



AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>



UNIVERSITÉ
DE LORRAINE



Institut Jean Lamour

Université de Lorraine
École doctorale Énergie, Mécanique et Matériaux (EMMA – ED 409)
Collegium Sciences et Technologies

Institut Jean Lamour – CNRS – UMR 7198
Département Nanomatériaux, Électronique et Vivant
<http://ijl.univ-lorraine.fr>

Sur la modélisation du tissu cardiaque comme un milieu à microdilatation : une investigation numérique

Thèse
présentée devant
l'Université de Lorraine
par

Nicolas THURIEAU

pour l'obtention du titre de
Docteur de l'Université de Lorraine
en Sciences des Matériaux

Soutenue publiquement le 14 Janvier 2014 devant la commission d'examen :

Rapporteurs :

Monsieur **Salah NAILI**, Professeur à l'Université Paris-Est Créteil Val de Marne.
Monsieur **Moussa NAÏT ABDELAZIZ**, Professeur à l'Université des Sciences et Technologies de Lille.

Examineurs :

Monsieur **Jean-Marie DUBOIS**, Directeur de Recherche CNRS à l'Université de Lorraine.
Monsieur **Sébastien LAPORTE**, Professeur à l'Ecole Nationale Supérieure d'Arts et Métiers, Paris.
Monsieur **Xiong WANG**, Professeur à l'Université de Lorraine.

Directeur de Thèse :

Monsieur **Richard KOUITAT-NJIWA**, Maître de conférences (HDR) à l'Université de Lorraine.



UNIVERSITÉ
DE LORRAINE



Institut Jean Lamour

Université de Lorraine
École doctorale Énergie, Mécanique et Matériaux (EMMA – ED 409)
Collegium Sciences et Technologies

Institut Jean Lamour – CNRS – UMR 7198
Département Nanomatériaux, Électronique et Vivant
<http://ijl.univ-lorraine.fr>

Sur la modélisation du tissu cardiaque comme un milieu à microdilatation : une investigation numérique

Thèse
présentée devant
l'Université de Lorraine
par

Nicolas THURIEAU

pour l'obtention du titre de
Docteur de l'Université de Lorraine
en Sciences des Matériaux

Soutenue publiquement le 14 Janvier 2014 devant la commission d'examen :

Rapporteurs :

Monsieur **Salah NAILI**, Professeur à l'Université Paris-Est Créteil Val de Marne.
Monsieur **Moussa NAÏT ABDELAZIZ**, Professeur à l'Université des Sciences et Technologies de Lille.

Examineurs :

Monsieur **Jean-Marie DUBOIS**, Directeur de Recherche CNRS à l'Université de Lorraine.
Monsieur **Sébastien LAPORTE**, Professeur à l'Ecole Nationale Supérieure d'Arts et Métiers, Paris.
Monsieur **Xiong WANG**, Professeur à l'Université de Lorraine.

Directeur de Thèse :

Monsieur **Richard KOUITAT-NJIWA**, Maître de conférences (HDR) à l'Université de Lorraine.

Remerciements

Je souhaite remercier en premier lieu Monsieur Richard Kouitat, mon directeur de thèse, pour sa patience et sa disponibilité. Ses idées et ses connaissances m'ont guidé tout au long de cette thèse.

Je suis très reconnaissant envers Monsieur Jean-Marie Dubois qui m'a fait l'honneur de présider le jury de thèse et pour son soutien à la création de l'équipe 404.

Je tiens à témoigner toute ma reconnaissance à Messieurs Salah Naili et Moussa Naït-Abdelaziz pour avoir accepté d'être rapporteur. Je remercie également Messieurs Sébastien Laporte et Xiong Wang d'avoir examiné mes travaux de thèse.

Il me faut aussi remercier les autres membres de notre petite équipe Micro et Nanomécanique pour le Vivant : M'Barek Taghite qui m'a fait entrer dans le monde de la recherche et Jean-Philippe Jehl pour ces discussions expérimentales autant scientifiques que sportives.

Je remercie également Martine Tailleur, Géraldine Georges, Christine Sartori et Vanessa Binet pour leur gentillesse et leur efficacité à résoudre les problèmes administratifs.

Ce travail n'aurait pas été possible sans l'excellente ambiance au sein du laboratoire, certains sont partis mais heureusement le contact est resté. Je pense notamment à Grégory Arnoult ami toujours prêt à rendre service que ce soit pour le boulot ou pour boire un verre, aux « petits Bretons » Maud Jullien et Gwendal Lebars, au « Toulousaing » Cyril Sarrieu, co-bureau toujours un peu stressé mais avec le sourire, à Jonathan Chaves digne héritier de Bear Grylls, à Tony Thiriet le sportif dur à suivre, à Hugo Van Landeghem me motivant toujours pour les sorties VTT, à Alan Corvisier qui dépose bientôt sa thèse, à Martin Schwartz qui a connu également les grands moments de solitude devant une erreur qui s'est glissé dans le code, à David Pilloud qui m'a permis de faire un peu d'expérimental, à Grégory Marcos « gestionnaire » et poète de la cafèt', à Régis Peignier pour qui les montages maison n'ont plus de secrets, à Bérenger Boreux pour toutes nos discussions et ses connaissances sur l'histoire des voitures, à Frédéric Gauet sans qui ma vieille moto serait sûrement à la casse, et à mon « coturne » André Mézin maître dans l'art de dénicher les fautes de français.

Je tiens également à remercier Carine Petitjean, Nolwenn Tranvouez, Alexis Boileau, Aurore Andrieux, Cédric Noël, Thomas Gries, Fabien Capon, Hong Yuan Zhang et William Chamorro pour leur bonne humeur égayant ainsi la vie du labo.

Je souhaite également saluer Francis Kosior et Patricio Francisco pour leur travail, leur disponibilité et leurs conseils pour tous les problèmes informatiques.

Un grand merci à Erwan Etienne pour sa patience dans l'art de polir les échantillons et également à Sylvie Migot-Choux, Christine Gendarme, Jacques Paties, Patrice Poirot et Andréa Succu pour leur disponibilité et leurs discussions.

Je tiens enfin à remercier Stelly pour m'avoir supporté tout au long de cette thèse...

*"Tout le monde croit que le fruit est l'essentiel de l'arbre
quand, en réalité, c'est la graine."*

Friedrich Nietzsche

Table des matières générale

Introduction générale.....	7
Chapitre 1 Contexte de l'étude	9
I. Introduction	13
II. Approches de modélisation du comportement des tissus biologiques	17
III. Les techniques numériques	22
IV. Conclusion.....	24
Chapitre 2 Présentation et mise en place de la stratégie numérique	35
I. Introduction	39
II. Modèles de comportement et équations de champs étudiés.....	40
II.1. Les milieux piézoélectriques	40
II.2. Les milieux à microdilatation.....	41
III. Application de la stratégie numérique.....	44
III.1. Partitionnement des champs.....	44
III.1.1. Cas piézoélectrique	44
III.1.2. Cas en microdilatation	46
III.2. Champs complémentaires	47
III.3. Champs particuliers.....	48
III.3.1. Equations piézoélectriques.....	50
III.3.2. Equations en microdilatation	52
III.4. Obtention des équations finales.....	54

III.4.1.	Problèmes piézoélectriques.....	54
III.4.2.	Problèmes à microdilatation :	55
IV.	Conclusion.....	56
Chapitre 3 Validation et application aux milieux micromorphes		59
I.	Introduction	63
II.	Cas des solides piézoélectriques	64
II.1.	Cas purement mécanique	64
II.2.	Cas piézoélectrique	66
II.2.1.	Cas d'un chargement mécanique uniforme	67
II.2.2.	Influence des paramètres de la méthode numérique.....	71
II.2.2.1.	Influence des paramètres de forme q et c :	71
II.2.2.2.	Influence du paramètre α :	72
II.2.3.	Cas d'une induction électrique uniforme.....	73
II.2.4.	Cas de la combinaison des chargements mécanique et électrique.....	75
II.2.5.	Cas de torsion d'un solide piézoélectrique	78
II.2.6.	Cas d'un solide sollicité hors axe d'isotropie	79
III.	Conclusion.....	82
IV.	Cas des milieux à microdilatation	83
IV.1.	Exemples numériques	83
IV.2.	Evolution des solutions en fonction des paramètres de la méthode	84
IV.2.1.	Influence du paramètre de forme q	84
IV.2.2.	Influence du paramètre β	85
IV.3.	Evolution des solutions en fonction des paramètres dus à la microdilatation....	86
IV.3.1.	Influence du paramètre a	88

IV.3.2.	Influence du paramètre b	89
IV.3.3.	Influence du paramètre η	90
IV.4.	Cas de traction simple	91
IV.5.	Chargement d'un échantillon tubulaire	94
V.	Conclusion.....	97
Chapitre 4 Milieux non homogènes à microdilatation.....		103
I.	Introduction	107
II.	Comportement face à l'introduction d'une surface nécrosée.....	109
III.	Théorie de la microdilatation avec paramètre de couplage variable	117
III.1.	Rappel des équations du problème	117
III.2.	Développement de la méthode numérique	118
IV.	Résultats numériques.....	122
IV.1.	Un cas simple	122
IV.2.	Le cœur comme milieu à microdilatation	127
IV.2.1.	Modélisation du cœur sain et de l'introduction d'une zone nécrosée.....	128
IV.2.1.1.	La Fraction d'Éjection du Ventricule Gauche.....	128
IV.2.1.2.	Influence d'une zone infarctique	130
IV.2.1.3.	Influence de la localisation de l'infarctus.....	132
IV.2.2.	Infarctus multiples	135
IV.2.2.1.	Influence de deux zones nécrosées et aggravation de l'état des tissus. 135	
IV.2.2.2.	Comparaison de l'influence de zones nécrosées à volume équivalent. 140	
IV.2.2.3.	Cas plus réalistes de modélisation du ventricule.....	141
V.	Conclusion.....	144

Conclusion générale.....	151
Annexe 1.....	153
Annexe 2.....	155

Introduction générale

D'après l'Organisation Mondiale de la Santé, les maladies cardiovasculaires sont la première cause de mortalité dans le monde. D'après l'Institut de Veille Sanitaire, en se basant sur une étude réalisée sur la période allant de 2002 à 2008, il y a environ 60000 personnes atteintes d'un infarctus du myocarde par an en France [1]. Les maladies cardiovasculaires étaient en 2008 la deuxième cause de décès en France. Parmi ces maladies, les cardiopathies ischémiques sont responsables du plus grand nombre de décès [2]. Il y a une activité de recherche importante pour prévenir et guérir cette pathologie. Cette activité couvre un champ scientifique très large s'étendant de la biologie à la modélisation mathématique. Parmi les aspects relevant de ce dernier point, on a la modélisation du comportement mécanique du tissu biologique.

Du fait de leur complexité organisationnelle et constitutionnelle, les tissus biologiques sont difficiles à modéliser mécaniquement. Les principaux axes de développement sont l'application des théories mathématiques d'homogénéisation, l'application des techniques multi-échelles, l'application de la théorie des mixtures, ou encore l'application des modèles phénoménologiques plus ou moins élaborés. Dans le cadre de la mécanique classique des milieux continus, ces approches phénoménologiques sont très utilisées en relation avec des modèles de croissance et de remodelage. Ces dernières années, certains auteurs se sont intéressés à l'application des concepts de la mécanique des milieux continus étendus aux tissus biologiques. Le tissu osseux a par exemple été considéré comme un milieu de Cosserat ou milieu micropolaire. Ce type de milieu est une particularisation du milieu continu de Eringen qui est l'un des meilleurs représentants des milieux continus étendus. Il permet de traduire à l'échelle macroscopique les microdéformations de la microstructure du milieu. Cette approche nous a semblé l'une des mieux adaptées à la modélisation du comportement mécanique du tissu cardiaque vis-à-vis de l'infarctus du myocarde. En effet, cette pathologie est caractérisée par la nécrose d'une zone du cœur. Il s'agit donc d'une modification de la microstructure de la partie concernée. Nous avons postulé qu'il s'agit d'une perte de microdilatation se manifestant comme une augmentation de la rigidité. La particularisation du modèle de Eringen utilisée dans ce travail est donc celle du milieu à microdilatation. Une description plus détaillée des diverses approches de modélisation du tissu biologique est

donnée dans le chapitre 1. Les équations de champ, permettant de simuler la réponse du tissu à un stimulus, sont du type couplées. Leur traitement analytique n'est en général pas possible et il faut avoir recours à une méthode numérique de résolution. Les principales approches numériques possibles sont énumérées dans le chapitre 1 également. On peut bien entendu adopter la méthode des éléments finis via des codes commerciaux de résolution de problèmes multi-physiques tels que COMSOL. Cependant, pour le type de problèmes que nous avons en vue, la simulation peut devenir très vite lourde. Nous avons alors opté pour une stratégie nouvelle qui couple la méthode des éléments de frontière isotrope à la méthode de collocation par points appliquée à un système d'équations aux dérivées partielles. La description de cette approche numérique pour des problèmes couplés (multi-physique) fait l'objet du chapitre 2. Dans le chapitre 3, nous démontrons la robustesse et la stabilité de la méthode sur l'exemple d'un milieu piézoélectrique et par la suite d'un milieu à microdilatation. La fiabilité de l'approche numérique étant démontrée, nous l'appliquons dans le chapitre 4 à l'analyse proprement dite du tissu cardiaque. Nous modélisons le ventricule gauche comme un cylindre et utilisons la fraction d'éjection du ventricule gauche comme critère clinique. Considérant que dans une zone nécrosée, le couplage micro-macro est très faible, nous montrons que la fraction d'éjection est largement diminuée et que la déformation de l'organe devient non uniforme. Dans l'ensemble, les résultats obtenus vont dans le même sens que les observations cliniques. L'approche considérée mérite donc de retenir l'attention et devra par la suite prendre en compte des aspects tels que l'anisotropie pour se rapprocher encore plus de la réalité du tissu cardiaque.

- [1] de Peretti C, Chin F, Tuppin P, et Danchin N, « Personnes hospitalisées pour infarctus du myocarde en France : tendances 2002-2008 », *Bull. Epidemiol. Hebd.*, n° 41, p. 459-65, 2012.
- [2] Aouba A, Eb M, Rey G, Pavillon G, et Jouglu E, « Données sur la mortalité en France : principales causes de décès en 2008 et évolutions depuis 2000 », *Bull. Epidemiol. Hebd.*, n° 22, p. 249-55, 2011.

Chapitre 1

Contexte de l'étude

Table des matières du chapitre 1 :

Chapitre 1	Contexte de l'étude	9
I.	Introduction	13
II.	Approches de modélisation du comportement mécanique des tissus biologiques	17
III.	Les techniques numériques	22
IV.	Conclusion.....	24

I. Introduction

La structure des tissus biologiques est très complexe. La connaissance fine de leur réponse à un stimulus extérieur apparaît aujourd'hui comme un impératif tant pour des objectifs thérapeutiques que pour la réalisation de bio-substituts.

La modélisation du comportement mécanique du tissu biologique n'est pas évidente. C'est un milieu vivant, siège de nombreux processus d'échanges qui interagissent forcément avec les caractéristiques mécaniques. Cette tâche est d'autant plus complexe que le tissu biologique présente en général une structure à plusieurs échelles comme on peut le constater sur la *Figure 1.1* ci-après qui schématise le tissu cardiaque objet de ce travail.

Dans la description qui suit, nous faisons intentionnellement abstraction des grosses hétérogénéités telles que les mitochondries ou les capillaires sanguins. L'élément constitutif principal du tissu est la fibre musculaire. Cette dernière est constituée de protéines : l'actine et la myosine. Les fibres, qui sont en fait de très grandes cellules (les plus longues du corps humain), sont entourées par une gaine conjonctive dont les cellules vont sécréter le collagène (qui est une protéine fibreuse).

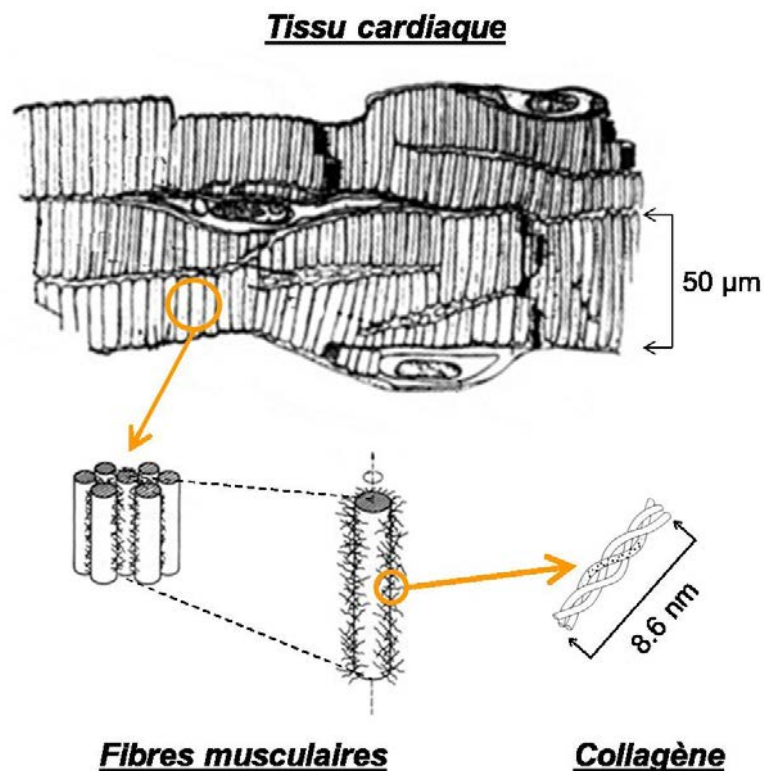


Figure 1.1 : Structure complexe du tissu cardiaque [1].

Ce collagène est également un élément très important du muscle car il représente en général un quart de sa masse protéique. Comme on peut le constater sur la *Figure 1.1*, le collagène a une forme complexe. Il est disposé en triple hélice. Chaque hélice est constituée de chaînes d'acides aminés.

Remarquons que les dimensions caractéristiques de ces divers éléments vont de quelques nanomètres à plusieurs centaines de microns. Une microstructure aussi complexe laisse supposer un comportement macroscopique atypique.

Le contexte de ce travail est celui de la thérapie cardiaque après un infarctus ischémique. C'est une pathologie qui a pour conséquence la perte de vascularisation d'une zone du cœur. Nous dirons par la suite que le tissu cardiaque dans cette région est endommagé. Une des voies de thérapie, envisagée à l'issue d'un infarctus cardiaque, est la thérapie tissulaire. Elle consiste à venir « coller » un néo-tissu sur la zone infarctée, espérant ainsi une revascularisation de la zone, donc une réparation tissulaire (*Figure 1.2*). La recouvrance fonctionnelle de l'organe peut alors être mesurée par le biais de critères cliniques tels que la fraction d'éjection du ventricule gauche (FEVG). On conçoit aisément que le nombre d'expériences à réaliser dans ce cadre ne peut pas être exhaustif. Il faut recourir à des méthodes ex-vivo. Leur efficacité repose sur la connaissance du matériau dans l'état sain comme dans l'état endommagé. Les diverses caractéristiques à appréhender sont de nature mécanique, électrique et voire magnétique et thermique. Nous ne considérons que les propriétés mécaniques. On conçoit aisément que l'optimisation du processus de réparation tissulaire passe par une étape de caractérisation fine du comportement des éléments de l'ensemble tout au long du processus de croissance.

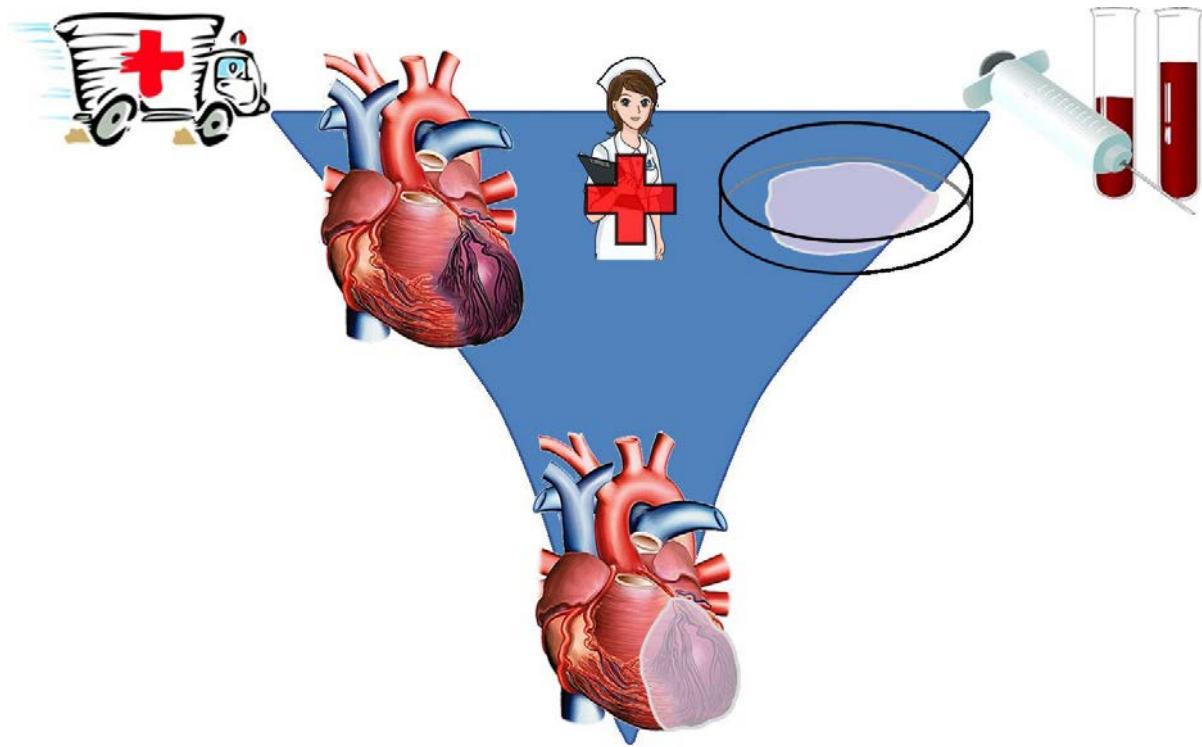


Figure 1.2 : Réparation tissulaire.

A l'issue d'un infarctus, le remodelage ventriculaire commence quelques heures à peine après l'incident (*Figure 1.3*). Il s'agit d'une réorganisation structurale de parties saines du ventricule afin de permettre à l'organe de continuer à remplir sa fonction. Implicitement, même les zones saines deviennent « malades ». De nombreuses questions surviennent. Par exemple, peut-on espérer un remodelage inverse à l'issue d'une réparation tissulaire ? La réparation tissulaire améliore-t-elle la contractilité des points de la zone nécrosée ? Peut-on espérer un champ de déformation plus uniforme qu'en présence de la zone nécrosée uniquement ? Le remodelage du ventricule gauche qui accompagne très souvent l'infarctus peut-il être inversé ? Ce remodelage a pour objet d'aider le cœur à « fonctionner » de manière relativement normale, mais a pour conséquence une dégradation progressive de la fonction cardiaque.

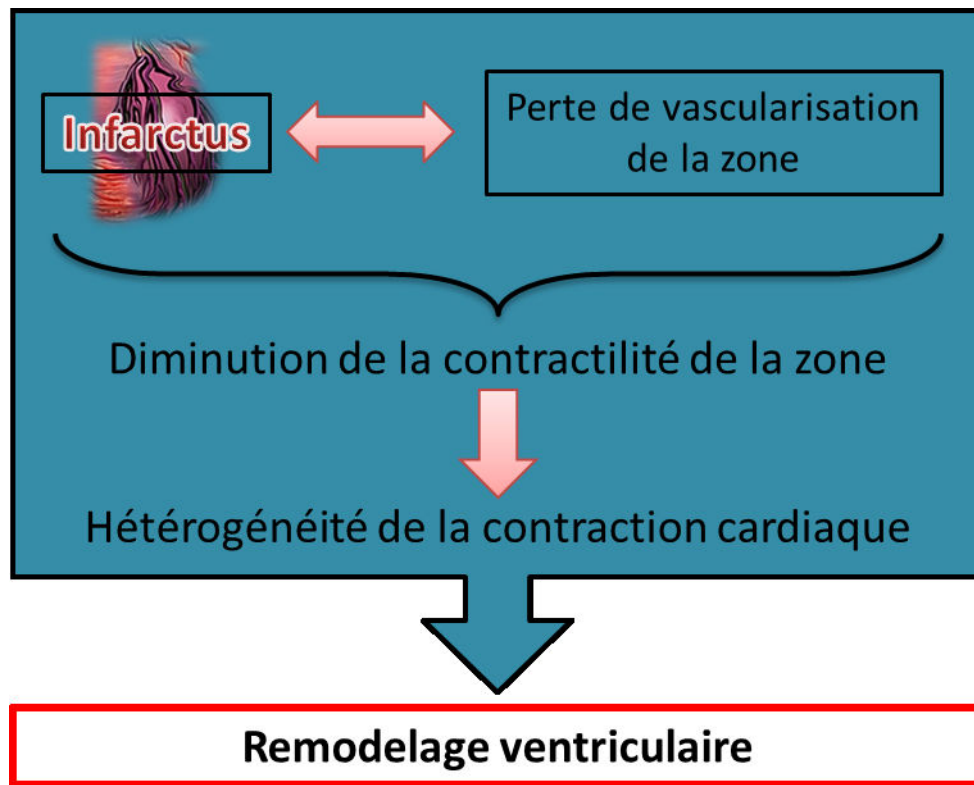


Figure 1.3 : Remodelage suite à un infarctus.

Dans ce qui suit, nous présentons succinctement quelques-unes des approches utilisées pour modéliser au mieux le comportement des tissus biologiques. Nous présentons également les principales techniques numériques adoptées pour simuler le comportement de ces matériaux.

II. Approches de modélisation du comportement mécanique des tissus biologiques

Il est de plus en plus évident que la mécanique est un aspect très important dans les problématiques relevant du milieu vivant. Il est par exemple admis que les contraintes mécaniques influencent de manière non négligeable la différenciation et la croissance cellulaire [2–4]. De ce fait, il y a un intérêt croissant pour la modélisation du comportement mécanique du tissu biologique. Comme on l'a vu au paragraphe précédent, le tissu biologique a une organisation microstructurale très complexe. Il est en général hétérogène, forcément multi-échelles et anisotrope.

Pour étudier la réponse d'un échantillon à une sollicitation donnée, on peut adopter la théorie des mixtures. C'est la voie empruntée par exemple par : Klisch et al. [5], Gu et Lai [6], Humphrey et Rajapogal [7], Wise et al. [8]. Cette démarche est très intéressante et prometteuse. Elle fait cependant abstraction de la morphologie de la microstructure dont le rôle à l'échelle macroscopique et donc de la fonctionnalité du tissu ne peut être négligé. Mentionnons également le travail très intéressant de Djerad et al. [9] qui considère le tissu cardiaque comme un milieu poroélastique.

D'autres auteurs abordent le comportement mécanique du tissu biologique par la technique mathématique d'homogénéisation. Cette voie mathématiquement rigoureuse et solide permet de définir les caractéristiques d'un milieu homogène équivalent à partir de celles connues des éléments constituant un volume élémentaire représentatif et de la géométrie de ce dernier. Cette approche a déjà été appliquée pour modéliser par exemple le comportement mécanique des artères [10] et également des os [11,12]. Son efficacité pleine et entière ne saurait s'affranchir de l'aspect multi-échelles. En effet, les fibres musculaires et les fibres de collagène n'ont pas des dimensions du même ordre.

Ces dernières années ont vu un intense développement des méthodes dites multi-échelles. Elles s'appliquent à divers domaines de la physique. Elles ont aussi été appliquées pour la modélisation du comportement mécanique du tissu biologique. On peut citer par exemple le cas de la modélisation du comportement et de la croissance du tissu osseux [13,14]. Le cas du tissu biologique collagénique a été considéré dans [15] et celui de la veine pont dans [16].

Dans ce dernier cas, l'auteur identifie 8 échelles pour une simulation complète de la veine pont : de la tête humaine aux chaînes polypeptidiques. Il limite cependant son travail au cas de trois échelles : l'échelle de la veine pont, celle des fibres de collagène et enfin celle des fibrilles de collagène. Remarquons que d'autres travaux ont considéré des échelles supérieures et inférieures. On peut citer par exemple les échelles de la tête et du cortex cérébral [17], et celles des microfibrilles de collagènes, du tropocollagène et des chaînes polypeptidiques [18–21]. Dans ces derniers cas, la dynamique moléculaire est utilisée pour la plus petite des échelles. A notre connaissance, aucune publication ne présente un travail couvrant toutes les échelles. Il faut espérer qu'avec les progrès informatiques incessants, un tel travail pourra être effectué dans les années à venir. Remarquons aussi que comme pour les autres matériaux, on est ici confronté à la problématique de transition d'échelles. De plus dans le cas du tissu biologique, la définition des diverses échelles est essentielle. Le critère utilisé est-il dimensionnel ou morphologique ou encore fonctionnel ?

Compte tenu de ce qui précède, il est certain que l'on ne peut pas faire abstraction des phénomènes microscopiques dans la description du comportement mécanique du tissu biologique. Ainsi, parallèlement aux démarches systématiques décrites plus haut, on peut noter le développement d'approches phénoménologiques. Ces approches rentrent dans le cadre de ce qu'on qualifie aujourd'hui de mécanique des milieux continus généralisée. Cette approche, inclut les milieux micromorphes de Eringen [22] tout comme la théorie de microstructure de Mindlin [23]. Le milieu micromorphe de Eringen permettrait de traiter efficacement certains problèmes : de mousses, de milieux poreux, de tissus biologiques, etc.. D'après Eringen [24], la théorie des milieux micromorphes pourrait également être utilisée dans de nombreux autres domaines tels que les cristaux liquides, le sang, les plasmas, la supraconductivité, les mixtures.

Nous adopterons cette théorie pour modéliser le comportement mécanique du tissu biologique. Il est donc important de la présenter un peu plus en détail.

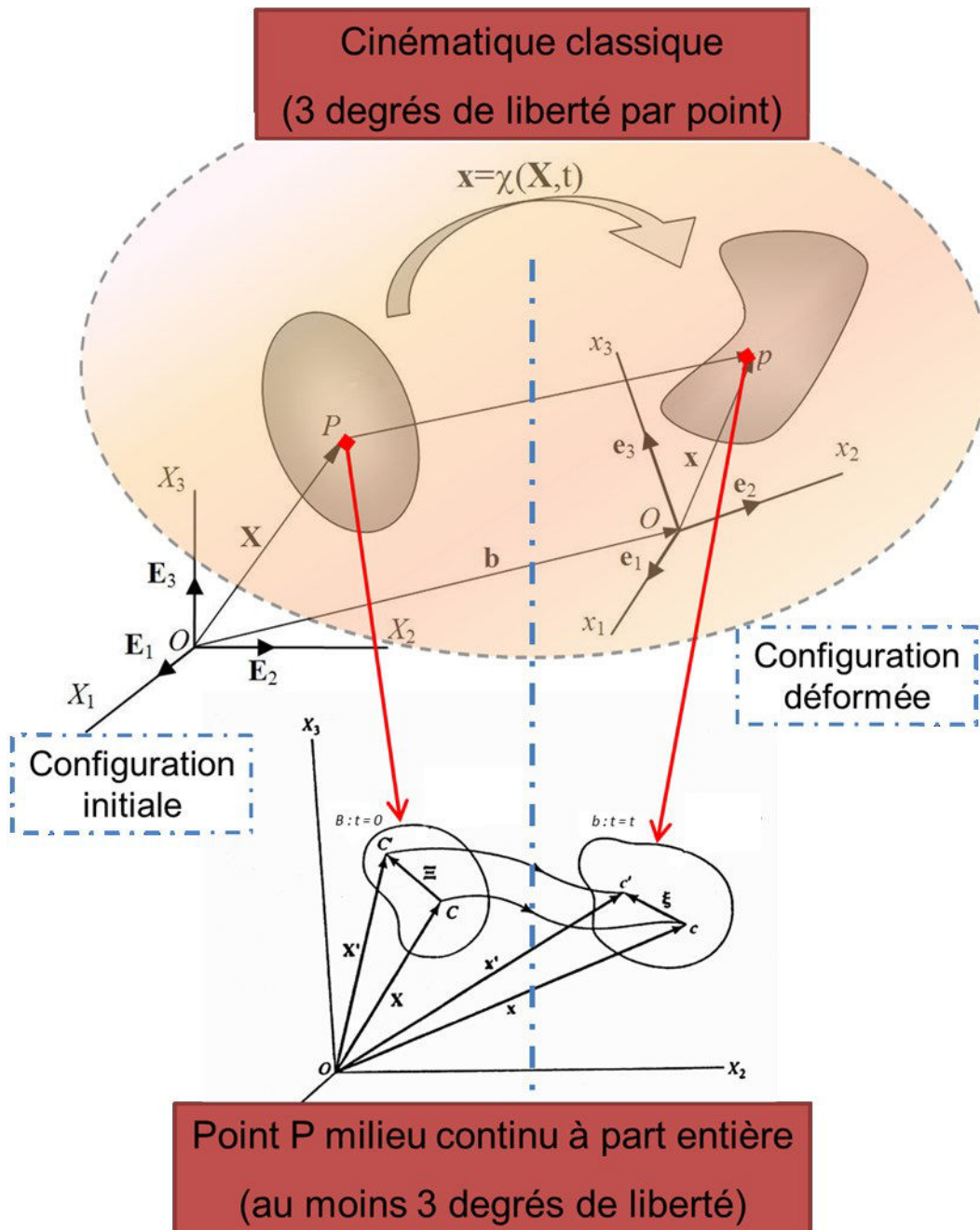


Figure 1.4 : Mécanique des milieux continus étendus.

Dans la théorie des milieux continus classique, chaque point matériel est doté de 3 degrés de liberté (les déplacements selon les 3 directions de l'espace). Dans un milieu micromorphe, chaque point est considéré comme un milieu continu à part entière. La déformation microscopique du point est caractérisée par un tenseur de microdéformation à priori non compatible. Le point matériel dispose donc de 12 degrés de liberté. Cette théorie, très riche est en général spécialisée selon l'application envisagée. Ainsi, selon le degré de simplification,

les degrés de liberté du point matériel peuvent diminuer de 12 à 4. La spécialisation du modèle est en général dictée par les caractéristiques microscopiques susceptibles d'influencer de manière notable le comportement macroscopique.

La théorie la plus complète consiste à prendre en compte les déplacements, et un tenseur de microdéformation incompatible. Il s'agit bien donc de 12 degrés de liberté par point.

A notre connaissance, l'application de cette théorie complète dans le cadre biologique (circulation du sang) est due à Axtell et al. [25] (Micromorphic Fluid in an Elastic Porous Body: Blood Flow in Tissues with Microcirculation).

Très souvent, le modèle est simplifié pour ne prendre en compte que les rotations et une dilatation/contraction uniforme du milieu continu microscopique. Il n'y a plus que 7 degrés de liberté et le milieu est connu sous le nom de « microstretch ». Cette théorie a été utilisée pour la description du comportement de biomatériaux par Rosenberg et Cimmrman [26].

Dans certains cas, seules les rotations microscopiques méritent d'être considérées. C'est le milieu de Cosserat (appelé aussi milieu micropolaire). L'utilisation de ces milieux implique qu'à chaque point matériel est lié un trièdre rigide. Celui-ci peut tourner indépendamment des points voisins et les points matériels de ces milieux ont donc 6 degrés de liberté. Remarquons que cette théorie est en fait la première théorie micromorphe puisqu'elle est apparue dans les travaux des frères Cosserat [27] en 1909. Cette théorie, délaissée pendant près d'un demi-siècle, est réapparue avec Günther [28] en 1958 puis Mindlin [23] en 1964. Le modèle de Cosserat semble parfaitement adapté à la description du comportement continu des milieux granulaires [29,30]. Il serait également approprié pour les milieux poreux et plus particulièrement pour décrire le comportement des os [31].

Enfin, le milieu micromorphe le plus simple en termes de degrés de liberté est connu sous le nom de milieu à microdilatation. Ces milieux comportent au total 4 degrés de liberté à savoir : les 3 déplacements dans les directions de l'espace et une microdilatation isotrope.

Cette simplification du milieu micromorphe a été initiée par Cowin [32,33]. On la retrouve sous une autre forme dans les travaux de Forest et Sievert [34] ou de Steinmann [35]. Récemment certains auteurs ont appliqué ce modèle au comportement tridimensionnel de milieux poreux (Ramézani et al. [36] en 2012 et Jeong et al. [37] en 2013). Nous envisageons d'appliquer le modèle à microdilatation au tissu biologique mou. Remarquons que le milieu

micropolaire semble donner de bons résultats pour la modélisation mécanique du comportement du tissu biologique dur (cf. os [31]).

Notons enfin que, quelle que soit la complexité de la microstructure, le choix de la simplification ou non du modèle est dicté par la nature du phénomène physique à mettre en lumière. Notons également que des essais expérimentaux spécifiques sont nécessaires pour identifier les nombreux paramètres du modèle. La faible quantité de résultats expérimentaux disponibles sur ce type de matériaux témoigne de la difficulté actuelle d'exploitation des résultats d'expériences classique. Pour cette raison et pour bien d'autres, la simulation numérique est d'une très grande utilité dans ce cadre.

III. Les techniques numériques

Quel que soit le point de vue adopté pour la modélisation du comportement et éventuellement les phénomènes de croissance et de remodelage associé, l'outil numérique est indispensable. Dans de nombreux cas, la méthode des éléments finis est adoptée. Malgré sa robustesse, elle peut tomber en défaut dans certains cas. Citons par exemple le cas des mixtures où de meilleures solutions sont obtenues par une méthode de collocation par points sur la forme forte des équations de champ [38]. Cette dernière fait partie des nouvelles techniques numériques connues sous le nom de « meshless methods ». Il s'agit de méthodes dites sans maillage. Elles sont en général rangées en deux catégories. Celles qui utilisent une formulation intégrale du problème (la RKPM (Reproducing Kernel Particle Method) [39–42], La MLPG (Meshless Local Petrov-Galerkin method) [43], la EFG (Element Free-Galerkin method) [44–47], la LIE (Local Integral Equation) [48–56], la LBIE (Local Boundary Integral Equation method) [57,58]) et nécessitent donc pour la plupart un maillage en toile de fond. Les autres utilisent la forme forte des équations et une interpolation polynomiale ou radiale [59–62]. L'utilisation de la forme faible des équations favorise généralement la stabilité des calculs par globalisation de l'erreur. L'utilisation de la forme forte quant à elle, permet une meilleure capture des forts gradients locaux, elle est facile à implémenter.

Ces méthodes basées sur l'utilisation des formes fortes, sont vraiment sans maillage. Que l'approximation soit globale ou locale, les résultats sont de bonne qualité tant qu'il n'existe pas de conditions aux limites de type Neumann. Il est impensable d'envisager des problèmes de mécanique du solide sans conditions aux limites de type naturel. Pour contourner cette difficulté, Liu et al. [63] proposent une méthode basée à la fois sur la forme faible et sur la forme forte. Dans ce cas, les intégrales de volume sont également présentes.

Lorsque les équations de champ du problème sont linéaires, avec une solution fondamentale bien établie, la méthode des éléments de frontière est une excellente alternative à la méthode des éléments finis (Brebbia et Dominguez (1992) [64], Bonnet (1995) [65] et Balas, Sladek et Sladek (1989) [66]). Elle permet de réduire la dimension géométrique du problème de 1. En présence de non linéarité ou dans le cas de problèmes couplés, la formulation intégrale

contient des intégrales de volume ; ce qui diminue l'attractivité de la méthode. De nombreuses stratégies ont été proposées pour surmonter cette difficulté. On peut citer la méthode DRM (Dual Reciprocity Method) introduite par Nardini et Brebbia [67–70], la MRM (Multiple Reciprocity Method) [71], la RIM (Radial Integration Method) [72], la méthode des équations analogue [73]. L'application de ces diverses stratégies peut être très lourde dans certaines situations.

Nous avons choisi de mettre en œuvre une stratégie numérique qui combine les avantages de deux méthodes bien établies. La première concerne la réduction de la dimension géométrique du problème qu'offre la méthode des éléments de frontières pour un milieu isotrope. La seconde est relative à l'implémentation aisée de la méthode de collocation par points avec fonction d'interpolations radiale et support local. Les performances de cette stratégie numérique ont été démontrées sur de nombreux exemples. L'approche semble applicable à des situations et des comportements variés [74–76].



IV. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons décrit succinctement les principales approches adoptées pour modéliser le comportement mécanique du tissu biologique. Nous avons opté pour une approche phénoménologique basée sur la théorie des milieux micromorphes de Eringen. Cette approche est peu usitée dans le domaine des tissus biologiques dits « mous ». Nous simplifierons cette théorie en considérant alors le phénomène de contraction/dilatation des points comme la manifestation la plus représentative du tissu cardiaque. Nous ferons donc appel à une théorie micromorphe permettant cette particularité en considérant le tissu cardiaque comme un milieu à microdilatation.

Du point de vue numérique, les équations de champ du problème pourraient certainement être résolues par la puissante méthode des éléments finis. Cependant, pour les applications envisagées, nous pensons que ce ne serait pas le meilleur choix. Nous avons donc choisi la méthode des éléments de frontière permettant ainsi de réduire le problème d'une dimension et sachant que cette méthode a prouvé son efficacité dans la résolution de nombreux problèmes. Du à la nature couplée du problème, la formulation intégrale implique des intégrales de volumes. Dans l'approche la plus directe, l'utilisation de volumes fait perdre un peu de son intérêt à la BEM. Ici une autre approche, qui peut être étendue au cas anisotrope [75], est adoptée.

Nous adopterons donc dans ce travail une nouvelle méthode qui combine la méthode des éléments de frontière avec une méthode de collocation par point appelée LPI-BEM pour Local Point Interpolation – Boundary Element Method. Nous présentons, dans le chapitre suivant, les différentes étapes de construction de cette méthode.

Références du chapitre :

- [1] Fung Y.-C., 1993, *Biomechanics Mechanical Properties of Living Tissues*, Springer New York, New York, NY.
- [2] Altman G., Horan R., Martin I., Farhadi J., Stark P., Volloch V., Richmond J., Vunjak-Novakovic G., and Kaplan D., 2002, "Cell differentiation by mechanical stress," *FASEB J*, **16**(2), pp. 270–272.
- [3] Kurazumi H., Kubo M., Ohshima M., Yamamoto Y., Takemoto Y., Suzuki R., Ikenaga S., Mikamo A., Udo K., Hamano K., and Li T.-S., 2011, "The Effects of Mechanical Stress on the Growth, Differentiation, and Paracrine Factor Production of Cardiac Stem Cells," *PLoS ONE*, **6**(12), p. e28890.
- [4] Li B., Li F., Puskar K. M., and Wang J. H.-C., 2009, "Spatial patterning of cell proliferation and differentiation depends on mechanical stress magnitude," *Journal of Biomechanics*, **42**(11), pp. 1622–1627.
- [5] Klisch S., Sah R., and Hoger A., 2005, "A cartilage growth mixture model for infinitesimal strains: solutions of boundary-value problems related to in vitro growth experiments," *Biomech Model Mechanobiol*, **3**(4), pp. 209–223.
- [6] Gu W. Y., and Lai W. M., 1998, "A mixture theory for charged-hydrated soft tissues containing multi-electrolytes: Passive transport and swelling behaviors," *Journal of biomechanical engineering*, **120**(2), pp. 169–180.
- [7] Humphrey J. D., and Rajagopal K. R., 2002, "A constrained mixture model for growth and remodeling of soft tissues," *Math. Models Methods Appl. Sci.*, **12**(03), pp. 407–430.
- [8] Wise S. M., Lowengrub J. S., Frieboes H. B., and Cristini V., 2008, "Three-dimensional multispecies nonlinear tumor growth--I: Model and numerical method," *J. Theor. Biol.*, **253**(3), pp. 524–543.
- [9] Djerad S.-E., Du Burck F., Naili S., and Oddou C., 1992, "Analyse du comportement rhéologique instationnaire d'un échantillon de muscle cardiaque," *Comptes Rendus De L'Academie Des Sciences Serie II*, **315**(13), pp. 1615–1621.

- [10] Speirs D. C. D., de Souza Neto E. A., and Perić D., 2008, “An approach to the mechanical constitutive modelling of arterial tissue based on homogenization and optimization,” *Journal of Biomechanics*, **41**(12), pp. 2673–2680.
- [11] Aoubiza B., Crolet J. M., and Meunier A., 1996, “On the mechanical characterization of compact bone structure using the homogenization theory,” *Journal of Biomechanics*, **29**(12), pp. 1539–1547.
- [12] Miara B., Rohan E., Zidi M., and Labat B., 2005, “Piezomaterials for bone regeneration design—homogenization approach,” *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, **53**(11), pp. 2529–2556.
- [13] Gonçalves Coelho P., Rui Fernandes P., and Carriço Rodrigues H., 2011, “Multiscale modeling of bone tissue with surface and permeability control,” *Journal of Biomechanics*, **44**(2), pp. 321–329.
- [14] Das D. B., 2007, “Multiscale simulation of nutrient transport in hollow fibre membrane bioreactor for growing bone tissue: Sub-cellular scale and beyond,” *Chemical Engineering Science*, **62**(13), pp. 3627–3639.
- [15] Maceri F., Marino M., and Vairo G., 2010, “A unified multiscale mechanical model for soft collagenous tissues with regular fiber arrangement,” *Journal of Biomechanics*, **43**(2), pp. 355–363.
- [16] Nierenberger M., Rémond Y., and Ahzi S., 2013, “A new multiscale model for the mechanical behavior of vein walls,” *Journal of the Mechanical Behavior of Biomedical Materials*, **23**(0), pp. 32–43.
- [17] Rahman R. A., George D., Baumgartner D., Nierenberger M., Rémond Y., and Ahzi S., 2012, “An asymptotic method for the prediction of the anisotropic effective elastic properties of the cortical vein: superior sagittal sinus junction embedded within a homogenized cell element,” *J. Mech. Mater. Struct.*, **7**(6), pp. 593–611.
- [18] Buehler M. J., 2006, “Atomistic and continuum modeling of mechanical properties of collagen: Elasticity, fracture, and self-assembly,” *J. Mater. Res.*, **21**(8), pp. 1947–1961.

- [19] Buehler M. J., 2006, "Nature designs tough collagen: Explaining the nanostructure of collagen fibrils," *Proc. Natl. Acad. Sci. U. S. A.*, **103**(33), pp. 12285–12290.
- [20] Buehler M. J., 2008, "Nanomechanics of collagen fibrils under varying cross-link densities: Atomistic and continuum studies," *Journal of the Mechanical Behavior of Biomedical Materials*, **1**(1), pp. 59–67.
- [21] Tang Y., Ballarini R., Buehler M. J., and Eppell S. J., 2010, "Deformation micromechanisms of collagen fibrils under uniaxial tension," *Journal of The Royal Society Interface*, **7**(46), pp. 839–850.
- [22] Eringen A. C., and Suhubi E. S., 1964, "Nonlinear theory of simple micro-elastic solids—I," *Int. J. Eng. Sci.*, **2**(2), pp. 189–203.
- [23] Mindlin R. D., 1964, "Micro-structure in linear elasticity," *Arch. Ration. Mech. Anal.*, **16**(1), pp. 51–78.
- [24] Eringen A. C., 1999, "Microcontinuum field theories."
- [25] Axtell N. K., Park M., and Cushman J. H., 2005, "Micromorphic Fluid in an Elastic Porous Body: Blood Flow in Tissues with Microcirculation," *International Journal for Multiscale Computational Engineering*, **3**(1), pp. 71–84.
- [26] Rosenberg J., and Cimirman R., 2003, "Microcontinuum approach in biomechanical modeling," *Math. Comput. Simul.*, **61**(3-6), pp. 249–260.
- [27] Cosserat E., and Cosserat F., 1909, *Theorie des Corps Deformables*, A. Hermann, Paris.
- [28] Günther W., 1958, "Zur statik und kinematik des cosseratschen kontinuums," *Abh. Braunschweig. Wiss. Ges.*, **10**(213), p. 1.
- [29] Nübel K., and Huang W., 2004, "A study of localized deformation pattern in granular media," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **193**(27–29), pp. 2719–2743.
- [30] Walsh S. D. C., and Tordesillas A., 2006, "Finite element methods for micropolar models of granular materials," *Appl. Math. Model.*, **30**(10), pp. 1043–1055.

- [31] Ramézani H., El-Hraiech A., Jeong J., and Benhamou C.-L., 2012, “Size effect method application for modeling of human cancellous bone using geometrically exact Cosserat elasticity,” *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, **237–240**, pp. 227–243.
- [32] Nunziato J. W., and Cowin S. C., 1979, “A nonlinear theory of elastic materials with voids,” *Arch. Rational Mech. Anal.*, **72**(2), pp. 175–201.
- [33] Cowin S. C., and Nunziato J. W., 1983, “Linear elastic materials with voids,” *J. Elast.*, **13**(2), pp. 125–147.
- [34] Forest S., and Sievert R., 2006, “Nonlinear microstrain theories,” *Int. J. Solids Struct.*, **43**(24), pp. 7224–7245.
- [35] Kirchner N., and Steinmann P., 2007, “Mechanics of extended continua: modeling and simulation of elastic microstretch materials,” *Comput. Mech.*, **40**(4), pp. 651–666.
- [36] Ramézani H., Steeb H., and Jeong J., 2012, “Analytical and numerical studies on Penalized Micro-Dilatation (PMD) theory: Macro-micro link concept,” *Eur. J. Mech. A Sol.*, **34**, pp. 130–148.
- [37] Jeong J., Sardini P., Ramézani H., Siitari-Kauppi M., and Steeb H., 2013, “Modeling of the induced chemo-mechanical stress through porous cement mortar subjected to CO₂: Enhanced micro-dilatation theory and 14C-PMMA method,” *Comput. Mater. Sci.*, **69**(0), pp. 466–480.
- [38] Hon Y. C., Lu M. W., Xue W. M., and Zhu Y. M., 1997, “Multiquadric method for the numerical solution of a biphasic mixture model,” *Appl. Math. Comput.*, **88**(2–3), pp. 153–175.
- [39] Liu W. K., Jun S., Li S., Adee J., and Belytschko T., 1995, “Reproducing kernel particle methods for structural dynamics,” *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, **38**(10), pp. 1655–1679.
- [40] Liu W. K., Chen Y. J., Uras R. A., and Chang C. T., 1996, “Generalized multiple scale reproducing kernel particle methods,” *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, **139**(1-4), pp. 91–157.
- [41] Liu W. K., and Jun S., 1998, “Multiple-scale Reproducing Kernel Particle Methods for large deformation problems,” *Int. J. Numer. Methods Eng.*, **41**(7), pp. 1339–1362.

- [42] Liu W. K., Jun S., and Zhang Y. F., 1995, "Reproducing kernel particle methods," *Int. J. Numer. Methods Fluids*, **20**(8-9), pp. 1081–1106.
- [43] Atluri S. N., and Zhu T., 1998, "A new meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) approach in computational mechanics," *Comput. Mech.*, **22**(2), pp. 117–127.
- [44] Belytschko T., Lu Y. Y., and Gu L., 1994, "Element-free Galerkin methods," *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, **37**(2), pp. 229–256.
- [45] Belytschko T., Gu L., and Lu Y. Y., 1994, "Fracture and crack growth by element free Galerkin methods," *Model. Simul. Mater. Sci. Eng.*, **2**(3A), pp. 519–534.
- [46] Belytschko T., Lu Y. Y., and Gu L., 1995, "Crack propagation by element-free Galerkin methods," *Engineering Fracture Mechanics*, **51**(2), pp. 295–315.
- [47] Belytschko T., Lu Y. Y., Gu L., and Tabbara M., 1995, "Element-free galerkin methods for static and dynamic fracture," *Int. J. Solids Struct.*, **32**(17-18), pp. 2547–2570.
- [48] Sladek V., Sladek J., Tanaka M., and Zhang C., 2005, "Local integral equation method for potential problems in functionally graded anisotropic materials," *Eng. Anal. Bound. Elem.*, **29**(9), pp. 829–843.
- [49] Sladek J., Sladek V., Hellmich C., and Eberhardsteiner J., 2007, "Analysis of thick functionally graded plates by local integral equation method," *Commun. Numer. Methods Eng.*, **23**(8), pp. 733–754.
- [50] Sladek V., Sladek J., and Zhang C., 2008, "Local integral equation formulation for axially symmetric problems involving elastic FGM," *Eng. Anal. Bound. Elem.*, **32**(12), pp. 1012–1024.
- [51] Sladek J., Sladek V., and Wen P. H., 2009, *Modeling of Smart Structures by Meshless Local Integral Equation Method*, Springer-Verlag Berlin, Berlin.
- [52] Sladek J., Sladek V., Wen P. H., and Hon Y. C., 2009, "Inverse fracture problems in piezoelectric solids by local integral equation method," *Eng. Anal. Bound. Elem.*, **33**(8-9), pp. 1089–1099.

- [53] Sladek V., Sladek J., and Zhang C., 2010, “On Increasing Computational Efficiency of Local Integral Equation Method Combined with Meshless Implementations,” *CMES-Comp. Model. Eng. Sci.*, **63**(3), pp. 243–263.
- [54] Wen P. H., and Aliabadi M. H., 2012, “Meshless Local Integral Equation Method with Analytical Formulation and its Application to Computational Fracture Mechanics,” *Advances in Fracture and Damage Mechanics X*, Z. Tonkovic, and M.H. Aliabadi, eds., Trans Tech Publications Ltd, Stafa-Zurich, pp. 791–794.
- [55] Shirzadi A., Sladek V., and Sladek J., 2013, “A local integral equation formulation to solve coupled nonlinear reaction-diffusion equations by using moving least square approximation,” *Eng. Anal. Bound. Elem.*, **37**(1), pp. 8–14.
- [56] Wen P. H., and Aliabadi M. H., 2013, “Analytical formulation of meshless local integral equation method,” *Appl. Math. Model.*, **37**(4), pp. 2115–2126.
- [57] Zhu T., Zhang J. D., and Atluri S. N., 1998, “A local boundary integral equation (LBIE) method in computational mechanics, and a meshless discretization approach,” *Comput. Mech.*, **21**(3), pp. 223–235.
- [58] Atluri S. N., Sladek J., Sladek V., and Zhu T., 2000, “The local boundary integral equation (LBIE) and it’s meshless implementation for linear elasticity,” *Computational Mechanics*, **25**(2-3), pp. 180–198.
- [59] Onate E., Idelsohn S., Zienkiewicz O. C., and Taylor R. L., 1996, “A finite point method in computational mechanics. Applications to convective transport and fluid flow,” *Int. J. Numer. Methods Eng.*, **39**(22), pp. 3839–3866.
- [60] Onate E., Idelsohn S., Zienkiewicz O. C., Taylor R. L., and Sacco C., 1996, “A stabilized finite point method for analysis of fluid mechanics problems,” *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, **139**(1-4), pp. 315–346.
- [61] Li H., Ng T. Y., Cheng J. Q., and Lam K. Y., 2003, “Hermite-Cloud: a novel true meshless method,” *Comput. Mech.*, **33**(1), pp. 30–41.

- [62] Liu G. R., Zhang J., Lam K. Y., Li H., Xu G., Zhong Z. H., Li G. Y., and Han X., 2008, "A gradient smoothing method (GSM) with directional correction for solid mechanics problems," *Comput. Mech.*, **41**(3), pp. 457–472.
- [63] Liu G. R., and Gu Y. T., 2003, "A meshfree method: meshfree weak-strong (MWS) form method, for 2-D solids," *Comput. Mech.*, **33**(1), pp. 2–14.
- [64] Brebbia C. A., and Dominguez J., 1992, *Boundary Elements: An introductory course*, WIT Press, Southampton.
- [65] Bonnet M., 1995, *Equations intégrales et éléments de frontière: applications en mécanique des solides et des fluides*, CNRS éditions : Eyrolles, Paris.
- [66] Balas J., Sladek J., and Sladek V., 1989, "Stress Analysis by Boundary Element Method," Elsevier.
- [67] Nardini D., and Brebbia C. A., 1983, "A new approach to free vibration analysis using boundary elements," *Appl. Math. Model.*, **7**(3), pp. 157–162.
- [68] Nardini D., and Brebbia C. A., 1985, "Boundary Integral Formulation of Mass Matrices for Dynamic Analysis," *Time-dependent and Vibration Problems*, C. Brebbia, ed., Springer Berlin Heidelberg, pp. 191–208.
- [69] Brebbia C. A., and Nardini D., 1986, "Solution of parabolic and hyperbolic time dependent problems using boundary elements," *Computers & Mathematics with Applications*, **12**(5–6, Part 2), pp. 1061–1072.
- [70] Brebbia C. A., and Wrobel L. A., 1988, "The Solution of Parabolic Problems Using the Dual Reciprocity Boundary Element," *Advanced Boundary Element Methods*, T. Cruse, ed., Springer Berlin Heidelberg, pp. 55–71.
- [71] Nowak A. J., and Brebbia C. A., 1989, "The multiple-reciprocity method. A new approach for transforming BEM domain integrals to the boundary," *Engineering Analysis with Boundary Elements*, **6**(3), pp. 164–167.
- [72] Gao X.-W., 2002, "The radial integration method for evaluation of domain integrals with boundary-only discretization," *Eng. Anal. Bound. Elem.*, **26**(10), pp. 905–916.

- [73] Katsikadelis J. T., and Nerantzaki M. S., 1994, “Non-linear analysis of plates by the Analog Equation Method,” *Comput. Mech.*, **14**(2), pp. 154–164.
- [74] Thurieau N., Kouitat Njiwa R., and Taghite M., 2012, “A simple solution procedure to 3D-piezoelectric problems: Isotropic BEM coupled with a point collocation method,” *Eng. Anal. Bound. Elem.*, **36**(11), pp. 1513–1521.
- [75] Kouitat Njiwa R., 2011, “Isotropic-BEM coupled with a local point interpolation method for the solution of 3D-anisotropic elasticity problems,” *Eng. Anal. Bound. Elem.*, **35**(4), pp. 611–615.
- [76] Schwartz M., Niane N. T., and Kouitat Njiwa R., 2012, “A simple solution method to 3D integral nonlocal elasticity: Isotropic-BEM coupled with strong form local radial point interpolation,” *Eng. Anal. Bound. Elem.*, **36**(4), pp. 606–612.

Table des figures :

<i>Figure 1.1 : Structure complexe du tissu cardiaque [1].</i>	13
<i>Figure 1.2 : Réparation tissulaire.</i>	15
<i>Figure 1.3 : Remodelage suite à un infarctus.</i>	16
<i>Figure 1.4 : Mécanique des milieux continus étendus.</i>	19

Chapitre 2

Présentation et mise en place de la stratégie numérique

Table des matières du chapitre 2 :

Chapitre 2	Présentation et mise en place de la stratégie numérique	35
I.	Introduction	39
II.	Modèles de comportement et équations de champs étudiés.....	40
II.1.	Les milieux piézoélectriques	40
II.2.	Les milieux à microdilatation.....	41
III.	Application de la stratégie numérique.....	44
III.1.	Partitionnement des champs.....	44
III.1.1.	Cas piézoélectrique	44
III.1.2.	Cas en microdilatation	46
III.2.	Champs complémentaires	47
III.3.	Champs particuliers.....	48
III.3.1.	Equations piézoélectriques.....	50
III.3.2.	Equations en microdilatation	52
III.4.	Obtention des équations finales.....	54
III.4.1.	Problèmes piézoélectriques.....	54
III.4.2.	Problèmes à microdilatation	55
IV.	Conclusion.....	56

I. Introduction

Dans le chapitre précédent nous avons fait le point sur les différentes techniques numériques permettant de résoudre des problèmes multi-physique. Il faut donc désormais faire notre choix. Nous avons opté pour une stratégie numérique qui couple deux méthodes : la méthode des éléments de frontière et une méthode de collocation par point. Cette méthode, que nous appellerons LPI-BEM (Local Point Interpolation – Boundary Element Method), a plusieurs avantages. Tout d’abord le maillage ne concerne que la frontière du domaine comme dans la méthode des éléments de frontière classique. Des équations de champ sous leur forme forte sont traitées par une méthode de collocation par points ne nécessitant que la génération d’un certain nombre de centres de collocation. De plus, l’intégration de la méthode de collocation par point dans un code éléments de frontière existant est relativement aisée. Le couplage de ces deux méthodes permet également de s’affranchir, dans le cas anisotrope par exemple, des lourds calculs des solutions fondamentales et de leurs dérivées. Un dernier point important est également l’utilisation de fonctions radiales qui permettent le calcul des contraintes en post-traitement.

Cette approche a été initiée par Kouitat et a déjà été concluante pour des matériaux anisotropes [1]. Dans ce chapitre, les milieux piézoélectriques et les milieux à microdilatation seront traités en parallèle. Rappelons que le milieu piézoélectrique est utilisé pour tester l’aptitude de la démarche à traiter convenablement de problèmes multi-physique et pour la similitude des équations de champs des deux problèmes. On commence naturellement ce chapitre en décrivant les équations régissant les deux types de milieux. Ensuite, la LPI-BEM sera explicitée afin de résoudre ces deux problèmes couplés. En fin de chapitre, nous arriverons à des systèmes d’équations que nous pourrions facilement résoudre par un solveur classique.

II. Modèles de comportement et équations de champs étudiés

Dans tout ce qui suit, nous adoptons la notation indicielle et la convention de sommation sur les indices muets répétés.

II.1. Les milieux piézoélectriques

En l'absence de forces de volume, l'équilibre d'un matériau piézoélectrique occupant un domaine Ω de frontière Γ est exprimé en coordonnées Cartésiennes comme suit :

$$\begin{aligned}\sigma_{ij,j} &= 0 \\ D_{i,i} &= 0\end{aligned}\tag{2.1}$$

Dans les équations 2.1, "," est la dérivée partielle par rapport aux coordonnées, σ est le tenseur des contraintes et D est le vecteur des déplacements électriques. Ils sont reliés au tenseur des petites déformations et au champ électrique par :

$$\begin{aligned}\sigma_{ij} &= C_{ijkl}\varepsilon_{kl} - e_{kij}E_k \\ D_i &= e_{ikl}\varepsilon_{kl} + K_{ik}E_k\end{aligned}\tag{2.2}$$

Dans ce qui précède, C_{ijkl} est le tenseur d'élasticité du matériau, à priori anisotrope, e_{ikl} est le tenseur des coefficients piézoélectriques et K_{ik} le tenseur des permittivités électriques. Le champ de déformation ε_{kl} et le champ électrique E_i sont définis par le vecteur déplacement u_i et le potentiel électrique φ par :

$$\begin{aligned}\varepsilon_{kl} &= (u_{k,l} + u_{l,k})/2 \\ E_i &= -\varphi_{,i}\end{aligned}\tag{2.3}$$

En notant n_j le vecteur normal à la frontière, le vecteur contrainte et le flux de charge électrique sont donnés par :

$$\begin{aligned} t_i &= \sigma_{ij} n_j \\ q &= D_i n_i \end{aligned} \tag{2.4}$$

Les solutions du système d'équations couplées 2.1 doivent satisfaire les conditions aux limites mécaniques données en termes de combinaisons compatibles des composantes des vecteurs déplacement et contrainte et des conditions aux limites électriques portant sur les déplacements et potentiel électrique connus.

II.2. Les milieux à microdilatation

Afin de développer les équations d'un solide à microdilatation, nous avons choisi de partir d'un milieu supérieur bien connu. On a donc pris comme base la théorie des solides dits « microstretch ». Un milieu continu microstretch est déjà un cas particulier de la théorie générale des milieux micromorphes. Cette théorie a été développée par Eringen [2,3]. Dans cette théorie, on suppose que le point matériel est capable de se déplacer, de tourner sur lui-même et de se dilater/contracter uniformément dans les trois directions de l'espace. Chaque point matériel d'un tel milieu comporte 7 degrés de liberté.

Dans le cadre de la théorie linéarisée, lorsque les forces de volumes sont négligées, les équations d'équilibre d'un solide élastique microstretch occupant un domaine Ω ayant comme frontière Γ , sont exprimées en coordonnées cartésiennes comme suit [4]:

$$\sigma_{ji,j} = 0 \tag{2.5}$$

$$m_{ji,j} + \varepsilon_{irs} \sigma_{rs} = 0 \tag{2.6}$$

$$s_{k,k} - p = 0 \quad 2.7$$

σ_{ij} et m_{ij} sont respectivement le tenseur des contraintes et celui des couples. s_k est le vecteur des microcontraintes et p la fonction microcontraintes qui peut être vue comme une pression interne. ε_{jik} est le symbole de permutation (ou de Levi-Civita).

Si on considère le solide homogène et isotrope, les équations du modèle de comportement sont :

$$\sigma_{ij} = \lambda e_{rr} \delta_{ij} + (\mu + \kappa) e_{ij} + \mu e_{ji} + \eta \psi \delta_{ij} \quad 2.8$$

$$m_{ij} = \alpha \gamma_{rr} \delta_{ij} + \beta \gamma_{ji} + \gamma \gamma_{ij} \quad 2.9$$

$$s_k = a \psi_{,k} \quad 2.10$$

$$p = \eta e_{rr} + b \psi \quad 2.11$$

$e_{ij} = u_{j,i} + \varepsilon_{jik} \varphi_k$ et $\gamma_{ij} = \varphi_{j,i}$ sont les mesures de déformation. ψ est la fonction microstretch, φ_k le vecteur micro-rotation et u_i le vecteur des déplacements macroscopiques. λ et μ sont les coefficients de Lamé et enfin κ , η , α , β , γ , a et b sont des paramètres du matériau. Rappelons également que δ_{ij} est le symbole de Kronecker.

En prenant en compte des considérations thermodynamiques, il est établi que ces paramètres matériaux doivent respecter les conditions suivantes (cf. [5]):

$$\begin{array}{llll} b(3\lambda + 2\mu + \kappa) - 3\eta^2 \geq 0 & 2\mu + \kappa \geq 0 & \kappa \geq 0 & a \geq 0 \\ b \geq 0 & 3\alpha + \beta + \gamma \geq 0 & \beta + \gamma \geq 0 & \gamma - \beta \geq 0 \end{array}$$

A partir de cette théorie, on peut simplifier les équations afin de retenir soit la rotation soit la dilatation seule. Si on se limite aux rotations, on tombe sur les équations des milieux de Cosserat (ou micropolaire). Par contre en prenant en compte la dilatation, on arrive aux équations d'un solide à microdilatation. On se limitera donc à ce dernier cas qui est une première étape vers l'application de ce type de modèles aux tissus biologiques mous.

On part donc des équations qui décrivent le comportement d'un milieu microstretch (2.8-2.11) en interdisant toutes rotations du point matériel ($\varphi_k = 0$). On trouve ainsi que le tenseur des couples de contraintes devient identiquement nul. À partir de l'équation 2.6, on obtient $\varepsilon_{irs}\sigma_{rs} = 0$ ce qui conduit à $\kappa \text{rot}(u) = 0$ (rot étant le rotationnel). On pose donc $\kappa = 0$.

Finalement, on arrive au modèle de comportement suivant pour un milieu à microdilatation :

$$\sigma_{ij} = \lambda u_{r,r} \delta_{ij} + \mu(u_{i,j} + u_{j,i}) + \eta \psi \delta_{ij} \quad 2.12$$

$$s_k = a \psi_{,k} \quad 2.13$$

$$p = \eta u_{r,r} + b \psi \quad 2.14$$

Les équations qui régissent l'équilibre de ce milieu sont :

$$\sigma_{ji,j} = 0 \quad 2.15$$

$$s_{k,k} - p = 0 \quad 2.16$$

Les contraintes thermodynamiques pour les paramètres matériaux se réduisent à :

$$b(3\lambda + 2\mu) - 3\eta^2 \geq 0 \quad \mu \geq 0 \quad a \geq 0 \quad b \geq 0$$

En notant n_j le vecteur normal à la frontière, les vecteurs contrainte et microcontrainte ont pour expressions :

$$t_i = \sigma_{ji} n_j \quad 2.17$$

$$s = s_i n_i = a \psi_{,i} n_i \quad 2.18$$

On arrive donc aux équations d'un milieu à 4 degrés de liberté correspondant aux trois déplacements dans l'espace et à une microdilatation uniforme des points matériels.

III. Application de la stratégie numérique

Le problème peut être résolu numériquement par des codes éléments finis spécialisés du commerce. Leur utilisation peut devenir lourde lorsqu'il s'agit de traiter de problèmes tridimensionnels. On a opté pour une stratégie offrant une grande flexibilité et combinant les avantages de la méthode des éléments de frontières (réduction par 1 de la dimension géométrique du problème) et de la méthode de collocation par points appliquée aux équations fortes (simplicité d'implémentation).

III.1. Partitionnement des champs

Pour ce faire, les variables cinématiques initiales sont décomposées additivement en une partie complémentaire et une partie particulière. Les champs complémentaires doivent vérifier une équation aux dérivées partielles linéaire et homogène, dont la solution fondamentale a une expression analytique bien établie (équation de Navier, équation de Laplace). Les équations aux dérivées partielles que vérifient les champs particuliers sont résolues sous leur forme forte en appliquant une méthode de collocation par points.

Le champ de déplacement est donc la somme d'un champ particulier et d'un champ complémentaire : $u = u^P + u^C$. De la même manière, le potentiel électrique et la microdilatation seront aussi partitionnés en terme particulier et complémentaire comme suit : $\varphi = \varphi^P + \varphi^C$ et $\psi = \psi^P + \psi^C$.

III.1.1. Cas piézoélectrique

Introduisons maintenant les tenseurs constants suivants : $C_{ijkl}^0 = G^0 \left[\frac{2\nu^0 \delta_{ij} \delta_{kl}}{(1-2\nu^0)} + \delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk} \right]$ un tenseur d'élasticité isotrope et $K_{ij}^0 = k^0 \delta_{ij}$ un tenseur diélectrique. G^0 et ν^0 sont

respectivement un module de cisaillement (module de Coulomb) et un coefficient de Poisson qui peuvent être pris comme les moyennes de Voigt ou de Reuss du tenseur élastique anisotrope initial. Le facteur k^0 peut être pris proportionnel à la trace du tenseur K_{ij} .

Les équations 2.1 sont réécrites comme suit :

$$C_{ijkl}^0 u_{k,lj}^C + (C_{ijkl} - C_{ijkl}^0) u_{k,lj}^C + C_{ijkl} u_{k,lj}^P + e_{kij} \varphi_{,kj} = 0$$

$$k^0 \varphi_{,kk}^C + (K_{ik} - K_{ik}^0) \varphi_{,ki}^C + K_{ik} \varphi_{,ki}^P - e_{ikl} u_{k,li} = 0$$

Les champs complémentaires sont choisis comme vérifiant les équations suivantes :

$$C_{ijkl}^0 u_{k,lj}^C = 0 \quad 2.19$$

$$k^0 \varphi_{,kk}^C = 0 \quad 2.20$$

Ainsi, les champs particuliers vérifient :

$$(C_{ijkl} - C_{ijkl}^0) u_{k,lj}^C + C_{ijkl} u_{k,lj}^P + e_{kij} \varphi_{,kj} = 0 \quad 2.21$$

$$(K_{ik} - K_{ik}^0) \varphi_{,ki}^C + K_{ik} \varphi_{,ki}^P - e_{ikl} u_{k,li} = 0 \quad 2.22$$

Compte tenu de la partition adoptée, les conditions aux limites naturelles (2.4) se décomposent comme suit :

$$t_i = t_i^C + t_i^P + \delta t_i \quad 2.23$$

$$q = q^C + q^P + \delta q \quad 2.24$$

avec $t_i^C = C_{ijkl}^0 u_{k,l}^C n_j$, $t_i^P = C_{ijkl}^0 u_{k,l}^P n_j$, $\delta t_i = (C_{ijkl} - C_{ijkl}^0) u_{k,l} n_j + e_{kij} \varphi_{,k} n_j$,

$q^C = k^0 \varphi_{,k}^C n_k$, $q^P = k^0 \varphi_{,k}^P n_k$ et $\delta q = -(K_{ik} + K_{ik}^0) \varphi_{,k} n_i + e_{ikl} u_{k,l} n_i$.

III.1.2. Cas en microdilatation

On suppose toujours que le déplacement macroscopique $u = u^P + u^C$ est la somme d'un champ particulier et d'un champ complémentaire. De la même manière que pour le problème piézoélectrique, on suppose que la microdilatation peut être décomposée en partie particulière et complémentaire : $\psi = \psi^P + \psi^C$.

Le champ complémentaire de déplacement et la partie complémentaire de la microdilatation satisfont les équations non couplées suivantes :

$$\left(\lambda u_{r,r}^C \delta_{ij} + \mu (u_{i,j}^C + u_{j,i}^C) \right)_{,j} = 0 \quad 2.25$$

$$a \psi_{,kk}^C = 0 \quad 2.26$$

Par conséquent, les champs particuliers sont solutions de :

$$\left(\lambda u_{r,r}^P \delta_{ij} + \mu (u_{i,j}^P + u_{j,i}^P) \right)_{,j} + \eta \psi_{,i} = 0 \quad 2.27$$

$$a \psi_{,kk}^P - b \psi - \eta u_{r,r} = 0 \quad 2.28$$

Compte tenu de la partition réalisée précédemment, les conditions aux limites naturelles (Neumann) peuvent être réécrites sous la forme suivante :

$$t_i = t_i^C + t_i^P + \delta t_i \quad 2.29$$

$$s = s^C + s^P \quad 2.30$$

avec $t_i^C = \left(\lambda u_{r,r}^C \delta_{ij} + \mu (u_{i,j}^C + u_{j,i}^C) \right) n_j$, $t_i^P = \left(\lambda u_{r,r}^P \delta_{ij} + \mu (u_{i,j}^P + u_{j,i}^P) \right) n_j$, $\delta t_i = \eta \psi n_i$ et $s^C = a \psi_{,i}^C n_i$, $s^P = a \psi_{,i}^P n_i$.

III.2. Champs complémentaires

Les équations 2.19 et 2.25 sont du type Navier (équations de l'élasto-statique en petites déformations). La formulation intégrale de frontière de ces problèmes est bien connue et se note :

$$\int_{\Gamma} \tilde{U}_{mi}(x, \xi) t_i^c(x) d\Gamma(x) = \int_{\Gamma} \tilde{T}_{mi}(x, \xi) [u_i^c(x) - u_i^c(\xi)] d\Gamma(x) \quad 2.31$$

où $\tilde{U}_{mi}$ est la solution fondamentale des équations de Navier et $\tilde{T}_{mi}$ le vecteur contrainte correspondant. Leurs expressions explicites peuvent être trouvées dans de nombreux manuels [6–8]. L'équation 2.31 est valable pour les points frontières et également pour ceux internes. En appliquant les approximations usuelles, on obtient un système d'équations de la forme suivante :

$$[H]\{u^c\} = [G]\{t^c\} \quad 2.32$$

La formulation intégrale de frontière des problèmes potentiels fictifs 2.20 et 2.26 est également bien connue et est donnée par :

$$\int_{\Gamma} \bar{U}(x, \xi) p^c(x) d\Gamma(x) = \int_{\Gamma} \bar{T}(x, \xi) [\zeta^c(x) - \zeta^c(\xi)] d\Gamma(x) \quad 2.33$$

où $\bar{U}$ est la solution fondamentale du problème potentiel et $\bar{T}$ le flux de charge à la frontière associé. ζ et p représenteront le potentiel électrique φ et le flux de charge électrique q pour les problèmes piézoélectriques et la microdilatation ψ et la microtraction s pour les milieux à microdilatation.

Les approximations classiques des densités à la frontière conduisent au système d'équations suivant :

$$[\bar{H}]\{\zeta^c\} = [\bar{G}]\{p^c\} \quad 2.34$$

III.3. Champs particuliers

Pour le cas piézoélectrique, le champ de déplacement et le potentiel électrique particuliers sont déterminés en résolvant les équations 2.21 et 2.22 respectivement. De même, pour le cas à microdilatation, les équations 2.27 et 2.28 sont résolues afin de trouver le champ de déplacement et la microdilatation particuliers.

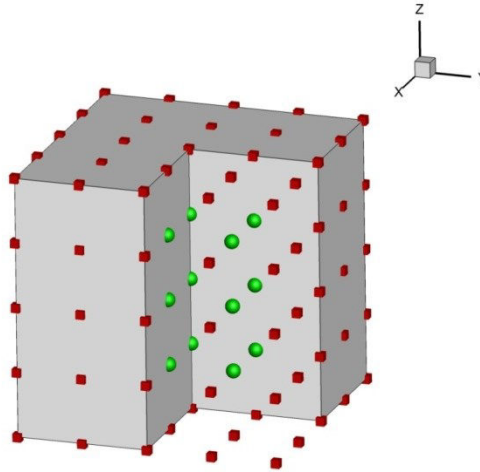


Figure 2.1 : Exemple de domaine cubique avec maillage éléments de frontière (rouge) et points internes (vert).

Représentons le domaine Ω et sa frontière Γ par un certain nombre de centres de collocation (Figure 2.1). Adaptons l'approximation par interpolation radiale. En interpolation locale par des fonctions radiales (LRPIM) (cf. [9]), un champ $v(x)$ est approximé par :

$$v(x) = \sum_{i=1}^N R_i(r) a_i + \sum_{j=1}^M P_j(x) b_j$$

avec les contraintes suivantes:

$$\sum_{i=1}^N P_j(x_i) a_i = 0 \quad j = 1 \dots M$$

$R_i(r)$ sont les fonctions radiales, N le nombre de centre de collocation dans le domaine d'influence du point x et M est le nombre de monômes de la base polynomiale $P_j(x)$.

Les coefficients a_i et b_i peuvent être déterminés en forçant l'approximation à être satisfaite sur les N nœuds du domaine d'influence. Cela conduit à la solution d'un système d'équations de la forme :

$$\begin{Bmatrix} v_{/L} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} R & P \\ P^T & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a \\ b \end{Bmatrix} \text{ où } \{v_{/L}\} \text{ est le vecteur des valeurs nodales de } v(x).$$

On peut montrer que :

$$\{b\} = [[P]^T [R]^{-1} [P]]^{-1} [P]^T [R]^{-1} \{v_{/L}\} = [F_b] \{v_{/L}\} \quad 2.35$$

$$\{a\} = [R]^{-1} [[I] - [P][F_b]] \{v_{/L}\} = [F_a] \{v_{/L}\} \quad 2.36$$

L'interpolation radiale de $v(x)$ peut donc être écrite sous la forme

$v(x) = [R_1 \ R_2 \ \dots \ R_n][F_a]\{v_{/L}\} + [P_1 \ P_2 \ \dots \ P_m][F_b]\{v_{/L}\}$ ou sous la forme plus compacte suivante :

$$v(x) = [\Phi(x)]\{v_{/L}\} \quad 2.37$$

Pour un centre de collocation interne, l'interpolation 2.37 est appliquée à toutes les grandeurs cinématiques.

III.3.1. Equations piézoélectriques

Posons $[C]$, $[\delta C]$, $[K]$, $[\delta K]$ et $[e]$ les représentations matricielles dans la notation de Voigt de C_{ijkl} , $C_{ijkl} - C_{ijkl}^0$, K_{ik} , $K_{ik} - K_{ik}^0$ et de e_{ikl} respectivement. Les équations 2.21 et 2.22 sont réécrites sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} [B(\nabla)]^T [C] [B(\nabla)] [\tilde{\Phi}] \{u^P\}_{/L} + [B(\nabla)]^T [\delta C] [B(\nabla)] [\tilde{\Phi}] \{u^C\}_{/L} \\ + [B(\nabla)]^T [e]^T [\nabla] [\hat{\Phi}] \{\varphi\}_{/L} = \{0\} \end{aligned} \quad 2.38$$

$$\begin{aligned} [\nabla]^T [K] [\nabla] [\hat{\Phi}] \{\varphi^P\}_{/L} + [\nabla]^T [\delta K] [\nabla] [\hat{\Phi}] \{\varphi^C\}_{/L} \\ - [\nabla]^T [e] [\nabla] [\tilde{\Phi}] \{u\}_{/L} = \{0\} \end{aligned} \quad 2.39$$

$$\text{où } \begin{cases} \{u\}_{/L} = (u_1^1 & u_2^1 & u_3^1 & \dots & u_1^N & u_2^N & u_3^N)^T \\ \{\varphi\}_{/L} = (\varphi^1 & \varphi^2 & \varphi^3 & \dots & \varphi^{N-2} & \varphi^{N-1} & \varphi^N)^T \\ \nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \right)^T \end{cases}.$$

Dans les équations précédentes, les matrices $\tilde{\Phi}$ et $\hat{\Phi}$ sont construites grâce à l'interpolation 2.37.

La matrice B est définie en fonction des composantes du vecteur $z = (z_1 \ z_2 \ z_3)^T$ par

$$B(z) = \begin{bmatrix} z_1 & 0 & 0 & z_2 & z_3 & 0 \\ 0 & z_2 & 0 & z_1 & 0 & z_3 \\ 0 & 0 & z_3 & 0 & z_1 & z_2 \end{bmatrix}^T.$$

En adoptant la même stratégie, t^P et δt de l'équation 2.23 et q^P et δq de l'équation 2.24 sont écrits sous les formes compactes suivantes :

$$\begin{aligned} \{t^P\} &= [A_u] \{u^P\}_{/L} & q^P &= [C_\varphi] \{\varphi^P\}_{/L} \\ \{\delta t\} &= [B_u] \{u\}_{/L} + [B_\varphi] \{\varphi\}_{/L} & \delta q &= [D_\varphi] \{\varphi\}_{/L} + [D_u] \{u\}_{/L} \end{aligned} \quad \text{et} \quad 2.40$$

Les matrices définies dans les relations 2.40 sont construites à partir de l'interpolation 2.37 et des définitions 2.2 et 2.4.

On peut maintenant réécrire les équations 2.38 et 2.39 sous forme compacte :

$$[S_C]\{u_{/L}^P\} + [S_{\delta C}]\{u_{/L}^C\} + [Q_E]\{\varphi\} = \{0\} \quad 2.41$$

$$[T_C]\{\varphi_{/L}^P\} + [T_{\delta C}]\{\varphi_{/L}^C\} + [R_E]\{u\} = \{0\} \quad 2.42$$

En assemblant les équations 2.41 et 2.42 pour tous les points de collocation internes on obtient :

$$\begin{bmatrix} S_C^{IB} & S_C^{II} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_B^P \\ u_I^P \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} S_{\delta C}^{IB} & S_{\delta C}^{II} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_B^C \\ u_I^C \end{Bmatrix} + [Q_E]\{\varphi\} = \{0\} \quad 2.43$$

$$\begin{bmatrix} T_C^{IB} & T_C^{II} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_B^P \\ \varphi_I^P \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} T_{\delta C}^{IB} & T_{\delta C}^{II} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_B^C \\ \varphi_I^C \end{Bmatrix} + [R_E]\{u\} = \{0\} \quad 2.44$$

Dans ces équations, les indices B et I correspondent respectivement aux nœuds frontières et internes.

Les intégrales particulières sont choisies de telle sorte que $u^P = 0$ et $\varphi^P = 0$ pour tous les points frontières. Il s'ensuit :

$$[S_C^{II} - S_{\delta C}^{II}]\{u_I^P\} + [S_{\delta C}^{IB} \quad S_{\delta C}^{II}]\{u\} + [Q_E]\{\varphi\} = \{0\} \quad 2.45$$

$$[T_C^{II} - T_{\delta C}^{II}]\{\varphi_I^P\} + [T_{\delta C}^{IB} \quad T_{\delta C}^{II}]\{\varphi\} + [R_E]\{u\} = \{0\} \quad 2.46$$

Les solutions pour les intégrales particulières sont donc :

$$\begin{aligned} \{u_I^P\} &= -[U][S_{\delta C}^{IB} \quad S_{\delta C}^{II}]\{u\} - [U][Q_E]\{\varphi\} \\ &= [US]\{u\} + [UQ]\{\varphi\} \end{aligned} \quad 2.47$$

$$\begin{aligned}\{\varphi_I^P\} &= -[V][T_{\delta C}^{IB} \quad T_{\delta C}^{II}]\{\varphi\} - [V][R_E]\{u\} \\ &= [VT]\{\varphi\} + [VR]\{u\}\end{aligned}\tag{2.48}$$

La matrice U est la matrice inverse de $[S_C^{II} - S_{\delta C}^{II}]$ et V et celle de $[T_C^{II} - T_{\delta C}^{II}]$.

Grâce aux expressions 2.40, 2.47 et 2.48, on écrit t^P , δt , q^P et δq directement sous la forme compacte suivante :

$$\begin{aligned}\{t^P\} &= [K_C]\{u\} + [F_C]\{\varphi\} & \text{et} & & \{q^P\} &= [M_K]\{\varphi\} + [G_K]\{u\} \\ \{\delta t\} &= [K_{\delta C}]\{u\} + [F_E]\{\varphi\} & & & \{\delta q\} &= [M_{\delta K}]\{\varphi\} + [G_E]\{u\}\end{aligned}\tag{2.49}$$

III.3.2. Equations en microdilatation

On adopte la même stratégie que dans le cas précédent pour le milieu à microdilatation.

En utilisant la relation 2.37, pour chaque point de collocation, l'équation 2.27 donne :

$$[B(\nabla)]^T [C][B(\nabla)][\tilde{\Phi}]\{u^P\}_{/L} + \eta\{\nabla\}\{\hat{\Phi}\}^T\{\psi\}_{/L} = \{0\}\tag{2.50}$$

$$\text{où} \begin{cases} \{u\}_{/L} = (u_1^1 & u_2^1 & u_3^1 & \dots & u_1^N & u_2^N & u_3^N)^T \\ \{\psi\}_{/L} = (\psi^1 & \psi^2 & \psi^3 & \dots & \psi^{N-2} & \psi^{N-1} & \psi^N)^T \\ \nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3}\right)^T \end{cases}$$

Dans l'équation précédente, $\tilde{\Phi}$ et $\hat{\Phi}$ sont les matrices construites avec l'interpolation 2.37, la matrice B est représentée grâce au vecteur $z = (z_1, z_2, z_3)^T$

$$\text{par } B(z) = \begin{bmatrix} z_1 & 0 & 0 & z_2 & 0 & z_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & z_2 & 0 & 0 & z_1 & 0 & 0 & z_3 & 0 \\ 0 & 0 & z_3 & 0 & 0 & 0 & z_1 & 0 & z_2 \end{bmatrix}^T. \text{ La matrice } C \text{ est la représentation de}$$

Voigt de la matrice d'élasticité.

De même, l'équation 2.28 est réécrite sous la forme :

$$a\{\nabla\}^T\{\nabla\}\{\hat{\Phi}\}^T\{\psi^P\}_{/L} + b\{\hat{\Phi}\}^T\{\psi\}_{/L} - \eta\{\nabla\}^T[\tilde{\Phi}]\{u\}_{/L} = 0 \quad 2.51$$

En adoptant la même stratégie, t^P et δt de l'équation 2.29 et s^P de l'équation 2.30 sont écrits sous leurs formes compactes suivantes :

$$\begin{aligned} \{t^P\} &= [E_{/L}]\{u^P\}_{/L} \text{ et } s^P = [M_{/L}]\{\psi^P\}_{/L} \\ \{\delta t\} &= [K_\eta]\{\psi\}_{/L} \end{aligned} \quad 2.52$$

Les matrices définies dans les relations 2.52 sont construites à partir de l'interpolation 2.37 et des définitions (2.12, 2.17) et (2.13, 2.18).

Maintenant, en considérant tous les points de collocations, les relations 2.50 et 2.51 conduisent au système compact suivant :

$$[S_C^{IB} \quad S_C^{II}]\begin{Bmatrix} u_B^P \\ u_I^P \end{Bmatrix} + [Q]\{\psi\} = \{0\} \quad 2.53$$

$$[T_a^{IB} \quad T_a^{II}]\begin{Bmatrix} \psi_B^P \\ \psi_I^P \end{Bmatrix} + [T_b^{IB} \quad T_b^{II}]\begin{Bmatrix} \psi_B \\ \psi_I \end{Bmatrix} + [R]\{u\} = 0 \quad 2.54$$

De même, t^P et s^P peuvent être réécrites sous la forme suivante :

$$\{t^P\} = [E^{BB} \quad E^{BI}]\begin{Bmatrix} u_B^P \\ u_I^P \end{Bmatrix} \quad 2.55$$

$$s^P = [M^{BB} \quad M^{BI}]\begin{Bmatrix} \psi_B^P \\ \psi_I^P \end{Bmatrix} \quad 2.56$$

Comme précédemment, les exposant B et I correspondent respectivement aux nœuds frontières et aux nœuds internes.

Si on choisit les champs particuliers tels que : $u^P = 0$ et $\psi^P = 0$ sur tous les points frontière, les équations 2.53 et 2.54 deviennent :

$$[S_C^{II}]\{u_I^P\} + [Q]\{\psi\} = \{0\} \text{ et } [T_a^{II}]\{\psi_I^P\} + [T_b^{IB} \quad T_b^{II}]\{\psi\} + [R]\{u\} = 0$$

On obtient donc les solutions particulières suivantes :

$$\{u_I^P\} = -[U][Q]\{\psi\} = [UQ]\{\psi\} \quad 2.57$$

$$\{\psi_I^P\} = -[V][T_b^{IB} \quad T_b^{II}]\{\psi\} - [V][R]\{u\} = [VT]\{\psi\} + [VR]\{u\} \quad 2.58$$

La matrice U étant la matrice inverse de S_C^{II} et V celle de T_a^{II} .

III.4. Obtention des équations finales

III.4.1. Problèmes piézoélectriques

En considérant la partition introduite, les relations 2.32 et 2.34 sont réécrites en termes de champs globaux et de champs particuliers :

$$[H]\{u\} - [G]\{t\} = [H]\{u^P\} - [G]\{t^P + \delta t\}$$

$$[\bar{H}]\{\varphi\} - [\bar{G}]\{q\} = [\bar{H}]\{\varphi^P\} - [\bar{G}]\{q^P + \delta q\}$$

Afin d'éliminer les champs particuliers, utilisons les équations 2.47, 2.48 et 2.49. On obtient alors le système final suivant :

$$\begin{aligned} [\tilde{H}]\{u\} - [G]\{t\} &= [\tilde{F}]\{\varphi\} \\ [\hat{H}]\{\varphi\} - [\bar{G}]\{q\} &= [\bar{F}]\{u\} \end{aligned} \quad 2.59$$

III.4.2. Problèmes à microdilatation

En prenant compte des équations 2.55 à 2.58, les relations 2.32 et 2.34 deviennent :

$$\begin{aligned} [H]\{u\} - [G]\{t\} &= ([H][UQ] - [G][E][UQ] - [G][K_\psi])\{\psi\} \\ [\bar{H}]\{\psi\} - [\bar{G}]\{s\} &= ([\bar{H}][VT] - [\bar{G}][M][VT])\{\psi\} + ([\bar{H}][VR] - [\bar{G}][M][VR])\{u\} \end{aligned}$$

Et sous forme plus compacte :

$$\begin{aligned} [H]\{u\} - [G]\{t\} &= [\tilde{F}]\{\psi\} \\ [\hat{H}]\{\psi\} - [\bar{G}]\{s\} &= [\bar{F}]\{u\} \end{aligned} \quad 2.60$$

Au final, que ce soit pour des milieux piézoélectriques ou à microdilatation, on retrouve un problème classique formulé en termes de variables principales. Une fois les conditions aux limites prises en compte, le système d'équations sera résolu par une méthode standard. On testera la validité de notre méthode dans le chapitre suivant.

IV. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons détaillé la stratégie numérique adoptée. Cette approche semble pouvoir être appliquée à des problèmes divers. Cette méthode couple la BEM isotrope classique avec l'interpolation radiale par points appliquée à la forme forte d'équations différentielles et se nomme Local Point Interpolation – Boundary Element Method (LPI-BEM). Ce couplage offre la possibilité d'appliquer la méthode classique des éléments de frontière dans des cas où les équations de champs n'ont pas de solution fondamentale ou dans ceux où l'évaluation de cette dernière et de ses dérivées est fastidieuse (ex : cas anisotrope).

A priori, l'implémentation de la méthode ne nécessite qu'une légère modification de code isotropes existants.

L'efficacité et la précision de la méthode seront évaluées sur plusieurs exemples dans le chapitre suivant.

Références du chapitre :

- [1] Kouitat Njiwa R., 2011, “Isotropic-BEM coupled with a local point interpolation method for the solution of 3D-anisotropic elasticity problems,” *Eng. Anal. Bound. Elem.*, **35**(4), pp. 611–615.
- [2] Eringen A. C., and Suhubi E. S., 1964, “Nonlinear theory of simple micro-elastic solids—I,” *Int. J. Eng. Sci.*, **2**(2), pp. 189–203.
- [3] Eringen A. C., 1990, “Theory of thermo-microstretch elastic solids,” *Int. J. Eng. Sci.*, **28**(12), pp. 1291–1301.
- [4] Iesan D., and Quintanilla R., 1994, “Existence and continuous dependence results in the theory of microstretch elastic bodies,” *Int. J. Eng. Sci.*, **32**(6), pp. 991–1001.
- [5] Iesan D., and Pompei A., 1995, “On the equilibrium theory of microstretch elastic solids,” *Int. J. Eng. Sci.*, **33**(3), pp. 399–410.
- [6] Brebbia C. A., and Dominguez J., 1992, *Boundary Elements: An introductory course*, WIT Press, Southampton.
- [7] Balas J., Sladek J., and Sladek V., 1989, “Stress Analysis by Boundary Element Method,” Elsevier.
- [8] Bonnet M., 1999, “Boundary Integral Equation Methods for Solids and Fluids,” J.Wiley.
- [9] Liu G. R., and Gu Y. T., 2001, “A local radial point interpolation method (LRPIM) for free vibration analyses of 2-D solids,” *J. Sound. Vib.*, **246**(1), pp. 29–46.

Table des figures :

<i>Figure 2.1 : Exemple de domaine cubique avec maillage éléments de frontière (rouge) et points internes (vert).</i>	<i>48</i>
---	-----------

Chapitre 3
Validation et application aux milieux
micromorphes

Table des matières du chapitre 3 :

Chapitre 3	Validation et application aux milieux micromorphes	59
I.	Introduction	63
II.	Cas des solides piézoélectriques	64
II.1.	Cas purement mécanique	64
II.2.	Cas piézoélectrique	66
II.2.1.	Cas d'un chargement mécanique uniforme	67
II.2.2.	Influence des paramètres de la méthode numérique.....	71
II.2.2.1.	Influence des paramètres de forme q et c :	71
II.2.2.2.	Influence du paramètre α :	72
II.2.3.	Cas d'une induction électrique uniforme.....	73
II.2.4.	Cas de la combinaison des chargements mécanique et électrique.....	75
II.2.5.	Cas de torsion d'un solide piézoélectrique	78
II.2.6.	Cas d'un solide sollicité hors axe d'isotropie	79
III.	Conclusion.....	82
IV.	Cas des milieux à microdilatation	83
IV.1.	Exemples numériques	83
IV.2.	Evolution des solutions en fonction des paramètres de la méthode	84
IV.2.1.	Influence du paramètre de forme q	84
IV.2.2.	Influence du paramètre β	85
IV.3.	Evolution des solutions en fonction des paramètres dus à la microdilatation....	86
IV.3.1.	Influence du paramètre a	88
IV.3.2.	Influence du paramètre b	89
IV.3.3.	Influence du paramètre η	90

IV.4.	Cas de traction simple	91
IV.5.	Chargement d'un échantillon tubulaire	94
V.	Conclusion.....	97

I. Introduction

Ce chapitre est consacré à l'analyse de la stabilité et de la robustesse de la stratégie numérique adoptée et présentée dans le chapitre précédent. Rappelons que cette approche numérique nommée LPI-BEM (Local Point Interpolation – Boundary Element Method) combine les avantages de la méthode des éléments de frontières classique et de la méthode de collocation par points. La capacité de la stratégie à traiter de problèmes complexes est d'abord évaluée sur l'exemple d'un problème de piézoélectricité offrant ainsi la possibilité de situer l'approche par rapport aux autres stratégies numériques. Le cas particulier d'un milieu micromorphe est ensuite considéré. Après avoir démontré l'efficacité de l'approche dans ce cadre, on s'attarde sur l'influence des divers paramètres du modèle sur la réponse à une sollicitation donnée.

Ce chapitre commence donc par le rappel des résultats relatifs à un cas purement mécanique. Nous présentons ensuite une analyse du cas piézoélectrique dont les principaux résultats ont déjà fait l'objet d'une publication [1]. Nous terminons le chapitre par une présentation et une discussion des résultats portant sur les milieux à microdilatation.

II. Cas des solides piézoélectriques

Dans tout ce qui suit, nous adoptons comme géométrie d'échantillon, un cube unitaire. Sa frontière est subdivisée en 24 quadrilatères à 9 nœuds, soit 4 éléments par face. Un certain nombre de points internes vient augmenter le nombre de points frontières pour l'application de la méthode de collocation par points. Le nombre minimum de points internes considéré est de 27.

Le travail utilise uniquement les fonctions multiquadriques généralisées du type : $R_i(r) = (r_i^2 + c^2)^q$ où $r_i = \|x - x_i\|$ est la distance euclidienne entre le point x et le centre de collocation x_i . c et q sont des paramètres connus sous le nom de paramètres de forme. Dans de nombreuses approches numériques utilisant ce type de fonction, les résultats numériques sont toujours fournis avec les valeurs optimales de ces paramètres. Pour notre étude paramétrique, c est défini comme étant proportionnel à d_0 valeur maximale entre les distances minimales dans les directions x , y et z entre deux points de collocation.

II.1. Cas purement mécanique

La méthode LPI-BEM est ici appliquée au cas d'un solide anisotrope. Ce comportement est obtenu en annulant le tenseur piézoélectrique du troisième ordre. La loi de comportement et les équations d'équilibre se réduisent à :

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad 3.1$$

$$\sigma_{ij,j} = 0 \quad 3.2$$

Nous avons utilisé un solide à comportement élastique isotrope transverse, l'axe d'isotropie coïncidant avec la direction z du repère de travail. Les résultats numériques obtenus pour le plus petit nombre de points internes et pour des cas de chargement uniformes (solicitation uniaxiale et biaxiale) sont quasiment les solutions analytiques du problème. Ces résultats

restent inchangés dans une large plage de variation des paramètres de forme c et q . D'autres cas ont été traités dans la référence [2]. Nous pouvons considérer que notre outil numérique est validé dans le cas purement mécanique.

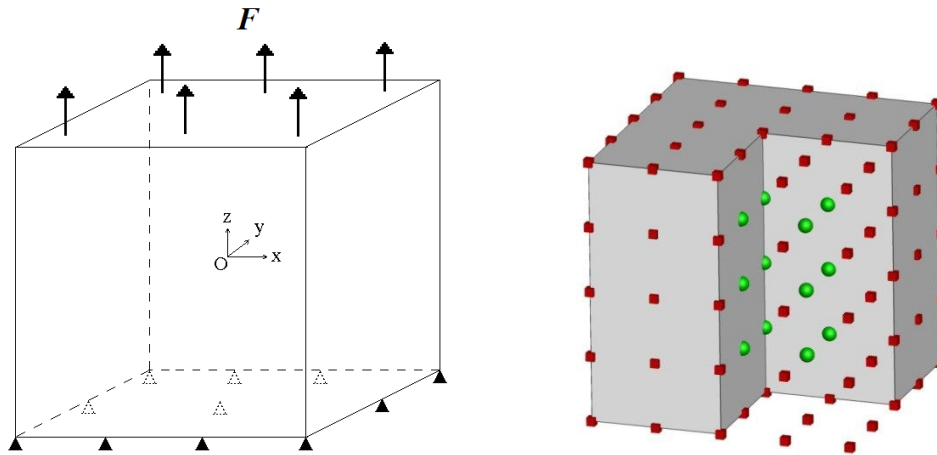


Figure 3.1 : Cube unitaire sous chargement uniforme dans la direction z ayant comme origine le centre du cube et son maillage associé.

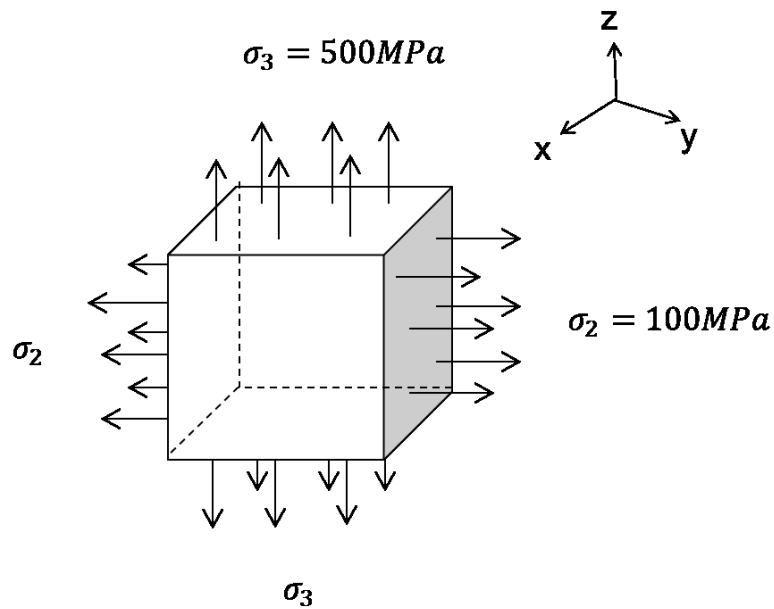


Figure 3.2 : Cas de la double traction.

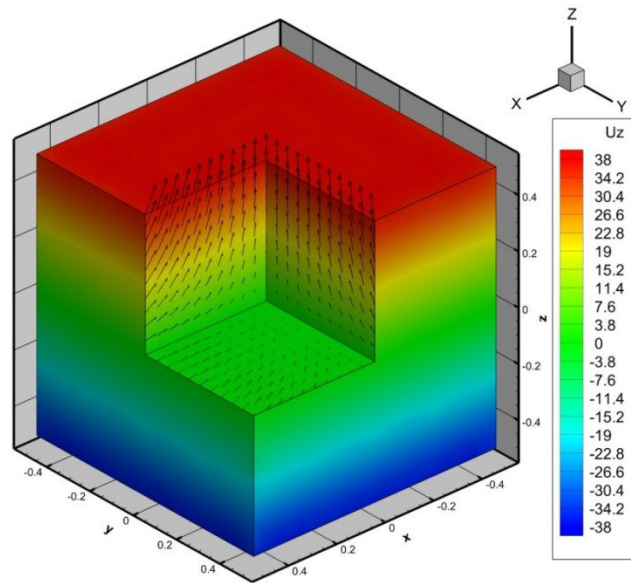


Figure 3.3 : Déplacement U_z (normalisé par $U_0 = 10^{-4}m$) et vecteurs déplacements pour un cas de double traction sur un matériau isotrope transverse.

II.2. Cas piézoélectrique

Comme annoncé, l'étude ci-après a pour objet de tester l'aptitude de la stratégie numérique adoptée à traiter de problèmes complexes en l'occurrence multi-physique. Nous avons choisi le cas de la piézoélectricité parce qu'il est bien documenté. Comme précédemment nous adoptons le cube unité. Ce solide est en appui simple sur sa face inférieure (les déplacements transverses sont libres). Les faces latérales du cube sont libres de contrainte et d'induction électrique. Les chargements mécanique et électrique seront appliqués sur la face supérieure de l'échantillon. A chaque fois que ce sera possible, les résultats numériques seront comparés à la solution analytique.

Les paramètres des matériaux utilisés ici sont tirés de Ding et Liang [3] et sont rappelés dans la *Tableau 3.1*.

	Coefficients élastiques (10^{10} N/m ²)					Coefficients piézoélectriques (C/m ²)			Constantes diélectriques (10^{-9} C/(mV))	
	C_{11}	C_{12}	C_{13}	C_{33}	C_{44}	e_{31}	e_{33}	e_{15}	K_{11}	K_{33}
PZT-4	12.6	7.78	7.43	11.5	2.56	-5.2	15.1	12.7	6.46	5.62
PZT-5H	12.6	5.5	5.3	11.7	3.53	-6.5	23.3	17.0	15.1	13.0

Tableau 3.1 : Paramètres matériaux du PZT-4 et du PZT-5H tirés de [3].

L'axe d'isotropie du matériau coïncide avec la direction z du système Cartésien de travail. Les résultats sont normalisés par les valeurs de référence suivantes : $U_0 = 10^{-4}m$, $D_0 = 10^{-2}C/m^2$, $\varphi_0 = 10^5V$, $\varepsilon_0 = 10^{-4}$ et $\sigma_0 = 10^8N/m^2$.

Les contraintes présentées sont obtenues en post-traitement en utilisant l'interpolation radiale définie en 2.37.

II.2.1.Cas d'un chargement mécanique uniforme

Considérons d'abord le solide piézoélectrique sollicité mécaniquement. Dans ce cas, sur la face inférieure du cube, nous imposons un potentiel électrique nul. L'échantillon est soumis à une répartition uniforme de charge sur sa face supérieure ($D = 0$) (cf. Figure 3.4).

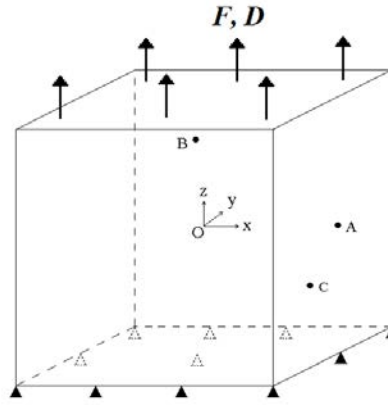


Figure 3.4 : Cube unitaire sous chargement uniforme mécanique et/ou électrique dans la direction z ayant comme origine le centre du cube.

Les solutions analytiques de ce problème existent et seront utilisées à des fins de comparaison (cf. Annexe 1). Pour analyser les résultats, nous utilisons quelques points de l'échantillon : deux points frontières A et B et un point interne O. Le point interne est choisi de façon à être toujours un centre de collocation pour les différentes densités de points internes utilisées dans l'étude.

Les résultats relatifs à une sollicitation de traction de l'échantillon sont consignés dans les tableaux ci-après. Ils concernent les déplacements suivant les trois directions de l'espace, le potentiel électrique et la déformation selon l'axe de sollicitation pour les deux céramiques piézoélectrique : PZT-4 et PZT-5H (Titano-Zirconate de Plomb). Ces premiers résultats sont obtenus avec $q = 1.03$ et $c = 10^{-4}d_0$. Rappelons qu'une autre constante k^0 entre dans la formulation. Nous la définissons par (cf. 2.20) $k^0 = \alpha * Tr(K)/3$. Pour les résultats du

Tableau 3.2 et du Tableau 3.3, $\alpha = 10^{-4}$ et le chargement mécanique est de $10^8 N/m^2$.

On observe que même avec le plus petit nombre de points internes (ici 27 points), les résultats numériques sont très proches des solutions analytiques (l'erreur relative est inférieure à 0.03%). Il convient maintenant d'étudier les variations de cette précision des calculs avec les divers paramètres de la stratégie numérique : q , c et α .

Point		Résultats numériques (PZT-4)			Théorie (PZT-4)	Résultats numériques (PZT-5H)			Théorie (PZT-5H)	
		27 points	125 points	343 points		27 points	125 points	343 points		
A	0.5	U_x	-1.163921	-1.163917	-1.163903	-1.1639037	-0.7847087	-0.7847019	-0.7846887	-0.7846896
	0	U_y	4.70E-08	3.72E-05	-1.52E-10	0	6.92E-06	9.41E-06	2.26E-10	0
		U_z	4.117434	4.117396	4.117111	4.1171126	3.558533	3.558452	3.558144	3.5581449
		φ	13.21245	13.21178	13.21115	13.211135	7.163613	7.163064	7.161988	7.1619801
		ε_{33}	8.237601	8.235495	8.234224	8.234225	7.117706	7.117529	7.116288	7.1162899
B	-0.25	U_x	0.5819391	0.5819239	0.5819514	0.5819518	0.3923420	0.3923283	0.3923444	0.39234478
		U_y	-1.163930	-1.163943	-1.163903	-1.163904	-0.7847106	-0.7846982	-0.7846891	-0.7846896
		U_z	6.176200	6.176184	6.175668	6.175669	5.337761	5.337670	5.337217	5.3372174
		φ	19.82045	19.81795	19.81672	19.81670	10.74575	10.74449	10.74299	10.7429702
		ε_{33}	8.235370	8.234853	8.234227	8.234225	7.117262	7.117511	7.116294	7.1162899
O	0	U_x	3.25E-12	7.45E-12	-1.15E-10	0	1.02E-11	1.85E-11	-3.56E-10	0
		U_y	5.14E-12	3.06E-11	-1.94E-10	0	6.70E-13	6.01E-13	1.81E-10	0
		U_z	4.117398	4.117370	4.117111	4.1171126	3.558551	3.558442	3.558143	3.5581449
		φ	13.21166	13.21125	13.21115	13.211135	7.163642	7.162754	7.161990	7.161980
		ε_{33}	8.236761	8.235108	8.234223	8.234225	7.117784	7.117454	7.116286	7.1162899

Tableau 3.2 : Déplacements, potentiel électrique et déformation pour les matériaux PZT-4 et PZT-5H sous un chargement mécanique uniforme.

Point	Résultats numériques (PZT-4)		Théorie (PZT-4)	Résultats numériques (PZT-5H)		Théorie (PZT-5H)
	27 points	343 points		27 points	343 points	
U_x	-0.5817055	-0.5819513	-0.58195184	-0.3922859	-0.3923443	-0.39234478
U_y	0.5817526	0.5819513	0.58195184	-0.3922232	0.3923443	0.39234478
U_z	2.058503	2.058556	2.0585563	1.778875	1.779072	1.77907247
φ	6.60540	6.605573	6.605567	3.581857	3.580995	3.580990
ε_{33}	8.235526	8.234224	8.234225	7.117540	7.116287	7.1162899

Tableau 3.3 : Déplacements, potentiel électrique et déformation pour les matériaux PZT-4 et PZT-5H sous un chargement mécanique uniforme pour un point interne coïncident.

A titre d'illustration, la Figure 3.5 représente le potentiel électrique φ et déplacement U_z pour un chargement mécanique de 10^8 N/m^2 pour le matériau PZT-4. Les résultats sont en accord avec la théorie.

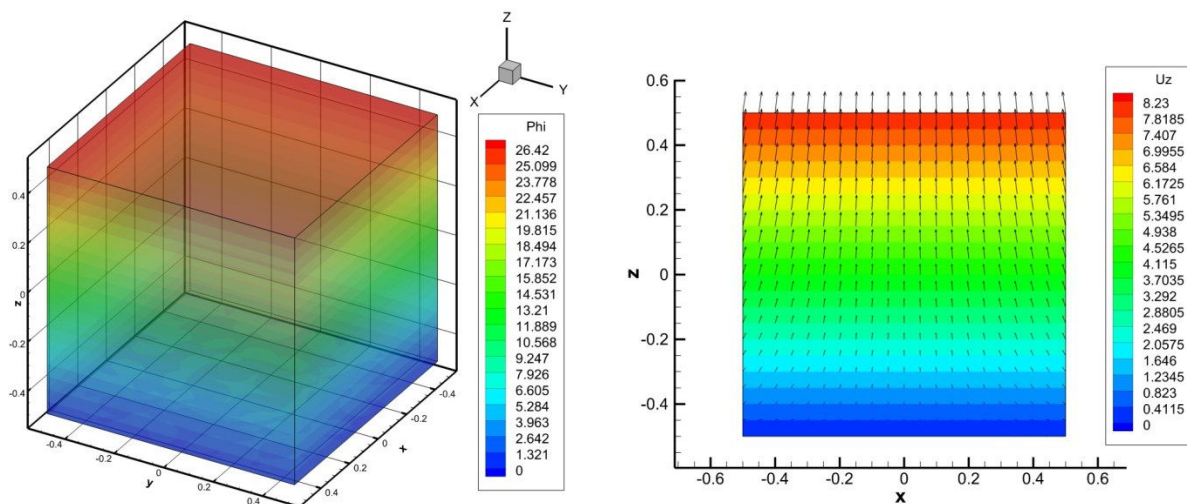


Figure 3.5 : Potentiel électrique et déplacement U_z pour un chargement mécanique uniforme pour le matériau PZT-4.

II.2.2. Influence des paramètres de la méthode numérique

Le but de cette étude paramétrique est de montrer que la précision de la stratégie numérique demeure acceptable dans une large plage de variation des valeurs des paramètres. Pour certains problèmes de mécanique du solide et l'approche dite « weak-strong form », Liu indique que l'optimum du paramètre de forme q est égal à 1,03 [4].

II.2.2.1. Influence des paramètres de forme q et c :

Dans un premier temps, nous fixons le paramètre α à 10^{-4} et focalisons sur les variations des deux paramètres de forme c et q . L'évolution de l'erreur relative au point B figure dans le *Tableau 3.4*. Les mêmes tendances ont été obtenues pour les autres points du solide. On peut constater que les résultats restent très précis dans une large plage de variation des paramètres de forme. En effet, en prenant des paramètres q et c variant respectivement de 0,5 à 1,5 et de $10^{-4}d_0$ à $10^{-1}d_0$, l'erreur relative maximale est inférieure à 0,1%. Les meilleurs résultats sont obtenus pour une valeur de c entre $10^{-2}d_0$ et $10^{-1}d_0$. Enfin, les résultats ne sont que très peu affectés par la variation du paramètre q .

$\begin{matrix} c \\ q \end{matrix}$	1E-04	1E-03	0.01	0.1
0.5	0.02314	0.0198	0.00994	0.00563
0.7	0.01273	0.01031	0.00342	0.0057
1.03	0.0086	0.00871	0.00837	0.00555
1.2	0.00882	0.00882	0.00829	0.00578
1.5	0.0081	0.00808	0.00753	0.00525

Tableau 3.4 : Evolution de l'erreur relative du déplacement U_z pour le point B (-0.25, 0.5, 0.25) pour un matériau PZT-4 sous chargement mécanique uniforme (en %).

II.2.2.2. Influence du paramètre α :

Le coefficient α est un autre paramètre pouvant influencer la précision de notre méthode. Son influence est représentée en *Figure 3.6*, en utilisant toujours les valeurs de champ du point B. Les valeurs numériques représentées par leurs erreurs relatives ont été obtenues avec $q = 1,03$ et $c = 10^{-4}d_0$.

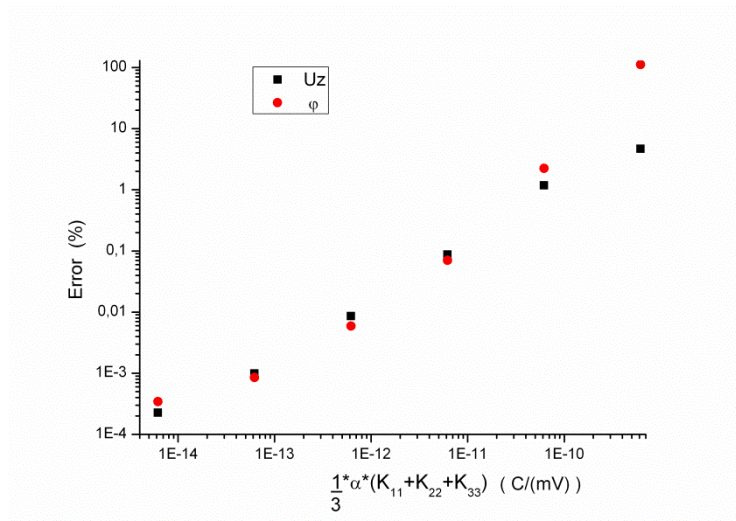


Figure 3.6 : Erreur relative sur le déplacement U_z et le potentiel électrique ϕ au point B pour PZT-4.

Nous remarquons que la précision est bien meilleure lorsque la valeur du paramètre α est petite. Par exemple, si nous voulons des résultats avec une erreur inférieure à 1%, $k^0 = \alpha * Tr(K_{ij})/3$ doit être inférieur à $6.10^{-11} \text{ C/(mV)}$. Ainsi, α doit être pris inférieur à 10^{-2} .

II.2.3. Cas d'une induction électrique uniforme

Cette fois, on considère que l'échantillon piézo-électrique n'est sollicité que électriquement. Sur la face supérieure du cube, on impose une induction électrique uniforme de 10^{-2} C/m^2 . Dans le

Tableau 3.5 et le *Tableau 3.6*, les valeurs obtenues pour 27, 125¹, et 343 nœuds internes sont comparées à la solution analytique, en prenant comme valeurs de paramètres : $q = 1,03$, $c = 10^{-4}d_0$ et $\alpha = 10^{-4}$. Comme dans le cas du chargement purement mécanique, les solutions numériques obtenues sont très proches des valeurs analytiques.

¹ Uniquement pour le *Tableau 3.5*.

Point	Résultats numériques (PZT-4)				Théorie (PZT-4)	Résultats numériques (PZT-5H)			Théorie (PZT-5H)
		27 points	125 points	343 points		27 points	125 points	343 points	
A	U_x	-0.590193	-0.590175	-0.5901726	-0.590172	-0.291269	-0.291281	-0.2912790	-0.291279
	0.5 U_y	2.27E-11	1.05E-10	-3.77E-11	0	3.13E-11	2.10E-10	2.16E-10	0
	0 U_z	1.321151	1.321118	1.321114	1.3211135	0.716180	0.716193	0.7161982	0.716198
	0 φ	-4.253568	-4.253552	-4.253541	-4.253539	-2.270965	-2.271170	-2.271229	-2.271228
	ε_{33}	2.642282	2.642236	2.642227	2.6422269	1.432368	1.432384	1.432396	1.432396
B	U_x	0.295091	0.295087	0.2950863	0.2950862	0.145634	0.145638	0.1456395	0.1456394
	-0.25 U_y	-0.590180	-0.590174	-0.5901725	-0.590172	-0.291271	-0.291278	-0.2912790	-0.291279
	0.5 U_z	1.981714	1.981675	1.981670	1.9816702	1.074284	1.074293	1.074297	1.074297
	0.25 φ	-6.380542	-6.380341	-6.380312	-6.380308	-3.406482	-3.406782	-3.406844	-3.406842
	ε_{33}	2.642253	2.642221	2.642226	2.6422269	1.432427	1.432396	1.432395	1.432396
O	U_x	5.21E-11	3.34E-10	-8.62E-11	0	1.65E-11	8.89E-11	1.39E-9	0
	0 U_y	8.78E-12	1.42E-10	-1.19E-10	0	1.86E-11	2.53E-10	1.53E-10	0
	0 U_z	1.321158	1.321119	1.321114	1.3211135	0.716179	0.716196	0.7161983	0.716198
	0 φ	-4.253752	-4.253565	-4.253541	-4.253539	-2.271036	-2.271265	-2.271229	-2.271228
	ε_{33}	2.642322	2.642240	2.642228	2.6422269	1.432357	1.432394	1.432397	1.432396

Tableau 3.5 : Déplacements, potentiel électrique et déformation pour les matériaux PZT-4 et PZT-5H sous induction électrique uniforme.

Point	Résultats numériques (PZT-4)		Théorie (PZT-4)	Résultats numériques (PZT-5H)		Théorie (PZT-5H)
	27 points	343 points		27 points	343 points	
U_x	-0.295091	-0.2950863	-0.2950862	-0.1456667	-0.1456395	-0.1456394
U_y	0.295090	0.2950863	0.2950862	0.1456667	0.1456395	0.1456394
U_z	0.6605755	0.6605569	0.6605567	0.3581633	0.3580991	0.3580990
φ	-2.126847	-2.126771	-2.126769	-1.135907	-1.135615	-1.1356139
ε_{33}	2.642285	2.642227	2.6422269	1.432395	1.432396	1.432396

Tableau 3.6 : Déplacements, potentiel électrique et déformation pour les matériaux PZT-4 et PZT-5H sous induction électrique uniforme pour un point interne.

II.2.4.Cas de la combinaison des chargements mécanique et électrique

Cette fois, les chargements mécanique et électrique précédents agissent simultanément. Grâce à la linéarité du problème, nous devrions avoir un résultat qui correspond à la superposition des deux cas précédents. Les résultats présentés dans le

Tableau 3.7 et le Tableau 3.8 sont obtenus avec 27, 125² et 343 points de collocation internes. Les valeurs des paramètres pris ici sont : $q = 1,03$, $c = 10^{-4}d_0$ et $\alpha = 10^{-4}$.

² Uniquement pour le Tableau 3.7.

Point		Résultats numériques (PZT-4)			Théorie (PZT-4)	Résultats numériques (PZT-5H)			Théorie (PZT-5H)	
		27 points	125 points	343 points		27 points	125 points	343 points		
A	0.5 0 0	U_x	-1.754032	-1.754016	-1.754075	-1.754076	-1.075991	-1.075965	-1.075968	-1.075968
		U_y	4.36E-11	2.11E-10	-1.90E-10	0	5.95E-11	3.09E-10	4.27E-10	0
		U_z	5.438148	5.438140	5.438225	5.4382261	4.274383	4.274356	4.274342	4.2743429
		φ	8.95766	8.95810	8.957604	8.9575961	4.89019	4.89067	4.890759	4.8907523
		ε_{33}	10.87634	10.87633	10.87645	10.876452	8.548746	8.548719	8.548684	8.5486859
		σ_{33}	1.000016	1.000031	1	1	0.999986	1.000013	1	1
		D_3	0.999906	0.999857	0.9999984	1	1.000112	0.999955	0.9999971	1
B	-0.25 0.5 0.25	U_x	0.877027	0.877021	0.8770376	0.877038	0.537995	0.537988	0.5379839	0.5379842
		U_y	-1.754061	-1.754052	-1.754076	-1.754076	-1.075986	-1.075971	-1.075968	-1.075968
		U_z	8.157248	8.157262	8.157338	8.1573391	6.411542	6.411523	6.411514	6.4115144
		φ	13.43689	13.43750	13.43641	13.436394	7.33535	7.33603	7.336142	7.3361285
		ε_{33}	10.87640	10.87652	10.87645	10.876452	8.548620	8.548672	8.548689	8.5486859
		σ_{33}	0.999997	1.000023	1.000001	1	0.999965	0.999991	1.000001	1
		D_3	0.999993	0.999956	0.9999990	1	1.000127	1.000034	0.9999978	1
O	0 0 0	U_x	7.27E-11	4.14E-10	-2.01E-10	0	1.48E-12	-5.56E-11	1.02E-9	0
		U_y	1.77E-11	2.99E-10	-3.12E-10	0	4.66E-11	3.78E-10	3.34E-10	0
		U_z	5.438133	5.438125	5.438225	5.4382261	4.274384	4.274351	4.274342	4.2743429
		φ	8.95805	8.95841	8.957606	8.9575961	4.89034	4.89083	4.890760	4.8907523
		ε_{33}	10.87625	10.87620	10.87645	10.876452	8.548770	8.548697	8.548682	8.5486859
		σ_{33}	1.000007	1.000018	1	1	0.999989	1.000007	1	1
		D_3	0.999908	0.999860	0.9999982	1	1.000116	0.999976	0.9999971	1

Tableau 3.7 : Déplacements, potentiel électrique, déformation, contrainte et déplacement électrique pour les matériaux PZT-4 et PZT-5H sous chargement mécanique et induction électrique uniformes.

Point	Résultats numériques (PZT-4)		Théorie (PZT-4)	Résultats numériques (PZT-5H)		Théorie (PZT-5H)
	27 points	343 points		27 points	343 points	
U_x	-0.877027	-0.8770376	-0.8770380	-0.5379955	-0.5379838	-0.5379842
U_y	0.877027	0.8770376	0.8770380	0.5379955	0.5379838	0.5379842
U_z	2.71910	2.719112	2.719113	2.137167	2.137171	2.137171
φ	4.47923	4.478803	4.478798	2.44536	2.445380	2.445376
ε_{33}	10.87640	10.87645	10.876452	8.548620	8.548684	8.5486859
σ_{33}	1.000006	1	1	0.999972	1	1
D_3	0.999936	0.9999981	1	1.000112	0.9999968	1

Tableau 3.8 : Déplacements, potentiel électrique, déformation, contrainte et déplacement électrique pour les matériaux PZT-4 et PZT-5H sous chargement mécanique et induction électrique uniformes pour un point interne.

Il apparait que même pour le plus petit nombre de points de collocation (27 points internes) les solutions numériques sont très satisfaisantes. Lorsque le nombre de points de collocation augmente (343 points internes), les résultats numériques sont quasiment la solution analytique. Ces résultats indiquent que la méthode est stable et précise pour des cas de chargement homogènes.

Pour asseoir la validité de la stratégie, il faut considérer un mode de sollicitation induisant une déformation non homogène. C'est par exemple le cas d'une sollicitation de torsion.

II.2.5. Cas de torsion d'un solide piézoélectrique

Considérons un barreau de hauteur $H = 2m$ et de section droite carrée de côté $d = 1m$. Les faces latérales du barreau où le potentiel électrique est nul sont libres de contraintes. Sur les faces supérieure et inférieure où l'induction électrique est nulle, les déplacements tangentiels sont donnés par $U_x = -ayz$ et $U_y = axz$ avec $a = Cte$. Un schéma de ce cas de chargement est représenté sur la *Figure 3.7*.

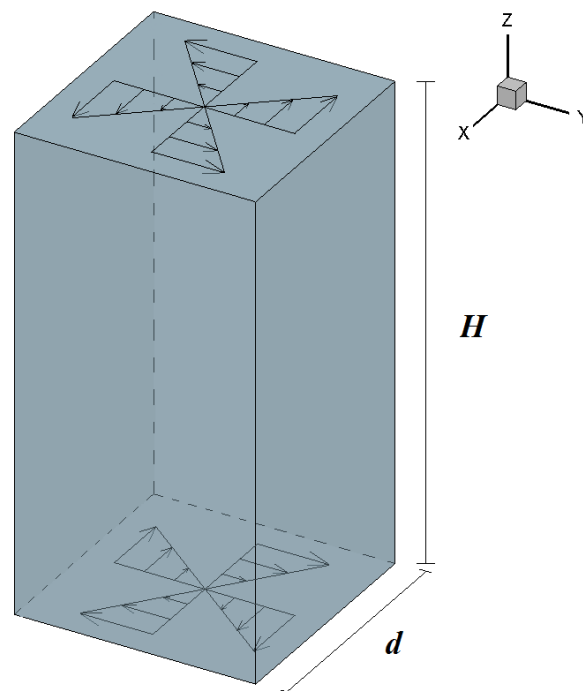


Figure 3.7 : Torsion d'une barre piézoélectrique à section carré.

Le calcul a été réalisé avec 40 éléments quadrilatères à 9 nœuds et 63 points internes. La déformée d'une section droite est représentée dans la *Figure 3.8*. Ce résultat est très peu sensible à la variation des paramètres de forme des fonctions radiales. Ce résultat a été comparé avec celui fourni par le logiciel éléments finis COMSOL-Multiphysics. Pour obtenir la même qualité de résultats, il a été nécessaire d'utiliser 96925 éléments.

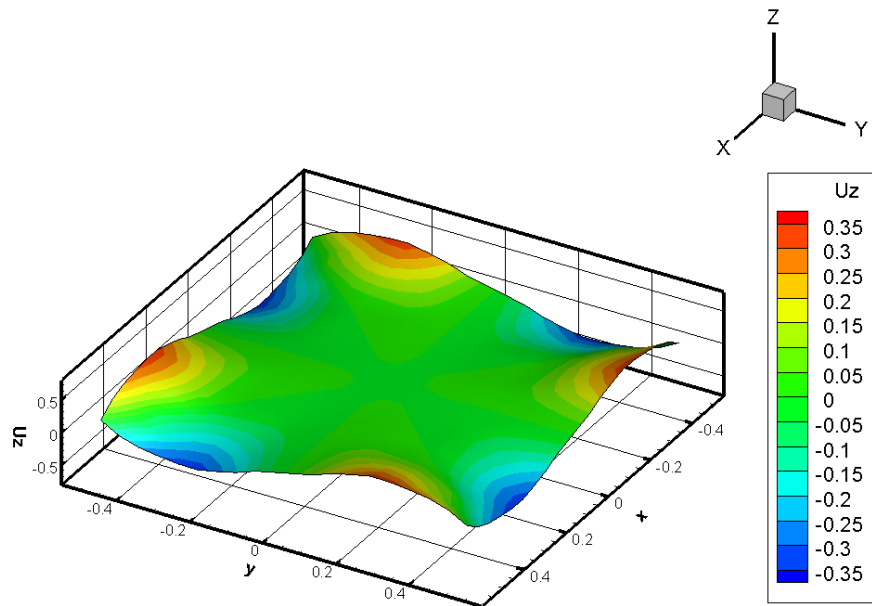


Figure 3.8 : Gauchissement de la section transverse lors d'une torsion (résultats normalisés).

Considérons maintenant les performances de notre démarche pour un cas plus complexe que celui de l'isotropie transverse.

II.2.6. Cas d'un solide sollicité hors axe d'isotropie

Cette fois ci, nous revenons à une sollicitation de traction uniforme mais en changeant l'orientation du matériau PZT-4. En effet, nous allons « tourner » ce matériau autour de l'axe z de 18° , puis autour de l'axe x de $35,25^\circ$ et enfin autour de l'axe y de 67° .

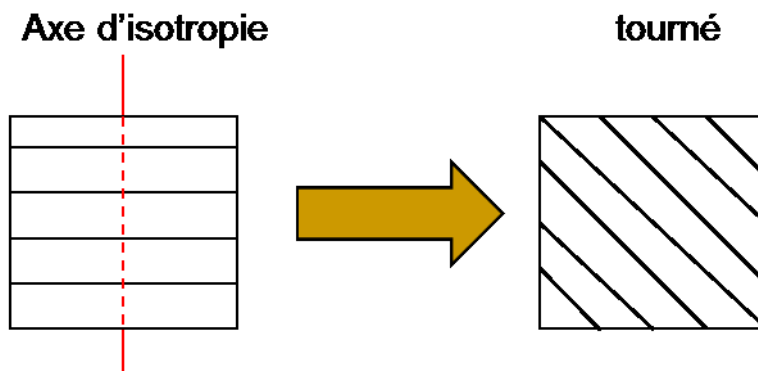


Figure 3.9 : Changement d'orientation de notre solide piézoélectrique.

De cette façon, les matrices du matériau changent et deviennent :

$$[C_{rot}] = \begin{bmatrix} 12,2 & 7,28 & 7,49 & -0,168 & 0,148 & 0,267 \\ & 12,5 & 7,59 & -0,0712 & 0,164 & 0,166 \\ & & 12,6 & -0,0276 & 0,0361 & 0,196 \\ & & & 2,44 & -0,0208 & 0,0441 \\ sym & & & & 2,45 & -0,0766 \\ & & & & & 2,36 \end{bmatrix} * 10^{10} N/m^2$$

$$[e_{rot}] = \begin{bmatrix} -13,0 & 5,19 & 4,30 & 0,706 & 3,13 & 5,67 \\ -4,66 & 10,7 & -3,30 & 3,51 & 0,706 & -8,27 \\ -2,58 & -2,20 & 6,28 & 7,03 & -9,16 & 0,706 \end{bmatrix} C/m^2$$

$$[K_{rot}] = \begin{bmatrix} 5,99 & 0,365 & 0,202 \\ & 6,18 & -0,155 \\ sym & & 6,38 \end{bmatrix} * 10^{-9} C/(mV)$$

Le problème abordé est désormais totalement anisotrope. Pour ce dernier exemple, la face inférieure du cube est encastree et son potentiel électrique est imposé nul. Les faces latérales du cube unitaire sont libres de traction et d'induction. On impose sur la face supérieure un chargement mécanique uniforme $\sigma_3 = 10^8 N/m^2$ (cf. Figure 3.10).

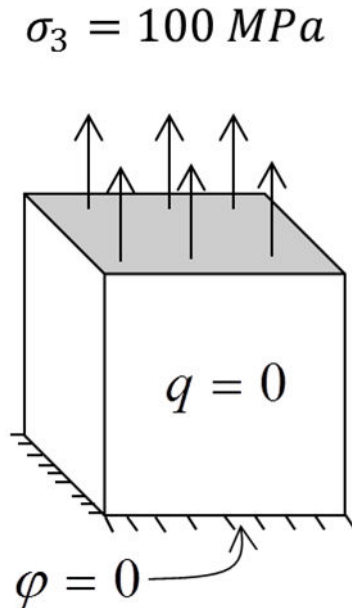


Figure 3.10 : Cas isotrope transverse sollicité hors axe d'isotropie.

Les résultats suivants sont également normalisés par les valeurs de référence. Comme nous pouvons le voir sur la *Figure 3.11 (a)*, le déplacement dans la direction du chargement n'est plus linéaire du fait de l'anisotropie. Cet effet est mis en évidence par les surfaces isovaleurs du potentiel électrique sur la *Figure 3.11 (b)*. Les courbes isovaleurs de déformation et de contrainte sont tracées en *Figure 3.11 (c)* et *(d)*, au niveau du plan milieu perpendiculaire à l'axe de chargement. Ces valeurs ont été calculées en post-traitement en utilisant l'interpolation radiale. Comme nous pouvions le penser, ces valeurs ne sont plus constantes dans ces plans. De même que précédemment, les valeurs des paramètres q , c et α ne changent quasiment pas la solution obtenue.

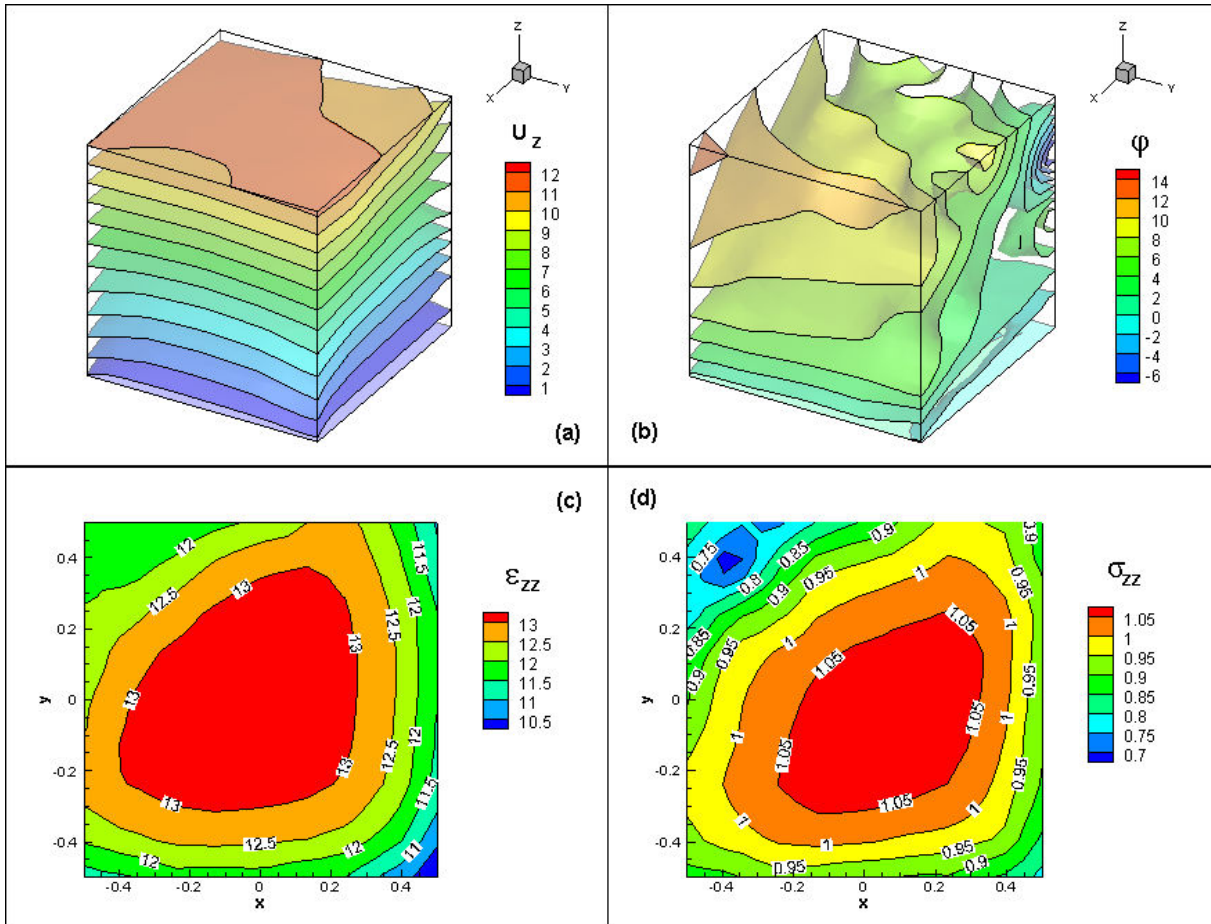


Figure 3.11 : Déplacement dans la direction de sollicitation (a), distribution du potentiel électrique (b), déformation ϵ_{zz} (c) et contrainte σ_{zz} (d) dans le plan milieu pour un solide PZT-4 « tourné » sous sollicitation mécanique avec la face inférieure encastree.

III. Conclusion

Dans cette première partie, l'approche présentée a été appliquée au cas d'un matériau piézoélectrique avec succès. L'efficacité et la précision de la méthode sont démontrées sur plusieurs exemples. Les équations de champ du problème que nous avons en vue présentent des similitudes avec celles du problème piézoélectrique. On peut donc aborder en toute confiance leur résolution par le schéma numérique adopté.



IV. Cas des milieux à microdilatation

Les équations régissant l'équilibre des milieux à microdilatation ont été présentées au chapitre précédent. Nous abordons ici leur réponse à une sollicitation donnée en focalisant sur l'impact des paramètres du modèle mécanique. Comme précédemment, nous commencerons par étudier l'influence des paramètres de la méthode numérique.

IV.1. Exemples numériques

De même que dans le paragraphe précédent, nous utilisons des fonctions multiquadriques du type : $R_i(r) = (r_i^2 + c^2)^q$ où $r_i = \|x - x_i\|$, c et q sont des paramètres de forme. Nous rappelons que le paramètre c est défini comme étant proportionnel à d_0 qui est le maximum des distances minimales sur les directions x , y et z entre deux points de collocation. Nous posons donc $c = \beta d_0$.

Dans un premier temps, nous allons vérifier que notre approche est stable pour des intervalles assez grands de chacun des paramètres q et β . Nous adoptons d'abord le cube unité. Les premiers résultats sont obtenus grâce à un maillage grossier qui est constitué de 24 éléments à 9 nœuds pour la frontière et 27 points internes. Nous imposons également les paramètres suivants : $\lambda = 3,4 \text{ GPa}$ et $\mu = 0,85 \text{ GPa}$, ($E = 2,38 \text{ GPa}$ et $\nu = 0,4$), $\eta = -10 \text{ GPa}$, $b = 26 \text{ GPa}$ et $a = 26 \text{ kN}$. L'échantillon est sollicité par une répartition uniforme de charge sur sa face supérieure. On s'attend à un champ de déformation homogène.

IV.2. Evolution des solutions en fonction des paramètres de la méthode

IV.2.1. Influence du paramètre de forme q

Nous commençons tout d'abord par faire varier le paramètre q entre 0,5 et 1,5. Pour ces premiers résultats, nous fixons arbitrairement $\beta = 10^{-1}$. Dans le cas d'un solide homogène et isotrope, on peut établir la solution analytique de ce problème. Selon le chargement de la *Figure 3.12*, la solution analytique est donc :

$$\begin{aligned}\psi &= \frac{\eta(1-2\nu)}{3\eta^2(1-2\nu) - Eb} \sigma_{33} \\ \varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} &= -\frac{1}{E} \left(\nu + \frac{4\eta^2\nu(1-\nu) - \eta^2}{6\eta^2\nu + Eb - 3\eta^2} \right) \sigma_{33} \\ \varepsilon_{33} &= \frac{1}{E} \left(1 - \frac{4\eta^2\nu(1-\nu) - \eta^2}{6\eta^2\nu + Eb - 3\eta^2} \right) \sigma_{33}\end{aligned}\tag{3.3}$$

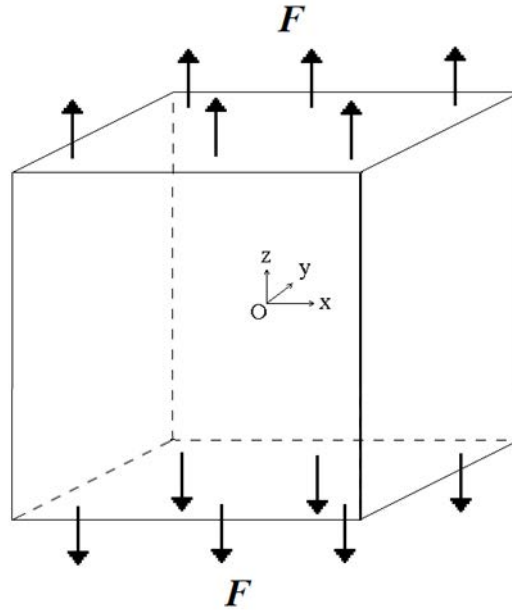


Figure 3.12 : Cas de traction simple sur un cube unité.

Les solutions pour une sollicitation quelconque d'un domaine homogène à microdilatation sont décrites plus précisément en Annexe 2. Dans cette partie, les résultats sont analysés en termes de valeur maximale de l'erreur relative sur tous les points de collocation.

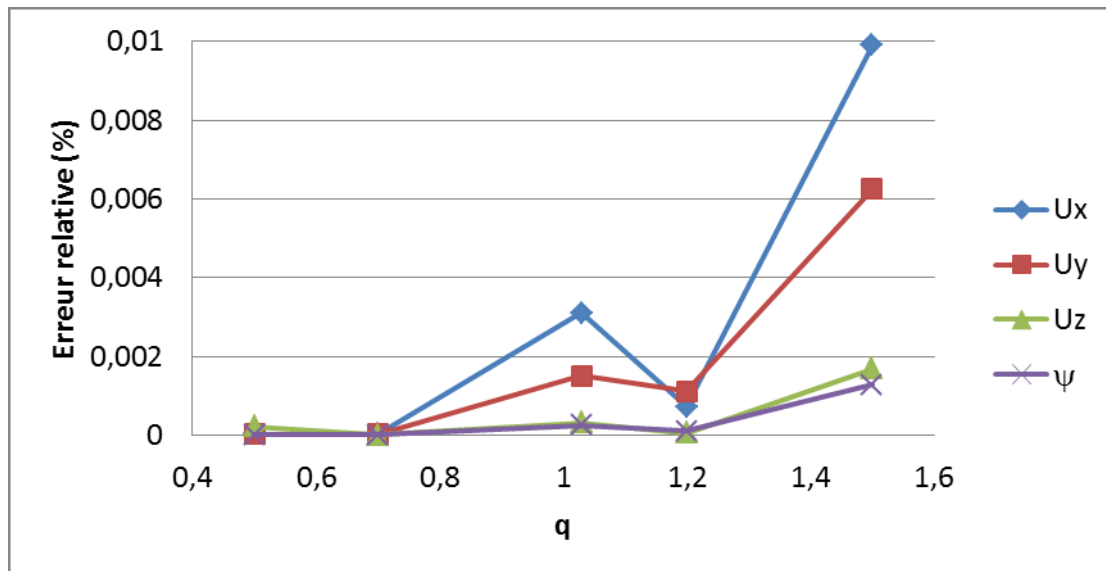


Figure 3.13 : Erreur relative maximale avec le résultat analytique en fonction du paramètre de forme q ($\beta = 10^{-1}$).

On peut observer sur la Figure 3.13 que l'erreur relative maximale est atteinte lorsque $q = 1,5$ et n'est que de 0,01%. La variation du paramètre de forme q n'affecte que très peu la qualité des résultats. On peut donc en conclure que dans l'intervalle $q = [0,5 ; 1,5]$ les résultats sont très précis et stables.

IV.2.2. Influence du paramètre β

Pour tester l'influence de β , nous choisissons $q = 1,03$ et faisons varier β de 10^{-4} à 10^{-1} .

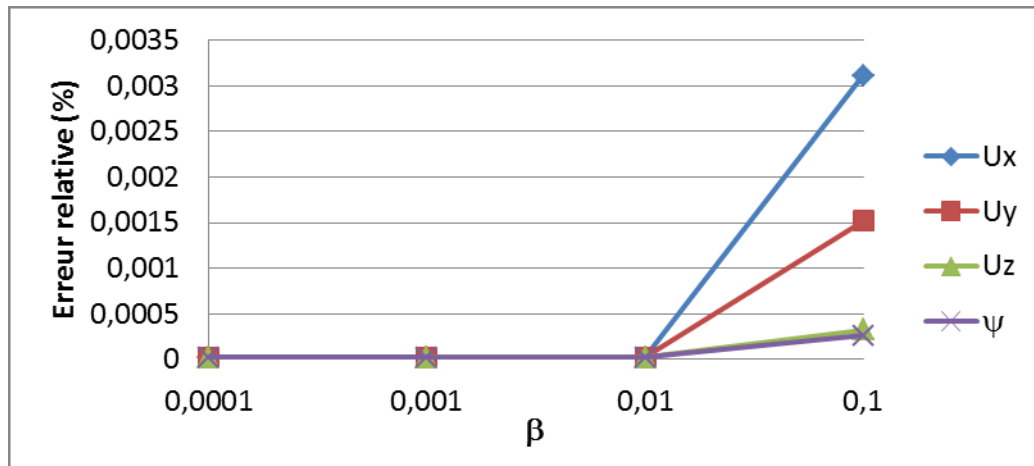


Figure 3.14 : Erreur relative maximale avec la solution analytique pour différentes valeurs de β avec q fixé à 1,03.

D'après les résultats obtenus à la Figure 3.14, les solutions obtenues sont également très précises et stables. L'erreur la plus importante est obtenue pour $\beta = 10^{-1}$. En dessous de cette valeur, l'erreur maximale relative est d'environ $2,5 \cdot 10^{-5}\%$. Nous prendrons désormais les paramètres $q = 1,03$ et $\beta = 10^{-3}$ lors de nos prochaines simulations.

Nous avons pour objectif de simuler le comportement du tissu biologique et plus précisément celui du tissu cardiaque. Pour comprendre les effets d'une nécrose sur la réponse de l'ensemble, il nous a paru nécessaire de mettre d'abord en évidence les particularités de déformation du tissu sain. Ce dernier est considéré dans cette étude comme homogène et isotrope.

IV.3. Evolution des solutions en fonction des paramètres dus à la microdilatation

Le comportement du matériau est décrit par cinq paramètres. Les deux coefficients traditionnels de Lamé λ et μ et des paramètres supplémentaires dont la détermination expérimentale reste à faire : η , a et b . Pour notre étude consacrée aux tissus biologiques

mous, nous adoptons des valeurs de coefficients de Lamé proches de ceux des matériaux polymères: $\lambda = 3,4 \text{ GPa}$ et $\mu = 0,85 \text{ GPa}$, le module d'Young est donc de $E = 2,38 \text{ GPa}$ et le coefficient de Poisson de $\nu = 0,4$.

Pour le moment, nous ne savons pas quelle est l'influence sur le comportement du matériau des paramètres qui entrent en compte du fait de la microdilatation. Nous adoptons l'essai de traction uniaxiale pour explorer l'influence de ces paramètres. Rappelons que ces paramètres doivent être choisis de manière à satisfaire certaines restrictions thermodynamiques à savoir :

$$b(3\lambda + 2\mu) - 3\eta^2 \geq 0 \quad \mu \geq 0 \quad a \geq 0 \quad b \geq 0$$

Le fait d'imposer des valeurs pour les coefficients de Lamé permet d'avoir une relation directe entre η et b (Figure 3.15). On peut remarquer que le paramètre η est, à priori, positif ou négatif.

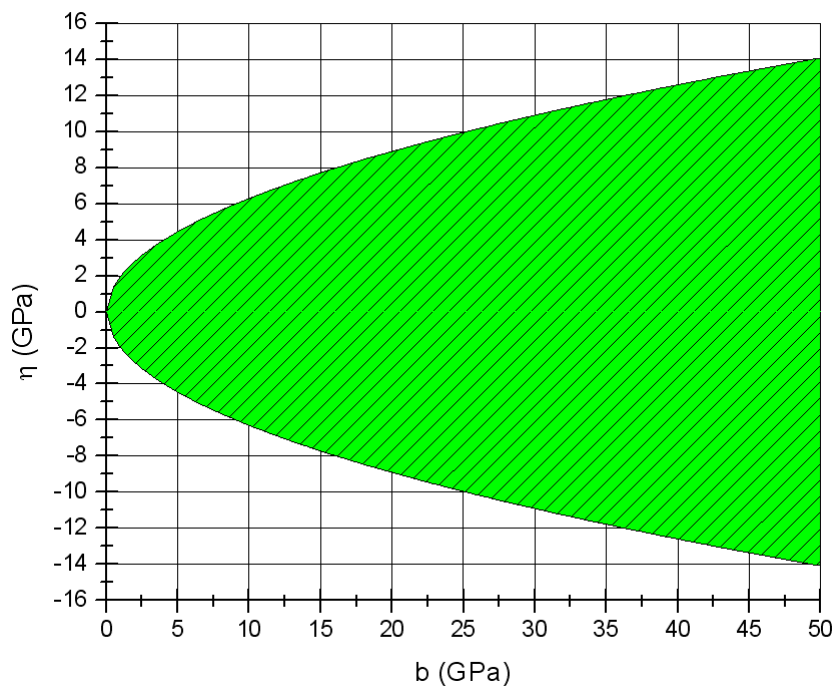


Figure 3.15 : Plage possible de η en fonction de b ayant fixé les coefficients de Lamé.

Les résultats sont analysés en se servant des valeurs obtenues au point frontière de coordonnées (0,5 ; -0,4375 ; 0,4375). Remarquons que c'est en de tels points que la méthode de collocation par points sur équations fortes donne en général de mauvais résultats.

IV.3.1. Influence du paramètre a

Nous imposons ici les paramètres matériau suivants : $\eta = -10 \text{ GPa}$, $b = 30 \text{ GPa}$ et nous faisons varier a de 1 kN à 30 kN afin de voir son influence sur le comportement du matériau.

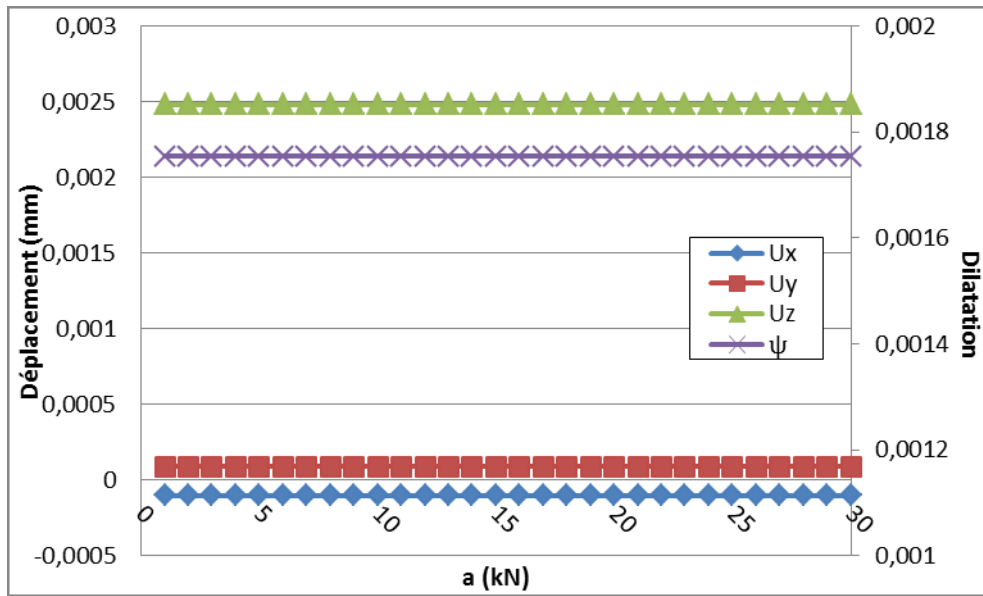


Figure 3.16 : Déplacements et dilatation en fonction du paramètre a pour un cas de traction simple.

Les résultats consignés dans la Figure 3.16 indiquent que le paramètre a n'affecte pas le déplacement des points de l'échantillon.

D'après les résultats numériques (Figure 3.16), le paramètre a ne semble pas jouer un rôle particulier dans le comportement du matériau lorsque celui-ci est homogène.

En effet, le paramètre a n'intervient dans les équations que dans $a\psi_{,kk}$ donc si nous avons un cas avec un tissu homogène et une sollicitation uniforme, $\psi_{,kk} = 0$ donc le paramètre a n'aura aucune influence sur les résultats.

IV.3.2. Influence du paramètre b

En respectant les conditions thermodynamiques, nous faisons varier b de 30 GPa à 100 GPa avec $\eta = -10$ GPa et $a = 26$ kN.

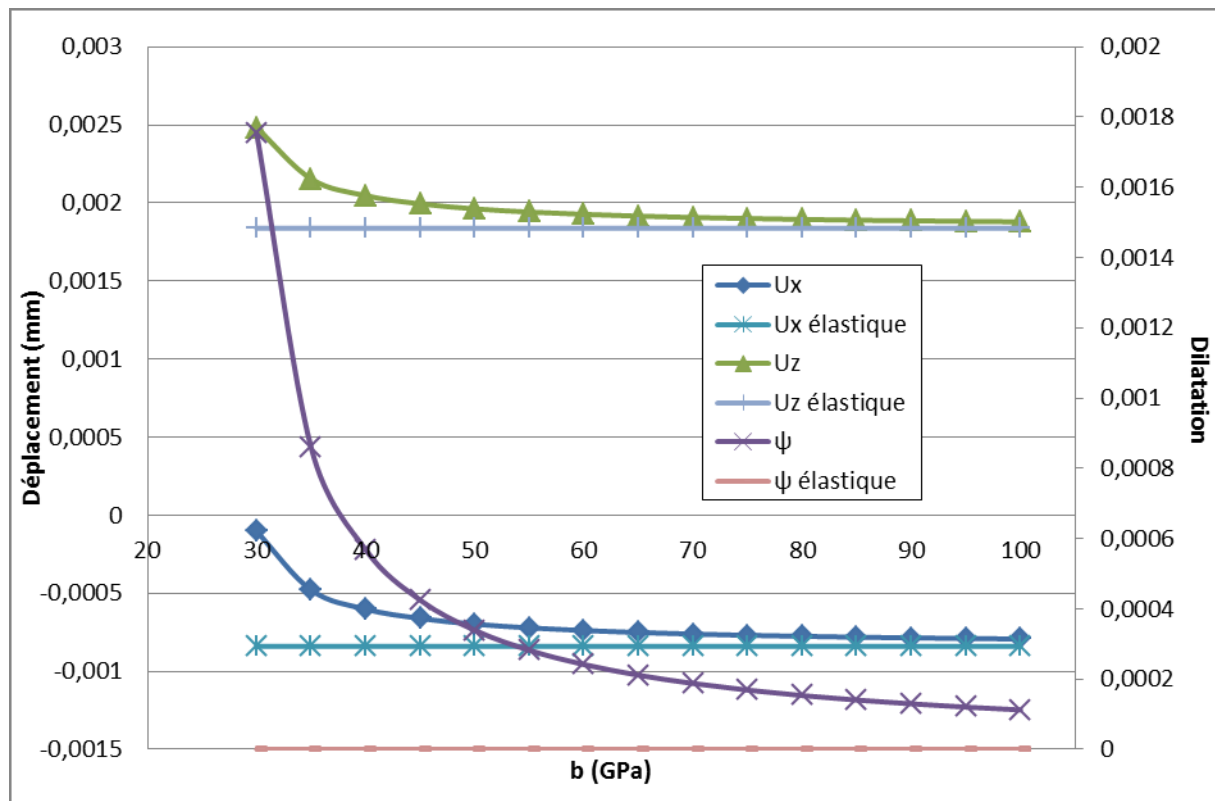


Figure 3.17 : Déplacements et dilatation en fonction des valeurs du paramètre b pour un cas de traction simple.

La Figure 3.17 nous renseigne sur l'évolution des déplacements et de la microdilatation en fonction du paramètre b . Elle permet également de comparer le cas élastique ($\psi = 0$) au cas avec microdilatation.

Lorsque l'on augmente la valeur du paramètre b on se rapproche du comportement d'un solide sans microdilatation (cf. Figure 3.17) c'est-à-dire d'un solide élastique. Si on analyse les solutions analytiques, on peut voir que plus le paramètre b est grand, plus la microdilatation va tendre vers 0. De même, dans les solutions en déformations, on va retrouver les formes analytiques des déformations d'un solide élastique classique. Nos résultats numériques sont donc bien en accord avec la théorie.

IV.3.3. Influence du paramètre η

Nous utilisons ici les mêmes paramètres matériaux suivants : $\lambda = 3,4 \text{ GPa}$ et $\mu = 0,85 \text{ GPa}$, ($E = 2,38 \text{ GPa}$ et $\nu = 0,4$) et $b = 26 \text{ GPa}$, mais cette fois nous faisons varier η de -10 GPa à 10 GPa (i.e. dans le domaine de validité thermodynamique). Rappelons que si $\eta = 0$, il n'y a pas de couplage et la microdilatation devient nulle. η sera donc appelé le paramètre de couplage.

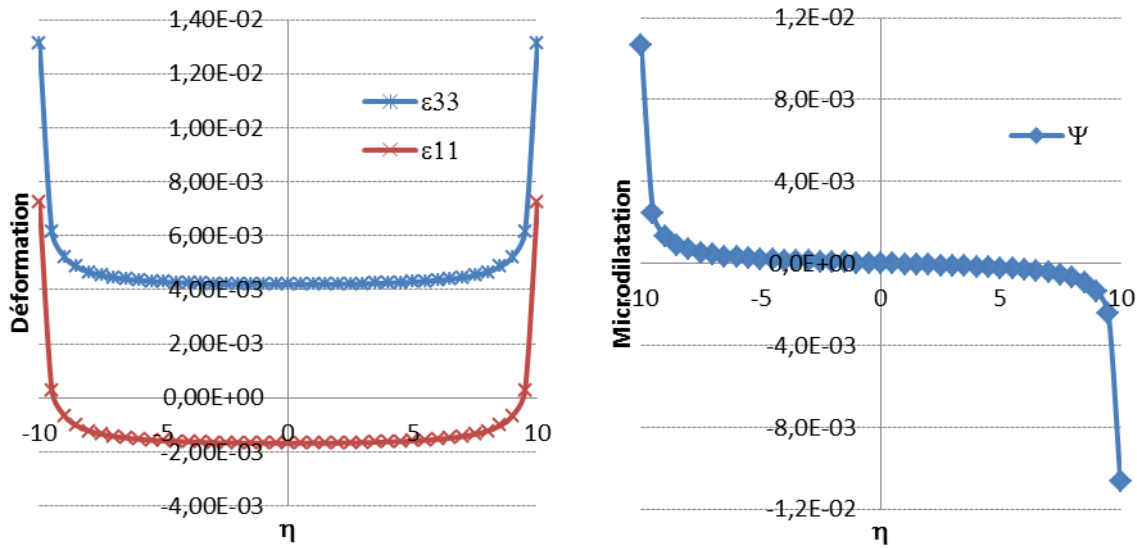


Figure 3.18 : Déformations et microdilatation en fonction du paramètre de couplage η (en GPa) pour un cas de traction.

On voit sur la Figure 3.18, que plus $|\eta|$ est grand, plus la microdilatation est importante et plus le comportement macroscopique est influencé par la microdilatation.

Le signe du paramètre η n'influe que sur le signe de la microdilatation. Les résultats en déformations sont les mêmes que l'on prenne η ou $-\eta$ comme paramètre. Le signe de la microdilatation sera le même que celui de $-\eta\sigma_{kk}$. En effet, nous avons :

$$\psi = \frac{\eta}{3\eta^2 - b(3\lambda + 2\mu)} \sigma_{kk}$$

Nous savons que $3\eta^2 - b(3\lambda + 2\mu) < 0$ (contrainte thermodynamique). Si nous sommes en traction simple : $\sigma_{kk} > 0$. Le signe de ψ sera donc le même que celui de $-\eta$. De même, si nous sommes en compression simple, $\sigma_{kk} < 0$ et le signe de ψ sera celui de η .

Lorsque le paramètre $|\eta|$ augmente, la microdilatation et la déformation selon l'axe de sollicitation augmentent. Lors d'un essai de traction sur un matériau élastique, il y a réduction de la section transverse. Pour un matériau à microdilatation cette réduction est moins importante. En effet, la mise en traction de l'échantillon augmente la microdilatation $|\psi|$. Cette microdilatation étant la même dans les trois directions de l'espace, elle impacte également sur les déformations transverses en diminuant la contraction du solide.

Lorsque le paramètre η devient suffisamment grand, la section transverse augmente lors d'un essai de traction et diminue pour une compression. Nous obtenons donc le comportement d'un matériau à coefficient de Poisson négatif (matériau auxétique).

Nous avons donc vu quelle était l'influence de chacun des paramètres (de la méthode et de la théorie de la microdilatation) sur les résultats numériques pour un solide homogène et isotrope. Nous pouvons maintenant traiter des cas classiques en microdilatation.

IV.4. Cas de traction simple

Nous allons maintenant tester un cas de traction simple d'un milieu à microdilatation en le comparant à celui d'un milieu élastique classique. L'axe de sollicitation est l'axe z . Les paramètres adoptés pour l'étude sont : $\lambda = 3,4 \text{ GPa}$ et $\mu = 0,85 \text{ GPa}$, $\eta = -8 \text{ GPa}$, $b = 26 \text{ GPa}$ et $a = 26 \text{ kN}$.

Dans les deux cas, le champ des déformations est uniforme. Comparé au cas classique, la déformation dans la direction de sollicitation est plus importante. De manière surprenante, les contractions latérales associées sont moins importantes que dans le cas élastique pur. La

Figure 3.19 représente les déplacements sur l'axe x en $z=0$ et $y=0$ (a), et ceux sur l'axe z en $x=0$ et $y=0$ (b).

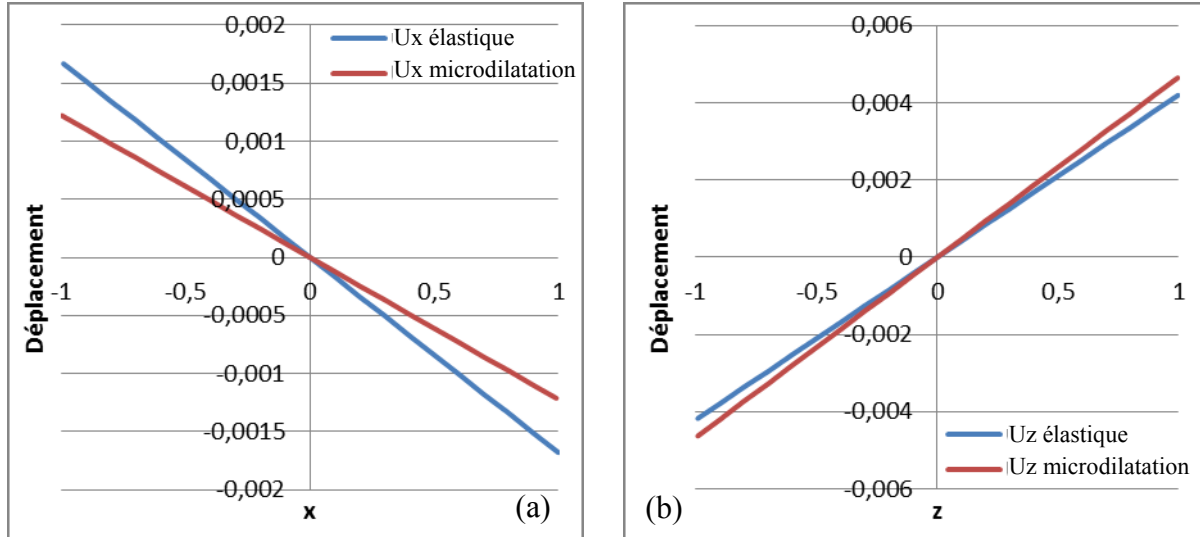


Figure 3.19 : (a) Déplacement U_x sur la coupe $z=0$, (b) Déplacement U_z sur la coupe $x=0$ (en mm).

Si nous comparons la traction d'un cas élastique sans microdilatation et celle d'un milieu avec microdilatation, on constate une différence de déplacement suivant l'axe de sollicitation de plus de 10% et dans les axes transverse de presque 30%. L'introduction de la microdilatation permet au matériau de s'étirer plus dans l'axe de sollicitation tout en diminuant ses déplacements transverse. Cela est dû au fait que la microdilatation est uniforme dans les trois directions de l'espace et vaut ici $\psi = 0,68143 \times 10^{-3}$ pour une charge appliquée de $10^{-2} GPa$.

La différence de volume entre l'état initial et final dans le cas élastique est de 0,08% alors qu'avec microdilatation cette différence passe à 0,22%. La microdilatation, caractéristique microscopique, a une influence non négligeable sur la réponse macroscopique.

Intéressons-nous maintenant à l'évolution de cette microdilatation lorsque la charge imposée augmente. Sur la Figure 3.20, nous pouvons voir que la microdilatation augmente

linéairement en fonction de la charge avec un coefficient directeur dépendant du paramètre de couplage η , des coefficients de Lamé λ et μ et du paramètre b .

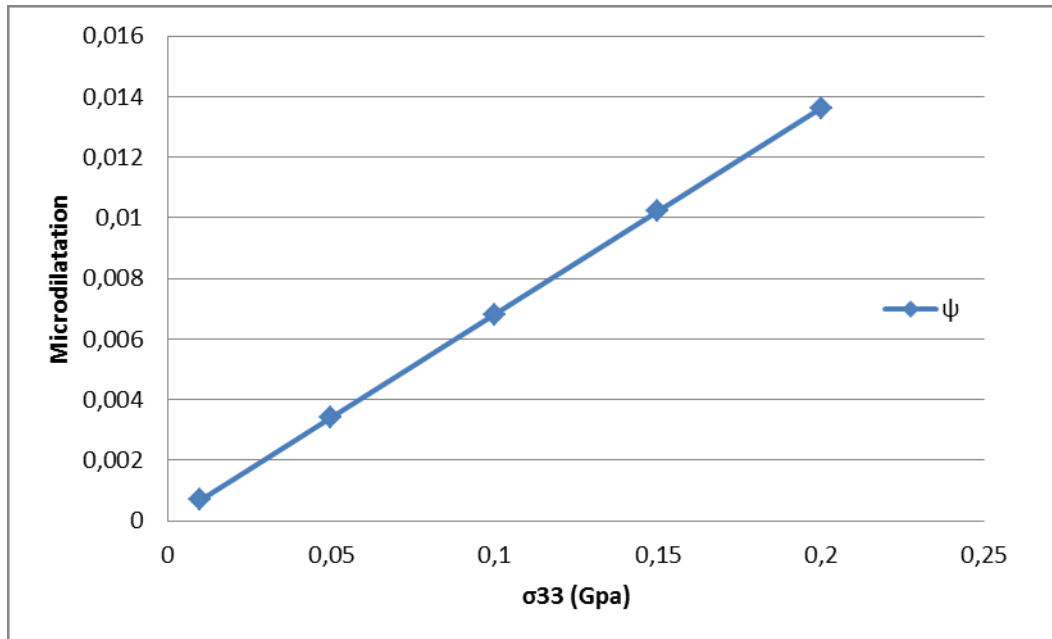


Figure 3.20 : Evolution de la microdilatation en fonction de la charge appliquée.

Considérons maintenant le cas où dans chaque direction de l'espace on applique une sollicitation de traction (essai triaxial). Dans ce cas, la microdilatation reste constante dans le solide et sa valeur triple comparée au cas de la traction uniaxiale et vaut $\psi = 2,04429 \times 10^{-3}$. Pour ce cas, les déplacements sont représentés Figure 3.21.

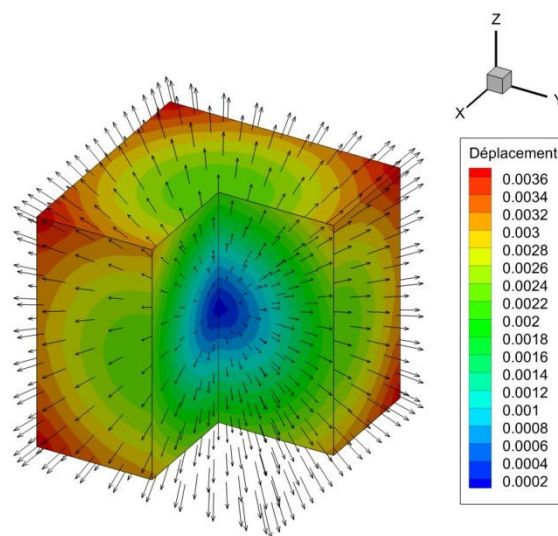


Figure 3.21 : Déplacement moyen et vecteur déplacement pour le cas de traction dans les trois directions.

IV.5. Chargement d'un échantillon tubulaire

Afin de vérifier la validité de l'approche numérique sur un autre type de géométrie, considérons le cas d'un échantillon tubulaire. Le spécimen a une hauteur de 0,75mm, un rayon extérieur de 0,75mm et un rayon intérieur de 0,25mm.

La frontière de l'échantillon est subdivisée en 80 éléments à 9 nœuds. Les résultats présentés sont obtenus avec 240 nœuds internes régulièrement espacés.

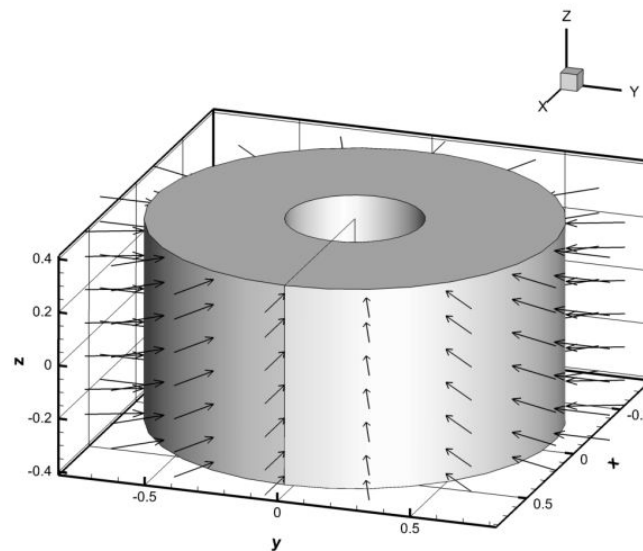


Figure 3.22 : Géométrie et chargement (déplacement imposé) de l'échantillon tubulaire.

Dans le cas d'un chargement unidirectionnel suivant l'axe du tube – axe z (chargement ou déplacement imposé), les résultats numériques convergent vers les solutions analytiques (même expressions que précédemment mais en coordonnées cylindriques).

Imposons une microtraction nulle et un déplacement radial de -0,0027mm sur la surface externe du tube (Figure 3.22) ; les autres surfaces étant libres de traction et de microtraction.

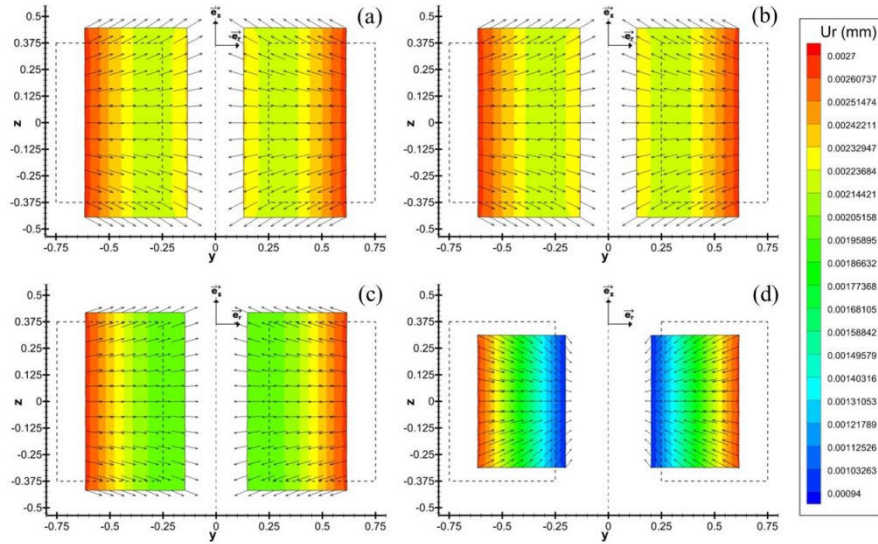


Figure 3.23 : Déplacement radial dans le plan $x=0$: (a) cas élastique, (b) $\eta = -2\text{GPa}$, (c) $\eta = -8\text{GPa}$, (d) $\eta = -10,15\text{GPa}$.

Les résultats numériques du déplacement radial (pour différentes valeurs de η) sont comparés en Figure 3.23 avec la solution purement élastique. On voit que plus la valeur absolue de η est grande, plus le déplacement radial de la surface interne est faible. Si on s'intéresse au déplacement axial (Figure 3.24), nous avons un allongement de l'échantillon dans le cas purement élastique (cas (a)). Cet allongement décroît à mesure que $|\eta|$ croît. Dans le dernier cas, où $\eta = -10,15\text{GPa}$ (cas (d)), l'échantillon rétrécit. Cette particularité a déjà été observée précédemment et correspond à un matériau auxétique (matériau possédant un coefficient de Poisson négatif).

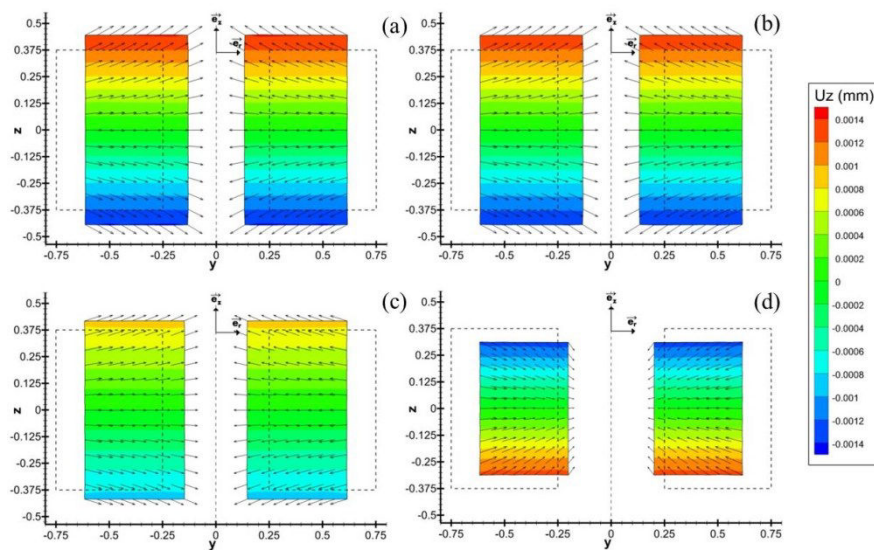


Figure 3.24 : Déplacement axial dans le plan $x=0$: (a) cas élastique, (b) $\eta = -2\text{GPa}$, (c) $\eta = -8\text{GPa}$, (d) $\eta = -10,15\text{GPa}$.

Dans l'exemple suivant, nous considérons que l'échantillon tubulaire est soumis simultanément à une traction axiale de $10^{-2} GPa$ et à un déplacement radial de $-0,0027mm$ sur sa surface externe.

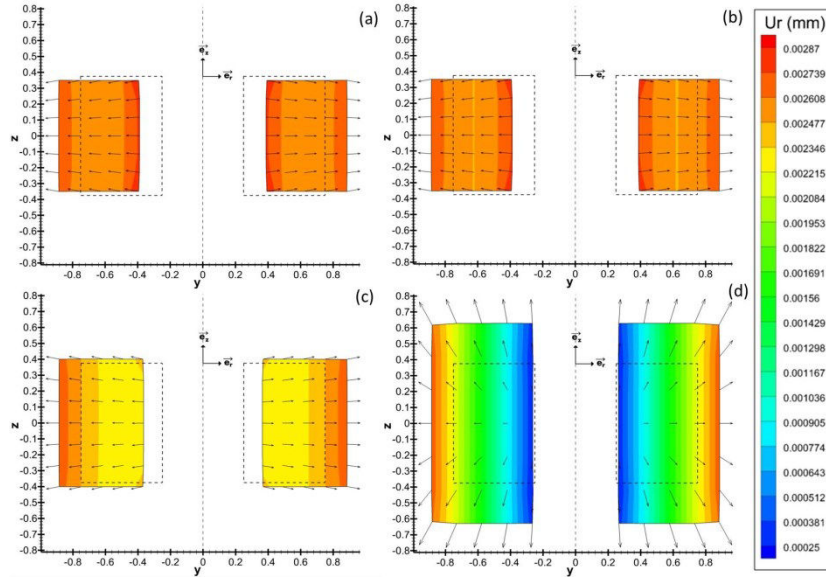


Figure 3.25 : Déplacement radial dans le plan $x=0$: (a) cas élastique, (b) $\eta = -2 GPa$, (c) $\eta = -8 GPa$, (d) $\eta = -10,15 GPa$.

Comme on peut l'observer en Figure 3.25 (a), si le matériau est purement élastique, la réponse globale est dominée par le déplacement radial imposé. Ainsi, l'échantillon rétrécit. Au fur et à mesure de l'augmentation en valeur absolue du paramètre de couplage η , le rétrécissement de l'échantillon diminue. Similairement au cas précédent, pour la plus grande valeur absolue du paramètre η , l'échantillon s'allonge.

V. Conclusion

La deuxième partie de ce chapitre a été consacrée à la résolution de problèmes à microdilatation. Nous avons pu voir que notre stratégie numérique est tout à fait adaptée à ce type de problèmes couplés. De plus, les résultats obtenus sont précis et stables sur une très large plage de valeurs de paramètres de la méthode.

Dans un premier temps, nous sommes restés dans le cas de matériaux homogènes et isotropes. Cela nous a permis de dégager l'influence de chacun des paramètres entrant dans les équations du modèle à microdilatation.

Références du chapitre :

- [1] Thurié N., Kouitat Njiwa R., and Taghite M., 2012, “A simple solution procedure to 3D-piezoelectric problems: Isotropic BEM coupled with a point collocation method,” *Engineering Analysis with Boundary Elements*, **36**(11), pp. 1513–1521.
- [2] Kouitat Njiwa R., 2011, “Isotropic-BEM coupled with a local point interpolation method for the solution of 3D-anisotropic elasticity problems,” *Engineering Analysis with Boundary Elements*, **35**(4), pp. 611–615.
- [3] Ding H., and Liang J., 1999, “The fundamental solutions for transversely isotropic piezoelectricity and boundary element method,” *Computers & Structures*, **71**(4), pp. 447–455.
- [4] Wang J. G., and Liu G. R., 2002, “On the optimal shape parameters of radial basis functions used for 2-D meshless methods,” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **191**(23–24), pp. 2611–2630.

Table des figures :

<i>Figure 3.1 : Cube unitaire sous chargement uniforme dans la direction z ayant comme origine le centre du cube et son maillage associé.....</i>	<i>65</i>
<i>Figure 3.2 : Cas de la double traction.</i>	<i>65</i>
<i>Figure 3.3 : Déplacement U_z (normalisé par $U_0 = 10 - 4m$) et vecteurs déplacements pour un cas de double traction sur un matériau isotrope transverse.</i>	<i>66</i>
<i>Figure 3.4 : Cube unitaire sous chargement uniforme mécanique et/ou électrique dans la direction z ayant comme origine le centre du cube.....</i>	<i>68</i>
<i>Figure 3.5 : Potentiel électrique et déplacement U_z pour un chargement mécanique uniforme pour le matériau PZT-4.....</i>	<i>70</i>
<i>Figure 3.6 : Erreur relative sur le déplacement U_Z et le potentiel électrique φ au point B pour PZT-4.</i>	<i>72</i>
<i>Figure 3.7 : Torsion d'une barre piézoélectrique à section carré.....</i>	<i>78</i>
<i>Figure 3.8 : Gauchissement de la section transverse lors d'une torsion (résultats normalisés).</i>	<i>79</i>
<i>Figure 3.9 : Changement d'orientation de notre solide piézoélectrique.</i>	<i>79</i>
<i>Figure 3.10 : Cas isotrope transverse sollicité hors axe d'isotropie.....</i>	<i>80</i>
<i>Figure 3.11 : Déplacement dans la direction de sollicitation (a), distribution du potentiel électrique (b), déformation ε_{zz} (c) et contrainte σ_{zz} (d) dans le plan milieu pour un solide PZT-4 « tourné » sous sollicitation mécanique avec la face inférieure encastree.</i>	<i>81</i>
<i>Figure 3.12 : Cas de traction simple sur un cube unité.....</i>	<i>84</i>
<i>Figure 3.13 : Erreur relative maximale avec le résultat analytique en fonction du paramètre de forme q ($\beta = 10 - 1$).....</i>	<i>85</i>

<i>Figure 3.14 : Erreur relative maximale avec la solution analytique pour différentes valeurs de β avec q fixé à 1,03.</i>	86
<i>Figure 3.15 : Plage possible de η en fonction de b ayant fixé les coefficients de Lamé.</i>	87
<i>Figure 3.16 : Déplacements et dilatation en fonction du paramètre a pour un cas de traction simple.</i>	88
<i>Figure 3.17 : Déplacements et dilatation en fonction des valeurs du paramètre b pour un cas de traction simple.</i>	89
<i>Figure 3.18 : Déformations et microdilatation en fonction du paramètre de couplage η (en GPa) pour un cas de traction.</i>	90
<i>Figure 3.19 : (a) Déplacement U_x sur la coupe $z=0$, (b) Déplacement U_z sur la coupe $x=0$ (en mm).</i>	92
<i>Figure 3.20 : Evolution de la microdilatation en fonction de la charge appliquée.</i>	93
<i>Figure 3.21 : Déplacement moyen et vecteur déplacement pour le cas de traction dans les trois directions.</i>	93
<i>Figure 3.22 : Géométrie et chargement (déplacement imposé) de l'échantillon tubulaire.</i>	94
<i>Figure 3.23 : Déplacement radial dans le plan $x=0$: (a) cas élastique, (b) $\eta = -2\text{GPa}$, (c) $\eta = -8\text{GPa}$, (d) $\eta = -10,15\text{GPa}$.</i>	95
<i>Figure 3.24 : Déplacement axial dans le plan $x=0$: (a) cas élastique, (b) $\eta = -2\text{GPa}$, (c) $\eta = -8\text{GPa}$, (d) $\eta = -10,15\text{GPa}$.</i>	95
<i>Figure 3.25 : Déplacement radial dans le plan $x=0$: (a) cas élastique, (b) $\eta = -2\text{GPa}$, (c) $\eta = -8\text{GPa}$, (d) $\eta = -10,15\text{GPa}$.</i>	96

Table des tableaux :

<i>Tableau 3.1 : Paramètres matériaux du PZT-4 et du PZT-5H tirés de [3].</i>	67
<i>Tableau 3.2 : Déplacements, potentiel électrique et déformation pour les matériaux PZT-4 et PZT-5H sous un chargement mécanique uniforme.</i>	69
<i>Tableau 3.3 : Déplacements, potentiel électrique et déformation pour les matériaux PZT-4 et PZT-5H sous un chargement mécanique uniforme pour un point interne coïncident.</i>	70
<i>Tableau 3.4 : Evolution de l'erreur relative du déplacement U_z pour le point B (-0.25, 0.5, 0.25) pour un matériau PZT-4 sous chargement mécanique uniforme (en %).</i>	71
<i>Tableau 3.5 : Déplacements, potentiel électrique et déformation pour les matériaux PZT-4 et PZT-5H sous induction électrique uniforme.</i>	74
<i>Tableau 3.6 : Déplacements, potentiel électrique et déformation pour les matériaux PZT-4 et PZT-5H sous induction électrique uniforme pour un point interne.</i>	75
<i>Tableau 3.7 : Déplacements, potentiel électrique, déformation, contrainte et déplacement électrique pour les matériaux PZT-4 et PZT-5H sous chargement mécanique et induction électrique uniformes.</i>	76
<i>Tableau 3.8 : Déplacements, potentiel électrique, déformation, contrainte et déplacement électrique pour les matériaux PZT-4 et PZT-5H sous chargement mécanique et induction électrique uniformes pour un point interne.</i>	77

Chapitre 4

Milieux non homogènes à microdilatation

Table des matières du chapitre 4 :

Chapitre 4	Milieux non homogènes à microdilatation.....	103
I.	Introduction	107
II.	Comportement face à l'introduction d'une surface nécrosée.....	109
III.	Théorie de la microdilatation avec paramètre de couplage variable.....	117
III.1.	Rappel des équations du problème.....	117
III.2.	Développement de la méthode numérique	118
IV.	Résultats numériques.....	122
IV.1.	Un cas simple	122
IV.2.	Le cœur comme milieu à microdilatation	127
IV.2.1.	Modélisation du cœur sain et de l'introduction d'une zone nécrosée.....	128
IV.2.1.1.	La Fraction d'Éjection du Ventricule Gauche.....	128
IV.2.1.2.	Influence d'une zone infarctée	130
IV.2.1.3.	Influence de la localisation de l'infarctus.....	132
IV.2.2.	Infarctus multiples	135
IV.2.2.1.	Influence de deux zones nécrosées et aggravation de l'état des tissus.	135
IV.2.2.2.	Comparaison de l'influence de zones nécrosées à volume équivalent.	140
IV.2.2.3.	Cas plus réalistes de modélisation du cœur.....	141
V.	Conclusion.....	144

I. Introduction

Dans ce chapitre, nous montrons que la théorie des milieux micromorphes de Eringen est une voie de modélisation du comportement mécanique des tissus biologiques. Nous l'appliquons en particulier, sous sa forme la plus simplifiée, à la modélisation du comportement mécanique du tissu cardiaque. Comme indiqué au chapitre précédent, dans la description macroscopique d'un milieu à microdilatation, les informations microstructurales sont traduites par la capacité de chaque point matériel à se dilater/contracter indépendamment des autres points du milieu. Cette aptitude microscopique influence la réponse générale d'un échantillon macroscopique à un stimulus par l'intermédiaire d'un paramètre de couplage.

Dans ce qui suit, nous faisons deux hypothèses majeures. La première hypothèse stipule que quel que soit l'état de l'organe, la plupart des éléments constitutifs de ses points étant les mêmes, les propriétés mécaniques classiques restent invariables. La deuxième hypothèse concerne les points de la zone « nécrosée » à l'issue d'un infarctus ischémique. Nous postulons que les points d'une telle zone ont perdu une large partie de leur capacité à « respirer ». Dans notre schématisation, c'est le paramètre de couplage de ces points qui sera affecté.

En toute rigueur, nous devrions travailler en grandes déformations. Toutefois, dans cette étude exploratoire permettant d'asseoir la validité de l'approche, nous avons limité notre étude au cas des petites déformations et de milieux isotropes.

La démarche numérique adoptée a été validée au chapitre précédent. Après une première analyse de l'effet d'une surface nécrosée sur la réponse d'un échantillon, nous présentons les modifications des équations de comportement et de la stratégie numérique pour la prise en compte simple des zones partiellement ou totalement nécrosées.

Dans le reste du chapitre nous démontrons que les tendances fournies par l'étude corroborent certaines observations cliniques.

Enfin, il faut vérifier que notre approche permettra de simuler le comportement d'un tissu sain mais également d'un tissu nécrosé. Pour se faire, on va s'appuyer sur une caractéristique très importante pour les cardiologues : la Fraction d'Éjection du Ventricule Gauche (FEVG). Cette fraction représente la capacité du cœur à fournir le corps en sang oxygéné. On simulera

donc uniquement le ventricule gauche du cœur. On simplifiera également le problème en prenant une géométrie tubulaire déjà utilisée pour représenter ce ventricule [1,2].

II. Comportement face à l'introduction d'une surface nécrosée

Une première analyse de l'influence d'une nécrose sur la réponse d'un milieu à microdilatation peut être entreprise de manière relativement simple. Pour cela, considérons un échantillon comportant une surface nécrosée. Il s'agit d'un barreau de section droite carrée ($1 \times 1 \times 40 \text{ mm}$) dont les faces latérales sont libres de contraintes et de micro-contraintes. La face inférieure est contrainte en déplacement dans la direction z et ses points ont perdu leur capacité microscopique de dilatation ($\psi = 0$). La face supérieure est sollicitée par une charge uniformément répartie et est libre de micro-contrainte. La *Figure 4.1* représente la géométrie de l'échantillon et les sollicitations associées. Le problème peut être traité à l'aide de l'outil numérique présenté au chapitre précédent. Nous nous limitons donc à une sollicitation mécanique de traction.

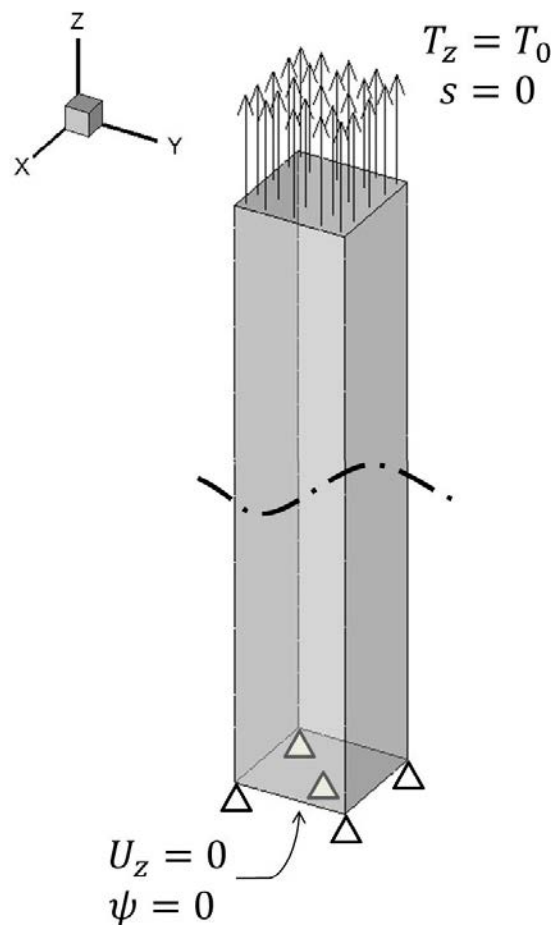


Figure 4.1 : Cas d'une traction uniaxiale avec microdilatation nulle imposée sur la face inférieure.

Pour les résultats présentés, la frontière extérieure du barreau a été subdivisée en 136 éléments quadrilatères à 9 nœuds. 279 points de collocation internes ont été utilisés (cf. *Figure 4.2*).

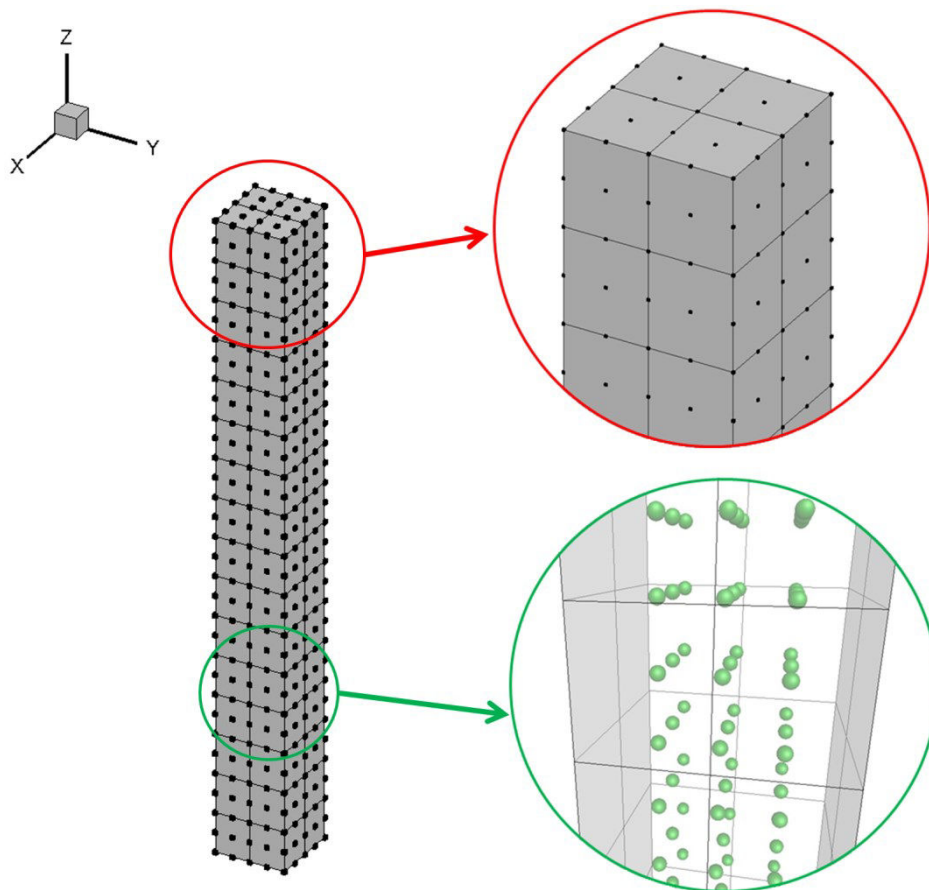


Figure 4.2 : Maillage frontière et disposition des points internes pour le barreau de dimensions $1 \times 1 \times 40 \text{ mm}$.

Le matériau du barreau a pour caractéristiques : $\lambda = 3,4 \text{ GPa}$, $\mu = 0,85 \text{ GPa}$, $\eta = -8 \text{ GPa}$, $b = 26 \text{ GPa}$ et enfin $a = 26 \text{ kN}$. L'intensité de la contrainte de traction appliquée à la face supérieure est de 10^{-2} GPa .

Sur la *Figure 4.3* nous avons représenté l'évolution de la microdilatation le long de l'axe central z . Cette courbe est comparée à celle d'un milieu non contraint en microdilatation.

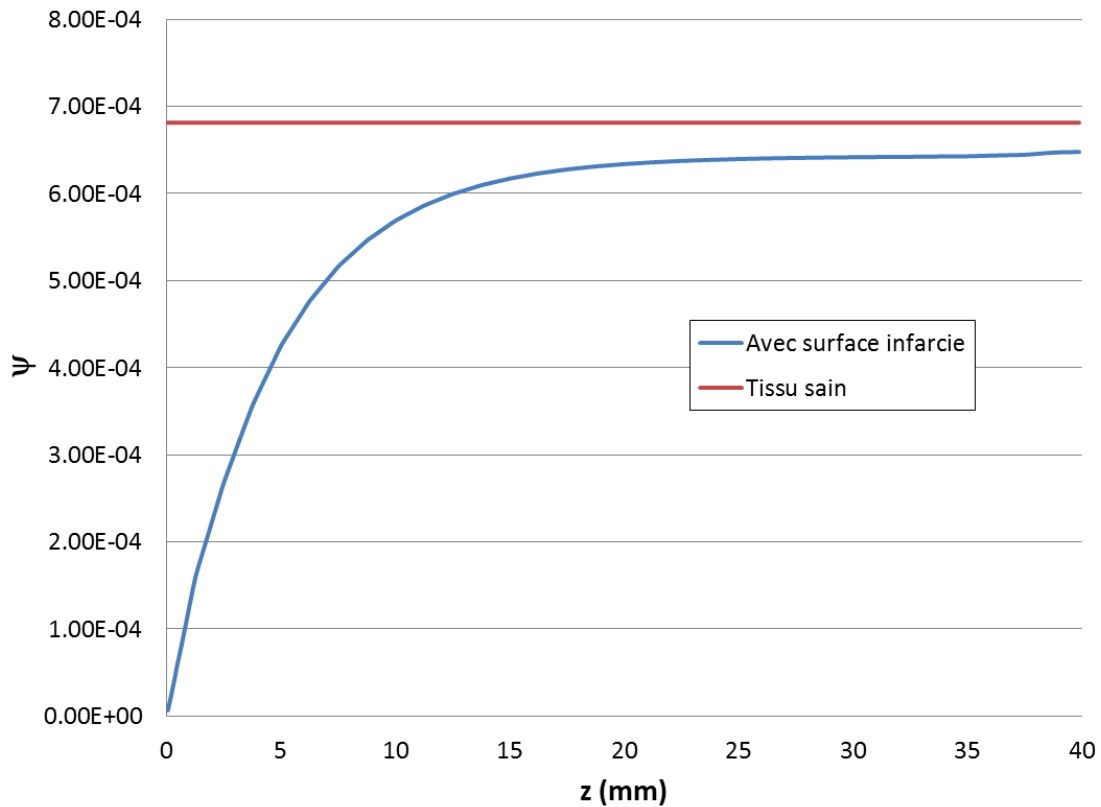


Figure 4.3 : Evolution de la microdilatation le long de l'axe z d'un échantillon avec et sans surface inférieure infarctée.

La microdilatation évolue progressivement d'une valeur nulle (surface inférieure) vers la valeur atteinte dans le cas du milieu « sain » (surface supérieure). On notera que la valeur atteinte au niveau de la face supérieure reste légèrement inférieure à celle d'un milieu « sain ». On pourrait penser que les paramètres matériaux évoluent graduellement avec la hauteur de l'éprouvette alors qu'il s'agit simplement de l'influence de la surface « nécrosée ».

Si on garde à l'esprit les aspects cliniques, il peut être intéressant de rechercher la traduction de ces modifications microscopiques sur des grandeurs macroscopiquement mesurables. On pense par exemple à l'imagerie médicale. Nous avons donc analysé l'évolution du déplacement axial de l'éprouvette dans ces conditions. Comme on peut le constater sur la Figure 4.4, le déplacement axial des points proches de la surface inférieure sont quasiment

ceux d'un milieu élastique inerte (sans microdilatation). Plus on s'éloigne de cette surface, plus le déplacement axial est important se rapprochant de celui d'un milieu à microdilatation sans surface infarctée. On note tout de même que la valeur de déplacement pour un milieu sain n'est jamais atteinte. Notons également que malgré une sollicitation homogène, le champ de déplacement induit n'est plus linéaire comme en théorie classique. Ceci est dû à un état de déformation non uniforme sous sollicitation homogène.

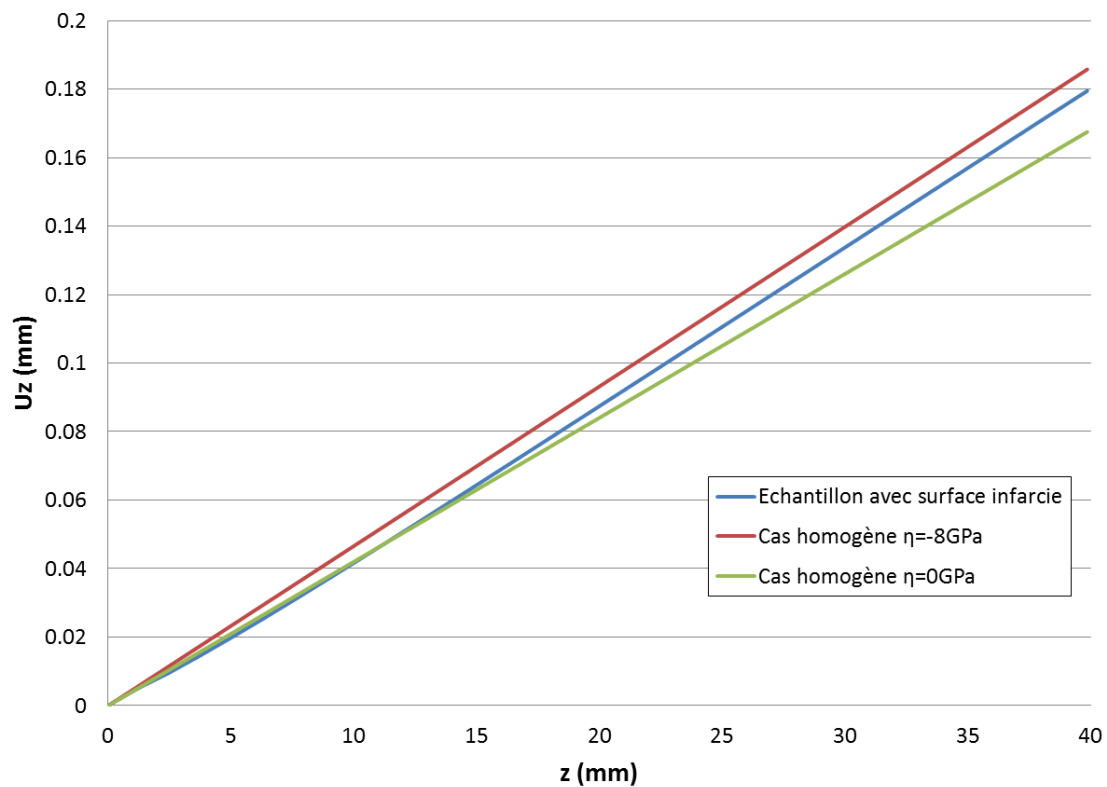


Figure 4.4 : Evolution du déplacement le long de l'axe z d'un échantillon avec surface inférieure infarctée, d'un échantillon sain avec $\eta = -8$ GPa et d'un échantillon élastique.

Les conclusions précédentes restent valables pour d'autres tailles d'échantillon. A titre d'exemple, la Figure 4.5 compare la microdilatation d'un échantillon de longueur 40mm et celle d'un échantillon de longueur 20mm. On remarque que les deux profils de microdilatation se superposent. Il en est de même pour les déplacements.

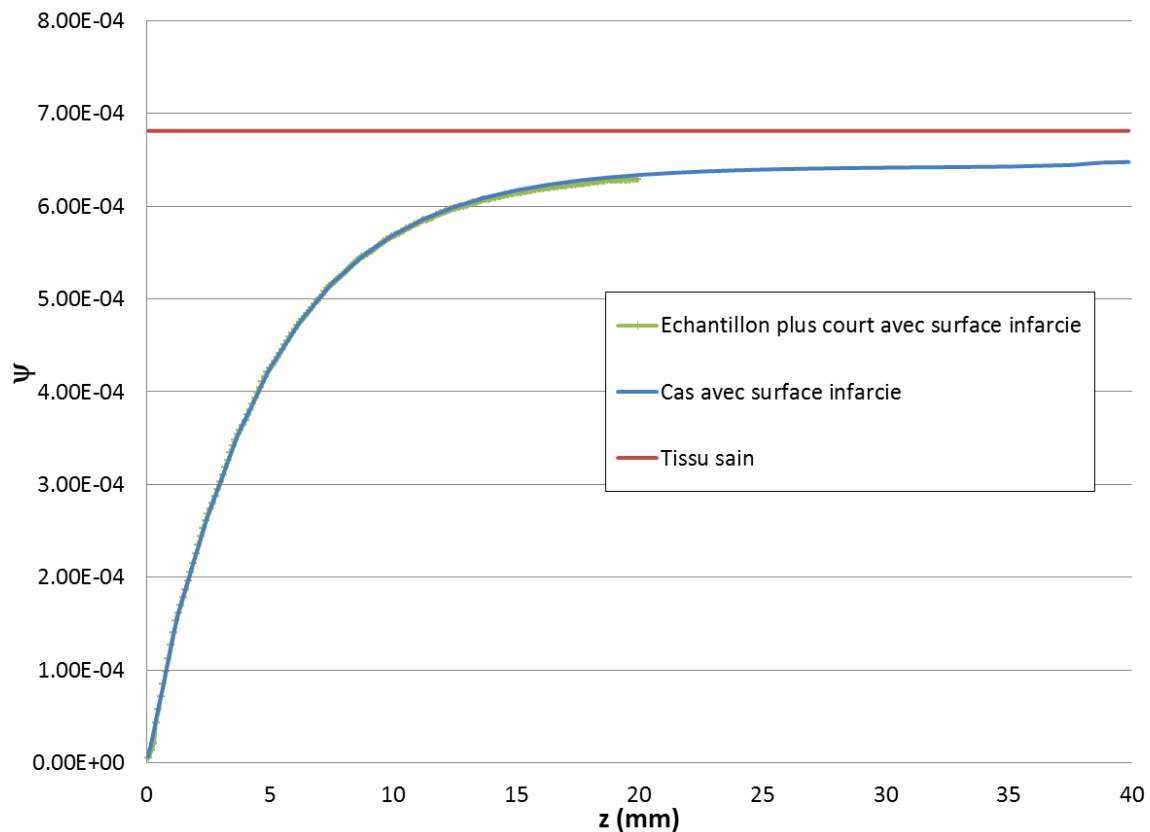


Figure 4.5 : Evolution de la microdilatation, le long de l'axe z , d'échantillons de différentes tailles ayant la surface inférieure infarctée et comparaison avec le cas homogène.

Il est légitime de penser qu'en présence d'une défaillance, un organe va modifier ses conditions opératoires habituelles pour pallier les manques. En présence d'une surface infarctée, le muscle cardiaque développera un effort plus important pour essayer de remplir convenablement sa fonction. Sur l'exemple précédent, on peut essayer d'estimer le supplément de charge nécessaire pour que la microdilatation au niveau de la face supérieure soit la même que dans le cas d'un milieu sain. Nos calculs montrent qu'il faut augmenter de 8,5% l'intensité de la force pour atteindre cet objectif. Comme on peut le constater sur la Figure 4.6 le profil d'évolution de la microdilatation est conservé bien que ses valeurs soient plus importantes comme on pouvait s'y attendre.

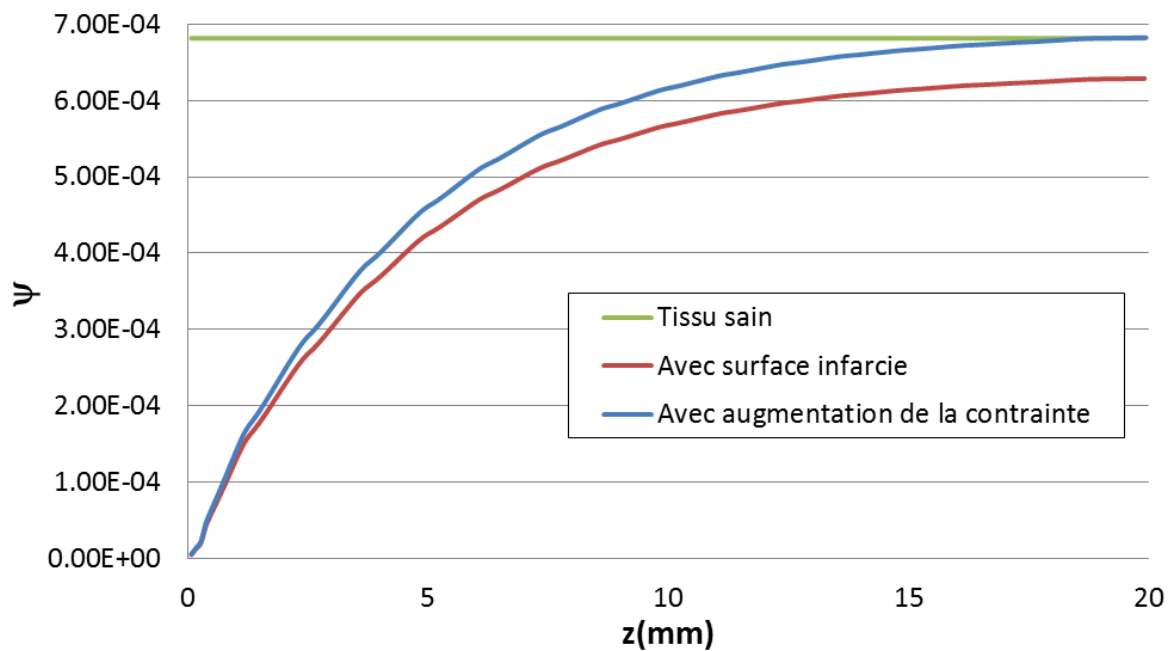


Figure 4.6 : Augmentation de la contrainte afin d'atteindre la microdilatation d'un tissu sain.

En ce qui concerne le déplacement axial (cf. Figure 4.7), au voisinage de la surface nécrosée, il est proche des valeurs prédites pour un milieu élastique inerte. Lorsque l'on s'éloigne de cette zone, les valeurs du déplacement tendent progressivement vers celle prédites pour le milieu sain. A l'extrémité du barreau, les déplacements sont légèrement plus importants que ceux du milieu sain. On en conclut que l'effort fourni pour récupérer la perte de dilatation de certains points peut se traduire macroscopiquement par une augmentation de la valeur du déplacement de points éloignés de la zone nécrosée.

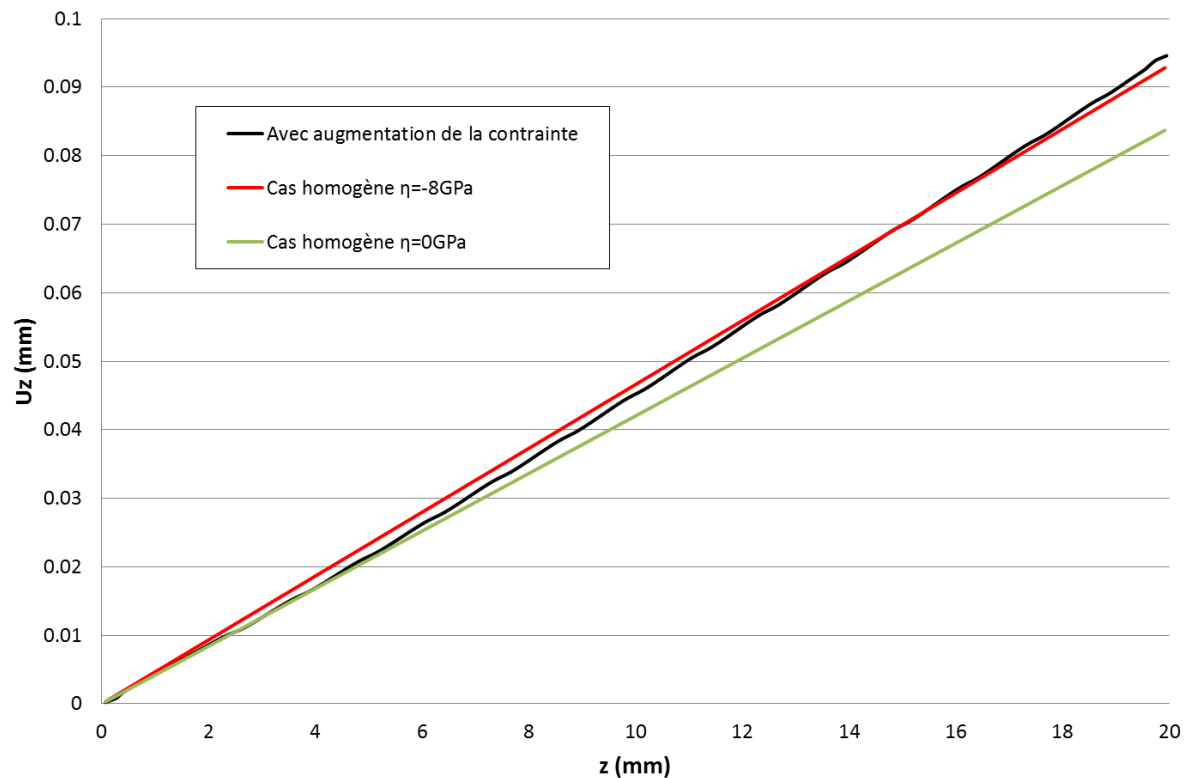


Figure 4.7 : Influence sur les déplacements en augmentant la contrainte.

On a pu voir dans ces différents exemples que l'introduction d'une zone infarctée impacte fortement l'évolution de la microdilatation et du même coup le fonctionnement global. On peut en conclure que pour remplir sa fonction de pompage en présence d'une zone infarctée, il se pourrait que les muscles du cœur aient à fournir un effort plus important. On comprend mieux la fatigue induite dans la tentative du cœur de réguler le débit sanguin en présence d'une zone nécrosée.

Cette première étude simple est académique mais riche d'informations. Dès que l'on introduit des surfaces ayant une microdilatation nulle, on remarque que la réponse du matériau à une sollicitation homogène n'est plus linéaire. La géométrie de l'échantillon sous sollicitation est affectée jusque dans les régions éloignées de la nécrose. Il ne s'agit donc pas d'un phénomène local. Il convient maintenant de préciser ces conclusions en adoptant des géométries d'échantillons proches des réalités physiologiques. En particulier, notons qu'une zone malade est nécessairement tridimensionnelle et ne saurait être limitée à une surface 2D à laquelle on peut appliquer des conditions aux limites.

Comment modéliser géométriquement la présence ou le développement d'une « vraie » zone nécrosée ? Nous avons plusieurs possibilités. A priori, la démarche la plus simple consiste à considérer la zone nécrosée comme un solide indépendant ayant ses propres caractéristiques microscopiques. Ainsi, on serait confronté à un problème de solides en contact avec introduction d'une « interface franche ». Malheureusement, on peut s'interroger sur le bien-fondé d'une séparation franche des deux zones. Effectivement, la zone nécrosée n'est pas un solide complètement différent de la zone saine, d'un point de vue mécanique, c'est une zone où les paramètres matériaux ont évolué mais cette zone, à frontière nécessairement diffuse, fait partie intégrante du cœur. Il n'y aura donc pas d'interface franche entre ces deux zones.

Nous pensons alors qu'une meilleure façon de prendre en compte de telles zones dans une simulation numérique est de considérer le milieu comme non homogène vis-à-vis de certaines propriétés. Il nous faut alors réaménager les équations de champ et adapter l'outil numérique de simulation.

III. Théorie de la microdilatation avec paramètre de couplage variable

Dans le chapitre précédent, nous nous sommes attachés à investiguer le comportement de milieux à microdilatation homogène et isotrope. La démarche a permis de traiter dans le paragraphe précédent le cas de zones nécrosées surfaciques. Rappelons que dans ce cas, il suffit d'imposer une microdilatation nulle. La suite de ce chapitre est consacrée à l'analyse de l'influence des variations du paramètre de couplage micro-macro sur les évolutions de la microdilatation et de grandeurs macroscopiques.

Commençons donc par repréciser les équations de champ et la stratégie numérique associée.

III.1. Rappel des équations du problème

Les équations de champ et de comportement, dans le cas statique, pour un domaine à microdilatation sont :

$$\sigma_{ij,j}(x) = 0 \quad 4.1$$

$$s_{k,k} - p(x) = 0 \quad 4.2$$

$$\sigma_{ij}(x) = \lambda e_{rr} \delta_{ij} + \mu (e_{ij} + e_{ji}) + \eta(x) \psi \delta_{ij} \quad 4.3$$

$$s_k = a \psi_{,k} \quad 4.4$$

$$p(x) = \eta(x) e_{rr} + b \psi \quad 4.5$$

$$t_i(x) = \sigma_{ji}(x) n_j \quad 4.6$$

$$s = s_i n_i = a \psi_{,i} n_i \quad 4.7$$

Rappelons que dans les relations qui précèdent, σ_{ij} , $e_{ij} = u_{j,i}$ représentent respectivement les tenseurs de contraintes et de déformations. Le vecteur des microcontraintes est noté s_k . Le scalaire p est la fonction microcontrainte et peut être vu comme une pression interne. La

grandeur cinématique associée à la microdilatation est ψ . Le déplacement macroscopique est représenté de manière usuelle par u_i . Les paramètres λ et μ sont les coefficients de Lamé et η , a et b sont des paramètres du matériaux à identifier. À la différence du cas homogène, le paramètre de couplage micro-macro dépend de la position du point.

Rappelons également que pour que l'énergie de déformation associée soit une forme quadratique positive il faut que [3] : $b(3\lambda + 2\mu) - 3\eta^2 \geq 0$, $\mu \geq 0$, $a \geq 0$ et $b \geq 0$.

III.2. Développement de la méthode numérique

La stratégie appliquée ici reste similaire à celle du chapitre 1. On couple donc la méthode des éléments de frontières classique à une méthode de collocation par points appliquée aux équations aux dérivées partielles. Ainsi, les grandeurs cinématiques sont partitionnées en deux : une partie complémentaire et une autre particulière. On a alors $u = u^C + u^P$ et $\psi = \psi^C + \psi^P$.

Les champs complémentaires vérifient les équations 4.8 et 4.9 ci-après :

$$\left(\lambda u_{r,r}^C \delta_{ij} + \mu (u_{i,j}^C + u_{j,i}^C) \right)_{,j} = 0 \quad 4.8$$

$$a \psi_{,kk}^C = 0 \quad 4.9$$

Par conséquent, les champs particuliers sont solution des équations 4.10 et 4.11 :

$$\left(\lambda u_{r,r}^P \delta_{ij} + \mu (u_{i,j}^P + u_{j,i}^P) \right)_{,j} + (\eta(x)\psi)_{,i} = 0 \quad 4.10$$

$$a \psi_{,kk}^P - b \psi - \eta(x) u_{r,r} = 0 \quad 4.11$$

Ces partitions affectent également les conditions aux limites en traction et microtraction qui deviennent :

$$t_i = t_i^C + t_i^P + \delta t_i \text{ et } s = s^C + s^P \quad 4.12$$

$$\text{avec } t_i^C = \left(\lambda u_{r,r}^C \delta_{ij} + \mu (u_{i,j}^C + u_{j,i}^C) \right) n_j, \quad t_i^P = \left(\lambda u_{r,r}^P \delta_{ij} + \mu (u_{i,j}^P + u_{j,i}^P) \right) n_j, \quad \delta t_i = (\eta(x)\psi) n_i \text{ et } s^C = a \psi_{,i}^C n_i, \quad s^P = a \psi_{,i}^P n_i.$$

Les équations 4.8 et 4.9 sont semblables à celles de Navier et de Laplace. Leurs formulations intégrales sont bien établies. L'approximation par éléments de frontière conduit à un ensemble d'équations qui se mettent sous les formes matricielles suivantes :

$$[H]\{u^C\} = [G]\{t^C\} \quad 4.13$$

$$[\bar{H}]\{\psi^C\} = [\bar{G}]\{s^C\} \quad 4.14$$

Les équations 4.10 et 4.11 sont traitées par une méthode de collocation par points. Comme précédemment, nous optons pour une interpolation locale par fonctions radiales. Un champ $\omega(x)$ est approché par $\omega(x) = [\Phi(x)]\{\omega_{/L}\}$. Les détails de cette approximation peuvent être consultés dans de nombreux travaux (cf. [4] et Chapitre 2). De la forme matricielle des équations 4.10 et 4.11, on déduit le schéma de collocation suivant pour chaque point interne au milieu :

$$[B(\nabla)]^T [C] [B(\nabla)] [\tilde{\Phi}]\{u^P\}_{/L} + \{\nabla\}[\Phi(x)]\{\eta\psi\}_{/L} = \{0\} \quad 4.15$$

$$a\{\nabla\}^T \{\nabla\} \{\tilde{\Phi}\}^T \{\psi^P\}_{/L} - b\{\tilde{\Phi}\}^T \{\psi\}_{/L} - \eta\{\nabla\}^T [\tilde{\Phi}]\{u\}_{/L} = 0 \quad 4.16$$

On remarquera que dans cette nouvelle approche, l'interpolation radiale est appliquée au produit $(\eta\psi)$. Ainsi, le cas non homogène peut être appréhendé sans modification conséquente du code, soit :

$$(\eta\psi)(x) = [\Phi(x)]\{\eta\psi\}_{/L} \quad 4.17$$

Avec

$$\begin{aligned} \{\eta\psi\}_{/L} &= (\eta_1\psi^1 \quad \eta_2\psi^2 \quad \dots \quad \eta_N\psi^N)^T \\ &= \begin{bmatrix} \eta_1 & & & 0 \\ & \eta_2 & & \\ & & \dots & \\ 0 & & & \eta_N \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \psi^1 \\ \psi^2 \\ \dots \\ \psi^N \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad 4.18$$

Ainsi :

$$(\eta\psi)_{,i} = \{\nabla\}[\Phi(x)][\eta]\{\psi\}_{/L} \quad 4.19$$

On obtient au final le système suivant :

$$[B(\nabla)]^T[C][B(\nabla)][\tilde{\Phi}]\{u^P\}_{/L} + \{\nabla\}[\Phi(x)][\eta]\{\psi\}_{/L} = \{0\} \quad 4.20$$

$$a\{\nabla\}^T\{\nabla\}\{\tilde{\Phi}\}^T\{\psi^P\}_{/L} - b\{\tilde{\Phi}\}^T\{\psi\}_{/L} - \eta\{\nabla\}^T[\tilde{\Phi}]\{u\}_{/L} = 0 \quad 4.21$$

Dans ce qui précède, $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \quad \frac{\partial}{\partial x_2} \quad \frac{\partial}{\partial x_3}\right)^T$, $\{u\}_{/L} = (u_1^1 \quad u_2^1 \quad u_3^1 \quad \dots \quad u_1^N \quad u_2^N \quad u_3^N)^T$, $\{\psi\}_{/L} = (\psi^1 \quad \psi^2 \quad \psi^3 \quad \dots \quad \psi^{N-2} \quad \psi^{N-1} \quad \psi^N)^T$. La matrice B est représentée grâce au

vecteur $z = (z_1, z_2, z_3)^T$ par $B(z) = \begin{bmatrix} z_1 & 0 & 0 & z_2 & 0 & z_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & z_2 & 0 & 0 & z_1 & 0 & 0 & z_3 & 0 \\ 0 & 0 & z_3 & 0 & 0 & 0 & z_1 & 0 & z_2 \end{bmatrix}^T$. La matrice

C est la représentation de Voigt de la matrice d'élasticité. Enfin, N est le nombre de nœuds dans le domaine d'influence du point x .

Considérant tous les centres de collocation, et imposant la nullité des champs particuliers pour tous les points frontières, ces derniers peuvent être obtenus en fonction des champs globaux.

Soit :

$$[S_c^H]\{u_I^P\} + [Q]\{\psi\} = \{0\} \quad 4.22$$

$$[T_a^{II}]\{\psi_I^P\} + [T_b^{IB} \quad T_b^{II}]\{\psi\} + [R]\{u\} = 0 \quad 4.23$$

Des manipulations algébriques simples permettent de récrire les équations 4.13 et 4.14 sous la forme :

$$\begin{aligned} [H]\{u\} - [G]\{t\} &= [\tilde{F}]\{\psi\} \\ [\hat{H}]\{\psi\} - [\tilde{G}]\{s\} &= [\bar{F}]\{u\} \end{aligned} \quad 4.24$$

On retrouve un problème classique formulé en termes de variables principales. Une fois les conditions aux limites prises en compte, le système d'équations sera résolu par une méthode standard.

On peut désormais commencer les simulations numériques d'un échantillon non-homogène.

IV. Résultats numériques

IV.1. Un cas simple

Avant de réaliser les simulations numériques sur des géométries plus complexes, considérons d'abord un cas simple. Ainsi nous traitons le cas d'un barreau en traction de dimensions $1 \times 1 \times 20 \text{ mm}$. Dans ce premier cas, nous considérons que dans la moitié ($z < 0$) le coefficient $\eta = -7 \text{ GPa}$ alors que dans l'autre ($z \geq 0$) on a $\eta = -8 \text{ GPa}$ (cf. *Figure 4.8*). Les autres paramètres du modèle de comportement sont identiques dans les deux parties de l'échantillon: $\lambda = 3,4 \text{ GPa}$, $\mu = 0,85 \text{ GPa}$, $b = 26 \text{ GPa}$ et $a = 26 \text{ kN}$. La valeur de la contrainte de traction sera imposée à 10^{-2} GPa .

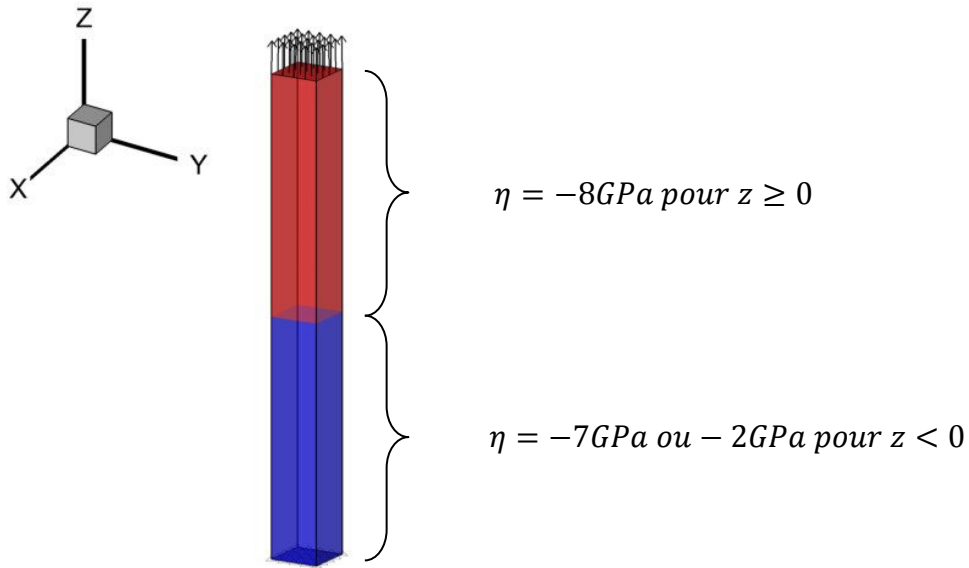


Figure 4.8 : Cas de traction uniaxiale pour un échantillon non homogène.

Pour cette étude, la surface du barreau est subdivisée en 72 éléments quadrilatères à 9 nœuds. Les centres de collocation internes sont au nombre de 135.

La *Figure 4.9*, montre l'évolution de la microdilatation suivant l'axe de symétrie du solide. On peut voir que les valeurs de microdilatation aux extrémités du barreau sont très proches de celles que l'on obtiendrait si chaque moitié était soumise à une traction simple.

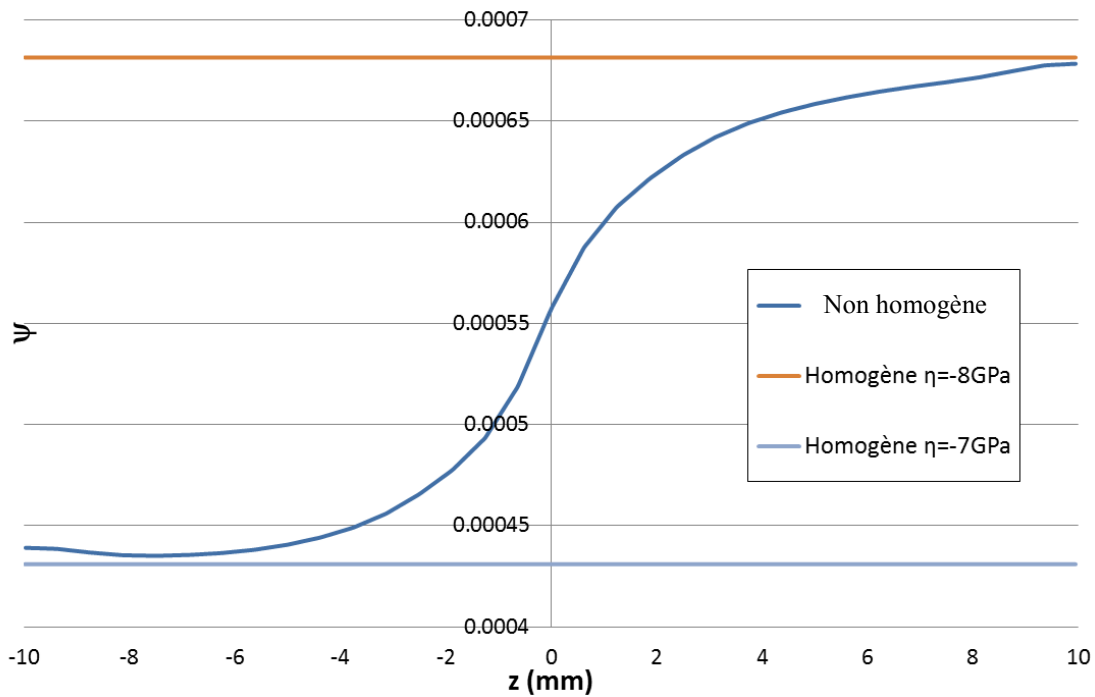


Figure 4.9 : Variation de la microdilatation en fonction de la position sur l'axe de traction pour un échantillon non homogène.

Il convient de noter que l'approximation utilisée introduit une régularisation des grandeurs au voisinage de l'interface.

Considérons maintenant le cas où les paramètres de couplage dans les deux moitiés sont très éloignés l'un de l'autre. Dans la moitié où $z < 0$ on a un coefficient $\eta = -2\text{GPa}$ (cf. *Figure 4.8*). L'évolution de la microdilatation le long de l'axe de symétrie de l'éprouvette est consignée dans la *Figure 4.10*. Comme précédemment nous obtenons une valeur de microdilatation se rapprochant des cas homogènes au niveau des extrémités de l'échantillon.

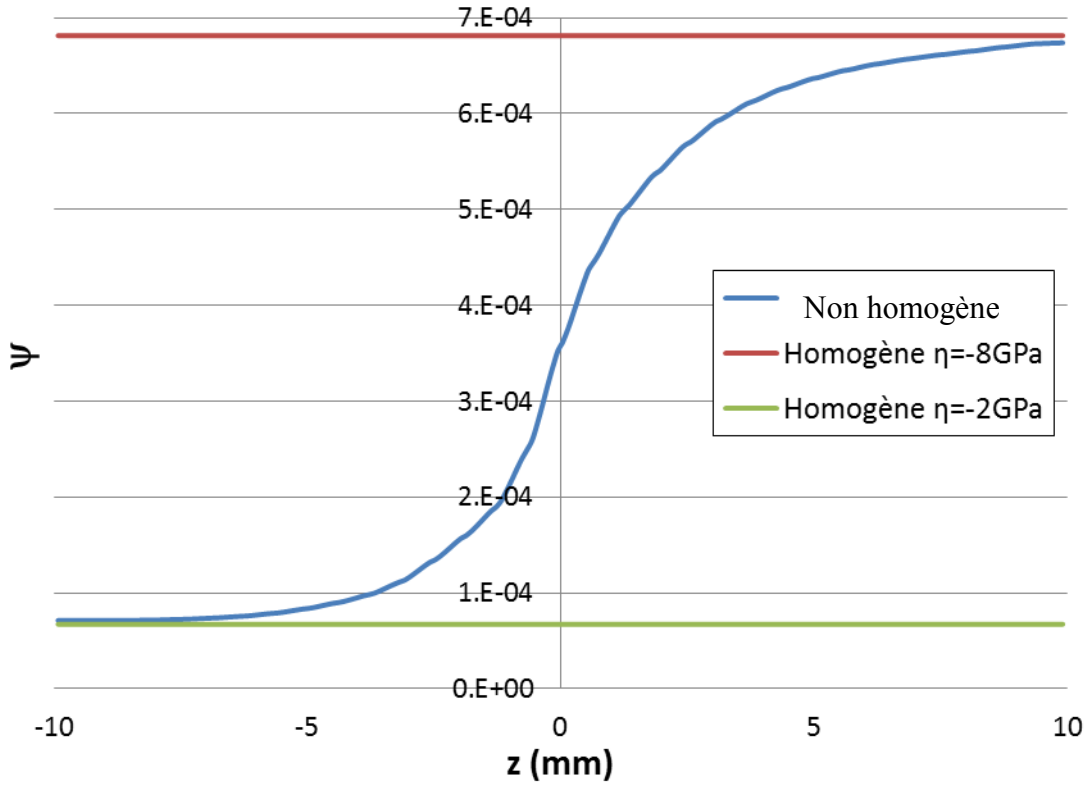


Figure 4.10 : Variation de la microdilatation en fonction de la position sur l'axe de traction pour un échantillon non homogène.

Ces premiers tests simples dans le cas d'un milieu non homogène nous permettent de valider la stratégie numérique implémentée et mettent également en évidence l'effet d'une régularisation qui atténue la zone d'influence de la surface de discontinuité (cf. cas d'une surface nécrosée §II).

Le paramètre de diffusion de la micro-contrainte est susceptible d'influencer l'état de microdilatation dans le milieu dès que le champ de déformation devient non uniforme. Il s'agit du paramètre a . Plus il est grand en un point, plus le rayon d'action de la micro-contrainte en ce point est important. Les courbes de la figure ci-après (cf. Figure 4.11) illustrent très bien ce propos. Elles concernent l'évolution de la microdilatation dans le bi-matériau qui, rappelons-le, est tel que la moitié ($z < 0$) a un coefficient $\eta = -7\text{GPa}$ et l'autre moitié ($z \geq 0$), un coefficient $\eta = -8\text{GPa}$. Diverses valeurs de a sont considérées et la sollicitation est uniaxiale.

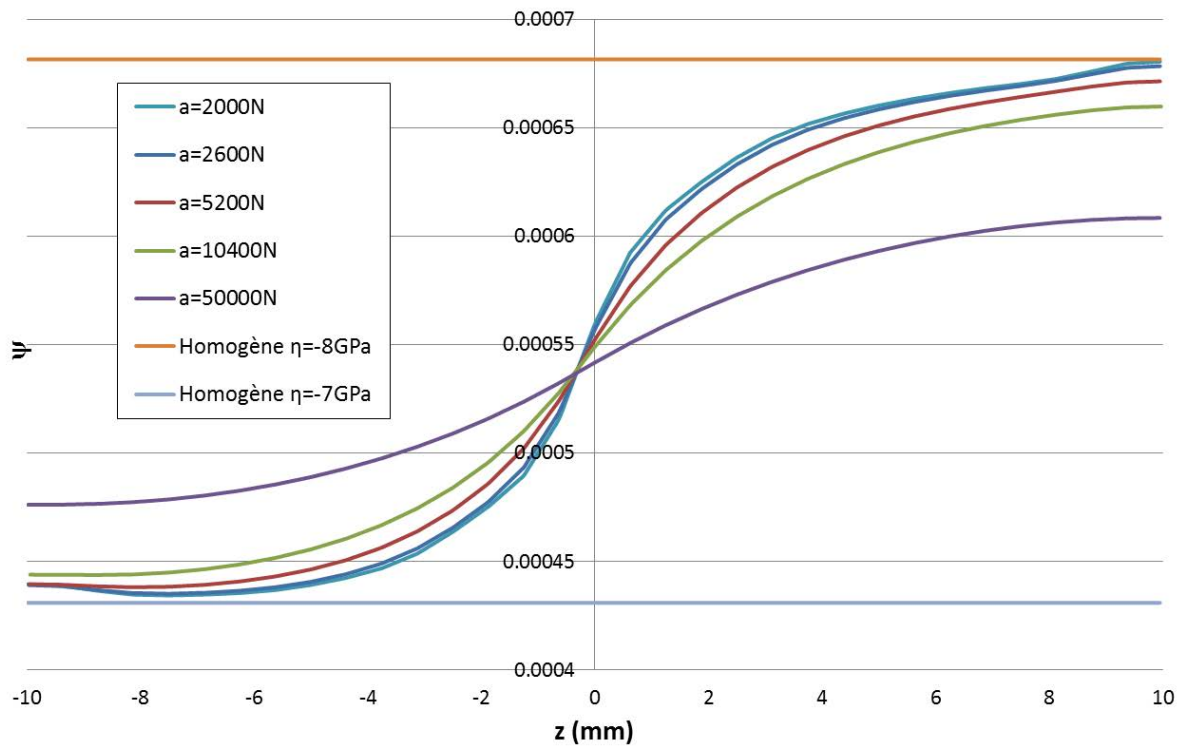


Figure 4.11 : Variation de la microdilatation en fonction de la position sur l'axe de traction pour différentes valeurs du paramètre a dans le cas non homogène.

La Figure 4.11 montre bien que lorsque $a = 50kN$ la microdilatation est fortement affectée car la zone d'influence des points est très grande. Il s'ensuit que la microdilatation s'éloigne des valeurs relatives aux deux milieux considérés séparément. Elle adopte un profil semblable à celui d'un matériau homogène qui aurait un paramètre de couplage micro-macro compris entre les deux valeurs considérées.

On peut constater que les courbes (Figure 4.11) ne se croisent pas en $z=0$. Ceci est dû au fait que nous avons délibérément attribué aux points de coordonnées $z=0$ un paramètre η égal à $-8GPa$.

Pour ce qui est de l'influence du paramètre a sur les déplacements, focalisons sur les extrémités de l'éprouvette. La Figure 4.12 montre que les déplacements à l'extrémité de l'échantillon sont très proches. En effet, même si la microdilatation est fortement influencée

par le paramètre a , les déplacements à la surface supérieure de l'échantillon sont très proches. On constate aussi que plus le paramètre a est grand, plus le déplacement est faible.

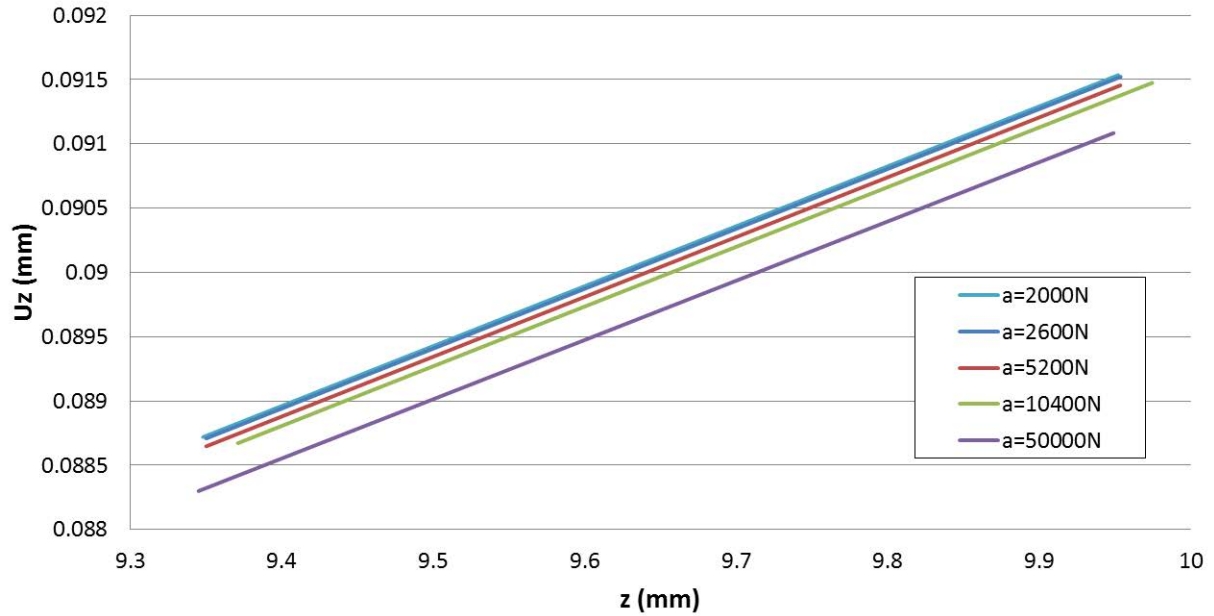


Figure 4.12 : Déplacement proche de la surface supérieure pour différentes valeurs du paramètre a dans le cas non homogène.

Dans la suite de ce travail, nous adoptons une valeur intermédiaire du paramètre a pour caractériser le comportement du tissu cardiaque. Nous faisons l'hypothèse que le rayon d'action de la micro-contrainte est relativement faible. De ce fait, les effets d'une nécrose seront mieux mis en évidence. Plus précisément, nous prendrons $a = 2600N$. Les autres paramètres adoptés pour un milieu supposé sain seront : $\lambda = 3,4 \text{ GPa}$, $\mu = 0,85 \text{ GPa}$, $\eta = -10,15 \text{ GPa}$ et $b = 26 \text{ GPa}$.

IV.2. Le cœur comme milieu à microdilatation

Certains auteurs schématisent simplement le ventricule gauche par un tube [1,2]. Nous adoptons dans ce qui suit la même schématisation (*Figure 4.13*). Considérons alors un échantillon tubulaire de rayon extérieur 0.75mm, d'épaisseur 0.5mm et de hauteur 1.25mm. Intéressons-nous à la contraction active du muscle cardiaque. On soumet alors le tube à une pression de $10^{-2} GPa$ sur sa face latérale externe.

Nous utiliserons la fraction volumique d'éjection comme paramètre clinique de qualification de l'adéquation du modèle. Elle est utilisée dans certains travaux [5–8], comme indicateur dans le diagnostic de l'insuffisance cardiaque.

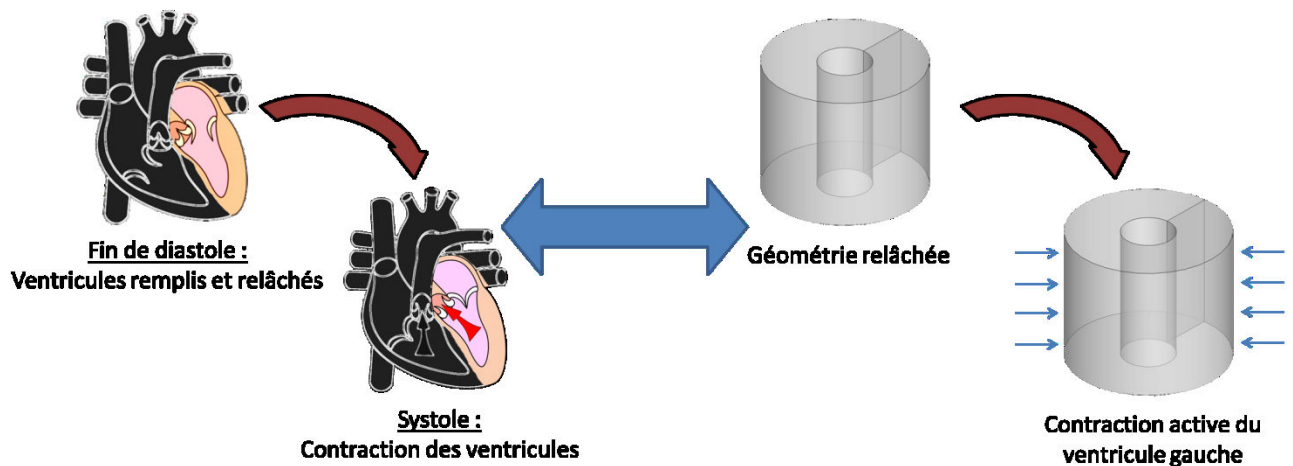


Figure 4.13 : Simulation de la contraction active du ventricule gauche.

Les résultats présentés ci-après ont été obtenus avec un tube subdivisé en 288 éléments quadrilatères à 9 nœuds. On utilise 432 points interne (cf. *Figure 4.14*).

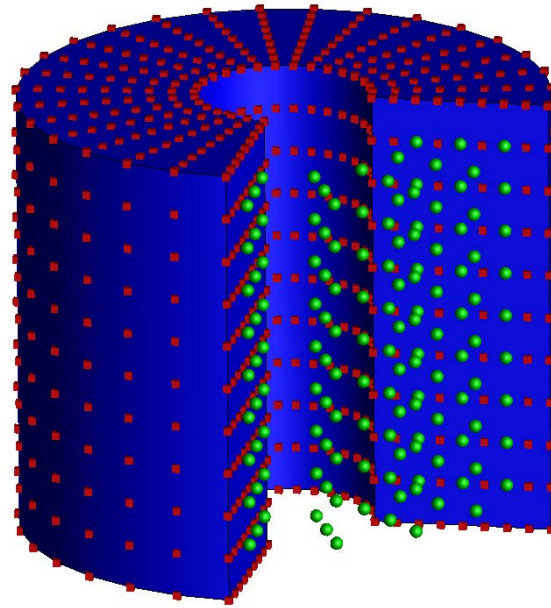


Figure 4.14 : Maillage de la géométrie tubulaire.

IV.2.1. Modélisation du cœur sain et de l'introduction d'une zone nécrosée

IV.2.1.1. La Fraction d'Éjection du Ventricule Gauche

Intéressons-nous d'abord aux fractions d'éjection susceptibles d'être atteintes par le modèle dans le cas d'un milieu considéré comme sain. Cette fraction d'éjection est calculée comme suit :

$$FEVG = \frac{V_D - V_S}{V_D} \quad 4.25$$

Dans cette équation, V_D correspond au volume diastolique (i.e. le volume lorsque le ventricule est plein) et V_S correspond au volume systolique (i.e. le volume lorsque le ventricule a terminé sa contraction). La Fraction d'Éjection du Ventricule Gauche est une grandeur cliniquement

importante qui indique la capacité du cœur à faire circuler convenablement le sang (et donc l'oxygène) dans tout le corps.

Etudions alors les évolutions de cette grandeur avec les variations du paramètre de couplage micro-macro (η). Dans la *Figure 4.15*, nous présentons la déformée d'une section droite du tube dans les cas suivants : $\eta = 0GPa$, $\eta = -8GPa$ et $\eta = -10.15GPa$. On remarquera que pour $\eta = 0GPa$, il n'y a pas de couplage micro-macro.

On peut constater que plus η est grand (en valeur absolue), plus le rétrécissement du diamètre intérieur du cylindre est important. Ce rétrécissement s'accompagne d'une diminution de la hauteur de l'éprouvette pour les cas $\eta = -8GPa$ et $\eta = -10.15GPa$. C'est un comportement de matériaux à coefficient de Poisson apparent négatif. Remarquons que dans la théorie utilisée par Djerad et al. [9], le coefficient de Poisson du muscle cardiaque est pris négatif pour permettre une concordance quasi-parfaite entre courbes expérimentale et théorique. Ces résultats indiquent que sous l'effet d'une pression externe, le volume de liquide susceptible d'être éjecté est d'autant plus important que la valeur absolue de η est grande.

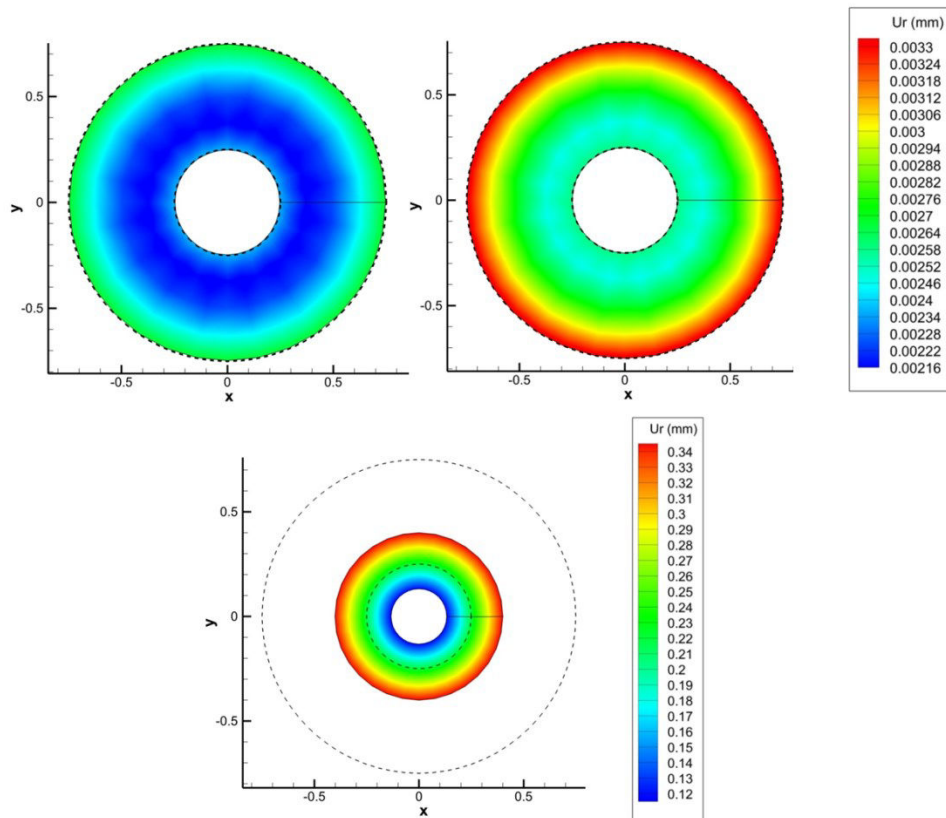


Figure 4.15 : Déplacement radial dans une section droite du cylindre : a) élastique classique ($\eta = 0GPa$), b) microdilatation ($\eta = -8GPa$), c) microdilatation ($\eta = -10.15GPa$).

On admet que pour un cœur sain, la FEVG est supérieure à 60% [10]. Pour un cœur malade, la FEVG peut baisser jusqu'à 15%. D'après P. Curtis et al. [8], lorsque la FEVG passe de 15% à 45%, la mortalité baisse de manière linéaire. Il note aussi que passé le cap des 45%, le pourcentage de mortalité n'est plus lié à la FEVG. Il faut donc que la FEVG prédite par le modèle, pour un tissu sain, soit supérieure à 45%.

Les fractions d'éjection calculées pour les cas de la *Figure 4.15* sont respectivement de 1,5%, 2,4% et 84,7%. En se basant sur ce critère, on peut considérer que le modèle est capable de rendre compte du comportement mécanique du ventricule gauche et donc d'atteindre, voire de dépasser, des valeurs de fractions d'éjection suffisantes pour simuler un cœur sain.

IV.2.1.2. Influence d'une zone infarctie

Rappelons que nous faisons l'hypothèse que dans une zone infarctie, le couplage micro-macro est très faible, voire inexistant. Considérons alors un échantillon comportant une faible zone pour laquelle la valeur absolue du paramètre η est plus faible que celle attribuée à un organe sain. Cette zone est censée représenter une zone nécrosée après infarctus. Supposons d'abord que cette région de l'organe se situe au voisinage de la paroi extérieure du tube (*Figure 4.16*).

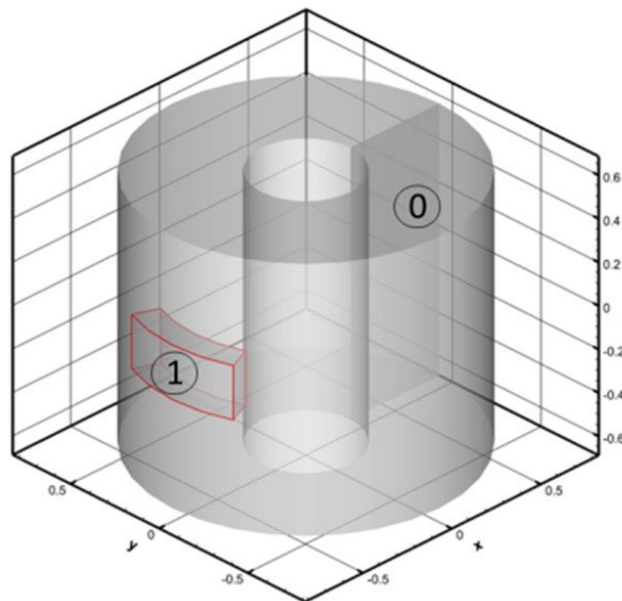


Figure 4.16 : Représentation de l'échantillon tubulaire avec l'introduction d'une zone nécrosée proche de la paroi externe.

Les schémas de la *Figure 4.17* comparent les déformations dans la géométrie déformée, pour les cas où dans la zone malade (identifiée par le numéro 1 dans la *Figure 4.16*) on a $\eta = -8GPa$ et $\eta = -2GPa$. Rappelons que dans la zone saine η vaut $-10.15GPa$.

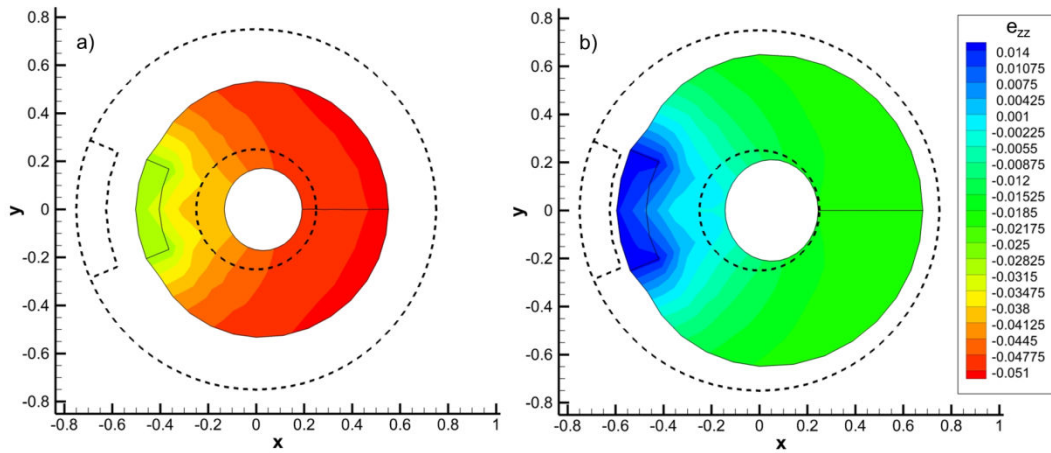


Figure 4.17 : Déformation axiale dans une coupe du cylindre, $\eta = -10.15GPa$ dans la zone saine et $\eta = -8GPa$ a) et $\eta = -2GPa$ b) dans la zone malade.

Comme précédemment, la surface extérieure latérale du tube est soumise à une pression uniforme. L'introduction d'une zone représentant la nécrose a un impact indéniable sur la FEVG. En effet, on passe d'une FEVG d'environ 80% pour l'organe sain à une FEVG de 17,3% dans le cas a) et à 9% dans le cas b). Ces modifications notables de la FEVG sont liées à la perturbation du mode de déformation de l'échantillon en présence de la zone nécrosée. Cette dernière se comporte en effet comme une zone plus rigide que les autres parties de l'échantillon. Rappelons que dans certains travaux, la zone nécrosée est modélisée en augmentant considérablement son module de rigidité [11,12].

Il faut noter que tous les résultats présentés sont en accord avec des observations cliniques (cf. Cho et al. [13]) portant sur des insuffisants cardiaques présentant une baisse de FEVG. *Il montre effectivement que pendant la systole, la déformation axiale du ventricule gauche est négative ce qui implique un raccourcissement macroscopique. Il montre également que l'amplitude de cette déformation est diminuée en présence d'une zone infarctée.* Remarquons également que les baisses de FEVG obtenues sont très importantes. Ceci est probablement dû au caractère isotrope du modèle utilisé.

IV.2.1.3. Influence de la localisation de l'infarctus

Considérons maintenant le cas où la zone nécrosée se situerait au voisinage de la paroi interne du tube (*Figure 4.18*). Considérons une zone nécrosée de même volume que dans le cas précédent.

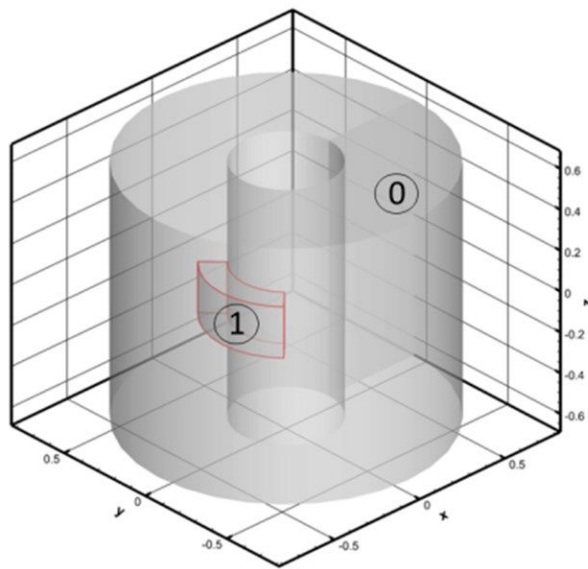


Figure 4.18 : Représentation de l'échantillon tubulaire avec l'introduction d'une zone nécrosée proche de la paroi interne.

Les résultats présentés *Figure 4.19* nous montrent qu'à la fois les déplacements radiaux et axiaux sont plus importants lorsque la zone malade est située au voisinage de la paroi extérieure. De plus, malgré un volume légèrement plus petit de la zone malade lorsqu'elle est placée proche de la paroi interne, on observe une diminution de presque 12% de la FEVG par rapport au cas où la zone malade est à proximité de la surface externe. Comparé au cas sain la FEVG passe d'environ 80% à 15,24 % alors qu'elle était de 17,3% dans le cas précédent. La localisation de la nécrose proche de la paroi interne serait plus défavorable vis-à-vis de la FEVG.

Les raisons de cette plus forte diminution de la FEVG sont liées à la distribution de la microdilatation dans l'échantillon comme on peut le constater sur la *Figure 4.20*. On peut constater que pour une zone nécrosée proche de la paroi interne, la perte de dilatation microscopique concerne également une large zone au voisinage de la paroi externe. Il s'en suit nécessairement une faible déformation macroscopique.

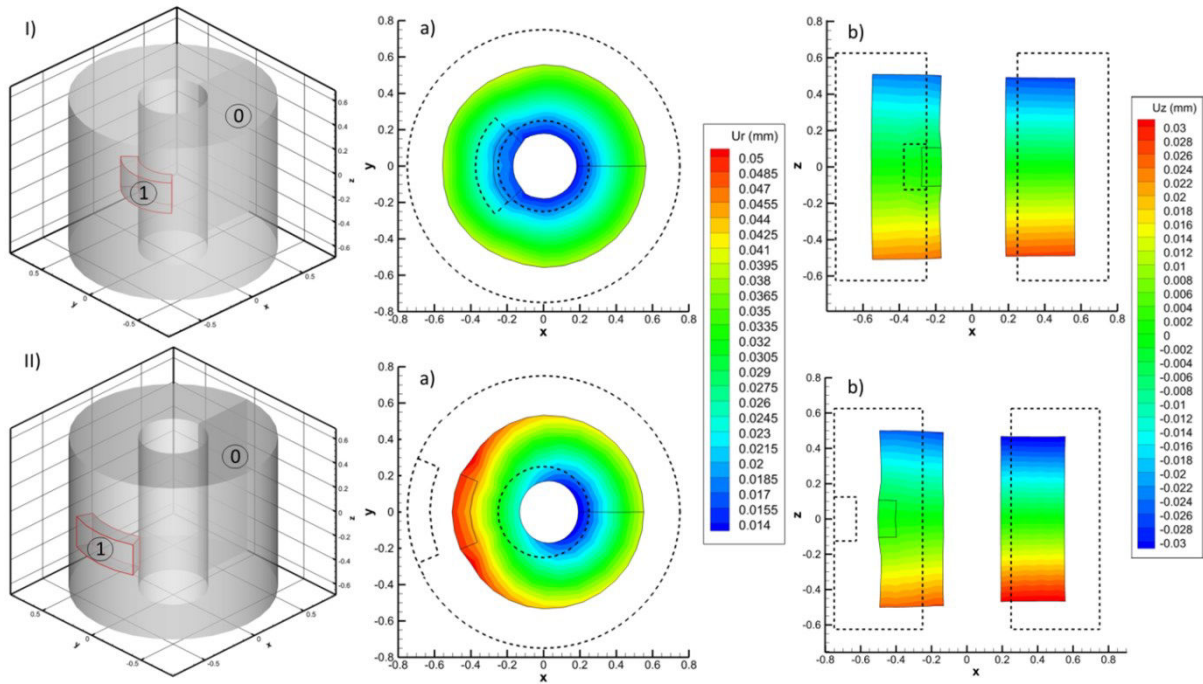


Figure 4.19 : $\eta_0 = -10.15$ GPa, $\eta_1 = -8$ GPa. I) Zone malade proche de la paroi interne, II) Zone malade proche de la paroi externe. a) Déplacements radiaux sur le plan $z=0$, b) Déplacements axiaux sur le plan $y=0$.

Ce résultat est à rapprocher des observations expérimentales de Reimer & al. [14]. Ils montrent en effet que la nécrose des tissus s'initie au voisinage de l'endocarde et se développe ensuite vers l'épicarde, c'est-à-dire de l'intérieur vers l'extérieur du ventricule.

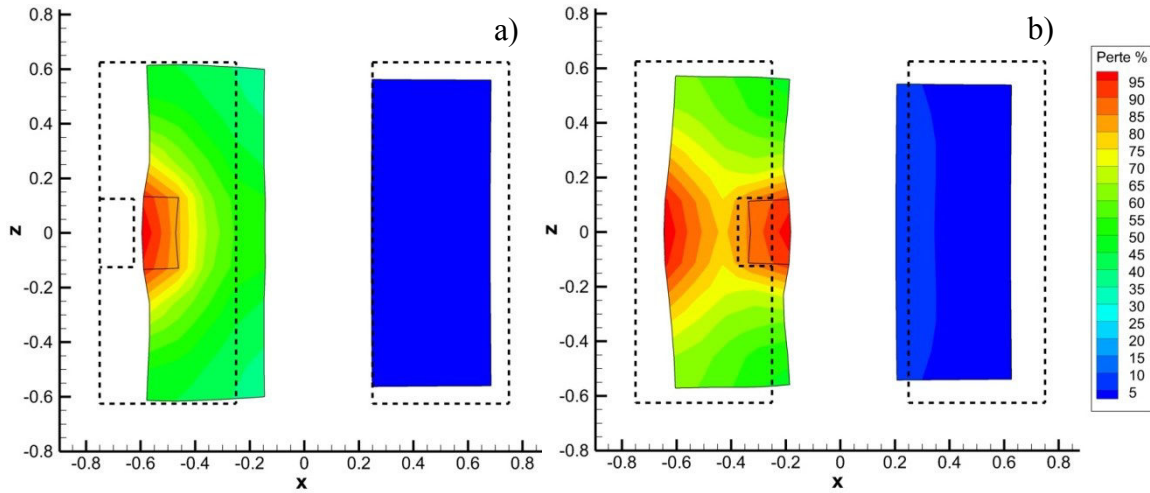


Figure 4.20 : Perte de dilatation : zone malade initialement au voisinage de la frontière extérieure a), ou de la frontière intérieure b).

Interrogeons-nous sur l'impact de ces constations sur des grandeurs macroscopiquement mesurables. Les images de la Figure 4.21 comparent les déformées pour les deux situations précédentes (Figure 4.19). Tant que le paramètre de couplage de la zone nécrosée est proche de celui du milieu sain, seule la frontière immédiatement voisine de la nécrose présente une modification notable de déformation.

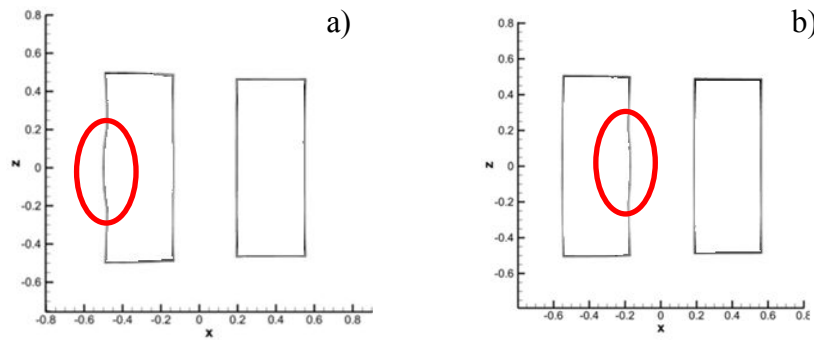


Figure 4.21 : Forme des déformées pour le cas de zones nécrosées ayant un paramètre de couplage de $\eta = -8\text{GPa}$: a) Zone nécrosée placée proche de la paroi externe, b) Zone nécrosée proche de la paroi interne.

Comme on peut le constater sur la Figure 4.22, si le paramètre de couplage de la zone nécrosée est bien éloigné de celui de la zone saine ($\eta_1 = -2\text{GPa}$), alors les déformations au niveau de la paroi externe sont affectées par une nécrose proche de la paroi interne. La réciproque n'est pas vraie.

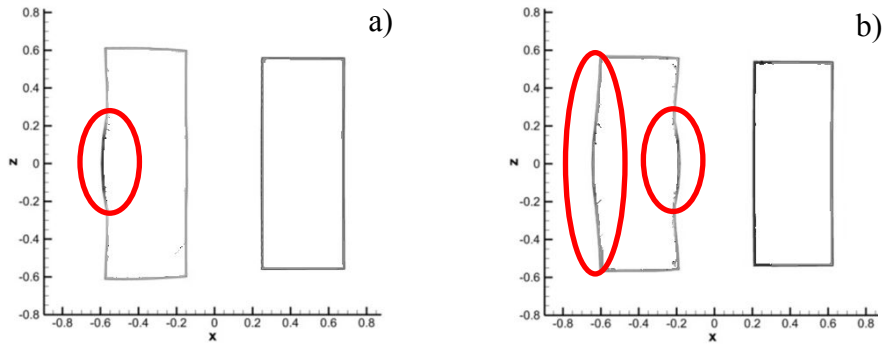


Figure 4.22 : Forme des déformées pour le cas de zones nécrosées ayant un paramètre de couplage de $\eta = -2 \text{ GPa}$: a) Zone nécrosée placée proche de la paroi externe, b) Zone nécrosée proche de la paroi interne.

On peut en conclure que du point de vue clinique, il est important d'explorer aussi bien la partie externe que la partie interne du ventricule pour localiser la zone nécrosée.

IV.2.2. Infarctus multiples

IV.2.2.1. Influence de deux zones nécrosées et aggravation de l'état des tissus

Considérons maintenant le cas où le ventricule gauche aurait été l'objet de plusieurs infarctus. Limitons nous au cas de deux zones nécrosées et étudions leurs interactions. Les résultats relatifs au déplacement radial dans le cas où les deux zones nécrosées sont situées au voisinage de la paroi externe sont consignés dans la Figure 4.23. Ces résultats concernent les cas suivants :

- a) $\eta_0 = -10.15 \text{ GPa}, \eta_1 = \eta_2 = -8 \text{ GPa}$
- b) $\eta_0 = -10.15 \text{ GPa}, \eta_1 = \eta_2 = -2 \text{ GPa}$
- c) $\eta_0 = -10.15 \text{ GPa}, \eta_1 = -2 \text{ GPa}, \eta_2 = -8 \text{ GPa}$

Rappelons que l'indice 0 est associé à la zone saine, les indices 1 et 2 aux deux nécroses. La surface latérale externe du cylindre est toujours soumise à une pression de 10^{-2} GPa .

Dans la *Figure 4.23* nous comparons les déplacements radiaux dans la configuration déformée pour les 3 cas (amplification géométrique par un facteur 5).

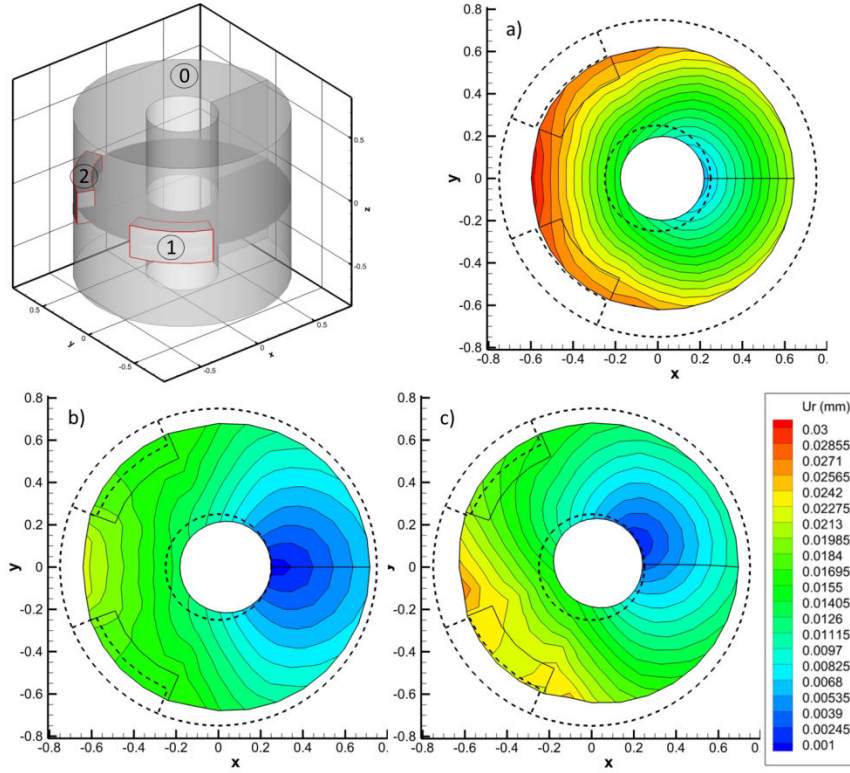


Figure 4.23 : Déplacements radiaux sur la coupe centrale du cylindre.

a) $\eta_0 = -10.15 \text{ GPa}$, $\eta_1 = \eta_2 = -8 \text{ GPa}$, b) $\eta_0 = -10.15 \text{ GPa}$, $\eta_1 = \eta_2 = -2 \text{ GPa}$, et
c) $\eta_0 = -10.15 \text{ GPa}$, $\eta_1 = -2 \text{ GPa}$, $\eta_2 = -8 \text{ GPa}$.

Les déplacements radiaux sont fortement impactés par l'introduction de ces zones. Lorsque les zones malades ont les mêmes paramètres de couplage micro-macro (*Figure 4.23 a*) et *b*), nous retrouvons bien des résultats symétriques par rapport à l'axe $y=0$ (les deux zones sont situées symétriquement par rapport à cet axe). Lorsque les deux zones n'ont pas le même paramètre de couplage η , l'impact le plus fort vient de la zone où le paramètre η est le plus éloigné de celui de la zone saine (*Figure 4.23 c*).

Intéressons-nous à l'évolution de la déformation axiale liée au raccourcissement ou à l'élongation de l'échantillon (cf. *Figure 4.24*).

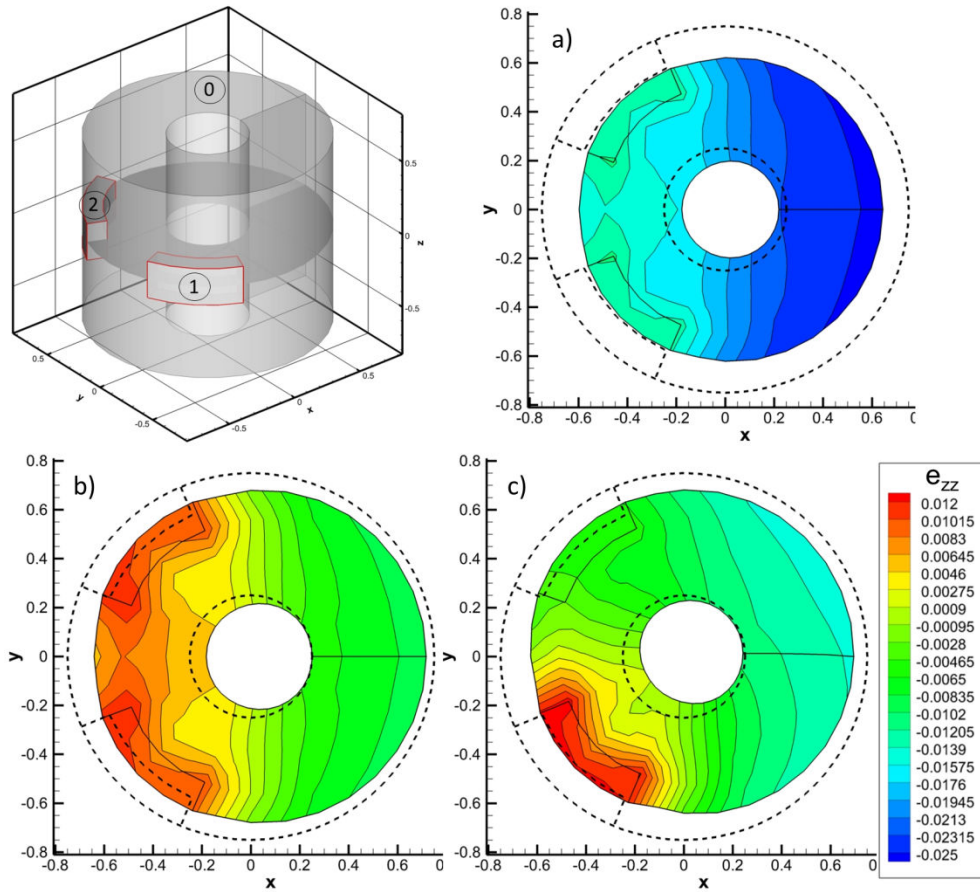


Figure 4.24 : Déformations axiales sur la coupe centrale du cylindre où deux zones malades sont présentes. a) $\eta_0 = -10.15 \text{ GPa}$, $\eta_1 = \eta_2 = -8 \text{ GPa}$, b) $\eta_0 = -10.15 \text{ GPa}$, $\eta_1 = \eta_2 = -2 \text{ GPa}$, et c) $\eta_0 = -10.15 \text{ GPa}$, $\eta_1 = -2 \text{ GPa}$, $\eta_2 = -8 \text{ GPa}$.

Le cas a) avec une FEVG de 10,34% est le plus favorable des 3. Vient ensuite le cas c) avec une fraction d'éjection de 7,14%. En dernier lieu, on retrouve le cas b) pour lequel les paramètres micro-macro sont les plus éloignés de ceux de la zone saine. La FEVG est alors de 5,7%. Comparé au cas où l'on ne considère qu'une seule zone malade (Figure 4.17), on remarque que les déformations axiales sont en forte diminution. Ce résultat est tout à fait cohérent car on double le volume des zones infarctées et de ce fait la région impactée par la nécrose est plus importante.

Notons que lorsqu'on passe d'une zone nécrosée à deux, la FEVG diminue de 40 % dans le cas a), 37% dans le cas b). On remarquera ces pourcentages sont du même ordre.

Considérons toujours les trois cas précédents, mais avec les zones déficientes localisées au voisinage de la paroi interne. Cette fois-ci, presque tous les points de la paroi externe

subissent d'importants déplacements radiaux. Comme on pouvait s'y attendre, la géométrie de la paroi interne est moins régulière. (Figure 4.25). La géométrie déformée du ventricule gauche pourrait donc nous donner des informations essentielles sur la localisation de la zone infarctée (cf. IV.2.1.3).

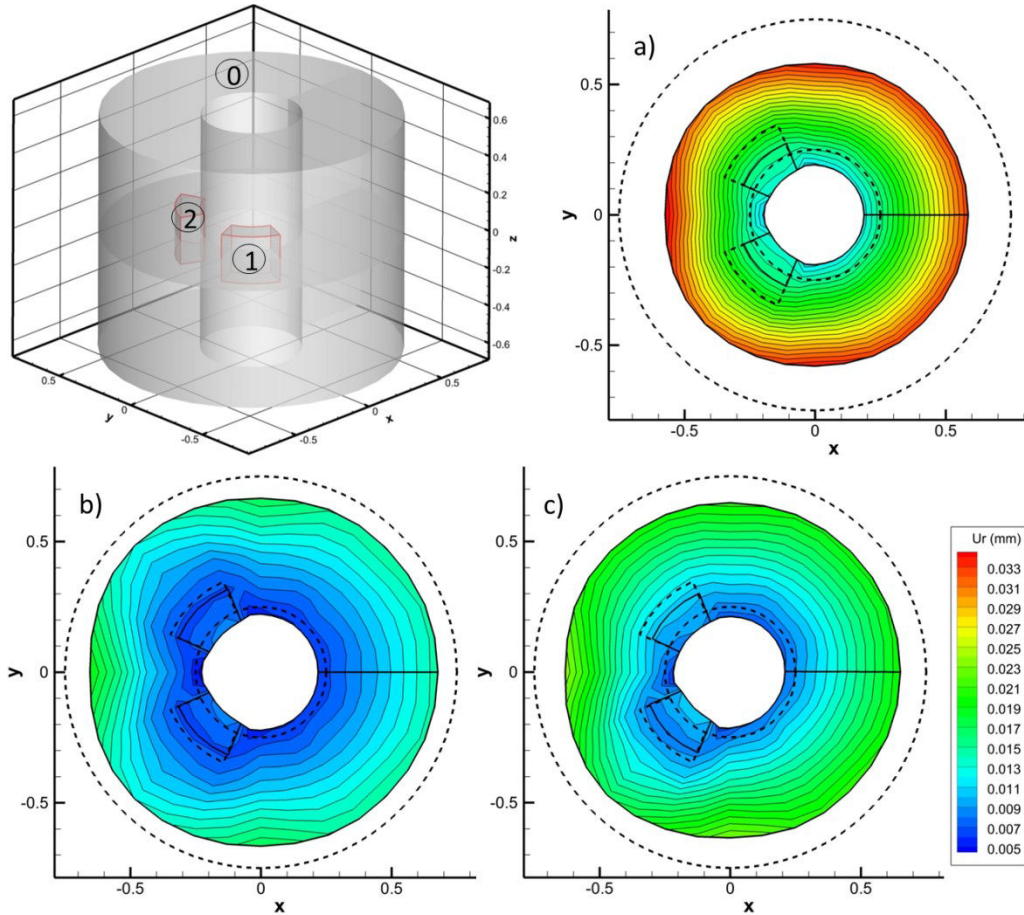


Figure 4.25 : Déplacements radiaux sur la coupe centrale du cylindre.

- a) $\eta_0 = -10.15 \text{ GPa}$, $\eta_1 = \eta_2 = -8 \text{ GPa}$, b) $\eta_0 = -10.15 \text{ GPa}$, $\eta_1 = \eta_2 = -2 \text{ GPa}$, et
c) $\eta_0 = -10.15 \text{ GPa}$, $\eta_1 = -2 \text{ GPa}$, $\eta_2 = -8 \text{ GPa}$.

Nous pouvons également nous pencher sur les champs de déformations (Figure 4.26). Le cas le plus favorable pour le fonctionnement du ventricule gauche est le cas présenté en Figure 4.26 a). En effet, la déformation axiale reste négative dans tout le cylindre ce qui implique un raccourcissement de l'éprouvette. La FEVG est dans ici de 13,23%. Dans ce cas, nous retrouvons également les observations cliniques avec une baisse de la déformation axiale due à l'introduction des zones infarctées.

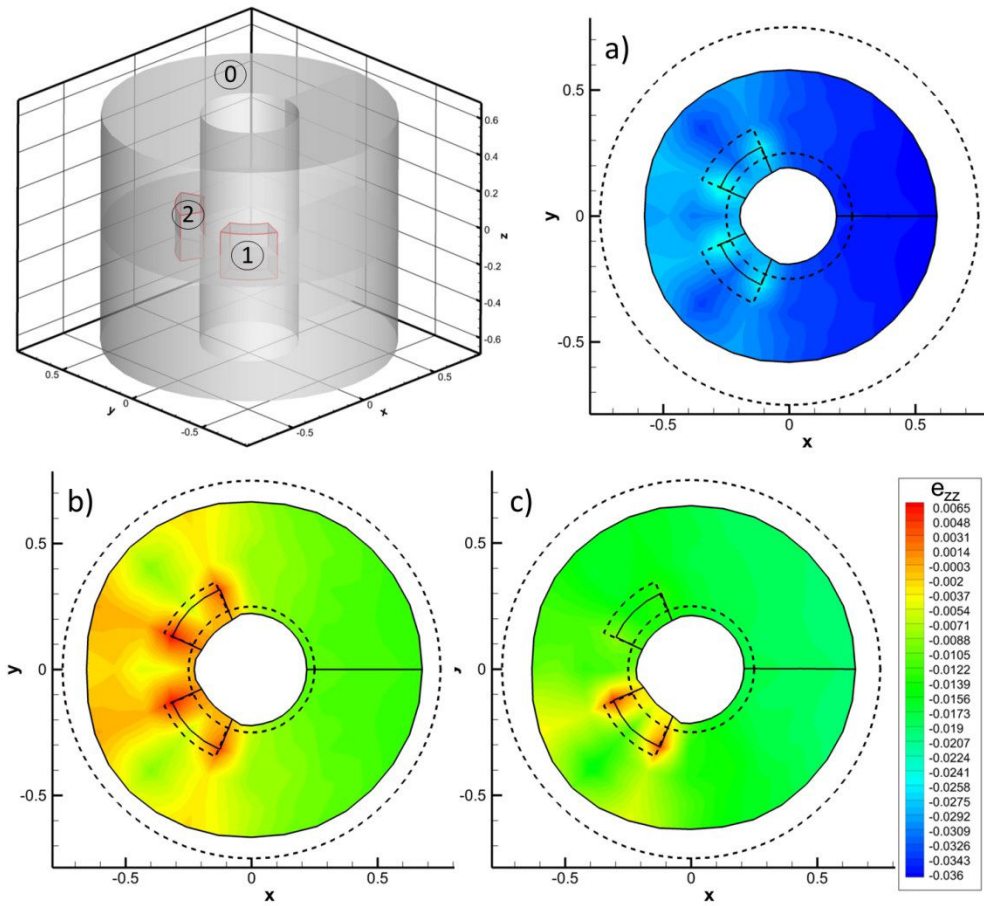


Figure 4.26 : Déformations axiales sur la coupe centrale du cylindre.

- a) $\eta_0 = -10.15 \text{ GPa}$, $\eta_1 = \eta_2 = -8 \text{ GPa}$, b) $\eta_0 = -10.15 \text{ GPa}$, $\eta_1 = \eta_2 = -2 \text{ GPa}$, et
c) $\eta_0 = -10.15 \text{ GPa}$, $\eta_1 = -2 \text{ GPa}$, $\eta_2 = -8 \text{ GPa}$.

Les cas où l'on introduit des zones ayant pour paramètre $\eta = -2 \text{ GPa}$ sont très défavorables pour la FEVG puisque la déformation axiale devient positive aux alentours de la zone infarciée. Cela signifie un allongement du cylindre et donc une forte diminution de la FEVG. Pour le cas c), où les paramètres de couplage sont différents dans les deux zones nécrosées, la FEVG est de 8,5%. Enfin, le cas b) est le plus défavorable avec une FEVG de seulement 6,57%.

En résumé, si l'on part du cas où les deux zones malades ont un paramètre η de -8 GPa (Figure 4.25 a)) et qu'on considère une aggravation du comportement d'une zone malade (Figure 4.25 c)) alors la FEVG diminue de plus de 35% et si la deuxième zone se détériore (Figure 4.25 b)), nous obtenons une diminution supplémentaire de presque 23%.

IV.2.2.2. Comparaison de l'influence de zones nécrosées à volume équivalent

Intéressons-nous maintenant à une comparaison entre les cas où l'on aurait deux zones infarctées et une seule zone malade. Nous imposons que les volumes totaux de la zone nécrosée soient les mêmes. On se place ici dans le cas où les parties infarctées sont au voisinage de la paroi interne du cœur.

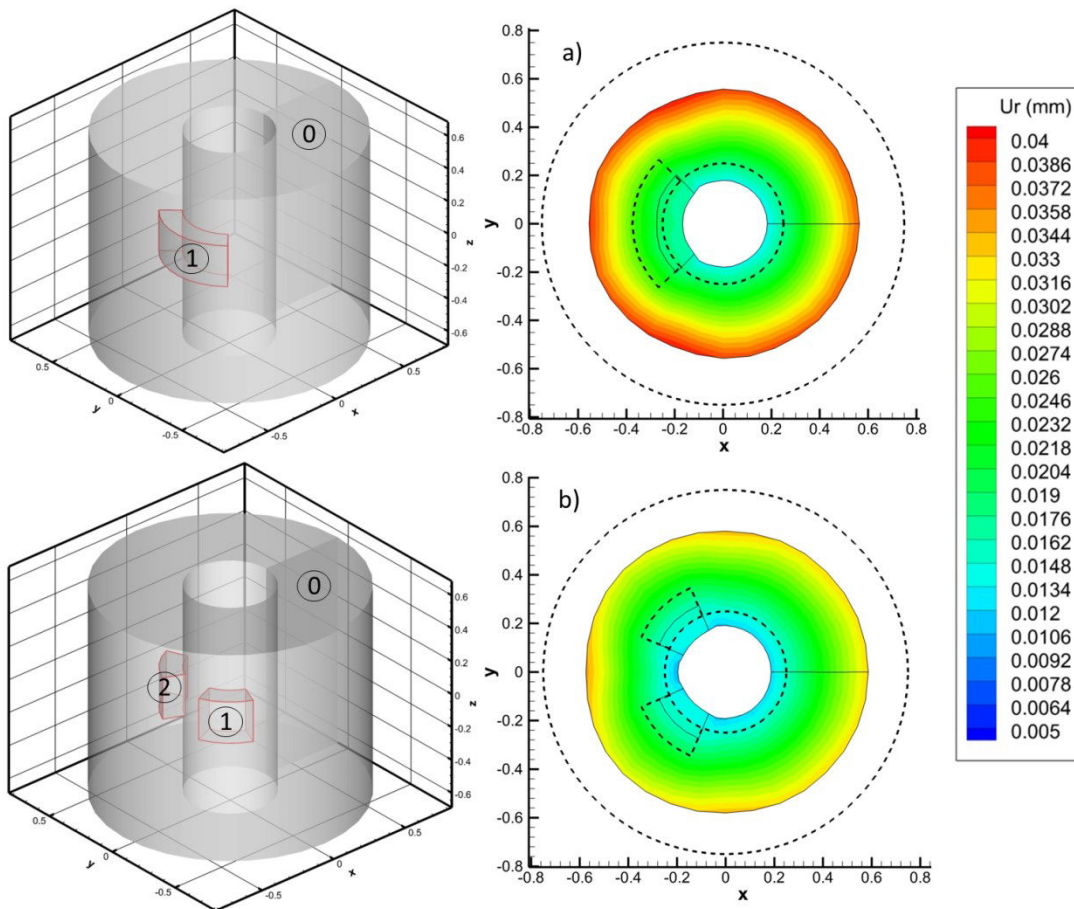


Figure 4.27 : Déplacements radiaux dans le plan $z=0$. a) Une zone malade présente avec $\eta_0 = -10.15$ GPa et $\eta_1 = -8$ GPa, b) Deux zones malades présentes avec $\eta_0 = -10.15$ GPa et $\eta_1 = \eta_2 = -8$ GPa.

Lorsqu'une seule zone malade est présente (Figure 4.27 a)), le déplacement radial est plus important que lorsque deux zones malades sont présentes (Figure 4.27 b)). Nous obtenons

ainsi une FEVG de 15,24% pour le cas a) et de 13,23% pour le cas b). Ces résultats sont cohérents car même si le volume total des zones infarctées est le même, la zone d'influence est plus grande lorsque l'on multiplie le nombre de zones malades.

Que les zones infarctées aient un paramètre η de -2GPa ou de -8GPa, le fait d'avoir deux zones distinctes diminue d'environ 13% la FEVG. On en conclut qu'à défaut de ne pas en avoir, il est souhaitable d'avoir une plus grosse zone malade plutôt que plusieurs petites zones malades (à volume équivalent).

IV.2.2.3. Cas plus réalistes de modélisation du ventricule

Considérons maintenant le cas un peu plus réaliste où le ventricule gauche est maintenu par l'aorte et les veines pulmonaires (en passant par la valve aortique et la valve mitrale). Du point de vue modélisation, nous considérons que les déplacements axiaux des points de la face supérieure du tube sont contraints (on impose un déplacement nul). Pour les mêmes conditions de simulation que précédemment, nous obtenons les résultats des figures ci-après.

La *Figure 4.28* compare les déplacements axiaux des cas de simulations précédentes à ceux de ce nouveau cas. Le paramètre η de la zone saine est fixé à -10.15 GPa et ceux des zones infarctées à -8 GPa. Les résultats présentés *Figure 4.28* concernent le plan $y=0$ c'est-à-dire dans le plan de symétrie entre les deux zones infarctées. Le champ de déplacement n'est plus symétrique par rapport à l'axe $z=0$ et les déplacements axiaux sont plus importants (*Figure 4.28 b*). Dans cette nouvelle configuration, la FEVG est plus importante d'environ 2% comparée aux configurations précédentes.

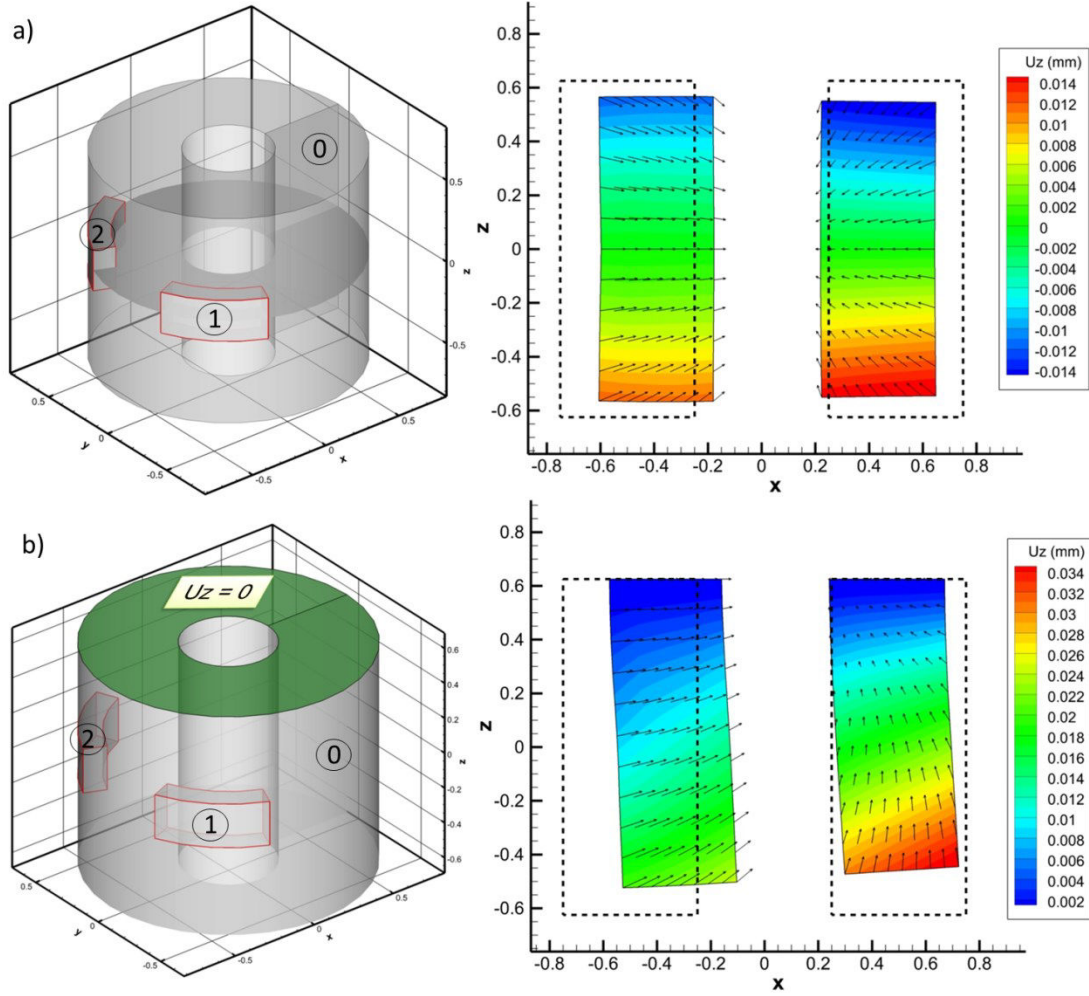


Figure 4.28 : Déplacements axiaux dans le plan $y=0$, $\eta_0 = -10.15 \text{ GPa}$, $\eta_1 = \eta_2 = -8 \text{ GPa}$. a) cas symétrique, b) cas non symétrique.

Localisons maintenant les deux zones infarciées au voisinage de la paroi interne. Nous comparons ici le cas symétrique et le cas où on impose un déplacement axial nul sur la face supérieure. Les paramètres sont les mêmes que précédemment. La Figure 4.29 représente la coupe en $y=0$ des deux cas.

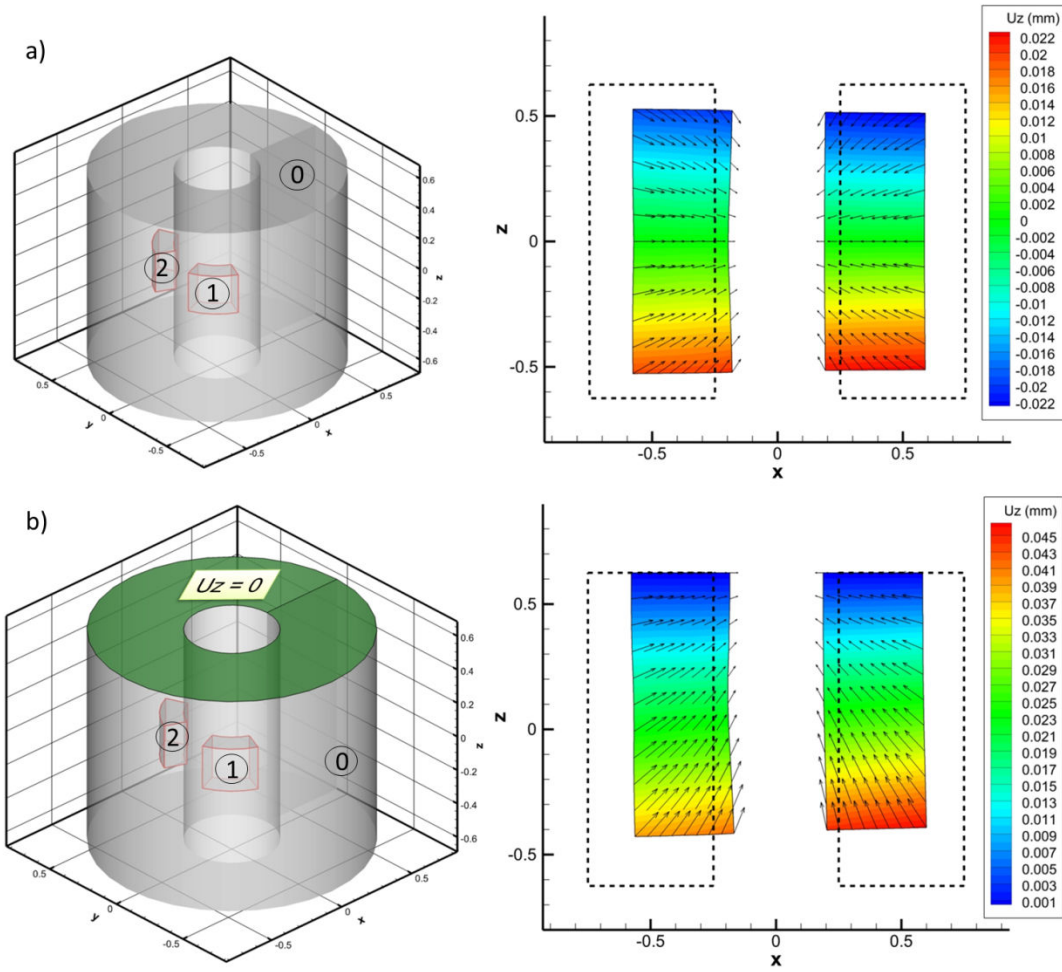


Figure 4.29 : Déplacements axiaux dans le plan $y=0$, $\eta_0 = -10.15 \text{ GPa}$, $\eta_1 = \eta_2 = -8 \text{ GPa}$. a) cas symétrique, b) cas non symétrique

Comparé au cas de l'échantillon libre aux deux extrémités, les simulations effectuées pour ce cas de déplacement bloqué à la surface supérieure, conduisent à des résultats complètement similaires malgré des valeurs de FEVG légèrement plus importantes.

V. Conclusion

Ce chapitre a été majoritairement consacré à l'applicabilité du modèle à microdilatation à la représentation du comportement mécanique du tissu cardiaque. Nous avons d'abord considéré le cas d'une surface infarctée et étudié son impact sur la réponse macroscopique d'un échantillon modèle sous une sollicitation macroscopique simple. Il est apparu que, comparé à un cas sans une telle surface, le déplacement des points de l'échantillon est moindre. Considérant qu'un infarctus ne peut être un objet 2D, nous avons adapté le modèle de façon à pouvoir traiter aisément les cas où le paramètre de couplage micro-macro est non homogène. La stabilité de la stratégie numérique développée est éprouvée sur l'exemple d'un bi-matériau modèle, toujours sous sollicitation macroscopique simple. Cet exemple est utilisé pour analyser l'influence des divers paramètres du modèle. Un choix de paramètres est effectué pour aborder la problématique du ventricule gauche qui est schématisée par un cylindre. Les divers calculs effectués montrent que le modèle est adapté à la simulation du comportement du muscle cardiaque. Il permet par exemple d'obtenir un raccourcissement de l'éprouvette dans une sollicitation où la plupart des matériaux rigides s'allongent. Ce fait est en accord avec certaines observations cliniques de la littérature [13].

Il convient tout de même de remarquer que la formulation du problème doit être améliorée. Les niveaux de FEVG prédits sont très importants tout comme leurs variations en présence de zones infarctées. Ceci est probablement dû à la non prise en compte de l'anisotropie. Avant toute extension de l'étude au cas de grandes déformations, nous pensons qu'il serait judicieux de mesurer d'abord l'impact de l'anisotropie sur le comportement présenté. Une fois le modèle établi, l'aspect expérimental sera nécessaire pour l'identification effective des divers paramètres du modèle.

Références du chapitre :

- [1] Johnston P. R., 2003, “A cylindrical model for studying subendocardial ischaemia in the left ventricle,” *Math. Biosci.*, **186**(1), pp. 43–61.
- [2] Nardinocchi P., Puddu P. E., Teresi L., and Varano V., 2012, “Advantages in the torsional performances of a simplified cylindrical geometry due to transmural differential contractile properties,” *Eur. J. Mech. A Sol.*, **36**(0), pp. 173–179.
- [3] Iesan D., and Pompei A., 1995, “On the equilibrium theory of microstretch elastic solids,” *Int. J. Eng. Sci.*, **33**(3), pp. 399–410.
- [4] Liu G. R., and Gu Y. T., 2001, “A local radial point interpolation method (LRPIM) for free vibration analyses of 2-D solids,” *J. Sound. Vib.*, **246**(1), pp. 29–46.
- [5] Cohn J. N., Johnson G. R., Shabetai R., Loeb H., Tristani F., Rector T., Smith R., and Fletcher R., 1993, “Ejection fraction, peak exercise oxygen consumption, cardiothoracic ratio, ventricular arrhythmias, and plasma norepinephrine as determinants of prognosis in heart failure. The V-HeFT VA Cooperative Studies Group,” *Circ.*, **87**(6 Suppl), pp. VI5–16.
- [6] Juillière Y., Barbier G., Feldmann L., Grentzinger A., Danchin N., and Cherrier F., 1997, “Additional predictive value of both left and right ventricular ejection fractions on long-term survival in idiopathic dilated cardiomyopathy,” *Eur. Heart J.*, **18**(2), pp. 276–280.
- [7] Hallstrom A., Pratt C. M., Greene H. L., Huther M., Gottlieb S., DeMaria A., and Young J. B., 1995, “Relations between heart failure, ejection fraction, arrhythmia suppression and mortality: analysis of the Cardiac Arrhythmia Suppression Trial,” *J. Am. Coll. Cardiol.*, **25**(6), pp. 1250–1257.
- [8] Curtis J. P., Sokol S. I., Wang Y., Rathore S. S., Ko D. T., Jadbabaie F., Portnay E. L., Marshalko S. J., Radford M. J., and Krumholz H. M., 2003, “The association of left ventricular ejection fraction, mortality, and cause of death in stable outpatients with heart failure,” *J. Am. Coll. Cardiol.*, **42**(4), pp. 736–742.

- [9] Djerad S.-E., Du Burck F., Naili S., and Oddou C., 1992, “Analyse du comportement rhéologique instationnaire d’un échantillon de muscle cardiaque,” *Comptes Rendus De L’Academie Des Sciences Serie II*, **315**(13), pp. 1615–1621.
- [10] “Insuffisance cardiaque gauche (mécanisme et symptôme) - Vulgaris Médical” [Online]. Available: <http://www.vulgaris-medical.com/encyclopedie-medicale/insuffisance-cardiaque-gauche-mecanisme-et-symptome>.
- [11] Klepach D., Lee L. C., Wenk J. F., Ratcliffe M. B., Zohdi T. I., Navia J. L., Kassab G. S., Kuhl E., and Guccione J. M., 2012, “Growth and remodeling of the left ventricle: A case study of myocardial infarction and surgical ventricular restoration,” *Mechanics Research Communications*, **42**(0), pp. 134–141.
- [12] Wenk J. F., Eslami P., Zhang Z., Xu C., Kuhl E., Gorman III J. H., Robb J. D., Ratcliffe M. B., Gorman R. C., and Guccione J. M., 2011, “A Novel Method for Quantifying the In-Vivo Mechanical Effect of Material Injected Into a Myocardial Infarction,” *The Annals of Thoracic Surgery*, **92**(3), pp. 935–941.
- [13] Cho G.-Y., Marwick T. H., Kim H.-S., Kim M.-K., Hong K.-S., and Oh D.-J., 2009, “Global 2-Dimensional Strain as a New Prognosticator in Patients With Heart Failure,” *J. Am. Coll. Cardiol.*, **54**(7), pp. 618–624.
- [14] Reimer K. A., Lowe J. E., Rasmussen M. M., and Jennings R. B., 1977, “The wavefront phenomenon of ischemic cell death. 1. Myocardial infarct size vs duration of coronary occlusion in dogs,” *Circ.*, **56**(5), pp. 786–794.

Table des figures :

<i>Figure 4.1 : Cas d'une traction uniaxiale avec microdilatation nulle imposée sur la face inférieure.</i>	<i>109</i>
<i>Figure 4.2 : Maillage frontière et disposition des points internes pour le barreau de dimensions 1x1x40mm.....</i>	<i>110</i>
<i>Figure 4.3 : Evolution de la microdilatation le long de l'axe z d'un échantillon avec et sans surface inférieure infarcie.....</i>	<i>111</i>
<i>Figure 4.4 : Evolution du déplacement le long de l'axe z d'un échantillon avec surface inférieure infarcie, d'un échantillon sain avec $\eta = -8\text{GPa}$ et d'un échantillon élastique... </i>	<i>112</i>
<i>Figure 4.5 : Evolution de la microdilatation, le long de l'axe z, d'échantillons de différentes tailles ayant la surface inférieure infarcie et comparaison avec le cas homogène.</i>	<i>113</i>
<i>Figure 4.6 : Augmentation de la contrainte afin d'atteindre la microdilatation d'un tissu sain.</i>	<i>114</i>
<i>Figure 4.7 : Influence sur les déplacements en augmentant la contrainte.</i>	<i>115</i>
<i>Figure 4.8 : Cas de traction uniaxiale pour un échantillon non homogène.</i>	<i>122</i>
<i>Figure 4.9 : Variation de la microdilatation en fonction de la position sur l'axe de traction pour un échantillon non homogène.....</i>	<i>123</i>
<i>Figure 4.10 : Variation de la microdilatation en fonction de la position sur l'axe de traction pour un échantillon non homogène.....</i>	<i>124</i>
<i>Figure 4.11 : Variation de la microdilatation en fonction de la position sur l'axe de traction pour différentes valeurs du paramètre α dans le cas non homogène.</i>	<i>125</i>
<i>Figure 4.12 : Déplacement proche de la surface supérieure pour différentes valeurs du paramètre α dans le cas non homogène.....</i>	<i>126</i>
<i>Figure 4.13 : Simulation de la contraction active du ventricule gauche.</i>	<i>127</i>

<i>Figure 4.14 : Maillage de la géométrie tubulaire.....</i>	<i>128</i>
<i>Figure 4.15 : Déplacement radial dans une section droite du cylindre : a) élastique classique ($\eta = 0\text{GPa}$), b) microdilatation ($\eta = -8\text{GPa}$), c) microdilatation ($\eta = -10.15\text{GPa}$).....</i>	<i>129</i>
<i>Figure 4.16 : Représentation de l'échantillon tubulaire avec l'introduction d'une zone nécrosée proche de la paroi externe.</i>	<i>130</i>
<i>Figure 4.17 : Déformation axiale dans une coupe du cylindre, $\eta = -10.15\text{GPa}$ dans la zone saine et $\eta=-8\text{GPa}$ a) et $\eta=-2\text{GPa}$ b) dans la zone malade.....</i>	<i>131</i>
<i>Figure 4.18 : Représentation de l'échantillon tubulaire avec l'introduction d'une zone nécrosé proche de la paroi interne.</i>	<i>132</i>
<i>Figure 4.19 : $\eta_0 = -10.15\text{ GPa}$, $\eta_1 = -8\text{ GPa}$. I) Zone malade proche de la paroi interne, II) Zone malade proche de la paroi externe. a) Déplacements radiaux sur le plan $z=0$, b) Déplacements axiaux sur le plan $y=0$.....</i>	<i>133</i>
<i>Figure 4.20 : Perte de dilatation : zone malade initialement au voisinage de la frontière extérieure a), ou de la frontière intérieure b).</i>	<i>134</i>
<i>Figure 4.21 : Forme des déformées pour le cas de zones nécrosées ayant un paramètre de couplage de $\eta = -8\text{GPa}$: a) Zone nécrosée placée proche de la paroi externe, b) Zone nécrosée proche de la paroi interne.....</i>	<i>134</i>
<i>Figure 4.22 : Forme des déformées pour le cas de zones nécrosées ayant un paramètre de couplage de $\eta = -2\text{GPa}$: a) Zone nécrosée placée proche de la paroi externe, b) Zone nécrosée proche de la paroi interne.....</i>	<i>135</i>
<i>Figure 4.23 : Déplacements radiaux sur la coupe centrale du cylindre. a) $\eta_0 = -10.15\text{ GPa}$, $\eta_1 = \eta_2 = -8\text{ GPa}$, b) $\eta_0 = -10.15\text{ GPa}$, $\eta_1 = \eta_2 = -2\text{ GPa}$, et c) $\eta_0 = -10.15\text{ GPa}$, $\eta_1 = -2\text{ GPa}$, $\eta_2 = -8\text{ GPa}$.....</i>	<i>136</i>
<i>Figure 4.24 : Déformations axiales sur la coupe centrale du cylindre où deux zones malades sont présentes. a) $\eta_0 = -10.15\text{ GPa}$, $\eta_1 = \eta_2 = -8\text{ GPa}$, b) $\eta_0 = -10.15\text{ GPa}$, $\eta_1 = \eta_2 = -2\text{ GPa}$, et c) $\eta_0 = -10.15\text{ GPa}$, $\eta_1 = -2\text{ GPa}$, $\eta_2 = -8\text{ GPa}$.....</i>	<i>137</i>

Figure 4.25 : Déplacements radiaux sur la coupe centrale du cylindre.
a) $\eta_0 = -10.15 \text{ GPa}$, $\eta_1 = \eta_2 = -8 \text{ GPa}$, b) $\eta_0 = -10.15 \text{ GPa}$, $\eta_1 = \eta_2 = -2 \text{ GPa}$, et
c) $\eta_0 = -10.15 \text{ GPa}$, $\eta_1 = -2 \text{ GPa}$, $\eta_2 = -8 \text{ GPa}$ 138

Figure 4.26 : Déformations axiales sur la coupe centrale du cylindre.
a) $\eta_0 = -10.15 \text{ GPa}$, $\eta_1 = \eta_2 = -8 \text{ GPa}$, b) $\eta_0 = -10.15 \text{ GPa}$, $\eta_1 = \eta_2 = -2 \text{ GPa}$, et
c) $\eta_0 = -10.15 \text{ GPa}$, $\eta_1 = -2 \text{ GPa}$, $\eta_2 = -8 \text{ GPa}$ 139

Figure 4.27 : Déplacements radiaux dans le plan $z=0$. a) Une zone malade présente avec $\eta_0 = -10.15 \text{ GPa}$ et $\eta_1 = -8 \text{ GPa}$, b) Deux zones malades présentes avec $\eta_0 = -10.15 \text{ GPa}$ et $\eta_1 = \eta_2 = -8 \text{ GPa}$ 140

Figure 4.28 : Déplacements axiaux dans le plan $y=0$, $\eta_0 = -10.15 \text{ GPa}$, $\eta_1 = \eta_2 = -8 \text{ GPa}$. a) cas symétrique, b) cas non symétrique. 142

Figure 4.29 : Déplacements axiaux dans le plan $y=0$, $\eta_0 = -10.15 \text{ GPa}$, $\eta_1 = \eta_2 = -8 \text{ GPa}$. a) cas symétrique, b) cas non symétrique 143

Conclusion générale

Dans ce travail de thèse, nous nous sommes intéressés à la modélisation du comportement mécanique du tissu cardiaque vis-à-vis de l'infarctus ischémique qui est l'une des principales causes de mortalité pour les maladies cardiovasculaires. Nous avons adopté l'approche milieu micromorphe pour représenter le comportement mécanique du tissu sain. Dans la particularisation implémentée, le point matériel vu comme un milieu continu peut se contracter ou se dilater. Une zone complètement nécrosée, quant à elle, n'a plus cette aptitude et réagit comme un milieu inerte classique. Pour étudier la réponse de tels milieux à une sollicitation mécanique, nous avons adapté une stratégie numérique couplant les avantages de la méthode des éléments de frontière classique (réduction par 1 de la dimension géométrique du problème) et ceux d'une méthode de collocation par points appliquée aux équations fortes (simplicité d'implémentation). L'efficacité de la stratégie a été démontrée sur l'exemple d'un problème de piézoélectricité (multi-physique) avant d'être appliquée à l'analyse d'un milieu à microdilatation. Les particularités de déformation de tels milieux sont mises en évidence, notamment leur capacité à se comporter dans certaines conditions comme des milieux auxétiques (milieux à coefficient de Poisson négatif). Remarquons que certains travaux récents s'intéressent à la réalisation de bio-substituts à comportement auxétique [1]. Le modèle est ensuite appliqué à la modélisation du comportement mécanique du ventricule gauche représenté par un cylindre. On montre alors que la déformation uniforme de l'organe, sous sollicitation homogène, est fortement perturbée en présence d'une zone infarctée. Le paramètre clinique adopté (la Fraction d'Ejection du Ventricule Gauche) est également fortement altéré. Les modifications de la déformation comme de la FEVG dépendent de la localisation et de la taille de la zone nécrosée. En effet, une zone nécrosée localisée au voisinage de la paroi interne du ventricule est plus néfaste qu'une zone identique localisée au voisinage de la paroi externe. Plus la taille de la zone augmente, plus la FEVG diminue quelle que soit la localisation de la zone. Certaines constatations cliniques conduisent à penser qu'un gros infarctus serait moins néfaste que plusieurs petits. En considérant ce cas, nous avons montré qu'à volume équivalent, la FEVG était plus importante pour une seule zone nécrosée que pour deux zones.

Le travail réalisé dans le cadre de cette thèse a posé les bases d'une voie de recherche de modélisation du comportement du tissu cardiaque. Les améliorations du modèle à considérer dans un avenir proche pourraient être :

- la prise en compte de l'anisotropie du tissu aussi bien macroscopique que microscopique,
- la réalisation de simulations en grandes déformations.

Par la suite, il faudra nécessairement se placer dans un cadre temporel et tenir compte d'autres mécanismes tels que la croissance et le remodelage. Les aspects liés aux sollicitations du type électrique et magnétique viendront compléter le modèle qui sera progressivement augmenté par les aspects liés aux transferts chimiques.

- [1] D. Y. Fozdar, P. Soman, J. W. Lee, L.-H. Han, et S. Chen, « Three-Dimensional Polymer Constructs Exhibiting a Tunable Negative Poisson's Ratio », *Adv. Funct. Mater.*, vol. 21, n° 14, p. 2712-2720, 2011.

Annexe 1

Solution analytique d'un solide piézoélectrique sous l'action d'un chargement uniforme :

Les solutions analytiques sont obtenues à partir des expressions des déformations suivantes :

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = -\frac{(C_{13} \cdot K_{33} + e_{33} \cdot e_{31}) \cdot \sigma_{zz} + (C_{13} \cdot e_{33} - C_{33} \cdot e_{31}) \cdot D_z}{(C_{11} + C_{12}) \cdot (C_{33} \cdot K_{33} + e_{33}^2) + 2 \cdot (C_{33} \cdot e_{31}^2 - 2 \cdot e_{33} \cdot C_{13} \cdot e_{31} - C_{13}^2 \cdot K_{33})}$$
$$\varepsilon_{zz} = \frac{(C_{11} \cdot K_{33} + 2 \cdot e_{31}^2 + K_{33} \cdot C_{12}) \cdot \sigma_{zz} + (C_{11} \cdot e_{33} - 2 \cdot C_{13} \cdot e_{31} + C_{12} \cdot e_{33}) \cdot D_z}{(C_{11} + C_{12}) \cdot (C_{33} \cdot K_{33} + e_{33}^2) + 2 \cdot (C_{33} \cdot e_{31}^2 - 2 \cdot e_{33} \cdot C_{13} \cdot e_{31} - C_{13}^2 \cdot K_{33})}$$

Remarquons que pour un solide purement élastique, ces expressions deviennent :

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = -\left(\frac{C_{13}}{C_{33}(C_{11}+C_{12})-2C_{13}^2}\right) \sigma_{zz}, \quad \varepsilon_{zz} = \left(\frac{C_{11}+C_{12}}{C_{33}(C_{11}+C_{12})-2C_{13}^2}\right) \sigma_{zz}.$$

En prenant en compte les conditions aux limites du problème à résoudre, nous aurons les expressions analytiques des déplacements et du potentiel électrique.

Annexe 2

Solution analytique pour un solide à microdilatation :

Rappelons les équations de champs gouvernant un solide à microdilatation :

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1+\nu} \left(\varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} \varepsilon_{kk} \delta_{ij} \right) + \eta \psi \delta_{ij}$$

$$S_k = a \psi_{,k}$$

$$p = b \psi + \eta \varepsilon_{kk}$$

On a également $S_{k,k} - p = 0$ c'est-à-dire $a \psi_{,kk} - p = 0$. On fait l'hypothèse que S est uniforme dans le solide, il s'en suit que $\psi_{,kk} = 0$. Nous avons donc $p = 0$. Dans ce cas, on trouve que $\psi = -\frac{\eta}{b} \varepsilon_{kk}$.

Nous avons donc :

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1+\nu} \left(\varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} \varepsilon_{kk} \delta_{ij} \right) - \frac{\eta^2}{b} \varepsilon_{kk} \delta_{ij}$$

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1+\nu} \left(\varepsilon_{ij} + \left(\frac{\nu}{1-2\nu} - \frac{\eta^2(1+\nu)}{Eb} \right) \varepsilon_{kk} \delta_{ij} \right)$$

En posant l'équation sous forme matricielle :

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \frac{E}{1+\nu} \left(\varepsilon_{11} + \left(\frac{\nu}{1-2\nu} - \frac{\eta^2(1+\nu)}{Eb} \right) (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) \right) & \frac{E}{1+\nu} \varepsilon_{12} & & \\ & \frac{E}{1+\nu} \varepsilon_{21} & \frac{E}{1+\nu} \left(\varepsilon_{22} + \left(\frac{\nu}{1-2\nu} - \frac{\eta^2(1+\nu)}{Eb} \right) (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) \right) & \cdots \\ & \frac{E}{1+\nu} \varepsilon_{31} & \frac{E}{1+\nu} \varepsilon_{32} & \\ & & & \frac{E}{1+\nu} \varepsilon_{13} \\ & & & \frac{E}{1+\nu} \varepsilon_{23} \\ & & \cdots & \frac{E}{1+\nu} \left(\varepsilon_{33} + \left(\frac{\nu}{1-2\nu} - \frac{\eta^2(1+\nu)}{Eb} \right) (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) \right) \end{bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} - \frac{\eta^2}{b} & \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} - \frac{\eta^2}{b} & \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} - \frac{\eta^2}{b} & & & \\ \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} - \frac{\eta^2}{b} & \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} - \frac{\eta^2}{b} & \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} - \frac{\eta^2}{b} & & & \\ \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} - \frac{\eta^2}{b} & \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} - \frac{\eta^2}{b} & \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} - \frac{\eta^2}{b} & & & \\ \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} - \frac{\eta^2}{b} & \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} - \frac{\eta^2}{b} & \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} - \frac{\eta^2}{b} & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & \frac{E}{2(1+\nu)} & & \\ & & 0 & & \frac{E}{2(1+\nu)} & \\ & & & & & \frac{E}{2(1+\nu)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{12} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{23} \end{Bmatrix}$$

On peut maintenant obtenir les déformations en fonction de contraintes en inversant la matrice précédente :

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{12} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{23} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4\eta^2\nu^2 + 2\eta^2\nu + Eb - 2\eta^2}{E(6\eta^2\nu + Eb - 3\eta^2)} & -\frac{Ebv - \eta^2 + \eta^2\nu + 2\eta^2\nu^2}{E(6\eta^2\nu + Eb - 3\eta^2)} & -\frac{Ebv - \eta^2 + \eta^2\nu + 2\eta^2\nu^2}{E(6\eta^2\nu + Eb - 3\eta^2)} & & & \\ \frac{Ebv - \eta^2 + \eta^2\nu + 2\eta^2\nu^2}{E(6\eta^2\nu + Eb - 3\eta^2)} & \frac{4\eta^2\nu^2 + 2\eta^2\nu + Eb - 2\eta^2}{E(6\eta^2\nu + Eb - 3\eta^2)} & -\frac{Ebv - \eta^2 + \eta^2\nu + 2\eta^2\nu^2}{E(6\eta^2\nu + Eb - 3\eta^2)} & & & \\ \frac{Ebv - \eta^2 + \eta^2\nu + 2\eta^2\nu^2}{E(6\eta^2\nu + Eb - 3\eta^2)} & -\frac{Ebv - \eta^2 + \eta^2\nu + 2\eta^2\nu^2}{E(6\eta^2\nu + Eb - 3\eta^2)} & \frac{4\eta^2\nu^2 + 2\eta^2\nu + Eb - 2\eta^2}{E(6\eta^2\nu + Eb - 3\eta^2)} & & & \\ 0 & & & \frac{2(1+\nu)}{E} & & \\ 0 & & & & \frac{2(1+\nu)}{E} & \\ 0 & & & & & \frac{2(1+\nu)}{E} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{pmatrix}$$

Simplifions les expressions :

$$\frac{4\eta^2\nu^2 + 2\eta^2\nu + Eb - 2\eta^2}{E(6\eta^2\nu + Eb - 3\eta^2)} = \frac{1}{E} - \frac{4\eta^2\nu(1-\nu) - \eta^2}{E(6\eta^2\nu + Eb - 3\eta^2)}$$

$$\frac{Ebv - \eta^2 + \eta^2\nu + 2\eta^2\nu^2}{E(6\eta^2\nu + Eb - 3\eta^2)} = \frac{\nu}{E} + \frac{4\eta^2\nu(1-\nu) - \eta^2}{E(6\eta^2\nu + Eb - 3\eta^2)}$$

Ce qui nous donne :

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{E} \left[\left(1 - \frac{4\eta^2\nu(1-\nu) - \eta^2}{6\eta^2\nu + Eb - 3\eta^2} \right) \sigma_{11} - \left(\nu + \frac{4\eta^2\nu(1-\nu) - \eta^2}{6\eta^2\nu + Eb - 3\eta^2} \right) (\sigma_{22} + \sigma_{33}) \right]$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{1}{E} \left[\left(1 - \frac{4\eta^2\nu(1-\nu) - \eta^2}{6\eta^2\nu + Eb - 3\eta^2} \right) \sigma_{22} - \left(\nu + \frac{4\eta^2\nu(1-\nu) - \eta^2}{6\eta^2\nu + Eb - 3\eta^2} \right) (\sigma_{11} + \sigma_{33}) \right]$$

$$\varepsilon_{33} = \frac{1}{E} \left[\left(1 - \frac{4\eta^2\nu(1-\nu) - \eta^2}{6\eta^2\nu + Eb - 3\eta^2} \right) \sigma_{33} - \left(\nu + \frac{4\eta^2\nu(1-\nu) - \eta^2}{6\eta^2\nu + Eb - 3\eta^2} \right) (\sigma_{11} + \sigma_{22}) \right]$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{12}$$

$$\varepsilon_{13} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{13}$$

$$\varepsilon_{23} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{23}$$

Nous pouvons mettre ε_{11} , ε_{22} et ε_{33} sous la forme :

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{E} \left[(1 + \nu) \sigma_{11} - \left(\nu + \frac{4\eta^2 \nu (1 - \nu) - \eta^2}{6\eta^2 \nu + Eb - 3\eta^2} \right) (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) \right]$$

Nous arrivons donc à la forme finale suivante :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{E} \left[(1 + \nu) \sigma_{ij} - \left(\nu + \frac{4\eta^2 \nu (1 - \nu) - \eta^2}{6\eta^2 \nu + Eb - 3\eta^2} \right) \sigma_{kk} \delta_{ij} \right]$$

ou en fonction des coefficients de Lamé :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\lambda + \mu}{\mu(3\lambda + 2\mu)} \left[\left(1 + \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \right) \sigma_{ij} - \left(\frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} - \frac{\eta^2 \mu}{(\lambda + \mu)((3\lambda + 2\mu)b - 3\eta^2)} \right) \sigma_{kk} \delta_{ij} \right]$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{3\lambda + 2\mu} \left[\frac{3\lambda + 2\mu}{2\mu} \sigma_{ij} - \left(\frac{\lambda}{2\mu} - \frac{\eta^2}{((3\lambda + 2\mu)b - 3\eta^2)} \right) \sigma_{kk} \delta_{ij} \right]$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2\mu} \left[\sigma_{ij} - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} \sigma_{kk} \delta_{ij} \right] + \left(\frac{1}{3\lambda + 2\mu} \right) \left(\frac{\eta^2}{(3\lambda + 2\mu)b - 3\eta^2} \right) \sigma_{kk} \delta_{ij}$$

Nous avons également la solution pour la microdilataion :

$$\psi = -\frac{\eta}{b} \varepsilon_{kk}$$

$$\psi = -\frac{\eta}{b} (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})$$

$$\begin{aligned} \psi = & -\frac{\eta}{Eb} \left[(1 + \nu) \sigma_{11} - \left(\nu + \frac{4\eta^2 \nu (1 - \nu) - \eta^2}{6\eta^2 \nu + Eb - 3\eta^2} \right) (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) \right. \\ & + (1 + \nu) \sigma_{22} - \left(\nu + \frac{4\eta^2 \nu (1 - \nu) - \eta^2}{6\eta^2 \nu + Eb - 3\eta^2} \right) (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) \\ & \left. + (1 + \nu) \sigma_{33} - \left(\nu + \frac{4\eta^2 \nu (1 - \nu) - \eta^2}{6\eta^2 \nu + Eb - 3\eta^2} \right) (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) \right] \end{aligned}$$

$$\psi = -\frac{\eta}{Eb} \left(1 - 2\nu - 3 * \frac{4\eta^2\nu(1-\nu) - \eta^2}{6\eta^2\nu + Eb - 3\eta^2} \right) \sigma_{kk}$$

$$\psi = \frac{\eta}{3\eta^2 - b(3\lambda + 2\mu)} \sigma_{kk}$$

On peut remarquer qu'en posant $\eta = 0$, nous retrouvons les solutions pour un solide élastique et la microdilatation devient nulle. On peut également voir que le paramètre a n'a pas d'influence sur les solutions.

De plus, si nous mettons ψ en fonction du module d'Young E et du coefficient de Poisson ν :

$$\psi = \frac{\eta(1-2\nu)}{3\eta^2(1-2\nu) - Eb} \sigma_{kk}.$$

Titre : Sur la modélisation du tissu cardiaque comme un milieu à microdilatation : une investigation numérique

Contexte : Le tissu biologique mou présente une organisation structurale extrêmement complexe et est le siège de nombreux phénomènes d'échanges. De nombreuses applications s'étendant du diagnostic clinique à l'ingénierie tissulaire nécessitent la connaissance du comportement mécanique du tissu. A cette fin, de nombreuses approches plus ou moins satisfaisantes sont développées. Elles s'efforcent toutes de tenir compte de manière plus ou moins systématique de la microstructure du milieu. La considération du tissu biologique comme un milieu micromorphe donne des résultats probants dans sa particularisation au milieu micropolaire appliquée au tissu osseux. Il est donc fort probable que des résultats du genre soient obtenus pour d'autres tissus. Notre travail était orienté vers le tissu cardiaque et la problématique de l'infarctus ischémique. Dans ce contexte, il nous a semblé que la particularisation de comportement la mieux adaptée est celle d'un milieu à microdilatation.

Travail réalisé : Le travail réalisé dans le cadre de cette thèse est essentiellement numérique. Il a pour objectif de mettre en lumière les particularités de la réponse à une sollicitation extérieure d'un échantillon de milieu à microdilatation. Cette étape est essentielle pour l'analyse future des résultats d'expériences qui seront menées. Il a également pour objectif d'étudier les potentialités du modèle vis-à-vis du tissu cardiaque en considérant l'infarctus ischémique et la perte associée de la capacité d'éjection de volume sanguin.

Les outils numériques d'analyse de tels milieux sont en plein développement. Il nous a fallu développer notre propre outil basé sur la LPI-BEM (Local Point Interpolation – Boundary Element Method). Du fait de la similitude des équations de champs associées, la validité de la stratégie numérique mise en œuvre est testée sur le cas d'un matériau piézoélectrique. Ce choix n'est pas innocent car, dans l'avenir la considération du milieu piézoélectrique à microdilatation permettra d'analyser le cas d'une sollicitation électrique du tissu. Les détails de cette stratégie numérique originale sont consignés dans le chapitre 2 du mémoire. Le chapitre 3 est consacré à l'analyse de la robustesse de la méthode et aux particularités de la réponse d'un milieu à microdilatation. Le quatrième chapitre est consacré à l'application au tissu cardiaque. En se limitant au cas de petites déformations, on montre que le modèle est bien adapté à la représentation du comportement du tissu cardiaque. En effet, assimilant le ventricule gauche à une structure tubulaire, la fraction d'éjection du ventricule gauche (critère clinique d'insuffisance cardiaque) est fortement diminuée en présence d'une zone infarctée. Cette dernière est modélisée comme une région à frontière diffuse où les points matériels ont perdu leur capacité de « respirer ». Ces résultats sont prometteurs. Ils encouragent à poursuivre dans cette voie en prenant en compte le caractère anisotrope du tissu et en se plaçant dans le cadre des grandes déformations.

Mots clés : Microdilatation, Méthode des éléments de frontière, Méthode de collocation par points, Fonctions de base radiale, Ventricule gauche, Infarctus du myocarde.

Title: On the modelling of cardiac tissue as a microdilatation medium: a numerical investigation

Background: A soft biological tissue is subjected to numerous exchange phenomena and has an extremely complex structural organization. The knowledge of its mechanical behavior is required in many applications ranging from clinical diagnostic to tissue engineering. To achieve this goal, more or less satisfactory approaches are developed. They all seek to take into account in a more or less systematic manner the microstructure of the medium. Assuming that the biological tissue is a particular micromorphic medium (micropolar medium) leads to good results in the case bone tissue. It is therefore likely that the results of this kind will be obtained for other tissues. Our interest is on the heart tissue and the problem of ischemic heart attack. In this context, it seemed that the most appropriate behavior particularization is that of a microdilatation medium.

Work done: The work presented in this thesis is essentially numerical. It aims to highlight the features of the response of microdilatation medium to an external mechanical load. This step is essential for the analysis of the experimental results to be conducted in the future. The work also aims to investigate the potentialities of the model with respect to the heart tissue regarding heart attack and the associated loss of the ability to eject sufficient blood volume.

The numerical tools for the analysis of such media are in increasing development. We had to develop our own tool based on the LPI-BEM (Local Point Interpolation - Boundary Element Method). Because of the similarity of the associated field equations, the validity of the numerical strategy is assessed in the case of a piezoelectric material. This choice is not innocent because the piezoelectric medium with microdilatation will allow analyzing the case of an electrical solicitation of the tissue. The details of this original numerical approach are given in Chapter 2 of the thesis. Chapter 3 is devoted to the analysis of the robustness of the method and to the peculiarities of the response of a microdilatation medium. The fourth chapter is devoted to the application to the cardiac tissue. By limiting the study to the case of small strains, it is shown that the model is well suited to the representation of the behavior of cardiac tissue. Indeed, considering the left ventricle as a tubular structure, the left ventricle ejection fraction (clinical criterion of the heart failure) is greatly reduced in the presence of an infarcted area. The latter is modeled as a zone with diffuse boundary where the material points have lost their ability to "breathe". These results are promising and encourage further investigations in this direction by taking into account the anisotropic nature of the tissue in a geometrically nonlinear context.

Keywords: Microdilatation, Boundary element method, Collocation point method, Radial basis function, Left ventricle, Heart attack.