THÈSE

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE LORRAINE

Faculté des Sciences et Techniques

ÉCOLE DOCTORALE INFORMATIQUE, AUTOMATIQUE, ÉLECTRONIQUE-ÉLECTROTECHNIQUE ET MATHÉMATIQUES

DÉPARTEMENT DE FORMATION DOCTORALE MATHÉMATIQUES

DOMAINE DE RECHERCHE : MATHÉMATIQUES

LABORATOIRE : INSTITUT ELIE CARTAN DE LORRAINE

Présentée par

Hassan JABER

Équations de Hardy-Sobolev sur les variétés Riemanniennes compactes : Influence de la géométrie.

Directeur de thèse : **Frédéric Robert**

Soutenue le 24 juin 2014

Devant la Commission d'Examen:

A. Fardoun	Maître de Conférences	Univ. de Bretagne Occidentale	Rapporteur
A. Farina	Professeur	Univ. de Picardie Jules Verne	Rapporteur
F. Robert	Professeur	Univ. de Lorraine	Directeur de thèse
F. Cirstea	Professeur	Univ. de Sydney	Examinateur
D. Ye	Professeur	Univ. de Lorraine	Examinateur
E. Hebey	Professeur	Univ. de Cergy Pontoise	Examinateur
O. Hijazi	Professeur	Univ. de Lorraine	Examinateur
L. Jeanjean	Professeur	Univ. de Franche-Comté	Examinateur

Remerciements

Tout d'abord et une fois encore, j'adresse mes plus sincères remerciements à Frédéric Robert de m'avoir donné la chance de travailler sous sa direction. Je lui suis très reconnaissant de m'avoir constamment soutenu. C'est grâce à son aide, ses conseils ainsi que ses remarques que j'ai pu mener à bien ce travail.

Je tiens à remercier vivement Ali Fardoun et Alberto Farina d'avoir accepté de rapporter mon mémoire.

Je remercie également Oussama Hijazi de m'avoir aiguillé vers Frédéric Robert ainsi que pour les conseils prodigués durant ces quatre ans.

Merci aussi pour Dong Ye et Louis Jeanjean pour leurs lectures attentives et leurs remarques sur mes articles.

Je remercie également Emmanuel Hebey dont j'ai eu l'honneur et le plaisir de faire connaissance.

Merci pour Florica Cirstea d'avoir accepté de faire partie du Jury.

Je remercie l'ensemble des membres de l'IECL, passés et présents, qui fut pour moi un cadre propice aux travaux de recherche mathématiques. Des remerciements particuliers pour Elodie, Laurence, Salem, Julien et mes cobureaux Romain et Paul.

Je n'oublie absolument pas mes amis avec lesquels j'ai passé des moments inoubliables de détente pendant des soirées et des nuits blanches. Finalement que vaut la vie sans nos amis ? A vous, M. Moukaddam, M. Fardon, Adnène, Racha, Samer et Priscilla un très grand Merci.

Cela va de soi, j'adresse toute mon affection à ma famille, mes sœurs et frères, ma tante, ma grande-mère et mon beau-père, pour son irremplaçable et inconditionnel soutien.

Je garde, à la fin, mes sentiments les plus profonds à la seule personne que je garde dans mon coeur à tout moment et pour toujours. A ma mère, je dis en Libanais : " Mama, bhebik ktiir".

Je tourne une page et j'en ouvre une autre : vivement la suite !

Table des matières

Remerciements **i**

Table des matières **iv**

Introduction **1**

Notations **13**

1 Premières meilleures constantes de Hardy-Sobolev **15**

1.1 Inégalités de Hardy-Sobolev 15

1.1.1 Propriétés dans $L^p\left(M, \frac{dv_g}{d_g(x,x_0)^s}\right)$. 15

1.1.1.1 Inégalités triangulaire et de Hölder 15

1.1.1.2 Densité 17

1.1.2 Inclusions et inégalités de Hardy-Sobolev 18

1.1.2.1 Inégalités de Hardy-Sobolev 18

1.1.2.2 Inclusions de Hardy-Sobolev : Thm. de Rellich-Kondrakov 19

1.2 Meilleures constantes sur les variétés 21

1.2.1 Cas Euclidien : Meilleure constante $K(n, s)$ des inégalités de Hardy-Sobolev 21

1.2.2 Cas Riemannien : Définitions et Théorème 21

1.2.3 Preuve (i) du Théorème : inégalités de Hardy-Sobolev à ϵ-près . . 22

1.2.4 Preuve (ii) du Théorème. 26

2 Solutions pour l'équation de Hardy-Sobolev. **29**

2.1 Théorème général d'existence 30

2.2 Preuve du Théorème 31

2.2.1 Preuve (i) : Existence d'une solution faible u pour l'équation critique de Hardy-Sobolev. 31

2.2.1.1 Ière étape : Solutions pour les équations sous-critique de Hardy-Sobolev. 31

2.2.1.2 IIème étape : Passage à la limite. 34

2.2.2 Preuve (ii) : Régularité des solutions faibles $u \in C^{0,\alpha}$. 40

2.2.3 Preuve (iii) : Principe du maximum $u > 0$. 40

3 Fonctions-Tests **43**

3.1 Théorème d'existence : Influence de la géométrie 44

3.2 Preuve (i) : cas général $\dim(M) \geq 3$ 45

3.2.1 Développement de Cartan 45

3.2.2 Estimation des différents termes de la fonctionnelle-énergie de Hardy-Sobolev J 47

3.2.2.1 Partie A : Estimation de $\|\nabla u_\epsilon\|_2$: 47
3.2.2.2 Partie B : Estimation de $\int_M au_\epsilon^2 dv_g$. 51
3.2.2.3 Partie C : Estimation de $\|u_\epsilon\|_{2^\star(s),s}^{2^\star(s)}$: 55
3.2.3 D.L. de J et preuve pour $\dim(M) \geq 4$ 58
3.2.3.1 Partie D : D.L. de $J(u_\epsilon)$. 58
3.3 Cas $\dim(M) = 3$. 61
3.3.1 Preuve (ii) du Théorème. 62
3.3.2 Exemples avec la masse positive 72

4 Équation de Hardy-Sobolev perturbée 75
4.1 Suite de Palais-Smale 75
4.2 Théorème général d'existence 77
4.2.1 Énoncé du Théorème 77
4.2.2 Preuve du Théorème 77
4.3 Fonctions-Tests et Théorème d'existence 83
4.3.1 Énoncé du Théorème 83
4.3.2 Preuve (i) du Théorème : D.L. du terme perturbatif 83
4.3.3 Preuve (ii) du Théorème : D.L. de la fonctionnelle à terme perturbatif 88
4.3.4 Preuve (iii) du Théorème : Influence de la géométrie et de la perturbation 92

5 Inégalités Optimales de Hardy-Sobolev. 93
5.1 Théorème : " La Ière meilleure constante est atteinte" 93
5.2 Blow-up autour de x_0 94
5.2.1 Théorème de Blow-up autour de x_0 94
5.2.2 Preuve du Théorème 5.2.1 : 96
5.3 Inégalités optimales de Hardy-Sobolev 113
5.3.1 Preuve du Théorème. 113
5.3.2 Inégalités optimales de Hardy-Sobolev : Preuve 120

6 Appendices 121
6.1 Appendice 1 : Résultats de géométrie différentielle et d'Analyse. 121
6.1.1 Rappel sur la carte exponentielle. 121
6.1.1.1 Géodésiques et Fonctions exponentielles 121
6.1.1.2 Cartes exponentielles et propriétés 122
6.1.2 Métriques et normes équivalentes. 122
6.1.2.1 Approximation Euclidienne d'une métrique Riemannienne et de son inverse 122
6.1.2.2 Équivalence des normes tensorielles Riemanniennes . . . 126
6.1.2.3 Équivalence entre distance Riemannienne et normes Euclidiennes 128
6.2 Résultats d'Analyse sur les variétés. 130
6.3 Appendices II : Résultats de Régularité 143
6.3.1 L^p-Régularité sur les variétés. 143
6.3.2 H_2^p-Régularité sur les variétés. 146
6.3.3 $C^{2,\alpha}$-Régularité sur les variétés. 148
6.4 Appendice III : La Fonctionnelle-Énergie. 148
6.5 Appendice IV : Convergence faible dans L^p. 151
6.6 Appendice V : Fonctions de Green 153
6.7 Appendice VI : Théorème de Han-Lin sur les variétés compactes 156

Introduction

Dans ce Manuscrit, nous étudions l'influence de la géométrie sur les équations de Hardy-Sobolev perturbées ou non sur toute variété Riemannienne compacte sans bord de dimension $n \geq 3$.

Plus précisément, dans le cas non perturbé nous démontrons que pour toute dimension de la variété strictement supérieure à 3, l'existence d'une solution (ou plutôt une condition suffisante d'existence) dépendra de la géométrie locale autour de la singularité. En revanche, dans le cas où la dimension est égale à 3, c'est la géométrie globale (particulièrement, la masse de la fonction de Green) de la variété qui comptera.

Dans le cas d'une équation à terme perturbatif sous-critique, nous démontrons que l'existence d'une solution dépendra uniquement de la perturbation pour les grandes dimensions et qu'une interaction entre la géométrie globale de la variété et la perturbation apparaîtra en dimension 3.

Enfin, nous établissons une inégalité optimale de Hardy-Sobolev Riemannienne, la variété étant avec ou sans bord, où nous démontrons que la première meilleure constante est celle des inégalités Euclidiennes et est atteinte.

Premières meilleures constantes de Hardy-Sobolev sur les variétés.

Dans le Chapitre 1, nous démontrons que pour toute variété Riemannienne compacte de dimension $n \geq 3$, la première meilleure constante des inégalités Riemannienne de Hardy-Sobolev est celle des inégalités Euclidienne. Elle ne dépend donc pas de la géométrie.

Dans la suite, on considère (M, g) une variété Riemannienne compacte de dimension $n \geq 3$, $x_0 \in M$, $s \in]0, 2[$, et $2^\star(s) := 2(n-s)/n-2$ l'exposant critique de Hardy-Sobolev. Plus précisément, soit $H_1^2(M)$ l'espace de Sobolev standard, défini comme étant la complétion de $C^\infty(M)$ pour la norme $\|\cdot\|_{H_1^2(M)} : u \mapsto \|\nabla u\|_2 + \|u\|_2$ et $L^p(M, d_g(\cdot, x_0)^{-s})$ l'espace de Lebesgue à poids défini comme étant l'ensemble des fonctions $f : M \to \mathbb{R}$ telles que $|f|^p \cdot d_g(\cdot, x_0)^{-s} \in L^1(M)$. Cet espace, doté de sa norme naturelle, qu'on note $\|\cdot\|_{p,s}$ et est définie par $\|f\|_{p,s} = \left(\int_M |f|^p d_g(\cdot, x_0)^{-s} dv_g\right)^{1/p}$, est un espace de Banach.

Maintenant, l'exposant $2^\star(s)$ est critique dans le sens suivant : L'espace $\left(H_1^2(M), \|\cdot\|_{H_1^2(M)}\right)$ se plonge continuement dans $(L^p(M, d_g(\cdot, x_0)^{-s}), \|\cdot\|_{p,s})$, pour tout $p \in [1, 2^\star(s)]$. cette inclusion, appelée de Hardy-Sobolev, est compacte si et seulement si $p \in [1, 2^\star(s)[$.

A partir de cette inclusion, nous définissons la première (resp. la deuxième) constante des inégalités de Hardy-Sobolev, obtenues "en combinant" celles de Hardy et de Sobolev via celles de Hölder, comme étant les constantes $A > 0$ (resp. $B > 0$) vérifiant pour tout $u \in H_1^2(M)$:

$$\left(\int_M \frac{|u|^{2^\star(s)}}{d_g(x,x_0)^s} \, dv_g \right)^{\frac{2}{2^\star(s)}} \leq A \int_M |\nabla u|_g^2 \, dv_g + B \int_M u^2 \, dv_g. \tag{0.0.1}$$

Nous définissons la première meilleure constante comme étant

$$A_0(M,g,s,x_0) := \inf\{A > 0; \quad \exists B > 0 \text{ vérifiant (0.0.1)}, \ \forall u \in H_1^2(M)\}. \tag{0.0.2}$$

Le but de ce chapitre est de déterminer la valeur de $A_0(M,g,s,x_0)$. Pour cela, nous passons au cas Euclidien. L'inégalité Euclidienne de Hardy-Sobolev est

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\varphi|^{2^\star(s)}}{|X - X_0|^s} dX \right)^{\frac{2}{2^\star(s)}} \leq C \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \varphi|^2 dX, \quad C > 0, X_0 \in \mathbb{R}^n \tag{0.0.3}$$

pour tout $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \setminus \{0\}$. Nous définissons la meilleure constante Euclidienne de (0.0.3) par

$$K(n,s) := \min \{C > 0 \ / \ \text{(0.0.3)a lieu pour tout } \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)\}$$

.

Dans le cas $s = 0$ des inclusions de Sobolev $H_1^2(M) \hookrightarrow L^p(M), p \in]2, 2^*]$, Aubin [3] et Talenti [48] ont démontré indépendament en 1976 que $K(n,0) = \left[2 \left(n(n-2)\omega_n^{2/n} \right)^{-\frac{1}{2}} \right]^2$ (voir aussi Rodemich [44]) où ω_n désigne le volume de la sphère unité standard $(\mathbb{S}^n, h)$ de $\mathbb{R}^{n+1}$ et que l'égalité (1.2.15) est réalisée uniquement par les fonctions $\Phi_{C,\lambda}(X) = C(\lambda + |X|^2)^{1-\frac{n}{2}}$ avec $C \in \mathbb{R}^*, \lambda > 0$ et Aubin a démontré dans [2] que $A_0(M,g,0) = K(n,0)$.

En 1983, Lieb a calculé dans ([39], voir Théorème 4.3) la valeur de $K(n,s)$ dans le cas $s \in]0, 2[$:

$$K(n,s) = [(n-2)(n-s)]^{-1} \left(\frac{1}{2-s} \omega_{n-1} \frac{\Gamma^2(n - s/2 - s)}{\Gamma(2(n-s)/2 - s)} \right)^{-\frac{2-s}{n-s}},$$

où pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\Re(z) > 0$ on a : $\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} \exp(-t) dt$ est la fonction Gamma vérifiant les propriétés $\Gamma(1) = 1$, $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ et $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$. Lieb a démontré que l'égalité

$$K(n,s)^{-1} := \inf_{\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \setminus \{0\}} \frac{\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \varphi|^2 dX}{\left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\varphi|^{2^\star(s)}}{|X|^s} dX \right)^{\frac{2}{2^\star(s)}}} \tag{0.0.4}$$

est réalisée par les fonctions $\Phi_{C,\lambda}(X) = C \left(\lambda^{2-s} + |X|^{2-s} \right)^{-\frac{n-2}{2-s}}$ avec $C \in \mathbb{R}^*, \lambda > 0$.

Nous démontrons le Théorème suivant :

Théorème 0.0.1 *Soient (M,g) une variété Riemannienne compacte de dimension $n \geq 3$, $x_0 \in M$, $s \in]0, 2[$, et $2^\star(s) = \frac{2(n-s)}{n-2}$ l'exposant critique de Hardy-Sobolev. Alors on a :*

$$A_0(M,g,s,x_0) = K(n,s)$$

où $K(n,s)$ est la meilleure constante des inégalités de Hardy-Sobolev Euclidienne.

La preuve qui se fait par double inégalités dont l'une est établie dans la Proposition suivante :

Proposition 0.0.1 *Soient (M,g) une variété Riemannienne compacte de dimension $n \geq 3$, $x_0 \in M$, $s \in]0,2[$, et $2^\star(s) = \frac{2(n-s)}{n-2}$ l'exposant critique de Hardy-Sobolev. Alors pour tout $\epsilon > 0$, il existe $B_\epsilon > 0$ tel que pour tout $u \in H_1^2(M)$, on a*

$$\left(\int_M \frac{|u|^{2^\star(s)}}{d_g(x,x_0)^s} dv_g\right)^{\frac{2}{2^\star(s)}} \leq (K(n,s)+\epsilon)\int_M |\nabla u|_g^2 dv_g + B_\epsilon \int_M u^2 dv_g. \tag{0.0.5}$$

Ces résultats suggère deux remarques :

1. La première meilleure constante Riemannienne, $K(n,s)$, ne dépend que de la dimension de la variété M et de s et donc pas de la géométrie de (M,g).

2. Cas $\epsilon = 0$: On peut demander si $K(n,s)$ est atteinte dans (0.0.2), autrement dit si on peut prendre $\epsilon = 0$ dans (0.0.5).

En fait, dans la preuve de la Proposition 0.0.1, nous utilisons un recouvrement de M par des boules exponentielles dont les rayons r_m tendent vers 0 lorsque $\epsilon \to 0$. La constante B_ϵ sera proportionnelle au maximum des r_m^{-1} donc $B_\epsilon \to +\infty$ lorsque $\epsilon \to 0$.

L'inégalité (0.0.5) ne nous permet donc pas de conclure. En revanche, le cas $\epsilon = 0$ sera l'objectif du Chapitre 5.

Équations de Hardy-Sobolev non perturbée.

Dans les Chapitres 2 et 3, nous étudions les équations de type Hardy-Sobolev non perturbée

$$\Delta_g u + a(x)u = \frac{u^{2^\star(s)-1}}{d_g(x,x_0)^s} \quad \text{sur } M, \quad u \in H_1^2(M). \tag{0.0.6}$$

où $a \in C^0(M)$, $\Delta_g := -\mathrm{div}_g(\nabla)$ est l'opérateur de Laplace-Beltrami et d_g désigne la distance Riemannienne sur (M,g).

Dans le cas des équations (de type Hardy-Sobolev) non perturbée sur les domaines Ω de $\mathbb{R}^n$

$$\Delta_\delta u + \tilde{a}(X)u = \frac{u^{2^\star(s)-1}}{|X-X_0|^s} \quad u \in H_{1,0}^2(\Omega), u > 0 \text{ sur } \Omega \text{ et } u \equiv 0 \text{ sur } \partial\Omega \tag{0.0.7}$$

où $H_{1,0}^2(\Omega)$ est le complété de $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ pour la norme $v \mapsto \|\nabla v\|_2$, $\tilde{a} \in C^0(\overline{\Omega})$, $X_0 \in \Omega \backslash \partial\Omega$ et δ et $|\cdot|$ désignent respectivement la métrique et la norme Euclidiennes sur Ω. il existe une littérature importante sur l'existence ou éventuellement la non-existence des solutions pour (0.0.7). Voir, parmi d'autres, Ghoussoub-Kang [21], Ghoussoub-Yuan [24], Li-Ruf-Guo-Niu [38], Pucci-Servadei [42], Kang-Peng [36]. En particulier, Ghoussoub et Yuan ont démontré dans [24], en s'inspirant des travaux de Brezis-Nirenberg, qu'il existe une solution pour une équation comme (0.0.7) quand $n \geq 4$ et $\tilde{a}(X_0) < 0$.

Chapitre 2 : Théorème général d'existence

Dans le deuxième Chapitre, nous cherchons une condition générale d'existence des solutions pour l'équation (0.0.6). Pour cela, nous considérons la fonctionnelle

$$J(u) := \frac{\int_M (|\nabla u|_g^2 + au^2)\, dv_g}{\left(\int_M \frac{|u|^{2^\star(s)}}{d_g(x,x_0)^s}\, dv_g\right)^{\frac{2}{2^\star(s)}}} \; ; \; u \in H_1^2(M) \setminus \{0\}, \tag{0.0.8}$$

où dv_g désigne la forme volume Riemannienne sur (M,g). J est bien définie d'après les inclusions de Hardy-Sobolev.

Lorsque l'opérateur $\Delta_g + a$ est coercif, les points critiques (s'ils existent) seront, à une constante multiplicative près, des solutions de (0.0.6). Dorénavant, on suppose que $\Delta_g + a$ est coercif. En suivant la méthode de minimisation d'Aubin [2], nous étudions l'existence d'une solution pour (0.0.6). Il est bien connu que pour ce type de problèmes (voir par exemple [52] pour le problème de Yamabe), la difficulté provient de la perte de compacité en exposant critique. La méthode d'Aubin (pour le cas $s = 0$) consiste à passer aux équations sous-critiques

$$\Delta_g u_q + a(x) u_q = \frac{u_q^{q-1}}{d_g(x,x_0)^s} \quad \text{sur } M, q \in]2, 2^\star(s)[\tag{0.0.9}$$

afin de récupérer la compacité des inclusions de Hardy-Sobolev et d'avoir des solutions sous-critiques non triviales et minimisante. Ensuite, par passage à la limite nous obtiendrons une solution non triviale u pour (0.0.6) sous la condition d'Aubin (voir [2]), à savoir : lorsque $\inf_{v \in H_1^2(M)\setminus\{0\}} J(v)$ est en dessous de l'inverse de la meilleure constante.

Nous démontrons le Théorème suivant :

Théorème 0.0.2 *Soient (M,g) une variété Riemannienne compacte de dimension $n \geq 3$, $x_0 \in M$, $s \in]0,2[$ et $2^\star(s) := \frac{2(n-s)}{n-2}$ l'exposant critique des inclusions de Hardy-Sobolev. Soit $a \in C^0(M)$ telle que $\Delta_g + a$ est coercif, $\Delta_g := -div_g(\nabla)$. Si*

$$\inf_{v \in H_1^2(M)\setminus\{0\}} J(v) < K(n,s)^{-1} \tag{0.0.10}$$

Alors il existe une fonction $u \in H_1^2(M) \setminus \{0\} \cap C^0(M)$, $u > 0$ et est une solution faible de l'équation critique de Hardy-Sobolev

$$\Delta_g u + au = \lambda \frac{u^{2^\star(s)-1}}{d_g(x,x_0)^s}. \tag{0.0.11}$$

De plus, u réalise λ (i.e. $I(u) = \lambda$ et $\int_M \frac{|u|^{2^\star(s)}}{d_g(x,x_0)^s} dv_g = 1$) et $u \in C^{0,\theta}(M) \cap C^{1,\alpha}_{loc}(M \setminus \{x_0\})$ pour tous $\theta \in]0, \min\{1, 2-s\}[$ et $\alpha \in]0,1[$.

Ce Théorème suggère trois remarques :

1. La condition d'existence (0.0.10) est l'extension "naturelle" de celle obtenue par Aubin dans [2] pour le cas $s = 0$.

2. Régularité. Contrairement au cas $s = 0$, les solutions des équations de type (0.0.6) ne sont pas dans $C^2(M)$. Nous obtenons la $C^{0,\theta}$-régularité (resp. la $C^{1,\alpha}$-régularité sur

$M \setminus \{x_0\}$) de la solution u avec la Théorie elliptique standard (voir par exemple [25]) et en suivant la stratégie de Trudinger développée pour le problème de Yamabe (voir [51] et [23]).

3. Positivité. La positivité de u sur $M \setminus \{x_0\}$ est assurée par l'inégalité de Harnack (voir [25], Théorème 8.20).

Quant à la preuve de $u(x_0) > 0$, le point délicat est le fait que notre solution u n'est même pas différentiable au voisinage de x_0. Pour cela, nous procédons par contradiction. Comme $u \geq 0$ alors x_0 est un minimum de u.

L'idée est de démontrer qu'avec l'hypothèse de l'absurde, u sera C^1 en x_0 et que la dérivée normale de u en x_0 est non nulle. Pour la première, nous adaptons des arguments de [23] (voir Proposition 8.1) pour démontrer que chaque fois $u \in C^{0,\alpha}(M), \alpha \in]0, \min\{1, 2-s\}[$, il existe $\alpha' > \alpha$ tel que u est au voisinage de x_0 et donc on peut faire tendre, par itération, α vers 1 en x_0. Ensuite, nous adaptons pour la deuxième assertion des arguments de [25] (voir Lemme 3.4) afin d'utiliser le Principe de maximum (qui ne marche qu'avec les fonctions de classe C^2).

Chapitre 3 : Influence de la géométrie.

Dans le Chapitre 3, nous étudions l'influence de la géométrie sur l'existence des solutions pour (0.0.6).

Depuis la résolution du problème de Yamabe (voir [2], [45], [51]), il est bien connu qu'il existe une dichotomie entre les dimensions supérieures dans lesquelles les arguments d'existence sont locaux (voir Aubin [2]) et les petites dimensions où les arguments sont globaux (voir Schoen [45] et Druet [15]).

Fonctions-tests

Afin de trouver des conditions géométriques suffisantes d'existence, nous allons tester la condition principale d'existence (0.0.10) par une suite des fonctions $(u_\epsilon)_{\epsilon>0}$ dans $H_1^2(M)$ que nous construisons "naturellement" en s'inspirant des fonctions extrémales des inégalités Euclidiennes de Hardy-Sobolev (0.0.3).

En fait, nous avons dit que Lieb a démontré que l'égalité (0.0.4) est réalisée par les fonctions $\Phi_{C,\lambda}(X) = C\left(\lambda^{2-s} + |X - X_0|^{2-s}\right)^{-\frac{n-2}{2-s}}$ avec $C \in \mathbb{R}^*, \lambda > 0$. Il est donc naturel de prendre pour tout $\epsilon > 0$, la fonction Liepschitzienne u_ϵ définie sur M par : $x \mapsto \left(\frac{\epsilon^{1-\frac{s}{2}}}{\epsilon^{2-s}+d_g(x,x_0)^{2-s}}\right)^{\frac{n-2}{2-s}}$.

Toutefois, il faut noter que l'utilisation de la suite des fonctions-tests $(u_\epsilon)_{\epsilon>0}$, vu sa construction ($u_\epsilon = O(\epsilon^{\frac{n-2}{2}})$ en dehors d'un petit voisinage de x_0), est aboutissante (voir Proposition 3.1.1) pour les dimensions $n \geq 4$ où la géométrie locale autour de x_0 compte. En revanche, nous avons obtenu dans la même Proposition, $J(u_\epsilon) = K(3,s)^{-1} + O(\epsilon)$, où le signe de $O(\epsilon)$ est inconnu. Ce qui ne permet pas de conclure.

Afin de résoudre ce problème, on utilise la méthode de Schoen dans l'article [45] (voir aussi Druet [15]) qui consiste à introduire la fonction de Green. Ceci servira à compenser l'énérgie "parasite" dans l'expression de $J(u_\epsilon)$ et par suite à pousser le D.L. de J à l'ordre 1, c.à.d. démontrer que $J(v_\epsilon) = K(3,s)^{-1} + C\epsilon + o(\epsilon)$ où C est une constante > 0 ou bien < 0.

Nous démontrons que l'estimation de $J(u_\epsilon)$ donne les résultats suivants :

Proposition 0.0.2 *Soient* (M,g) *une variété Riemannienne compacte de dimension* $n \geq 3$, $x_0 \in M$, $s \in]0,2[$ *et* $\rho_0 \in]0, i_g(M)[$. *On considère la suite des fonctions-tests* $(w_\epsilon)_\epsilon$ *définie sur* M *par*

$$w_\epsilon := \begin{cases} u_\epsilon & si\ n \geq 4 \\ \\ \eta u_\epsilon + \sqrt{\epsilon}\beta_{x_0} & si\ n = 3 \end{cases} \tag{0.0.12}$$

où pour tout $\epsilon > 0$, u_ϵ *est définie comme dans* (3.0.5), $\eta \in C_c^\infty(\mathbb{B}_{2\rho_0}(x_0))$ *tel que* $0 \leq \eta \leq 1$ *et* $\eta \equiv 1$ *sur* $\mathbb{B}_{\rho_0}(x_0)$ *et* β_{x_0} *vérifie p.p. sur* M,

$$\beta_{x_0}(x) = 4\pi G_{a,x_0} - \frac{\eta(x)}{d_g(x,x_0)},$$

G_{a,x_0} *étant la fonction de Green sur* (M,g) *correspondante à* $\Delta_g + a$ *et* $\beta_{x_0} \in C^0(M)$. *Alors on a :*

$$J(w_\epsilon) = \frac{1}{K(n,s)} \left(1 + \begin{cases} \frac{\int_{\mathbb{R}^n} |\Phi|^2 dX}{\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla\Phi|^2 dX} \left(a(x_0) - c_{n,s} Scal_g(x_0)\right) \epsilon^2 + o(\epsilon^2) & si\ n \geq 5 \\ \\ \frac{\omega_3}{\int_{\mathbb{R}^4} |\nabla\Phi|^2 dX} \left(a(x_0) - c_{n,s} Scal_g(x_0)\right) \epsilon^2 ln(\frac{1}{\epsilon}) + O(\epsilon^2) & si\ n = 4 \\ \\ -\epsilon\beta_{x_0}(x_0) \frac{4\pi}{\int_{\mathbb{R}^n} \Phi\Delta_\delta\Phi dX} + o(\epsilon) & si\ n = 3 \end{cases} \right) \tag{0.0.13}$$

quand $\epsilon \to 0$, *avec*

$$c_{n,s} := \frac{(n-2)(6-s)}{12(2n-2-s)}. \tag{0.0.14}$$

Théorème Principal d'existence.

La dernière proposition et le Théorème général d'existence 0.0.2 impliquent directement le Théorème suivant.

Théorème 0.0.3 *Soient* (M,g) *une variété Riemannienne compacte de dimension* $n \geq 3$, $x_0 \in M$, $s \in]0,2[$ *et* $2^\star(s) := \frac{2(n-s)}{n-2}$ *l'exposant critique des inclusions de Hardy-Sobolev. Soit* $a \in C^0(M)$ *telle que* $\Delta_g + a$ *est coercif. On suppose que*

$$\begin{cases} a(x_0) < c_{n,s} Scal_g(x_0) & \text{si } n \geq 4 \\ m(x_0) > 0 & \text{si } n = 3 \end{cases}$$

avec $c_{n,s} = \frac{(n-2)(6-s)}{12(2n-2-s)}$ *et* $m(x_0) = \beta_{x_0}(x_0)$ *indépendante du choix de* η. *Alors il existe une fonction* $u \in C^0(M) \cap H_1^2(M)$, $u > 0$ *partout sur* M *telle qu'elle est une solution de l'équation critique de Hardy-Sobolev*

$$\Delta_g u + au = \lambda \frac{u^{2^\star(s)-1}}{d_g(x,x_0)^s}.$$

En plus, $u \in C^{0,\theta}(M) \cap C^{1,\gamma}(M \setminus \{x_0\})$ *pour tous* $\theta \in]0, \min\{1, 2-s\}[$, $\gamma \in]0,1[$ *et est un minimiseur pour* J, *c.à.d.* $\int_M \frac{u^{2^\star(s)}}{d_g(x,x_0)^s} dv_g = 1$ *et* $I(u) = \lambda > 0$.

Remarques :

Le Théorème 0.0.3 suggère quelques remarques :

1. Pour les dimensions $n \geq 4$, c'est la géométrie au voisinage de le singularité x_0 qui compte. Par contre, nous avons obtenu en dimension 3 une condition géométrique globale d'existence.

2. Pour les équations de type courbure scalaire (quand $s = 0$), Aubin [2] et Schoen [45] ont obtenu des résultats similaires pour $n \geq 4$ et $n = 3$ respectivement.

3. Contrairement au cas $s = 0$, les termes qui apparaissent dans le développement de la fonctionnelle $J(u_\epsilon)$ ne sont pas explicites et nous avons besoin de les rassembler convenablement afin de pouvoir calculer la valeur explicite de $c_{n,s}$.

4. Dans le cas $s = 0$, Aubin a obtenu dans [2], la constante $c_{n,0}$ pour le potentiel $a \equiv c_{n,0}\mathrm{Scal}_g$ lorsque $n \geq 4$.

Remarquons que $c_{4,s} = \frac{1}{6}$ (ne dépend pas de s) et qu'en fixant $n \geq 5$, la fonction $c_{n,s}$: $s \in]0, 2[\mapsto c_{n,s} := \frac{(n-2)(6-s)}{12(2n-2-s)}$ est strictement décroissante et que $\sup_{s\in]0,2[} c_{n,s} = c_{n,0}$. Nous avons donc obtenu une condition suffisante différente de celle d'Aubin. Ceci est dû au fait, que contrairement à l'équation de la courbure scalaire (le cas $s = 0$ et $a \equiv c_{n,0}\mathrm{Scal}_g$), notre équation critique (0.0.6) à cause de la présence du terme critique $d_g(x, x_0)^{-s}$ n'est pas invariante conforme pour la classe conforme $[g]$. Plus précisément, pour $\tilde{g} = \exp(2w)g, w \in C^\infty(M)$, nous avons en général :

$$\Delta_{\tilde{g}} u + au \neq \exp(-\frac{n+2}{2-s}w) \left[\Delta_g \left(\exp(\frac{n-2}{2-s}w)u\right) + a\exp(\frac{n-2}{2-s}w)u\right].$$

5. Comme une conséquence du Théorème de la masse Positive (voir [46], [47]), nous obtenons (voir Druet [15] et la Proposition 3.3.1 du Chapitre 3) que $m(x_0) > 0$ (et donc existence de solutions pour (0.0.6)) pour $n = 3$ lorsque $a \leq \mathrm{Scal}_g/8$ ou si (M, g) n'est pas conformement équivalente à la sphère canonique $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{R}^4$ lorsque $a \equiv \mathrm{Scal}_g/8$. (Remarquons que $c_{3,0} = \frac{1}{8}$).

6. Notons enfin que le Théorème 0.0.3 marche aussi bien pour les variétés sans bord que pour celles dont le bord $\partial M \neq \phi$ à condition que la singularité x_0 soit dans $M \setminus \partial M$. Ce Théorème généralise donc celui (cités ci-dessous) de Ghoussoub et Yuan (voir [24]) pour la dimension $n = 3$:

Théorème 0.0.4 *Soit Ω un domaine bornés dans $\mathbb{R}^3$ et $x_0 \in \Omega \setminus \partial\Omega$. Pour une fonction $a \in C^0(\overline{\Omega})$ telle que l'opérateur $\Delta + a$ est coercif, on définit la fonction de Robin comme étant $R(x, y) := \omega_2^{-1}|x - y|^{-1} - G_x(y)$ où G désigne la fonction de Green pour $\Delta + a$ avec la condition de Dirichlet sur le Bord. On suppose que $R(x_0, x_0) < 0$. Il existe donc une solution $u \in C^{0,\theta}(\overline{\Omega})$ pour tout $\theta \in]0, \min\{1, 2 - s\}[$ pour l'équation de Hardy-Sobolev*

$$\Delta u + a(x)u = \frac{u^{2^\star(s)-1}}{|x - x_0|^s}, u > 0 \quad \text{dans } \Omega \text{ et } u = 0 \text{ sur } \partial\Omega.$$

Équations perturbée de Hardy-Sobolev

Dans le Chapitre 4, nous étudions l'existence des solutions pour les équations de Hardy-Sobolev à terme perturbatif sous-critique de la forme suivante :

$$\Delta_g u + au = \frac{|u|^{2^*(s)-2}u}{d_g(x,x_0)^s} + h|u|^{q-2}u, \tag{0.0.15}$$

avec q un exposant sous-critique dans $]2, 2^*[, 2^* = \frac{2n}{n-2}$ et h une fonction sur M positive presque partout et continue.

Dans le cas particulier $s = 0$ des équations de Sobolev, Brézis et Nirenberg [7] ont étudié ce problème dans un contexte Euclidien, Djadli l'a étudié dans [13] pour les variétés Riemanniennes.

Comme dans le deuxième chapitre, nous cherchons d'abord une condition générale d'existence des solutions pour l'équation (0.0.6). Pour cela, nous fixons q dans $]2, 2^*[$ et nous considérons la fonctionnelle

$$\begin{aligned} u \in H_1^2(M) \quad \mapsto \quad J_q(u) = \frac{1}{2}\int_M (|\nabla u|_g^2 + au^2)dv_g - \frac{1}{2^*(s)}\int_M |u|^{2^*(s)}\frac{dv_g}{d_g(x,x_0)^s} \\ -\frac{1}{q}\int_M h|u|^q dv_g. \end{aligned} \tag{0.0.16}$$

J_q est bien définie d'après les inclusions de Hardy-Sobolev.

L'opérateur $\Delta_g + a$ étant coercif, les points critiques (s'ils existent) seront donc, à une constante multiplicative près, des solutions de (0.0.6). En suivant les travaux de Djadli [13] et Esposito-Robert [19], nous démontrons le Théorème suivant dont le moteur principal est le Mountain-Pass Lemma (voir Lemme 4.1.1 dans le chapitre 4) d'Ambrosetti-Rabinowitz (voir [1]).

Théorème 0.0.5 *Soient (M, g) une variété Riemannienne compacte de dimension $n \geq 3$, $a \in C^0(M)$ telle que $\Delta_g + a$ est coercif, $x_0 \in M$ et $s \in]0, 2[$. On pose $2^\star(s) = \frac{2(n-s)}{n-2}$. On considère aussi $q \in]2, 2^*[$ et $h \in C^0(M)$ positive. S'il existe $u_0 \in H_1^2(M)$ telle que*

$$\sup_{t\geq 0} J_q(tu_0) < c'_{n,s} K(n,s)^{-\frac{n-s}{2-s}} \tag{0.0.17}$$

$c'_{n,s} = \frac{2-s}{2(n-s)}$ *Alors l'équation de Hardy-Sobolev perturbée*

$$\Delta_g u + au = \frac{|u|^{2^*(s)-2}u}{d_g(x,x_0)^s} + h|u|^{q-2}u$$

admet une solution $u \not\equiv 0$ dans $H_1^2(M)$. De plus, $u \in C^{0,\alpha}(M) \cap C^{1,\beta}_{loc}(M \setminus \{x_0\})$, pour tout $\alpha \in]0, \min(1, 2-s)[, \beta \in]0, 1[$.

Dans la deuxième section, nous testons la condition principale d'existence (0.0.17) par la suite $(tw_\epsilon)_{\epsilon>0}, t > 0$ et les w_ϵ sont comme dans la Proposition 0.0.2. Nous avons le résultat suivant :

$$J_q(t_\epsilon w_\epsilon) = \beta_0 + \begin{cases} -\kappa_1 h(x_0)\epsilon^{n-\frac{q(n-2)}{2}} + o(\epsilon^{n-\frac{q(n-2)}{2}}) & \text{si } n \geq 4 \\ -\kappa_4 h(x_0)\epsilon^{3-\frac{q}{2}} + o(\epsilon^{3-\frac{q}{2}}) & \text{si } n = 3 \text{ et si } q > 4 \\ -\left(\kappa_5 m(x_0) + \kappa_6 h(x_0)\right)\epsilon + o(\epsilon) & \text{si } n = 3 \text{ et si } q = 4 \\ -\kappa_7 m(x_0) + o(\epsilon) & \text{si } n = 3 \text{ et si } q \in]2,4[\end{cases} \quad (0.0.18)$$

où $t_\epsilon > 0$ est l'unique tel que $\sup_{t\geq 0} J_q(tw_\epsilon) = J_q(t_\epsilon w_\epsilon)$.

Le Théorème général d'existence 0.0.5 et ce dernier résultat (0.0.18) impliquent directement le Théorème suivant.

Théorème 0.0.6 *Soient (M,g) une variété Riemannienne compacte de dimension $n \geq 3$, $a \in C^0(M)$ telle que $\Delta_g + a$ est coercif, $x_0 \in M$ et $s \in]0,2[$. On pose $2^\star(s) = \frac{2(n-s)}{n-2}$ et $2^* = 2^\star(0)$. On considère aussi $q \in]2, 2^*[$ et $h \in C^0(M)$ positive. On suppose que*

$$\begin{cases} h(x_0) > 0 & si\ n \geq 4\ ou\ \{\ n = 3\ et\ q > 4\ \} \\ \kappa' m(x_0) + \kappa'' h(x_0) > 0 & si\ n = 3\ et\ si\ q = 4 \\ m(x_0) > 0 & si\ n = 3\ et\ si\ q \in (2,4) \end{cases} \quad (0.0.19)$$

avec $c_{n,s} := \frac{(n-2)(6-s)}{12(2n-2-s)}$, $\kappa', \kappa'' > 0$, $Scal_g(x_0)$ est la courbure scalaire de M en x_0 et $m(x_0) = \beta_{x_0}(x_0)$ est la masse de (M,g) en x_0. Alors l'équation de Hardy-Sobolev perturbée

$$\Delta_g u + au = \frac{|u|^{2^*(s)-2}u}{d_g(x,x_0)^s} + h|u|^{q-2}u$$

admet une solution $u \not\equiv 0$ dans $H_1^2(M)$. De plus, $u \in C^{0,\alpha}(M) \cap C^{1,\beta}_{loc}(M \setminus \{x_0\})$, pour tout $\alpha \in]0, \min(1, 2-s)[$, $\beta \in]0,1[$.

Conclusion :

De (0.0.19), nous distinguons que l'existence d'une solution dépend uniquement de la perturbation (en x_0) pour les dimensions $n \geq 4$ et qu'une interaction entre la géométrie globale de la variété (la masse de la fonction de Green en x_0) et la perturbation apparaît en dimension 3.

La première meilleure constante est atteinte.

Théorème Principal.

Dans le Chapitre 5, nous revenons à la question posée dans le deuxième chapitre sur le cas $\epsilon = 0$ l'inégalité (0.0.5). A savoir si la première meilleure constante $A_0 = K(n,s)$ est atteinte ou non ?

Nous démontrons le Théorème suivant :

Théorème 0.0.7 *Soient (M,g) une variété Riemannienne compacte de dimension $n \geq 3$, $x_0 \in M$, $s \in]0,2[$, et $2^\star(s) = \frac{2(n-s)}{n-2}$ l'exposant critique de Hardy-Sobolev. Alors il existe $B_0(M,g,s,x_0) > 0$ dépendant de (M,g) et s tel que pour tout $v \in H_1^2(M)$,*

$$\left(\int_M \frac{|v|^{2^\star(s)}}{d_g(x,x_0)^s}\,dv_g\right)^{\frac{2}{2^\star(s)}} \leq K(n,s)\int_M |\nabla v|_g^2\,dv_g + B_0(M,g,s,x_0)\int_M v^2\,dv_g. \quad (0.0.20)$$

Cas $s = 0$ et cas Euclidien.

Dans le cas $s = 0$, le Théorème 5.1.1 a été demontré par Hebey-Vaugon dans [32] pour les meilleures constantes des inclusions de Hardy-Sobolev $H_1^2(M) \subset L^{2^\star}(M)$, $2^\star = 2n/(n-2)$. Dans son article [15], Druet a étudié les meilleures constantes des inclusions de Hardy-Sobolev $H_1^p(M) \subset L^{p^\star}(M), p^\star = pn/(n-p)$ $(n > p > 1)$ (voir aussi Aubin-Li [5] pour la preuve de la conjecture d'Aubin dans [3]). Hebey a étudié dans [28] le même problème pour les inclusions $H_2^2(M) \subset L^{2^\sharp}(M)$, $2^\sharp = 2n/(n-4), n \geq 5$, Brouttelande[8] et Ceccon-Montenegro[11] pour les inégalités de Gagliardo-Nirenberg.

Il existe une littérature importante sur les meilleures constantes pour les inégalités de type Hardy-Sobolev sur les domaines Euclidiens $\mathbb{R}^n$. Une discussion générale sur ce sujet se trouve dans la monographie [22] de Ghoussoub et Moradifam. Sachant que les inégalités de Hardy-Sobolev constituent une sous famille des celles de Caffarelli-Kohn-Nirenberg (voir [9]), les meilleures constantes et les extremales de ces dernières sur $\mathbb{R}^n$ ont été bien étudiées pour la classe des fonctions symétriques radiales (voir Catrina-Wang [10], Horushi [33] et Chou-Chu [12]). Cependant, il existe des situations où les fonctions extremales ne sont pas radiales et symétriques (voir l'article de Catrina et Wang [10]). Une étude historique sur la brisure de symétrie des fonctions extremales se trouve dans l'article [14] de Dolbeault, Esteban, Loss et Tarantello . Quant aux inégalités de Hardy-Sobolev-Maz'ya (voir [40]), nous nous référons à Badiale-Tarantello [6], Musina [41] et Tertikas-Tintarev [49].

Preuve du Théorème 0.0.7 : Blow-up autour de x_0.

La preuve du Théorème 0.0.7 est basée sur l'analyse du Blow-up des solutions critiques des équations elliptiques non linéaire. Nous démontrons d'abord (dans la première section) un Théorème général de convergence des solutions des équations de Hardy-Sobolev

$$\Delta_g u + a(x)u = \frac{u^{2^\star(s)-1}}{d_g(x,x_0)^s} \quad \text{sur } M$$

qui s'explosent au voisinage de la singularité x_0. Sachant que l'existence de ces solutions est assurée par le Théorème 0.0.2.

Théorème 0.0.8 *Soient (M,g) une variété Riemannienne compacte de dimension $n \geq 3$, $x_0 \in M$, $s \in]0,2[$. On considère une famille $(u_\alpha)_{\alpha>0}$ dans $H_1^2(M)$, telle que pour tout $\alpha > 0$, $u_\alpha \geq 0$, $u_\alpha \not\equiv 0$ et u_α est une solution du problème*

$$\begin{cases} \Delta_g u_\alpha + \alpha u_\alpha = \lambda_\alpha \frac{u_\alpha^{2^\star(s)-1}}{d_g(x,x_0)^s} \\ \lambda_\alpha \in]0, K(n,s)^{-1}[\ ,\ \|u_\alpha\|_{2^\star(s),s} = 1. \end{cases} \quad (0.0.21)$$

Soit $(z_\alpha)_{\alpha>0} \in M$ telle que $\lim_{\alpha\to+\infty} z_\alpha = x_0$. On définit la fonction $\hat{u}_\alpha$ sur $\mathbb{B}_{R_0\mu_\alpha^{-1}}(0) \subset \mathbb{R}^n$ par

$$\hat{u}_\alpha(X) = \mu_\alpha^{\frac{n}{2}-1} u_\alpha(\exp_{z_\alpha}(\mu_\alpha X)), \quad (0.0.22)$$

avec $\exp_{z_\alpha}^{-1} : \Omega_\alpha \to \mathbb{B}_{R_0}(0)$ *est l'application exponentielle en* z_α*,* Ω_α *étant une boule exponentielle dans* M *centrée en* z_α*, c.à.d.* $\exp_{z_\alpha}^* g = \delta$*. On suppose que*

$$d_g(x_\alpha, z_\alpha) = O(\mu_\alpha) \text{ lorsque } \alpha \to +\infty. \tag{0.0.23}$$

Alors

$$d_g(z_\alpha, x_0) = O(\mu_\alpha) \text{ lorsque } \alpha \to +\infty \tag{0.0.24}$$

et, à une extraction d'une sous-suite près, $\eta_\alpha \hat{u}_\alpha$ *converge vers* $\hat{u}$ *faiblement dans* $D_1^2(\mathbb{R}^n)$ *et uniformement dans* $C_{loc}^{0,\beta}(\mathbb{R}^n)$*, pour tout* $\beta \in]0, \min(1, 2-s)[$*, avec* $\eta_\alpha := \eta_0(\mu_\alpha \cdot)$ *et*

$$\hat{u}(X) = \left(\frac{a^{\frac{2-s}{2}} k^{\frac{2-s}{2}}}{a^{2-s} + |X - X_0|^{2-s}} \right)^{\frac{n-2}{2-s}} \quad \text{pour tout } X \in \mathbb{R}^n$$

avec $X_0 \in \mathbb{R}^n$*,* $a > 0$ *et* $k^{2-s} = (n-2)(n-s)K(n,s)$*. En particulier,* $\hat{u}$ *vérifie*

$$\Delta_\delta \hat{u} = K(n,s)^{-1} \frac{\hat{u}^{2^\star(s)-1}}{|X - X_0|^s} \text{ dans } \mathbb{R}^n \text{ et } \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\hat{u}^{2^\star(s)}}{|X - X_0|^s} dX = 1. \tag{0.0.25}$$

Dans la deuxième section du Chapitre 5, en adaptant les arguments de Druet (voir [15]), nous cherchons une estimation ponctuelle (5.3.72) de $x \mapsto d_g(x, x_0)^{(n-2)/2} u_\alpha(x)$ définie presque partout sur M et se servant de celle-ci, nous procédons par l'absurde et nous démontrons que l'inégalité Euclidienne de Hardy-Sobolev $\left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\varphi|^{2^\star(s)}}{|X - X_0|^s} dX \right)^{\frac{2}{2^\star(s)}} \leq K(n,s) \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \varphi|^2 dX$ s'explose en la testant par la famille des Blowing-up solutions $(u_\alpha)_\alpha$ via l'application de transition exponentielle.

Inégalité Optimale de Hardy-Sobolev.

Ainsi nous établissons dans le Théorème suivant une inégalité optimale de Hardy-Sobolev sur les variétés. Ce résultat est une conclusion du Théorème précédent 0.0.8 et du Théorème d'existence obtenue par estimations des fonctions-tests (voir Chapitre 4). Nous démontrons le Théorème suivant :

Théorème 0.0.9 *Soient* (M, g) *une variété Riemannienne compacte de dimension* $n \geq 3$*,* $x_0 \in M$*,* $s \in]0, 2[$*, et* $2^\star(s) = \frac{2(n-s)}{n-2}$ *l'exposant critique de Hardy-Sobolev. Il existe* $B_0 = B_0(M, g, s, x_0) > 0$ *telle que pour tout* $v \in H_1^2(M)$ *on a :*

$$\left(\int_M \frac{|v|^{2^\star(s)}}{d_g(x, x_0)^s} dv_g \right)^{\frac{2}{2^\star(s)}} \leq K(n,s) \left(\int_M |\nabla v|^2 dv_g + \frac{B_0}{K(n,s)} \int_M v^2 dv_g \right). \tag{0.0.26}$$

De plus,

$$\begin{cases} B_0(M, g, s, x_0) \geq K(n,s) \frac{(n-2)(6-s)}{12(2n-2-s)} Scal_g(x_0) & \text{si } n \geq 4 \\ m(x_0) \leq 0 & \text{si } n = 3. \end{cases} \tag{0.0.27}$$

où $m(x_0)$ *désigne la masse de la fonction de Green correspondante à* $\Delta_g + \frac{B_0(M,g,s,x_0)}{K(3,s)}$*.*

Travaux de l'Auteur :

[1] Hardy-Sobolev Equations on Compact Riemannian Manifolds, Journal of Nonlinear Analysis : Theory, Methods & Applications, **103**, (2014), 39–54.

[2] Optimal Hardy-Sobolev Inequalities on Compact Riemannian Manifolds, *Article soumis.*

[3] Hardy-Sobolev Equations with Perturbation on Compact Riemannian Manifolds, *Article en préparation.*

Notations

dv_g	Forme volume Riemannienne sur (M,g).
d_g	La distance Riemannienne sur (M,g).
$(L^p(M), \\|\cdot\\|_p)$	Espace de Lebesgue des fonctions p-intégrables sur M.
$L^p(M, d_g(\cdot,x_0)^{-s})$	Espace de Lebesgue $:= \{f : M \to \mathbb{R} \ / \ \|f\|^p d_g(\cdot,x_0)^{-s} \in L^1(M)\}$, sa norme est $f \mapsto \\|f\\|_{p,s} := (\int_M \|f\|^p d_g(\cdot,x_0)^{-s} dv_g)^{1/p}$
$H_1^2(M)$	Le complété de $C^\infty(M)$ pour la norme $v \mapsto \\|\nabla v\\|_2 + \\|v\\|_2$.
$D_1^2(\mathbb{R}^n)$	Le complété de $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ pour la norme $v \mapsto \\|\nabla v\\|_2$.
$C_c^\infty(X)$	L'ensemble des fonctions $f : X \to \mathbb{R}$ à support compact dans X.
Δ_g	l'Opérateur de Beltrami-Laplace ($:= -div_g(\nabla)$).
δ	Le métrique Euclidienne.
$\exp_{x_0}^{-1}(x)$	L'image de x par l'application exponentielle sur (M,g) en x_0. Cas Euclidien : $\exp_{x_0}^{-1}(x) = x_0 + x$.
D_x	La masse de Dirac en x.
$\mathbb{B}_r(x)$	Une boule centrée en x et de rayon r.

Chapitre 1

Premières meilleures constantes de Hardy-Sobolev

Dans ce chapitre, nous démontrons que pour toute variété Riemannienne (M, g) de dimension $n \geq 3$, la première meilleure constante $A_0(M, g, x_0, s)$ des inégalités de Hardy-Sobolev

$$\|u\|^2_{2^\star(s),s} \leq A\|\nabla u\|^2_2 + B\|u\|^2_2 \quad u \in H^2_1(M) \qquad (\mathrm{I}_{AB}) \tag{1.0.1}$$

à savoir $A_0 = inf\{A > 0 \ ; \ \exists B > 0$ vérifiant (I_{AB}) pour tout $u \in H^2_1(M)\}$ est celle, qu'on notera $K(n, s)$, des inégalités Euclidienne de Hardy-Sobolev. Nous établissons une inégalité telle (1.0.1) (dans la Proposition 1.2.1) pour $K(n, s)$ à ϵ-près ($A = K(n, s) + \epsilon$, pour tout $\epsilon > 0$ suffisamment petit).

1.1 Inégalités de Hardy-Sobolev

1.1.1 Propriétés dans $L^p\left(M, \frac{dv_g}{d_g(x,x_0)^s}\right)$.

1.1.1.1 Inégalités triangulaire et de Hölder

Proposition 1.1.1 *Soient (M, g) une variété Riemannienne, $p, q \in [1, +\infty]$ tels que $1/p+1/q = 1$, et ω un poids sur M (i.e. une fonction définie presque partout et strictement positive). On considère $f_1 \in L^p(M, \omega dv_g)$ et $f_2 \in L^q(M, \omega dv_g)$. Alors on a :*

$$\int_M |f_1 f_2|\omega dv_g \leq \|f_1\|_{L^p_M(\omega dv_g)}\|f_2\|_{L^q_M(\omega dv_g)}. \tag{1.1.2}$$

En particulier, Si $\omega : x \in M \setminus \{x_0\} \mapsto d_g(x, x_0)^{-s}$ avec $x_0 \in M$ et $s \in]0, 2[$, alors

$$\int_M \frac{|f_1 f_2|}{d_g(x, x_0)^s} dv_g \leq \left(\int_M \frac{|f_1|^p}{d_g(x, x_0)^s} dv_g\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_M \frac{|f_2|^q}{d_g(x, x_0)^s} dv_g\right)^{\frac{1}{q}}. \tag{1.1.3}$$

Preuve de la proposition 1.1.1 : Soit $f_1 \in L^p(M, \omega dv_g)$ et $f_2 \in L^q(M, \omega dv_g)$. On a

$$\int_M |f_1 f_2|\omega dv_g \leq \int_M |f_1| w^{\frac{1}{p}} \cdot |f_2| w^{\frac{1}{q}} dv_g$$

Avec l'inégalité de Hölder, on obtient

$$\begin{aligned}\int_M |f_1 f_2|\omega dv_g &\leq \||f_1|w^{\frac{1}{p}}\|_p \||f_2|w^{\frac{1}{q}}\|_q = \left(\int_M |f_1|^p \omega dv_g\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_M |f_2|^q \omega dv_g\right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \|f_1\|_{L^p(\omega dv_g)} \|f_2\|_{L^q(\omega dv_g)}.\end{aligned}$$

Finalement, en posant que $\omega : x \in M \setminus \{x_0\} \mapsto d_g(x, x_0)^{-s}$ et en remplaçant ω par sa valeur dans (1.1.2), on aura (1.1.3). $\square$

Proposition 1.1.2 *Soient (M, g) une variété Riemannienne, $p \in [1, +\infty]$ et ω un poids sur M. Alors on a l'inégalité triangulaire dans $L^p(M, \omega dv_g)$, c.à.d. pour tous $f_1, f_2 \in L^p(M, \omega dv_g)$, on a :*

$$\|f_1 + f_2\|_{L^p(\omega dv_g)} \leq \|f_1\|_{L^p(\omega dv_g)} + \|f_2\|_{L^p(\omega dv_g)}. \tag{1.1.4}$$

En particulier, Si $\omega = 1/d_g(x, x_0)^s$ avec $x_0 \in M$ et $s \in]0, 2[$ alors on aura

$$\left(\int_M \frac{|f_1 + f_2|}{d_g(x, x_0)^s} dv_g\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_M \frac{|f_1|^p}{d_g(x, x_0)^s} dv_g\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_M \frac{|f_2|^p}{d_g(x, x_0)^s} dv_g\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{1.1.5}$$

Preuve de la proposition 1.1.2 : Soient $f_1, f_2 \in L^p(M, \omega dv_g)$ et un réel $q \in [1, +\infty]$ tels que $1/p + 1/q = 1$. On a :

$$|f_1 + f_2|^p \leq |f_1| \cdot |f_1 + f_2|^{\frac{p}{q}} + |f_2| \cdot |f_1 + f_2|^{\frac{p}{q}}.$$

Donc

$$\begin{aligned}\|f_1 + f_2\|^p_{L^p_M(\omega dv_g)} &= \int_M |f_1 + f_2|^p \omega dv_g \\ &\leq \int_M |f_1| \cdot |f_1 + f_2|^{\frac{p}{q}} \omega dv_g + \int_M |f_2| \cdot |f_1 + f_2|^{\frac{p}{q}} \omega dv_g\end{aligned}$$

Avec l'inégalité de Hölder (1.1.2), on obtient

$$\begin{aligned}\|f_1 + f_2\|^p_{L^p_M(\omega dv_g)} &\leq \|f_1\|_{L^p_M(\omega dv_g)} \cdot \|(f_1 + f_2)^{\frac{p}{q}}\|_{L^q_M(\omega dv_g)} \\ &\quad + \|f_2\|_{L^p_M(\omega dv_g)} \cdot \|(f_1 + f_2)^{\frac{p}{q}}\|_{L^q_M(\omega dv_g)}\end{aligned}$$

Mais

$$\begin{aligned}\|(f_1 + f_2)^{\frac{p}{q}}\|_{L^q_M(\omega dv_g)} &= \left(\int_M |f_1 + f_2|^p \omega dv_g\right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \|f_1 + f_2\|^{\frac{p}{q}}_{L^q_M(\omega dv_g)} = \|f_1 + f_2\|^{p-1}_{L^p_M(\omega dv_g)},\end{aligned}$$

donc

$$\|f_1 + f_2\|^p_{L^p_M(\omega dv_g)} \leq \left(\|f_1\|_{L^p_M(\omega dv_g)} + \|f_2\|_{L^p_M(\omega dv_g)}\right) \|f_1 + f_2\|^{p-1}_{L^p_M(\omega dv_g)}.$$

Il s'ensuit que

$$\|f_1 + f_2\|_{L^p_M(\omega dv_g)} \leq \|f_1\|_{L^p_M(\omega dv_g)} + \|f_2\|_{L^p_M(\omega dv_g)}.$$

Finalement, en posant que $\omega : x \in M \setminus \{x_0\} \mapsto d_g(x, x_0)^{-s}$ et en remplaçant ω par sa valeur dans (1.1.4), on aura (1.1.5). $\square$

1.1.1.2 Densité

Dans une variété Riemannienne (M,g) compacte, $C^\infty(M)$ est partout dense dans l'espace de Sobolev $(H_k^p(M), \|\cdot\|_{H_k^p(M)})$. On démontre dans la Proposition suivante que si $C^\infty(M)$ est inclu dans un espace de Hardy-Sobolev $L^{p_1}(\frac{dv_g}{d_g(x,x_0)^s})$ alors pour tout $p \leq p_1$, $H_k^p(M)$ l'est encore. On utilisera les arguments de cette preuve chaque fois qu'on veut passer de $C^\infty(M)$ dans une inégalité issue des telles inclusions à $H_k^p(M)$.

Proposition 1.1.3 *Soit (M,g) une variété Riemannienne. Soient $k \in \mathbb{N}$, $p, p_1 \in]1, +\infty[$ tels que $p_1 \geq p$ et soit $x_0 \in M$. Soit l'espace de Banach $\left(L^{p_1}(M, \frac{dv_g}{d_g(x,x_0)^s}), \|\cdot\|_{p_1,s}\right)$ avec $\|f\|_{p_1,s} = \left(\int_M \frac{|f|^{p_1}}{d_g(x,x_0)^s} dv_g\right)^{\frac{1}{p_1}}$. Si*

$$\left(C^\infty(M), \|\cdot\|_{H_k^p(M)}\right) \hookrightarrow \left(L^{p_1}\left(M, \frac{dv_g}{d_g(x,x_0)^s}\right), \|\cdot\|_{p_1,s}\right) \text{ continuement}$$

alors

$$\left(H_k^p(M), \|\cdot\|_{H_k^p(M)}\right) \hookrightarrow \left(L^{p_1}\left(M, \frac{dv_g}{d_g(x,x_0)^s}\right), \|\cdot\|_{p_1,s}\right) \text{ continuement .}$$

Preuve de la proposition 1.1.3 : Supposons que $\left(C^\infty(M), \|\cdot\|_{H_k^p(M)}\right) \subseteq \left(L^{p_1}\left(M, \frac{dv_g}{d_g(x,x_0)^s}\right), \|\cdot\|_{p_1,s}\right)$ c donc il existe une constante $A > 0$ telle que pour tout $u \in C^\infty(M)$, on a :

$$\|u\|_{p_1,s} \leq A\|u\|_{H_k^p(M)}. \tag{1.1.6}$$

Soit $u \in H_k^p(M)$. Puisque $C^\infty(M)$ est partout dense dans l'espace $(H_k^p(M), \|\cdot\|_{H_k^p(M)})$, il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $C^\infty(M)$ qui converge vers u quand n tend vers l'infini pour la norme $\|\cdot\|_{H_k^p(M)}$, i.e.

$$\int_M |u_n - u|^p dv_g \xrightarrow{n\to+\infty} 0$$

et pour tout $j \in \{1, \ldots, k\}$,

$$\int_M |\nabla^j(u_n - u)|^p dv_g \xrightarrow{n\to+\infty} 0.$$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant dans $C^\infty(M)$, donc avec l'hypothèse (1.1.6) on a pour tous $i, j \in \mathbb{N}, i \neq j$:

$$\|u_i - u_j\|_{p_1,s} \leq A\|u_i - u_j\|_{H_k^p(M)}. \tag{1.1.7}$$

Or $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente pour la norme $\|\cdot\|_{H_k^p(M)}$ donc elle en est de Cauchy. Avec l'inégalité (1.1.7), on déduit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans l'espace $(L^{p_1}\left(M, \frac{dv_g}{d_g(x,x_0)^s}\right), \|\cdot\|_{p_1,s})$ qui est de Banach, donc il existe $\tilde{u} \in L^{p_1}\left(M, \frac{dv_g}{d_g(x,x_0)^s}\right)$ tel que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow{n\to+\infty} \tilde{u}$ pour la norme $\|\cdot\|_{p_1,s}$. En plus, on a :

$$\begin{aligned} \|\tilde{u}\|_{p_1,s} &= \lim_{n\to+\infty} \|u_n\|_{p_1,s} \\ &\leq \lim_{n\to+\infty} A\|u_n\|_{H_k^p(M)} \\ &= A\|u\|_{H_k^p(M)}. \end{aligned} \tag{1.1.8}$$

D'autre part, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow{n\to+\infty} \tilde{u}$ dans $(L^{p_1}\left(M, \frac{dv_g}{d_g(x,x_0)^s}\right), \|\cdot\|_{p_1,s})$, donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow{n\to+\infty} \tilde{u}$ dans $L^{p_1}(M)$ car

$$\begin{aligned}
\|u_n - \tilde{u}\|^{p_1}_{L^{p_1}(dv_g)} &\leq \int_M \frac{|u_n-\tilde{u}|^{p_1}}{d_g(x,x_0)^s} \times d_g(x,x_0)^s dv_g \\
&\leq diam_g(M)^s \|u_n - \tilde{u}\|^{p_1}_{p_1,s} \\
&\xrightarrow{n\to+\infty} 0.
\end{aligned}$$

Notons que $diam_g(M) = \sup\{d_g(x,y);\ x,y\in M\}$: C'est le diamètre de (M,g), il est fini car M est compact. Maintenant puisque $p_1 \geq p$ donc $L^{p_1}(M,dv_g) \subseteq L^p(M,dv_g)$, par suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\tilde{u}$ dans $L^p(M,dv_g)$. Mais $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow{n\to+\infty} u$ pour la norme $\|\cdot\|_{H^p_k(M)}$ donc pour la norme $\|\cdot\|_p$. D'où la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a deux limites, u et $\tilde{u}$, dans $L^p(M,dv_g)$ donc $u=\tilde{u}$ p.p. sur M. Avec (1.1.8), on déduit que

$$\|u\|_{p_1,s} \leq A\|u\|_{H^p_k(M)}.$$

D'où le résultat. □

1.1.2 Inclusions et inégalités de Hardy-Sobolev

1.1.2.1 Inégalités de Hardy-Sobolev

Soit (M,g) une variété Riemannienne compacte de dimension $n\geq 3$. Dans cette partie, on démontre que toute fonction $u\in H^2_1(M)$ vérifie l'inégalité de Hardy-Sobolev Riemannienne

$$\|u\|_{2^\star(s),s} \leq C\|u\|_{H^2_1(M)},\ 2^\star(s) := \frac{2(n-s)}{n-2} \tag{1.1.9}$$

avec $C>0$. Ceci est vrai car l'inégalité (1.1.9) est issue de celle de Hölder appliquée à toute fonction vérifiant simultanément celles de Sobolev et de Hardy. Ce qui est vrai en particulier pour les fonctions dans $H^2_1(M)$.

Théorème 1.1.1 *Soit (M,g) une variété Riemannienne compacte de dimension $n\geq 3$. Soit $x_0\in M$, $s\in[0,2]$, et $2^\star(s) := \frac{2(n-s)}{n-2}$. Alors l'espace de Sobolev $H^2_1(M)$ est inclus continuellement dans $L^{2^\star(s)}\left(M, \frac{dv_g}{d_g(x,x_0)^s}\right)$.*

Preuve du Théorème 1.1.1 : En effet, soit $u\in H^2_1(M)$. La première inclusion de Sobolev $H^2_1(M)\hookrightarrow L^{2^*}(M)$ implique qu'il existe $C_1 = C_1(M,g) > 0$ telle que

$$\|u\|_{2^*} \leq C_1\|u\|_{H^2_1(M)},\ 2^* := \frac{2n}{n-2} \tag{1.1.10}$$

D'autre part, en partant de l'inégalité de Hardy sur $\mathbb{R}^n$:

$$\forall\varphi\in C^\infty_c(\mathbb{R}^n), \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\varphi^2}{|X|^2}dX \leq \frac{4}{(n-2)^2}\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla\varphi|^2 dX, \tag{1.1.11}$$

on obtient, par arguments de compacité (M étant compacte), qu'il existe $C_3 = C_3(M,g) > 0$ telle que u (ainsi que toute fonction dans $H^2_1(M)$) vérifie

$$\int_M \frac{u^2}{d_g(x,x_0)^2} dv_g \leq C_3\|u\|^2_{H^2_1(M)}. \tag{1.1.12}$$

On utilise maintenant l'inégalité de Hölder avec $1 = \frac{1}{p} + \frac{s}{2}$ pour écrire

$$\int_M |u|^{2^\star(s)-s} \left(\frac{u}{d_g(x,x_0)}\right)^s dv_g \le \left(\int_M |u|^{\frac{2(2^\star(s)-s)}{2-s}} dv_g\right)^{\frac{2-s}{2}} \left(\int_M \frac{u^2}{d_g(x,x_0)^2} dv_g\right)^{\frac{s}{2}}. \tag{1.1.13}$$

Puisque $\frac{2(2^\star(s)-s)}{2-s} = 2^*$ donc en élevant l'inégalité (1.1.13) à la puissance $\frac{2}{2^\star(s)}$, on aura :

$$\left(\int_M |u|^{2^\star(s)} \frac{dv_g}{d_g(x,x_0)^s}\right)^{\frac{2}{2^\star(s)}} \le \left(\int_M |u|^{2^*} dv_g\right)^{\frac{2-s}{2^\star(s)}} \left(\int_M \frac{u^2}{d_g(x,x_0)^2} dv_g\right)^{\frac{s}{2^\star(s)}}. \tag{1.1.14}$$

En combinant la dernière inégalité (1.1.14) avec celles de Sobolev (1.1.10) et de Hardy (1.1.12) et sachant que $\frac{2^*(2-s)}{2\cdot 2^\star(s)} + \frac{s}{2^\star(s)} = 1$, on obtient

$$\begin{aligned} \left(\int_M |u|^{2^\star(s)} \frac{dv_g}{d_g(x,x_0)^s}\right)^{\frac{2}{2^\star(s)}} &\le C_4 \left(\|u\|^2_{H_1^2(M)}\right)^{\frac{2^*(2-s)}{2\cdot 2^\star(s)}} \cdot C_5 \left(\|u\|^2_{H_1^2(M)}\right)^{\frac{s}{2^\star(s)}} \\ &\le C_6 \|u\|^2_{H_1^2(M)}, \end{aligned}$$

avec C_4, C_5 et C_6 sont des constantes strictement positives ne dépendant que de (M, g) et s. D'où le résultat. □

1.1.2.2 Inclusions de Hardy-Sobolev : Thm. de Rellich-Kondrakov

Théorème 1.1.2 *Étant donnée (M, g) une variété Riemannienne compacte de dimension $n \ge 3$. Soit $s \in]0, 2]$, et $2^\star(s) := 2(n-s)/n-2$. Alors pour tout $q \in [1, 2^\star(s)]$, $H_1^2(M)$ est inclus continuellement dans $L^q\left(M, \frac{dv_g}{d_g(x,x_0)^s}\right)$. De plus, si $1 \le q < 2^\star(s)$ alors l'inclusion $H_1^2(M) \hookrightarrow L^q\left(M, \frac{dv_g}{d_g(x,x_0)^s}\right)$ est compacte.*

Preuve du Théorème 1.1.2 : Fixons un réel $q \in [1, 2^\star(s)[$.
i/ Montrons tout d'abord qu'on a $H_1^2(M) \hookrightarrow L^q\left(M, \frac{dv_g}{d_g(x,x_0)^s}\right)$. Pour cela, soit $u \in H_1^2(M)$. On a d'après l'inégalité de Hölder que

$$\|u\|_{q,s} \le \|u\|_{2^\star(s),s} \times \left(\int_M \frac{dv_g}{d_g(x,x_0)^s}\right)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{2^\star(s)}}.$$

Mais d'après le Théorème 1.1.1, on sait qu'il existe une constante $C_1 > 0$ telle que pour tout $v \in H_1^2(M)$, on a :

$$\|v\|_{2^\star(s),s} \le C_1 \|v\|_{H_1^2(M)}.$$

Par suite, on a :

$$\|u\|_{q,s} \le C_1 \|u\|_{H_1^2(M)} \times \left(\int_M \frac{dv_g}{d_g(x,x_0)^s}\right)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{2^\star(s)}}.$$

D'où

$$H_1^2(M) \hookrightarrow L^q\left(M, \frac{dv_g}{d_g(x,x_0)^s}\right).$$

ii/ Démontrons maintenant que l'inclusion définie ci-dessus est compacte. Pour cela, on prend $(u_i)_i$ une suite bornée dans $H_1^2(M)$, i.e. il existe une constante $C_1 > 0$ telle que

$$\|u_i\|_{H_1^2(M)} < C_1.$$

Le Théorème de Rellich-Kondrakov ($H_1^2(M) \hookrightarrow L^2(M)$ où l'inclusion est compacte) ainsi que la refléxivité de l'espace de Sobolev $(H_1^2(M), \|\cdot\|_{H_1^2(M)})$ donnent l'existence d'une fonction $u \in H_1^2(M)$ et d'une sous-suite $(u_{i_t})_{t\in\mathbb{N}}$ de $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ telles qu'on a :
*/ La suite $(u_{i_t})_{t\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers u dans $H_1^2(M)$.
**/ La suite $(u_{i_t})_{t\in\mathbb{N}}$ converge fortement vers u dans $L^2(M)$.
***/ $(u_{i_t})_t$ converge p.p. vers u dans M.
Soit $\epsilon > 0$. On définit pour tous $t \in \mathbb{N}^*$, $A > 0$ l'ensemble :

$$\Omega_{i_t}(A) = \{x \in M / \ \ |u_{i_t}(x) - u(x)| < A\}.$$

On a pour tout $s \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_{i_t}(A)^c} |u_{i_t}(x) - u(x)|^q \frac{dv_g}{d_g(x,x_0)^s} &\leq \frac{1}{A^{2^\star(s)-q}} \int_{\Omega_{i_t}(A)^c} |u_{i_t}(x) - u(x)|^{2^\star(s)} \frac{dv_g}{d_g(x,x_0)^s} \\
&\leq \frac{C_1^{2^\star(s)}}{A^{2^\star(s)-q}} \|u_{i_t} - u\|_{H_1^2(M)}^{2^\star(s)} \\
&\leq \frac{C_1^{2^\star(s)}}{A^{2^\star(s)-q}} (C_2 + \|u\|_{H_1^2(M)})^{2^\star(s)} \\
&\leq \frac{C_{n,s}(u)}{A^{2^\star(s)-q}}.
\end{aligned}$$

Puisque $\lim_{A\to+\infty} \frac{C_{n,s}(u)}{A^{2^\star(s)-q}} = 0$, donc il existe $A_0(\epsilon) > 0$ telle que pour tout $A > A_0(\epsilon)$, on a :

$$\frac{C_{n,s}(u)}{A^{2^\star(s)-q}} < \frac{\epsilon}{2}.$$

D'autre part, on considère la suite $(f_{i_s})_{s\in\mathbb{N}^*}$ des fonctions définies sur M par :

$$f_{i_s}(x) = \frac{|u_{i_s} - u|^q}{d_g(x,x_0)^s} \mathbb{1}_{\Omega_{i_s}(A)}.$$

C'est une suite des fonctions intégrables et est dominée par $x \mapsto A^q d_g(x,x_0)^{-s}$ qui est intégrable. En plus, elle converge p.p. vers 0. Avec le théorème de convergence dominée de Lebesgue, on déduit qu'il existe $t_0(\epsilon) > 0$ tel que pour tout $t > t_0(\epsilon)$ on a :

$$\int_M f_{i_t} dv_g < \frac{\epsilon}{2}.$$

Ensuite, on a pour tous $t > t_0(\epsilon)$, $A > A_0(\epsilon)$:

$$\begin{aligned}
\|u_{i_t} - u\|_{q,s}^q &= \int_M |u_{i_t} - u|^q \frac{dv_g}{d_g(x,x_0)^s} \\
&= \int_{\Omega_{i_s}(A)} |u_{i_t} - u|^q \frac{dv_g}{d_g(x,x_0)^s} + \int_{\Omega_{i_s}(A)^c} |u_{i_t} - u|^q \frac{dv_g}{d_g(x,x_0)^s} \\
&\leq \int_M f_{i_t} dv_g + \frac{C_{n,s}(u)}{A^{2^\star(s)-q}} \\
&< \epsilon.
\end{aligned}$$

D'où $(u_{i_t})_{t\in\mathbb{N}}$ converge vers u dans l'espace $L^q\left(M, \frac{dv_g}{d_g(x,x_0)^s}\right)$.

1.2 Meilleures constantes sur les variétés

1.2.1 Cas Euclidien : Meilleure constante $K(n,s)$ des inégalités de Hardy-Sobolev

Définition 1.2.1 *Soient $n \geq 3$ un entier et $s \in [0,2]$. On définit la* **meilleure constante** *des inégalités de Hardy-Sobolev Euclidienne, et on note $K(n,s)$, la constante ne dépendant que de n et de s qui vérifie*

$$K(n,s)^{-1} := \inf_{\varphi \in D_1^2(\mathbb{R}^n)} \frac{\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla\varphi|_\delta^2 dX}{\left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\varphi|^{2^\star(s)}}{|x|_\delta^s} dX\right)^{\frac{2}{2^\star(s)}}} \tag{1.2.15}$$

$(\xi,\xi') \in (\mathbb{R}^n)^2 \mapsto \delta(\xi,\xi') = \sum_{i=1}^j \delta_{ij}\xi^i(\xi')^j$ étant la métrique Euclidienne et $D_1^2(\mathbb{R}^n)$ la complétion $C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \setminus \{0\}$ pour la norme $u \mapsto \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla\varphi|_\delta^2 dX\right)^{\frac{1}{2}}$.

Dans le cas $s=0$ des inclusions de Sobolev $H_1^2(M) \hookrightarrow L^p(M), p \in]2,2^*[$, Aubin [3] et Talenti [48] ont démontré indépendament en 1976 que $K(n,0) = \left[2\left(n(n-2)\omega_n^{2/n}\right)^{-\frac{1}{2}}\right]^2$ (voir aussi Rodemich [44]) où ω_n désigne le volume de la sphère unité standard $(\mathbb{S}^n, h)$ de $\mathbb{R}^{n+1}$ et que l'égalité (1.2.15) est réalisée par les fonctions $\Phi_{C,\lambda}(X) = C(\lambda + |X|^2)^{1-\frac{n}{2}}$ avec $C \in \mathbb{R}^*, \lambda > 0$.

En 1983, Lieb a calculé dans ([39], voir Théorème 4.3) la valeur de $K(n,s)$ dans le cas $s \in]0,2[$:

$$K(n,s) = [(n-2)(n-s)]^{-1}\left(\frac{1}{2-s}\omega_{n-1}\frac{\Gamma^2(n-s/2-s)}{\Gamma(2(n-s)/(2-s))}\right)^{-\frac{2-s}{n-s}},$$

où pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\Re(z) > 0$ on a : $\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1}\exp(-t)dt$ est la fonction d'Euler vérifiant les propriétés $\Gamma(1) = 1$, $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ et $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ et a démontré que l'égalité (1.2.15) est réalisée par les fonctions $\Phi_{C,\lambda}(X) = C\left(\lambda^{2-s} + |X|^{2-s}\right)^{-\frac{n-2}{2-s}}$.

1.2.2 Cas Riemannien : Définitions et Théorème

Définition 1.2.2 *Soient (M,g) une variété Riemannienne compacte de dimension $n \geq 3$, $x_0 \in M$ et $s \in]0,2[$. Une constante $A > 0$ (resp. $B > 0$) est dite la première (resp. la deuxième) constante des inégalités de Hardy-Sobolev Riemanniennes si elle vérifie pour tout $v \in H_1^2(M)$:*

$$\left(\int_M \frac{|v|^{2^\star(s)}}{d_g(x,x_0)^s} dv_g\right)^{\frac{2}{2^\star(s)}} \leq A\int_M |\nabla v|_g^2 dv_g + B\int_M u^2 dv_g. \quad (I_{A,B})$$

Définition 1.2.3 *Soient (M,g) une variété Riemannienne compacte de dimension $n \geq 3$, $x_0 \in M$ et $s \in]0,2[$. On appelle la première meilleure constante des inégalités de Hardy-Sobolev Riemanniennes la constante $A_0 = A_0(M,g,s,x_0)$ qui vérifie*

$$A_0(M,g,s,x_0) := \inf\{A > 0;\ \exists B > 0 \text{ tel que } (I_{A,B}) \text{ est vraie}\}.$$

Dans son article [3], Aubin a démontré que, pour toute variété Riemannienne compacte (M,g) de dimension $n \geq 3$, $K(n,0)$ est la première meilleure constante des inégalités issues de l'inclusion de Sobolev $H_1^2(M) \hookrightarrow L^{2^*}(M)$. On démontre dans le Théorème suivant un résultat similaire que celui d'Aubin dans le cas général $s \in]0,2[$.

Théorème 1.2.1 *Soient (M,g) une variété Riemannienne compacte de dimension $n \geq 3$, $x_0 \in M$, $s \in]0,2[$, et $2^\star(s) = \frac{2(n-s)}{n-2}$ l'exposant critique de Hardy-Sobolev. Alors on a :*

$$A_0(M,g,s,x_0) = K(n,s)$$

où $K(n,s)$ est la meilleure constante des inégalités de Hardy-Sobolev Euclidienne.

1.2.3 Preuve (i) du Théorème : inégalités de Hardy-Sobolev à ϵ-près

Dans cette partie, on démontre que $A_0(M,g,x_0,s) \leq K(n,s)$. En suivant l'article [3] d'Aubin, on démontre dans la proposition suivante que pour tout $\epsilon > 0$, $A_0(M,g,x_0,s) \leq K(n,s) + \epsilon$.

Proposition 1.2.1 *Soient (M,g) une variété Riemannienne compacte de dimension $n \geq 3$, $x_0 \in M$, $s \in]0,2[$, et $2^\star(s) = \frac{2(n-s)}{n-2}$ l'exposant critique de Hardy-Sobolev. Alors pour tout $\epsilon > 0$, il existe $B_\epsilon > 0$ tel que pour tout $u \in H_1^2(M)$, on a*

$$\left(\int_M \frac{|u|^{2^\star(s)}}{d_g(x,x_0)^s} dv_g\right)^{\frac{2}{2^\star(s)}} \leq (K(n,s)+\epsilon) \int_M |\nabla u|_g^2 dv_g + B_\epsilon \int_M u^2 dv_g. \qquad (1.2.16)$$

Thiam [50] a démontré indépendamment un résultat dans le même esprit de la Proposition 1.2.1 avec un terme de reste supplémentaire.

Preuve de la Proposition 1.2.1 : On suit dans cette preuve le travail d'Hebey (voir [29]) dans le cas des inclusions $H_1^2(M) \hookrightarrow L^q(M)$.

Ière étape : (Construction d'un recouvrement fini de M par des boules exponentielles). En effet, par critère de compacité, nous avons (voir Appendice I) pour tout $x \in M$ et tout $\rho > 0$, il existe $r = r(x,\rho) \in]0, i_g(M)/2[$, $\lim_{\rho \to 0} r(x,\rho) = 0$ tel que la carte exponentielle $(\mathbb{B}_{2r}(x), \exp_x^{-1})$ satisfait les propriétés suivantes :

$$\begin{array}{rl} \text{i/} & (1-\rho)\delta \leq g \leq (1+\rho)\delta, \\ \text{ii/} & (1-\rho)^{\frac{n}{2}} dx \leq dv_g \leq (1+\rho)^{\frac{n}{2}} dx, \\ \text{iii/} & D_\rho^{-1}|T|_\delta \leq |T|_g \leq D_\rho |T|_\delta, \text{ for all } T \in \chi(T^\star M) \end{array}$$

et avec $\lim_{\rho \to +\infty} D_\rho = 1$, $\chi(T^\star M)$ est l'espace des tenseurs 1-covariant sur M.

Puisque M est compacte il existe $N \in \mathbb{N}$ (dépendant de ρ) et $x_1, ..., x_{N-1} \in M \setminus \mathbb{B}_{r_0}(x_0)$ (dépendant de ρ) tel que

$$M \setminus \mathbb{B}_{r_0}(x_0) \subset \cup_{m=1}^{N-1} \mathbb{B}_{r_m}(x_m),$$

avec $r_0 = r(x_0,\rho)$ et $r_m \leq r_0^2(x_0,\rho)$.

IIème étape : On démontre que pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\rho_0 = \rho_0(\epsilon) > 0$ tel que $\lim_{\epsilon \to 0} \rho_0(\epsilon) = 0$ et pour tous $\rho \in]0, \rho_0[$, $m \in \{0, \ldots, N-1\}$ et $u \in C_c^\infty(\mathbb{B}_{r_m}(x_m))$, on a :

$$\left(\int_M \frac{|u|^{2^\star(s)}}{d_g(x,x_0)^s} dv_g\right)^{\frac{2}{2^\star(s)}} \leq \left(K(n,s) + \frac{\epsilon}{2}\right) \int_M |\nabla u|_g^2 dv_g. \qquad (1.2.17)$$

En effet, D'après la définition (1.2.15) de la meilleure constante Euclidienne $K(n,s)$, on a pour tout $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$:

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\varphi|^{2^\star(s)}}{|X|_\delta^s} dX\right)^{\frac{2}{2^\star(s)}} \leq K(n,s) \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla\varphi|_\delta^2 dX. \tag{1.2.18}$$

On considère $\rho > 0$, $m \in \{0,\dots,N-1\}$ et $u \in C_c^\infty(\mathbb{B}_{r_m}(x_m))$ tel que $(\mathbb{B}_{r_m}(x_m), \exp_{x_m}^{-1})$ est une carte exponentielle vérifiant les propriétés de l'étape (I). On distingue deux cas :

Cas II.1 : Si $m = 0$ donc en utilisant les propriétés (i), (ii) et (iii) de la carte exponentielle $(\mathbb{B}_{r_0}(x_0), \exp_{x_0}^{-1})$ développées dans l'étape (I) et l'inégalité de Hardy-Sobolev Euclidienne (1.2.18), on écrit :

$$\begin{aligned} \left(\int_M \frac{|u|^{2^\star(s)}}{d_g(x,x_0)^s} dv_g\right)^{\frac{2}{2^\star(s)}} &\leq (1+\rho)^{\frac{n}{2^\star(s)}} K(n,s) \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla(u \circ \exp_{x_0})|_\delta^2 dX \\ &\leq D_\rho^2 (1+\rho)^{\frac{n}{2^\star(s)}} (1-\rho)^{\frac{-n}{2}} K(n,s) \int_M |\nabla u|_g^2 dv_g. \end{aligned} \tag{1.2.19}$$

Puisque $\lim_{\rho\to 0} D_\rho^2 \frac{(1+\rho)^{\frac{n}{2^\star(s)}}}{(1-\rho)^{\frac{n}{2}}} = 1$, il s'ensuit de (1.2.19) que pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\rho_0 > 0$ tel que pour tout $0 < \rho < \rho_0$, on a :

$$\left(\int_{\mathbb{B}_{r_0}(x_0)} \frac{|u|^{2^\star(s)}}{d_g(x,x_0)^s} dv_g\right)^{\frac{2}{2^\star(s)}} \leq \left(K(n,s) + \frac{\epsilon}{2}\right) \int_{\mathbb{B}_{r_0}(x_0)} |\nabla u|_g^2 dv_g.$$

Ceci prouve (1.2.17) pour le cas (II.1).

Case II.2 : Si $m \in \{1,\dots,N-1\}$ donc pour tout $x \in \mathbb{B}_{r_m}(x_m)$, on a :

$$d_g(x,x_0) \geq \lambda_0 > 0,$$

avec $\lambda_0 = \frac{r_0}{2} - r_m$. Avec les inégalités de Hölder et celles de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev sur la fonction $u \circ \exp_{x_m} : \mathbb{B}_{r_m}(0) \subset \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ ainsi que les propriétés (i), (ii) et (iii) developées dans l'étape (I), on écrit

$$\begin{aligned} \left(\int_M \frac{|u|^{2^\star(s)}}{d_g(x,x_0)^s} dv_g\right)^{\frac{2}{2^\star(s)}} &\leq \frac{1}{\lambda_0^{\frac{2s}{2^\star(s)}}} \left(\int_{\mathbb{B}_{r_m}(x_m)} |u|^{2^\star(s)} dv_g\right)^{\frac{2}{2^\star(s)}} \\ &\leq \frac{vol(\mathbb{B}_{r_m}(x_m))^{2\left(\frac{1}{2^\star(s)} - \frac{1}{2^\star}\right)}}{\lambda_0^{\frac{2s}{2^\star(s)}}} \left(\int_{\mathbb{B}_{r_m}(x_m)} |u|^{2^\star} dv_g\right)^{\frac{2}{2^\star}} \\ &\leq Q'_\rho \int_M |\nabla u|_g^2 dv_g, \end{aligned}$$

avec $\lim_{\rho\to 0} Q'_\rho = 0$. Lorsque $\rho \to 0$ dans la dernière inégalité, on obtient (1.2.17). Ceci prouve (1.2.17) pour le cas (II.2) et termine l'étape (II).

IIIème étape : On démontre qu'il existe une C^∞-partition de l'unité $(\eta_m)_{m=0,\dots,N-1}$ sur M subordonnée au recouvrement $(\mathbb{B}_{r_m}(x_m))_{m=0,\dots,N-1}$ et il existe $H > 0$ tels que pour tout $m \in \{0,\dots,N-1\}$,

$$|\nabla \eta_m^{\frac{1}{2}}|_g \leq H. \tag{1.2.20}$$

En effet, on considère $(\alpha_m)_{m=0,\dots,N-1}$ une C^∞-partition de l'unité sur M subordonnée au recouvrement $(\mathbb{B}_{r_m}(x_m))_{m=0,\dots,N-1}$. On pose, pour tout $m=0,\dots,N-1$,

$$\eta_m = \frac{\alpha_m^3}{\sum_{i=0}^{N-1}\alpha_i^3}.$$

Supposons qu'il existe $x_1 \in M$ tel que $(\sum_{i=0}^{N-1}\alpha_i^3)(x_1) = 0$. Puisque les $\alpha_i \geq 0$ donc pour tout $i = 1,\dots,N$, $\alpha_i(x_1) = 0$. Ceci est en contradiction avec le fait que l'ensemble $(\alpha_m)_{m=0,\dots,N-1}$ forme une C^∞-partition de l'unité. Par suite, la fonction $x \in M \mapsto \sum_{i=0}^{N-1}\alpha_i^3$ ne s'annulle pas sur M. De plus, les α_i étant de classe C^∞ sur M il s'ensuit que $1/(\sum_{i=0}^{N-1}\alpha_i^3), \alpha_j \in C^\infty(M)$. D'où $\eta_m \in C^\infty(M)$, ceci pour tout $m = 0,\dots,N-1$. On vérifie les autres conditions qui montrent que l'ensemble $(\eta_m)_{m=0,\dots,N-1}$ forment une C^∞-partition de l'unité. D'autre part on a pour tout $m=0,\dots,N-1$:

$$\eta_m^{\frac{1}{2}} = \frac{\alpha_m^{3/2}}{(\sum_{i=1}^{N}\alpha_i^3)^{1/2}}.$$

La fonction $y \in \mathbb{R} \mapsto y^{3/2}$ est une fonction différentiable et les fonctions α_m, $1/(\sum_{i=0}^{N-1}\alpha_i^3)^{1/2}$ sont de classe C^∞ sur M donc $\eta_m^{\frac{1}{2}}$ est différentiable sur M et sa dérivée vaut, pour tout $x \in M$,

$$\begin{aligned} d(\eta_m^{\frac{1}{2}})(x) &= d(y^{3/2})(\alpha_m(x)) \times d\alpha_m(x) \\ &= \frac{3}{2}\alpha_m^{\frac{1}{2}}(x) d\alpha_m(x). \end{aligned}$$

Donc $d(\eta_m^{\frac{1}{2}}) \in C^0(M)$ et par suite $\eta_m^{\frac{1}{2}} \in C^1(M)$. On pose $H = \max_{m=0,\dots,N-1} \|d(\eta_m^{\frac{1}{2}})\|_{C^0(M)}$. Ceci termine l'étape (III).

IVème étape : Dans cette étape, on démontre l'inégalité (1.2.16) sur $C^\infty(M)$.

Soient $\epsilon > 0$ et $u \in C^\infty(M)$. Puisque $\frac{2^\star(s)}{2} > 1$, donc d'après la Proposition 1.1.2 on a :

$$\begin{aligned} &\left(\int_M \frac{|u|^{2^\star(s)}}{d_g(x,x_0)^s} dv_g\right)^{\frac{2}{2^\star(s)}} \leq \left(\int_M \frac{|\sum_{m=0}^{N-1}\eta_m u^2|^{\frac{2^\star(s)}{2}}}{d_g(x,x_0)^s} dv_g\right)^{\frac{2}{2^\star(s)}} \\ &\leq \left\|\sum_{m=0}^{N-1}\eta_m u^2\right\|_{L^{\frac{2^\star(s)}{2}}(M, d_g(x,x_0)^{-s})} \leq \sum_{m=0}^{N-1}\left\|\eta_m u^2\right\|_{L^{\frac{2^\star(s)}{2}}(M, d_g(x,x_0)^{-s})} \\ &\leq \sum_{m=0}^{N-1}\left(\int_M \frac{|\eta_m^{\frac{1}{2}} u|^{2^\star(s)}}{d_g(x,x_0)^s} dv_g\right)^{\frac{2}{2^\star(s)}}. \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité (1.2.16) de l'étape (II) et par densité $(\eta_m^{\frac{1}{2}} u \in C^1(M))$, on obtient

$$\left(\int_M \frac{|\eta_m^{\frac{1}{2}} u|^{2^\star(s)}}{d_g(x,x_0)^s} dv_g\right)^{\frac{2}{2^\star(s)}} \leq (K(n,s) + \frac{\epsilon}{2}) \int_M |\nabla(\eta_m^{\frac{1}{2}} u)|_g^2 dv_g.$$

Or on a

$$
\begin{aligned}
\left(\int_M \frac{|u|^{2^\star(s)}}{d_g(x,x_0)^s}dv_g\right)^{\frac{2}{2^\star(s)}} &\leq (K(n,s)+\frac{\epsilon}{2})\sum_{m=0}^{N-1}\int_M |\nabla(\eta_m^{\frac{1}{2}}u)|_g^2 dv_g \\
&= (K(n,s)+\frac{\epsilon}{2})\sum_{m=0}^{N-1}\int_M \left(\eta_m^{\frac{1}{2}}|\nabla u|_g + |u|\cdot|\nabla \eta_m^{\frac{1}{2}}|_g\right)^2 dv_g \\
&\leq (K(n,s)+\frac{\epsilon}{2})\sum_{m=0}^{N-1}\int_M \Big(\eta_m|\nabla u|_g^2 + 2\eta_m^{\frac{1}{2}}|\nabla u|_g|u||\nabla\eta_m^{\frac{1}{2}}|_g \\
&\qquad +|u|^2|\nabla\eta_m^{\frac{1}{2}}|_g^2\Big) dv_g.
\end{aligned}
$$

Avec la dernière inégalité, celles de Cauchy-Schwarz et (1.2.20) de l'étape (II), on obtient :

$$
\left(\int_M \frac{|u|^{2^\star(s)}}{d_g(x,x_0)^s}dv_g\right)^{\frac{2}{2^\star(s)}} \leq (K(n,s)+\frac{\epsilon}{2})\left(\|\nabla u\|_2^2 + 2NH\|\nabla u\|_2\|u\|_2 + NH^2\|u\|_2^2\right). \tag{1.2.21}
$$

Soit $\epsilon_0 > 0$ tel que

$$
(K(n,s)+\frac{\epsilon}{2})(1+\epsilon_0) \leq K(n,s)+\epsilon.
$$

En fait, ϵ_0 est bien défini, car il suffit de choisir ϵ_0 dans l'intervale $]1, \frac{K(s,n)+\epsilon}{K(s,n)+\frac{\epsilon}{2}}[$. D'autre part, on a pour tous $x,y,\lambda \in \mathbb{R}$, $(\lambda x - y)^2 \geq 0$, i.e. $\lambda^2x^2+y^2 \geq 2\lambda xy$. Donc, pour tous $x,y,\lambda\in\mathbb{R}$, $2xy \leq \lambda x^2 + \lambda^{-1}y^2$. Maintenant si on pose $x = \|\nabla u\|_2$, $y = \|u\|_2$ et $\lambda = \frac{\epsilon_0}{NH}$, on tire que

$$
2NH\|\nabla u\|_2\|u\|_2 \leq \epsilon_0\|\nabla u\|_2^2 + \frac{(NH)^2}{\epsilon_0}\|u\|_2^2.
$$

Par suite, en combinant la dernière inégalité et (1.2.21), on aura :

$$
\begin{aligned}
\left(\int_M \frac{|u|^{2^\star(s)}}{d_g(x,x_0)^s}dv_g\right)^{\frac{2}{2^\star(s)}} &\leq (K(n,s)+\frac{\epsilon}{2})(1+\epsilon_0)\|\nabla u\|_2^2 + B_\epsilon\|u\|_2^2 \\
&\leq (K(n,s)+\epsilon)\int_M |\nabla u|_g^2 dv_g + B_\epsilon\int_M |u|^2 dv_g,
\end{aligned}
$$

avec

$$
B_\epsilon = \left(\frac{(NH)^2}{\epsilon_0} + NH^2\right)(K(n,s)+\frac{\epsilon}{2}). \tag{1.2.22}
$$

Ceci termine l'étape (IV).

Vème étape : Soit maintenant $u \in H_1^2(M)$. M étant compact donc $C^\infty(M)$ est partout dense dans $(H_1^2(M), \|\cdot\|_{H_1^2(M)})$. Il s'ensuit qu'il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $C^\infty(M)$ vérifiant l'inégalité (1.2.16) qui converge vers u pour la norme $\|\cdot\|_{H_1^2(M)}$. Avec les mêmes arguments de densité utilisés dans la preuve de la Propositon 1.1.3, on démontre que u vérifie aussi l'inégalité (1.2.16). D'où le résultat. $\square$

1.2.4 Preuve (ii) du Théorème.

Afin d'achever la preuve du Théorème 1.2.1, on démontre en suivant Hebey [28] (voir Proposition 5.3.2) que $A_0(M,g,x_0,s) \geq K(n,s)$.

Pour cela, soit $A \in \mathbb{R}$ tel qu'il existe $B_A > 0$ vérifiant pour tout $u \in H_1^2(M)$ que

$$\|u\|^2_{2^*(s),s} \leq A \int_M |\nabla u|^2_g dv_g + B_A \int_M u^2 dv_g. \tag{1.2.23}$$

Soit $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tel que $\mathrm{Supp}(\phi) \subset \mathbb{B}_R(0)$, avec $R > 0$. On considère $(\mathbb{B}_{\rho_0}(x_0), \exp_{x_0}^{-1})$ une carte exponentielle centrée en x_0 et de rayon ρ_0 et $(\phi_\mu)_{\mu>0}$ la suite dans $C^\infty(M)$ définie pour tout $0 < \mu$ suffisamment petit ($\mu \leq \frac{\rho_0}{R}$), par :

$$\phi_\mu(x) = \phi(\mu^{-1} \exp_{x_0}^{-1}(x)).$$

En appliquant l'inégalité (1.2.23) sur la suite $(\phi_\mu)_{\mu>0}$, on peut écrire :

$$\|\phi_\mu\|^2_{2^*(s),s} \leq A \int_M |\nabla \phi_\mu|^2_g dv_g + B_A \int_M \phi_\mu^2 dv_g. \tag{1.2.24}$$

Soit $\epsilon > 0$. Par critère de compacité, il existe $R_\epsilon > 0$ tel que pour tout $p \in \mathbb{B}_{R_\epsilon}(0) \subset \mathbb{R}^n$, on a :

$$(1-\epsilon)\delta \leq (\exp_{x_0}^* g)(p) \leq (1+\epsilon)\delta.$$

Puisque $\lim_{\mu\to 0} R\mu = 0$, donc pour cet $R_\epsilon > 0$, il existe $\mu_0(\epsilon)$ tel que pour tout $\mu < \mu_0(\epsilon)$, on a : $R\mu < R_\epsilon$. Alors quitte à faire le changement de variable $X = \mu^{-1}\exp_{x_0}^{-1}(x)$ et

$$dv_{(\exp_{x_0}^{-1})^*\delta} = d(\exp_{x_0}(\mu X)) = \mu^n dX$$

alors pour tout $\mu < \mu_0(\epsilon)$, on peut écrire :

$$\begin{aligned}
\|\phi_\mu\|^2_{2^*(s),s} &= \left(\int_{\mathbb{B}_{\mu R}(x_0)} \frac{|\phi_\mu|^{2^\star(s)}}{d_g(x,x_0)^s} dv_g \right)^{\frac{2}{2^\star(s)}} \\
&\geq (1-\epsilon)^{\frac{n}{2^\star(s)}} \left(\int_{\mathbb{B}_{\mu R}(x_0)} \frac{\phi^{2^\star(s)}(\mu^{-1}\exp_{x_0}^{-1}(x))}{d_g(x,x_0)^s} dv_{(\exp_{x_0}^{-1})^*\delta} \right)^{\frac{2}{2^\star(s)}} \\
&= (1-\epsilon)^{\frac{n}{2^\star(s)}} \left(\int_{\mathbb{B}_R(0)} \frac{\phi^{2^\star(s)}(X)}{|\mu X|^s} \mu^n dX \right)^{\frac{2}{2^\star(s)}} \\
&= \mu^{n-2}(1-\epsilon)^{\frac{n}{2^\star(s)}} \left(\int_{\mathbb{B}_R(0)} \frac{\phi^{2^\star(s)}(X)}{|X|^s} dX \right)^{\frac{2}{2^\star(s)}}
\end{aligned} \tag{1.2.25}$$

et

$$\begin{aligned}
\int_M |\nabla \phi_\mu|^2_g dv_g &= \int_{\mathbb{B}_{\mu R}(x_0)} |\nabla \phi(\mu^{-1}\exp_{x_0}^{-1}(x))|^2_g dv_g \\
&\leq (1+\epsilon)^{\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{B}_{\mu R}(x_0)} |\nabla \phi(\mu^{-1}\exp_{x_0}^{-1}(x))|^2_{(\exp_{x_0}^{-1})^*\delta} dv_{(\exp_{x_0}^{-1})^*\delta} \\
&= \frac{(1+\epsilon)^{\frac{n}{2}}}{1-\epsilon} \mu^{n-2} \int_{\mathbb{B}_R(0)} |\nabla \phi|^2_\delta dX
\end{aligned} \tag{1.2.26}$$

Avec les mêmes arguments, on démontre que

$$\int_M \phi_\mu^2 dv_g \leq (1+\epsilon)^{\frac{n}{2}} \mu^n \int_{\mathbb{B}_R(0)} \phi^2 dX. \tag{1.2.27}$$

En combinant (1.2.25), (1.2.26) et (1.2.27) avec (1.2.24), on aura pour tous $\epsilon > 0, \mu < \mu_0(\epsilon)$ que :

$$\begin{aligned}\left(\int_{\mathbb{B}_R(0)} \frac{\phi^{2^\star(s)}(X)}{|X|^s} dX\right)^{\frac{2}{2^\star(s)}} \leq & \frac{(1+\epsilon)^{\frac{n}{2}}}{(1-\epsilon)^{\frac{n}{2^\star(s)}}} \left[\frac{A}{(1-\epsilon)} \int_{\mathbb{B}_R(0)} |\nabla\phi|_\delta^2 dX \right.\\ & \left. +\mu^2 B_A \int_{\mathbb{B}_R(0)} \phi^2 dX\right] \end{aligned} \tag{1.2.28}$$

Quand $\epsilon \to 0$ et $\mu \to 0$, on obtient :

$$\left(\int_{\mathbb{B}_R(0)} \frac{\phi^{2^\star(s)}(X)}{|X|^s} dX\right)^{\frac{2}{2^\star(s)}} \leq A \int_{\mathbb{B}_R(0)} |\nabla\phi|_\delta^2 dX.$$

Il s'ensuit, d'après la définition de $K(n,s)$, que $K(n,s) \leq A$. La définition de $A_0(M,g,x_0,s)$ implique que $K(n,s) \leq A_0(M,g,x_0,s)$ mais d'après la Proposition 1.2.1, on a que $A_0(M,g,x_0,s) \geq K(n,s)$. D'où $A_0(M,g,s,x_0) = K(n,s)$. $\square$

Le Théorème 1.2.1 suggère deux remarques :

Remarque 1 : *(Indépendance de la géométrie)* D'après le Théorème 1.2.1, on a que la première meilleure constante $A_0(M,g,s,x_0)$ des inégalités de Hardy-Sobolev Riemanniennes est $K(n,s)$ qui est celle dans le cas Euclidien. Donc $A_0(M,g,s,x_0)$ est indépendant de la géométrie de la variété (M,g).

Remarque 2 : (*Cas* $\epsilon = 0$). Proposition 1.2.1 ne permet pas de conclure si $A_0(M,g,s,x_0)$ est atteinte ou non, c.à.d. si on peut prendre $\epsilon = 0$ dans (1.2.16). En effet, suivant les arguments de la preuve de la proposition : quand $\epsilon \to 0$, $r_m \to 0$, et par conséquence $H \geq |\nabla \eta_m^{\frac{1}{2}}|_g \to +\infty$. Ceci implique que $\lim_{\epsilon\to 0} B_\epsilon = +\infty$. Pour démontrer que $K(n,s)$ est atteinte, nous aurons besoin d'utiliser des techniques différents et de l'analyse du "Blow-up". Ce qui fait l'objectif du chapitre 6.

Chapitre 2

Solutions pour l'équation de Hardy-Sobolev.

Soient (M,g) une variété Riemannienne compacte de dimension $n \geq 3$, $x_0 \in M$, $s \in]0,2[$ et $2^\star(s) := 2(n-s)/n-2$ l'exposant critique des inclusions de Hardy-Sobolev. On considère $a \in C^0(M)$ et on définit sur $H_1^2(M)$ la fonctionnelle I et, pour tout $q \in [2, 2^\star(s)]$, la fonctionnelle J_q par

$$I(u) := \int_M \left(|\nabla u|^2 + au^2 \right) dv_g \tag{2.0.1}$$

et si $u \not\equiv 0$, on pose

$$J_q(u) := I(u) \cdot \left(\int_M \frac{|u|^q}{d_g(x,x_0)^s} dv_g \right)^{-\frac{2}{q}}. \tag{2.0.2}$$

On définit, pour tout $q \in [2, 2^\star(s)]$, l'ensemble $\mathcal{H}_q$ par

$$\mathcal{H}_q := \left\{ u \in H_1^2(M) \; ; \; \int_M \frac{|u|^q}{d_g(x,x_0)^s} dv_g = 1 \right\} \tag{2.0.3}$$

et

$$\lambda_q := \inf\{I(u); u \in \mathcal{H}_q\} = \inf\{J_q(u); u \in H_1^2(M) \setminus \{0\}\}. \tag{2.0.4}$$

On note

$$D(M) := \ \mathrm{diam}(M) := \sup\{d_g(x,y); x,y \in M\}.$$

Proposition 2.0.2 *Pour tout $q \in [2, 2^*(s)]$, on a : $\mathcal{H}_q \neq \phi$ et λ_q est fini.*

Preuve de la proposition 2.0.2 : On pose $u_0 \equiv 1$. On a donc $u_0 \in H_1^2(M)$, car M est compact. D'autre part, puisque $\frac{n}{s} > 1$ donc l'application $x \in M \setminus \{x_0\} \mapsto d_g(x,x_0)^{-s}$ est dans $L^1(M)$. En posant que $u_1(x) = u_0(x) / \left(\int_M d_g(x,x_0)^{-s} dv_g \right)^{\frac{1}{2^*(s)}}$, on aura ensuite $\int_M \frac{u_1^{2^*(s)}(x)}{d_g(x,x_0)^s} dv_g = 1$. D'où $u_1 \in \mathcal{H}_{2^\star(s)}$. Avec les mêmes arguments, on montre que, pour tout $q \in [2, 2^*(s)[$, $\mathcal{H}_q \neq \phi$.

Maintenant, pour tout $u \in \mathcal{H}_q$ on a :

$$\begin{aligned}
\int_M u^2 dv_g &\leq \left(\int_M |u|^q dv_g\right)^{\frac{2}{q}} \cdot vol_g(M)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq D_1 \left(\int_M \frac{|u|^q}{d_g(x,x_0)^s} dv_g\right)^{\frac{2}{q}} \cdot vol_g(M)^{\frac{1}{p}} \\
&= D_1 vol_g(M)^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

avec $D_1 = D(M)^{\frac{2s}{q}}$ et $p = \frac{2q}{q-2}$. Donc, pour tout $u \in \mathcal{H}_q$, on a

$$\left|\int_M au^2 dv_g\right| \leq \|a\|_\infty D_1 vol_g(M)^{\frac{1}{p}}.$$

Par suite, pour tout $u \in \mathcal{H}_q$

$$I(u) \geq -\|a\|_\infty D_1 vol_g(M)^{\frac{1}{p}}. \tag{2.0.5}$$

D'où

$$\lambda_q \geq -\|a\|_\infty D_1 vol_g(M)^p > -\infty.$$

D'autre part, on a :

$$J_q(1) = \frac{\int_M a dv_g}{\left(\int_M d_g(x,x_0)^{-s} dv_g\right)^{\frac{2}{q}}} \leq \frac{\|a\|_\infty \times vol_g(M)}{\left(\int_M d_g(x,x_0)^{-s} dv_g\right)^{\frac{2}{q}}} < +\infty.$$

D'où le résultat. $\square$

Dorénavant, on note $\lambda := \lambda_{2^\star(s)}$ et $\mathcal{H} := \mathcal{H}_{2^\star(s)}$.

2.1 Théorème général d'existence

Théorème 2.1.1 *Soient (M,g) une variété Riemannienne compacte de dimension $n \geq 3$, $x_0 \in M$, $s \in]0,2[$ et $2^\star(s) := \frac{2(n-s)}{n-2}$ l'exposant critique des inclusions de Hardy-Sobolev. Soit $a \in C^0(M)$ telle que $\Delta_g + a$ est coercif, $\Delta_g := -div_g(\nabla)$. Si*

$$\inf_{v \in C^\infty(M)\setminus\{0\}} J(v) < K(n,s)^{-1} \tag{2.1.6}$$

Alors il existe une fonction $u \in H_1^2(M) \setminus \{0\} \cap C^0(M)$, $u > 0$ et est une solution faible de l'équation critique de Hardy-Sobolev

$$\Delta_g u + au = \lambda \frac{u^{2^\star(s)-1}}{d_g(x,x_0)^s}. \tag{2.1.7}$$

De plus, u réalise λ (i.e. $I(u) = \lambda$ et $\int_M \frac{|u|^{2^\star(s)}}{d_g(x,x_0)^s} dv_g = 1$) et $u \in C^{0,\theta}(M) \cap C^{1,\alpha}_{loc}(M \setminus \{x_0\})$ pour tous $\theta \in]0, \min\{1, 2-s\}[$ et $\alpha \in]0,1[$.

L'existence d'un minimiseur de J dans $H_1^2(M) \setminus \{0\}$ a été indépendamment démontrée par Thiam [50].

2.2 Preuve du Théorème

Comme dans le problème de Yamabe (voir Yamabe [52] et Aubin [2]), toute la difficulté provient de la manque de compacité pour l'inclusion de Hardy-Sobolev critique $H_1^2(M) \hookrightarrow L^{2^\star(s)}\left(M, \frac{dv_g}{d_g(x,x_0)^s}\right)$. Pour résoudre le problème, on passe aux équations sous-critiques pour trouver une solution en se servant de la compacité des inclusions sous-critique de Hardy-Sobolev (voir Théorème 1.1.2) puis on fait converger la suite des solutions sous-critiques vers une solution de l'équation critique (2.1.7). L'hypothèse (2.1.6) assure la non-trivialité de la solution. Nous suivons la méthode de minimization d'Aubin de l'article [2] pour la preuve du Théorème 2.1.1.

2.2.1 Preuve (i) : Existence d'une solution faible u pour l'équation critique de Hardy-Sobolev.

2.2.1.1 Ière étape : Solutions pour les équations sous-critique de Hardy-Sobolev.

Dans le Théorème suivant, l'inclusion compacte $H_1^2(M) \hookrightarrow L^q\left(M, \frac{dv_g}{d_g(x,x_0)^s}\right)$, pour tout $q \in]2, 2^\star(s)[$, donnée par le Théorème de Rellich-Kondrakov (Théorème 1.1.2) sera le moteur qui fait fonctionner la preuve.

Théorème 2.2.1 *Pour tout $q \in]2, 2^*(s)[$, il existe une fonction $u_q \in H_1^2(M) \setminus \{0\} \bigcap \mathcal{H}_q$ positive p.p. sur M et est une solution faible de l'équation sous-critique de Hardy-Sobolev :*

$$\Delta_g u + au = \lambda_q \frac{u^{q-1}}{d_g(x,x_0)^s}, \tag{2.2.8}$$

où $\mathcal{H}_q = \{u \in H_1^2(M),\ \int_M \frac{|u|^q}{d_g(x,x_0)^s} dv_g = 1.\}$ En plus, u_q réalise λ_q (i.e. $\lambda_q = I(u_q)$).

Preuve du Théorème sous-critique 2.2.1 : Soit $q \in]2, 2^*(s)[$ fixé. On considère une suite minimisante $(v_i)_{i\in\mathbb{N}}$ dans $\mathcal{H}_q$ pour la fonctionnelle I, i.e. une suite des fonctions dans $\mathcal{H}_q$ qui vérifie $\lim_{i\to+\infty} I(v_i) = \lambda_q$. On procède maintenant par étapes.

Étape I.1 : On démontre qu'il existe $u_q \in H_1^2(M) \cap \mathcal{H}_q$, $u_q \geq 0$ p.p. sur M et il existe une sous-suite $(v_i)_{i\in L'}$ de $(v_i)_{i\in L}$, $L' \simeq \mathbb{N}$ telles que
(a) La suite $(v_i)_i$ converge faiblement vers u_q dans $H_1^2(M)$,
(b) La suite $(v_i)_i$ converge fortement vers u_q dans $L^2(M)$.
(c) La suite $(v_i)_i$ converge vers u_q p.p. sur M.

En effet, puisque $\lim_{i\to+\infty} I(v_i) = \lambda_q$, donc il existe $i_0 \in L$ tel que pour tout $i \geq i_0$, on a : $|I(v_i) - \lambda_q| < 1$. Par suite, pour tout $i \geq i_0$, on a :

$$I(v_i) < 1 + \lambda_q. \tag{2.2.9}$$

Montrons d'abord que la suite $(v_i)_i$ est bornée dans $H_1^2(M)$. En effet, puisque les v_i sont dans $\mathcal{H}_q$, on tire donc avec l'inégalité de Hölder que $\int_M v_i^2 dv_g \leq D_1 \times vol_g(M)^{1/p}$, avec $D_1 = D(M)^{\frac{2s}{q}}, p = \frac{2q}{q-2}$. Par suite, on a

$$\|v_i\|_2^2 \leq D_1^{1/2} \times vol_g(M)^{1/2p}. \tag{2.2.10}$$

De (2.2.9), (2.2.10) et de la définition de I, on tire que

$$\begin{aligned} \|\nabla v_i\|_2^2 &= \int_M |\nabla v_i|_g^2 dv_g = I(v_i) - \int_M a v_i^2 dv_g \\ &\leq 1 + \lambda_q + \|a\|_\infty D_1 vol_g(M)^{1/p}. \end{aligned} \tag{2.2.11}$$

Donc la suite $(|\nabla v_i|)_i$ est bornée dans $L^2(M)$. D'où la suite $(v_i)_i$ est bornée dans $H_1^2(M)$.

L'espace $(H_1^2(M), \|\cdot\|_{H_1^2(M)})$ étant réflexif, et puisque les v_i sont bornées dans $H_1^2(M)$ donc d'après le théorème de Kakutani-Banach, il existe une sous-suite $(v_i)_{i\in L'''}$ de $(v_i)_{i\in L}$, $L''' \simeq \mathbb{N}$ et $u_q \in H_1^2(M)$ telles que la suite $(v_i)_{i\in L'''}$ converge faiblement dans $H_1^2(M)$ vers u_q quand $i \to +\infty$.

Or la suite $(v_i)_{i\in L'''}$ est bornée dans $H_1^2(M)$, donc d'après le théorème de Rellich-Kondrakov, il existe une sous-suite $(v_i)_{i\in L''}$ de $(v_i)_{i\in L}$, $L'' \subseteq L''', L'' \simeq \mathbb{N}$ et $u'_q \in H_1^2(M)$ telles que la suite $(v_i)_{i\in L''}$ converge fortement dans $L^2(M)$ vers u'_q quand $i \to +\infty$. Démontrons que $u_q = u'_q$. En effet, on a que $H_1^2(M) \hookrightarrow L^2(M)$ continuement, donc $(L^2(M))' \subset (H_1^2(M))'$ i.e. toute forme linéaire continue sur $L^2(M)$ est aussi une forme linéaire continue sur $H_1^2(M)$. Puisque la suite $(v_i)_{i\in L''}$ converge faiblement vers u_q dans $H_1^2(M)$ donc, pour tout $\beta \in (L^2(M))' \subset (H_1^2(M))'$, $\beta(v_i) \xrightarrow{i\to+\infty} \beta(u_q)$. Par suite, $(v_i)_{i\in L''}$ converge faiblement vers u_q dans $L^2(M)$. D'autre part, $(v_i)_{i\in L''}$ converge fortement vers u'_q dans $L^2(M)$, donc elle converge vers u'_q faiblement dans $L^2(M)$. L'unicité de la limite faible implique que $u_q = u'_q$.

Le point **(c)** est dû au fait que la convergence forte dans les espaces L^p entraîne la convergence p.p. à extraction près d'une sous-suite. D'où il existe une sous-suite $(v_i)_{i\in L'}$ de $(v_i)_{i\in L''}$, $L' \subseteq L'', L' \simeq \mathbb{N}$ vérifiant a), b) et c).
Puisque, pour tout i, on a que $I_q(v_i) = I_q(|v_i|)$, donc on pourra supposer que les v_i sont tous positives ou nulles p.p. Avec **(c)**, on tire ensuite que u_q est positive ou nulle p.p. sur M. Ceci termine l'étape (I.1) de la preuve du Théorème sous-critique 2.2.1.

Étape I.2 : On démontre que $u_q \in \mathcal{H}_q$ et que $I(u_q) = \lambda_q$.

Puisque $(v_i)_i$ converge faiblement vers u_q dans $H_1^2(M)$, donc on a

$$\|u_q\|_{H_1^2(M)} \leq \liminf_{i\to+\infty} \|v_i\|_{H_1^2(M)}.$$

Par suite,

$$\int_M u_q^2 dv_g + \int_M |\nabla u_q|^2 dv_g \leq \liminf_{i\to+\infty} \left(\int_M v_i^2 dv_g + \int_M |\nabla v_i|^2 dv_g \right),$$

mais d'après **(b)**, on a :

$$\lim_{i\to+\infty} \int_M (v_i^2 - u_q^2) dv_g = 0$$

donc

$$\int_M |\nabla u_q|^2 dv_g \leq \liminf_{i\to+\infty} \int_M |\nabla v_i|^2 dv_g.$$

Comme $\int_M a(v_i^2 - u_q^2) dv_g \xrightarrow{i\to+\infty} 0$, on tire ensuite que

$$I(u_q) \leq \lim_{i\to+\infty} I(v_i) = \lambda_q. \tag{2.2.12}$$

D'après le Théorème de Rellich-Kondrakov 1.1.2, on a pour tout $s \in]0,2[$ et tout $p < 2^*(s)$, l'inclusion compacte $H_1^2(M) \hookrightarrow L^q(M, \frac{dv_g}{d_g(x,x_0)^s})$. Or $q < 2^*(s)$ donc il existe une sous suite $(v_{i_t})_{t\in\mathbb{N}}$ de $(v_i)_{i\in L'}, i_t \in L'$ telle que

$$(v_{i_t})_t \xrightarrow{t\to+\infty} u_q \quad \text{dans } L^q(M, \frac{dv_g}{d_g(x,x_0)^s}).$$

On a alors

$$\begin{array}{rcl} |\|v_{i_t}\|_{q,s} - \|u_q\|_{q,s}| & \leq & \|v_{i_t} - u_q\|_{q,s} \\ & & \xrightarrow{t\to+\infty} 0. \end{array}$$

Par suite, $\|u_q\|_{q,s} = 1$. D'où $u_q \in \mathcal{H}_q$.
Avec la définition de λ_q et (2.2.12), on en déduit que $I(u_q) = \lambda_q$. Ceci termine l'étape (I.2) de la preuve du Théorème sous-critique 2.2.1.

Étape I.3 : On démontre que u_q est une solution faible de l'équation (2.2.8). Pour cela, soit

$$\begin{array}{rcl} f : H_1^2(M) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \psi & \longmapsto & \frac{1}{2}\left(\int_M |\nabla\psi|_g^2 dv_g + \int_M a\psi^2 dv_g\right). \end{array}$$

f est une fonction différentiable. En effet,

$$f = \frac{1}{2}(f_1 + f_2), \quad f_i(\psi) = L_i(\psi,\psi), i = 1,2$$

L_1, L_2 étant les fonctions définies par :

$$\begin{array}{rcl} L_1 : (\psi,\phi) \in H_1^2(M) & \mapsto & \int_M (\nabla\psi, \nabla\phi)_g dv_g \\ L_2 : (\psi,\phi) \in H_1^2(M) & \mapsto & \int_M a\psi\phi dv_g. \end{array}$$

On donne encore la fonction Φ_q définie par :

$$\begin{array}{rcl} \Phi_q : H_1^2(M) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \psi & \longmapsto & \Phi_q(\psi) = \frac{1}{q}\int_M \frac{|\psi|^q(x)}{d_g(x,x_0)^s} dv_g. \end{array}$$

La fonction Φ_q est de classe C^1 sur $H_1^2(M)$ et sa différentielle est définie pour tout $\psi \in H_1^2(M)$ par :

$$\begin{array}{rcl} d\Phi_q(\psi) : H_1^2(M) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \eta & \longmapsto & d\Phi_q(\psi)\eta = \int_M \frac{\eta(x)\psi(x)|\psi|^{q-2}(x)}{d_g(x,x_0)^s} dv_g. \end{array}$$

(voir **Appendice III**).
D'autre part, si $\varrho_q = \frac{1}{q}$, alors $\Phi_q^{-1}(\varrho_q) = \mathcal{H}_q$. Or on a déjà démontré que $I(u_q) = \lambda_q$,

par suite f atteint son minimum sur $\mathcal{H}_q = \Phi_q^{-1}(\varrho)$, en u_q. $d\Phi_q(u_q)$ est une application surjective car $d\Phi(u_q)u_q = 1$. En plus on a que :

$$df(u_q) : \eta \in H_1^2(M) \mapsto \int_M ((\nabla u_q, \nabla \eta)_g + a\psi\eta)\, dv_g.$$

En appliquant le théorème des multiplicateurs de Lagrange, on sait qu'il existe un réel α tel que pour tout $\psi \in H_1^2(M)$ on a,

$$df(u_q)\psi = \alpha d\Phi_q(u_q)\psi,$$

Donc

$$\int_M (\nabla u_q; \nabla \psi)_g dv_g + \int_M a u_q \psi dv_g = \alpha \int_M \frac{|u_q|^{q-2} u_q \eta}{d_g(x, x_0)^s} dv_g.$$

En prenant $\psi = u_q$ dans la relation ci-dessus on voit que $\alpha = \lambda_q$ (rappelons que $\int_M \frac{|u_q|^q}{d_g(x,x_0)^s} dv_g = 1$). Par suite, u_q est une solution faible de l'équation

$$\Delta_g u + au = \lambda_q \frac{u^{q-1}}{d_g(x, x_0)^s}.$$

Notons finalement que $u_q \not\equiv 0$, car $\|u_q\|_{q,s} = 1$. Ceci termine l'étape (I.3) de la preuve du Théorème sous-critique 2.2.1.

2.2.1.2 IIème étape : Passage à la limite.

On démontre dans cette étape qu'il existe une sous-suite $(u_{q_i})_{i \in \mathbb{N}}$ de $(u_q)_{q \in]2, 2^\star(s)[}$ qui converge faiblement vers une solution faible $u \not\equiv 0$ de (2.1.7) dans $H_1^2(M)$ réalisant λ. Notons que la coercivité de l'opérateur $\Delta_g + a$ implique la positivité de la fonctionnelle J. D'où $\lambda = \inf_{v \in H_1^2(M) \setminus \{0\}} J(v) \geq 0$. Nous procédons par étapes.

Étape II.1 : On démontre que que pout tout $u \in H_1^2(M), u \neq 0$ on a :

$$\lim_{q \to 2^*(s)} J_q(u) = J(u). \tag{2.2.13}$$

Pour cela, on considère la suite des fonctions $(U_q)_q$ définies pour tout q par $U_q(x) = \frac{|u|^q(x)}{d_g(x,x_0)^s}$. Pour tout q, les U_q sont mesurables et sont dominées par la fonction U définie par :

$$U(x) = \begin{cases} u^2 d_g(x, x_0)^{-s} & \text{si } u \leq 1 \quad , \\ \\ u^{2^*(s)} d_g(x, x_0)^{-s} & \text{si } \ u \geq 1. \end{cases}$$

En utilisant le Théorème de convergence dominée de Lebesgue, on tire ensuite (2.2.13). Par suite, pour $\epsilon > 0$ il existe, d'après la définition de λ, $u \in H_1^2(M) \setminus \{0\}$ telle que $J(u) \leq \lambda + \epsilon$. Donc on a :

$$\lambda + \epsilon \geq \lim_{q \to 2^*(s)} J_q(u).$$

Ceci implique qu'il existe $q_0 \in]2, 2^\star(s)[$ tel que pour tout $q > q_0$, on a :

$$\lambda + 2\epsilon \geq J_q(u) \geq \lambda_q.$$

Par suite, ona
$$\lambda + 2\epsilon \geq \limsup_{q \to 2^\star(s)} \lambda_q.$$
Mais ϵ est quelquonque, d'où
$$\limsup_{q \to 2^*(s)} \lambda_q \leq \lambda. \tag{2.2.14}$$
Réciproquement, on sait que les u_q réalisent les λ_q, i.e.
$$I(u_q) = \lambda_q$$
donc en écrivant
$$\frac{I(u_q)}{\|u_q\|^2_{2^*(s),s}} \times \|u_q\|^2_{2^*(s),s} = \lambda_q,$$
on obtient
$$\inf_{v \in H_1^2(M) \setminus \{0\}} \left\{ \frac{I(v)}{\|v\|^2_{2^*(s),s}} \right\} \times \|u_q\|^2_{2^*(s),s} \leq \lambda_q,$$
d'où
$$\lambda \|u_q\|^2_{2^*(s),s} \leq \lambda_q.$$
Et alors
$$\liminf_{q \to 2^*(s)} \lambda_q \geq \lambda \liminf_{q \to 2^*(s)} \|u_q\|^2_{2^*(s),s}. \tag{2.2.15}$$
Reste à démontrer que $\liminf_{q \to 2^*(s)} \|u_q\|_{2^*(s),s} \geq 1$. En effet, on a que $q < 2^*(s)$, donc avec l'inégalité de Hölder, on peut écrire :
$$\|u_q\|_{q,s} \leq \|u_q\|_{2^*(s),s} \times \|1\|_{\frac{2^*(s)q}{2^*(s)-q},s}.$$
Or pour tout $q \in]2, 2^*(s)[$, on a : $\|u_q\|_{q,s} = 1$. Donc pour tout $q \in]2, 2^*(s)[$, on peut écrire que
$$1 = \int_M \frac{|u|^q}{d_g(x, x_0)^s} dv_g \leq \|u_q\|_{2^*(s),s} \times \left(\int_M d_g(x, x_0)^{-s} dv_g \right)^{1 - \frac{q}{2^*(s)}}.$$
Par suite on a
$$\liminf_{q \to 2^*(s)} \|u_q\|_{2^*(s),s} \geq 1.$$
Il s'ensuit de (2.2.14) et (2.2.15) que $\lambda_q \xrightarrow{q \to 2^\star(s)} \lambda$. Ceci termine l'étape (II.1) de la preuve du Théorème sous-critique 2.2.1.

Étape II.2 : On démontre qu'il existe $u \in H_1^2(M), u \geq 0$ p.p. et une suite $(q_i)_i \subset]2, 2^*(s)[$, qui tend vers $2^*(s)$ lorsque $i \to +\infty$, telles que
(a) La suite $(u_{q_i})_i$ converge faiblement vers u dans $H_1^2(M)$,
(b) La suite $(u_{q_i})_i$ converge fortement vers u dans $L^2(M)$,
(c) La suite $(u_{q_i})_i$ converge p.p. vers u,
(d) La suite $(u_{q_i}^{q_i - 1})_i$ converge faiblement vers $u^{2^*(s)-1}$ dans $L^{\frac{2^*(s)}{2^*(s)-1}}(\frac{dv_g}{d_g(x,x_0)^s})$.

Tout d'abord, on démontre que la suite $(u_q)_q$ est bornée dans $H_1^2(M)$ indépendament de q.

En effet, on tire avec les inégalités de Hölder que pour tout $q \in]2, 2^\star(s)[$:

$$\left(\int_M u_q^2 dv_g\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_M |u_q|^q dv_g\right)^{\frac{1}{q}} \times \|1\|_{\frac{2q}{q-2}} \leq \operatorname{diam}(M)^{\frac{s}{q}} \times vol_g(M)^{\frac{q-2}{2q}}.$$

et on a aussi :

$$\|u_q\|^2_{H_1^2(M)} = \int_M |\nabla u_q|^2 dv_g + \int_M u_q^2 dv_g.$$

Or u_q réalise λ_q i.e. $I(u_q) = \lambda_q$, donc

$$\|u_q\|^2_{H_1^2(M)} = \lambda_q + \int_M (1-a) u_q^2 dv_g.$$

D'après la définition de λ_q, on tire que

$$\lambda_q \leq J_q(1) = I(1)/\|1\|^2_{q,s} \leq \frac{\int_M a dv_g}{(\int_M \frac{dv_g}{d_g(x,x_0)^s})^{\frac{2}{q}}}.$$

Il s'ensuit que :

$$\|u_q\|^2_{H_1^2(M)} \leq \frac{\|a\|_\infty vol_g(M)}{(\int_M d_g(x,x_0)^{-s} dv_g)^{\frac{2}{q}}} + \|1-a\|_\infty \operatorname{diam}(M)^{\frac{2s}{q}} \times vol_g(M)^{\frac{(q-2)}{q}}. \tag{2.2.16}$$

Cherchons un majorant indépendant de q pour le membre gauche de (2.2.16). Pour cela, on utilise la propriété suivante

$$\forall x \geq 0, \forall 0 < \alpha < \beta, \text{ on a } : x^{\pm\alpha} \leq x^{\pm\beta} + 1, \tag{2.2.17}$$

qu'on démontre en distinguant les cas $x \leq 1$ et $x \geq 1$, pour tirer de (2.2.16) que

$$\begin{aligned} \|u_q\|^2_{H_1^2(M)} \leq & \; \|a\|_\infty vol_g(M) \left[1 + \left(\int_M d_g(x,x_0)^{-s} dv_g\right)^{-1}\right] \\ & + \|1-a\|_\infty \left(1 + \operatorname{diam}(M)^s\right)\left(1 + vol_g(M)\right). \end{aligned}$$

Par suite, la suite $(u_q)_q$ est bornée dans $H_1^2(M)$ indépendament de q. Avec les mêmes arguments utilisés dans l'étape (I.1), on montre les points a), b) et c). Démontrer le point (d) revient à montrer, d'après le le Lemme d'intégration 6.5.1, que :

(d.1) La suite $(u_{q_i}^{q_i-1})_i$ converge p.p. vers $u^{2^*(s)-1}$. Ce qui est vrai d'après (d).

(d.2) La suite $(u_{q_i}^{q_i-1})_i$ est bornée dans $L^{\frac{2^*(s)}{2^*(s)-1}}(M, \frac{dv_g}{d_g(x,x_0)^s})$.

Démontrons (d.2) : En effet, $H_1^2(M) \hookrightarrow L^{2^*(s)}(M, \frac{dv_g}{d_g(x,x_0)^s})$ et la suite $(u_{q_i})_i$ est bornée dans $H_1^2(M)$ indépendament de q donc $(u_{q_i})_i$ est bornée dans $L^{2^*(s)}(M, \frac{dv_g}{d_g(x,x_0)^s})$ indépendament de q. Ceci implique que la suite $(u_{q_i}^{q_i-1})_i$ est bornée dans $L^{\frac{2^*(s)}{q-1}}(M, \frac{dv_g}{d_g(x,x_0)^s})$ indépendament de q. Mais pour tout $q \in]2, 2^*(s)[$ on a :

$$L^{\frac{2^*(s)}{q-1}}(M, \frac{dv_g}{d_g(x,x_0)^s}) \hookrightarrow L^{\frac{2^*(s)}{2^*(s)-1}}(M, \frac{dv_g}{d_g(x,x_0)^s})$$

on tire ensuite, avec la propriété (2.2.17), que $(u_{q_i}^{q_i-1})_i$ est bornée dans $L^{\frac{2^*(s)}{2^*(s)-1}}(\frac{dv_g}{d_g(x,x_0)^s})$ indépendament de q. D'où la proposition (d) est vraie.

Étape II.3 : On démontre que u est une solution faible de (2.1.7).

La preuve est en trois étapes :
i/ On définit pour tout $\phi \in H_1^2(M)$, l'application S_ϕ sur $H_1^2(M)$ par

$$\begin{aligned} S_\phi : H_1^2(M) &\rightarrow \mathbb{R} \\ \psi &\rightarrow \int_M < \nabla\phi; \nabla\psi >_g dv_g. \end{aligned}$$

Il est clair que S_ϕ est une forme linéaire continue sur $H_1^2(M)$. Par suite, de **(a)** on tire que pour tout $\psi \in H_1^2(M)$,

$$\lim_{i\to+\infty} \int_M < \nabla\psi; \nabla u_{q_i} >_g dv_g = \int_M < \nabla\psi; \nabla u >_g dv_g. \tag{2.2.18}$$

ii/ De la même façon on pose que $2^*(s)' = (2^*(s) - 1)/2^*(s)$ et on définit, pour tout $\phi \in H_1^2(M)$, la fonction $\tilde{S}_\phi$ défine sur $L^{2^*(s)'}(M, \frac{dv_g}{d_g(x,x_0)^s})$ par

$$\begin{aligned} \tilde{S}_\phi : L^{2^*(s)'}(\frac{dv_g}{d_g(x,x_0)^s}) &\rightarrow \mathbb{R} \\ \psi &\mapsto \int_M \phi\psi \frac{dv_g}{d_g(x,x_0)^s}. \end{aligned}$$

$\tilde{S}_\phi$ est bien définie, car $H_1^2(M) \subset L^{2^*(s)}(M, \frac{dv_g}{d_g(x,x_0)^s})$ et $1/2^*(s) + 1/2^*(s)' = 1$. Par suite, en utilisant **(d)**, on déduit qu'on a pour tout $\phi \in H_1^2(M)$

$$\lim_{i\to+\infty} \int_M u_{q_i}^{q_i-1}\phi \frac{dv_g}{d_g(x,x_0)^s} = \int_M u^{2^*(s)-1}\phi \frac{dv_g}{d_g(x,x_0)^s}. \tag{2.2.19}$$

iii/ Encore, on définit la forme bilinéaire L sur $H_1^2(M)$ par :

$$\begin{aligned} L : H_1^2(M) \times H_1^2(M) &\rightarrow \mathbb{R} \\ (\phi, \psi) &\rightarrow \int_M a\phi\psi dv_g. \end{aligned}$$

L est bien définie car a est borné sur M. Par suite, on tire avec (b) que pour tout $\phi \in H_1^2(M)$

$$\lim_{i\to+\infty} \int_M a u_{q_i}\phi dv_g = \int_M a u\phi dv_g. \tag{2.2.20}$$

Or les u_{q_i} sont solutions faible de l'équation sous critiques de Hardy-Sobolev, i.e. pour tout $\phi \in H_1^2(M)$

$$\int_M < \nabla\phi; \nabla u_{q_i} >_g dv_g + \int_M a u_{q_i}\phi dv_g = \lambda_{q_i} \int_M u_{q_i}^{q_i-1}\phi \frac{dv_g}{d_g(x,x_0)^s}. \tag{2.2.21}$$

Avec (**??**) de l'étape (II.1) et **i**/, **ii**/, **iii**/, on déduit par passage à la limite quand i tend vers l'infini que :

$$\int_M < \nabla\phi; \nabla u >_g dv_g + \int_M au\phi dv_g = \lambda \int_M u^{2^*(s)-1}\phi \frac{dv_g}{d_g(x,x_0)^s}.$$

D'où u est une solution faible de l'équation (2.1.7).

Étape II.4 : On démontre que u n'est pas identiquement nulle.

En effet, l'hypothèse (2.1.6) implique

$$\lambda K(n,s) < 1. \tag{2.2.22}$$

Donc il existe $\epsilon_0 > 0$ (par exemple, on peut choisir $\epsilon_0 = \frac{\lambda^{-1}-K(n,s)}{2}$) tel que

$$\lambda(K(n,s)+\epsilon_0) < 1. \tag{2.2.23}$$

En utilisant la Proposition 1.2.1, et pour ϵ_0 déjà fixé, on sait qu'il existe une constante $B_{\epsilon_0} > 0$ telle que pour tout $q_i \in]2, 2^*(s)[$ on a :

$$\left(\int_M \frac{|u_{q_i}|^{2^\star(s)}}{d_g(x,x_0)^s} dv_g\right)^{\frac{2}{2^\star(s)}} \leq (K(n,s)+\epsilon_0)\int_M |\nabla u_{q_i}|_g^2 dv_g + B_{\epsilon_0}\int_M u_{q_i}^2 dv_g. \tag{2.2.24}$$

D'autre part, on tire d'après les inégalités de Hölder (1.1.1)

$$\|u_{q_i}\|_{q_i,s} \leq \|u_{q_i}\|_{2^*(s),s} \times \|1\|_{r_i,s}$$

où pour tout i, $r_i = \frac{2^*(s)q_i}{2^*(s)-q_i}$. Or pour tout i, on a que $\|u_{q_i}\|_{q_i,s} = 1$, donc en élevons au carré la dernière inégalité

$$1 \leq \left(\int_M \frac{|u_{q_i}|^{2^\star(s)}}{d_g(x,x_0)^s} dv_g\right)^{\frac{2}{2^\star(s)}} \times \|1\|_{r_i,s}^2. \tag{2.2.25}$$

u_{q_i} étant une solution de l'équation sous-critique (2.2.8) (et minimiseur de I), il s'ensuit de (2.2.25) et (2.2.24) que

$$\begin{aligned} 1 &\leq \|1\|_{r_i,s}^2 \left[(K(n,s)+\epsilon_0)\int_M |\nabla u_{q_i}|_g^2 dv_g + B_{\epsilon_0}\int_M u_{q_i}^2 dv_g\right] \\ &\leq \|1\|_{r_i,s}^2 \left[(K(n,s)+\epsilon_0)(\lambda_{q_i} - \int_M a u_{q_i}^2 dv_g) + B_{\epsilon_0}\int_M u_{q_i}^2 dv_g\right] \\ &\leq \|1\|_{r_i,s}^2 \left[(K(n,s)+\epsilon_0)\lambda_{q_i} + C_{\epsilon_0}\int_M u_{q_i}^2 dv_g\right] \end{aligned} \tag{2.2.26}$$

avec $C_{\epsilon_0} = B_{\epsilon_0} + (K(n,s)+\epsilon_0)\|a\|_\infty$. Quand $i \to +\infty$, $\|1\|_{r_i,s}^2 \to 1$, $\lambda_{q_i} \to \lambda$ et d'après (b), $\int_M u_{q_i}^2 dv_g \to \int_M u^2 dv_g$, Il s'ensuit de (2.2.26) que

$$1 \leq (K(n,s)+\epsilon_0)\lambda + C_{\epsilon_0}\int_M u^2 dv_g. \tag{2.2.27}$$

Si $u \equiv 0$, alors on déduit de (2.2.27) que
$$1 \leq (K(n,s)+\epsilon_0)\lambda.$$
Ceci est en contradiction avec (2.2.23). D'où $u \not\equiv 0$ sur M.

Étape II.5 : On démontre que u est un minimiseur pour J (i.e. u réalise λ), $\lambda > 0$ et que $\int_M u^{2^*(s)} \frac{dv_g}{d_g(x,x_0)^s} = 1$.

En effet, soit $2^\star(s)'$ le conjugué de $2^\star(s)$ (c.à.d. $(2^\star(s)')^{-1} + 2^\star(s)^{-1} = 1$). On définit la forme linéaire et continue
$$\psi \in L^{2^\star(s)'}\left(M, \frac{dv_g}{d_g(x,x_0)^s}\right) \mapsto S_u(\psi) = \int_M u\psi \frac{dv_g}{d_g(x,x_0)^s}.$$
Avec les inégalités de Hölder (1.1.1), on montre que S_u est bien définie et est continue sur $L^{2^\star(s)'}\left(M, \frac{dv_g}{d_g(x,x_0)^s}\right)$. Donc d'après l'étape II.2 (le point (d)), on tire
$$\lim_{i\to+\infty} S_u(u_{q_i}^{q_i-1}) = S_u(u^{2^*(s)-1}),$$
c.à.d.
$$\int_M u^{2^*(s)} \frac{dv_g}{d_g(x,x_0)^s} = \lim_{i\to+\infty} \int_M u_{q_i}^{q_i-1} u \frac{dv_g}{d_g(x,x_0)^s}.$$
Avec les inégalités Hölder (1.1.1), on obtient
$$\int_M u_{q_i}^{q_i-1} u \frac{dv_g}{d_g(x,x_0)^s} \leq \|u_{q_i}^{q_i-1}\|_{q_i',s} \times \|u\|_{q_i,s}$$
où q_i' est le conjugué de q_i. Puisque $\|u_{q_i}\|_{q_i} = 1$, il s'ensuit que
$$\int_M u^{2^*(s)} \frac{dv_g}{d_g(x,x_0)^s} = \lim_{i\to+\infty} \int_M u_{q_i}^{q_i-1} u \frac{dv_g}{d_g(x,x_0)^s} \leq \lim_{i\to+\infty} \|u\|_{q_i,s}.$$
En utilisant le théorème de convergence de Lebesgue, on montre que : $\lim_{i\to+\infty} \|u\|_{q_i,s} = \|u\|_{2^*(s),s}$. (En fait, on considère la suite $v_q = \frac{|u|^q}{d_g(x,x_0)^s}$ qui est intégrable et dominée par la fonction $v = (u^2 \times 1_{u(x)<0} + u^{2^*(s)} \times 1_{u(x)\geq 0}) d_g(x,x_0)^{-s}$ qui elle aussi est intégrable). Les deux dernières relations impliquent $\|u\|_{2^*(s),s}^{2^*(s)} \leq \|u\|_{2^*(s),s}$. D'où
$$\|u\|_{2^*(s),s} \leq 1. \tag{2.2.28}$$
D'autre part, u étant une solution faible de l'équation critique de Hardy-Sobolev (2.1.7), donc en la testant en $\phi = u \in H_1^2(M)$, on obtient
$$\int_M |\nabla u|_g^2 dv_g + \int_M a u^2 dv_g = \lambda \int_M u^{2^*(s)} \frac{dv_g}{d_g(x,x_0)^s},$$
c.à.d.
$$I(u) = \lambda \|u\|_{2^*(s),s}^{2^*(s)}. \tag{2.2.29}$$
Sachant que la coercivité de $\Delta_g + a$ implique que $\int_M (|\nabla u|_g^2 + au^2) dv_g \geq 0$, donc $\lambda \geq 0$. Maintenant si $\lambda = 0$, la relation (2.2.29) implique que $\|u\|_{2^*(s),s} = 0$. Ce qui est faux. La dernière égalité (2.2.29) et (2.2.28) donneront
$$J(u) = \lambda \|u\|_{2^*(s),s}^{2^*(s)-2} \leq \lambda, \tag{2.2.30}$$
D'après la définition de λ, on tire que $J(u) = \lambda$. En simplifiant par λ, l'équation (2.2.30) donnera $\|u\|_{2^*(s),s} = 1$. Ceci termine la Preuve (i) du Théorème 2.1.1.

2.2.2 Preuve (ii) : Régularité des solutions faibles $u \in C^{0,\alpha}$.

On démontre que, pour tout $\alpha \in]0, \min(1, 2-s)[$ et $\beta \in]0, 1[$, $u \in C^{0,\alpha}(M) \cap C^{1,\beta}_{\text{loc}}(M \setminus \{x_0\})$. De plus, s'il existe $\gamma \in]0, 1[$ tel que $a \in C^{0,\gamma}(M)$ alors $u \in C^{2,\gamma}_{\text{loc}}(M \setminus \{x_0\})$.

En effet, on pose $f_u(x) = \lambda |u|^{2^*(s)-1}(x) d_g(x, x_0)^{-s}$. Sachant que

$$\left\{p > 1; \frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} \text{ avec } p_1 < \frac{n}{s}, p_2 > 1\right\} =]1; \frac{n}{s}[$$

on tire donc, avec les inégalités de Hölder, que pour tous $p, p_1 \in]1; \frac{n}{s}[, p_2 > 1$ tels que $p^{-1} = p_1^{-1} + p_2^{-1}$

$$\|f_u\|_p \leq \|d_g(x, x_0)^{-s}\|_{p_1} \times \|u\|_{p_2}. \tag{2.2.31}$$

Puisque $\Delta_g u + au = f_u$, $u \in H_1^2(M) \setminus \{0\}$ et $a \in C^0(M)$, on tire d'après la Proposition 6.3.1 que $u \in L^q(M)$, pour tout $q \geq 1$. La fonction $x \in M \setminus \{x_0\} \mapsto d_g(x, x_0)^{-s}$ étant dans $L^{p_1}(M)$ (car $p_1 < \frac{n}{s}$) et $u \in L^{p_2}(M)$, L'inégalité (2.2.31) impliquent donc que pour tout $1 < p < \frac{n}{s}$, on a $f_u \in L^p(M)$. Il s'ensuit de la Théorie standard des E.D.P. elliptiques (voir [25], voir aussi l'appendice (II), corollaire 6.3.2) que pour tout $\alpha \in]0, \min(1, 2-s)[$: $u \in C^{0,\alpha}(M)$.

D'autre part, puisque $u \in L^q(M)$, pour tout $q \geq 1$. Donc $f_u \in L^q_{\text{loc}}(M \setminus \{x_0\})$, pour tout $q \geq 1$. Puisque $\Delta_g u + au = f_u$, $u \in H_1^2(M) \setminus \{0\}$ et $a \in C^0(M)$, donc, en prenant $q > n$ suffisamment grand, on tire de la Théorie standard des E.D.P. elliptiques (voir [25], voir aussi l'appendice (II), corollaire 6.3.1) que pour tout $\beta \in]0, 1[$, $u \in C^{1,\beta}_{\text{loc}}(M \setminus \{x_0\})$.

Maintenant, s'il existe $\gamma \in]0, 1[$ tel que $a \in C^{0,\gamma}(M)$ alors il en est de même pour $f_u - a$ en dehors de x_0. Il s'ensuit de la Théorie standard des E.D.P. elliptiques (voir [25], Schauder estimates, Théorèmes 6.2 et 6.3) que $u \in C^{2,\gamma}_{\text{loc}}(M \setminus \{x_0\})$. Ceci termine la partie (ii) de la Preuve du Théorème 2.1.1.

2.2.3 Preuve (iii) : Principe du maximum $u > 0$.

On démontre ici que $u > 0$ sur M : en effet, on considère $x_1 \neq x_0$ tel que $\mathbb{B}_{2r}(x_1) \subset\subset M \setminus \{x_0\}$, avec $r > 0$ suffisamment petit et une fonction h définie sur $\mathbb{B}_{2r}(x_1)$ par $h(x) := a(x) - \lambda_{2^\star(s)} \frac{|u(x)|^{2^\star(s)-2}}{d_g(x, x_0)^s}$. On a $h \in C^0(\overline{\mathbb{B}_{2r}(x_1)})$. Puisque $u \in H_1^2(\mathbb{B}_{2r}(x_1)) \cap C^0(M)$, $u \geq 0$ et $(\Delta_g + h)u = 0$ sur $\mathbb{B}_{2r}(x_1)$, il s'ensuit de la Théorie standard des E.D.P. elliptiques (voir [25], Théorème 8.20) qu'il existe $C = C(M, g, x_1, r) > 0$ telle que $\sup_{\mathbb{B}_r(x_1)} u \leq C \inf_{\mathbb{B}_r(x_1)} u$. Ceci implique que $u_{|\mathbb{B}_r(x_1)} > 0$. D'où $u(x) > 0$ pour tout $x \in M \setminus \{x_0\}$.

Il reste à prouver que $u(x_0) > 0$. Supposons par l'absurde que $u(x_0) = 0$. On procède par étapes.

Étape iii.1 : On démontre que u est de classe C^1 en x_0. Pour cela, nous suivons la méthode utilisée dans l'article [23] (voir Proposition 8.1) de Ghoussoub-Robert et inspirée de la stratégie développée dans [51] par Trudinger.

En effet, on a démontré dans l'étape précédente que $u \in C^{0,\alpha}(M)$, pour tout $\alpha \in]0, \min\{1, 2-s\}[$ et puisque $u(x_0) = 0$ donc pour tout $\alpha \in]0, \min\{1, 2-s\}[$, il existe une constante $C_1(\alpha) = C(M, g, \alpha) > 0$ telle que

$$|u(x)| \leq C_1(\alpha) d_g(x, x_0)^\alpha \tag{2.2.32}$$

pour tout $x \in M$. On a

$$\Delta_g u + au = \lambda |u|^{2^*(s)-1}(x) d_g(x,x_0)^{-s} := f_u. \tag{2.2.33}$$

Avec (2.2.32), on a

$$|f_u(x)| \leq \frac{C_2(\alpha)}{d_g(x,x_0)^{s-\alpha(2^\star(s)-1)}} \tag{2.2.34}$$

pour tout $x \in M \setminus \{x_0\}$.

Démontrons que $u \in C^{0,\alpha}(M)$, pour tout $\alpha \in]0,1[$.

En effet, on définit $\alpha_1 := \sup\{\alpha \in]0,1[\ ;\ u \in C^{0,\alpha}(M)\}$ et on pose $N'_s = s - \alpha_1(2^\star(s)-1)$. Quatre cas à distinguer :

- *Cas iii.1.1* $N'_s \leq 0$. Dans ce cas, on considère α suffisamment proche α_1 afin d'obtenir $f_u \in L^p(M)$, pour tout $p \geq 1$. Il s'ensuit de (2.2.33) et de la Théorie standard des E.D.P. elliptiques qu'il existe $\theta \in]0,1[$ tel que $u \in C^{1,\theta}(M)$. Ceci prouve que $\alpha_1 = 1$ dans le cas iii.1.1.
- *Cas iii.1.2* $0 < N'_s < 1$. Dans ce cas, on considère α suffisamment proche de α_1 afin d'obtenir $f_u \in L^p(M)$, pour tout $p < \frac{n}{N'_s}$. Puisque $1 > N'_s$ donc il existe $p \in]n, \frac{n}{N'_s}[$ tel que $f_u \in L^p(M)$. Il s'ensuit de (2.2.33) et de la Théorie standard des E.D.P. elliptiques qu'il existe $\theta \in]0,1[$ such that $u \in C^{1,\theta}(M)$. Ceci prouve que $\alpha_1 = 1$ dans le cas iii.1.2.
- *Cas iii.1.3* $N'_s = 1$. Dans ce cas, on considère α suffisamment proche α_1 afin d'obtenir $f_u \in L^p(M)$, pour tout $p < n$. Ceci implique que pour tout $p \in]\frac{n}{2}, n[$, on a que $f_u \in L^p(M)$. Il s'ensuit de (2.2.33) et de la Théorie standard des E.D.P. elliptiques que pour tout $\theta \in]0,1[$, on a $u \in C^{0,\theta}(M)$. Ceci prouve que $\alpha_1 = 1$ dans le cas iii.1.3.
- *Cas iii.1.4* $N'_s > 1$. Dans ce cas, on considère α suffisamment proche de α_1 afin d'obtenir $f_u \in L^p(M)$, pour tout $p < \frac{n}{N'_s}$. Par suite, l'équation (2.2.33), la Théorie standard des E.D.P. elliptiques et le fait que $N'_s \in]1,2[$ (car $N'_s > 0$ et $s < 2$) impliquent que $u \in C^{0,\theta}(M)$ pour tout $\theta < 2 - N'_s$. De la définition de α_1, on tire que $\alpha_1 \geq 2 - N'_s$. Ceci amène à une contradiction avec la définition N'_s. D'où le cas iii.1.4 n'a pas lieu d'être.

Les quatre cas étudiés ci-dessus impliquent que $u \in C^{0,\alpha}(M)$, pour tout $\alpha \in]0,1[$.

Pour achever l'étape (iii.1), on procède comme ci-dessus et on pose que $N''_s = s - 2^\star(s) + 1$. Deux cas à distinguer :

- *Cas iii.1.5* $N''_s \leq 0$. Dans ce cas, on considère α suffisamment proche 1 afin d'obtenir $f_u \in L^p(M)$, pour tout $p \geq 1$. Il s'ensuit de (2.2.33) et de la Théorie standard des E.D.P. elliptiques que $u \in C^1(M)$, ce qui prouve la proposition de l'étape (iii.1) dans le cas (iii.1.5).
- *Cas iii.1.6* $N''_s > 0$. Dans ce cas, on considère α suffisamment proche 1 afin d'obtenir $f_u \in L^p(M)$ pour tout $p < \frac{n}{N''_s}$. Puisque $1 > N''_s$, il existe donc $p \in]n, \frac{n}{N''_s}[$ tel que $f_u \in L^p(M)$. Il s'ensuit de (2.2.33) et de la Théorie standard des E.D.P. elliptiques que $u \in C^1(M)$. Ce qui prouve la proposition de l'étape (iii.1) dans le cas (iii.1.6).

Ceci termine l'étape (iii.1).

Étape iii.2 : Le but de cette étape est de tirer une contradiction afin de prouver que $u(x_0) > 0$. En effet, en utilisant le fait que $u \in C^1(M)$, nous allons adapter le principe fort du maximum de Hopf moyennant la stratégie de la preuve du Lemme 3.4 dans [25]. Pour cela, on considère $\Omega \subset M \setminus \{x_0\}$ un ouvert de M tel que $x_0 \in \partial\Omega$ et qu'il existe une carte exponentielle $(\mathbb{B}_{2r_y}(y), \exp_y^{-1})$, $y \in \Omega, r_y > 0$ suffisamment petit vérifiant $\mathbb{B}_{r_y}(y) \cap \partial\Omega = \{x_0\}$. On considère maintenant $C \geq \|a\|_\infty > 0$ tel que

$$L_{g,C}(-u) := -(\Delta_g + C)(-u) \geq (\Delta_g + a)(u) \geq 0$$

sur Ω. On fixe $\rho \in]0, r_y[$ et on introduit la fonction v_ρ définie sur la couronne $\mathbb{B}_{r_y}(y)\setminus\mathbb{B}_\rho(y)$ par $v_\rho(x) = e^{-kr^2} - e^{-kr_y^2}$ où $r := d_g(x, y)$ et $k > 0$ à determiner. Maintenant, on désigne par $\lambda(x)$ la plus petite valeur propre de g^{-1}. Sachant que $u > 0$ sur $M \setminus \{x_0\}$, alors on a pour tout $x \in \mathbb{B}_{r_y}(y) \setminus \mathbb{B}_\rho(y)$:

$$L_{g,C}v_\rho(x) \geq e^{-kr^2}\left[4k^2\lambda(x)r^2 - 2k\left(\sum_{i=1}^{n} g^{ii} + \Gamma_0 r\right) - C\right]$$

avec $\Gamma_0 = \Gamma_0(g)$. On choisit k suffisamment grand tel que $L_{g,C}v_\rho \geq 0$ sur $\mathbb{B}_{r_y}(y) \setminus \mathbb{B}_\rho(y)$. Puisque $-u < 0$ sur $\partial\mathbb{B}_\rho(y)$ donc il existe une constante $\epsilon > 0$ tel que $-u + \epsilon v_\rho \leq 0$ sur $\partial\mathbb{B}_\rho(y)$. On a donc : $-u + \epsilon v_\rho \in H_1^2(\mathbb{B}_{r_y}(y) \setminus \mathbb{B}_\rho(y))$, $-u + \epsilon v_\rho \leq 0$ sur $\partial\mathbb{B}_\rho(y) \cup \partial\mathbb{B}_{r_y}(y)$ et $L_{g,C}(-u + \epsilon v_\rho) \geq 0$ sur $\mathbb{B}_{r_y}(y) \setminus \mathbb{B}_\rho(y)$. Il s'ensuit du principe faible du maximum de Hopf (voir Théorème 8.1 dans [25]) que

$$-u + \epsilon v_\rho \leq 0, \quad \text{on } \mathbb{B}_{r_y}(y) \setminus \mathbb{B}_\rho(y) \tag{2.2.35}$$

On définit $\tilde{u} = u \circ \exp_y$ et $\tilde{v}_\rho = v \circ \exp_y$ sur $\mathbb{B}_{r_y}(0) \subseteq \mathbb{R}^n$. Avec (2.2.35), on tire :

$$\epsilon\tilde{v}_\rho \leq \tilde{u}, \quad \text{on } \mathbb{B}_{r_y}(0) \setminus \mathbb{B}_\rho(0) \tag{2.2.36}$$

Soit $X_0 := \exp_y^{-1}(x_0)$ et ν est le vecteur normal sortant sur $\mathbb{B}_{r_y}(0) \subset \mathbb{R}^n$ (c'est le vecteur qui forme avec toute base orthonormale de $T\mathbb{B}_{r_y}(0)$ une base orthonormale directe de $\mathbb{R}^{n+1}$. Puisque $\tilde{u}(X_0) = \tilde{v}_\rho(X_0) = 0$, alors on écrit avec (2.2.36) :

$$\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\nu}(X_0) := \liminf_{t \xrightarrow{t<0} 0} \frac{\tilde{u}(X_0 + t\nu) - \tilde{u}(X_0)}{t} \leq \epsilon \liminf_{t \xrightarrow{t<0} 0} \frac{\tilde{v}_\rho(X_0 + t\nu) - \tilde{v}_\rho(X_0)}{t} := \epsilon\frac{\partial\tilde{v}_\rho}{\partial\nu}(X_0).$$

Par suite, $\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\nu}(X_0) \leq \epsilon\frac{\partial\tilde{v}_\rho}{\partial\nu}(X_0)$. Mais $\frac{\partial\tilde{v}_\rho}{\partial\nu}(x_0) = v_\rho'(R)$, on obtient par conséquence

$$\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\nu}(X_0) \leq \epsilon v_\rho'(r_y) < 0.$$

Ce qui contradit le fait que $\min_M u = u(x_0)$ (ce qui implique $\nabla\tilde{u}(X_0) = 0$ et $\nabla u(x_0) = 0$). Ceci achève la démonstration de l'étape (iii) de la preuve du Théorème. $\square$

Chapitre 3

Fonctions-Tests

Soient (M,g) une variété Riemannienne compacte de dimension $n \geq 3$, $x_0 \in M$, $s \in]0,2[$ et $2^\star(s) := \frac{2(n-s)}{n-2}$ l'exposant critique des inclusions de Hardy-Sobolev. Soit $a \in C^0(M)$ telle que $\Delta_g + a$ est coercif. Nous avons démontré dans le chapitre précédent (voir Théorème 2.1.1) que si

$$\inf_{v \in C^\infty(M)\setminus\{0\}} J(v) < K(n,s)^{-1} \tag{3.0.1}$$

avec

$$J(u) := \frac{\int_M (|\nabla u|_g^2 + au^2)\, dv_g}{\left(\int_M \frac{|u|^{2^\star(s)}}{d_g(x,x_0)^s}\, dv_g\right)^{\frac{2}{2^\star(s)}}} \; ; \; u \in H_1^2(M) \setminus \{0\},$$

alors il existe une solution $u \in C^{0,\theta}(M) \cap C^{1,\alpha}_{loc}(M \setminus \{x_0\}), \theta \in]0, \min\{1, 2-s\}[, \alpha \in]0,1[$ minimisante J pour l'équation critique de Hardy-Sobolev

$$\Delta_g u + au = \lambda \frac{u^{2^\star(s)-1}}{d_g(x,x_0)^s}, \tag{3.0.2}$$

où $\lambda = \inf_{v \in C^\infty(M)\setminus\{0\}} J(v) = J(u)$. Le but de ce chapitre est de tester l'énergie J en une suite des fonctions-tests dans $H_1^2(M)$ inspirée par les extremales $\Phi_{C,\mu}(X) = C(\mu + |X|^{2-s})^{-\frac{n-2}{2-s}}$ des inégalités Euclidiennes de Hardy-Sobolev (voir [39], Théorème 4.3) afin de la comparer avec $K(n,s)^{-1}$ pour tirer une (ou plusieurs) condition(s) d'existence d'une solution pour (3.0.2) en fonction de la géométrie de (M,g).

Pour cela, on considère la fonction Φ définie sur $\mathbb{R}^n$ par :

$$\Phi(X) = (1 + |X|^{2-s})^{-\frac{n-2}{2-s}}. \tag{3.0.3}$$

On sait d'après Lieb[39] que Φ est une fonction extremale pour les inégalités Euclidienne de Hardy-Sobolev

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\varphi|^{2^\star(s)}}{|X|^s} dX\right)^{\frac{2}{2^\star(s)}} \leq K(n,s) \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \varphi|^2 dX, \quad \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Plus précisement, on a :

$$\Delta_\delta \Phi = (n-s)(n-2) \frac{\Phi^{2^\star(s)-1}}{|X|^s}. \tag{3.0.4}$$

Soit la suite $(u_\epsilon)_{\epsilon>0}$ des fonctions-tests définie, pour tous $\epsilon > 0, x \in M$, par

$$u_\epsilon(x) = \left(\frac{\epsilon^{1-\frac{s}{2}}}{\epsilon^{2-s} + d_g(x,x_0)^{2-s}}\right)^{\frac{n-2}{2-s}}. \tag{3.0.5}$$

Proposition 3.0.1 *La suite $(u_\epsilon)_\epsilon$ des fonctions-test définie comme ci-dessus est dans $H_1^2(M)$.*

Preuve de la proposition 3.0.1 : En effet, il suffit de démontrer que pour tout $\epsilon > 0$, u_ϵ est une fonction Lipschitzienne. Pour cela, on pose $\alpha = \frac{n-2}{2-s}, v_\epsilon = \epsilon^{-\frac{n-2}{2}} u_\epsilon$ et $w_\epsilon(x) = \epsilon^{2-s} + d_g(x,x_0)^{2-s}$. On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $h(x) = \frac{1}{x^\alpha}$. Il est clair que $v_\epsilon \leq \frac{1}{\epsilon^{n-2}}$. On pose donc $\varepsilon_0 = \frac{1}{\epsilon^{n-2}}$ et on définit la fonction h_{ε_0} sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\begin{array}{rcl} h_{\varepsilon_0} : \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & h_{\varepsilon_0}(x) = \begin{cases} h(x) & \text{si } h(x) \leq \varepsilon_0 \ , \\ \varepsilon_0 & \text{si } h(x) \geq \varepsilon_0. \end{cases} \end{array}$$

h_{ε_0} est dérivable sur $\mathbb{R}_+^* \setminus \{\epsilon^{2-s}\}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{\epsilon^{2-s}\}$,

$$|h'_{\varepsilon_0}|(x) \leq \alpha \varepsilon^{1+\frac{1}{\alpha}}.$$

Notons que $\max h_{\varepsilon_0} = h_{\varepsilon_0}(\epsilon^{2-s}) = \varepsilon_0$. Soient $x_1, x_2 \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $x_1 < \epsilon^{2-s} < x_2$, on a :

$$\begin{aligned} |h_{\varepsilon_0}(x_1) - h_{\varepsilon_0}(x_2)| &\leq |h_{\varepsilon_0}(x_1) - h_{\varepsilon_0}(\epsilon^{2-s})| + |h_{\varepsilon_0}(\epsilon^{2-s}) - h_{\varepsilon_0}(x_2)| \\ &= \left|\frac{1}{x_1^\alpha} - \varepsilon_0\right| + 0 = \left|\frac{1}{x_1^{\frac{n-2}{2-s}}} - \frac{1}{\epsilon^{n-2}}\right| \\ &= \left|\frac{x_1}{x_1^{\frac{n-s}{2-s}}} - \frac{\epsilon^{2-s}}{\epsilon^{n-s}}\right| \leq \left|\frac{x_1}{(\epsilon^{2-s})^{\frac{n-s}{2-s}}} - \frac{\epsilon^{2-s}}{\epsilon^{n-s}}\right| \\ &\leq \frac{1}{\epsilon^{n-s}} \left|x_1 - \epsilon^{2-s}\right|. \end{aligned}$$

Donc h_{ε_0} est Lipschitzienne sur $\mathbb{R}_+^*$. Puisque, pour tout $y \in M$, on a :

$$v_\epsilon(y) = h \circ w_\epsilon(y) = h_\varepsilon \circ w_\epsilon(y)$$

et comme h_{ε_0} est Lipschitzienne et $w_\epsilon \in C^{0,1}(M)$, il s'ensuit que v_ϵ et u_ϵ le sont aussi. D'où le résultat. □

3.1 Théorème d'existence : Influence de la géométrie

Dans la partie suivante, on démontre que l'estimation de $J(u_\epsilon)$ donne les résultats suivants :

Proposition 3.1.1 *Soient (M,g) une variété Riemannienne compacte de dimension $n \geq 3$, $x_0 \in M$, $s \in]0,2[$ et $\rho_0 \in]0, i_g(M)[$. On considère la suite des fonctions-tests $(w_\epsilon)_\epsilon$ définie sur M par*

$$w_\epsilon := \begin{cases} u_\epsilon & si\ n \geq 4 \\ \\ \eta u_\epsilon + \sqrt{\epsilon}\beta_{x_0} & si\ n = 3 \end{cases} \tag{3.1.6}$$

où pour tout $\epsilon > 0$, u_ϵ est définie comme dans (3.0.5), $\eta \in C_c^\infty(\mathbb{B}_{2\rho_0}(x_0))$ tel que $0 \leq \eta \leq 1$ et $\eta \equiv 1$ sur $\mathbb{B}_{\rho_0}(x_0)$ et β_{x_0} vérifie p.p. sur M,

$$\beta_{x_0}(x) = 4\pi G_{a,x_0} - \frac{\eta(x)}{d_g(x,x_0)},$$

G_{a,x_0} étant la fonction de Green sur (M,g) correspondante à $\Delta_g + a$ et $\beta_{x_0} \in C^0(M)$ (Voir Appendice V). Alors on a :

$$J(w_\epsilon) = \frac{1}{K(n,s)} \left(1 + \begin{cases} \dfrac{\int_{\mathbb{R}^n} |\Phi|^2 dX}{\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla\Phi|^2 dX} \left(a(x_0) - c_{n,s} Scal_g(x_0)\right) \epsilon^2 + o(\epsilon^2) & si\ n \geq 5 \\ \\ \dfrac{\omega_3}{\int_{\mathbb{R}^4} |\nabla\Phi|^2 dX} \left(a(x_0) - c_{n,s} Scal_g(x_0)\right) \epsilon^2 ln(\dfrac{1}{\epsilon}) + O(\epsilon^2) & si\ n = 4 \\ \\ -\epsilon \beta_{x_0}(x_0) \frac{4\pi}{\int_{\mathbb{R}^n} \Phi \Delta_\delta \Phi dX} + o(\epsilon) & si\ n = 3 \end{cases} \right) \tag{3.1.7}$$

quand $\epsilon \to 0$, avec

$$c_{n,s} := \frac{(n-2)(6-s)}{12(2n-2-s)}. \tag{3.1.8}$$

La dernière proposition et le Théorème général d'existence 2.1.1 impliquent directement le Théorème suivant.

Théorème 3.1.1 *Soient (M,g) une variété Riemannienne compacte de dimension $n \geq 3$, $x_0 \in M$, $s \in]0,2[$ et $2^\star(s) := \frac{2(n-s)}{n-2}$ l'exposant critique des inclusions de Hardy-Sobolev. Soit $a \in C^0(M)$ telle que $\Delta_g + a$ est coercif. On suppose que*

$$\begin{cases} a(x_0) < c_{n,s} Scal_g(x_0) & \text{si } n \geq 4 \\ m(x_0) > 0 & \text{si } n = 3 \end{cases}$$

avec $c_{n,s} = \frac{(n-2)(6-s)}{12(2n-2-s)}$ et $m(x_0) = \beta_{x_0}(x_0)$ indépendant du choix de η. Alors il existe une fonction $u \in C^0(M) \cap H_1^2(M)$, $u > 0$ partout sur M telle qu'elle est une solution de l'équation critique de Hardy-Sobolev

$$\Delta_g u + au = \lambda \frac{u^{2^\star(s)-1}}{d_g(x,x_0)^s}. \tag{3.1.9}$$

En plus, $u \in C^{0,\theta}(M) \cap C^{1,\gamma}(M \setminus \{x_0\})$ pour tous $\theta \in]0, \min\{1, 2-s\}[, \gamma \in]0,1[$ et est un minimiseur pour J, c.à.d. $\int_M \frac{u^{2^\star(s)}}{d_g(x,x_0)^s} dv_g = 1$ et $I(u) = \lambda > 0$.

3.2 Preuve (i) : cas général dim$(M) \geq 3$

3.2.1 Développement de Cartan

Lemme 3.2.1 *Soient (M,g) une variété Riemannienne compacte de dimension n, et $(\mathbb{B}_{\rho_0}(x_0), \exp_{x_0}^{-1})$ une boule exponentielle centrée en x_0 et de rayon $\rho_0 \in]0, i_g(M)[$. Alors pour tout $x \in \mathbb{B}_{\rho_0}(x_0)$, on a pour tout $x = \exp_{x_0}(r\theta)$:*

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \sqrt{det(g)}(x) d\theta = \omega_{n-1} \left[1 - \frac{Scal_g(x_0)}{6n} r^2 + O(r^3) \right]. \tag{3.2.10}$$

où $r = d_g(x, x_0)$ et $d\theta$ est l'élément d'aire sur la sphère unité $\mathbb{S}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$.

Preuve du Lemme 3.2.1 : En effet, on sait que pour toute fonction matricielle $X \in \mathbb{R}^n \mapsto A(X) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de classe C^∞ et tout $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, la formule de différentiation du déterminant en A est la suivante :

$$d(\det(A))(H) = \det(A) tr(A^{-1}H).$$

Le D.L. de la fonction $x \in M \mapsto \det(g(x))$ au voisinage $\mathbb{B}_{\rho_0}(x_0)$ et la dernière formule permettent d'écrire

$$\begin{aligned}
\det(g(x)) &= \det(g(x_0)) + d(\det(g))(x_0)\left(g(x) - g(x_0)\right) + O\left(\|g(x) - g(x_0)\|_{mat}^2\right) \\
&= \det(g(x_0)) + \det(g(x_0)) \times tr\left(g^{ij}(x_0)(g(x) - g(x_0))_{ij}\right) + O\left(\|g(x) - g(x_0)\|_{mat}^2\right),
\end{aligned}$$

où $\|\cdot\|_{mat}$ désigne une norme matricielle d'espace vectorielle sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Puisque $(\mathbb{B}_{\rho_0}(x_0), \exp_{x_0}^{-1})$ est une carte exponentielle en x_0, donc $g(x_0) = I_n$. Par suite, pour tout $x \in \mathbb{B}_{\rho_0}(x_0)$, on a :

$$\det(g(x)) = 1 + tr\left(\delta^{ij}(g(x) - g(x_0))_{ij}\right) + O\left(\|g(x) - g(x_0)\|_{mat}^2\right). \tag{3.2.11}$$

D'autre part, le D.L. de Cartan de la métrique g à l'ordre 2 (pour la preuve : voir Lee-Parker [37]) pour tout point x dans $\mathbb{B}_{\rho_0}(x_0)$ est

$$g_{ij}(x) = \delta_{ij} + \frac{1}{3} R_{i\alpha\beta j}(x_0) x^\alpha x^\beta + O(r^3), \tag{3.2.12}$$

où les $x^\gamma, \gamma = 1, \ldots, n$ sont les coordonnées géodésiques normal du point x et les $R_{i\alpha\beta j}$ désignent les composantes du tenseur courbure Rm_g dans $\mathbb{B}_{\rho_0}(x_0)$. En combinant (3.2.11) et (3.2.12), on tire

$$\begin{aligned}
\det(g(x)) &= 1 + \frac{1}{3} tr(\delta^{ij} R_{i\alpha\beta j}(x_0) x^\alpha x^\beta) + O(r^3) \\
&= 1 - \frac{1}{3} R_{i\alpha i\beta}(x_0) x^\alpha x^\beta + O(r^3) \\
&= 1 - \frac{1}{3} R_{\alpha\beta}(x_0) x^\alpha x^\beta + O(r^3) \\
&= 1 - \frac{r^2}{3} R_{\alpha\beta}(x_0) \theta^\alpha \theta^\beta + O(r^3).
\end{aligned}$$

avec, pour tout $i = 1, \ldots, n$, $\theta^i(x)$ désigne la i-ème coordonnées sphériques explicitées dans $\mathbb{R}^n$ de $x := \exp_{x_0}(r\theta), r = d_g(x, x_0)$ et $\theta \in \mathbb{S}^{n-1}$. Par suite, on a :

$$\sqrt{det(g)}(x) = 1 - \frac{r^2}{6} R_{\alpha\beta}(x_0) \theta^\alpha \theta^\beta + O(r^3).$$

En intégrant $\sqrt{det(g)}(x)$ sur $\mathbb{S}^{n-1}$, on aura :

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \sqrt{det(g)}(x) d\theta = \omega_{n-1} \left[1 - \frac{r^2}{6} \omega_{n-1}^{-1} R_{\alpha\beta}(x_0) \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \theta^\alpha \theta^\beta d\theta + O(r^3)\right].$$

Mais $\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \theta^\alpha \theta^\beta d\theta = \frac{\omega_{n-1}}{n} \delta^{\alpha\beta}$ et $\mathrm{Scal}_g(x_0) = \sum_{\alpha=1}^n R_{\alpha\alpha}(x_0)$, Par suite, on a :

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \sqrt{det(g)}(x) d\theta = \omega_{n-1} \left[1 - \frac{\mathrm{Scal}_g(x_0)}{6n} r^2 + O(r^3)\right].$$

□

3.2.2 Estimation des différents termes de la fonctionnelle-énérgie de Hardy-Sobolev J

Dans la carte exponentielle $(\mathbb{B}_{\rho_0}(x_0), \exp_{x_0}^{-1})$, on passe aux coordonnées polaires (r,θ) telles que pour tout $x \in \mathbb{B}_{\rho_0}(x_0)$, on a : $r = d_g(x,x_0)$ et $\theta \in \mathbb{S}^{n-1}$. On a donc pour tout $x \in \mathbb{B}_{\rho_0}(x_0)$,

$$dv_g(x) = \sqrt{\det(g)}(x)dx = \sqrt{\det(g)}(x)r^{n-1}drd\theta \tag{3.2.13}$$

avec $dx = (\exp_{x_0}^{-1})^*(dX)$ et d'après le Lemme de Gauß(voir par exemple Hebey [28]),

$$g_{1i}(x) = \delta_{1i}. \tag{3.2.14}$$

3.2.2.1 Partie A : Estimation de $\|\nabla u_\epsilon\|_2$:

Dans cette partie, on démontre que

$$\int_M |\nabla u_\epsilon|^2 dv_g = \begin{cases} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \Phi|^2 dX - \frac{\int_{\mathbb{R}^n} |X|^2 |\nabla\Phi|^2 dX}{6n} \mathrm{Scal}_g(x_0)\epsilon^2 + o(\epsilon^2) & \text{if } n \geq 5\ , \\ \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \Phi|^2 dX - \frac{\omega_3}{6} \mathrm{Scal}_g(x_0)\epsilon^2 ln(\frac{1}{\epsilon}) + O(\epsilon^2) & \text{if } n = 4\ , \\ \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \Phi|^2 dX + O(\epsilon) & \text{if } n = 3, \end{cases} \tag{3.2.15}$$

En effet, on commençe par écrire :

$$\int_M |\nabla u_\epsilon|^2 dv_g = \int_{\mathbb{B}_{\rho_0}(x_0)} |\nabla u_\epsilon|^2 dv_g + \int_{M\backslash \mathbb{B}_{\rho_0}(x_0)} |\nabla u_\epsilon|^2 dv_g. \tag{3.2.16}$$

Puisque u_ϵ est une fonction radiale, c.à.d. $u_\epsilon = u_\epsilon(r)$, on a donc, d'après (3.2.14), pour tout $x \in \mathbb{B}_{\rho_0}(x_0)$:

$$\begin{aligned} |\nabla u_\epsilon|_g^2 &= g^{ij}\nabla_i u_\epsilon \nabla_j u_\epsilon = g^{rr}(\nabla_r u_\epsilon)^2 \\ &= (n-2)^2 \epsilon^{n-2} \frac{r^{2(1-s)}}{(\epsilon^{2-s} + r^{2-s})^{\frac{2(n-s)}{2-s}}}. \end{aligned}$$

En intégrant $|\nabla u_\epsilon|_g^2$ sur la boule $\mathbb{B}_{\rho_0}(x_0)$, en utilisant (3.2.13) et le lemme 3.2.1 et en effectuant le changement de variable $r = \epsilon\rho$, on écrit :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{B}_{\rho_0}(x_0)} |\nabla u_\epsilon|_g^2 dv_g &= (n-2)^2\epsilon^{n-2}\omega_{n-1} \times \int_0^{\rho_0} \frac{r^{n+1}\left(1 - \frac{Scal_g(x_0)}{6n} r^2 + O(r^3)\right) dr}{r^{2s}(\epsilon^{2-s} + r^{2-s})^{\frac{2(n-s)}{2-s}}} \\ &= (n-2)^2 \omega_{n-1} \int_0^{\frac{\rho_0}{\epsilon}} \frac{\rho^{n+1}(1 - \frac{Scal_g(x_0)}{6n}(\epsilon\rho)^2 + O((\epsilon\rho)^3))d\rho}{\rho^{2s}(1+\rho^{2-s})^{\frac{2(n-s)}{2-s}}} \\ &:= I_n(\epsilon) + II_n(\epsilon) + III_n(\epsilon). \end{aligned}$$

A.1 : Calcul de $I_n(\epsilon)$:

$$\begin{aligned} I_n(\epsilon) &:= (n-2)^2\omega_{n-1} \int_0^{\frac{\rho_0}{\epsilon}} \frac{\rho^{n+1} d\rho}{\rho^{2s}(1+\rho^{2-s})^{\frac{2(n-s)}{2-s}}} \\ &= (n-2)^2\omega_{n-1} \left[\int_0^{+\infty} \frac{\rho^{n+1} d\rho}{\rho^{2s}(1+\rho^{2-s})^{\frac{2(n-s)}{2-s}}} - \int_{\frac{\rho_0}{\epsilon}}^{+\infty} \frac{\rho^{n+1} d\rho}{\rho^{2s}(1+\rho^{2-s})^{\frac{2(n-s)}{2-s}}} \right]. \end{aligned}$$

Or on a :

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla\Phi|^2 dX = (n-2)^2 \omega_{n-1} \int_0^{+\infty} \frac{\rho^{n+1} d\rho}{\rho^{2s}(1+\rho^{2-s})^{\frac{2(n-s)}{2-s}}},$$

et

$$\begin{aligned}\int_{\frac{\rho_0}{\epsilon}}^{+\infty} \frac{\rho^{n+1} d\rho}{\rho^{2s}(1+\rho^{2-s})^{\frac{2(n-s)}{2-s}}} &\leq \int_{\frac{\rho_0}{\epsilon}}^{+\infty} \frac{d\rho}{\rho^{n-1}} = \frac{1}{n-2}\left(\frac{\epsilon}{\rho_0}\right)^{n-2} \\ &= O(\epsilon^{n-2}).\end{aligned}$$

Donc

$$I_n(\epsilon) = \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla\Phi|^2 dX + O(\epsilon^{n-2}). \tag{3.2.17}$$

A.2 : Calcul de $II_n(\epsilon)$:

$$II_n(\epsilon) = -\frac{(n-2)^2}{6n} Scal_g(x_0)\omega_{n-1}\epsilon^2 \int_0^{\frac{\rho_0}{\epsilon}} \frac{\rho^{n+3} d\rho}{\rho^{2s}(1+\rho^{2-s})^{\frac{2(n-s)}{2-s}}}.$$

Posons que

$$\Sigma_1(\epsilon) = \int_0^{\frac{\rho_0}{\epsilon}} \frac{\rho^{n+3} d\rho}{\rho^{2s}(1+\rho^{2-s})^{\frac{2(n-s)}{2-s}}}.$$

La fonction $\rho \mapsto \frac{\rho^{n+3}}{\rho^{2s}(1+\rho^{2-s})^{\frac{2(n-s)}{2-s}}}$ est intégrable au voisinage de 0 pour tout $n \geq 3$ et est intégrable à l'infini pour tout $n \geq 5$. Donc si $n \geq 5$, on a :

$$\begin{aligned}\Sigma_1(\epsilon) &= \int_0^{+\infty} \frac{\rho^{n+3} d\rho}{\rho^{2s}(1+\rho^{2-s})^{\frac{2(n-s)}{2-s}}} - \int_{\frac{\rho_0}{\epsilon}}^{+\infty} \frac{\rho^{n+3} d\rho}{\rho^{2s}(1+\rho^{2-s})^{\frac{2(n-s)}{2-s}}} \\ &= (n-2)^{-2}\omega_{n-1}^{-1} \int_{\mathbb{R}^n} |X|^2 |\nabla\Phi|^2 dX - \int_{\frac{\rho_0}{\epsilon}}^{+\infty} \frac{\rho^{n+3} d\rho}{\rho^{2s}(1+\rho^{2-s})^{\frac{2(n-s)}{2-s}}}\end{aligned}$$

Or

$$\int_{\frac{\rho_0}{\epsilon}}^{+\infty} \frac{\rho^{n+3} d\rho}{\rho^{2s}(1+\rho^{2-s})^{\frac{2(n-s)}{2-s}}} \leq \int_{\frac{\rho_0}{\epsilon}}^{+\infty} \frac{d\rho}{\rho^{n-3}} = \left[\frac{1}{\rho^{n-4}(4-n)}\right]_{\frac{\rho_0}{\epsilon}}^{+\infty} = \frac{1}{n-4}(\frac{\epsilon}{\rho_0})^{n-4}.$$

Donc

$$\epsilon^2 \int_{\frac{\rho_0}{\epsilon}}^{+\infty} \frac{\rho^{n+3} d\rho}{\rho^{2s}(1+\rho^{2-s})^{\frac{2(n-s)}{2-s}}} = O(\epsilon^{n-4}).$$

D'où pour $n \geq 5$, on a :

$$\epsilon^2 \Sigma_1(\epsilon) = \epsilon^2 (n-2)^{-2}\omega_{n-1}^{-1} \int_{\mathbb{R}^n} |X|^2 |\nabla\Phi|^2 dX + O(\epsilon^{n-2}).$$

Si $n=4$ alors $\Sigma_1(\epsilon)=\int_0^{\frac{\rho_0}{\epsilon}}\frac{\rho^7 d\rho}{\rho^{2s}(1+\rho^{2-s})^{\frac{2(4-s)}{2-s}}}$. Il s'ensuit que

$$\begin{aligned}
\Sigma_1(\epsilon) &= \int_0^1 \frac{\rho^7 d\rho}{\rho^{2s}(1+\rho^{2-s})^{\frac{2(4-s)}{2-s}}}+\int_1^{\frac{\rho_0}{\epsilon}}\frac{\rho^7 d\rho}{\rho^{2s}(1+\rho^{2-s})^{\frac{2(4-s)}{2-s}}}\\
&= C+\int_1^{\frac{\rho_0}{\epsilon}}\frac{d\rho}{\rho}+\int_1^{\frac{\rho_0}{\epsilon}} d\rho\times\frac{\rho^7}{\rho^{2s}}\left[\frac{1}{(1+\rho^{2-s})^{\frac{2(4-s)}{2-s}}}-\frac{1}{(\rho^{2-s})^{\frac{2(4-s)}{2-s}}}\right]\\
&= C+ln(\frac{\rho_0}{\epsilon})+\int_1^{\frac{\rho_0}{\epsilon}} d\rho\times\frac{\rho^7}{\rho^{2s}}\left[\frac{1-(1+\frac{1}{\rho^{2-s}})^{\frac{2(4-s)}{2-s}}}{(1+\rho^{2-s})^{\frac{2(4-s)}{2-s}}}\right]\\
&= C+ln(\frac{\rho_0}{\epsilon})+\int_1^{\frac{\rho_0}{\epsilon}} d\rho\times\frac{\rho^{7-2s}O(\frac{1}{\rho^{2-s}})}{(1+\rho^{2-s})^{\frac{2(4-s)}{2-s}}}.
\end{aligned}$$

Or

$$\int_1^{\frac{\rho_0}{\epsilon}} d\rho\times\frac{\rho^{7-2s}O(\frac{1}{\rho^{2-s}})}{(1+\rho^{2-s})^{\frac{2(4-s)}{2-s}}}\leq C\int_1^{\frac{\rho_0}{\epsilon}}\frac{d\rho}{\rho^{3-s}}\leq C\left[1-\left(\frac{\epsilon}{\rho_0}\right)^{2-s}\right]$$

Donc pour $n=4$, on a :

$$\epsilon^2\Sigma_1(\epsilon)=\epsilon^2 ln(\frac{1}{\epsilon})+O(\epsilon^2).$$

Si $n=3, s\neq 1$ alors $\Sigma_1(\epsilon)=\int_0^{\frac{\rho_0}{\epsilon}}\frac{\rho^6 d\rho}{\rho^{2s}(1+\rho^{2-s})^{\frac{2(3-s)}{2-s}}}$. Il s'ensuit que

$$\begin{aligned}
\Sigma_1(\epsilon) &= C+\frac{\rho_0}{\epsilon}+\int_1^{\frac{\rho_0}{\epsilon}} d\rho\times\rho^{6-2s}\left[\frac{1-(1+\frac{1}{\rho^{2-s}})^{\frac{2(3-s)}{2-s}}}{(1+\rho^{2-s})^{\frac{2(3-s)}{2-s}}}\right]\\
&= C+\frac{\rho_0}{\epsilon}+\int_1^{\frac{\rho_0}{\epsilon}} d\rho\times\frac{\rho^{6-2s}O(\frac{1}{\rho^{2-s}})}{(1+\rho^{2-s})^{\frac{2(3-s)}{2-s}}}.
\end{aligned}$$

Donc si $n=3, s<1$:

$$\int_1^{\frac{\rho_0}{\epsilon}} d\rho\times\frac{\rho^{6-2s}O(\frac{1}{\rho^{2-s}})}{(1+\rho^{2-s})^{\frac{2(3-s)}{2-s}}}\leq C\int_1^{\frac{\rho_0}{\epsilon}}\frac{d\rho}{\rho^{2-s}}=C\left[\frac{\epsilon^{1-s}}{\rho_0^{1-s}}-1\right],$$

et si $n=3, s>1$

$$\begin{aligned}
\int_1^{\frac{\rho_0}{\epsilon}} d\rho\times\frac{\rho^{6-2s}O(\frac{1}{\rho^{2-s}})}{(1+\rho^{2-s})^{\frac{2(3-s)}{2-s}}} &\leq C\int_1^{\frac{\rho_0}{\epsilon}}\frac{\rho^{6-2s}\times\rho d\rho}{\rho^{3-s}(1+\rho^{2-s})^{\frac{2(3-s)}{2-s}}}\\
\leq\frac{C}{\epsilon}\int_1^{\frac{\rho_0}{\epsilon}}\frac{\rho^{6-2s}d\rho}{\rho^{3-s}(1+\rho^{2-s})^{\frac{2(3-s)}{2-s}}} &\leq\frac{C}{\epsilon}\int_1^{\frac{\rho_0}{\epsilon}}\frac{\rho^{6-2s}d\rho}{\rho^{3-s}\times\rho^{2(3-s)}}\\
=\frac{C}{\epsilon}\int_1^{\frac{\rho_0}{\epsilon}}\frac{d\rho}{\rho^{3-s}} &= \frac{C}{\epsilon}\left[\frac{\epsilon^{2-s}}{\rho_0^{2-s}}-1\right].
\end{aligned}$$

Dans les deux cas, on aura : $\epsilon^2\Sigma_1(\epsilon)=O(\epsilon)$.

Maintenant Si $n=3, s=1$ alors $\Sigma_1(\epsilon)=\int_0^{\frac{\rho_0}{\epsilon}} \frac{\rho^4 d\rho}{(1+\rho)^4}$. Donc

$$\begin{aligned}
\Sigma_1(\epsilon) &= \int_0^1 \frac{\rho^4 d\rho}{(1+\rho)^4} + \int_1^{\frac{\rho_0}{\epsilon}} \frac{\rho^4 d\rho}{(1+\rho)^4} \\
&= C + \int_1^{\frac{\rho_0}{\epsilon}} d\rho + \int_1^{\frac{\rho_0}{\epsilon}} d\rho \times \rho^4 \left[\frac{1}{(1+\rho)^4} - \frac{1}{\rho^4}\right] \\
&= C + \frac{\rho_0}{\epsilon} + \int_1^{\frac{\rho_0}{\epsilon}} d\rho \times \rho^4 \left[\frac{1-(1+\frac{1}{\rho})^4}{(1+\rho)^4}\right] \\
&= C + \frac{\rho_0}{\epsilon} + \int_1^{\frac{\rho_0}{\epsilon}} \frac{d\rho \times \rho^4 O(\frac{1}{\rho})}{(1+\rho)^4}.
\end{aligned}$$

Mais

$$\int_1^{\frac{\rho_0}{\epsilon}} \frac{d\rho \times \rho^4 O(\frac{1}{\rho})}{(1+\rho)^4} \leq C \int_1^{\frac{\rho_0}{\epsilon}} \frac{d\rho}{\rho} = C\ln(\frac{\rho_0}{\epsilon}),$$

et puisque $\epsilon^2 \ln(\frac{1}{\epsilon}) = o(\epsilon)$, il s'ensuit que dans le cas $n=3, s=1$, on a : $\epsilon^2\Sigma_1(\epsilon) = O(\epsilon)$.

Résultats pour $II_n(\epsilon)$:

$$II_n(\epsilon) = \begin{cases} -\epsilon^2 \frac{\mathrm{Scal}_{g(x_0)}}{6n} \int_{\mathbb{R}^n} |X|^2 |\nabla\Phi|^2 dX + O(\epsilon^{n-2}) & \text{si } n \geq 5 \text{ ,} \\ -\frac{\omega_3}{6}\mathrm{Scal}_g(x_0)\epsilon^2 ln(\frac{1}{\epsilon}) + O(\epsilon^2) & \text{si } n=4 \text{ ,} \\ O(\epsilon) & \text{si } n=3, \end{cases}$$

A.3 : Calcul de $III_n(\epsilon)$:

$$\begin{aligned}
III_n(\epsilon) &= (n-2)^2 \omega_{n-1} \int_0^{\frac{\rho_0}{\epsilon}} \frac{\rho^{n+1} O((\epsilon\rho)^3) d\rho}{\rho^{2s}(1+\rho^{2-s})^{\frac{2(n-s)}{2-s}}} \\
&= O\left(\epsilon^3 \int_0^{\frac{\rho_0}{\epsilon}} \frac{\rho^{n+4} d\rho}{\rho^{2s}(1+\rho^{2-s})^{\frac{2(n-s)}{2-s}}}\right) \\
&= O\left(\epsilon^3 + \epsilon^3 \int_1^{\frac{\rho_0}{\epsilon}} \rho^{4-n} d\rho\right).
\end{aligned}$$

Résultats pour $III_n(\epsilon)$:

$$III_n(\epsilon) = \begin{cases} o(\epsilon^2) & \text{si } n \geq 5 \text{ ,} \\ O(\epsilon^2) & \text{si } n=4, \\ O(\epsilon) & \text{si } n=3. \end{cases}$$

A.4 : De plus, on a :

$$\begin{aligned}
\int_{M\setminus\mathbb{B}_{\rho_0}(x_0)} |\nabla u_\epsilon|_g^2 dv_g &= (n-2)^2 \epsilon^{n-2} \int_{M\setminus\mathbb{B}_{\rho_0}(x_0)} \frac{dv_g}{(\epsilon^{2-s} + d_g(x,x_0)^{2-s})^{\frac{2(n-s)}{2-s}}} \\
&\leq \frac{(n-2)^2 \epsilon^{n-2}}{(\epsilon^{2-s} + \rho_0^{2-s})^{\frac{2(n-s)}{2-s}}} \int_{M\setminus\mathbb{B}(x_0,\delta)} dv_g \\
&\leq \frac{(n-2)^2}{\rho_0^{2(n-s)}} vol_g(M) \epsilon^{n-2}.
\end{aligned}$$

D'où $\int_{M\setminus\mathbb{B}_{\rho_0}(x_0)}|\nabla u_\epsilon|_g^2dv_g=O(\epsilon^{n-2})$. Finalement, en rassemblant tous les résultats obtenus dans cette partie, on obtiendra (3.2.15).

3.2.2.2 Partie B : Estimation de $\int_M au_\epsilon^2dv_g$.

Dans cette partie, on démontre que

$$\int_M au_\epsilon^2dv_g=\begin{cases}\epsilon^2a(x_0)\int_{\mathbb{R}^n}\Phi^2dX+o(\epsilon^2) & \text{if } n\geq 5\ ,\\ \\ a(x_0)\omega_3\epsilon^2\ln\frac{1}{\epsilon}+O(\epsilon^2) & \text{if } n=4\ ,\\ \\ O(\epsilon) & \text{si } n=3.\end{cases}\tag{3.2.18}$$

Comme dans la partie (**A**) on écrit :

$$\int_M au_\epsilon^2dv_g=\int_{\mathbb{B}_{\rho_0}(x_0)}au_\epsilon^2dv_g+\int_{M\setminus\mathbb{B}_{\rho_0}(x_0)}au_\epsilon^2dv_g.\tag{3.2.19}$$

Le D.L. de $\sqrt{|g|}$ (voir le lemme 3.2.1) dans la boule $\mathbb{B}_{\rho_0}(x_0)$ et le changement de coordonnées $X=\exp_{x_0}^{-1}(x)$ permettent d'écrire :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{B}_{\rho_0}(x_0)}au_\epsilon^2dv_g &= \int_{\mathbb{B}_{\rho_0}(x_0)}\frac{a(x)\epsilon^{n-2}}{\left(\epsilon^{2-s}+d_g(x,x_0)^{2-s}\right)^{\frac{2(n-2)}{2-s}}}dv_g\\ &= \int_{\mathbb{B}_{\rho_0}(0)}\frac{a(\exp_{x_0}(X))\epsilon^{n-2}\left(1+O(|X|^2)\right)}{\left(\epsilon^{2-s}+|X|^{2-s}\right)^{\frac{2(n-2)}{2-s}}}dX.\\ &= \epsilon^{n-2}\int_{\mathbb{B}_{\rho_0}(0)}\frac{(a(x_0)+\tilde{\eta}(X))dX}{\left(\epsilon^{2-s}+|X|^{2-s}\right)^{\frac{2(n-2)}{2-s}}}.\\ &:= I_n(\epsilon)+II_n(\epsilon),\end{aligned}$$

avec pour tout $X\in\mathbb{B}_{\rho_0}(x_0)$, $\tilde{\eta}(X))=(a(\exp_{x_0}(X))-a(x_0))(1+O(|X|^2))$. La fonction $\tilde{\eta}$ est continue sur $\mathbb{B}_{\rho_0}(x_0)$ et vérifie $\lim_{X\to 0}\tilde{\eta}(X)=0$.

B.1 : On a :

$$I_n(\epsilon):=\epsilon^{n-2}a(x_0)\int_{\mathbb{B}_{\rho_0}(x_0)}\frac{dX}{\left(\epsilon^{2-s}+|X|^{2-s}\right)^{\frac{2(n-2)}{2-s}}}.$$

En coordonnées polaires $(r,\theta)\in[0,\rho_0[\times\mathbb{S}^{n-1}$, on aura :

$$I_n(\epsilon)=\epsilon^2a(x_0)\omega_{n-1}\int_0^{\frac{\rho_0}{\epsilon}}\frac{\rho^{n-1}d\rho}{\left(1+\rho^{2-s}\right)^{\frac{2(n-2)}{2-s}}}.$$

On pose :

$$\Sigma_1(\epsilon)=\int_0^{\frac{\rho_0}{\epsilon}}\frac{\rho^{n-1}d\rho}{\left(1+\rho^{2-s}\right)^{\frac{2(n-2)}{2-s}}}.$$

Vu que la fonction $\rho\mapsto\frac{\rho^{n-1}d\rho}{(1+\rho^{2-s})^{\frac{2(n-2)}{2-s}}}$ est intégrable au voisinage de 0 pour tout $n\geq 3$ et est intégrable à l'infini pour tout $n\geq 5$.

Donc si $n \geq 5$, on a :

$$I_n(\epsilon) = \epsilon^2 a(x_0)\omega_{n-1}\left[\int_0^{+\infty} \frac{\rho^{n-1}d\rho}{(1+\rho^{2-s})^{\frac{2(n-2)}{2-s}}} - \int_{\frac{\rho_0}{\epsilon}}^{+\infty} \frac{\rho^{n-1}d\rho}{(1+\rho^{2-s})^{\frac{2(n-2)}{2-s}}}\right].$$

Or on a que :

$$\omega_{n-1}\int_0^{+\infty} \frac{\rho^{n-1}d\rho}{(1+\rho^{2-s})^{\frac{2(n-2)}{2-s}}} = \int_{\mathbb{R}^n} |\Phi|^2 dX,$$

et

$$\int_{\frac{\rho_0}{\epsilon}}^{+\infty} \frac{\rho^{n-1}d\rho}{(1+\rho^{2-s})^{\frac{2(n-2)}{2-s}}} = O\left(\int_{\frac{\rho_0}{\epsilon}}^{+\infty} \frac{d\rho}{\rho^{n-3}}\right) = O(\epsilon^{n-4}).$$

Il s'ensuit que pour tout $n \geq 5$ on a :

$$I_n(\epsilon) = \epsilon^2 a(x_0)\int_{\mathbb{R}^n} |\Phi|^2 dX + O(\epsilon^{n-2}).$$

Pour $n = 4$, on a :

$$I_4(\epsilon) = \epsilon^2 a(x_0)\omega_3 \int_0^{\frac{\rho_0}{\epsilon}} \frac{\rho^3 d\rho}{(1+\rho^{2-s})^{\frac{4}{2-s}}}.$$

Dans ce cas, on a :

$$\begin{aligned}
\Sigma_1(\epsilon) &= \int_0^{\frac{\rho_0}{\epsilon}} \frac{\rho^3 d\rho}{(1+\rho^{2-s})^{\frac{4}{2-s}}} \\
&= \int_0^1 \frac{\rho^3 d\rho}{(1+\rho^{2-s})^{\frac{4}{2-s}}} + \int_1^{\frac{\rho_0}{\epsilon}} \frac{\rho^3 d\rho}{(1+\rho^{2-s})^{\frac{4}{2-s}}} \\
&= C + \int_1^{\frac{\rho_0}{\epsilon}} \frac{d\rho}{\rho} + \int_1^{\frac{\rho_0}{\epsilon}} d\rho \times \rho^3 \left[\frac{1}{(1+\rho^{2-s})^{\frac{4}{2-s}}} - \frac{1}{\rho^4}\right] \\
&= C + \ln\frac{\rho_0}{\epsilon} + \int_1^{\frac{\rho_0}{\epsilon}} d\rho \times \rho^3 \left[\frac{1-(1+\frac{1}{\rho^{2-s}})^{\frac{4}{2-s}}}{(1+\rho^{2-s})^{\frac{4}{2-s}}}\right] \\
&= C + \ln\frac{\rho_0}{\epsilon} + \int_1^{\frac{\rho_0}{\epsilon}} \frac{\rho^3 O(\frac{1}{r^{2-s}})d\rho}{(1+\rho^{2-s})^{\frac{4}{2-s}}} \\
&:= C + \ln\frac{\rho_0}{\epsilon} + \Sigma_1'(\epsilon).
\end{aligned}$$

Mais

$$\Sigma_1'(\epsilon) \leq C_1 \int_1^{\frac{\rho_0}{\epsilon}} \frac{\rho^3 d\rho}{\rho^{2-s}(1+\rho^{2-s})^{\frac{4}{2-s}}} \leq C_1 \int_1^{\frac{\rho_0}{\epsilon}} \frac{d\rho}{\rho^{3-s}} = \frac{C_1}{2-s}\left[1 - \left(\frac{\epsilon}{\rho_0}\right)^{2-s}\right].$$

Donc $\epsilon^2\Sigma_1'(\epsilon) = O(\epsilon^2)$. Il s'ensuit que pour $n = 4$ on a :

$$I_4(\epsilon) = a(x_0)\omega_3\epsilon^2 \ln\frac{1}{\epsilon} + O(\epsilon^2).$$

Pour $n=3$:

$$\begin{aligned} I_3(\epsilon) &= \epsilon^2 a(x_0)\omega_2 \int_0^{\frac{\rho_0}{\epsilon}} \frac{\rho^2 d\rho}{(1+\rho^{2-s})^{\frac{2}{2-s}}} \\ &= O\left(\epsilon^2 \int_0^{\frac{\rho_0}{\epsilon}} \frac{\rho^2 d\rho}{(1+\rho^{2-s})^{\frac{2}{2-s}}}\right) \\ &= O\left(\epsilon^2 + \epsilon^2 \int_1^{\frac{\rho_0}{\epsilon}} \frac{\rho^2 d\rho}{(1+\rho^{2-s})^{\frac{2}{2-s}}}\right) \\ &= O\left(\epsilon^2 + \epsilon^2 \int_1^{\frac{\rho_0}{\epsilon}} d\rho\right) = O(\epsilon). \end{aligned}$$

Résultats pour $I_n(\epsilon)$:

$$I_n(\epsilon) = \begin{cases} \epsilon^2 a(x_0) \int_{\mathbb{R}^n} |\Phi|^2 dX + O(\epsilon^{n-2}) & \text{si } n \geq 5 \\ a(x_0)\omega_3 \epsilon^2 \ln \frac{1}{\epsilon} + O(\epsilon^2) & \text{si } n = 4 \\ O(\epsilon) & \text{si } n = 3. \end{cases}$$

B.2 : On a :

$$|II_n(\epsilon)| \leq \epsilon^{n-2} \int_{\mathbb{B}_{\rho_0}(0)} \frac{|\tilde{\eta}(X)| dX}{(\epsilon^{2-s} + |X|^{2-s})^{\frac{2(n-2)}{2-s}}}.$$

On fixe maintenant $\alpha \in]0, \rho_0[$ et on écrit :

$$\epsilon^{n-2} \int_{\mathbb{B}_{\rho_0}(0) \backslash \mathbb{B}_\alpha(0)} \frac{|\tilde{\eta}(X)| dX}{(\epsilon^{2-s} + |X|^{2-s})^{\frac{2(n-2)}{2-s}}} \leq \epsilon^{n-2} \frac{\|\tilde{\eta}\|_\infty \rho_0^n \omega_{n-1}}{\alpha^{2(n-2)}} := C'_\alpha \epsilon^{n-2}. \tag{3.2.20}$$

Et on a de même

$$\begin{aligned} \epsilon^{n-2} \int_{\mathbb{B}_\alpha(0)} \frac{|\tilde{\eta}(X)| dX}{(\epsilon^{2-s} + |X|^{2-s})^{\frac{2(n-2)}{2-s}}} &\leq \epsilon^{n-2} \omega_{n-1} \left(\sup_{|X|<\alpha} |\tilde{\eta}(X)|\right) \left[\int_0^\alpha \frac{r^{n-1} dr}{(\epsilon^{2-s} + r^{2-s})^{\frac{2(n-2)}{2-s}}}\right] \\ &\leq \epsilon^2 \omega_{n-1} \left(\sup_{|X|<\alpha} |\tilde{\eta}(X)|\right) \int_0^{\frac{\alpha}{\epsilon}} \frac{\rho^{n-1} d\rho}{(1+\rho^{2-s})^{\frac{2(n-2)}{2-s}}} \end{aligned} \tag{3.2.21}$$

On distingue trois cas :

Cas B.2.1 : Lorsque $n \geq 5$. Dans ce cas, on écrit avec (3.2.21) :

$$\epsilon^{n-2} \int_{\mathbb{B}_\alpha(0)} \frac{|\tilde{\eta}(X)| dX}{(\epsilon^{2-s} + |X|^{2-s})^{\frac{2(n-2)}{2-s}}} \leq \epsilon^2 \left(\sup_{|X|<\alpha} |\tilde{\eta}(X)|\right) \left[\int_{\mathbb{R}^n} |\Phi|^2 dX - \omega_{n-1} \int_{\frac{\alpha}{\epsilon}}^{+\infty} \frac{\rho^{n-1} d\rho}{(1+\rho^{2-s})^{\frac{2(n-2)}{2-s}}}\right]$$

Mais

$$\int_{\frac{\alpha}{\epsilon}}^{+\infty} \frac{\rho^{n-1} d\rho}{(1+\rho^{2-s})^{\frac{2(n-2)}{2-s}}} \leq \int_{\frac{\alpha}{\epsilon}}^{+\infty} \rho^{3-n} d\rho$$

Donc

$$\epsilon^{n-2}\int_{\mathbb{B}_\alpha(0)}\frac{|\tilde{\eta}(X)|dX}{(\epsilon^{2-s}+|X|^{2-s})^{\frac{2(n-2)}{2-s}}}\leq \epsilon^2\sup_{|X|<\alpha}|\tilde{\eta}(X)|\int_{\mathbb{R}^n}|\Phi|^2dX-\epsilon^{n-2}\sup_{|X|<\alpha}|\tilde{\eta}(X)|\frac{\omega_{n-1}}{\alpha^{n-4}(n-4)}. \tag{3.2.22}$$

Par suite, combinant (3.2.20) et (3.2.22), on tire qu'il existe $C''_\alpha>0$ et $D>0$ tels que

$$|II_n(\epsilon)|\leq C''_\alpha\epsilon^{n-2}+D\epsilon^2\sup_{|X|<\alpha}|\tilde{\eta}(X)|. \tag{3.2.23}$$

Soit maintenant $\theta>0$. Il existe donc $\alpha_0=\alpha_0(\theta)>0$ tel que pour tout $\alpha<\alpha_0$, on a : $D\sup_{|X|<\alpha}|\tilde{\eta}(X)|<\frac{\theta}{2}$. Et puisque $\lim_{\epsilon\to 0}C''_\alpha\epsilon^{n-4}=0$, il existe donc $\epsilon_0=\epsilon_0(\theta)>0$ tel que $C''_\alpha\epsilon^{n-4}<\frac{\theta}{2}$. D'où $\lim_{\epsilon\to 0}\frac{|II_n(\epsilon)|}{\epsilon^2}=0$.

Cas B.2.2 : Lorsque $n=4$. Dans ce cas, on écrit de même avec (3.2.21) :

$$\epsilon^2\int_{\mathbb{B}_\alpha(0)}\frac{|\tilde{\eta}(X)|dX}{(\epsilon^{2-s}+|X|^{2-s})^{\frac{4}{2-s}}}\leq \epsilon^2\sup_{|X|<\alpha}|\tilde{\eta}(X)|\omega_2\int_0^{\frac{\alpha}{\epsilon}}\frac{\rho^3d\rho}{(1+\rho^{2-s})^{\frac{4}{2-s}}}.$$

Tout calcul fait (voir la partie précédente B.1) montre que

$$\int_0^{\frac{\alpha}{\epsilon}}\frac{\rho^3d\rho}{(1+\rho^{2-s})^{\frac{4}{2-s}}}\leq C_1+\ln\frac{\alpha}{\epsilon}+\frac{C_2}{2-s}\left[1-\left(\frac{\epsilon}{\alpha}\right)^{2-s}\right].$$

En combinant les deux dernières inégalités, on obtient

$$\epsilon^2\int_{\mathbb{B}_\alpha(0)}\frac{|\tilde{\eta}(X)|dX}{(\epsilon^{2-s}+|X|^{2-s})^{\frac{4}{2-s}}}\leq \sup_{|X|<\alpha}|\tilde{\eta}(X)|\omega_2\left(C_3(\alpha)\epsilon^2+\epsilon^2\ln\frac{1}{\epsilon}\right). \tag{3.2.24}$$

Les relations (3.2.20) et (3.2.24)

$$|II_4(\epsilon)|\leq C_5(\alpha)\epsilon^2+\epsilon^2\ln\frac{1}{\epsilon}D\sup_{|X|<\alpha}|\tilde{\eta}(X)|.$$

Par suite, on a :

$$\frac{|II_4(\epsilon)|}{\epsilon^2\ln\frac{1}{\epsilon}}\leq\frac{C_5(\alpha)}{\ln\frac{1}{\epsilon}}+D\sup_{|X|<\alpha}|\tilde{\eta}(X)|. \tag{3.2.25}$$

Avec des arguments similaires que ceux utilisés dans le cas B.2.1, on démontre que $\lim_{\epsilon\to 0}\frac{|II_4(\epsilon)|}{\epsilon^2\ln\frac{1}{\epsilon}}=0$.

Cas B.2.3 : Lorsque $n=3$. Dans ce cas, on écrit :

$$\begin{aligned}|II_3(\epsilon)| &\leq \epsilon\int_{\mathbb{B}_{\rho_0}(0)}\frac{|\tilde{\eta}(X)|dX}{(\epsilon^{2-s}+|X|^{2-s})^{\frac{2}{2-s}}}\\ &\leq \epsilon 4\pi\sup_{|X|<\rho_0}|\tilde{\eta}(X)|\int_0^{\rho_0}\frac{r^2dr}{(\epsilon^{2-s}+r^{2-s})^{\frac{2}{2-s}}}\\ &\leq \epsilon 4\pi\sup_{|X|<\rho_0}|\tilde{\eta}(X)|\int_0^{\rho_0}dr\\ &= O(\epsilon).\end{aligned}$$

Résultats pour $II_n(\epsilon)$:

$$II_n(\epsilon) = \begin{cases} o(\epsilon^2) & \text{si } n \geq 5 \\ o(\epsilon^2 \ln \frac{1}{\epsilon}) & \text{si } n = 4 \\ O(\epsilon) & \text{si } n = 3 \end{cases}$$

B.3 : On a :

$$\begin{aligned} \left| \int_{M \setminus \mathbb{B}_{\rho_0}(x_0)} a u_\epsilon^2 dv_g \right| &= \epsilon^{n-2} \int_{M \setminus \mathbb{B}_{\rho_0}(x_0)} \frac{|a| dv_g}{(\epsilon^{2-s} + d_g(x,x_0)^{2-s})^{\frac{2(n-2)}{2-s}}} \\ &\leq \frac{\|a\|_\infty \epsilon^{n-2}}{(\epsilon^{2-s} + \rho_0^{2-s})^{\frac{2(n-2)}{2-s}}} \int_{M \setminus \mathbb{B}_{\rho_0}(x_0)} dv_g \\ &\leq \frac{\|a\|_\infty vol_g(M)}{\rho_0^{2(n-2)}} \epsilon^{n-2}. \end{aligned}$$

D'où $\int_{M \setminus \mathbb{B}_{\rho_0}(x_0)} a u_\epsilon^2 dv_g = O(\epsilon^{n-2})$. Finalement, en rassemblant les différents résultats obtenus dans la partie B, on aura :

$$\int_M a u_\epsilon^2 dv_g = \begin{cases} \epsilon^2 a(x_0) \int_{\mathbb{R}^n} |\Phi|^2 dX + o(\epsilon^2) & \text{si } n \geq 5 \\ a(x_0)\omega_3 \epsilon^2 \ln \frac{1}{\epsilon} + O(\epsilon^2) & \text{si } n = 4 \\ O(\epsilon) & \text{si } n = 3. \end{cases}$$

3.2.2.3 Partie C : Estimation de $\|u_\epsilon\|_{2^\star(s),s}^{2^\star(s)}$:

Dans cette partie, on démontre que

$$\int_M \frac{|u_\epsilon|^{2^*(s)}}{d_g(x,x_0)^s} dv_g = \begin{cases} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\Phi|^{2^\star(s)}}{|X|^s} dX - \epsilon^2 \frac{Scal_g(x_0)}{6n} \int_{\mathbb{R}^n} |X|^{2-s} |\Phi|^{2^\star(s)} dX + o(\epsilon^2) & \text{if } n \geq 4 , \\ \int_{\mathbb{R}^3} \frac{|\Phi|^{2^\star(s)}}{|X|^s} dX + O(\epsilon) & \text{if } n = 3. \end{cases} \tag{3.2.26}$$

En effet, on commença par écrire :

$$\int_M \frac{|u_\epsilon|^{2^*(s)}}{d_g(x,x_0)^s} dv_g = \int_{\mathbb{B}_{\rho_0}(x_0)} \frac{|u_\epsilon|^{2^*(s)}}{d_g(x,x_0)^s} dv_g + \int_{M \setminus \mathbb{B}_{\rho_0}(x_0)} \frac{|u_\epsilon|^{2^*(s)}}{d_g(x,x_0)^s} dv_g. \tag{3.2.27}$$

En intégrant $\|u_\epsilon\|_{2^\star(s),s}^{2^\star(s)}$ sur la boule $\mathbb{B}_{\rho_0}(x_0)$, en utilisant (3.2.13) et le lemme 3.2.1 et en effectuant le changement de variable $r = \epsilon\rho$, on écrit :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{B}_{\rho_0}(x_0)} \frac{|u_\epsilon|^{2^*(s)}}{d_g(x,x_0)^s} dv_g &= \omega_{n-1} \int_0^{\frac{\rho_0}{\epsilon}} \frac{\rho^{n-1} \left(1 - \frac{Scal_g(x_0)}{6n} (\epsilon\rho)^2 + O((\epsilon\rho)^3)\right)}{\rho^s (1+\rho^{2-s})^{\frac{2(n-s)}{2-s}}} d\rho \\ &:= I_n(\epsilon) + II_n(\epsilon) + III_n(\epsilon). \end{aligned}$$

C.1 : Calcul de $I_n(\epsilon)$: En effet,

$$\begin{aligned} I_n(\epsilon) &= \omega_{n-1}\int_0^{\frac{\rho_0}{\epsilon}} \frac{\rho^{n-1}d\rho}{\rho^s(1+\rho^{2-s})^{\frac{2(n-s)}{2-s}}} \\ &= \omega_{n-1}\left[\int_0^{+\infty} \frac{\rho^{n-1}d\rho}{\rho^s(1+\rho^{2-s})^{\frac{2(n-s)}{2-s}}} - \int_{\frac{\rho_0}{\epsilon}}^{+\infty} \frac{\rho^{n-1}d\rho}{\rho^s(1+\rho^{2-s})^{\frac{2(n-s)}{2-s}}}\right] \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\Phi|^{2^*(s)}}{|X|^s}dX - \omega_{n-1}\int_{\frac{\rho_0}{\epsilon}}^{+\infty} \frac{\rho^{n-1}d\rho}{\rho^s(1+\rho^{2-s})^{\frac{2(n-s)}{2-s}}}. \end{aligned}$$

Puisque

$$\int_{\frac{\rho_0}{\epsilon}}^{+\infty} \frac{\rho^{n-1}d\rho}{\rho^s(1+\rho^{2-s})^{\frac{2(n-s)}{2-s}}} \le \int_{\frac{\rho_0}{\epsilon}}^{+\infty} \frac{d\rho}{\rho^{n-s+1}} = \frac{\epsilon^{n-s}}{(n-s)\rho_0^{n-s}}.$$

Donc $I_n(\epsilon) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\Phi|^{2^*(s)}}{|X|^s}dX + O(\epsilon^{n-s})$.

C.2 : Calcul de $II_n(\epsilon)$: En effet,

$$II_n(\epsilon) = -\epsilon^2 Scal_g(x_0)\frac{\omega_{n-1}}{6n}\int_0^{\frac{\rho_0}{\epsilon}} \frac{\rho^{n+1}d\rho}{\rho^s(1+\rho^{2-s})^{\frac{2(n-s)}{2-s}}}.$$

Vu que la fonction $\rho \mapsto \frac{\rho^{n+1}d\rho}{\rho^s(1+\rho^{2-s})^{\frac{2(n-s)}{2-s}}}$ est intégrable au voisinage de 0 pour tout $n \ge 3$ et est intégrable à l'infini pour tout $n \ge 4$ ou bien $n = 3, s < 1$. Donc **si** $n \ge 4$ ou bien $n = 3, s < 1$ alors :

$$\begin{aligned} \Sigma_2(\epsilon) &= \int_0^{\frac{\rho_0}{\epsilon}} \frac{\rho^{n+1}d\rho}{\rho^s(1+\rho^{2-s})^{\frac{2(n-s)}{2-s}}} \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{\rho^{n+1}d\rho}{\rho^s(1+\rho^{2-s})^{\frac{2(n-s)}{2-s}}} - \int_{\frac{\rho_0}{\epsilon}}^{+\infty} \frac{\rho^{n+1}d\rho}{\rho^s(1+\rho^{2-s})^{\frac{2(n-s)}{2-s}}}. \end{aligned}$$

Or on a

$$\omega_{n-1}\int_0^{+\infty} \frac{\rho^{n+1}d\rho}{\rho^s(1+\rho^{2-s})^{\frac{2(n-s)}{2-s}}} = \int_{\mathbb{R}^n} |X|^{2-s}|\Phi|^{2^*(s)}dX$$

et

$$\int_{\frac{\rho_0}{\epsilon}}^{+\infty} \frac{\rho^{n+1}d\rho}{\rho^s(1+\rho^{2-s})^{\frac{2(n-s)}{2-s}}} = O(\epsilon^{n-s-2}).$$

D'où pour $n \ge 4$ ou bien $n = 3, s < 1$ on a :

$$II_n(\epsilon) = -\epsilon^2\frac{Scal_g(x_0)}{6n}\int_{\mathbb{R}^n} |X|^{2-s}|\Phi|^{2^*(s)}dX + O(\epsilon^{n-s}).$$

Pour $n=3, s\geq 1$ on a :

$$\begin{aligned}
II_n(\epsilon) &= O\left(\epsilon^2 \int_0^{\frac{\rho_0}{\epsilon}} \frac{\rho^4 d\rho}{\rho^s(1+\rho^{2-s})^{\frac{2(3-s)}{2-s}}}\right) \\
&= O\left(\epsilon^2 + \epsilon^2 \int_1^{\frac{\rho_0}{\epsilon}} \frac{\rho^4 d\rho}{\rho^s(1+\rho^{2-s})^{\frac{2(3-s)}{2-s}}}\right) \\
&= O\left(\epsilon^2 + \epsilon^2 \int_1^{\frac{\rho_0}{\epsilon}} \frac{d\rho}{\rho^{2-s}}\right)
\end{aligned}$$

Ensuite si $n=3, s=1$ alors $II_3(\epsilon)=O(\epsilon^2 \ln\frac{1}{\epsilon})$ et si $n=3, s>1$ alors $II_3(\epsilon)=O(\epsilon^{3-s})$. D'où

$$II_n(\epsilon)=\begin{cases} -\epsilon^2 \frac{Scal_g(x_0)}{6n}\int_{\mathbb{R}^n}|X|^{2-s}|\Phi|^{2^*(s)}dX+O(\epsilon^{n-s}) & \text{si } n\geq 4 \text{ ou } n=3, s<1 \\ O(\epsilon^2\ln\frac{1}{\epsilon}) & \text{si } n=3, s=1 \\ O(\epsilon^2) & \text{si } n=3, s>1. \end{cases}$$

C.3 : Calcul de $III_n(\epsilon)$: En effet,

$$\begin{aligned}
III_n(\epsilon) &= \omega_{n-1}\int_0^{\frac{\rho_0}{\epsilon}} \frac{\rho^{n-1}O((\epsilon\rho)^3)d\rho}{\rho^s(1+\rho^{2-s})^{\frac{2(n-s)}{2-s}}} \leq O\left(\epsilon^3 \int_0^{\frac{\rho_0}{\epsilon}} \frac{\rho^{n+2}d\rho}{\rho^s(1+\rho^{2-s})^{\frac{2(n-s)}{2-s}}}\right) \\
&\leq O\left(\epsilon^3+\epsilon^3\int_1^{\frac{\rho_0}{\epsilon}}\frac{d\rho}{\rho^{n-s-2}}\right)
\end{aligned}$$

Ceci nous permet de conclure

$$III_n(\epsilon)=\begin{cases} O(\epsilon^3) & \text{si } n\geq 5;\ \ n=4, s<1\ , \\ O(\epsilon^3\ln\frac{1}{\epsilon}) & \text{si }\ n=4, s=1\ ;\ n=3, s=0\ , \\ O(\epsilon^{n-s}) & \text{si }\ n=3, s\neq 0\ ;\ n=4, s>1\ . \end{cases}$$

C.4 : Calcul de $\int_{M\setminus\mathbb{B}_{\rho_0}(x_0)} \frac{|u_\epsilon|^{2^*(s)}}{d_g(x,x_0)^s}dv_g$: En effet,

$$\begin{aligned}
\int_{M\setminus\mathbb{B}_{\rho_0}(x_0)} \frac{|u_\epsilon|^{2^*(s)}}{d_g(x,x_0)^s}dv_g &= \int_{M\setminus\mathbb{B}_{\rho_0}(x_0)} \frac{\epsilon^{n-s}dv_g}{d_g(x,x_0)^s(\epsilon^{2-s}+d_g(x,x_0)^{2-s})^{\frac{2(n-s)}{2-s}}} \\
&\leq \frac{\epsilon^{n-s}}{\rho_0^s(\epsilon^{2-s}+\rho_0^{2-s})^{\frac{2(n-s)}{2-s}}}\int_{M\setminus\mathbb{B}_{\rho_0}(x_0)} dv_g.
\end{aligned}$$

D'où

$$\int_{M\setminus\mathbb{B}_{\rho_0}(x_0)} \frac{|u_\epsilon|^{2^*(s)}}{d_g(x,x_0)^s}dv_g = O(\epsilon^{n-s}).$$

Finalement, en rassemblant les différents résultats obtenus dans la partie C, on aura (3.2.26).

3.2.3 D.L. de J et preuve pour dim$(M) \geq 4$

3.2.3.1 Partie D : D.L. de $J(u_\epsilon)$.

Dans cette partie, nous allons démontrer, pour $n \geq 4$, la proposition 3.1.1. Pour cela, nous procédons par étapes.

Étape D.1 : Dans cette étape, on démontre

$$J(u_\epsilon) = K(n,s)^{-1}\left(1 + \left\{\begin{array}{ll} \left(\kappa_1(n,s)a(x_0) - \kappa_2(n,s)\mathrm{Scal}_g(x_0)\right)\epsilon^2 + o(\epsilon^2) & n \geq 5 \\ \omega_3(\int_{\mathbb{R}^4}|\nabla\Phi|^2\,dX)^{-1}\left(a(x_0) - \frac{1}{6}Scal_g(x_0)\right)\epsilon^2 ln(\frac{1}{\epsilon}) + O(\epsilon^2) & n = 4 \\ O(\epsilon) & n = 3 \end{array}\right\}\right) \tag{3.2.28}$$

avec

$$\begin{aligned} \kappa_1(n,s) &:= \frac{\int_{\mathbb{R}^n}|\Phi|^2 dX}{\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla\Phi|^2 dX} \\ \kappa_2(n,s) &:= -\frac{2}{2^\star(s)6n}\frac{\int_{\mathbb{R}^n}|X|^{2-s}|\Phi|^{2^\star(s)}dX}{\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|\Phi|^{2^\star(s)}}{|X|^s}dX} + \frac{1}{6n}\frac{\int_{\mathbb{R}^n}|X|^2|\nabla\Phi|^2 dX}{\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla\Phi|^2 dX} \end{aligned}$$

Rappelons que, d'après Lieb [39], on sait que Φ est une fonction extremale pour les inégalités Euclidienne de Hardy-Sobolev, c.à.d.

$$\frac{\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla\Phi|^2 dX}{\left(\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|\Phi|^{2^\star(s)}}{|X|^s}dX\right)^{\frac{2}{2^\star(s)}}} = K(n,s)^{-1}. \tag{3.2.29}$$

On utilise ici les résultats des calculs faits dans les parties **A, B**, et **C** dans la dernière partie. En effet,

Cas (D.1.i) : $n \geq 5$. Dans ce cas, $J(u_\epsilon)$ est de la forme

$$J(u_\epsilon) = \frac{C_1 + C_2\epsilon^2 + o(\epsilon^2)}{(C_3 + C_4\epsilon^2 + o(\epsilon^2))^{\frac{2}{2^\star(s)}}},$$

avec $C_1 = \int_{\mathbb{R}^n}|\nabla\Phi|^2 dX$, $C_2 = a(x_0)\int_{\mathbb{R}^n}|\Phi|^2 dX - \frac{Scal_g(x_0)}{6n}\int_{\mathbb{R}^n}|X|^2|\nabla\Phi|^2 dX$, $C_3 = \int_{\mathbb{R}^n}\frac{|\Phi|^{2^\star(s)}}{|X|^s}dX =$

$\|\Phi\|_{2^*(s),s}^{2^*(s)}$ et $C_4 = -\frac{Scal_g(x_0)}{6n}\int_{\mathbb{R}^n}|X|^{2-s}|\Phi|^{2^*(s)}dX$. Il s'ensuit que :

$$
\begin{aligned}
J(u_\epsilon) &= \frac{1}{C_3^{\frac{2}{2^*(s)}}} \times \frac{C_1 + C_2\epsilon^2 + o(\epsilon^2)}{\left(1 + \frac{C_4}{C_3}\epsilon^2 + o(\epsilon^2)\right)^{\frac{2}{2^*(s)}}} \\
&= \frac{1}{C_3^{\frac{2}{2^*(s)}}} \times \frac{C_1 + C_2\epsilon^2 + o(\epsilon^2)}{1 + \frac{2C_4}{2^*(s)C_3}\epsilon^2 + o(\epsilon^2)} \\
&= \frac{1}{C_3^{\frac{2}{2^*(s)}}} \left(C_1 + C_2\epsilon^2 + o(\epsilon^2)\right)\left(1 - \frac{2C_4}{2^*(s)C_3}\epsilon^2 + o(\epsilon^2)\right) \\
&= \frac{1}{C_3^{\frac{2}{2^*(s)}}} \left[C_1 + \left(C_2 - \frac{2}{2^*(s)}\frac{C_1C_4}{C_3}\right)\epsilon^2 + o(\epsilon^2)\right] \\
&= \frac{C_1}{C_3^{\frac{2}{2^*(s)}}} + \left[\frac{C_2}{C_3^{\frac{2}{2^*(s)}}} - \frac{2}{2^*(s)}\frac{C_1C_4}{C_3^{\frac{2}{2^*(s)}+1}}\right]\epsilon^2 + o(\epsilon^2) \\
&= \frac{C_1}{C_3^{\frac{2}{2^*(s)}}} + \frac{C_1}{C_3^{\frac{2}{2^*(s)}}}\left[\frac{C_2}{C_1} - \frac{2}{2^*(s)}\frac{C_4}{C_3}\right]\epsilon^2 + o(\epsilon^2).
\end{aligned}
$$

On voit clairement que $\frac{C_2}{C_1} - \frac{2}{2^*(s)}\frac{C_4}{C_3} = \kappa_1(n,s)a(x_0) - \kappa_2(n,s)\mathrm{Scal}_g(x_0)$ et d'après (3.2.29), que $C_1C_3^{\frac{-2}{2^*(s)}} = K(n,s)^{-1}$. Ceci montre (3.2.28) dans le cas (D.1.i).

Cas (D.1.ii) : $n = 4$. Dans ce cas, $J(u_\epsilon)$ est de la forme

$$
J(u_\epsilon) = \frac{C_1 + C_2\omega_3\epsilon^2\ln\frac{1}{\epsilon} + O(\epsilon^2)}{\left(C_3 + C_4\epsilon^2 + o(\epsilon^2)\right)^{\frac{2}{2^*(s)}}},
$$

avec $C_1 = \int_{\mathbb{R}^4}|\nabla\Phi|^2dX$, $C_2 = a(x_0) - \frac{1}{6}Scal_g(x_0)$, $C_3 = \int_{\mathbb{R}^4}\frac{|\Phi|^{2^*(s)}}{|X|^s}dX = \|\Phi\|_{2^*(s),s}^{2^*(s)}$ et $C_4 = -\frac{Scal_g(x_0)}{24}\int_{\mathbb{R}^4}|X|^{2-s}|\Phi|^{2^*(s)}dX$. Il s'ensuit que :

$$
\begin{aligned}
J(u_\epsilon) &= \frac{1}{C_3^{\frac{2}{2^*(s)}}} \times \frac{C_1 + C_2\omega_3\epsilon^2\ln\frac{1}{\epsilon} + O(\epsilon^2)}{\left(1 + \frac{C_4}{C_3}\epsilon^2 + o(\epsilon^2)\right)^{\frac{2}{2^*(s)}}} \\
&= \frac{1}{C_3^{\frac{2}{2^*(s)}}} \times \frac{C_1 + C_2\omega_3\epsilon^2\ln\frac{1}{\epsilon} + O(\epsilon^2)}{1 + \frac{2C_4}{2^*(s)C_3}\epsilon^2 + o(\epsilon^2)} \\
&= \frac{1}{C_3^{\frac{2}{2^*(s)}}} \left(C_1 + C_2\omega_3\epsilon^2\ln\frac{1}{\epsilon} + O(\epsilon^2)\right)\left(1 - \frac{2C_4}{2^*(s)C_3}\epsilon^2 + o(\epsilon^2)\right) \\
&= \frac{1}{C_3^{\frac{2}{2^*(s)}}} \left[C_1 + C_2\epsilon^2\ln\frac{1}{\epsilon} + O(\epsilon^2)\right] \\
&= \frac{C_1}{C_3^{\frac{2}{2^*(s)}}} + \frac{C_2}{C_3^{\frac{2}{2^*(s)}}}\omega_3\epsilon^2\ln\frac{1}{\epsilon} + O(\epsilon^2) \\
&= K(4,s)^{-1}\left(1 + \frac{C_2}{C_1}\omega_3\epsilon^2\ln\frac{1}{\epsilon} + O(\epsilon^2)\right).
\end{aligned}
$$

Ceci montre (3.2.28) dans le cas (D.1.ii).

Cas (D.1.iii) $n = 3$: Dans ce cas,

$$\begin{aligned} J(u_\epsilon) &= \frac{\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla\Phi(x)|^2 dx + O(\epsilon)}{\left(\int_{\mathbb{R}^3} \frac{|\Phi|^{2^*(s)}}{|x|^s} dx + O(\epsilon)\right)^{\frac{2}{2^*(s)}}} \\ &= \frac{\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla\Phi(x)|^2 dx}{\left(\int_{\mathbb{R}^3} \frac{|\Phi|^{2^*(s)}}{|x|^s} dx\right)^{\frac{2}{2^*(s)}}} + O(\epsilon). \\ &= K(3,s)^{-1} + O(\epsilon). \end{aligned}$$

Ceci montre (3.2.28) dans le cas (D.1.iii) et termine l'étape (D.1).

Étape D.2 : D'après les résultats (3.1.7) de l'étape (D.1), on voit clairement que la proposition 3.1.1 est démontrée pour $n = 4$. Dans le cas $n \geq 5$, et contrairement au cas particulier de $s = 0$ (voir pour cela, l'article [2] d'Aubin), on ne peut pas calculer explicitement les intégrales de $\kappa_1(n,s)$ et $\kappa_2(n,s)$ mais on sait calculer leurs rapport. Autrement dit, on sait calculer κ_2/κ_1. Ceci est faisable grâce au Lemme suivant dû à Aubin[2] :

Lemme 3.2.2 *Soient $p, q \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $p - q > 1$. On considère $I_p^q = \int_0^{+\infty} \frac{t^q dt}{(1+t)^p}$, Alors*

$$I_{p+1}^q = \frac{p-q-1}{p} I_p^q \text{ et } I_{p+1}^{q+1} = \frac{q+1}{p-q-1} I_{p+1}^q.$$

Preuve du Lemme 3.2.2 : En effet, une intégration par partie montre que $I_p^q = \frac{p}{q+1} I_{p+1}^{q+1}$. D'autre part, on voit facilement $I_p^q = I_{p+1}^q + I_{p+1}^{q+1}$. Les deux dernière relations impliquent directement le résultat demandé. □

Maintenant, on va calculer le rapport κ_2/κ_1 moyennant le lemme 3.2.2. En effet, on a pour $n \geq 5$:

$$\frac{\kappa_2(n,s)}{\kappa_1(n,s)} = \frac{-2}{2^\star(s)6n} \frac{\int_{\mathbb{R}^n} |X|^{2-s} |\Phi|^{2^\star(s)} dX}{\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\Phi|^{2^\star(s)}}{|X|^s} dX} \cdot \frac{\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla\Phi|^2 dX}{\int_{\mathbb{R}^n} |\Phi|^2 dX} + \frac{1}{6n} \frac{\int_{\mathbb{R}^n} |X|^2 |\nabla\Phi|^2 dX}{\int_{\mathbb{R}^n} \Phi^2 dX} \qquad (3.2.30)$$

En passant en coordonnées polaires (r, θ) et en posant que $t = r^{2-s}$ (sachant que $dr = \frac{1}{2-s} t^{-\frac{1-s}{2-s}} dt$), on obtiendra

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |\Phi|^2 dX &= \omega_{n-1} \int_0^{+\infty} \frac{r^{n-1} dr}{(1 + r^{2-s})^{\frac{2(n-2)}{2-s}}} \\ &= \frac{\omega_{n-1}}{2-s} \int_0^{+\infty} \frac{t^{\frac{n}{2-s}-1} dt}{(1+t)^{\frac{2(n-2)}{2-s}}} \qquad (3.2.31) \end{aligned}$$

De même, on aura que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} |X|^2 \cdot |\nabla\Phi|^2 dX &= (n-2)^2\omega_{n-1}\int_0^{+\infty} \frac{r^{n+3-2s}dr}{(1+r^{2-s})^{\frac{2(n-s)}{2-s}}} \\
&= \frac{(n-2)^2}{2-s}\omega_{n-1}\int_0^{+\infty} \frac{t^{\frac{n+2-s}{2-s}}dt}{(1+t)^{\frac{2(n-s)}{2-s}}} \\
&= \frac{(n-2)^2}{2-s}\omega_{n-1}\int_0^{+\infty} \frac{t^{\frac{n}{2-s}+1}dt}{(1+t)^{\frac{2(n-2)}{2-s}+2}}. \qquad (3.2.32)
\end{aligned}$$

En posant $q = \frac{n}{2-s} - 1, p = \frac{2(n-2)}{2-s}$, on aura pour $n \geq 5$ que : $p - q > 1$. Donc avec (3.2.31), (3.2.32) et le lemme 3.2.2, on aura :

$$\begin{aligned}
\frac{\int_{\mathbb{R}^n} |X|^2 \cdot |\nabla\Phi|^2 dX}{\int_{\mathbb{R}^n} |\Phi|^2 dX} &= \frac{\frac{(n-2)^2}{2-s}\omega_{n-1}I_{p+2}^{q+2}}{\frac{\omega_{n-1}}{2-s}I_p^q} \\
&= (n-2)^2 \times \frac{(q+1)(q+2)}{p(p+1)} \\
&= \frac{n(n-2)(n+2-s)}{2(2n-2-s)}. \qquad (3.2.33)
\end{aligned}$$

D'une façon similaire, on aura
*/ pour $p = \frac{2(n-2)}{2-s}, q = \frac{n}{2-s} - 1$:

$$\begin{aligned}
\frac{\int_{\mathbb{R}^n} |X|^{2-s} \cdot |\Phi|^{2^\star(s)} dX}{\int_{\mathbb{R}^n} |\Phi|^2 dX} &= \frac{I_{p+2}^{q+1}}{I_p^q} = \frac{(p-q-1)(q+1)}{p(p+1)} \\
&= \frac{n(n-4)}{2(n-2)(2n-2-s)}. \qquad (3.2.34)
\end{aligned}$$

**/ Pour $p = \frac{2(n-s)}{2-s}, q = \frac{n-s}{2-s} - 1$:

$$\begin{aligned}
\frac{\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla\Phi|^2 dX}{\int_{\mathbb{R}^n} |X|^{-s} \cdot |\Phi|^{2^*(s)} dX} &= (n-2)^2\frac{I_p^{q+1}}{I_p^q} = (n-2)^2\frac{q+1}{p-q-2} \\
&= (n-2)(n-s). \qquad (3.2.35)
\end{aligned}$$

En combinant (3.2.33), (3.2.34), (3.2.35) avec la formule (3.2.30) de $\frac{\kappa_2}{\kappa_1}$, on aura :

$$c_{n,s} := \frac{\kappa_2(n,s)}{\kappa_1(n,s)} = \frac{(n-2)(6-s)}{12(2n-2-s)}. \qquad (3.2.36)$$

Les relations (3.2.28) et (3.2.36) montrent la Proposition 3.1.1 quand $n \geq 5$. Ceci termine la preuve de la Proposition 3.1.1 et du Théoreème 3.1.1 pour $n \geq 4$. □

3.3 Cas $\dim(M) = 3$.

Dans cette partie, on démontre le Théorème 3.1.1 pour $n = 3$ et on donne des exemples des variétés de dimension 3 vérifiant la condition principale du Théorème 3.1.1 (à savoir la masse est positive en x_0) et par suite dans laquelle il existe une solution u de l'équation de Hardy-Sobolev

$$\Delta_g u + au = \lambda \frac{u^{2^\star(s)-1}}{d_g(x,x_0)^s}, \quad u > 0 \text{ et } \lambda > 0.$$

3.3.1 Preuve (ii) du Théorème.

Dans cette deuxième partie de la preuve du Théorème 3.1.1, on complète le travail initié dans la partie précédente. À savoir, trouver une suite des fonctions-tests $(v_\epsilon)_{\epsilon>0}$ sur M et un D.L. de $J(v_\epsilon)$ permettant de la comparer avec $K(3,s)^{-1}$. En utilisant la suite des fonctions-tests $(u_\epsilon)_{\epsilon>0}$ définie sur M, pour tout $\epsilon > 0$, par $u_\epsilon(x) = \epsilon^{\frac{1}{2}} \left(\epsilon^{2-s} + d_g(x,x_0)^{2-s}\right)^{\frac{-1}{2-s}}$ nous avons obtenu que $J(u_\epsilon) = K(3,s)^{-1} + O(\epsilon)$, où le signe de $O(\epsilon)$ est inconnu. Ce qui ne permet pas de conclure.

Afin de résoudre ce problème, on utilise la méthode de Schoen dans l'article [45] (voir aussi Druet [15]) qui consiste à introduire la fonction de Green. Ceci servira à compenser l'énérgie "parasite" dans l'expression de $J(u_\epsilon)$ et par suite à pousser le D.L. de J à l'ordre 1, c.à.d. démontrer que $J(v_\epsilon) = K(3,s)^{-1} + C\epsilon + o(\epsilon)$ où C est une constante > 0 ou bien < 0.

Définition 3.3.1 *On définit la fonction de Green (voir Appendice IV et [43]) G_{a,x_0} : $M \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$, associée à l'opérateur coèrcif $\Delta_g + a$, comme étant la seule fonction strictement positive et symétrique dans $L^1(M) \cap C^{2,\theta}(M \setminus \{x_0\})$, $\theta \in]0,1[$ et vérifiant au sens des distributions*

$$\Delta_g G_{a,x_0} + aG_{a,x_0} = D_{x_0}, \tag{3.3.37}$$

où D_{x_0} est la masse de Dirac au point x_0.

On considère $(\mathbb{B}_{\rho_0}(x_0), \exp_{x_0}^{-1})$ une carte exponentielle centrée en x_0 et de rayon $\rho_0 \in]0, i_g(M)/2[$ et une fonction de troncature $\eta \in C_c^\infty(\mathbb{B}_{2\rho_0}(x_0))$ tel que $0 \leq \eta \leq 1$ et $\eta \equiv 1$ sur $\mathbb{B}_{\rho_0}(x_0)$. D'après le Théorème 6.6.1, on peut écrire G_{a,x_0} sous la forme

$$4\pi G_{a,x_0}(x) = \frac{\eta(x)}{d_g(x,x_0)} + \beta_{x_0}(x), \tag{3.3.38}$$

avec $\beta_{x_0} \in H_2^p(M) \cap C^{0,\theta}(M) \cap C^{2,\gamma}(M \setminus \{x_0\})$, pour tous $p \in]\frac{3}{2}, 3[$, $\theta, \gamma \in]0,1]$ (voir Appendice IV). Ensuite, les deux équations précédentes permettent d'écrire en passant aux coordonnées polaires (r,θ) dans la carte exponentielle $(\mathbb{B}_\delta(x_0), \psi_{x_0}^{-1})$, que pour tout $x = r\theta \in \mathbb{B}_{\rho_0}(x_0)$, $r = d_g(x,x_0)$ et $\theta \in \mathbb{S}^{n-1}$, on a :

$$\Delta_g \beta_{x_0} + a\beta_{x_0} = f_{x_0}, \tag{3.3.39}$$

avec

$$f_{x_0}(x) := \begin{cases} -\Delta_g \left(\frac{\eta(x)}{d_g(x,x_0)}\right) - \frac{(a\eta)(x)}{d_g(x,x_0)} & \text{pour tout } \ x \in M \setminus \mathbb{B}_{\rho_0}(x_0) \ , \\ \frac{-\partial_r(\ln \det(g))}{2d_g(x,x_0)^2} - \frac{a(x)}{d_g(x,x_0)} & \text{pour tout } \ x \in \mathbb{B}_{\rho_0}(x_0). \end{cases} \tag{3.3.40}$$

En particulier, pour tout $p \in]1,3[$, on a : $f_{x_0} \in L^p(M)$.

Définition 3.3.2 *On définit la masse de la variété (M,g) correspondante à $\Delta_g + a$ et on note $m(x_0)$, la quantité $\beta_{x_0}(x_0)$ où β_{x_0} est définie comme ci-dessus.*

Remarque : La quantité $m(x_0)$ est indépendante du choix de la fonction de troncature η.

En suivant les calculs faits par Schoen dans son article [45] et Druet dans [15], **on définit** une nouvelle suite des fonctions-tests $(u_\epsilon)_{\epsilon>0}$ sur M et pour tout $\epsilon > 0$, par

$$v_\epsilon = \eta u_\epsilon + \sqrt{\epsilon}\beta_{x_0}.$$

Pour terminer la preuve de la Proposition 3.1.1 et du Théorème 3.1.1, nous allons démontrer dans ce qui suit de ce chapitre que :

$$J(v_\epsilon) = K(3,s)^{-1}\left(1 - \epsilon\frac{2\beta_{x_0}(x_0)\omega_2}{\int_{\mathbb{R}^n}|x|^{-s}\Phi^{2^\star(s)}\,dx} + o(\epsilon)\right) \tag{3.3.41}$$

quand $\epsilon \to 0$. Nous procédons par étapes mais avant cela, nous allons démontrer un Lemme utile.

Lemme 3.3.1 *Sur la couronne $\mathbb{B}_{2\rho_0}(x_0) \setminus \mathbb{B}_{\rho_0}(x_0)$, on peut écrire u_ϵ sous la forme*

$$u_\epsilon(x) = \frac{\sqrt{\epsilon}}{d_g(x,x_0)} + O(\epsilon^{\frac{5}{2}-s}) \text{ uniformement, avec } O(1) \in C^2(\mathbb{B}_{2\rho_0}(x_0)\backslash\mathbb{B}_{\rho_0}(x_0)). \tag{3.3.42}$$

Preuve du Lemme 3.3.1 : En effet, on munit la boule $\mathbb{B}_{2\rho_0}(x_0)$ de l'application exponentielle $\exp_{x_0}^{-1}$ et on passe aux coordonnées polaires (r,θ) telles que $r = d_g(x,x_0), \theta \in \mathbb{S}^{n-1}$. On a donc :

$$\begin{aligned}
\|u_\epsilon - \sqrt{\epsilon}d_g(x,x_0)^{-1}\|_\infty &= \sup_{x\in\mathbb{B}_{2\rho_0}(x_0)\backslash\mathbb{B}_{\rho_0}(x_0)}\left|u_\epsilon(x) - \sqrt{\epsilon}d_g(x,x_0)^{-1}\right| \\
&= \sqrt{\epsilon}\sup_{r\in]\rho_0,2\rho_0[}\left|\frac{1}{(\epsilon^{2-s}+r^{2-s})^{\frac{1}{2-s}}} - \frac{1}{r}\right| \\
&= \sqrt{\epsilon}\sup_{r\in]\rho_0,2\rho_0[}\left|\frac{1-\left(1+\frac{\epsilon^{2-s}}{r^{2-s}}\right)^{\frac{1}{2-s}}}{(\epsilon^{2-s}+r^{2-s})^{\frac{1}{2-s}}}\right| \\
&= \sqrt{\epsilon}\sup_{r\in]\rho_0,2\rho_0[}\left|\frac{O\left(\frac{\epsilon^{2-s}}{r^{2-s}}\right)}{(\epsilon^{2-s}+r^{2-s})^{\frac{1}{2-s}}}\right| \\
&= O(\epsilon^{\frac{5}{2}-s}).
\end{aligned} \tag{3.3.43}$$

D'autre part, sachant que

$$|\nabla u_\epsilon|_g = |\partial_r(u_\epsilon)| = \frac{\sqrt{\epsilon}r^{1-s}}{(\epsilon^{2-s}+r^{2-s})^{\frac{3-s}{2-s}}}$$

on obtient

$$
\begin{aligned}
\|\nabla u_\epsilon - \nabla(\sqrt{\epsilon} d_g(x,x_0)^{-1})\|_\infty &= \sqrt{\epsilon} \sup_{r\in]\rho_0,2\rho_0[} \left| \frac{r^{1-s}}{(\epsilon^{2-s}+r^{2-s})^{\frac{3-s}{2-s}}} - \frac{1}{r^2} \right| \\
&= \sqrt{\epsilon} \sup_{r\in]\rho_0,2\rho_0[} \left| \frac{r^{3-s}-(\epsilon^{2-s}+r^{2-s})^{\frac{3-s}{2-s}}}{r^2(\epsilon^{2-s}+r^{2-s})^{\frac{3-s}{2-s}}} \right| \\
&= \sqrt{\epsilon} \sup_{r\in]\rho_0,2\rho_0[} \left| \frac{r^{3-s}-r^{3-s}\left(1+\frac{\epsilon^{2-s}}{r^{2-s}}\right)^{\frac{3-s}{2-s}}}{r^2(\epsilon^{2-s}+r^{2-s})^{\frac{3-s}{2-s}}} \right| \\
&= O(\epsilon^{\frac{5}{2}-s}). \qquad (3.3.44)
\end{aligned}
$$

Avec le Lemme de Gauss ($g_{1i}=\delta_{1i}$ sur $\mathbb{B}_{2\rho_0}(x_0)$) et le fait que u_ϵ est une fonction radiale, on écrit :

$$
\begin{aligned}
\|\nabla^2 u_\epsilon - \nabla^2(\sqrt{\epsilon} d_g(x,x_0)^{-1})\|_\infty &= \sup_{x\in\mathbb{B}_{2\rho_0}(x_0)\backslash\mathbb{B}_{\rho_0}(x_0)} \left|\nabla^2 u_\epsilon - \nabla^2(\sqrt{\epsilon} d_g(x,x_0)^{-1})\right|_{g(x)} \\
&= \sup_{r\in]\rho_0,2\rho_0[} \left|\nabla^2_{rr} u_\epsilon - \nabla^2(\frac{\sqrt{\epsilon}}{r})\right|
\end{aligned}
$$

Puisque $\nabla^2_{rr}u(x) = \partial^2_{rr}u(x) - \Gamma^r_{rr}(x)\partial_r u(x)$, donc

$$
\begin{aligned}
\left|\partial^2_{rr}u(x) - \frac{2\sqrt{\epsilon}}{r^3}\right| &= \sqrt{\epsilon}\left[-(1-s)\frac{\epsilon^{2-s}}{r^s} + 2r^{2-2s} - 2r^{2-2s}\right. \\
&\quad \left. \times\left(1+\frac{\epsilon^{2-s}}{r^{2-s}}\right)^{\frac{5-2s}{2-s}}\right]
\end{aligned}
$$

Il s'ensuit que

$$
\begin{aligned}
\|\nabla^2 u_\epsilon - \nabla^2(\sqrt{\epsilon} d_g(x,x_0)^{-1})\|_\infty &\leq \left((1-s)\frac{\epsilon^{\frac{5}{2}-s}}{r^s}\right) + O(\epsilon^{\frac{5}{2}-s}) \\
&\quad + |\partial_r u_\epsilon - \partial_r(\sqrt{\epsilon} d_g(x,x_0)^{-1})| \times \|\Gamma^r_{rr}\|_\infty \\
&= O(\epsilon^{\frac{5}{2}-s}). \qquad (3.3.45)
\end{aligned}
$$

En combinant (3.3.43), (3.3.44) et (3.3.45), on tire

$$
\sum_{i=0}^{2} \|\nabla^i u_\epsilon - \nabla^i(\sqrt{\epsilon} d_g(x,x_0)^{-1})\|_\infty = O(\epsilon^{\frac{5}{2}-s}).
$$

D'où le résultat. □

Partie I : Estimation de $\int_M (|\nabla v_\epsilon|_g^2 + a v_\epsilon^2) dv_g$. Dans cette partie, on démontre que

$$
\int_M (|\nabla v_\epsilon|_g^2 + a v_\epsilon^2) dv_g = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi \Delta_\delta \Phi dX + \epsilon \omega_2 m(x_0) + o(\epsilon). \qquad (3.3.46)
$$

En effet, on a pour tous $\epsilon > 0$ et $p \in]\frac{3}{2}, 3[$, $v_\epsilon \in H_2^p(M)$, donc en intégrant par partie (voir Appendice IV), on peut écrire :

$$\begin{aligned}\int_M |\nabla v_\epsilon|_g^2 dv_g &= \int_M v_\epsilon \Delta_g v_\epsilon dv_g \\ &= \int_M \eta u_\epsilon \Delta_g(\eta u_\epsilon) dv_g + \int_M \Delta_g \beta_{x_0}(\epsilon \beta_{x_0} + 2\sqrt{\epsilon}\eta u_\epsilon) dv_g.\end{aligned}$$

Sachant que

$$\begin{aligned}\int_M \eta u_\epsilon \Delta_g(\eta u_\epsilon) dv_g &= \int_M \eta^2 u_\epsilon \Delta_g u_\epsilon dv_g + \int_M u_\epsilon^2 \eta \Delta_g \eta dv_g \\ &\quad - \int_M \eta(\nabla \eta, \nabla u_\epsilon^2)_g dv_g,\end{aligned}$$

Il s'ensuit que, pour tout $\epsilon > 0$, on a :

$$\begin{aligned}\int_M (|\nabla v_\epsilon|_g^2 + a v_\epsilon^2) dv_g &= \int_M \eta^2 u_\epsilon \Delta_g u_\epsilon dv_g + \int_M u_\epsilon^2 \eta \Delta_g \eta dv_g \\ &\quad - \int_M \eta(\nabla \eta, \nabla u_\epsilon^2)_g dv_g + \int_M a\eta^2 u_\epsilon^2 dv_g \\ &\quad + \int_M (\Delta_g \beta_{x_0} + a\beta_{x_0})(\epsilon \beta_{x_0} + 2\sqrt{\epsilon}\eta u_\epsilon) dv_g. \qquad (3.3.47)\end{aligned}$$

En écrivant u_ϵ^2 sous la forme

$$u_\epsilon^2(x) = \frac{\epsilon}{d_g(x,x_0)^2}\left[1 + O\left(\frac{\epsilon^{2-s}}{\epsilon^{2-s} + d_g(x,x_0)^{2-s}}\right)\right],$$

on aura, pour tout $x \in M \setminus \mathbb{B}_{\rho_0}(x_0)$, que :

$$u_\epsilon^2(x) = \frac{\epsilon}{d_g(x,x_0)^2} + \epsilon^{3-s} f_\epsilon(x), \text{ avec } f_\epsilon \in C^2(M \setminus \mathbb{B}_{\rho_0}(x_0)). \qquad (3.3.48)$$

(voir le Lemme 3.3.1) Par suite, on obtient successivement pour tout $\epsilon > 0$:

$$\int_M u_\epsilon^2 \eta \Delta_g \eta dv_g = \epsilon \int_{M\setminus \mathbb{B}_{\rho_0}(x_0)} \frac{\eta \Delta_g \eta}{d_g(x,x_0)^2} dv_g + o(\epsilon), \qquad (3.3.49)$$

et

$$\int_M \eta(\nabla \eta, \nabla u_\epsilon^2)_g dv_g = \epsilon \int_{M\setminus \mathbb{B}_{\rho_0}(x_0)} \eta(\nabla \eta, \nabla \frac{1}{d_g(x,x_0)^2})_g dv_g + o(\epsilon). \qquad (3.3.50)$$

Mais comme $\partial_\nu \eta = 0$ sur $\partial \mathbb{B}_{\rho_0}(x_0)$ donc en intégrant par partie on peut écrire :

$$\int_{M\setminus \mathbb{B}_{\rho_0}(x_0)} \frac{\eta \Delta_g \eta}{d_g(x,x_0)^2} dv_g = \int_{M\setminus \mathbb{B}_{\rho_0}(x_0)} (\nabla \eta, \nabla \frac{\eta}{d_g(x,x_0)^2})_g dv_g. \qquad (3.3.51)$$

En combinant (3.3.49), (3.3.50) et (3.3.51), on aura :

$$\int_M u_\epsilon^2 \eta \Delta_g \eta dv_g - \int_M \eta(\nabla \eta, \nabla u_\epsilon^2)_g dv_g = \epsilon \int_{M\setminus \mathbb{B}_{\rho_0}(x_0)} \frac{|\nabla \eta|_g^2}{d_g(x,x_0)^2} dv_g + o(\epsilon). \qquad (3.3.52)$$

Avec les mêmes arguments utilisés ci-dessus, on obtient :

$$\int_M a\eta^2 u_\epsilon^2 dv_g = \epsilon \int_M \frac{a\eta^2}{d_g(x,x_0)^2} dv_g + \mathrm{I}(\epsilon) + o(\epsilon),$$

avec

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}(\epsilon) &= O\left(\epsilon^{3-s} \int_{\mathbb{B}_{\rho_0}(x_0)} \frac{a\eta^2 dv_g}{d_g(x,x_0)^2(\epsilon^{2-s} + d_g(x,x_0)^{2-s})}\right) \\
&= O\left(\epsilon^2 \int_0^{\frac{\rho_0}{\epsilon}} \frac{d\rho}{1+\rho^{2-s}}\right) + o(\epsilon).
\end{aligned}$$

Si $s < 1$ alors

$$\int_0^{\frac{\rho_0}{\epsilon}} \frac{d\rho}{1+\rho^{2-s}} = \kappa_1 + \left[\frac{1}{\rho^{1-s}}\right]_{\rho=1}^{\rho=\frac{\rho_0}{\epsilon}} = O(\epsilon^{1-s}).$$

Donc $\mathrm{I}(\epsilon) = o(\epsilon)$. Si $s = 1$ alors on a de même, que $\mathrm{I}(\epsilon) = O(\epsilon^2 \ln \frac{1}{\epsilon})$. Maintenant si $s > 1$ alors on peut écrire :

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\rho_0}{\epsilon}} \frac{d\rho}{1+\rho^{2-s}} &= \int_0^1 \frac{d\rho}{1+\rho^{2-s}} + \int_1^{\frac{\rho_0}{\epsilon}} \frac{d\rho}{1+\rho^{2-s}} \\
&= \kappa_2 + \int_1^{\frac{\rho_0}{\epsilon}} \frac{d\rho}{\rho^{2-s}} + \int_1^{\frac{\rho_0}{\epsilon}} d\rho \left[\frac{1}{1+\rho^{2-s}} - \frac{1}{\rho^{2-s}}\right] \\
&= \kappa_2 + C\epsilon^{1-s} - \int_1^{\frac{\rho_0}{\epsilon}} \frac{d\rho}{\rho^{2-s}(1+\rho^{2-s})}
\end{aligned}$$

Tout calcul fait montre que

$$\int_1^{\frac{\rho_0}{\epsilon}} \frac{d\rho}{\rho^{2-s}(1+\rho^{2-s})} \le \int_1^{\frac{\rho_0}{\epsilon}} \frac{d\rho}{\rho^{4-2s}} = O(1 + \ln\frac{1}{\epsilon} + \epsilon^{3-2s})$$

Donc si $s > 1$ alors $\mathrm{I}(\epsilon) = o(\epsilon)$. Par suite, on a :

$$\int_M a\eta^2 u_\epsilon^2 dv_g = \epsilon \int_M \frac{a\eta^2}{d_g(x,x_0)^2} dv_g + o(\epsilon). \tag{3.3.53}$$

Maintenant si on écrit u_ϵ sous la forme

$$u_\epsilon(x) = \frac{\sqrt{\epsilon}}{d_g(x,x_0)}\left[1 + O\left(\frac{\epsilon^{2-s}}{\epsilon^{2-s} + d_g(x,x_0)^{2-s}}\right)\right], \tag{3.3.54}$$

avec $O(1) \in C^0(M)$, on aura alors sur $M \setminus \mathbb{B}_{\rho_0}(x_0)$:

$$u_\epsilon(x) = \frac{\sqrt{\epsilon}}{d_g(x,x_0)} + O(\epsilon^{\frac{5}{2}-s}),\ O(1) \in C^2(M \setminus \mathbb{B}_{\rho_0}(x_0))$$

et

$$\int_{M\setminus\mathbb{B}_{\rho_0}(x_0)} \eta^2 u_\epsilon \Delta_g u_\epsilon dv_g = \epsilon \int_{M\setminus\mathbb{B}_{\rho_0}(x_0)} \frac{\eta^2}{d_g(x,x_0)} \Delta_g(\frac{1}{d_g(x,x_0)}) dv_g + o(\epsilon). \tag{3.3.55}$$

D'autre part, en passant en coordonnées normales polaires dans la boule exponentielle $\mathbb{B}_{\rho_0}(x_0)$, un simple calcul montrera que

$$\partial_r u_\epsilon(r) = -\frac{\sqrt{\epsilon} r^{1-s}}{\left(\epsilon^{2-s} + r^{2-s}\right)^{\frac{3-s}{2-s}}} \text{ et } \partial_r^2 u_\epsilon(r) = \frac{-\sqrt{\epsilon}(-2r^{2-s} + (1-s)\epsilon^{2-s})}{r^s\left(\epsilon^{2-s} + r^{2-s}\right)^{\frac{5-2s}{2-s}}},$$

ainsi que

$$\Delta_\delta u_\epsilon = \frac{(3-s)\epsilon^{\frac{5}{2}-s}}{r^s\left(\epsilon^{2-s} + r^{2-s}\right)^{\frac{5-2s}{2-s}}}.$$

Ensuite on a :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{B}_{\rho_0}(x_0)} u_\epsilon \Delta_\delta u_\epsilon dv_g &= \epsilon^{3-s}(3-s)\omega_2 \int_0^{\rho_0} \frac{r^{2-s}(1+O(r^2))}{\left(\epsilon^{2-s} + r^{2-s}\right)^{\frac{6-2s}{2-s}}} dr \\
&= (3-s)\omega_2 \int_0^{\frac{\rho_0}{\epsilon}} \frac{\rho^{2-s}(1+O(\epsilon^2\rho^2))}{\left(1+\rho^{2-s}\right)^{\frac{6-2s}{2-s}}} d\rho \\
&= (3-s)\omega_2 \int_0^{+\infty} \frac{\rho^{2-s} d\rho}{\left(1+\rho^{2-s}\right)^{\frac{6-2s}{2-s}}} + o(\epsilon) \\
&= (3-s) \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\Phi^{2^*(s)}(X)}{|X|^s} dX + o(\epsilon) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \Phi \Delta_\delta \Phi dX + o(\epsilon),
\end{aligned}$$

avec $\Phi : X \in \mathbb{R}^n \mapsto \left(1 + |X|^{2-s}\right)^{-\frac{1}{2-s}}$ Et comme

$$\Delta_g u_\epsilon = \Delta_\delta u_\epsilon - \frac{1}{2}\partial_r(\ln\det(g))\partial_r u_\epsilon$$

d'où

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{B}_{\rho_0}(x_0)} u_\epsilon \Delta_g u_\epsilon dv_g &= \int_{\mathbb{R}^n} \Phi \Delta_\delta \Phi dX + o(\epsilon) \\
&\quad + \epsilon \int_{\mathbb{B}_{\rho_0}(x_0)} \frac{d_g(x,x_0)^{1-s}\partial_r(\ln\det(g))}{2\left(\epsilon^{2-s} + d_g(x,x_0)^{2-s}\right)^{\frac{4-s}{2-s}}} dv_g.
\end{aligned} \tag{3.3.56}$$

Un développement semblable à (3.3.54) donne que

$$\begin{aligned}
\epsilon \int_{\mathbb{B}_{\rho_0}(x_0)} \frac{d_g(x,x_0)^{1-s}\partial_r(\ln\det(g))}{2\left(\epsilon^{2-s} + d_g(x,x_0)^{2-s}\right)^{\frac{4-s}{2-s}}} dv_g &= \epsilon \int_{\mathbb{B}_{\rho_0}(x_0)} \frac{\partial_r(\ln\det(g))}{2d_g(x,x_0)^3} dv_g + \\
&\quad O\left(\epsilon^{3-s} \int_{\mathbb{B}_{\rho_0}(x_0)} \frac{\partial_r(\ln\det(g))}{d_g(x,x_0)^3(\epsilon^{2-s} + d_g(x,x_0)^{2-s})} dv_g\right),
\end{aligned} \tag{3.3.57}$$

et un développement limité de la métrique g dans la carte exponentielle $(\mathbb{B}_{\rho_0}(x_0), \psi_{x_0}^{-1})$ en coordionnées normales polaires $x = r\theta$ perment d'écrire

$$\begin{aligned}
\partial_r(\ln\det(g))(x) &= \partial_r \ln\left(1 - \frac{r^2}{3}R_{\alpha\mu}(x_0)\theta^\alpha\theta^\mu + O(r^3)\right)\\
&= \partial_r\left(-\frac{r^2}{3}R_{\alpha\mu}(x_0)\theta^\alpha\theta^\mu + O(r^3)\right)\\
&= -\frac{2r}{3}R_{\alpha\mu}(x_0)\theta^\alpha\theta^\mu + O(r^2). \qquad (3.3.58)
\end{aligned}$$

Il s'ensuit de (3.3.57) et (3.3.58) que

$$\epsilon\int_{\mathbb{B}_{\rho_0}(x_0)} \frac{d_g(x,x_0)^{1-s}\partial_r(\ln det(g))}{2(\epsilon^{2-s} + d_g(x,x_0)^{2-s})^{\frac{4-s}{2-s}}}dv_g = \epsilon\int_{\mathbb{B}_{\rho_0}(x_0)} \frac{\partial_r(\ln det(g))}{2d_g(x,x_0)^3}dv_g + o(\epsilon) \qquad (3.3.59)$$

Alors les équations (3.3.55), (3.3.56) et (3.3.59) impliquent que

$$\begin{aligned}
\int_M \eta^2 u_\epsilon \Delta_g u_\epsilon dv_g &= \int_{\mathbb{R}^n}\Phi\Delta_\delta\Phi dX + o(\epsilon) + \epsilon\int_{\mathbb{B}_{\rho_0}(x_0)}\frac{\partial_r(\ln det(g))}{2d_g(x,x_0)^3}dv_g\\
&\quad+\epsilon\int_{M\setminus\mathbb{B}_{\rho_0}(x_0)}\frac{\eta^2}{d_g(x,x_0)}\Delta_g(\frac{1}{d_g(x,x_0)})dv_g. \qquad (3.3.60)
\end{aligned}$$

Il reste à estimer $\int_M(\Delta_g\beta_{x_0} + a\beta_{x_0})(\epsilon\beta_{x_0} + 2\sqrt{\epsilon}\eta u_\epsilon)dv_g$ dans (3.3.47). En effet, pour tout $p \in]\frac{3}{2}, 3[$ on a : $\Delta_g\beta_{x_0} + a\beta_{x_0}, \beta_{x_0}, \frac{\eta}{d_g(x,x_0)} \in L^p(M)$ donc étant donné $p_1, p_2 \in]\frac{3}{2}, 3[$ deux nombres conjugués, (remarquons que pour tout $p, p_1 \in]\frac{3}{2}, 3[$, le conjugué p_2 est aussi dans $]\frac{3}{2}, 3[$), on a donc :

$$\begin{aligned}
\int_M \left|(\Delta_g\beta_{x_0} + a\beta_{x_0})(\beta_{x_0} + 2\frac{\eta}{d_g(x,x_0)})\right| dv_g &\le \|\Delta_g\beta_{x_0} + a\beta_{x_0}\|_{p_1} \times (\|\beta_{x_0}\|_{p_2}\\
&\quad+2\|d_g(x,x_0)^{-1}\|_{p_2}).
\end{aligned}$$

Le développement (3.3.54) de u_ϵ donne que

$$\begin{aligned}
\int_M(\Delta_g\beta_{x_0} + a\beta_{x_0})(\epsilon\beta_{x_0} + 2\sqrt{\epsilon}\eta u_\epsilon)dv_g &= \epsilon\int_M(\Delta_g\beta_{x_0} + a\beta_{x_0})(\beta_{x_0} + 2\frac{\eta}{d_g(x,x_0)})dv_g +\\
&\quad O\left(\epsilon^{3-s}\int_M\frac{(\Delta_g\beta_{x_0} + a\beta_{x_0})\eta}{d_g(x,x_0)(\epsilon^{2-s} + d_g(x,x_0)^{2-s})}dv_g\right).
\end{aligned}$$

En utilisant l'équation (3.3.39) et en faisant des calculs semblables à ce qu'on a déjà fait dans la dernière estimation, on obtiendra :

$$O\left(\epsilon^{3-s}\int_M\frac{(\Delta_g\beta_{x_0} + a\beta_{x_0})\eta}{d_g(x,x_0)(\epsilon^{2-s} + d_g(x,x_0)^{2-s})}dv_g\right) = o(\epsilon)$$

et donc

$$\int_M(\Delta_g\beta_{x_0} + a\beta_{x_0})(\epsilon\beta_{x_0} + 2\sqrt{\epsilon}\eta u_\epsilon)dv_g = \epsilon\int_M(\Delta_g\beta_{x_0} + a\beta_{x_0})(\beta_{x_0} + 2\frac{\eta}{d_g(x,x_0)})dv_g + o(\epsilon). \qquad (3.3.61)$$

Avec la formule de Green (voir Appendice V, Proposition 6.6.2), on a :

$$\begin{aligned}\int_M (\Delta_g \beta_{x_0} + a\beta_{x_0})(\beta_{x_0} + \frac{\eta}{d_g(x,x_0)})dv_g &= \int_M (\Delta_g \beta_{x_0} + a\beta_{x_0})\omega_2 G_{a,x_0} dv_g \\ &= \omega_2 \int_M (\Delta_g G_{a,x_0} + aG_{a,x_0})\beta_{x_0} dv_g \\ &= \omega_2 \beta_{x_0}(x_0), \end{aligned} \tag{3.3.62}$$

et

$$\begin{aligned}\int_M (\Delta_g \beta_{x_0} + a\beta_{x_0})\frac{\eta}{d_g(x,x_0)}dv_g &= -\int_{\mathbb{B}_{\rho_0}(x_0)} \frac{\partial_r(\ln\det(g))}{2d_g(x,x_0)^3}dv_g - \int_M \frac{a\eta^2}{d_g(x,x_0)^2}dv_g + \\ &\quad - \int_{M\setminus\mathbb{B}_{\rho_0}(x_0)} \frac{\eta}{d_g(x,x_0)}\Delta_g(\frac{\eta}{d_g(x,x_0)})dv_g, \end{aligned} \tag{3.3.63}$$

et puisque $\frac{\eta}{d_g(x,x_0)} \in C^\infty(\mathbb{B}_{2\rho_0}(x_0) \setminus \mathbb{B}_{\rho_0}(x_0))$

$$\int_{M\setminus\mathbb{B}_{\rho_0}(x_0)} \frac{\eta}{d_g(x,x_0)}\Delta_g(\frac{\eta}{d_g(x,x_0)})dv_g \tag{3.3.64}$$

$$\begin{aligned} &= \int_{M\setminus\mathbb{B}_{\rho_0}(x_0)} (\nabla\frac{\eta}{d_g(x,x_0)}, \nabla\frac{\eta}{d_g(x,x_0)})_g dv_g - \int_{\partial(M\setminus\mathbb{B}_{\rho_0}(x_0))} \frac{\eta}{d_g(x,x_0)}\partial_\nu\left(\frac{\eta}{d_g(x,x_0)}\right)dv_g \\ &= \int_{M\setminus\mathbb{B}_{\rho_0}(x_0)} (\nabla\frac{\eta}{d_g(x,x_0)}, \nabla\frac{\eta}{d_g(x,x_0)})_g dv_g - \int_{\partial(M\setminus\mathbb{B}_{\rho_0}(x_0))} \frac{\eta^2}{d_g(x,x_0)}\partial_\nu d_g(x,x_0)^{-1}dv_g \\ &= \int_{M\setminus\mathbb{B}_{\rho_0}(x_0)} \frac{\eta^2}{d_g(x,x_0)}\Delta_g(\frac{1}{d_g(x,x_0)})dv_g + \int_{M\setminus\mathbb{B}_{\rho_0}(x_0)} \frac{|\nabla\eta|_g^2 dv_g}{d_g(x,x_0)^2} \end{aligned} \tag{3.3.65}$$

car $\partial_\nu\eta = 0$ sur $\partial\mathbb{B}_{\rho_0}(x_0)$ et

$$\begin{aligned}&\int_{M\setminus\mathbb{B}_{\rho_0}(x_0)} \frac{\eta^2}{d_g(x,x_0)}\Delta_g(\frac{1}{d_g(x,x_0)})dv_g \\ &= \int_{M\setminus\mathbb{B}_{\rho_0}(x_0)} (\nabla\frac{\eta^2}{d_g(x,x_0)}, \nabla\frac{1}{d_g(x,x_0)})_g dv_g - \int_{\partial(M\setminus\mathbb{B}_{\rho_0}(x_0))} \frac{\eta^2}{d_g(x,x_0)}\partial_\nu d_g(x,x_0)^{-1}dv_g\end{aligned}$$

donc en combinant les équations (3.3.52), (3.3.53), (3.3.60) et (3.3.61) avec l'équation (3.3.47) (et sachant que (3.3.62), (3.3.63) et (3.3.64)), on aura :

$$\int_M (|\nabla v_\epsilon|_g^2 + av_\epsilon^2)dv_g = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi\Delta_\delta\Phi dX + \epsilon\omega_2\beta_{x_0}(x_0) + o(\epsilon).$$

Ceci termine la partie **I** de la preuve (ii) de la Proposition 3.1.1.

Partie II : Estimation de $\int_M \frac{v_\epsilon^{2^*(s)}}{d_g(x,x_0)^s}dv_g$. Dans cette partie, on démontre que

$$\int_M \frac{v_\epsilon^{2^*(s)}}{d_g(x,x_0)^s}dv_g = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\Phi^{2^*(s)}(X)}{|X|^s}dX + (2\beta_{x_0}(x_0)\omega_2)\,\epsilon + o(\epsilon). \tag{3.3.66}$$

En effet, on a pour tout $\epsilon > 0$:

$$\begin{aligned}
\int_M \frac{v_\epsilon^{2^*(s)}}{d_g(x,x_0)^s} dv_g &= \int_M \frac{(\eta u_\epsilon + \sqrt{\epsilon}\beta_{x_0})^{6-2s}}{d_g(x,x_0)^s} dv_g \\
&= \int_{\mathbb{B}_{\rho_0}(x_0)} \frac{(u_\epsilon + \sqrt{\epsilon}\beta_{x_0})^{6-2s}}{d_g(x,x_0)^s} dv_g + O(\epsilon^{3-s})
\end{aligned}$$

Or il existe $C(s) > 0$ tel que pour tout $x, y \in \mathbb{R}^*$, on a :

$$\left| |x+y|^{6-2s} - |x|^{6-2s} - (6-2s)xy|x|^{4-2s} \right| \leq C(s) \left| |x|^{4-2s} y^2 + |y|^{6-2s} \right|,$$

(voir Appendice III, Lemme 6.4.1), ceci permet d'écrire

$$\int_M \frac{v_\epsilon^{2^*(s)}}{d_g(x,x_0)^s} dv_g = \int_{\mathbb{B}_{\rho_0}(x_0)} \frac{u_\epsilon^{6-2s} + (6-2s)|u_\epsilon|^{6-2s-2} u_\epsilon \sqrt{\epsilon}\beta_{x_0}}{d_g(x,x_0)^s} dv_g + \mathrm{III}(\epsilon) + o(\epsilon) \tag{3.3.67}$$

avec

$$\begin{aligned}
\mathrm{III}(\epsilon) &= O\left(\int_{\mathbb{B}_{\rho_0}(x_0)} \frac{u_\epsilon^{4-2s}\epsilon\beta_{x_0}^2 + \epsilon^{3-s}|\beta_{x_0}|^{6-2s}}{d_g(x,x_0)^s} dv_g \right) \\
&= O\left(\epsilon^{3-s} \int_0^{\rho_0} \left[(\epsilon^{2-s} + r^{2-s})^{-2} \right] r^{2-s}(1 + O(r^2)) dr \right) + o(\epsilon) \\
&= o(\epsilon).
\end{aligned}$$

On a successivement :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{B}_{\rho_0}(x_0)} \frac{u_\epsilon^{6-2s}}{d_g(x,x_0)^s} dv_g &= \epsilon^{3-s} \int_{\mathbb{B}_{\rho_0}(x_0)} \frac{dv_g}{d_g(x,x_0)^s (\epsilon^{2-s} + d_g(x,x_0)^{2-s})^{\frac{6-2s}{2-s}}} \\
&= \epsilon^{3-s}\omega_2 \int_0^{\rho_0} \frac{r^{2-s}(1+O(r^2))dr}{(\epsilon^{2-s} + r^{2-s})^{\frac{6-2s}{2-s}}} \\
&= \omega_2 \int_0^{\frac{\rho_0}{\epsilon}} \frac{\rho^{2-s}(1 + O(\epsilon^2\rho^2))d\rho}{(1+\rho^{2-s})^{\frac{6-2s}{2-s}}} \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\Phi^{2^*(s)}(X)}{|X|^s} dX + o(\epsilon),
\end{aligned} \tag{3.3.68}$$

et puisque $\beta_{x_0} \in C^{0,\theta}(M), \theta \in]0,1[$, donc

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{B}_{\rho_0}(x_0)} \frac{(6-2s)|u_\epsilon|^{6-2s-2}u_\epsilon\sqrt{\epsilon}\beta_{x_0}}{d_g(x,x_0)^s} & dv_g = \epsilon^{3-s}(6-2s)\beta_{x_0}(x_0)\omega_2 \int_0^{\rho_0} \frac{r^{2-s}(1+O(r^2))dr}{(\epsilon^{2-s}+r^{2-s})^{\frac{5-2s}{2-s}}} \\
& +O\left(\epsilon^{3-s}\int_0^{\rho_0} \frac{r^{2+\theta-s}(1+O(r^2))dr}{(\epsilon^{2-s}+r^{2-s})^{\frac{5-2s}{2-s}}}\right) \\
&= \epsilon(6-2s)\beta_{x_0}(x_0)\omega_2 \int_0^{\frac{\rho_0}{\epsilon}} \frac{\rho^{2-s}(1+O(\epsilon^2\rho^2))d\rho}{(1+\rho^{2-s})^{\frac{5-2s}{2-s}}} \\
& +O\left(\epsilon^{1+\theta}\int_0^{\frac{\rho_0}{\epsilon}} \frac{\rho^{2+\theta-s}(1+O(\epsilon^2\rho^2))d\rho}{(1+\rho^{2-s})^{\frac{5-2s}{2-s}}}\right) \\
&= \epsilon(6-2s)\beta_{x_0}(x_0)\omega_2 \int_0^{+\infty} \frac{\rho^{2-s}d\rho}{(1+\rho^{2-s})^{\frac{5-2s}{2-s}}} + o(\epsilon),
\end{aligned} \tag{3.3.69}$$

Or on a d'après l'équation (3.0.4) :

$$\begin{aligned}
\omega_2 \int_0^{+\infty} \frac{\rho^{2-s}d\rho}{(1+\rho^{2-s})^{\frac{5-2s}{2-s}}} &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\Phi^{2^*(s)-1}(X)}{|X|^s}dX \\
&= (3-s)^{-1}\int_{\mathbb{R}^n} \Delta\Phi dX \\
&= (3-s)^{-1}\lim_{R\to+\infty}\int_{\mathbb{B}_R(0)} \Delta\Phi dX \\
&= (3-s)^{-1}\lim_{R\to+\infty}\int_{\partial\mathbb{B}_R(0)} -\partial_\nu\Phi dX,
\end{aligned} \tag{3.3.70}$$

ν désigne le champ de vecteurs normal extérieur sur $\mathbb{B}_R(0)$, et

$$\partial_\nu\Phi = -|X|^{1-s}(1+|X|^{2-s})^{\frac{-3+s}{2-s}}$$

donc

$$\begin{aligned}
\lim_{R\to+\infty}\int_{\partial\mathbb{B}_R(0)} -\partial_\nu\Phi dX &= \lim_{R\to+\infty}\int_{\partial\mathbb{B}_R(0)} \frac{|X|^{1-s}dX}{(1+|X|^{2-s})^{\frac{3-s}{2-s}}} \\
&= \lim_{R\to+\infty} \frac{R^{1-s}}{(1+R^{2-s})^{\frac{3-s}{2-s}}} \times \omega_2 R^2 = 4\pi.
\end{aligned} \tag{3.3.71}$$

Les relations (3.3.69), (3.3.70) et (3.3.71) donnent

$$\int_{\mathbb{B}_{\rho_0}(x_0)} \frac{(6-2s)|u_\epsilon|^{6-2s-2}u_\epsilon\sqrt{\epsilon}\beta_{x_0}}{d_g(x,x_0)^s}dv_g = \epsilon\left(8\pi\beta_{x_0}(x_0)\right) + o(\epsilon). \tag{3.3.72}$$

donc en combinant (3.3.68) et (3.3.72) avec l'équation (3.3.67), on obtient :

$$\int_M \frac{v_\epsilon^{2^*(s)}}{d_g(x,x_0)^s}dv_g = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\Phi^{2^*(s)}(X)}{|X|^s}dX + \epsilon\left(8\pi\beta_{x_0}(x_0)\right) + o(\epsilon).$$

Ceci termine la partie **II** de la preuve (ii) de la proposition 3.1.1.

Partie III : Estimation de $J(v_\epsilon)$: On a d'après (3.3.66) et (3.0.4) :

$$\begin{aligned}\left(\int_M \frac{v_\epsilon^{2^*(s)}}{d_g(x,x_0)^s}dv_g\right)^{\frac{2}{2^*(s)}} &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\Phi^{2^*(s)}(X)}{|X|^s}dX\right)^{\frac{2}{2^*(s)}}\left[1+\epsilon\frac{8\pi\beta_{x_0}(x_0)}{(3-s)\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\Phi^{2^*(s)}(X)}{|X|^s}dX}+o(\epsilon)\right]\\ &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\Phi^{2^*(s)}(X)}{|X|^s}dX\right)^{\frac{2}{2^*(s)}}\left[1+\epsilon\frac{8\pi\beta_{x_0}(x_0)}{\int_{\mathbb{R}^n}\Phi\Delta_\delta\Phi dX}+o(\epsilon)\right]\end{aligned} \tag{3.3.73}$$

Comme on a (avec l'équation (3.3.46))

$$\int_M(|\nabla v_\epsilon|_g^2+av_\epsilon^2)dv_g=\int_{\mathbb{R}^n}\Phi\Delta_\delta\Phi dX\left[1+\epsilon\frac{4\pi\beta_{x_0}(x_0)}{\int_{\mathbb{R}^n}\Phi\Delta_\delta\Phi dX}+o(\epsilon)\right] \tag{3.3.74}$$

donc en combinant les équations (3.3.73) et (3.3.74), on aura :

$$\begin{aligned}J(v_\epsilon) &= \frac{\int_M(|\nabla v_\epsilon|_g^2+av_\epsilon^2)dv_g}{\left(\int_M\frac{v_\epsilon^{2^*(s)}}{d_g(x,x_0)^s}dv_g\right)^{\frac{2}{2^*(s)}}}\\ &= K(3,s)^{-1}\left[1-\epsilon\beta_{x_0}(x_0)\frac{4\pi}{\int_{\mathbb{R}^n}\Phi\Delta_\delta\Phi dX}+o(\epsilon)\right].\end{aligned} \tag{3.3.75}$$

Ceci achève la preuve (ii) de la Proposition 3.1.1 et du Théorème 3.1.1 pour $n=3$. ☐

3.3.2 Exemples avec la masse positive

Proposition 3.3.1 *Soit (M,g) une variété compacte de dimension $n=3$. Soit $a\in C^{0,\gamma}(M)$, $\gamma\in]0,1[$ telle que Δ_g+a est coercif, $x_0\in M$ et $s\in]0,2[$. Si $\{a\lneqq c_{3,0}Scal_g\}$ ou bien $\{a\equiv c_{3,0}Scal_g$ et (M,g) n'est pas conformément équivalente à la n-sphère canonique $\mathbb{S}^n$. Alors on a :*

$$\inf_{v\in H_1^2(M)\setminus\{0\}} J(v)<K(3,s)^{-1}.$$

En effet, la positivité de la masse de (M,g) en x_0 a été démontré dans ce cas par Druet dans [16]. Nous intégrons sa preuve dans le Lemme suivant.

Lemme 3.3.2 *Soit (M,g) une variété compacte de dimension $n=3$. On considère $a,a'\in C^{0,\gamma}(M)$, $\gamma\in]0,1[$ telles que les opérateurs Δ_g+a et Δ_g+a' soient coercifs . On note par G_x,G'_x les fonctions de Green respectives en tout point $x\in M$. On suppose que $a\lneqq a'$. alors $\beta_x>\beta'_x$ pour tout $x\in M$, avec $\beta_x,\beta'_x\in C^{0,\theta}(M)$, $\theta\in]0,1[$ telle que*

$$\omega_2G_x=\frac{\eta}{d_g(x,\cdot)}+\beta_x \quad et \quad \omega_2G'_x=\frac{\eta}{d_g(x,\cdot)}+\beta'_x. \tag{3.3.76}$$

où η est une fonction de troncature au voisinage de x.

Preuve du Lemme 3.3.2 : On fixe $x \in M$ et on définit $h_x = \beta'_x - \beta_x$, tel que β'_x et β_x sont comme dans (3.3.38) (voir Appendice (6.6)). Notons $L := \Delta_g + a$ et $L' := \Delta_g + a'$. En utilisant la définition de la fonction de Green, on écrit :

$$L'(h_x) = \omega_2 L'(G'_x - G_x) = -(a' - a)G_x.$$

Il s'ensuit que : $L'(h_x) = -(a' - a)G_x \leq 0$. Maintenant, puisque $h_x \in H_2^p(M)$, pour tout $p \in]1, 3[$, donc pour tout $y \in M$, la formule de Green (6.6.2) implique

$$\begin{aligned} h_x(y) &= \int_M G'_y(z) L'(h_x)\, dv_g(z) \\ &= -\int_M G'_y(z)(a' - a)(z) G_x(z)\, dv_g(z). \end{aligned}$$

Les fonctions G_x, G'_y et $a' - a$ étant toutes positives alors $h_x \leq 0$. En plus, puisque $a \not\equiv a'$, $G_x > 0$ p.p. et $G'_y > 0$ p.p., on a donc $h_x < 0$. Ceci termine la preuve du Lemme 3.3.2. $\square$

Preuve de la Proposition 3.3.1 : On considère l'opérateur $L^0 := \Delta_g + c_{3,0}\mathrm{Scal}_g$, β^0 étant la masse de (M, g) correspondante à L^0. Le Théorème de la masse positive (voir [46], [47]) implique que $\beta^0_x(x) \geq 0$, sachant que l'égalité est atteinte uniquement par la classe conforme de la sphère canonique. Il s'ensuit du Lemme 3.3.2 que $\beta_{x_0}(x_0) > 0$ lorsque $\{a \lneqq c_{3,0}\mathrm{Scal}_g\}$ ou bien $\{a \equiv c_{3,0}\mathrm{Scal}_g$ et que (M, g) n'est pas conformement équivalente à la n-sphère canonique $\mathbb{S}^n$. Le Théorème 3.1.1 implique ensuite que $\inf_{v \in H_1^2(M)\setminus\{0\}} J(v) < K(3, s)^{-1}$. $\square$

Chapitre 4

Équation de Hardy-Sobolev perturbée

Soient (M, g) une variété Riemannienne compacte de dimension $n \geq 3$, $a \in C^0(M)$ telle que $\Delta_g + a$ est coèrcif, $x_0 \in M$ et $s \in]0, 2[$. On pose $2^\star(s) = \frac{2(n-s)}{n-2}$ et $2^* = 2^\star(0)$. Dans ce chapitre, nous étudions l'existence des solutions pour les équations perturbée de type Hardy-Sobolev de la forme suivante :

$$\Delta_g u + au = \frac{|u|^{2^*(s)-2}u}{d_g(x, x_0)^s} + h|u|^{q-2}u, \tag{4.0.1}$$

avec q un exposant sous-critique dans $]2, 2^*[$ et h une fonction sur M positive et continue.

Nous démontrons que l'existence d'une solution dans $H_1^2(M)$ pour (4.0.1) dépend uniquement de la perturbation en x_0 pour les dimensions $n \geq 4$ (à savoir : $h(x_0) > 0$) et des conditions différentes apparaissent en dimension 3 en fonction de q.

Dans le cas particulier $s = 0$ des équations de Sobolev, Brézis et Nirenberg [7] ont étudié ce problème dans un contexte Euclidien, Djadli l'a étudié dans [13] pour les variétés Riemanniennes.

4.1 Suite de Palais-Smale

Définition 4.1.1 *Soient $q \in [2, 2^*], 2^* := \frac{2n}{n-2}$ et $h : M \to \mathbb{R}, h \geq 0$ une fonction continue sur M. On considère $a \in C^0(M)$ telle que $\Delta_g + a$ est coèrcif et on définit la fonctionnelle J_q sur $H_1^2(M)$ par*

$$\begin{aligned} v \in H_1^2(M) \quad \mapsto \quad J_q(v) = &\frac{1}{2}\int_M (|\nabla v|_g^2 + av^2)dv_g - \frac{1}{2^*(s)}\int_M |v|^{2^*(s)}\frac{dv_g}{d_g(x, x_0)^s} \\ &-\frac{1}{q}\int_M h|v|^q dv_g \end{aligned} \tag{4.1.2}$$

Définition 4.1.2 *On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in H_1^2(M)$ est une suite de Palais-Smale (P-S) pour la fonctionnelle J_q s'il existe $\beta \in \mathbb{R}$ tel que $J_q(u_n) \to \beta$ et $J_q'(u_n) \to 0$ fortement dans le dual $H_1^2(M)'$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite de Palais-Smale (P-S) pour J_q au niveau β.*

Définition 4.1.3 *On dit que la fonctionnelle J_q satisfait la condition de Palais-Smale (P-S) au niveau β si pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $H_1^2(M)$ telle que $J_q(u_n) \to \beta$, on peut extraire une sous-suite $(u_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$ de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge fortement dans $H_1^2(M)$.*

Proposition 4.1.1 *Pour toute fonction $u_0 \in H_1^2(M)$, $u_0 \not\equiv 0$, $u_0 \geq 0$, ils existent une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $H_1^2(M)$ et $\beta_0 = \beta_0(u_0) > 0$ tel que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite (P-S) pour la fonctionnelle J_q au niveau β_0. De plus, on a $\beta_0 \leq \sup_{t\geq 0} J_q(tu_0)$.*

Afin de démontrer la proposition ci-dessus, on a besoin du Mountain-Pass Lemma d'Ambrosetti-Rabinowitz [1]. On donne dans la suite une version de ce Lemme.

Lemme 4.1.1 *Soit $J \in C^1(H, \mathbb{R})$ avec $(H, \|\cdot\|_H)$ est un espace de Banach. On suppose que*

1. *$J(0) = 0$,*
2. *Ils existent $\lambda, r > 0$ tels que pour tout $u \in H$, $\|u\|_H = r$, on a : $J(u) \geq \lambda$.*
3. *Il existe $u_0 \in H$ tel que $\limsup_{t\to+\infty} J(tu_0) < 0$.*

Soient $t_0 > 0$ suffisamment grand tel que $\|t_0 u_0\|_H > r$ et $J(t_0 u_0) < 0$ et $\beta = \inf_{\gamma\in\Gamma} \sup J(\gamma(t))$ avec $\Gamma = \{\gamma : [0,1] \to H \text{ t. q. } \gamma(0) = 0, \gamma(1) = t_0 u_0\}$. Alors il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans H telle que $J(u_n) \to \beta$ et $J'(u_n) \to 0$ fortement dans le dual H'. De plus, on a $\beta \leq \sup_{t\geq 0} J(tu_0)$.

Preuve de la Proposition 4.1.1 : En effet, d'après le Théorème 6.4.1 (Voir Appendice III), la fonctionnelle J_q est de classe C^1 sur $H_1^2(M)$. On vérifie les trois conditions du Lemme Mountain-Pass lemma 4.1.1 dans le cas où $J = J_q$ et $H = H_1^2(M)$. En effet :

1. On a que $J_q(0) = 0$,
2. La coercivité de $\Delta_g + a$ et les inclusions de Sobolev et de Hardy-Sobolev impliquent qu'ils existent des constantes $C_i > 0$, $i = 1, 2, 3$ telles que pour tout $v \in H_1^2(M)$, on a :
$$J_q(v) \geq C_1 \|v\|^2_{H_1^2(M)} - C_2 \|v\|^{2^*(s)}_{H_1^2(M)} - C_3 \|v\|^q_{H_1^2(M)}. \tag{4.1.3}$$
On considère la fonction réelle $f(\rho) = C_1\rho^2 - C_2\rho^{2^*(s)} - C_3\rho^q$. Puisque $q, 2^*(s) > 2$ donc la fonction $\rho \mapsto C_1 - C_2\rho^{2^*(s)-2} - C_3\rho^{q-2}$ tend vers C_1 lorsque $\rho \to 0$. Il s'ensuit qu'il existe $\rho_0 > 0$ tel que pour tout $\rho < \rho_0$, on a que : $C_1 - C_2\rho^{2^*(s)-2} - C_3\rho^{q-2} > \frac{C_1}{2}$. D'où pour tout $v \in H_1^2(M)$, $\|v\|_{H_1^2(M)} = \frac{\rho_0}{2}$, on a avec (4.1.3) que $J_q(v) \geq \frac{C_1\rho_0^2}{8}$.
3. On considère $u_0 \in H_1^2(M)$ et la fonction réelle $\varphi : M \to \mathbb{R}$ telles que
$$\begin{aligned} J_q(tu_0) &= \frac{t^2}{2}\int_M (|\nabla u_0|_g^2 + a u_0^2) dv_g - \frac{t^{2^*(s)}}{2^*(s)} \int_M |u_0|^{2^*(s)} \frac{dv_g}{d_g(x,x_0)^s} \\ &\quad - \frac{t^q}{q}\int_M h|u_0|^q dv_g \\ &:= at^2 - bt^{2^*(s)} - ct^q = t^{2^*(s)}[at^{2-2^*(s)} - b - ct^{q-2^*(s)}] \\ &\leq t^{2^*(s)}[at^{2-2^*(s)} - b], \end{aligned}$$
et telle que $a, b > 0$ et $c \geq 0$. Sachant que lorsque $t \to +\infty$, on a : $t^{2^*(s)} \to +\infty$ et $at^{2-2^*(s)} - b \to -b$. Donc $J_q(tu_0) \to -\infty$ lorsque $t \to +\infty$. D'où il existe $u_0 \in H_1^2(M)$ tel que $\limsup_{t\to+\infty} J(tu_0) < 0$.

Soient $t_0 > 0$, $\beta_0 = \beta_0(u_0)$ et l'ensemble Γ comme dans le Lemme 4.1.1. On a donc pour tout $\gamma(t) \in \Gamma, t \in [0,1]$: $J_q(\gamma(t)) \geq \lambda, \lambda := \frac{C_1\rho_0^2}{8}$. Donc $\sup_{t\in[0,1]} J_q(\gamma(t)) \geq \lambda$. Par suite,
$$\beta_0 := \inf_{\gamma\in\Gamma} \sup_{t\in[0,1]} J_q(\gamma(t)) \geq \lambda > 0.$$
L'énergie J_q vérifie donc les conditions du Lemme 4.1.1. D'où le résultat. □

4.2 Théorème général d'existence

4.2.1 Énoncé du Théorème

Nous suivons le travail de Robert-Esposito [19] pour l'énoncé du Théorème ci-dessous.

Théorème 4.2.1 *Soient (M, g) une variété Riemannienne compacte de dimension $n \geq 3$, $a \in C^0(M)$ telle que $\Delta_g + a$ est coercif, $x_0 \in M$ et $s \in]0, 2[$. On pose $2^\star(s) = \frac{2(n-s)}{n-2}$. On considère aussi $q \in]2, 2^*[$ et $h \in C^0(M)$ positive. S'il existe $u_0 \in H_1^2(M)$ telle que*

$$\sup_{t \geq 0} J_q(tu_0) < c'_{n,s} K(n,s)^{-\frac{n-s}{2-s}}, \quad c'_{n,s} = \frac{2-s}{2(n-s)}, \tag{4.2.4}$$

$K(n,s)^{-1} := \inf_{\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)\setminus\{0\}} \frac{\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla\varphi|^2 dX}{\left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\varphi|^{2^\star(s)}}{|X|^s} dX\right)^{\frac{2}{2^\star(s)}}}$ *Alors l'équation de Hardy-Sobolev perturbée*

$$\Delta_g u + au = \frac{|u|^{2^*(s)-2} u}{d_g(x, x_0)^s} + h|u|^{q-2} u$$

admet une solution $u \not\equiv 0$ dans $H_1^2(M)$. De plus, $u \in C^{0,\alpha}(M) \cap C^{1,\beta}_{loc}(M \setminus \{x_0\})$, pour tout $\alpha \in]0, \min(1, 2-s)[, \beta \in]0, 1[$.

4.2.2 Preuve du Théorème

Afin de démontrer le Théorème, on procède par étapes.

Ière étape : On démontre la proposition suivante.

Proposition 4.2.1 *Soient (M, g) une variété Riemannienne compacte de dimension $n \geq 3$, $x_0 \in M$ et $s \in (0, 2)$. On considère $p, q > 0$ tels que $p + q = 2^*(s)$, $u \in H_1^2(M)$, $f \in L^\infty(M)$ et $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée dans $H_1^2(M)$ et converge presque partout vers θ. Alors on a à une sous-suite près de $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$*

$$\lim_{n\to\infty} \int_M f|u|^p \theta_n^q \frac{dv_g}{d_g(x, x_0)^s} = \int_M f|u|^p \theta^q \frac{dv_g}{d_g(x, x_0)^s}.$$

Preuve de la Proposition 4.2.1 : Soit $r = \frac{2^*(s)}{p} \in]1, +\infty[$ et r' son conjugué. L'inclusion de Hardy-Sobolev implique qu'il existe $C = C(M, g, s) > 0$ telle que pour tout $v \in H_1^2(M)$, on a :

$$\|v\|_{2^*(s),s} \leq C\|v\|_{H_1^2(M)}. \tag{4.2.5}$$

Puisque $u \in H_1^2(M)$ donc, d'après (4.2.5), on a : $f|u|^p \in L^r\left(M, \frac{dv_g}{d_g(x,x_0)^s}\right)$. D'autre part, la suite $(|\theta_n|^q)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $L^{r'}\left(M, \frac{dv_g}{d_g(x,x_0)^s}\right)$, car d'après (4.2.5) et l'hypothèse $\|\theta_n\|_{H_1^2(M)} = O(1)$, on a : $\||\theta_n|^q\|_{r',s} = \|\theta_n\|^q_{2^*(s),s} = O(1)$. En plus, la mesure $\frac{dv_g}{d_g(x,x_0)^s}$ est positive et est de Radon sur l'espace métrique (M, d_g) qui est compact. D'après tout ce qui précède et les hypothèses de la Proposition 4.2.1, on tire avec le Lemme 6.5.1 (voir Appendice IV) que la suite $(|\theta_n|^q)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $|\theta|^q$ faiblement dans

$L^{r'}\left(M, \frac{dv_g}{d_g(x,x_0)^s}\right)$. Ceci implique que $L(|\theta_n|^q) \to L(|\theta|^q)$ avec $L : \psi \mapsto \int_M f|u|^p \psi \frac{dv_g}{d_g(x,x_0)^s}$ est dans $\left(L^{r'}\left(M, \frac{dv_g}{d_g(x,x_0)^s}\right)\right)'$. Ce qui termine la preuve de cette proposition.

IIème étape : On démontre la proposition suivante.

Proposition 4.2.2 *Soient (M,g) une variété Riemannienne compacte de dimension $n \geq 3$, $a \in C^0(M)$ telle que $\Delta_g + a$ est coercif, $x_0 \in M$ et $s \in (0,2)$. On considère aussi $q \in]2, 2^*[$ et $h \in C^0(M)$ positive. Pour tout $\beta < c'_{n,s} K(n,s)^{-\frac{n-s}{2-s}}$, $c'_{n,s} = \frac{2-s}{2(n-s)}$, la fonctionnelle J_q satisfait la condition de (P-S) au niveau β.*

Preuve de la Proposition 4.2.2 : Soit $\beta < c'_{n,s} K(n,s)^{-\frac{n-s}{2-s}}$ et une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in H_1^2(M)$ de (P-S) pour J_q au niveau β, c.à.d.

$$J_q(u_n) \to \beta \text{ et } J'_q(u_n) \to 0 \text{ fortement dans } H_1^2(M)'. \tag{4.2.6}$$

On procède par étapes.

Étape II.1 : On démontre que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $H_1^2(M)$. En effet, la coercivité de $\Delta_g + a$ et la Définition 4.1.1 de J_q impliquent qu'il existe $C_1 > 0$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} \|u_n\|^2_{H_1^2(M)} &\leq C_1^{-1} \int_M (|\nabla u_n|_g^2 + a u_n^2) dv_g \\ &\leq C_1^{-1} \left[2J_q(u_n) + \frac{2}{2^*(s)} \int_M |u_n|^{2^*(s)} \frac{dv_g}{d_g(x,x_0)^s} + \frac{2}{q} \int_M h|u_n|^q dv_g \right]. \end{aligned} \tag{4.2.7}$$

De (4.2.6) on tire que

$$\begin{aligned} o(\|u_n\|_{H_1^2(M)}) &= < J'_q(u_n), u_n > \\ &= \int_M (|\nabla u_n|_g^2 + a u_n^2) dv_g - \int_M |u_n|^{2^*(s)} \frac{dv_g}{d_g(x,x_0)^s} - \int_M h|u_n|^q dv_g. \end{aligned} \tag{4.2.8}$$

La Définition 4.1.1 de J_q et (4.2.8) donnent

$$2J_q(u_n) = (1 - \frac{2}{2^*(s)}) \int_M |u_n|^{2^*(s)} \frac{dv_g}{d_g(x,x_0)^s} + (1 - \frac{2}{q}) \int_M h|u_n|^q dv_g + o\left(\|u_n\|_{H_1^2(M)}\right). \tag{4.2.9}$$

En combinant (4.2.7) et (4.2.9), on obtient

$$\|u_n\|^2_{H_1^2(M)} \leq C_1^{-1} \left[\int_M |u_n|^{2^*(s)} \frac{dv_g}{d_g(x,x_0)^s} + \int_M h|u_n|^q dv_g \right] + o\left(\|u_n\|_{H_1^2(M)}\right). \tag{4.2.10}$$

En utilisant (4.2.9) et (4.2.6) et puisque $h \geq 0$, on aura

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{2}{2^*(s)}\right) \int_M |u_n|^{2^*(s)} \frac{dv_g}{d_g(x,x_0)^s} &= 2\beta - (1 - \frac{2}{q}) \int_M h|u_n|^q dv_g + o\left(\|u_n\|_{H_1^2(M)}\right) \\ &\leq 2\beta + o\left(\|u_n\|_{H_1^2(M)}\right). \end{aligned}$$

Ceci implique que

$$\int_M |u_n|^{2^*(s)} \frac{dv_g}{d_g(x,x_0)^s} = O(1) + o\left(\|u_n\|_{H_1^2(M)}\right). \tag{4.2.11}$$

Encore (4.2.9) et (4.2.6) avec (4.2.11) impliquent que

$$\begin{aligned}(1-\frac{2}{q})\int_M h|u_n|^q dv_g &= 2\beta - \frac{2}{2^*(s)}\int_M |u_n|^{2^*(s)}\frac{dv_g}{d_g(x,x_0)^s} + o\left(\|u_n\|_{H_1^2(M)}\right)\\ &= O(1) + o\left(\|u_n\|_{H_1^2(M)}\right).\end{aligned} \tag{4.2.12}$$

Avec (4.2.10), (4.2.11) et (4.2.12), on tire que $\|u_n\|^2_{H_1^2(M)} = O(1) + o\left(\|u_n\|_{H_1^2(M)}\right)$. Si $\left(\|u_n\|_{H_1^2(M)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée alors en quotientant la dernière équation par $\|u_n\|_{H_1^2(M)}$, on tire une contradiction lorsque $n \to +\infty$. Ceci termine l'étape II.1 de la preuve du Théorème 4.2.1. □

Étape II.2 : On démontre qu'il existe $u \in H_1^2(M)$ telle qu'à une sous-suite près, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers u dans $H_1^2(M)$ et fortement dans $L^{p_1}(M)$ pour tout $p_1 \in [2, 2^*[$ et dans $L^{p_2}(M, \frac{dv_g}{d_g(x,x_0)^s})$ pour tout $p_2 \in [2, 2^*(s)[$. De plus, $J_q'(u) = 0$.

En effet, M étant compacte donc la refléxivité de l'espace de Banach $(H_1^2(M), \|\cdot\|_{H_1^2(M)})$ et le Théorème de Rellich-Kondrakov impliquent (voir Preuve du Théorème sous-critique du Chapitre 2) qu'il existe $u \in H_1^2(M)$ telle qu'à une sous-suite près, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers u dans $H_1^2(M)$ et fortement dans $L^{p_1}(M)$ pour tout $p_1 \in]2, 2^*[$ et dans $L^{p_2}(M, \frac{dv_g}{d_g(x,x_0)^s})$ pour tout $p_2 \in]2, 2^*(s)[$. Il reste à démontrer que $J_q'(u) = 0$. Pour cela, on considère $\psi \in H_1^2(M)$ et on écrit

$$\begin{aligned}< J_q'(u_n), \psi > &= \int_M ((\nabla u_n, \nabla\psi)_g + a u_n \psi)\, dv_g - \int_M \psi u_n |u_n|^{2^*(s)-2}\frac{dv_g}{d_g(x,x_0)^s}\\ &\quad - \int_M h\psi u_n |u_n|^{q-2} dv_g.\end{aligned} \tag{4.2.13}$$

La convergence faible de (u_n) vers u dans $H_1^2(M)$ implique que

$$\lim_{n\to+\infty}\int_M ((\nabla u_n, \nabla\psi)_g + a u_n\psi)\, dv_g = \int_M ((\nabla u, \nabla\psi)_g + a u\psi)\, dv_g, \tag{4.2.14}$$

et en appliquant proprement la Proposition 4.2.1 à la suite $(u_n)_n$, on obtient que

$$\lim_{n\to+\infty}\int_M \psi u_n |u_n|^{2^*(s)-2}\frac{dv_g}{d_g(x,x_0)^s} = \int_M \psi u|u|^{2^*(s)-2}\frac{dv_g}{d_g(x,x_0)^s}, \tag{4.2.15}$$

et en remplaçant $2^\star(s)$ par notre q dans la Proposition 4.2.1, on aura le même résultat.

$$\lim_{n\to+\infty}\int_M h\psi u_n|u_n|^{q-2} dv_g = \int_M h\psi u|u|^{q-2} dv_g. \tag{4.2.16}$$

En passant à la limite quand $n \to +\infty$ dans (4.2.13), on tire le résultat demandé avec (4.2.14), (4.2.15) et (4.2.16). □

Étape II.3 : On démontre qu'à une sous-suite près de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$\|\nabla(u_n-u)\|_2^2=\int_M |u_n-u|^{2^*(s)}\frac{dv_g}{d_g(x,x_0)^s}+o(1) \tag{4.2.17}$$

et

$$c'_{n,s}\|\nabla(u_n-u)\|_2^2\leq \beta+o(1) \tag{4.2.18}$$

avec $c'_{n,s}=\frac{2-s}{2(n-s)}$.

En effet, on pose $\theta=u_n-u$ et on écrit (voir Appendice III)

$$\left||u_n|^{2^*(s)}-|u|^{2^*(s)}-|u_n-u|^{2^*(s)}\right|\leq C_2\left(|u|^{2^*(s)-1}|\theta_n|+|u|\cdot|\theta_n|^{2^*(s)-1}\right). \tag{4.2.19}$$

En utilisant (4.2.19) et en appliquant proprement la Proposition 4.2.1 à la suite $(\theta_n)_n$, on tire

$$\int_M \left(|u_n|^{2^*(s)}-|u_n-u|^{2^*(s)}\right|\frac{dv_g}{d_g(x,x_0)^s}=\int_M |u|^{2^*(s)}\frac{dv_g}{d_g(x,x_0)^s}+o(1). \tag{4.2.20}$$

Testons $J'_q(u_n)-J'_q(u)$ sur u_n-u

$$\begin{aligned}
o(1) &= \; < J'_q(u_n)-J'_q(u),u_n-u > \\
&= \int_M\left(|\nabla(u_n-u)|_g^2+a(u_n-u)^2\right)dv_g+\int_M h(u_n-u)\left[u_n|u_n|^{q-2}-u|u|^{q-2}\right]dv_g \\
&\quad -\int_M (u_n-u)\left[u_n|u_n|^{2^*(s)-2}-u|u|^{2^*(s)-2}\right]\frac{dv_g}{d_g(x,x_0)^s} \\
&= \int_M\left(|\nabla(u_n-u)|_g^2+a(u_n-u)^2\right)dv_g \\
&\quad -\int_M\left(|u_n|^{2^*(s)}-u\cdot u_n|u_n|^{2^*(s)-2}+|u|^{2^*(s)}-u\cdot u_n|u|^{2^*(s)-2}\right)\frac{dv_g}{d_g(x,x_0)^s} \\
&\quad -\int_M h\left(|u_n|^q+|u|^q-u\cdot u_n|u_n|^{q-2}-u\cdot u_n|u|^{q-2}\right)dv_g
\end{aligned} \tag{4.2.21}$$

La Proposition 4.2.1 donne

$$\lim_{n\to+\infty}\int_M u\cdot u_n|u_n|^{2^*(s)-2}\frac{dv_g}{d_g(x,x_0)^s}=\int_M|u|^{2^*(s)}\frac{dv_g}{d_g(x,x_0)^s}=\lim_{n\to+\infty}\int_M u\cdot u_n|u|^{2^*(s)-2}\frac{dv_g}{d_g(x,x_0)^s}$$

et

$$\lim_{n\to+\infty}\int_M u\cdot u_n|u_n|^{q-2}dv_g=\int_M|u|^q dv_g=\lim_{n\to+\infty}\int_M u\cdot u_n|u|^{q-2}dv_g.$$

Maintenant, la convergence faible de (u_n) vers u dans $H_1^2(M)$, les dernières égalités ainsi que (4.2.20) et (4.2.21) impliquent (4.2.17). La convergence faible de (u_n) vers u dans $H_1^2(M)$ et (4.2.17) impliquent

$$\begin{aligned}
J_q(u_n)-J_q(u) &= \frac{1}{2}\int_M\left(|\nabla u_n|_g^2-|\nabla u|_g^2\right)dv_g+o(1) \\
&\quad -\frac{1}{2^*(s)}\int_M\left(|u_n|^{2^*(s)}-|u|^{2^*(s)}\right)\frac{dv_g}{d_g(x,x_0)^s} \\
&= \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2^*(s)}\right)\int_M\left(|\nabla u_n|_g^2-|\nabla u|_g^2\right)dv_g+o(1).
\end{aligned} \tag{4.2.22}$$

On a, par coercivité, que $J_q(u) \geq 0$ et puisque $\lim_{n\to+\infty} J_q(u_n) = \beta$, donc la relation (4.2.22) donne

$$c'_{n,s} \int_M \left(|\nabla u_n|_g^2 - |\nabla u|_g^2\right) dv_g \leq \beta + o(1) \tag{4.2.23}$$

On considère maintenant la forme linéaire $L_u \in H_1^2(M)'$ définie par

$$\psi \in H_1^2(M) \mapsto L_u(\psi) = \int_M (\nabla u, \nabla \psi)_g dv_g.$$

Puisque $u_n \to u$ faiblement dans $H_1^2(M)$ alors

$$\int_M (\nabla u, \nabla u_n)_g dv_g = \int_M |\nabla u|_g^2 dv_g + o(1).$$

Ceci implique que

$$\begin{aligned}\int_M |\nabla(u_n - u)|_g^2 dv_g &= \int_M |\nabla u_n|_g^2 dv_g + \int_M |\nabla u|_g^2 dv_g - 2\int_M (\nabla u, \nabla u_n)_g dv_g \\ &= \int_M \left(|\nabla u_n|_g^2 - |\nabla u|_g^2\right) dv_g + o(1).\end{aligned} \tag{4.2.24}$$

Combinons (4.2.23) et (4.2.24), cela donne (4.2.18). □

Étape II.4 : Il reste à démontrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_M |\nabla u_n|_g^2 dv_g = \int_M |\nabla u|_g^2 dv_g.$$

En effet, grâce à Jaber [35], on sait que la première meilleure constante $K(n,s)$ de l'inégalité de Hardy-Sobolev Riemannienne est atteinte (sachant que ce résultat sera l'objectif du chapitre 5 qui est complètement indépendant de celui-ci), c.à.d. qu'il existe une constante $B_0 > 0$ telle que pour tout $v \in H_1^2(M)$, on a :

$$\|v\|_{2^*(s),s}^2 \leq K(n,s)\|\nabla v\|_2^2 + B_0\|v\|_2^2. \tag{4.2.25}$$

Testons (4.2.25) en $u_n - u$

$$\|u_n - u\|_{2^*(s),s}^2 \leq K(n,s)\|\nabla u_n - u\|_2^2 + B_0\|u_n - u\|_2^2.$$

D'après l'étape II.2, $u_n \to u$ fortement dans $L^2(M)$, donc la dernière inégalité donne

$$\|u_n - u\|_{2^*(s),s}^2 \leq K(n,s)\|\nabla(u_n - u)\|_2^2 + o(1). \tag{4.2.26}$$

Élevons (4.2.26) à la puissance $2^*(s)/2$, ceci donne

$$\int_M |u_n - u|^{2^*(s)} \frac{dv_g}{d_g(x,x_0)^s} \leq K(n,s)^{\frac{2^*(s)}{2}} \|\nabla(u_n - u)\|_2^{2^*(s)} + o(1). \tag{4.2.27}$$

Ensuite, (4.2.27) et (4.2.17) de l'étape II.3 donnent

$$\begin{aligned} o(1) &= \|\nabla(u_n-u)\|_2^2 - \int_M |u_n-u|^{2^*(s)} \frac{dv_g}{d_g(x,x_0)^s} \\ &= \|\nabla(u_n-u)\|_2^2 \left[1 - \frac{\int_M |u_n-u|^{2^*(s)} d_g(x,x_0)^{-s} dv_g}{\|\nabla(u_n-u)\|_2^2}\right] \\ &\geq \|\nabla(u_n-u)\|_2^2 \left[1 - K(n,s)^{\frac{2^*(s)}{2}} \|\nabla(u_n-u)\|_2^{2^*(s)-2} + o(1)\right] \end{aligned} \tag{4.2.28}$$

La dernière inégalité (4.2.28) et (4.2.18) de l'étape II.3 impliquent

$$\begin{aligned} o(1) &\geq \|\nabla(u_n-u)\|_2^2 \\ &\quad \times \left[1 - K(n,s)^{\frac{2^*(s)}{2}} \left(\frac{\beta}{c'_{n,s}}\right)^{\frac{2^*(s)-2}{2}} + o(1)\right]. \end{aligned} \tag{4.2.29}$$

Puisque $\beta < c'_{n,s} K(n,s)^{\frac{-2^*(s)}{2^*(s)-2}}$, il s'ensuit alors de (4.2.29) qu'il existe une constante $C_3 > 0$ telle que

$$o(1) \geq C_3 \int_M |\nabla(u_n-u)|_g^2 dv_g.$$

D'où le résultat. $\square$

Étape II.5 : Les étapes II.2 et II.4 impliquent qu'à une sous-suite près, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge fortement vers u dans $H_1^2(M)$. Ceci termine la preuve de cette proposition et achève la IIème étape de la preuve du Théorème 4.2.1.

IIIème étape : On démontre dans cette dernière étape qu'il existe $u \not\equiv 0$ dans $H_1^2(M)$ vérifiant faiblement l'équation de Hardy-Sobolev perturbée (4.2.1). En effet, on suppose qu'il existe, par hypothèse, $u_0 \in H_1^2(M)$, $u_0 \not\equiv 0$, $u_0 \geq 0$ telle que $\sup_{t\geq 0} J_q(tu_0) < c'_{n,s} K(n,s)^{-\frac{n-s}{2-s}}$. D'après la Proposition 4.1.1, ils existent une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $H_1^2(M)$ et $\beta_0 = \beta_0(u_0) > 0$ tel que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite (P-S) pour la fonctionnelle J_q au niveau β_0 et $\beta_0 \leq \sup_{t\geq 0} J_q(tu_0)$. Donc

$$\beta_0 \leq \sup_{t\geq 0} J_q(tu_0) < c'_{n,s} K(n,s)^{-\frac{n-s}{2-s}}.$$

Il s'ensuit de l'étape précédente (la Proposition 4.2.2) que la fonctionnelle J_q vérifie les conditions (P-S) au niveau β_0. D'où il existe $u \in H_1^2(M)$ et une sous suite $(u_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$ de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge fortement vers u dans $H_1^2(M)$. De plus, on a que $J'_q(u) = 0$. Ceci implique que u est une solution de (4.2.1). Enfin, la convergence forte dans $H_1^2(M)$ de $(u_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$ vers u implique immédiatement que $\beta_0 = \lim_{i\to+\infty} J_q(u_{n_i}) = J_q(u)$. Par suite, $u \not\equiv 0$.

IV ème étape : Régularité. Avec des mêmes arguments de régularité que ceux utilisés dans la preuve du Théorème 2.1.1 du Chapitre 2 (voir aussi l'Appendice II, L^p-régularité), on démontre que pour tout $q \in]2, 2^\star(s)[$, la solution u est dans $C^{0,\alpha}(M) \cap C^{1,\beta}_{\text{loc}}(M \setminus \{x_0\})$, pour tout $\alpha \in]0, \min(1, 2-s)[, \beta \in]0,1[$. C.Q.F.D. $\square$

4.3 Fonctions-Tests et Théorème d'existence

4.3.1 Énoncé du Théorème

Théorème 4.3.1 *Soient (M,g) une variété Riemannienne compacte de dimension $n \geq 3$, $a \in C^0(M)$ telle que $\Delta_g + a$ est coercif, $x_0 \in M$ et $s \in]0,2[$. On pose $2^\star(s) = \frac{2(n-s)}{n-2}$ et $2^* = 2^\star(0)$. On considère aussi $q \in]2, 2^*[$ et $h \in C^0(M)$ positive. Il existe deux constantes fixées $\kappa', \kappa'' > 0$ dépendantes de n, s et q telles que, si on suppose que*

$$\begin{cases} h(x_0) > 0 & \text{si } n \geq 4 \text{ ou } \{\ n = 3 \text{ et } q > 4\ \} \\ \kappa' m(x_0) + \kappa'' h(x_0) > 0 & \text{si } n = 3 \text{ et si } q = 4 \\ m(x_0) > 0 & \text{si } n = 3 \text{ et si } q \in]2,4[\end{cases} \tag{4.3.30}$$

avec $c_{n,s} := \frac{(n-2)(6-s)}{12(2n-2-s)}$, $Scal_g(x_0)$ est la courbure scalaire de M en x_0 et $m(x_0)$ est la masse de (M,g) en x_0 (voir Appendice V). Alors l'équation de Hardy-Sobolev perturbée

$$\Delta_g u + au = \frac{|u|^{2^*(s)-2}u}{d_g(x,x_0)^s} + h|u|^{q-2}u$$

admet une solution $u \not\equiv 0$ dans $H_1^2(M)$. De plus, $u \in C^{0,\alpha}(M) \cap C^{1,\beta}_{loc}(M \setminus \{x_0\})$, pour tout $\alpha \in]0, \min(1, 2-s)[$, $\beta \in]0,1[$.

4.3.2 Preuve (i) du Théorème : D.L. du terme perturbatif

Dans cette partie, on considère la suite des fonctions-tests $(u_\epsilon)_{\epsilon>0}$ définie comme dans le Chapitre 3 (voir (3.0.5)) et on démontre que le D.L. du terme perturbatif de J_q, en u_ϵ, $\int_M h(x)|u_\epsilon|^q dv_g$ avec $h \in C^0(M)$, $h \geq 0$ et $q \in]2, 2^*[$ prendra la forme suivante :

$$\int_M h(x)|u_\epsilon|^q dv_g = \begin{cases} \epsilon^{n-\frac{q(n-2)}{2}} h(x_0) \int_{\mathbb{R}^n} |\Phi|^q dX + o(\epsilon^{n-\frac{q(n-2)}{2}}) & \text{si } q > \frac{2^*}{2}, \\ \omega_{n-1} h(x_0) \epsilon^{\frac{n}{2}} \ln \frac{1}{\epsilon} + O(\epsilon^{\frac{n}{2}}) & \text{si } q = \frac{2^*}{2}, \\ O(\epsilon^{\frac{q(n-2)}{2}}) & \text{si } q < \frac{2^*}{2}. \end{cases} \tag{4.3.31}$$

Pour cela, on considère une carte exponentielle $(\mathbb{B}_{\rho_0}(x_0), \exp_{x_0}^{-1})$ centrée en x_0 et de rayon $\rho_0 \in]0, i_g(M)[$. On commence par écrire :

$$\int_M h(x)|u_\epsilon|^q dv_g = \int_{\mathbb{B}_{\rho_0}(x_0)} h(x)|u_\epsilon|^q dv_g + \int_{M\setminus\mathbb{B}_{\rho_0}(x_0)} h(x)|u_\epsilon|^q dv_g. \tag{4.3.32}$$

*A/ **À l'extérieur de la boule** $\mathbb{B}_{\rho_0}(x_0)$:

$$\begin{aligned} \int_{M\setminus\mathbb{B}_{\rho_0}(x_0)} h(x)|u_\epsilon|^q dv_g &= \epsilon^{\frac{q(n-2)}{2}} \int_{M\setminus\mathbb{B}_{\rho_0}(x_0)} \frac{h(x)dv_g}{(\epsilon^{2-s} + d_g(x,x_0)^{2-s})^{\frac{q(n-2)}{2-s}}} \\ &\leq \frac{\|h\|_\infty \epsilon^{\frac{q(n-2)}{2}}}{(\epsilon^{2-s} + \rho_0^{2-s})^{\frac{q(n-2)}{2-s}}} \int_{M\setminus\mathbb{B}_{\rho_0}(x_0)} dv_g \\ &\leq \epsilon^{\frac{q(n-2)}{2}} \frac{\|h\|_\infty vol_g(M)}{\rho_0^{q(n-2)}}. \end{aligned}$$

Donc

$$\int_{M\setminus\mathbb{B}_{\rho_0}(x_0)} h(x)|w_\epsilon|^q dv_g = O(\epsilon^{\frac{q(n-2)}{2}}). \tag{4.3.33}$$

*B/ **Dans la boule** $\mathbb{B}_{\rho_0}(x_0)$: On écrit :

$$\int_{\mathbb{B}_{\rho_0}(x_0)} h(x)|u_\epsilon|^q dv_g = \int_{\mathbb{B}_{\rho_0}(x_0)} (h(x_0)+\eta(x))\,|u_\epsilon|^q dv_g$$

avec η est continue et vérifie $\lim_{x\to x_0}\eta(x)=0$. Le D.L. de $\sqrt{|g|}$ (voir le lemme 3.2.1) dans la boule $\mathbb{B}_{\rho_0}(x_0)$ et le changement de coordonnées $X=\exp_{x_0}^{-1}(x)$ permettent d'écrire :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{B}_{\rho_0}(x_0)} h(x)|u_\epsilon|^q dv_g &= \epsilon^{\frac{q(n-2)}{2}} \int_{\mathbb{B}_{\rho_0}(0)} \frac{\big(h(x_0)+\eta(\exp_{x_0}(X))(1+O(|X|^2))\big)}{(\epsilon^{2-s}+|X|^{2-s})^{\frac{q(n-2)}{2-s}}} dX \\
&= \epsilon^{\frac{q(n-2)}{2}} \int_{\mathbb{B}_{\rho_0}(0)} \frac{(h(x_0)+\tilde{\eta}(X))}{(\epsilon^{2-s}+|X|^{2-s})^{\frac{q(n-2)}{2-s}}} dX \\
&:= I_q(\epsilon)+II_q(\epsilon),
\end{aligned}$$

où $\tilde{\eta}$ est une fonction continue sur $\mathbb{B}_{\rho_0}(0)$ vérifiant $\lim_{X\to 0}\tilde{\eta}(X)=0$.

*B.1/ **Calcul de** $I_q(\epsilon)$. On a :

$$\begin{aligned}
I_q(\epsilon) &= \epsilon^{\frac{q(n-2)}{2}} h(x_0) \int_{\mathbb{B}_{\rho_0}(0)} \frac{dX}{(\epsilon^{2-s}+|X|^{2-s})^{\frac{q(n-2)}{2-s}}} \\
&= \epsilon^{\frac{q(n-2)}{2}} h(x_0)\omega_{n-1} \int_0^{\rho_0} \frac{r^{n-1}dr}{(\epsilon^{2-s}+r^{2-s})^{\frac{q(n-2)}{2-s}}} \\
&= \epsilon^{n-\frac{q(n-2)}{2}} h(x_0)\omega_{n-1} \int_0^{\frac{\rho_0}{\epsilon}} \frac{\rho^{n-1}d\rho}{(1+\rho^{2-s})^{\frac{q(n-2)}{2-s}}}.
\end{aligned}$$

On pose :

$$\Sigma_1(\epsilon) = \int_0^{\frac{\rho_0}{\epsilon}} \frac{\rho^{n-1}d\rho}{(1+\rho^{2-s})^{\frac{q(n-2)}{2-s}}}.$$

La fonction $\rho \mapsto \frac{\rho^{n-1}d\rho}{(1+\rho^{2-s})^{\frac{q(n-2)}{2-s}}}$ est intégrable au voisinage de 0 et est intégrable à l'infini si $q>\frac{2^*}{2}$.
Donc si $q>\frac{2^*}{2}$, alors on aura :

$$\Sigma_1(\epsilon) = \int_0^{+\infty} \frac{\rho^{n-1}d\rho}{(1+\rho^{2-s})^{\frac{q(n-2)}{2-s}}} - \int_{\frac{\rho}{\epsilon}}^{+\infty} \frac{\rho^{n-1}d\rho}{(1+\rho^{2-s})^{\frac{q(n-2)}{2-s}}}.$$

Or on a que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\rho^{n-1}d\rho}{(1+\rho^{2-s})^{\frac{q(n-2)}{2-s}}} = \omega_{n-1}^{-1}\int_{\mathbb{R}^n} |\Phi|^q dX,$$

et

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{\rho_0}{\epsilon}}^{+\infty} \frac{\rho^{n-1}d\rho}{(1+\rho^{2-s})^{\frac{q(n-2)}{2-s}}} &= O\left(\int_{\frac{\rho_0}{\epsilon}}^{+\infty} \frac{d\rho}{\rho^{(n-2)q-n+1}}\right) \\
&= O\left(\frac{\epsilon^{(n-2)q-n}}{((n-2)q-n)\rho_0^{(n-2)q-n}}\right) \\
&= O(\epsilon^{(n-2)q-n}).
\end{aligned}$$

Donc

$$\Sigma_1(\epsilon) = \omega_{n-1}^{-1}\int_{\mathbb{R}^n} |\Phi|^q dX + O(\epsilon^{(n-2)q-n}).$$

Il s'ensuit que si $q > \frac{2^*}{2}$ on a :

$$I_q(\epsilon) = \epsilon^{n-\frac{q(n-2)}{2}} h(x_0) \int_{\mathbb{R}^n} |\Phi|^q dX + O(\epsilon^{\frac{q(n-2)}{2}}).$$

Maintenant si $q < \frac{2^*}{2}$ on aura donc :

$$\begin{aligned}
I_q(\epsilon) &= \epsilon^{n-\frac{q(n-2)}{2}} h(x_0)\omega_{n-1} \int_0^{\frac{\rho_0}{\epsilon}} \frac{\rho^{n-1}d\rho}{(1+\rho^{2-s})^{\frac{q(n-2)}{2-s}}}. \\
&= O\left(\epsilon^{n-\frac{q(n-2)}{2}} \int_0^{\frac{\rho_0}{\epsilon}} \frac{\rho^{n-1}d\rho}{(1+\rho^{2-s})^{\frac{q(n-2)}{2-s}}}\right) \\
&= O\left(\epsilon^{n-\frac{q(n-2)}{2}} + \epsilon^{n-\frac{q(n-2)}{2}} \int_1^{\frac{\rho_0}{\epsilon}} \frac{\rho^{n-1}d\rho}{(1+\rho^{2-s})^{\frac{q(n-2)}{2-s}}}\right) \\
&= O\left(\epsilon^{n-\frac{q(n-2)}{2}} + \epsilon^{n-\frac{q(n-2)}{2}} \int_1^{\frac{\rho_0}{\epsilon}} \rho^{n-1-q(n-2)}d\rho\right) \\
&= O(\epsilon^{n-\frac{q(n-2)}{2}} + \epsilon^{\frac{q(n-2)}{2}}) \\
&= O(\epsilon^{\frac{q(n-2)}{2}}),
\end{aligned}$$

sachant que

$$q < \frac{2^*}{2} \quad \text{si et seulement si} \quad n - \frac{q(n-2)}{2} > \frac{q(n-2)}{2}.$$

Et si $q = \frac{2^*}{2}$ alors

$$\begin{aligned}
I_q(\epsilon) &= \epsilon^{\frac{n}{2}} h(x_0)\omega_{n-1} \int_0^{\frac{\rho_0}{\epsilon}} \frac{\rho^{n-1}d\rho}{(1+\rho^{2-s})^{\frac{n}{2-s}}} \\
&= \epsilon^{\frac{n}{2}} h(x_0)\omega_{n-1} \left[\int_0^1 \frac{\rho^{n-1}d\rho}{(1+\rho^{2-s})^{\frac{n}{2-s}}} + \int_1^{\frac{\rho_0}{\epsilon}} \frac{\rho^{n-1}d\rho}{(1+\rho^{2-s})^{\frac{n}{2-s}}}\right] \\
&= C\epsilon^{\frac{n}{2}} + \epsilon^{\frac{n}{2}} h(x_0)\omega_{n-1} \left[\int_1^{\frac{\rho_0}{\epsilon}} \frac{d\rho}{\rho} + \int_1^{\frac{\rho_0}{\epsilon}} d\rho\left(\frac{\rho^{n-1}d\rho}{(1+\rho^{2-s})^{\frac{n}{2-s}}} - \frac{1}{\rho}\right)\right] \\
&= \omega_{n-1} h(x_0)\epsilon^{\frac{n}{2}} \ln\frac{1}{\epsilon} + O(\epsilon^{\frac{n}{2}}).
\end{aligned}$$

Résultats pour $I_q(\epsilon)$:

$$I_q(\epsilon) = \begin{cases} \epsilon^{n-\frac{q(n-2)}{2}} h(x_0) \int_{\mathbb{R}^n} |\Phi|^q dX + O(\epsilon^{\frac{q(n-2)}{2}}) & \text{si } q > \frac{2^*}{2}, \\ \omega_{n-1} h(x_0) \epsilon^{\frac{n}{2}} \ln \frac{1}{\epsilon} + O(\epsilon^{\frac{n}{2}}) & \text{si } q = \frac{2^*}{2}, \\ O(\epsilon^{\frac{q(n-2)}{2}}) & \text{si } q < \frac{2^*}{2}. \end{cases}$$

*B.2/ **Calcul de** $II_q(\epsilon)$. On a :

$$II_q(\epsilon) := \epsilon^{\frac{q(n-2)}{2}} \int_{\mathbb{B}_{\rho_0}(0)} \frac{\tilde{\eta}(X)}{(\epsilon^{2-s} + |X|^{2-s})^{\frac{q(n-2)}{2-s}}} dX.$$

Soit $\alpha \in]0, \rho_0[$. On écrit :

$$|II_q(\epsilon)| \leq II'_q(\epsilon) + II''_q(\epsilon),$$

avec

$$\begin{aligned} II'_q(\epsilon) &:= \epsilon^{\frac{q(n-2)}{2}} \int_{\mathbb{B}_{\rho_0}(0) \setminus \mathbb{B}_\alpha(0)} \frac{|\tilde{\eta}(X)|}{(\epsilon^{2-s} + |X|^{2-s})^{\frac{q(n-2)}{2-s}}} dX \\ &\leq \epsilon^{\frac{q(n-2)}{2}} \left(\sup_{|X|<\rho_0} |\tilde{\eta}(X)| \right) vol_g(\mathbb{B}_{\rho_0}(0)) \alpha^{-q(n-2)} \\ &:= C'_\alpha \epsilon^{\frac{q(n-2)}{2}}, \end{aligned} \tag{4.3.34}$$

et

$$\begin{aligned} II''_q(\epsilon) &:= \epsilon^{\frac{q(n-2)}{2}} \int_{\mathbb{B}_\alpha(0)} \frac{|\tilde{\eta}(X)|}{(\epsilon^{2-s} + |X|^{2-s})^{\frac{q(n-2)}{2-s}}} dX \\ &\leq \epsilon^{\frac{q(n-2)}{2}} \left(\sup_{|X|<\rho_0} |\tilde{\eta}(X)| \right) \omega_{n-1} \int_0^\alpha \frac{r^{n-1} dr}{(\epsilon^{2-s} + r^{2-s})^{\frac{q(n-2)}{2-s}}} \\ &\leq \epsilon^{n-\frac{q(n-2)}{2}} \left(\sup_{|X|<\rho_0} |\tilde{\eta}(X)| \right) \omega_{n-1} \int_0^{\frac{\alpha}{\epsilon}} \frac{\rho^{n-1} d\rho}{(1 + \rho^{2-s})^{\frac{q(n-2)}{2-s}}} \end{aligned} \tag{4.3.35}$$

On pose que $\Sigma_\alpha = \epsilon^{n-\frac{q(n-2)}{2}} \omega_{n-1} \int_0^{\frac{\alpha}{\epsilon}} \frac{\rho^{n-1} d\rho}{(1+\rho^{2-s})^{\frac{q(n-2)}{2-s}}}$ et on distingue trois cas :

Cas B.2.1 : $q > \frac{2^*}{2}$. Tout calcul fait (voir la partie B.1), on obtient dans ce cas :

$$\Sigma_\alpha = \epsilon^{n-\frac{q(n-2)}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} |\Phi|^q dX + C''_\alpha \epsilon^{\frac{q(n-2)}{2}}.$$

Ceci implique qu'il existe $C'''_\alpha > 0$ tels que

$$II''_q(\epsilon) \leq \epsilon^{n-\frac{q(n-2)}{2}} \sup_{|X|<\alpha} |\tilde{\eta}(X)| \int_{\mathbb{R}^n} |\Phi|^q dX + C'''_\alpha \epsilon^{\frac{q(n-2)}{2}}. \tag{4.3.36}$$

En combinant (4.3.34) avec (4.3.36), on tire qu'il existe $D' > 0$ et $C^{(4)}_\alpha > 0$ tels que

$$|II_q(\epsilon)| \leq \epsilon^{n-\frac{q(n-2)}{2}} D' \sup_{|X|<\alpha} |\tilde{\eta}(X)| + C^{(4)}_\alpha \epsilon^{\frac{q(n-2)}{2}}.$$

Par suite,

$$\frac{|II_q(\epsilon)|}{\epsilon^{n-\frac{q(n-2)}{2}}} \leq D' \sup_{|X|<\alpha} |\tilde{\eta}(X)| + C_\alpha^{(4)} \epsilon^{q(n-2)-n}.$$

En utilisant des arguments similaires à ceux utilisés dans la sous-section 3.2.2 (voir la partie 3.2.2.2) et la dernière relation, on aura que

$$II_q(\epsilon) = o(\epsilon^{n-\frac{q(n-2)}{2}}).$$

Cas B.2.2 : $q = \frac{2^*}{2}$. Dans ce cas, la relation (4.3.35) implique

$$II''_q(\epsilon) \leq \sup_{|X|<\alpha} |\tilde{\eta}(X)| \Sigma_\alpha.$$

Tout calcul fait (voir la partie B.1) donne

$$II''_q(\epsilon) \leq C_\alpha^{(5)} \epsilon^{\frac{n}{2}} + D'' \epsilon^{\frac{n}{2}} \ln \frac{1}{\epsilon}, \tag{4.3.37}$$

avec $D'' > 0$ et $C_\alpha^{(5)} > 0$. D'une façon similaire, on démontre, comme dans le cas B.2.1, que

$$\frac{|II_q(\epsilon)|}{\epsilon^{\frac{n}{2}} \ln \frac{1}{\epsilon}} \to 0 \text{ lorsque } \epsilon \to 0.$$

Cas B.2.3 : $q < \frac{2^*}{2}$. Dans ce cas, on écrit :

$$\begin{aligned} |II_q(\epsilon)| &\leq \epsilon^{\frac{q(n-2)}{2}} \int_{\mathbb{B}_{\rho_0}(0)} \frac{|\tilde{\eta}(X)|}{(\epsilon^{2-s} + |X|^{2-s})^{\frac{q(n-2)}{2-s}}} dX \\ &\leq \epsilon^{\frac{q(n-2)}{2}} \sup_{|X|<\rho_0} |\tilde{\eta}(X)| \omega_{n-1} \int_0^{\rho_0} r^{n-1-q(n-2)} dr \\ &= O(\epsilon^{\frac{q(n-2)}{2}}). \end{aligned}$$

Résultats pour $II_q(\epsilon)$:

$$II_q(\epsilon) = \begin{cases} o(\epsilon^{n-\frac{q(n-2)}{2}}) & \text{si } q > \frac{2^*}{2}, \\ o(\epsilon^{\frac{n}{2}} \ln \frac{1}{\epsilon}) & \text{si } q = \frac{2^*}{2}, \\ O(\epsilon^{\frac{q(n-2)}{2}}) & \text{si } q < \frac{2^*}{2}. \end{cases}$$

Enfin on aura : (rappelons que $\frac{2^*}{2} < \frac{n+1}{n-2} < 2^*$)

$$\int_M h(x)|u_\epsilon|^q dv_g = \begin{cases} \epsilon^{n-\frac{q(n-2)}{2}} h(x_0) \int_{\mathbb{R}^n} |\Phi|^q dX + o(\epsilon^{n-\frac{q(n-2)}{2}}) & \text{si } q > \frac{2^*}{2}, \\ \omega_{n-1} h(x_0) \epsilon^{\frac{n}{2}} \ln \frac{1}{\epsilon} + O(\epsilon^{\frac{n}{2}}) & \text{si } q = \frac{2^*}{2}, \\ O(\epsilon^{\frac{q(n-2)}{2}}) & \text{si } q < \frac{2^*}{2}. \end{cases}$$

Ceci termine la preuve (i) du Théorème 4.3.1.

4.3.3 Preuve (ii) du Théorème : D.L. de la fonctionnelle à terme perturbatif

On considère la suite des fonctions-tests $(w_\epsilon)_{\epsilon>0}$ et la fonction Φ sur $\mathbb{R}^n$ (même fonctions que celles du chapitre 3, voir la Proposition 3.1.1) définies par :

$$w_\epsilon := \begin{cases} u_\epsilon(x) := \left(\frac{\epsilon^{1-\frac{s}{2}}}{\epsilon^{2-s}+d_g(x,x_0)^{2-s}}\right)^{\frac{n-2}{2-s}} & \text{si } n \geq 4 \\ \\ \eta u_\epsilon + \sqrt{\epsilon}\beta_{x_0} & \text{si } n = 3 \end{cases}$$

$\Phi(X) = (1+|X|^{2-s})^{-\frac{n-2}{2-s}}$ et la fonctionnelle J_q définie au début de ce chapitre. Pour tout $\epsilon > 0$ et tout $t \geq 0$, on pose :

$$J_q(tw_\epsilon) = \frac{t^2}{2}A_\epsilon - \frac{t^{2^*(s)}}{2^*(s)}B_\epsilon - \frac{t^q}{q}C_\epsilon \tag{4.3.38}$$

avec $A_\epsilon = \int_M (|\nabla w_\epsilon|_g^2 + aw_\epsilon^2)dv_g, B_\epsilon = \int_M |w_\epsilon|^{2^*(s)} \frac{dv_g}{d_g(x,x_0)^s}$ et $C_\epsilon = \int_M h|w_\epsilon|^q dv_g$. Avec les résultats (3.2.15), (3.2.18), (3.2.26) et (4.3.31) du D.L. de A_ϵ, B_ϵ et C_ϵ respectivement, on obtient :

$$A_\epsilon \to A_0 := \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla\Phi|^2 dX,\ B_\epsilon \to B_0 := \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\Phi|^{2^*(s)}}{|X|^s} dX \text{ et } C_\epsilon \to 0. \tag{4.3.39}$$

Étape ii.1 : On démontre que pour tout $\epsilon > 0$, il existe un unique $t_\epsilon > 0$ tel que $\sup_{t\geq 0} J_q(tw_\epsilon) = J_q(t_\epsilon w_\epsilon)$. De plus, t_ϵ vérifie

$$t_\epsilon = T_\epsilon\left(1 - \alpha_0 C_\epsilon + o(C_\epsilon)\right) \tag{4.3.40}$$

avec $T_\epsilon = \left(A_\epsilon B_\epsilon^{-1}\right)^{1/(2^*(s)-2)}, \alpha_0 > 0$ et la suite $(t_\epsilon)_{\epsilon>0}$ est convergente et sa limite t_0 vérifie $t_0^{2^*(s)} B_0 = A_0$.

En effet, $dJ_q(tw_\epsilon)/dt$ s'annule en $t = 0$ ou bien quand t vérifie (E_ϵ) avec

$$(E_\epsilon) : A_\epsilon = f_\epsilon(t) := t^{2^*(s)-2}B_\epsilon + t^{q-2}C_\epsilon.$$

Puisque $A_\epsilon > 0$, $B_\epsilon, C_\epsilon \geq 0$ et f_ϵ est strictement croissante donc il existe un unique $t_\epsilon > 0$ vérifiant (E_ϵ) et étant le maximum de $t \geq 0 \mapsto J_q(tw_\epsilon)$. Il s'ensuit que pour tout $\epsilon > 0$, $t_\epsilon \leq T_\epsilon := \left(A_\epsilon B_\epsilon^{-1}\right)^{1/(2^*(s)-2)}$. Mais d'après (4.3.39), $T_\epsilon \to \left(A_0 B_0^{-1}\right)^{1/(2^*(s)-2)}$. Par suite, $(t_\epsilon)_{\epsilon>0}$ est bornée et il existe donc $t_0 \geq 0$ telle que $t_\epsilon \to t_0$. En passant à la limite dans (E_ϵ), on obtient que $t_0^{2^*(s)} B_0 = A_0$. Enfin, puisque t_ϵ vérifie (E_ϵ), on a donc

$$\begin{aligned} t_\epsilon &= \left(A_\epsilon B_\epsilon^{-1} - t_\epsilon^{q-2} C_\epsilon B_\epsilon^{-1}\right)^{1/(2^*(s)-2)} \\ &= T_\epsilon\left(1 - t_\epsilon^{q-2} A_\epsilon^{-1} C_\epsilon\right)^{1/(2^*(s)-2)} \\ &= T_\epsilon\left(1 - \alpha_0 C_\epsilon + o(C_\epsilon)\right) \end{aligned}$$

avec $\alpha_0 = t_0^{q-2} A_0^{-1}/(2^*(s) - 2)$. Ceci termine l'étape (ii.1) la preuve (ii) du Théorème 4.3.1.

Étape ii.2 : On démontre qu'à une extraction d'une sous-suite près de $(w_\epsilon)_{\epsilon>0}$, on a

$$J_q(t_\epsilon w_\epsilon) = c'_{n,s}\left(J(w_\epsilon)\right)^{\frac{2^*(s)}{2^*(s)-2}} - \frac{T_0^q}{q}C_\epsilon + o(C_\epsilon), \tag{4.3.41}$$

avec $T_0 > 0$ et $c'_{n,s} = \frac{2-s}{2(n-s)}$. Rappelons que J est la fonctionnelle définie sur $H_1^2(M)$ par : $v \mapsto \frac{\int_M (|\nabla v|_g^2 + av^2)dv_g}{\left(\int_M |v|^{2^*(s)}\frac{dv_g}{d_g(x,x_0)^s}\right)^{2/2^*(s)}}$

En effet, les développements (4.3.38) et (4.3.40) de $J_q(tw_\epsilon)$ et t_ϵ respectivement impliquent

$$\begin{aligned}
J_q(t_\epsilon w_\epsilon) &= \frac{t_\epsilon^2}{2}A_\epsilon - \frac{t_\epsilon^{2^*(s)}}{2^*(s)}B_\epsilon - \frac{t_\epsilon^q}{q}C_\epsilon \\
&= \frac{T_\epsilon^2}{2}\left(1 - 2\alpha_0 C_\epsilon + o(C_\epsilon)\right)A_\epsilon - \frac{T_\epsilon^{2^*(s)}}{2^*(s)}\left(1 - 2^*(s)\alpha_0 C_\epsilon + o(C_\epsilon)\right)B_\epsilon \\
&\quad - \frac{T_\epsilon^q}{q}\left(1 - q\alpha_0 C_\epsilon + o(C_\epsilon)\right)C_\epsilon \\
&= \frac{T_\epsilon^2}{2}A_\epsilon - \frac{T_\epsilon^{2^*(s)}}{2^*(s)}B_\epsilon + \alpha_0(-T_\epsilon^2 A_\epsilon + T_\epsilon^{2^*(s)}B_\epsilon + T_\epsilon^q C_\epsilon)C_\epsilon - \frac{T_\epsilon^q}{q}C_\epsilon + o(C_\epsilon)
\end{aligned} \tag{4.3.42}$$

Remplaçons T_ϵ par sa valeur $(A_\epsilon B_\epsilon^{-1})^{1/(2^*(s)-2)}$ dans (4.3.41), on aura que

$$-T_\epsilon^2 A_\epsilon + T_\epsilon^{2^*(s)}B_\epsilon = 0. \tag{4.3.43}$$

et que

$$\begin{aligned}
\frac{T_\epsilon^2}{2}A_\epsilon - \frac{T_\epsilon^{2^*(s)}}{2^*(s)}B_\epsilon &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^*(s)}\right)A_\epsilon^{\frac{2^*(s)}{2^*(s)-2}}\left(B_\epsilon^{-1}\right)^{\frac{2}{2^*(s)-2}} \\
&= c'_{n,s}\left(\frac{A_\epsilon}{B_\epsilon^{\frac{2}{2^*(s)}}}\right)^{\frac{2^*(s)}{2^*(s)-2}} \\
&= c'_{n,s}\left(J(w_\epsilon)\right)^{\frac{2^*(s)}{2^*(s)-2}}.
\end{aligned} \tag{4.3.44}$$

En combinant (4.3.43), (4.3.44) et (4.3.42), on tire (4.3.41), ce qui termine l'étape (ii.2) la preuve (ii) du Théorème 4.3.1.

Étape ii.3 : On démontre que

$$J_q(t_\epsilon w_\epsilon) = \beta_0 + \begin{cases} -\kappa_1 h(x_0)\epsilon^{n-\frac{q(n-2)}{2}} + o(\epsilon^{n-\frac{q(n-2)}{2}}) & \text{si } n \geq 4 \\ -\kappa_4 h(x_0)\epsilon^{3-\frac{q}{2}} + o(\epsilon^{3-\frac{q}{2}}) & \text{si } n = 3 \text{ et si } q > 4 \\ -\left(\kappa_5 m(x_0) + \kappa_6 h(x_0)\right)\epsilon + o(\epsilon) & \text{si } n = 3 \text{ et si } q = 4 \\ -\kappa_7 m(x_0) + o(\epsilon) & \text{si } n = 3 \text{ et si } q \in]2,4[\end{cases} \tag{4.3.45}$$

où $m(x_0)$ désigne la masse de la fonction de Green en x_0 (voir Appendice V). En effet, on discute selon la dimension de la variété M et on distingue des sous-cas selon les valeurs de q dans $]2, 2^*[$.

Cas ii.3.1 : $n \geq 5$. Dans ce cas, on a que

$$J(w_\epsilon) = K(n,s)^{-1} + \kappa_8 \left(a(x_0) - c_{n,s}\mathrm{Scal}_g(x_0)\right) \epsilon^2 + o(\epsilon^2), \tag{4.3.46}$$

$c_{n,s} = \frac{(n-2)(6-s)}{12(2n-2-s)}$ et $\kappa_8 = \kappa_8(n,s) > 0$. Donc (4.3.41) et (4.3.46) impliquent

$$J_q(t_\epsilon w_\epsilon) = \beta_0 + \kappa_9 \left(a(x_0) - c_{n,s}\mathrm{Scal}_g(x_0)\right) \epsilon^2 + o(\epsilon^2) - \frac{T_0^q}{q} C_\epsilon + o(C_\epsilon) \tag{4.3.47}$$

avec

$$C_\epsilon = \epsilon^{n - \frac{q(n-2)}{2}} h(x_0) \int_{\mathbb{R}^n} |\Phi|^q dX + o(\epsilon^{n - \frac{q(n-2)}{2}}). \tag{4.3.48}$$

car $q > 2 > \frac{2^*}{2}$. Puisque $n - \frac{q(n-2)}{2} < 2$, il s'ensuit de (4.3.47) et (4.3.48) que $\epsilon^2 = o(\epsilon^{n-\frac{q(n-2)}{2}})$. Ceci prouve (4.3.45) dans le cas (ii.3.1).

Cas ii.3.2 : $n = 4$. Dans ce cas, on a que

$$J(w_\epsilon) = K(n,s)^{-1} + \kappa_{10} \left(a(x_0) - c_{n,s}\mathrm{Scal}_g(x_0)\right) \epsilon^2 \ln \frac{1}{\epsilon} + O(\epsilon^2). \tag{4.3.49}$$

$\kappa_{10} = \kappa_{10}(n,s) > 0$. Donc (4.3.41) et (4.3.49) impliquent

$$J_q(t_\epsilon w_\epsilon) = \beta_0 + \kappa_{11} \left(a(x_0) - c_{n,s}\mathrm{Scal}_g(x_0)\right) \epsilon^2 \ln \frac{1}{\epsilon} + O(\epsilon^2) - \frac{T_0^q}{q} C_\epsilon + o(C_\epsilon). \tag{4.3.50}$$

Dans ce cas, $q > 2 = \frac{2^*}{2}$

$$C_\epsilon = \epsilon^{4-q} h(x_0) \int_{\mathbb{R}^n} |\Phi|^q dX + o(\epsilon^{4-q}). \tag{4.3.51}$$

Ensuite, $\epsilon^2 \ln \frac{1}{\epsilon} = o(C_\epsilon)$, ce qui prouve (4.3.45) dans le cas (ii.3.2).

Cas ii.3.3 : $n = 3$. Dans ce cas, le D.L. de $J(w_\epsilon)$ sera de la forme

$$J(w_\epsilon) = K(n,s)^{-1} - \kappa_{12} m(x_0)\epsilon + o(\epsilon). \tag{4.3.52}$$

Donc (4.3.41) et (4.3.52) impliquent

$$J_q(t_\epsilon w_\epsilon) = \beta_0 - \kappa_{13} m(x_0)\epsilon + o(\epsilon) - \frac{T_0^q}{q} C_\epsilon + o(C_\epsilon). \tag{4.3.53}$$

En utilisant l'inégalité suivante (voir Appendice III pour la preuve) : Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, on a :

$$\left| |x+y|^q - |x|^q - qxy|x|^{q-2} \right| \leq \kappa_{14} \left(|x|^{q-2} y^2 + |y|^q \right),$$

on obtient

$$\begin{aligned} C_\epsilon &= \int_{\mathbb{B}_{\rho_0}(x_0)} h(x)|w_\epsilon|^q dv_g + \int_{M \setminus \mathbb{B}(x_0,\delta)} h(x)|w_\epsilon|^q dv_g \\ &= \int_{\mathbb{B}_{\rho_0}(x_0)} h(x)|w_\epsilon|^q dv_g + O(\epsilon^{\frac{q}{2}}) \\ &= \int_{\mathbb{B}_{\rho_0}(x_0)} h u_\epsilon^q dv_g + q\sqrt{\epsilon} \int_M h \beta_{x_0} (\eta u_\epsilon)^{q-1} dv_g + R_\epsilon + O(\epsilon^{\frac{q}{2}}) \end{aligned} \tag{4.3.54}$$

avec

$$\Sigma_q := q\sqrt{\epsilon}\int_M h\beta_{x_0}(\eta u_\epsilon)^{q-1}dv_g = O\left(\epsilon^{\frac{q}{2}}\int_0^{\rho_0}\frac{r^2(1+O(r^2))dr}{(\epsilon^{2-s}+r^{2-s})^{\frac{q-1}{2-s}}}\right).$$

On distingue trois cas : *1er cas :* $q > 4$. Dans ce cas, on a :

$$\Sigma_q = O\left[\epsilon^{4-\frac{q}{2}}\left(C' + \int_1^{\frac{\rho_0}{\epsilon}}\rho^{3-q}d\rho\right)\right] = O(\epsilon^{4-\frac{q}{2}}).$$

2ème cas : $q = 4$. Dans ce cas, on a :

$$\Sigma_q = O\left[\epsilon^2\left(C'' + \int_1^{\frac{\rho_0}{\epsilon}}\rho^{-1}d\rho\right]\right) = O(\epsilon^2\ln\frac{1}{\epsilon}).$$

3ème cas : $q < 4$. Dans ce cas, on a :

$$\Sigma_q = O\left(\epsilon^{4-\frac{q}{2}} + \epsilon^{4-\frac{q}{2}}\int_1^{\frac{\rho_0}{\epsilon}}\frac{\rho^2 d\rho}{(1+\rho^{2-s})^{\frac{q-1}{2-s}}}\right) = O(\epsilon^{\frac{q}{2}}).$$

Par suite,

$$q\sqrt{\epsilon}\int_M h\beta_{x_0}(\eta w_\epsilon)^{q-1}dv_g = \begin{cases} O(\epsilon^{4-\frac{q}{2}}) & \text{si } q > 4 \\ O(\epsilon^2\ln\frac{1}{\epsilon}) & \text{si } q = 4 \\ O(\epsilon^{\frac{q}{2}}). & \text{si } q < 4. \end{cases} \tag{4.3.55}$$

et de même, on a

$$R_\epsilon = O\left(\int_M h(\sqrt{\epsilon}\beta_{x_0})^2(\eta u_\epsilon)^{q-2}dv_g + \int_M h(\sqrt{\epsilon}\beta_{x_0})^q dv_g\right) = \begin{cases} O(\epsilon^{5-\frac{q}{2}}) & \text{si } q > 5 \\ O(\epsilon^{\frac{3}{2}}\ln\frac{1}{\epsilon}) & \text{si } q = 5 \\ O(\epsilon^{\frac{q}{2}}). & \text{si } q < 5. \end{cases} \tag{4.3.56}$$

En combinant (4.3.54), (4.3.55) et (4.3.56) avec (4.3.31), on distingue trois sous-cas :
Sous-cas ii.3.3.1 : $n = 3$ et $q > 4$. Dans ce cas, on a que

$$C_\epsilon = \epsilon^{3-\frac{q}{2}}\kappa_{14}h(x_0) + o(\epsilon^{3-\frac{q}{2}}), \tag{4.3.57}$$

avec $3 - \frac{q}{2} < 1$. Ceci prouve (4.3.45) dans le cas (ii.3.3.1).
Sous-cas ii.3.3.2 : $n = 3$ et $q = 4$. Dans ce cas, on a que

$$C_\epsilon = \epsilon\kappa_{15}h(x_0) + o(\epsilon). \tag{4.3.58}$$

Ceci prouve (4.3.45) dans le cas (ii.3.3.2).
Sous-cas ii.3.3.3 : $n = 3$ et $q \in]2, 4[$. Dans ce cas, on a que

$$C_\epsilon = \begin{cases} \epsilon^{3-\frac{q}{2}}\kappa_{16}h(x_0) + o(\epsilon^{3-\frac{q}{2}}) & \text{si } q \in (3,4) \\ \omega_2 h(x_0)\epsilon^{\frac{3}{2}}\ln\frac{1}{\epsilon} + O(\epsilon^{\frac{3}{2}}) & \text{si } q = 3 \\ O(\epsilon^{\frac{q}{2}}) & \text{si } q \in (2,3). \end{cases} \tag{4.3.59}$$

Les relations (4.3.41), (4.3.59) prouvent (4.3.45) dans le cas (ii.3.3.3).

4.3.4 Preuve (iii) du Théorème : Influence de la géométrie et de la perturbation

Le Théorème 4.2.1 et les résultats (4.3.45) de l'étape (ii.3) de cette preuve impliquent le Théorème 4.3.1.

Conclusion : Nous distinguons que, dans le cas perturbatif sous-critique, c'est la perturbation qui imposera la condition suffisante d'existence pour les dimensions $n := \dim(M) \geq 4$. Dans le cas particulier $n = 3$, la condition suffisante d'existence dépendra de la perturbation et/ou de la géométrie de (M, g) (à savoir, de la masse de la fonction de Green au point singulier) selon l'exposant sous-critique q du terme perturbatif.

Chapitre 5

Inégalités Optimales de Hardy-Sobolev.

5.1 Théorème : " La Ière meilleure constante est atteinte"

Soient (M,g) une variété Riemannienne compacte de dimension $n \geq 3$, $x_0 \in M$, $s \in]0,2[$, et $2^\star(s) = \frac{2(n-s)}{n-2}$ l'exposant critique de Hardy-Sobolev. On considère $A_0(M,g,s,x_0)$ la première meilleure constante des inégalités de Hardy-Sobolev sur (M,g) (voir (1.2.3) pour la définition). Nous avons demontré dans le Chapitre 1, Théorème 1.2.1 qu'elle est égale à $K(n,s)$, la meilleure constante des inégalités de Hardy-Sobolev Euclidienne. A savoir,

$$K(n,s)^{-1} := \inf_{\varphi \in D_1^2(\mathbb{R}^n)\setminus\{0\}} \frac{\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla\varphi|_\delta^2 dX}{\left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\varphi|^{2^\star(s)}}{|X|_\delta^s} dX\right)^{\frac{2}{2^\star(s)}}},$$

où $D_1^2(\mathbb{R}^n)$ est le complété de $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ pour la norme $\varphi \mapsto \|\nabla\varphi\|_2$. En particulier, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $B_\epsilon > 0$ telle que pour tout $v \in H_1^2(M)$:

$$(\mathrm{I}_\epsilon) : \quad \left(\int_M \frac{|v|^{2^\star(s)}}{d_g(x,x_0)^s} dv_g\right)^{\frac{2}{2^\star(s)}} \leq (K(n,s)+\epsilon) \int_M |\nabla v|_g^2 dv_g + B_\epsilon \int_M v^2 dv_g,$$

où $H_1^2(M)$ est le complété de $C^\infty(M)$ pour la norme $u \mapsto \|\nabla u\|_2 + \|u\|_2$. Concernant le cas $\epsilon = 0$, nous avons déjà expliqué dans la partie 2.2.4 qu'en faisant tendre $\epsilon \to 0$ dans (I_ϵ), nous aurons, avec la construction du Chapitre 1, que $B_\epsilon \to +\infty$. Nous ne pouvons donc rien conclure. Le but de ce chapitre sera de démontrer que la première meilleure constante $A_0(M,g,x_0,s) = K(n,s)$ est atteinte, c.à.d. l'inégalité (I_0), qui correspond à prendre $\epsilon = 0$ dans (I_ϵ), est vraie :

Théorème 5.1.1 *Soient (M,g) une variété Riemannienne compacte de dimension $n \geq 3$, $x_0 \in M$, $s \in]0,2[$, et $2^\star(s) = \frac{2(n-s)}{n-2}$ l'exposant critique de Hardy-Sobolev. Alors il existe $B_0(M,g,s,x_0) > 0$ dépendant de (M,g) et s tel que pour tout $v \in H_1^2(M)$,*

$$\left(\int_M \frac{|v|^{2^\star(s)}}{d_g(x,x_0)^s}\, dv_g\right)^{\frac{2}{2^\star(s)}} \leq K(n,s) \int_M |\nabla v|_g^2\, dv_g + B_0(M,g,s,x_0) \int_M v^2\, dv_g. \quad (5.1.1)$$

Dans le cas $s = 0$, le Théorème 5.1.1 a été demontré par Hebey-Vaugon dans [32] pour les meilleures constantes des inclusions de Hardy-Sobolev $H_1^2(M) \subset L^{2^\star}(M)$, $2^\star = 2n/(n-2)$.

Dans son article [15], Druet a étudié les meilleures constantes des inclusions de Hardy-Sobolev $H_1^p(M) \subset L^{p^\star}(M), p^\star = pn/(n-p)$ $(n > p > 1)$ (voir aussi Aubin-Li [5] pour la preuve de la conjecture d'Aubin dans [3]). Hebey a étudié dans [28] le même problème pour les inclusions $H_2^2(M) \subset L^{2^\sharp}(M)$, $2^\sharp = 2n/(n-4), n \geq 5$, Brouttelande[8] et Ceccon-Montenegro[11] pour les inégalités de Gagliardo-Nirenberg. Ainsi nous établissons dans le Théorème suivant une inégalité optimale de Hardy-Sobolev sur les variétés. Ce résultat est une conclusion du Théorème précédent 5.1.1 et du Théorème d'existence obtenue par estimations des fonctions-tests (voir Chapitre 4).

Théorème 5.1.2 *Soient (M, g) une variété Riemannienne compacte de dimension $n \geq 3$, $x_0 \in M$, $s \in]0, 2[$, et $2^\star(s) = \frac{2(n-s)}{n-2}$ l'exposant critique de Hardy-Sobolev. Soit $B_0 = B_0(M, g, s, x_0) > 0$ comme dans le Théorème 5.1.1. Alors pour tout $v \in H_1^2(M)$ on a :*

$$\begin{cases} B_0(M, g, s, x_0) \geq K(n, s)\frac{(n-2)(6-s)}{12(2n-2-s)} Scal_g(x_0) & si\ n \geq 4 \\ m(x_0) \leq 0 & si\ n = 3. \end{cases} \tag{5.1.2}$$

où $m(x_0)$ désigne la masse de la fonction de Green correspondante à $\Delta_g + \frac{B_0(M,g,s,x_0)}{K(3,s)}$ (voir Appendice V pour la définition de la masse $m(x_0)$).

5.2 Blow-up autour de x_0

5.2.1 Théorème de Blow-up autour de x_0

Soient (M, g) une variété Riemannienne compacte de dimension $n \geq 3$, $x_0 \in M$, $s \in]0, 2[$. On considère une famille $(u_\alpha)_{\alpha>0}$ dans $H_1^2(M)$, telle que pour tout $\alpha > 0$, $u_\alpha \geq 0$, $u_\alpha \not\equiv 0$ et u_α est une solution du problème

$$\begin{cases} \Delta_g u_\alpha + \alpha u_\alpha = \lambda_\alpha \frac{u_\alpha^{2^\star(s)-1}}{d_g(x,x_0)^s} \\ \lambda_\alpha \in]0, K(n, s)^{-1}[\ ,\ \|u_\alpha\|_{2^\star(s),s} = 1. \end{cases} \tag{5.2.3}$$

avec $\Delta_g := -\mathrm{div}_g(\nabla)$ est l'opérateur de Laplace-Beltrami. Il s'ensuit de la régularité et du principe de maximum du Théorème 2.1.1 (voir aussi l'article [34]) que, pour tout $\alpha > 0$, $u_\alpha \in C^{0,\beta}(M) \cap C^{2,\gamma}_{loc}(M \setminus \{x_0\})$, $\beta \in]0, \min(1, 2-s)[$, $\gamma \in]0, 1[$, et $u_\alpha > 0$. On définit l'opérateur coercif I_α comme étant

$$v \in H_1^2(M) \setminus \{0\} \mapsto I_\alpha(v) := \frac{\int_M |\nabla v|_g^2 dv_g + \alpha \int_M v^2 dv_g}{\|v\|^2_{2^\star(s),s}}. \tag{5.2.4}$$

En particulier, $I_\alpha(u_\alpha) = \int_M |\nabla u_\alpha|_g^2 dv_g + \alpha \int_M u_\alpha^2 dv_g = \lambda_\alpha$ pour tout $\alpha > 0$.

On a donc :

$$u_\alpha \rightharpoonup 0 \text{ faiblement dans } H_1^2(M) \text{ quand } \alpha \to +\infty. \tag{5.2.5}$$

En effet, puisque pour tout $\alpha > 0$, $\|u_\alpha\|_{2^\star(s),s} = 1$ et $I_\alpha(u_\alpha) = \lambda_\alpha \in]0, K(n, s)^{-1}[$, la suite $(u_\alpha)_{\alpha>0}$ est donc bornée dans $H_1^2(M)$. D'où, il existe $u^0 \in H_1^2(M)$ tel que $u_\alpha \rightharpoonup u^0$ dans $H_1^2(M)$ quand $\alpha \to +\infty$. Avec $I_\alpha(u_\alpha) = \lambda_\alpha$, on tire que $\|u_\alpha\|_2 \leq C_1\alpha^{-1/2}$, avec $C_1 > 0$ est indépendante de α. Puisque l'inclusion $H_1^2(M) \hookrightarrow L^2(M)$ est compacte, il en résulte que $\|u^0\|_2 = 0$. Ceci implique $u^0 \equiv 0$. D'où le résultat. $\square$

Puisque M est compacte et $u_\alpha \in C^0(M)$ pour tout $\alpha > 0$, donc il existe $x_\alpha \in M$, $\mu_\alpha > 0$ tel que

$$\max_M(u_\alpha) = u_\alpha(x_\alpha) = \mu_\alpha^{1-\frac{n}{2}}. \tag{5.2.6}$$

Proposition 5.2.1 *Soit* $(u_\alpha)_{\alpha>0}$ *comme dans* (5.2.3). *Alors* $u_\alpha \to 0$ *quand* $\alpha \to +\infty$ *dans* $C^0_{loc}(M \setminus \{x_0\})$.

Preuve de la Proposition 5.2.1 : On considère $y \in M \setminus \{x_0\}$, $\rho_y = \frac{1}{3}d_g(y, x_0)$. Avec (5.2.3), on a que $\Delta_g u_\alpha \leq F_\alpha u_\alpha$ dans $\mathbb{B}_{2\rho_y}(y)$, où F_α est la fonction définie par $F_\alpha(x) = \lambda_\alpha u_\alpha^{2^\star(s)-2}/d_g(\cdot, x_0)^s$. Pour tout $r \in]\frac{n}{2}, \frac{n}{2-s}[$, on a que $\int_{\mathbb{B}_{2\rho_y}(y)} F_\alpha^r dv_g \leq C_2$ avec $C_2 > 0$ est une constante indépendante de α. Il s'ensuit du Théorème 4.1 dans Han-Lin[27] (voir aussi l'Appendice VI), qu'il existe $C_3 = C_3(n, s, y, C_2) > 0$ indépendante de α tel qu'à une extraction d'une sous-suite de $(u_\alpha)_\alpha$

$$\max_{\mathbb{B}_{\rho_y}(y)} u_\alpha \leq C_3 \|u_\alpha\|_{L^2(\mathbb{B}_{2\rho_y}(y)}.$$

Puisque $u_\alpha \rightharpoonup 0$ dans $H_1^2(M)$ quand $\alpha \to +\infty$, on tire avec la dernière inégalité

$$\lim_{\alpha\to+\infty} \|u_\alpha\|_{L^\infty(\mathbb{B}_{\rho_y}(y))} = 0.$$

Par arguments de recouvrement dûs à la compacité de M, on trouve le résultat demandé. $\square$

Proposition 5.2.2 *Soit* $(u_\alpha)_{\alpha>0}$ *comme dans* (5.2.3). *Alors* $\sup_M u_\alpha = +\infty$ *lorsque* $\alpha \to +\infty$.

Preuve de la Proposition 5.2.2 : Nous raisonnons par l'absurde et nous supposons que $\sup_M u_\alpha \not\to +\infty$ lorsque $\alpha \to +\infty$. Donc il existe une constante $C_4 > 0$ indépendante de α tel que $u_\alpha \leq C_4$. Puisque $u_\alpha \rightharpoonup 0$ lorsque $\alpha \to +\infty$ dans $H_1^2(M)$, on obtient avec le Théorème de convergence dominée que $\lim_{\alpha\to+\infty} \|u_\alpha\|_{2^\star(s),s} = 0$. Contradiction avec le fait que pour tout $\alpha > 0$, $\|u_\alpha\|_{2^\star(s),s} = 1$. Ceci termine la preuve de la Proposition 5.2.2.

Les Propositions 5.2.1 et 5.2.2 impliquent immédiatement la proposition suivante :

Proposition 5.2.3 *Soit* $(u_\alpha)_{\alpha>0}$ *comme dans* (5.2.3). *Alors, à une extraction d'une sous-suite près,* $x_\alpha \to x_0$ *lorsque* $\alpha \to +\infty$.

Dorénavant, on fixe $R_0 \in (0, i_g(M))$ et une fonction de troncature $\eta_0 \in C_c^\infty(\mathbb{B}_{3R_0/4}(0) \subset \mathbb{R}^n)$ telle que $\eta_0(x) \in [0, 1]$ et $\eta_0 \equiv 1$ in $\mathbb{B}_{R_0/2}(0)$. Le résultat principal dans cette section est le Théorème suivant :

Théorème 5.2.1 *On considère* $(u_\alpha)_{\alpha>0}$ *comme dans* (5.2.3) *et une suite* $(z_\alpha)_{\alpha>0} \in M$ *telle que* $\lim_{\alpha\to+\infty} z_\alpha = x_0$. *On définit la fonction* $\hat{u}_\alpha$ *sur* $\mathbb{B}_{R_0\mu_\alpha^{-1}}(0) \subset \mathbb{R}^n$ *par*

$$\hat{u}_\alpha(X) = \mu_\alpha^{\frac{n}{2}-1} u_\alpha(\exp_{z_\alpha}(\mu_\alpha X)), \tag{5.2.7}$$

avec $\exp_{z_\alpha}^{-1} : \Omega_\alpha \to \mathbb{B}_{R_0}(0)$ *est l'application exponentielle en* z_α, $\Omega_\alpha = \mathbb{B}_{R_0}(z_\alpha) \subset M$. *On suppose que*

$$d_g(x_\alpha, z_\alpha) = O(\mu_\alpha) \text{ lorsque } \alpha \to +\infty. \tag{5.2.8}$$

Alors
$$d_g(z_\alpha, x_0) = O(\mu_\alpha) \textit{ lorsque } \alpha \to +\infty \tag{5.2.9}$$
et, à une extraction d'une sous-suite près, $\eta_\alpha \hat{u}_\alpha$ *converge vers* $\hat{u}$ *faiblement dans* $D_1^2(\mathbb{R}^n)$ *et uniformement dans* $C^{0,\beta}_{loc}(\mathbb{R}^n)$*, pour tout* $\beta \in (0, \min(1, 2-s))$*, avec* $\eta_\alpha := \eta_0(\mu_\alpha \cdot)$ *et*
$$\hat{u}(X) = \left(\frac{a^{\frac{2-s}{2}} k^{\frac{2-s}{2}}}{a^{2-s} + |X - X_0|^{2-s}} \right)^{\frac{n-2}{2-s}} \quad \textit{pour tout } X \in \mathbb{R}^n$$
avec $X_0 \in \mathbb{R}^n$*,* $a > 0$ *et* $k^{2-s} = (n-2)(n-s)K(n,s)$*. En particulier,* $\hat{u}$ *vérifie*
$$\Delta_\delta \hat{u} = K(n,s)^{-1} \frac{\hat{u}^{2^\star(s)-1}}{|X - X_0|^s} \textit{ dans } \mathbb{R}^n \text{ et } \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\hat{u}^{2^\star(s)}}{|X - X_0|^s} dX = 1. \tag{5.2.10}$$

5.2.2 Preuve du Théorème 5.2.1 :

On considère $(u_\alpha)_\alpha$, $(z_\alpha)_{\alpha>0} \in M$ et $\hat{u}_\alpha$ comme dans le Théorème 5.2.1. On définit la métrique $\hat{g}_\alpha : X \mapsto \exp^*_{z_\alpha} g(\mu_\alpha X)$ sur $\mathbb{R}^n$ ainsi que les vecteurs $X_\alpha = \mu_\alpha^{-1} \exp^{-1}_{z_\alpha}(x_\alpha)$ et $X_{0,\alpha} = \mu_\alpha^{-1} \exp^{-1}_{z_\alpha}(x_0)$. Il s'ensuit de (5.2.8) que
$$\frac{d_g(z_\alpha, x_\alpha)}{\mu_\alpha} = |X_\alpha| = O(1) \text{ lorsque } \alpha \to +\infty. \tag{5.2.11}$$
Soit $R_1 > 0$ tel que
$$X_\alpha \in \mathbb{B}_{R_1}(0). \tag{5.2.12}$$
Nous faisons la preuve du Théorème 5.2.1 par étapes et commençons par un lemme important :

Lemme 5.2.1 *Le plongement* $D_1^2(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow H^2_{1,loc}(\mathbb{R}^n)$ *est continu. De plus, pour toute suite* $(v_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *bornée et qui converge faiblement dans* $D_1^2(\mathbb{R}^n)$*, on peut extraire une sous-suite qui converge fortement dans* $L^2_{loc}(\mathbb{R}^n)$ *vers la même limite.*

Preuve du Lemme 5.2.1 : Soient $R > 0$ et $u \in D_1^2(\mathbb{R}^n)$. On a :
$$\begin{aligned}
\|u\|_{H_1^2(\mathbb{B}_R(0))} &\leq \|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{B}_R(0))} + \|u\|_{L^2(\mathbb{B}_R(0))} \\
&\leq \|u\|_{D_1^2(\mathbb{R}^n)} + C_R \|u\|_{L^{2^*}(\mathbb{B}_R(0))} \\
&\leq \|u\|_{D_1^2(\mathbb{R}^n)} + C_{R,n} \|u\|_{D_1^2(\mathbb{R}^n)} \\
&\leq C_R \|u\|_{D_1^2(\mathbb{R}^n)},
\end{aligned}$$
sachant que les constantes C_R et $C_{R,n}$ sont respectivement celles obtenues par les inégalités de Hölder et le Théorème de Sobolev-Gagliardo-Nirenberg. D'où l'inclusion continue $D_1^2(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow H_1^2(\mathbb{B}_R(0))$.

Soit maintenant $(v_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite bornée dans $D_1^2(\mathbb{R}^n)$ et y converge faiblement vers v. L'inclusion continue $D_1^2(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow H_1^2(\mathbb{B}_R(0))$ implique que $H_1^2(\mathbb{B}_R(0))' \hookrightarrow D_1^2(\mathbb{R}^n)'$ continuement, donc la suite $(v_i)_{i\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers v dans $H_1^2(\mathbb{B}_R(0))$ qui est inclus dans $L^{2^*(s)}(\mathbb{B}_R(0)$ dont l'inclusion est compacte. Comme $(v_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $H_1^2(\mathbb{B}_R(0))$, donc on peut extraire une sous-suite $(v_{i_s})_{s\in\mathbb{N}}$ qui converge fortement vers v

dans $L^{2^*(s)}(\mathbb{B}_R(0))$. Avec l'inégalité de Hölder, on tire que $v_{i_s} \xrightarrow{s\to+\infty} v$ dans $L^2(\mathbb{B}_R(0))$. D'où le résultat. $\square$

Ière Étape : On démontre que pour tout $\alpha > 0$ et tous $X, Y_1, Y_2 \in \mathbb{B}_{R_\alpha \mu_\alpha^{-1}}(0)$, on a :

$$\mu_\alpha d_{\hat{g}_\alpha}(Y_1, Y_2) = d_g(y_1, y_2) \tag{5.2.13}$$

avec $y_i = \exp_{z_\alpha}(\mu_\alpha Y_i)$ et que $\hat{u}_\alpha$ vérifie faiblement sur $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$

$$\Delta_{\hat{g}_\alpha} \hat{u}_\alpha + \alpha \mu_\alpha^2 \hat{u}_\alpha = \lambda_\alpha \frac{\hat{u}_\alpha^{2^*(s)-1}}{d_{\hat{g}_\alpha}(X, X_{0,\alpha})^s}. \tag{5.2.14}$$

En effet, on a pour tout $X \in \mathbb{B}_{R_\alpha \mu_\alpha^{-1}}(0)$ et tous $Y_1, Y_2 \in \mathbb{R}^n$:

$$\mu_\alpha^*(\exp_{z_\alpha}^* g)(X)(Y_1, Y_2) = \exp_{z_\alpha}^* g(\mu_\alpha X)(\mu_\alpha Y_1, \mu_\alpha Y_2) = \mu_\alpha^2 \hat{g}_\alpha(X)(Y_1, Y_2).$$

Donc

$$\mu_\alpha^*(\exp_{z_\alpha}^* g) = \mu_\alpha^2 \hat{g}_\alpha.$$

En appliquant la définition d'une distance Riemannienne, on tire ensuite que : $d_{\mu_\alpha^*(\exp_{z_\alpha}^* g)} = \mu_\alpha d_{\hat{g}_\alpha}$. Maintenant si $Y_1, Y_2 \in \mathbb{B}_{R_\alpha \mu_\alpha^{-1}}(0)$ avec $y_i = \exp_{z_\alpha}(\mu_\alpha Y_i)$, $i = 1, 2$ alors on aura :

$$\begin{aligned} d_g(y_1, y_2) &= d_g(\exp_{z_\alpha}(\mu_\alpha Y_1), \exp_{z_\alpha}(\mu_\alpha Y_2)) \\ &= d_{\exp_{z_\alpha}^* g}(\mu_\alpha Y_1, \mu_\alpha Y_2) \\ &= d_{\mu_\alpha^*(\exp_{z_\alpha}^* g)}(Y_1, Y_2) \\ &= \mu_\alpha d_{\hat{g}_\alpha}(Y_1, Y_2). \end{aligned} \tag{5.2.15}$$

On pose $x = \exp_{z_\alpha}(\mu_\alpha X)$ et on écrit

$$\begin{aligned} \Delta_{\hat{g}_\alpha} \hat{u}_\alpha &= \Delta_{\mu_\alpha^{-2} \mu_\alpha^*(\exp_{z_\alpha}^* g)} \mu_\alpha^{\frac{n}{2}-1} u_\alpha(\exp_{z_\alpha}(\mu_\alpha X)) \\ &= \mu_\alpha^{\frac{n}{2}+1} \Delta_{\mu_\alpha^*(\exp_{z_\alpha}^* g)} u_\alpha(\exp_{z_\alpha}(\mu_\alpha X)) \\ &= \mu_\alpha^{\frac{n}{2}+1} \Delta_g u_\alpha(x). \end{aligned} \tag{5.2.16}$$

D'autre part, la définition de $\hat{u}_\alpha$ et la relation (5.2.13) donnent

$$\frac{\hat{u}_\alpha^{2^*(s)-1}}{d_{\hat{g}_\alpha}(X, X_{0,\alpha})^s} = \mu_\alpha^{(\frac{n}{2}-1)(2^*(s)-1)+s} \frac{u_\alpha^{2^*(s)-1}(x)}{d_g(x, x_0)^s}.$$

Puisque u_α vérifie l'équation faiblement sur $H_1^2(M)$

$$\Delta_g u_\alpha + \alpha u_\alpha = \lambda_\alpha \frac{u_\alpha^{2^*(s)-1}}{d_g(x, x_0)^s}$$

donc en combinant (5.2.15) et (5.2.16) avec la dernière équations, on tire (5.2.14). Ceci termine la preuve de la Ière étape du Théorème 5.2.1.

IIème Étape : On démontre qu'il existe $\hat{u} \in D_1^2(\mathbb{R}^n)$, $\hat{u} \not\equiv 0$ telle qu'à une extraction d'une sous-suite près, $(\eta_\alpha \hat{u}_\alpha)_{\alpha>0}$ converge faiblement vers $\hat{u}$, lorsque $\alpha \to +\infty$, dans $D_1^2(\mathbb{R}^n)$.

En effet, pour tout $\alpha > 0$, on écrit :

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla(\eta_\alpha \hat{u}_\alpha)|^2_{\hat{g}_\alpha} dv_{\hat{g}_\alpha} \leq 2\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \eta_\alpha|^2_{\hat{g}_\alpha} \hat{u}^2_\alpha dv_{\hat{g}_\alpha} + 2\int_{\mathbb{R}^n} \eta^2_\alpha |\nabla \hat{u}_\alpha|^2_{\hat{g}_\alpha} dv_{\hat{g}_\alpha} \tag{5.2.17}$$

Puisque $\mu_\alpha \to 0$ lorsque $\alpha \to +\infty$ donc il existe $C_5 > 0$ indépendante de α telle qu'on a, pour tout $X \in \mathbb{B}_{\frac{3R_0}{4\mu_\alpha}}(0)$, au sens des formes bilinéaires :

$$C_5^{-1}\delta(X) \leq \hat{g}_\alpha(X) \leq C_5 \delta(X) \tag{5.2.18}$$

à une extraction d'une sous-suite près $(\mu_\alpha)_{\alpha>0}$. D'autre part, on a pour tout $\alpha > 0$ et tout $X \in \mathbb{B}_{R_\alpha \mu_\alpha^{-1}}(0)$:

$$\begin{aligned} |\nabla \hat{u}_\alpha|^2_{\hat{g}_\alpha} &= \mu_\alpha^{n-2} |\nabla u_\alpha(\exp_{z_\alpha}(\mu_\alpha X))|^2_{\mu_\alpha^{-2}\mu_\alpha^*(\exp^*_{z_\alpha} g)} \\ &= \mu_\alpha^{n-2} \times \mu_\alpha^2 |\nabla u_\alpha|^2_g = \mu_\alpha^n |\nabla u_\alpha|^2_g \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} dv_{\hat{g}_\alpha} &= \sqrt{\det(\hat{g}_\alpha)} dX = \sqrt{\det(\mu_\alpha^{-2}\mu_\alpha^*(\exp^*_{z_\alpha} g))} dX \\ &= \sqrt{\mu_\alpha^{-2n} \det(\mu_\alpha^*(\exp^*_{z_\alpha} g))} dX = \mu_\alpha^{-n} \sqrt{\det(\mu_\alpha^*(\exp^*_{z_\alpha} g))}\, \exp^*_{z_\alpha} dx \\ &= \mu_\alpha^{-n} \sqrt{\det(\exp^*_{z_\alpha} g)}\, \exp^*_{z_\alpha} dx = \mu_\alpha^{-n} \sqrt{\det(g)} dx = \mu_\alpha^{-n} dv_g. \end{aligned}$$

On a ensuite pour tout $R > 0$:

$$\int_{\mathbb{B}_R(0)} |\nabla \hat{u}_\alpha|^2_{\hat{g}_\alpha} dv_{\hat{g}_\alpha} = \int_{\mathbb{B}_{\mu_\alpha R}(z_\alpha)} |\nabla u_\alpha|^2_g dv_g \leq \int_M |\nabla u_\alpha|^2_g dv_g.$$

Puisque la suite $(u_\alpha)_{\alpha>0}$ est bornée dans $H_1^2(M)$, il s'ensuit

$$\int_{\mathbb{B}_R(0)} |\nabla \hat{u}_\alpha|^2_{\hat{g}_\alpha} dv_{\hat{g}_\alpha} = O(1). \tag{5.2.19}$$

D'autre part, pour tous $\alpha > 0$ et $X \in \mathbb{R}^n$, on a : $\nabla \eta_\alpha(X) = \mu_\alpha (\nabla \eta_0)(\mu_\alpha X)$. Donc il existe $C_6 > 0$ ne dépendant pas de α tel que

$$|\nabla \eta_\alpha|_\delta = \mu_\alpha \left(\sum_{i=1}^n (\nabla_i \eta)^2 (\mu_\alpha X) \right)^{\frac{1}{2}} \leq C_6 \mu_\alpha. \tag{5.2.20}$$

Il s'ensuit des inégalités (5.2.20) et (5.2.18) que :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \eta_\alpha|^2_{\hat{g}_\alpha} \hat{u}^2_\alpha dv_{\hat{g}_\alpha} &= \int_{\mathbb{B}_{\frac{3R_0}{4\mu_\alpha}}(0)} |\nabla \eta_\alpha|^2_{\hat{g}_\alpha} \hat{u}^2_\alpha dv_{\hat{g}_\alpha} \leq C_5 \int_{\mathbb{B}_{\frac{3R_0}{4\mu_\alpha}}(0)} |\nabla \eta_\alpha|^2_\delta \hat{u}^2_\alpha dv_{\hat{g}_\alpha} \\ &\leq C_7 \mu_\alpha^2 \int_{\mathbb{B}_{\frac{3R_0}{4\mu_\alpha}}(0)} \hat{u}^2_\alpha dv_{\hat{g}_\alpha} \leq C_6 \int_{\mathbb{B}_{\frac{3R_0}{4}}(z_\alpha)} u^2_\alpha dv_g \\ &\leq C_8 \int_{\mathbb{B}_{\frac{3R_0}{4}}(z_\alpha)} \frac{u^2_\alpha(x)}{d_g(x,x_0)^s} dv_g \leq C_9 \left(\int_{\mathbb{B}_{\frac{3R_0}{4}}(z_\alpha)} \frac{u_\alpha^{2^*(s)}(x)}{d_g(x,x_0)^s} dv_g \right)^{\frac{2}{2^*(s)}} \end{aligned} \tag{5.2.21}$$

où les constantes $C_i > 0, i = 7, 8, 9$ ne dépendent pas de α. Comme $\int_M \frac{u_\alpha^{2^*(s)}(x)}{d_g(x,x_0)^s} dv_g = 1$, pour tout $\alpha > 0$, il s'ensuit de (5.2.20) que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \eta_\alpha|^2_{\hat{g}_\alpha} \hat{u}_\alpha^2 dv_{\hat{g}_\alpha} = O(1). \tag{5.2.22}$$

En combinant les relations (5.2.19) et (5.2.22) avec (5.2.17), on aura que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla(\eta_\alpha \hat{u}_\alpha)|^2_{\hat{g}_\alpha} dv_{\hat{g}_\alpha} = O(1). \tag{5.2.23}$$

Avec les inégalités (5.2.18) on écrit :

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla(\eta_\alpha \hat{u}_\alpha)|^2_\delta dX \leq C_5^{\frac{n}{2}+1} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla(\eta_\alpha \hat{u}_\alpha)|^2_{\hat{g}_\alpha} \sqrt{det(\hat{g}_\alpha)} dX \leq C_5^{\frac{n}{2}+1} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla(\eta_\alpha \hat{u}_\alpha)|^2_{\hat{g}_\alpha} dv_{\hat{g}_\alpha}. \tag{5.2.24}$$

D'où, (5.2.23) et (5.2.24) impliquent que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla(\eta_\alpha \hat{u}_\alpha)|^2_\delta dX = O(1).$$

Montrons maintenant que la suite $(\eta_\alpha \hat{u}_\alpha)_{\alpha>0}$ est dans $D_1^2(\mathbb{R}^n)$.
Pour cela, on fixe $\alpha > 0$ et $R > 0$. La fonction $\eta_\alpha \hat{u}_\alpha$ étant dans $H_1^2(\mathbb{R}^n)$, il existe donc une suite $(u_{\alpha,m})_{m\in\mathbb{N}}$ qui est de Cauchy pour la norme $\|\cdot\|_{H_1^2(\mathbb{R}^n)}$ telle que $u_{\alpha,m} \to \eta_\alpha \hat{u}_\alpha$ lorsque $\alpha \to +\infty$ pour la norme $\|\cdot\|_{H_1^2(\mathbb{R}^n)}$. Il s'ensuit que $(u_{\alpha,m})_{m\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans l'espace $\left(D_1^2(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_{D_1^2(\mathbb{R}^n)}\right)$ qui est de Banach donc il existe $\bar{u}_\alpha \in D_1^2(\mathbb{R}^n)$ tel que $u_{\alpha,m} \to \bar{u}_\alpha$ lorsque $\alpha \to +\infty$ pour la norme $\|\cdot\|_{D_1^2(\mathbb{R}^n)}$. L'unicité de la limite donne le résultat demandé.
Ainsi la suite $(\eta_\alpha \hat{u})_{\alpha>0}$ est donc bornée dans $(D_1^2(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_{D_1^2(\mathbb{R}^n)})$ qui est reflexif donc, d'après le théorème de Banach, il existe $\hat{u} \in D_1^2(\mathbb{R}^n)$ tel qu'à une extraction d'une sous-suite près $\eta_\alpha \hat{u}_\alpha \rightharpoonup \hat{u}$, lorsque $\alpha \to +\infty$.
Il reste à démontrer que $\hat{u} \not\equiv 0$. En effet, on peut écrire :

$$\begin{aligned}
\Delta_{\hat{g}_\alpha} \hat{u}_\alpha &= \lambda_\alpha \frac{\hat{u}_\alpha^{2^*(s)-1}}{d_{\hat{g}_\alpha}(X, X_{0,\alpha})^s} - \hat{\alpha}\hat{u}_\alpha \\
&\leq \lambda_\alpha \hat{u}_\alpha^{2^*(s)-2} \frac{\hat{u}_\alpha}{d_{\hat{g}_\alpha}(X, X_{0,\alpha})^s} \leq \frac{K(n,s)^{-1}}{d_{\hat{g}_\alpha}(X, X_{0,\alpha})^s} \hat{u}_\alpha.
\end{aligned}$$

La dernière inégalité est vraie car $\hat{u}_\alpha \leq 1$ et $\lambda_\alpha^{(s)} < K(n,s)^{-1}$. Posons que

$$F_\alpha(X) = \frac{K(n,s)^{-1}}{d_{\hat{g}_\alpha}(X, X_{0,\alpha})^s}.$$

Soit $\gamma \in]\frac{n}{2}, \frac{n}{s}[$. On va démontrer maintenant qu'il existe $d_0 > 0$ tel que la suite $(F_\alpha)_{\alpha>0}$ soit bornée dans $L^\gamma(\mathbb{B}_{d_0}(0))$ indépendament de α. Il s'ensuit des inégalités (5.2.18) que

$$C_5^{-1/2}|X - X_{0,\alpha}| \leq d_{\hat{g}_\alpha}(X, X_{0,\alpha}) \leq C_5^{1/2}|X - X_{0,\alpha}|. \tag{5.2.25}$$

et

$$C_5^{-n/2} \leq \sqrt{det(\hat{g}_\alpha)}(X) \leq C_5^{n/2} \tag{5.2.26}$$

pour tout $X \in \mathbb{B}_{R_0}(0)$. Deux cas à distinguer :

Cas II.1 : $X_{0,\alpha} \to X_0$ lorsque $\alpha \to +\infty$. Dans ce cas, pour un $\epsilon_0 > 0$ fixé, il existe $d_0 > 0$ tel que

$$X_{0,\alpha} \in \mathbb{B}_{\epsilon_0}(X_0) \cup \mathbb{B}_{R_1}(0) \subset \mathbb{B}_{\frac{d_0}{2}}(0)$$

sauf pour un nombre fini des $X_{0,\alpha}$, où $R_1 > 0$ vérifiant (5.2.12). Par suite, il existe $C_{10} > 0$ indépendante de α tel que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{B}_{d_0}(0)} F_\alpha^\gamma dv_{\hat{g}_\alpha} &\leq C_8 \int_{\mathbb{B}_{d_0}(0)} \frac{dX}{|X - X_{0,\alpha}|^{s\gamma}} \leq C_{10} \int_{\mathbb{B}_{2d_0}(X_{0,\alpha})} \frac{dX}{|X - X_{0,\alpha}|^{s\gamma}} \\ &\leq C_{11} \int_0^{2d_0} r^{n-1-s\gamma} dr \leq C_{10},\end{aligned}$$

avec $C_{10}, C_{11} > 0$ sont des constantes qui ne dépendent pas de α.

Cas II.2 : $X_{0,\alpha} \to +\infty$ lorsque $\alpha \to +\infty$. Dans ce cas, les inégalités (5.2.25), (5.2.26) et le Théorème de la convergence dominé donnent que $\lim_{\alpha \to +\infty} \|F_\alpha\|_{C^0(\mathbb{B}_1(0))} = 0$. D'où

$$\int_{\mathbb{B}_{d_0}(0)} F_\alpha^\gamma dv_{\hat{g}_\alpha} = O(1),$$

pour un d_0 choisi petit.

Il s'ensuit des deux cas (II.1) et (II.2), qu'il existe $d_0 > 0$ tel que pour tout $\alpha > 0$, $X_\alpha \in \mathbb{B}_{R_1}(0)$ et $\int_{\mathbb{B}_{2d_0}(0)} F_\alpha^\gamma dv_{\hat{g}_\alpha} \leq C_{12}$, avec $C_{12} > 0$ est indépendante de α. De plus, on a pour tout $\theta \leq \min(1, 2-s)$, $\hat{u}_\alpha \in C^{0,\theta}(\mathbb{B}_{2R_1}(0))$ et $\hat{u}_\alpha > 0$. Il s'ensuit du Théorème 4.1 dans Han-Lin[27] (voir aussi l'Appendice VI), qu'il existe $C_{13} = C_{13}(n, s, y, C_2) > 0$ indépendante de α tel qu'à une extraction d'une sous-suite de $(u_\alpha)_\alpha$

$$1 = \max_{\mathbb{B}_{d_0}(0)} \hat{u}_\alpha \leq C_{13} \|\hat{u}_\alpha\|_{L^2(\mathbb{B}_{2d_0}(0))}, \tag{5.2.27}$$

Puisque $(\eta_\alpha \hat{u}_\alpha)_{\alpha > 0}$ est bornée et converge faiblement vers $\hat{u}$ lorsque $\alpha \to +\infty$ dans $D_1^2(\mathbb{R}^n)$, il s'ensuit du Lemme 5.2.1 que la convergence est forte dans $L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$. En passant à la limite dans (5.2.27), on obtient que $\|\hat{u}\|_{L^2(\mathbb{B}_{2R_1}(0))} \geq C_{13}^{-1}$ et donc $\hat{u} \not\equiv 0$. Ceci termine la preuve de la IIème étape du Théorème 5.2.1.

IIIème Étape : On va démontrer que

$$K(n, s)^{-1} = \lim_{\alpha \to +\infty} \lambda_\alpha.$$

En effet, on a pour tout $\alpha > 0$: $\lambda_\alpha < K(n, s)^{-1}$ donc on peut extraire une sous-suite, que l'on note aussi $(\lambda_\alpha)_{\alpha > 0}$, telle que $\lim_{\alpha \to +\infty} \lambda_\alpha = \lambda$. Supposons par l'absurde que $\lambda \neq K(n, s)^{-1}$. Donc ils existent $\epsilon_0 > 0$ et $\alpha_0 > 0$ tels que pour tous $\alpha > \alpha_0$, on a :

$$K(n, s)^{-1} - \lambda_\alpha > \epsilon_0. \tag{5.2.28}$$

On sait, d'après la Proposition 1.2.1, que pour tout $\epsilon > 0$, il existe $B_\epsilon > 0$ tel que pour tout $u \in H_1^2(M)$, on a

$$\left(\int_M \frac{|u|^{2^\star(s)}}{d_g(x,x_0)^s} dv_g\right)^{\frac{2}{2^\star(s)}} \leq (K(n,s)+\epsilon)\int_M |\nabla u|_g^2 dv_g + B_\epsilon \int_M u^2 dv_g.$$

Si on prend $u = u_\alpha$ et $\alpha > \frac{B_\epsilon}{K(n,s)+\epsilon}$, on aura donc

$$\begin{aligned} 1 &\leq (K(n,s)+\epsilon)\int_M |\nabla u_\alpha|_g^2 dv_g + B_\epsilon \int_M u_\alpha^2 dv_g \\ &= (K(n,s)+\epsilon) I_\alpha(u_\alpha) \leq \left(\frac{1}{\lambda_\alpha + \epsilon_0} + \epsilon\right)\lambda_\alpha, \end{aligned}$$

sachant que la dernière inégalité est obtenue avec (5.2.28). Par passage à la limite quand $\alpha \to +\infty$, on aura pour tout $\epsilon > 0$:

$$1 \leq \left(\frac{1}{\lambda + \epsilon_0} + \epsilon\right)\lambda.$$

En faisant tendre ϵ vers 0, on obtiendra : $1 \leq \frac{\lambda}{\lambda+\epsilon_0}$. Ce qui n'est pas vrai. D'où $K(n,s)^{-1} = \lambda = \lim_{\alpha\to+\infty}\lambda_\alpha$. Ceci termine la preuve de la IIIème étape du Théorème 5.2.1.

IVème Étape : On va démontrer qu'il existe $A \geq 0$ tel que $\hat{u}$ vérifie faiblement sur $C^\infty_{loc}(\mathbb{R}^n)$

$$\begin{cases} \Delta_\delta \hat{u} + A\hat{u} = K(n,s)^{-1}\frac{\hat{u}^{2^*(s)-1}}{|X-X_0|^s} & \text{si } \lim_{\alpha\to+\infty} X_{0,\alpha} = X_0 \ , \\ \Delta_\delta \hat{u} + A\hat{u} = 0 & \text{si } \lim_{\alpha\to+\infty}|X_{0,\alpha}| = +\infty. \end{cases} \tag{5.2.29}$$

Sous-étape IV.1 : Dans cette partie, on démontre les propositions suivantes :
1/ La suite $(\hat{g}_\alpha)_{\alpha>0}$ converge uniformement vers la métrique Euclidienne δ localement sur $\mathbb{R}^n$.
2/ Pour tout $R > 0$, on a :

$$d_{\hat{g}_\alpha}(X, X_{0,\alpha}) \xrightarrow{C^0(\mathbb{B}_R(0))} |X - X_0|, \text{ si } X_0 \text{ est fini.}$$

Preuve de 1/ : En effet, un D.L. de de Cartan pour g dans une carte exponentielle $(\mathbb{B}_{R_0}(z_\alpha), \exp_{z_\alpha}^{-1})$ centrée en z_α permet d'écrire pour tout $x = \exp_{z_\alpha}^{-1}(\mu_\alpha X) \in \Omega_\alpha, X \in \mathbb{B}_R(0)$:

$$\begin{aligned} g(\exp_{z_\alpha}^{-1}(\mu_\alpha X)) &= \left((\exp_{z_\alpha}^{-1})^*\delta\right)(z_\alpha) + O(d_g(z_\alpha, x)^2) \\ &= \delta(0) + O(|\mu_\alpha X|^2) = \delta(0) + o(\mu_\alpha). \end{aligned}$$

Il s'ensuit que pour tout $R > 0$ et tout $\alpha > 0$ (à extraction près), on a :

$$\hat{g}_\alpha(X) = \delta(0) + o_R(\mu_\alpha) \text{ sur } \mathbb{B}_R(0)$$

où $o_R(1) \to 0$ lorsque $\alpha \to +\infty$. D'où le résultat.

Preuve de 2/ : Pour cela, on considère, pour tout $\alpha > 0$, la fonction

$$\exp_{z_\alpha}^* g : \mathbb{B}_{R_\alpha}(0) \to (Bil(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_\infty).$$

Soit $\epsilon > 0$. L'application $\exp_{z_\alpha}^* g$ étant continue sur 0 donc (voir Appendice I) il existe $r_{\alpha,\epsilon} > 0, \lim_{\epsilon\to 0} r_{\alpha,\epsilon} = 0$ tel que pour tout $X \in \mathbb{B}_{r_{\alpha,\epsilon}}(0) \subset \mathbb{B}_\epsilon(0)$, on a : $\| \exp_{z_\alpha}^* g(X) - \delta\|_\infty < \epsilon$. Il s'ensuit que pour tout $i, j = 1, \dots, n$ et tout $x \in (\mathbb{B}_{r_{\alpha,\epsilon}}(z_\alpha), \exp_{z_\alpha}^{-1})$, on a : $|g_{ij}(x) - \delta_{ij}| < \epsilon$, et pour tout $v \in \mathbb{R}^n$:

$$(1-\epsilon)\delta(v,v) \leq \exp_{z_\alpha}^* g(x)(v,v) \leq (1+\epsilon)\delta(v,v).$$

Il s'ensuit que pour tout $X, Y \in \mathbb{B}_{r_{\alpha,\epsilon}}(0)$, on a :

$$\sqrt{1-\epsilon}|X-Y| \leq d_{\exp_{z_\alpha}^* g}(X,Y) \leq \sqrt{1+\epsilon}|X-Y|.$$

Soit $R > 0$. Puisque $\lim_{\epsilon\to 0} r_{\alpha,\epsilon} = 0$ donc il existe $\alpha_1 > 0$ tel que pour tout $\alpha > \alpha_1$ et tous $X, Y \in \mathbb{B}_R(0)$, on a :

$$\sqrt{1-\epsilon} \leq \frac{d_{\exp_{z_\alpha}^* g}(X,Y)}{|X-Y|} \leq \sqrt{1+\epsilon}. \tag{5.2.30}$$

Soient $\eta > 0$, $\eta' < \frac{\eta}{2(1+R)}$. Comme $\lim_{\epsilon\to 0}\sqrt{1\pm\epsilon} = 1$, il existe donc $\epsilon_1 = \epsilon_1(\eta') > 0$ tel que pour tout $\epsilon < \epsilon_1$, on a :

$$|\sqrt{1\pm\epsilon} - 1| < \eta'.$$

Soit $\epsilon < \epsilon_1$. Il existe donc, d'après (5.2.30), il existe $\alpha_1(\epsilon) > 0$ tel que pour tout $\alpha > \alpha_1$ et tout $X \in \mathbb{B}_R(0)$, on a :

$$(1-\eta')|X - X_{0,\alpha}| \leq d_{\hat{g}_\alpha}(X, X_{0,\alpha}) \leq (1+\eta')|X - X_{0,\alpha}|. \tag{5.2.31}$$

D'autre part, on a que :

$$|X - X_{0,\alpha}| \xrightarrow{C^0(\mathbb{B}_R(0))} |X - X_0|.$$

En effet, on a :

$$\begin{aligned} < X - X_{0,\alpha}, X - X_{0,\alpha} > &= < X - X_0, X - X_0 > + < X_0 - X_{0,\alpha}, X_0 - X_{0,\alpha} > \\ &\quad +2 < X - X_0, X_0 - X_{0,\alpha} > . \end{aligned}$$

Il s'ensuit avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz que

$$\begin{aligned} \big||X - X_{0,\alpha}|^2 - |X - X_0|^2\big| &\leq |X_{0,\alpha} - X_0|^2 + 2 < X - X_0, X_0 - X_{0,\alpha} > \\ &\leq |X_{0,\alpha} - X_0|^2 + 2|X - X_0| \times |X_{0,\alpha} - X_0|. \end{aligned}$$

Ceci implique que la suite $(|X - X_{0,\alpha}|)_{\alpha>0}$ converge uniformement vers $|X - X_0|_\delta$ sur $\mathbb{B}_R(0)$. Par suite, il existe $\alpha_2(\epsilon) > 0$ tel que pour tout $\alpha > \alpha_2$ et tout $X \in \mathbb{B}_R(0)$, on a :

$$||X - X_{0,\alpha}| - |X - X_0|| \leq \eta'. \tag{5.2.32}$$

Les inégalités (5.2.31) et (5.2.32) implquent que pour tout $\alpha > \max\{\alpha_1, \alpha_2\}$ on a :

$$(1-\eta')(|X - X_0| - \eta') \leq d_{\hat{g}_\alpha}(X, X_{0,\alpha}) \leq (1+\eta')(|X - X_0| + \eta').$$

Donc

$$\begin{aligned} |d_{\hat{g}_\alpha}(X, X_{0,\alpha}) - |X - X_0|| &\leq \eta'(1 + 2R + \eta') \\ &\leq \eta. \end{aligned}$$

D'où le résultat.

Sous-étape IV.2 : Soient $R > 0$ et $\varphi \in C^\infty(\mathbb{B}_R(0))$. On va démontrer que

$$\lim_{\alpha\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^n} < \nabla(\eta_\alpha \hat{u}_\alpha), \nabla\varphi >_{\hat{g}_\alpha} dv_{\hat{g}_\alpha} = \int_{\mathbb{R}^n} (\nabla\hat{u}, \nabla\varphi) dX. \tag{5.2.33}$$

En effet, on a démontré $\hat{g}_\alpha$ vérifie uniformement sur $\mathbb{B}_R(0)$:

$$\hat{g}_\alpha(X) = \delta(0) + o_R(\mu_\alpha)$$

où $o_R(1) \to 0$ lorsque $\alpha \to +\infty$. Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} < \nabla(\eta_\alpha\hat{u}_\alpha), \nabla\varphi >_{\hat{g}_\alpha} dv_{\hat{g}_\alpha} &= \int_{\mathbb{B}_R(0)} < \nabla(\eta_\alpha\hat{u}_\alpha), \nabla\varphi >_{\hat{g}_\alpha} \sqrt{det(\hat{g}_\alpha)} dX \\ &= \int_{\mathbb{B}_R(0)} < \nabla(\eta_\alpha\hat{u}_\alpha), \nabla\varphi >_\delta dX + o_R(\mu_\alpha), \end{aligned} \tag{5.2.34}$$

où $o_R(1) \to 0$ lorsque $\alpha \to +\infty$. Mais $(\eta_\alpha\hat{u}_\alpha)_{\alpha>0}$ converge faiblement vers $\hat{u}$ dans $D_1^2(\mathbb{R}^n)$ qui est inclus dans $H_1^2(\mathbb{B}_R(0))$ alors en utilisant la fonctionnelle $\Phi_\varphi \in (H_1^2(\mathbb{B}_R(0)))'$ défine par :

$$\Phi_\varphi : \psi \mapsto \int_{\mathbb{B}_R(0)} < \nabla\psi, \nabla\varphi >_\delta dX$$

et d'après (5.2.34), on tire le résultat (5.2.33) demandé.

Sous-étape IV.3 : Démontrons qu'il existe $A \geq 0$ tel que pour tout $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$

$$\lim_{\alpha\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \alpha^2\mu_\alpha\hat{u}_\alpha\varphi dv_{\hat{g}_\alpha} = A \int_{\mathbb{R}^n} \hat{u}\varphi dX. \tag{5.2.35}$$

On commence à voir que

$$\alpha^2\mu_\alpha = O(1). \tag{5.2.36}$$

En effet, l'égalité

$$I_\alpha(u_\alpha) = \lambda_\alpha$$

implique que

$$\int_{\mathbb{B}_{R\mu_\alpha}(z_\alpha)} \alpha u_\alpha^2 dv_g \leq \lambda_\alpha < K(n,s)^{-1}.$$

D'où

$$\alpha^2\mu_\alpha \int_{\mathbb{B}_R(0)} \hat{u}_\alpha^2 dv_{\hat{g}_\alpha} < K(n,s)^{-1}. \tag{5.2.37}$$

Du théorème de convergence dominée de Lebesgue et à partir des données suivantes

$$\begin{cases} \hat{u}_\alpha \leq 1, \\ \hat{u}_\alpha \xrightarrow{\alpha\to+\infty} \hat{u} \not\equiv 0, \\ \sqrt{det(\hat{g}_\alpha)} = 1 + o(\mu_\alpha), \end{cases}$$

on tire que

$$\int_{\mathbb{B}_R(0)} \hat{u}_\alpha^2 dv_{\hat{g}_\alpha} \xrightarrow{\alpha\to+\infty} \int_{\mathbb{B}_R(0)} \hat{u}^2 dX. \tag{5.2.38}$$

De (5.2.37) et (5.2.38), on tire

$$\alpha^2\mu_\alpha \leq \frac{K(n,s)^{-1}}{\int_{\mathbb{B}_R(0)} \hat{u}^2 dX} + o(1).$$

D'où $(\alpha^2\mu_\alpha)_{\alpha\to+\infty}$ est borné indépendament de α.
On pose, à une extraction près, $A = \lim_{\alpha\to+\infty} \alpha^2\mu_\alpha$. En utilisant le théorème de convergence dominée de Lebesgue comme ci-dessus, on tire aisément (5.2.35).

Sous-étape IV.4 : Soient $R > 0$ et $\varphi \in C^\infty(\mathbb{B}_R(0))$. À une extraction d'une sous-suite de $(z_\alpha)_{\alpha>0}$, on considère, pour tout $\alpha > 0$, la suite $(h_\alpha)_{\alpha>0}$ définie sur $\mathbb{B}_R(0)$ par :

$$X \in \mathbb{B}_R(0) \mapsto h_\alpha(X) = \frac{(\eta_\alpha \hat{u}_\alpha)^{2^*(s)-1}(X)\varphi(X)}{d_{\hat{g}_\alpha}(X, X_{0,\alpha})^s}\sqrt{det(\hat{g}_\alpha)}(X).$$

On considère la fonction

$$X \in \mathbb{B}_R(0) \mapsto h(X) = \begin{cases} \frac{\hat{u}^{2^*(s)-1}(X)\varphi(X)}{|X-X_0|^s} & \text{si } |X_0| < +\infty \ , \\ 0 & \text{si } |X_0| = +\infty. \end{cases}$$

On va démontrer

$$\lim_{\alpha\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^n} h_\alpha(X)dX = \int_{\mathbb{R}^n} h(X)dX. \tag{5.2.39}$$

On distingue deux cas :

Cas IV.4.1 : $X_{0,\alpha} \to X_0$ lorsque $\alpha \to +\infty$. Soit $\epsilon > 0$. Il existe donc $\alpha_1 = \alpha_1(\epsilon) > 0$ tel que pour tout $\alpha > \alpha_1$, on a : $X_{0,\alpha} \in \mathbb{B}_{\frac{\epsilon}{2}}(X_0)$ Alors pour tout $X \in \mathbb{B}_R(0) \setminus \mathbb{B}_\epsilon(X_0)$, on a :

$$\begin{array}{rcl} |X - X_{0,\alpha}|_\delta & \geq & |X - X_0|_\delta - |X - X_{0,\alpha}|_\delta \\ & > & \frac{\epsilon}{2}. \end{array}$$

Donc il existe $C_1(\epsilon) > 0$ tel que

$$|h_\alpha| \leq C_1(\epsilon)|\varphi|. \tag{5.2.40}$$

Puisque $h_\alpha \xrightarrow{\alpha\to+\infty} h$ p.p. sur $\mathbb{B}_R(0)$ donc avec (5.2.40) et le théorème de convergence dominée de Lebesgue on tire que

$$\lim_{\alpha\to+\infty} \int_{\mathbb{B}_R(0)\setminus\mathbb{B}_\epsilon(X_0)} h_\alpha(X)dX = \int_{\mathbb{B}_R(0)\setminus\mathbb{B}_\epsilon(X_0)} h(X)dX. \tag{5.2.41}$$

De plus, il existe, par critère de compacité, $C_{14} = C_{14}(\epsilon) > 0$ (indépendante de α) tel qu'on a :

$$\begin{array}{rcl} \left|\int_{\mathbb{B}_\epsilon(X_0)} h_\alpha dX\right| & \leq & C_{14} \int_{\mathbb{B}_\epsilon(X_0)} \frac{|\varphi|dX}{|X - X_{0,\alpha}|_\delta^s} \\ & \leq & C_{14}\|\varphi\|_\infty \int_{\mathbb{B}_\epsilon(X_0)} \frac{dX}{|X - X_{0,\alpha}|_\delta^s} \\ & \leq & C_{14}\|\varphi\|_\infty \int_{\mathbb{B}_{2\epsilon}(X_{0,\alpha})} \frac{dX}{|X - X_{0,\alpha}|_\delta^s} \\ & \leq & C_{14} \int_0^{2\epsilon} r^{n-s-1}dr \leq C_2\epsilon^{n-s}. \end{array} \tag{5.2.42}$$

De même, on démontre qu'il existe $C_{15} = C_{15}(\epsilon) > 0$ tel que :

$$\left|\int_{\mathbb{B}_\epsilon(X_0)} h(X)dX\right| \le C_{15}\epsilon^{n-s}. \tag{5.2.43}$$

Soit maintenant $\eta > 0$. Pour cet η et d'après (5.2.42) et (5.2.43), ils existent $\kappa_1, \kappa_2 > 0$ tels que

$$\begin{aligned}\left|\int_{\mathbb{B}_R(0)} h_\alpha dX - \int_{\mathbb{B}_R(0)} hdX\right| &\le \left|\int_{\mathbb{B}_R(0)\setminus\mathbb{B}_\epsilon(X_0)} h_\alpha dX - \int_{\mathbb{B}_R(0)\setminus\mathbb{B}_\epsilon(X_0)} hdX\right| \\ &\quad + \left|\int_{\mathbb{B}_\epsilon(0)} h_\alpha dX\right| + \left|\int_{\mathbb{B}_\epsilon(0)} hdX\right| \\ &\le \left|\int_{\mathbb{B}_R(0)\setminus\mathbb{B}_\epsilon(X_0)} h_\alpha dX - \int_{\mathbb{B}_R(0)\setminus\mathbb{B}_\epsilon(X_0)} hdX\right| \\ &\quad + \kappa_1\epsilon^{n-s} + \kappa_2\epsilon^{n-s}. \end{aligned} \tag{5.2.44}$$

D'après (5.2.41), il existe $\epsilon_0 > 0, \alpha_0 > 0$ tel que pour tous $\epsilon < \epsilon_0, \alpha > \alpha_0$, on a :

$$\left|\int_{\mathbb{B}_R(0)\setminus\mathbb{B}_\epsilon(X_0)} h_\alpha dX - \int_{\mathbb{B}_R(0)\setminus\mathbb{B}_\epsilon(X_0)} hdX\right| < \frac{\eta}{3} \tag{5.2.45}$$

Puisque $\lim_{\epsilon\to 0}\kappa_1\epsilon^{n-s} = 0 = \lim_{\epsilon\to 0}\kappa_2\epsilon^{n-s}$, donc il existe $\epsilon_1 > 0$ (resp.$\epsilon_2 > 0$) tel que $\kappa_1\epsilon^{n-s} < \frac{\eta}{3}$ (resp. $\kappa_1\epsilon^{n-s} < \frac{\eta}{3}$). En choisissant maintenant $\epsilon < \inf\{\epsilon_i,\ i = 0, 1, 2\}$, on tire avec (5.2.45) qu'il existe $\alpha_0 > 0$ tel que pour tout $\alpha \ge \alpha_0$ on a :

$$\left|\int_{\mathbb{B}_R(X_0)} h_\alpha dX - \int_{\mathbb{B}_R(X_0)} hdX\right| < \eta.$$

Avec (5.2.41), ceci montre (5.2.39) dans le cas (IV.4.1).

Cas IV.4.2 : $|X_{0,\alpha}| \to +\infty$ lorsque $\alpha \to +\infty$. Dans ce cas, on a $\lim_{\alpha\to+\infty} d_{\hat{g}_\alpha}(X, X_{0,\alpha})^{-s} = 0$ dans $C_c^0(\mathbb{R}^n)$. Il s'ensuit $\lim_{\alpha\to+\infty}\int_{\mathbb{B}_R(0)} h_\alpha dX = 0$. Ceci montre (5.2.39) dans le cas (IV.4.2).

En combinant les relations (5.2.33), (5.2.35) et (5.2.39) des sous-étapes (IV.2), (IV.3) et (IV.4) respectivement avec (5.2.14), celle de la Ière étape, on tire (5.2.29). Ceci termine l'étape (IV) de la preuve du Théorème 5.2.1.

V ème étape : Il existe $X_0 \in \mathbb{R}^n$ telle que la fonction $\hat{u}$ vérifie au sens des distributions :

$$\Delta_\delta \hat{u} + A\hat{u} = K(n,s)^{-1}\frac{\hat{u}^{2^*(s)-1}}{|X - X_0|^s}. \tag{5.2.46}$$

En effet, d'après ce qui a été démontré dans l'étape (IV), il suffit de démontrer que $|X_{0,\alpha}| = O(1)$ lorsque $\alpha \to +\infty$. Pour cela, on suppose par l'absurde que $\lim_{\alpha\to+\infty}|X_{0,\alpha}| = +\infty$. Dans ce cas, on a déjà démontré que $\hat{u}$ vérifie faiblement sur $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$:

$$\Delta_\delta \hat{u} + A\hat{u} = 0, \tag{5.2.47}$$

Soit $\hat{\eta} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ telle que $\hat{\eta} \equiv 1$ dans $\mathbb{B}_1(0)$, $0 \le \hat{\eta} \le 1$ et $\hat{\eta} \equiv 0$ dans $\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{B}_2(0)$. On considère maintenant $R > 0$ et on définit la nouvelle fonction de troncature $\hat{\eta}_R$ sur $\mathbb{R}^n$ par $\hat{\eta}_R(X) = \hat{\eta}(R^{-1}X)$. Multiplions (5.2.47) par $\hat{\eta}_R\hat{u}$ et intégrons par partie :

$$\int_{\mathbb{R}^n} (\nabla\hat{u}, \nabla(\hat{\eta}_R\hat{u}))_\delta dX + A\int_{\mathbb{R}^n} \hat{\eta}_R\hat{u}^2 = 0. \tag{5.2.48}$$

Afin d'obtenir une contradiction, nous aurons besoin du lemme suivant :

Lemme 5.2.2 *On a :*

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{\mathbb{R}^n}(\nabla\hat{u},\nabla(\hat{\eta}_R\hat{u}))_\delta dX = \|\hat{u}\|^2_{D_1^2(\mathbb{R}^n)}.$$

Preuve du Lemme 5.2.2 : En effet, soit $R>0$. On a :

$$\int_{\mathbb{R}^n}(\nabla\hat{u},\nabla(\hat{\eta}_R\hat{u}))_\delta dX = \int_{\mathbb{R}^n}\hat{\eta}_R|\nabla\hat{u}|^2_\delta dX + \int_{\mathbb{R}^n}(\nabla\hat{u},\nabla(\hat{\eta}_R)\hat{u})_\delta dX \tag{5.2.49}$$

Puisque $\hat{u}\in D_1^2(\mathbb{R}^n)$ donc on tire avec le Théorème de convergence dominée de Lebesgue que

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{\mathbb{R}^n}\hat{\eta}_R|\nabla\hat{u}|^2_\delta dX = \|\hat{u}\|_{D_1^2(\mathbb{R}^n)}. \tag{5.2.50}$$

D'autre part, on peut écrire avec les inégalités de Cauchy-Schwarz :

$$\begin{aligned}\left|\int_{\mathbb{R}^n}(\nabla\hat{u},\nabla(\hat{\eta}_R)\hat{u})_\delta dX\right| &\leq \|\hat{u}\|^2_{D_1^2(\mathbb{R}^n)}\times\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla\hat{\eta}_R|^2_\delta\hat{u}^2dX\\ &\leq \|\hat{u}\|^2_{D_1^2(\mathbb{R}^n)}\times\int_{\mathbb{B}_{2R}(0)\backslash\mathbb{B}_R(0)}|\nabla\hat{\eta}_R|^2_\delta\hat{u}^2dX\\ &\leq \|\hat{u}\|^2_{D_1^2(\mathbb{R}^n)}\times\frac{C_{16}}{R^2}\int_{\mathbb{B}_{2R}(0)\backslash\mathbb{B}_R(0)}\hat{u}^2dX.\end{aligned}$$

Des inégalités de Hölder on tire

$$\int_{\mathbb{B}_{2R}(0)\backslash\mathbb{B}_R(0)}\hat{u}^2dX \leq \left(\int_{\mathbb{B}_{2R}(0)\backslash\mathbb{B}_R(0)}\hat{u}^{2^*}dX\right)^{\frac{2}{2^*}}\times(C_{17}R^n)^{\frac{2}{n}},$$

donc

$$\int_{\mathbb{R}^n}(\nabla\hat{u},\nabla(\hat{\eta}_R)\hat{u})_\delta dX \leq C_{18}\|\hat{u}\|^2_{D_1^2(\mathbb{R}^n)}\times\left(\int_{\mathbb{B}_{2R}(0)\backslash\mathbb{B}_R(0)}\hat{u}^{2^*}dX\right)^{\frac{2}{2^*}},$$

les constantes $C_i = i = 16, 17, 18$ étant indépendantes de α. Du Théorème de convergence dominée de Lebesgue, on tire que

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{\mathbb{B}_{2R}(0)\backslash\mathbb{B}_R(0)}\hat{u}^{2^*}dX = 0.$$

D'où

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{\mathbb{R}^n}(\nabla\hat{u},\nabla(\hat{\eta}_R)\hat{u})_\delta dX = 0. \tag{5.2.51}$$

En combinant (5.2.50) et (5.2.51) avec 5.2.49, on aura le résultat demandé. Ceci termine le preuve du Lemme (5.2.2). □

Le Lemme 5.2.2 et (5.2.48) donnent

$$\|\hat{u}\|_{D_1^2(\mathbb{R}^n)} + A\int_{\mathbb{R}^n}\hat{\eta}_R\hat{u}^2dX = o(1)$$

Maintenant si $A \neq 0$ alors

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{\mathbb{R}^n}\hat{\eta}_R\hat{u}^2 = -A^{-1}\|\hat{u}\|_{D_1^2(\mathbb{R}^n)},$$

ce qui n'est pas vrai Si $A = 0$ alors $\|\hat{u}\|_{D_1^2(\mathbb{R}^n)} = 0$, donc $\hat{u} \equiv 0$ p.p., ce qui est faux. D'où $|X_{0,\alpha}| \not\to +\infty$ lorsque $\alpha \to +\infty$. Ceci termine l'étape (V) de la preuve du Théorème 5.2.1.

VI ème étape : Dans cette étape, on démontre que $A = 0$. Pour cela, on suppose par l'absurde que $A > 0$. On divise la preuve de cette proposition en sous-étapes.

Sous-étape VI.1 : On démontre que $\hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)$. En effet, Multiplions l'équation (5.2.46) par $\eta_R\hat{u}$ qui est dans $H^2_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ et intégrons sur $\mathbb{R}^n$:

$$\int_{\mathbb{R}^n}(\nabla\hat{u},\nabla(\hat{\eta}_R\hat{u}))_\delta dX + A\int_{\mathbb{R}^n}\hat{\eta}_R\hat{u}^2 dX = K(n,s)^{-1}\int_{\mathbb{R}^n}\hat{\eta}_R\frac{\hat{u}^{2^*(s)}}{|X-X_0|^s}\,dX. \tag{5.2.52}$$

D'autre part, daprès le Lemme 5.2.2, on a :

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{\mathbb{R}^n}(\nabla\hat{u},\nabla(\hat{\eta}_R\hat{u}))_\delta dX = \|\hat{u}\|_{D_1^2(\mathbb{R}^n)}. \tag{5.2.53}$$

Comme la suite des fonctions $(\hat{\eta}_R\hat{u}^2)_{R>0}$ est positive, croissante (car $(\eta_R)_{R>0}$ l'est) et converge simplement vers $\hat{u}$, il s'ensuit donc du Théorème de Beppo-Livi que :

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{\mathbb{R}^n}\hat{\eta}_R\hat{u}^2 dX = \int_{\mathbb{R}^n}\hat{u}^2 dX. \tag{5.2.54}$$

Démontrons que $\hat{u}^{2^*(s)}|X-X_0|^{-s} \in L^1(\mathbb{R}^n)$. En effet, on a pour tout $\alpha > 0$ que $\int_M \frac{u_\alpha^{2^*(s)}}{d_g(x,x_0)^s}dv_g = 1$. Donc pour $R > 0$, et sachant que $X_{0,\alpha} \to X_0$ lorsque $\alpha \to +\infty$, on obtient avec un changement de variable adéquat $\int_{\mathbb{B}_R(0)}\frac{|\eta_\alpha\hat{u}_\alpha|^{2^*(s)}}{d_{\hat{g}_\alpha}(X,X_{0,\alpha})^s}dv_{\hat{g}_\alpha} \le 1$. En faisant tendre $\alpha \to +\infty$ puis $R \to +\infty$, on aura

$$\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\hat{u}^{2^*(s)}}{|X-X_0|^s}\,dX \le 1. \tag{5.2.55}$$

D'où $\hat{u}^{2^*(s)}|X-X_0|^{-s} \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Du Théorème de convergence dominée de Lebesgue, on tire

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{\mathbb{R}^n}\hat{\eta}_R\frac{\hat{u}^{2^*(s)}dX}{|X-X_0|^s_\delta} = \int_{\mathbb{R}^n}\frac{\hat{u}^{2^*(s)}dX}{|X-X_0|^s_\delta}. \tag{5.2.56}$$

En combinant (5.2.52) avec (5.2.53) et (5.2.56), on aura que

$$\lim_{R\to+\infty}A\int_{\mathbb{R}^n}\hat{\eta}_R\hat{u}^2 dX = K(n,s)^{-1}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\hat{u}^{2^*(s)}dX}{|X-X_0|^s_\delta} - \|\hat{u}\|_{D_1^2(\mathbb{R}^n)}.$$

Donc il existe $\kappa > 0$ tel que

$$\int_{\mathbb{R}^n}\hat{\eta}_R\hat{u}^2 dX \le \kappa.$$

Ensuite en passant à la limite quand $R \to +\infty$ et avec (5.2.54), on conclut que $\hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

Sous-étape VI.2 : Ici on tire une contradiction avec le fait que $A > 0$. Cela passera par la proposition suivante dûe à Filippucci-Pucci-Robert (voir l'article [20], Claim 5.3).

Proposition 5.2.4 *Soient $f \in C^0(\mathbb{R}^n \setminus \{X_0\} \times \mathbb{R})$ et $u \in D_1^2(\mathbb{R}^n) \cap C^1(\mathbb{R}^n \setminus \{X_0\}) \cap H^1_{2,loc}(\mathbb{R}^n \setminus \{X_0\})$ une solution faible de l'équation*

$$\Delta_\delta u = f(x,u) \quad sur\ \mathbb{R}^n.$$

On définit $F(x,u) := \int_0^u f(x,v)dv$ et on suppose que $F \in C^1(\mathbb{R}^n \setminus \{X_0\} \times \mathbb{R})$. De plus, on suppose que la solution u vérifie $uf(\cdot,u), F(\cdot,u)$ et $x^i(\partial_i F)(\cdot,u) \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Alors

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left[\frac{n-2}{2} uf(x,u) - nF(x,u) - x^i(\partial_i F)(x,u)\right] dx = 0. \tag{5.2.57}$$

On considère maintenant la fonction

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^n \setminus \{X_0\} \times \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ (X,v) & \mapsto & f(X,v) = \left(\dfrac{K(n,s)^{-1}|v|^{2^*(s)-2}}{|X-X_0|_\delta^s} - A\right) v. \end{array}$$

et on vérifie que toutes les conditions de la Proposition 5.2.4 sont satisfaites pour f et $\hat{u}$.
0*/ La fonction $X \in \mathbb{R}^n \setminus \{X_0\} \mapsto |X-X_0|^{-s}$ étant continue donc f est continue sur $\mathbb{R}^n \setminus \{X_0\} \times \mathbb{R}$.
1*/ On a :

$$\hat{u} \in H^1_{2,loc}(\mathbb{R}^n \setminus \{X_0\}).$$

En effet, $f(X,\hat{u}) \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n \setminus \{X_0\})$ et $\hat{u}$ vérifie faiblement sur $C^\infty_{loc}(\mathbb{R}^n)$ l'équation

$$\Delta_\delta \hat{u} = f(X,\hat{u}),$$

il s'ensuit de la Théorie standard des E.D.P. elliptique (voir par exemple [25]) que $\hat{u} \in H^1_{2,loc}(\mathbb{R}^n \setminus \{X_0\})$. D'où

$$\hat{u} \in D_1^2(\mathbb{R}^n) \cap C^\infty_{loc}(\mathbb{R}^n \setminus \{X_0\}) \cap H^1_{2,loc}(\mathbb{R}^n \setminus \{X_0\})$$

et est une solution faible de l'équation

$$\Delta_\delta \hat{u} = f(X,\hat{u}).$$

2*/ On pose $F(X,t) = \int_0^t f(X,v)dv$. On a donc :

$$F(X,t) = c_1 \frac{t^{2^*(s)}}{|X-X_0|^s} - A\frac{t^2}{2} \in C^1(\mathbb{R}^n \setminus \{X_0\}),$$

avec $c_1 = \frac{K(n,s)^{-1}}{2^*(s)}$.
3*/ On va démontrer que $\hat{u}f(\cdot,\hat{u}), F(\cdot,\hat{u})$ et $x^i\partial_i F(\cdot,\hat{u})$ sont dans $L^1(\mathbb{R}^n)$.
En effet, on a :

$$\hat{u}f(\cdot,\hat{u}) = \frac{K(n,s)^{-1}\hat{u}^{2^*(s)}}{|X-X_0|_\delta^s} - A\hat{u}^2.$$

Sachant que $\hat{u} \in D_1^2(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^{2^*(s)}_{\mathbb{R}^n}(\frac{dX}{|X-X_0|_\delta^s})$, donc

$$\begin{array}{rcl} \|\hat{u}f(\cdot,\hat{u})\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} & \leq & c_2 \left[\|\dfrac{\hat{u}^{2^*(s)}}{|X-X_0|_\delta^s}\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} + \|\hat{u}^2\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}\right] \\ & = & c_2 \left[\|\hat{u}\|^{2^*(s)}_{L^{2^*(s)}_{\mathbb{R}^n}(\frac{dX}{|X-X_0|_\delta^s})} + \|\hat{u}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}\right] \\ & < & +\infty, \end{array}$$

Par suite, $\hat{u}f(\cdot,\hat{u}) \in L^1(\mathbb{R}^n)$. De la même façon, on démontre que

$$F(\cdot,\hat{u}) = c_1\frac{\hat{u}^{2^*(s)}}{|X-X_0|^s} - A\frac{\hat{u}^2}{2} \in L^1(\mathbb{R}^n).$$

Finalement, on a pour tout $i = 1,\ldots,n$:

$$\begin{aligned} \partial_i F(\cdot,\hat{u}) &= \left(\frac{c_1\hat{u}^{2^*(s)}}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (X_i - X_{0,i})^2}}\right)' \\ &= -c_1 s\frac{(X_i - X_{0,i})}{|X-X_0|^{2+s}}\hat{u}^{2^*(s)}. \end{aligned}$$

Donc

$$(X-X_0)^i\partial_i F(\cdot,\hat{u}) = -c_1 s\frac{\hat{u}^{2^*(s)}}{|X-X_0|^s}.$$

D'où $(X-X_0)^i\partial_i F(\cdot,\hat{u}) \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

Il s'ensuit de tout ce qui précède (0*/ ... 3*/) que $\hat{u}$ et f vérifient toutes les conditions de la Proposition 5.2.4, il en résulte que

$$\int_{\mathbb{R}^n}\left(\frac{n-2}{2}\hat{u}f(\cdot,\hat{u}) - nF(\cdot,\hat{u}) - (X-X_0)^i\partial_i F(\cdot,\hat{u})\right)dX = 0.$$

En calculant le côté gauche de l'équation ci-dessus, on aura

$$\int_{\mathbb{R}^n}\left(c_3 K(n,s)^{-1}\frac{\hat{u}^{2^*(s)}}{|X-X_0|^s} + A\hat{u}^2\right)dX = 0,$$

avec $c_3 = \frac{n-2}{2} - \frac{n-s}{2^*(s)} = 0$. Par suite, on a :

$$A\int_{\mathbb{R}^n}\hat{u}^2 dX = 0.$$

Comme $\hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)$, $\hat{u} \not\equiv 0$, donc $A = 0$. Ce qui contradit l'hypothèse de l'absurde $A > 0$ supposée au début de la partie. Ensuite, $A = 0$. Ceci termine l'étape (VI) de la preuve du Théorème 5.2.1. Par conséquence, l'étape (VI) implique qu'il existe $X_0 \in \mathbb{R}^n$ telle que la fonction $\hat{u}$ vérifie au sens des distribution :

$$\Delta_\delta\hat{u} = K(n,s)^{-1}\frac{\hat{u}^{2^*(s)-1}}{|X-X_0|^s}. \tag{5.2.58}$$

VII ème étape : On démontre qu'il existe $a > 0$ tel que

$$\hat{u}(X) = \left(\frac{a^{\frac{2-s}{2}}k^{\frac{2-s}{2}}}{a^{2-s} + |X-X_0|^{2-s}}\right)^{\frac{n-2}{2-s}} \quad \text{for all } X \in \mathbb{R}^n, \tag{5.2.59}$$

avec $k^{2-s} := (n-s)(n-2)K(n,s)$.

En effet, pour $R>0$ fixé, on multiplie l'équation (5.2.58) par $\hat{\eta}_R\hat{u}$ qui est dans $H^2_{1,loc}(\mathbb{R}^n)$ et on intègre sur $\mathbb{R}^n$:

$$\int_{\mathbb{R}^n}(\nabla\hat{u},\nabla(\hat{\eta}_R\hat{u}))_\delta dX = K(n,s)^{-1}\int_{\mathbb{R}^n}\hat{\eta}_R\frac{\hat{u}^{2^*(s)}}{|X-X_0|^s}dX.$$

Avec le Théorème de convergence dominée de Lebesgue, on aura quand $R\to+\infty$:

$$\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla\hat{u}|^2dX = K(n,s)^{-1}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\hat{u}^{2^*(s)}dX}{|X-X_0|^s}. \tag{5.2.60}$$

Or la définition de $K(n,s)$ implique que

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\hat{u}^{2^*(s)}}{|X-X_0|^s}dX\right)^{\frac{2}{2^*(s)}}\leq K(n,s)\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla\hat{u}|^2dX. \tag{5.2.61}$$

Ensuite, (5.2.60) et (5.2.61) impliquent que

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\hat{u}^{2^*(s)}}{|X-X_0|^s}dX\right)^{1-\frac{2}{2^*(s)}}\geq 1.$$

Donc

$$\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\hat{u}^{2^*(s)}}{|X-X_0|^s}dX\geq 1. \tag{5.2.62}$$

D'autre part, on a pour tout $\alpha>0$:

$$\int_M\frac{u_\alpha^{2^*(s)}}{d_g(x,x_0)^s}dv_g=1.$$

Donc

$$\int_{\mathbb{B}_{R\mu_\alpha}(z_\alpha)}\frac{u_\alpha^{2^*(s)}}{d_g(x,x_0)^s}dv_g=\int_{\mathbb{B}_R(0)}\frac{u_\alpha(\exp_{z_\alpha}(\mu_\alpha X))^{2^*(s)}}{d_{\hat{g}_\alpha}(X,X_{0,\alpha})^s}\mu_\alpha^n dv_{\hat{g}_\alpha}=\int_{\mathbb{B}_R(0)}\frac{\hat{u}_\alpha^{2^*(s)}}{d_{\hat{g}_\alpha}(X,X_{0,\alpha})^s}dv_{\hat{g}_\alpha}=1.$$

Les mêmes arguments que ceux utilisés dans la sous-étape (IV.4) de la preuve du Théorème 5.2.1 montrent que

$$\lim_{\alpha\to+\infty}\int_{\mathbb{B}_R(0)}\frac{|\eta_\alpha\hat{u}_\alpha|^{2^*(s)}}{d_{\hat{g}_\alpha}(X,X_{0,\alpha})^s}dv_{\hat{g}_\alpha}=\int_{\mathbb{B}_R(0)}\frac{|\hat{u}|^{2^*(s)}}{|X-X_0|^s}dX$$

Puis du Théorème de convergence dominée de Lebesgue, on déduit par passage à la limite quand $R\to+\infty$ que

$$\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\hat{u}^{2^*(s)}}{|X-X_0|^s}dX\leq 1. \tag{5.2.63}$$

Les inégalités (5.2.62) et (5.2.63) impliquent que

$$\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\hat{u}^{2^*(s)}}{|X-X_0|^s}dX=1.$$

On déduit que $\hat{u}$ est un minimiseur pour l'inégalité Euclidienne de Hardy-Sobolev. En se référant au Lemme 3 dans [14] (voir Chou-Chu [12], Horiuchi [33] et voir aussi Théorème 4.3 dans Lieb [39] et Théorème 4 in Catrina-Wang [10]), on conclut que $\hat{u}(X) = b\left(c + |X - X_0|^{2-s}\right)^{-\frac{n-2}{2-s}}$ avec $b > 0$ et $c > 0$. En posant que $c = a^{2-s}$ et $b = (ak)^{\frac{n-2}{2}}$ et en passant aux coordonnées polaires ($r = |X - X_0|$), sachant que $\hat{u}$ est une fonction radiale, on aura :

$$\begin{aligned}
\Delta_\delta \hat{u} &= -\left(\partial_r^2 \hat{u} + \frac{n-1}{r}\partial_r \hat{u}\right) \\
&= -(ak)^{\frac{n-2}{2}} \left\{ -(n-2)\left[\frac{(1-s)}{r^s(a^{2-s}+r^{2-s})^{\frac{n-s}{2-s}}} - \frac{(n-s)r^{2-s}}{r^s(a^{2-s}+r^{2-s})^{\frac{n-s}{2-s}+1}}\right] - \right. \\
&\qquad \left. \frac{(n-1)(n-2)}{r^s(a^{2-s}+r^{2-s})^{\frac{n-s}{2-s}}} \right\} = -\frac{(ak)^{\frac{n-2}{2}}(n-2)}{r^s(a^{2-s}+r^{2-s})^{\frac{n-s}{2-s}}}\left[-(n-s) + \frac{(n-s)r^{2-s}}{a^{2-s}+r^{2-s}}\right] \\
&= a^{\frac{n}{2}+1-s} k^{\frac{n-2}{2}} \frac{(n-2)(n-s)}{r^s(a^{2-s}+r^{2-s})^{\frac{n-s}{2-s}+1}} = a^{\frac{n}{2}+1-s} k^{\frac{n-2}{2}} \frac{(n-2)(n-s)\hat{u}^{2^*(s)-1}}{r^s(ak)^{\frac{n+2-2s}{2}}} \\
&= \frac{(n-2)(n-s)}{k^{2-s}} \times \frac{\hat{u}^{2^*(s)-1}}{r^s}.
\end{aligned}$$

Mais $\hat{u}$ vérifie l'équation (5.2.58), d'où (5.2.59). Ceci termine l'étape (VII) de la preuve du Théorème 5.2.1.

VIII ème étape : Dans cette étape, on démontre qu'à une extraction d'une sous-suite près, $\eta_\alpha \hat{u}_\alpha \to \hat{u}$ dans $C^{0,\beta}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, pour tout $\beta \in]0, \min(1, 2-s)[$.

En effet, d'après l'étape (VII), ils existent $\hat{u} \in D_1^2(\mathbb{R}^n)$ et $a \in \mathbb{R}^*$, $\lambda > 0$ tels que $\hat{u}$ vérifie pour tout $X \in \mathbb{R}^n$:

$$\hat{u}(X) = a\left(\lambda + |X - X_0|^{2-s}\right)^{-\frac{n-2}{2-s}} \quad \text{et} \quad \Delta_\delta \hat{u} = K(n,s)^{-1}\frac{\hat{u}^{2^*(s)-1}}{|X - X_0|_\delta^s} \quad \text{faiblement.} \tag{5.2.64}$$

Soit maintenant $R > 0$ et $p \in]n/2, \inf(n, n/s)[$. D'après l'étape (I), on a pour tout $\alpha > 0$, $\hat{u}$ vérifie l'équation $\Delta_{\hat{g}_\alpha} \hat{u}_\alpha = F_\alpha(\hat{u}_\alpha)$ faiblement sur $C^\infty(\mathbb{B}_R(0))$ avec $F_\alpha(\hat{u}_\alpha)(X) = \lambda_\alpha \frac{\hat{u}_\alpha^{2^*(s)-1}}{d_{\hat{g}_\alpha}(X, X_{0,\alpha})^s} - \alpha\mu_\alpha^2 \hat{u}_\alpha$ et $\hat{u}_\alpha \in H_1^2(\mathbb{B}_R(0))$. De plus, pour tout $\alpha > 0$, $\Delta_{\hat{g}_\alpha}$ est strictement elliptique (car $\hat{g}_\alpha$ est définie positive et il existe $\lambda_0 > 0$ tel que $det(\hat{g}_\alpha^{-1}) \geq \lambda_0$) et $F_\alpha \in L^p(\mathbb{B}_R(0))$ (car $\hat{u}_\alpha \leq 1$). Il s'ensuit de la Théorie L^p des E.D.P. elliptique (voir [25]) que $\hat{u}_\alpha \in H_2^p(\mathbb{B}_R(0))$ et pour tout $R' < R$, il existe $C_{19} = C_{19}(M, g, s, R, R', \beta) > 0$ ne dépendant pas de α telle que

$$\|\hat{u}_\alpha\|_{H_2^p(\mathbb{B}_{R'}(0))} \leq C_{19}\left(\|\hat{u}_\alpha\|_{L^p(\mathbb{B}_R(0))} + \|F_\alpha\|_{L^p(\mathbb{B}_R(0))}\right). \tag{5.2.65}$$

Puisque $p > \frac{n}{2}$ et $\hat{u}_\alpha \leq 1$ donc ils existent $C_{20}, C_{21} > 0$ ne dépendant pas de α tel que

$$\|\hat{u}_\alpha\|_{H_1^2(\mathbb{B}_R(0))} \leq C_{20} \text{ et } \|F_\alpha\|_{L^p(\mathbb{B}_R(0))} \leq C_{21}. \tag{5.2.66}$$

Or il existe, d'après la 2ème inclusion de Sobolev, $C_{22} > 0$ ne dépendant pas de α tel que pour tout $\alpha > 0$:

$$\|\hat{u}_\alpha\|_{C^{0,\beta}(\mathbb{B}_{R'}(0))} \leq C_{22}\|\hat{u}_\alpha\|_{H_2^p(\mathbb{B}_{R'}(0))},$$

ceci est pour tout $\beta \in]0, \min(1, 2-s)[$. De la dernière inégalité et celles de (5.2.65) et (5.2.66), on tire qu'il existe $C_{23} > 0$ ne dépendant pas de α tel que pour tous $\alpha > 0$ et $\beta \in]0, \min(1, 2-s)[$:

$$\|\hat{u}_\alpha\|_{C^{0,\beta}(\mathbb{B}_{R'}(0))} \leq C_{23}.$$

La suite $(\hat{u}_\alpha)_{\alpha>0}$ est donc bornée dans $C^{0,\beta}(\mathbb{B}_{R'}(0))$ indépendamment de α. Il existe ensuite $\bar{u} \in C^0(\mathbb{B}_{R'}(0))$ tel que $\bar{u} = \lim_{\alpha\to+\infty} \hat{u}_\alpha$ dans $C^{0,\beta}(\mathbb{B}_{R'}(0))$, pour tout $\beta \in]0, \min(1, 2-s)[$. Par convergence dominé, on démontre alors que $\hat{u}_\alpha \xrightarrow{\alpha\to+\infty} \bar{u}$ dans $L^2_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Mais la suite $\hat{u}_\alpha$ converge faiblement vers $\hat{u}$ et est bornée dans $D_1^2(\mathbb{R}^n)$ donc d'après le Lemme (5.2.1), $\hat{u}_\alpha \to \hat{u}$ lorsque $\alpha \to +\infty$ dans $L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, à une extraction d'une sous-suite près. Par unicité de la limite dans $L^2_{loc}(\mathbb{R}^n)$, on tire que la suite $(\hat{u}_\alpha)_{\alpha>0}$ converge fortement vers $\hat{u}$ dans $C^{0,\beta}(\mathbb{B}_{R'}(0))$. Ceci termine l'étape (VIII) de la preuve du Théorème 5.2.1.

Les étapes de (I) à (VIII) montrent le Théorème 5.2.1. $\square$

Corollaire 5.2.1 *A une extraction d'une sous-suite de $(x_\alpha)_{\alpha>0}$, on a $d_g(x_0, x_\alpha) = o(\mu_\alpha)$ lorsque $\alpha \to +\infty$ et la suite $(\eta_\alpha \hat{u}_\alpha)$ (comme dans le Théorème 5.2.1) converge faiblement vers $\hat{u}$ dans $D_1^2(\mathbb{R}^n)$ et fortement dans $C^{0,\beta}_{loc}(\mathbb{R}^n)$ pour tout $\beta \in]0, \inf\{1, 2-s\}[$ avec $\hat{u}(X) = \left(\frac{k^{2-s}}{k^{2-s}+|X|^{2-s}}\right)^{\frac{n-2}{2-s}}$ pour tout $X \in \mathbb{R}^n$ et $k^{2-s} = (n-2)(n-s)K(n,s)$. De plus,*

$$\lim_{R\to+\infty} \lim_{\alpha\to+\infty} \int_{M\setminus\mathbb{B}_{R\mu_\alpha}(x_0)} \frac{u_\alpha^{2^*(s)}}{d_g(x,x_0)^s} dv_g = 0.$$

Preuve du Corollaire 5.2.1 : On applique tout d'abord le Théorème 5.2.1 avec $z_\alpha = x_\alpha$. Dans ce cas, on obtient $\eta_\alpha \hat{u}_\alpha \to \hat{u}$ in $C^0_c(\mathbb{R}^n)$ as $\alpha \to +\infty$. Ceci implique que $\lim_{\alpha\to+\infty} \hat{u}_\alpha(0) = \hat{u}(0)$, mais $\hat{u}_\alpha(0) = 1$, d'où $\hat{u}(0) = 1$.

Puisque $\hat{u}(0) = 1$ et $\|\hat{u}\|_\infty = 1$, donc 0 est un maximum de $\hat{u}$. D'autre part, on voit à partir de la forme explicite de $\hat{u}$ donnée par le Théorème 5.2.1 que pour tout $X \in \mathbb{R}^n, X \neq X_0$, $\hat{u}(X) < \hat{u}(X_0)$. Ceci implique que $X_0 = 0$. Par suite, on obtient, à une extraction d'une sous-suite de $(z_\alpha)_{\alpha>0}$, que

$$d_g(x_\alpha, x_0) = \mu_\alpha d_{\hat{g}_\alpha}(X_{0,\alpha}, 0) = \mu_\alpha |X_{0,\alpha}| = o(\mu_\alpha). \tag{5.2.67}$$

On applique maintenant le Théorème 5.2.1 avec $z_\alpha = x_0$: ceci est possible à cause de (5.2.67). Avec le changement de variable $X = \mu_\alpha^{-1} \exp_{x_0}^{-1}(x)$, on écrit

$$\int_{\mathbb{B}_{R\mu_\alpha}(x_0)} \frac{|u_\alpha|^{2^*(s)}}{d_g(x,x_0)^s} dv_g = \int_{\mathbb{B}_R(0)} \frac{|\hat{u}_\alpha|^{2^*(s)}}{|X|^s} dv_{\hat{g}_{0,\alpha}}$$

avec $\hat{g}_{0,\alpha}(X) = \exp_{x_0}^* g(\mu_\alpha X)$, et obtient en appliquant le Théorème de convergence dominé lorsque $\alpha \to +\infty$ puis lorsque $R \to +\infty$ et avec le Théorème 5.2.1 que

$$\begin{aligned}\lim_{R\to+\infty} \lim_{\alpha\to+\infty} \int_{\mathbb{B}_{R\mu_\alpha}(x_0)} \frac{u_\alpha^{2^*(s)}}{d_g(x,x_0)^s} dv_g &= \lim_{R\to+\infty} \lim_{\alpha\to+\infty} \int_{\mathbb{B}_R(0)} \frac{|\hat{u}_\alpha|^{2^*(s)}}{|X|^s} dv_{\hat{g}_{0,\alpha}} \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\hat{u}^{2^*(s)}}{|X|^s} dX = 1. \end{aligned} \tag{5.2.68}$$

La dernière relation (5.2.68) et $\|u_\alpha\|_{2^*(s),s} = 1$ montrent que

$$\lim_{R\to+\infty} \lim_{\alpha\to+\infty} \int_{M\setminus\mathbb{B}_{R\mu_\alpha}(x_0)} \frac{u_\alpha^{2^*(s)}}{d_g(x,x_0)^s} dv_g = 0.$$

$\square$

5.3 Inégalités optimales de Hardy-Sobolev

5.3.1 Preuve du Théorème.

Soient (M,g) une variété Riemannienne compacte de dimension $n \geq 3$, $x_0 \in M$, $s \in]0,2[$, et $2^\star(s) = \frac{2(n-s)}{n-2}$ l'exposant critique de Hardy-Sobolev. Dans cette section, on va démontrer que la première meilleure constante $K(n,s)$ des inégalités de Hardy-Sobolev (voir chapitre 2) est atteinte, c.à.d. qu'il existe $B_0 = B_0(M,g,s,x_0) > 0$ telle que pour tout $v \in H_1^2(M)$ on a :

$$\left(\int_M \frac{|v|^{2^*(s)}}{d_g(x,x_0)^s} dv_g\right)^{\frac{2}{2^*(s)}} \leq K(n,s)\left(\int_M |\nabla v|^2 dv_g + \frac{B_0}{K(n,s)}\int_M v^2 dv_g\right). \qquad (5.3.69)$$

Pour cela, on va raisonner par l'absurde en supposant que $K(n,s)$ n'est pas atteinte. Ce qui est équivalent à l'hypothèse de l'absurde suivante : Pour tout $\alpha > 0$, il existe $\tilde{u}_\alpha \in H_1^2(M)$ tel que

$$\left(\int_M \frac{|\tilde{u}_\alpha|^{2^*(s)}}{d_g(x,x_0)^s} dv_g\right)^{\frac{2}{2^*(s)}} > K(n,s)\left(\int_M |\nabla \tilde{u}_\alpha|^2 dv_g + \alpha\int_M \tilde{u}_\alpha^2 dv_g\right). \qquad (5.3.70)$$

On note pour tous $\alpha > 0$, $v \in H_1^2(M)$:

$$I_\alpha(v) = \int_M (|\nabla v|^2 + \alpha v^2) dv_g,$$

et si $v \not\equiv 0$,

$$J_\alpha(v) = \frac{\int_M (|\nabla v|^2 + \alpha v^2) dv_g}{\left(\int_M \frac{|v|^{2^*(s)}}{d_g(x,x_0)^s} dv_g\right)^{\frac{2}{2^*(s)}}} \quad \text{et} \quad \lambda_\alpha = \inf_{v \in H_1^2(M)\setminus\{0\})} J_\alpha(v).$$

Afin d'arriver à une contradiction, nous procédons par étapes :

Ière étape : Dans cette étape, on démontre que pour tout $\alpha > 0$ il existe $u_\alpha \in C^{0,\beta}(M) \cap C^{2,\theta}(M \setminus \{x_0\})$, pour tout $\beta \in]0, \min(1, 2-s)[$ et tout $\theta \in]0,1[$ tel que u_α est strictement positive sur M et vérifie faiblement sur $C^\infty(M)$:

$$\Delta_g u_\alpha + \alpha u_\alpha = \lambda_\alpha \frac{u_\alpha^{2^*(s)-1}}{d_g(x,x_0)^s} \qquad (5.3.71)$$

avec $I_\alpha(u_\alpha) = \lambda_\alpha \in]0, K(n,s)^{-1}[$ et $\int_M \frac{|u_\alpha|^{2^*(s)}}{d_g(x,x_0)^s} dv_g = 1$.

En effet, soit $\alpha > 0$. Pour cet $\alpha > 0$ il existe, d'après l'hypothèse de l'absurde (5.3.70), $\tilde{u}_\alpha \in H_1^2(M)$ telle que

$$\left(\int_M \frac{|\tilde{u}_\alpha|^{2^*(s)}}{d_g(x,x_0)^s} dv_g\right)^{\frac{2}{2^*(s)}} > K(n,s)\left(\int_M |\nabla \tilde{u}_\alpha|^2 dv_g + \alpha\int_M \tilde{u}_\alpha^2 dv_g\right).$$

Donc $J_\alpha(\tilde{u}_\alpha) < K(n,s)^{-1}$. D'où, on a :

$$\lambda_\alpha < K(n,s)^{-1}.$$

Le Théorème 2.1.1 implique ensuite le résultat demandé.

IIème étape : En suivant les arguments de Druet dans l'article [15] (voir aussi l'article [28] d'Hebey), on démontre qu'il existe une constante $C_{24} > 0$ telle que pour tous $x \in M$ et $\alpha > 0$, on a :

$$d_g(x_0, x)^{\frac{n}{2}-1} u_\alpha(x) \le C_{24}. \tag{5.3.72}$$

En effet, on suppose par l'absurde qu'il existe une suite $(y_\alpha)_{\alpha>0}$ dans M telle que

$$\sup_{x\in M} d_g(x_0, x)^{\frac{n}{2}-1} u_\alpha(x) = d_g(x_0, y_\alpha)^{\frac{n}{2}-1} u_\alpha(y_\alpha) \tag{5.3.73}$$

et

$$\lim_{\alpha\to+\infty} d_g(x_0, y_\alpha)^{\frac{n}{2}-1} u_\alpha(y_\alpha) = +\infty. \tag{5.3.74}$$

M étant une variété compacte, il s'ensuit de (5.3.74) que $\lim_{\alpha\to+\infty} u_\alpha(y_\alpha) = +\infty$. Mais d'après la Proposition 5.2.1, on a, à une sous-suite près, $\lim_{\alpha\to+\infty} u_\alpha = 0$ dans $C^\infty_{\text{loc}}(M \setminus \{x_0\})$ donc à une extraction d'une sous-suite près, $y_\alpha \to x_0$ lorsque $\alpha \to \infty$. On pose pour tout $\alpha > 0$, $\hat{r}_\alpha = u_\alpha(y_\alpha)^{\frac{-2}{n-2}}$.

Sous-étape II.1 On démontre que pour tous $\alpha > 0$ et $R > 0$,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{B}_{\hat{r}_\alpha}(y_\alpha)} \frac{u_\alpha^{2^*(s)}}{d_g(x,x_0)^s} dv_g &\le \varepsilon_R + o(1) + \int_{\mathbb{B}_{\hat{r}_\alpha}(y_\alpha)\cap\mathbb{B}_{R\mu_\alpha}(x_0)} \frac{u_\alpha^{2^*(s)}}{d_g(x,x_0)^s} dv_g, \\ &= \varepsilon_R + o(1), \end{aligned} \tag{5.3.75}$$

où ε_R désigne, ici comme dans la preuve, une fonction réelle vérifiant $\lim_{R\to+\infty} \varepsilon_R = 0$ et $\lim_{\alpha\to+\infty} o(1) = 0$.

Pour cela, on considère $\rho > 0$. Puisque $y_\alpha \to x_0$ et $\hat{r}_\alpha \to 0$ lorsque $\alpha \to +\infty$, On écrit donc à une extraction d'une sous-suite de y_α :

$$\int_{\mathbb{B}_{\hat{r}_\alpha}(y_\alpha)} \frac{u_\alpha^{2^*(s)}}{d_g(x,x_0)^s} dv_g = \int_{\mathbb{B}_{\hat{r}_\alpha}(y_\alpha)\cap\mathbb{B}_\rho(x_0)} \frac{u_\alpha^{2^*(s)}}{d_g(x,x_0)^s} dv_g. \tag{5.3.76}$$

Soit $R > 0$. Il s'ensuit du Corollaire 5.2.1 et de la Proposition 5.2.1 :

$$\int_{\mathbb{B}_\rho(x_0)\setminus\mathbb{B}_{R\mu_\alpha}(x_0)} \frac{u_\alpha^{2^*(s)}}{d_g(x,x_0)^s} dv_g = \varepsilon_R + o(1).$$

D'où

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{B}_{\hat{r}_\alpha}(y_\alpha)} \frac{u_\alpha^{2^*(s)}}{d_g(x,x_0)^s} dv_g &= \int_{\mathbb{B}_{\hat{r}_\alpha}(y_\alpha)\cap\mathbb{B}_\rho(x_0)} \frac{u_\alpha^{2^*(s)}}{d_g(x,x_0)^s} dv_g \\ &= \int_{\mathbb{B}_{\hat{r}_\alpha}(y_\alpha)\cap\left(\mathbb{B}_\rho(x_0)\setminus\mathbb{B}_{R\mu_\alpha}(x_0)\right)} \frac{u_\alpha^{2^*(s)}}{d_g(x,x_0)^s} dv_g \\ &\quad + \int_{\mathbb{B}_{\hat{r}_\alpha}(y_\alpha)\cap\mathbb{B}_{R\mu_\alpha}(x_0)} \frac{u_\alpha^{2^*(s)}}{d_g(x,x_0)^s} dv_g \\ &\le \varepsilon_R + o(1) + \int_{\mathbb{B}_{\hat{r}_\alpha}(y_\alpha)\cap\mathbb{B}_{R\mu_\alpha}(x_0)} \frac{u_\alpha^{2^*(s)}}{d_g(x,x_0)^s} dv_g. \end{aligned} \tag{5.3.77}$$

On distingue deux cas :

Cas II.2.1 : $\mathbb{B}_{\hat{r}_\alpha}(y_\alpha) \cap \mathbb{B}_{R\mu_\alpha}(x_0) = \phi$. Dans ce cas, on obtient immédiatement (5.3.75) à partir de (5.3.77).

Cas II.2.2 : $\mathbb{B}_{\hat{r}_\alpha}(y_\alpha) \cap \mathbb{B}_{R\mu_\alpha}(x_0) \neq \phi$. Dans ce cas, on a :

$$d_g(x_0, y_\alpha) \leq \hat{r}_\alpha + R\mu_\alpha. \tag{5.3.78}$$

De (5.3.74), on tire que

$$\lim_{\alpha\to+\infty} \frac{\hat{r}_\alpha}{d_g(x_0, y_\alpha)} = 0. \tag{5.3.79}$$

Avec (5.3.78) et (5.3.79), on peut donc écrire

$$\frac{\hat{r}_\alpha}{\mu_\alpha} = \frac{\hat{r}_\alpha}{d_g(x_0, y_\alpha)} \times \frac{d_g(x_0, y_\alpha)}{\mu_\alpha} \leq o_\alpha(1)\left(\frac{\hat{r}_\alpha}{\mu_\alpha} + R\right).$$

D'où

$$\frac{\hat{r}_\alpha}{\mu_\alpha} = o_\alpha(1) \text{ et } d_g(x_0, y_\alpha) = O(\mu_\alpha). \tag{5.3.80}$$

D'autre part, on considère une carte exponentielle $(\Omega_0, \exp_{x_0}^{-1})$ centrée en x_0 telle que $\exp_{x_0}^{-1}(\Omega_0) = \mathbb{B}_{R_0}(0), R_0 \in]0, i_g(M)[$. Sous les hypothèses du Théorème 5.2.1, on pose que $z_\alpha = x_0$ et on considère les vecteurs $\tilde{Y}_\alpha = \mu_\alpha^{-1} \exp_{x_0}^{-1}(y_\alpha)$, la suite $(\hat{u}_\alpha)_{\alpha>0}$ des fonctions définie par $X \in \mathbb{B}_{R_0}(0) \mapsto \hat{u}_\alpha(X) = \mu_\alpha^{\frac{n}{2}-1} u_\alpha(\exp_{x_0}(\mu_\alpha X))$ et la famille des métriques Riemanniennes $\hat{g}_{0,\alpha} : X \in \mathbb{B}_{R_0}(0) \mapsto \exp_{x_0}^* g(\mu_\alpha X)$.

Par arguments de compacité, il existe une constante $C_{25} > 1$ telle que pour tous $X, Y \in \mathbb{R}^n$, $\mu_\alpha|X|, \mu_\alpha|Y| < R_0$:

$$C_{25}^{-1}|X - Y| \leq d_{\hat{g}_{0,\alpha}}(X, Y) \leq C_{25}|X - Y|. \tag{5.3.81}$$

Avec (5.3.80) et (5.3.81), on tire

$$|\tilde{Y}_\alpha| = O(1) \text{ and } \mu_\alpha^{-1} \exp_{x_0}^{-1}(\mathbb{B}_{\hat{r}_\alpha}(y_\alpha)) \subseteq \mathbb{B}_{C_{25}\frac{\hat{r}_\alpha}{\mu_\alpha}}(\tilde{Y}_\alpha). \tag{5.3.82}$$

Car

$$|\tilde{Y}_\alpha|_\delta \leq C_{25} d_{\hat{g}_{0,\alpha}}(\tilde{Y}_\alpha, 0) \leq C_{25}\frac{d_g(y_\alpha, x_0)}{\mu_\alpha} \leq C_{25}\frac{O(\mu_\alpha)}{\mu_\alpha}$$

et pour $X' \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned}
X' \in \mu_\alpha^{-1} \exp_{x_0}^{-1}(\mathbb{B}_{\hat{r}_\alpha}(y_\alpha)) &\iff \mu_\alpha X' \in \exp_{x_0}^{-1}(\mathbb{B}_{\hat{r}_\alpha}(y_\alpha)) \\
&\iff d_g(\exp_{x_0}(\mu_\alpha X'), y_\alpha) < \hat{r}_\alpha \\
&\iff d_g(\exp_{x_0}(\mu_\alpha X'), \exp_{x_0}(\mu_\alpha \tilde{Y}_\alpha)) < \hat{r}_\alpha \\
&\iff \mu_\alpha d_{\hat{g}_{0,\alpha}}(X', \tilde{Y}_\alpha) < \hat{r}_\alpha \\
&\implies \mu_\alpha C_{25}^{-1}|X' - \tilde{Y}_\alpha|_\delta < \hat{r}_\alpha \\
&\implies |X' - \tilde{Y}_\alpha|_\delta < C_{25}\frac{\hat{r}_\alpha}{\mu_\alpha} \\
&\implies X' \in \mathbb{B}_{C_{25}\frac{\hat{r}_\alpha}{\mu_\alpha}}(\tilde{Y}_\alpha).
\end{aligned}$$

Avec (5.3.82) et le changement de variable $X = \mu_\alpha^{-1}\exp_{x_0}^{-1}(x)$, on obtient que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{B}_{\hat{r}_\alpha}(y_\alpha)\cap\mathbb{B}_{R\mu_\alpha}(x_0)} \frac{u_\alpha^{2^*(s)}}{d_g(x,x_0)^s}dv_g &\leq \int_{\mathbb{B}_{\hat{r}_\alpha}(y_\alpha)\cap\mathbb{B}_{R\mu_\alpha}(x_0)} \frac{u_\alpha^{2^*(s)}}{d_g(x,x_0)^s}dv_g \\ &\leq \int_{\mu_\alpha^{-1}\exp_{x_0}^{-1}(\mathbb{B}_{\hat{r}_\alpha}(y_\alpha))} \frac{\hat{u}_\alpha^{2^*(s)}}{d_{\hat{g}_{0,\alpha}}(X,0)^s}dv_{\hat{g}_{0,\alpha}} \\ &\leq \int_{\mathbb{B}_{C_{25}\frac{\hat{r}_\alpha}{\mu_\alpha}}(\tilde{Y}_\alpha)} \frac{\hat{u}_\alpha^{2^*(s)}}{d_{\hat{g}_{0,\alpha}}(X,0)^s}dv_{\hat{g}_{0,\alpha}}\end{aligned}$$

Par convergence dominée et avec le fait que $\hat{r}_\alpha = o(\mu_\alpha)$, on tire

$$\int_{\mathbb{B}_{\hat{r}_\alpha}(y_\alpha)\cap\mathbb{B}_{R\mu_\alpha}(x_0)} \frac{u_\alpha^{2^*(s)}}{d_g(x,x_0)^s}dv_g = o(1).$$

De la dernière relation et de (5.3.77), on tire (5.3.75). Ceci termine la sous-étape (II.2).

Sous-étape II.3 : On considère maintenant une famille $(\Omega_\alpha, \exp_{y_\alpha}^{-1})_{\alpha>0}$ des cartes exponentielles centrée en y_α et on définit sur $\mathbb{B}_{R_0\hat{r}_\alpha^{-1}}(0) \subset \mathbb{R}^n$, $R_0 \in]0, i_g(M)[$ la fonction $\bar{u}_\alpha(X) = \hat{r}_\alpha^{\frac{n}{2}-1}u_\alpha(\exp_{y_\alpha}(\hat{r}_\alpha X))$ et la métrique $\bar{g}_\alpha(X) = \exp_{y_\alpha}^* g(\hat{r}_\alpha X)$. En utilisant des arguments similaire à ceux de la preuve du Théorème 5.2.1 (la II ème étape), on tire qu'il existe $\bar{u} \in D_1^2(\mathbb{R}^n)$ telle que $\bar{u}_\alpha \to \bar{u}$ faiblement dans $D_1^2(\mathbb{R}^n)$ lorsque $\alpha \to +\infty$. On démontre que $\bar{u} \not\equiv 0$ et que $\bar{u}_\alpha \to \bar{u}$ dans $C^0_{loc}(\mathbb{R}^n)$ lorsque $\alpha \to +\infty$.

En effet, avec (5.3.73) on a

$$\bar{u}_\alpha(X) \leq \left(\frac{d_g(x_0,y_\alpha)}{d_g(x_0,\exp_{y_\alpha}(\hat{r}_\alpha X))}\right)^{\frac{n}{2}-1} \tag{5.3.83}$$

pour tout $X \in \mathbb{B}_{R_0\hat{r}_\alpha^{-1}}(0)$. Étant donné $R > 0$, on obtient par les inégalités triangulaires que pour tout $X \in \mathbb{B}_R(0)$

$$d_g(x_0,\exp_{y_\alpha}(\hat{r}_\alpha X)) \geq d_g(x_0,y_\alpha) - R\hat{r}_\alpha.$$

Avec (5.3.83) et la dernière relation, on obtient pour tout $X \in \mathbb{B}_R(0)$ que

$$\bar{u}_\alpha(X) \leq \left(1 - R\frac{\hat{r}_\alpha}{d_g(x_0,y_\alpha)}\right)^{\frac{-2}{n-2}}. \tag{5.3.84}$$

Mais (5.3.74) donne $d_g(x_0,y_\alpha)^{-1}\hat{r}_\alpha = o(1)$. En combinant cette dernière relation avec (5.3.84), on aura pour tout $X \in \mathbb{B}_R(0)$ que $\bar{u}_\alpha(X) \leq 1 + o(1)$ dans $C^0(\mathbb{B}_R(0))$. D'où la suite $(\bar{u}_\alpha)_\alpha$ est bornée dans $C^0_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$.

En utilisant des arguments similaire à ceux de la preuve du Théorème (5.2.1) (la II ème étape), on prouve que que pour $\rho > 0$ bien choisi pour tout $\alpha > 0$, $\Delta_{\bar{g}_\alpha}\bar{u}_\alpha \leq \bar{u}_\alpha\bar{F}_\alpha$ faiblement sur $B_{2\rho}(0)$ et que $\int_{B_{2\rho}(0)} \bar{F}_\alpha^r d\bar{g}_\alpha \leq C_{26}$ avec $]n/2, n/s[$, $C_{26} > 0$ indépendante de α. On tire avec le Théorème 6.7.1 de Han-Lin (voir Appendice IV) qu'il existe une constante $C_{27} > 0$ indépendante de α telle que $\|\bar{u}_\alpha\|_{L^2(\mathbb{B}_{2\rho}(0))} \geq C_{27}\|\bar{u}_\alpha\|_{L^\infty(\mathbb{B}_\rho(0))}$. Puisque pour tout $\alpha > 0$, on a : $\bar{u}_\alpha(0) = 1$ donc on tire de la dernière inégalité que $\|\bar{u}_\alpha\|_{L^2(\mathbb{B}_{2\rho}(0))} \geq$

C_{27}. La suite $(\bar{u}_\alpha)_\alpha$ étant bornée et convergente faiblement dans $D_1^2(\mathbb{R}^n)$ donc elle converge localement dans $L^2(\mathbb{R}^n)$. D'où $\bar{u} \not\equiv 0$. On démontre comme dans la preuve du Théorème 5.2.1 (la VIII ème étape) que $(\bar{u}_\alpha)_\alpha \to \bar{u}$ dans $C^0_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$. Ceci termine la sous-étape (II.3) de la preuve du Théorème 5.1.1.

Sous-étape II.4 : On tire ici une contradiction. En effet, avec (5.3.75) et les données de l'étape précédente, on écrit pour tout $\alpha > 0$ que

$$\int_{\mathbb{B}_1(0)} \frac{\bar{u}_\alpha^{2^*(s)}}{d_{\bar{g}_\alpha}(X, X_{0,\alpha})^s} dv_{\bar{g}_\alpha} = \int_{\mathbb{B}_{\hat{r}_\alpha}(y_\alpha)} \frac{u_\alpha^{2^*(s)}}{d_g(x, x_0)^s} dv_g = o(1) + \varepsilon_R, \tag{5.3.85}$$

où la fonction $\varepsilon_R : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifie $\lim_{R\to+\infty} \varepsilon_R = 0$. Par convergence dominée, on obtient à la limite lorsque $\alpha \to +\infty$ puis $R \to +\infty$: $\int_{\mathbb{B}_1(0)} |X|^{-s}\bar{u}^{2^*(s)} dX = 0$. Contradiction car $\bar{u} \in C^0(\mathbb{B}_1(0))$ et $\bar{u}(0) = \lim_{\alpha\to 0} \bar{u}_\alpha(0) = 1$. Ceci termine la sous-étape (II.4) et achève ainsi la 2ème étape de la preuve du Théorème 5.1.1.

IIIème (et dernière) étape : Ici, on tire une contradiction avec (5.3.70). On adapte la stratégie utilisée dans les articles [15], [28] de Druet et d'Hebey respectivement pour notre preuve.

En effet, on fixe $\rho \in]0, i_g(M)[$ suffisamment petit et on considère une fonction différentiable de troncature η sur $\mathbb{R}^n$ telle que $0 \le \eta \le 1$, $\eta \equiv 1$ sur $\mathbb{B}_\rho(0)$ et $\eta \equiv 0$ sur $M \backslash \mathbb{B}_{2\rho}(0)$. On définit maintenant la fonction de troncature η_0 sur $\mathbb{B}_{2\rho}(x_0)$ par $\eta_0 = \eta \circ \exp_{x_0}^{-1}$. On pose $dx = (\exp_{x_0}^{-1})^* dX$ et $\tilde{\delta}_0 = (\exp_{x_0}^{-1})^*\delta$. Finalement, on considère deux constantes $C_{28}, C_{29} > 0$, indépendantes de α telles que $|\nabla\eta_0|_g \le C_{28}$ et $|\Delta_g \eta_0|_g \le C_{29}$. L'inégalité Euclidienne de Hardy-Sobolev donne pour tout $\alpha > 0$ que

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\eta(u_\alpha \circ \exp_{x_0})|^{2^*(s)}}{|X|^s} dX\right)^{\frac{2}{2^*(s)}} \le K(n,s) \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla(\eta(u_\alpha \circ \exp_{x_0}))|^2_\delta dX.$$

Ceci implique que, pour tout $\alpha > 0$, on a :

$$\left(\int_M \frac{|\eta_0 u_\alpha|^{2^*(s)}}{d_{\tilde{\delta}_0}(x, x_0)^s} dx\right)^{\frac{2}{2^*(s)}} \le K(n,s) \int_M |\nabla(\eta_0 u_\alpha)|^2_{\tilde{\delta}_0} dx. \tag{5.3.86}$$

Afin d'obtenir une contradiction, nous estimons le membre droite de l'équation (5.3.86) en comparant la norme L^2 de $|\nabla(\eta_0 u_\alpha)|_{\tilde{\delta}_0}$ dans $(M, \tilde{\delta}_0)$ avec celle de $|\nabla u_\alpha|_g$ dans (M, g) ainsi que le membre gauche de l'équation (5.3.86) en comparant la norme $L^{2^*(s)}$ de $\eta_0 u_\alpha$ dans $(M, \tilde{\delta}_0, \frac{dx}{d_{\tilde{\delta}_0}(x,x_0)^s}))$ avec celle de u_α dans $(M, g, \frac{dv_g}{d_g(x,x_0)^s})$. On note $r_0(x) = d_g(x, x_0)$ la distance géodésique à x_0. Le développement de Cartan de la métrique g (voir [37] pour la preuve) dans la carte exponentielle $(\mathbb{B}_{2\rho}(x_0), exp_{x_0}^{-1})$ donne

$$\begin{aligned}
\int_M |\nabla(\eta_0 u_\alpha)|^2_{\tilde{\delta}_0} dx &= \int_M (1 + C_{30} r_0^2(x))|\nabla(\eta_0 u_\alpha)|^2_g (1 + C_{31} r_0^2(x)) dv_g \\
&\le \int_M |\nabla(\eta_0 u_\alpha)|^2_g dv_g + C_{32} \int_M r_0^2(x)|\nabla(\eta_0 u_\alpha)|^2_g dv_g \\
&\le \int_M |\nabla(\eta_0 u_\alpha)|^2_g dv_g + C_{33} \int_M r_0^2 \eta_0^2 |\nabla u_\alpha|^2_g dv_g \\
&\quad + C_{34} \int_{M\backslash\mathbb{B}_\rho(x_0)} u_\alpha^2 dv_g,
\end{aligned} \tag{5.3.87}$$

avec $C_i > 0, i = 30, \ldots, 34$ indépendante de α. D'autre part, on obtient par intégration par partie :

$$\begin{aligned} \int_M |\nabla(\eta_0 u_\alpha)|_g^2 dv_g &= \int_M \eta_0^2 |\nabla u_\alpha|_g^2 dv_g + \int_M \eta_0 \Delta_g \eta_0 u_\alpha^2 dv_g \\ &\leq \int_M |\nabla u_\alpha|_g^2 dv_g + C_{35} \int_M u_\alpha^2 dv_g \end{aligned} \tag{5.3.88}$$

On pose maintenant $f_0 := \eta_0^2 r_0^2$ qui est une fonction différentiable sur M. Donc

$$\int_M \eta_0^2 r_0^2 |\nabla u_\alpha|_g^2 dv_g = \int_M (\nabla(f_0 u_\alpha) - u_\alpha \nabla f_0, \nabla u_\alpha)_g dv_g. \tag{5.3.89}$$

En multipliant l'équation (5.3.71) par $f_0 u_\alpha$ et puis en intégrant par partie sur M, on aura :

$$\begin{aligned} \int_M (\nabla(f_0 u_\alpha), \nabla u_\alpha)_g dv_g &= \int_M (\Delta_g u_\alpha) f_0 u_\alpha dv_g \\ &\leq \lambda_\alpha \int_M \frac{f_0 u_\alpha^{2^*(s)}}{d_g(x, x_0)^s} dv_g. \end{aligned} \tag{5.3.90}$$

Mais d'après l'étape précédente, il existe une constante $C_{36} > 0$ indépendante de α telle que

$$\begin{aligned} u_\alpha^{2^*(s)}(x) d_g(x, x_0)^{2-s} &= \left(u_\alpha(x) d_g(x, x_0)^{\frac{n}{2}-1}\right)^{\frac{2(2-s)}{n-2}} u_\alpha^2(x) \\ &\leq C_{36} u_\alpha^2(x). \end{aligned} \tag{5.3.91}$$

Puisque $\lambda_\alpha \in]0, K(n,s)^{-1}[$, on obtient avec (5.3.90) que

$$\int_M (\nabla(f_0 u_\alpha), \nabla u_\alpha)_g dv_g \leq C_{37} \int_M u_\alpha^2(x) dv_g, \tag{5.3.92}$$

avec $C_{37} > 0$ indépendante de α. Intégrons par partie

$$\int_M (\nabla f_0, \nabla u_\alpha)_g u_\alpha dv_g = \int_M \frac{1}{2} u_\alpha^2 \Delta_g(f_0) dv_g \leq C_{38} \int_M u_\alpha^2 dv_g, \tag{5.3.93}$$

avec $C_{38} > 0$ indépendante de α. Combinons (5.3.93) et (5.3.92) avec (5.3.89) :

$$\int_M \eta_0^2 r_0^2 |\nabla u_\alpha|_g^2 dv_g \leq C_{39} \int_M u_\alpha^2 dv_g, \tag{5.3.94}$$

avec $C_{39} > 0$ indépendante de α. Ensemble, les relations (5.3.87), (5.3.88) et (5.3.94) donnent

$$\int_M |\nabla(\eta_0 u_\alpha)|_{\tilde{\delta}_0}^2 dx \leq \int_M |\nabla u_\alpha|_g^2 dv_g + C_{40} \int_M u_\alpha^2 dv_g, \tag{5.3.95}$$

avec $C_{40} > 0$ indépendante de α.

D'autre part, le Lemme de Gauß implique que $d_{\tilde{\delta}_0}(x, x_0) = d_g(x, x_0) = |\exp_{x_0}^{-1}(x)|$. En écrivant $dx = dv_g + (1 - \sqrt{det(g)})dx$, on obtient avec le développement de Cartan de la métrique g

$$\int_M \frac{|\eta_0 u_\alpha|^{2^*(s)}}{d_{\tilde{\delta}_0}(x, x_0)^s} dx \geq \int_M \frac{|\eta_0 u_\alpha|^{2^*(s)}}{d_g(x, x_0)^s} dv_g - \int_M \frac{|\eta_0 u_\alpha|^{2^*(s)}}{d_g(x, x_0)^s} C_{41} r_0^2(x) dx, \tag{5.3.96}$$

avec $C_{41} > 0$ indépendante de α. Avec (5.3.91) , on tire

$$\int_M \frac{r_0^2(x)|\eta_0 u_\alpha|^{2^*(s)}}{d_g(x,x_0)^s}dx \leq C_{42}\int_M \left(u_\alpha(x) d_g(x,x_0)^{\frac{n}{2}-1}\right)^{\frac{2(2-s)}{n-2}} u_\alpha^2(x)dv_g$$
$$\leq C_{43}\int_M u_\alpha^2(x)dv_g, \qquad (5.3.97)$$

avec $C_{42}, C_{43} > 0$ indépendantes de α. Puisque pour tout $\alpha > 0$,

$$\int_M d_g(x,x_0)^{-s}|\eta_0 u_\alpha|^{2^*(s)}dv_g \leq 1$$

et $\int_M u_\alpha^2 dv_g = o(1)$ à une sous-suite près, il s'ensuit de (5.3.96) et (5.3.97) que

$$\left(\int_M \frac{|\eta_0 u_\alpha|^{2^*(s)}}{d_{\tilde{\delta}_0}(x,x_0)^s}dx\right)^{\frac{2}{2^*(s)}} \geq \left(\int_M \frac{|\eta_0 u_\alpha|^{2^*(s)}}{d_g(x,x_0)^s}dv_g - C_{43}\int_M u_\alpha^2(x)dv_g\right)^{\frac{2}{2^*(s)}}$$
$$\geq \int_M \frac{|\eta_0 u_\alpha|^{2^*(s)}}{d_g(x,x_0)^s}dv_g - C_{43}\int_M u_\alpha^2(x)dv_g. \qquad (5.3.98)$$

Maintenant, la définition de η_0 donne que

$$\int_M \frac{|\eta_0 u_\alpha|^{2^*(s)}}{d_g(x,x_0)^s}dv_g \geq \int_M \frac{u_\alpha^{2^*(s)}}{d_g(x,x_0)^s}dv_g - \int_{M\setminus\mathbb{B}_\rho(x_0)} \frac{u_\alpha^{2^*(s)}}{d_g(x,x_0)^s}dv_g. \qquad (5.3.99)$$

Puisque $u_\alpha \to 0$ lorsque $\alpha \to +\infty$ dans $C^0_{loc}(M \setminus \{x_0\})$ (voir Proposition 5.2.1), donc il existe une constante $C_{44} > 0$ indépendante de α telle que

$$\int_{M\setminus\mathbb{B}_\rho(x_0)} \frac{u_\alpha^{2^*(s)}}{d_g(x,x_0)^s}dv_g \leq \sup_{x\in M\setminus\mathbb{B}_\rho(x_0)}\left(\frac{u_\alpha^{2^*(s)-2}}{d_g(x,x_0)^s}\right)\int_{M\setminus\mathbb{B}_\rho(x_0)} u_\alpha^2 dv_g$$
$$\leq C_{44}\int_M u_\alpha^2 dv_g. \qquad (5.3.100)$$

En combinant (5.3.71), (5.3.99) et (5.3.100), on aura

$$\int_M \frac{|\eta_0 u_\alpha|^{2^*(s)}}{d_g(x,x_0)^s}dv_g \geq \frac{1}{\lambda_\alpha}\left(\int_M |\nabla u_\alpha|_g^2 dv_g + \alpha\int_M u_\alpha^2 dv_g\right)$$
$$-C_{44}\int_M u_\alpha^2 dv_g. \qquad (5.3.101)$$

Ensemble, les relations (5.3.101), (5.3.98) et avec le fait que $\lambda_\alpha < K(n,s)^{-1}$ donnent

$$\left(\int_M \frac{|\eta_0 u_\alpha|^{2^*(s)}}{d_{\tilde{\delta}_0}(x,x_0)^s}dx\right)^{\frac{2}{2^*(s)}} \geq K(n,s)\int_M |\nabla u_\alpha|_g^2 dv_g + (\alpha K(n,s) - C_{45})\int_M u_\alpha^2 dv_g, \quad (5.3.102)$$

avec $C_{45} > 0$ indépendante de α. Combinons maintenant (5.3.95), (5.3.102) avec (5.3.86)

$$(C_{46} - \alpha)\int_M u_\alpha^2 dv_g \geq 0, \qquad (5.3.103)$$

avec $C_{46} > 0$ indépendante de α. Contradiction car $\alpha \to +\infty$. Ceci termine la preuve du Théorème 5.1.1.

5.3.2 Inégalités optimales de Hardy-Sobolev : Preuve

Preuve du Théorème 5.1.2 : En effet, l'inégalité optimale (5.1.1) est le résultat du Théorème 5.1.1. On note $B := B_0(M, g, s, x_0)$ (pour simplifier). Il s'ensuit de (5.1.1) et de la définition (5.2.3) de I_α que

$$K(n,s)^{-1} \leq \inf_{u \in H_1^2(M) \setminus \{0\}} I_{K(n,s)^{-1}B}(u) \tag{5.3.104}$$

On reprend la suite des fonctions-tests $(w_\epsilon)_\epsilon$ définie sur M comme dans (3.1.6) (dans la Proposition 3.1.1). Il s'ensuit de cette Proposition 3.1.1 que

$$I_{K(n,s)^{-1}B}(w_\epsilon) = K(n,s)^{-1} + \gamma_n \Omega_n(x_0) \theta_\epsilon + o(\theta_\epsilon)$$

lorsque $\epsilon \to 0$, avec $\gamma_n > 0$ pour tout $n \geq 3$, $\theta_\epsilon := \epsilon^2$ si $n \geq 5$, $\theta_\epsilon := \epsilon^2 \ln(\epsilon^{-1})$ si $n = 4$, $\theta_\epsilon := \epsilon$ si $n = 3$, et

$$\Omega_n(x_0) := K(n,s)^{-1}B - \frac{(n-2)(6-s)}{12(2n-2-s)} \mathrm{Scal}_g(x_0) \text{ si } n \geq 4\,;\ \Omega_3(x_0) := -\beta_{x_0}(x_0),$$

$\beta_{x_0}(x_0)$ étant la masse de la fonction de Green de l'opérateur $\Delta_g + \frac{B_0(M,g,s,x_0)}{K(3,s)}$ en x_0 (voir Appendice V). De (5.3.104), on tire que $\Omega_n(M, g, s, x_0) \geq 0$. D'où (5.1.2). $\square$

Chapitre 6

Appendices

6.1 Appendice 1 : Résultats de géométrie différentielle et d'Analyse.

6.1.1 Rappel sur la carte exponentielle.

6.1.1.1 Géodésiques et Fonctions exponentielles

Fonctions exponentielles. Soient (M, g) une variété Riemannienne de dimension n, ∇ la connexion de Levi-Civita associée à g et $x \in M$. Pour $X \in T_xM$, on note $\gamma_{x,X}(t)$ l'unique géodésique sur M de paramètre t dans $[0, \epsilon(X)]$ qui vérifie

$$\gamma_{x,X}(0) = x \quad \text{et} \quad \frac{d}{dt}\gamma_{x,X}(0) = X. \tag{6.1.1}$$

On note $t_0(X) = \sup\{\epsilon(X); t \in [0, \epsilon(X)] \mapsto \gamma_{x,X}(t) \text{ est définie}\}$.

Définition 6.1.1 *Soit $x \in M$. L'application exponentielle en x est définie par*

$$\begin{array}{rcl} \exp_x : \hat{\chi}_x(M) & \to & M \\ X & \to & \gamma_{x,X}(1). \end{array}$$

Notons que, l'application exponentielle $\exp_x$ est bien définie car M est compacte donc complète.

Définition 6.1.2 *On définit la métrique Euclidienne δ sur $\mathbb{R}^n$, pour tous $v, w \in \mathbb{R}^n$, par :*

$$\delta(v, w) = \sum_{i,j=1}^{n} v^i w^j \delta_{ij} \tag{6.1.2}$$

où les $v^k, w^k, k = 1, \ldots, n$ désignent respectivement les composantes des vecteurs v et w dans une repère orthonormale de $\mathbb{R}^n$, δ_{ij} étant le symbole de Kronecker.

Soit maintenant $\{e_1, \ldots, e_n\}$ une base orthonormée de $(T_xM, g(x))$. L'application suivante

$$\begin{array}{rcl} \Phi_x : (T_xM, g(x)) & \to & (\mathbb{R}^n, \delta) \\ X = X^i e_i & \to & (X^1, \ldots, X^n) \end{array}$$

est une isométrie vectorielle, i.e. Φ_x est une isomorphisme algébrique et pour tout $X \in T_xM$, $\|X\|_{g(x)} = \|(X^i)_i\|_\delta$. On note $\chi_x = \Phi_x(\hat{\chi}_x)$.

Proposition 6.1.1 *Pour tout $x \in M$, il existe $\epsilon > 0$ et un ouvert $\Omega_x \subset M$ contenant x tel que l'application $\exp_x \circ \Phi_x^{-1} : \mathbb{B}(0,\epsilon) \to \Omega_x$ est un difféomorphisme.*

Remarque : Dorénavent, on identifie l'application $\exp_x \circ \Phi_x^{-1}$ avec l'application exponentielle $\exp_x$.

6.1.1.2 Cartes exponentielles et propriétés

Définition 6.1.3 ***(Carte exponentielle.)*** *Soit $x \in M$. Le couple $(\Omega_x, \exp_x^{-1})$ défini comme dans la proposition (6.1.1) est une carte différentiable compatible avec l'atlas différentiable maximal de M et est appelée la " carte exponentielle au point x ", et les coordonnées associées à la carte exponentielle sont appelées " les coordonnées géodésiques normales au point x ".*

Proposition 6.1.2 *Soit $x \in M$. La carte exponentielle $(\Omega_x, \exp_x^{-1})$ au point x vérifie les propriétés suivantes :*
1/ $(\Omega_x, \exp_x^{-1})$ est une carte normale au point x, i.e.

$$(\exp_x^* g)(0) = \delta \tag{6.1.3}$$

2/ Pour tout $X \in T_xM$ et pour t suffisament petit, on a

$$\exp_x^{-1}(\gamma_{x,X}(t)) = (tX^1, \dots, tX^n), \tag{6.1.4}$$

où les X^i désignent les composantes de X dans $(\Omega_x, \exp_x^{-1})$, et $\gamma_{x,X}(t)$ est comme dans (6.1.1).

Définition 6.1.4 (Rayon d'injectivité). *É tant donné (M,g) une variété Riemannienne complète, $x \in M$. On définit le rayon d'injectivité de (M,g) au point x, et on le note $i_g(x)$, comme étant le plus grand des réels strictements positifs r pour lesquels toute géodésique $\gamma : [a,b] \to M$ issue de x et de longueur $l_g(\gamma) := g(x)(\gamma', \gamma') \leq r$, est forcément minimisante, c.à.d. $d_g(\gamma(a), \gamma(b)) = l_g(\gamma)$. On définit le rayon d'injéctivité de la variété (M,g) par $i_g(M) = \inf_{x \in M} i_g(x)$.*

Notons que : $i_g(M) > 0$ car M est une variété compacte.

6.1.2 Métriques et normes équivalentes.

Soit (M,g) une variété Riemannienne compacte de dimension n. Soient $\epsilon \in]0, i_g(M)[$ et $x \in M$. D'après la Proposition (6.1.1), il existe alors une carte exponentielle $(\Omega_x, \exp_x^{-1})$ au voisinage de x telle que Ω_x est centré en x et $\exp_x^{-1}(\Omega_x) = \mathbb{B}(0,\epsilon)$. On a clairement

$$M = \bigcup_{x \in M} (\Omega_x, \exp_x^{-1}). \tag{6.1.5}$$

6.1.2.1 Approximation Euclidienne d'une métrique Riemannienne et de son inverse

Théorème 6.1.1 *Soit (M,g) une variété Riemannienne* ***compacte*** *de dimension n. Alors il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $\epsilon \in]0, i_g(M)[$, ils existent N*

cartes exponentielles $(\Omega'_{x_1}, \exp_{x_1}^{-1}), \ldots, (\Omega'_{x_N}, \exp_{x_N}^{-1})$ *de* M *centrées en* $x_1, \ldots, x_N \in M$ *respectivement tel que pour tout* $k \in \{1, \ldots, N\}$ *et tout* $x \in \Omega'_{x_k}$*, on a :*

$$|g_{ij}^{(k)}(x) - \delta_{ij}| < \epsilon \text{ et } |g_{(k)}^{ij}(x) - \delta^{ij}| < C\epsilon \tag{6.1.6}$$

où $C = C(M, g) > 0$ *et les* $g_{ij}^{(k)}$*,(resp. les* $g_{(k)}^{ij}$*)* $i, j \in \{1, \ldots, n\}$*, désignent les composantes de la métrique* g *(resp. de la matrice inverse* g^{-1}*) dans la carte exponentielle* $(\Omega'_{x_k}, \exp_{x_k}^{-1})$*.*

Preuve du Théorème 6.1.1 : On procède par étapes.

Ière Étape : Pour tous $\epsilon \in]0, i_g(M)[$ et $x \in M$, il existe $\rho_x > 0$ tel que pour tout $p \in \mathbb{B}_{\rho_x}(0)$, on a :

$$|(\exp_x^* g(p))_{ij} - \delta_{ij}| \leq \epsilon. \tag{6.1.7}$$

En effet, Soient $\epsilon \in]0, i_g(M)[$ et $x \in M$. La continuité de $\exp_x^* g$ en 0 implique qu'il existe $\rho_x > 0$ tel que pour tout $p \in \mathbb{B}_{\rho_x}(0) \subset \mathbb{R}^n$, on a :

$$\| \exp_x^* g(p) - \exp_x^* g(0)\|_\infty < \epsilon.$$

Donc pour tous $v, w \in \mathbb{R}^n$, $\|v\|_\delta = \|w\|_\delta = 1$, on a

$$| \exp_x^* g(p)(v, w) - \exp_x^* g(0)(v, w)| < \epsilon.$$

Or $(\Omega_x, \exp_x^{-1})$ est une carte normale en x, i.e. $(\exp_x^* g)(0) = \delta$. Par suite, on a

$$\delta(v, w) - \epsilon < \exp_x^* g(p)(v, w) < \delta(v, w) + \epsilon.$$

Pour tous $v, w \in \mathbb{R}^n$, $v, w \neq 0$ et tout $p \in \mathbb{B}_{\rho_x}(0)$, on a alors :

$$\delta(v, w) - \epsilon\|v\|_\delta\|w\|_\delta < \exp_x^* g(p)(v, w) < \delta(v, w) + \epsilon\|v\|_\delta\|w\|_\delta.$$

Maintenant en posant $v = e_i, w = e_j$, $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, on tire de l'inégalité précédente que

$$\delta_{ij} - \epsilon < (\exp_x^* g(p))_{ij} < \delta_{ij} + \epsilon.$$

D'où le résultat.

IIème Étape : Pour tout $\epsilon \in]0, i_g(M)[$, ils existent N ouverts $\Omega'_1, \ldots, \Omega'_N$ de M centrés en $x_1, \ldots, x_N \in M$ respectivement tel que pour tout $k \in \{1, \ldots, N\}$, tout $x \in \Omega'_k$, on a :

$$|g_{ij}^{(k)}(x) - \delta_{ij}| < \epsilon. \tag{6.1.8}$$

En effet, soit $\epsilon > 0$. D'après la première étape, il existe, pour tout $x \in M$, $\rho_x > 0$ tel que pour tout $p \in \mathbb{B}_{\rho_x}(0)$, on a :

$$|(\exp_x^* g(p))_{ij} - \delta_{ij}| \leq \epsilon.$$

D'autre part, on pose pour tout $x \in M$, l'ouvert Ω'_x de M centré en x tel que

$$\exp_x^{-1}(\Omega'_x) = \mathbb{B}_{\rho_x}(0).$$

On a clairement que $M = \bigcup_{x \in M} \Omega'_x$. M étant compacte, donc ils existent N points $x_1, \ldots, x_N$ dans M et N cartes $(\Omega'_{x_1}, \exp_{x_1}^{-1}), \ldots, (\Omega'_{x_N}, \exp_{x_N}^{-1})$ centrées en $x_1, \ldots, x_N$ respectivement et telles que pour tout $k \in \{1, \ldots, N\}$, on a :

$$\exp_{x_k}^{-1}(\Omega'_{x_k}) = \mathbb{B}_{\rho_x}(0) \text{ et } M = \bigcup_{k=1}^{N} (\Omega'_{x_k}, \exp_{x_k}^{-1}).$$

Maintenant soient $k \in \{1, \ldots, N\}$ et $x \in \Omega'_{x_k}$. Pour tout $X \in T_xM$, on pose $p = \exp_{x_k}^{-1}(x)$ et $v = d(\exp_{x_k}^{-1})(x)X$. Soit $\{e_i, i = 1, \ldots, n\}$ une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$. On a pour tous $i, j \in \{1, \ldots, n\}$:

$$\begin{aligned} g_{ij}^{(k)}(x) &= < d\exp_{x_k}(\exp_{x_k}^{-1}(x))e_i, d\exp_{x_k}(\exp_{x_k}^{-1}(x))e_j >_{g(x)} \\ &= < d\exp_{x_k}(p)e_i, d\exp_{x_k}(p)e_j >_{g(x)} . \end{aligned}$$

Aussi,

$$\begin{aligned} (\exp_{x_k}^* g(p))_{ij} &= < e_i, e_j >_{\exp_{x_k}^* g(p)} = \exp_{x_k}^* g(p)(e_i, e_j) \\ &= g(x)(d\exp_{x_k}(\exp_{x_k}(p))e_i, d\exp_{x_k}(\exp_{x_k}(p))e_j) = g_{ij}^{(k)}(x). \end{aligned}$$

Il s'ensuit que pour tout $k \in \{1, \ldots, N\}$, tout $x \in \Omega'_{x_k}$ et tous $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ on a :

$$|g_{ij}(x) - \delta_{ij}| \leq \epsilon.$$

IIIème Étape : Pour tout $\epsilon \in]0, i_g(M)[$, ils existent N cartes exponentielles $(\Omega'_{x_1}, \exp_{x_1}^{-1}), \ldots, (\Omega'_{x_N}, \exp_{x_N}^{-1})$ de M centrées en $x_1, \ldots, x_N \in M$ respectivement et $0 < \delta_\epsilon := C\epsilon, C = C(M, g) >$ tels que pour tout $k \in \{1, \ldots, N\}$, tout $x \in \Omega'_{x_k}$ on a

$$|g_{(k)}^{ij}(x) - \delta^{ij}| < \delta_\epsilon, \tag{6.1.9}$$

En effet, soit $\epsilon > 0$. On construit un recouvrement de M par des cartes exponentielles tel que

$$M = \bigcup_{k=1}^{N} (\Omega'_{x_k}, \exp_{x_k}^{-1}).$$

Soient $k \in \{1, \ldots, N\}$, $x \in \Omega'_{x_k}$ et $X \in T_xM$. D'après les étapes précédentes, on a, pour tous $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ que :

$$|g_{ij}^{(k)}(x) - \delta_{ij}| \leq \epsilon,$$

où les $g_{ij}^{(k)}$, $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, désignent les composantes de la métrique g dans la carte exponentielle $(\Omega'_k, \exp_{x_k}^{-1})$, autrement dit

$$\mathrm{Diag}_n(1 - \epsilon, \ldots, 1 - \epsilon) \leq g^{(k)}(x) \leq \mathrm{Diag}_n(1 + \epsilon, \ldots, 1 + \epsilon).$$

Comme $g^{(k)}(x)$ est une matrice symétrique et réelle donc elle est diagonalisable. Par suite, on a :

$$(1 - \epsilon)^n \leq det(g^{(k)})(x) \leq (1 + \epsilon)^n.$$

Puisque $det(g^{(k)-1}) = det(g^{(k)})^{-1}$ alors Donc il existe $C_1 > 0$ indépendante de ϵ telle que

$$1 - C_1\epsilon \leq det(g^{(k)-1}) \leq 1 + C_1\epsilon.$$

Or g^{-1} étant la matrice inverse de g donc

$$g_{(k)}^{ij}(x) = det(g)^{-1}(x) \sum_\sigma (-1)^{\varepsilon(\sigma)} g_{1\sigma(1)} \times \ldots \times g_{i-1\sigma(i-1)} \times g_{i+1\sigma(i+1)} \times \ldots \times g_{n\sigma(n)}.$$

Deux cas à distinguer :

Cas III.1 : $i \neq j$. Dans ce cas, on a $\sigma \neq Id_{n-1}$. Par suite,

$$|g^{ij}_{(k)}(x)| \leq |1 + C_2\epsilon| \sum_{\sigma \neq Id_{n-1}} (-1)^{\varepsilon(\sigma)} \epsilon^{p(\sigma)} (1+\epsilon)^{n-1-p(\sigma)},$$

avec $C_2 > 0$ indépendante de ϵ. Puisque pour tout σ, on a $\sigma \neq Id_{n-1}$, donc $p(\sigma) \in \mathbb{N}^*$. Par suite,

$$|g^{ij}_{(k)}(x)| \leq |1 + C_3\epsilon|\epsilon h(\epsilon)$$

avec avec $C_3 > 0$ indépendante de ϵ et $h(\epsilon) = \sum_\sigma (-1)^{\varepsilon(\sigma)} \epsilon^{p(\sigma)-1} (1+\epsilon)^{n-1-p(\sigma)}$ est bornée quand $\epsilon \to 0$. D'où

$$|g^{ij}_{(k)}(x)| \leq C_4\epsilon, \tag{6.1.10}$$

avec $C_4 > 0$ indépendante de ϵ.

Cas III.2 : $i = j$. Dans ce cas,

$$g^{ii}_{(k)}(x) = det(g)^{-1}(x) \left[\prod_{s \neq i} g_{ss}(x) + \sum_{\sigma \neq Id_{n-1}} (-1)^{\varepsilon(\sigma)} \prod_{s \neq i} g_{s\sigma(s)}(x) \right].$$

Il s'ensuit que :

$$\begin{aligned} g^{ii}_{(k)}(x) &\leq (1 + C_5\epsilon)[(1+\epsilon)^{n-1} + \sum_{\sigma \neq Id_{n-1}} \epsilon^{p(\sigma)} (1+\epsilon)^{n-1-p(\sigma)}] \\ &= 1 + C_6\epsilon, \end{aligned} \tag{6.1.11}$$

avec $C_5, C_6 > 0$ indépendantes de ϵ. On a donc

$$\begin{aligned} g^{ii}_{(k)}(x) \geq\ & (1 - C_7\epsilon) \left[(1-\epsilon)^{n-1} + \sum_{\sigma \neq Id_{n-1}, \varepsilon(\sigma) \in 2\mathbb{Z}} \prod_{s \neq i} g_{s\sigma(s)}(x) \right. \\ & \left. - \sum_{\sigma \neq Id_{n-1}, \varepsilon(\sigma) \notin 2\mathbb{Z}} \prod_{s \neq i} g_{s\sigma(s)}(x) \right] \\ \geq\ & (1 - C_7\epsilon)[1 - O_{6,1}(\epsilon) + \sum_{\sigma \neq Id_{n-1}, \varepsilon(\sigma) \in 2\mathbb{Z}} (-1)^{p(\sigma)} \epsilon^{p(\sigma)} (1+\epsilon)^{n-1-p(\sigma)} \\ & - \sum_{\sigma \neq Id_{n-1}, \varepsilon(\sigma) \notin 2\mathbb{Z}} (-1)^{p(\sigma)} \epsilon^{p(\sigma)} (1+\epsilon)^{n-1-p(\sigma)}] \\ =\ & 1 - C_8\epsilon, \end{aligned} \tag{6.1.12}$$

avec $C_7, C_8 > 0$ indépendantes de ϵ. En posant que $C_9 = \max\{C_8, C_1\}$, et avec (6.1.11) et (6.1.12) on aura

$$|g^{ii}_{(k)}(x) - 1| \leq C_9\epsilon. \tag{6.1.13}$$

En combinant (6.1.10) avec (6.1.13) et en posant que $C_{10} = \max\{C_4, C_9\}$ on tire, pour tous $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, que

$$|g^{ij}_{(k)}(x) - \delta^{ij}| < C_{10}\epsilon.$$

D'où le résultat. $\square$

6.1.2.2 Équivalence des normes tensorielles Riemanniennes

Théorème 6.1.2 *Soient M une variété différentiable* **compacte** *de dimension $n \geq 1$, g et $\tilde{g}$ deux métriques Riemanniennes définies sur M. Soit $T \in \bigotimes^p T^*M$, $p \in \mathbb{N}^*$. Alors les normes tensorielles $\|T\|_g$ et $\|T\|_{\tilde{g}}$ sont équivalentes. Autrement dit, il existe $B = (M, g, \tilde{g}) > 0$ telle que*

$$B^{-1}\|T\|_{\tilde{g}} \leq \|T\|_g \leq B\|T\|_{\tilde{g}}. \tag{6.1.14}$$

Preuve du Théorème 6.1.1 : On procède par étapes.

Ière Étape : Soit $T \in \bigotimes^p T^*M$, $p \in \mathbb{N}^*$. On démontre qu'il existe $C = C(n,p) > 0$ telle que pour tout $\epsilon \in]0, i_g(M)[$, ils existent N cartes exponentielles $(\Omega'_{x_1}, \exp_{x_1}^{-1}), \ldots, (\Omega'_{x_N}, \exp_{x_N}^{-1})$ de M centrées en $x_1, \ldots, x_N \in M$ respectivement tels que pour tout $k \in \{1, \ldots, N\}$ et tout $x \in \Omega'_{x_k}$ on a tel que

$$\|T(x)\|_\delta(1 - C\epsilon) \leq \|T(x)\|_g \leq \|T(x)\|_\delta(1 + C\epsilon) \tag{6.1.15}$$

où δ désigne la métrique Euclidienne dans la carte $(\Omega'_{x_k}, \exp_{x_k}^{-1})$ et $\|T(x)\|_\delta = \sum_{i_1,\ldots,i_p=1}^n T^2_{i_1,\ldots,i_p}(x)$ et $T_{i_1,\ldots,i_p}(x)$ sont les composantes locales de $T(x)$ quand $x \in \Omega'_{x_k}$.

En effet, soit $\epsilon \in]0, i_g(M)[$. Pour cet $\epsilon > 0$, il existe N cartes exponentielles $(\Omega'_{x_k}, \exp_{x_k}^{-1})$ centrée en un point x_k de M telle que

$$M = \bigcup_{k=1}^N (\Omega'_{x_k}, \exp_{x_k}^{-1}),$$

et que pour tout $k \in \{1, \ldots, N\}$, et tout $x \in \Omega'_{x_k}$, on a :

$$|g^{ij}_{(k)}(x) - \delta^{ij}| \leq C_1\epsilon, \tag{6.1.16}$$

où $C_1 > 0$ est une constante et les $g^{ij}_{(k)}$, $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, désignent les composantes de g^{-1} la matrice inverse de la métrique g dans la carte exponentielle $(\Omega'_k, \exp_{x_k}^{-1})$.
D'autre part, on a

$$\begin{aligned}
\|T(x)\|^2_{g_{(k)}(x)} &= g^{i_1j_1}_{(k)}(x) \times \ldots \times g^{i_pj_p}_{(k)}(x) T_{i_1\ldots i_p}(x) T_{j_1\ldots j_p}(x) \\
&= \delta^{i_1j_1} \times \ldots \times \delta^{i_pj_p} T_{i_1\ldots i_p}(x) T_{j_1\ldots j_p}(x) \\
&\quad + (g^{i_1j_1}_{(k)}(x) - \delta^{i_1j_1}) \times \ldots \times (g^{i_pj_p}_{(k)}(x) - \delta^{i_pj_p}) T_{i_1\ldots i_p}(x) T_{j_1\ldots j_p}(x) \\
&\quad + \sum_{r=1}^{p-1} \delta^{i_1j_1} \times \ldots \times \delta^{i_rj_r} (g^{i_{r+1}j_{r+1}}_{(k)}(x) - \delta^{i_{r+1}j_{r+1}}) \times \ldots \times (g^{i_pj_p}_{(k)}(x) - \delta^{i_pj_p}) \\
&\qquad\qquad \times T_{i_1\ldots i_p}(x) T_{j_1\ldots j_p}(x) \\
&= \|T(x)\|^2_\delta + \sum_{i_1,j_1,\ldots,i_p,j_p=1}^n \prod_{s=1}^p (g^{i_sj_s}_{(k)}(x) - \delta^{i_sj_s}) T_{i_1\ldots i_p}(x) T_{j_1\ldots j_p}(x) \\
&\quad + \sum_{r=1}^{p-1} \prod_{s=1}^r \delta^{i_sj_s} \prod_{s=r+1}^p (g^{i_sj_s}_{(k)}(x) - \delta^{i_sj_s}) T_{i_1\ldots i_p}(x) T_{j_1\ldots j_p}(x)
\end{aligned} \tag{6.1.17}$$

De (6.1.16) et (6.1.17) que

$$\begin{aligned}
\left|\|T(x)\|^2_{g_{(k)}(x)} - \|T(x)\|^2_\delta\right| &\leq \sum_{i_1,j_1,\ldots,i_p,j_p=1}^{n} \prod_{s=1}^{p} |g^{i_sj_s}_{(k)}(x) - \delta^{i_sj_s}| \times |T_{i_1\ldots i_p}(x)T_{j_1\ldots j_p}(x)| \\
&\quad + \sum_{r=1}^{p-1} \prod_{s=r+1}^{p} |g^{i_sj_s}_{(k)}(x) - \delta^{i_sj_s}| \times |T_{i_1\ldots i_p}(x)T_{i_1\ldots i_r j_{r+1}\ldots j_p}(x)| \\
&\leq C_1\epsilon^p \sum_{i_1,j_1,\ldots,i_p,j_p=1}^{n} |T_{i_1\ldots i_p}(x)T_{j_1\ldots j_p}(x)| \\
&\quad + \sum_{r=1}^{p-1} \sum_{(i_1\ldots i_r, i_{r+1}, j_{r+1},\ldots,i_p,j_p)=1}^{n} C_1\epsilon^{p-r}|T_{i_1\ldots i_p}(x)T_{i_1\ldots i_r j_{r+1}\ldots j_p}(x)| \\
&\leq C_1\left(\epsilon^p + (p-1)\sum_{r=1}^{p-1}\epsilon^{p-r}\right) \sum_{i_1,j_1,\ldots,i_p,j_p=1}^{n} |T_{i_1\ldots i_p}(x)T_{j_1\ldots j_p}(x)|
\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}
\sum_{i_1,j_1,\ldots,i_p,j_p=1}^{n} |T_{i_1\ldots i_p}(x)T_{j_1\ldots j_p}(x)| &= \sum_{i_1,\ldots,i_p=1}^{n} \sqrt{T^2_{i_1,\ldots,i_p}(x)} \times \sum_{j_1,\ldots,j_p=1}^{n} \sqrt{T^2_{j_1,\ldots,j_p}(x)} \\
&\leq n^p \sqrt{\sum_{i_1,\ldots,i_p=1}^{n} T^2_{i_1,\ldots,i_p}(x)} \times n^p \sqrt{\sum_{j_1,\ldots,j_p=1}^{n} T^2_{j_1,\ldots,j_p}(x)} \\
&\leq n^{2p}\|T(x)\|^2_\delta.
\end{aligned}$$

Par suite, il existe une constante $C = C(n,p) > 0$ telle que

$$\left|\|T(x)\|^2_{g_{(k)}(x)} - \|T(x)\|^2_\delta\right| \leq C\epsilon\|T(x)\|^2_\delta.$$

D'où (6.1.15).

IIème Étape : On démontre ici l'inégalité (6.1.14).

Pour cela, on fixe $x_k \in M, k = \{1,\ldots,N\}$ comme dans l'étape I. On considère $(\Omega'_k, \exp^{-1}_{x_k}, g)$ la carte exponentielle pour la métrique g et on note $\tilde{g}_{ij}$ les coordonnées de $\tilde{g}$ dans la carte $(\Omega'_k, \exp^{-1}_{x_k}, g)$. Dans cette carte, on a :

$$\begin{aligned}
\|T(x)\|^2_{\tilde{g}(x)} &= g^{i_1j_1}_{(k)} \cdots g^{i_pj_p}_{(k)} T^{(k)}_{i_1,\ldots,i_p}(x)T^{(k)}_{j_1,\ldots,j_p}(x) \\
&\leq C_1 \sum_{i_1,\ldots,i_p=1}^{N} |T^{(k)}_{i_1,\ldots,i_p}(x)|^2 = C_1\|T(x)\|^2_\delta
\end{aligned}$$

où δ est la métrique Euclidienne dans la carte $(\Omega'_k, \exp^{-1}_{x_k}, g)$. Il s'ensuit de l'étape I que

$$\|T(x)\|^2_{\tilde{g}(x)} \leq C_1 \times C_2\|T(x)\|^2_{g(x)}.$$

Les rôles de g et $\tilde{g}$ dans cette étape étant symétrique, il existe donc $B > 0$ telle que

$$B^{-1}\|T\|_g \leq \|T\|_{\tilde{g}} \leq \|T\|_g.$$

D'où (6.1.14). Ceci termine la preuve de ce Théorème. □

6.1.2.3 Équivalence entre distance Riemannienne et normes Euclidiennes

Théorème 6.1.3 *Soient (M, g) une variété Riemannienne complète de dimension n et $x \in M$. On considère une boule exponentielle $(\mathbb{B}_r(x), \exp_x^{-1})$ centrée en x et de rayon $r \in]0, i_g(M)[$. Alors il existe une constante $C = C(M, g) \geq 0$ telle que pour tous $X, Y \in \mathbb{B}_r(0) \subseteq \mathbb{R}^n$, on a :*

$$C^{-1}\|X - Y\|_\delta \leq d_g(\exp_x(X), \exp_x(Y)) \leq C\|X - Y\|_\delta$$

où $\|\cdot\|_\delta$ désigne la norme Euclidienne définie sur $\mathbb{R}^n$.

Preuve du Théorème 6.1.3 : M étant complète donc, d'après le Théorème de Hopf-Rinow, $\overline{\mathbb{B}}_r(x)$, qui est la fermeture de la boule ouverte $\mathbb{B}_r(0)$, est une partie compacte de M. En plus $\overline{\mathbb{B}}_r(x)$, munie de la métrique induite i^*g de g, où i est l'inclusion naturelle de $\overline{\mathbb{B}}_r(x)$ dans M, est une variété Riemannienne compacte. On suppose pour simplifier que $i^*g \equiv g$.

Soit maintenant $X, Y \in \mathbb{B}(0, r)$. On sait que la distance Riemannienne entre $\exp_x(X)$ et $\exp_x(Y)$ est définie par

$$\begin{aligned} d_g(\exp_x(X), \exp_x(Y)) \;:=\; & \inf\{l_g(\tilde{\gamma});\ \tilde{\gamma} : [0,1] \to M \text{ est } C^1 - \text{par morceaux} \\ & \qquad \text{telle que } \tilde{\gamma}(0) = \exp_x(X), \tilde{\gamma}(1) = \exp_x(Y)\}. \end{aligned}$$

Soit γ le chemin C^1-morceaux définie par

$$\begin{aligned} \gamma : [0,1] &\to M \\ t &\mapsto \exp_x((1-t)X + tY). \end{aligned}$$

La boule Euclidienne $\mathbb{B}_r(0)$ étant convexe et $X, Y \in \mathbb{B}_r(0)$ donc pour tout $t \in [0, 1]$, on a $(1-t)X + tY \in \mathbb{B}_r(0)$. Par suite, pour tout $t \in [0, 1]$, on a $\gamma(t) \in \mathbb{B}_r(x)$. D'autre part, on a :

$$\begin{aligned} d_g(\exp_x(X), \exp_x(Y)) \leq l(\gamma) &= \int_0^1 \|\gamma'(t)\|_{g(\gamma(t))} dt \\ &= \int_0^1 \sqrt{g_{ij}(\gamma(t))(\gamma')^i(t)(\gamma')^j(t)} dt \end{aligned}$$

où les γ^i et les g_{ij} désignent respectivement les coordonnées de γ et les composantes de la métrique g dans la carte $(\mathbb{B}_r(x), \exp_x^{-1})$. Il s'ensuit que pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$ on a : $\gamma^i(t) = ((1-t)X + tY)^i$, donc $(\gamma')^i = (Y - X)^i$. D'où il existe une constante $C_1 > 0$ telle que

$$\begin{aligned} d_g(\exp_x(X), \exp_x(Y)) &\leq \int_0^1 \sqrt{g_{ij}(\gamma(t))(Y - X)^i(Y - X)^j} dt \\ &\leq \|X - Y\|_\delta \sup\{\sqrt{|g_{ij}(q)|},\ q \in \overline{\mathbb{B}}_r(x)\} \\ &\leq C_1\|X - Y\|_\delta. \end{aligned} \tag{6.1.18}$$

D'autre part, puisque $X, Y \in \mathbb{B}_r(0)$ donc $\exp_x(X), \exp_x(Y) \in \mathbb{B}_r(x)$ qui est convexe (D'après le Théorème de Whitehead) dans le sens où il existe une unique géodésique minimisante $\gamma : [0,1] \to \mathbb{B}_r(x)$ joingnant $\exp_x(X)$ à $\exp_x(Y)$. Soit alors Γ le chemin défini par

$$\begin{array}{rcl} \Gamma : [0,1] & \to & \mathbb{B}_r(0) \\ t & \mapsto & \exp_x^{-1} \circ \gamma(t). \end{array}$$

Il est clair que Γ est un chemin C^1-par morceaux inclus entièrement dans $\mathbb{B}_r(0)$ et joingnant X à Y. Alors on a :

$$\|X - Y\|_\delta \leq l_g(\Gamma) := \int_0^1 \sqrt{\sum_{i=1}^n (\Gamma^i)'^2(t)dt}$$

où les Γ^i désignent les coordonnées de Γ dans la carte $(\mathbb{B}_r(x), \exp_x^{-1})$. Donc pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, on a que

$$(\Gamma^i)'(t) = \left(\exp_x^{-1}(\gamma(t))^i\right)'(t) = (\gamma^i)'(t)$$

où les γ^i désignent les coordonnées de γ dans la carte $(\mathbb{B}_r(x), \exp_x^{-1})$. La boule fermé $(\overline{\mathbb{B}}_r(x), g)$ étant une variété Riemannienne compacte donc on peut demander que la métrique g sur $\overline{\mathbb{B}}_r(x)$ vérifie

$$C_2^{-1}\delta \leq g \leq C_2\delta$$

où $C_2 > 0$, δ est la métrique Euclidienne définie sur $(\overline{\mathbb{B}}_r(x), g)$ (via la fonction exponentielle : $\delta \equiv (\exp_x^{-1})^*$) et l'inégalité est prise entre formes bilinéaires. Puisque la courbe $\gamma(t)$ est entièrement incluse dans $\overline{\mathbb{B}}_r(x)$ donc, d'après l'inégalité précédente, on a que

$$C_2^{-1}\delta(\gamma'(t), \gamma'(t)) \leq g(\gamma(t))(\gamma'(t), \gamma'(t)) \leq C_2\delta(\gamma'(t), \gamma'(t)).$$

Dans la carte $(\overline{\mathbb{B}}_r(x), \exp_x^{-1})$, ceci est équivalent à dire que

$$\begin{aligned} & C_2^{-1}\delta(d\exp_x^{-1}(\gamma_t) \cdot \gamma'(t), d\exp_x^{-1}(\gamma_t) \cdot \gamma'(t)) \\ & \quad \leq \exp_x^* g(\exp_x^{-1}(\gamma_t))(d\exp_x^{-1}(\gamma_t) \cdot \gamma'(t), d\exp_x^{-1}(\gamma_t) \cdot \gamma'(t)) \\ & \quad \leq C_2\delta(d\exp_x^{-1}(\gamma_t) \cdot \gamma'(t), d\exp_x^{-1}(\gamma_t) \cdot \gamma'(t)) \end{aligned}$$

avec $\gamma_t = \gamma(t)$. Puisque $\Gamma(t) = \exp_x^{-1}(\gamma_t)$ et $\Gamma'(t) = d\exp_x^{-1}(\gamma_t)(\gamma'(t))$, il s'ensuit

$$C_2^{-1}\delta(\Gamma'(t), \Gamma'(t)) \leq \exp_x^* g(\Gamma(t))(\Gamma'(t), \Gamma'(t)) \leq C_2\delta(\Gamma'(t), \Gamma'(t)).$$

D'où

$$\begin{aligned} \|X - Y\|_\delta &\leq \int_0^1 \sqrt{\sum_{i=1}^n (\Gamma^i)'^2(t)dt} \\ &\leq \int_0^1 \sqrt{\delta(\Gamma'(t), \Gamma'(t))}dt \\ &\leq \int_0^1 \sqrt{C_2 \exp_x^* g(\Gamma(t))(\Gamma'(t), \Gamma'(t))}dt \\ &= \int_0^1 \sqrt{C_2(\exp_x^* g)_{ij}(\Gamma(t))\Gamma_i'(t), \Gamma_j'(t))}dt \\ &\leq \sqrt{C_2}\int_0^1 \sqrt{\sum_{i,j=1}^n g_{ij}(\gamma(t))(\gamma^i)'(t)(\gamma^j)'(t)dt} \\ &= \sqrt{C_2}d_g(\exp_x(X), \exp_x(Y)). \end{aligned} \tag{6.1.19}$$

En combinant (6.1.18) et (6.1.19), on tire le résultat demandé.

6.2 Résultats d'Analyse sur les variétés.

Définition 6.2.1 *Étant donné (M,g) une variété Riemannienne compacte de dimension n, k un entier, et $p \geq 1$ un réel, on définit l'espace de Sobolev $H_k^p(M)$ comme étant le complété de $C^\infty(M)$ pour la norme*

$$\|u\|_{H_k^p(M)} = \sum_{j=0}^{k} \left(\int_M |\nabla^j u|^p d\nu_g \right)^{\frac{1}{p}},$$

dv_g désigne la forme volume Riemannienne sur (M,g).

Remarque : L'espace $(H_k^p(M), \|\cdot\|_{H_k^p(M)})$ peut être vu comme étant le sous-espace formé des fonctions $u \in L^p(M)$ qui sont limites d'une suite de Cauchy $(u_m)_m$ dans $(C^\infty(M); \|\cdot\|_{H_k^p(M)})$ pour la norme $\|\cdot\|_p$.

Théorème 6.2.1 *Soient (M,g) une variété Riemannienne compacte de dimension n, k un entier, et $p \geq 1$ un réel. L'espace de Sobolev $(H_k^p(M), \|\cdot\|_{H_k^p(M)})$ est un espace de Banach, réflexif (si $p \neq 1$), séparable et ne dépend pas de point de vue ensembliste de la métrique g.*

Preuve du Théorème 6.2.1 : On procède par étapes.

Ière étape : $H_k^p(M)$ étant le complété de l'espace vectoriel normé $(C^\infty(M); \|\cdot\|_{H_k^p(M)})$, alors $(H_k^p(M), \|\cdot\|_{H_k^p(M)})$ est un espace de Banach.

IIème étape : On démontre dans cette étape le lemme suivant :

Lemme 6.2.1 *Soit M une variété différentiable de dimension n. Soient g et $\tilde{g}$ deux métriques Riemannienne définies sur M, et soient ∇ et $\widetilde{\nabla}$ les connexions de Livi-Civita sur M associées à g et $\tilde{g}$. Soit $u : M \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^∞. Soit k un entier. Alors*

$$\widetilde{\nabla}^k u - \nabla^k u = \sum_{i=0}^{k-1} C^{(k,i)}(T_{(k,i)} \otimes \nabla^i u)$$

où $C^{(k,i)}$ est une contraction et $T_{(k,i)}$ est un tenseur de degré de contravariance non nul et dont les composantes sont en fonctions de $(\partial^{|\alpha|}\Gamma_{rs}^t)_{|\alpha|=0,\dots,k-1}$. Les Γ_{rs}^t (resp. les $\widetilde{\Gamma}_{rs}^t$) sont les symboles de Christoffel de la connexion de Levi-Civita ∇ (resp. $\widetilde{\nabla}$) définie sur (M,g) (resp. sur $(M,\widetilde{g})$).

Preuve du Lemme 6.2.1 : on va démontrer le Lemme par récurrence sur k : Tout d'abord, on définit T comme étant le tenseur ($2-$cov. , $1-$contrav.) sur M de composantes locales

$$T_{ij}^\alpha = -(\widetilde{\Gamma}_{ij}^\alpha - \Gamma_{ij}^\alpha).$$

T est bien un tenseur sur M. En effet, T est définie intrinsèquement comme étant l'application $\mathbb{R}-$trilinéaire suivante :

$$\begin{array}{rcl} T : TM \times TM \times T^*M & \to & \mathbb{R} \\ (X,Y,w) & \to & w\left(\widetilde{\nabla}_X Y - \nabla_X Y\right) \end{array}$$

Il suffit donc de démontrer que T est $C^\infty(M)$-linéaire. Tout d'abord, T est évidement $C^\infty(M)$-linéaire par rapport à w, et puisque ∇ est $C^\infty(M)$-linéaire par rapport à X, donc T l'est encore. Reste à montrer que T est $C^\infty(M)$-linéaire par rapport à Y. Pour cela, soit $(X,Y,w)\in TM\times TM\times T^*M$, et soit $f\in C^\infty(M)$. On a

$$\begin{aligned}
T(X,fY,w) &= w\left(\widetilde{\nabla}_X(fY)-\nabla_X(fY)\right)\\
&= w\left((X\cdot f)Y+f\widetilde{\nabla}_XY-(X\cdot f)Y-f\nabla_XY\right)\\
&= fw\left(\widetilde{\nabla}_XY-\nabla_XY\right)\\
&= fT(X,Y,w).
\end{aligned}$$

D'où T est un tenseur sur M.

Commençons maintenant la récurrence :
Pour $k=1$ **: on a**

$$(\widetilde{\nabla}u)_i-(\nabla u)_i=\partial_iu-\partial_iu=0\cdot\nabla^0u.$$

Pour $k=2$:

$$\begin{aligned}
(\widetilde{\nabla}^2u)_{ij}-(\nabla^2u)_{ij} &= \partial_i\partial_ju-\widetilde{\Gamma}_{ij}^\alpha\partial_\alpha u-\partial_i\partial_ju+\Gamma_{ij}^\beta\partial_\beta u\\
&= -(\widetilde{\Gamma}_{ij}^\alpha-\Gamma_{ij}^\alpha)\partial_\alpha u.
\end{aligned}$$

On constate que

$$\widetilde{\nabla}^2u-\nabla^2u=C_1^1\left(T\otimes\nabla u\right).$$

Pour $k=3$: En effet,

$$\begin{aligned}
\widetilde{\nabla}^3u-\nabla^3u &= \widetilde{\nabla}(\widetilde{\nabla}^2u)-\nabla(\nabla^2u)\\
&= \widetilde{\nabla}(\widetilde{\nabla}^2u)-\widetilde{\nabla}(\nabla^2u)+\widetilde{\nabla}(\nabla^2u)-\nabla(\nabla^2u)\\
&= \widetilde{\nabla}(\widetilde{\nabla}^2u-\nabla^2u)+\{\widetilde{\nabla}(\nabla^2u)-\nabla(\nabla^2u)\}.
\end{aligned}$$

Explicitons les deux derniers termes :
On a, d'après le cas $k=2$, que

$$\begin{aligned}
\widetilde{\nabla}(\widetilde{\nabla}^2u-\nabla^2u) &= \widetilde{\nabla}(C_1^1T\otimes\nabla u)\\
&= C_1^1\widetilde{\nabla}(T\otimes\nabla u)\\
&= C_1^1(\widetilde{\nabla}T\otimes\nabla u)+C_1^1(T\otimes\widetilde{\nabla}\nabla u)\\
&= C_1^1(\widetilde{\nabla}T\otimes\nabla u)+C_1^1(T\otimes\nabla^2u)+C_1^1[T\otimes(\widetilde{\nabla}-\nabla)(\nabla u)].
\end{aligned}$$

Mais on a, pour tout i,

$$\begin{aligned}
(\widetilde{\nabla}_i-\nabla_i)(\nabla u)_j &= -(\widetilde{\Gamma}_{ij}^\alpha-\Gamma_{ij}^\alpha)(\nabla u)_\alpha\\
&= T_{ij}^\alpha(\nabla u)_\alpha,
\end{aligned}$$

donc

$$(\widetilde{\nabla}-\nabla)(\nabla u)=C_1^1(T\otimes\nabla u).$$

par suite,

$$\widetilde{\nabla}(\widetilde{\nabla}^2 u-\nabla^2 u)=C_1^1(\widetilde{\nabla}T\otimes\nabla u)+C_1^1(T\otimes\nabla^2 u)+C_1^1\left(C_1^1(T\otimes\nabla u)\right)\tag{6.2.20}$$

avec $T'=C_1^1\left(C_1^1(T\otimes\nabla u)\right)$ est un tenseur $2-$ cov. de composantes locales $T'_{ij}=T_{ik}^{\beta}\cdot T_{j\beta}^{\alpha}\cdot(\nabla u)_\alpha$. D'autre part on a, pour tout i,

$$\{\widetilde{\nabla}_i(\nabla^2 u)-\nabla_i(\nabla^2 u)\}_{jk}=\{-(\widetilde{\Gamma}_{ij}^{\alpha}-\Gamma_{ij}^{\alpha})(\nabla^2 u)_{\alpha k}-(\widetilde{\Gamma}_{ik}^{\alpha}-\Gamma_{ik}^{\alpha})(\nabla^2 u)_{j\alpha}\}.$$

Donc

$$\widetilde{\nabla}(\widetilde{\nabla}^2 u-\nabla^2 u)=C_1^1(T\otimes\nabla^2 u)+C_2^1(T\otimes\nabla^2 u).\tag{6.2.21}$$

Et le résultat est démontré en combinant 6.2.20 avec 6.2.21.
Démontrons maintenant le théorème **par récurrence** : On a démontré que le résultat est vrai pour $k=2,3$. Supposons que c'est vrai pour k, et démontrons-le pour $k+1$. En effet, le théorème est vrai pour k, i.e.

$$\widetilde{\nabla}^k u-\nabla^k u=\sum_{i=1}^{k-1}C^{(k,i)}\left(T_{(k,i)}\otimes\nabla^i u\right),$$

où $C^{(k,i)}$ est une contraction d'un tenseur $T_{(k,i)}$ de degré de contravariance non nul avec $\nabla^i u$. D'autre part, on a

$$\begin{aligned}
\widetilde{\nabla}^{k+1}u-\nabla^{k+1}u &= \widetilde{\nabla}(\widetilde{\nabla}^k u)-\nabla(\nabla^k u)\\
&= \widetilde{\nabla}(\widetilde{\nabla}^k u)-\widetilde{\nabla}(\nabla^k u)+\widetilde{\nabla}(\nabla^k u)-\nabla(\nabla^k u)\\
&= \widetilde{\nabla}(\widetilde{\nabla}^k u-\nabla^k u)+\{\widetilde{\nabla}(\nabla^k u)-\nabla(\nabla^k u)\}.
\end{aligned}$$

Explicitons les deux derniers termes : On a, d'après l'hypothèse de récurrence, que

$$\begin{aligned}
\widetilde{\nabla}(\widetilde{\nabla}^k u-\nabla^k u) &= \widetilde{\nabla}\left(\sum_{i=1}^{k-1}C^{(k,i)}(T_{(k,i)}\otimes\nabla^i u)\right)\\
&= \sum_{i=1}^{k-1}C^{(k,i)}\widetilde{\nabla}(T_{(k,i)}\otimes\nabla^i u)\\
&= \sum_{i=1}^{k-1}C^{(k,i)}(\widetilde{\nabla}T_{(k,i)}\otimes\nabla^i u)+\sum_{i=1}^{k-1}C^{(k,i)}(T_{(k,i)}\otimes\widetilde{\nabla}\nabla^i u).
\end{aligned}$$

Sachant que

$$\widetilde{\nabla}(\nabla^i u)=(\widetilde{\nabla}-\nabla)(\nabla^i u)+\nabla^{i+1}u$$

on obtient

$$\begin{aligned}
\widetilde{\nabla}(\widetilde{\nabla}^k u-\nabla^k u) &= \sum_{i=1}^{k-1}C^{(k,i)}(\widetilde{\nabla}T_{(k,i)}\otimes\nabla^i u)+\sum_{i=1}^{k-1}C^{(k,i)}(T_{(k,i)}\otimes\nabla^{i+1}u)\\
&\quad+\sum_{i=1}^{k-1}C^{(k,i)}[T_{(k,i)}\otimes(\widetilde{\nabla}-\nabla)(\nabla^i u)],
\end{aligned}$$

$\nabla^i u$ étant un tenseur i-covariant, il s'ensuit pour tout $s \in \{1, \ldots, n\}$ que

$$(\widetilde{\nabla}_s - \nabla_s)(\nabla^i u)_{m_1 \ldots m_i} = \sum_{l=1}^{i} -(\widetilde{\Gamma}^{\alpha}_{sm_l} - \Gamma^{\alpha}_{sm_l}) \cdot (\nabla^i u)_{m_1 \ldots m_{l-1} \alpha m_{l+1} \ldots m_i}$$

Donc

$$(\widetilde{\nabla} - \nabla)(\nabla^i u) = \sum_{l=1}^{i} C_l^1 (T \otimes \nabla^l u).$$

D'où

$$\begin{aligned}\widetilde{\nabla}(\widetilde{\nabla}^k u - \nabla^k u) &= \sum_{i=1}^{k-1} C^{(k,i)}(\widetilde{\nabla} T_{(k,i)} \otimes \nabla^i u) + \sum_{i=1}^{k-1} C^{(k,i)}(T_{(k,i)} \otimes \nabla^{i+1} u) \\ &+ \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{l=1}^{i} C^{(k,i)} \left(T_{(k,i)} \otimes C_l^1 (T \otimes \nabla^l u) \right). \qquad (6.2.22)\end{aligned}$$

D'autre part, on a pour tout $s \in \{1, \ldots, n\}$ que

$$\widetilde{\nabla}_s (\nabla^k u)_{m_1 \ldots m_k} - \nabla_s (\nabla^k u)_{m_1 \ldots m_k} = \sum_{l=1}^{k} -(\widetilde{\Gamma}^{\alpha}_{sm_l} - \Gamma^{\alpha}_{sm_l}) \cdot (\nabla^i u)_{m_1 \ldots m_{l-1} \alpha m_{l+1} \ldots m_i}.$$

D'où

$$\widetilde{\nabla}(\nabla^k u) - \nabla(\nabla^k u) = \sum_{l=1}^{k} C_1^l (T \otimes \nabla^l u). \qquad (6.2.23)$$

le résultat est démontré en combinant (6.2.22) avec (6.2.23). Ceci termine la preuve du Lemme (6.2.1) et achève la 2ème étape.

IIIème étape : On démontre que L'espace de Sobolev $(H_k^p(M), \| \cdot \|_{H_k^p(M)})$ ne dépend pas, d'un point de vue ensembliste, de la métrique Riemannienne choisie.

En effet, soient g et $\tilde{g}$ deux métriques Riemannienne sur M et ∇ (resp. $\widetilde{\nabla}$) la connexion de Levi-Civita associée à g (resp. à $\tilde{g}$). Démontrer que l'espace $(H_k^p(M), \| \cdot \|_{H_k^p(M)})$ ne dépend pas des métriques g et $\tilde{g}$ revient à démontrer que $H_k^p(M, g) = H_k^p(M, \tilde{g})$, i.e. les deux normes $\| \cdot \|_{H_k^p(M,g)}$ et $\| \cdot \|_{H_k^p(M,\tilde{g})}$ sont équivalentes.

Puisque M est compact, donc g et $\tilde{g}$ sont équivalentes, i.e. Il existe, d'après le Théorème 6.1.1, un réel $c > 1$ tel que

$$c^{-1} \cdot \tilde{g} \leq g \leq c \cdot \tilde{g}$$

où cette inégalité doit être comprise en tant qu'inégalité entre formes bilinéaires. Soit $x \in M$. Il existe alors un voisinage ouvert $\mathcal{U}_x$ normale en x. Par suite, il existe une base $(v_1, \cdots, v_n)$ de $T_x M$ telle que dans cette base on a $Mat(\tilde{g}) = I_n$ et $Mat(g) = diag(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ avec pour tout i,

$$c^{-1} \leq \lambda_i \leq c.$$

D'autre part, et puisqu'on a

$$c^{-1} \leq \lambda_i \leq c$$

donc on a dans la base $(v_1, \cdots, v_n)$ de T_xM que

$$\sqrt{|\tilde{g}_x|} = 1$$

et

$$\sqrt{|g_x|} = \sqrt{\lambda_1 \cdots \lambda_n} \in [c^{\frac{-n}{2}}, c^{\frac{n}{2}}]$$

Si on change maintenant la carte voisinage de x, et on considère une autre base $(v'_1, \cdots, v'_n)$ de l'espace tangent T_xM obtient que

$$\sqrt{|\tilde{g}_x|_{(v'_i)_i}} = \sqrt{|{}^tP \cdot \tilde{g}_x \cdot P|} = |P| \cdot \sqrt{|\tilde{g}_x|_{(v_i)_i}}$$

et, de même,

$$\sqrt{|g_x|_{(v'_i)_i}} = |P| \cdot \sqrt{|g_x|_{(v_i)_i}}$$

où P est la matrice de passage de $(v_i)_i$ à $(v'_i)_i$. donc $\frac{\sqrt{|\tilde{g}_x|}}{\sqrt{|g_x|}}$ ne dépend pas de la carte. Et par suite, l'inégalité

$$c^{-1} \cdot \tilde{g}_x \leq g_x \leq c \cdot \tilde{g}_x$$

implique que

$$c^{\frac{-n}{2}} \cdot d\nu_{\tilde{g}}(x) \leq d\nu_g(x) \leq c^{\frac{n}{2}} \cdot d\nu_{\tilde{g}}(x) \tag{6.2.24}$$

est vraie indépendament du choix de la carte en x. Par suite, elle est vraie partout dans M indépendament du choix des cartes. Démontrons maintenant, **par récurrence** sur k que : Les deux normes $\|\cdot\|_{H_k^p(M,g)}$ et $\|\cdot\|_{H_k^p(M,\tilde{g})}$ définies sur l'espace $H_k^p(M)$ sont équivalentes.

Pour $\mathbf{k = 1}$: Soit $u \in H_1^p(M, g)$. Le gradient de u ne dépend pas de la métrique, i.e. $\widetilde{\nabla} u = \nabla u$. On a donc

$$\begin{aligned} |\widetilde{\nabla} u|_{\tilde{g}} &= |\nabla u|_{\tilde{g}} \\ &= <\nabla u, \nabla u>_{\tilde{g}}^{\frac{1}{2}} \\ &\leq c^{\frac{1}{2}} <\nabla u, \nabla u>_{g}^{\frac{1}{2}} \\ &= c^{\frac{1}{2}} |\nabla u|_g. \end{aligned}$$

Par suite, en utilisant l'inégalité (6.2.24), on aura

$$\begin{aligned} \|u\|_{H_1^p(M,\tilde{g})} &= \left(\int_M |u|^p d\nu_{\tilde{g}}\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_M |\widetilde{\nabla} u|_{\tilde{g}}^p d\nu_{\tilde{g}}\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq c^{\frac{n}{2p}} \left(\int_M |u|^p d\nu_g\right)^{\frac{1}{p}} + c^{\frac{n}{2p}} c^{\frac{1}{2}} \left(\int_M |\nabla u|^p d\nu_g\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq c^{\frac{n}{2p}} (c^{\frac{1}{2}} + 1) \|u\|_{H_1^p(M,g)} \\ &< +\infty \end{aligned}$$

Donc $u \in H_1^p(M, \tilde{g})$ et

$$H_1^p(M, g) \subseteq H_1^p(M, \tilde{g}).$$

De même, si $u \in H_1^p(M,\tilde{g})$, alors

$$\|u\|_{H_1^p(M,g)} \leq c^{\frac{n}{2p}}(c^{\frac{1}{2}}+1)\|u\|_{H_1^p(M,\tilde{g})}.$$

Donc $u \in H_1^p(M,g)$, et

$$H_1^p(M,\tilde{g}) \subseteq H_1^p(M,g).$$

Par suite,

$$H_1^p(M,\tilde{g}) = H_1^p(M,g),$$

et en posant $\tilde{G}_{(1)} = c^{\frac{n}{2p}}(\sqrt{c}+1)$, on a encore

$$\tilde{G}_{(1)}^{-1}\|\cdot\|_{H_1^p(M,\tilde{g})} \leq \|\cdot\|_{H_1^p(M,g)} \leq \tilde{G}_{(1)}\|\cdot\|_{H_1^p(M,\tilde{g})}.$$

On déduit que la proposition est vraie pour $k=1$. Supposons maintenant que la proposition est vraie pour k, et démontrons-la pour $k+1$. En effet, la proposition est vraie pour k, i.e.

$$H_k^p(M,g) = H_k^p(M,\tilde{g})$$

i.e. il existe $\tilde{G}_{(k)} > 1$ tel que

$$\tilde{G}_{(k)}^{-1}\|\cdot\|_{H_k^p(M,\tilde{g})} \leq \|\cdot\|_{H_k^p(M,g)} \leq \tilde{G}_{(k)}\|\cdot\|_{H_k^p(M,\tilde{g})}. \tag{6.2.25}$$

Pour tout $u \in C^\infty(M)$ On a

$$\begin{aligned}
\|u\|_{H_{k+1}^p(M,\tilde{g})} &= \sum_{i=0}^{k+1}\|\widetilde{\nabla}^i u\|_{L^p(M,\tilde{g})} \\
&= \|u\|_{H_k^p(M,\tilde{g})} + \|\widetilde{\nabla}^{k+1}u\|_{L^p(M,\tilde{g})} \\
&\leq \tilde{G}_{(k)}\|u\|_{H_k^p(M,g)} + \|\widetilde{\nabla}^{k+1}u\|_{L^p(M,\tilde{g})}.
\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}
\|\widetilde{\nabla}^{k+1}u\|_{L^p(M,\tilde{g})} &\leq \|\widetilde{\nabla}^{k+1}u - \nabla^{k+1}u\|_{L^p(M,\tilde{g})} + \|\nabla^{k+1}u\|_{L^p(M,\tilde{g})} \\
&= \|\sum_{i=0}^{k} C^{(k,i)}\left(T_{(k,i)}\otimes\nabla^i u\right)\|_{L^p(M,\tilde{g})} + \|\nabla^{k+1}u\|_{L^p(M,\tilde{g})} \\
&\leq \sum_{i=0}^{k}\|C^{(k,i)}\left(T_{(k,i)}\otimes\nabla^i u\right)\|_{L^p(M,\tilde{g})} + \|\nabla^{k+1}u\|_{L^p(M,\tilde{g})} \\
&= \sum_{i=0}^{k}\left(\int_M \left|C^{(k,i)}(T_{(k,i)}\otimes\nabla^i u)\right|_{\tilde{g}}^p d\nu_{\tilde{g}}\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_M |\nabla^{k+1}u|_{\tilde{g}}^p d\nu_{\tilde{g}}\right)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

Puisque M est compact, alors pour tout $i=0,\ldots,k$, il existe $L^{(k,i)} > 0$ indépendament de u tels que

$$\left|C^{(k,i)}(T_{(k,i)}\otimes\nabla^i u)\right|_{\tilde{g}} \leq L^{(k,i)}|\nabla^i u|_{\tilde{g}}$$

et d'après le lemme!! il existe, pour tout $i=0,\ldots,k+1$, $\breve{L}^{(i)} > 0$ indépendament de u tels que

$$|\nabla^i u|_{\tilde{g}} \leq \breve{L}^{(i)}|\nabla^i u|_g$$

Donc

$$\begin{aligned}\|\widetilde{\nabla}^{k+1}u\|_{L^p(M,\tilde{g})} &\leq \sum_{i=0}^{k}(L^{(k,i)}\breve{L}^{(i)})\left(\int_M |\nabla^i u|_g^p d\nu_{\tilde{g}}\right)^{\frac{1}{p}} + \breve{L}^{(k+1)})\left(\int_M |\nabla^{k+1}u|_g^p d\nu_{\tilde{g}}\right)^{\frac{1}{p}}\\ &\leq \breve{L'}^{(k)}\sum_{i=0}^{k}\left(\int_M |\nabla^i u|_g^p d\nu_{\tilde{g}}\right)^{\frac{1}{p}} + \breve{L}^{(k+1)})\left(\int_M |\nabla^{k+1}u|_g^p d\nu_{\tilde{g}}\right)^{\frac{1}{p}},\end{aligned}$$

avec $\breve{L'}^{(k)} = \max_{i=0}^{k}\{L^{(k,i)}\breve{L}^{(i)}\}$. Donc l'inégalité (6.2.24) donne

$$\begin{aligned}\|\widetilde{\nabla}^{k+1}u\|_{L^p(M,\tilde{g})} &\leq \breve{L'}^{(k)}c^{\frac{n}{2p}}\sum_{i=0}^{k}\left(\int_M |\nabla^i u|_g^p d\nu_g\right)^{\frac{1}{p}} + \breve{L}^{(k+1)}c^{\frac{n}{2p}}\left(\int_M |\nabla^{k+1}u|_g^p d\nu_g\right)^{\frac{1}{p}}\\ &= \breve{L'}^{(k)}\tilde{G}_{(1)}\|u\|_{H_k^p(M,g)} + \breve{L}^{(k+1)}\tilde{G}_{(1)}\|\nabla^{k+1}u\|_{L^p(M,g)}.\end{aligned}$$

Par suite,

$$\begin{aligned}\|u\|_{H_{k+1}^p(M,\tilde{g})} &\leq \left(\tilde{G}_{(k)} + \breve{L'}^{(k)}\tilde{G}_{(1)}\right)\|u\|_{H_k^p(M,g)} + \breve{L}^{(k+1)}\tilde{G}_{(1)}\|\nabla^{k+1}u\|_{L^p(M,g)}\\ &\leq \tilde{G'}_{(k+1)}\|u\|_{H_{k+1}^p(M,g)}\end{aligned}$$

avec $\tilde{G'}_{(k+1)} = \max\{\tilde{G}_{(k)} + \breve{L'}^{(k)}\tilde{G}_{(1)}; \breve{L}^{(k+1)}\tilde{G}_{(1)}\}$. De même, on démontre qu'il existe $\tilde{G''}_{(k+1)} > 1$ tel que

$$\|u\|_{H_{k+1}^p(M,g)} \leq \tilde{G''}_{(k+1)}\|u\|_{H_{k+1}^p(M,\tilde{g})}.$$

En posant que $\tilde{G}_{(k+1)} = max\{\tilde{G'}_{(k+1)}, \tilde{G''}_{(k+1)}\}$ On déduit que pour tout $u \in C^\infty(M)$, on a

$$\tilde{G}_{(k+1)}^{-1}\|u\|_{H_{k+1}^p(M,\tilde{g})} \leq \|u\|_{H_{k+1}^p(M,g)} \leq \tilde{G}_{(k+1)}\|u\|_{H_{k+1}^p(M,\tilde{g})}. \qquad (6.2.26)$$

Montrons finalement que $H_{k+1}^p(M,\tilde{g}) = H_{k+1}^p(M,g)$.
Pour cela, on prend $u \in H_{k+1}^p(M,\tilde{g})$. Il existe alors une suite de Cauchy $(v_i)_{i\in\mathbb{N}}$ dans $C^\infty(M)$ pour la norme $\|\cdot\|_{H_{k+1}^p(M,\tilde{g})}$ qui converge à l'infini vers u dans $L^p(M,\tilde{g})$. On a, d'après l'inégalité 6.2.26, que pour tous entiers $1 < s < s'$,

$$\|v_{s'} - v_s\|_{H_{k+1}^p(M,g)} \leq \tilde{G}_{(k+1)}\|v_{s'} - v_s\|_{H_{k+1}^p(M,\tilde{g})}.$$

Puisque la suite $(v_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans l'espace $H_{k+1}^p(M,\tilde{g})$, donc pour tout $\epsilon > 0$, il existe $s_0 = s_0(\epsilon) \in \mathbb{N}$, tel que pour tous entiers $s_0 < s < s'$, on a $\|v_{s'} - v_s\|_{H_{k+1}^p(M,\tilde{g})} < \frac{\epsilon}{\tilde{G}_{(k+1)}}$, et par suite $\|v_{s'} - v_s\|_{H_{k+1}^p(M,g)} \leq \epsilon$. D'où la suite $(v_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est encore de Cauchy pour la norme $\|\cdot\|_{H_{k+1}^p(M,g)}$. On a encore

$$\begin{aligned}\|u - v_i\|_{L^p(M,g)} &= \left(\int_M |u - v_i|^p d\nu_g\right)^{\frac{1}{p}}\\ &\leq c^{\frac{n}{2p}}\left(\int_M |u - v_i|^p d\nu_{\tilde{g}}\right)^{\frac{1}{p}}\\ &= c^{\frac{n}{2p}}\|u - v_i\|_{L^p(M,\tilde{g})}\\ &\xrightarrow{i\to+\infty} 0.\end{aligned}$$

On déduit que u est la limite dans $L^p(M,g)$ de la suite de Cauchy $(v_i)_{i\in\mathbb{N}}$ dans l'espace $H^p_{k+1}(M,g)$. Par suite $u\in H^p_{k+1}(M,g)$. D'où

$$H^p_{k+1}(M,\tilde{g})\subseteq H^p_{k+1}(M,g).$$

De la même façon on démontre que

$$H^p_{k+1}(M,g)\subseteq H^p_{k+1}(M,\tilde{g}).$$

D'où l'égalité

$$H^p_{k+1}(M,\tilde{g})=H^p_{k+1}(M,g),$$

et l'inégalité (vraie dans l'espace $H^p_{k+1}(M,g)$ tout entier)

$$\tilde{G}^{-1}_{(k+1)}\|\cdot\|_{H^p_{k+1}(M,\tilde{g})}\leq\|\cdot\|_{H^p_{k+1}(M,g)}\leq\tilde{G}_{(k+1)}\|\cdot\|_{H^p_{k+1}(M,\tilde{g})}.$$

IVème étape : On démontre dans cette étape le lemme suivant :

Lemme 6.2.2 *Soient* $u\in H^p_k(M)$, (U,x) *une carte de* M*, et* Ω *un ouvert de* M *fortement inclu dans* U*. Étant donné* α *un multi-indice de longueur* $|\alpha|$*, Alors*

$$\mathrm{D}_\alpha(u\circ x^{-1})\in L^p(\overline{\Omega}).$$

Preuve du Lemme 6.2.2 : Soit $u\in H^p_k(M)$, alors il existe $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $C^\infty(M)$ telle que

$$(u_m)_m\xrightarrow{m\to+\infty}u\quad\text{dans}\,H^p_k(M)$$

alors $(\nabla^{|\alpha|}u_m)_m$ est une suite de Cauchy dans $L^p(M)$. D'autre part, dans une carte $(\Omega,x),x=(x^1,\ldots,x^n)$ quelquonque, on a

$$\mathrm{D}_\alpha(u_m\circ x^{-1})=\frac{\partial}{\partial x_{\alpha_1}}\cdots\frac{\partial}{\partial x_{\alpha_k}}(u_m\circ x^{-1})$$

et dans une carte normale $y=(y^1,\ldots,y^n)$, on a

$$|\nabla^k(u_m\circ y^{-1})|^2=\sum_{i_1,\ldots,i_k}\left(\frac{\partial}{\partial y_{i_1}}\cdots\frac{\partial}{\partial y_{i_k}}(u_m\circ y^{-1})\right)$$

alors

$$\begin{aligned}|\mathrm{D}_\alpha(u_m\circ x^{-1})|^2 &= |\frac{\partial}{\partial x_{\alpha_1}}\cdots\frac{\partial}{\partial x_{\alpha_k}}(u_m\circ x^{-1})|^2\\ &\leq C\cdot\frac{\partial}{\partial y_{i_1}}\cdots\frac{\partial}{\partial y_{i_k}}(u_m\circ y^{-1})\\ &\leq C\cdot|\nabla^k(u_m\circ y^{-1})|^2\end{aligned}$$

où $C=\sup\left\{g(\frac{\partial}{\partial x_{i_1}},\frac{\partial}{\partial x_{i_1}})\cdots g(\frac{\partial}{\partial x_{i_k}},\frac{\partial}{\partial x_{i_k}})\right\}$. Donc $(\mathrm{D}_\alpha(u_m\circ x^{-1}))_{m\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $L^p(\Omega)$ qui est un espace de Banach, donc il existe $\overline{\mathrm{D}_\alpha(u\circ x^{-1})}$ telle que

$$\lim_{m\to+\infty}(\mathrm{D}_\alpha(u_m\circ x^{-1}))_m=\overline{\mathrm{D}_\alpha(u\circ x^{-1})}\quad\text{dans}\,L^p(\Omega)$$

Soit $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$, alors

$$\begin{aligned}
< \mathrm{D}_\alpha(u \circ x^{-1}), \phi > &= (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u \cdot \mathrm{D}_\alpha(\phi\sqrt{|g|})dx \\
&= (-1)^{|\alpha|} \lim_{m \to +\infty} \int_\Omega u_m \cdot \mathrm{D}_\alpha(\phi\sqrt{|g|})dx \\
&= \lim_{m \to +\infty} \int_\Omega (\mathrm{D}_\alpha(u_m \circ x^{-1})) \cdot \phi\sqrt{|g|}dx
\end{aligned}$$

or

$$(\mathrm{D}_\alpha(u_m \circ x^{-1}))_m \xrightarrow{m\to+\infty} \overline{\mathrm{D}_\alpha(u \circ x^{-1})} \quad \text{dans } L^p(\Omega)$$

alors

$$< \mathrm{D}_\alpha(u \circ x^{-1}), \phi >= \int_\Omega \overline{\mathrm{D}_\alpha(u \circ x^{-1})}\phi\sqrt{|g|}dx$$

par suite

$$\mathrm{D}_\alpha(u \circ x^{-1}) = \overline{\mathrm{D}_\alpha(u \circ x^{-1})}.$$

D'où le résultat.

Vème étape : On démontre l'espace de Sobolev $(H_k^p(M), \|\cdot\|_{H_k^p(M)})$ est réflexif.

En effet, soit $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ une suite bornée dans , et on veut montrer qu'il existe une sous-suite qui converge faiblement. Soit $(\Omega_k, \phi_k)_{k=1,\dots,N}$ un recouvrement fini de M par des cartes telles que pour tout k, les composantes g_{ij}^k de g vérifient

$$\frac{1}{2}\delta_{ij} \leq g_{ij}^k \leq 2\delta_{ij}$$

en tant que formes bilinéaires. Et soit $(\eta_k)_{k=1,\dots,N}$ une partition de l'unité subordonnée au recouvrement $(\Omega_k)_k$. On fixe $i \in \{1,\dots,N\}$, $(\eta_i u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ est à support compact, bornée dans $H_k^p(\Omega_i)$, donc et pour tout α un multi-indice tel que $|\alpha| \leq k$, on a $\left(\mathrm{D}_\alpha(\eta_i u_m \circ \phi_i^{-1})\right)_{m\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée dans $L^p(\phi_i(\Omega_i))$ qui est réflexif, donc il existe $\overline{\mathrm{D}_\alpha u_i} \in L^p(\phi_i(\Omega_i))$ telle que

$$\left(\mathrm{D}_\alpha(\eta_i u_m \circ \phi_i^{-1}))\right)_m \xrightarrow{m\to+\infty} \overline{\mathrm{D}_\alpha u_i} \quad \text{faiblement dans } L^p$$

où $u_i = \overline{\mathrm{D}_\alpha(u_i \circ \phi_i^{-1})}$. Soit maintenant $\phi \in C_c^\infty(M)$, alors

$$\begin{aligned}
< \mathrm{D}_\alpha u_i, \phi > &= (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega_i} u_i \cdot \mathrm{D}_\alpha(\phi\sqrt{|g|})dx \\
&= (-1)^{|\alpha|} \lim_{m \to +\infty} \int_{\Omega_i} (\eta_i u_m \circ \phi_i^{-1}) \cdot \mathrm{D}_\alpha(\phi\sqrt{|g|})dx \\
&= \lim_{m \to +\infty} \int_{\Omega_i} (\mathrm{D}_\alpha(\eta_i u_m \circ \phi_i^{-1})) \cdot \phi\sqrt{|g|}dx \\
&= \int_{\Omega_i} \overline{\mathrm{D}_\alpha u_i}\phi\sqrt{|g|}dx
\end{aligned}$$

Donc

$$\mathrm{D}_\alpha u_i = \overline{\mathrm{D}_\alpha u_i}$$

Soit $\phi \in C_c^\infty(\Omega_i \backslash supp(\eta_i))$, alors

$$\int_{\Omega_i} u_i \phi = \lim_{m \to +\infty} \int_{\Omega_i} (\eta_i u_m \circ \phi_i^{-1})\phi = 0$$

alors

$$supp(u_i) \subset supp(\eta_i)$$

On remarque que $u_i \in L^p$ et donc on pose $u = \sum_{i=1}^N u_i$. Il faut montrer que $((\eta_i u_m \circ \phi_i^{-1}))_{m\in\mathbb{N}} \xrightarrow{m\to+\infty} u_i$ faiblement dans $H_k^p(\Omega_i)$. Pour cela, soit $\beta \in H_k^p(M)^* \subset H_k^p(\Omega_i)^*$, et on veut montrer que $\left(\beta(\eta_i u_m \circ \phi_i^{-1})\right)_{m\in\mathbb{N}} \xrightarrow{m\to+\infty} \beta(u_i)$ **ou alors** que que toute forme linéaire β sur $H_k^p(M)$ est de la forme

$$\beta(u) = \sum_{0\le|\alpha|\le k} \beta_\alpha(\mathrm{D}_\alpha v)$$

On pose alors

$$\begin{array}{rcl} P : H_{k,0}^p(\Omega_i) := \{u \in H_k^p(M) : \ supp(u) \subset \Omega_i\} & \longrightarrow & \left(L^p(\Omega_i)\right)^N \\ u & \longrightarrow & (\mathrm{D}_\alpha(u \circ \phi_i^{-1}))_{0\le|\alpha|\le k} \end{array}$$

où N est le nombre de multi-indice de longueur $\le k$. Sur l'image de P, on peut définir

$$\beta^*(Pu) = \beta(u)$$

alors β^* est une forme linéaire sur un sous-espace de $\left(L^p(\Omega_i)\right)^N$. Par le théorème de Hahn-Banach, on peut prolonger β^* sur $\left(L^p(\Omega_i)\right)^N$ tout entier (prolongement que l'on notera de la même manière), alors

$$\beta^* = \sum_{0\le|\alpha|\le k} \beta_\alpha^*$$

avec

$$\beta^*(\eta_i u_m \circ \phi_i^{-1}) = \beta(\eta_i u_m \circ \phi_i^{-1}) = \sum_{0\le|\alpha|\le k} \beta_\alpha\left(\mathrm{D}_\alpha(\eta_i u_m \circ \phi_i^{-1})\right)$$

Or

$$\left(\mathrm{D}_\alpha(\eta_i u_m \circ \phi_i^{-1})\right)_{m\in\mathbb{N}} \xrightarrow{m\to+\infty} \mathrm{D}_\alpha u_i \quad \text{faiblement dans } \mathrm{L^p(\Omega_i)}$$

alors

$$\left(\beta^*(\eta_i u_m \circ \phi_i^{-1})\right)_{m\in\mathbb{N}} \xrightarrow{m\to+\infty} \beta^*(Pu_i) = \beta(u_i)$$

donc

$$(\eta_i u_m \circ \phi_i^{-1})_{m\in\mathbb{N}} \xrightarrow{m\to+\infty} u_i \quad \text{faiblement dans } H_k^p(M)$$

alors

$$\sum_{i=1}^N (\eta_i u_m \circ \phi_i^{-1})_{m\in\mathbb{N}} \xrightarrow{m\to+\infty} \sum_{i=1}^N u_i$$

par suite, $(u_m \circ \phi_i^{-1})_{m\in\mathbb{N}} \xrightarrow{m\to+\infty} u$ faiblement. D'où le résultat.

VIème étape : On démontre l'espace de Sobolev $(H_k^p(M), \|\cdot\|_{H_k^p(M)})$ est séparable.

On démontre cette proposition dans le cas où $k = 1$, i.e. $(H_1^p(M), \|\cdot\|_{H_1^p(M)})$ est séparable. M étant compacte donc elle est recouverte par un nombre fini des cartes. On considère

$(\Omega_m, \phi_m)_{m=1,\dots,N}$ une famille finie de cartes telle que $M \subset \cup_{m=1}^N \Omega_m$. On pose pour tout $k \in \{1, \dots, N\}$, $\omega_k = \phi_k(\Omega_k)$, g^k la métrique Riemannienne définie sur Ω_k, dx_k et δ^k sont respectivement la mesure de Lebesgue et la métrique euclidienne définies sur ω_k. On considère de plus $(\lambda_k)_{k=1,\dots,N}$ une partition de l'unité subordonnée au recouvrement $(\Omega_k)_{k=1,\dots,N}$.

Soit $u \in H_1^p(M)$. Soit $k \in \{1, \dots, N\}$. On sait que $(H_1^p(\omega_k), \| \cdot \|_{H_1^p(\omega_k)})$ est séparable. Donc il existe une suite $(v_{m^k}^k)_{m^k \in \mathbb{N}}$ qui est partout dense dans $(H_1^p(\omega_k), \| \cdot \|_{H_1^p(\omega_k)})$. Puisque $u \circ \phi_k^{-1} \in H_1^p(\omega_k)$, il existe une sous-suite $(v_{m_s^k}^k)_{s \in \mathbb{N}}$ de $(v_{m^k}^k)$ telle que

$$\|(u \circ \phi_k^{-1}) - v_{m_s^k}^k\|_{H_1^p(\omega_k)} \xrightarrow{s \to +\infty} 0.$$

Soit, pour tout $s \in \mathbb{N}$, la fonction v_s^k sur M par

$$\begin{aligned} v_{s|\Omega_k}^k &= \lambda_k \cdot (v_{m_s^k}^k \circ \phi_k) \\ v_{s|\Omega_k^c}^k &\equiv 0. \end{aligned}$$

Rappelons que $(\lambda_k)_{k=1,\dots,N}$ est la partition de l'unité correspondante à $(\Omega_k)_{k=1,\dots,N}$. On définit maintenant, pour tout $s \in \mathbb{N}$, la fonction u_s par

$$u_s = \Sigma_{k=1}^N v_s^k.$$

Pour tout $s \in \mathbb{N}$ on a que $v_{m_s^k}^k \in H_1^p(\omega_k)$, donc $v_{m_s^k}^k \circ \phi_k$ est dans $H_1^p(\Omega_k)$. Sachant que λ_k est dans $C_c^\infty(\Omega_k)$ donc $v_s^k \in H_1^p(M)$, et par suite $u_s \in H_1^p(M)$ pour tout $s \in \mathbb{N}$.

on va démontrer que

$$\begin{aligned} \|u_s - u\|_{H_1^p(M)} &= \|u_s - u\|_p + \|\nabla(u_s - u)\|_p \\ &\xrightarrow{s \to +\infty} 0. \end{aligned}$$

En effet, on a on a pour tout $s \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \|u - u_s\|_p &= \|\sum_{k=1}^N \lambda_k u - \sum_{k=1}^N v_s^k\|_p = \|\sum_{k=1}^N (\lambda_k u - v_s^k)\|_p \leq \sum_{k=1}^N \|\lambda_k u - v_s^k\|_p \\ &= \sum_{k=1}^N \left(\int_M |\lambda_k u - v_s^k|^p d\nu_g \right)^{\frac{1}{p}} = \sum_{k=1}^N \left(\int_{\Omega_k} |\lambda_k u - \lambda_k \cdot (v_{m_s^k}^k \circ \phi_k)|^p d\nu_g \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \sum_{k=1}^N \left(\int_{\omega_k} \left| \Big(\lambda_k u - \lambda_k \cdot (v_{m_s^k}^k \circ \phi_k) \Big) \circ \phi_k^{-1} \right|^p \sqrt{|g^k|} dx_k \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \sum_{k=1}^N \left(\int_{\omega_k} \left| (\lambda_k \circ \phi_k^{-1}) \cdot (u \circ \phi_k^{-1} - v_{m_s^k}^k) \right|^p \sqrt{|g^k|} dx_k \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \sum_{k=1}^N \|\lambda_k \circ \phi_k^{-1}\|_\infty \cdot \|\sqrt{|g^k|}\|_\infty \times \left(\int_{\omega_k} |u \circ \phi_k^{-1} - v_{m_s^k}^k|^p dx_k \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq M_1 \cdot \sum_{k=1}^N \|u \circ \phi_k^{-1} - v_{m_s^k}^k\|_{L^p(\omega_k)} \end{aligned}$$

avec $M_1 = \max\{\|\lambda_k \circ \phi_k^{-1}\|_\infty \times \|\sqrt{|g^k|}\|_\infty; \quad k = 1, \ldots, N\}$.
D'autre part, on a pour tout $s \in \mathbb{N}$, que

$$\begin{aligned}
\|\nabla(u - u_s)\|_p &\leq \sum_{k=1}^{N} \|\nabla(\lambda_k u - v_s^k)\|_p \\
&= \sum_{k=1}^{N} \left(\int_M \left|\nabla(\lambda_k u - v_s^k)\right|_g^p d\nu_g \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \sum_{k=1}^{N} \left(\int_{\Omega_k} \left|\nabla(\lambda_k u - v_s^k\right|_{g^k}^p d\nu_g \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \sum_{k=1}^{N} \left(\int_{\omega_k} \left|\nabla(\lambda_k u - v_s^k)\right|_{g^k}^p \circ \phi_k^{-1} \sqrt{|g^k|} dx_k \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \sum_{k=1}^{N} \left(\int_{\omega_k} (\phi_k^{-1})^* \left|\nabla(\lambda_k u - v_s^k)\right|_{g^k}^p \sqrt{|g^k|} dx_k \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \sum_{k=1}^{N} \left(\int_{\omega_k} \left|(\phi_k^{-1})^* \nabla(\lambda_k u - v_s^k)\right|_{(\phi_k^{-1})^* g^k}^p \sqrt{|g^k|} dx_k \right)^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

Explicitons la dernière étape : Soit $k \in \{1, \ldots, N\}$ et $f \in H_1^p(M)$. On va démontrer que

$$(\phi_k^{-1})^* |\nabla f|_{g^k} = |(\phi_k^{-1})^* \nabla f|_{(\phi_k^{-1})^* g^k} \tag{6.2.27}$$

En effet, si x et y sont les coordonnées locales de Ω_k et ω_k respectivement, alors la métrique g^k de Ω_k s'écrit comme étant

$$g^k = g_{ij}^k(x) dx^i \otimes dx^j.$$

et $(\phi_k^{-1})^* g^k$ (la métrique de ω_k) s'écrit

$$(\phi_k^{-1})^* g^k(x) = (g^k)_{st} \circ \phi_k^{-1}(y) dy^s \otimes dy^t.$$

Par suite, pour tout $k \in \{1, \ldots, N\}$, on a :

$$\begin{aligned}
|\nabla(f \circ \phi_k^{-1})|_{(\phi_k^{-1})^* g^k}^2 &= \Sigma_{i,j} (g^k)^{ij} \circ \phi_k^{-1}(y) \cdot \partial_i (f \circ \phi_k^{-1})(y) \cdot \partial_j (f \circ \phi_k^{-1})(y) \\
&= (\phi_k^{-1})^* \left(g^{ij}(x) \partial_i f(x) \partial_j f(x) \right) \\
&= (\phi_k^{-1})^* |\nabla f|_g^2
\end{aligned}$$

D'où l'équation (6.2.27). Donc on a

$$\begin{aligned}
\|\nabla(u - u_s)\|_p &\leq \sum_{k=1}^{N} \left(\int_{\Omega_k} \left|\nabla[(\lambda_k u) \circ \phi_k^{-1} - (\lambda_k \circ \phi_k^{-1}) v_{m_s^k}^k]\right|_{\delta^k}^p \cdot \sqrt{|g^k|} dx_k \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \sum_{k=1}^{N} \left(\int_{\Omega_k} \left|\nabla[(\lambda_k \circ \phi_k^{-1}) \cdot (u \circ \phi_k^{-1} - v_{m_s^k}^k)]\right|_{\delta^k}^p \cdot \sqrt{|g^k|} dx_k \right)^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

Sachant qu'on a

$$\begin{aligned}
\nabla \left((\lambda_k \circ \phi_k^{-1}) \cdot (u \circ \phi_k^{-1} - v_{m_s^k}^k) \right) &= \nabla(\lambda_k \circ \phi_k^{-1}) \times (u \circ \phi_k^{-1} - v_{m_s^k}^k) \\
&\quad + \nabla(u \circ \phi_k^{-1} - v_{m_s^k}^k) \times (\lambda_k \circ \phi_k^{-1})
\end{aligned}$$

on a donc

$$\begin{aligned}
\|\nabla(u-u_s)\|_p &\leq \sum_{k=1}^{N}\|\nabla(\lambda_k\circ\phi_k^{-1})\|_{C^0(\omega^k)}\times\|\sqrt{|g^k|}\|_\infty\times\left(\int_{\Omega_k}\left|u\circ\phi_k^{-1}-v_{m_s^k}^k\right|_{\delta^k}^p dx^k\right)^{\frac{1}{p}}\\
&\quad+\sum_{k=1}^{N}\|\lambda_k\circ\phi_k^{-1}\|_\infty\times\|\sqrt{|g^k|}\|_\infty\times\left(\int_{\Omega_k}\left|\nabla(u\circ\phi_k^{-1}-v_{m_s^k}^k)\right|_{\delta^k}^p dx^k\right)^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

avec $\|\nabla(\lambda_k\circ\phi_k^{-1})\|_{C^0(\omega^k)}=\sum_{i=1}^{n}\|\partial_i(\lambda_k\circ\phi_k^{-1})\|_\infty$. La dernière inégalité est dûe au fait que M est compacte. Par suite on a

$$\begin{aligned}
\|\nabla(u-u_s)\|_p &\leq M_2^1\times\sum_{k=1}^{N}\left(\int_{\Omega_k}\left|u\circ\phi_k^{-1}-v_{m_s^k}^k\right|_{\delta^k}^p dx^k\right)^{\frac{1}{p}}\\
&\quad+M_2^2\times\sum_{k=1}^{N}\left(\int_{\Omega_k}\left|\nabla(u\circ\phi_k^{-1}-v_{m_s^k}^k)\right|_{\delta^k}^p dx^k\right)^{\frac{1}{p}}\\
&= M_2^1\times\sum_{k=1}^{N}\|u\circ\phi_k^{-1}-v_{m_s^k}^k\|_{L^p(\omega_k)}+M_2^2\times\sum_{k=1}^{N}\|\nabla(u\circ\phi_k^{-1})-\nabla(v_{m_s^k}^k)\|_{L^p(\omega_k)}
\end{aligned}$$

Avec

$$M_2^1=\max\{\|\nabla(\lambda_k\circ\phi_k^{-1})\|_{C^0(\omega^k)}\times\|\sqrt{|g^k|}\|_\infty; k=1,\ldots,N\}$$

et

$$M_2^2=\max\{\|\lambda_k\circ\phi_k^{-1}\|_\infty\times\|\sqrt{|g^k|}\|_\infty; k=1,\ldots,N\}.$$

En posant que $M_3=\max\{M_1;M_2^1\}$, et $M_4=\max\{M_3;M_2^2\}$, on aura

$$\begin{aligned}
\|u-u_s\|_{H_1^p(M)} &\leq M_3\times\sum_{k=1}^{N}\|u\circ\phi_k^{-1}-v_{m_s^k}^k\|_{L^p(\omega_k)}\\
&\quad+M_2^2\times\sum_{k=1}^{N}\|\nabla(u\circ\phi_k^{-1})-\nabla(v_{m_s^k}^k)\|_{L^p(\omega_k)}\\
&\leq M_4\times\sum_{k=1}^{N}\|u\circ\phi_k^{-1}-v_{m_s^k}^k\|_{H_1^p(\omega_k)}\\
&\xrightarrow{s\to+\infty} 0.
\end{aligned}$$

Par suite il existe une suite $(u_s)_{s\in\mathbb{N}}$ dans $H_1^p(M)$ qui converge à l'infini vers u pour la norme $\|\cdot\|_{H_1^p(M)}$. D'où

$$\left(H_1^p(M),\|\cdot\|_{H_1^p(M)}\right)=\overline{\left\{\sum_{k=1}^{N}\lambda_k v_{m^k}^k\circ\phi_k,\quad m^k\in\mathbb{N}\right\}}$$

Ceci termine la démonstration.

6.3 Appendices II : Résultats de Régularité

6.3.1 L^p-Régularité sur les variétés.

En suivant l'article [23] (voir Proposition 8.1) de Ghoussoub et Robert, nous démontrons un résultat similaire sur les variétés Riemanniennes compactes.

Proposition 6.3.1 *Soient (M,g) une variété Riemannienne compacte de dimension $n \geq 3$, $x_0 \in M$, $s \in]0,2[$, et $2^\star(s) = \frac{2(n-s)}{n-2}$ l'exposant critique de Hardy-Sobolev. On considère $a, h \in C^0(M)$, $q \in]2, 2^*[$ et une solution faible $u \in H_1^2(M)$ de l'équation de Hardy-Sobolev perturbée*

$$\Delta_g u + au = \frac{u|u|^{2^\star(s)-2}}{d_g(x,x_0)^s} + h|u|^{q-2}u. \tag{6.3.28}$$

Alors pour tout $p > 1$, $u \in L^p(M)$

Preuve de la Proposition 6.3.1 : On procède par étapes.

Ière étape : Soient $\beta \geq 1$, $L > 0$ et

$$G_L(t) = \begin{cases} t|t|^{\beta-1} & \text{si } |t| \leq L \ , \\ \beta L^{\beta-1}(t-L) + L^\beta & \text{si } t \geq L \ , \\ \beta L^{\beta-1}(t+L) - L^\beta & \text{si } t \leq -L.. \end{cases}$$

et

$$H_L(t) = \begin{cases} t|t|^{\frac{\beta-1}{2}} & \text{si } |t| \leq L \ , \\ \frac{\beta+1}{2} L^{\frac{\beta-1}{2}}(t-L) + L^{\frac{\beta+1}{2}} & \text{si } t \geq L \ , \\ \frac{\beta+1}{2} L^{\frac{\beta-1}{2}}(t+L) - L^{\frac{\beta+1}{2}} & \text{si } t \leq -L. \end{cases}$$

On a donc pour tous $L > 0$, $t \in \mathbb{R}$:

$$0 \leq tG_L(t) \leq H_L(t)^2 \quad \text{et} \quad G_L'(t) = \frac{4\beta}{(\beta+1)^2}(H_L'(t))^2.$$

De plus, pour tout $\eta \in C_c^\infty(M)$, on a : $\eta^2 G_L(u), \eta H_L(u) \in H_1^2(M)$.

Démontrons, par exemple, que si $t \leq -L$ alors $H_L(t)^2 \geq tG_L(t)$. En effet, on a pour tout $t \leq -L$:

$$H_L(t)^2 = \frac{(\beta+1)^2}{4} L^{\beta-1}(t+L)^2 + L^{\beta+1} - (\beta+1)L^\beta(t+L)$$

et

$$tG_L(t) = \beta L^{\beta-1} t(t+L) - tL^\beta.$$

Maintenant, on a :

$$\frac{(\beta+1)^2}{4} L^{\beta-1}(t+L)^2 - \beta L^{\beta-1}t(t+L) = L^{\beta-1}(t+L)\left[\frac{(\beta+1)^2}{4}(t+L) - t\beta\right] \geq 0$$

car $\frac{(\beta+1)^2}{4}(t+L) \leq t\beta$ et

$$\begin{aligned} L^{\beta+1} - (\beta+1)(t+L)L^\beta + tL^\beta &= (t+L)L^\beta - (\beta+1)(t+L)L^\beta \\ &= -\beta(t+L)L^\beta \geq 0. \end{aligned}$$

D'où pour tout $t \leq -L$: on a $H_L(t)^2 \geq tG_L(t)$. En plus, on a pour tous $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$:

$$|G_L(t_1) - G_L(t_2)| \leq \beta L^{\beta-1}|t_1 - t_2|,$$

et

$$|G_L(t_1) - G_L(t_2)| \leq \frac{\beta+1}{2} L^{\frac{\beta-1}{2}}|t_1 - t_2|.$$

Notons que les fonctions $t \in [-L, +L] \mapsto t|t|^{\beta-1}$ et $t \in [-L, +L] \mapsto t|t|^{\beta-1}$ sont Lipschitziennes de rapport $\beta L^{\beta-1}$ et $\frac{\beta+1}{2}L^{\frac{\beta-1}{2}}$ respectivement. Il s'ensuit que que G_L et H_L sont deux fonctions Lipschitziennes. Soit $\eta \in C_c^\infty(M)$. u étant dans $H_1^2(M)$, G_L et H_L sont deux fonctions Lipschitziennes donc $G_L(u)etH_L(u) \in H_1^2(M)$. D'où $\eta^2 G_L(u), \eta H_L(u) \in H_1^2(M)$. Ceci termine la 1ère étape de la preuve de la Proposition 6.3.1.

IIème étape : Comme u est une solution faible de l'équation (6.3.28) et $\eta^2 G_L(u) \in H_1^2(M)$, donc on a :

$$\int_M \left(\nabla u, \nabla(\eta^2 G_L(u))\right)_g dv_g = \int_M \eta^2 u G_L(u) \left(\frac{|u|^{2^\star(s)-2}}{d_g(x,x_0)^s} + h|u|^{q-2} - a\right) dv_g. \quad (6.3.29)$$

Or on a que :

$$\nabla(\eta^2 G_L(u)) = \eta^2 \nabla(G_L(u)) + \nabla(\eta^2) G_L(u) = \eta^2 G'_L(u)\nabla u + \nabla(\eta^2) G_L(u).$$

En posant pour tout $t \in \mathbb{R}$ que, $J_L(t) = \int_0^t G_L(\tau)d\tau$ on aura en intégrant par partie :

$$\begin{aligned}
\int_M \left(\nabla u, \nabla(\eta^2 G_L(u))\right)_g dv_g &= \int_M \eta^2 G'_L(u)|\nabla u|^2 dv_g + \int_M \left(\nabla(\eta^2), \nabla J_L(u)\right)_g dv_g \\
&= \frac{4\beta}{(\beta+1)^2}\int_M \eta^2 |\nabla H_L(u)|^2 dv_g + \int_M (\Delta \eta^2) J_L(u) dv_g \\
&= \frac{4\beta}{(\beta+1)^2}\int_M |\nabla(\eta H_L(u))|^2 dv_g - \frac{4\beta}{(\beta+1)^2}\int_M \eta\Delta\eta |H_L(u)|^2 dv_g \\
&\quad + \int_M (\Delta\eta^2) J_L(u) dv_g. \qquad (6.3.30)
\end{aligned}$$

D'autre part, on a :

$$\int_M \left(\nabla u, \nabla(\eta^2 G_L(u))\right)_g dv_g \leq \int_M (|a| + \frac{|u|^{2^\star(s)-2}}{d_g(x,x_0)^s} + |h|\cdot|u|^{q-2}) \times (\eta H_L(u))^2 dv_g.$$

On applique l'inégalité de Hölder sur le membre droite de l'inégalité ci-dessus sur les fonctions $f_1(x) = |a|d_g(x,x_0)^s + |u|^{2^\star(s)-2} \in L_M^{\frac{2^\star(s)}{2^\star(s)-2}}(\frac{dv_g}{d_g(x,x_0)^s})$, $f_2(x) = |h||u|^{q-2} \in L_M^{\frac{2^*}{2^*-2}}(dv_g)$ et $g_1(x) = (\eta H_L(u))^2(x)$, f_1 avec g_1 et f_2 avec g_1, pour tirer donc que :

$$\begin{aligned}
\int_M \nabla u \nabla(\eta^2 G_L(u)) dv_g \leq & \left(\int_{\text{supp}(\eta)} ||a|d_g(x,x_0)^s + |u|^{2^\star(s)-2}|^{\frac{2^\star(s)}{2^\star(s)-2}} \frac{dv_g}{d_g(x,x_0)^s}\right)^{1-\frac{2}{2^\star(s)}} \\
& \times \left(\int_M |\eta H_L(u)|^{2^\star(s)} \frac{dv_g}{d_g(x,x_0)^s}\right)^{\frac{2}{2^\star(s)}} \\
& + \left(\int_{\text{supp}(\eta)} ||h|\cdot|u|^{q-2}|^{\frac{2^*}{2^*-2}} dv_g\right)^{1-\frac{2}{2^*}} \left(\int_M |\eta H_L(u)|^{2^*} dv_g\right)^{\frac{2}{2^*}}
\end{aligned}$$

Or d'après la Proposition (1.2.1), on sait qu'il existe une constante $B_1 > 0$ telle que pour tout $f \in H_1^2(M)$ on a :

$$\left(\int_M |f|^{2^\star(s)} \frac{dv_g}{d_g(x,x_0)^s}\right)^{\frac{2}{2^\star(s)}} \leq (K(n,s)+1)\|\nabla f\|_2^2 + B_1\|f\|_2^2. \tag{6.3.31}$$

On pose

$$\begin{aligned} k_2(\eta) &= \left(\int_{\mathrm{supp}(\eta)} \left||a|d_g(x,x_0)^s + |u|^{2^\star(s)-2}\right|^{\frac{2^\star(s)}{2^\star(s)-2}} \frac{dv_g}{d_g(x,x_0)^s}\right)^{1-\frac{2}{2^\star(s)}} \\ &\quad + \left(\int_{\mathrm{supp}(\eta)} ||h|\cdot|u|^{q-2}|^{\frac{2^*}{2^*-2}} dv_g\right)^{1-\frac{2}{2^*}} \end{aligned}$$

Remarquons que $k_2(\eta)$ est toujours fini si $q \leq 2^*$. On aura ensuite :

$$\int_M \nabla u \nabla(\eta^2 G_L(u)) dv_g \leq k_2(\eta)\left((K(n,s)+1)\int_M |\nabla\eta H_L(u)|^2 dv_g + B_1 \int_M |\eta H_L(u)|^2 dv_g\right) \tag{6.3.32}$$

En combinant (6.3.30) et (6.3.32) avec (6.3.29), on obtient :

$$\begin{aligned} \left(\frac{4\beta}{(\beta+1)^2} - (K(n,s)+1)k_2(\eta)\right)\int_M |\nabla(\eta H_L(u))|^2 dv_g &\leq \frac{4\beta}{(\beta+1)^2}\int_M |\eta\Delta\eta|\cdot|H_L(u)|^2 dv_g \\ &+ \int_M |\Delta(\eta^2)J_L(u)| dv_g + k_2(\eta)B_1\int_M |\eta H_L(u)|^2 dv_g. \end{aligned} \tag{6.3.33}$$

IIIème étape : On va montrer maintenant que pour tout $q \geq 1$, $u \in L^q(M)$. Pour cela, on considère $p \geq 2$ tel que $u \in L^p(M)$. Soit $\beta = p-1 > 1$. Pour tout $x \in M$, on pose $\rho_x > 0$ tel que

$$\begin{aligned} &\left[\left(\int_{\mathbb{B}_{2\rho_x}(x)} \left||a|d_g(x,x_0)^s + |u|^{2^\star(s)-2}\right|^{\frac{2^\star(s)}{2^\star(s)-2}} \frac{dv_g}{d_g(x,x_0)^s}\right)^{1-\frac{2}{2^\star(s)}}\right. \\ &\left. + \left(\int_{\mathbb{B}_{2\rho_x}(x)} ||h|\cdot|u|^{q-2}|^{\frac{2^*}{2^*-2}} dv_g\right)^{1-\frac{2}{2^*}}\right] \times (K(n,s)+1) \leq \frac{2\beta}{(\beta+1)^2}. \end{aligned} \tag{6.3.34}$$

Puisque M est compacte donc il existe $x_1, \ldots, x_N \in M$ tels que

$$M = \bigcup_{i=1}^N \mathbb{B}_{\rho_{x_i}}(x_i).$$

Fixons maintenant $i \in \{1, \ldots, N\}$ et prenons $\eta \in C^\infty(\mathbb{B}_{2\rho_{x_i}}(x_i))$ telle que $\eta_{|\mathbb{B}_{\rho_{x_i}}(x_i)} \equiv 1$. Par suite, les inégalités (6.3.33) et (6.3.34) donnent :

$$\begin{aligned} \frac{2\beta}{(\beta+1)^2}\int_M |\nabla(\eta H_L(u))|^2 dv_g &\leq \frac{4\beta}{(\beta+1)^2}\int_M |\eta\Delta\eta|\cdot|H_L(u)|^2 dv_g \\ &+ \int_M |\Delta(\eta^2)J_L(u)| dv_g + \frac{2\beta B_1}{(\beta+1)^2((K(n,s)+1)}\int_M |\eta H_L(u)|^2 dv_g. \end{aligned} \tag{6.3.35}$$

On vérifie facilement qu'ils existent deux constantes $k_4, k_5 > 0$ dépendant de β seulement telles que pour tous $t \in \mathbb{R}, L > 0$ on a

$$|J_L(t)| \leq k_4|t|^{\beta+1} \text{ et } |H_L(t)|^2 \leq k_5|t|^{\beta+1}.$$

Il s'ensuit que :

$$\begin{aligned}
\int_M |\Delta(\eta^2)J_L(u)|dv_g &\leq \|\Delta(\eta^2)\|_\infty \int_M |J_L(u)|dv_g \\
&\leq k_4\|\Delta(\eta^2)\|_\infty \int_M |u|^{\beta+1}dv_g \\
&= k_4\|\Delta(\eta^2)\|_\infty \|u\|_{\beta+1}^{\beta+1}, \qquad (6.3.36)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\int_M |H_L(t)|^2 dv_g &\leq k_5 \int_M |u|^{\beta+1}dv_g \\
&= k_5\|u\|_{\beta+1}^{\beta+1}. \qquad (6.3.37)
\end{aligned}$$

Avec le fait que $u \in L^{\beta+1}(M) = L^p(M)$, on déduit (en combinant 6.3.35 avec 6.3.36 et 6.3.37) que :

$$\begin{aligned}
\frac{2\beta}{(\beta+1)^2}\int_M |\nabla(\eta H_L(u))|^2 dv_g &\leq k_6(\beta,\eta)\int_M |H_L(t)|^2 dv_g + \int_M |\Delta(\eta^2)J_L(u)|dv_g \\
&\leq k_4\|\Delta(\eta^2)\|_\infty\|u\|_{\beta+1}^{\beta+1} + k_5k_6\|u\|_{\beta+1}^{\beta+1} \\
&:= k_7(u,\beta,\eta). \qquad (6.3.38)
\end{aligned}$$

En utilisant encore une fois l'inégalité 6.3.31 et en la combinant avec les résultats 6.3.37 et 6.3.38, on tire qu'il existe une constante $K_9 = K_9(u, \eta, \beta)$ ne dépendant pas de L telle que

$$\int_{\mathbb{B}_{\rho_{x_i}}(x_i)} |H_L(u)|^{2^*} dv_g \leq \int_M |H_L(u)|^{2^*} dv_g \leq K_9.$$

En faisant tendre L vers l'infini, on obtiendra ensuite pour tout $i \in \{1, \ldots, N\}$:

$$\int_{\mathbb{B}_{\rho_{x_i}}(x_i)} |u|^{\frac{2^*}{2}(\beta+1)} dv_g < +\infty.$$

D'où $u \in L^{\frac{2^*}{2}(\beta+1)}(M) = L^{\frac{np}{n-2}}(M)$ avec $\frac{np}{n-2} > p$. On tire le résultat demandé par itération. Ceci termine la preuve de la Proposition (6.3.1). □

6.3.2 H_2^p-Régularité sur les variétés.

Théorème 6.3.1 *Soient (M, g) une variété Riemannienne compacte de dimension $n \geq 3$ et*

$$L = \sum_{i,j=1}^n a^{ij}\partial_{ij} + \sum_{i=1}^n b^i\partial_i + c$$

un opérateur différentiel elliptique tel que pour tous $i, j = 1, \ldots, n$, $a^{ij}, b^i \in C^\infty(M)$ et $c \in L^\infty(M)$. On considère $f \in L^p(M)$, $p > 1$ et $u \in H_1^2(M)$ une solution faible de l'équation $Lu = f$. Alors $u \in H_2^p(M)$.

Preuve du Théorème (6.3.1) **:** Soit L_1 l'opérateur différentiel elliptique défini par

$$L_1 = \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}\partial_{ij} + \sum_{i=1}^{n} b^i \partial_i.$$

On a donc : $u \in H_1^2(M)$ et est une solution faible de l'équation $L_1 u = f - cu$, en plus les $a^{ij}, b_i \in C^\infty(M)$. Il s'ensuit de la Théorie standard des E.D.P. elliptique (voir [25] et [28]) que si $f - cu \in L^p(M)$ alors $u \in H_2^p(M)$. Deux cas à distinguer :

1er cas : $p \leq 2^*$. Dans ce cas, on a : $H_1^2(M) \hookrightarrow L^p(M)$. Donc $u \in L^p(M)$ et ensuite $f - cu \in L^p(M)$. D'où, $u \in H_2^p(M)$. **C.Q.F.D.**

2ème cas : $p > 2^*$. Dans ce cas, $H_1^2(M) \hookrightarrow L^{2^*}(M)$. Donc $u \in L^{2^*}(M)$ et ensuite $f - cu \in L^{2^*}(M)$. Par suite, $u \in H_2^{2^*}(M)$. Avec la formule de la première inclusion de Sobolev, on aura $H_2^{2^*}(M) \hookrightarrow L^{q_1}(M)$, $\frac{1}{q_1} = \frac{1}{2^*} - \frac{2}{n}$. Donc $u \in L^{q_1}(M)$. Deux sous-cas à distinguer :

cas 2.1 : $p \leq q_1$. Dans ce cas, on revient au premier cas.

cas 2.2 : $p > q_1$. Dans ce cas, on a : $L^p(M) \hookrightarrow L^{q_1}(M)$. Donc $u \in L^{q_1}(M)$ et aussi $f - cu \in L^{q_1}(M)$. Par suite, $u \in H_2^{q_1}(M)$. Avec la formule de la première inclusion de Sobolev, on aura $H_2^{q_1}(M) \hookrightarrow L^{q_2}(M)$, $\frac{1}{q_2} = \frac{1}{q_1} - \frac{2}{n}$. Donc $u \in L^{q_2}(M)$.

Supposons, par l'absurde, qu'on pourrait construire par réccurence une suite $(q_n)_n$ dans $\mathbb{R}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $q_n < p$, $u \in L^{q_n}(M)$ et

$$\frac{1}{q_{n+1}} = \frac{1}{q_n} - \frac{2}{n}. \tag{6.3.39}$$

La suite $(q_n)_n$ est croissante et majorée par p donc elle est convergente. Soit $q = \lim_{n\to+\infty} q_n$. On tire la contradiction en passant à la limite dans (6.3.39) lorsque $n \to +\infty$. Il s'ensuit qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $q_{n_0} > p$ et donc $u \in L^{q_{n_0}}(M)$. Ceci termine la preuve du Théorème 6.3.1. □

Corollaire 6.3.1 *Soient (M, g) une variété Riemannienne compacte de dimension $n \geq 3$ et u une solution faible dans $H_1^2(M)$ de l'équation*

$$\Delta_g u + au = f_u$$

avec $a \in C^0(M)$. Soit $p > n$ tel que $f \in L^p(M)$. Alors il existe $\alpha \in]0,1[$ tel que $u \in C^{1,\alpha}(M)$.

Preuve du Corollaire 6.3.1 : $f \in L^p(M), a \in C^0(M)$ et u est une solution faible dans $H_1^2(M)$ de $\Delta_g u + au = f_u$ qui est une équation elliptique du second ordre donc, d'après le Théorème 6.3.1, $u \in H_2^p(M)$. Maintenant avec la deuxième inclusion de Sobolev, on peut tirer que $H_2^p(M) \hookrightarrow C^{1,\alpha}(M)$ pour $\alpha = 1 - \frac{n}{p}$. Ceci termine la preuve du Corollaire 6.3.1. □

Corollaire 6.3.2 *Soient (M, g) une variété Riemannienne* ***compacte*** *de dimension $n \geq 3$ et u une solution faible dans $H_1^2(M)$ de l'équation*

$$\Delta_g u + au = f_u$$

avec $a \in C^0(M)$. Soit $s' \in]0,2[$. Si pour tout $p < \frac{n}{s'}$, $f \in L^p(M)$ alors pour tout $\alpha \in]0, \min(1, 2 - s')[$, on a $u \in C^{0,\alpha}(M)$.

Preuve du Corollaire 6.3.2 : Soit $p < \frac{n}{s'}$. $f \in L^p(M), a \in C^0(M)$ et u est une solution faible dans $H_1^2(M)$ de $\Delta_g u + au = f_u$ qui est une équation elliptique du second ordre donc, d'après le Théorème (6.3.1), $u \in H_2^p(M)$. Maintenant avec la deuxième inclusion de Sobolev, on peut tirer que pour tout $\beta \in]0, \min(1, 2 - \frac{n}{p})[$, $H_2^p(M) \hookrightarrow C^{0,\beta}(M)$. Mais ceci est vrai pour tout $p < \frac{n}{s'}$, il s'ensuit quand $p \to \frac{n}{s'}$ que pour tout $\beta \in]0, \min(1, 2 - s')[$, $u \in C^{0,\beta}(M)$. D'où le résultat. Ceci termine la preuve du Corollaire 6.3.2. □

6.3.3 $C^{2,\alpha}$-Régularité sur les variétés.

Proposition 6.3.2 *Soient (M, g) une variété Riemannienne compacte de dimension $n \geq 3$ et*

$$L = \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij} \partial_{ij} + \sum_{i=1}^{n} b^i \partial_i + c$$

un opérateur différentiel strictement elliptique (à savoir qu'il existe $\lambda_1 > 0$ telle que pour tous $x \in M, \xi \in T_x M$, on a : $a^{ij} \xi_i \xi_j \geq \lambda_1 |\xi|^2$) à coéfissiants bornés. On considère $f \in L^2(M)$ et $u \in H_1^2(M)$, $u \geq 0$ une solution faible de l'équation $Lu = f$. Alors il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\|u\|_{C^0(M)} \leq C \left(\|u\|_2 + \|f\|_{C^0(M)} \right) \tag{6.3.40}$$

et pour tout $\alpha \in]0, 1[$

$$\|u\|_{C^{2,\theta}(M)} \leq C \left(\|u\|_{C^0(M)} + \|f\|_{C^{0,\theta}(M)} \right). \tag{6.3.41}$$

Preuve de la Proposition 6.3.2 : En effet, par arguments de compacité sur M et en utilisant le Théorème 8.17 et le Corollaire 6.3 de [25], on tire (6.3.40) et (6.3.40) respectivement. □

6.4 Appendice III : La Fonctionnelle-Énergie.

Lemme 6.4.1 *Pour tout $q > 2$, il existe $C(q) > 0$ tel que pour tous $x, y \in \mathbb{R}^*$, on a :*

$$\left| |x + y|^q - |x|^q - q|x|^{q-2} xy \right| \leq C(q) \left| |x|^{q-2} |y|^2 + |y|^q \right|.$$

Preuve du Lemme 6.4.1 : Soit $q > 2$. Rappelons que pour tous $x \in \mathbb{R}^*, n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$(|x|^q)^{(n)} = \prod_{k=0}^{n-1} (q - k) x |x|^{q-n-1}.$$

Soit $x, y \in \mathbb{R}^*$. On distingue deux cas :

Cas 1 : $y = tx, t \to 0$. Dans ce cas, on écrit :

$$|x + y|^q = |x|^q (1 + t)^q = |x|^q \left[1 + qt + O(t^2) \right]$$

où $\frac{O(t^2)}{t^2}$ dépend seulement de q. Donc il existe une constante $C' = C'(q) > 0$ telle que

$$|x + y|^q = |x|^q + q|x|^{q-2} xy + C' |x|^{q-2} y^2. \tag{6.4.42}$$

Cas 2 : $y = tx, t \to \pm\infty$. Dans ce cas, on écrit :

$$|x+y|^q = |x|^q(1+t)^q \leq |x|^q \left[1 + C''|t|^q\right],$$

où la constante $C'' > 0$ dépend seulement de q. Donc

$$\begin{aligned} \left||x+y|^q - |x|^q - q|x|^{q-2}xy\right| &\leq |x|^q \left[2 + C''|t|^q + qt\right] \\ &\leq |x|^q|t|^q \left[\frac{1}{|t|^q} + C'' + \frac{q}{|t|^{q-1}}\right] \end{aligned}$$

Comme $t \to \pm\infty$ dons il existe $\epsilon_0 > 0$ telle que $|t| > \epsilon_0$. Il s'ensuit que

$$\left||x+y|^q - |x|^q - q|x|^{q-2}xy\right| \leq C'''|y|^q \tag{6.4.43}$$

où la constante $C''' > 0$ ne dépend que de q. En combinant les relations (6.4.42) et (6.4.43) des deux cas, il existe donc une constante $C = C(q) > 0$ telle que

$$\left||x+y|^q - |x|^q - q|x|^{q-2}xy\right| \leq C(q)\left||x|^{q-2}|y|^2 + |y|^q\right|.$$

Ceci termine la preuve du Lemme (6.4.1). □

Avec les mêmes arguments de la preuve de lu lemme précédent, on montre le lemme suivant :

Lemme 6.4.2 *Pour tout $q \in]2, 2^\star(s)]$, il existe $C(q) > 0$ tel que pour tous $x, y \in \mathbb{R}^*$,*

$$|(x+y)|x+y|^q - x|x|^q| \leq C(q)\left||x|^q|y| + |y|^{q+1}\right|.$$

Théorème 6.4.1 *Soient $q \in]2, 2^\star(s)]$ et Φ_q la fonction définie par*

$$\begin{aligned} \Phi_q : H_1^2(M) &\to \mathbb{R} \\ \psi &\mapsto \int_M |\psi|^q \frac{dv_g}{d_g(x,x_0)^s}. \end{aligned}$$

Donc Φ_q est de classe C^1 sur $H_1^2(M)$ et pour tout $\psi \in$ on a :

$$d\Phi_q(\psi) : h \in H_1^2(M) \mapsto q\int_M h\psi|\psi|^{q-2}\frac{dv_g}{d_g(x,x_0)^s}.$$

Preuve du Théorème 6.4.1 : Soit $\psi \in H_1^2(M)$. Posons que

$$\varphi_q(\psi) : h \in H_1^2(M) \mapsto q\int_M h\psi|\psi|^{q-2}\frac{dv_g}{d_g(x,x_0)^s}.$$

$\varphi_q(\psi)$ est bien définie car pour tout $\psi, h \in H_1^2(M)$, on a :

$$\begin{aligned} |\varphi_q(\psi)h| &\leq q\int_M |h| \times |\psi|^{q-1}\frac{dv_g}{d_g(x,x_0)^s} \\ &\leq q\|h\|_{q,s}\|\psi\|_{q,s}^{q-1} \\ &\leq qC^q\|h\|_{H_1^2(M)}\|\psi\|_{H_1^2(M)}^{q-1} \\ &< +\infty, \end{aligned}$$

où C est la constante de l'inclusion continue de Hardy-Sobolev $H_1^2(M) \hookrightarrow L_M^q\left(\frac{dv_g}{d_g(x,x_0)^s}\right)$.
En plus, pour tout $\psi \in H_1^2(M)$ on a : $\varphi_q(\psi) \in (H_1^2(M))'$. En effet, $\varphi_q(\psi)$ est évidement linéaire et est continue car pour tout $h \in H_1^2(M)$ tel que $\|h\|_{H_1^2(M)} \leq 1$:

$$\begin{aligned}
|\varphi_q(\psi)h| &\leq q\int_M |h| \times |\psi|^{q-1}\frac{dv_g}{d_g(x,x_0)^s} \\
&\leq qC^q\|h\|_{H_1^2(M)}\|\psi\|_{H_1^2(M)}^{q-1} \\
&\leq qC^q\|\psi\|_{H_1^2(M)}^{q-1}.
\end{aligned}$$

Soit maintenant $h \in H_1^2(M)$. Donc on a

$$\begin{aligned}
R_q(\psi)h &= |\Phi_q(\psi+h) - \Phi_q(\psi) - \varphi_q(\psi)h| \\
&\leq \int_M \frac{dv_g}{d_g(x,x_0)^s} \times \left||\psi+h|^q - |\psi|^q - qh\psi|\psi|^{q-2}\right|
\end{aligned}$$

Or d'après le lemme 6.4.1, il existe $C_1(q) > 0$ tel que

$$\left||\psi+h|^q - |\psi|^q - qh\psi|\psi|^{q-2}\right| \leq C_1(q)\left||\psi|^{q-2}|h|^2 + |h|^q\right|.$$

Donc

$$R_q(\psi)h \leq C_1(q)\int_M h^2|\psi|^{q-2}\frac{dv_g}{d_g(x,x_0)^s} + C_1(q)\int_M |h|^q\frac{dv_g}{d_g(x,x_0)^s}.$$

De l'inégalité de Hölder, on tire

$$\begin{aligned}
\int_M h^2|\psi|^{q-2}\frac{dv_g}{d_g(x,x_0)^s} &\leq \||\psi|^{q-2}\|_{\frac{q}{q-2},s} \times \|h\|_{\frac{q}{2},s}^2 \\
&\leq \left(\int_M |\psi|^q\frac{dv_g}{d_g(x,x_0)^s}\right)^{1-\frac{2}{q}} \times \left(\int_M |h|^q\frac{dv_g}{d_g(x,x_0)^s}\right)^{\frac{2}{q}} \\
&= \|\psi\|_{q,s}^{1-\frac{2}{q}} \times \|h\|_{q,s}^2.
\end{aligned}$$

Ensuite de l'inclusion continue de Hardy-Sobolev $H_1^2(M) \hookrightarrow L_M^q\left(\frac{dv_g}{d_g(x,x_0)^s}\right)$ on déduit que

$$R_q(\psi) = o(\|h\|_{H_1^2(M)}).$$

D'où Φ_q est une fonction différentiable sur $H_1^2(M)$ et sa différentielle vaut φ_q.
Il reste à démontrer que $d\Phi_q$ est de classe C^0. Pour cela, on considère une suite $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ dans $H_1^2(M)$ qui converge vers ψ pour la norme $\|\cdot\|_{H_1^2(M)}$. On pose pour tout $n \in H_1^2(M)$, $\psi_n = \psi + \eta_n$. Alors pour tout $h \in H_1^2(M)$, $\|h\|_{H_1^2(M)} \leq 1$, on a :

$$\begin{aligned}
|d\Phi_q(\psi_n)h - d\Phi_q(\psi)h| &\leq q\int_M \left|h\psi_n|\psi|^{q-2} - h\psi_n|\psi|^{q-2}\right|\frac{dv_g}{d_g(x,x_0)^s} \\
&\leq q\int_M \left|(\psi+\eta_n)|\psi+\eta_n|^{q-2} - \psi_n|\psi|^{q-2}\right| \times |h|\frac{dv_g}{d_g(x,x_0)^s} \\
&\leq qC_2(q)\int_M \left(|\psi|^q|\eta_n| + |\eta_n|^{q+1}\right) \times |h|\frac{dv_g}{d_g(x,x_0)^s},
\end{aligned} \tag{6.4.44}$$

sachant qu'on a obtenu la dernière inégalité d'après le lemme 6.4.2 et $C_2(q) > 0$ est une constante dépendante de q. Comme $q \leq 2^\star(s)$, on obtient avec les inégalités de Hölder :

$$\int_M |\psi|^q |\eta_n||h| \frac{dv_g}{d_g(x,x_0)^s} \leq C_2 \|\psi\|^q_{H_1^2(M)} \|\eta_n\|_{H_1^2(M)} \|h\|_{H_1^2(M)}. \tag{6.4.45}$$

De même, on démontre que

$$\int_M |\psi|^q |\eta_n|^{q+1}|h| \frac{dv_g}{d_g(x,x_0)^s} \leq C_3 \|\psi\|^q_{H_1^2(M)} \|\eta_n\|^{1+q}_{H_1^2(M)} \|h\|_{H_1^2(M)}. \tag{6.4.46}$$

Les inégalités (6.4.44), (6.4.45) et (6.4.46) impliquent que

$$\sup_{\|h\|_{H_1^2(M)} \leq 1} |d\Phi_q(\psi_n)h - d\Phi_q(\psi)h| = O(\|\eta_n\|_{H_1^2(M)}).$$

D'où le résultat. □

6.5 Appendice IV : Convergence faible dans L^p.

On donne ici un Lemme d'intégration comme il était cité dans le livre d'Hebey [31] qu'on utilisera dans le Chapitre 6.

Définition 6.5.1 *Soit (X,τ) un espace topologique. Une* ***mesure (de Radon)*** *sur X est une forme linéaire continue sur $C_c^0(X)$, l'espace des fonctions continues à support compact dans X.*

Définition 6.5.2 ***(Espace dénombrable à l'infini)*** *On dit qu'un espace mesuré (X,μ) est dénombrable à l'infini s'il existe une suite $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ des parties de X mesurables et de mesure finie qui recouvrent X, i.e.*

$$X = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} X_i.$$

Lemme 6.5.1 *Soit μ une mesure de Radon sur un espace métrique (X,d) localement compact et dénombrable à l'infini. Soit $p > 1$. Si $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite des fonctions $\mu-$mesurables et bornées dans $L^p(X)$, et si $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge μ-p.p. vers une fonction f, alors $f \in L^p(X)$ et $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers f dans $L^p(X)$.*

Preuve du Lemme 6.5.1 : On suit la preuve donnée par Hebey dans [31]. En effet, soient $p > 1$ et $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ la suite des fonctions μ-mesurable et positives définies par $g_k = \inf_{m\geq k}|f_m|$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $g_k \leq |f_k|$, μ-p.p. et $g_k \leq g_{k+1}\mu$-p.p. donc $(g_k)_k$ est une suite croissante et est dans $L^p(X)$. En plus, la suite $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge μ-p.p. vers $|f|$, car

$$|g_k(x) - |f(x)|| \leq |f_k(x) - f(x)| \xrightarrow{k\to+\infty} 0.$$

D'où $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite des fonctions μ-mesurables positives, croissantes dans $L^p(X)$ et convergente μ-p.p. vers $|f|$ lorsque $k \to +\infty$. En appliquant le Théorème Beppo-Livi, on tire que $f \in L^p(X)$.

D'autre part, la suite $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ étant bornée dans $L^p(X)$ qui est réflexif (car $p > 1$) donc il existe une sous-suite $(f_k)_k$ de $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge faiblement vers g dans $L^p(X)$. Sans perte de généralité, on suppose que $g \equiv 0$, μ-p.p. sur M et on va démontrer que $g \equiv 0$, μ-p.p. sur M. Pour cela, soit K un compact de X. Notons S_K, A_K^k et B_K^k les ensembles suivants :

$$S_K = \{x \in K; \quad f(x) > 0\},$$

$$A_K^k = \{x \in S_K; \quad f_k(x) > 0\} \quad \text{et} \quad B_K^k = \{x \in S_K; \quad f_k(x) < 0\}.$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on écrit : $S_K = K \cap f^{-1}(]0, +\infty[)$ et

$$A_K^k = S_K \cap f_k^{-1}(]0, +\infty[) \;\text{ et }\; B_K^k = S_K \cap f_k^{-1}(] - \infty, 0[).$$

Par suite, les ensembles S_K, A_K^k et B_K^k sont μ-mesurables. Notons que K est μ-mesurable car X est dénombrable à l'infini.

Maintenant, pour un ensemble E quelquonque de X, on désigne par χ_E la fonction caractéristique de E qui vaut 1 sur E et 0 ailleurs. Alors la suite $(\chi_{B_K^k})_{k\in\mathbb{N}}$ converge μ-p.p. vers 0. D'autre part, (X, d) étant dénombrable à l'infini donc il existe une suite dénombrable $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ des ouverts dans $\operatorname{Bor}(X)$ telle que $X = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} X_i$. Comme K est une partie compacte de X, il existe donc $X_{s_1}, X_{s_2}, \ldots, X_{s_K} \in (X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ tel que $K \subset \bigcup_{i=1}^{s_K} X_i$. Par suite on a, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\chi_{B_K^k} \leq \sum_{i=1}^{s_K} \chi_{X_i}$, μ-p.p. Du Théorème de convergence dominée de Lebesgue, on tire que la suite $(\chi_{B_K^k})_{k\in\mathbb{N}}$ converge μ-p.p. vers 0 dans $L^1(X)$. En utilisant l'inégalité de Hölder, on peut écrire

$$\left|\int_{B_K^k} f_k d\mu\right| \leq \left(\int_X |f_k|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_{B_K^k} d\mu\right)^{1-\frac{1}{p}}$$

et puisque la suite $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $L^p(X)$ et la suite $(\chi_{B_K^k})_{k\in\mathbb{N}}$ converge μ-p.p. vers 0 dans $L^1(X)$, on obtient que

$$\lim_{k\to+\infty} \int_{B_K^k} f_k d\mu = 0. \tag{6.5.47}$$

D'autre part, on a pour tout $s \in \mathbb{N}^*$:

$$\int_X \chi_{S_K}^s d\mu = \int_X \chi_{S_K} d\mu = \mu(S_K) \leq \mu(K) < +\infty,$$

donc $\chi_{S_K} \in L^s(X)$ pour tout $s \in \mathbb{N}^*$. On définit la forme linéaire φ sur $L^p(X)$:

$$\begin{array}{rcl} \varphi : L^p(X) & \to & \mathbb{R} \\ g & \mapsto & \displaystyle\int_{S_K} g d\mu \end{array}$$

Avec l'inégalité de Hölder, on tire pour tout $g \in L^p(X)$:

$$|\varphi(g)| \leq \|g\|_p \cdot \mu(S_K)^{1-\frac{1}{p}} < +\infty.$$

D'où φ est bien définie. Puisque la suite $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers 0 dans $L^p(X)$, donc

$$(\varphi(f_k))_{k\in\mathbb{N}} \xrightarrow{k\to+\infty} \varphi(0) = 0.$$

Ceci donne

$$\lim_{k\to+\infty}\int_{S_K} f_k d\mu = 0. \tag{6.5.48}$$

De la relation

$$\int_{S_K} f_k d\mu = \int_{A_K^k} f_k d\mu + \int_{B_K^k} f_k d\mu$$

et avec (6.5.47) et (6.5.48), on déduit que

$$\lim_{k\to+\infty}\int_{A_K^k} f_k d\mu = 0.$$

Il s'ensuit que la suite $(f_k\chi_{A_K^k})_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 dans $L^1(X)$, donc il existe une sous-suite $(f_{k_s}\chi_{A_K^{k_s}})_{s\in\mathbb{N}}$ qui converge μ-p.p. vers 0. Mais $(f_k\chi_{A_K^k})_{k\in\mathbb{N}}$ converge μ-p.p. sur M vers $f\chi_{S_K}$. En effet, si $x\notin S_K$, alors $(f_k\chi_{A_K^k})(x) = 0 \to 0$ lorsque $k\to+\infty$. Si $x\in S_K$, alors $f(x)>0$. Puisque la suite $(f_k(x))_{k\in\mathbb{N}}$ converge μ-p.p. vers $f(x)$, donc pour tout $\epsilon>0$, il existe $k_0(\epsilon)\in\mathbb{N}^*$ tel que pour tout $k\ge k_0$ on a : $f_k(x)>0$ et $|f_k(x)-f(x)|<\epsilon$. D'où on a pour tout $k\ge k_0$: $x\in A_K^k$ et

$$|f_k\chi_{A_K^k}(x) - f\chi_{S_K}(x)| = |f_k(x)-f(x)| < \epsilon.$$

Ceci implique que $f\chi_{S_K} = 0$ μ-p.p. sur M. On en déduit que $f_{|K}\le 0$, μ-p.p. Mais K est une partie compacte quelquonque de l'espace (X,d) qui est localement compact, il s'ensuit que que $f\le 0$, μ-p.p. sur X. En remplaçant f_k par $-f_k$ et en échangeant les rôles de A_K^k et B_K^k dans la démonstration, on aura :

$$-f\chi_{S_K} = 0\mu - \text{p.p. sur } M, \quad S_K = \{x\in K;\quad f(x)<0\}.$$

Par arguments de compacité, on tire ensuite que $f\ge 0$, μ-p.p. sur M. D'où $f\equiv 0$, μ-p.p. sur M. Ceci termine la preuve du Lemme (6.5.1). □

6.6 Appendice V : Fonctions de Green

Soient (M,g) une variété Riemannienne compacte de dimension 3, $a\in C^{0,\theta}(M), \theta\in]0,1[$ tel que $\Delta_g + a$ soit coercif, c.à.d. qu'il existe $\lambda>0$ telle que pour tout $u\in H_1^2(M)$, on a :

$$\int_M \left(|\nabla u|_g^2 + au^2\right) dv_g \ge \lambda \|u\|^2_{H_1^2(M)} \tag{6.6.49}$$

et soit $k>0$ une constante telle que pour tout $\theta\in]0,1[$, on a :

$$\|a\|_{C^{0,\theta}(M)} := \|a\|_\infty + \sup_{M^2\setminus \mathrm{Diag}(M)} \frac{|a(x)-a(y)|}{d_g(x,x_0)^\theta} < k. \tag{6.6.50}$$

On pose

$$\mathrm{Diag}(M) := \{(x,x)\in M\times M \ / \ x\in M\}.$$

Théorème 6.6.1 *Il existe une unique fonction continue $G_a : M^2\setminus Diag(M)\to\mathbb{R}$ telle que pour tout $x\in M$, la fonction $G_{a,x} : M\setminus\{x\}\to\mathbb{R}$ est dans $L^1(M)$ et pour tout $u\in C^2(M)$, on a :*

$$u(x) = \int_M G_a(x,y)\left(\Delta_g u + au\right)(y) dv_g(y). \tag{6.6.51}$$

En plus, G_a vérifie les propriétés suivantes :

***P1** : G_a est strictement positive et pour tout $x \in M$, $G_{a,x} \in C^\infty(M \setminus \{x\})$.*

***P2** : Pour tout $x \in M$, il existe $\beta_{a,x} \in H_2^p(M) \cap C^{0,\theta}(M) \cap C^\infty(M \setminus \{x\})$, pour tous $p \in]\frac{3}{2}, 3[$, $\theta \in]0,1]$ (dépendante de a et de x) telle que pour tout $y \in M \setminus \{x\}$:*

$$4\pi G_{a,x}(y) = \frac{\eta_x(y)}{d_g(x,y)} + \beta_{a,x}(y). \tag{6.6.52}$$

où la fonction de troncature $\eta_x \in C_c^\infty(\mathbb{B}_{2\rho_0}(x))$ est telle que $0 \leq \eta \leq 1$ et $\eta \equiv 1$ sur $\mathbb{B}_{\rho_0}(x)$. De plus, pour tout $y = r\theta, (r,\theta) \in]0, \rho_0[\times \mathbb{S}^{n-1}$ étant les coordonnées polaires dans la carte exponentielle $(\mathbb{B}_{2\rho_0}(x), \exp_x^{-1})$, on a :

$$\Delta_g \beta_{a,x} + a\beta_{a,x} := \begin{cases} -\Delta_g \left(\frac{\eta_x)}{d_g(x,y)}\right) - \frac{(a\eta_x)(y)}{d_g(x,y)} & \textit{pour tout } \ y \in M \setminus \mathbb{B}_{\rho_0}(x) \ , \\ \frac{-\partial_r(\ln \det(g))}{2d_g(x,y)^2} - \frac{a(y)}{d_g(x,y)} & \textit{pour tout } \ y \in \mathbb{B}_{\rho_0}(x). \end{cases} \tag{6.6.53}$$

et pour tout $p \in]1,3[$: $\Delta_g \beta_{a,x} + a\beta_{a,x} \in L^p(M)$.

Pour la preuve du Théorème 6.6.1, voir [43] et [18].

Proposition 6.6.1 (Intégration par parties) *Soient (M, g) une variété Riemannienne compacte de dimension n, $u \in H_2^p(M)$, $v \in H_1^q(M)$ tel que $p^{-1} + q^{-1} = 1$. Alors*

$$(E) : \quad \int_M (\Delta_g u) v dv_g = \int_M (\nabla u, \nabla v)_g dv_g.$$

Preuve de la Proposition 6.6.1 : En effet, u étant dans $H_2^p(M)$ (resp. v dans $H_1^q(M)$) donc il existe $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ (resp. $(v_i)_{i\in\mathbb{N}}$) dans $C^\infty(M)$ une suite de Cauchy pour la norme $\|\cdot\|_{H_2^p(M)}$ (resp. pour $\|\cdot\|_{H_1^q(M)}$) telle que $\|u_i - u\|_{H_2^p(M)}$ (resp. $\|v_i - v\|_{H_1^q(M)}$). Donc pour tout $i \in \mathbb{N}$,

$$(\mathrm{E}_i) : \quad \int_M (\Delta_g u_i) v_i dv_g = \int_M (\nabla u_i, \nabla v_i)_g dv_g.$$

On va démontrer que par passage à la limite dans (E_i), on obtiendra (E). Pour cela, on utilise les inégalités de Hölder pour écrire

$$\begin{aligned} \left| \int_M (\nabla u_i, \nabla v_i)_g dv_g - \int_M (\nabla u, \nabla v)_g dv_g \right| &\leq \left| \int_M (\nabla(u_i - u), \nabla v_i)_g dv_g \right| \\ &\quad + \left| \int_M (\nabla(v_i - v), \nabla u)_g dv_g \right| \\ &\leq \|\nabla(u_i - u)\|_p \|\nabla v_i\|_q + \|\nabla u\|_p \|\nabla(v_i - v)\|_q \end{aligned}$$

Puisque $u_i \to u$ dans $H_2^p(M)$ et $v_i \to u$ dans $H_1^q(M)$ donc

$$\lim_{i\to+\infty} \int_M (\nabla u_i, \nabla v_i)_g dv_g = \int_M (\nabla u, \nabla v)_g dv_g. \tag{6.6.54}$$

D'une façon similaire, on démontre que

$$\lim_{i\to+\infty} \int_M (\Delta_g u_i) v_i dv_g = \int_M (\Delta_g u) v dv_g. \tag{6.6.55}$$

Avec (6.6.54), (6.6.55) et par passage à la limite dans (E_i), on tire le résultat demandé.

Proposition 6.6.2 (Formule de Green) *Soient (M, g) une variété Riemannienne compacte de dimension 3, $u \in H_2^p(M)$, $a \in C^{0,\gamma}(M)$, $\gamma \in]0,1[$ et $f \in L^p(M)$, $p > 3/2$ tel que $\Delta_g + a$ est coercif et*

$$\Delta_g u + au = f \quad \text{au sens faible.} \tag{6.6.56}$$

Alors pour tout $x \in M$, on a :

$$u(x) = \int_M G_{a,x}(y) f(y) dv_g.$$

Preuve de la Proposition 6.6.2 : En effet, $C^\infty(M)$ est partout dense dans l'espace $(L^p(M), \|\cdot\|_p)$ donc il existe une suite $(f_k)_{k\in\mathbb{N}} \in C^\infty(M)$ telle que $f_k \to f$ pour la norme $\|\cdot\|_p$. Puisque $f_k \in C^\infty(M)$ et $a \in C^{0,\gamma}(M)$ donc il existe, d'après la Proposition (**??**), pour tout $k \in \mathbb{N}$, une fonction $u_k \in C^{2,\gamma}(M)$ telle que

$$(\mathrm{E}_k): \quad \Delta_g u_k + a u_k = f_k.$$

La Théorie standard des E.D.P. elliptique (voir Théorème (9.11) dans Gilbarg-Trudinger [25]) impliquent qu'il existe $C_1 = C_1(M, g) > 0$ telle que

$$\|u_k\|_{H_2^p(M)} \leq C_1 \left(\|u_k\|_p + \|f_k\|_p\right).$$

La dernière inégalité et les équations (E_k) impliquent

$$\|u_k\|_{H_2^p(M)} \leq \|f_k\|_p (C_1 \|a\|_\infty + 1).$$

En raisonnant sur $u_k - u_l$, ceci implique que la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans l'espace $(H_2^p(M), \|\cdot\|_{H_2^p(M)})$ qui est de Banach donc il existe $\hat{u} \in H_2^p(M)$ tel que $u_k \to \hat{u}$ pour la norme $\|\cdot\|_{H_2^p(M)}$. D'où, par passage à la limite dans les équations (E_k), on tire

$$\Delta_g \hat{u} + a\hat{u} = f \quad \text{au sens faible.} \tag{6.6.57}$$

Les équations (6.6.56) et (6.6.57) impliquent que

$$\Delta_g(\hat{u} - u) + a(\hat{u} - u) = 0 \quad \text{au sens faible.}$$

Cette dernière équation et la coercivité de l'opérateur $\Delta_g + a$ donnent $\hat{u} - u \equiv 0$. D'où la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge fortement dans $H_2^p(M)$ vers u. Par inégalité de Sobolev, ceci implique que $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge uniformement (dans $C^0(M)$) vers u. On considère maintenant $x \in M$. Comme les u_k sont dans $C^2(M)$ alors, d'après la définition de la fonction de Green $G_{a,x}$, on a :

$$u_k(x) = \int_M G_{a,x}(y) f_k(y) dv_g.$$

Soit $p' > 1$ le conjugué de p, c.à.d. $p^{-1} + (p')^{-1} = 1$. p' est aussi dans $]3/2, 3[$. On obtient par les inégalités de Hölder

$$\left| \int_M G_{a,x} \cdot (f_k - f) dv_g \right| \leq C_2 \|f_k - f\|_p \|d_g(\cdot, x)^{-1}\|_{p'}$$

où $C_2 > 0$ est une constante indépendante de k. Puisque $f_k \to f$ dans $L^p(M)$ donc

$$\lim_{k\to+\infty} \int_M G_{a,x}(y) f_k(y) dv_g = \int_M G_{a,x}(y) f(y) dv_g. \tag{6.6.58}$$

Par passage à la limite quand $k \to +\infty$, la relation (6.6.58) et la convergence uniforme de $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ vers u :

$$u(x) = \lim_{k\to+\infty} \int_M G_{a,x}(y) f_k(y) dv_g = \int_M G_{a,x}(y) f(y) dv_g.$$

□

6.7 Appendice VI : Théorème de Han-Lin sur les variétés compactes

Dans cet Appendice, nous donnons l'énoncé du Théorème original de Han-Lin tel qu'il est cité dans [27] (voir Théorème (4.1)). Ainsi nous démontrons deux versions adaptées de ce Théorème sur les domaines bornés dans $\mathbb{R}^n$ et dans les variétés compactes.

Théorème 6.7.1 *(De HAN-LIN) Soit $\mathbb{B}_1(0)$ la boule unité de $\mathbb{R}^n$ centrée en 0. Soient $(a_{ij})_{i,j=1,\dots,n} \in L^\infty(\mathbb{B}_1(0))$ et $c \in L^q(\mathbb{B}_1(0))$ avec $q > \frac{n}{2}$. Supposons qu'ils existent $\lambda, \Lambda > 0$ tels que pour tous $x \in \mathbb{B}_1(0), \xi \in \mathbb{R}^n$, on a :*

$$a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \lambda|\xi|^2 \quad et \ \|a_{ij}\|_\infty + \|C\|_q \leq \Lambda,$$

et qu'il existe $u \in H^1(\mathbb{B}_1(0))$ tel que

$$D_j(a_{ij}D_iu) + cu \leq f \quad faiblement\ sur\ H_0^1(\mathbb{B}_1(0)).$$

Si $f \in L^q(\mathbb{B}_1(0))$ alors $u^+ \in L^\infty_{loc}(\mathbb{B}_1(0))$ et, pour tout $p > 0$, il existe une constante $C = C(n, \lambda, \Lambda, p, q)$ tel que pour tout $\theta \in]0,1[$ on a :

$$\sup_{\mathbb{B}_\theta} u^+ \leq C\{\frac{1}{(1-\theta)^{\frac{n}{p}}}\|u^+\|_{L^p(\mathbb{B}_1(0))} + \|f\|_{L^q(\mathbb{B}_1(0))}\}.$$

Lemme 6.7.1 *On munit la boule $\mathbb{B}_2(0) \subset \mathbb{R}^n$ d'une métrique Riemannienne $\tilde{g}$. Soit $A > 0$ une constante dépendant de $\tilde{g}$ telle que pour tout $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{B}_2(0))$, on a :*

$$\|\phi\|_{L^{2^*}_{\tilde{g}}(\mathbb{B}_1(0))} \leq A\|\nabla\phi\|_{L^2_{\tilde{g}}(\mathbb{B}_1(0))}.$$

Soit $u \in H^1_{\tilde{g}}(\mathbb{B}_1(0)), u > 0$ p.p. tel que $\Delta_{\tilde{g}}u \leq fu$, faiblement sur $H^1_{0,\tilde{g}}(\mathbb{B}_1(0))$ et $\int_{\mathbb{B}_1(0)} |f|^r dv_{\tilde{g}} \leq k$, avec $r > \frac{n}{2}$. Donc $u \in L^\infty_{loc}(\mathbb{B}_1(0))$ et, pour tout $p > 0$, il existe une constante $C = C(n, \lambda, \Lambda, p, r)$ tel que pour tout $\theta \in]0,1[$ on a :

$$\sup_{\mathbb{B}_\theta(0)} u \leq C\frac{1}{(1-\theta)^{\frac{n}{p}}}\|u\|_{L^p_{\tilde{g}}(\mathbb{B}_1(0))}.$$

Preuve du Lemme (6.7.1) **:** En effet, puisque $\tilde{g}$ et δ sont équivalentes sur le pavé unité $(\mathbb{B}_1(0), \|\cdot\|_1)$, donc il existe une constante $\kappa > 0$ telle que pour tous $x \in (\mathbb{B}_1(0), \|\cdot\|_1), \xi \in \mathbb{R}^n$, on a :

$$\kappa^{-1}\delta(\xi,\xi) \leq \tilde{g}(\xi,\xi) \leq \kappa\delta(\xi,\xi) \tag{6.7.59}$$

et

$$\kappa^{-\frac{n}{2}}dX \leq dv_{\tilde{g}} \leq \kappa^{\frac{n}{2}}dX. \tag{6.7.60}$$

$\tilde{g}$ étant une métrique Riemannienne donc la matrice $(\tilde{g}^{ij})_{i,j=1,\dots,n}$, vue comme étant une forme bilinéaire, est définie positive, i.e. il existe $\lambda > 0$ tel que pour tous $x \in \mathbb{B}^1(0), \xi \in \mathbb{R}^n$,

$$\tilde{g}^{ij}(x)\xi_i(x)\xi_j(x) \geq \lambda|\xi|^2. \tag{6.7.61}$$

D'autre part, f étant dans $L^p_{\tilde{g}}(\mathbb{B}_1(0))$, donc en utilisant (6.7.59) et (6.7.60), on tire que :

$$f \in L^p_\delta(\mathbb{B}_1(0)) \ \text{ et } \int_{\mathbb{B}_1(0)} |f|^r dX \leq \kappa^{\frac{n}{2}}K. \tag{6.7.62}$$

(6.7.62) et $(\tilde{g}^{ij})_{i,j} \in C^{\infty}(\mathbb{B}_1(0), \|\cdot\|_1)$ impliquent qu'il existe $\Lambda > 0$ tel que

$$\sum_{i,j=1}^{n} \|\tilde{g}^{ij}\|_{\infty,\mathbb{B}_1(0)} + \|f\|_r \leq \Lambda. \tag{6.7.63}$$

Soit $u \in H^1_{\tilde{g}}(\mathbb{B}_1(0))$ vérifiant $\Delta_{\tilde{g}} u \leq fu$ faiblement sur $H^1_{0,\tilde{g}}(\mathbb{B}_1(0))$. En utilisant les inégalités (6.7.59) et (6.7.60), on aura que $u \in H^1_{\delta}(\mathbb{B}_1(0))$. En plus, si $\phi \in C^{\infty}_c(\mathbb{B}_1(0))$ alors :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{B}_1(0)} \nabla_j(\tilde{g}^{ij}\nabla_i u)\phi dX &= \int_{\mathbb{B}_1(0)} \tilde{g}^{ij}\nabla_i u \nabla_j \phi dX \leq \kappa^{\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{B}_1(0)} < \nabla u, \nabla\phi >_{\tilde{g}} dv_{\tilde{g}} \\ &\leq \kappa^{\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{B}_1(0)} fu\phi dv_{\tilde{g}} \leq \kappa^n \int_{\mathbb{B}_1(0)} fu\phi dX. \end{aligned} \tag{6.7.64}$$

Ayant (6.7.61), (6.7.62), (6.7.63), (6.7.64) et en appliquant le Théorème (6.7.1), on tire le résultat. □

Lemme 6.7.2 *Soit (M,g) une variété Riemannienne compacte. Soient $u \in H^2_1(M), u \geq 0$ et $y \in M$. On considère un domaine ouvert Ω dans M et suppose que u vérifie*

$$\begin{cases} \Delta_g u \leq fu, \ \textit{au sens des distributions sur} \Omega, \\ \int_{\Omega} |f|^r dv_g \leq K, \end{cases}$$

avec $K = K(M,g,f,r)$, $r > \frac{n}{2}$, donc pour tout $\omega \subset\subset \Omega$ et tout $p > 0$, il existe $C = C(M,g,K,p,r,\Omega,\omega) > 0$ (ne dépendant pas de u) telle que

$$\|u\|_{L^{\infty}(\omega)} \leq C\|u\|_{L^p(\Omega)}.$$

Preuve du Lemme (6.7.2) **:** En effet, on considère $\omega \subset\subset \Omega$, $y \in \omega$ et $\exp_y^{-1} : \Omega_y \to \mathbb{R}^n$ l'application exponentielle en y. On suppose sans perte de généralité que $\exp_y^{-1}(\Omega_y) = \mathbb{B}_{\frac{2R_y}{3}}(0)$ et que $\exp_y^{-1}(\omega_y) = \mathbb{B}_{R_y/3}(0)$ avec $R_y \in]0, i_g(M)[$. D'après le Lemme (6.7.1), il suffit de démontrer qu'il existe $A_y > 0$ telle que pour tout $\phi \in C^{\infty}_c(\mathbb{B}_{\frac{R_y}{2}}(0))$, on a :

$$\|\phi\|_{L^{2^*}_{\tilde{g}_y}(\mathbb{B}_{\frac{2R_y}{3}}(0))} \leq A_y \|\nabla\phi\|_{L^2_{\tilde{g}_y}(\mathbb{B}_{\frac{2R_y}{3}}(0))},$$

avec $\tilde{g}_y = \exp_y^* g$. Soit $\phi \in C^{\infty}_c(\mathbb{B}_{\frac{R_y}{2}}(0)$. On a :

$$\begin{aligned}\|\phi\|_{L^{2^*}_{\tilde{g}_y}(\mathbb{B}_{\frac{2R_y}{3}}(0))} &= \left(\int_{\mathbb{B}_{\frac{2R_y}{3}}(0)} |\phi|^{2^*}\sqrt{|\tilde{g}_y|}dx\right)^{\frac{2}{2^*}} \leq C_y^{\frac{n}{2^*}} \left(\int_{\mathbb{B}_{\frac{2R_y}{3}}(0)} |\phi|^{2^*} dX\right)^{\frac{2}{2^*}} \\ &\leq AC_y^{\frac{n-2}{2}} \int_{\mathbb{B}_{\frac{2R_y}{3}}(0)} |\nabla\phi|^2_{\delta} dX \leq AC_y^{\frac{n-2}{2}} \int_{\mathbb{B}_{\frac{2R_y}{3}}(0)} C_y |\nabla\phi|^2_{\tilde{g}_y} \times C_y^{\frac{n}{2}} \sqrt{|\tilde{g}_y|} dX \\ &\leq AC_y^n \|\nabla\phi\|_{L^2_{\tilde{g}_y}(\mathbb{B}_{\frac{2R_y}{3}}(0))},\end{aligned}$$

où C_y est la constante qui vérifie sur $\mathbb{B}_0(\frac{2R_y}{3}(0))$ au sens des formes bilinéaires : $C_y^{-1}\delta \leq \tilde{g}_y \leq C_y\delta$, et $A > 0$ est la constante de l'inclusion $D^2_1(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^{2^*}(\mathbb{R}^n)$. On termine la démonstartion en supposant que $A_y = AC_y^n$. □

Bibliographie

[1] A. Ambrosetti and P.H. Rabinowitz, *Dual variational methods in critical point theory and applications*, J. functional Analysis **14** (1974), 349–381.

[2] T. Aubin, *Équations différentielles non linéaires et problème de Yamabe concernant la courbure scalaire*, J. Math. Pures Appl. **55** (1976), 269–296.

[3] ———, *Problèmes isopérimétriques et espaces de Sobolev*, J. Math. Pures Appl. **11** (1976), 573–598.

[4] ———, *Nonlinear analysis on Manifolds. Monge-Ampère equations*, Vol. 252, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Springer, 1982.

[5] T. Aubin and Y.-Y. Li, *On the best Sobolev inequality*, J. Math. Pures Appl. (9) **78** (1999), no. 4, 353–387.

[6] M. Badiale and G. Tarantello, *A Sobolev-Hardy inequality with applications to a nonlinear elliptic equation arising in astrophysics*, Arch. Ration. Mech. Anal. **163** (2002), no. 4, 259–293.

[7] H. Brézis and L. Nirenberg, *Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents*, Comm. Pure and Appl. Math. **36** (1983), 437–477.

[8] Ch. Brouttelande, *The best-constant problem for a family of Gagliardo-Nirenberg inequalities on a compact Riemannian manifold*, Proc. Edinb. Math. Soc. (2) **46** (2003), no. 1, 117–146.

[9] L. Caffarelli, R. Kohn, and L. Nirenberg, *First order interpolation inequality with weights*, Composito Math. **53** (1984), 259–275.

[10] F. Catrina and Z.-Q. Wang, *On the Caffarelli-Kohn-Nirenberg inequalities : sharp constants, existence (and nonexistence), and symmetry of extremal functions*, Comm. Pure Appl. Math. **54** (2001), no. 2, 229–258.

[11] J. Ceccon and M. Montenegro, *Optimal Riemannian L^p-Gagliardo-Nirenberg inequalities revisited*, J. Differential Equations **254** (2013), no. 6, 2532–2555.

[12] K.S. Chou and C. W. Chu, *On the best constant for a weighted Sobolev-Hardy inequality*, J. London Math. Soc. (2) **48** (1993), 137–151.

[13] Z. Djadli, *Nonlinear elliptic equations with critical Sobolev exponent on compact Riemannian manifolds*, Calc. Var. **8** (1999), 293–326.

[14] J. Dolbeault, M.J. Esteban, M. Loss, and G. Tarantello, *On the symmetry of extremals for the Caffarelli-Kohn-Nirenberg inequalities*, Adv. Nonlinear Stud. **9** (2009), no. 4, 713–726.

[15] O. Druet, *Optimal Sobolev inequality and Extremal functions. The three-dimensional case*, Indiana University Mathematics Journal **51** (2002), no. 1, 69–88.

[16] ———, *Compactness for Yamabe Metrics in Low Dimensions*, IMRN International Mathematics Research Notices **23** (2004), 1143–1191.

[17] ———, *The best constants problem in Sobolev inequalities*, Math. Ann. **314** (1999), 327–346.

[18] O. Druet, E. Hebey, and F. Robert, *Blow-Up Theory For Elliptic PDEs In Riemannian Geometry*, Vol. 45, Princeton University Press, Princeton and Oxford, 2004.

[19] P. Esposito and F. Robert, *Mountain pass critical points for Paneitz-Branson operators*, Calc. Var. **15** (2002), 493–517.

[20] R. Fillippucci, P. Pucci, and F. Robert, *On a p-Laplace equation with multiple critical nonlinearities*, J. Math. Pures Appl. **91** (2009), 156–177.

[21] N. Ghoussoub and X.S. Kang, *Hardy-Sobolev critical elliptic equations with boundary singularities*, AIHP-Analyse non linéaire **21** (2004), 767–793.

[22] N. Ghoussoub and A. Moradifam, *Functional inequalities : new perspectives and new applications*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 187, American Mathematical Society, Providence, RI, 2013.

[23] N. Ghoussoub and F. Robert, *The effect of curvature on the best constant in the Hardy-Sobolev inequalities*, GAFA, Geom. funct. anal. **16** (2006), 1201–1245.

[24] N. Ghoussoub and C. Yuan, *Multiple solutions for quasi-linear PDEs involving the critical Sobolev and Hardy exponents*, Trans. Amer. Math. Soc. **352** (2000), no. 12, 5703–5743.

[25] G. Gilbarg and N.S. Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order, Second edition*, Vol. 224, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Springer, Berlin, 1983.

[26] G. Giraud, *Sur le problème de Dirichlet généralisé*, Ann. Sc. Ecole Norm. Sup. **46** (1929), 131–245.

[27] Q. Han and F. Lin, *Elliptic partial differential equations*, CIMS Lecture Notes, Courant Institute of Mathematical Sciences, Vol. 1, 1997. Second edition published by the American Mathematical Society, 2000.

[28] E. Hebey, *Sharp Sobolev inequalities of Second Order*, The journal of Geometric Analysis **13** (2003), no. 1, 145–162.

[29] ———, *Introduction à l'analyse non linéaire sur les Variétés*, Diderot, 1997.

[30] ———, *Nonlinear analysis on Manifolds : Sobolev spaces and inequalities*, American Mathematical Society, Collection : Courant lecture notes in mathematics, 2001.

[31] ———, *Fonctions extrémales pour une inégalité de Sobolev Optimale dans la classe conforme de la Sphère*, Jour. Math. Pures Appl. **77** (1998), 721–733.

[32] E. Hebey and M. Vaugon, *The best constant problem in the Sobolev embedding theorem for complete Riemannian Manifolds*, Duke Math. J. **79** (1995), 235–279.

[33] T. Horiuchi, *Best constant in weighted Sobolev inequality with weights being powers of distance from the origin*, J. Inequal. Appl. **1** (1997), no. 3, 275–292.

[34] H. Jaber, *Hardy-Sobolev equations on compact Riemannian manifolds*, Nonlinear Analysis : Theory, Methods and Applications **103** (2014), 39–54.

[35] ———, *Optimal Hardy-Sobolev inequalities on compact Riemannian manifolds* (2014). Preprint.

[36] D. Kang and S. Peng, *Existence of solutions for elliptic equations with critical Sobolev-Hardy exponents*, Nonlinear Analysis **56** (2004), 1151–1164.

[37] J. Lee and T. Parker, *The Yamabe problem*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **17** (1987), no. 1, 37–91.

[38] Y. Li, B. Ruf, Q. Guo, and P. Niu, *Quasilinear elliptic problems with combined critical Sobolev-Hardy terms*, Annali di Matematica **192** (2013), 93–113.

[39] E.H. Lieb, *Sharp constants in the Hardy-Littlewood-Sobolev and related inequalities*, Ann. of Mathematics **118** (1983), 349–374.

[40] V. G. Maz'ja, *Sobolev spaces*, Springer-Verlag, Berlin, 1985.

[41] R. Musina, *Existence of extremals for the Maz'ya and for the Caffarelli-Kohn-Nirenberg inequalities*, Nonlinear Anal. **70** (2009), no. 8, 3002–3007.

[42] P. Pucci and R. Servadei, *Existence, non existence and regularity of radial ground states for p-Laplacian equations with singular weights*, Ann. I. H. Poincaré **25** (2008), 505-537.

[43] F. Robert, *Existence et Asymptotiques Optimales Fonctions de Green des Opérateurs Elliptiques du Second Ordre*, Notes Personnelles (2009).

[44] E. Rodemich, *The Sobolev inequalities with best possible constant*, Analysis seminar at California Institute of technology (1966).

[45] R. Schoen, *Conformal deformation of a Riemannian metric to a constant scalar curvature*, Journal of Differential Geometry **118** (1984), 479–495.

[46] R. Schoen and S. Yau, *On the proof of the positive mass conjecture in general relativity*, Comm. Math. Phys. **65** (1979), no. 1, 45–76.

[47] ———, *Proof of the positive action-conjecture in quantum relativity*, Phys. Rev. Lett. **42** (1979), no. 9, 547–548.

[48] G. Talenti, *Best constant in Sobolev inequality*, Ann. di Matem. Pura ed Appl. **110** (1976), 353–372.

[49] A. Tertikas and K. Tintarev, *On the existence of minimizers for the Hardy-Sobolev-Maz'ya inequality*, Ann. Mat. Pura Appl. (2006).

[50] E.H.A. Thiam, *Hardy and Hardy-Soboblev Inequalities on Riemannian Manifolds*, Pacific Journal of Mathematics (2013). Preprint.

[51] N.S. Trudinger, *Remarks concerning the conformal deformation of Riemannian structures on compact Manifolds*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa **22** (1968), 265–274.

[52] H. Yamabe, *On a Deformation of Riemannian Structures on Compact Manifolds*, Osaka Math. J. **12** (1960), 21–37.

Résumé : *Dans ce Manuscrit, nous étudions l'influence de la géométrie sur les équations de Hardy-Sobolev perturbées ou non sur toute variété Riemannienne compacte sans bord de dimension* $n \geq 3$.

Plus précisément, dans le cas non perturbé nous démontrons que pour toute dimension de la variété strictement supérieure à 3*, l'existence d'une solution (ou plutôt une condition suffisante d'existence) dépendra de la géométrie locale autour de la singularité. En revanche, dans le cas où la dimension est égale à* 3*, c'est la géométrie globale (particulièrement, la masse de la fonction de Green) de la variété qui comptera.*

Dans le cas d'une équation à terme perturbatif sous-critique, nous démontrons que l'existence d'une solution dépendra uniquement de la perturbation pour les grandes dimensions et qu'une interaction entre la géométrie globale de la variété et la perturbation apparaîtra en dimension 3.

Enfin, nous établissons une inégalité optimale de Hardy-Sobolev Riemannienne, la variété étant avec ou sans bord, où nous démontrons que la première meilleure constante est celle des inégalités Euclidiennes et est atteinte.

Mots Clefs : *Variété Riemannienne compacte, Équation de Hardy-Sobolev, Inégalité de Hardy-Sobolev, Meilleure constante, Courbure scalaire, Masse de la fonction de Green.*

Abstract : *In this Manuscript, we investigate the influence of geometry on the Hardy-Sobolev equations on the compact Riemannian manifolds without boundary of dimension* $n \geq 3$.

More precisely, we prove in the non perturbative case that the existence of solutions depends only on the local geometry around the singularity when $n \geq 4$ *while it is the global geometry of the manifold when* $n = 3$ *that matters.*

In the presence of a perturbative subcritical term, we prove that the existence of solutions depends only on the perturbation when $n \geq 4$ *while an interaction between the perturbation and the global geometry appears in dimension* 3.

Finally, we establish an Optimal Hardy-Sobolev inequality for all compact Riemannian manifolds, with or without boundary, where we prove that the Riemannian sharp constant is the one for the Euclidean inequality and is achieved.

Keywords : *Compact Riemannian manifold, Hardy-Sobolev Equation, Hardy-Sobolev Inequality, Sharp constant, Scalar curvature, Mass of the Green function.*