces équations. Posons :

$$\begin{cases} \partial_t Z(t, t_0) = \nu_0, \\ Z(t_0, t_0) = 0. \end{cases}$$

Nous obtenons $Z(t, t_0) = \nu_0(t - t_0)$ et on pose :

$$\begin{cases} Q(t, t_0) = \hat{q}(Z(t, t_0), t), \\ \Psi^c(t, t_0) = \Phi_0^c(Z(t, t_0), t), \\ \Psi^n(t, t_0) = \Phi_0^n(Z(t, t_0), t). \end{cases}$$

Nous obtenons alors le système d'équations différentielles couplées suivant :

$$(A.1a) \quad \partial_t Q(t, t_0) + \frac{f_c u_0}{\alpha + 2} Q(t, t_0)^{\beta+1} = 0,$$

$$(A.1b) \quad \partial_t \Psi^c(t, t_0) + f_c \frac{1 - e_0}{e_0} u_0 Q(t, t_0)^\beta \Psi^c(t, t_0) = 0,$$

$$(A.1c) \quad \partial_t \Psi^n(t, t_0) + \frac{f_c u_0}{e_0} Q(t, t_0)^\beta \Psi^n(t, t_0) = f_n u_0 Q(t, t_0)^\beta \Psi^c(t, t_0).$$

et les conditions initiales :

$$\begin{cases} Q(t_0, t_0) = \hat{q}_0 \mathbb{1}_{t_0 \geq 0} \\ \Psi_0^c(t_0, t_0) = I_0^c \mathbb{1}_{t_0 \geq 0}, \\ \Psi_0^n(t_0, t_0) = I_0^n \mathbb{1}_{t_0 \geq 0}. \end{cases}$$

Dans le cas où $t_0 < 0$, la solution du problème de Cauchy est nulle. Nous nous intéresserons donc dans la suite uniquement au cas où $t_0 \geq 0$.

A.1.0.0.1 Equation A.1a Pour $t \geq t_0$:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial_t Q(t, t_0)}{[Q(t, t_0)]^{\beta+1}} = \frac{-f_c u_0}{\alpha + 2}, \\
 \Rightarrow & \int_{t_0}^t \frac{\partial_t Q(s, t_0)}{[Q(s, t_0)]^{\beta+1}} ds = \frac{-f_c u_0}{\alpha + 2} (t - t_0), \\
 \Rightarrow & \frac{1}{Q(t, t_0)^\beta} - \frac{1}{\hat{q}_0^\beta} = \frac{\beta f_c u_0}{\alpha + 2} (t - t_0), \\
 \Rightarrow & Q(t, t_0) = \left(\frac{1}{\frac{1}{\hat{q}_0^\beta} + \frac{\beta f_c u_0}{\alpha + 2} (t - t_0)} \right)^{1/\beta}.
 \end{aligned}$$

Ainsi, $\forall t, t_0 \in \mathbb{R}$:

$$(A.2) \quad Q(t, t_0) = \left(\frac{\hat{q}_0^\beta (\alpha + 2)}{\alpha + 2 + \hat{q}_0^\beta \beta f_c u_0 (t - t_0)} \right)^{1/\beta} \mathbb{1}_{t_0 \geq 0}.$$

A.1.0.0.2 Equation A.1b Pour $t \geq t_0$:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial_t \Psi^c(t, t_0)}{\Psi^c(t, t_0)} = \frac{(e_0 - 1)(\alpha + 2)\beta f_c \hat{q}_0^\beta u_0}{e_0 \beta (\alpha + 2 + \beta f_c \hat{q}_0^\beta u_0 (t - t_0))}, \\
 \Rightarrow & \ln \left(\frac{\Psi^c(t, t_0)}{I_0^c} \right) = \frac{(e_0 - 1)(\alpha + 2)}{e_0 \beta} \ln \left(1 + \frac{\beta}{\alpha + 2} \hat{q}_0^\beta f_c u_0 (t - t_0) \right).
 \end{aligned}$$

Ainsi, $\forall t, t_0 \in \mathbb{R}$:

$$(A.3) \quad \Psi^c(t, t_0) = I_0^c \left(1 + f_c u_0 \hat{q}_0^\beta \frac{\beta}{\alpha + 2} (t - t_0) \right)^{\frac{-(1-e_0)(\alpha+2)}{e_0 \beta}} \mathbb{1}_{t_0 \geq 0}.$$

A.1.0.0.3 Equation A.1c

Equation homogène Cherchons la solution générale Ψ_0^c de l'équation homogène :

$$\partial_t \Psi_0^n(t, t_0) + \frac{f_c u_0}{e_0} \left(\frac{\hat{q}_0^\beta (\alpha + 2)}{\alpha + 2 + \hat{q}_0^\beta \beta f_c u_0 (t - t_0)} \right) \Psi_0^n(t, t_0) = 0.$$

Chapitre A. Résultats divers

Une simple intégration nous donne :

$$\Psi_0^n(t, t_0) = \lambda \left(\frac{1}{f_c u_0 \hat{q}_0^\beta} + \frac{\beta(t-t_0)}{\alpha+2} \right)^{\frac{-(\alpha+2)}{e_0 \beta}},$$

avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

Variation de la constante Pour $t \geq t_0$, posons

$$\Psi^n(t, t_0) = \lambda(t) \left(\frac{1}{f_c u_0 \hat{q}_0^\beta} + \frac{\beta(t-t_0)}{\alpha+2} \right)^{\frac{-(\alpha+2)}{e_0 \beta}}.$$

Nous obtenons :

$$\begin{cases} \lambda'(t) = I_0^c \frac{f_n}{f_c} \left(\frac{1}{f_c u_0 \hat{q}_0^\beta} + \frac{\beta}{\alpha+2}(t-t_0) \right)^{\frac{\alpha+2}{\beta e_0} - 1} \\ \lambda(t_0) = I_0^n \left(\frac{1}{f_c u_0 \hat{q}_0^\beta} \right)^{\frac{\alpha+2}{\beta e_0}} \end{cases}$$

Alors :

$$\lambda(t) = \left(I_0^n - I_0^c \frac{f_n e_0}{f_c} \right) \left(\frac{1}{f_c u_0 \hat{q}_0^\beta} \right)^{\frac{\alpha+2}{\beta e_0}} + I_0^c \frac{f_n e_0}{f_c} \left(\frac{1}{f_c u_0 \hat{q}_0^\beta} + \frac{\beta}{\alpha+2}(t-t_0) \right)^{\frac{\alpha+2}{\beta e_0}}$$

Ainsi, $\forall t, t_0 \in \mathbb{R}$:

$$(A.4) \quad \Psi^n(t, t_0) = \left(\left(I_0^n - I_0^c \frac{f_n e_0}{f_c} \right) \left(1 + f_c u_0 \hat{q}_0^\beta \frac{\beta(t-t_0)}{\alpha+2} \right)^{\frac{-(\alpha+2)}{e_0 \beta}} + I_0^c \frac{f_n e_0}{f_c} \right) \mathbb{1}_{t_0 \geq 0}.$$

Remarque A.1.1

Les modifications apportées aux chapitres 5 et 6 ne modifient pas ces résultats. Pour s'en convaincre, il suffit de constater que $\hat{q}_0 < q_{\max}$. Comme l'application $t \mapsto Q(t, t_0)$ est décroissante, la troncature de $u(q, z)$ pour $q > q_{\max}$ donnée en 5.2.7 est transparente dans les équations ci-dessus.

A.2 Chapitre 5

A.2.1 Preuve proposition 5.1.3

Supposons que $(\Phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $L^{1,N}(\mathbb{R}_+)$, alors pour tout $k \in \{0, 1, \dots, N\}$, $(x^k \Phi_n(k))_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $L^1(\mathbb{R}_+)$. Comme $L^1(\mathbb{R}_+)$ est complet, chacune de ces suites converge dans $L^1(\mathbb{R}_+)$ c.-à-d. $\exists u_0, u_1, u_2, \dots, u_N \in L^1(\mathbb{R}_+)$ tels que $\Phi_n \rightarrow u_0$ et $\forall k = 1 \dots N$, $x^k \Phi_n \rightarrow u_k$ dans $L^1(\mathbb{R}_+)$.

Mais $\Phi_n \rightarrow u$ dans $L^1(\mathbb{R}_+)$ implique que $\Phi_n \rightarrow u$ et $x^k \Phi_n \rightarrow x^k u$ au sens des distributions. Donc, par unicité de la limite au sens des distributions, $x^k u = u_k$ au sens des distributions, mais comme il s'agit de deux fonctions appartenant à $L^1_{loc}(\mathbb{R}_+)$, elles sont égales p.p. ce qui prouve que $u \in L^{1,N}(\mathbb{R}_+)$.

A.2.2 Preuve proposition 5.1.4

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $E = L^{1,N} \cap \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^+)$ pour la norme $\|\cdot\|_E = \|\cdot\|_{L^{1,N}(\mathbb{R}^+)} + \|\cdot\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+)}$. Alors, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $(L^{1,N}(\mathbb{R}^+), \|\cdot\|_{L^{1,N}(\mathbb{R}^+)})$ et $(\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^+), \|\cdot\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+)})$. Comme ce sont des espaces de Banach, il existe $f_1 \in L^{1,N}(\mathbb{R}^+)$ et $f_\infty \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^+)$ tel que :

$$\begin{aligned} f_n &\xrightarrow{\|\cdot\|_{L^{1,N}}} f_1, \\ f_n &\xrightarrow{\|\cdot\|_{L^\infty}} f_\infty. \end{aligned}$$

Il reste à prouver que $f_1 = f_\infty$. Considérons :

$$\begin{aligned} \|f_1 - f_\infty\|_{L^1} &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R |f_1 - f_\infty| \\ &\leq \lim_{R \rightarrow \infty} \left(\int_0^R |f_1 - f_n| + \int_0^R |f_n - f_\infty| \right) \\ &\leq \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R |f_1 - f_n| + \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R |f_n - f_\infty| \\ &\leq \underbrace{\|f_1 - f_n\|_{L^{1,N}}}_{\rightarrow 0} + \lim_{R \rightarrow \infty} \underbrace{\int_0^R |f_n - f_\infty|}_{\rightarrow 0} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

Bibliographie

- Ackerly, D. (1999). Self-shading, carbon gain and leaf dynamics : a test of alternative optimality models. *Oecologia*, 119(3):300–310.
- Ackerly, D. D. et Bazzaz, F. A. (1995). Leaf dynamics, self-shading and carbon gain in seedlings of a tropical pioneer tree. *Oecologia*, 101(3):289–298.
- Agren, G. et Bosatta, E. (1996). Quality : A bridge between theory and experiment in soil organic matter studies. *Oikos*, 76(3):522 – 528.
- Agren, G., Bosatta, E. et Balesdent, J. (1996). Isotope discrimination during decomposition of organic matter : A theoretical analysis. *Soil Science Society of America Journal*, 60(4):1121 – 1126.
- Agren, G. I. et Bosatta, E. (1998). *Theoretical Ecosystem Ecology : Understanding Element Cycles*. Cambridge University Press.
- Allen, R., Pereira, L., Raes, D. et Smith, M. (1998). *Crop evapotranspiration : guidelines for computing crop water requirements.*, volume 56 de *Irrigation and Drainage Paper*. FAO - Food and Agriculture Organization of the United Nations, Rome.
- Almeida, A. C., Landsberg, J. J. et Sands, P. J. (2004). Parameterisation of 3-pg model for fast-growing eucalyptus grandis plantations. *Forest Ecology and Management*, 193(1-2):179–195.
- Alveteg, M. (1998). *Dynamics of Forest Soil Chemistry*. Thèse de doctorat, Department of Chemical Engineering II, Lund University, Sweden.
- Arp, P. A. et Oja, T. (1997). A forest soil vegetation atmosphere model (forsva) .1. concepts. *Ecological Modelling*, 95(2-3):211–224.
- Assmann, E. (1970). *The principles of forest yield study*. Pergamon Press.
- Battaglia, M., Cherry, M., Beadle, C., Sands, P. et Hingston, A. (1998). Prediction of leaf area index in eucalypt plantations : effects of water stress and temperature. *Tree Physiology*, 18(8-9):521–528.

Bibliographie

- Battaglia, M., Sands, P., White, D. et Mummery, D. (2004). Cabala : a linked carbon, water and nitrogen model of forest growth for silvicultural decision support. *Forest Ecology and Management*, 193(1-2):251–282.
- Bellassen, V., Le Maire, G., Dhote, J., Ciais, P. et Viovy, N. (2010). Modelling forest management within a global vegetation model part 1 : Model structure and general behaviour. *Ecological Modelling*, 221(20):2458–2474.
- Bellassen, V., Le Maire, G., Guin, O., Dhote, J., Ciais, P. et Viovy, N. (2011). Modelling forest management within a global vegetation model-part 2 : Model validation from a tree to a continental scale. *Ecological Modelling*, 222(1):57–75.
- Bontemps, J.-D. et Bouriaud, O. (2014). Predictive approaches to forest site productivity : recent trends, challenges and future perspectives. *Forestry*, 87(1, SI):109–128.
- Bosatta, E. et Agren, G. (1985). Theoretical analyses of decomposition of heterogeneous substrates. *Soil Biology and Biochemistry*, 17(5):601 – 610.
- Bosatta, E. et Agren, G. (1991). Dynamics of carbon and nitrogen in the organic-matter of the soil - a generic theory. *American Naturalist*, 138(1):227 – 245.
- Bosatta, E. et Agren, G. (1996). Theoretical analyses of carbon and nutrient dynamics in soil profiles. *Soil Biology and Biochemistry*, 28(10-11):1523 – 1531.
- Bosatta, E. et Agren, G. (2002). Quality and irreversibility : constraints on ecosystem development. *Proceedings of the Royal Society of London Series B-Biological Sciences*, 269(1487):203 – 210.
- Bosatta, E. et Agren, G. (2003). Exact solutions to the continuous-quality equation for soil organic matter turnover. *Journal of Theoretical Biology*, 224(1):97 – 105.
- Botta, A., Viovy, N., Ciais, P., Friedlingstein, P. et Monfray, P. (2000). A global prognostic scheme of leaf onset using satellite data. *Global Change Biology*, 6(7):709–725.
- Bradley, A., V. Gerard, F., F. Barbier, N., Weedon, G. P., Anderson, L. O., Huntingford, C., Aragao, L. E. O. C., Zelazowski, P. et Arai, E. (2011). Relationships between phenology, radiation and precipitation in the amazon region. *Global Change Biology*, 17(6):2245–2260.
- Breda, N. (1999). The leaf area index of forest canopies : measurement, variability and functional role. *Revue Forestiere Francaise*, 51(2):135–150.
- Brezis, H. (1983). *Analyse fonctionnelle : Théorie et applications*. Collection Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise. Collection Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise. [Collection of Applied Mathematics for the Master's Degree]. Masson, Paris.
- Cartan, H. (1967). *Calcul différentiel*. Hermann.

- Chabot, B. F. et Hicks, D. J. (1982). The ecology of leaf life spans. *Annual Review of Ecology and Systematics*, 13:229–259.
- Chouhury, B. J. et Monteith, J. L. (1988). A 4-layer model for the heat-budget of homogeneous land surfaces. *Quarterly Journal of The Royal Meteorological Society*, 114(480):373–398.
- Colmez, P. (2009). *Eléments d'analyse et d'algèbre (et de théorie des nombres)*. Editions de l'Ecole Polytechnique, Palaiseau.
- Corbeels, M., McMurtrie, R., Pepper, D. et O'Connell, A. (2005a). A process-based model of nitrogen cycling in forest plantations part i. structure, calibration and analysis of the decomposition model. *Ecological Modelling*, 187(4):426–448.
- Corbeels, M., McMurtrie, R., Pepper, D. et O'Connell, A. (2005b). A process-based model of nitrogen cycling in forest plantations. part ii. simulating growth and nitrogen mineralisation of eucalyptus globulus plantations in south-western australia. *Ecological Modelling*, 187(4):449–474.
- d'Annunzio, R. (2008). *Etude de la dynamique de la matière organique sous plantation clonale d'Eucalyptus au Congo*. Jan, ENGREF/AgroParisTech.
- d'Annunzio, R., Zeller, B., Nicolas, M., Dhote, J. F. et Saint-Andre, L. (2008). Decomposition of european beech (*fagus sylvatica*) litter : Combining quality theory and n-15 labelling experiments. *Soil Biology and Biochemistry*, 40(2):322–333.
- Davi, H., Barbaroux, C., Dufrene, E., Francois, C., Montpied, P., Breda, N. et Badeck, F. (2008). Modelling leaf mass per area in forest canopy as affected by prevailing radiation conditions. *Ecological Modelling*, 211(3-4):339–349.
- Davi, H., Dufrene, E., Granier, A., Le Dantec, V., Barbaroux, C., Francois, C. et Breda, N. (2005). Modelling carbon and water cycles in a beech forest part 2 : Validation of the main processes from organ to stand scale. *Ecological Modelling*, 185(2-4):387–405.
- Deimling, K. (1977). *Ordinary Differential Equations in Banach Spaces*, volume 596 de *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin.
- Delpierre, N. (2009). *Etude du déterminisme des variations interannuelles des échanges carbonés entre les écosystèmes forestiers européens et l'atmosphère : une approche basée sur la modélisation des processus*. Thèse de doctorat, Université Paris XI.
- Delpierre, N., Dufrene, E., Soudani, K., Ulrich, E., Cecchini, S., Boe, J. et Francois, C. (2009). Modelling interannual and spatial variability of leaf senescence for three deciduous tree species in france. *Agricultural and Forest Meteorology*, 149(6-7):938–948.

Bibliographie

- Demailly, J. (2006). *Analyse numérique et équations différentielles*. Collection Grenoble sciences. EDP sciences.
- Dhote, J. F. (1996). A model of even-aged beech stands productivity with process-based interpretations. *Annales des Sciences Forestières*, 53(1):1–20.
- Dieudonné, J. (1963). *Fondements de l'analyse moderne*, volume 28 de *Cahiers Scientifiques*. Gaston Julia, Gauthier-Villars.
- Dufrene, E., Davi, H., Francois, C., Le Maire, G., Le Dantec, V. et Granier, A. (2005). Modelling carbon and water cycles in a beech forest part 1 : Model description and uncertainty analysis on modelled net. *Ecological Modelling*, 185(2-4):407–436.
- Eichhorn, F. L. E. (1904). Beziehungen zwischen bestandshöhe und bestandsmasse. *Allgemeine Forst- und Jagdzeitung*.
- England, J. R. et Attiwill, P. M. (2006). Changes in leaf morphology and anatomy with tree age and height in the broadleaved evergreen species, *eucalyptus regnans* f. *muell*. *Trees : Structure and Function*, 20(1):79–90.
- FAO (2011). *State of the World's Forests 2011*. Food and Agriculture Organization of the United Nations, Rome, Rome.
- FAO (2012). *State of the world's forests 2012*. Food and Agriculture Organization of the United Nations, Rome.
- Farquhar, G. D., Caemmerer, S. V. et Berry, J. A. (1980). A biochemical-model of photosynthetic CO_2 assimilation in leaves of C_3 species. *Planta*, 149(1):78–90.
- Fisher, J., Malhi, Y., Bonal, D., Rocha, H. R. d., Araujo, A. C. d., Gamo, M., Goulden, M., Hirano, T., Huete, A., Kondo, H., Kumagai, T., Loescher, H., Miller, S., Nobre, A., Nouvellon, Y., Oberbauer, S., Panuthai, S., Roupsard, O., Saleska, S., Tanaka, K., Tanaka, N., Tu, K. et Randow, C. v. (2009). The land-atmosphere water flux in the tropics. *Global Change Biology*, 15(11):2694–2714.
- Fracheboud, Y., Luquez, V., Bjorken, L., Sjödin, A., Tuominen, H. et Jansson, S. (2009). The control of autumn senescence in european aspen. *Plant Physiology*, 149(4):1982–1991.
- Georges, P. (2007). Rapport sur la science et la technologie n°27 : Cycles biogéochimiques et écosystèmes continentaux.
- Goudie, A. S. (2009). Dust storms : Recent developments. *Journal of environmental management*, 90(1):89–94.

- Gower, S. T., Kucharik, C. J. et Norman, J. M. (1999). Direct and indirect estimation of leaf area index, f(apar), and net primary production of terrestrial ecosystems. *Remote sensing of environment*, 70(1):29–51.
- Granier, A., Biron, P. et Lemoine, D. (2000). Water balance, transpiration and canopy conductance in two beech stands. *Agricultural and Forest Meteorology*, 100(4):291–308.
- Granier, A., Breda, N., Biron, P. et Villetto, S. (1999). A lumped water balance model to evaluate duration and intensity of drought constraints in forest stands. *Ecological Modelling*, 116(2-3):269–283.
- Harris, T. E. (1963). *The Theory of Branching Processes*. Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Bd. 119. Springer-Verlag, Berlin.
- Hikosaka, K. (2005). Leaf canopy as a dynamic system : Ecophysiology and optimality in leaf turnover. *Annals of Botany*, 95(3):521 – 533.
- Jolly, W. M., Nemani, R. et Running, S. W. (2005). A generalized, bioclimatic index to predict foliar phenology in response to climate. *Global Change Biology*, 11(4):619–632.
- Jung, M., Reichstein, M., Ciais, P., Seneviratne, S. I., Sheffield, J., Goulden, M. L., Bonan, G., Cescatti, A., Chen, J., de Jeu, R., Dolman, A. J., Eugster, W., Gerten, D., Gianelle, D., Gobron, N., Heinke, J., Kimball, J., Law, B. E., Montagnani, L., Mu, Q., Mueller, B., Oleson, K., Papale, D., Richardson, A. D., Rouspard, O., Running, S., Tomelleri, E., Viovy, N., Weber, U., Williams, C., Wood, E., Zaehle, S. et Zhang, K. (2010). Recent decline in the global land evapotranspiration trend due to limited moisture supply. *Nature*, 467(7318):951–954.
- Kikuzawa, K. et Lechowicz, M. (2011). *Ecology of leaf longevity*. Ecological Research Monographs. Springer Tokyo.
- Kitajima, K., Mulkey, S., Samaniego, M. et Wright, S. (2002). Decline of photosynthetic capacity with leaf age and position in two tropical pioneer tree species. *American Journal of Botany*, 89(12):1925–1932.
- Kitajima, K., Mulkey, S. et Wright, S. (1997a). Decline of photosynthetic capacity with leaf age in relation to leaf longevities for five tropical canopy tree species. *American Journal of Botany*, 84(5):702–708.
- Kitajima, K., Mulkey, S. et Wright, S. (1997b). Seasonal leaf phenotypes in the canopy of a tropical dry forest : Photosynthetic characteristics and associated traits. *Oecologia*, 109(4):490–498.
- Klaminder, J., Lucas, R., Futter, M., Bishop, K., Kohler, S., Egnell, G. et Laudon, H. (2011). Silicate mineral weathering rate estimates : Are they precise enough to be useful when predicting the recovery of nutrient pools after harvesting ? *Forest Ecology and Management*, 261(1):1–9.

Bibliographie

- Laclau, J. P., Almeida, J. C. R., Goncalves, J. L. M., Saint-Andre, L., Ventura, M., Ranger, J., Moreira, R. M. et Nouvellon, Y. (2009). Influence of nitrogen and potassium fertilization on leaf lifespan and allocation of above-ground growth in eucalyptus plantations. *Tree Physiology*, 29(1):111–124.
- Laclau, J. P., Bouillet, J. P. et Ranger, J. (2000). Dynamics of biomass and nutrient accumulation in a clonal plantation of eucalyptus in congo. *Forest ecology and management*, 128(3):181–196.
- Laclau, J. P., Ranger, J., Goncalves, J. L. D., Maquere, V., Krusche, A. V., M'Bou, A. T., Nouvellon, Y., Saint-Andre, L., Bouillet, J. P., Piccolo, M. D. et Deleporte, P. (2010). Biogeochemical cycles of nutrients in tropical eucalyptus plantations main features shown by intensive monitoring in congo and brazil. *Forest ecology and management*, 259(9):1771–1785.
- Lang, S. (1983). *Real analysis*. Addison-Wesley, Advanced Book Program, Reading, MA, second édition.
- Le Maire, G., Marsden, C., Verhoef, W., Ponzoni, F. J., Lo Seen, D., Begue, A., Stape, J.-L. et Nouvellon, Y. (2011). Leaf area index estimation with modis reflectance time series and model inversion during full rotations of eucalyptus plantations. *Remote sensing of environment*, 115(2):586–599.
- Le Maire, G., Nouvellon, Y., Christina, M., Ponzoni, F. J., Goncalves, J., Bouillet, J. et Laclau, J.-P. (2013). Tree and stand light use efficiencies over a full rotation of single- and mixed-species eucalyptus grandis and acacia mangium plantations. *Forest Ecology and Management*, 288:31–42.
- Lebourgeois, F., Pierrat, J. C., Perez, V., Piedallu, C., Cecchini, S. et Ulrich, E. (2008). Phenological timing in french temperate forests - a study on stands in the renecofor network. *Revue Forestiere Francaise*, 60(3).
- Lowman, M. D. (1992). Leaf growth dynamics and herbivory in 5 species of australian rain-forest canopy trees. *Journal of Ecology*, 80(3):433–447.
- Lowman, M. D. et Heatwole, H. (1992). Spatial and temporal variability in defoliation of australian eucalypts. *Ecology*, 73(1):129–142.
- Manzoni, S. et Porporato, A. (2009). Soil carbon and nitrogen mineralization : Theory and models across scales. *Soil Biology and Biochemistry*, 41(7):1355–1379.
- Marsden, C., Nouvellon, Y., Laclau, J.-P., Corbeels, M., McMurtrie, R. E., Stape, J., Epron, D. et Le Maire, G. (2013). Modifying the g'day process-based model to simulate the spatial variability of eucalyptus plantation growth on deep tropical soils. *Forest Ecology and Management*, 301(SI): 112–128.

- Nouvellon, Y., Begue, A., Moran, M. S., Lo Seen, D., Rambal, S., Luquet, D., Chehbouni, G. et Inoue, Y. (2000). Par extinction in shortgrass ecosystems : effects of clumping, sky conditions and soil albedo. *Agricultural and Forest Meteorology*, 105(1/3):21–41.
- Nouvellon, Y., Laclau, J. P., Epron, D., Kinana, A., Mabiala, A., Roupsard, O., Bonnefond, J. M., Le Maire, G., Marsden, C., Bontemps, J. D. et Saint-Andre, L. (2010). Within-stand and seasonal variations of specific leaf area in a clonal eucalyptus plantation in the republic of congo. *Forest ecology and management*, 259(9):1796–1807.
- Oja, T. et Arp, P. A. (1997). A forest soil vegetation atmosphere model (forsva) .2. application to northern tolerant hardwoods. *Ecological Modelling*, 95(2-3):225–247.
- Olofsson, P. (1996). General branching processes with immigration. *Journal of Applied Probability*, 33(4):940–948.
- ONU (2005). Millennium ecosystem assessment, 2005. ecosystems and human well-being : synthesis. *Millennium Ecosystem Assessment, 2005. Ecosystems and human well-being : synthesis*, pages 137 pp.–137 pp.
- Perthame, B. (2007). *Transport equations in biology*. Frontiers in Mathematics. Birkhäuser Verlag, Basel.
- Poincaré, H. (1902). *La science et l'hypothèse*. Champs sciences. Flammarion.
- Pook, E. W. (1984a). Canopy dynamics of eucalyptus maculata hook. 1. distribution and dynamics of leaf populations. *Australian journal of botany*, 32(4):387–403.
- Pook, E. W. (1984b). Canopy dynamics of eucalyptus maculata hook. 2. canopy leaf-area balance. *Australian journal of botany*, 32(4):405–413.
- Pook, E. W. (1985). Canopy dynamics of eucalyptus maculata hook. 3. effects of drought. *Australian journal of botany*, 33(1):65–79.
- Pook, E. W. (1986). Canopy dynamics of eucalyptus maculata hook. 4. contrasting responses to 2 severe droughts. *Australian journal of botany*, 34(1):1–14.
- Pook, E. W., Gill, A. M. et Moore, P. H. R. (1997). Long-term variation of litter fall, canopy leaf area and flowering in a eucalyptus maculata forest on the south coast of new south wales. *Australian journal of botany*, 45(5):737–755.
- Pornon, A., Marty, C., Winterton, P. et Lamaze, T. (2011). The intriguing paradox of leaf lifespan responses to nitrogen availability. *Functionnal Ecology*, 25(4):796–801.
- Quarteroni, A., Sacco, R. et Saleri, F. (2007). *Méthodes numériques, Algorithmes, analyse et applications. [Algorithms, analysis and applications], Translated from the 1998 Italian original by Jean-Frédéric Gerbeau*. Springer-Verlag Italia, Milan.

Bibliographie

- Ranger, J. (2007). *Rapport sur la science et la technologie n°27 : Cycles biogéochimiques et écosystèmes continentaux*, chapitre 5.1, pages 135–158. Pédro Georges, Académie des sciences.
- Ranger, J. et Turpault, M. P. (1999). Input-output nutrient budgets as a diagnostic tool for sustainable forest management. *Forest ecology and management*, 122(1-2):139–154.
- Reich, P., Uhl, C., Walters, M., Prugh, L. et Ellsworth, D. (2004). Leaf demography and phenology in amazonian rain forest : A census of 40 000 leaves of 23 tree species. *Ecological Monographs*, 74(1):3–23.
- Reyer, C. P. O., Leuzinger, S., Rammig, A., Wolf, A., Bartholomeus, R. P., Bonfante, A., de Lorenzi, F., Dury, M., Gloning, P., Abou Jaoude, R., Klein, T., Kuster, T. M., Martins, M., Niedrist, G., Riccardi, M., Wohlfahrt, G., de Angelis, P., de Dato, G., Francois, L., Menzel, A. et Pereira, M. (2013). A plant's perspective of extremes : terrestrial plant responses to changing climatic variability. *Global Change Biology*, 19(1):75–89.
- Richardson, A. D., Keenan, T. F., Migliavacca, M., Ryu, Y., Sonnentag, O. et Toomey, M. (2013). Climate change, phenology, and phenological control of vegetation feedbacks to the climate system. *Agricultural and Forest Meteorology*, 169:156–173.
- Roetzer, T., Leuchner, M. et Nunn, A. J. (2010). Simulating stand climate, phenology, and photosynthesis of a forest stand with a process-based growth model. *International Journal of Biometeorology*, 54(4):449–464.
- Roupsard, O., Dauzat, J., Nouvellon, Y., Deueau, A., Feintrenie, L., Saint-Andre, L., Mialet-Serra, I., Braconnier, S., Bonnefond, J.-M., Berbigier, P., Epron, D., Jourdan, C., Navarro, M. et Bouillet, J.-P. (2008). Cross-validating sun-shade and 3d models of light absorption by a tree-crop canopy. *Agricultural and Forest Meteorology*, 148(4):549–564.
- Saint-André, L. (2013). Intégration des cycles biogéochimiques dans les modèles de croissance à base dendrométrique. concepts - forces et limites de l'approche. Habilitation à diriger la recherche - Ecole doctorale RP2E.
- Saint-André, L., Laclau, J.-P., Bouillet, J.-P., Deleporte, P., Miabala, A., Ognouabi, N., Bailleres, H., Nouvellon, Y. et Moukini, R. (2002). Integrative modelling approach to assess the sustainability of the eucalyptus plantations in congo. *Fourth Workshop*.
- Saint-André, L., Laclau, J. P., Deleporte, P., Gava, J. L., Goncalves, J. L. M., Mendham, D., Nzila, J. D., Smith, C., Toit, B. d., Xu, D. P., Sankaran, K. V., Marien, J. N., Nouvellon, Y., Bouillet, J. P. et Ranger, J. (2008). Slash and litter management effects on eucalyptus productivity : a synthesis using a growth and yield modelling approach. *Site management and productivity in tropical plantation forests : Proceedings of workshops in Piracicaba (Brazil), 22-26 November 2004 and Bogor (Indonesia), 6-9 November 2006*, pages 173–189.

- Saint-André, L., M'bou, A. T., Mabiala, A., Mouvondy, W., Jourdan, C., Roupsard, O., Deleporte, P., Hamel, O. et Nouvellon, Y. (2005). Age-related equations for above- and below-ground biomass of a eucalyptus hybrid in congo. *Forest ecology and management*, 205(1-3):199–214.
- Sainte-Marie, J., Henrot, A., Saint-André, L., Barrandon, M., Nouvellon, Y., Roupsard, O. et Laclau, J. P. (2012). Modeling the environmental and seasonal influence on canopy dynamic and litterfall of even-aged forest ecosystems by a model coupling growth and yield and process-based approaches. In IEEE press, éditeur : *Plant Growth Modeling, Simulation, Visualization and Applications : Proceedings - PMA'12*, pages 324 – 331.
- Sainte-Marie, J., Saint-André, L., Nouvellon, Y., Laclau, J.-P., Roupsard, O., Maire, G. L., Delpierre, N., Henrot, A. et Barrandon, M. (2014). A new probabilistic canopy dynamics model (slcd) that is suitable for evergreen and deciduous forest ecosystems. *Ecological Modelling*, 290(0):121 – 133. Special Issue of the 4th International Symposium on Plant Growth Modeling, Simulation, Visualization and Applications (PMA'12) Special Issue of PMA'12.
- Shuttleworth, W. J. et Wallace, J. S. (1985). Evaporation from sparse crops - an energy combination theory. *Quarterly Journal of The Royal Meteorological Society*, 111(469):839–855.
- Silva, A. L. L., da Oliveira, Y., de Alcantara, G. B., de Santos, M., dos Quoirin, M., da Silva, A. L. L., de Oliveira, Y., de Alcantara, G. B. et dos Santos, M. (2009). Chilling and frost tolerance in eucalypt leaves. *Biociencias*, 17(1):86–90.
- Stape, J., Binkley, D. et Ryan, M. (2004). Eucalyptus production and the supply, use and efficiency of use of water, light and nitrogen across a geographic gradient in brazil. *Forest ecology and management*, 193(1-2):17–31.
- Stoeckli, R., Rutishauser, T., Dragoni, D., O'Keefe, J., Thornton, P. E., Jolly, M., Lu, L. et Denning, A. S. (2008). Remote sensing data assimilation for a prognostic phenology model. *Journal of geophysical research-biogeosciences*, 113(G4):G04021.
- Sverdrup, H. (2009). Chemical weathering of soil minerals and the role of biological processes. *Fungal Biology Reviews*, 23(4):94–100.
- Sverdrup, H., Thelin, G., Robles, M., Stjernquist, I. et Sorensen, J. (2006). Assessing nutrient sustainability of forest production for different tree species considering ca, mg, k, n and p at bjornstorp estate, sweden. *Biochemistry*, 81(2):219–238.
- van der Heijden, G., Legout, A., Midwood, A. J., Craig, C.-A., Pollier, B., Ranger, J. et Dambrine, E. (2013). Mg and Ca root uptake and vertical transfer in soils assessed by an in situ ecosystem-scale multi-isotopic (Mg-26 & Ca-44) tracing experiment in a beech stand (Breuil-Chenue, France). *Plant and soil*, 369(1-2):33–45.

-
- Van Veldhuizen, D. A. et Lamont, G. B. (2000). Multiobjective evolutionary algorithms : Analyzing the state-of-the-art. *Evolutionary computation*, 8(2):125–147.
- Vincent, G. (2006). Leaf life span plasticity in tropical seedlings grown under contrasting light regimes. *Annals of Botany*, 97(2):245–255.
- Vitasse, Y., Delzon, S., Bresson, C. C., Michalet, R. et Kremer, A. (2009a). Altitudinal differentiation in growth and phenology among populations of temperate-zone tree species growing in a common garden. *Canadian Journal of Forest Research - Revue canadienne de recherche forestière*, 39(7):1259–1269.
- Vitasse, Y., Delzon, S., Dufrene, E., Pontailier, J. Y., Louvet, J. M., Kremer, A. et Michalet, R. (2009b). Leaf phenology sensitivity to temperature in european trees : Do within-species populations exhibit similar responses ? *Agricultural and Forest Meteorology*, 149(5):735–744.
- Vitasse, Y., Porte, A. J., Kremer, A., Michalet, R. et Delzon, S. (2009c). Responses of canopy duration to temperature changes in four temperate tree species : relative contributions of spring and autumn leaf phenology. *Oecologia*, 161(1):187–198.
- Wallman, P., Svensson, M. G. E., Sverdrup, H. et Belyazid, S. (2005). Forsafe - an integrated process-oriented forest model for long-term sustainability assessments. *Forest ecology and management*, 207(1-2):19–36.
- Whitehead, D. et Beadle, C. (2004). Physiological regulation of productivity and water use in eucalyptus : a review. *Forest ecology and management*, 193(1-2):113–140.
- Wright, I., Reich, P., Cornelissen, J., Falster, D., Groom, P., Hikosaka, K., Lee, W., Lusk, C., Niinemets, U., Oleksyn, J., Osada, N., Poorter, H., Warton, D. et Westoby, M. (2005). Modulation of leaf economic traits and trait relationships by climate. *Global Ecology and Biogeography*, 14(5):411–421.
- Wright, S. et Van Schaick, C. (1994). Light and phenology of tropical trees. *American Naturalist*, 143(1):192–199.
- Zhu, Z. X., Arp, P. A., Meng, F. R., Bourque, C. P. A. et Foster, N. W. (2003a). A forest nutrient cycling and biomass model (forbnm) based on year-round, monthly weather conditions - part ii : Calibration, verification, and application. *Ecological Modelling*, 170(1):13–27.
- Zhu, Z. X., Arp, P. A., Meng, F. R., Bourque, C. P. A. et Foster, N. W. (2003b). A forest nutrient cycling and biomass model (forbnm) based on year-round, monthly weather conditions, part 1 : assumption, structure and processing. *Ecological Modelling*, 169(2-3):347–360.

Table des figures

1.1	Place de la biogéochimie parmi les disciplines scientifiques.	3
1.2	Sous-cycles biogéochimiques au sein de l'écosystème forestier.	4
1.3	Schéma conceptuel du cycle biogéochimique de l'écosystème forestier.	5
1.4	Compartiments de l'écosystème et flux dans le modèle ForSafe.	11
2.1	Description du processus itératif du modèle SLCD.	17
4.1	Activité des décomposeurs sur la concentration en carbone de la matière organique du sol à la profondeur z	51
4.2	Résumé des questionnements mentionnés et étudiés au cours de cette thèse dans le cas du carbone. Les boîtes en jaune et rouge rappellent le cheminement de l'article Bosatta et Agren (1996) menant à la troncature du modèle. Les questions mathé- matiques en bleu ont été étudiées au cours de la thèse.	60
5.1	Exemple de chemin de particules.	71
5.2	Distinction des domaines de définition des EDPs.	74
5.3	Illustration de la construction des applications π_q par troncature suivant le domaine de définition des EDPs : $(q, z, t) \in \Omega_z$ (à gauche) et $(q, z, t) \in \Omega_t$ (à droite).	75
5.4	Rôle du paramètre z_0 comme paramètre du champ de vecteurs et de la condition initiale.	88
6.1	Exemples d'apports constants de MO.	119
6.2	Convergence du schéma numérique pour les solutions stationnaires pour $q_0 = 1.2$ et $\sigma_c = 0.5$	142
6.3	Comparaison des variables du modèle tronqué et du modèle général au bout de 30 ans le long d'un profil de sol de 20 cm pour des apports constant définis par $\sigma_c = 0.1$, $\sigma_n = 0.3$, $I_0^c = 1$ et $I_0^n = 0.1$ et $q_0 = 1.2$	144

Table des figures

6.4	Représentation des normes l^1 et l^2 des écarts relatifs sur la totalité du maillage (en z et t) pour les variables $\hat{q}$ et ϕ_0^c en fonction des paramètres q_0 et σ_c de l'apport constant de MO.	147
6.5	Représentation de $\hat{q}$ pour différentes valeurs de σ_c et $\hat{q}_{tronc}$ sur un profil de sol de 20 cm au bout de 30 ans.	148
6.6	Représentation de Φ_0^c pour différentes valeurs de σ_c et $\Phi_{0,tronc}^c$ sur un profil de sol de 20 cm au bout de 30 ans.	149
6.7	Représentation de $\hat{q}^\infty$ pour différentes valeurs de σ_c et $\hat{q}_{tronc}$ sur un profil de sol de 20 cm au bout de 30 ans.	150
6.8	Représentation de $\Phi_0^{c,\infty}$ pour différentes valeurs de σ_c et $\Phi_{0,tronc}^{c,\infty}$ sur un profil de sol de 20 cm au bout de 30 ans.	151
6.9	Peigne de qualité.	154
6.10	Représentation de Φ_0^c , Φ_0^n et $\hat{q}$ sur un profil de sol de 20 cm au bout de 30 ans pour le modèle initial et le modèle tronqué.	155
6.11	Evolution dans le profil de sol de la distribution de carbone ρ_c	156
6.12	Evolution dans le profil de sol de la distribution de nutriment ρ_n	157
6.13	Apports quelconques de MO.	158
6.14	Représentation de Φ_0^c , Φ_0^n et $\hat{q}$ sur un profil de sol de 20 cm au bout de 30 ans pour le modèle initial et le modèle tronqué.	159
6.15	Evolution dans le profil de sol de la distribution de carbone ρ_c	160
6.16	Evolution dans le profil de sol de la distribution de carbone ρ_n	161
7.1	Etat de la modélisation à la fin de cette thèse et perspectives d'associations de modèles.	164
7.2	Modélisation des variations saisonnières de la canopée et du cycle de l'eau.	169

Liste des tableaux

6.1	Synthèse des variables disponibles pour étudier l'hypothèse de troncature.	140
6.2	Liste des paramètres du modèle (tirés de Bosatta et Agren (1996)) et du maillage utilisés pour étudier l'hypothèse de troncature.	141
6.3	Comparaison des normes l^1 sur le maillage de ρ_c^∞ avec la distance $ \rho_c - \rho_c^\infty $ entre la solution du schéma général et la solution du schéma stationnaire en fonction des paramètres q_0 et σ_c au bout de 30 ans.	143

Liste des abréviations

EDO équation différentielle ordinaire	68
EDP équation aux dérivées partielles	52
LAI leaf area index	12
MO matière organique	9
MOS matière organique du sol	11
SLCD Stand Leaf Cohorts Dynamics	12
SVAT sol-végétation-atmosphère-transfert	12

Résumé La communauté scientifique, en relation avec les gestionnaires forestiers, travaille depuis trente ans à l'élaboration d'outils d'aide à la décision. Cependant, aucune approche de modélisation ne permet une évaluation simultanée de l'impact sur la forêt des changements globaux et de la gestion des services écosystémiques. L'élaboration d'une nouvelle génération de modèles dédiés au couplage sol-plante est indispensable pour aider les gestionnaires forestiers à adapter leurs pratiques sylvicoles face aux changements globaux.

Les modèles phénoménologiques issus de la dendrométrie, points de départ de cette thèse, proposent des estimations de croissance et de production tenant compte des pratiques sylvicoles. Leur utilisation est limitée par leur dépendance à un indice de fertilité combinant de manière indifférenciée l'influence du climat et des cycles biogéochimiques. La remise en jeu de la notion d'indice de fertilité nécessite de tirer avantage des concepts issus des modèles à base écophysologiques et biogéochimiques.

La modélisation de la dynamique mensuelle du renouvellement foliaire par le modèle Stand Leaf Canopy Dynamics a permis : i) d'estimer la dynamique de l'indice foliaire (LAI), ii) de modéliser la production de litière foliaire. Ce modèle probabiliste tient compte de l'influence du climat, de la disponibilité en eau de l'écosystème et repose sur des hypothèses écologiques fortes sur les mécanismes impliqués dans la longévité des feuilles. Ce modèle permet : i) de poser les fondements de l'intégration du cycle de l'eau aux modèles dendrométriques par couplage avec un modèle écophysologique de type sol-végétation-atmosphère et ii) d'évaluer l'apport de matière organique dans le sol par les litières.

L'étude mathématique des modèles de décomposition (général et tronqué) de la matière organique proposé par Bosatta et Ågren (1996) a été réalisée dans le but d'étudier le devenir des chutes de litières dans le sol forestier. Nous avons proposé : i) une preuve d'existence et l'unicité de solutions à l'équation de transport intégro-différentielle du modèle général, ii) des schémas de différences finies implicites-explicites convergents estimant les solutions du modèle et iii) une discussion autour des hypothèses sous-jacentes à la formulation de la troncature proposée par Bosatta et Ågren (1996).

Ces deux éléments de modélisation sont des leviers indispensables à l'étude du cycle géochimique et du cycle biologique dans une approche à base dendrométrique. L'influence du climat et de la phénologie sur le cycle de l'eau et sur la décomposition des litières foliaires constituera une prochaine étape de modélisation.

Mots-clés changements globaux, modèles dendrométriques, modèles écophysologiques, cycles biogéochimiques, dynamique foliaire, matière organique du sol, équations de transport intégro-différentielles, différences finies.