



## AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : [ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr](mailto:ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr)

## LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

[http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg\\_droi.php](http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php)

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>



# THÈSE EN COTUELLE

Présentée à

L'Université de Lorraine – METZ

UFR Mathématiques, Informatique, Mécanique

Pour obtenir le titre de

**DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE LORRAINE**

en

**Automatique, Traitement du Signal et des Images, Génie Informatique**

Et le titre de

**DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE TUNIS EL MANAR**

en

**Génie industriel**

Par

Ghofrane Maaroufi

## **Stratégies optimales de maintenance de systèmes multi-composants sujets à des défaillances aléatoires**

Soutenue le 28 Novembre 2013, devant le Jury composé de

### **Rapporteurs**

Antoine GRALL

Professeur à l'Université de Technologie de Troyes

Atidel HADJ ALOUANE

Professeure à l'Ecole Nationale d'Ingénieurs de Tunis

### **Examineurs**

Daoud AIT-KADI

Professeur à l'Université Laval

Benoît IUNG

Professeur à l'Université de Lorraine

### **Directeurs de thèse**

Anis CHELBI

Professeur à l'Université de Tunis

Nidhal REZG

Professeur à l'Université de Lorraine



*A ma mère...*

Pour son amour, ses prières et ses sacrifices pour nous.

*A toute ma famille...*

Pour leur encouragement et leur affection.

*A ma nièce Chouchou et mon neveu Raslene,*

Que j'aime fort.

*A l'homme de ma vie,*

*A tous mes collègues et ami(e)s,*

# *Remerciements*

Tout d'abord, mes remerciements les plus profonds s'adressent à mes deux directeurs de thèse M. Nidhal Rezg et M. Anis Chelbi. Je les remercie infiniment pour tout le temps qu'ils m'ont consacré, pour leur soutien et pour leurs conseils qui m'ont été d'un appui considérable. Je voudrais également exprimer mon respect pour tout ce qu'ils ont fait pour moi et ont fait de moi. J'en suis très reconnaissante.

J'éprouve une reconnaissance toute spéciale à M. Anis pour ces cinq années de travaux fructueux sous ses directives durant mes études de Mastère et de Doctorat. J'ai toujours été impressionnée par ses qualités humaines et professionnelles ainsi que son amour et son honnêteté envers son travail. J'ai beaucoup appris tout le long de ces années et ce fut un grand plaisir de travailler à ses côtés.

Que Monsieur, Antoine Grall, et Madame, Atidel Hadj Alouane, acceptent mes plus vifs remerciements pour l'intérêt qu'ils ont manifesté vis-à-vis de ce travail en acceptant de le juger en qualité de rapporteur.

Je voudrais exprimer mon profond respect à Monsieur, Daoud Ait-Kadi et Monsieur, Benoît Iung, pour l'honneur qu'ils m'ont fait en acceptant d'examiner le présent travail en tant que membres de jury.

Le présent travail est le fruit d'une collaboration entre les deux universités de Lorraine et de Tunis el Manar, dans ce cadre j'adresse des remerciements très amicaux à tous les membres de l'équipe de recherche en fiabilité du centre de recherche en productique (CEREP) et du laboratoire de génie industriel et de production de Metz (LGIPM) et à tous les personnels administratifs et techniques pour l'accueil chaleureux qu'ils m'ont toujours réservé, pour l'assistance logistique et pour la très bonne ambiance de travail.

Je remercie particulièrement monsieur Sofiene Dellagi pour sa gentillesse, sa disponibilité, ses judicieux conseils et pour l'aide qu'il a su m'apporter.

Je remercie également ma collègue et amie Wided M'hedhbi qui m'a soutenue et encouragée dans les moments les plus difficiles tout au long de ces années d'étude.

Que tous ceux et celles qui ont contribué de près ou de loin à l'accomplissement de ce travail trouvent l'expression de mes remerciements les plus chaleureux.

Enfin, rien n'aurait été possible sans l'amour et l'encouragement de tous les membres de ma famille et de mes ami(e)s qui ont toujours cru en moi.

Merci à tous et à toutes.

## *Résumé*

---

Cette thèse porte sur le développement, l'évaluation et l'optimisation de nouvelles stratégies de maintenance pour des systèmes multi-composants. Cette démarche est justifiée par le fait que contrairement aux systèmes monolithiques qui ont été largement traités dans la littérature sur la maintenance, les systèmes multi-composants avec dépendances économique et stochastique sont encore peu étudiés à cause essentiellement de la difficulté de modélisation de ces types de dépendance (particulièrement la dépendance stochastique).

Dans ce cadre d'étude de la maintenance des systèmes multi-composants, cette thèse contient trois volets indépendants. Le premier volet porte sur un type particulier d'équipements dont l'état ne peut être connu que suite à une inspection. De tels équipements constitués de deux composants en série sont considérés. Une nouvelle stratégie quasi-optimale de maintenance conditionnelle basée sur des inspections séquentielles des deux composants est proposée. Un modèle mathématique correspondant à cette stratégie est développé et une procédure numérique permettant de générer une séquence quasi-optimale des instants d'inspection des composants est élaborée et testée.

Dans le deuxième volet on considère des systèmes multi-composants complexes dans le sens où leurs composants peuvent être sujets à des défaillances aléatoires locales et/ou propagées avec ou sans effet d'isolation. Une stratégie de maintenance sélective est proposée pour ce type de systèmes. Il s'agit de déterminer les composants à remplacer durant les périodes d'arrêt pour maintenance séparant les missions consécutives de tels équipements, de façon à minimiser le coût total de maintenance tout en garantissant un niveau minimal de fiabilité pour la prochaine mission et en respectant le temps d'arrêt planifié pour la maintenance.

Dans le troisième et dernier volet la notion de systèmes multi-composants est étendue aux systèmes de production multi-lignes. Dans cette perspective, cette partie porte sur le développement d'une politique intégrée de production-maintenance pour un système de production à deux lignes fonctionnant en parallèle en présence d'une dépendance se matérialisant par le fait qu'à chaque fois que la première ligne tombe en panne, la deuxième passe à sa cadence maximale pour réduire les pertes mais accélérant ainsi son taux de dégradation. Dans ce contexte, un modèle mathématique est développé dans le but d'optimiser séquentiellement le plan de production du système et la période de maintenance préventive de la deuxième ligne.

---

# Table des matières

<b>Résumé</b>	<b>v</b>
<b>Introduction générale</b>	<b>1</b>

---

- Les concepts de dépendance et leur prise en compte dans les stratégies de maintenance .....	5
- La dépendance économique .....	5
- La dépendance structurelle .....	7
- La dépendance stochastique .....	7
- L'objectif général et les problématiques spécifiques de la thèse .....	9

<b>Chapitre I: Stratégie de maintenance conditionnelle pour un système série à deux composants</b>	<b>11</b>
--	-----------

---

1.1. Introduction .....	13
1.1.1. Les modèles d'inspection de systèmes multi-composants .....	15
1.2. Définition de la stratégie et hypothèses de travail .....	18
1.2.1. Définition de la stratégie .....	18
1.2.2. Hypothèses de travail .....	18
1.3. Modèle mathématique .....	19
1.3.1. Notations .....	19
1.3.2. Modélisation mathématique de la stratégie .....	20
1.4. Procédure de résolution .....	33
1.5. Exemple numérique et résultats .....	34
1.5.1. Présentation des données .....	34
1.5.2. Résultats et interprétation .....	35
1.6. Conclusion .....	37

<b>Chapitre II : Stratégie optimale de maintenance sélective pour des systèmes sujets à des défaillances aléatoires locales et propagées avec effet d'isolation</b>	<b>39</b>
---	-----------

---

2.1. Introduction .....	41
2.1.1. Les stratégies de maintenance sélective .....	41
2.1.2. Evaluation de la fiabilité en présence de dépendance stochastique .....	43
2.2. Formulation mathématique du problème .....	44
2.2.1. Définition de la stratégie et notations .....	44

2.3.	Evaluation de la fiabilité des systèmes sujets à des défaillances propagées et effet d'isolation de défaillances.....	49
2.4.	Exemple numérique.....	50
2.4.1.	Développement de la fonction de probabilité de défaillance du système.....	51
2.4.2.	Application numérique .....	55
2.5.	Réduction de l'espace des solutions .....	57
2.5.1.	Règles simplificatrices.....	57
2.5.2.	Exemples illustratifs .....	62
2.6.	Le problème de plusieurs missions consécutives .....	65
2.6.1.	Algorithme de résolution .....	65
2.6.2.	Exemple illustratif.....	69
2.7.	Conclusion .....	70
<b>Chapitre III : Politique intégrée de production-maintenance sous dépendance stochastique entre les machines</b>		<b>72</b>
<hr/>		
3.1.	Introduction.....	74
3.1.1.	Couplage production-maintenance .....	74
3.1.2.	Modèles centrés sur des systèmes monolithiques .....	76
3.1.3.	Modèles centrés sur des systèmes multi-composants.....	79
3.2.	Description de la politique intégrée production - maintenance.....	81
3.2.1.	Hypothèses de travail.....	83
3.2.2.	Notations .....	83
3.3.	Formulation du problème .....	84
3.3.1.	Cas d'un système à deux lignes de production .....	86
3.3.2.	Détermination de la période optimale de maintenance préventive de la ligne L <sub>2</sub> .....	87
3.4.	Exemple numérique.....	92
3.5.	Conclusion .....	94
<b>Conclusion générale</b>		<b>96</b>
<hr/>		
-	Conclusion générale.....	97
-	Perspectives futures de recherche .....	99
<b>Bibliographie</b>		<b>100</b>
<hr/>		



## Liste des figures

---

<b>Figure I.1</b> : L'évolution du paramètre de contrôle de chaque composant avec le temps : cas $\tau_2 > \tau_1$ dans le scenario SC1.....	<b>23</b>
<b>Figure I.2</b> : L'évolution du paramètre de contrôle de chaque composant avec le temps: cas $\tau_2 < \tau_1$ dans le scenario SC1.....	<b>23</b>
<b>Figure I.3</b> : Exemple d'un scenario de fin de cycle (SC1) décrivant ce qui pourrait se passer aux instants d'inspection précédant $X_i$ .....	<b>27</b>
<b>Figure I.4</b> : Procédure numérique pour la génération d'une séquence d'inspection quasi-optimale.....	<b>33</b>
<b>Figure II.1</b> : Modèle d'arbre de défaillance dynamique du système considéré.....	<b>51</b>
<b>Figure II.2</b> : Algorithme de résolution du problème. ....	<b>68</b>
<b>Figure II.3</b> : Décisions optimales de maintenance entre les missions successives. ....	<b>69</b>
<b>Figure III.1</b> : Le problème général étudié.....	<b>82</b>

## Liste des tableaux

---

<b>Tableau I.1</b> : La séquence quasi-optimale d'inspection.....	<b>35</b>
<b>Tableau I.2</b> : Les paramètres de sortie correspondant à la séquence quasi-optimale d'inspection.....	<b>36</b>
<b>Tableau I.3</b> : Influence du coût d'inspection.....	<b>37</b>
<b>Tableau II.1</b> : Effets du choix de remplacement ou non d'un composant entre la $k^{\text{ème}}$ mission et la $(k + 1)^{\text{ème}}$ mission.....	<b>47</b>
<b>Tableau II.2</b> : Paramètres d'entrée.....	<b>55</b>
<b>Tableau II.3</b> : Les paramètres d'entrée correspondant à l'état et l'âge de chaque composant à la fin de la $k^{\text{ème}}$ mission.....	<b>56</b>
<b>Tableau II.4</b> : États et âges des composants avant le début de la $(k + 1)^{\text{ème}}$ mission.....	<b>57</b>
<b>Tableau II.5</b> : Exemple de vecteurs de maintenance qui doivent être rejetés par l'application de la règle #2.....	<b>59</b>
<b>Tableau II.6</b> : Exemple de vecteurs de maintenance qui doivent être rejetés par l'application de la règle #4.....	<b>60</b>
<b>Tableau II.7</b> : Exemple de vecteurs de maintenance devront être rejetés par application de la règle #5.....	<b>61</b>
<b>Tableau II.8</b> : Exemple d'usage combiné de quelques règles de réduction de l'espace de solutions possibles.....	<b>63</b>
<b>Tableau II.9</b> : Exemple d'un usage combiné de quelques règles de réduction de l'espace de solutions.....	<b>64</b>
<b>Tableau III.1</b> : Les demandes moyennes périodiques $\hat{d}(k)$ de l'exemple.....	<b>92</b>
<b>Tableau III.2</b> : Le plan de production optimal obtenu et réparti entre les deux lignes pour chaque période $k$ .....	<b>94</b>

---

# *Introduction générale*

---

## Introduction générale

Cette recherche s'inscrit dans le cadre d'une problématique globale qui porte sur l'optimisation de la fiabilité et de la disponibilité des équipements sujets à des défaillances aléatoires. Durant sa période de vie utile, un équipement peut occuper plusieurs états possibles. Chaque état reflète le degré de détérioration de l'équipement. Les états extrêmes correspondent respectivement au bon fonctionnement et à la défaillance. La transition d'un état à l'autre s'opère selon une loi de probabilité.

Les systèmes tels que les automobiles, les avions, les bateaux, les raffineries de pétrole, les centrales nucléaires, les machines de production sont des systèmes multi-composants présentant différents degrés de complexité, pour lesquels les consommateurs exigent un très haut niveau de fiabilité et de sécurité. Il s'agit alors de développer pour ces systèmes des stratégies de maintenance qui permettent de réduire la fréquence et la durée des interruptions accidentelles de service tout en respectant des contraintes sur les ressources (budget, productivité, espace, temps, etc).

Une stratégie de maintenance peut être définie comme une règle de décision qui établit la séquence des actions de maintenance à entreprendre en fonction du niveau de dégradation du système et des seuils acceptables d'exploitation. Chaque action de maintenance permet de maintenir ou de rétablir le système dans un état spécifié en utilisant les ressources appropriées. Un coût est encouru pour effectuer chaque action de maintenance (**Jamali et al. 2002**). La maintenance peut être, de deux types, corrective ou préventive :

- La maintenance corrective est définie comme étant la maintenance effectuée après la détection d'une panne. Elle est destinée à remettre le système dans un état lui permettant d'accomplir une fonction requise.
- La maintenance préventive est définie comme étant la maintenance effectuée dans l'intention de réduire la probabilité de défaillance d'un bien ou la dégradation d'un service rendu.

D'une façon générale, une action de maintenance est effectuée soit en remplaçant le système défaillant par un système identique neuf (as good as new), soit en effectuant une réparation minimale qui consiste à remettre le système en marche mais en gardant son taux de panne

(niveau d'usure) au même niveau qu'il avait juste avant la défaillance (as bad as old), soit en accomplissant une réparation imparfaite, c'est-à-dire ramener le système à un état intermédiaire entre l'état neuf et l'état de défaillance totale.

Dans la littérature, les principales contributions portant sur les stratégies de maintenance se situent au niveau du choix et de la séquence des actions qui définissent chaque stratégie, au niveau des coûts et des durées de ces actions et au niveau des distributions de durée de vie et de réparation considérées. Les stratégies de maintenance étudiées dans une grande partie des travaux de recherche impliquent la recherche des instants optimaux auxquels des actions préventives doivent être entreprises en considérant certains critères de performance comme par exemple le coût de maintenance (à minimiser) ou la disponibilité de l'équipement en question (à maximiser) sur un horizon fini ou infini. Dans certains cas on cherche à minimiser le coût sous contrainte de disponibilité ou bien l'inverse. Dans d'autres cas une optimisation multi-objectifs (coûts, disponibilité) est considérée.

Les politiques et modèles de maintenance proposés dans la littérature se différencient par plusieurs aspects. On distingue essentiellement les facteurs suivants:

- La stratégie de maintenance à appliquer : une grande variété de combinaisons d'actions de maintenance constituant une stratégie peut être envisagée. On peut par exemple considérer une stratégie selon laquelle on effectue seulement des réparations à la panne. On peut aussi envisager de faire des actions de maintenance préventive à des instants prédéterminés ou bien suite à une indication provenant d'un capteur ou d'une autre source, et de faire des actions correctives en cas de pannes. Des actions d'inspection périodiques de l'équipement peuvent également être envisagées dans certains cas, etc.
- La nature des actions de maintenance à entreprendre : parfaite, minimale ou imparfaite.
- La structure du système : monolithique ou multi-composants (selon une structure série, parallèle, stand-by, complexe, etc).
- Système à deux états (fonctionnement, défaillance) ou multi-états (bon, mauvais, défaillance partielle, défaillance totale, ou autres).
- Le type de défaillance du système : locale ou propagée.

- La fonction objective considérée : la minimisation du coût de maintenance ou la maximisation de la disponibilité du système étudié, ceci en présence ou pas de contraintes sur les ressources déployées (ressources humaines, pièces de rechange, outillage, etc.)
- Les hypothèses de travail: celles-ci portent par exemple sur les distributions de probabilité des instants de défaillances des systèmes (distributions connues ou pas), elles portent également sur l'existence de dépendance ou pas, sur les durées des actions de maintenance (négligeables, constantes ou aléatoires), sur l'horizon de temps considéré (fini ou infini), sur la disponibilité des ressources (agents de maintenance, pièces de rechange, outillage, etc).
- La prise en compte simultanée des aspects reliés à la production et/ou à la qualité.
- Enfin, les techniques de résolution et les méthodes d'optimisation : approches numériques, approches analytiques, utilisation d'heuristiques et d'algorithmes de différents types, utilisation de la simulation, etc.

Ces dernières années une attention particulière a été portée aux politiques de maintenance des systèmes multi-composants. **Cho and Parlar (1991)** définissent les modèles de maintenance des systèmes multi-composants comme étant les modèles de maintenance qui s'intéressent à l'étude des stratégies optimales de maintenance pour un système composé de plusieurs unités d'une machine ou de plusieurs pièces d'un équipement, et qui peuvent ou non dépendre les unes des autres (économiquement / stochastiquement / structurellement). Nous reviendrons ci-dessous sur les concepts de dépendance. Pour l'instant, il est important de se rappeler que l'état d'un système dépend de l'état de ces composants. Ces derniers ne fonctionneront que si les actions de maintenance appropriées sont effectuées. Par ailleurs, on considère que le niveau de dégradation est mesurable. Cette variable nous permet de connaître, complètement ou en partie, l'état du système, sa fiabilité et sa disponibilité. La fiabilité et la disponibilité sont deux paramètres significatifs dans l'évaluation des performances des systèmes multi-composants, leurs valeurs dépendent de la structure du système lui-même ainsi de la fiabilité et la disponibilité de chaque composant. La fiabilité et la disponibilité des systèmes sont influencées par les stratégies de maintenance adoptées et par les interactions qui peuvent exister entre les composants et l'environnement de travail.

## - Les concepts de dépendance et leur prise en compte dans les stratégies de maintenance

Les politiques de maintenance à adopter pour des systèmes multi-composants doivent prendre en compte les interactions ou les dépendances qui peuvent exister entre les différents composants. La présence de dépendance entre les composants rend généralement la modélisation et la planification de la maintenance assez complexes. Dans la littérature, on classe ces dépendances sous les formes suivantes : dépendance économique, stochastique ou structurelle (voir **Thomas (1986)** et **Cho and Parlar (1991)**).

### - La dépendance économique

Elle concerne l'influence des actions de maintenance des composants sur les coûts. Cela signifie que maintenir simultanément plusieurs composants coûte moins cher ou nécessite moins de temps que les maintenir séparément. Cette dépendance donne lieu à une économie d'échelle.

Si les différentes actions de maintenance nécessitent l'arrêt du système alors des interventions simultanées des équipes de maintenance peuvent réduire considérablement le temps d'arrêt.

En outre, la maintenance des composants nécessite souvent un travail préparatoire ou un temps de setup qui implique des coûts dus à l'indisponibilité du système chaque fois qu'il est en arrêt pour maintenance. Avec un groupement des activités de maintenance, le coût de setup n'est enregistré qu'une seule fois, d'où l'économie d'échelle.

**Campbell** est le premier auteur à avoir examiné le problème de groupement des activités de maintenance pour une série de lampes d'éclairage sur une route (**Cai and Wen (1990)**). Il cherchait à travers les deux politiques suivantes, celle la plus rentable : La première consiste à ne remplacer les lampes qu'à la panne (stratégie de remplacement à la panne), et la deuxième consiste à les remplacer toutes préventivement à des intervalles réguliers  $T$  et à remplacer les lampes qui briseraient durant chaque intervalle  $T$  (stratégie connue sous le nom de stratégie de type bloc). L'auteur a analysé la performance de chacune des deux approches à l'aide de modèles mathématiques en considérant le coût total de maintenance comme critère de performance.

Par ailleurs, (**Vergin et Scriabin 1977**) ont développé une politique de remplacement de groupe de composants en utilisant la programmation dynamique. La politique est appelée politique  $(n, N)$ , où chaque composant est remplacé s'il a opéré durant  $N$  périodes, et

remplacé avec un groupe de composants, s'il a opéré  $n$  périodes ( $n < N$ ) et si un autre composant est tombé en panne ou atteint ses  $N$  périodes d'opération. Les auteurs supposent des coûts de panne et des taux de défaillance croissants pour tous les composants.

Une autre politique de groupement a été étudiée par **Okumoto et Elsayed (1983)**. Elle consiste à remplacer tous les composants à tous les  $T$  unités de temps. **Wilson et Benmerzouga (1990)** ont développé une autre politique appelée 'm-défaillance' qui consiste à remplacer le système au moment de la  $m^{\text{ième}}$  défaillance. Une politique qui combine les caractéristiques des deux stratégies ci-dessus a été proposée par **Ritchken and Wilson (1990)**. Il s'agit de la politique ( $m, T$ ) qui suggère de remplacer le système au moment de la  $m^{\text{ième}}$  défaillance ou à l'instant  $T$ .

Le travail de **Dekker et Wildman (1997)** porte sur une revue de plusieurs modèles de maintenance de systèmes multi-composants impliquant de la dépendance économique. Ils ont classé les modèles en deux catégories, les modèles stationnaires basés sur des situations stables visant le long terme, et les modèles dynamiques basés sur des informations disponibles à court terme.

Dans ce même contexte de dépendance économique, il existe une autre politique de groupement des actions de maintenance appelée 'stratégie de maintenance opportuniste' (voir **Cho and Parlar (1991)**, **Van der Duyn Schouten and Vanneste(1993)**, **Sheu and Jhang (1996)**, et plus récemment **Gürler and Kaya (2002)**). Ce type de politique est basé sur le même principe stipulant que faire des actions simultanées de maintenance sur différents composants est moins coûteux que de les faire séparément (chaque composant à part). L'objectif est de chercher le moment opportun d'appliquer une maintenance préventive à un nombre particulier de composants (déterminé selon certains critères) du moment qu'un composant est en panne. Cette opportunité peut occasionner un coût supplémentaire moins important en le comparant avec celui correspondant à des remplacements séparés.

**Laggoune et al. (2009)** ont proposé une stratégie de maintenance opportuniste pour des systèmes multi-composants. Les systèmes étudiés sont composés de sous-systèmes en série. Il s'agit dans ce travail de décider des instants des remplacements préventifs de certains composants durant l'arrêt du système pour une maintenance préventive ou corrective de l'un des composants. L'approche proposée a été illustrée par une application sur un compresseur centrifuge d'hydrogène dans une raffinerie de pétrole. Trois modèles de coût ont été développés considérant trois politiques différentes. Dans chaque cas, le plan optimal de remplacement des composants est déterminé.



Enfin, **Nowakowski et Werbinka, (2009)** présentent une revue d'autres modèles de maintenance opportuniste et de groupement.

### - La dépendance structurelle

Ce type de dépendance concerne les systèmes composés de sous-systèmes dont la structure se présente sous forme de blocs. Ce qui signifie que la maintenance d'un composant défaillant implique des actions sur d'autres composants fonctionnels devant être démontés ou réparés. Ainsi, le groupement des activités de maintenance peut s'avérer nécessaire.

La dépendance structurelle est relativement peu étudiée dans la littérature. On retrouve le travail de **Dekker et al. (1998)** qui traite de l'exemple de la maintenance des autoroutes. Dans ce cas, la défaillance d'une partie de l'autoroute nécessitant une intervention des techniciens peut représenter une opportunité pour intervenir sur d'autres parties de la même autoroute. La maintenance d'une partie de l'autoroute implique la maintenance sur d'autres parties, d'où la dépendance structurelle.

Dans un autre travail, **Sasieni (1956)** donne l'exemple d'une machine de production des pneus en caoutchouc. La machine qui produit les pneus se compose de deux vessies. Chaque vessie produit simultanément un pneu. En cas de défaillance de la vessie, la machine doit être démontée avant d'effectuer le remplacement. Cela signifie que l'autre vessie peut être remplacée en même temps. Les deux politiques de maintenance préventive suivantes sont analysées et optimisées :

- (A) Remplacer les vessies après avoir produit un nombre prédéterminé de pneus ( $m$ ) sans défaillance.
- (B) Quand une machine est en arrêt pour effectuer un remplacement d'une vessie, remplacer l'autre vessie si elle a produit un nombre donné de pneus.

En d'autres termes, la dépendance structurelle entre les vessies selon les deux politiques signifie qu'elles sont maintenues de façon dépendante.

### - La dépendance stochastique

Ce type de dépendance est considéré lorsque l'état d'un composant ou sa dégradation peut influencer les états ou les niveaux de dégradation des autres composants. On parle ainsi d'influence de la défaillance d'un composant sur la défaillance de l'autre. Cette influence peut être partielle ou complète. Dans le travail de **Cho et Parlar (1991)**, les auteurs

étudient le cas d'un système constitué par  $N+M$  machines. Les  $N$  machines sont en fonctionnement et les  $M$  autres machines sont en stand-by. Elles ne fonctionnent qu'en cas de défaillance d'une ou de plusieurs autres des  $N$  machines. L'état (la défaillance) d'une machine influe sur l'état des autres machines en stand-by ce qui se traduit par des taux de défaillance dépendants dans le système de production.

La dépendance stochastique est aussi présente s'il y a des causes extérieures au système qui provoquent des défaillances simultanées. On appelle cela la défaillance par cause commune (CCF : Common Cause Failure). Plusieurs travaux ont porté sur cet aspect. Citons par exemple **Sharma et al. (1985)** qui étudient le cas d'un système parallèle à deux composants identiques soumis à des actions de maintenance préventive et à deux types de réparation, soit avec des intervenants réguliers ou avec des occasionnels. Lorsque le réparateur régulier est incapable de réparer le composant/système, les réparateurs occasionnels (experts) sont appelés à les remplacer. Les défaillances sont supposées dépendantes et le système peut également tomber en panne en raison d'une défaillance par cause commune. Les auteurs analysent le système en termes de temps moyen avant la défaillance, de disponibilité, de probabilité que le réparateur soit occupé, du nombre prévu de visites effectuées par le réparateur occasionnel et de bénéfice attendu par l'obtention d'économies potentielles.

Par ailleurs, **Barros et al. (2003)** ont proposé une politique de maintenance préventive pour un système parallèle à deux composants, pour lequel le taux de défaillance d'un composant en fonctionnement se voit augmenté par l'effet de défaillance de l'autre composant, d'où la dépendance stochastique. Les défaillances sont détectées avec une probabilité donnée (considérant des situations de non-détection). De plus, les composants sont soumis à des chocs extérieurs qui arrivent selon un processus de Poisson. La politique de remplacement adoptée est une politique de groupement. Le critère de performance étant le coût total moyen de maintenance par unité de temps sur un horizon infini.

**Lai et Chen (2006)** ont proposé un modèle de remplacement périodique pour un système à deux unités soumises à des interactions de type stochastique au niveau des taux de panne. En effet, la défaillance de l'unité 1 peut augmenter, d'un certain degré, le taux de défaillance de l'unité 2 avec laquelle elle interagit. La politique adoptée est une politique de remplacement de type âge, qui consiste à remplacer les deux unités à un âge  $T$  ou en cas de panne. Les auteurs déterminent l'âge optimal de remplacement des deux unités en minimisant le coût total moyen de maintenance par unité de temps.

Enfin, il est important de noter qu'en étudiant les travaux sur les stratégies de maintenance de systèmes multi-composants, on se rend compte que l'un des défis majeurs réside dans l'évaluation de la fiabilité de ces systèmes en présence de dépendance stochastique. Certains chercheurs travaillent sur cet aspect sur lequel nous reviendrons plus en détail plus tard dans le chapitre 2 portant sur la maintenance sélective. Pour l'instant, citons par exemple le travail de **Levitin (2003)** qui a appliqué le principe de la fonction génératrice universelle (FGU) dans son évaluation de la fiabilité d'un système série-parallèle multi-états en présence de deux types de défaillance, locale et à causes communes. Dans le deuxième type, certaines défaillances sont propagées au niveau d'autres composants du système engendrant une augmentation de leur probabilité de défaillance.

Il est intéressant de noter enfin que **Cho et Parlar (1991)**, **Van der Duyn Schouten (1996)**, **Dekker et al. (1997)**, **Wang (2002)** et plus récemment **Nicolai et Dekker (2006)** présentent des revues de plusieurs politiques de maintenance des systèmes multi-composants impliquant les trois types de dépendance.

### - **L'objectif général et les problématiques spécifiques de la thèse**

Cette thèse a pour objectif général le développement et l'optimisation de nouvelles stratégies de maintenance pour des systèmes multi-composants. Nous venons de décrire plus haut les trois types de dépendance pouvant exister dans un système multi-composants. Nous avons montré, en pointant certains travaux pertinents dans la littérature, que la définition et le traitement de stratégies de maintenance à adopter pour de tels systèmes dépendent étroitement des types de dépendance existants.

Trois contributions sont visées dans cette thèse. Elles portent sur trois problématiques de maintenance différentes qui considèrent toutes des systèmes multi-composants avec dépendance et qui se présentent comme suit :

- La première problématique fera l'objet du chapitre 1. Elle porte sur un type particulier d'équipements dont l'état ne peut être connu que suite à une inspection. Des équipements de ce type constitués de deux composants en série seront considérés. Une nouvelle stratégie quasi-optimale de maintenance conditionnelle basée sur des inspections séquentielles des deux composants sera proposée. Un modèle mathématique correspondant à cette stratégie sera développé et une procédure

numérique permettant de générer une séquence quasi-optimale des instants d'inspection des composants sera élaborée et testée.

- La seconde problématique sera traitée dans le chapitre 2. On considèrera des systèmes multi-composants complexes dans le sens où leurs composants peuvent être sujets à des défaillances aléatoires locales et/ou propagées avec ou sans effet d'isolation. Une stratégie de maintenance sélective sera proposée pour ce type de systèmes. Il s'agit de déterminer les composants à remplacer durant les périodes d'arrêt pour maintenance séparant les missions consécutives de tels équipements, de façon à minimiser le coût total de maintenance tout en garantissant un niveau minimal de fiabilité pour la prochaine mission et en respectant le temps d'arrêt planifié pour la maintenance.
- Pour la troisième problématique faisant l'objet du chapitre 3, la notion de systèmes multi-composants est élargie aux systèmes de production multi-lignes. Dans cette perspective, nous développerons une politique intégrée de maintenance-production pour un système de production à deux lignes fonctionnant en parallèle en présence d'une forme de dépendance impliquant le fait que lorsque la première ligne tombe en panne, la charge est transférée vers la deuxième impliquant une accélération de l'usure de cette dernière. L'objectif étant d'optimiser séquentiellement le plan de production du système et la période de maintenance préventive de la ligne 2.

Le lecteur remarquera que dans chacun des chapitres 1 à 3 nous avons adopté le même plan de rédaction, soit – résumé - introduction - définition et hypothèses de travail - modèle mathématique - résultats numériques - conclusion. Cette démarche a pour but d'uniformiser la présentation de chacune des contributions. On ne retrouvera pas une section ou un chapitre faisant état d'une revue exhaustive de la littérature sur le sujet. Les références sur lesquelles nous nous sommes basées seront citées et détaillées au besoin au fur et à mesure qu'on avance dans le texte et qu'on traite de nouveaux problèmes spécifiques. Les apports spécifiques de chacune des contributions par rapport à la littérature seront précisés au niveau de chaque chapitre.

La dernière partie de cette thèse sera dédiée à la conclusion générale qui reprendra les grandes lignes de nos travaux et qui dégagera des perspectives futures de recherche.

---

---

*Chapitre I : Stratégie de  
maintenance conditionnelle pour un  
système série à deux composants*

---

---

# Stratégie de maintenance conditionnelle pour un système série à deux composants

## Résumé

*Ce chapitre porte sur le développement d'une politique de maintenance conditionnelle pour un système série constitué de deux composants sujets à une dégradation progressive et dont les défaillances ne peuvent être connues que suite à une inspection (défaillances dites de type 'Non-Self Announcing'). Une inspection consiste à mesurer un paramètre de contrôle pour chaque composant et à comparer les valeurs mesurées avec un niveau correspondant de seuil d'alerte prédéfini. À ce stade, une décision de maintenance devrait être prise sur la base des résultats de l'inspection de chaque composant. Un modèle mathématique ainsi qu'une procédure numérique sont développés afin de générer une séquence quasi-optimale des instants d'inspection du système considérant le coût total moyen de maintenance par unité de temps sur un horizon infini comme critère de performance. Un exemple numérique est traité. Les résultats sont présentés et discutés.*

### 1.1. Introduction

Certaines politiques de maintenance préventive consistent à déterminer l'état du système ou son niveau de dégradation à des instants donnés afin de prendre les décisions adéquates en termes d'actions de maintenance à entreprendre. On parle alors de maintenance préventive conditionnelle. Contrairement à la maintenance systématique qui est effectuée périodiquement selon un échéancier (tous les T unités de temps) ou selon des unités d'usage (tous les N kms parcourus ou autres) sans contrôle préalable de l'état ou la dégradation de l'équipement, la maintenance conditionnelle est effectuée suivant l'appréciation de l'évolution de l'usure ou de la détérioration de l'équipement. On peut l'appliquer lorsqu'on est capable d'identifier et de suivre l'évolution d'un paramètre mesurable significatif de l'usure (température, épaisseur, pression, etc.). Une alarme déclenche l'intervention lorsqu'un seuil d'alerte est atteint par le paramètre suivi.

En général, l'état de dégradation du système est connu soit en continu, soit suite à des inspections qui peuvent être périodiques ou non. Une variété d'équipements tels que les systèmes de production en stand-by et les systèmes d'alarme et de détection ne présentent pas de symptômes apparents indiquant un état de défaillance. Les défaillances dans ce cas sont appelées dans la littérature 'Non-Self-Announcing Failures'. Ces équipements présentant de telles défaillances doivent être inspectés afin de déterminer leur état ou pour évaluer leur niveau de dégradation pour ensuite prendre les décisions appropriées en termes d'actions de maintenance à entreprendre.

En général, les inspections consistent soit à évaluer si le matériel fonctionne ou s'il est en état de défaillance (*inspection directe*) ou à mesurer les paramètres de contrôle prédéterminés et ensuite comparer les valeurs mesurées à des seuils prédéfinis (*inspection indirecte*) afin d'évaluer l'état de l'équipement et, éventuellement, prendre des mesures préventives avant l'apparition des défaillances.

Dans le cas d'une *inspection directe*, étant donné que la défaillance ne peut être détectée qu'à la suite d'une inspection, le système peut rester en état de défaillance durant la période entre l'apparition de la défaillance et sa détection. Cette période d'inactivité peut entraîner des pertes importantes. D'autre part, chaque inspection implique un certain coût et une certaine durée. Par conséquent, il est essentiel de déterminer la séquence des instants d'inspection qui optimise des critères de performance choisis, comme le coût total moyen de maintenance ou la disponibilité du système sur une période de temps donnée (**Barlow et Porschan, 1965**).

Dans le cas d'*inspections indirectes*, le but est généralement de déterminer la séquence optimale des instants d'inspection suivant un seuil d'alerte donné, ou inversement, d'optimiser le niveau du seuil d'alerte pour des instants d'inspections prédéterminés. Une autre approche qui est largement utilisée consiste à modéliser la durée de vie résiduelle du système quand le seuil d'alerte est atteint, puis d'utiliser ce modèle dans un modèle économique en prenant en compte les coûts de maintenance.

Dans (**Chelbi et Ait-Kadi, 2009**), les auteurs classent les modèles de maintenance basés sur des inspections suivant un nombre de facteurs. Les plus importants sont les suivants:

- ❖ L'effet de l'inspection sur l'équipement en question (si oui ou non les inspections affectent le processus de détérioration du système).
- ❖ La qualité de l'inspection (si oui ou non les inspections peuvent donner des résultats erronés, autrement dit, les inspections sont dites parfaites ou imparfaites).
- ❖ La fréquence des inspections (les inspections sont périodiques ou non périodiques).
- ❖ La séquence d'inspection (modèle dynamique pour lequel la date de la prochaine inspection est fixée selon le résultat de l'inspection en cours, ou bien un modèle stationnaire pour lequel la séquence des instants des inspections est définie dès le départ sur un horizon infini).
- ❖ La structure de l'équipement (composant unique ou un système multi-composants).
- ❖ Le type de détection de la défaillance du système (seulement des défaillances de type 'non-self-announcing', ou l'existence de défaillances de type 'self-announcing' et de type 'non-self-announcing').
- ❖ Le critère de performance adopté (coût total moyen par unité de temps, la disponibilité du système ou sa fiabilité, etc.).

Plusieurs travaux ont porté exclusivement sur des systèmes à un seul composant présentant seulement des défaillances de type 'non-self announcing' comme par exemple ((**Nakagawa et Yasui, 1980**), (**Chelbi et Ait-Kadi, 2000**), (**Nakagawa et Yasui, 1991**), (**Nakagawa, 2005**)). Ces travaux cherchent à déterminer des périodes ou séquences d'instants d'inspection optimales ou quasi-optimales, en combinaison avec des remplacements préventifs ou correctifs.

Certains auteurs comme (**Gertsbakh, 1977**), (**Badia et al., 2002**), (**Chelbi et al., 2008**) et (**Baohe, 2002**) ont travaillé sur les systèmes à un composant dont les défaillances sont parfois de type 'self-announcing' et parfois 'non-self-announcing' comme par exemple les systèmes



productifs qui alternent des périodes de fonctionnement (durant lesquelles on peut se rendre compte de la défaillance ‘self announcing’) et des périodes d'inactivité (durant lesquelles le système peut devenir défaillant et qu'on ne s'en rend pas compte avant la prochaine inspection).

Par ailleurs, les inspections imparfaites causant des fausses alarmes ou des défaillances non détectées ont également été prises en considération dans plusieurs ouvrages. Citons par exemple les travaux de ((**Bukowski, 2001**), (**Gertsbakh, 2000**), (**Badia et al., 2002**)).

Les situations où les inspections ont le potentiel d'accentuer la détérioration du système ont été abordées par d'autres auteurs comme (**Wattanapanom et Shaw, 1976**), (**Chung-Kuang et Butler, 1983**), (**Chelbi et Ait-Kadi, 1998**), et (**Dieulle, 2002**).

Plus récemment, (**Golmakani et Fattahipour, 2011**) ont étudié l'effet des intervalles d'inspection sur le coût. Les auteurs proposent un plan d'inspection basé sur l'âge du système constitué par un seul composant. Leur modèle est basé sur l'utilisation de la politique de limite de contrôle développée par (**Makis et Jardine, 1992**) pour déterminer le seuil de remplacement optimal du système.

### 1.1.1 Les modèles d'inspection de systèmes multi-composants

Les politiques d'inspection deviennent beaucoup plus complexes si on considère les systèmes multi-composants avec des dépendances. En effet, s'il existe une interaction entre les composants d'un système selon des dépendances économiques, stochastiques ou structurelles, la stratégie optimale pour un système à un seul composant n'est pas nécessairement une stratégie optimale pour l'ensemble du système. Ceci est montré dans certains travaux comme ceux de (**Vaurio, 1999**), (**Zequeira et Bérunguer, 2004**) et (**Castanier et al., 2005**).

Dans le cadre de la maintenance conditionnelle en présence de dépendance économique, (**Castanier et al., 2005**) considèrent un système série à deux composants. Chaque composant est soumis à une séquence d'inspection. Les actions de maintenance consistent en des remplacements préventifs ou des remplacements à la panne par des composants identiques neufs (as good as new). Chaque inspection ou remplacement implique un coût de setup et un coût spécifique à chaque composant. Si une maintenance est appliquée sur les deux composants simultanément alors le coût de setup n'est compté qu'une seule fois d'où la dépendance économique. Contrairement aux politiques d'inspection périodique, la politique proposée par ces auteurs consiste à déterminer des instants d'inspections non-périodiques (l'intervalle entre deux inspections consécutives n'est pas constant). Un modèle stochastique

est développé sur la base des propriétés semi-régénératives de l'état du système maintenu. Les auteurs ont développé un modèle mathématique pour fournir un cadre décisionnel pour une coordination optimale des actions d'inspection et de remplacement, basé sur le principe des seuils multiples adopté par **(Grall et al., 2002)** dans le cas de systèmes à un composant et étudié dans **Castanier (2002)** pour le cas des systèmes multi-composants. L'objectif principal est d'optimiser les valeurs des niveaux de seuil d'alerte associés à chaque composant en minimisant le coût total moyen par unité de temps sur un horizon infini. Dans ce travail de **(Castanier et al., 2005)**, les instants des inspections ne sont pas connus à l'avance. La procédure est dynamique, elle consiste à déterminer l'instant d'inspection  $x_{k+1}$  en se basant sur des observations de l'état du système à l'instant  $x_k$ .

Un autre travail dans le même contexte de dépendance économique a été proposé dans **Scarf et Cavalcante (2010)**. L'apport essentiel de ce travail réside dans la proposition de stratégies de maintenance hybrides (impliquant des inspections et des remplacements sur différentes phases) s'appliquant à des systèmes multi-composants. Les politiques étudiées sont à la base d'une politique de type bloc hybride, qui consiste à des remplacements à la panne et des remplacements préventifs périodiques, et des inspections basés sur l'âge. Les composants sont supposés hétérogènes issus d'une population mélangée de composants faibles et forts (rigides). Dans ces conditions, les politiques comprennent une phase d'inspection initiale et une phase ultérieure sans inspection. Le but de la phase d'inspection est de prévenir les défaillances précoces dues aux composants faibles. Le système étudié est un système formé par  $n$  composants en série. Les durées de vie des composants sont stochastiquement indépendantes. Le but de la maintenance est double : réduire les coûts et prévenir la défaillance de la fonction opérationnelle.

**(Koochaki et al. 2011)** ont étudié l'efficacité d'une politique de maintenance conditionnelle dans une chaîne de production constituée par deux systèmes. Ils ont développé un modèle de simulation pour étudier l'effet d'une telle politique sur l'efficacité de la ligne de production, notamment en termes de blocage du système et d'états de pénurie. Ils ont comparé la politique de maintenance conditionnelle avec des politiques de remplacement classiques de type bloc et de type âge en utilisant un indicateur de performance global.

**Duffuaa et Khan (2008)** ont traité de l'imperfection des inspections. L'objectif de cette étude est de déterminer le plan d'inspection optimal pour des composants critiques d'un système multi-composants dont les caractéristiques de défaillance dépendent les unes des

autres (dépendance stochastique). Un élément est dit critique s'il provoque une catastrophe ou un coût très élevé en cas de défaillance. Ces composants peuvent être une partie d'un aéronef, d'une navette spatiale, d'un système de navette spatiale ou un système complexe d'allumage de gaz. Pour les composants critiques, une pratique courante dans l'industrie est de multiplier les inspections en raison de son imperfection.

Toujours dans le même contexte de dépendance stochastique, **Golmakani et Moakedi (2012)** ont considéré le cas d'un système multi-composants pour lequel ils considèrent deux types de composants. Le premier type est un type de composants dont la défaillance est sévère dans le sens où elle provoque lors de son occurrence des chocs qui influent sur les autres composants en augmentant leur taux de défaillance. Le deuxième type comprend les composants dont les défaillances sont dites faibles ou à portée limitée (elles n'influent pas sur les autres composants). Dès qu'une défaillance de type sévère est détectée au niveau d'un composant, ce dernier est réparé. Les autres composants avec des défaillances faibles sont inspectés périodiquement et simultanément, et ils sont réparés en cas de défaillance. L'objectif principal de ce travail est de déterminer les intervalles optimaux d'inspection pour les composants dont les défaillances sont faibles, ceci en minimisant le coût total moyen de maintenance sur un horizon infini.

Les mêmes auteurs dans **Golmakani et Moakedi (2013)** ont par la suite étudié le même problème de dépendance stochastique entre les composants mais en appliquant cette fois une politique d'inspections non-périodiques. Le plan d'inspection optimal est déterminé en se basant sur un algorithme performant et des heuristiques de recherche de solutions.

Dans le présent travail, comme dans **(Castanier et al., 2005)**, nous considérons un système série à deux composants et nous nous plaçons dans le même contexte de maintenance conditionnelle avec un modèle de maintenance dans la classe des politiques de limites de contrôle pour la décision de maintenance qui se prend par comparaison du niveau de dégradation à des seuils critiques. Cependant, nous proposons une approche différente avec un modèle stationnaire qui permet de générer un planning quasi-optimal d'inspection qui sera connu d'avance et non pas déterminé d'une manière dynamique comme dans **(Castanier et al., 2005)**. Une telle approche a été adoptée par **(Chelbi et Ait-Kadi, 1999)** pour des systèmes à un seul composant.

Dans la section suivante nous définirons la stratégie et nous établirons les hypothèses de travail. Le reste du chapitre sera dédié au développement du modèle mathématique

correspondant et d'une procédure numérique permettant de générer une séquence d'instantanés d'inspection quasi-optimale. Enfin, un exemple numérique sera présenté et les résultats seront discutés.

### 1.2. Définition de la stratégie et hypothèses de travail

#### 1.2.1. Définition de la stratégie

Nous considérons un système constitué de deux composants en série dont les défaillances sont de type 'Non-Self Announcing' (elles ne peuvent être détectées que suite à une inspection).

Chaque composant est sujet à une dégradation progressive dont le niveau est évalué par inspection qui consiste à effectuer des mesures d'un paramètre de contrôle dont l'évolution au cours du temps est étroitement liée au processus de dégradation des composants.

Les deux composants sont inspectés simultanément. Au cas où la valeur mesurée du paramètre de contrôle associé à un des composants lors d'une inspection se trouve au-delà du niveau prédéfini du seuil correspondant ( $S_i$ ,  $i = 1$  ou  $2$ ), un remplacement par un composant identique neuf est effectué (remplacement préventif). Si le composant se trouve dans un état de défaillance, il est remplacé par un autre identique neuf (remplacement correctif). Le remplacement des deux composants en même temps (remplacement du système) se produit au cas où l'inspection révèle que les deux niveaux de seuil  $S_1$  et  $S_2$  ont été dépassés, ou bien que l'un des deux composants est défaillant et le niveau du seuil de l'autre a été dépassé.

#### 1.2.2. Hypothèses de travail

Les hypothèses suivantes sont prises en compte :

- ❖ Les durées de toutes les actions de maintenance sont supposées être négligeables.
- ❖ Les inspections sont parfaites et elles n'affectent pas l'état des composants.
- ❖ La défaillance d'un composant conduit à la défaillance globale du système (système série).
- ❖ Les défaillances des composants sont stochastiquement indépendantes et elles ne se produisent jamais avant que la valeur seuil du paramètre de contrôle correspondant ne soit dépassée.
- ❖ Les composants ne peuvent pas tomber en panne en même temps.

- ❖ Le coût de setup est encouru une seule fois lorsque les deux composants sont remplacés en même temps.
- ❖ Tous les coûts associés aux actions de maintenance (inspections et remplacements préventifs et correctifs) sont connus et constants.

La section suivante présente le modèle mathématique exprimant le coût total moyen de maintenance par unité de temps.

### 1.3. Modèle mathématique

#### 1.3.1. Notations

Les notations suivantes sont utilisées:

- $S_1$  Le niveau prédéfini du seuil d'alerte correspondant au paramètre de contrôle du composant 1.
- $S_2$  Le niveau prédéfini du seuil d'alerte correspondant au paramètre de contrôle du composant 2.
- $C_{ij}$  Le coût d'inspection du composant  $j$  ( $j=1, 2$ ).
- $C_s$  Le coût de setup pour le remplacement des composants.
- $C_{gj}$  Le coût de remplacement du composant défaillant  $j$  ( $j=1, 2$ ).
- $C_{pj}$  Le coût de remplacement préventif du composant  $j$  ( $j=1, 2$ ).
- $C_d$  Le coût encouru pour chaque unité de temps d'inactivité du système.
- $X_i$  Les instants d'inspection ( $i=1, 2, \dots$ ) qui représentent les variables de décision.  $X_0 = 0$ .
- $A_1^i$  La durée moyenne d'inactivité entre l'instant de défaillance du système et le prochain instant d'inspection dans le cas où la défaillance est causée par le bris du composant 1 et quand le système est renouvelé.
- $A_2^i$  La durée moyenne d'inactivité entre l'instant de défaillance du système et le prochain instant d'inspection dans le cas où la défaillance est causée par le bris du composant 2 et quand le système est renouvelé.
- $I_1$  La durée moyenne d'inactivité du système due au bris du composant 1 durant l'intervalle de temps  $[0, X_{i-1}]$ .

- $I_2$  La durée moyenne d'inactivité du système due au bris du composant 2 durant l'intervalle de temps  $[0, X_{i-1}]$ .
- $E(I)$  Le nombre moyen d'inspections durant un cycle de remplacement du système (remplacement des deux composants).
- $E(C)$  Le coût total moyen de maintenance durant un cycle de remplacement du système.
- $E(T)$  La durée moyenne d'un cycle de remplacement du système.
- $p_j$  La probabilité conditionnelle que le seuil d'alerte  $S_j$  ( $j=1,2$ ) du composant  $j$  soit dépassé dans l'intervalle  $[X_{i-1}, X_i]$  sachant qu'à l'instant  $X_{i-1}$ , la valeur mesurée du paramètre de contrôle du composant  $j$  est trouvée sous le niveau du seuil d'alerte.
- $\tau_j$  La variable aléatoire associée à la durée de vie du composant  $j$  ( $j=1, 2$ ) avant que le seuil  $S_j$  ne soit franchi.
- $t_j$  La variable aléatoire associée à la durée de vie résiduelle une fois le seuil  $S_j$  franchi jusqu'à la défaillance du composant  $j$  ( $j=1,2$ ).
- $\zeta_j(\cdot)$  La fonction de densité de probabilité associée à la variable aléatoire  $\tau_j$  ( $j=1, 2$ ).
- $f_j(\cdot)$  La fonction de densité de probabilité associée à la variable aléatoire  $t_j$  ( $j=1, 2$ ).
- $\Phi_j(\cdot)$  La fonction de distribution de probabilité associée à la variable aléatoire  $\tau_j$  ( $j=1, 2$ ).  $\Phi_j^{-1}$  ( $j=1, 2$ ) existe.
- $F_j(\cdot)$  La fonction de distribution de probabilité associée à la variable aléatoire  $t_j$  ( $j=1, 2$ ).

### 1.3.2. Modélisation mathématique de la stratégie

#### ❖ *Expression du coût total moyen de maintenance par unité de temps sur un horizon infini*

Un cycle de remplacement est l'intervalle de temps entre des remplacements consécutifs du système (les remplacements des deux composants en même temps). Rappelons que selon la stratégie proposée, les deux composants sont remplacés en même temps dans le cas où le résultat de l'inspection révèle le dépassement des deux seuils  $S_1$  et  $S_2$ , ou la défaillance d'un composant et le dépassement du niveau de seuil de l'autre.

Puisque nous sommes en présence d'un cycle de renouvellement du système, en utilisant la théorie du renouvellement (**Barlow et Proschan, 1965**), le coût total moyen de maintenance par unité de temps sur un horizon infini,  $E(AC)$ , peut être exprimé comme suit:

$$E(AC) = \frac{E(C)}{E(T)} \quad (\text{I.1})$$

Où  $E(C)$  est le coût total moyen encouru durant un cycle de renouvellement du système qui englobe les coûts d'inspection, les coûts des remplacements préventifs et correctifs, les coûts associés à l'inactivité et les coûts de setup.

Pour pouvoir déterminer l'expression du coût total moyen de maintenance  $E(C)$ , les trois scénarios possibles de fin de cycle décrits ci-dessous (SC1), (SC2) et (SC3) doivent être considérés par rapport à l'état observé de chacun des composants 1 et 2 à l'instant d'inspection  $X_i$  auquel un cycle de remplacement se termine (renouvellement des 2 composants). Les 3 scénarios possibles se traduisant par un remplacement des deux composants (remplacement du système) sont les suivants :

▪ **Scenario (SC1)**

Ce scénario indique qu'à l'instant d'inspection  $X_i$ , le cycle de remplacement se termine avec:

- $S_1$  ayant été dépassé durant l'intervalle de temps  $[X_{i-1}, X_i]$  et le composant 1 se trouve en état de défaillance.
- $S_2$  ayant été dépassé dans le même intervalle avec le composant 2 trouvé en état de fonctionnement.

*Le système est donc à l'arrêt (présence d'inactivité durant le cycle).* Suite à l'occurrence de ce scénario, les actions de maintenance sont les suivants : remplacement correctif du composant 1 et remplacement préventif du composant 2.

▪ **Scenario (SC2)**

Ce scénario indique qu'à l'instant  $X_i$ , le cycle de remplacement se termine avec:

- $S_1$  ayant été dépassé pendant l'intervalle de temps  $[X_{i-1}, X_i]$  et le composant 1 se trouve en état de fonctionnement.

- $S_2$  ayant été dépassé dans le même intervalle et le composant 2 se trouve dans un état de défaillance.

Le système est à l'arrêt (présence d'inactivité durant le cycle). Les actions de maintenance à effectuer dans ce cas sont : remplacement correctif du composant 2 et remplacement préventif du composant 1.

### ▪ Scenario (SC3)

Ce scénario indique qu'à l'instant  $X_i$ , le cycle de remplacement se termine avec:

- Les deux seuils  $S_1$  et  $S_2$  dépassés dans l'intervalle de temps  $[X_{i-1}, X_i]$ .
- Les deux composantes 1 et 2 en état de fonctionnement.

Le système fonctionne. Les actions de maintenance consisteront à remplacer préventivement les deux composants 1 et 2.

Nous développons dans ce qui suit les expressions du coût total moyen de maintenance pour chacun de ces trois scénarios:  $C(SC1)$ ,  $C(SC2)$  et  $C(SC3)$ .

Le coût total moyen de maintenance encouru le long d'un cycle de remplacement du système est exprimé par la somme de ces trois coûts comme suit:

$$E(C) = C(SC1) + C(SC2) + C(SC3) \quad \text{(I.2)}$$

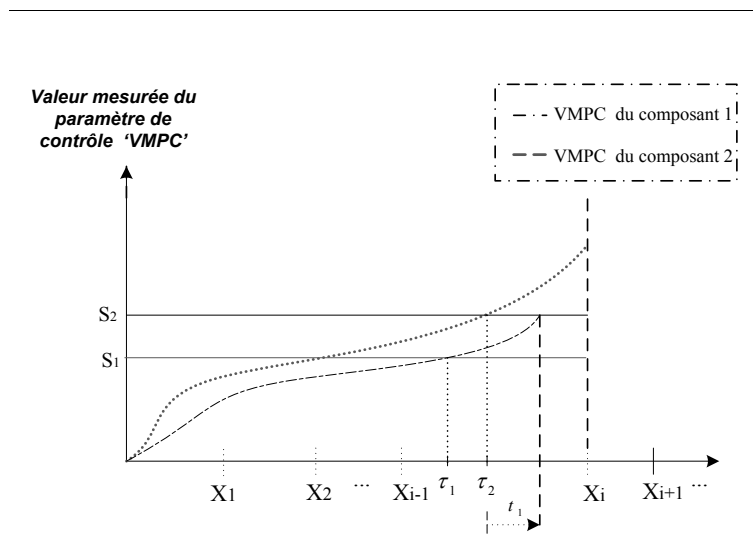
Pour un intervalle donné  $[X_{i-1}, X_i]$  à la fin duquel un cycle de remplacement se termine, on note  $P^i(SC1)$ ,  $P^i(SC2)$ ,  $P^i(SC3)$  respectivement la probabilité d'occurrence de chaque scénario de fin de cycle à l'instant  $X_i$ , SC1, SC2 et SC3. Il faudra évidemment tenir compte de ces probabilités pour calculer le coût total moyen  $E(C)$  donné par l'équation **I.2** ci-dessus.

### ❖ *Expression de la probabilité d'occurrence du scénario SC1 : $P^i(SC1)$*

Pour calculer la probabilité d'occurrence de ce scénario, deux cas possibles sont distingués :

$\tau_2 > \tau_1$  et  $\tau_2 < \tau_1$ . Ces deux cas sont représentés par les figures ci-dessous (voir *fig. I.1* et **I.2**).

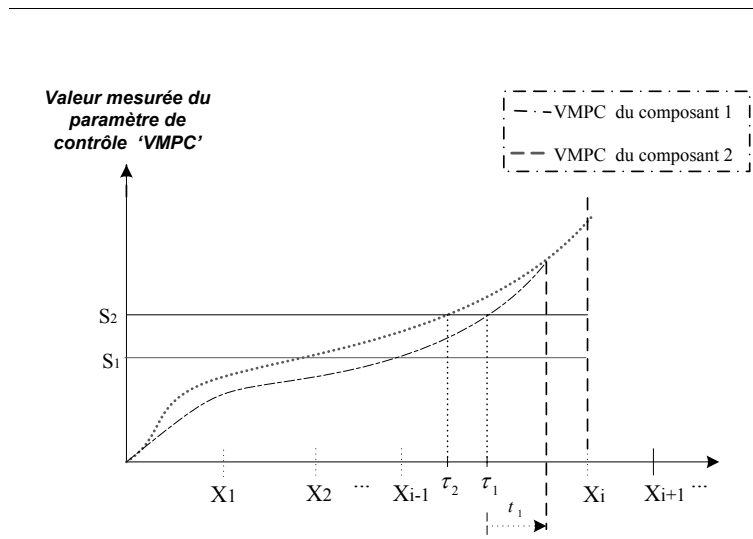




**Figure I.1 :** L'évolution du paramètre de contrôle de chaque composant avec le temps : cas  $\tau_2 > \tau_1$  dans le scenario SC1.

- **Pour le premier cas**  $\tau_2 > \tau_1$  : la probabilité du scenario SC1 est donnée par la fonction suivante :

$$P^i(SC1) = \frac{\int_{X_{i-1}}^{X_i} \int_{\tau_1}^{X_i - X_i} \zeta_1(\tau_1) \cdot F_1(X_i - \tau_2) \cdot \zeta_2(\tau_2) \cdot (1 - F_2(X_i - \tau_2)) d\tau_2 d\tau_1}{(1 - \Phi_1(X_{i-1})) \cdot (1 - \Phi_2(X_{i-1}))} \quad (L3)$$



**Figure I.2 :** L'évolution du paramètre de contrôle de chaque composant avec le temps: cas  $\tau_2 < \tau_1$  dans le scenario SC1.

- **Pour le deuxième cas**  $\tau_2 < \tau_1$  : la probabilité du scenario SC1 est donnée par :

$$P^i(SC1) = \frac{\int_{X_{i-1}}^{X_i} \int_{\tau_2}^{X_i} \zeta_1(\tau_1) \cdot F_1(X_i - \tau_1) \cdot \zeta_2(\tau_2) \cdot (1 - F_2(X_i - \tau_2)) d\tau_1 d\tau_2}{(1 - \Phi_1(X_{i-1})) \cdot (1 - \Phi_2(X_{i-1}))} \quad (I.4)$$

Ainsi, selon ces deux cas, qui sont mutuellement exclusifs, la probabilité d'occurrence du scénario SC1 est finalement donnée par :

$$P^i(SC1) = \frac{\int_{X_{i-1}}^{X_i} \int_{\tau_1}^{X_i} \zeta_1(\tau_1) \cdot F_1(X_i - \tau_2) \cdot \zeta_2(\tau_2) \cdot (1 - F_2(X_i - \tau_2)) d\tau_2 d\tau_1 + \int_{X_{i-1}}^{X_i} \int_{\tau_2}^{X_i} \zeta_1(\tau_1) \cdot F_1(X_i - \tau_1) \cdot \zeta_2(\tau_2) \cdot (1 - F_2(X_i - \tau_2)) d\tau_1 d\tau_2}{(1 - \Phi_1(X_{i-1})) \cdot (1 - \Phi_2(X_{i-1}))} \quad (I.5)$$

Toujours dans le même scénario, l'inactivité moyenne du système correspond à l'intervalle de temps  $(X_i - (\tau_1 + t_1))$  assorti de la probabilité d'occurrence du scénario durant le dernier intervalle d'inspection  $[X_{i-1}, X_i]$ . Elle est donnée par la formule suivante:

$$A_i^i = \frac{\int_{X_{i-1}}^{X_i} \int_{\tau_1}^{X_i} \zeta_1(\tau_1) \cdot (X_i - (\tau_1 + t_1)) \cdot F_1(X_i - \tau_2) \cdot \zeta_2(\tau_2) \cdot (1 - F_2(X_i - \tau_2)) d\tau_2 d\tau_1 + \int_{X_{i-1}}^{X_i} \int_{\tau_2}^{X_i} \zeta_1(\tau_1) \cdot (X_i - (\tau_1 + t_1)) \cdot F_1(X_i - \tau_1) \cdot \zeta_2(\tau_2) \cdot (1 - F_2(X_i - \tau_2)) d\tau_1 d\tau_2}{(1 - \Phi_1(X_{i-1})) \cdot (1 - \Phi_2(X_{i-1}))} \quad (I.6)$$

❖ **Expression du coût total de maintenance  $C(SC1)$  correspondant au scénario SC1**

Ce coût est exprimé par la somme des coûts moyens relatifs à :

- Les coûts d'inspection des deux composants  $(C_{i1} + C_{i2})$  le long du cycle aux instants  $X_k$  ( $k = 1, 2, 3 \dots i-1, i$ ).
- Les coûts de remplacement correctif du composant 1  $(C_{g1})$  et de remplacement préventif du composant 2  $(C_{p2})$  suite à la dernière inspection à l'instant  $X_i$ . Ainsi que le coût de setup  $C_s$ .

- Le coût d'inactivité du système entre l'instant de sa défaillance (due à la défaillance du composant 1) et l'instant  $X_i$  de son renouvellement ( $C_d \cdot A_i^i$ ).
- Les coûts de remplacement correctif ou préventif qui peuvent avoir lieu pour chacun des composants lors des inspections précédant  $X_i$ , c'est-à-dire lors des instants  $X_k$  ( $k = 1, 2, 3 \dots i-1$ ). Ainsi que les coûts d'inactivité dans le cas où il y a défaillance de l'un des composants durant l'un des intervalles ( $X_{k-1}, X_k$ ) ( $k = 1, 2, 3 \dots i-1$ ).

Avant la fin d'un cycle de remplacement à  $X_i$ , à chacun des instants d'inspection précédents  $X_k$  ( $k = 1, 2, 3 \dots i-1$ ), l'une des cinq situations suivantes peut se produire.

Les coûts associés à chacune de ces situations sont exprimés ci-dessous en tenant compte respectivement de leur probabilité d'occurrence.

- (1) Remplacement correctif du composant 1 induisant un coût lié au remplacement et à l'inactivité du système :

$$(C_{g1} + C_d \cdot I_1 + C_s) \times \left( \sum_{k=1}^{i-1} \frac{\int_{X_{k-1}}^{X_k} \zeta_1(\tau_1) \cdot F_1(X_k - \tau_1) d\tau_1}{(1 - \Phi_1(X_{k-1}))} \cdot (1 - \Phi_2(X_k)) \right) \quad (1.7)$$

- (2) Remplacement correctif du composant 2 induisant un coût lié au remplacement et à l'inactivité système :

$$(C_{g2} + C_d \cdot I_2 + C_s) \times \left( \sum_{k=1}^{i-1} \frac{\int_{X_{k-1}}^{X_k} \zeta_2(\tau_2) \cdot F_2(X_k - \tau_2) d\tau_2}{(1 - \Phi_2(X_{k-1}))} \cdot (1 - \Phi_1(X_k)) \right) \quad (1.8)$$

- (3) Remplacement préventif du composant 1 coûtant:

$$(C_{p1} + C_s) \times \left( \sum_{k=1}^{i-1} \frac{\int_{X_{k-1}}^{X_k} \zeta_1(\tau_1) \cdot (1 - F_1(X_k - \tau_1)) d\tau_1}{(1 - \Phi_1(X_{k-1}))} \cdot (1 - \Phi_2(X_k)) \right) \quad (1.9)$$

- (4) Remplacement préventif du composant 2 coûtant:

$$(C_{p2} + C_s) \times \left( \sum_{k=1}^{i-1} \frac{\int_{X_{k-1}}^{X_k} \zeta_2(\tau_1) \cdot (1 - F_2(X_k - \tau_2)) d\tau_2}{(1 - \Phi_2(X_{k-1}))} \cdot (1 - \Phi_1(X_k)) \right) \quad (\text{I.10})$$

(5) Aucun remplacement n'est effectué (coût égal à 0): Cette situation se produit lorsqu'aucun des seuils n'est atteint jusqu'à l'instant  $X_{i-1}$

$$0 \times \sum_{k=1}^{i-1} ((1 - \Phi_1(X_k)) \cdot (1 - \Phi_2(X_k))) \quad (\text{I.11})$$

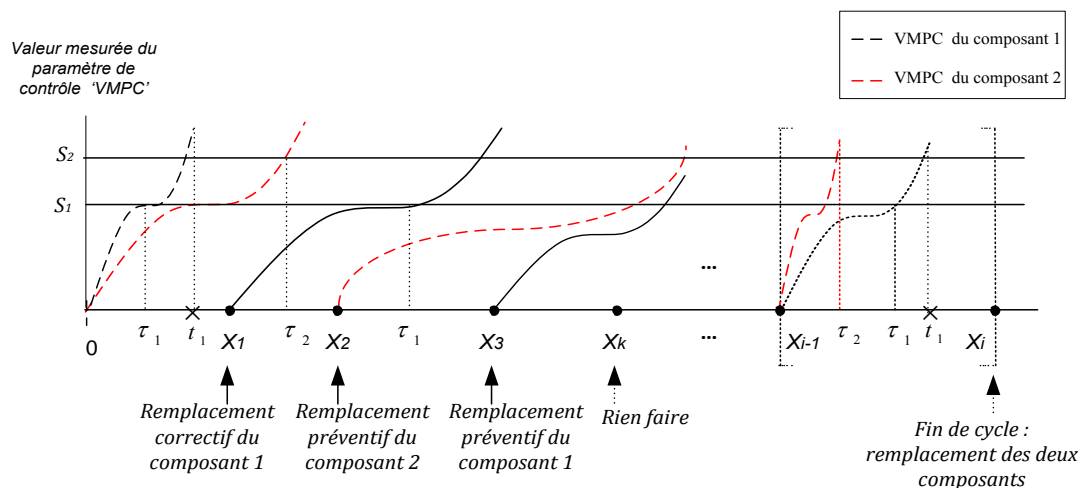
Les deux premières situations ci-dessus impliquent une inactivité du système.  $I_1$  (respectivement  $I_2$ ) représentent la durée moyenne d'inactivité du système suite à la panne du composant 1 (respectivement du composant 2) durant n'importe quel intervalle  $(X_{k-1}, X_k)$  avec  $(k = 1, 2, 3, \dots, i-1)$  :

$$I_1 = \sum_{k=1}^{i-1} \left[ \frac{\int_{X_{k-1}}^{X_k} \int_0^{X_k - \tau_1} \zeta_1(\tau_1) \cdot \{(X_k - (\tau_1 + t_1)) \cdot f_1(t_1)\} dt_1 d\tau_1}{(1 - \Phi_1(X_{k-1}))} \right] \quad (\text{I.12})$$

et

$$I_2 = \sum_{k=1}^{i-1} \left[ \frac{\int_{X_{k-1}}^{X_k} \int_0^{X_k - \tau_2} \zeta_2(\tau_2) \cdot \{(X_k - (\tau_2 + t_2)) \cdot f_2(t_2)\} dt_2 d\tau_2}{(1 - \Phi_2(X_{k-1}))} \right] \quad (\text{I.13})$$

A titre indicatif, la figure **I.3** ci-dessous présente un exemple de ce qui pourrait se passer comme événements le long d'un cycle complet de remplacement avec une fin de cycle correspondant au scénario SC1.



**Figure I.3 :** Exemple d'un scénario de fin de cycle (SC1) décrivant ce qui pourrait se passer aux instants d'inspection précédant  $X_i$ .

Ainsi, le coût total moyen de maintenance encouru durant un cycle de renouvellement du système et correspondant à ce premier scénario est exprimé comme suit:

$$C(SC1) = \sum_{i=1}^{\infty} \left\{ \begin{aligned} & \left( C_{g1} + C_d \cdot I_1 + C_s \right) \times \left( \sum_{k=1}^{i-1} \frac{\int_{X_{k-1}}^{X_k} \zeta_1(\tau_1) \cdot F_1(X_k - \tau_1) d\tau_1}{(1 - \Phi_1(X_{k-1}))} \cdot (1 - \Phi_2(X_k)) \right) + \\ & \left( C_{g2} + C_d \cdot I_2 + C_s \right) \times \left( \sum_{k=1}^{i-1} \frac{\int_{X_{k-1}}^{X_k} \zeta_2(\tau_2) \cdot F_2(X_k - \tau_2) d\tau_2}{(1 - \Phi_2(X_{k-1}))} \cdot (1 - \Phi_1(X_k)) \right) + \\ & \left( C_{p1} + C_s \right) \times \left( \sum_{k=1}^{i-1} \frac{\int_{X_{k-1}}^{X_k} \zeta_1(\tau_1) \cdot (1 - F_1(X_k - \tau_1)) d\tau_1}{(1 - \Phi_1(X_{k-1}))} \cdot (1 - \Phi_2(X_k)) \right) + \\ & \left( C_{p2} + C_s \right) \times \left( \sum_{k=1}^{i-1} \frac{\int_{X_{k-1}}^{X_k} \zeta_2(\tau_1) \cdot (1 - F_2(X_k - \tau_2)) d\tau_2}{(1 - \Phi_2(X_{k-1}))} \cdot (1 - \Phi_1(X_k)) \right) + \\ & + ((C_{i1} + C_{i2}) \cdot i + C_s + C_{g1} + C_{p2}) + C_d \cdot A_i^i \end{aligned} \right\} \cdot P^i(SC1) \quad (I.14)$$

❖ *Expression de la probabilité d'occurrence du scénario SC2 :  $P^i(SC2)$*

Comme dans le cas du premier scénario, pour calculer la probabilité d'occurrence du scénario SC2, les deux cas possibles sont distingués :  $\tau_2 > \tau_1$  et  $\tau_2 < \tau_1$ .

- **Pour le premier cas**  $\tau_2 > \tau_1$  : la probabilité du scénario SC2 est donnée par l'expression suivante :

$$P^i(SC2) = \frac{\int_{X_{i-1}}^{X_i} \int_{\tau_1}^{X_i} \varphi_2(\tau_2) \cdot F_2(X_i - \tau_2) \cdot \varphi_1(\tau_1) \cdot (1 - F_1(X_i - \tau_1)) d\tau_2 d\tau_1}{(1 - \Phi_1(X_{i-1})) \cdot (1 - \Phi_2(X_{i-1}))} \quad (I.15)$$

- **Pour le deuxième cas**  $\tau_2 < \tau_1$  : la probabilité du scénario SC2 est donnée par :

$$P^i(SC2) = \frac{\int_{X_{i-1}}^{X_i} \int_{\tau_2}^{X_i} \varphi_2(\tau_2) \cdot F_2(X_i - \tau_1) \cdot \varphi_1(\tau_1) \cdot (1 - F_1(X_i - \tau_1)) d\tau_1 d\tau_2}{(1 - \Phi_1(X_{i-1})) \cdot (1 - \Phi_2(X_{i-1}))} \quad (I.16)$$

Selon les deux cas ci-dessus, qui sont mutuellement exclusifs, la probabilité d'occurrence du scénario SC2 est finalement donnée par:

$$P^i(SC2) = \frac{\int_{X_{i-1}}^{X_i} \int_{\tau_1}^{X_i} \varphi_2(\tau_2) \cdot F_2(X_i - \tau_2) \cdot \varphi_1(\tau_1) \cdot (1 - F_1(X_i - \tau_1)) d\tau_2 d\tau_1 + \int_{X_{i-1}}^{X_i} \int_{\tau_2}^{X_i} \varphi_2(\tau_2) \cdot F_2(X_i - \tau_1) \cdot \varphi_1(\tau_1) \cdot (1 - F_1(X_i - \tau_1)) d\tau_1 d\tau_2}{(1 - \Phi_1(X_{i-1})) \cdot (1 - \Phi_2(X_{i-1}))} \quad (I.17)$$

Toujours pour le même scénario, l'inactivité moyenne  $A_2^i$  s'exprime par :

$$A_2^i = \frac{\int_{X_{i-1}}^{X_i} \int_{\tau_2}^{X_i} \varphi_2(\tau_2) \cdot (X_i - (\tau_2 + t_2)) \cdot F_2(X_i - \tau_1) \cdot \varphi_1(\tau_1) \cdot (1 - F_1(X_i - \tau_1)) d\tau_1 d\tau_2 + \int_{X_{i-1}}^{X_i} \int_{\tau_1}^{X_i} \varphi_2(\tau_2) \cdot (X_i - (\tau_2 + t_2)) \cdot F_2(X_i - \tau_2) \cdot \varphi_1(\tau_1) \cdot (1 - F_1(X_i - \tau_1)) d\tau_2 d\tau_1}{(1 - \Phi_1(X_{i-1})) \cdot (1 - \Phi_2(X_{i-1}))} \quad (I.18)$$

❖ *Expression du coût total de maintenance C(SC2) correspondant au scénario SC2*

Ce coût est la somme des coûts moyens relatifs aux items suivants :

- Les coûts d'inspection des deux composants ( $C_{i1} + C_{i2}$ ) le long du cycle aux instants  $X_k$  ( $k = 1, 2, 3 \dots i-1, i$ ).
- Les coûts de remplacement correctif du composant 2 ( $C_{g2}$ ) et de remplacement préventif du composant 1 ( $C_{p1}$ ) suite à la dernière inspection à l'instant  $X_i$ . Ainsi que le coût de setup  $C_s$ .
- Le coût d'inactivité du système entre l'instant de sa défaillance (due à la défaillance du composant 2) et l'instant  $X_i$  de son renouvellement ( $C_d \cdot A_2^i$ ).
- Les coûts encourus à chacun des instants d'inspection précédents  $X_k$  ( $k = 1, 2, 3 \dots i-1$ ). Ces coûts sont les mêmes que ceux expliqués ci-dessus dans le cas du scénario (SC1) donnés par les équations (I.7), (I.8), (I.9), (I.10) et (I.11).

Par conséquent, le coût total moyen de maintenance correspondant à ce scénario est exprimé comme suit:

$$C(SC2) = \sum_{i=1}^{\infty} \left\{ \begin{aligned} & \left[ (C_{g1} + C_d \cdot I_1 + C_s) \times \left( \sum_{k=1}^{i-1} \frac{\int_{X_{k-1}}^{X_k} \zeta_1(\tau_1) \cdot F_1(X_k - \tau_1) d\tau_1}{(1 - \Phi_1(X_{k-1}))} \cdot (1 - \Phi_2(X_k)) \right) + \right. \\ & \left. (C_{g2} + C_d \cdot I_2 + C_s) \times \left( \sum_{k=1}^{i-1} \frac{\int_{X_{k-1}}^{X_k} \zeta_2(\tau_2) \cdot F_2(X_k - \tau_2) d\tau_2}{(1 - \Phi_2(X_{k-1}))} \cdot (1 - \Phi_1(X_k)) \right) + \right. \\ & \left. (C_{p1} + C_s) \times \left( \sum_{k=1}^{i-1} \frac{\int_{X_{k-1}}^{X_k} \zeta_1(\tau_1) \cdot (1 - F_1(X_k - \tau_1)) d\tau_1}{(1 - \Phi_1(X_{k-1}))} \cdot (1 - \Phi_2(X_k)) \right) + \right. \\ & \left. (C_{p2} + C_s) \times \left( \sum_{k=1}^{i-1} \frac{\int_{X_{k-1}}^{X_k} \zeta_2(\tau_1) \cdot (1 - F_2(X_k - \tau_2)) d\tau_2}{(1 - \Phi_2(X_{k-1}))} \cdot (1 - \Phi_1(X_k)) \right) + \right. \\ & \left. ((C_{i1} + C_{i2}) \cdot i + C_s + C_{g2} + C_{p1}) + C_d \cdot A_2^i \right\} \cdot P^i(SC2) \quad \text{(I.19)} \end{aligned} \right.$$

Avec  $I_1$  et  $I_2$  donnés respectivement par les équations (I.12) et (I.13).

❖ **Expression de la probabilité d'occurrence du scénario SC3:  $P^i(SC3)$**

La probabilité d'occurrence de ce dernier scénario SC3 est exprimée comme suit:

$$P^i(SC3) = \frac{\int_{X_{i-1}}^{X_i} \varphi_1(\tau_1) \cdot (1 - F_1(X_i - \tau_1)) d\tau_1 \cdot \int_{X_{i-1}}^{X_i} \varphi_2(\tau_2) \cdot (1 - F_2(X_i - \tau_2)) d\tau_2}{(1 - \Phi_1(X_{i-1})) \cdot (1 - \Phi_2(X_{i-1}))} \quad (\text{I.20})$$

❖ **Expression du coût total de maintenance  $C(SC3)$  correspondant au scénario SC3**

Les coûts de maintenance engendrés durant un cycle de renouvellement du système dans le cas du scénario SC3 sont les suivants:

- Les coûts d'inspection des deux composants ( $C_{i1} + C_{i2}$ ) le long du cycle aux instants  $X_k$  ( $k = 1, 2, 3 \dots i-1, i$ ).
- Les coûts de remplacement préventif du composant 1 ( $C_{p1}$ ) et de remplacement préventif du composant 2 ( $C_{p2}$ ) suite à la dernière inspection à l'instant  $X_i$ . Ainsi que le coût de setup  $C_s$ .
- Les coûts encourus à chacun des instants d'inspection précédents  $X_k$  ( $k = 1, 2, 3 \dots i-1$ ). Ces coûts sont les mêmes donnés dans le cas du scénario 1 (eq. (I.7), (I.8), (I.9), (I.10) et (I.11)).

Rappelons que dans le cas de ce troisième scénario il n'y a pas d'inactivité du système puisque les deux composants sont remplacés préventivement (pas de défaillance du système).

Par conséquent, l'expression du coût total moyen de maintenance durant le cycle de renouvellement correspondant à ce scénario est donnée par:



$$\begin{aligned}
 C(SC3) = \sum_{i=1}^{\infty} & \left\{ \left[ \begin{aligned}
 & (C_{g1} + C_d \cdot I_1 + C_s) \times \left( \sum_{k=1}^{i-1} \frac{\int_{X_{k-1}}^{X_k} \zeta_1(\tau_1) \cdot F_1(X_k - \tau_1) d\tau_1}{(1 - \Phi_1(X_{k-1}))} \cdot (1 - \Phi_2(X_k)) \right) + \\
 & (C_{g2} + C_d \cdot I_2 + C_s) \times \left( \sum_{k=1}^{i-1} \frac{\int_{X_{k-1}}^{X_k} \zeta_2(\tau_2) \cdot F_2(X_k - \tau_2) d\tau_2}{(1 - \Phi_2(X_{k-1}))} \cdot (1 - \Phi_1(X_k)) \right) + \\
 & (C_{p1} + C_s) \times \left( \sum_{k=1}^{i-1} \frac{\int_{X_{k-1}}^{X_k} \zeta_1(\tau_1) \cdot (1 - F_1(X_k - \tau_1)) d\tau_1}{(1 - \Phi_1(X_{k-1}))} \cdot (1 - \Phi_2(X_k)) \right) + \\
 & (C_{p2} + C_s) \times \left( \sum_{k=1}^{i-1} \frac{\int_{X_{k-1}}^{X_k} \zeta_2(\tau_2) \cdot (1 - F_2(X_k - \tau_2)) d\tau_2}{(1 - \Phi_2(X_{k-1}))} \cdot (1 - \Phi_1(X_k)) \right) + \\
 & ((C_{i1} + C_{i2}) \cdot i + C_s + C_{p1} + C_{p2})
 \end{aligned} \right] \cdot P^i(SC3) \right\}
 \end{aligned}
 \tag{I.21}$$

Avec  $I_1$  et  $I_2$  donnés respectivement par les équations (I.12) et (I.13).

Quant à la durée moyenne du cycle de renouvellement,  $E(T)$ , elle est exprimée sous la forme suivante:

$$E(T) = \sum_{i=1}^{\infty} [X_i \cdot h(i)] \tag{I.22}$$

$h(i)$  étant la probabilité d'avoir  $i$  inspections au cours d'un cycle de remplacement du système.

Elle est donnée par:

$$h(i) = P^i(SC1) + P^i(SC2) + P^i(SC3) \tag{I.23}$$

Ainsi, il est maintenant possible de calculer le coût total moyen de maintenance par unité de temps,  $E(AC)$ , (équation I.1), pour une séquence donnée d'instantanés d'inspection,  $(X_1, X_2, X_3, \dots)$ .

Il est intéressant de rappeler que comme les trois scénarios, (SC1), (SC2) et (SC3) représentent les seuls scénarios possibles de fin de cycle par un remplacement du système et

compte tenu du fait qu'ils sont mutuellement exclusifs, la probabilité d'occurrence des trois scénarios satisfait l'équation suivante:

$$P(SC1) + P(SC2) + P(SC3) = 1 \quad (\text{I.24})$$

où,

$$P(SC1) = \sum_{i=1}^{\infty} P^i(SC1) \quad ; \quad P(SC2) = \sum_{i=1}^{\infty} P^i(SC2) \quad ; \quad P(SC3) = \sum_{i=1}^{\infty} P^i(SC3) \quad (\text{I.25})$$

Enfin, le nombre moyen d'inspections,  $E(I)$ , effectuées au cours d'un cycle de remplacement est exprimé par:

$$E(I) = \sum_{i=1}^{\infty} i \cdot h(i) \quad (\text{I.26})$$

Le modèle du coût total moyen de maintenance par unité de temps étant maintenant établi, force est de constater que la difficulté majeure liée à ce modèle réside dans le fait que ce coût est exprimé en fonction de plusieurs variables qui sont les instants d'inspection ( $X_1, X_2, X_3 \dots$ ). Ces instants représentent les variables de décision dans la mesure où l'on cherche à déterminer la séquence d'inspection la plus économique. Afin de surmonter cette difficulté pour l'optimisation, nous considérons la même hypothèse retenue par **(Munford et Shahani, 1972)** et **(Turco et Parolini 1984)** stipulant que la probabilité conditionnelle que le seuil d'alerte du composant  $j$  soit dépassée durant l'intervalle de temps  $[X_{i-1}, X_i]$  sachant qu'il ne l'était pas à  $X_i$ , reste constante au cours du temps pour chaque composant. Cette probabilité conditionnelle  $p_j$  est donnée par l'expression suivante:

$$p_j = \frac{\Phi_j(X_i) - \Phi_j(X_{i-1})}{1 - \Phi_j(X_{i-1})} \quad \text{pour } (i=1,2,3, \dots), (j=1,2) \quad (\text{I.27})$$

Ceci implique que :

$$\Phi_j(X_i) = 1 - (1 - p_j)^i \quad \text{pour } (i=1,2,3, \dots), (j=1,2) \quad (\text{I.28})$$

Avec  $p_j = \Phi_j(X_1)$  et  $X_0 = 0$ .

En utilisant l'équation **I.28**, on peut facilement trouver les instants d'inspection ( $X_1, X_2, X_3 \dots$ ) pour une valeur donnée de  $p_j$  entre 0 et 1.

$$X_i = \Phi_j^{-1} \{1 - (1 - p_j)^i\} \quad \text{pour } (i=1,2,3,\dots), (j=1,2) \quad (\text{I.29})$$

### 1.4. Procédure de résolution

Une procédure numérique a été développée pour générer une séquence d'inspection quasi-optimale pour n'importe quelle situation caractérisée par un ensemble de paramètres d'entrée et de coûts donnés. Cette procédure est illustrée ci-dessous (fig. I.4).

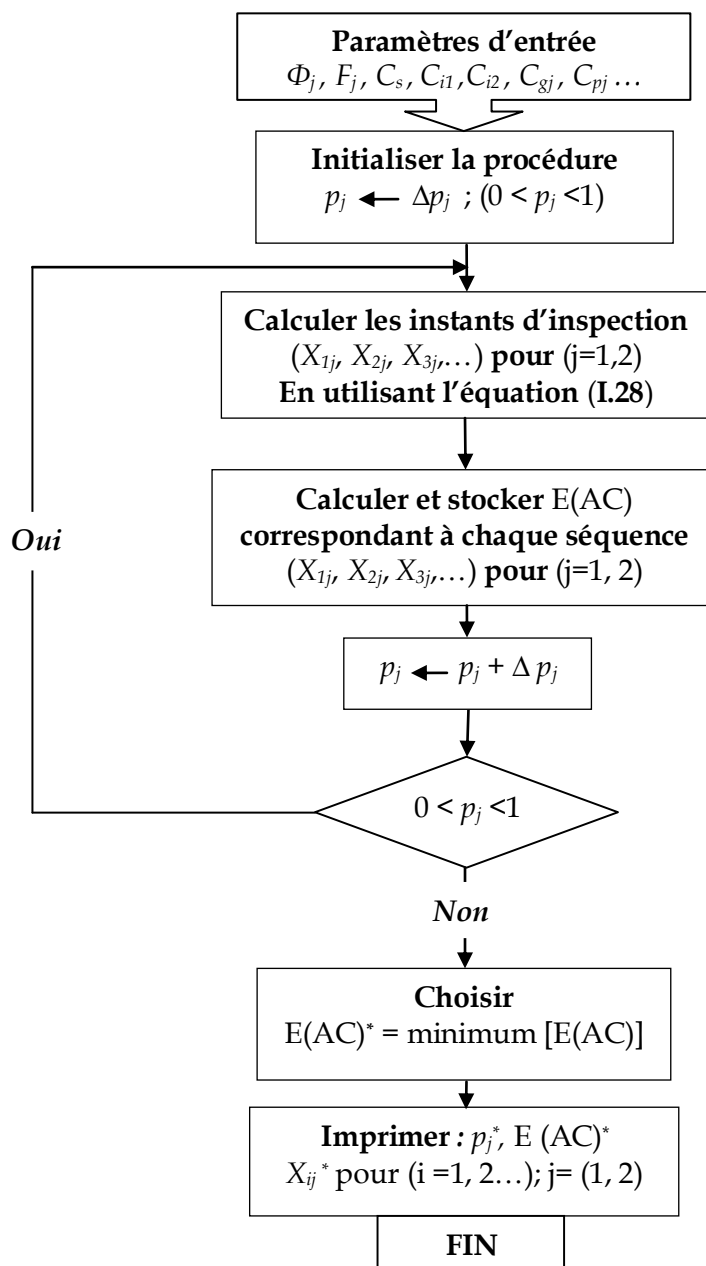


Figure I.4 : Procédure numérique pour la génération d'une séquence d'inspection quasi-optimale.

Les principales étapes de cette procédure sont les suivantes:

- Tout d'abord, tous les paramètres d'entrée sont introduits par l'utilisateur (coûts, distributions, etc.). Les valeurs des probabilités conditionnelles  $p_j$  ( $j = 1,2$ ) sont initialisées à une valeur faible par exemple égale à 0,1.
- Ensuite, les instants d'inspection  $X_{ij}$  ( $i = 1,2$ ), correspondant à  $p_j$  ( $j = 1, 2$ ) sont calculés en résolvant l'équation (I.28) sur la base des distributions  $\Phi_j$  ( $j = 1, 2$ ) du composant  $j$ . Une fois que les instants d'inspection sont obtenus, les coûts totaux correspondants,  $E(AC)$ , sont calculés et stockés.
- Ces étapes sont ensuite répétées en augmentant à chaque fois  $p_j$  (de l'ordre de 0,05 par exemple) jusqu'à ce que  $p_j$  atteigne une valeur proche de 1.
- Enfin, la séquence d'inspection quasi-optimale qui a généré la plus petite valeur de  $E(AC)$  est identifiée parmi l'ensemble des séquences d'inspection générées.

Cette procédure a été testée avec de nombreux exemples numériques. Un de ces tests est présenté dans la section suivante.

### 1.5. Exemple numérique et résultats

#### 1.5.1. Présentation des données

Nous considérons les résultats obtenus à partir d'un exemple numérique appliqué sur les modèles de coût présentés dans la section 1.2. La programmation du modèle et de la procédure numérique a été faite en utilisant les deux logiciels de programmation Mathematica (version 8) et Matlab.

Dans l'exemple présenté ci-dessous, nous considérons une situation où les paramètres d'entrée suivants ont été arbitrairement choisis:

Soit un système à deux composants dont les instants de dépassement de seuil et les instants de défaillance sont distribués selon des lois de Weibull de paramètre d'échelle  $\alpha_j > 1$  et de paramètre de forme  $\lambda_j = 1$  avec une fonction du taux de défaillance croissante donnée par :

$$r_j(t) = (\alpha_j \lambda_j) (\lambda_j t)^{\alpha_j - 1}$$

Les fonctions de distribution correspondant à chaque composant sont les suivantes:

- ✓ Composant 1:  $\Phi_1 \sim \text{Weibull}(2, 0.002)$ , valeur moyenne = 350 unités de temps.  
 $F_1 \sim \text{Weibull}(2, 0.01)$ , valeur moyenne = 100 unités de temps.
  - ✓ Composant 2:  $\Phi_2 \sim \text{Weibull}(2, 0.0017)$ , valeur moyenne = 421 unités de temps.  
 $F_2 \sim \text{Weibull}(2, 0.0095)$ , valeur moyenne = 105 unités de temps.
- Les coûts d'inspection:  $C_{i1} = C_{i2} = 100$  unités monétaires, Coût d'inactivité:  $C_d = 200$  unités monétaires / unités de temps, et le coût de setup:  $C_s = 1000$  unités monétaires.
  - Les coûts de remplacement :  $C_{g1} = 5500$  unités monétaires,  $C_{g2} = 6000$  unités monétaires,  $C_{p1} = 3000$  unités monétaires,  $C_{p2} = 4000$  unités monétaires.

### 1.5.2. Résultats et interprétation

En considérant les paramètres d'entrée indiqués ci-dessus, une séquence d'inspection quasi-optimale a été générée (Tableau I.1) correspondant à un coût total moyen de maintenance par unité de temps minimal égale à 23,38 unités monétaires par unité de temps. Selon cette séquence d'instant d'inspection, la première inspection doit être effectuée après 479 unités de temps à partir de l'instant où un nouveau système a été mis en marche. Cette séquence d'inspection quasi-optimale a été obtenue pour une valeur de  $p_1 = 0,6$ .

**Tableau I.1:** La séquence quasi-optimale d'inspection.

$i$	$X_i$	$X_i - X_{i-1}$
1	479	479
2	677	198
3	829	152
4	957	128
5	1070	113
6	1172	102
7	1266	94

Cela signifie que la probabilité d'avoir une valeur de seuil correspondant au composant 1 dépassée avant la première inspection ( $X_1 = 479$  unités de temps) est égale à 60%.

Il est également intéressant de remarquer que la longueur des intervalles de temps entre deux inspections consécutives diminue avec le temps. Cela était prévisible car les composants sont sujets à une dégradation progressive (taux de défaillance croissant).

Le tableau **I.2** ci-dessous montre les paramètres de sortie correspondants à la séquence d'inspection quasi-optimale obtenue. La durée moyenne du cycle de remplacement du système,  $E(T)$ , est trouvée égale à 995 unités de temps. Par ailleurs, le nombre moyen d'inspections par cycle,  $E(I)$  est de l'ordre de 4,26.

**Tableau I.2:** Les paramètres de sortie correspondant à la séquence quasi-optimale d'inspection.

$P(SC1)$	$P(SC2)$	$P(SC3)$	$E(I)$	$E(T)$	$C(SC1)$	$C(SC2)$	$C(SC3)$	$E(C)$	$E(AC)$
0.24	0.25	0.51	4.26	995	6032	5958	11272	23263	23.38

❖ ***Influence du coût d'inspection sur la séquence quasi-optimale***

Nous considérons le même exemple précédent avec les mêmes distributions de probabilité ( $\Phi_1 \sim W(2, 0.002)$ ,  $F_1 \sim W(2, 0.01)$ ;  $\Phi_2 \sim W(2, 0.0017)$ ,  $F_2 \sim W(2, 0.0095)$ ). Nous faisons varier le coût d'inspection tout en gardant les valeurs de tous les autres coûts fixes ( $C_{g1}=5500$ ,  $C_{g2}=6000$ ,  $C_{p1}=3000$ ,  $C_{p2}=4000$ ,  $C_s=1000$ ,  $C_d=200$ ).

Comme on peut le constater sur le tableau **I.3** ci-dessous, lorsque les coûts d'inspection augmentent, les intervalles de temps entre deux inspections consécutives deviennent plus grands et le cycle de remplacement s'allonge. Nous remarquons aussi que le meilleur instant pour effectuer la première inspection est retardé.

Tableau I.3: Influence du coût d'inspection.

<i>i</i>	$C_{i1} = C_{i2} = 50$ $p_1^* = 0.5$ E(AC)*=19,2 E(T)*= 867		$C_{i1} = C_{i2} = 100$ $p_1^* = 0.6$ E(AC)*=23.38 E(T)*= 995		$C_{i1} = C_{i2} = 300$ $p_1^* = 0.7$ E(AC)*=27.41 E(T)*= 1320	
	$X_i$	$X_i - X_{i-1}$	$X_i$	$X_i - X_{i-1}$	$X_i$	$X_i - X_{i-1}$
1	416	416	479	479	549	549
2	589	173	677	198	776	227
3	721	132	829	152	950	174
4	833	112	957	128	1097	147
5	931	98	1070	113	1227	130
6	1020	89	1172	102	1343	116
7	1101	81	1266	94	1452	109

## 1.6. Conclusion

Dans ce chapitre nous avons abordé le problème lié au développement d'une politique de maintenance conditionnelle pour des systèmes séries à deux composants qui se dégradent progressivement et dont les défaillances sont de type 'Non-self-announcing'.

Nous avons proposé une stratégie d'inspection combinée avec des remplacements préventifs et correctifs effectués selon les résultats révélés lors des inspections. La politique proposée implique le remplacement du système dans le cas où le résultat de l'inspection montre que les deux niveaux de seuil d'alerte  $S_1$  et  $S_2$  de chacun des composants ont été dépassés, ou que l'inspection révèle qu'un composant est en panne et que le niveau de seuil de l'autre a été dépassé. Nous avons développé un modèle mathématique et une procédure numérique permettant la détermination d'une séquence quasi-optimale des instants d'inspection en

considérant comme critère de performance le coût total moyen de maintenance par unité de temps.

Nous avons montré à travers un exemple numérique l'influence du coût d'inspection des composants sur les instants d'inspections recherchés. Les résultats obtenus sont en concordance avec ceux que l'on retrouve dans la littérature.

Parmi les extensions possibles de cette contribution, nous chercherons à généraliser cette stratégie au cas de systèmes multi-composants avec plus de deux composants et avec des structures série-parallèles ou des structures en stand-by. Il est également intéressant de considérer des situations plus complexes liées aux systèmes avec des dépendances stochastiques en termes de défaillance des composants.



---

---

*Chapitre II : Stratégie optimale de  
maintenance sélective pour des  
systèmes sujets à des défaillances  
aléatoires locales et propagées avec  
effet d'isolation*

---

---

## **Stratégie optimale de maintenance sélective pour des systèmes sujets à des défaillances aléatoires locales et propagées avec effet d'isolation**

### **Résumé**

*Dans ce chapitre nous considérons une politique de maintenance sélective pour des systèmes multi-composants pour lesquels un niveau minimum de fiabilité est requis pour chaque mission. Ces systèmes doivent être maintenus entre les missions consécutives. La stratégie proposée vise à sélectionner les composants qui doivent être maintenus (renouvelés) à l'issue de chaque mission de façon à garantir le niveau de fiabilité requis pour la prochaine mission, ceci à un coût minimal et en tenant compte de la période de temps allouée pour la maintenance entre les missions. Cette stratégie est appliquée à des systèmes à deux états en présence de défaillances propagées avec effet global et des phénomènes d'isolation de défaillances. Un ensemble de règles pour réduire l'espace des solutions de maintenance pour ces systèmes complexes est développé. Un exemple numérique est présenté pour illustrer l'approche de modélisation et l'utilisation des règles de réduction. Enfin, la simulation de Monte-Carlo en combinaison avec le modèle d'optimisation de maintenance sélective est utilisée pour traiter le problème pour un nombre de missions successives.*

## **2.1. Introduction**

La fiabilité est l'un des paramètres significatifs dans l'évaluation des performances des systèmes industriels. Pour les systèmes multi-composants, sa valeur dépend de la structure du système ainsi que de la fiabilité de chaque composant. Elle est également influencée par la stratégie de maintenance adoptée et par l'environnement de travail.

Dans cette partie, nous nous concentrons sur les systèmes multi-composants pour lesquels un certain niveau de fiabilité doit être garanti pour accomplir une mission d'une durée connue. Ces systèmes doivent être maintenus entre des missions consécutives (par exemple : les équipements de fabrication, les avions, les navires, les systèmes informatiques, certaines armes militaires, etc.). Le problème de maintenance pour ce genre de systèmes est connu dans la littérature sous le nom de maintenance sélective. Il consiste à sélectionner les composants qui devront être maintenus après l'achèvement de chaque mission de telle sorte qu'un niveau de fiabilité souhaité est garanti pour la prochaine mission, ceci avec un coût minimal tout en tenant compte des limitations sur la durée allouée à la maintenance entre deux missions et sur les moyens et ressources mis à disposition durant cette période.

### **2.1.1. Les stratégies de maintenance sélective**

Le problème de maintenance sélective a été étudié par **Cassady et al. (2001a)** dans le cas de systèmes série-parallèles et pour d'autres structures plus générales présentant des formes de redondance impliquant des composants dont les défaillances sont indépendantes (pas de dépendance stochastique). Il s'agit de décider quels composants défaillants doivent être réparés avant la prochaine mission. L'optimisation des décisions de maintenance est réalisée dans deux situations : la situation où l'objectif est de maximiser la fiabilité du système sous contraintes budgétaires et temporelles, et la situation où la durée allouée à la maintenance est minimisée sous les contraintes de coût et de fiabilité.

Ce travail a été ensuite étendu par les mêmes auteurs **Cassady et al. (2001b)** en tenant compte cette fois d'autres options comme le renouvellement des composants défaillants, la possibilité d'effectuer des réparations minimales sur les composants défectueux et des remplacements préventifs de ceux en fonctionnement. Ils ont examiné le cas de la maximisation de la fiabilité du système sous contraintes de coût et de temps de maintenance. L'approche proposée s'applique sur des composants dont les défaillances sont stochastiquement indépendantes. Ils ont également utilisé la simulation en combinaison avec le modèle analytique pour être en mesure de résoudre le problème dans le cas de missions

multiples et successives. D'autres extensions de ce travail ont été faites dans **Rajagopalan et Cassady (2006)** dans le sens de l'amélioration de la procédure de résolution du problème.

Lorsqu'on a affaire à des systèmes avec un grand nombre de composants, le modèle d'optimisation à résoudre devient de grande taille et il devient nécessaire de trouver des moyens d'accélérer les procédures de résolution de ce problème de maintenance sélective. Dans de tels cas, **Galante et Passannanti (2009)** ont développé un algorithme exact dans un contexte donné de systèmes série-parallèles. Les auteurs ont proposé un nouvel algorithme fortement inspiré de l'algorithme original développé par **Kettele (1962)** pour résoudre les problèmes complexes liés à la détermination du groupe de composants d'un système série qui peuvent être remplacés périodiquement. Cet algorithme est adapté au cas d'un système série-parallèle. Les actions de maintenance appliquées sur les éléments disposés en parallèle sont supposées être effectuées uniquement durant le temps d'arrêt planifié du système entre deux missions. Chaque action de maintenance (remplacement) remet le composant à l'état "as good as new". Le problème est formulé en considérant comme variable de décision la séquence de composants à maintenir préventivement et comme fonction objective le coût total de maintenance tout en respectant un niveau minimum souhaité de la fiabilité du système pour la prochaine mission. Pour illustrer leur approche, les auteurs présentent une étude de cas d'un système dans un navire formé de 199 composants. L'apport essentiel de cet algorithme par rapport à celui de **Kettele (1962)** est de minimiser le nombre de séquences inutiles dans la boucle itérative issues de l'algorithme de **Kettele (1962)** et par conséquent réduire le temps d'exécution.

**Certa et al. (2011)** ont développé une extension des travaux de **Galante et Passannanti (2009)**. Ils ont proposé une étude plus générale considérant une optimisation multi-objective (coûts et délais) basée sur le principe de la frontière optimale de Pareto. Leur approche permet d'obtenir de meilleures solutions sur les composants qui doivent être maintenus préventivement.

**Liu et Huang (2010)** ont développé une politique optimale de maintenance sélective pour des systèmes multi-états considérant la maintenance imparfaite comme une action potentielle à effectuer sur les composants trouvés défaillants à la fin d'une mission donnée. Ils ont appliqué leur approche au cas d'un système de transport de charbon.

La maintenance préventive imparfaite pendant les pauses de maintenance a également été examinée par **Khatab et al., (2008)** dans le problème de maintenance sélective pour des

systèmes série-parallèle. Ils ont considéré plusieurs missions successives de durées égales ou différentes.

En étudiant la littérature sur la maintenance sélective, on réalise que tous les travaux sur ce thème considèrent des systèmes série-parallèle ou des structures de système plus générales impliquant une forme ou une autre de redondance et dont les défaillances sont locales et stochastiquement indépendantes. Ceci pourrait être expliqué par la difficulté de l'évaluation de la fiabilité de systèmes pour lesquels les défaillances des composants ne sont pas indépendantes. Ce constat nous a amené à rechercher des travaux sur l'évaluation de la fiabilité des systèmes présentant des formes de dépendance stochastique entre les composants en vue d'explorer les possibilités de pouvoir résoudre le problème de maintenance sélective pour de tels systèmes.

### **2.1.2. Evaluation de la fiabilité en présence de dépendance stochastique**

Les travaux que nous avons pu retrouver sur ce sujet sont assez récents et il existe peu de chercheurs qui travaillent dessus. On retrouve en particulier les travaux de Xing et Levitin qui traitent de l'évaluation de la fiabilité de systèmes avec différentes formes de dépendance stochastique.

Dans le cas de certains systèmes, la défaillance d'un composant peut se propager entraînant soit la défaillance de l'ensemble du système (effet global), soit la défaillance de certains de ses sous-systèmes (effet sélectif). Les défaillances propagées avec effet global peuvent être causées par une couverture imparfaite de défauts malgré la présence d'une redondance adéquate et un mécanisme tolérant aux défauts (voir **Amari et al. (1999)**). Comme elles peuvent aussi simplement être dues à des défaillances de certains composants du système qui ont un effet destructif.

Dans la pratique, on peut rencontrer certaines défaillances qui ont un effet plutôt positif sur certains composants et qui peuvent protéger le système totalement ou partiellement face à un éventuel dysfonctionnement. On parle ici de ce qu'on appelle l'effet d'isolation. **Xing et Levitin (2010)** définissent ce phénomène comme étant la défaillance d'un composant (appelé composant déclencheur) qui peut causer l'isolation d'autres composants (appelés composants dépendants) dans le même système. Ceci rend, d'une part, les composants dépendants isolés inutilisables, et d'autre part, empêche la propagation des défaillances provenant de ces composants dépendants. Les contrôleurs de périphériques (Entrées – Sorties), E/S, dans un ordinateur font partie des systèmes qui présentent cet effet d'isolation. En effet, lorsque le

contrôleur E/S tombe en panne, les périphériques connectés deviennent inutilisables et en même temps l'ordinateur devient insensible à toute défaillance issue de ces dispositifs périphériques (se référer à **Xing et al. (2009)**).

**Xing et Levitin, (2010)** ont développé une méthode d'analyse combinatoire afin d'évaluer la fiabilité exacte de systèmes présentant à la fois des défaillances propagées avec effet global et un phénomène d'isolation. Les réseaux informatiques sont un exemple de tels systèmes. En effet, les ordinateurs communiquent par le biais des cartes d'interface réseau (NIC). Dans le cas où une carte d'interface réseau tombe en panne (considérée ici comme le composant déclencheur), un ordinateur connecté (considéré comme le composant dépendant) devient inaccessible, mais en même temps, ceci empêche la propagation de défaillances potentielles, comme des virus par exemple, à partir de cet ordinateur vers le réseau. Cela se produit uniquement si la défaillance propagée (le virus) originaire de l'ordinateur se produit après la défaillance de la carte réseau, sinon le virus pourrait entrer dans l'ensemble du réseau et provoquer ainsi le crash. Cet exemple illustre la concurrence dans le temps entre la défaillance des éléments déclencheurs et les défaillances initiées depuis les composants dépendants.

Notre contribution dans ce chapitre (**Maaroufi G. et al., 2013a**) consiste à développer une stratégie de maintenance sélective de tels systèmes complexes présentant à la fois des défaillances propagées avec effet global et un phénomène d'isolation. Cette stratégie est évaluée sur la base de coût total de maintenance encouru entre deux missions données. De plus, nous proposerons une série de règles visant à réduire l'espace de solution et par conséquent accélérer la procédure d'optimisation. Enfin, pour traiter les situations avec un nombre de missions successives, nous développerons un modèle de simulation pour être utilisé en combinaison avec la procédure d'optimisation de la maintenance sélective pour chaque arrêt entre deux missions successives.

## **2.2. Formulation mathématique du problème**

### **2.2.1. Définition de la stratégie et notations**

Considérons un système multi-composants requis pour effectuer une série de missions successives et dont les composants peuvent être maintenus pendant les périodes de pause prévues entre les missions successives. Le problème consiste à sélectionner les composants

qui doivent être maintenus après l'achèvement de toute mission  $k$  et avant le début de la mission suivante ( $k + 1$ ), de telle sorte qu'un seuil minimum de fiabilité soit garanti à l'étape suivante pour  $D_{k+1}$  unités de temps. Ceci avec le minimum de coût et sans dépasser la période  $\Delta_k$  unités de temps prévue pour faire la maintenance entre les missions  $k$  et ( $k + 1$ ). Cela devrait être fait en considérant qu'il est possible de payer des pénalités pour prolonger cette période de maintenance entre les missions jusqu'à une certaine limite.

Les hypothèses suivantes sont considérées:

- A la fin d'une période de mission donnée, chaque composant (ainsi que le système) est soit en fonctionnement soit défaillant.
- Toutes les opérations de maintenance consistent en des renouvellements de composants. Ils pourraient être des renouvellements préventifs de composants en fonctionnement ou des renouvellements de composants défaillants.
- Les actions de remplacement des composants sélectionnés commencent simultanément (au début de la période de la maintenance entre les missions avec suffisamment de ressources de maintenance disponibles). Par conséquent, la durée nécessaire pour terminer tous les remplacements est égale à la période la plus longue parmi les durées de renouvellement des composants sélectionnés.

Les notations suivantes sont utilisées:

- $f_{il}$  La fonction de densité de probabilité associée au temps de défaillance locale du composant  $i$ .  $i = (1, 2, \dots, n)$ ,  $n$  étant le nombre de composants du système.
- $R_{il}$  La fonction de fiabilité associée au temps de défaillance locale du composant  $i$ .
- $f_{ip}$  La fonction de densité de probabilité associée au temps de défaillance propagée du composant  $i$ .
- $R_{ip}$  La fonction de fiabilité associée au temps de défaillance propagée du composant  $i$ .
- $F_s$  La fonction de distribution associée au temps de défaillance du système.
- $t_i$  Le temps requis pour remplacer le composant  $i$  entre les missions.
- $D_k$  La durée de la  $k^{\text{ème}}$  mission.
- $\Delta_k$  La période d'arrêt allouée à la maintenance du système entre les missions ( $k$ ) et ( $k+1$ ).
- $\beta_k$  Le coefficient d'extension des périodes de maintenance  $\Delta_k$  ( $\beta_k \geq 0$ ). La période de maintenance  $\Delta_k$  peut être prolongée de ( $\Delta_k \cdot \beta_k$ ) au maximum.

$C_p$  Le coût de pénalité par unité de temps du à la prolongation de la période de maintenance  $\Delta_k$ .

$C_{ri}$  Le coût de remplacement du composant  $i$ .

$C_w$  Le coût de la main-d'œuvre de maintenance par unité de temps.

$C_f$  Le coût de setup encouru pour démonter et remonter le système dans le cas où au moins un composant doit être remplacé. Ce coût est enregistré une seule fois dans le cas où plusieurs composants sont remplacés.

$C(k)$  Le coût total de maintenance encouru pour maintenir le système entre les deux missions  $k$  et  $(k+1)$ .

$E_i(k)$  L'âge du composant  $i$  à la fin de la  $k^{\text{ème}}$  mission.

$A_i(k+1)$  L'âge du composant  $i$  au début de la  $(k+1)^{\text{ème}}$  mission.

$M(k)$  Le vecteur de décision de maintenance constitué par  $n$  éléments. Chaque élément est soit égal à 1 (remplacer l'élément correspondant) soit égal à 0 (ne pas remplacer l'élément correspondant).  $M(k) = \{m_1(k), m_2(k), \dots, m_n(k)\}$

Les variables binaires suivantes sont considérées :

$m_i(k)$  La décision de remplacement du composant  $i$  à la fin de la  $k^{\text{ème}}$  mission.

$m_i(\cdot) \begin{cases} = 1 & \text{si le composant } i \text{ a été remplacé entre les missions } (\cdot) \text{ et } (\cdot + 1) \\ = 0 & \text{si le composant } i \text{ n'a pas été remplacé entre les missions } (\cdot) \text{ et } (\cdot + 1) \end{cases}$

$Y_i(k)$  L'état du composant  $i$  à la fin de la  $k^{\text{ème}}$  mission.

$y_i(\cdot) \begin{cases} = 1 & \text{si le composant } i \text{ est en état de fonctionnement à la fin de la } \cdot^{\text{ème}} \text{ mission} \\ = 0 & \text{si le composant } i \text{ est en état de défaillance à la fin de la } \cdot^{\text{ème}} \text{ mission} \end{cases}$

$X_i(k+1)$  L'état du composant  $i$  juste avant le début de la  $(k+1)^{\text{ème}}$  mission.

$X_i(\cdot) \begin{cases} = 1 & \text{si le composant } i \text{ est en état de fonctionnement au début de la mission } (\cdot + 1) \\ = 0 & \text{si le composant } i \text{ est en état de défaillance au début de la mission } (\cdot + 1) \end{cases}$

$z(\cdot) \begin{cases} = 1 & \text{si } \Delta \text{ est inférieure à la plus longue durée requise parmi les durées de remplacement des composants} \\ = 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$(k) \begin{cases} = 1 & \text{si } \sum_{i=1}^n m_i(k) \geq 1 \\ = 0 & \text{sinon} \end{cases}$



**Chapitre 2: Stratégie optimale de maintenance sélective pour des systèmes sujets à des défaillances aléatoires locales et propagées avec effet d'isolation**

$\Phi(k) = 1$  correspond à la situation où au moins un composant est remplacé. Dans ce cas, le coût de setup est compté une seule fois (la dépendance économique).

À la fin de la  $k^{\text{ème}}$  mission, le décideur devrait considérer les deux états possibles (fonctionnement ou défaillance) et l'âge de chaque composant. Le tableau II.1 montre les changements concernant l'état et l'âge d'un composant lorsqu'on décide de le remplacer ou non. «a» désigne l'âge du composant à la fin de la  $k^{\text{ème}}$  mission.

**Tableau II.1:** Effets du choix de remplacement ou non d'un composant entre la  $k^{\text{ème}}$  mission et la  $(k+1)^{\text{ème}}$  mission.

	<i>État et âge du composant i</i>	
<i>État et âge à la fin de la <math>k^{\text{ème}}</math> mission</i>	$Y_i(k)=0$ $E_i(k)=a$	$Y_i(k)=1$ $E_i(k)=a$
<i>État et âge en cas de remplacement effectué entre les missions k et (k + 1)</i>	$X_i(k+1)=1,$ $A_i(k+1)=0$	$X_i(k+1)=1,$ $A_i(k+1)=0$
<i>État et âge si on ne fait pas de remplacement entre les missions k et (k + 1)</i>	$X_i(k+1)=0,$ $A_i(k+1)=a$	$X_i(k+1)=1,$ $A_i(k+1)=a$

Nous exprimons le coût total encouru par un remplacement d'un composant i ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) par :

$$C_f + (C_{ri} + C_w t_i) \tag{II.1}$$

Par conséquent, le problème peut être formulé comme suit:

*Fonction objective :*

$$\begin{aligned} \text{Min } C(k) = & \\ & \sum_{i=1}^n [(C_{ri} + C_w t_i) \times m_i(k)] + [(Max(t_i \times m_i(k)) - \Delta_k) \times C_p \times z(k)] \quad \text{pour } (i = 1, 2, \dots, n) \tag{II.2} \\ & + [C_f \times \Phi(k)] \end{aligned}$$

*Sous les contraintes suivantes :*

$$F_s(D_{k+1}) \leq F_s^* \tag{II.3}$$

$$\text{Max}(t_i \times m_i(k)) \leq \Delta_k + \beta_k \Delta_k \quad (i = 1, \dots, n) \tag{II.4}$$

L'équation (II.3) exprime la contrainte de fiabilité où  $F_s^*$  étant la probabilité de défaillance du système à ne pas dépasser pour la  $(k+1)^{\text{ème}}$  mission. L'équation (II.4) exprime le fait que pour une option de maintenance donnée (vecteur  $M(k)$ ), la période de maintenance la plus longue parmi les durées de maintenance des composants sélectionnés doit être inférieure à la période de maintenance planifiée  $\Delta_k$  prolongée de la période d'extension maximale.

Pour chaque composant  $i$  avec un âge  $A_i(k+1)$  et dans un état  $X_i(k+1)$  juste avant de commencer la  $(k+1)^{\text{ème}}$  mission, la fonction de fiabilité associée aux défaillances locales est exprimée comme suit:

$$\hat{R}_{il}(D_{k+1}) = X_i(k+1) \times \frac{R_{il}(D_{k+1} + A_i(k+1))}{R_{il}(A_i(k+1))} \quad (\text{II.5})$$

Pour les composants qui peuvent également causer des défaillances propagées, la fonction de fiabilité correspondante est donnée par:

$$\hat{R}_{ip}(D_{k+1}) = X_i(k+1) \times \frac{R_{ip}(D_{k+1} + A_i(k+1))}{R_{ip}(A_i(k+1))} \quad (\text{II.6})$$

L'âge  $A_i(k+1)$  est obtenu comme suit:

$$A_i(k+1) = E_i(k) - E_i(k) \times m_i(k) \quad (\text{II.7})$$

et l'état  $X_i(k+1)$  est donné par:

$$X_i(k+1) = Y_i(k) + m_i(k) \times (1 - Y_i(k)) \quad (\text{II.8})$$

Par conséquent, étant donné l'état et l'âge de chaque composant observés à la fin de la  $k^{\text{ème}}$  mission, pour chaque vecteur de décision de maintenance possible  $M(k)$  parmi le nombre théorique de  $2^n$  vecteurs, le décideur peut évaluer le coût  $C(k)$  en utilisant le modèle mathématique proposé ci-dessus. La meilleure décision sera celle induisant le coût minimal tout en satisfaisant les deux contraintes.

A noter que la formulation proposée est valable pour n'importe quel type de structure de système avec un nombre quelconque de composants et avec tout type de distributions des temps de défaillances. Dans les sections suivantes, nous l'appliquons à un type particulier de systèmes complexes sujets à des défaillances propagées avec effet global, et en présence de phénomène d'isolation de défaillance. Pour ce faire, nous devons être en mesure d'évaluer la fiabilité de ces systèmes afin d'évaluer la première contrainte (équation II.3) pour tout

vecteur donné de décision de maintenance  $M(k)$ . Nous expliquons ci-dessous la démarche adoptée pour cela.

### **2.3. Evaluation de la fiabilité des systèmes sujets à des défaillances propagées et effet d'isolation de défaillances**

Nous considérons des systèmes multi-composants impliquant des dépendances fonctionnelles (stochastiques) avec des défaillances propagées et des effets d'isolation. L'isolation de la défaillance se produit lorsque la défaillance d'un composant (composant dits "déclencheur") rend des composants particuliers (composants dits "dépendants") inutilisables. Cette isolation empêche la propagation des défaillances issues des composants dépendants. Tous les composants peuvent connaître des défaillances locales et certains d'entre eux peuvent être à l'origine de défaillances propagées avec un effet global (tous les composants sont brisés). La défaillance locale et la défaillance propagée d'un même composant sont mutuellement exclusives.

Nous utiliserons l'approche d'évaluation proposée par **Xing et Levitin (2010)** pour évaluer la fiabilité exacte de ces systèmes ou sous-systèmes qui se résume en trois grandes étapes données ci-dessous. A noter que cette approche est basée sur le théorème de la probabilité totale.

**Étape 1:** Définir les trois différents événements ( $E_i$ ) représentant l'ordre des défaillances par rapport au composant déclencheur (isolateur) et les composants dépendants correspondants.

$E_1$ : « l'élément isolateur (déclencheur) ne tombe jamais en panne »,

$E_2$ : « Au moins un élément dépendant tombe en panne avant la défaillance de l'élément isolateur »,

$E_3$ : « l'élément isolateur tombe en panne avant toute défaillance globale du système originaire des composants dépendants ».

Ensuite, évaluer les probabilités d'occurrence de  $E_1$  et  $E_2$  et calculer  $\Pr(E_3) = 1 - \Pr(E_1) - \Pr(E_2)$ .

**Étape 2:** En utilisant la méthode d'analyse conventionnelle par arbre de défaillance dynamique (**Dugan et Doyle (1997)**), déterminer les trois probabilités conditionnelles de défaillance du système à l'égard de l'occurrence de  $E_i$  :

$\Pr(\text{système en panne} | E_1)$ ,  $\Pr(\text{système en panne} | E_2)$  et  $\Pr(\text{système en panne} | E_3)$

**Étape 3:** Calculer la probabilité de défaillance du système comme suit :

$$F_s(t) = \sum_{i=1}^3 \Pr(\text{système en panne} | E_i) * \Pr(E_i) \quad (\text{II.9})$$

Dans notre étude, cette méthode d'évaluation de la fiabilité est utilisée pour évaluer la probabilité de défaillance du système  $F_s(D_{k+1})$  pour la  $(k+1)^{\text{ème}}$  mission pour vérifier la contrainte exprimée par l'équation (II.3).

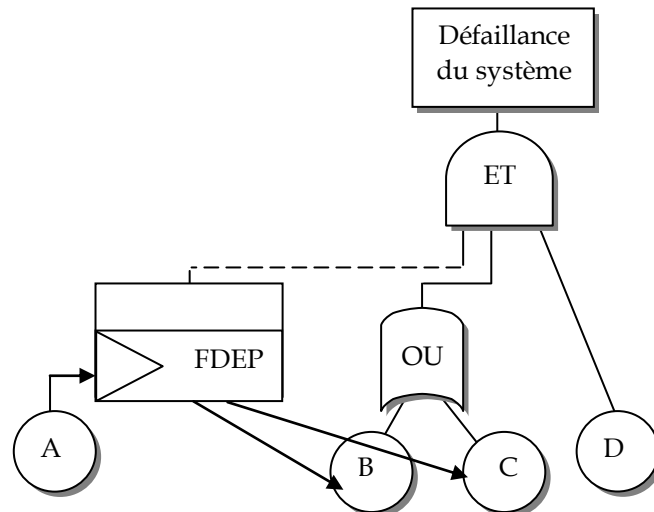
## 2.4. Exemple numérique

Afin d'illustrer notre approche, considérerons un système relativement simple à quatre composants. Certains d'entre eux étant sujets à des défaillances locales et/ou propagées et soumis au phénomène d'isolation.

Le modèle d'arbre de défaillance dynamique de ce système est illustré dans la figure II.1 ci-dessous. Les arbres de défaillance dynamiques sont la version étendue des arbres de défaillance traditionnels. En fait, ils intègrent des portes spéciales pour modéliser des comportements dynamiques et dépendants comme la dépendance stochastique et les événements séquentiels.

En effet, le système considéré est constitué par quatre composants A, B, C et D. Le même système a été utilisé par **Xing et Levitin (2010)** comme un exemple illustratif considérant tous les composants comme neufs (Age = 0).

La porte spéciale sur la figure (II.1) est appelée porte de dépendance fonctionnelle (FDEP) (**Dugan et Doyle (1997)**). Elle est utilisée pour modéliser la dépendance fonctionnelle. Des défaillances locales peuvent se produire au niveau de tous les composants et seuls les composants dépendants (B et C) peuvent également causer des défaillances propagées avec effets global. Dans cet exemple, lorsque le composant déclencheur A tombe en panne, les composants dépendants (B et C) deviennent inutilisables. Dans une telle situation, le composant A et la porte FDEP correspondante sont supprimés, les composants dépendants B et C sont remplacés par '1', qui signifie 'VRAI', et une réduction booléenne peut être appliquée à l'arbre de défaillance obtenu.



**Figure II.1 :** Modèle d'arbre de défaillance dynamique du système considéré.

Pour une situation donnée avant le début de la prochaine mission ( $k + 1$ ) et compte tenu de l'état  $X_i(k + 1)$  et l'âge  $A_i(k + 1)$  de chaque composant ( $i = A, B, C, D$ ), nous appliquons la méthode d'évaluation de la fiabilité présentée dans la section 2.3, en combinaison avec les équations (II.5) et (II.6), pour exprimer la probabilité de défaillance du système considéré dans notre cas pour une durée de mission  $D_{k+1}$ .

#### 2.4.1. Développement de la fonction de probabilité de défaillance du système

Appliquons l'approche de **Xing et Levitin (2010)** présentée dans la section 2.3 comme suit :

**Étape 1-** La détermination des probabilités d'occurrence des événements  $E1, E2$  et  $E3$

**E1:** 'Le composant isolateur/déclencheur n'est jamais en défaillance'

$$\Pr(E1) = \Pr(\bar{A}) = 1 - \int_0^t f_{A1}(\tau_1) d\tau_1 \quad (\text{II.10})$$

**E2:** 'Au moins un élément dépendant tombe en panne avant la défaillance de l'élément isolateur'

Deux scénarios possibles dans ce cas: une défaillance propagée du composant B suivie par une défaillance du composant A, ou défaillance propagée du composant C suivie de la défaillance du composant A.

Cela peut être exprimé comme suit:

$$\Pr(E2) = \Pr\{(Bp \rightarrow A) \text{ or } (Cp \rightarrow A)\} \quad (\text{II.11})$$

En Appliquant la méthode "d'inclusion-exclusion" (**Dugan et Doyle (1997)**), **Xing et Levitin (2010)** montrent que:

$$\Pr(E2) = \Pr(Bp \rightarrow A) + \Pr(Cp \rightarrow A) - \{\Pr(Bp \rightarrow Cp \rightarrow A) + \Pr(Cp \rightarrow Bp \rightarrow A)\} \quad (\text{II.12})$$

Par conséquent, Pr (E2) peut être obtenue en calculant la probabilité d'événements séquentiels comme suit:

$$\Pr(Bp \rightarrow A) = \int_0^t \left[ \int_{\tau_2}^t f_{Al}(\tau_1) d\tau_1 \right] f_{Bp}(\tau_2) d\tau_2 \quad (\text{II.13})$$

$$\Pr(Cp \rightarrow A) = \int_0^t \left[ \int_{\tau_3}^t f_{Al}(\tau_1) d\tau_1 \right] f_{Cp}(\tau_3) d\tau_3 \quad (\text{II.14})$$

$$\begin{aligned} & \Pr(Bp \rightarrow Cp \rightarrow A) + \Pr(Cp \rightarrow Bp \rightarrow A) \\ &= \int_0^t \int_{\tau_1}^t \int_{\tau_2}^t f_{Bp}(\tau_1) f_{Cp}(\tau_2) f_{Al}(\tau_3) d\tau_3 d\tau_2 d\tau_1 \\ &+ \int_0^t \int_{\tau_1}^t \int_{\tau_2}^t f_{Cp}(\tau_1) f_{Bp}(\tau_2) f_{Al}(\tau_3) d\tau_3 d\tau_2 d\tau_1 \end{aligned} \quad (\text{II.15})$$

En conséquence,

$$\begin{aligned} \Pr(E2) &= \int_0^t \left[ \int_{\tau_1}^t f_{Al}(\tau_1) d\tau_1 \right] f_{Bp}(\tau_2) d\tau_2 + \int_0^t \left[ \int_{\tau_1}^t f_{Al}(\tau_1) d\tau_1 \right] f_{Cp}(\tau_3) d\tau_3 - \int_0^t \int_{\tau_1}^t \int_{\tau_2}^t f_{Bp}(\tau_1) f_{Cp}(\tau_2) f_{Al}(\tau_3) d\tau_3 d\tau_2 d\tau_1 \\ &- \int_0^t \int_{\tau_1}^t \int_{\tau_2}^t f_{Cp}(\tau_1) f_{Bp}(\tau_2) f_{Al}(\tau_3) d\tau_3 d\tau_2 d\tau_1 \end{aligned} \quad (\text{II.16})$$

**E3:** 'l'élément déclencheur tombe en panne avant toute défaillance globale causée par les composants dépendants'

$$\Pr(E3) = 1 - \Pr(E1) - \Pr(E2) \quad (\text{II.17})$$

**Étape 2-** *Elaboration des expressions de toutes les probabilités conditionnelles de défaillance du système tenant compte des occurrences des événements E1, E2 et E3.*

E1 correspond au cas où il n'y a pas d'effet d'isolation. Par conséquent, le système est en défaillance avec au moins une défaillance propagée ou sans défaillance propagée.

Donc,

$$\Pr(\text{système en panne} | E1) = 1 - P_u(t) + Q(t) \times P_u(t) \quad (\text{II.18})$$

Avec,

$P_u(t) = \Pr(\text{pas de défaillance propagée})$  et  $Q(t) = \Pr(\text{système en panne} \parallel \text{pas de défaillance propagée})$ . **Xing et Levitin (2010)** ont calculé  $P_u(t)$  et  $Q(t)$  et ils ont obtenu:

$$\begin{aligned} \Pr(\text{système en panne} | E1) = & 1 - (1 - \int_0^t f_{Bp}(\tau_2) d\tau_2)(1 - \int_0^t f_{Cp}(\tau_3) d\tau_3) + (1 - \int_0^t f_{Cp}(\tau_3) d\tau_3)(\int_0^t f_{Dl}(\tau_4) d\tau_4)(\int_0^t f_{Bl}(\tau_2) d\tau_2) \\ & + (\int_0^t f_{Dl}(\tau_4) d\tau_4)(1 - \int_0^t f_{Bp}(\tau_2) d\tau_2 - \int_0^t f_{Bl}(\tau_2) d\tau_2)(\int_0^t f_{Cl}(\tau_3) d\tau_3) \end{aligned} \quad (\text{II.19})$$

Quant à la probabilité conditionnelle de défaillance du système compte tenu de l'occurrence de E2, puisque nous avons une défaillance globale propagée qui précède toute isolation, tout le système sera certainement en défaillance.

Par conséquent,

$$\Pr(\text{système en panne} | E2) = 1 \quad (\text{II.20})$$

Enfin, quand l'événement E3 se produit, l'effet d'isolation se produit et par conséquent les composants B et C sont isolés et la défaillance ne dépendra que du composant D. En effet, le composant déclencheur A et la porte de FDEP correspondante sont éliminés, les composants dépendants B et C sont remplacés par '1' 'signifie' VRAI ', et une réduction booléenne est appliquée à l'arbre de défaillance de la figure II.1.

Par conséquent,

$$\Pr(\text{système en panne} | E3) = \Pr(D) = \int_0^t f_{Dl}(\tau_4) d\tau_4 \quad (\text{II.21})$$

### Étape 3 – Calcul de la probabilité de défaillance du système (1-fiabilité)

$$\begin{aligned} F_s(t) = & \Pr(\text{système en panne} | E1) \times \Pr(E1) + \Pr(\text{système en panne} | E2) \times \Pr(E2) \\ & + \Pr(\text{système en panne} | E3) \times \Pr(E3) \\ = & \Pr(\text{système en panne} | E1) \times \Pr(E1) + \Pr(E2) + \Pr(D) \times (1 - \Pr(E1) - \Pr(E2)) \end{aligned} \quad (\text{II.22})$$

En combinant les équations (II.19, II.20, II.21 et II.22), La probabilité de défaillance du système peut être exprimée comme suit:

$$\begin{aligned} F_s(t) = & \left( 1 - \int_0^t f_{Al}(\tau_1) d\tau_1 \right) \times \left[ \begin{aligned} & 1 - ((1 - \int_0^t f_{Bp}(\tau_2) d\tau_2) \times (1 - \int_0^t f_{Cp}(\tau_3) d\tau_3)) + ((1 - \int_0^t f_{Cp}(\tau_3) d\tau_3) \times (1 - (1 - \int_0^t f_{Dl}(\tau_4) d\tau_4))) \\ & \times (1 - (1 - \int_0^t f_{Bp}(\tau_2) d\tau_2)) \\ & + (1 - (1 - \int_0^t f_{Dl}(\tau_4) d\tau_4)) \times ((1 - \int_0^t f_{Bp}(\tau_2) d\tau_2) - (1 - (1 - \int_0^t f_{Bl}(\tau_2) d\tau_2)) \times (1 - (1 - \int_0^t f_{Cp}(\tau_3) d\tau_3))) \end{aligned} \right] \\ & + \int_0^t \int_0^{\min\{\tau_1, \tau_2\}} f_{Bp}(\tau_1) \cdot f_{Cp}(\tau_2) \cdot f_{Al}(\tau_3) d\tau_3 d\tau_2 d\tau_1 + \\ & \left( \int_0^t f_{Dl}(\tau_4) d\tau_4 \right) \times \left[ 1 - \left( 1 - \int_0^t f_{Al}(\tau_1) d\tau_1 \right) - \int_0^t \int_0^{\min\{\tau_1, \tau_2\}} f_{Bp}(\tau_1) \cdot f_{Cp}(\tau_2) \cdot f_{Al}(\tau_3) d\tau_3 d\tau_2 d\tau_1 \right] \end{aligned} \quad (\text{II.23})$$

En utilisant la relation suivante bien connue:  $f(t) = -\frac{dR(t)}{dt}$ , nous obtenons:

$$\begin{aligned}
 F_s(t) = & R_{Al}(t) \times \left[ 1 - (R_{Bp}(t) \times R_{Cp}(t)) + (R_{Cp}(t) \times (1 - R_{Dl}(t)) \times (1 - R_{Bl}(t))) \right. \\
 & \left. + (1 - R_{Dl}(t)) \times (R_{Bp}(t) - (1 - R_{Bl}(t)) \times (1 - R_{Cl}(t))) \right] \\
 & + \int_0^t \int_0^t \int_{\min\{\tau_1, \tau_2\}}^t \left( -\frac{dR_{Bp}(\tau_1)}{d\tau_1} \right) \cdot \left( -\frac{dR_{Cp}(\tau_2)}{d\tau_2} \right) \cdot \left( -\frac{dR_{Al}(\tau_3)}{d\tau_3} \right) d\tau_3 d\tau_2 d\tau_1 + \\
 & \left[ (1 - R_{Dl}(t)) \times \left[ 1 - R_{Al}(t) - \int_0^t \int_0^t \int_{\min\{\tau_1, \tau_2\}}^t \left( -\frac{dR_{Bp}(\tau_1)}{d\tau_1} \right) \cdot \left( -\frac{dR_{Cp}(\tau_2)}{d\tau_2} \right) \cdot \left( -\frac{dR_{Al}(\tau_3)}{d\tau_3} \right) d\tau_3 d\tau_2 d\tau_1 \right] \right]
 \end{aligned} \tag{II.24}$$

L'expression ci-dessus suppose qu'à l'instant  $t = 0$  tous les composants sont neufs (en état de fonctionnement et avec un âge égal à zéro). Dans le modèle développé dans ce travail (en particulier l'équation (II.3)), la période  $t$  correspond à la prochaine mission de durée  $D$  ( $k + 1$ ) tenant compte de l'état  $X_i(k + 1)$  et l'âge  $A_i(k + 1)$  de chaque composant  $i$  à la fin de la période de maintenance (c'est à dire juste avant le début de la mission suivante ( $k + 1$ )).

Nous rappelons que les équations ci-dessous (II.5) et (II.6) expriment la fonction de fiabilité associée au temps de défaillance locale et au temps de défaillance propagée du composant  $i$  ayant un âge donné  $A_i(k + 1)$  et considéré dans un état donné  $X_i(k + 1)$ :

$$\hat{R}_{il}(D_{k+1}) = X_i(k + 1) \times \frac{R_{il}(D_{k+1} + A_i(k + 1))}{R_{il}(A_i(k + 1))} \tag{II.5}$$

$$\hat{R}_{ip}(D_{k+1}) = X_i(k + 1) \times \frac{R_{ip}(D_{k+1} + A_i(k + 1))}{R_{ip}(A_i(k + 1))} \tag{II.6}$$

Avec  $A_i(k + 1)$  et  $X_i(k + 1)$  sont donnés par les équations (II.7) et (II.8).

Par conséquent, l'équation de la probabilité de défaillance est obtenue en remplaçant dans l'équation (II.24) les termes de fiabilité pour chacun des composants par les formules (II.5) et (II.6) qui prennent en compte l'âge et l'état de chaque composant. En résultat, nous obtenons l'expression suivante :



$$\begin{aligned}
 F_S(D_{k+1}) = & \hat{R}_{AI}(D_{k+1}) \times \left[ \begin{aligned} & 1 - (\hat{R}_{Bp}(D_{k+1}) \times \hat{R}_{Cp}(D_{k+1})) + (\hat{R}_{Cp}(D_{k+1}) \times (1 - \hat{R}_{DI}(D_{k+1})) \times (1 - \hat{R}_{BI}(D_{k+1}))) + \\ & \left[ \begin{aligned} & (1 - \hat{R}_{DI}(D_{k+1})) \times (\hat{R}_{Bp}(D_{k+1}) - (1 - \hat{R}_{BI}(D_{k+1}))) \\ & \times (1 - \hat{R}_{CI}(D_{k+1})) \end{aligned} \right] \end{aligned} \right] \\
 & + \left[ \begin{aligned} & \frac{1}{\hat{R}_{Bp}(A_B(k+1)) \times \hat{R}_{Cp}(A_C(k+1)) \times \hat{R}_{AI}(A_A(k+1))} \\ & \times \int_0^{D_{k+1}} \int_0^{D_{k+1}} \int_{\min\{\tau_1, \tau_2\}}^{D_{k+1}} f_{Bp}(\tau_1 + A_B(k+1)) f_{Cp}(\tau_2 + A_C(k+1)) f_{AI}(\tau_3 + A_A(k+1)) d\tau_3 d\tau_2 d\tau_1 \end{aligned} \right] \\
 & + ((1 - \hat{R}_{DI}(D_{k+1})) \times \\
 & \left[ \begin{aligned} & 1 - \hat{R}_{AI}(D_{k+1}) - \left[ \begin{aligned} & \frac{1}{\hat{R}_{Bp}(A_B(k+1)) \times \hat{R}_{Cp}(A_C(k+1)) \times \hat{R}_{AI}(A_A(k+1))} \times \\ & \int_0^{D_{k+1}} \int_0^{D_{k+1}} \int_{\min\{\tau_1, \tau_2\}}^{D_{k+1}} f_{Bp}(\tau_1 + A_B(k+1)) f_{Cp}(\tau_2 + A_C(k+1)) f_{AI}(\tau_3 + A_A(k+1)) d\tau_3 d\tau_2 d\tau_1 \end{aligned} \right] \end{aligned} \right] \end{aligned}
 \end{aligned}
 \tag{II.25}$$

### 2.4.2. Application numérique

Nous avons développé un programme informatique avec le logiciel FORTRAN 90 pour calculer cette fonction de fiabilité et pour programmer le modèle mathématique.

Nous supposons que les temps de défaillances locales et propagées suivent des distributions de Weibull avec un paramètre d'échelle  $\lambda$  et un paramètre de forme  $\alpha$  comme indiqué ci-dessous. Lorsque  $\alpha = 1$ , la loi de distribution se réduit à une distribution exponentielle.

$$\begin{aligned}
 \lambda_{A1} = 0.01 \text{ et } \alpha_{A1} = 1; \quad \lambda_{B1} = \lambda_{C1} = 0.012 \text{ et } \alpha_{B1} = \alpha_{C1} = 3; \quad \lambda_{D1} = 0.02 \text{ et } \alpha_{D1} = 3; \\
 \lambda_{Bp} = \lambda_{Cp} = 0.001 \text{ et } \alpha_{Bp} = \alpha_{Cp} = 1;
 \end{aligned}$$

Nous considérons les données d'entrée suivantes qui sont arbitrairement choisies.

**Tableau II.2:** Paramètres d'entrée.

Coût de la main-d'œuvre par unité de temps $C_w$	400 \$	Temps alloué pour maintenir le système avant le début de la $(k+1)$ ème mission, $\Delta_k$	1 unité de temps
Coût de remplacement de chaque composant $i$ , $C_{ri}$	1200 \$	Durée prévue de la $(k+1)$ ème mission, $D_{k+1}$	25 unités de temps

**Chapitre 2: Stratégie optimale de maintenance sélective pour des systèmes sujets à des défaillances aléatoires locales et propagées avec effet d'isolation**

Coût de pénalité par unité de temps, $C_p$	200 (\$ / unité de temps)	Coefficient d'extension de la période de maintenance $\beta_k$	1
Coût de setup, $C_f$	50 \$	Temps $t_i$ requis pour remplacer le composant $i$ , en unités de temps.	( $t_A=0.5$ , $t_B=1.2$ , $t_C=0.9$ , $t_D=0.8$ )

Supposons qu'à la fin de la  $k^{\text{ème}}$  mission, l'état et l'âge de chaque composant sont donnés par les valeurs suivantes choisies arbitrairement:

**Tableau II.3:** Les paramètres d'entrée correspondant à l'état et l'âge de chaque composant à la fin de la  $k^{\text{ème}}$  mission.

$Y_i(k)$	$Y_A(k) = 1$	$Y_B(k) = 1$	$Y_C(k) = 0$	$Y_D(k) = 1$
$E_i(k)$	$E_A(k) = 20$	$E_B(k) = 16$	$E_C(k) = 11$	$E_D(k) = 16$

Il est intéressant de remarquer que les états ci-dessus des composants du système correspondent à un système qui fonctionne dans le cas où la défaillance du composant C a été locale. Dans le cas où ce fut une défaillance propagée, l'ensemble du système devrait être en état de défaillance.

Supposons que le décideur doit sélectionner les composants à remplacer de sorte que la probabilité de défaillance du système lors de la prochaine mission ( $k + 1$ ) ne doive pas dépasser un seuil maximal autorisé de  $F_s^* = 0,17$  (équivalent à une exigence de fiabilité de 83%) avec un minimum de coût et en tenant compte de la période maximale autorisée pour la maintenance.

En utilisant le modèle mathématique combiné avec l'équation (II.25) à chaque fois que la contrainte de fiabilité est testée pour tous les vecteurs de maintenance faisables  $M(k)$  ( $2^4 = 16$  vecteurs), nous obtenons la solution optimale  $M(k)^* = (m_A^* = 0, m_B^* = 0, m_C^* = 1, m_D^* = 1)$ , ce qui correspond à un remplacement préventif du composant D et un renouvellement du composant C trouvé défaillant. Cette solution engendre un coût minimal  $C(k)^* = 3130$  \$ avec une probabilité de défaillance du système pour la prochaine mission  $F_s(D_{k+1}) = 8,02\%$  (inférieure à 17%). Comme le montre le tableau II.4, les autres composants restent dans le même état trouvé à la fin de la  $k^{\text{ème}}$  mission avec le même âge.

**Tableau II.4:** États et âges des composants avant le début de la  $(k+1)$  ème mission.

$X_i(k+1)$	$X_A(k+1)=1$	$X_B(k+1)=1$	$X_C(k+1)=1$	$X_D(k+1)=1$
$A_i(k+1)$	$A_A(k+1)=20$	$A_B(k+1)=16$	$A_C(k+1)=0$	$A_D(k+1)=0$

À noter que pour savoir s'il existe au moins une solution réalisable satisfaisant la contrainte de fiabilité (équation II.3), il faut d'abord vérifier si le vecteur  $M(k) = (1,1,1,1)$  correspondant à un renouvellement de tous les composants permet la satisfaction de la contrainte II.3. Dans le cas contraire, il n'est pas nécessaire de tester toute autre option de maintenance (voir règle #2 pour la réduction de l'espace de solution dans la section suivante). Le gestionnaire des opérations doit trouver un moyen pour raccourcir la durée de la prochaine mission de façon que l'exigence de fiabilité puisse être satisfaite.

## 2.5. Réduction de l'espace des solutions

Dans la pratique, les systèmes, comme ceux considérés dans ce travail, peuvent avoir un grand nombre de composants et pas seulement quatre comme envisagé dans l'exemple numérique précédent. Le temps de calcul pour résoudre le problème en cherchant le vecteur de décision optimale de maintenance  $M(k)^*$  augmente de façon exponentielle avec le nombre de composants «n» considéré. En effet, théoriquement  $2^n$  vecteurs possibles doivent être vérifiés. Dans cette partie, nous proposons un ensemble de règles visant à réduire l'espace des solutions et par conséquent accélérer la procédure d'optimisation.

### 2.5.1. Règles simplificatrices

Pour un vecteur de décision de maintenance donné  $M(k) = \{m_1^k, m_2^k, \dots, m_n^k\}$ , soit  $M_1(k)$  l'ensemble des composants  $i$  pour lesquels  $m_i = 1$  (composants destinés à être remplacés) et  $M_0(k)$  l'ensemble des composants  $j$  pour lesquels  $m_j = 0$  (composants ne devant pas être remplacés). Évidemment:  $j \neq i$  et  $\dim(M_1(k)) + \dim(M_0(k)) = \dim(M(k))$ .

Compte tenu de l'espace de solutions théoriques de  $2^n$  vecteurs de décision de maintenance, les cinq règles suivantes doivent être appliquées afin de réduire potentiellement cet espace. Des exemples liés au système de la figure II.1 considéré dans l'exemple numérique de la section 2.4 seront utilisés pour illustrer quelques règles.

**Règle #1:** Dans le cas où un composant 'i' avec des temps de défaillance exponentiellement distribués est trouvé en état de fonctionnement à la fin de la mission  $k$ ,  $Y_i(k) = 1$ , tous les vecteurs impliquant le renouvellement de ce composant (remplacement préventif) ne doivent pas être vérifiés. En effet, le remplacement d'un tel composant avec un taux de défaillance constant donne des coûts qui sont inutiles et non nécessaires.

**Règle #2:** En commençant à vérifier la séquence de vecteurs théoriques un par un, une fois un vecteur vérifié  $M(k)$  est trouvé satisfaisant la contrainte de durée de maintenance (eq. **II.4**) et ne satisfaisant pas la contrainte de défaillance du système (eq. **II.3**), tous les autres vecteurs restants non encore vérifiés pour lesquels au moins un composant passe de  $M_1(k)$  à  $M_0(k)$  doivent être rejetés ou écartés. En fait, une transition ou un passage de composant de  $M_1(k)$  à  $M_0(k)$  implique certainement une plus grande probabilité de défaillance du système (équivalent à un niveau plus faible de fiabilité du système).

Par conséquent, selon cette règle, le vecteur  $M(k) = (1,1,1,1)$  doit être toujours le premier vecteur à vérifier car dans le cas où il ne satisfait pas la contrainte de fiabilité, il n'existe pas de solutions au problème et, comme mentionné précédemment, la durée de la prochaine mission doit être raccourcie de telle sorte que l'exigence de fiabilité peut être satisfaite dans le cas d'un remplacement de tous les composants.

**Illustration de la règle #2:** Pour une séquence donnée de vecteurs de décision, supposons que le premier vecteur de maintenance vérifié et trouvé ne satisfaisant pas la contrainte (**II.3**) est  $M(k) = (1,1,0,0)$  (équivalent à  $M_0(k) = \{C, D\}$  et  $M_1(k) = \{A, B\}$ ). Pour une durée de mission  $D(k+1)=23$  unités de temps et pour les états suivants des composants à la fin de la  $k^{\text{ème}}$  mission :  $Y_A(k)=1; Y_B(k)=1, Y_C(k)=1, Y_D(k)=1$ , nous obtenons pour ce vecteur testé  $F_s(k+1) = 0,217 > F_s^* = 0,17$  et le  $\max(t_i) = t_A = 0,5 < 2$ . Par conséquent, nous observons les conditions d'application de la règle #2. Tableau **II.5** ci-dessous montre tous les vecteurs qui doivent être rejetés dans le cas où ils n'ont pas été encore vérifiés.

**Tableau II.5:** Exemple de vecteurs de maintenance qui doivent être rejetés par l'application de la règle #2.

<i>Vecteurs de maintenance</i>	<i>Probabilité de défaillance du système</i>
$(\mathbf{0},1,0,0)$	$F_s(k+1) = 0.219$
$(1,\mathbf{0},0,0)$	$F_s(k+1) = 0.262$
$(\mathbf{0},\mathbf{0},0,0)$	$F_s(k+1) = 0.263$

**Règle #3 :** Dans le cas où un phénomène d'isolation se produit lors de la  $k^{\text{ème}}$  mission (équivalant à dire que le composant déclencheur, s, est défaillant:  $Y_s(k)=0$ ) et aucun des composants dépendants n'est tombé en panne avant l'isolation, tous les composants dépendants sont alors inutilisables. Dans une telle situation, vérifier le vecteur de maintenance  $M(k) = (0,0,0,0)$  qui correspond au cas où aucun composant ne doit être remplacé, s'il ne satisfait pas la contrainte de fiabilité, alors tous les vecteurs qui impliquent le remplacement d'un composant dépendant, d, sans remplacement du composant déclencheur défaillant doivent être rejetés  $\{(\mathbf{0}_s,0_d,1_d,\dots) (\mathbf{0}_s,1_d,0_d,\dots) (\mathbf{0}_s,1_d,1_d,\dots), \text{etc.}\}$ . Cela se justifie par le fait que le remplacement d'un composant dépendant ne peut pas augmenter la fiabilité du système quand le composant déclencheur est en état de défaillance.

**Illustration de la règle #3:** Supposons les états suivants des composants à la fin de la  $k^{\text{ème}}$  mission:  $Y_A(k)=0; Y_B(k)=1, Y_C(k)=1, Y_D(k)=0$ . Supposons également que le vecteur  $M(k) = (0,0,0,0)$  ne satisfait pas la contrainte de fiabilité (II.3). Rappelant que, comme indiqué dans la figure II.1, le composant déclencheur est le composant A, on peut voir que ces états correspondent à une défaillance du composant déclencheur et des composants dépendants protégés (inutilisables) B et C.

Ainsi, selon cette règle #3, les vecteurs suivants doivent être rejetés:  $(0,1,0,0)$  ,  $(0,1,0,1)$  ,  $(0,1,1,0)$  ,  $(0,0,1,0)$  ,  $(0,0,1,1)$  ,  $(0,1,1,1)$ .

**Règle #4:** Lors de la vérification de la séquence des vecteurs théoriques un par un, une fois un vecteur vérifié  $M(k)$  avec au moins un composant i devant être remplacé est trouvé ne

satisfaisant pas la contrainte de durée de maintenance (eq. II.4) en raison de la durée de son remplacement, tous les autres vecteurs non encore testés impliquant le remplacement du composant  $i$  doivent être rejetés.

*Illustration de la règle #4:* Considérons les durées de remplacement de chaque composant comme suit:  $t_A=0.5$ ,  $t_B=2.2$ ,  $t_C=0.4$  et  $t_D=0.9$  avec un temps maximum alloué pour la maintenance (y compris l'extension possible) égal à 2 unités de temps. Pour une séquence donnée de vecteurs de décision, supposons que le premier vecteur de maintenance testé et trouvé ne satisfaisant pas la contrainte (II.4) est celui  $M(k) = (1, \boxed{1}, 0, 0)$ . Sachant  $t_B=2.2 > 2$ , selon cette règle #4, les vecteurs représentés dans le tableau II.6 ci-dessous peuvent être rejetés.

**Tableau II.6:** Exemple de vecteurs de maintenance qui doivent être rejetés par l'application de la règle #4.

<i>Vecteurs de maintenance</i>	<i>Contrainte de temps de maintenance</i>
$(1, \boxed{1}, 1, 0)$	$t_B = 2.2 > 2$
$(1, \boxed{1}, 0, 1)$	$t_B = 2.2 > 2$
$(1, \boxed{1}, 1, 1)$	$t_B = 2.2 > 2$
$(0, \boxed{1}, 0, 0)$	$t_B = 2.2 > 2$
$(0, \boxed{1}, 0, 1)$	$t_B = 2.2 > 2$
$(0, \boxed{1}, 1, 0)$	$t_B = 2.2 > 2$
$(0, \boxed{1}, 1, 1)$	$t_B = 2.2 > 2$

**Règle #5:** Considérons le premier vecteur qui est trouvé satisfaisant les deux contraintes (équations II.3 et II.4). Tous les autres vecteurs restants non encore testés pour lesquels au moins un composant passe de  $M_0(k)$  à  $M_1(k)$  doivent être rejetés. En effet, le passage d'un élément de  $M_0(k)$  à  $M_1(k)$  implique automatiquement un coût supplémentaire additionnel lié au remplacement de ce composant.

**Illustration de la règle #5:** Supposons que le premier vecteur de maintenance trouvé satisfaisant les deux contraintes (équations II.3 et II.4) est  $M(k) = (1,0,0,0)$  (c'est-à-dire  $M_0(k) = \{B,C, D\}$  et  $M_1(k) = \{A\}$ ).

Pour une mission de durée  $D(k+1)=10$  unités de temps et pour les états suivants des composants à la fin de la  $k^{\text{ème}}$  mission par exemple:  $Y_A(k)=1; Y_B(k)=1, Y_C(k)=1, Y_D(k)=1$  avec  $t_A=0.5, t_B=1.2, t_C=0.4$  et  $t_D=0.9$ , on obtient  $F_s(k+1)=0.0531 < F_s^*=0,17$  et  $\max(t_i, i \in M_1(k)) = t_A=0,5 < 2$ .

Le tableau II.7 ci-dessous montre tous les vecteurs qui doivent être rejetés parce qu'ils impliquent des coûts supplémentaires:

**Tableau II.7:** Exemple de vecteurs de maintenance devront être rejetés par application de la règle #5.

<i>Vecteurs de maintenance</i>	<i>Coût additionnel de maintenance</i>	<i>Probabilité de défaillance du système</i>
$(\mathbf{1}, 1, 0, 0)$	Coût lié au remplacement du composant B	$F_s(k+1) = 0,045$
$(\mathbf{1}, 1, 1, 0)$	Coûts liés aux remplacements des composants B et C	$F_s(k+1) = 0,037$
$(\mathbf{1}, 1, 1, 1)$	Coûts liés aux remplacements des composants B, C et D	$F_s(k+1) = 0,019$
$(\mathbf{1}, 1, 0, 1)$	Coûts liés aux remplacements des composants B et D	$F_s(k+1) = 0,020$
$(\mathbf{1}, 0, 0, 1)$	Coût lié au remplacement du composant D	$F_s(k+1) = 0,021$
$(\mathbf{1}, 0, 1, 0)$	Coût lié au remplacement du composant C	$F_s(k+1) = 0,045$

Il est à noter qu'à l'exception de la règle #1 qui doit être systématiquement appliquée en premier lieu, les règles à utiliser et la performance globale de leur utilisation en termes de réduction de l'espace de solutions, dépendent de l'ordre dans lequel les vecteurs de maintenance seront considérés.

Une fois la règle #1 appliquée, comme indiqué dans la règle #2, nous devons toujours commencer premièrement par vérifier le vecteur maintenance  $M(k) = (1,1,1,1)$  s'il n'a pas été déjà écarté par l'application de la règle #1. L'étape suivante consiste à vérifier si on est dans une configuration similaire à celle relative à la règle #3 (les composants déclencheurs en état de défaillance à la fin de la mission  $k$ ).

Nous présentons ci-dessous deux exemples illustrant l'utilisation d'une combinaison de certaines règles parmi celles proposées pour deux séquences différentes de vecteurs de maintenance correspondants au même système considéré dans la figure II.1.

### 2.5.2. Exemples illustratifs

Considérons le système de la figure II.1, et supposons les données d'entrée suivantes:

- $D(k+1) = 23$  unités de temps.
- Les états des composants à la fin de la  $k^{\text{ème}}$  mission :  $Y_A(k)=1$ ;  $Y_B(k)=0$ ,  $Y_C(k)=0$ ,  $Y_D(k)=1$ .
- Les temps nécessaires pour maintenir chaque composant:  $t_A = 2.2$ ,  $t_B = 1.2$ ,  $t_C = 0.4$  et  $t_D = 0.9$  (en unités de temps).
- $F_s^* = 0,17$ .
- La période de maintenance y compris une extension: 2 unités de temps.

Supposons que les seize vecteurs de maintenance doivent être à priori vérifiés dans l'ordre suivant:

$(1,1,1,1)$ ,  $(1,1,1,0)$ ,  $(1,1,0,1)$ ,  $(1,1,0,0)$ ,  $(1,0,1,0)$ ,  $(1,0,1,1)$ ,  $(1,0,0,1)$ ,  $(1,0,0,0)$ ,  $(0,1,1,1)$ ,  $(0,1,1,0)$ ,  $(0,1,0,1)$ ,  $(0,1,0,0)$ ,  $(0,0,1,1)$ ,  $(0,0,1,0)$ ,  $(0,0,0,1)$ ,  $(0,0,0,0)$ .

L'application de notre modèle tenant compte des différentes règles de réduction de l'espace de solutions donne les résultats suivants:

Tout d'abord, les vecteurs impliquant le remplacement préventif du composant A sont éliminés conformément à la règle #1 parce qu'il est en état de fonctionnement ( $Y_A(k)=1$ ) et ses temps de défaillance locale suivent une distribution exponentielle.

Les vecteurs de maintenance qui restent encore à tester sont :  $(0,1,1,1)$ ,  $(0,1,1,0)$ ,  $(0,1,0,1)$ ,  $(0,1,0,0)$ ,  $(0,0,1,1)$ ,  $(0,0,1,0)$ ,  $(0,0,0,1)$ ,  $(0,0,0,0)$ .

Le premier vecteur vérifié  $M(k) = (0, 1, 1, 1)$  est trouvé satisfaisant les deux contraintes: la contrainte de fiabilité (II.3) et la contrainte de durée de maintenance (II.4). La règle #5 est



**Chapitre 2: Stratégie optimale de maintenance sélective pour des systèmes sujets à des défaillances aléatoires locales et propagées avec effet d'isolation**

donc appliquée comme indiqué dans le tableau **II.8** ci-dessous qui montre la totalité des séquences vérifiées avec les vecteurs qui ont été éliminés.

**Tableau II.8:** Exemple d'usage combiné de quelques règles de réduction de l'espace de solutions possibles.

Vecteurs de décision de maintenance vérifiés	Règles appliquées	Vecteurs rejetés
-	Règle # 1	(1,1,1,1) (1,1,1,0) (1,1,0,1) (1,1,0,0) (1,0,1,0) (1,0,1,1) (1,0,0,1) (1,0,0,0)
<b>(0,1,1,1)</b>	Règle # 5	(1,1,1,1) Déjà rejeté
<b>(0,1,1,0)</b>	Règle # 5	(1,1,1,1) Déjà rejeté (0,1,1,1) Déjà vérifié
<b>(0,1,0,1)</b>	Règle # 2 (Violation de la contrainte (II.3))	(0,1,0,0) (0,0,0,1) (0,0,0,0)
<b>(0,0,1,1)</b>	Règle # 2 (Violation de la contrainte (II.3))	(0,0,1,0)

Maintenant, supposons que l'ordre des vecteurs de maintenance à vérifier a priori est différent et présenté comme suit: (1,1,1,1), (1,1,1,0), (1,1,0,1), (1,1,0,0), (1,0,1,0), (1,0,1,1), (1,0,0,1), (1,0,0,0), **(0,0,0,1), (0,1,0,0), (0,0,1,0), (0,1,1,0), (0,1,0,1), (0,1,1,1), (0,0,1,1), (0,0,0,0)**. La séquence en gras est la partie de la séquence différente de celle considérée ci-dessus.

Comme dans l'exemple précédent, les mêmes vecteurs éliminés conformément à la règle #1 doivent également être éliminés indépendamment de l'ordre des vecteurs de maintenance à tester. Par conséquent, les autres vecteurs restants à vérifier sont ceux en gras.

Les résultats obtenus sont présentés dans le tableau **II.9** ci-dessous:

**Tableau II.9:** Exemple d'un usage combiné de quelques règles de réduction de l'espace de solutions.

Vecteurs de décision de maintenance vérifiés	Règles appliquées	Vecteurs rejetés
-	Règle # 1	(1,1,1,1) (1,1,1,0) (1,1,0,1) (1,1,0,0) (1,0,1,0) (1,0,1,1) (1,0,0,1) (1,0,0,0)
(0,0,0,1)	Règle # 2 (Violation de la contrainte (II.3) )	(0,0,0,0)
(0,1,0,0)	Règle # 2 (Violation de la contrainte (II.3))	(0,0,0,0)
(0,0,1,0)	Règle # 2 (Violation de la contrainte (II.3))	(0,0,0,0)
(0,1,1,0)	Règle # 5	(0,1,1,1)
(0,1,0,1)	Règle # 2 (Violation de la contrainte (II.3))	(0,1,0,0) Déjà vérifié (0,0,0,1) Déjà vérifié (0,0,0,0)
(0,0,1,1)	Règle # 2 (Violation de la contrainte (II.3))	(0,0,0,1) Déjà vérifié (0,0,1,0) Déjà vérifié (0,0,0,0)

Ainsi, comme le montre le tableau **II.9**, seulement 6 vecteurs ont été vérifiés parmi les 16 vecteurs potentiels. Ceci correspond à une réduction de 62,5% de l'espace des solutions, qui est différent du rapport de 75% obtenu dans le premier exemple considérant un ordre différent de vérification des vecteurs de maintenance.

Il est intéressant de mentionner que les algorithmes existants dans la littérature comme par exemple ceux proposés par **Galante et Passannanti (2009)** et **Certa et al. (2011)**, s'appliquant essentiellement aux systèmes série-parallèles, pourraient éventuellement être considérés pour résoudre le même problème pour des systèmes avec une concurrence entre

les défaillances et qui sont soumis à l'isolation de défaillance et à des effets de propagation, mais avec quelques modifications nécessaires. En effet, ces algorithmes intègrent d'une certaine manière des idées proches de celles des règles # 2, # 4 et # 5 présentées précédemment. Cependant, ils ne comprennent pas des règles comme la règle # 3, qui prend en compte les effets de l'isolation de la défaillance.

## **2.6. Le problème de plusieurs missions consécutives**

Jusqu'ici, nous avons considéré que l'âge et l'état de chaque composant à la fin d'une mission donnée sont supposés connus. Le modèle de programmation mathématique développé permet de sélectionner les composants à remplacer avant le début de la prochaine mission. Dans le cas où l'on doit faire face à un système neuf destiné à accomplir une série de missions successives de durées connues, nous proposons une combinaison entre le modèle mathématique et le modèle de simulation de Monte-Carlo, qui évalue les performances du système (l'âge et l'état des composants) à la fin de chaque mission. A cet effet, nous avons développé une procédure générale de résolution de ce problème multi-missions. Cette procédure est présentée dans la section suivante.

### **2.6.1. Algorithme de résolution**

Les principales étapes de la procédure se résument comme suit (figure II. 2):

**Étape 1.** On commence avec un système neuf. Introduire les paramètres d'entrée du problème : les coûts liés à chaque composant  $C_w$ ,  $C_{ri}$ ,  $C_p$ ,  $C_f$ , les fonctions de densité de probabilité  $f_{il}$  et  $f_{ip}$ ,  $K$  le nombre de missions, le vecteur des durées de missions  $D(k)$  ( $k= 1, \dots, K$ ), le temps alloué pour le maintien du système avant le début de la  $(k + 1)^{\text{ème}}$  mission,  $\Delta$ , le coefficient de prolongation ou d'extension  $\beta_k$  de la période de maintenance, le temps  $t_i$  nécessaire pour remplacer le composant  $i$  et  $n$  le nombre de composants. Initialiser  $k$  dans la première mission ( $k=1$ ).

**Étape 2.** Simuler les instants de défaillance locale et propagée  $TBF_{il}$  et  $TBF_{ip}$  pour chaque composant en utilisant les fonctions de distribution appropriées de chaque composant (Weibull, normale ...).

**Étape 3.** Une fois que les instants sont générés, ils sont comparés entre eux et à la durée  $D(k)$  de la première mission. Vérifier s'il y a occurrence de phénomène d'isolation ou de propagation de défaillance. Exemple de la figure II.1: si le premier instant de défaillance du

composant A (élément déclencheur qui est responsable de l'isolation des autres composants (composants dépendants) arrive au cours de la première mission et avant l'occurrence de toute défaillance propagée, alors l'état du composant A est égal à  $X_A(k)=0$  qui réfère un état de défaillance. Mémoriser l'âge atteint à  $E_A(k)=TBF_{AI}(k)$ . Nous rappelons que dans ce cas particulier, tous les composants dépendants sont inutilisables (isolés) et leurs états (dans notre exemple:  $Y_B(k)$  et  $Y_C(k)$ ) son égaux à 0 et l'âge de chacun est fixé à l'instant de défaillance du composant déclencheur ( $E_B(k)=TBF_{AI}(k)$ ). Sinon, si le composant A survit pendant la première mission (pas de défaillances propagées), l'état correspond à  $X_A(k) = 1$  et l'âge  $E_A(k)=D(k)$ . A la fin de cette étape, tous les états et les âges des composants sont identifiés et ils sont considérés comme paramètres d'entrée du modèle mathématique qui sera utilisé dans l'étape suivante.

**Étape 4.** Dans cette étape, nous choisissons un vecteur de décision de maintenance (commencer de préférence par  $\mathbf{M}(0) = (1,1,1,1)$ ) et calculer l'âge et l'état de chaque composant avant le début de la prochaine mission en utilisant les équations (II.7) et (II.8). Pour le vecteur choisi, calculer la probabilité de défaillance du système pour la prochaine mission et calculer le coût de maintenance correspondant  $C(k = 1)$ . Si l'une des deux contraintes (II.3) et (II.4) n'est pas vérifiée alors ce vecteur est rejeté.

Choisir ensuite au autre vecteur de maintenance, ici nous pouvons utiliser les règles de réduction de l'espace des solutions présentées dans la section précédente. Si les deux contraintes sont vérifiées pour cette combinaison, stocker le résultat.

**Étape 5.** Une fois toutes les solutions faisables (les vecteurs de maintenance possibles) obtenus, choisir la solution optimale qui implique le coût le plus faible. Fixer le vecteur optimal  $\mathbf{M}(k)^*$  en tant que condition de passage à l'étape suivante.

**Étape 6.** Passer à la mission suivante  $k + 1$  pour simuler l'âge et l'état de chaque composant à la fin de la mission suivante. Selon le vecteur  $\mathbf{M}(k)^*$  trouvé à l'étape précédente, si le composant a été remplacé à la fin de la mission précédente, passer à l'étape 2 et recommencer à partir de cette étape. Si le composant n'a pas été remplacé, alors les instants de défaillances des composants à considérer durant la  $(k + 1)^{\text{ème}}$  mission sont recalculés selon les trois options suivantes :

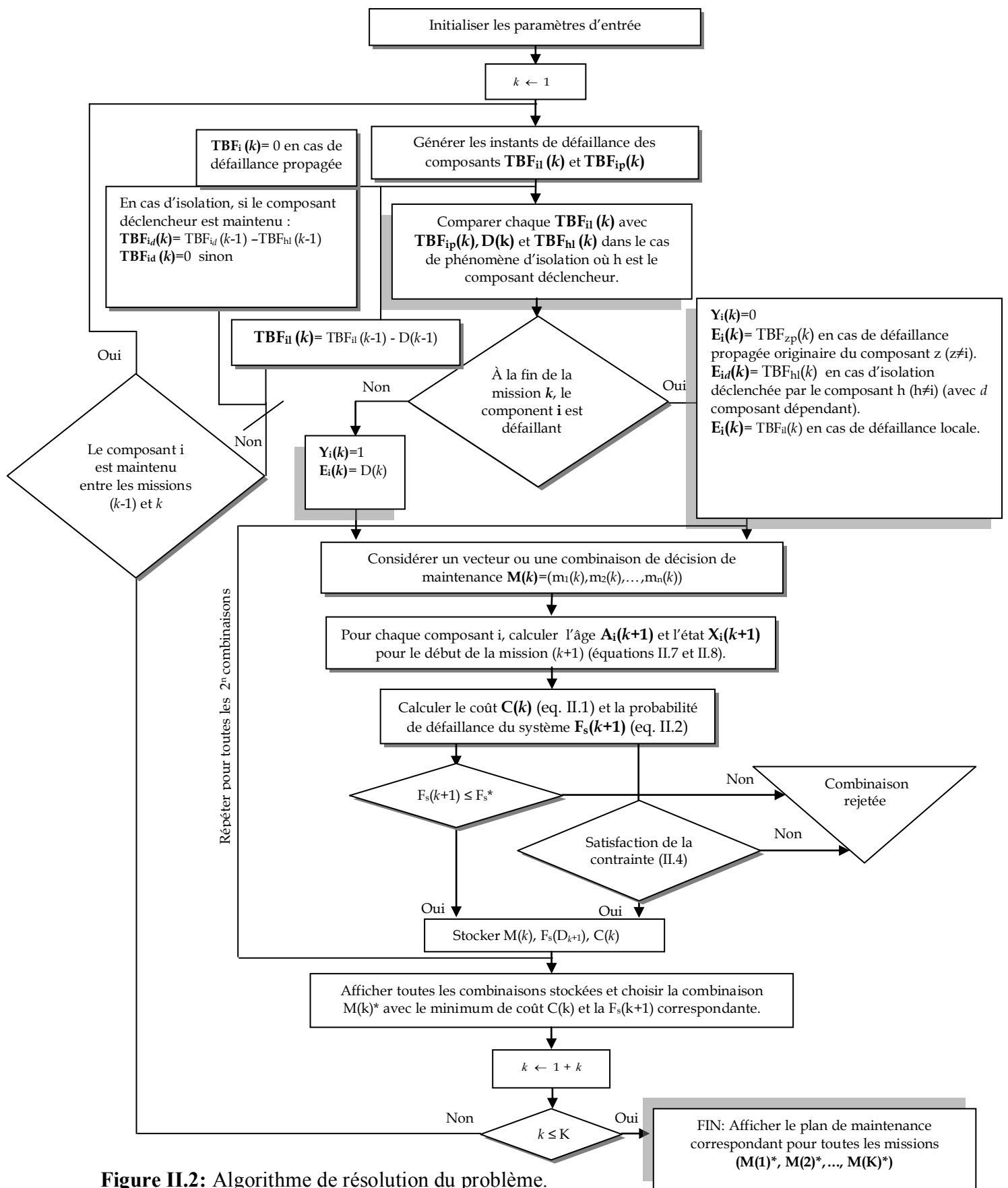
## Chapitre 2: Stratégie optimale de maintenance sélective pour des systèmes sujets à des défaillances aléatoires locales et propagées avec effet d'isolation

---

- Option I : Dans le cas où il n'y a pas de défaillance ou d'isolation du composant  $i$  durant la mission  $k$ , l'instant de défaillance à considérer durant la mission  $(k + 1)$  est le même généré dans la mission précédente  $k$  diminué de la durée de la mission  $D(k)$ .
- Option II : En cas de phénomène d'isolation, si le composant déclencheur est maintenu alors les instants de défaillances des composants dépendants (isolés durant la  $k^{\text{ème}}$  mission) sont donnés par les mêmes générés dans la mission précédente  $k$  décalés par la durée de fonctionnement jusqu'à l'instant où l'isolement a eu lieu. Dans le cas où le composant déclencheur n'a pas été maintenu durant la mission précédente ceci implique que le temps de défaillance pour la prochaine mission sera nul puisque les composants isolés sont encore dans le même état.
- Option III : En cas de défaillances locales ou propagées, le composant  $i$  reste dans son état s'il n'est pas été maintenu. L'instant de défaillance à considérer durant la prochaine mission sera donc nul.

Une fois ces trois options sont vérifiées, aller ensuite à l'étape 3 et répéter toutes les étapes précédentes jusqu'à atteindre la dernière mission ( $k = K$ ).

Au final, afficher les vecteurs de maintenance optimaux pour toutes les missions  $(M(1)^*, M(2)^*, \dots, M(K)^*)$  ainsi que les coûts de maintenance correspondants.



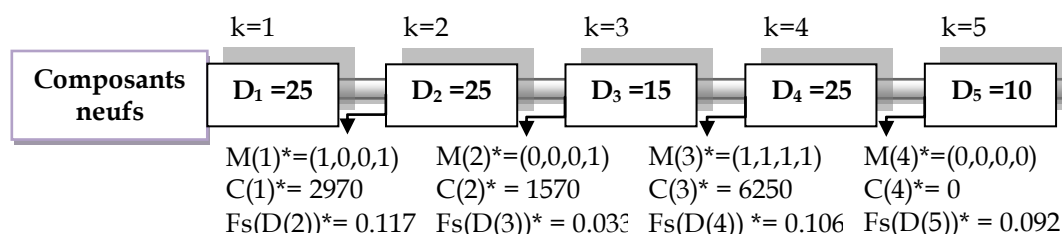
**Figure II.2:** Algorithme de résolution du problème.

### 2.6.2. Exemple illustratif

A titre d'exemple illustratif de cette approche combinée basée sur l'algorithme présenté dans la section précédente, nous allons examiner de nouveau le système de la figure II.1 avec les mêmes données d'entrée utilisées dans la section 2.4, sauf le paramètre d'échelle de la distribution de Weibull associée au temps de défaillance locale du composant A qui est considéré dans cet exemple  $\lambda_{A1}=0.04$ . Une séquence de 5 missions successives de durées  $D(k) = (25, 25, 15, 25, 10)$  est considérée avec une période de maintenance de 2 unités de temps (y compris l'extension possible) entre les missions et une probabilité de défaillance maximale autorisée  $F_s^* = 0.12$  pour chaque mission.

Ainsi, commençant avec des composants neufs, à la fin de chaque mission simulée qui donne un ensemble d'âges et d'états des composants, le modèle de programmation mathématique avec les règles de réduction de l'espace de solutions sont utilisés pour sélectionner les composants devant être remplacés pendant la période inter-missions allouée à la maintenance. La figure II.3 ci-dessous montre les résultats obtenus avec notamment le vecteur optimal de maintenance et le coût correspondant ainsi que la probabilité de défaillance du système pour chaque période de maintenance entre les missions.

Il convient de noter que 200 000 répliques ont été utilisées pour la simulation de Monte-Carlo pour générer l'âge et l'état des composants à la fin de chaque mission.



**Figure II.3:** Décisions optimales de maintenance entre les missions successives.

Comme le montre la figure II.3, le remplacement des deux composants A et D doit être effectué au cours de la première période de maintenance. Après la fin de la deuxième mission, seulement un remplacement du composant D doit être effectué. Ensuite, le renouvellement de l'ensemble du système doit être effectué entre la troisième et la quatrième mission. Enfin, aucun remplacement ne doit être fait entre les deux dernières missions.

## **2.7. Conclusion**

Dans ce chapitre, nous avons proposé une formulation du problème de maintenance sélective pour des systèmes multi-composants permettant d'aider le décideur à sélectionner les composants qui doivent être maintenus entre les missions consécutives de façon qu'un niveau de fiabilité souhaité soit garanti jusqu'à la prochaine mission, ceci à un coût minimum et en tenant compte des limites sur le temps disponible pour faire la maintenance entre les missions. À cet égard lié à la contrainte de temps, nous avons considéré les situations où tous les remplacements des composants commencent en même temps et simultanément.

En outre, l'approche proposée tient compte de la dépendance économique d'une part, et d'autre part, elle a été appliquée au cas de systèmes multi-composants complexes avec dépendance stochastique impliquant le phénomène d'isolation de défaillance et les effets de propagation. Il convient de noter que le modèle mathématique développé peut également être appliqué à tous types de structure de systèmes avec tous types de distributions associées aux temps de défaillances des composants, à condition que l'on puisse évaluer la fonction de fiabilité du système avec des composants neufs ou usagers.

Pour le type de système considéré dans ce travail, le temps de calcul pour résoudre le problème et trouver le vecteur optimal de décision de maintenance  $M(k)^*$  augmente de façon exponentielle avec le nombre de composantes  $n$ . De ce fait, nous avons proposé une série de règles visant à réduire potentiellement l'espace de solution et par conséquent accélérer la procédure d'optimisation.

Enfin, une combinaison de simulation Monte-Carlo et du modèle de programmation mathématique a été utilisée pour faire face à un certain nombre de missions successives initié par un système neuf.

Ce travail est actuellement en cours d'extension pour certaines conditions comprenant la possibilité d'effectuer des actions de maintenance préventive imparfaites entre les missions. Nous envisageons également d'affiner l'utilisation des règles de réduction de l'espace de solutions en vue de trouver des indications sur l'ordre selon lequel les vecteurs de maintenance possibles doivent être testés afin d'obtenir les meilleures performances de réduction.



## **Chapitre 2: Stratégie optimale de maintenance sélective pour des systèmes sujets à des défaillances aléatoires locales et propagées avec effet d'isolation**

---

Une autre extension possible de ce travail consiste à considérer des systèmes plus complexes avec des dépendances stochastiques multiples (intégrant plus d'un élément déclencheur) comme les systèmes récemment étudiés par **Wang et al. (2013)**.

---

*Chapitre III : Politique intégrée de  
production-maintenance sous  
dépendance stochastique entre les  
machines*

---

## Politique intégrée de production-maintenance sous dépendance stochastique entre les machines

### Résumé

*Ce chapitre porte sur le développement d'une politique intégrée production-maintenance pour un système composé par  $n$  lignes de production fonctionnant en parallèle pour satisfaire une demande périodique aléatoire. Ces lignes de production sont sujettes à des défaillances aléatoires. Le but recherché est d'étudier l'effet "domino" dans ces lignes de production liées par une dépendance de commande. En effet, si une ligne tombe en panne la charge de production d'au moins une des autres lignes en fonctionnement passera à la cadence maximale de façon à compenser les pertes de production dues à l'arrêt de la ligne défaillante. Ce passage à la cadence maximale entraîne un accroissement du taux de dégradation des lignes en question augmentant ainsi leur taux de panne. Afin de réduire cet effet d'accélération des pannes des lignes en surcharge, une politique de maintenance préventive périodique est envisagée dessus. Un modèle mathématique est proposé pour modéliser les coûts relatifs à cette politique intégrée sur un horizon de production fini. Les coûts de production, de stockage et de maintenance sont considérés. Vu la complexité du modèle général dans le cas de  $n$  lignes, l'étude est réduite au cas de deux lignes seulement. Dans ce cas, une optimisation séquentielle est réalisée pour déterminer, dans un premier temps, le plan de production optimal du système et, dans une deuxième étape, la période optimale de maintenance préventive à réaliser sur la deuxième ligne qui doit passer à sa cadence maximale à chaque fois que la première ligne tombe en panne. Enfin, un exemple numérique est présenté pour illustrer la démarche adoptée.*

### **3.1. Introduction**

La variété des produits sur les marchés et la croissance de la demande ne cessent d'accroître la compétitivité entre les entreprises en termes de ventes. En réponse à ces nouvelles exigences, les entreprises changent occasionnellement de stratégies de production. Afin de rendre le système plus réactif et dynamique, il est nécessaire (indispensable) pour ces entreprises de disposer d'informations actualisées sur l'état du système, sa configuration et la capacité des ressources mobilisées. L'information peut être disponible si les ressources déployées fournissent les interfaces requises.

Pour les systèmes d'exploitation en continu, la perte de productivité due à l'arrêt d'un système suite à une défaillance ou suite à une intervention de maintenance est très importante et parfois très coûteuse. La planification de la production sur différents horizons vise à satisfaire les commandes clients ou les prévisions de ventes en termes de quantité, de qualité et de délai. Parfois en raison de facteurs internes et externes aux systèmes, comme la fréquence de panne des machines de production, la disponibilité des équipes de maintenance, la non-coordination entre les services de production et de maintenance, cette planification n'est pas respectée.

Dans ce contexte, une approche très utilisée aujourd'hui dans l'industrie consiste à adopter une politique de maintenance préventive qui vise à améliorer la disponibilité du système de production et à réduire les coûts opérationnels souvent dus au non-respect des périodes de production et des délais de livraison. Afin de répondre à ces exigences, on cherche à faire le couplage entre la production et la maintenance en mettant en place ce qu'on appelle dans la littérature des politiques intégrées maintenance-production.

#### **3.1.1. Couplage production-maintenance**

L'objectif principal de la fonction production est de satisfaire la demande clients en termes de quantité et de qualité de produits tout en respectant les délais et ceci au moindre coût.

La fonction maintenance a pour objectifs de réduire la fréquence des pannes et de minimiser les durées des interruptions accidentelles de service suite aux pannes. Ces deux fonctions étant intimement liées, il faut les considérer conjointement. Les premiers travaux de recherche dans ce domaine traitaient séparément les domaines de maintenance de la production.

En effet, les premiers travaux se sont concentrés sur l'étude des politiques de contrôle de production, comme le modèle de quantité économique (EPQ). Initialement, ce modèle supposait un système ne présentant pas de défaillances; par la suite, cette hypothèse a été relaxée dans d'autres travaux afin de tenir compte de la réalité des systèmes. **Groenevelt et al (1992)** ont étudié l'effet des arrêts dus aux pannes sur la quantité économique à produire. **Van der Duyn Schouten and Vanneste (1995)** ont examiné le problème de couplage de la maintenance et de la production. Ils ont adopté une politique de maintenance préventive qui dépend simultanément de l'âge du système, et du niveau de stock de sécurité.

Généralement, les plans de production et de maintenance ne sont pas déterminés conjointement. Dans la plupart des travaux les deux planifications se font séparément. D'après (**Budai et al. 2008**), les modèles de planification de la maintenance intégrée à la production sont subdivisés en quatre catégories :

- Les modèles de haut niveau considérant les problèmes conceptuels et de conception de processus.
- Les modèles de la quantité optimale à produire, qui a été initialement posé comme un simple problème de stock, mais qui a été étendu par la suite pour traiter également les aspects de la qualité et des pannes.
- Les modèles des systèmes de production avec stocks tampons qui sont appropriés pour faire face à des pannes.
- Les modèles d'optimisation des taux de production et des fréquences de maintenance préventive de manière à minimiser le coût total incluant les coûts de l'inventaire, de la production et de la maintenance.

Durant les dernières années, de nombreuses recherches ont été proposées qui traitent de politiques conjointes de production et de maintenance. Deux approches sont distinguées, l'approche restreinte qui traite le problème dans le cas d'une seule machine et l'approche globale, dans le cas de plusieurs machines.

Généralement, une ligne de production à plusieurs machines se comporte comme un système constitué par plusieurs composants qui interagissent ou non entre eux. Dans cette thèse notre intérêt se limitera aux systèmes multi-composants. Toutefois, il est nécessaire d'examiner les systèmes constitués par un seul composant ou machine afin de comprendre les limites de ces

modèles. Dans ce qui suit nous faisons un classement des principales politiques intégrées production-maintenance selon les deux approches citées ci-dessus (restreinte et globale).

### **3.1.2. Modèles centrés sur des systèmes monolithiques**

La majorité des travaux figurant dans la littérature sur les politiques de maintenance des systèmes de production considère le cas d'une seule machine.

**Boukas et Liu (2001)** considèrent le modèle de flux continu dans lequel la machine est supposée avoir trois états de marche: bon, moyen et mauvais, et un état de défaillance. Les transitions d'un état à l'autre sont régies par une chaîne de Markov. L'objectif de ce travail est d'optimiser le taux de production et les fréquences de maintenance (les taux de transition vers l'état 'bon') afin de minimiser le coût total y compris les coûts de stockage, les coûts de pénalités dues au non-respect du carnet de commandes, et les coûts de maintenance.

Les auteurs dans **Ouali et al. (2002)** ont développé une stratégie intégrée de maintenance et de commande pour l'optimisation du stock de produits finis d'un système de production constitué d'une seule machine et produisant un seul type de produit. La production doit satisfaire une demande constante dans le temps. Le niveau du stock et l'âge du système de production sont exploités dans le développement de la stratégie de maintenance. Pour l'optimisation de cette dernière, les auteurs prennent en compte le plan de production ainsi que la disponibilité des ressources nécessaires à la réalisation des actions de maintenance. La construction d'un stock de sécurité est envisagée. Quand le niveau de stock de sécurité est atteint, la machine produit au taux de la demande. Du point de vue fiabilité, la machine est sujette à des pannes aléatoires qui nécessitent l'arrêt immédiat de la production. D'autre part, la machine est soumise à un programme de maintenance préventive de type âge. Pendant les périodes de maintenance préventive ou corrective, la demande est réglée par la quantité dans le stock de sécurité. Le non satisfaction de la demande suite à l'épuisement total du stock entraîne des pénuries. Le stock de produits finis est géré selon une politique de commande qui consiste à produire à une cadence supérieure à la demande jusqu'à compléter le stock à un certain niveau, puis à produire à la demande. Les modèles analytiques régissant la stratégie de maintenance, la politique de commande et la stratégie intégrée de maintenance et de production sont conçus pour évaluer le coût total moyen par unité de temps sur un horizon infini. Un logiciel de simulation commercial a été utilisé pour modéliser et simuler le fonctionnement de la machine sous les règles dictées par la stratégie intégrée de maintenance

et de production. Les résultats numériques obtenus à l'aide de la simulation montrent une réduction significative du coût total moyen par rapport au coût encouru sans maintenance préventive.

Afin de pallier les perturbations causées par les pannes et par les actions de maintenance planifiées, **Chelbi et Ait-Kadi (2004)** ont proposé la construction d'un stock tampon de niveau  $S$ . Dans ce travail, les auteurs considèrent une machine de production réparable sujette à des pannes aléatoires, qui alimente l'entrée d'une ligne d'assemblage fonctionnant selon une configuration en juste-à-temps. Des actions de maintenance préventive sont régulièrement effectuées sur la machine de production à des instants  $T, 2T, 3T, \dots$ . Les actions de maintenance correctives et préventives ont des durées aléatoires. Le stock est construit afin d'assurer l'approvisionnement continu de la ligne d'assemblage à un taux constant  $\beta$ . Pour constituer ce stock tampon, la machine de production produit à un taux  $\alpha + \beta$ . La stratégie proposée consiste à mettre, au début de chaque cycle de maintenance préventive, un stock tampon dont la taille  $S$  couvre au moins la consommation moyenne pendant les périodes de réparation suite à des pannes dans le délai d'une longueur  $T$ . A l'instant  $T$  lorsque la machine de production doit être arrêtée pour entreprendre les actions de maintenance préventive planifiée, un certain niveau de stock de sécurité doit toujours être disponible afin d'éviter un arrêt probable de la ligne d'assemblage. Un modèle mathématique a été développé pour cette stratégie. Il prend en compte les distributions de probabilités associées aux durées de vie, aux temps de réparation, aux durées de la maintenance préventive, ainsi que le processus de renouvellement associé aux cycles de réparation de la machine de production. Les valeurs optimales des variables de décision  $S$  et  $T$  sont obtenues par la minimisation de la somme du coût de maintenance, du coût de détention des stocks et du coût de pénurie.

Toujours dans le contexte de maintenance préventive, **Yao et al. (2005)** ont aussi intégré la maintenance préventive et la politique de production dans un modèle dans lequel les temps de maintenance / réparation sont supposés non négligeables. Une politique de contrôle décide dans le premier cas (a) si la maintenance préventive est effectuée ou pas et dans le deuxième cas (b) le nombre d'items à produire si la maintenance préventive n'est pas effectuée. Les auteurs considèrent un système à temps discret. Pour formuler le problème, ils se basent sur le processus de décision de Markov appliqué à un système à temps discret. L'objectif du travail

est d'étudier les propriétés structurelles des politiques optimales intégrées, compte tenu de l'état du système qui dépend à la fois de son âge et du niveau des stocks.

**Lin et Gong (2006)** ont étudié l'impact des pannes sur la décision en termes de temps de production optimal d'un système de production fabricant un certain taux de produits défectueux, sous une politique de non reprise (le lot interrompu est abandonné). Sous cette politique, un cycle de production est exécuté pendant une période de temps prédéterminée à condition qu'aucune panne de machine n'ait lieu au cours de cette période. Dans le cas contraire, le cycle de production est immédiatement interrompu. Le stock est construit et ce, tant que le système de production est disponible. Un nouveau cycle de production ne commence que lorsque tous les inventaires en main sont épuisés. Si une panne se produit, alors une maintenance corrective de durée fixe est effectuée. Si le stock cumulé durant la période de production n'est pas suffisant pour satisfaire la demande, il y aura des pénuries (commandes perdues). Une action de maintenance remet le système aux conditions initiales de production.

En cas de situations de blocage dues à la pénurie, certaines entreprises font appel à la sous-traitance pour satisfaire la demande de leurs clients dans les délais souhaités. Dans ce contexte, **Dellagi et al. (2007)** ont étudié le problème de maintenance intégrant l'aspect production sous la contrainte de sous-traitance pour des entreprises donneuses d'ordres. Le système de production étudié est composé d'une seule machine M1. Pour satisfaire une demande du client, l'entreprise fait appel à la sous-traitance représentée par une machine M2. La sous-traitance impose des périodes d'indisponibilité incontrôlables. D'un point de vue fiabilité, les auteurs supposent que le taux de défaillance de la machine M2 est constant, et que seule la machine M1 est soumise à un programme de maintenance préventive de type âge. Les auteurs ont proposé une nouvelle politique de maintenance, notée politique de maintenance améliorée IMP (Improved Maintenance Policy), qui tient compte de la contrainte de sous-traitance.

Le même problème de politique intégrée faisant appel à des sous-traitants a été traité dans **Hajej et al. (2011)**. L'approche proposée s'applique sur un système de production composé d'une seule machine qui fabrique un seul produit pour satisfaire une demande aléatoire sur un horizon de temps bien défini. Comme le taux production de cette machine est insuffisant pour satisfaire la demande, la demande complémentaire est sous traitée sur une machine produisant



le même type de produit. Le sous-traitant intègre le rôle de recyclage et de reconditionnement des produits rejetés par le client. L'objectif vise à établir séquentiellement le plan économique de production et la stratégie de maintenance optimale. Dans leur modélisation, les auteurs mettent l'accent sur l'influence du plan de production sur le nombre moyen de défaillances afin de déterminer le coût total de maintenance. Le taux de défaillance associé à la politique de maintenance prend en considération la variation de différentes cadences déterminées pour la production. Par ailleurs, afin de satisfaire une demande aléatoire tout en assurant un niveau de service minimum donné, le système de production doit fonctionner avec une cadence variable qui permet de minimiser les coûts de production, d'inventaire et de maintenance. Le modèle mathématique développé a pour but de déterminer les plans de production et de maintenance optimaux adaptés en minimisant les coûts liés à la production et aux actions entreprises de maintenance.

### **3.1.3. Modèles centrés sur des systèmes multi-composants**

Le problème d'intégration production-maintenance pour des systèmes de production à  $n$  machines a été traité par un certain nombre d'auteurs dans la littérature. **Rezg et al. (2004)** ont étudié une politique de contrôle de production qui se base sur l'étude de la disponibilité du système. Il s'agit d'un modèle d'optimisation de la maintenance préventive et du stock de contrôle d'une ligne de production. Les auteurs considèrent le cas d'une ligne de production en série constituée par  $n$  machines avec un stock en fin de ligne pour satisfaire la demande qui intervient à périodicités et quantités constantes. Les machines possèdent des cadences de production identiques supérieures à la demande. Elles produisent d'abord à leur cadence maximale pour construire un stock de sécurité. Quand le niveau de stock souhaité est atteint, les machines produisent à la demande. Les pannes aléatoires des machines entraînent l'interruption de la production; ainsi la demande sera satisfaite à partir du stock de sécurité construit. Dans le cas où le stock de sécurité est vide, les demandes sont perdues et un coût de pénurie est engendré dans ce cas. La démarche utilisée se fait en trois grandes étapes. La première s'intéresse seulement à la partie maintenance à travers laquelle les auteurs cherchent à établir le coût total moyen par unité de temps sur un horizon fini qui intègre les actions de maintenance corrective et de maintenance préventive. L'optimisation repose sur la minimisation du coût. La deuxième étape concerne uniquement la partie production. Ils cherchent à déterminer le niveau du stock optimal qui minimise le coût. Dans la troisième

étape, les auteurs traitent les aspects maintenance et production simultanément. En effet, ils établissent l'expression du coût total moyen par unité de temps intégrant la maintenance, l'inventaire et les demandes perdues. Une comparaison entre les trois étapes a prouvé que l'étude traitant simultanément la maintenance et la production est plus économique.

Le modèle de **Kenne et Nkeungoue (2008)** considère le problème de l'intégration de la maintenance corrective et préventive dans la planification de la production d'un système de production composé de  $m$  machines identiques capables de produire  $n$  types de produits et soumises à des défaillances aléatoires. La mise en place de la maintenance préventive augmente la disponibilité du système de production qui garantit l'amélioration de la productivité du système si la production est correctement planifiée. L'objectif de cette étude est de minimiser le coût global comprenant les coûts de maintenance, la détention des stocks et le coût de surplus de production. Les variables de décision sont la production, la maintenance préventive de la machine et le taux de réparation qui influent sur les niveaux de stocks et la capacité du système. Dans le modèle proposé, un algorithme de calcul, basé sur des méthodes numériques, est utilisé pour résoudre le problème de contrôle optimal. Enfin, un exemple numérique et une analyse de sensibilité sont présentés pour illustrer l'utilité de l'approche proposée.

Dans **Boukas and Haurie (1990)**, les auteurs apportent aussi de nouvelles approches de gestion de la production et de gestion de la maintenance. En effet, ils font le couplage de la gestion de la maintenance et de la production sur un système à deux machines avec des taux de défaillances indépendants les uns les autres.

Récemment, **Nourelfath et al. (2010)** ont développé une politique de production intégrée avec un modèle de planification de la maintenance préventive pour des systèmes multi-états (MSS), qui sont constitués d'un ensemble de composants en parallèle. Ces composants sont considérés stochastiquement et économiquement indépendants. L'indépendance stochastique signifie dans ce cas que l'état des composants n'influe pas la distribution de la durée de vie des autres composants. L'indépendance économique implique que le coût et le temps de maintenance en commun d'un groupe de composants sont égaux au total du coût et du temps de maintenance individuelle de ces composants. Dans **Nourelfath et Châtelet (2012)**, les auteurs abordent le même problème de **Nourelfath et al. (2010)**. Le système étudié est un système de production constitué d'un ensemble de composants parallèles, en présence de

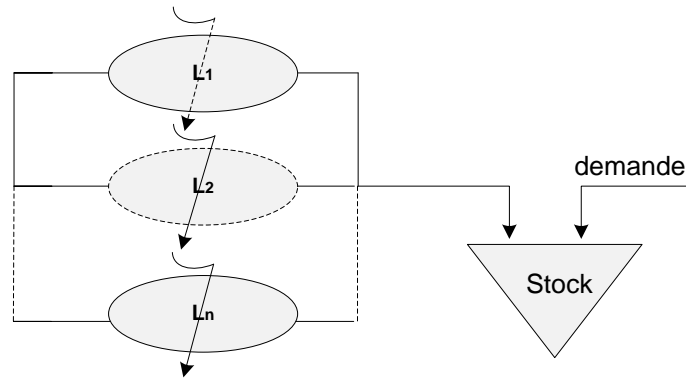
dépendance économique et de défaillances par cause commune. Ils ont considéré deux causes possibles de défaillance du système: défaillances indépendantes de composants simples, et la défaillance simultanée par cause commune de tous les composants. La maintenance préventive proposée est une politique de maintenance groupe de type âge selon laquelle les composants sont tous renouvelés cycliquement. Par ailleurs, entre les remplacements périodiques de groupe de composants, des réparations minimales sont effectuées sur les composants défaillants. Un ensemble d'items doit être produit par ce système parallèle en lots sur un horizon de planification fini. L'objectif est de déterminer une stratégie de maintenance préventive du système qui permet de minimiser la somme des coûts de maintenance préventive et corrective, des coûts d'installation, des coûts de possession, les frais de rupture de stock et des coûts de production, tout en répondant à la demande pour tous les produits sur l'horizon considéré. Des exemples numériques sont utilisés pour illustrer l'approche adoptée.

Notre contribution sur cette thématique fera l'objet de la section suivante. Nous considérerons le développement d'une politique intégrée production-maintenance dans le cas d'un système constitué par deux machines en redondance active avec basculement de charge en cas de panne et en présence de dépendance stochastique.

### **3.2. Description de la politique intégrée production-maintenance**

Considérons «n» lignes de production telles qu'elles sont représentées par la figure III.1 ( $L_1, L_2, \dots, L_n$ ). Les «n» lignes fonctionnent simultanément (redondance active) avec des cadences de production différentes  $U_i$  ( $i=1,2,\dots, n$ ). Pour satisfaire une demande de clients aléatoire et périodique  $d(k)$  ( $k=1,2, \dots, H$ ), chaque ligne est réglée à une cadence de production  $U_i(k)$  pour la période  $k$  ( $k=1,2, \dots, H$ ). Le système de production constitué par ces lignes doit fonctionner à une cadence  $U=U_1 + U_2 \dots U_n$  avec une capacité maximale  $U^{\max} = U_1^{\max} + U_2^{\max} \dots + U_n^{\max} \geq d(k)$ .

Chaque ligne de production  $L_i$  peut tomber en panne à des temps aléatoires suivant une loi de probabilité connue par sa densité  $f_i(t)$  et les temps de réparation de chaque ligne sont également considérés aléatoires suivant des lois de probabilité connues dont la densité est  $g_i(t)$ .



**Figure III.1** : Le problème général étudié.

Dans le cas de panne de la ligne  $i=1$ , la politique de commande impose le passage à une cadence maximale d'une autre ligne  $i \neq 1$ . La quantité restante à produire par cette ligne durant une période ( $k$ ) devra être partagée entre les lignes ( $i \neq 1$ ) opérationnelles et dans ce cas ces dernières devront produire avec des cadences maximales afin de compenser les pertes dues à l'arrêt de la ligne 1 et ainsi satisfaire la demande périodique  $d(k)$ . Ce passage à la cadence maximale entraîne un accroissement du taux de dégradation des lignes  $i \neq 1$  donc de leur taux de panne. Ce phénomène est appelé « *effet domino dans les lignes de production* ».

Si une ligne  $i$  tombe en panne, sa réparation est supposée minimale et coûte  $M_{c,i}$  unités monétaires. Une politique de maintenance préventive est appliquée aux lignes en surcharge afin de réduire l'effet de l'accroissement de la dégradation. Cette politique suppose qu'à une période  $k^*$ , les lignes en question subissent des actions de maintenance préventive qui sont supposées les rendre dans un état comme neuf ("As Good As New"). La durée de cette action est supposée négligeable et coûte à chaque exécution  $M_{p,i \neq 1}$ . La politique de maintenance appliquée est donc de type bloc avec réparation minimale à la panne. Le coût total moyen par unité de temps correspondant s'exprime ainsi :

$$C_{i \neq 1}(k) = \frac{M_{p,i \neq 1} + M_{c,i \neq 1} \times A_{i \neq 1,k}}{k \cdot \Delta t} \quad \text{(III.1)}$$

Où  $A_{i \neq 1,k}$  est le nombre moyen de pannes de la ligne  $i \neq 1$  durant les  $k$  périodes, de durée  $\Delta t$  chacune, entre deux maintenances préventives successives.

Ainsi, étant données les politiques de commande et de maintenance définies ci-dessus, le problème consiste à déterminer tout d'abord le plan de production du système et de déduire à

partir de ce dernier les plans de production optimaux de chaque ligne pour ensuite utiliser ces plans dans l'optimisation de la maintenance préventive des lignes qui sont en surcharge. Pour résoudre ce problème, nous nous proposons de modéliser la politique en termes de coût total de production, de stockage et de maintenance sur l'horizon de production tenant compte des contraintes de production et de stockage. Nous chercherons à déterminer les valeurs optimales des variables de décision du modèle qui sont la cadence de production du système  $U(k)^*$  et la période de maintenance préventive  $k^*$ .

### 3.2.1. Hypothèses de travail

Pour la modélisation, nous considérerons les hypothèses suivantes :

- ❖ Chaque ligne est constituée d'une seule machine.
- ❖ Les actions de maintenance préventive remettent le système à un état «as good as new».
- ❖ Le temps de remplacement préventif est supposé négligeable.
- ❖ Les durées des réparations suite aux défaillances sont supposées aléatoires.
- ❖ Les lignes sont supposées produire le même type de produit.

### 3.2.2. Notations

Dans ce travail, nous utilisons les notations suivantes :

$f_i(t)$  La densité de probabilité associée aux temps de panne de la ligne  $i$ .

$F_i(t)$  La fonction de distribution associée aux temps de panne de la ligne  $i$ .

$R_i(t)$  La fonction de fiabilité de la ligne  $i$ .

$g_i(t)$  La densité de probabilité associée aux temps de réparation de la ligne  $i$ .

$H$  Le nombre de périodes de production.

$U_i^{\max}$  La cadence maximale de production de la ligne  $i$ .

$U_i(k)$  La cadence de production de la ligne  $i$  correspondant à la période  $k$ ,  $U_i \leq U_i^{\max}$ .

$U(k)$  La cadence de production du système correspondant à la période  $k$  ( $k=1,2,\dots, H$ ).

$\lambda_{i,n}(t)$  Le taux de défaillance nominal de la ligne  $i$ .

$\lambda_{i,k}(t)$  Le taux de défaillance d'une ligne  $i$  durant la période  $k$  ( $k=1,2,\dots, H$ ). On suppose que

$$\lambda_{i,k}(t) = \alpha_i(k) \cdot \lambda_{i,n}(t) ; \text{ avec } \alpha_i(k) = \frac{U_i(k)}{U_i^{\max}} .$$

$\beta$  Le niveau du taux de service.

$d(k)$  La demande à satisfaire correspondant à la période  $k$  ( $k=1,2,\dots, H$ ).

$S(k)$  Le niveau du stock à la fin de chaque période  $k$  ( $k=1,2,\dots, H$ ).

$C_s$  Le coût unitaire de stockage.

$C_{p,i}$  Le coût unitaire de production de la ligne  $i$ .

$M_{c,i}$  Le coût de maintenance corrective de la ligne  $i$ .

$M_{p,i}$  Le coût de maintenance préventive de la ligne  $i$ .

$\Delta t$  La durée de la période de production.

$\Delta t.H$  L'horizon de production.

### 3.3. Formulation du problème

En considérant le coût total de la stratégie en question, le problème général dans le cas de  $n$  lignes peut être exprimé comme suit :

$$\text{Min} \sum_{k=1}^H f_k(U(k), S(k)) = \underbrace{\sum_{k=1}^{H-1} C_s \cdot E[S(k)]^2 + C_s \cdot E[S(H)]^2}_{\text{Coût de stockage}} + \underbrace{\sum_{k=1}^H C_p \cdot U(k)^2}_{\text{Coût de production}} + \underbrace{\psi}_{\text{Coût de maintenance}} \quad \text{(III.2)}$$

Cette fonction représente la somme des coûts de stockage, de production, et de maintenance pour toutes les périodes ( $k=1, 2, \dots, H$ ).

$E[S(k)]$  représente la quantité moyenne du produit en stock durant une période  $k$ ,  $U(k)$  est la cadence de production du système durant une période  $k$  et  $\psi$  le coût de maintenance.

Cette présentation de la fonction objective est basée sur le modèle d'optimisation quadratique linéaire classique et sans contraintes dit le modèle "HMMS" (voir **Holt et al. (1960)**).

Dans le cas du problème que nous traitons ici, il faudra tenir compte des contraintes suivantes:

$$S(k+1) = S(k) + U(k) - d(k) \quad (k=0, 1, 2, \dots, H) \quad \text{(III.3)}$$

$$\text{Pr ob}[S(k+1) \geq 0] \geq \beta \quad (k=0, 1, 2, \dots, H) \quad \text{(III.4)}$$

$$U_i(k) \leq U_i^{\max} \quad (k=1, 2, \dots, H), (i=1,2,\dots,n) \quad \text{(III.5)}$$

$$U(k) \leq \sum_{i=1}^n U_i^{\max} \quad (k=1, 2, \dots, H), (i=1,2,\dots,n) \quad \text{(III.6)}$$

La contrainte (III.3) permet de tenir compte de l'évolution du stock disponible dans le système de la période k à k+1. La contrainte (III.4) représente la probabilité que la demande client soit satisfaite. La contrainte (III.5) représente la contrainte de capacité de chaque ligne. Enfin, la contrainte (III.6) représente la limite de production du système avec une cadence U(k) qui doit être inférieure ou égale à la somme des cadences maximales des lignes.

L'expression du coût total moyen donnée par l'équation III.2 est difficile à traiter en vu de l'optimisation des variables de décision. Il est possible de la simplifier en nous basant sur les lemmes 2.1 et 2.2 développés dans le modèle de Hajej et al., (2011) pour transformer le problème en un modèle déterministe plus facile à résoudre. En faisant cela, le modèle de coût peut être ramené à la formulation équivalente suivante :

$$\begin{aligned} \text{Min} \sum_{k=1}^H f_k(U(k), S(k)) &= \sum_{k=1}^{H-1} [C_s \cdot \hat{S}(k)^2] + C_s \cdot \hat{S}(H)^2 + \sum_{k=1}^H [C_p \cdot U(k)^2] \\ &+ C_s \times \frac{H(H+1)}{2} + \psi \end{aligned} \quad \text{(III.7)}$$

$$\hat{S}(k+1) = \hat{S}(k) + U(k) - \hat{d}(k) \quad (k=0, 1, 2, \dots, H) \quad \text{(III.8)}$$

$$U(k) \geq v_{d,k} \times \Phi_{d,k}^{-1}(\beta) + \hat{d}(k) - \hat{S}(k) \quad (k=0, 1, 2, \dots, H) \quad \text{(III.9)}$$

$$U_i(k) \leq U_i^{\max} \quad (k=1, 2, \dots, H), (i=1, 2, \dots, n) \quad \text{(III.10)}$$

$$U(k) \leq \sum_{i=1}^n U_i^{\max} \quad (k=1, 2, \dots, H), (i=1, 2, \dots, n) \quad \text{(III.11)}$$

Avec  $\hat{d}(k)$  la demande moyenne pour la période k et  $v_{d,k}$  la variance de la demande pour la même période.

$\Phi_{d,k}^{-1}(\cdot)$  représente l'inverse de la fonction de répartition gaussienne de moyenne  $\hat{d}(k)$  et de variance  $v_{d,k}$ .

Rappelons que notre objectif dans la suite est de déterminer dans une première étape le plan optimal de production satisfaisant la demande et ensuite dans une seconde étape nous utiliserons ce plan optimal afin de déterminer les périodes optimales de maintenance préventive des lignes en surcharge.

Il est évident que la résolution de ce problème demeure d'une complexité importante dans le cas de plusieurs lignes de production. Pour cette raison, nous nous limiterons dans ce qui suit au cas de deux lignes de production seulement.

### 3.3.1. Cas d'un système à deux lignes de production

Soit un système de production constitué de deux lignes de production (assimilables à deux machines) qui fonctionnent en parallèle. Durant chaque période de production  $k$  ( $k = 1, 2, \dots, H$ ), ces lignes  $L_1$  et  $L_2$  produisent à des cadences respectives  $U_1(k)$  et  $U_2(k)$  afin de satisfaire une demande aléatoire périodique  $d(k)$ . En cas de panne de la ligne  $L_1$ , la ligne  $L_2$  augmentera de charge et produira systématiquement à sa cadence maximale. Ce passage entre lignes ( $L_1 \rightarrow L_2$ ) ne s'effectue que seulement en cas de panne de la ligne  $L_1$ . Lorsque la charge augmente sur la ligne  $L_2$ , son processus de dégradation s'accélère augmentant ainsi son taux de panne. Pour cette raison, une politique de maintenance préventive de type bloc avec réparation minimale à la panne est envisagée sur la ligne  $L_2$ .

L'expression du coût total moyen correspondant à cette politique intégrée est donnée ci-dessous. En fait, c'est la même équation de coût **III.7** mais les contraintes sur la production (eq. **III.10** et **III.11**) se ramènent à deux lignes seulement :

$$\begin{aligned} \text{Min} \sum_{k=1}^H f_k(U(k), S(k)) &= \sum_{k=1}^{H-1} [C_s \cdot \hat{S}(k)^2] + C_s \cdot \hat{S}(H)^2 + \sum_{k=1}^H [C_p \cdot U(k)^2] \\ &+ C_s \times \frac{H(H+1)}{2} + \psi \end{aligned} \quad \text{(III.7)}$$

$$\hat{S}(k+1) = \hat{S}(k) + U(k) - \hat{d}(k) \quad (k=0, 1, 2, \dots, H) \quad \text{(III.8)}$$

$$U(k) \geq V_{d,k} \times \Phi_{d,k}^{-1}(\beta) + \hat{d}(k) - \hat{S}(k) \quad (k=0, 1, 2, \dots, H) \quad \text{(III.9)}$$

$$U_i(k) \leq U_i^{\max} \quad (k=1, 2, \dots, H), (i=1,2) \quad \text{(III.12)}$$

$$U(k) \leq \sum_{i=1}^n U_i^{\max} \quad (k=1, 2, \dots, H), (i=1,2) \quad \text{(III.13)}$$



L'objectif consiste à déterminer les quantités optimales à produire par le système à chaque période en minimisant le coût total de production et de stockage sur l'horizon  $H\Delta t$ . Une fois le plan global optimal de production obtenu, il sera réparti sur les deux lignes selon le choix du décideur. Une fois cette répartition faite, il s'agira de déterminer la période optimale  $k^*$  de maintenance préventive de la ligne  $L_2$  qui verra sa cadence de production augmenter vers sa cadence maximale à chaque fois que la ligne  $L_1$  tombera en panne. Ceci en minimisant le coût total moyen de maintenance de la ligne  $L_2$  par unité de temps.

### **3.3.2. Détermination de la période optimale de maintenance préventive de la ligne $L_2$**

Le coût total moyen par unité de temps de la politique de maintenance de la ligne  $L_2$  doit tenir compte des réparations minimales suite aux pannes de cette ligne ainsi que des maintenances préventives qui seront réalisées dessus. Il s'exprime ainsi en fonction de la période  $k$  qui représente la variable de décision ( $k.\Delta t$  étant la période entre deux maintenances préventives consécutives qui remettent la ligne à un état comme neuf) :

$$C_2(k) = \frac{Mp_2 + Mc_2 \times A_{2,k}}{k.\Delta t} \quad \text{(III.14)}$$

$A_{2,k}$  représente le nombre moyen de pannes de la ligne  $L_2$  pouvant survenir durant la période de maintenance préventive  $k.\Delta t$ .

Il est important de souligner que la modélisation du nombre moyen de pannes de la ligne  $L_2$  doit tenir compte de l'effet sur le taux de panne de cette ligne de l'augmentation de la charge due à l'arrêt de la ligne  $L_1$ . Cette modélisation doit intégrer à la fois les cadences de production planifiées de la ligne,  $U_2(k)$ , ainsi que le nombre moyen de pannes de la ligne  $L_1$  durant une période  $k.\Delta t$ ,  $A_{1,k}$ .

Pour pouvoir calculer le nombre moyen de pannes de chaque ligne durant une période  $k.\Delta t$ , il nous faut chercher à déterminer l'expression de la fiabilité  $R_i(.)$  (ou de la fonction de distribution  $F_i(.)$  ou du taux de panne  $\lambda_i(t)$ ) de chacune des deux lignes durant la période de production.

Commençons par établir l'expression du nombre moyen de pannes de la ligne  $L_1$  pour pouvoir exprimer par la suite la fonction du nombre moyen de pannes de la ligne  $L_2$ .

❖ *Expression du nombre moyen de pannes de la ligne  $L_1$  durant la période  $k.\Delta t$ ,  $A_{1,k}$*

Dans la grande majorité des travaux de recherche sur les stratégies de maintenance, le calcul du nombre de moyen de réparations minimales dans un intervalle donné suppose que la durée des réparations est négligeable. Cette hypothèse permet d'utiliser la formulation connue suivante :

$$E [N_1 (t)] = \int_0^t \lambda_1(u) du \quad \text{(III.15)}$$

Dans ce travail, nous considérons le cas général où les durées de réparation sont aléatoires et suivent une loi de probabilité  $g_i$ .

Ainsi, pour la ligne  $L_1$ , en se basant sur le modèle de **Lim et al. (2005)**, on peut exprimer le nombre moyen de pannes comme suit :

$$\begin{aligned} E [N_1(t)] &= -\log \left[ \int_t^\infty F_1(t-y)g_1(y)dy \right] \\ &= -\log \left[ 1 - \int_0^t F_1(t-y)g_1(y)dy \right] \end{aligned} \quad \text{(III.16)}$$

Cette expression tient compte simultanément des durées inter-défaillances et des durées des réparations. Cependant, elle n'est pas suffisante si on veut tenir compte de l'effet du taux de production sur la dégradation de la ligne. Afin de pouvoir modéliser cet effet, qui est crucial pour la stratégie intégrée que l'on considère dans ce travail, nous utilisons le modèle à risques proportionnels de **Cox (1972)** qui avait été proposé pour étudier la fiabilité sous vieillissement accéléré.

Ce modèle exprime le taux de défaillance comme suit :

$$\lambda (t | z) = \lambda_0 (t) \exp (z\beta) \quad \text{(III.17)}$$

où  $\lambda_0(t)$  représente le taux de défaillance nominal qui est en fonction du temps seulement.

$\lambda(t|z)$  représente le taux de défaillance qui est en fonction du temps et des paramètres de fonctionnement.

$\exp(z\beta)$  est appelée fonction d'influence qui représente l'effet de certains paramètres sur la dégradation du système comme par exemple les charges, les contraintes, la température, la

puissance, la tension, etc. Dans notre étude elle représenterait l'effet des cadences ou des charges de production sur la dégradation d'une ligne.

$\beta : [b_1, \dots, b_m]$  étant le vecteur des coefficients du modèle de **Cox(1972)**.

$z : [z_1, \dots, z_m]$  représentant le vecteur des états des facteurs d'influence.

Connaissant la fonction du taux de défaillance, on peut déduire la fonction de fiabilité du système :

$$R(t) = R_0(t)^{\exp(z\beta)} \quad \text{(III.18)}$$

Dans ce travail, nous considérons que la fonction  $\exp(z\beta)$  est donnée par le rapport de la cadence de fonctionnement sur la cadence maximale (voir **Hajej et al. (2011)** pour plus de détail sur cette approche). Ceci permet d'exprimer le taux de défaillance et la fiabilité d'une ligne  $i$  à un instant  $t$  par :

$$\lambda_i(t) = \frac{U_i}{U_i^{\max}} \times \lambda_{i,0}(t) \quad \text{(III.19)}$$

et

$$R_i^{U_i}(t) = R_{i,0}(t)^{\frac{U_i}{U_i^{\max}}} \quad \text{(III.20)}$$

A partir de la dernière équation ci-dessus, on peut déduire le nombre moyen de pannes de la ligne  $L_1$  pouvant survenir durant un intervalle  $[0, t]$ :

$$\begin{aligned} E[N_1(t, U_1)] &= -\log \left[ 1 - \int_0^t F_1^{U_1}(t-y) g_1(y) dy \right] \\ &= -\log \left[ 1 - \int_0^t (1 - R_1^{U_1}(t-y)) g_1(y) dy \right] \end{aligned} \quad \text{(III.21)}$$

avec,

$$R_1^{U_1}(t-y) = R_{1,0}(t-y)^{\frac{U_1}{U_1^{\max}}} \quad \text{(III.22)}$$

Pour une période de durée  $k.\Delta t$ , cette expression devient :

$$A_{1,k} = E [N_1(k, U_1)] = \left( -\log \left[ 1 - \int_0^{1.\Delta t} (1 - R_1^{U_1(1)}(\Delta t - y)) g_2(y) dy \right] \right) + \left( -\log \left[ 1 - \int_0^{2.\Delta t} (1 - R_1^{U_1(2)}(2.\Delta t - y)) g_2(y) dy \right] \right) + \dots + \left( -\log \left[ 1 - \int_0^{k.\Delta t} (1 - R_1^{U_1(k)}(k.\Delta t - y)) g_2(y) dy \right] \right) \quad \text{(III.23)}$$

Ce qui revient à l'expression générale suivante :

$$A_{1,k} = \sum_{j=1}^k \left( -\log \left[ 1 - \int_0^{j.\Delta t} (1 - R_1^{U_1(j)}(j.\Delta t - y)) g_2(y) dy \right] \right) \quad \text{(III.24)}$$

Or, il est important de remarquer à ce niveau que l'expression (III.24) ci-dessus ne tient pas compte du fait qu'à la fin de la période  $j$  la fiabilité de la ligne 1 est égale à celle du début de la période suivante comme l'indique le principe de la continuité de la fiabilité dans le temps,  $R_{1,(j-1)}(t, U_1(j-1)) \leq R_{1,(j)}(t, U_1(j)) \leq R_{1,(j+1)}(t, U_1(j+1))$ . Cette formule devra donc être modifiée pour devenir comme suit :

$$A_{1,k} = \sum_{j=1}^k \left( -\log \left[ 1 - \int_{\Gamma_{1,j}}^{\Gamma_{1,j} + j.\Delta t} (1 - R_1^{U_1(j)}((\Gamma_{1,j} + j.\Delta t) - y)) g_2(y) dy \right] \right) \quad \text{(III.25)}$$

Où  $\Gamma_{1,j}$  est le temps auquel la fiabilité de la ligne 1 à la fin de la période  $(j-1)$  est identique à la fiabilité du début de la période  $j$ . Nous retrouvons l'expression de ce temps  $\Gamma_{1,j}$  dans **Hajej et al., (2011)** :

$$\begin{cases} \Gamma_{1,j} = R_{1,j}^{-1} (R_{1,j-1}(\Gamma_{1,j-1} + j.\Delta t)) & \text{for } j \geq 3 \\ \Gamma_{1,j=2} = R_{1,j=2}^{-1} (R_{1,j=1}(2.\Delta t)) \\ \Gamma_{1,j=1} = 0 \end{cases} \quad \text{(III.26)}$$

❖ *Expression du nombre moyen de pannes de la ligne  $L_2$  durant la période  $k.\Delta t$ ,  $A_{2,k}$*

Comme nous l'avons indiqué précédemment, le nombre moyen de pannes de la ligne  $L_2$  durant un intervalle donné doit tenir compte de l'effet d'une augmentation de la charge de cette ligne sur son taux de dégradation suite à l'arrêt de la ligne  $L_1$ . Sur tout l'horizon  $\Delta t.H$ , cette augmentation se réalise en moyenne  $(A_{1,k})$  fois, c'est-à-dire le nombre moyen de fois où la ligne  $L_1$  tombe en panne sur cet horizon.

Ainsi, en utilisant le développement précédent donnant l'expression du nombre moyen de pannes d'une ligne pouvant survenir durant une période  $k.\Delta t$  et tenant compte des durées de

réparations, nous obtenons l'expression suivante du nombre moyen de pannes de la ligne  $L_2$  pour une période  $k.\Delta t$ .

$$E [N_2(k, U_2)] = \sum_{j=1}^k \left( -\log \left[ 1 - \int_0^{j.\Delta t} (1 - R_2^{U_2(j)}(j.\Delta t - y)) g_2(y) dy \right] \right) \quad (\text{III.27})$$

En tenant compte du passage de la cadence de production de la ligne  $L_2$  de  $U_2(k)$  à la cadence maximale  $U_2^{\max}$  à chaque fois que  $L_1$  tombe en panne, nous pouvons exprimer le nombre moyen de pannes pour une période  $k.\Delta t$  comme suit :

$$A_{2,k} = ((A_{1,k} \times (1 - \alpha_2(k))) \times E [N_2(k, U_2)]) + A_{2,k-1} \quad (\text{III.28})$$

Avec,

$$\alpha_2(k) = \frac{U_2(k)}{U_2^{\max}} \quad \text{et} \quad A_{2,0} = 0 \quad (\text{III.29})$$

et

$$\begin{cases} \Gamma_{2,j} = R_{2,j}^{-1}(R_{2,j-1}(\Gamma_{2,j-1} + j.\Delta t)) & \text{for } j \geq 3 \\ \Gamma_{2,j=2} = R_{2,j=2}^{-1}(R_{2,j=1}(2.\Delta t)) \\ \Gamma_{2,j=1} = 0 \end{cases} \quad (\text{III.30})$$

Par conséquent, on retrouve la fonction du coût total moyen de maintenance par unité de temps de la ligne  $L_2$  donnée par:

$$C_2(k) = \frac{Mp_2 + Mc_2 \times A_{2,k}}{k.\Delta t} \quad (\text{III.31})$$

Rappelons que l'objectif est de déterminer l'intervalle de temps optimal séparant deux actions de maintenance préventive consécutives de la ligne  $L_2$ ,  $(k^*.\Delta t)$ . Cette optimisation se base essentiellement sur le nombre moyen de pannes de la ligne en question qui est influencé par l'effet de la surcharge de production à cause des pannes de la ligne  $L_2$ . Connaissant la loi de défaillance des deux lignes et le plan de production de chacune, il devient possible de trouver la période optimale de maintenance  $k^*$  de la ligne  $L_2$  en utilisant les formulations développées ci-haut.

Cependant, la stratégie que nous présentons est une stratégie d'optimisation séquentielle qui permet de chercher les variables de décisions l'une après l'autre. Nous illustrons cela par l'exemple qui suit dans lequel nous déterminerons dans une première étape le plan de production du système en minimisant seulement le coût total de production et de stockage (sans compter le coût de maintenance) tout en satisfaisant la demande aléatoire et les différentes contraintes du problème. Une fois le plan de production du système est optimisé, le reste du travail consistera à déterminer la période optimale de maintenance de la ligne  $L_2$  suivant la politique de maintenance considérée.

### 3.4. Exemple numérique

Considérons un système de production composé de deux machines opérant en parallèle et produisant le même type de produit. En cas de panne de la ligne  $L_1$ , c'est la ligne  $L_2$  qui augmente de charge et produit avec sa capacité maximale. L'horizon de production considéré est  $H= 24$  mois (24 périodes d'une durée égale à un mois ;  $\Delta t= 1$  mois).

Nous supposons que la demande à satisfaire pour la période  $k$  est aléatoire et suit une loi de Gauss de moyenne  $\hat{d}(k)$  de variance  $v_{d,k}$ . La demande moyenne  $\hat{d}(k)$  correspondant à chacune des périodes  $k$  ( $k=1, 2, \dots, 24$ ) est donnée dans le tableau **III.1** ci-dessous.

**Tableau III.1** : Les demandes moyennes périodiques  $\hat{d}(k)$  de l'exemple.

$k$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\hat{d}(k)$	15	17	15	15	15	14	16	14	16	13	15	14
$k$	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
$\hat{d}(k)$	15	12	15	13	15	11	16	13	15	12	14	16

La cadence maximale de production de la ligne 1 est  $U_1^{\max} = 8$  unités / mois et celle de la ligne 2 est  $U_2^{\max} = 8$  unités / mois.

Le stock initial est  $S(0)=20$  unités. Le taux de service est fixé à 95% ( $\beta=0.95$ ).

Les coûts suivant sont considérés dans l'exemple :

- $C_s = 6$  unités monétaires par unité.
- $C_{p,1} = C_{p,2} = 3$  unités monétaires par unité.
- $M_{c,1} = M_{c,2} = 100$  unités monétaires.
- $M_{p,2} = 80$  unités monétaires.

Les temps de défaillance des deux lignes suivent une loi de Weibull ( $W \sim (\alpha, \lambda)$ ), avec  $\lambda$  le paramètre d'échelle et  $\alpha$  le paramètre de forme comme suit:

Ligne 1: Distribution associée aux temps de défaillance  $F_1 \sim \text{Weibull} (\alpha_{11} = 2, \lambda_{11} = 13)$ .

Distribution associée aux temps de réparation  $G_1 \sim \text{Weibull} (\alpha_{12} = 1, \lambda_{12} = 1.5)$ .

Ligne 2: Distribution associée aux temps de défaillance  $F_2 \sim \text{Weibull} (\alpha_{21} = 2, \lambda_{21} = 12.77)$ .

Distribution associée aux temps de réparation  $G_2 \sim \text{Weibull} (\alpha_{22} = 1, \lambda_{22} = 1.5)$ .

Les équations **III.30** et **III.26** peuvent être simplifiées selon les paramètres choisis de la loi de défaillance des deux lignes comme indiqué ci-après:

$$\Gamma_{i,j} = \left( \frac{U_i(j-1)}{U_i(j)} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot (\Gamma_{i,j-1} + \Delta t) \quad \text{for } j \geq 3$$

$$\begin{cases} \Gamma_{i,2} = \left( \frac{U_i(1)}{U_i(2)} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \Delta t \\ \Gamma_{i,1} = 0 \end{cases}$$

▪ ***Détermination séquentielle du plan de production optimal et de la période optimale de maintenance:***

Considérant les données numériques ci-dessus, en minimisant la somme des coûts de production et de stockage définis dans l'équation **III.7** en tenant compte les différentes contraintes du problème (eq. **III.8**, **III.9**, **III.12**, et **III.13**), nous obtenons le plan de production optimal  $U(k)^*$  donné dans le tableau **III.2** ci-dessous. A noter que la programmation et le traitement numériques ont été faits à l'aide du logiciel Mathematica (version 8). On peut voir dans ce tableau que nous avons supposé que ce plan de production global est réparti presque à égalité entre les deux lignes. Toute autre répartition pourrait être considérée. Ceci est laissé à la discrétion du décideur.

**Tableau III.2 :** Le plan de production optimal obtenu et réparti entre les deux lignes pour chaque période  $k$ .

<b><math>k</math></b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>	<b>7</b>	<b>8</b>	<b>9</b>	<b>10</b>	<b>11</b>	<b>12</b>
$U(k)^*$	10	15	7	14	15	13	16	15	14	16	15	14
$U_1(k)$	5	8	4	7	8	7	8	8	7	8	8	7
$U_2(k)$	5	7	3	7	7	6	8	7	7	8	7	7
<b><math>k</math></b>	<b>13</b>	<b>14</b>	<b>15</b>	<b>16</b>	<b>17</b>	<b>18</b>	<b>19</b>	<b>20</b>	<b>21</b>	<b>22</b>	<b>23</b>	<b>24</b>
$U(k)^*$	13	11	16	14	15	12	14	12	15	12	14	16
$U_1(k)$	7	6	8	7	8	6	8	6	8	6	7	8
$U_2(k)$	6	5	8	7	7	6	7	6	7	6	7	8

Ce plan de production correspond au coût minimal de production et de stockage égal à 22794 unités monétaires. En appliquant la deuxième phase de notre démarche séquentielle, et partant de ce plan de production optimal, la minimisation du coût total moyen par unité de temps de maintenance de la deuxième ligne engendre un minimum à  $k^* = 13$ . Ceci veut dire que la ligne  $L_2$  devra être maintenue préventivement à la treizième période. Cela correspond à un coût total de maintenance par unité de temps minimal égal à 54.9 unités monétaires/mois permettant ainsi de réduire les pertes dues aux pannes de cette ligne qui sont accentuées par les pannes de la ligne  $L_1$ .

### 3.5. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons traité une politique intégrée production-maintenance d'un système constitué par deux lignes de production fonctionnant en parallèle pour satisfaire la demande sur un horizon donné divisé en  $k$  périodes de durées égales. La politique de commande préconise le basculement de la production de la deuxième ligne à la cadence maximale en cas de panne de la première afin de diminuer les pertes des demandes clients. L'adoption de cette politique de commande engendre une surcharge de la ligne  $L_2$  qui entraîne l'augmentation de son taux de panne et provoque ainsi ce qu'on appelle un effet domino. Nous avons adopté une approche séquentielle pour déterminer dans un premier temps le plan de production optimal minimisant le coût total de stockage et de production sur l'horizon considéré. Ensuite, dans une deuxième étape, nous avons déterminé la période optimale  $k^*$  au



bout de laquelle il faut maintenir préventivement la deuxième ligne qui subit les surcharges dues aux pannes de la première. Ceci en minimisant le coût total moyen de maintenance par unité de temps de la deuxième ligne. Ce coût de maintenance de la deuxième ligne tient compte du nombre moyen de pannes de la première ligne et tient aussi compte du fait que les réparations minimales des pannes des deux lignes ont des durées aléatoires et non nulles ou négligeables comme le suppose la grande majorité des travaux dans la littérature. Enfin, un exemple numérique a été présenté pour illustrer notre démarche.

---

## *Conclusion générale*

---

### - Conclusion générale

Nous avons abordé dans cette thèse le problème de développement de stratégies optimales de maintenance de systèmes multi-composants dont les caractéristiques opératoires se détériorent à l'usage et dont les défaillances se produisent d'une façon aléatoire. Les problèmes spécifiques que nous avons traités sont inspirés de situations largement rencontrées dans la pratique où on exige de maintenir les systèmes en état de marche en maîtrisant les délais, les coûts et les ressources. Les systèmes qui nous entourent sont en grande majorité des systèmes constitués de plusieurs composants impliquant une ou plusieurs formes de dépendance entre eux. Ceci rend la modélisation mathématique des stratégies de maintenance de tels systèmes relativement complexe.

Dans ce contexte de stratégies de maintenance de systèmes multi-composants, nous avons traité trois problématiques distinctes impliquant des types différents d'équipements opérant dans des contextes différents avec des stratégies de maintenance spécifiques adaptées.

Nous avons d'abord développé une politique de maintenance conditionnelle basée sur des inspections non périodiques d'un système série à deux composants. Le modèle développé se situe dans la classe des politiques de limites de contrôle pour la décision de maintenance qui se prend suite à chaque inspection par comparaison du niveau de dégradation à des seuils critiques. Nous avons déterminé les instants quasi-optimaux d'inspection du système en considérant le coût total moyen de maintenance par unité de temps sur un horizon infini comme critère de performance. À travers des exemples numériques, nous avons testé le modèle de coût développé et nous avons analysé la sensibilité des résultats obtenus face à la variation du coût d'inspection.

La deuxième problématique traitée dans cette thèse a porté sur les politiques de maintenance sélective de systèmes multi-composants. Dans ce contexte, notre apport a consisté dans la considération de systèmes dont les défaillances sont stochastiquement dépendantes. Particulièrement, des systèmes pour lesquels un phénomène d'isolation peut se produire permettant de protéger partiellement le système d'éventuelles défaillances propagées. Nous avons d'abord développé un modèle mathématique permettant au décideur de sélectionner les composants qui devront être remplacés à la fin d'une mission de façon à garantir un niveau

minimum de fiabilité pour la mission suivante en tenant compte de la période allouée à la maintenance entre les deux missions. La complexité de résolution de ce problème augmente avec le nombre de composants constituant le système à maintenir. Afin de réduire cette complexité, nous avons proposé une série de règles permettant de réduire le temps de recherche de la solution optimale pour une configuration donnée en prenant en compte, entre autres, les spécificités liées aux défaillances propagées et au phénomène d'isolation. Enfin, dans le cas d'un système neuf devant effectuer une série de missions successives de durées connues avec des pauses pour maintenance, nous avons développé un algorithme de simulation de Monte-Carlo, lequel combiné avec le modèle mathématique permet de déterminer les combinaisons optimales des composants à renouveler lors de chaque arrêt pour maintenance entre les missions. Les exemples numériques traités ont permis d'illustrer notre démarche de modélisation et de résolution.

Dans la dernière partie de cette thèse, nous avons développé une politique intégrée production-maintenance pour un système constitué par deux lignes de production assimilables à deux machines. Les deux lignes fonctionnent en parallèle pour satisfaire une demande aléatoire sur un horizon donné. Nous avons traité le cas d'une politique de commande qui préconise que la deuxième ligne passe à sa cadence maximale à chaque fois que la première ligne tombe en panne. Cette surcharge de la deuxième ligne conduit à une augmentation de son taux de panne impliquant une dépendance. La deuxième ligne est soumise à une maintenance préventive périodique afin de diminuer l'effet de l'accélération de sa dégradation à cause des pannes de la première ligne. Nous avons considéré un modèle de coût pour cette politique intégrée impliquant les coûts de production, de stockage et de maintenance. Nous avons développé une approche séquentielle qui permet de déterminer, dans une première étape, le plan de production optimal en minimisant la somme des coûts de stockage et de production, et dans une seconde étape, de trouver la période optimale de maintenance préventive de la deuxième ligne qui minimise le coût total moyen de maintenance par unité de temps de cette ligne. L'apport majeur de notre démarche étant donné que d'une part, il est lié au nombre moyen de pannes de la première ligne, et d'autre part, contrairement à la grande majorité des travaux dans la littérature, on se place dans une situation où les réparations minimales des pannes ont des durées non négligeables et aléatoires. Un exemple numérique a été présenté pour illustrer notre démarche.

### - Perspectives futures de recherche

En termes de perspectives de recherche découlant de ce travail, il est possible d'identifier déjà certaines pistes de recherche qui nous paraissent prometteuses.

La première sera de développer de nouvelles stratégies de maintenance conditionnelle pour des systèmes multi-composants avec plus de deux composants et avec des structures série-parallèles ou des structures en stand-by impliquant d'autres types de dépendance. Il serait intéressant d'étudier également l'effet de la dépendance structurelle sur ce type de politiques de maintenance.

La deuxième piste sera de reconsidérer le même problème de maintenance sélective étudié dans le chapitre 2 dans un contexte où les réparations suite aux pannes sont imparfaites. En fait, nous avons déjà commencé à considérer cela. Les résultats préliminaires obtenus ont fait l'objet de la communication **Maaroufi et al., (2013b)**.

Concernant la troisième contribution, nous nous proposons de reconsidérer le même problème d'optimisation de la stratégie intégrée production-maintenance mais en adoptant une approche d'optimisation simultanée de la cadence de production et de la période de maintenance préventive et non une approche séquentielle. Il serait intéressant de comparer les résultats obtenus par les deux approches.

Enfin, une autre voie d'extension consiste à étendre la politique intégrée production-maintenance pour des systèmes à plus de deux lignes et pour des structures plus complexes pour lesquelles on appliquerait d'autres types d'actions de maintenance. Nous proposons aussi de tenir compte de l'aspect qualité en considérant la non-conformité des items produits. Enfin, une autre extension serait de considérer la production de plusieurs types de produits au lieu d'un seul par ligne.

# Bibliographie

**[Amari et al., 1999]**

Amari S.V., Dugan J.B. et Misra R.B., (1999), A separable method for incorporating imperfect fault-coverage into combinatorial models, *IEEE Transactions on Reliability*, vol. 48(3), pp:267-74.

**[Badia et al., 2002]**

Badia F.G., Berrade M.D. et Campos C.A., (2002), Optimal inspection and preventive maintenance of units with revealed and unrevealed Failures, *Reliability Engineering and System Safety*, vol. 78, pp: 157-163.

**[Baohe, 2002]**

Baohe S., (2002), An optimal inspection and diagnosis policy for a multi-mode system, *Reliability Engineering and System Safety*, vol. 76, pp: 181-8.

**[Barlow et Proschan, 1965]**

Barlow R. et Proschan F., (1965), Mathematical theory of reliability, New York, *John Wiley & Sons*.

**[Barros et al, 2003]**

Barros A., Berenguer C. et Grall A., (2003), Optimization of replacement times using imperfect monitoring information, *IEEE Transactions on Reliability*, vol.52(4), pp:523-53.,

**[Boukas et Liu, 2001]**

Boukas E.K. et Liu Z.K., (2001), Production and maintenance control for manufacturing systems, *IEEE Trans Automat Control*, vol. 46, pp: 1455-1460.

**[Boukas et Haurie, 1990]**

Boukas E.K. et Haurie A., (1990), Manufacturing flow control and preventive maintenance: a stochastic control approach, *Automatic Control IEEE Transactions on*, vol. 35, pp: 1024-1031.

**[Budai et al, 2008]**

Budai G., Dekker, R. et Nicolai, R.P., (2008), Maintenance and production : a review of planning models , in D. Murty and K. Kobayashi (Eds.), Complex System Maintenance Handbook, *Springer Series in Reliability Engineering*, Springer, Verlag, London, pp:321-344.

**[Bukowski, 2001]**

Bukowski J.V., (2001), Modeling and analyzing the effects of periodic inspection on the performance of safety-critical systems, *IEEE Transactions on Reliability*, vol. 50, pp: 321-329.

**[Cai and Wen, 1990]**

Cai K.Y. et Wen C.Y., (1990), Street-Lighting lamps replacement: A fuzzy viewpoint, *Fuzzy Sets And Systems*, vol. 37, pp: 161-172.

**[Chelbi et Ait-Kadi, 1998]**

Chelbi A. et Ait-Kadi D., (1998), Inspection and Predictive Maintenance Strategies, *International Journal of Computer Integrated Manufacturing*, vol. 11, pp: 226-231.

**[Chelbi et Ait-Kadi, 1999]**

Chelbi, A. et Ait-Kadi D., (1999), An optimal inspection strategy for randomly failing equipment, *Reliability Engineering and Systems Safety*, vol. 63, pp: 127-131.

**[Chelbi et Ait-Kadi, 2000]**

Chelbi A. et Ait-Kadi D., (2000), Generalized inspection strategy for randomly failing systems subjected to random shocks, *International Journal of Production Economics*, vol. 64, pp:379-384.

**[Chelbi et Ait-Kadi, 2004]**

Chelbi A. et Ait-Kadi D., (2004), Analysis of a production /inventory system with random failing production unit submitted to regular preventive maintenance, *European journal of operational research*, vol. 156, pp: 712-718.

**[Chelbi et Ait-Kadi, 2009]**

Chelbi A. et Ait-Kadi D., (2009), Inspection Strategies for Randomly Failing Systems, *Handbook of Maintenance Management and Engineering*. Chapter 13, p: 303.

**[Chelbi et al, 2008]**

Chelbi A., Ait-Kadi D. et Aloui H., (2008), Optimal inspection and preventive maintenance policy for systems with self-announcing and non-self-announcing failures, *Journal of Quality in Maintenance Engineering*, vol.14, pp:34-45.

**[Cassady et al, 2001a]**

Cassady C.R., Pohl E.A. et Murdock W.P., (2001a), Selective maintenance modeling for industrial systems. *Journal of Quality in Maintenance Engineering*; vol. 7(2), pp: 104-17.

**[Cassady et al, 2001b]**

Cassady C.R., Murdock W.P. et Pohl E.A., 2001b, Selective maintenance for support equipment involving multiple maintenance actions, *European Journal of Operational Research*, vol.129, pp:252-8.

**[Castanier, 2002]**

Castanier B., 2002, Modélisation stochastique et optimisation de la maintenance conditionnelle des systèmes à dégradation graduelle, *Thèse de doctorat*, Université de Technologie de Troyes.

**[Castanier et al, 2005]**

Castanier B., Bérenguer C. et Grall A., (2005), A condition-based maintenance policy with non-periodic inspections for a two-unit series system, *Reliability Engineering and System Safety*, vol. 87, pp:109-120.

**[Certa et al, 2011]**

Certa A., Galante G., Lupo T. et Passannanti G., (2011), Determination of Pareto frontier in multi-objective maintenance optimization, *Reliability Engineering and System Safety*, vol. 96, p: 861-867.

**[Cho et Parlar, 1991]**

Cho D.I. et Parlar M., (1991), A survey of maintenance models for multi-unit systems. *European Journal of Operational Research*, vol. 51, pp: 1-23.

**[Chung-Kuang et Butler, 1983]**

Chung-Kuang C. et Butler, D., (1983), Assessment of Hazardous-Inspection Policies, *Naval Research Logistics Quarterly*, vol. 30, pp: 171-177.

**[Cox, 1972]**

Cox D., (1972), Regression Models and Life-Tables, *Journal of the Royal Statistical Society*, vol. 34(2), pp: 187-220.

**[Dekker et al, 1998]**

Dekker R., Plasmeijer R.P. et Swart J.H., (1998), Evaluation of a new maintenance concept for the preservation of highways, *IMA Journal of Mathematics applied in Business and Industry*, vol. 9, pp: 109-156.

**[Dekker et al, 1997]**

Dekker R., Wildeman R.E. et van der Duyn Schouten F.A., (1997), A review of multi-component maintenance models with economic dependence, *Mathematical Methods of Operations Research*, vol. 45, pp: 411-35.

**[Dellagi et al, 2007]**

Dellagi S., Rezg, N., et Xie X., (2007), Preventive maintenance of manufacturing systems under environmental constraints, *International Journal of Production Research*, vol. 45(5), pp:1233-1254.

**[Dieulle, 2002]**

Dieulle L., (2002), Reliability of several component sets with inspections at random times, *European Journal of Operational Research*, vol. 139, pp: 96-114.

**[Duffuaa et Khan, 2008]**

Duffuaa S.O. et Khan M., (2008), A general repeat inspection plan for dependent multicharacteristic critical components, *European Journal of Operational Research*, vol. 191(2), p: 374-385.

**[Dugan et Doyle, 1997]**

Dugan J.B. et Doyle S.A., (1997), New results in fault-tree analysis, *Tutorial notes of the Annual Reliability & Maintainability Symposium*, January.



**[Galante et Passannanti, 2009]**

Galante G. et Passannanti G., (2009), An exact algorithm for preventive maintenance planning of series-parallel systems, *Reliability Engineering and System Safety*, vol. 94, p:1517-1525.

**[Gertsbakh, 1977]**

Gertsbakh, I., (1977), Models of Preventive Maintenance, North-Holland, Amsterdam.

**[Gertsbakh, 2000]**

Gertsbakh I., (2000), Reliability theory with applications to preventive maintenance, *Springer*, Berlin.

**[Gürler et Kaya, 2002]**

Gürler U. et Kaya A., (2002), A maintenance policy for a system with multi-state components: an approximate solution, *Reliability Engineering and System Safety*, vol. 76, pp: 117-127.

**[Golmakani et Fattahipour, 2011]**

Golmakani H. R. et Fattahipour F., (2011), Age-based inspection scheme for condition-based maintenance, *Journal of Quality in Maintenance Engineering*, vol. 17 (1), pp: 93-110.

**[Golmakani et Moakedi, 2012]**

Golmakani H. R. et Moakedi H., (2012), Periodic inspection optimization model for a multi-component repairable system with failure interaction, *International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, vol. 61(1-4), pp: 295-302.

**[Golmakani et Moakedi, 2013]**

Golmakani H.R. et Moakedi H., (2013), Optimal nonperiodic inspection scheme for multicomponent repairable system with failure interaction using A\* search algorithm, *International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, vol. 67 ( 5-8), pp: 1325-1336.

**[Grall et al, 2002]**

Grall A., Bérenguer C. et Deuille L., (2002), A condition based maintenance policy for stochastically deteriorating systems, *Reliability Engineering and System Safety*, vol. 76, pp: 167-180.

**[Groenevelt et al, 1992]**

Groenevelt H., Pintelon L. et Seidmann, A., (1992), Production lot sizing with machine breakdowns, *Management Science*, vol. 48(1), pp: 104-123.

**[Hajej et al, 2011]**

Hajej Z., Dellagi S. et Rezg N., (2011), An Optimal Maintenance/Production Planning for a Manufacturing System Under Random Failure Rate and a Subcontracting Constraint, *the 2nd International Conference on Industrial Engineering and Operations Management (IEOM 2011)*, Janvier, Kuala Lumpur, Malaysia.

**[Holt et al, 1960]**

Holt C.C., Modigliani F., Muth J.F., Simon H.A., (1960), Planning Production, Inventory and Work Force, *Prentice Hall*, Englewood Cliffs, New Jersey.

**[Jamali et al, 2002]**

Jamali M.A., Ait-Kadi D. et Artiba D., (2002), Stratégies optimales de remplacements périodiques, *JTEA 02*, vol. 2, pp : 242-252, Sousse Nord.

**[Kettele, 1962]**

Kettele, J.D., (1962), Least-cost Allocation of Reliability Investment, *Operations Research*, vol. 10, pp: 249-265.

**[Kenne et Nkeungoue, 2008]**

Kenne J.P. et Nkeungoue L.J., (2008), Simultaneous control of production, preventive and corrective maintenance rates of failure prone manufacturing system, *Applied numerical mathematics*, vol. 58, pp: 180-194.

**[Khatab et al, 2008]**

Khatab A., Ait-Kadi D. et Artiba A., (2008), Optimization of Selective Maintenance for Multi-missions Series-Parallel Systems, *Proceedings of the International Conference MOSIM'08*, Paris, France.

**[Koochaki et al, 2011]**

Koochaki J., Bokhorst J., Wortmann H. et Klingenberg W., (2011), Evaluating condition based maintenance effectiveness for two processes in series, *Journal of Quality in Maintenance Engineering*, vol. 17 (4), pp: 398-414.

**[Laggoune et al, 2009]**

Laggoune R., Chateaneuf A. et Aissani D., (2009), Opportunistic policy for optimal preventive maintenance of a multi-component system in continuous operating units, *Computers & Chemical Engineering*, vol. 33, pp:1499-1510.

**[Lai et Chen, 2006]**

Lai M.T. et Chen Y.C., (2006), Optimal periodic replacement policy for a two-unit system with failure rate interaction, *International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, vol. 29, pp: 367-371.

**[Levitin, 2003]**

Levitin G. (2003), Reliability of multi-state systems with two failure-modes, *IEEE Transactions on Reliability*, vol. 52(3), pp: 340-348.

**[Lim et al, 2005]**

Lim J.H., Kim D.K. et Park D.H., (2005), Cost evaluation for an imperfect-repair model with random repair time, *International Journal of Systems Science*, vol. 36(11), pp:717-726.

**[Lin et Gong, 2006]**

Lin, G. et Gong D., (2006), On a production-inventory system of deteriorating items subject to random machine breakdowns with a fixed repair time, *Mathematics and Computer Modelling*, vol. 43(7–8), pp:920-932.

**[Liu et Huang, 2010]**

Liu Y. et Huang H.Z., (2010), Optimal Selective Maintenance Strategy for Multi-State Systems under Imperfect Maintenance, *IEEE Transactions on Reliability*, vol.59(2), p:356-367.

**[Maaroufi et al, 2013a]**

Maaroufi G., Chelbi A. et Rezg N., (2013a), Optimal selective renewal policy for systems subject to propagated failures with global effect and failure isolation phenomena, *Reliability Engineering and System Safety*, vol.114, pp: 61-70.

**[Maaroufi et al, 2013b]**

Maaroufi G., Chelbi A. et Rezg N., (2013b), A selective maintenance policy for multi-component systems involving replacement and imperfect preventive maintenance actions, Accepted to be presented at the *International Conference on Industrial Engineering and Systems Management*, Rabat, Morocco, (Octobre 2013).

**[Makis et Jardine, 1992]**

Makis V. et Jardine A. K. S., (1992), Optimal replacement in the proportional hazards model, *INFOR*, vol.30, pp: 172-183.

**[Munford et Shahani, 1972]**

Munford A. et Shahani A., (1972), A nearly optimal inspection policy, *Operational Research Quarterly*, vol.23, pp:373-379.

**[Nakagawa, 2005]**

Nakagawa T., (2005), Maintenance Theory of Reliability, *Springer Series in Reliability Engineering*.

**[Nakagawa et Yasui, 1980]**

Nakagawa T. et Yasui K., (1980), Approximate calculation of optimal inspection times, *Journal of the Operational Research Society*, vol. 31, pp: 851-853.

**[Nakagawa et Yasui, 1991]**

Nakagawa T. et Yasui K., (1991), Periodic replacement models with threshold levels, *IEEE Transactions on Reliability*, vol. 40, pp: 395-397.

**[Nicolai et Dekker, 2006]**

Nicolai R.P. et Dekker R., (2006), Optimal maintenance of multi-component systems: a review, *Econometric Institute Report*, vol.29, pp:1-30.

**[Nourelfath et Châtelet, 2012]**

Nourelfath M. et Châtelet E., (2012), Integrating production, inventory and maintenance planning for a parallel system with dependent components, *Reliability Engineering and System Safety*, vol. 101, pp: 59-66.

**[Nourelfath et al, 2010]**

Nourelfath M., Fitouhi M.C. et Machani M., (2010), An Integrated Model for Production and Preventive Maintenance Planning in Multi-State Systems, *IEEE Transaction on Reliability*, vol. 59 (3), pp: 496-506.

**[Nowakowski et Werbińska, 2009]**

Nowakowski T. et Werbińska S. (2009), On problems of Multicomponent System Maintenance Modeling, *International Journal of Automation and Computing*, vol. 6(4), pp: 364-378.

**[Okumoto et Elsayed, 1983]**

Okumoto K. et Elsayed E.A., (1983), An optimum group maintenance policy, *Naval Research Logistics Quarterly*, vol.30, pp: 667-674.

**[Ouali et al, 2002]**

Ouali M.S., Rezg N. et Xie X., (2002), Maintenance preventive et optimisation des flux d'un système de production, *Journal Europeen des Systèmes Automatisés (JESA)*, vol. 36(1), pp: 97-116.

**[Rajagopalan et Cassady, 2006]**

Rajagopalan R. et Cassady CR., (2006), An improved selective maintenance solution approach. *Journal of Quality in Maintenance Engineering*, vol. 12(2), pp: 172-85.

**[Rezg et al, 2004]**

Rezg, N., Xie X. et Mati Y., (2004), Joint optimization of preventive maintenance and inventory control in a production line using simulation, *International Journal of Production Research*, vol. 44, pp: 2029-2046.

**[Ritchken et Wilson, 1990]**

Ritchken P. et Wilson J. G., (1990), (m, T) Group Maintenance Policies, *Management Science*, vol. 36(5), pp: 632-639.

**[Sasieni, 1956]**

Sasieni M. W., (1956), A Markov chain process in industrial replacement, *Operational Research Quarterly*, vol.7, pp: 148-155.

**[Scarf et Cavalcante, 2010]**

Scarf P.A., Cavalcante C.A.V., Dwight R. et Gordon P., (2010), Hybrid block replacement and inspection policies for a multi-component system with heterogeneous component lives, *European Journal of Operational Research*, vol. 206, pp: 384-394.

**[Sharma et al, 1985]**

Sharma G.C., Goel L.R., Praveen Gupta, ,(1985), Stochastic analysis of a parallel system with common cause failure, preventive maintenance and two types of repair, *Microelectronics Reliability*, vol. 25( 6), pp:1035-1039.

**[Sheu et Jhang, 1996]**

Sheu S.H. et Jhang J.P., (1996), A General Group Maintenance Policy, *European Journal of Operational Research*, vol.96, pp:232-247.

**[Thomas, 1986]**

Thomas L., (1986), A survey of maintenance and replacement models for maintainability and reliability of multi-item systems, *Reliability Engineering*, vol. 16, pp: 297-309.

**[Turco et Parolini, 1984]**

Turco T. et Parolini P., (1984), A nearly optimal inspection policy for productive equipment, *International Journal of Production Research*, vol.22, pp: 515-528.

**[Vaurio, 1999]**

Vaurio J.K., (1999), Availability and cost functions for periodically inspected preventively maintained units, *Reliability Engineering and System Safety*, vol. 63, pp: 133-140.

**[Van der Duyn Schouten, 1996]**

Van Der Duyn Schouten F.A., (1996), Maintenance policies for multi-component systems: An Overview, *Reliability and Maintenance of Complex Systems*, edition S. Ozekici, NATO ASI Series, Springer, Berlin, vol. 154, pp: 117-136.

**[Van der Duyn Schouten and Vanneste, 1993]**

Van der Duyn Schouten F. and Vanneste S.G., (1993), Two Simple Control Policies for a Multicomponent Maintenance System, *Operations Research*, vol.41 (6), pp: 1125-1136.

**[Van der Duyn Schouten and Vanneste, 1995]**

Van der Duyn Schouten F.A. and Vanneste S.G., (1995), Maintenance optimization of a production system with buffer capacity, *European Journal of Operational Research*, vol.82 (2), pp: 323-338.

**[Vergin et Scriabin, 1977]**

Vergin R.C. et Scriabin M., (1977), Maintenance scheduling for multi component equipment, *AIIE Transactions*, vol. 9, pp: 297-305.

**[Wang, 2002]**

Wang H., (2002), A survey of maintenance policies of deteriorating systems, *European Journal of Operational Research*, vol. 139, pp: 469-489.

**[Wang et al, 2013]**

Wang C., Xing L. et Levitin G., (2013), Reliability analysis of multi-trigger binary systems subject to competing failures, *Reliability Engineering and System Safety*, vol.111, pp: 9-17.

**[Wattanapanom et Shaw, 1976]**

Wattanapanom N. et Shaw L., (1976), Optimal inspection schedules for failure detection when tests hastens failures. *Technical report N° POLY EE/EP 76-001*, Polytechnic Institute of New-York, Brooklyn, New-York.

**[Wilson et Benmerzouga, 1990]**

Wilson J. G. et Benmerzouga A., (1990), Optimal m-Failure Policies with Random Repair Time, *Operations Research Letters* , vol.9, pp:203-209.

**[Xing et Levitin, 2010]**

Xing L. et Levitin G., (2010), Combinatorial analysis of systems with competing failures subject to failure isolation and propagation effects, *Reliability Engineering and System Safety*, vol.95, pp: 1210-121.

**[Xing et al, 2009]**

Xing L., Dugan J.B. et Morrissette B.A., (2009), Efficient reliability analysis of systems with functional dependence loops, *Maintenance and Reliability*, vol. 3 (43), pp: 65-9.

**[Yao et al, 2005]**

Yao X., Xie X., Fu M. et Marcus S., (2005), Optimal joint preventive maintenance and production policies, *Naval Research Logistics*, vol.52, pp: 668-681.

**[Zéqueira et Bérunguer, 2004]**

Zéqueira R. et Bérunguer C., (2004), On the inspection policy of a two-component parallel system with failure interaction, *Reliability Engineering and System Safety*, vol.88, pp:99-107.

## *Abstract*

---

This thesis focuses on the development, the evaluation and the optimization of new maintenance policies for multi-component systems. This approach is justified by the fact that contrarily to single component systems which have been extensively treated in the literature on maintenance strategies, multi-component systems with economic and stochastic dependence have been much less studied due to the difficulty in modeling such kind of dependence (in particular stochastic dependence).

In this context of studying multi-component systems maintenance, this thesis is made of three independent parts. The first part focuses on a particular type of equipment whose state can only be known following inspection. Such equipment made of two components in series is considered. A new nearly optimal condition based maintenance policy based on sequential inspections of both components is proposed. A mathematical model corresponding to this strategy is developed and a numerical procedure allowing the generation of a nearly optimal sequence of inspection instants is elaborated and tested.

In the second part, we consider complex multi-component systems in which the components are subject to random local and/or propagated failures, with or without isolation effect. A selective maintenance strategy is applied to such systems. It consists in selecting the components to be maintained (renewed) after the completion of each mission such that a required reliability level is warranted up to the next stop with the minimum cost, taking into account the time period allotted for maintenance between missions and the possibility to extend it while paying a penalty cost.

In the third and last part, the concept of multi-component systems is extended to manufacturing systems with multiple machines. In this context, this part focuses on the development of an integrated production-maintenance policy for a production system consisting of two machines in parallel in presence of a form of stochastic dependency between them. A mathematical model is developed in order to sequentially optimize the production plan of the system and the preventive maintenance of the second machine.

---