THÈSE

Présentée à

L'Université de Lorraine – METZ

UFR Mathématiques, Informatique, Mécanique

Pour obtenir le titre de

DOCTEUR

en

Automatique, Traitement du Signal et des Images, Génie Informatique

Par

Soumaya BOUGUERRA

INTEGRATION DES STRATEGIES DE MAINTENANCE DANS LE CALCUL DES EXTENSIONS DE GARANTIE

Soutenue le 14 décembre 2012, devant le jury composé de :

Rapporteurs

Alexandre DOLGUI	Professeur à l'École des Mines de Saint-Etienne
Daniel NOYES	Professeur à l'École Nationale d'Ingénieurs de Tarbes

Examinateurs

Anis CHELBI	Professeur à l'École Supérieure des Sciences et Techniques de Tunis
Jérôme CABY	Professeur à l' ICN Business School Nancy-Metz
Mitra FOULADIRARD	Maître de conférences à l'Université de Technologie de Troyes

Directeur de thèse

Nidhal REZG	Professeur à l'Université Paul Verlaine – Metz

Remerciements

Le travail de recherche présenté dans ce mémoire a été accompli au sein de l'équipe Fiabilité et Maintenance du Laboratoire de Génie Industriel et de Production de Metz (LGIPM).

Je tiens tout d'abord à remercier mon directeur de thèse, Mr. Nidhal REZG Professeur à l'Université Paul Verlaine – Metz et directeur du LGIPM pour m'avoir donné l'opportunité d'effectuer cette thèse dans son équipe de recherche. Je le remercie pour sa confiance et pour l'intérêt qu'il a porté pour ce travail.

Je remercie également Mr. Anis CHELBI, Professeur à l'Ecole Supérieure des Sciences et Techniques de Tunis pour son aide, sa disponibilité, ses judicieux et précieux conseils pendant toute la durée de cette thèse, le temps conséquent qu'il m'a accordé et ses qualités pédagogiques et scientifiques. Je lui suis reconnaissante pour ses encouragements, son enthousiasme et sa confiance. J'ai beaucoup appris à ses côtés et je lui adresse ma gratitude pour tout cela.

Je tiens également à adresser mes plus vifs remerciements aux membres du jury, qui ont accepté d'évaluer mon travail de thèse.

Merci à Mr. Daniel NOYES, Professeur à l'École Nationale d'Ingénieurs de Tarbes et Alexandre DOLGUI, Professeur à l'École des Mines de Saint-Etienne, d'avoir accepté d'être les rapporteurs de ce manuscrit. Leurs remarques et suggestions me permettront d'apporter des améliorations à la qualité de ce dernier.

Merci à Mme. Mitra FOULADIRARD, Maître de conférences à l'Université de Technologie de Troyes et Jérôme CABY, Professeur à l'ICN Business School Nancy-Metz, pour avoir accepté d'examiner mon travail de recherche et de faire partie de mon jury de thèse.

J'exprime ma profonde gratitude envers mes collègues et tous les membres du LGIPM pour leur sympathie et l'ambiance cordiale qu'ils ont su faire régner au sein de l'équipe.

Je remercie avec grande émotion ma famille pour son irremplaçable et inconditionnel soutien. Elle m'a toujours encouragé à aller de l'avant dans la vie malgré la difficulté d'être loin de ses proches. Merci d'avoir été là pour écarter les doutes, soigner les blessures et partager les joies. Cette thèse est aussi la vôtre.

Je souhaite remercier spécialement mon fiancé Aymen pour son amour, son soutien sans faille, sa patience, et pour tout ce qu'il a pu m'apporter pour franchir les obstacles les plus difficiles tout au long de la thèse.

Merci à tous mes amis pour leur amitié et notamment à mes colocataires avec qui, j'ai partagé des bons et mauvais moments. Merci à vous tous pour les agréables occasions passées.

Un grand merci à tous ceux qui, par leur soutien sous une forme ou une autre, m'ont aidé dans la réalisation de ce travail.

Sommaire

Liste des figures

Liste des tableaux

Introduction générale

De très nombreux produits ayant différentes utilités (transport, production, articles ménagers, etc.…) sont vendus aux consommateurs avec un contrat de garantie. La performance du produit durant la période de garantie dépend de la fiabilité intrinsèque de celui-ci (déterminée par le concepteur et le fabricant) et son usage (déterminé par le consommateur).

Durant la période de garantie, si le consommateur n'est pas satisfait des performances du système, il fait une réclamation au fabricant (ou au vendeur qui représente le fabricant) et lui demande d'apporter la solution adéquate en supportant les coûts conformément aux clauses du contrat de garantie.

Le rôle de la garantie est perçu de deux points de vue différents : le point de vue du consommateur et celui du fabricant.

Du point de vue du fabricant, la garantie a un rôle de protection. Le contrat de garantie définit généralement les conditions d'utilisation pour un niveau de couverture spécifié en cas de mauvais usage du système par le consommateur. La période de garantie est aussi considérée comme un moyen de promotion des produits vendus. En effet, les consommateurs relient généralement la fiabilité du système à la longueur de sa période de garantie.

Du point de vue du consommateur, la période de garantie a aussi un rôle de protection. Elle assure le consommateur qu'une entité défectueuse sera réparée ou remplacée par le fabricant gratuitement ou à coût réduit (selon les clauses du contrat). Le second rôle de la garantie est informationnel, pour le consommateur, un système vendu avec une plus longue période de garantie que celle offerte pour un produit similaire, présente plus d'assurance en ce qui concerne la fiabilité.

L'objectif de la garantie a longtemps été limité à des interventions correctives effectuées par le fabricant (ou son représentant) sur une période de temps bien déterminée. Depuis quelques années, les actions de maintenance effectuées durant la période de garantie ont pris une nouvelle forme, elles deviennent à dominance préventive en contribuant à améliorer la fiabilité des équipements et la qualité des produits.

Dans la littérature, plusieurs études et recherches ont proposé différentes stratégies de garantie combinées à différentes politiques de maintenance. Ces stratégies visent généralement à optimiser le coût du cycle de vie des produits, ceci aussi bien du point de vue du consommateur que du point de vue du fabricant.

En pratique, plusieurs produits tels que les automobiles sont vendus avec une période de garantie avec la possibilité de la prolonger d'une certaine durée à son expiration. En effet, au moment de l'achat, le consommateur a le choix entre se contenter de la période de garantie de base ou payer un coût supplémentaire pour profiter d'une extension qui prolongerait la garantie d'une certaine période (généralement inférieure à la période de garantie de base).

Nous nous proposons dans cette thèse de développer des modèles mathématiques pour étudier l'opportunité apportée par la période de garantie étendue aussi bien pour le consommateur que pour le fabricant d'un produit, ceci pour différentes situations impliquant des politiques de maintenance différentes durant le cycle de vie du produit. Nous exprimerons pour cela le coût total moyen encouru, par le consommateur et par le fabriquant le long du cycle de vie du produit. Nous considèrerons également différentes options concernant les politiques de maintenance à adopter (faire de la maintenance préventive ou non) pour le produit durant les périodes suivantes : la période de garantie de base, la période de garantie étendue et la période post-garantie se terminant à la fin du cycle de vie du produit.

Ainsi, l'objectif de cette thèse est de proposer et modéliser mathématiquement de nouvelles stratégies de garantie étendue. Plus spécifiquement, notre objectif à travers cette modélisation consiste à doter le consommateur et le fabricant de modèles qui les aideraient, chacun de son coté, à répondre à plusieurs questions intéressantes incluant les questions suivantes :

- Sous quelles conditions serait-il dans l'intérêt du consommateur d'acheter la garantie étendue.
- Quel est le prix minimum auquel le fabricant devrait vendre la garantie étendue. En d'autres termes quel est son seuil de rentabilité pour cette garantie étendue ?
- Est-il opportun de faire de la maintenance préventive durant la période de garantie de base et/ou durant la période étendue ?

- S'il s'avère qu'il est avantageux de faire de la maintenance préventive, quel serait le niveau optimal d'effort à fournir pour ce type de maintenance ?

Cette thèse est organisée comme suit : le premier chapitre présente une revue de la littérature dans laquelle sont exposées plusieurs stratégies de garantie classées selon différentes catégories (le type de produit, les types d'actions de maintenance entreprises sur le produit, la dimension de la garantie (unidimensionnelle ou bidimensionnelle) et la possibilité de renouvellement de celle-ci). Le deuxième chapitre sera consacré au développement d'une stratégie de garantie étendue unidimensionnelle impliquant des actions de maintenance préventive pour des systèmes sujets à des défaillances aléatoires, le modèle développé sera illustré à l'aide d'un exemple numérique et les résultats obtenus seront discutés. Le troisième chapitre, présente une extension du chapitre précédent en tenant compte des conditions d'utilisation et de l'environnement dans lequel est exploité le produit. Dans le quatrième chapitre nous étudions l'opportunité apportée par la garantie étendue dans le cas d'une garantie bidimensionnelle en considérant un comportement déterministe de l'usager. Ce même problème est traité dans le dernier chapitre mais en adoptant une approche stochastique pour modéliser le comportement de l'usager du produit.

Enfin, une conclusion générale résume les contributions essentielles de cette thèse.

Chapitre 1

Synthèse bibliographique sur les stratégies de garantie

Sommaire

I.1. Introduction

La notion de garantie a été largement traitée dans la littérature durant les trente dernières années. Plusieurs auteurs l'ont définie de différentes façons mais avec toujours la même idée d'un contrat établi entre un fabricant ou un vendeur d'un certain produit avec le consommateur du produit en question.

Berker T.M. et Zaino N.A. (1991) définissent la garantie comme étant un contrat d'obligation offert par le fabricant au moment de la vente d'un produit. Le contrat de garantie a pour but de garantir à l'acheteur le remplacement ou la remise en état du produit en cas de défaillance durant une période de temps donnée sous des contraintes spécifiées.

En cas de panne du produit, celui-ci est remplacé ou réparé et les coûts relatifs à ces actions de réparation ou de remplacement seront supportés par le fabricant ou partagés entre le fabricant et le consommateur selon la stratégie de garantie adoptée entre les deux parties.

La bibliographie traitant des politiques de garantie et de leur mise en œuvre nous permet de classer les stratégies de garantie selon les différentes catégories suivantes,

- Selon le type de produit et de son stade de développement : un nouveau produit, un produit usagé ou un produit encore au stade de la conception ou de la fabrication.
- Selon les différents types d'actions de maintenance qui doivent être entreprises sur le produit durant la période de garantie. Pour des systèmes réparables, ces actions peuvent être des actions de maintenance préventive ou des actions de maintenance corrective. Elles peuvent avoir différents effets sur le taux de défaillance du produit. Certaines actions, dites parfaites, ramènent le produit à l'état neuf '*as good as new'*. D'autres, appelées réparations minimales remettent le produit en marche suite à une panne tout en conservant son état de dégradation au même niveau où il était avant la panne 'as *bad as old'.* D'autres actions de maintenance, dites imparfaites, ramènent le produit à un état entre '*as good as new*' et *'as bad as old'.* Enfin, certains contrats de garantie prévoient des combinaisons de types d'actions de maintenance décrites ci-dessus.
- Selon la dimension de la garantie (unidimensionnelle ou bidimensionnelle). Pour certains produits, le calcul de la période de garantie ne prend en considération que l'âge du système. Il s'agit d'une stratégie de garantie unidimensionnelle. Un autre type

de stratégie est considéré, celui d'une garantie bidimensionnelle où généralement la période de garantie prend en compte deux paramètres : l'âge et l'usage.

- Selon le type de garantie dans le sens que celle-ci soit prolongeable ou non. En effet, pour certains produits la période de garantie initiale peut être étendue moyennant un coût supplémentaire selon des conditions données.

Ces différentes stratégies de garantie préconisent divers arrangements financiers. **Chun Y.H. (1992)** et **Dagpunar J.S.et Jack N. (1994)** ont défini les types suivants de couverture financière des coûts encourus:

- les stratégies de garantie de type FRW (*Free Replacement Warranty*) pour lesquelles toutes les réparations effectuées durant la période de garantie sont payées par le fabricant.

- les stratégies de garantie de type PRW (*Pro-Rata Warranty*) pour lesquelles les coûts de maintenance durant la période de garantie sont supportés conjointement par le consommateur et le fabricant selon une logique d'évolution des coûts proportionnellement aux dates des actions de maintenance durant la période de garantie W.
- Les stratégies de garantie dites 'modifiées' dans le cadre desquelles des actions de maintenance préventive sont effectuées, la couverture des coûts pour le consommateur et le fabricant se fait selon la logique de pro-rata décrite ci-dessus.

Nous présentons dans ce qui suit une synthèse de différents travaux de recherche que nous avons pu recenser qui traitent des différents types de stratégies de garantie. Nous avons classé ces travaux selon les quatre types de stratégies décrites ci-haut (selon le type de produit et du stade de son développement, selon les types d'actions de maintenance, selon la dimension de la garantie et selon la possibilité de renouvellement de la garantie).

I.2. Les stratégies de garantie : classement et synthèse

I.2.1. Politiques de garantie selon le stade de développement du produit (conception/fabrication)

Le cycle de vie d'un produit commence par la conception, ensuite la fabrication suivie par une période d'utilisation par un même consommateur ou par une succession de consommateurs, avant qu'il ne soit mis au rebut ou recyclé partiellement ou totalement.

Certains auteurs ont tenu compte des stratégies de garantie pour des produits dés le stade de leur conception. En effet, ils recherchent généralement une conception optimale des produits tenant compte, entre autres, de la période de garantie qui sera offerte au consommateur du produit. Il s'agit dans l'essentiel de ces travaux de sélectionner, parmi plusieurs conceptions possibles (c'est-à-dire plusieurs niveaux de fiabilité possibles), celle qui génère un coût minimal de conception, de fabrication et d'exploitation durant le cycle de vie du produit, tenant compte du contrat de garantie.

D'autres auteurs font référence à ce type de problème en tant que '*Reliability-based design'*. Citons à titre d'exemple **Coit D.W et Smith A.E. (1996)** qui ont proposé une méthodologie de conception optimale d'un système série-parallèle avec k sous-systèmes redondants en utilisant un algorithme génétique. Les travaux de **Monga et al. (1995.a, 1995.b, 1997)** ont présenté une conception optimale du système (en termes de 'coût de cycle de vie minimal') pour un système série-parallèle pour lequel la fiabilité des composants varie avec le temps. Leur modèle incorpore les effets de la maintenance préventive et des réparations minimales. Le coût du cycle de vie du système inclut les coûts pour le fabricant et les coûts pour le consommateur pour une politique donnée de garantie.

Ces modèles ont été étendus par **Lin D. et al. (2000)** qui ont considéré un système série-parallèle composé d'un nombre spécifique de sous-systèmes en série. Chaque sous système bénéficie d'une redondance active avec des éléments identiques. Les auteurs ont déterminé la conception optimale du système qui prend en considération l'effet des actions imparfaites de maintenance préventive durant la période de garantie en minimisant les coûts de maintenance payés par le consommateur. **Huang H.Z. et al. (2007)** ont développé un modèle qui intègre les aspects de marketing dans la phase de conception de nouveaux produits. Le modèle permet de choisir de façon optimale la période de garantie, le prix et le niveau de fiabilité du produit afin de maximiser le profit estimé pour un produit vendu avec une politique de garantie FRW. Ils ont considéré deux scénarios pour la durée de la période de garantie et son coût:

Scénario 1: les conditions de marché sont stables. Dans ce cas, le prix et la période de garantie sont constants au cours du cycle de vie du produit.

Scénario 2: le prix de vente unitaire et la durée de la période de garantie sont variable dans le temps.

Après leur conception, les produits sont vendus avec une période de garantie qui engendre un coût supplémentaire de maintenance et d'entretien. En général, un produit non conforme qui présente des défauts entraîne des coûts plus élevés qu'un produit conforme. Afin de réduire la fraction de produits non-conformes lors de la fabrication, deux approches sont proposées dans la littérature. Une première approche consiste à contrôler la taille du lot. A cet égard, on peut citer les travaux de **Djamaludin I. et al. (1994)** qui ont montré que la taille du lot est un facteur important dans l'amélioration de la qualité des produits vendus avec une garantie. Pour chaque cas, ils déterminent la taille optimale du lot et ils montrent que le calibrage est une méthode efficace pour contrôler la qualité d'un système détérioré. **Ruey H.Y.et Tzu H.C. (2006)** ont développé un modèle mathématique pour déterminer la taille optimale du lot et la politique d'inspection des produits pour un système de production qui se détériore, pour des produits vendus avec une garantie de type FRW. Dans leur article, les auteurs ont pris en compte le coût de maintien des stocks pour le cas où les produits non conformes peuvent être détectés soit par des inspections ou des tests dans un laps de temps très court (négligeable). L'autre approche consiste à inspecter ou à tester les produits sortants et à éliminer les produits non conformes. Pour cette approche, la plupart des travaux se concentrent soit sur la recherche d'une politique d'inspection optimale comme par exemple dans le travail de **Chen J.et al. (1998)** ou la détermination d'une période de rodage optimale afin de réduire le nombre de produits non conformes mis en vente. Les deux approches ont été conjointement utilisées dans les travaux de **Yeh R.H. and Lo H.C. (1998**). Récemment, **Yeh R.H. et al. (2000)** ont reformulé le modèle de **Djamaludin I. et al. (1994)** en considérant une distribution exponentielle du taux de panne du produit, ils ont aussi pris en considération le coût de maintien des stocks et les coûts de garantie. Ils ont montré que la taille optimale du lot est unique et elle est bornée dans un intervalle fini. **Wang C.H. (2004)** et **Wang C.H. et Sheu S.H. (2003)** ont étendu les travaux de **Yeh R.H. et al. (2000)** en y incorporant des distributions de durées de vie continues et discrètes.

Giri B.C. et Dohi T. (2007) ont cherché à intégrer les inspections séquentielles au cours d'un processus de production dans un modèle de fabrication économique imparfait. Les pièces produites sont réparables et sont vendus avec une garantie de type FRW. L'objectif de cette étude est de déterminer conjointement la longueur optimale du cycle de production, le nombre optimal d'inspections au cours d'un processus de production et le calendrier d'inspections qui permettent de réduire le coût d'une entité produite. Le modèle est formulé sous deux politiques différentes d'inspection : (i) A chaque inspection aucune action n'est prise pendant une production à moins que l'on ne découvre le système dans un état ' out-of-control ' à l'exception de la dernière inspection où une action de maintenance préventive est effectuée et (ii) à chaque inspection, si le processus est à l'état 'out-of-control' une restauration du système est réalisée, sinon une action préventive est entreprise.

Les auteurs proposent un algorithme qui détermine la politique optimale d'inspection. Une comparaison entre les politiques optimales et sous optimales d'inspection est faite et l'impact de la politique FRW sur la stratégie optimale d'inspection est examiné.

Sur un autre plan, la période de conception et de développement d'un produit peut avoir un effet sur sa fiabilité et donc sur son taux de défaillance durant la période de garantie. En effet, généralement, plus l'effort (donc la durée) de conception et de développement est grand, plus le système est fiable. Dans ce contexte, **Hussain A.Z.M.O. et Murthy D.N.P. (2003)** ont cherché à déterminer la période optimale de développement qui donne le meilleur compromis entre le coût de développement et la réduction du coût de la garantie. Les auteurs considèrent des systèmes avec un taux de défaillance constant. La stratégie de garantie choisie est de type FRW (*Free Replacement Warranty*). Suite à une panne, des actions de réparation minimale sont effectuées sur le système. La période optimale de développement est déterminée par la minimisation du coût total moyen par entité.

La période de rodage peut être considérée comme une période du processus de production durant laquelle les produits fabriqués sont exploités sous des contraintes amplifiées pour une courte période avant leur exploitation réelle. Le rôle principal de la période de rodage est de détecter les défauts existants à un stade précoce de l'exploitation des produits. La période de rodage a été considérée comme un moyen pour améliorer la fiabilité des produits. Dans ce contexte, **Nguyen D.G. et Murthy D.N.P. (1982)** ont traité le cas des produits avec un taux de panne élevé au moment de la mise en marche sur le marché. Ils ont constaté que pour ces produits la période de rodage peut être utilisée pour réduire le coût de la garantie. **Kar T.R. et Nachlas J.A. (1997)** ont présenté un modèle pour étudier les politiques de garantie et de rodage dans le but d'examiner les avantages pour la gestion des produits. Ils ont cherché à déterminer la période de rodage optimale dans le but de minimiser les coûts associés à cette période et la période de garantie. **Yun W.Y. et al. (2002)** ont déterminé la période de rodage optimale afin de minimiser le coût total moyen, qui est la somme des coûts de fabrication, de rodage et de garantie pour une stratégie de garantie FRW.

Sheu S.H. et Chien Y.H. (2005) ont développé un modèle généralisé pour déterminer la période optimale de rodage pour les produits réparables vendus sous garantie afin de parvenir à un compromis entre la réduction du coût des garanties et l'augmentation des coûts de fabrication (la période de rodage étant considérée comme partie du processus de fabrication). Le coût total par unité vendue a été exprimé pour différentes politiques de garantie. **Chin C. W. et al. (2007)** ont développé un modèle pour déterminer les durées optimales de la période de rodage et de la période de garantie pour le cas de produits non-réparables vendus avec des stratégies de garantie FRW / PRW. Ils traitent le cas des produits dont les temps inter-défaillances suivent une distribution exponentielle ou une distribution de Weibull.

Une fois les produits conçus, fabriqués et mis sur le marché, arrive la période de leur exploitation. Dans plusieurs situations pratiques, certains produits ne sont pas exploités dès leur installation. Ils peuvent demeurer installés mais non encore exploités pendant quelques semaines, quelques mois ou même plus longtemps. Ceci est vrai dans le cas par exemple de systèmes achetés et installés dans de grandes installations (bâtiments ou autres) en cours de construction et qui ne seront exploités qu'à la fin des travaux. Avant l'achèvement du bâtiment, les produits se retrouvent dans un état 'dormant' mais ils sont protégés par la garantie. Ainsi, ces produits ont un taux d'usage variable. D'autres types de produits tels que les missiles de défense demeurent dans un état dormant pour une longue période avant d'être utilisés.

À l'état dormant, ces produits peuvent vieillir et se détériorer, ils peuvent même se révéler défaillants suite à leur mise en marche. En effet, aucune inspection ou entretien est généralement effectué sur ces produits durant la phase de l'état 'dormant'. Ainsi, la période où le produit est à l'état 'dormant' devrait être prise en considération lors de l'analyse des coûts de maintenance durant la période de la garantie afin d'éviter des résultats irréalistes. La politique de garantie pour de tels produits avec un taux d''usage variable a été analysée par certains chercheurs. D'une part, **Murthy D.N.P. (1992)** a traité le cas où les produits sont utilisés par intervalles de temps. Il a donné une estimation du coût de la garantie par entité vendue pour le cas où l'usage du produit est intermittent sur la période de la garantie et la défaillance du produit est dépendante de l'usage. Il considère des produits à taux de défaillance constant durant la phase de l'état 'dormant'. D'autre part, **Shaomin Wu et Huiqing Li (2007)**, ont développé un modèle mathématique pour déterminer le coût de garantie pour les produits réparables avec un état 'dormant', ceci des deux points de vue du fabricant et du consommateur dans un contexte de construction de bâtiments. L'objectif de leur travail est de donner une solution pour les consommateurs pour sélectionner leur produit en se basant sur les différentes stratégies de garantie offertes par le fabricant. Dans ce modèle, les auteurs supposent que les produits installés dans le bâtiment sont réparables. Les défaillances des produits étudiés sont statistiquement indépendantes. Durant la période de garantie, les pannes sont réparées par le fabricant et les réparations effectuées sont des réparations minimales.

Parmi les différents types de produits dans le domaine de la construction, deux types de politiques de garantie sont généralement considérés :

Certains produits sont revendus à un autre consommateur après leur première utilisation. Ces produits peuvent être revendus avec une certaine période de garantie. **Chattopadhyay G.N.et Murthy D.N.P. (2000)** ont cherché à estimer le coût moyen de garantie pour de tels produits d'occasion vendus avec une stratégie de garantie '*Free Replacement Warranty'* (FRW) ou *'pro-rata'* (PRW).

Pour cela, les auteurs utilisent deux approches pour modéliser les réclamations de garantie.

- Approche 1 : le système est considéré comme un bloc indissociable « black box »,
- Approche 2 : la fiabilité de chaque entité dans le système est considérée à part.

Les auteurs font l'hypothèse d'ignorer l'historique de maintenance et l'usage passé du système.

Les cas suivants ont été distingués (Figure I.1):

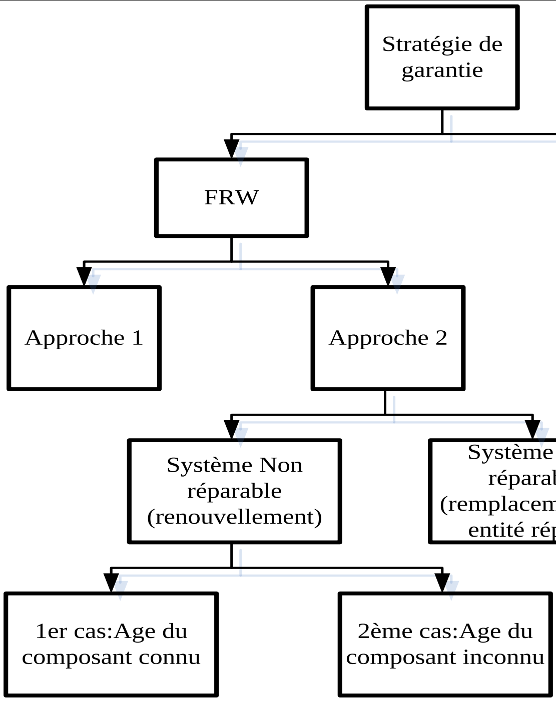


Figure I.1. Différents cas considérés pour les stratégies de garantie (Chattopadhyay G.N. et Murthy D.N.P. (2000))

Les auteurs comparent les différentes approches proposées ci-dessus et sélectionnent la meilleure, celle qui engendre le coût total moyen le plus faible. Le modèle mathématique proposé est appliqué pour un système ayant des temps inter-défaillances distribués suivant une loi de Weibull.

Les résultats obtenus pour l'exemple considéré montrent que les coûts moyens de garantie pour des anciens systèmes sont plus élevés que ceux des systèmes plus jeunes. Ceci confirme le fait que les systèmes usagés deviennent moins attractifs pour les acheteurs. Comme solution pour rendre le prix d'achat des systèmes usagés plus attractifs pour l'acheteur, les auteurs proposent de subventionner le coût moyen des vieux articles et de compenser cela avec les coûts moyens des articles moins usagés.

I.2.2. Politiques de garantie selon les différents types d'actions de maintenance

Plusieurs travaux dans la littérature considèrent que pour certains produits réparables, des actions de maintenance préventive sont prévues durant la période de garantie. Ces actions peuvent avoir différents effets sur le taux de défaillance du produit. Citons ici quelques travaux connus sur les politiques de maintenance préventive. **Barlow R.E. et Hunter L.C. (1960)** ont considéré une stratégie où des actions de maintenance préventive sont effectuées à des instants multiples de T (kT, k=1,2…N-1) avec des actions de réparation minimale lors de l'occurrence d'une panne. En considérant un coût de réparation minimale constant, ces auteurs ont cherché à calculer l'intervalle de temps optimal de maintenance préventive T* qui minimise le coût total moyen de la stratégie sur un horizon infini. D'un autre côté, **Boland P.J. (1982)** a étendu le modèle proposé par **Barlow R.E. et Hunter L.C. (1960)** pour le cas où le coût de réparation minimale est une fonction décroissante en fonction du nombre d'actions de réparations minimales et du temps depuis la dernière action de maintenance préventive.

Ces auteurs ont tous supposé qu'après une action de maintenance préventive le système est dans un état *'as good as new'* (il s'agit d'actions de maintenance parfaite). De plus, **Nakagawa T. (1980, 1981)** a proposé une stratégie où des actions de maintenance préventive périodiques sont effectuées à des instants multiples de T (kT, k=1,2…, N-1) et qui réduisent l'âge du système d'une certaine durée x unités de temps connue$(0 \leq x \leq T)$. De plus, le système est remplacé par un système identique neuf aux instants NT (N=1,2…) et il y a une réparation minimale suite à chaque panne. L'intervalle optimal T* des actions de maintenance préventive et le nombre de remplacements N* sont déterminés en minimisant le coût total moyen de maintenance par unité de temps sur un intervalle de temps infini.

En outre, **Chun Y.H. (1992)** a considéré des systèmes qui subissent, durant la période de garantie, des actions parfaites de maintenance préventive à des instants multiples de T. Des actions de réparation minimale en cas de défaillance entre les instants de maintenance préventive sont effectuées (figure I.2).

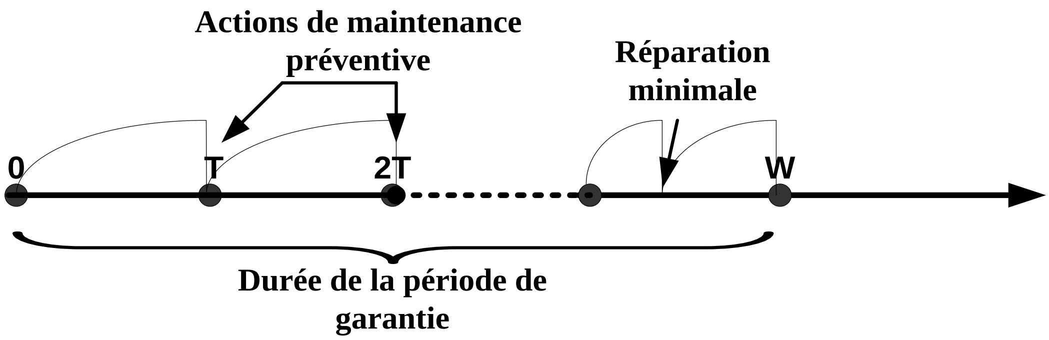


Figure I.2. Différentes actions de maintenance réalisées durant $[\mathbf{0}, \boldsymbol{W}]$ (Chun Y.H (1991))

L'objectif de ce travail a été de déterminer le nombre optimal d'actions de maintenance préventive qui minimise le coût total pour le fabricant durant la période de garantie. Ceci en considérant deux types de stratégies de garantie qui sont:

- *Free warranty policy* : le coût des actions de maintenance préventive et de réparation minimale pendant la période de garantie sont payés par le fabricant.

- *Modified warranty policy* : le coût des actions de maintenance préventive durant la période de garantie sont supportés conjointement par le consommateur et le fabricant selon une logique d'évolution des coûts proportionnellement aux dates des actions de maintenance durant la période de garantie. Les coûts de réparation minimale sont payés par le fabricant.

Pour chacun de ces deux types de stratégies, le nombre optimal d'actions de maintenance préventive est déterminé par la minimisation du coût total payé par le fabricant durant la période de garantie.

Le même problème a été posé par **Chun Y.H. et Lee C.S.(1992)** pour déterminer la stratégie optimale de remplacement pour des systèmes sous garantie qui subissent des actions de maintenance préventive imparfaite. Des actions de réparation minimale sont effectuées lors de l'occurrence d'une panne. L'objectif de ce travail était de déterminer la date optimale de remplacement qui minimise le coût de maintenance pour le consommateur dans le cas d'une stratégie de garantie modifiée. Les remplacements du système sont effectués seulement aux instants programmés pour effectuer des actions de maintenance préventive.

En comparaison avec des travaux antérieurs, les auteurs ont conclu que le temps de remplacement optimal a tendance à augmenter proportionnellement par rapport au prix d'achat du produit pour un intervalle de maintenance préventive donné. L'intervalle de maintenance préventive optimal et le temps de remplacement optimal ont tendance à augmenter lorsque le taux de panne décroît.

Une autre stratégie de maintenance préventive a été proposée par **Dagpunar J.S. et Jack N. (1994)**. Dans cet article, les auteurs ont cherché à optimiser le nombre d'actions de maintenance préventive imparfaite, les dates de ces actions ainsi que la réduction d'âge résultant de ces actions de maintenance. Les systèmes considérés sont vendus avec des périodes de garantie. Durant cette période, des actions de maintenance préventive imparfaite sont effectuées à des instants multiples de T. A chaque défaillance entre les instants de maintenance préventive, le système subit une action de réparation minimale. La stratégie de garantie adoptée est de type FRW. Les coûts de maintenance préventive sont composés de coûts fixes et de coûts variables. Les résultats sont obtenus en minimisant le coût total moyen durant la période de garantie.

En se référant à **Chun Y.H. (1992)**, **Jack N. et Dagpunar J.S. (1994)** ont cherché à optimiser le nombre d'actions de maintenance préventive durant la période de garantie dans le cas de systèmes ayant un taux de défaillance croissant et vendus avec une période de garantie pour une stratégie de garantie FRW (les actions de maintenance préventive et corrective sont payées par le vendeur). Durant la période de garantie, pour toute défaillance du système, des actions de réparation minimale sont effectuées et les actions de maintenance préventive ont pour effet de rajeunir le système.

Contrairement à **Chun Y.H. (1992)** qui avait supposé que les actions de maintenance préventive sont effectuées à des instants nT (n=1,2, 3, …), **Jack N. et Dagpunar J.S (1994)** proposent d'effectuer les actions de maintenance préventive à des instants kx (k=1,2,………N), x étant la réduction d'âge pour chaque action de maintenance préventive, N étant le nombre d'actions de maintenance préventive durant la période de garantie. Le nombre optimal d'actions de maintenance préventive est déterminé en minimisant la fonction du coût total moyen de maintenance durant la période de garantie. **Chen T.M. et Popova E. (2000)** ont aussi cherché à déterminer le nombre optimal d'actions de maintenance préventive afin de minimiser le coût total estimé de la période de garantie pour le fabricant.

Kim C.S. et al. (2004) ont considéré des systèmes vendus avec une période de garantie (W) et ayant une période de cycle de vie (d'exploitation) (L). Pendant la période de garantie (W), des actions de maintenance préventive imparfaite sont effectuées à des temps discrets multiples de T avec un effort (m). En cas de panne, des réparations minimales sont effectués (Figure I.3).

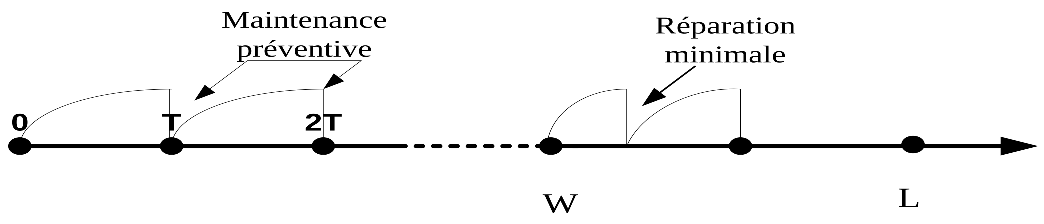


Figure I.3. Les différentes actions de maintenance réalisées durant le cycle de vie du système (Kim C.S. et al. (2004))

Les actions de maintenance préventive ont pour effet de rajeunir l'équipement dépendamment de l'effort de maintenance (m) réalisé. Ceci a pour conséquence de diminuer le taux de panne et de prolonger la durée de vie du système.

Les auteurs ont proposé trois options suivant lesquelles les actions de maintenance préventive peuvent être effectuées durant tout le cycle de vie de l'équipement :

- Option A : pas de maintenance préventive durant tout le cycle de vie de l'équipement
- Option B : les actions de maintenance préventive sont effectuées sur tout le cycle de vie du produit [0,L]
- Option C : les actions de maintenance préventive sont effectuées seulement pendant la période post-garantie [W,L]

L'objectif de ce travail est de déterminer la stratégie de garantie optimale à adopter, ce choix est effectué en déterminant l'option qui donne le coût total minimum des actions de maintenance encouru pendant le cycle de vie du système pour chacun des points de vue du consommateur et du fabricant. **Jun W. et al. (2011)** ont développé une politique de maintenance préventive périodique pour des systèmes réparables. Ce travail se différencie des études précédentes, en supposant que la date de la première action de maintenance préventive n'est pas spécifiée à l'avance. Elle doit être optimisée. Les actions suivantes de maintenance préventive sont effectuées périodiquement jusqu'à la fin du cycle de vie du système incluant une période de garantie. La deuxième variable de décision est le degré d'efficacité de chaque action de maintenance préventive. Les auteurs ont cherché à minimiser le coût de cycle de vie du système pour le consommateur.

Pour certains systèmes, seules des actions de maintenance corrective ou de remplacement à la panne sont effectuées (pas de maintenance préventive). Différentes stratégies de maintenance ont été proposées dans ce contexte. Le modèle avec réparation minimale a été initialement introduit par **Nguyen D.G. (1984)**, avec une période de garantie divisée en un intervalle de remplacement suivi d'un intervalle de réparation (Figure I.4).

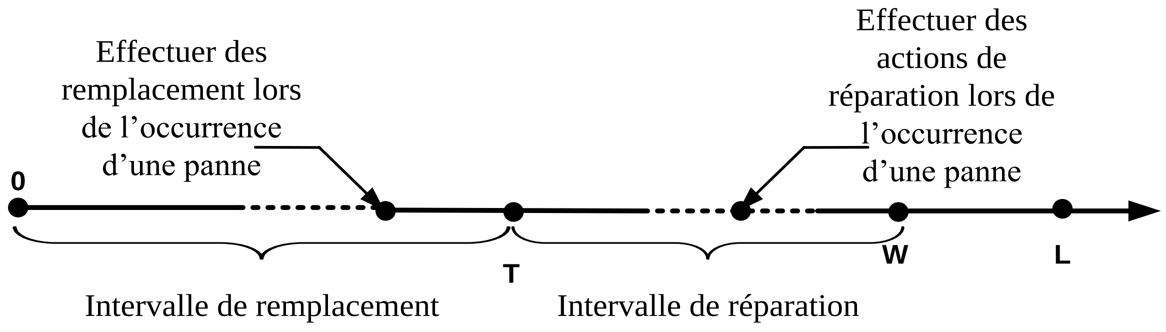


Figure I.4. Stratégie de garantie proposée par Nguyen D.G. (1984)

La durée du premier intervalle (durée pendant laquelle on ne fait que des remplacements suite aux pannes) est sélectionnée de façon optimale afin de minimiser le coût moyen de garantie.

Murthy D.N.P et Nguyen D.G. (1998) ont proposé un modèle dans lequel les coûts de réparation sont considérés comme une variable aléatoire. Une politique de coût-limite de réparation est suggérée, en vertu de laquelle le remplacement est choisi au lieu d'une réparation si le coût de réparation dépasse un coût-limite (constant). **Jack N. et Van der Duyn Schouten (2000)** ont montré que cette stratégie n'est pas optimale et que la stratégie de service optimale est caractérisée par trois intervalles $[0,x],[x,y],[y,W]$ où W est la durée de la période de garantie. La stratégie optimale consiste à réaliser des actions de réparation minimale durant le premier et le dernier intervalle ($[0,x],[y,W]$) ainsi que des réparations minimales ou des remplacements par un produit identique neuf durant l'intervalle $[x,y]$ dépendamment de l'âge du système à la panne. Les auteurs ont fait une hypothèse sur l'optimalité d'une politique de limite d'âge L(t), pour des système ayant un taux de défaillance croissant et pour chaque instant t, 0<t<W, il existe une limite de contrôle L(t), telle qu'une réparation minimale est effectuée en cas de défaillance avec (t) unités de temps restant dans la période de garantie si et seulement si l'âge de l'unité défectueuse est inférieur ou égal à la limite L(t). **Jack N. et Murthy D.N.P (2001)** ont proposé une stratégie quasi-optimale utilisant les mêmes intervalles $[0,x],[x,y]\,et\,[y,W]$ à la différence que durant l'intervalle $[x,y]$, à la première défaillance, le système est remplacé et pour toute autre défaillance pendant cet intervalle une action de réparation minimale est effectuée.

Jiang X. et al. (2006) ont étendu le modèle de **Jack N. et Van der Duyn Schouten F. (2000)** pour le cas où le coût de réparation peut être aléatoire.

Pascual R. et Ortega J.H. (2006) ont considéré la même stratégie de maintenance (des actions de réparation minimale et des remplacements) en ajoutant des actions préventives qui sont les révisions périodiques du système et qui ont pour effet d'améliorer le taux de panne. Ils ont présenté un modèle qui relie le taux de défaillance au facteur d'amélioration des actions de révision. Ils ont proposé un modèle de minimisation des coûts. Ce modèle permet d'obtenir le nombre de révisions périodiques optimales à effectuer pendant le cycle de vie du système. Il permet également de négocier un meilleur contrat de garantie avec le vendeur en offrant un meilleur programme de maintenance préventive pour le système.

Jain M. et Maheswari S. (2006) proposent un modèle pour une maintenance du système avec une politique de garantie au pro-rata. Si le système tombe en panne avant la date (w) de fin de la période de garantie, il est remplacé par le fabricant et la période de garantie est renouvelée. Ce processus se poursuit jusqu'à ce que le système continue à fonctionner au-delà de la date (w), date à partir de laquelle le consommateur est responsable des actions de maintenance. Après la date (w), le système subit une maintenance périodique et des actions de réparation minimales sont effectuées suite à l'occurrence d'une panne. Le système est remplacé par une entité identique neuve après la $N^{ième}$ action de maintenance périodique. L'objectif étant de déterminer la période et le nombre optimal d'actions de maintenance préventive. **Chien Y.H (2010)** s'est concentré sur la politique de type âge en considérant une nouvelle stratégie de garantie qui combine une stratégie FRW et une stratégie au prorata. Pour cette stratégie combinée de garantie, chaque fois qu'un produit tombe en panne durant la période de garantie, il est remplacé par un nouveau et une nouvelle période de garantie commence. Si la panne survient au cours du premier intervalle de temps (durant la période FRW) le remplacement est sans frais pour le consommateur, mais si la panne survient au cours du deuxième intervalle de temps (durant l'intervalle de garantie au prorata (PRW)), le remplacement est fait à un coût au prorata en divisant l'âge de remplacement en trois périodes distinctes: au sein de la période FRW, pendant la période PRW et la période post-garantie. L'auteur a développé le modèle du coût total de garantie des points de vue du consommateur et du fabricant afin de déterminer l'âge de remplacement optimal.

Pour des coûts de remplacement élevés comparés aux coûts de réparation minimale, les stratégies qui considèrent le remplacement deviennent inadéquates. Dans ce cas, les politiques de réparation imparfaite (pour lesquelles le taux de défaillance de l'entité réparée est meilleur que celui après la réparation minimale mais inférieur à celui d'une nouvelle entité) sont plus adéquates.

Won Y.Y. et al. (2008) ont considéré des systèmes vendus avec une période de garantie *W*. Cette période est divisée en trois intervalles: $[0, x], [x, y], [y, W]$. Les actions de réparation peuvent être effectuées suivant les quatre stratégies suivantes:

<u>Stratégie 1:</u> des actions de réparation minimale sont effectuées durant la période de garantie du système $[0, W]$, sauf pour la première défaillance durant l'intervalle $[x, y]$ où une réparation imparfaite est effectuée avec un facteur proportionnel de réduction du taux de panne δ(t) dépendant de l'âge t à l'instant de la panne (Figure I.5).

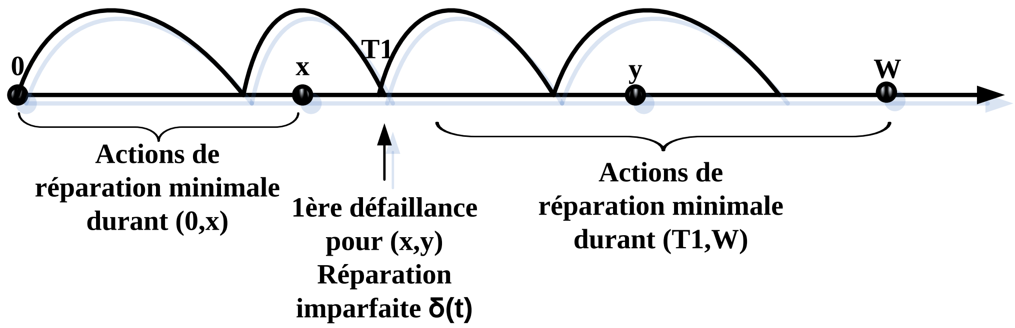


Figure I.5. Première stratégie de garantie proposée par Won Y.Y. et al. (2008)

<u>Stratégie 2 :</u> Pour cette stratégie les mêmes hypothèses sont considérées sauf que le facteur proportionnel de réduction du taux de panne δ est indépendant de l'âge t à l'instant de la panne (FigureI.6).

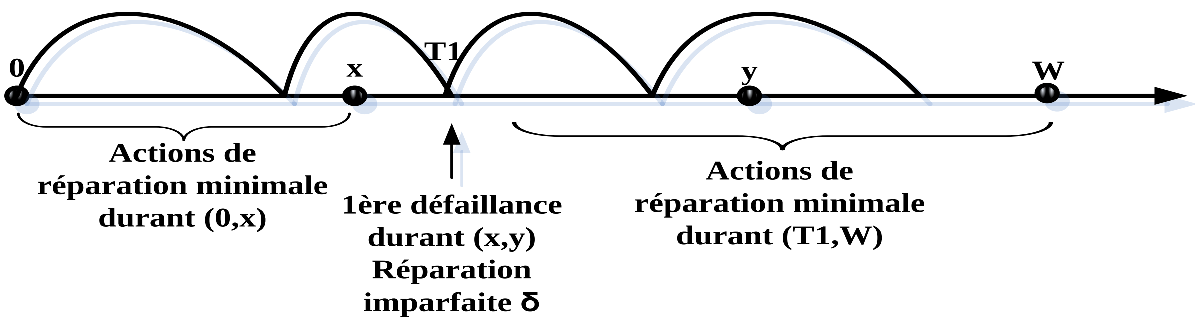


Figure I.6. Deuxième stratégie de garantie proposée par Won Y.Y. et al. (2008)

Stratégie3 : Un renouvellement de l'entité est effectué suite à la première défaillance durant l'intervalle $[x, y]$et des actions de réparation minimale sont réalisées pour toute autre défaillance durant la période de garantie $[0, W]$ (Figure I.7)

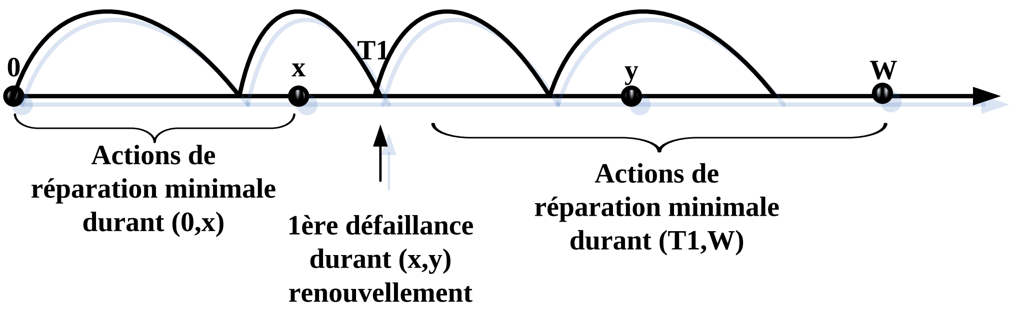


Figure I.7. Troisième stratégie de garantie proposée par Won Y.Y. et al. (2008)

Stratégie 4 : Des actions de réparation minimale sont effectuées durant toute la période de garantie du système (Figure I.8)

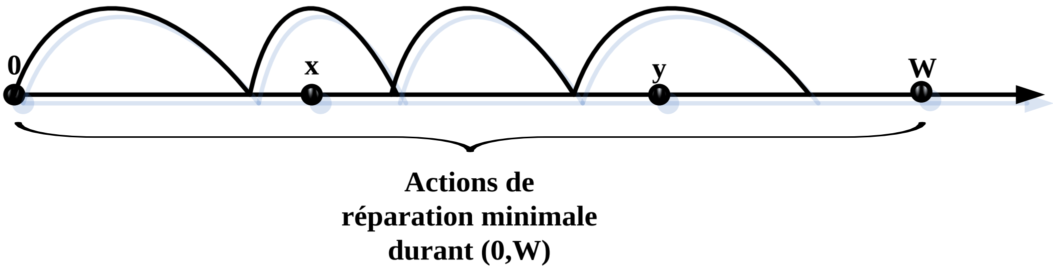
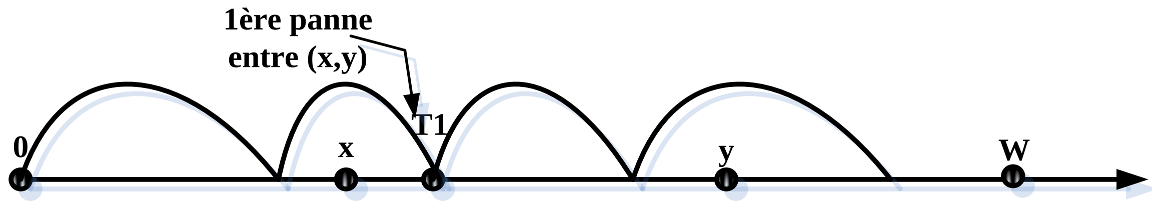


Figure I.8. Quatrième stratégie de garantie proposée par Won Y.Y. et al. (2008)

Les auteurs cherchent à trouver la stratégie optimale de maintenance qui donne le coût total moyen de garantie minimal.

Pour la première et la deuxième stratégie les auteurs considèrent deux cas pour l'instant T_1 d'apparition de la 1ère panne (Figure I.9).

- ***1^er^ cas :*** la date d'apparition de la première panne est dans l'intervalle $[x, y]$



- ***2ème cas :*** La première panne se produit à une date ultérieure à la date y

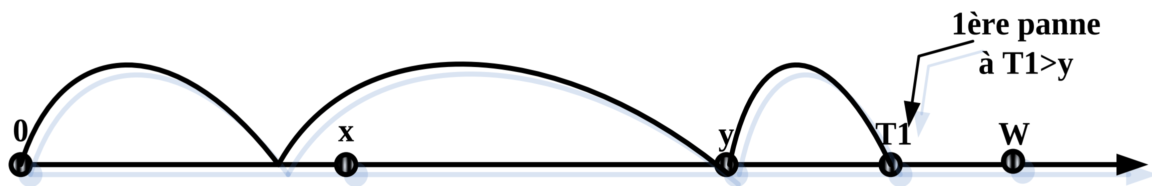


Figure I.9. Différents cas distingués pour la date d'apparition de la première défaillance (Won Y.Y. et Murthy D.N.P (2008))

En comparant ces différentes stratégies, il a été établi que la stratégie 1, avec sa flexibilité à varier le niveau de réparation est toujours la meilleure stratégie à adopter. Bien que la stratégie 2 fût un peu plus coûteuse que la stratégie 1, la différence était souvent négligeable. Ces deux stratégies donnent des coûts moyens de garantie inférieurs en comparaison avec les stratégies 3 et 4. La différence est considérable lorsque les coûts de remplacement (réparation parfaite) sont élevés.

Les différentes stratégies présentées ci-dessus ne considèrent que les systèmes réparables et ne peuvent pas être appliquées pour des systèmes non réparables. La stratégie de garantie la plus utilisée pour ce type de systèmes est la stratégie RFRW (renewing free-replacement warranty). Pour cette stratégie si le système tombe en panne durant la période de garantie, il est remplacé par un nouveau avec une garantie complète.

Yeh R. H. et al. (2005) ont analysé l'effet d'une stratégie de garantie RFRW pour des systèmes non réparables avec un taux de défaillance croissant. Ils ont développé un modèle pour des systèmes avec et sans garantie et ils ont minimisé les coûts de garantie pour déterminer l'âge optimal de replacement. En considérant également des systèmes non réparables avec un taux de défaillance croissant avec une stratégie de garantie RFRW, **Chien Y. H. (2005)** a déterminé la période de garantie optimale et l'âge de remplacement optimal après la période de garantie pour chacun des deux points de vue du consommateur et du fabricant.

Les problèmes de garantie ont par ailleurs ont été traités par certains auteurs en considérant de la maintenance imparfaite. **Nguyen D. G. et Murthy D. N. P. (1986, 1989)** ont traité le cas d'une stratégie de maintenance imparfaite pour des systèmes non réparables. Selon cette politique, pour chaque défaillance du système durant la période de garantie, ce dernier est remplacé par une entité réparée qui est moins fiable qu'une nouvelle entité. Si une telle stratégie de maintenance est combinée avec une stratégie RFRW la stratégie résultante est une stratégie RFRW imparfaite.

Bai J. et Pham H. (2005) ont adopté le même principe de renouvellement imparfait tout en ajoutant un seuil (m) pour le nombre d'actions de réparation. Dans leur stratégie, ces chercheurs ont considéré des systèmes pour lesquels des actions de réparation imparfaite sont réalisées suite à l'occurrence d'une panne. Si le nombre de pannes excède la limite (m), le système sera remplacé au lieu d'être réparé. **Yeh R .H. et al. (2007)**, déterminent l'âge optimal de remplacement pour une stratégie (RFRW). Ils comparent par ailleurs les résultats obtenus à ceux du problème 'd'âge-replacement' classique. **Chien Y. H. (2008)** a étendu le modèle de **Yeh R.H. et al. (2007**), il a considéré ce type de stratégie de maintenance (RFRW imparfaite) pour une politique de remplacement de type âge pour des systèmes avec un taux de défaillance croissant. Le système est remplacé par une entité réparée à une date t ou lors d'une défaillance. L'objectif est de déterminer la période optimale de remplacement préventif t. Cette date t est déterminée par la minimisation du coût moyen des actions de maintenance.

L'auteur considère deux situations différentes :

- **1^er^ cas** : Le remplacement préventif par une entité réparée est effectué après l'achèvement de la période de garantie ($t > W$), (Figure I.10) :

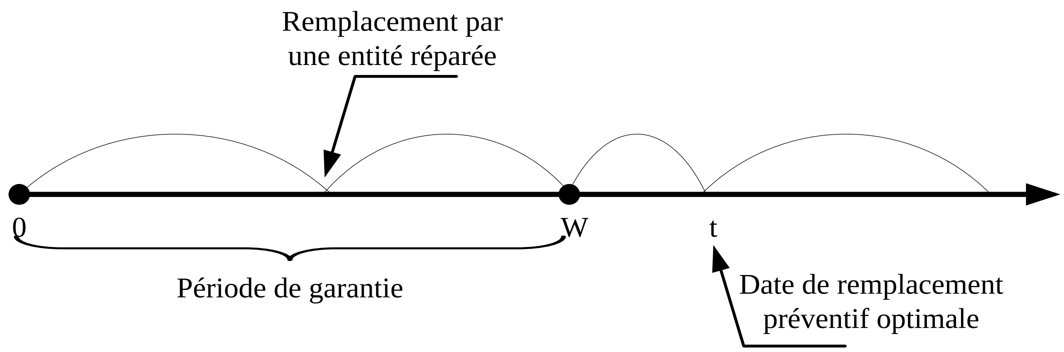


Figure I.10. 1er cas considéré pour la date optimale de remplacement préventif Chien Y. H. (2008)

Dans ce cas l'auteur distingue trois sous-cas pour la détermination du coût :

- le système tombe en panne durant la période de garantie ($x \le W$ ou $y \le W$) : le coût payé inclut un coût de non fonctionnement (C_d) et le système est remplacé par une entité réparée.
- le système tombe en panne après l'achèvement de la période de garantie et avant la date de remplacement préventif t ($W < x < t$ ou $W < y < t$) : un coût additionnel d'achat de l'entité (C_p). est inclus.
- le système atteint la date t ($x \ge t$ ou $y \ge t$) : un remplacement préventif est effectué avec un coût d'achat (C_p).

- **2^ème^ cas** : Le remplacement préventif par une entité réparée est effectué avant l'achèvent de la période de garantie (t <W), (Figure I.11) :

- le système tombe en panne avant la date de remplacement préventif ($x < t$ ou $y < t$) :le coût de remplacement subi inclut un coût de non fonctionnement (C_d) et le système est remplacé par une entité réparée.
-

Le système atteint la date de remplacement préventif t ($x \geq t$ *ou* $y \geq t$) : un remplacement préventif est effectué avec un coût d'achat C_p .

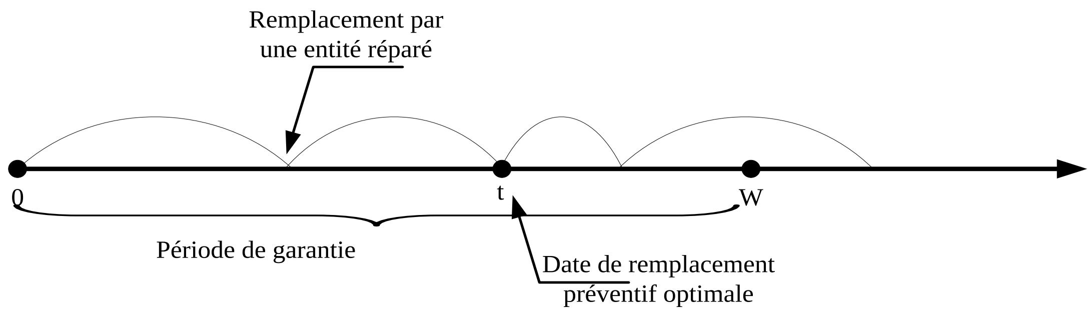


Figure I.11. 2ème cas considéré pour la date de remplacement préventif optimale Chien Y. H. (2008)

Avec :

x: durée de vie d'un nouveau produit,

y : durée de vie d'un produit réparé,

t : âge du système pour le remplacement préventif,

W : durée de la période de garantie,

C_d : coût de non fonctionnement pour chaque défaillance du produit,

C_p : Coût d'achat d'une nouvelle entité.

Yeo W.M. et Yuan X.M. (2009) ont développé un modèle qui considère des actions de réparation imparfaite. Ils étendent le modèle proposé par **Yeh R.H. et al. (2007)**. Cependant une différence essentielle dans leur travail comparé au travail de **Chien Y.H. (2008)** est que la réparation imparfaite est modélisée comme un choix pour le consommateur, selon un programme de garantie offert par le fabricant. Ils ont examiné un système dont la couverture de garantie de base est la réparation minimale à l'occurrence d'une panne. Le problème est étudié conformément à deux stratégies de remplacement de système : maintenance périodique avant et après la garantie. Les auteurs ont cherché à déterminer la période de maintenance optimale et le niveau optimal de réparation basé sur la fonction de coût et la fonction du taux de défaillance. Un modèle semblable a été étudié par **Rinsaka K. et Sandoh H. (2006)**. Ils ont supposé que le fabricant offre toujours un remplacement complet de l'entité défaillante chaque fois que le consommateur veut acheter une garantie étendue. Ainsi, **Yeo W.M. et Yuan X.M. (2009)** donnent une extension de ce modèle en permettant au consommateur d'avoir plus de choix.

I.2.3. Politiques de garantie selon la dimension de celle-ci

Il apparaît dans la littérature que les stratégies de garantie peuvent être soit unidimensionnelles soit bidimensionnelles. La stratégie de garantie la plus répandue est la stratégie unidimensionnelle caractérisée par une seule dimension qui est la durée de la période de garantie. Des revues bibliographiques sur ce type de stratégies unidimensionnelles se retrouvent dans **Murthy D.N.P (1990)** et **Murthy D.N.P et Blischke W.R (1992).**

Les stratégies de garantie bidimensionnelles sont caractérisées par deux dimensions qui sont généralement l'âge du système (K) et son usage (L). La notion de région de garantie est adoptée pour définir ces stratégies. Typiquement, la région classique est de forme rectangulaire (une dimension de chaque coté tel que montré à la figure I.15-A). **Singpurwalla N.D. (1987)** et **Moskowitz H. et Chun Y.H. (1988)** ont cherché à déterminer le coût des stratégies de garantie bidimensionnelles pour une région rectangulaire. **Blischke W.R. et Murthy D.N.P (1992)** ont décrit trois nouvelles régions de garantie (B, C et D).

Les quatre stratégies bidimensionnelles sont définies comme suit :

Stratégie A : la région de garantie est caractérisée par un rectangle $[0,K)\times[0,L)$ la période de garantie prend fin lorsque le système atteint un âge K ou un taux d'usage L (Figure I.12-A)

Stratégie B : la région de garantie est caractérisée par deux bandes infinies (Figure I.12-B)

Stratégie C : cette stratégie est caractérisée par quatre paramètres K1, K2, L1 et L2. Le consommateur est assuré jusqu'à un âge minimal K1 du produit et un usage minimal L1 et respectivement un âge maximal et un usage maximal K2 et L2 (Figure I.12-C).

Stratégie D : La région de garantie est caractérisée par un triangle (Figure I.12-D). Pour cette stratégie il existe une relation entre la période de couverture par la garantie et le taux d'usage. La période de garantie est expirée à une date t si le taux d'usage total x satisfait l'équation: $x + (L/K)t = L$.

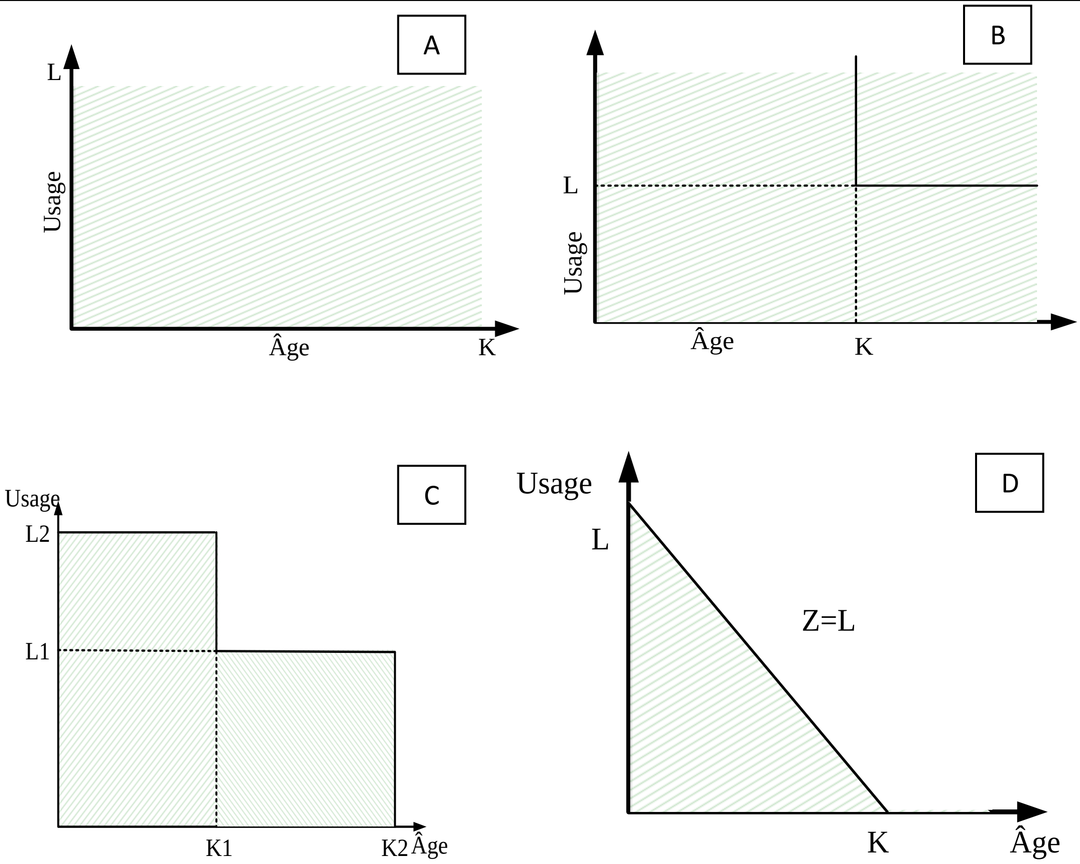


Figure I.12 : Stratégie bidimensionnelle A, B, C et D (Murthy D.N.P. (1995))

Dans ce même contexte de garantie bidimensionnelle, **Murthy D.N.P et al. (1995)** ont considéré des systèmes avec des défaillances caractérisées par une fonction de distribution à deux variables T1 et X1 désignant respectivement le temps de la première défaillance et le l'usage du système à la première défaillance. De la même façon, les auteurs considèrent les couples (Ti, Xi), $i \geq 2$, pour la i[ème] défaillance. La fonction de distribution bi-variable correspondante, *Fi(t, x)*, $i \geq 1$, est donnée par : $F_i(t,x) = P\{T_i \leq t, X_i \leq x\}$ (I.7)

Il est supposé par ailleurs dans ce travail que les produits sont non réparables et qu'ils sont soumis à une stratégie de garantie FRW.

Les auteurs déterminent la stratégie de garantie bidimensionnelle optimale parmi les stratégies A et B considérées par **Blishke W.R. et Murthy D.N.P. (1992)** et décrites ci-dessus. La meilleure stratégie est celle engendrant le coût moyen de garantie le plus faible par unité vendue.

La comparaison de ces stratégies pour différents types d'utilisateurs a permis de conclure que le nombre moyen de remplacements croît en fonction du taux d'utilisation du système pour les stratégies A et B. Pour un type d'utilisateurs donné (utilisation légère, intense ou moyenne) on remarque que le nombre moyen de remplacements pour la stratégie B est inférieur à celui correspondant à la stratégie A.

Iskander B.P. et Murthy D.N.P. (2003) ont étudié deux différents types de stratégies 'repair-replace' pour des équipements vendus avec une période de garantie bidimensionnelle. La région de garantie est divisée en deux régions disjointes Ω1 et Ω2 de telle sorte que $\Omega 1 \cup \Omega 2 = \Omega$ et $\Omega 1 \cap \Omega 2 = \emptyset$. Les auteurs admettent que les paramètres T et X désignent respectivement l'âge et l'usage du système à l'instant de défaillance. Les deux stratégies étudiées dans cet article sont les suivantes :

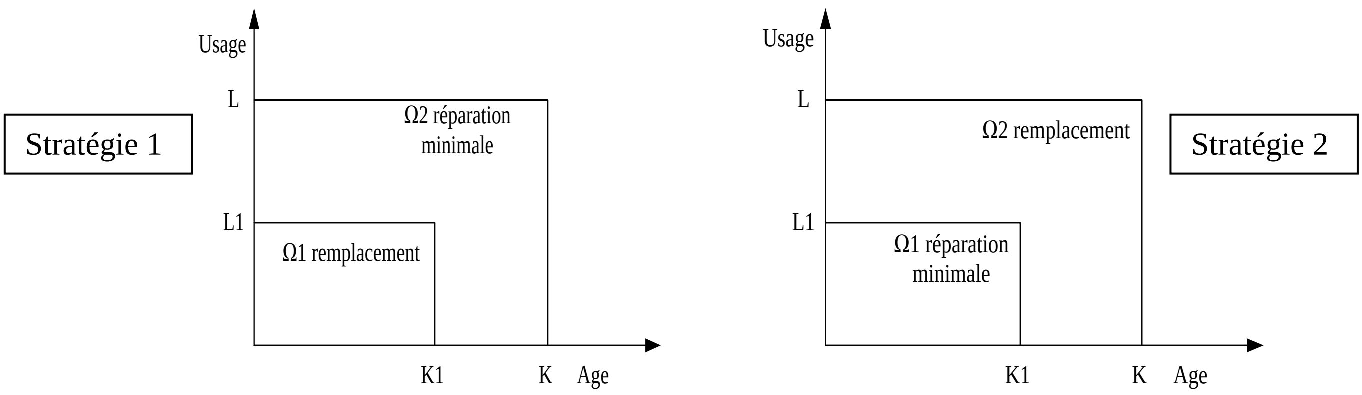


Figure I.13 : Stratégies bidimensionnelles considérés par Iskander B.P. et Murthy D.N.P. (2003)

Stratégie 1. Si la défaillance du système se produit dans la région Ω1 l'unité défaillante est remplacée par une nouvelle entité, et si la défaillance se produit dans la région Ω2 une réparation minimale est effectuée (figure I.13).

Stratégie 2. Pour toute défaillance du système durant la région Ω1, une réparation minimale est effectuée pour la remise en marche du système. Si le système tombe en panne durant la région Ω2 il est remplacé par un nouveau (figure I.13).

Dans leur modèle, les auteurs ont supposé que le coût de réparation d'un élément défaillant est constant sur la région de la garantie. Ils ont cherché à déterminer le coût de réparation en fonction de l'âge et de l'usage à l'instant de défaillance.

Baik J. et al. (2004) ont discuté la modélisation bidimensionnelle des défaillances d'un système où la dégradation est fonction à l'âge et de l'usage. Ils ont étudié les réparations minimales suite aux défaillances d'un système sur une région rectangulaire à deux dimensions. Les auteurs ont limité leur études aux stratégies de garantie FRW (tous les remplacements et réparations minimales sont à la charge du fabricant durant la période de garantie). Deux options de remplacement ou de réparation à la panne ont été considérées: (i) tous les éléments défaillants sont remplacés par une nouvelle entité, et (ii) des réparations minimales sont effectuées pour toute panne du système dans la région de garantie. Les auteurs ont cherché à comparer ces deux stratégies en comparant les coûts estimés durant la période de garantie pour chaque stratégie.

En se basant sur le travail de **Jack N. et Murthy D.N.P (2001), Iskander B.P. et al. (2005)** ont proposé dans cette perspective une autre stratégie de garantie selon laquelle ils considèrent des systèmes vendus avec une stratégie de garantie FRW bidimensionnelle [L, K]. Cette politique préconise essentiellement que durant la période de garantie, des actions de maintenance sont réalisées suite à l'occurrence d'une panne. Ces actions sont classées en des actions de réparation minimale ou des remplacements du système selon la date d'apparition de la panne.

Dans ce contexte, les stratégies illustrées ci-dessous ont été considérées sachant que la période de garantie est divisée en deux régions Ω_1 et Ω_2.

***Stratégie1* :** pour cette stratégie la période de garantie W est divisée en deux régions Ω_1 et Ω_2. Durant, Ω_1 pour toute défaillance le système en panne est remplacé par un nouveau, durant la deuxième région Ω2, des actions de réparation minimale sont effectuées. Cette stratégie est considérée pour des systèmes ayant un taux de défaillance élevé durant la région Ω1 (Figure I.14)

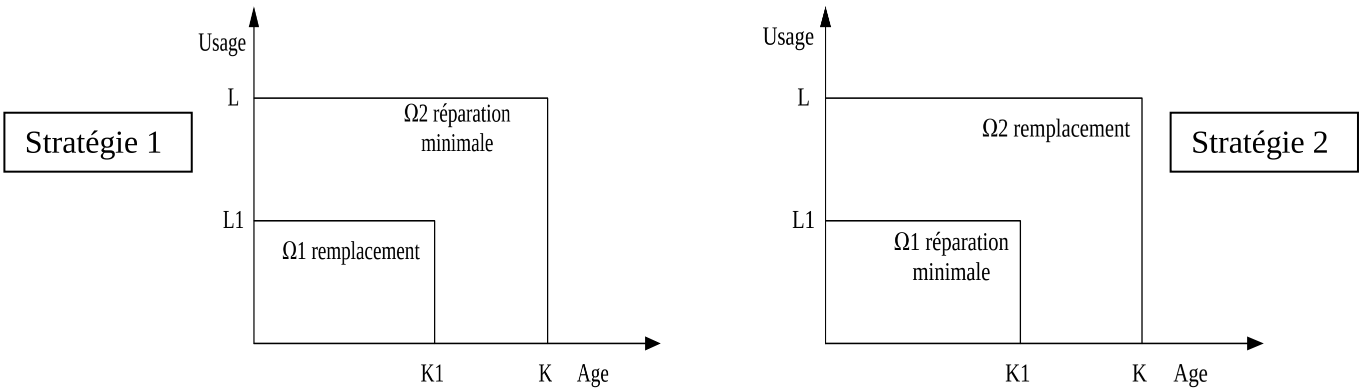


Figure I.14. 1ère et 2ème stratégie de garantie bidimensionnelle proposée par (Iskander B.P. et al. (2005))

Stratégie2 : Pour cette stratégie la période de garantie W est aussi divisée en deux régions Ω1 et Ω2, durant la première région Ω1 des actions de réparation minimale sont effectuées lors de l'occurrence d'une panne et durant Ω2, pour chaque défaillance le système est remplacé par un nouveau. Cette stratégie est adoptée pour des systèmes ayant un taux de défaillance élevé durant Ω_2 (Figure I.14)

La nouvelle stratégie modifiée proposée par les auteurs est basée sur la stratégie 2. Elle peut être représentée ainsi :

Stratégie modifiée : La période de garantie est divisée en trois sous régions Ω_1, Ω_2, Ω_3. Durant les régions Ω1 et Ω3, lors de l'occurrence d'une panne des actions de réparation minimale sont effectuées, durant Ω2, et un remplacement par une nouvelle entité est effectué lors de l'occurrence de la première panne durant Ω_3. Pour toute autre défaillance durant cette région, des actions de réparation minimale sont effectuées (Figure I.15).

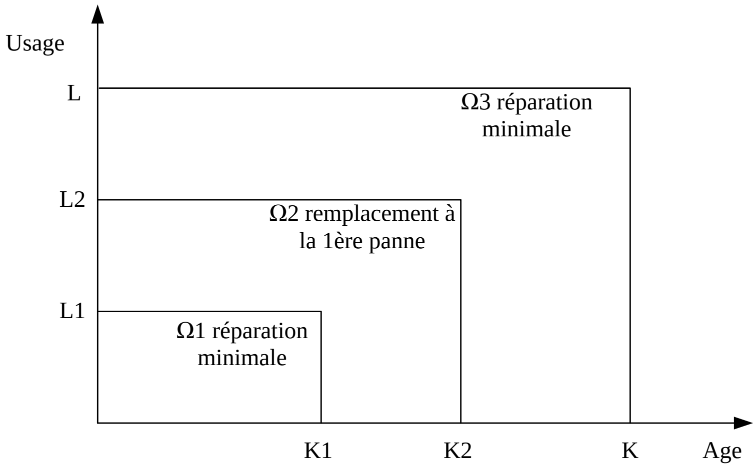


Figure I.15. Stratégie de garantie bidimensionnelle modifiée proposé par (Iskander B.P. et al. (2005))

Les auteurs ont cherché à trouver la stratégie de garantie bidimensionnelle optimale parmi ces trois stratégies. Le choix est effectué en comparant les coûts moyens de garantie minimums pour chaque stratégie.

Dans des études ultérieures réalisées par **Chukova S. et Johnston M.R. (2006)**, en se basant sur le modèle proposé par **Iskander B.P. et al. (2005),** les auteurs ont cherché à déterminer le coût optimal de garantie par unité vendue, ceci pour des systèmes vendus avec une stratégie de garantie FRW *(Free replacement warranty)* bidimensionnelle. Dans leur modèle **Iskander B.P. et al. (2005)** ont proposé une stratégie restreinte avec $r_1 = \frac{L_1}{K_1} = \frac{L_2}{K_2} = r_2$, les variables de décision étant K1, K2 et r2. Plus tard, **Chukova S. et Johnston M.R. (2006)** ont élargi le champ d'étude en levant la restriction sur l'égalité des ratios en supposant que $\frac{L_1}{K_1} \neq \frac{L_2}{K_2}$.

Dans cet article les auteurs ont considéré les mêmes stratégies étudiées par **Iskander et al. (2005).** Ils ont cherché à identifier la stratégie optimale de réparation comme étant celle qui minimise le coût moyen de service de la garantie par unité vendue. Les auteurs ont déterminé les sous-régions Ω_1, Ω_2 *et* Ω_3 pour lesquelles le coût moyen de la garantie est le plus faible. **Manna D.K. et al. (2007)** ont proposé de détailler une nouvelle méthodologie pour la construction du modèle de probabilité de défaillance bidimensionnelle. Ils ont proposé un modèle qui étudie l'effet du taux d'usage sur le cycle de vie du système. Dans des travaux ultérieurs **Manna D.K et al. (2008)** ont considéré le problème de calcul du coût de garantie bidimensionnelle pour une région rectangulaire, pour différents types de produits: non-réparables et réparables avec des réparations minimales. Ils ont cherché à comparer le coût total de garantie pour les deux approches unidimensionnelle et bidimensionnelle. **Gülay S. et Mehmet R.T. (2009)** ont étudié l'effet de ces stratégies sur la minimisation du cout de garantie pour des systèmes sujets à de la maintenance imparfaite.

Dans une autre alternative d'optimisation, **Manna D.K. et al. (2006)** ont traité le problème de la détermination de la région optimale de garantie bidimensionnelle avec une politique de maintenance FRW, ceci lorsqu'une contrainte budgétaire sur le coût de garantie est prise en compte. Le cas optimal, dans le contexte actuel, fait référence à la maximisation de l'utilisation des clients qui a été mesurée par la durée de la période de garantie. La méthodologie proposée traite la détermination de la région optimale parmi des politiques fixes et flexibles. Dans leur travaux **Manna D.K. et al. (2006)** ont constaté que la région rectangulaire (stratégie D, figure I.12) est meilleure que la région en forme de L (stratégie C, figure I.12) pour chaque client en vertu de sa flexibilité.

Les données de l'historique des défaillances des systèmes fournissent des informations importantes utilisées pour évaluer la fiabilité des systèmes, pour évaluer un nouveau design et des changements de méthodes de fabrication. Elles permettent également d'identifier les causes de l'échec et de comparer les conceptions, les fournisseurs, les matériaux ou les méthodes de fabrication. Ces données de l'historique sont généralement obtenues à partir des demandes de réparation ou de remplacement en cas de défaillance durant la période de garantie. Cependant, ces données sont souvent très incomplètes car peu d'informations sont disponibles pour les produits non déclarés. Dans cette perspective, **Jung M. et Bai D.S. (2007)** ont proposé une méthode d'estimation de la distribution du cycle de vie pour des systèmes vendus avec une période de garantie bidimensionnelle. Ils ont considéré une approche bivariée qui suppose que les deux variables (l'âge et l'usage) sont statistiquement corrélées obéissant à une distribution bi-variée pour l'obtention des l'estimation de la distribution du taux d'utilisation du système et la maximisation de la fonction de vraisemblance.

I.2.4. Politiques de garantie selon qu'elle soit prolongeable ou non

Les stratégies rapportées jusque là sont des stratégies qui considèrent que la période de garantie est fixe et ne peut pas être étendue. En pratique, plusieurs produits sont vendus avec la possibilité d'acheter une extension de la garantie au moment de l'acquisition du produit ou après.

La période de garantie étendue aide le fabricant à rester en contact avec le consommateur une certaine période après l'expiration de la période de garantie de base. Elle permet également de fournir plus de données sur la performance des produits durant leur cycle de vie. De telles données sont particulièrement nécessaires pour les activités de recherche et de développement des concepteurs, fabricants et distributeurs des produits.

Les travaux de recherche sur ce sujet sont peu nombreux et relativement récents. Dans une perspective relevant des sciences économiques, **Padmanabhan V. (1995)** a développé un modèle mathématique en prenant en considération l'hétérogénéité des consommateurs et leurs habitudes d'usage. L'article discute de cette variation d'usage dans les habitudes des consommateurs qui crée une variation de la demande pour la garantie étendue. Cette hétérogénéité amène à chercher un plan de garantie optimal. Dans cet article, l'auteur montre que le profit d'assurance diminue lorsque le taux d'usage des consommateurs augmente. L'auteur montre que les consommateurs à fort usage achèteront des produits avec une période de garantie étendue. Par conséquent, si la dimension du segment d'utilisateur à fort usage est restreint par rapport au segment d'utilisateur à usage léger, comme c'est souvent le cas, il sera avantageux pour les fabricants d'exclure ce segment de leur marché potentiel. Ces résultats fournissent une base pour comprendre l'exclusion de la garantie étendue pour certains segments du marché. En fait, la plupart des fabricants évitent la couverture de la garantie à ce segment de consommateurs.

Dagpunar J.S. et Jack N. (1992) ont examiné les options des utilisateurs pour les réparations/remplacements d'un produit après l'expiration de la garantie. Ils supposent que le fabricant maintient périodiquement le produit pendant la garantie avec des actions de réparation minimale. **Sahin I. et polatoglu H. (1996)** ont adopté une approche générale de modélisation des options des utilisateurs et examinent deux modèles de maintenance après l'expiration de la garantie,

- l'utilisateur applique la réparation minimale pendant une période fixe après l'expiration de garantie et remplace l'unité par une nouvelle à la fin de cette période.
- l'unité est remplacée à la première défaillance après une période de réparation minimale.

Dans leur modèle, les auteurs ont cherché à déterminer la période optimale de maintenance qui réduit le coût total de garantie.

Dans une autre contribution, **Lam Y.et Lam P.K.W. (2001)** ont cherché à déterminer la stratégie optimale que choisira le consommateur pour une période de garantie étendue. Cette stratégie est déterminée à partir de l'expression du coût total moyen en tenant compte d'un certain facteur d'escompte et du coût moyen par unité de temps sur un horizon infini pour le consommateur et le fabricant.

Le modèle de la garantie étendue est construit en se basant sur les hypothèses suivantes :

Hypothèse 1 :

Les systèmes sont réparables, avec des actions de réparation *'as good as new'*, et une stratégie de garantie FRW est adoptée.

Hypothèse 2 :

→ Option 1 : le fabriquant fait des actions de réparation avec une stratégie FRW pendant une période de garantie étendue L.

→ Option 2 : le fabricant n'assume aucune responsabilité à la fin de la période de garantie.

Hypothèse 3 :

Le consommateur a le choix entre deux stratégies possibles :

→ Stratégie 1 : stratégie de k renouvellements : renouveler le contrat de garantie à la date W pour une période L, l'entité est remplacée par une autre entité identique aux dates W+kL (k=1,2,…).

→ Stratégie 2 : stratégie de k réparations: la période de garantie n'est pas renouvelée mais des actions de réparation sont réalisées k fois et l'entité est remplacée à la $(k+1)^{éme}$ panne après la période de garantie W.

La stratégie optimale de garantie étendue est déterminée en optimisant le coût total moyen escompté et le coût moyen par unité de temps à longue échéance des points de vue du consommateur et du fabricant respectivement.

Jung M.G. et Park D.H. (2003) ont développé un modèle pour déterminer la politique optimale de maintenance préventive périodique à l'expiration de la garantie de base. Ils ont considéré deux types de politiques de garantie : une garantie de renouvellement et une garantie de non-renouvellement. Du point de vue de l'utilisateur, toutes les actions de maintenance sont à la charge du fabricant ou bien elles sont payées au prorata durant la période de garantie de base. Toutefois, les utilisateurs auront à réparer ou remplacer le produit défectueux à leur charge pendant la période post-garantie. La maintenance préventive périodique du système commence juste après l'expiration de la période de garantie de base et toutes les actions de maintenance sont à la charge du consommateur. Les auteurs expriment les coûts de maintenance estimés après l'expiration de la garantie de base lors de l'application des deux types de politiques de garantie et déterminent le nombre optimal et la période optimale des actions de maintenance préventive pour ces politiques durant la période post garantie. Le critère utilisé pour déterminer l'optimalité de la maintenance préventive est le coût moyen de maintenance par unité de temps encouru par le consommateur. La maintenance périodique préventive du système commence juste après l'expiration de la garantie et tous les coûts d'entretien sont supportés par le consommateur. Les auteurs ont déterminé le nombre optimal d'actions de maintenance préventive avant de remplacer le système et la période optimale de maintenance préventive qui suit l'expiration de la garantie.

Par ailleurs, **Chen J.A. et Chien Y.H (2007)** ont considéré le cas de produits réparables et vendus avec une période de garantie FRW renouvelable. Pour un produit réparable, il existe deux types de défaillances: la première est une défaillance mineure, la seconde est une défaillance catastrophique. Une défaillance mineure se produit avec une probabilité 1-p et peut être corrigée par des réparations minimales.

D'autre part, une défaillance catastrophique se produit avec une probabilité p, $0 < p < 1$, et ne peut être réparée que par le remplacement. Pour la politique FRW renouvelable, si le produit tombe en panne par une défaillance catastrophique au cours de la période de garantie, il est remplacé par un nouveau produit et une nouvelle garantie est proposée au consommateur, sur la charge du fabricant. L'obligation contractuelle de la garantie expire à l'instant où le produit dépasse la fin de la période de garantie sans aucune défaillance catastrophique. Dans ce travail, les auteurs ont cherché à déterminer le coût total de garantie pour les deux perspectives fabricants et consommateur en considérant les politiques de maintenance proposées par **Kim CS et al. (2004).**

Shaomin W. et Phil L. (2011) ont traité cette même notion de défaillance pour analyser le coût du cycle (du point de vue consommateur) de vie des équipements protégés par des garanties de base et des garanties étendues. Les auteurs ont formulé le coût de cycle de vie de l'équipement pour le cas général des distributions des temps de défaillance, puis pour des cas particuliers. Ils ont prouvé que le remplacement optimal et les politiques d'extension de garantie existent pour le cas où le coût du cycle de vie par unité de temps est minimisé.

Enfin, d'autres auteurs ont considéré d'autres aspects reliés à la garantie. On peut citer **Chen C.K. et Lo C.C. (2006)** qui ont étudié la longueur optimale d'un cycle de production pour des produits vendus avec une période de garantie dans un système de production imparfait avec une pénurie admissible. Dans cette même perspective de la garantie dans les stratégies de production

I.3. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons fait une synthèse de différentes stratégies de garantie qui ont été développées et traitées dans la littérature. Nous avons décrit les apports de chacune de ces stratégies en identifiant dans certains cas leurs limites.

Nous avons proposé un classement de ces différentes stratégies selon cinq axes : selon le stade de développement des produits, selon les types d'actions de maintenance effectuées durant le cycle de vie du produit, selon la dimension de la garantie (unidimensionnelle et bidimensionnelle) et enfin selon la possibilité de renouvellement (ou d'extension) de la garantie.

Dans le chapitre suivant, nous considérerons la problématique de l'extension de la garantie. Nous étudierons l'opportunité apportée par la période de garantie étendue des points de vue du fabricant et du consommateur. Différentes politiques de maintenance seront prises en considération pour le produit durant la période de garantie de base, la période de garantie étendue et durant la période entre la fin de la garantie et la fin du cycle de vie du produit.

Chapitre 2

Modèle d'aide à la décision pour l'adoption d'une garantie étendue dans le cas de garantie unidimensionnelle

Sommaire

II.1. Introduction

Dans ce chapitre, nous développons un modèle d'aide à la décision pour étudier l'opportunité pour le consommateur d'acheter une garantie étendue et en même temps l'opportunité pour le fabricant d'en vendre une, ceci pour différentes politiques de maintenance pouvant être adoptées pour le produit durant son cycle de vie. Cette partie de notre travail a fait l'objet de la publication **(Bougerra S., Chelbi A, Rezg N., 2012 a).**

II.2. Définition de la stratégie et hypothèses de travail

Nous considérons des systèmes réparables, vendus avec une période de garantie unidimensionnelle (W) qui peut être étendue jusqu'à (W_e) au moment de la vente du produit. Les réparations durant la période de garantie de base et la période de garantie étendue sont supportées par le fabricant. Les durées des réparations sont considérées négligeables par rapport aux durées entre deux défaillances. Des actions de maintenance préventive imparfaite sont effectuées à des instants $\tau_1, \tau_2, ..., \tau_j$ avec $\tau_j = j\Delta, \tau_0 = 0$, Δ étant la période entre deux maintenances préventives consécutives. Ces actions ont pour effet de rajeunir le système. Cette réduction de l'âge du système dépend de l'effort de maintenance (m) entrepris, (m) étant compris entre 0 (aucun rajeunissement) et un niveau maximal M correspondant au fait de ramener le système à un état comme neuf *'as good as new'* $(0 \leq m \leq M)$. Nous supposons que durant le cycle de vie du système toutes les actions de maintenance préventive auront le même niveau d'effort (m).

En ce qui concerne les coûts des actions de maintenance préventive durant la période de garantie de base et la période de garantie étendue, nous considèrerons que la totalité des coûts des actions de maintenance préventive sont payés par le consommateur.

II.3. Les options de politiques de maintenance considérées

Durant le cycle de vie du système de longueur L, nous considérons les options suivantes de politiques de maintenance :

- **Option I :** Pas d'actions de maintenance préventive durant $[0, L]$ (figure II.1)

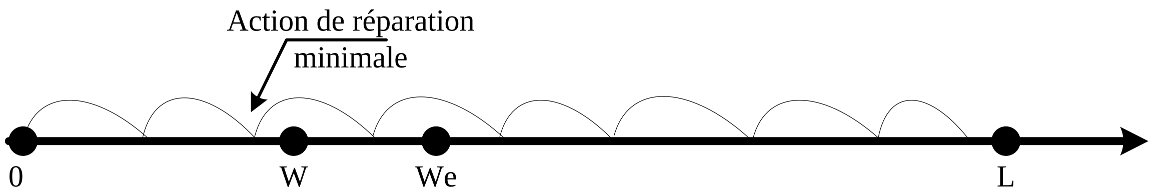


Figure II.1 : Option I de politique de maintenance

- **Option II** : Maintenance préventive périodique durant $[0, L]$ (figure II.2)

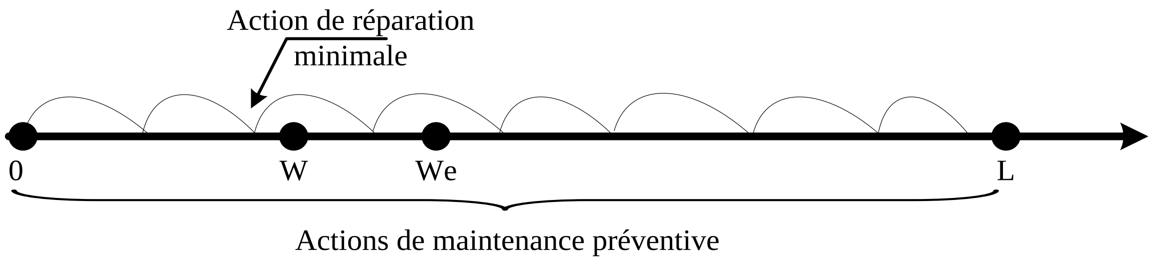


Figure II.2 : Option II de politique de maintenance

Les actions de maintenance préventive imparfaite sont effectuées dans ce cas aux instants $\tau_j = j\Delta, (j = 1,2,....)$

- **Option III** : Maintenance préventive périodique durant la période post garantie se terminant à la fin du cycle de vie du produit. Pour cette option on considérera deux possibilités en ce qui concerne la réalisation des actions de maintenance préventive :

    - Option III-1 : Les actions de maintenance préventive sont effectuées dés que la période de garantie de base prend fin si le consommateur n'accepte pas de payer pour une extension de la garantie (figure II.3).

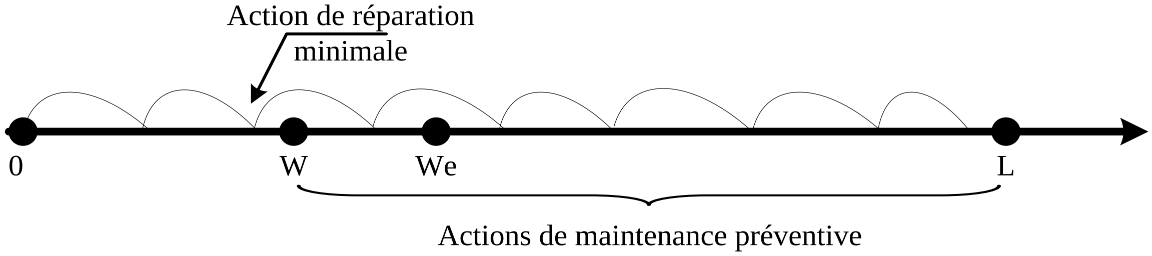


Figure II.3 : Option III-1 de politique de maintenance

Les actions de maintenance préventive imparfaite sont effectuées aux instants τ_j avec $\tau_j = W + j\Delta, \left(j = 1,2,....,n_3\right)$

- Option III-2 : Les actions de maintenance préventive commencent après l'achèvement de la période de garantie étendue si le consommateur accepte de payer pour une extension de garantie (figure II.4)

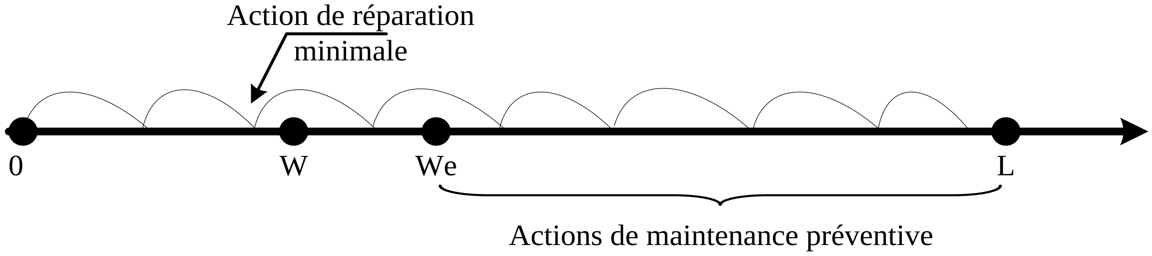


Figure II.4 : Option III-2 de politique de maintenance

Les actions de maintenance préventive imparfaite sont effectuées aux instants τ_j avec $\tau_j = We + j\Delta, \left(j = 1,2,...,n_6\right)$

- **Option IV :** Maintenance préventive périodique durant la période de garantie du système. Pour cette option on considèrera les deux cas suivants :

  - Option IV-1 : les actions de maintenance préventive ne sont appliquées que durant la période de garantie de base. Elles ne continuent pas durant la période de garantie étendue pour le cas où le consommateur ne paye pas pour la garantie étendue (figure II.5)

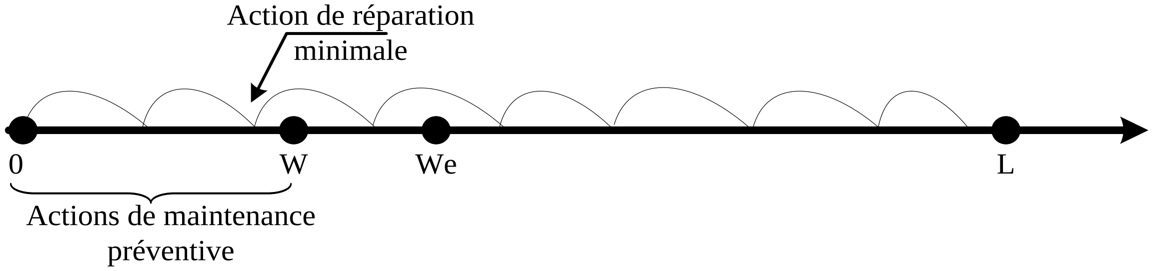


Figure II.5 : Option IV-1 de politique de maintenance

Les maintenances préventives sont effectuées aux instants τ_j avec $\tau_j = j\Delta, \left(j = 1,2,....,n_1\right)$

- Option IV-2 : les actions de maintenance préventive sont effectuées durant toute la période de garantie et sont étendue jusqu'à l'expiration de la garantie étendue si le consommateur accepte d'acheter l'extension de garantie (figure II.6)

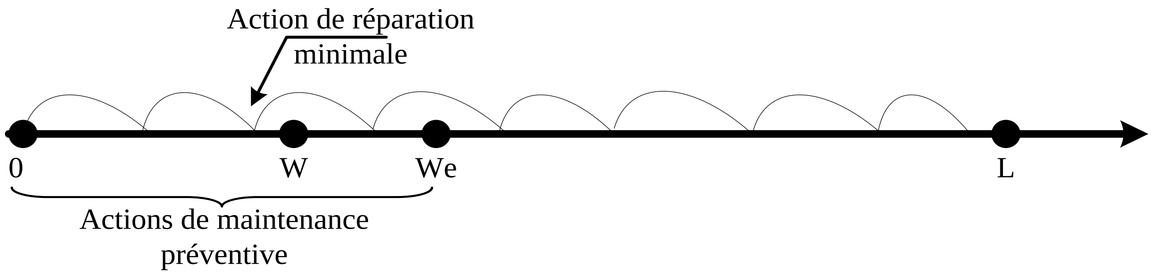


Figure II.6 : Option III-2 de politique de maintenance

Les maintenances préventives sont effectuées aux instants τ_j avec $\tau_j = j\Delta, \left(j = 1,2,....,n_4\right)$

II.4. Notations

Les notations suivantes sont adoptées :

$F_0(t)$: fonction de distribution de probabilités associée aux durées inter-défaillances du système,

$f_0(t)$: fonction de densité de probabilités associée aux durées inter-défaillances du système,

$r_0(t)$: fonction du taux de panne instantané du système,

Cr : le coût moyen d'une réparation minimale,

Cm : le coût moyen d'une maintenance préventive avec un niveau d'efficacité m,

Cw : le coût de la garantie étendue payé par le consommateur,

L : la durée du cycle de vie du système,

W : la durée de la période de garantie de base,

We : la durée de la période de garantie incluant l'extension, m : niveau d'efficacité des actions de maintenance préventive,

$\tau_{j\ (j=1,\ 2,3,\ldots)}$: dates des actions de maintenance préventive,

υ_j : âge virtuel du système après la j$^{\text{éme}}$ action de maintenance préventive,

Δ : intervalle entre deux actions de maintenance préventive,

Soient $n_1, n_2, \ldots, n_6$ les nombres d'actions de maintenance préventive entreprises par intervalle tel que montré dans le tableau suivant :

Nombre	**Intervalle**	**Valeur**
n_1	[0,W)	$\left\lfloor \frac{W}{\Delta} \right\rfloor$
n_2	[0,L)	$n_2 = \frac{L}{\Delta} - 1, Si \frac{L}{\Delta} \in \aleph$
		$n_2 = \left\lfloor \frac{L}{\Delta} \right\rfloor, Si \frac{L}{\Delta} \notin \aleph$
n_3	[W,L)	$n_3 = \frac{(L-W)}{\Delta} - 1, Si \frac{(L-W)}{\Delta} \in \aleph$
		$n_3 = \left\lfloor \frac{(L-W)}{\Delta} \right\rfloor, Si \frac{(L-W)}{\Delta} \notin \aleph$
n_4	[0,We)	$\left\lfloor \frac{We}{\Delta} \right\rfloor$
n_5	[W,We)	$\left\lfloor \frac{We-W}{\Delta} \right\rfloor$
n_6	[We,L)	$n_6 = \frac{(L-We)}{\Delta} - 1, Si \frac{(L-We)}{\Delta} \in \aleph$
		$n_6 = \left\lfloor \frac{(L-We)}{\Delta} \right\rfloor, Si \frac{(L-We)}{\Delta} \notin \aleph$

avec :

$\lfloor x \rfloor$ désignant la partie entière de *x*,

Tableau II.1 : Nombres d'actions de maintenance préventive entreprises par intervalle

Les conditions posées pour les valeurs de $n_2, n_3, et\ n_6$ expriment le fait qu'il n'est pas opportun de réaliser des actions de maintenance préventive à l'instant t= L puisque cette date correspond à la fin du cycle de vie du système.

II.5. Le modèle mathématique

Nous exprimerons dans ce qui suit, pour le consommateur et pour le fabricant, le coût total moyen correspondant à chaque option de politique de maintenance dans les deux cas suivants : avec une garantie étendue et sans une garantie étendue. Nous dériverons ainsi pour chaque option et pour un prix de garantie étendue C_w donné :

- la condition selon laquelle il serait dans l'intérêt du consommateur d'acheter la garantie étendue,
- la condition selon laquelle il serait dans l'intérêt du fabricant de vendre la garantie étendue.

On cherchera enfin à croiser les intérêts du consommateur et du fabricant dans une perspective de convergence vers une relation 'gagnant-gagnant'.

II.5.1. Détermination de l'âge virtuel du système

Les actions de maintenance préventive réalisées sur le système à des instants $\tau_1, \tau_2, ...\tau_j$, ont pour effet de le rajeunir. Soit v_{j-1} l'âge virtuel du produit après la (j-1)^{éme} action de maintenance préventive, $(j \geq 2)$. En considérant l'effort (m) de la maintenance préventive effectuée, l'âge virtuel du système après la j^{éme} action de maintenance préventive peut s'exprimer comme suit: **(Sahin I. et polatoglu H. (1996)) :**

$$v_j = v_{j-1} + \delta(m)(\tau_j - \tau_{j-1}) \qquad \text{(II.1)}$$

avec :

$\delta(m) \in [0,1]$ étant une fonction de (m) décroissante entre 1 et 0 avec $\delta(0) = 1$ et $\delta(M) = 0$

$\delta(m) = (1+m)e^{-m}$.

II.5.2. Détermination du taux de défaillance

Etant donné que le niveau d'effort de maintenance préventive est le même sur tout le cycle de vie du produit et qu'il y a réparation minimale de durée négligeable après chaque défaillance, le taux de défaillance en fonction de l'âge virtuel du système υ(t), à l'instant t, est exprimé comme suit :

$$r[\nu(t)] = r(\nu_{j-1} + t - \tau_{j-1}), \quad \tau_{j-1} \le t < \tau_j \quad , j = 1,2... \tag{II.2}$$

(Voir **Kim C.S. et al. (2004)** pour plus de détail).

On suppose que l'allure du taux de défaillance après chaque action de maintenance préventive reste la même.

Soit r_m(t) le taux de défaillance pour un niveau de maintenance préventive m. Pour chacune des options considérées, r_m(t) peut être exprimé comme suit :

- **Option I** : m=0

$$r_m(t) = r_0(t) \tag{II.3}$$

- **Option II** : pour un niveau de maintenance préventive m, on a :

$$r_m(t) = \begin{cases} r_0(t), & pour\ 0 \le t < \tau_1 \\ r_0(\nu_j + t - \tau_j), & pour\ \tau_j \le t < \tau_{j+1},\ j = 1,2...(n_2 - 1), \\ r_0(\nu_{n_2} + t - \tau_{n_2}), & pour\ \tau_{n_2} \le t < L \end{cases} \tag{II.4}$$

- **Option III** : pour un niveau de maintenance préventive m, on a :
  - **Option III-1**

$$r_m(t) = \begin{cases} r_0(t), & pour\ 0 \le t < \tau_1 \\ [r_0(\tau_1) - r_m(\tau_1)] + r_0(\nu_j + t - \tau_j), & pour\ \tau_j \le t < \tau_{j+1},\ j = 1,2...(n_3 - 1) \\ [r_0(\tau_1) - r_m(\tau_1)] + r_0(\nu_{n_3} + t - \tau_{n_3}), & pour\ \tau_{n_3} \le t < L \end{cases} \tag{II.5}$$

  - **Option III-2**

$$r_m(t) = \begin{cases} r_0(t), & pour\ 0 \le t < \tau_1 \\ [r_0(\tau_1) - r_m(\tau_1)] + r_0(\nu_j + t - \tau_j), & pour\ \tau_j \le t < \tau_{j+1},\ j = 1,2...(n_6 - 1) \\ [r_0(\tau_1) - r_m(\tau_1)] + r_0(\nu_{n_6} + t - \tau_{n_6}), & pour\ \tau_{n_6} \le t < L \end{cases} \tag{II.6}$$

- **Option IV** : pour un niveau de maintenance préventive m, on a :
  - **Option IV-1**

$$r_m(t) = \begin{cases} r_0(t), & pour\ 0 \le t < \tau_1 \\ r_0(\nu_j + t - \tau_j), & pour\ \tau_j \le t < \tau_{j+1},\ j = 1,2...(n_1 - 1) \\ r_0(\nu_{n_1} + t - \tau_{n_1}), & pour\ \tau_{n_1} \le t < L \end{cases} \tag{II.7}$$

  - **Option IV-2**

$$r_m(t) = \begin{cases} r_0(t), & pour\ 0 \le t < \tau_1 \\ r_0(\nu_j + t - \tau_j), & pour\ \tau_j \le t < \tau_{j+1},\ j = 1,2...(n_4 - 1) \\ r_0(\nu_{n_4} + t - \tau_{n_4}), & pour\ \tau_{n_4} \le t < L \end{cases} \tag{II.8}$$

Les fonctions du taux de panne $r_m(t)$ pour les différentes options considérées peuvent être représentées comme suit figure II.7.

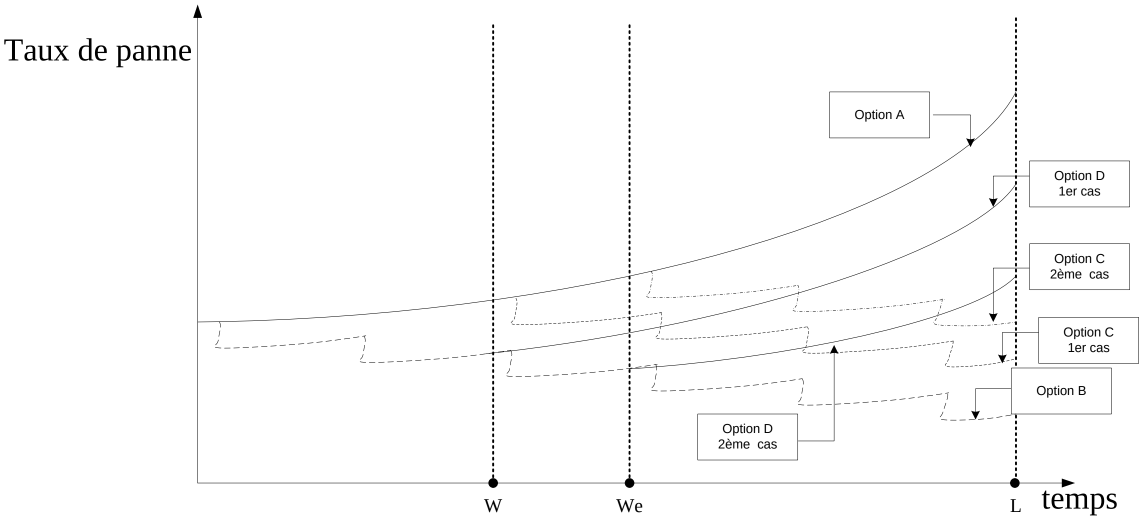


Figure II.7 : Variation du taux de panne en fonction du temps pour les différentes options

II.5.3. Détermination du coût moyen de garantie pour le consommateur

Dans ce qui suit, nous désignerons par C_{Xn} et C_{Xy}, les coûts encourus pour le consommateur pour l'option X (X= I, II, III-1, III-2, IV-1 et IV-2) respectivement pour le cas sans garantie étendue (n) et le cas avec garantie étendue (y).

- **Option I** : Pas d'actions de maintenance préventive durant tout le cycle de vie $[0, L]$,
    - Cas sans garantie étendue,

$$C_{In} = \begin{cases} 0 & pour\ t \in [0, W] \\ Cr\int_{w}^{L} r_0(t)dt & pour\ t \in [W, L] \end{cases} \qquad \text{(II.9)}$$

- Cas avec garantie étendue:

$$C_{Iy} = \begin{cases} 0 & pour\ t \in [0, W] \\ 0 & pour\ t \in [W, We] \\ Cr\int_{We}^{L} r_0(t)dt & pour\ t \in [We, L] \end{cases} \qquad \text{(II.10)}$$

Le consommateur aurait intérêt à acheter la garantie supplémentaire vendue au prix Cw si la condition suivante est satisfaite.

$$C_{Iy} + Cw \leq C_{In}$$

$$\Rightarrow Cw \leq A_C \qquad \text{(II.11)}$$

avec $A_C = C_r \int_{W}^{We} r_0(t)dt$

- **Option II** : Maintenance préventive périodique durant $[0, L]$
    - Cas sans garantie étendue :

$$C_{IIn} = \begin{cases} C_m.n_1 & pour \quad t \in [0,W) \\ C_r\left[\int_{W}^{\tau_{n_1+1}} r_0(\nu_{n_1} + t - \tau_{n_1})dt + \sum_{j=n_1+1}^{n_2-1} \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} r_0(\nu_j + t - \tau_j)dt + \int_{\tau_{n2}}^{L} r_0(\nu_{n_2} + t - \tau_{n_2})dt\right] + C_m.n_3 & pour \quad t \in [W, L) \end{cases} \qquad \text{(II.12)}$$

- Cas avec garantie étendue :

$$C_{IIy} = \begin{cases} C_m.n_1 & pour \quad t \in [0,W) \\ C_m.n_5 & pour \quad t \in [W,We) \\ C_r\left[\int_{We}^{\tau_{n_4+1}} r_0(\nu_{n_4} + t - \tau_{n_4})dt + \sum_{j=n_4+1}^{n_2-1} \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} r_0(\nu_j + t - \tau_j)dt + \int_{\tau_{n2}}^{L} r_0(\nu_{n_2} + t - \tau_{n_2})dt\right] + C_m.n_6 & pour \quad t \in [We,L) \end{cases}$$

(II.13)

Le consommateur aurait intérêt à acheter la garantie supplémentaire vendue au prix Cw si la condition suivante est satisfaite.

$$C_{IIy} + Cw \leq C_{IIn}$$

$$\Rightarrow Cw \leq B_C \qquad \text{(II.14)}$$

Avec: $B_C = C_r \left[\int_{W}^{\tau_{n_1+1}} r_0(\nu_{n_1} + t - \tau_{n_1})dt + \sum_{j=n_1+1}^{n_2-1} \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} r_0(\nu_j + t - \tau_j)dt - \int_{We}^{\tau_{n_4+1}} r_0(\nu_{n_4} + t - \tau_{n_4})dt - \sum_{j=n_4+1}^{n_2-1} \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} r_0(\nu_j + t - \tau_j)dt\right]$

- **Option III-1** : Maintenance préventive périodique durant la période post garantie
    - ***Option III-1*** : Maintenance préventive périodique durant $[W, L]$:
        - Cas sans garantie étendue:

$$C_{III-1n} = \begin{cases} 0 & pour \quad t \in [0, W) \\ C_r \left[\begin{array}{l} \int_W^{\tau_1} r_0(t)dt + \sum_{j=1}^{n_3-1} \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} \left[r_0(\tau_1) - r_m(\tau_1) + r_0(\nu_j + t - \tau_j) \right] dt \\ + \int_{\tau_{n_3}}^{L} \left[r_0(\tau_1) - r_m(\tau_1) + r_0(\nu_{n_3} + t - \tau_{n_3}) \right] dt \end{array} \right] + C_m . n_3 & pour \quad t \in [W, L) \end{cases} \quad \text{(II.15)}$$

        - Cas avec garantie étendue :

$$C_{III-1y} = \begin{cases} 0 & pour \quad t \in [0, W) \\ C_m . n_5 & pour \quad t \in [W, We) \\ C_r \left[\begin{array}{l} \int_{We}^{\tau_{n_5+1}} \left[r_0(\tau_1) - r_m(\tau_1) + r_0(\nu_{n_5} + t - \tau_{n_5}) \right] dt \\ + \sum_{j=n_5+1}^{n_3-1} \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} \left[r_0(\tau_1) - r_m(\tau_1) + r_0(\nu_j + t - \tau_j) \right] dt \\ + \int_{\tau_{n_3}}^{L} \left[r_0(\tau_1) - r_m(\tau_1) + r_0(\nu_{n_3} + t - \tau_{n_3}) \right] \end{array} \right] + C_m . n_6 & pour \quad t \in [We, L) \end{cases} \quad \text{(II.16)}$$

Le consommateur aurait intérêt à acheter la garantie supplémentaire vendue au prix Cw si la condition suivante est satisfaite.

$$C_{III-1y} + Cw \leq C_{III-1n}$$

$$\Rightarrow Cw \leq C1_C \quad \text{(II.17)}$$

Avec:

$$C1_C = C_r \begin{bmatrix} \int_W^{\tau_1} r_0(t)dt + \sum_{j=1}^{n_3-1} \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} \left[r_0(\tau_1) - r_m(\tau_1) + r_0(v_j + t - \tau_j) \right] dt \\ - \int_{We}^{\tau_{n_5+1}} \left[r_0(\tau_1) - r_m(\tau_1) + r_0(v_{n_5} + t - \tau_{n_5}) \right] - \sum_{j=n_5+1}^{n_3-1} \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} \left[r_0(\tau_1) - r_m(\tau_1) + r_0(v_j + t - \tau_j) \right] dt \end{bmatrix} + C_m(n_3 - n_6 - n_5)$$

- ***Option III-2*** : Les actions de maintenance préventive sont effectuées durant $[We, L]$:
    - Cas sans garantie étendue :

$$C_{III-2n} = \begin{cases} 0 & pour \quad t \in [0, W) \\ Cr \begin{bmatrix} \int_W^{\tau_1} r_0(t)dt + \sum_{j=1}^{n_3-1} \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} \left[r_0(\tau_1) - r_m(\tau_1) + r_0(v_j + t - \tau_j) \right] dt \\ + \int_{\tau_{n_3}}^{L} \left[r_0(\tau_1) - r_m(\tau_1) + r_0(v_{n_3} + t - \tau_{n_3}) \right] dt \end{bmatrix} + C_m.n_3 & pour \quad t \in [W, L) \end{cases}$$

(II.18)

- Cas avec garantie étendue :

$$C_{III-2y} = \begin{cases} 0 & pour \quad t \in [0, W) \\ 0 & pour \quad t \in [W, We) \\ C_r \begin{bmatrix} \int_{We}^{\tau_1} r_0(t)dt + \sum_{j=1}^{n_6-1} \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} \left[r_0(\tau_1) - r_m(\tau_1) + r_0(v_j + t - \tau_j) \right] dt \\ + \int_{\tau_{n6}}^{L} \left[r_0(\tau_1) - r_m(\tau_1) + r_0(v_{n_6} + t - \tau_{n_6}) \right] dt \end{bmatrix} + C_m.n_6 & pour \quad t \in [We, L) \end{cases} \qquad (II.19)$$

Le consommateur aurait intérêt à acheter la garantie supplémentaire au prix Cw si la condition suivante est satisfaite :

$$C_{III-2y} + Cw \leq C_{III-2n}$$

$$\Rightarrow Cw \leq C2_C \qquad (II.20)$$

Avec:

$$C2_C = C_r \left[\begin{bmatrix} \int_W^{\tau_1} r_0(t)dt + \sum_{j=1}^{n_3-1} \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} \left[r_0(\tau_1) - r_m(\tau_1) + r_0(\nu_j + t - \tau_j) \right] dt \\ + \int_{\tau_{n_3}}^{L} \left[r_0(\tau_1) - r_m(\tau_1) + r_0(\nu_{n_3} + t - \tau_{n_3}) \right] dt \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \int_{We}^{\tau_1} r_0(t)dt + \sum_{j=1}^{n_6-1} \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} \left[r_0(\tau_1) - r_m(\tau_1) + r_0(\nu_j + t - \tau_j) \right] dt \\ + \int_{\tau_{n_6}}^{L} \left[r_0(\tau_1) - r_m(\tau_1) + r_0(\nu_{n_6} + t - \tau_{n_6}) \right] dt \end{bmatrix} \right] + C_m\,(n_3 - n_6)$$

- **Option IV** : Maintenance préventive périodique durant $\in [0, We]$,
  - ***Option IV-1*** : Les actions de maintenance préventive sont effectuées durant $[0, W]$
    - Cas sans garantie étendue :

$$C_{IV-1n} = \begin{cases} C_m . n_1 & pour \quad t \in [0, W) \\ C_r \left[\int_W^L r_0(\nu_{n_1} + t - \tau_{n_1}) dt \right] & pour \quad t \in [W, L) \end{cases} \tag{II.21}$$

- Cas avec garantie étendue:

$$C_{IV-1y} = \begin{cases} C_m . n_1 & pour \quad t \in [0, W) \\ 0 & pour \quad t \in [W, We) \\ C_r \left[\int_{We}^L r_0(\nu_{n_1} + t - \tau_{n_1}) dt \right] & pour \quad t \in [We, L) \end{cases} \tag{II.22}$$

Dans ce cas, le consommateur aurait intérêt à acheter la garantie supplémentaire vendue au prix Cw si la condition suivante est satisfaite :

$$C_{IV-1y} + Cw \le C_{IV-1n}$$

$$\Rightarrow Cw \le D1_C \tag{II.23}$$

Avec : $D1_C = C_r \left[\int_W^L r_0(\nu_{n_1} + t - \tau_{n_1}) dt - \int_{We}^L r_0(\nu_{n_1} + t - \tau_{n_1}) dt \right]$

- **_Option IV-2_** : maintenance préventive périodique durant $[0,We]$:
  - Cas sans garantie étendue :

$$C_{IV-2n} = \begin{cases} C_m.n_1 & pour \quad t \in [0,W) \\ C_r\left[\int_W^L r_0(v_{n_1} + t - \tau_{n_1})dt\right] & pour \quad t \in [W,L) \end{cases} \tag{II.24}$$

- Cas avec garantie étendue :

$$C_{IV-2y} = \begin{cases} C_m.n_1 & pour \quad t \in [0,W) \\ C_m.n_5 & pour \quad t \in [W,We) \\ C_r\left[\int_{We}^L r_0(v_{n_4} + t - \tau_{n_4})dt\right] & pour \quad t \in [We,L) \end{cases} \tag{II.25}$$

Le consommateur aurait intérêt à acheter la garantie supplémentaire vendue au prix Cw si la condition suivante est satisfaite :

$$C_{IV-2y} + Cw \le C_{IV-2n}$$

$$\Rightarrow Cw \le D2_C \tag{II.26}$$

Avec: $D2_C = C_r\left[\int_W^L r_0(v_{n_1} + t - \tau_{n_1})dt - \int_{We}^L r_0(v_{n_4} + t - \tau_{n_4})dt\right] - C_m.n_5$

II.5.4. Détermination du coût moyen de garantie pour le fabricant

Dans ce qui suit, nous désignerons par M_{Xn} et M_{Xy}, les coûts encourus pour le fabricant pour l'option X (X = I, II, III-1, III-2, IV-1, IV-2) respectivement pour le cas sans garantie étendue et avec garantie étendue.

- **Option I** : Pas d'actions de maintenance préventive durant $[0, L]$,
  - Cas sans garantie étendue :

$$M_{In} = \begin{cases} C_r \int_0^W r_0(t)dt & pour \quad t \in [0,W) \\ 0 & pour \quad t \in [W,L) \end{cases} \tag{II.39}$$

- Cas avec garantie étendue :

$$M_{Iy} = \begin{cases} C_r \int_0^W r_0(t)dt & pour \quad t \in [0, W) \\ C_r \int_W^{We} r_0(t)dt & pour \quad t \in [W, We) \\ 0 & pour \quad t \in [We, L) \end{cases} \qquad \text{(II.40)}$$

Ainsi, le prix minimum Cw auquel le fabricant devrait vendre la garantie supplémentaire de durée (We–W) devrait satisfaire la condition suivante.

$$M_{Iy} - Cw \le M_{In}$$

$$\Rightarrow Cw \ge A_M \qquad \text{(II.40)}$$

Avec : $A_M = C_r \left[\int_W^{We} r_0(t)dt\right]$

- **Option II** : maintenance préventive périodique durant $[0, L]$
  - Cas sans garantie étendue :

$$M_{IIn} = \begin{cases} C_r \left[\int_0^{\tau_1} r_0(t)dt + \sum_{j=1}^{n_1-1} \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} r_0(v_j + t - \tau_j)dt + \int_{\tau_{n_1}}^{W} r_0(v_{n_1} + t - \tau_{n_1})dt \right] & pour \quad t \in [0, W) \\ 0 & pour \quad t \in [W, L) \end{cases} \qquad \text{(II.42)}$$

  - Cas avec garantie étendue :

$$M_{IIy} = \begin{cases} C_r \left[\int_0^{\tau_1} r_0(t)dt + \sum_{j=1}^{n_1-1} \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} r_0(v_j + t - \tau_j)dt + \int_{\tau_{n_1}}^{W} r_0(v_{n_1} + t - \tau_{n_1})dt \right] & pour \quad t \in [0, W) \\ C_r \left[\int_W^{\tau_{n_1+1}} r_0(v_{n_1} + t - \tau_{n_1})dt + \sum_{j=n_1+1}^{n_4-1} \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} r_0(v_j + t - \tau_j)dt + \int_{\tau_{n_4}}^{We} r_0(v_{n_4} + t - \tau_{n_4})dt \right] & pour \quad t \in [W, We) \\ 0 & pour \quad t \in [We, L) \end{cases} \qquad \text{(II.43)}$$

Dans ce cas, le prix minimum Cw auquel le fabricant devrait vendre la garantie supplémentaire de durée (We–W) devrait satisfaire la condition suivante.

$$M_{IIy} - Cw \le M_{IIn}$$

$\Rightarrow Cw \geq B_M$ (II.44)

Avec : $B_M = C_r \left[\int_{W}^{\tau_{n_1+1}} r_0(\nu_{n_1} + t - \tau_{n_1})dt + \sum_{j=n_1+1}^{n_4-1} \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} r_0(\nu_j + t - \tau_j)dt + \int_{\tau_{n_4}}^{We} r_0(\nu_{n_4} + t - \tau_{n_4})dt \right]$

- **Option III** : maintenance préventive périodique durant la période pst garantie.
    - **Option III-1** : maintenance préventive périodique durant $[W, L]$:
        - Cas sans garantie étendue :

$$M_{III-1n} = \begin{cases} C_r \int_0^W r_0(t)dt & pour \quad t \in [0, W) \\ 0 & pour \quad t \in [W, L) \end{cases} \quad \text{(II.45)}$$

- Cas avec garantie étendue :

$$M_{III-1y} = \begin{cases} C_r \int_0^W r_0(t)dt & pour \quad t \in [0, W) \\ C_r \begin{bmatrix} \int_W^{\tau_1} r_0(t)dt + \sum_{j=1}^{n_5-1} \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} [r_0(\tau_1) - r_m(\tau_1) + r_0(\nu_j + t - \tau_j)]dt \\ + \int_{\tau_{n_5}}^{We} [r_0(\tau_1) - r_m(\tau_1) + r_0(\nu_{n_5} + t - \tau_{n_5})]dt \end{bmatrix} & pour \quad t \in [W, We) \\ 0 & pour \quad t \in [We, L) \end{cases} \quad \text{(II.46)}$$

Le prix minimum Cw auquel le fabricant devrait vendre la garantie supplémentaire de durée (We–W) devrait satisfaire la condition suivante.

$$M_{IIy} - Cw \leq M_{IIn}$$

$\Rightarrow Cw \geq B_M$ (II.47)

Avec: $B_M = C_r \left[\int_{W}^{\tau_{n_1+1}} r_0(\nu_{n_1} + t - \tau_{n_1})dt + \sum_{j=n_1+1}^{n_4-1} \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} r_0(\nu_j + t - \tau_j)dt + \int_{\tau_{n_4}}^{We} r_0(\nu_{n_4} + t - \tau_{n_4})dt \right]$

- **Option III-2** : les actions de maintenance préventive sont effectuées durant $[We, L]$:
    - Cas sans garantie étendue :

$$M_{III-2n} = \begin{cases} C_r \int_0^W r_0(t)dt & pour \quad t \in [0, W) \\ 0 & pour \quad t \in [W, L) \end{cases} \tag{II.48}$$

- Cas avec garantie étendue :

$$M_{III-2y} = \begin{cases} C_r \int_0^W r_0(t)dt & pour \quad t \in [0, W) \\ C_r \int_W^{We} r_0(t)dt & pour \quad t \in [W, We) \\ 0 & pour \quad t \in [We, L) \end{cases} \tag{II.49}$$

Le prix minimum Cw auquel le fabricant devrait vendre la garantie supplémentaire de durée (We–W) devrait satisfaire la condition suivante.

$$M_{III-2y} - Cw \le M_{III-2n}$$

$$\Rightarrow Cw \ge C2_M \tag{II.50}$$

Avec: $C2_M = C_r \left[\int_W^{We} r_0(t)dt \right]$

- **Option IV** : actions de maintenance préventive durant la période de garantie,
  - **Option IV-1** : maintenance préventive périodique durant $[0, W]$:
    - Cas sans garantie étendue :

$$M_{IV-1n} = \begin{cases} C_r \left[\int_0^{\tau_1} r_0(t)dt + \sum_{j=1}^{n_1-1} \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} r_0(v_j + t - \tau_j)dt + \int_{\tau_{n_1}}^{W} r_0(v_{n_1} + t - \tau_{n_1})dt \right] & pour \quad t \in [0, W) \\ 0 & pour \quad t \in [W, L) \end{cases} \tag{II.51}$$

- Cas avec garantie étendue :

$$M_{IV-1y} = \begin{cases} C_r \left[\int_0^{\tau_1} r_0(t)dt + \sum_{j=1}^{n_1-1} \int_{\tau_j}^{\tau_j+1} r_0(v_j + t - \tau_j)dt + \int_{\tau_{n_1}}^{W} r_0(v_{n_1} + t - \tau_{n_1})dt \right] & pour \quad t \in [0, W) \\ C_r \left[\int_0^{\tau_1} r_0(t)dt + \sum_{j=1}^{n_1-1} \int_{\tau_j}^{\tau_j+1} r_0(v_j + t - \tau_j)dt + \int_{\tau_{n_1}}^{We} r_0(v_{n_1} + t - \tau_{n_1})dt \right] & pour \quad t \in [W, We) \\ 0 & pour \quad t \in [We, L) \end{cases} \tag{II.52}$$

Le prix minimum Cw auquel le fabricant devrait vendre la garantie supplémentaire de durée (We–W) devrait satisfaire la condition suivante.

$$M_{IV-1y} - Cw \leq M_{IV-1n}$$

$$\Rightarrow Cw \geq D1_M \qquad \text{(II.53)}$$

Avec: $D1_M = C_r \left[\int_W^{We} r_0(\nu_{n_1} + t - \tau_{n_1}) dt \right]$

- **Option IV-2** : maintenance préventive périodique durant $[0, We]$:
  - Cas sans garantie étendue :

$$M_{IV-2n} = \begin{cases} C_r \left[\int_0^{\tau_1} r_0(t)dt + \sum_{j=1}^{n_1-1} \int_{\tau_j}^{\tau_j+1} r_0(\nu_j + t - \tau_j)dt + \int_{\tau_{n_1}}^{W} r_0(\nu_{n_1} + t - \tau_{n_1})dt \right] & pour \quad t \in [0, W) \\ 0 & pour \quad t \in [W, L) \end{cases} \qquad \text{(II.54)}$$

  - Cas avec garantie étendue :

$$M_{IV-2y} = \begin{cases} C_r \left[\int_0^{\tau_1} r_0(t)dt + \sum_{j=1}^{n_1-1} \int_{\tau_j}^{\tau_j+1} r_0(\nu_j + t - \tau_j)dt + \int_{\tau_{n_1}}^{W} r_0(\nu_{n_1} + t - \tau_{n_1})dt \right] & pour \quad t \in [0, W) \\ C_r \left[\begin{array}{l} \int_W^{\tau_{n_1}+1} r_0(\nu_{n_1} + t - \tau_{n_1})dt + \sum_{j=n_1+1}^{n_4-1} \int_{\tau_j}^{\tau_j+1} r_0(\nu_j + t - \tau_j)dt \\ + \int_{\tau_{n_4}}^{We} r_0(\nu_{n_4} + t - \tau_{n_4})dt \end{array} \right] & pour \quad t \in [W, We) \\ 0 & pour \quad t \in [We, L) \end{cases} \qquad \text{(II.55)}$$

Le prix minimum Cw auquel le fabricant devrait vendre la garantie supplémentaire de durée (We–W) devrait satisfaire la condition suivante.

$$M_{IV-2y} - Cw \leq M_{IV-2n}$$

$$\Rightarrow Cw \geq D2_M \qquad \text{(II.55)}$$

Avec : $D2_M = C_r \left[\int_W^{\tau_{n_1}+1} r_0(\nu_{n_1} + t - \tau_{n_1})dt + \sum_{j=n_1+1}^{n_4-1} \int_{\tau_j}^{\tau_j+1} r_0(\nu_j + t - \tau_j)dt + \int_{\tau_{n4}}^{We} r_0(\nu_{n_4} + t - \tau_{n_4})dt \right]$

II.6. Mise en œuvre numérique du modèle

Afin d'illustrer le modèle mathématique développé ci-dessus, on considère à titre d'exemple un système dont les durées inter-défaillances (comptées en années) suivent une loi de Weibull. La fonction du taux de panne du système est exprimée comme suit :

$$r_0(t) = \left(\frac{\alpha}{\lambda}\right)\left(\frac{t}{\lambda}\right)^{(\alpha-1)}$$

avec : α : Paramètre de forme λ : paramètre d'échelle

Nous considèrerons dans cet exemple: α =2 et λ = 1**.** Ces valeurs impliquent un temps moyen inter-défaillances égal à 0.88 année.

Par ailleurs nous avons attribué les valeurs suivantes aux autres paramètres du modèle pour effectuer nos calculs :

- La durée du cycle de vie du système : L=9 années
- La durée de la période de garantie de base : W =2 années
- La durée de la période de garantie incluant l'extension We =3 années
- Le coût moyen d'une réparation minimale : Cr=200 unités monétaires
- L'intervalle entre deux actions de maintenance préventive : Δ=0.33 année

On suppose cinq niveaux de maintenance préventive. Le tableau (II.2) montre les valeurs de Cm (coût d'une action de maintenance préventive) et de $\delta(m)$ tel que défini dans la section II.3, pour différentes valeurs du niveau (m) de maintenance.

Niveau de maintenance (m)	$\delta(m)$	Cm (unités monétaires)
0	1	0
1	0.74	10
2	0.41	30
3	0.2	60
4	0.09	100
5	0.04	160

Tableau II.2 : Les niveaux de maintenance (m) et les coûts de maintenance préventive (Cm) correspondants.

L'objectif est de trouver pour chacune des stratégies de maintenance I, II, III-1, III-2, IV-1et IV-2 considérées dans notre modèle, le prix minimum auquel le fabricant aurait intérêt à vendre la garantie étendue et le prix maximum que le consommateur paierait pour cette garantie étendue. En d'autres termes, on cherchera à déterminer les zones de compromis entre le consommateur et le fabricant lorsqu'elles existent.

Pour cela, nous avons programmé le modèle mathématique en langage Fortran sur PC.

II.6.1 Résultats numériques

Le tableau II.3 présente pour chaque politique de maintenance, l'intervalle gagnant-gagnant représentant un compromis entre le fabricant et le consommateur en ce qui concerne le prix de la garantie étendue. Les bornes de cet intervalle sont : le prix minimum auquel le fabricant aurait intérêt à vendre la garantie étendue (borne inférieure), et le prix maximum que le consommateur devrait payer (borne supérieure).

	m=0	m=1	m=2	m=3	m=4	m=5
Option I	$[1000, 1000]$					
Option II		$[0,165.4]\cap[716,\infty] = \phi$	$[407.6, 460.8]$	$[211.4, 648.7]$	$[108.6, 747.1]$	$[61.9, 791.9]$
Option III-1		$[731.4, 731.4]$	$[730.8, 730.8]$	$[730.4, 730.4]$	$[730.1, 730.1]$	$[730.1, 730.1]$
Option III-2		$0\cap[1000,\infty] = \phi$	$0\cap[1000,\infty] = \phi$	$[0,116.1]\cap[1000,\infty] = \phi$	$[1000, 1210.8]$	$[1000, 1833.8]$
Option IV-1		$[794.0, 794.0]$	$[532.7, 532.7]$	$[366.4, 366.4]$	$[279.2, 279.2]$	$[239.6, 239.6]$
Option IV-2		$[757, 1381.8]$	$[448.6, 1844.5]$	$[252.3, 2087.2]$	$[149.5, 2141.4]$	$[102.8, 2040.6]$

Tableau II.3. Seuils d'indifférence pour le consommateur et le fabricant pour les deux stratégies FRW

II.6.2 Interprétation des résultats

A titre d'exemple, pour la politique de maintenance II, avec un niveau de maintenance m=2, pour une garantie de type FRW, la zone de compromis pour le prix de la garantie étendue se situe entre 407,6 et 460.8 unités monétaires (figure II.8).

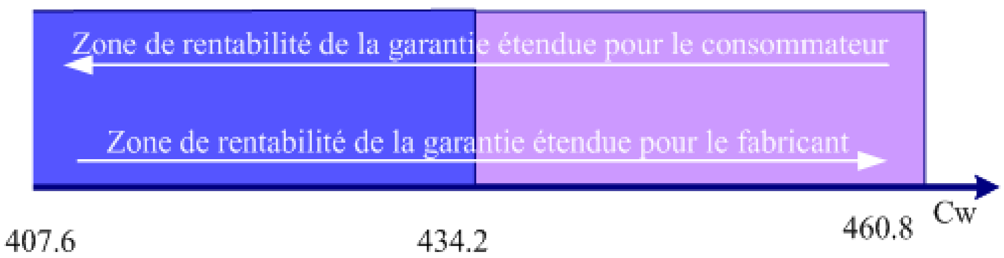


Figure II.8. Zone de compromis pour la garantie étendue pour la stratégie II (avec m = 2)

Si la borne inférieure est adoptée, le consommateur serait avantagé mais le fabricant ne serait pas perdant. Par contre, si le prix est fixé à la borne supérieure alors le fabricant serait avantagé mais le consommateur ne serait pas perdant car ce prix constitue son seuil d'indifférence. Ainsi le meilleur compromis pour les deux parties pourrait se situer au point milieu de l'intervalle gagnant-gagnant qui est de 434,2 unités monétaires.

Par contre, pour l'option de maintenance III-2 avec un niveau de maintenance préventive (m=3), il n'existe pas de zone de compromis pour le prix de la garantie étendue car les intérêts respectifs du consommateur et du fabricant ne se recoupent pas. En effet, le fabricant serait perdant s'il vendait la garantie étendue à un prix inférieur à 1000 unités monétaires, alors que le consommateur serait perdant s'il achetait la garantie étendue à un prix supérieur à 116,1 unités monétaires (figure II.9)

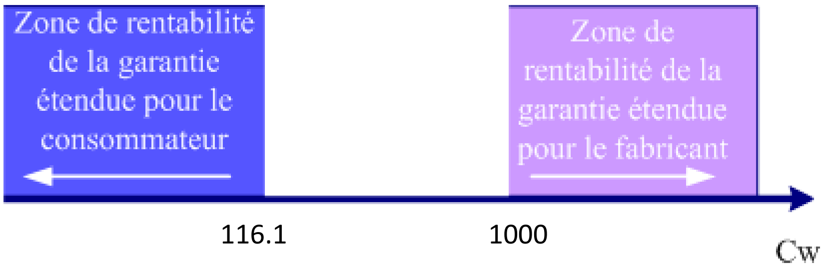


Figure II.9. Zone de compromis pour la garantie étendue pour l'option III-2 (m=3)

Par ailleurs, toujours d'après le tableau II.3, on constate que pour les options de maintenance I, III-1 et IV-1, le choix d'une stratégie de garantie étendue n'est pas avantageux ni pour le consommateur ni pour le fabricant. Prenons comme exemple l'option I : pour cette option on remarque que si le coût de garantie étendue est supérieur à 1000 unités monétaires le choix de cette option devient inadapté pour le consommateur, cette conclusion est également valable pour le fabricant si le prix de vente de la garantie étendue est inférieur à 1000 unités monétaires (figure II.10). Il n'y a donc pas de compromis.

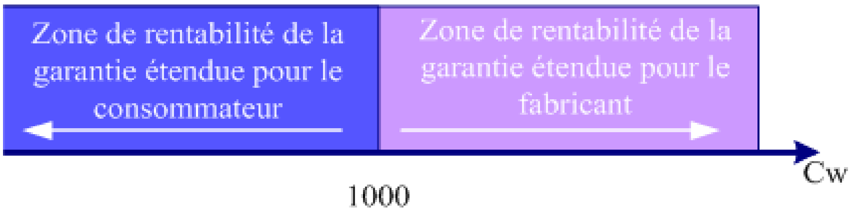


Figure II.10. Absence d'une zone de compromis pour la garantie étendue pour l'option I

L'inexistence d'un intervalle de compromis entre le consommateur et le fabricant est due au fait que le coût de la garantie étendue devrait couvrir le coût des actions de réparation minimale qui sera payé soit par le fabricant si le consommateur choisit d'acheter la période de garantie étendue ou par le consommateur s'il ne choisit pas d'étendre la période de garantie de base. Or le nombre moyen de réparations minimales ne peut changer qu'en présence de maintenance préventive. Ainsi, pour les options III-1 et IV-1, les coûts des actions de maintenance préventive n'auront aucun effet puisque la décision prise par le consommateur (acheter ou non la période de garantie étendue) n'influe pas sur les intervalles durant lesquels les actions de maintenance préventive seraient entreprises, et par suite le nombre de pannes sera le même.

D'une façon plus globale, il est intéressant de noter ce qui suit à partir du tableau II.4:

- Pour une stratégie FRW on remarque pour l'option IV-2 (maintenance préventive effectuée durant $[0, We]$), qu'en augmentant le niveau de maintenance préventive (m), la zone de compromis pour le prix de la garantie étendue devient de plus en plus large. Ceci est du aux coûts élevés des actions de maintenance préventive.

- Pour l'option II (maintenance préventive tout le long du cycle de vie), pour un niveau de maintenance préventive faible (m=1), il n'existe pas de zone de compromis. Par contre, pour des niveaux de maintenance préventive supérieurs à 1 (m= $\{2,3,4,5\}$ cette zone de rentabilité commune existe bien et elle devient de plus en plus large au fur et à mesure que le niveau de maintenance augmente.

- Pour l'option de maintenance III-2 (maintenance préventive durant $[We, L]$) on remarque que pour les niveaux de maintenance préventive m= $\{1,2,3\}$, il n'est pas opportun pour le consommateur d'acheter la garantie étendue. D'autre part, un prix minimum assez élevé (1000 unités monétaires) devrait être demandé par le fabricant pour que la période de garantie étendue soit rentable pour lui. Ceci s'explique par le fait que la politique de maintenance III-2 préconise des actions de maintenance préventive durant la dernière tranche du cycle de vie du produit $[We, L]$ après la fin de la période de garantie étendue. Durant cette période, le produit aura atteint un niveau de dégradation si important que des maintenances préventives de niveau assez faible ne pourront plus prévenir efficacement les pannes. D'ailleurs, cela se confirme en observant que seules les actions de maintenance préventive avec un niveau élevé m= $\{4,5\}$ permettant de rapprocher le système de l'état neuf, rendent la garantie étendue rentable pour le consommateur et le fabricant.

II.6.3. Etude des effets de la variation des distributions des durées inter-défaillances

On se propose d'étudier dans ce qui suit l'influence de la variation des distributions de probabilité régissant les durées inter-défaillances du produit sur les seuils de rentabilité de la garantie étendue pour le consommateur et le fabricant pour une stratégie FRW. On cherchera à déterminer l'intervalle gagnant-gagnant représentant un compromis entre le fabricant et le consommateur en ce qui concerne le prix de la garantie étendue en variant le coût des actions de réparation de 20 (unités monétaires) à 500 (unités monétaires) avec un pas de 20 pour différentes valeurs de paramètres d'échelle de la distribution des durées inter-défaillances.

Le tableau (II.4) présente les différentes valeurs considérées du paramètre d'échelle pour la loi de Weibull.

Paramètre de forme α	Paramètre d'échelle λ	Temps moyen inter-défaillances
2	0.5	0.44
2	**1**	**0.88**
2	2	1.7

Tableau II.4. Valeurs considérées des paramètres d'échelle pour la loi de Weibull.

La variation des paramètres de la loi de Weibull n'a pas d'effet sur la décision à prendre par le consommateur et le fabricant pour les options I, II, III-1 et IV-1 concernant la garantie étendue. Ceci est du au fait que cette variation n'affecte pas le nombre d'actions de réparations minimales entreprises durant la période de garantie étendue.

Par contre, l'effet de la variation de la fiabilité du produit (paramètres de la distribution Weibull des durées inter-défaillances) se ressent pour les stratégies III-2 et IV-2. Les résultats obtenus sont regroupés dans le tableau (II.5).

Cr	$\lambda = 0.5$		$\lambda = 1.0$		$\lambda = 2.0$	
	Option III-2 (m=1)	*Option IV-2 (m=1)*	*Option III-2 (m=1)*	*Option IV-2 (m=1)*	*Option III-2 (m=1)*	*Option IV-2 (m=1)*
20	ϕ	$[302.8, 534.7]$	ϕ	$[75.7, 111.1]$	ϕ	ϕ

40	ϕ	$[605.6, 1099.4]$	ϕ	$[151.4, 252.3]$	ϕ	$[37.8, 40.5]$
60	ϕ	$[908.4, 1664.2]$	ϕ	$[227.1, 393.5]$	ϕ	$[56.7, 75.8]$
80	ϕ	$[1211.2, 2228.9]$	ϕ	$[302.8, 534.7]$	ϕ	$[75.7, 111.1]$
100	ϕ	$[1514.0, 2793.6]$	ϕ	$[378.5, 675.9]$	ϕ	$[94.6, 146.4]$
200	ϕ	$[3028.0, 5617.3]$	ϕ	$[757.0, 1381.8]$	ϕ	$[189.2, 322.9]$
300	ϕ	$[4542.0, 8441.0]$	ϕ	$[1135.5, 2087.7]$	ϕ	$[283.8, 499.4]$
400	ϕ	$[6056.1, 11264.7]$	ϕ	$[1514.0, 2793.6]$	ϕ	$[378.5, 675.9]$
500	ϕ	$[7570.1, 14088.3]$	ϕ	$[1892.5, 3499.5]$	ϕ	$[473.1, 852.3]$

Cr	$\lambda = 0.5$		$\lambda = 1.0$		$\lambda = 2.0$	
	Option III-2 (m=2)	*Option IV-2 (m=2)*	*Option III-2 (m=2)*	*Option IV-2 (m=2)*	*Option III-2 (m=2)*	*Option IV-2 (m=2)*
20	ϕ	$[179.4, 683.8]$	ϕ	$[44.8, 103.4]$	$[25, 41.8]$	ϕ
40	ϕ	$[358.8, 1457.6]$	ϕ	$[89.7, 296.9]$	ϕ	ϕ
60	ϕ	$[538.3, 2231.4]$	ϕ	$[134.5, 490.3]$	ϕ	$[33.6, 55.0]$
80	ϕ	$[717.7, 3005.2]$	ϕ	$[179.4, 683.8]$	ϕ	$[44.8, 103.4]$
100	ϕ	$[897.2, 3779.1]$	ϕ	$[224.3, 877.2]$	ϕ	$[56.0, 151.8]$
200	ϕ	$[1794.4, 7648.2]$	ϕ	$[448.6, 1844.5]$	ϕ	$[112.1, 393.6]$
300	ϕ	$[12691.6, 11517.3]$	ϕ	$[672.9, 2811.8]$	ϕ	$[168.2, 635.4]$
400	ϕ	$[3588.8, 15386.4]$	ϕ	$[897.2, 3779.1]$	ϕ	$[224.3, 877.2]$
500	ϕ	$[4486.0, 19255.6]$	ϕ	$[1121.5, 4746.4]$	ϕ	$[180.3, 1119.1]$

Cr	$\lambda = 0.5$		$\lambda = 1.0$		$\lambda = 2.0$	
	Option III-2 (m= 3)	*Option IV-2 (m=3)*	*Option III-2 (m=3)*	*Option IV-2 (m=3)*	*Option III-2 (m=3)*	*Option IV-2 (m=3)*
20	ϕ	$[100.9, 726.8]$	$[100, 173.6]$	$[25.2, 46.7]$	$[25, 178.4]$	ϕ
40	ϕ	$[201.8, 1633.7]$	ϕ	$[50.4, 273.4]$	$[50, 176.8]$	ϕ
60	ϕ	$[302.8, 2540.6]$	ϕ	$[75.7, 500.1]$	$[75, 175.2]$	ϕ
80	ϕ	$[403.7, 3447.5]$	ϕ	$[100.9, 726.8]$	$[100, 173.6]$	$[25.2, 46.7]$
100	ϕ	$[504.7, 4354.4]$	ϕ	$[126.1, 953.6]$	$[125, 172.0]$	$[31.5, 103.4]$
200	ϕ	$[1009.4, 8888.8]$	ϕ	$[252.3, 2087.2]$	ϕ	$[63.0, 386.8]$

300	ϕ	[1514.1, 13423.2]	ϕ	[378.5, 3220.8]	ϕ	[94.6, 670.2]
400	ϕ	[2018.8, 17957.6]	ϕ	[504.7, 4354.4]	ϕ	[126.1, 953.6]
500	ϕ	[2523.5, 22491.9]	ϕ	[630.8, 5487.9]	ϕ	[157.7, 1237.0]

Cr	$\lambda = 0.5$		$\lambda = 1.0$		$\lambda = 2.0$	
	Option III-2 (m= 4)	*Option IV-2 (m=4)*	*Option III-2 (m=4)*	*Option IV-2 (m=4)*	*Option III-2 (m=4)*	*Option IV-2 (m=4)*
20	[400, 664]	[59.8, 676.5]	[100, 391.0]	ϕ	[25, 322.7]	ϕ
40	[800, 1020]	[119.6, 1653.1]	[200, 482.1]	[29.9, 188.2]	[50, 345.5]	ϕ
60	[1200, 1304]	[179.4, 2629.7]	[300, 573.2]	[44.8, 432.4]	[75, 368.3]	ϕ
80	[1600, 1700]	[239.2, 3606.3]	[400, 664.3]	[59.8, 676.5]	[100, 391.0]	ϕ
100	[2000, 2100]	[500, 755.4]	[74.7, 920.7]	[74.7, 920.7]	[125, 413.8]	ϕ
200	ϕ	[598.2, 9465.7]	[1000, 1210.8]	[149.5, 2141.4]	[250, 527.7]	[37.3, 310.3]
300	ϕ	[897.3, 14348.6]	[1500, 1666.2]	[224.3, 3362.1]	[375, 641.5]	[56.0, 615.5]
400	ϕ	[1196.4, 19231.5]	[2000, 2121.6]	[299.1, 4582.8]	[500, 755.4]	[74.7, 920.7]
500	ϕ	[1495.5, 24114.4]	[2500, 2577.0]	[373.8, 5803.6]	[625, 869.2]	[93.4, 1225.9]

Cr	$\lambda = 0.5$		$\lambda = 1.0$		$\lambda = 2.0$	
	Option III-2 (m= 5)	*Option IV-2 (m=5)*	*Option III-2 (m=5)*	*Option IV-2 (m=5)*	*Option III-2 (m=5)*	*Option IV-2 (m=5)*
20	[400, 1021.5]	[41.1, 528.2]	[100, 615.3]	ϕ	[25, 513.8]	ϕ
40	[800, 1563.0]	[82.2, 1536.5]	[200, 750.7]	[20.5, 24.1]	[50, 547.6]	ϕ
60	[1200, 2104.6]	[123.3, 2544.7]	[300, 886.1]	[30.8, 276.1]	[75, 581.5]	ϕ
80	[1600, 2646.1]	[164.5, 3553.0]	[400, 1021.5]	[41.1, 528.2]	[100, 615.3]	ϕ
100	[2000, 3187.6]	[205.6, 4561.2]	[500, 1156.9]	[51.4, 780.3]	[125, 649.2]	ϕ
200	[4000, 5895.3]	[411.2, 9602.5]	[1000, 1833]	[102.8, 2040.6]	[250, 818.4]	[25.7, 150.1]
300	[6000, 8603,0]	[616.9, 14643.8]	[1500, 2510]	[154.2, 3300.9]	[375, 987.6]	[38.5, 465.2]
400	[8000, 11310.7]	[822.5, 19685.1]	[2000, 3187]	[205.6, 4561.2]	[500, 1156.9]	[51.4, 780.3]
500	[10000, 14018.4]	[1028.2, 24727.4]	[2500, 3864]	[257.0, 5821.6]	[625, 1326.1]	[64.2, 1095.4]

Tableau II.5. Seuils d'indifférence pour le consommateur et le fabricant pour $\lambda = \{0.5, 1.0, 2.0\}$ pour une stratégie FRW

D'après le tableau (II.5) pour l'option III-2, on remarque ce qui suit :

- Pour un niveau de maintenance préventive faible (m=1) il n'existe aucune zone de compromis pour la garantie étendue même en augmentant la fiabilité du système (le temps moyen inter-défaillances).

- Pour les niveaux de maintenance m= $\{2,3\}$ et pour des coûts de réparation minimale faibles $(Cr \leq 140)$ il existe un intervalle de compromis entre le consommateur et le fabricant pour des valeurs de λ égales à 1 et 2. Ceci peut être expliqué par le fait que puisque le nombre des actions de réparation minimale (nombre de pannes) diminue en augmentant le paramètre d'échelle λ, l'état du système sera meilleur à l'expiration de la période de garantie étendue We l'instant auquel le consommateur peut entamer les actions de maintenance préventive qui vont améliorer l'état du système.

- Pour les niveaux de maintenance préventive m= $\{4,5\}$ la période de garantie étendue est propice pour le consommateur comme pour le fabricant pour λ= $\{1,2\}$ quelle que soit le coût de réparation payé par le fabricant durant la période de garantie. Pour ces niveaux de maintenance et pour λ=0.5 l'intervalle de compromis pour la garantie étendue existe pour m=4 pour des coûts de réparation faibles $(Cr \leq 160)$ et quelque soit *Cr* pour m=5.

Par ailleurs, pour l'option IV-2, d'après le tableau (II.5), il est intéressant de souligner ce qui suit :

- Pour λ=0.5 (faible fiabilité) il existe un intervalle de compromis de garantie étendue pour tous les niveaux de maintenance préventive quelle que soit le coût de réparation *Cr*. L'existence de cet intervalle est due à la compensation des coûts de réparation minimale payés par le fabricant durant la période de garantie par les coûts des actions de maintenance préventive payés par le consommateur et qui auront pour effet d'améliorer l'état du système.

Pour les valeurs de λ= $\{1,2\}$ (produit plus fiable), on remarque que plus le niveau de maintenance préventive est élevé, plus le choix d'une période de garantie étendue devient inadéquat pour le consommateur et le fabricant pour les faibles coûts de réparation *Cr*. En effet, pour ces faibles coûts, les dépenses payées par le consommateur durant la période de garantie pour le préventif ne seront pas compensées par les coûts de réparations payées par le fabricant durant cette période.

II.6.4. Etude des effets de la variation de la périodicité de maintenance préventive

Dans cette section on cherchera à déterminer l'effet de la variation de la périodicité (Δ) de maintenance préventive et, par conséquent, du nombre d'actions de maintenance préventive durant le cycle de vie du produit, sur l'adoption ou pas de la période de garantie étendue.

On considère trois différentes valeurs de Δ :

Δ =0.25 année, Δ =0.33 année et Δ =0.5 année.

On cherchera à déterminer l'intervalle gagnant-gagnant représentant un compromis entre le fabricant et le consommateur en ce qui concerne le prix de la garantie étendue en variant le coût des actions de réparations de 20 (unités monétaires) à 500 (unités monétaires) avec un pas de 20 pour les trois valeurs de Δ.

Comme pour le cas de la variation de la fiabilité du produit à la section précédente, il est évident que la variation de l'intervalle entre deux actions de maintenance préventive n'a pas d'effet sur le choix de la période de garantie étendue pour les stratégies de maintenance I, II, III-1 et IV-1. Par contre, l'effet de la variation de Δ existe pour les stratégies III-2 et IV-2. Les résultats obtenus à cet égard sont regroupés dans le tableau (II.6).

Cr	$\Delta = 0.25$		$\Delta = 0.33$		$\Delta = 0.5$	
	Option III-2 (m=1)	*Option IV-2 (m=1)*	*Option III-2 (m=1)*	*Option IV-2 (m=1)*	*Option III-2 (m=1)*	*Option IV-2 (m=1)*
20	Ø	$[75.3, 101.6]$	Ø	$[75.5, 111.1]$	Ø	$[76.6, 121.6]$
40	Ø	$[150.6, 243.2]$	Ø	$[151.4, 252.3]$	Ø	$[153.2, 263.2]$
60	Ø	$[1225.9, 384.8]$	Ø	$[227.1, 393.5]$	Ø	$[229.8, 404.8]$
80	Ø	$[301.2, 526.3]$	Ø	$[302.8, 534.7]$	Ø	$[306.4, 546.3]$
100	Ø	$[376.5, 667.9]$	Ø	$[378.5, 675.9]$	Ø	$[383, 687.9]$
200	Ø	$[753, 1375.9]$	Ø	$[757, 1381.8]$	Ø	$[766, 1395.9]$
300	Ø	$[1129.5, 2084]$	Ø	$[1135.5, 2087.7]$	Ø	$[1149, 2104]$
400	Ø	$[1506, 2791.9]$	Ø	$[1514, 2793.6]$	Ø	$[1532, 2811.9]$
500	Ø	$[1882, 3499.9]$	Ø	$[1892.5, 3499.5]$	Ø	$[1915, 3519.9]$

Cr	$\Delta = 0.25$		$\Delta = 0.33$		$\Delta = 0.5$	
	Option III-2 (m=2)	*Option IV-2 (m=2)*	*Option III-2 (m=2)*	*Option IV-2 (m=2)*	*Option III-2 (m=2)*	*Option IV-2 (m=2)*
20	Ø	$[43.9, 74.4]$	Ø	$[44.8, 103.4]$	Ø	$[46.9, 134.4]$
40	Ø	$[87.9, 268.8]$	Ø	$[89.7, 296.9]$	Ø	$[93.8, 328.8]$
60	Ø	$[131.8, 463.2]$	Ø	$[134.5, 490.3]$	Ø	$[140.7, 523.2]$
80	Ø	$[175.8, 657.6]$	Ø	$[179.4, 683.8]$	Ø	$[187.6, 717.6]$
100	Ø	$[219.7, 852]$	Ø	$[224.3, 877.2]$	Ø	$[234.5, 912]$
200	Ø	$[439.5, 1824]$	Ø	$[448.6, 1844.5]$	Ø	$[469, 1884]$
300	Ø	$[659.2, 2796]$	Ø	$[672.9, 2811.8]$	Ø	$[703.5, 2856]$
400	Ø	$[879, 2768]$	Ø	$[897.2, 3779.1]$	Ø	$[937.9, 3828]$
500	Ø	$[1098.7, 4740]$	Ø	$[1121.5, 4746.4]$	Ø	$[1172.5, 4800]$

Cr	$\Delta = 0.25$		$\Delta = 0.33$		$\Delta = 0.5$	
	Option III-2 (m=3)	*Option IV-2 (m=3)*	*Option III-2 (m=3)*	*Option IV-2 (m=3)*	*Option III-2 (m=3)*	*Option IV-2 (m=3)*
20	$[100, 226.9]$	Ø	$[100, 173.6]$	$[25.2, 46.7]$	$[100, 106]$	$[28, 108]$
40	$[200, 213.9]$	$[48, 216]$	Ø	$[50.4, 273.4]$	Ø	$[56, 336]$
60	Ø	$[72, 444]$	Ø	$[75.7, 500.1]$	Ø	$[84, 564]$
80	Ø	$[96, 672]$	Ø	$[100.9, 726.8]$	Ø	$[112, 792]$
100	Ø	$[120, 900]$	Ø	$[126.1, 953.6]$	Ø	$[140, 1020]$
200	Ø	$[240, 2040]$	Ø	$[25.3, 2087.2]$	Ø	$[280, 2160]$
300	Ø	$[360, 3180]$	Ø	$[378.5, 3220.8]$	Ø	$[420, 3300]$
400	Ø	$[480, 4320]$	Ø	$[504.7, 4354.4]$	Ø	$[560, 4440]$
500	Ø	$[600, 5460]$	Ø	$[630.8, 5487.9]$	Ø	$[700, 5580]$

Cr	$\Delta = 0.25$		$\Delta = 0.33$		$\Delta = 0.5$	
	Option III-2 (m=4)	*Option IV-2 (m=4)*	*Option III-2 (m=4)*	*Option IV-2 (m=4)*	*Option III-2 (m=4)*	*Option IV-2 (m=4)*
20	$[100, 487.6]$	Ø	$[100, 391]$	Ø	$[100, 281.6]$	$[18.1, 45.5]$
40	$[200, 575.2]$	$[27.1, 91.1]$	$[200, 482.1]$	$[29.9, 188.2]$	$[200, 363.3]$	$[36.2, 291.2]$
60	$[300, 662.9]$	$[40.6, 336.7]$	$[300, 573.2]$	$[44.8, 432.4]$	$[300, 445]$	$[54.3, 536.7]$

80	[400, 750.5]	[54.2, 582.3]	[400, 664.3]	[59.8, 676.5]	[400, 526.7]	[72.4, 782.3]
100	[500, 838.2]	[67.7, 827.9]	[500, 755.4]	[74.7, 920.7]	[500, 608.4]	[90.5, 1028]
200	[1000, 1276.4]	[135.5, 2056]	[1000, 1210.8]	[149.5, 2141.4]	[1000, 1016.9]	[181, 2256]
300	[1500, 1714.7]	[203.2, 3284]	[1500, 1666.2]	[224.5, 3362.1]	Ø	[271.5, 3484]
400	[2000, 2152.9]	[271, 4511.9]	[2000, 2121.6]	[299.1, 4582.8]	Ø	[362, 4711.9]
500	[2500, 2591.2]	[338.7, 5740]	[2500, 2577]	[373.8, 5803.6]	Ø	[452.5, 5940]

Cr	$\Delta = 0.25$		$\Delta = 0.33$		$\Delta = 0.5$	
	Option III-2 (m=5)	*Option IV-2 (m=5)*	*Option III-2 (m=5)*	*Option IV-2 (m=5)*	*Option III-2 (m=5)*	*Option IV-2 (m=5)*
20	[100, 773.3]	Ø	[100, 615.3]	Ø	[100, 445.2]	Ø
40	[200, 906.7]	Ø	[2000, 750.7]	[20.5, 24.1]	[200, 570.4]	[27.2, 187.2]
60	[300, 1040.2]	[26.4, 120.8]	[300, 886.1]	[30.8, 276.1]	[300, 695.6]	[40.8, 440.8]
80	[400, 1173.6]	[35.2, 374.4]	[400, 1021.5]	[41.1, 528.2]	[400, 828.8]	[54.4, 694.4]
100	[500, 1306.9]	[44, 628]	[500, 1156.9]	[51.4, 780.3]	[500, 946]	[68, 948]
200	[1000, 1973.9]	[87.9, 1896]	[1000, 1833.8]	[102.8, 2140.6]	[1000, 1572]	[136, 2216]
300	[1500, 2640.9]	[132, 3164]	[1500, 2510.7]	[154.2, 3300.9]	[1500, 2198]	[204, 3484]
400	[2000, 3307.9]	[176, 4432]	[2000, 3187.6]	[205.6, 4561.2]	[2000, 2824]	[272, 4752]
500	[2500, 3974.9]	[220, 5700]	[2500, 3864.6]	[257, 5821.6]	[2500, 3450]	[340, 6020]

Tableau II.6. Seuils d'indifférence pour le consommateur et le fabricant pour $\Delta = \{0.25, 0.33, 0.5\}$ pour une stratégie FRW

D'après les résultats présentés dans le tableau (II.6) on remarque ce qui suit pour l'option III-2 :

- Pour les niveaux de maintenance préventive m= $\{1,2\}$, il n'est pas opportun pour le consommateur ni pour le fabricant d'adopter la garantie étendue puisque l'état de dégradation du système à la date We sera trop avancé et les actions de maintenance préventives ne pourront pas avoir un effet suffisant.

- Pour des niveaux de maintenance préventive supérieurs m= $\{3,4\}$, la période de garantie étendue devient une opportunité pour le consommateur et pour le fabricant pour de faibles coûts de réparation surtout en augmentant le nombre des actions de maintenance préventive durant la période de garantie (Δ=0.25) ce qui aidera à améliorer l'état du système.

- Pour un niveau de maintenance préventive m=$\{5\}$, les actions de maintenance préventive permettent d'améliorer l'état du système de façon à ce qu'il soit opportun de prolonger la période de garantie de base même pour des coûts de réparation élevés. On remarque que pour ce niveau de maintenance préventive, plus le nombre des actions de maintenance préventive est grand (Δ faible) plus l'intervalle de compromis entre le fabricant et le consommateur est grand.

Par ailleurs, pour l'option IV-2, d'après le tableau (II.6), on remarque ce qui suit :

- Pour des niveaux de maintenance préventive faibles m=$\{1,2\}$, il existe un intervalle de compromis pour la garantie étendue entre le consommateur et le fabricant pour les différentes valeurs de Δ et de *Cr*.

- En améliorant le niveau des actions de maintenance préventive (m=$\{3,4,5\}$), et en augmentant la période Δ entre les actions de maintenance préventive, on remarque que la période de garantie étendue devient inadéquate pour les faibles coûts de réparation**.** Lorsque les actions de maintenance préventive sont les plus fréquentes (Δ=0.25), le consommateur aura un coût relativement élevé à payer pour le préventif durant la période de garantie. Ces coûts payés par le consommateur ne seront pas contrebalancés par les coûts de réparation (faibles) payés par le fabricant. Ceci explique le choix du consommateur de ne pas accepter la période de garantie étendue.

II.7. Conclusion

Dans ce chapitre nous avons développé un modèle mathématique pour déterminer simultanément la condition sous laquelle il serait dans l'intérêt du consommateur d'acheter la garantie étendue et le seuil de rentabilité de cette garantie étendue pour le fabricant. Nous avons étudié cette problématique en considérant plusieurs options de politiques de maintenance qui seraient adoptées durant le cycle de vie du produit. Nous avons considéré l'opportunité de faire de la maintenance préventive durant la période de garantie de base et/ou durant la période étendue, ceci en considérant différents niveau d'efficacité des actions préventives.

Nous avons testé le modèle développé en réalisant des calculs numériques avec des données arbitrairement choisies tout en prenant soin de vérifier leur cohérence. Nous avons déterminé pour chaque politique de maintenance, l'intervalle gagnant-gagnant, lorsqu'il existe, représentant un compromis entre le fabricant et le consommateur en ce qui concerne le prix de la garantie étendue. Une analyse de sensibilité de l'intervalle de compromis à la périodicité des actions de maintenance préventive a été effectuée.

Dans le chapitre suivant, la même problématique d'adoption d'une garantie étendue unidimensionnelle est traitée mais en considérant en plus, les conditions d'utilisation du produit et l'environnement de son exploitation.

Chapitre 3

Étude de l'opportunité apportée par l'adoption d'une garantie étendue tenant compte des conditions d'utilisation et de l'environnement

Sommaire

III.1. Introduction

Dans ce chapitre nous étudions l'opportunité apportée par la garantie étendue unidimensionnelle pour les deux points de vue du consommateur et du fabricant, ceci en tenant compte des conditions d'utilisation du produit et de l'environnement de son exploitation. Ainsi, il s'agit là d'une extension du travail présenté dans le chapitre précédent. Cette extension a fait l'objet de la communication **(Bouguerra S. et al. (2010)).**

III.2. L'objectif poursuivi

L'objectif de cette partie de notre travail consiste à déterminer le coût total encouru durant le cycle de vie du système pour le consommateur et pour le fabricant afin de déterminer, pour une situation donnée, le coût supplémentaire maximum que le consommateur devrait payer pour la garantie étendue, le prix minimum à partir duquel le fabricant acceptera de vendre la garantie étendue. Cela se fera en tenant compte des différentes politiques de maintenance décrites dans le chapitre précédent (§II.3). Le modèle développé nous permettra de déterminer, pour chaque stratégie de maintenance, s'il y a une zone de compromis possible qui donne une relation gagnant-gagnant à l'égard de la garantie étendue. Dans cette partie, nous prenons également en compte les effets des conditions d'utilisation et de l'environnement sur le taux de défaillance du système. Pour ce faire, nous considèrerons le modèle de Cox (**Lyonnet P.(2000))**. Ce modèle établit une relation paramétrique entre les facteurs de l'environnement et les facteurs de risque liés à la défaillance. La méthode est essentiellement basée sur l'hypothèse des risques proportionnels qui suppose que chaque facteur influe sur le taux de défaillance du système d'une manière constante dans le temps.

III.3. Modèle mathématique

III.3.1. Notations et hypothèses de travail

Nous considérons des produits réparables vendus avec une période de garantie (W) avec la possibilité d'être prolongée jusqu'à l'instant (We) pour un coût supplémentaire (Cw) payé par le consommateur lors de l'achat du produit. Les actions de maintenance préventive effectuées au cours des périodes de garantie de base et étendue sont à la charge du consommateur. Les actions de réparation sont considérées comme des réparations minimales de durée négligeable. Les coûts de réparation survenant durant la période post-garantie sont supportés par le consommateur. Nous supposons que, pendant le cycle de vie du produit, les actions de maintenance préventives sont effectuées à des instants périodiques $\tau_1, \tau_2, ...\tau_j$; avec $\tau_0 = 0$. On considère la même modélisation de maintenance préventive basée sur l'âge virtuel traitée dans le chapitre précédent (§ II.5.1). Nous supposons que pendant le cycle de vie du produit toutes les actions de maintenance préventive auront le même effort (m). Le coût des actions de maintenance préventive (Cm) est payé par le consommateur lors de la période de garantie de base et la période de garantie étendue.

On considère les mêmes options détaillées dans le chapitre précédent (§ II.3) que nous rappelons brièvement ici:

- **Option I :** pas d'actions de maintenance préventive durant $[0, L]$
- **Option II** : maintenance préventive périodique durant $[0, L]$
- **Option III** : maintenance préventive périodique durant la période post garantie se terminant à la fin du cycle de vie du produit. Pour cette option on considérera deux possibilités en ce qui concerne la réalisation des actions de maintenance préventive :
    - Option III-1 : Les actions de maintenance préventive sont effectuées dés que la période de garantie de base prend fin si le consommateur n'accepte pas de payer pour une extension de la garantie.
    - Option III-2 : Les actions de maintenance préventive commencent après l'achèvement de la période de garantie étendue si le consommateur accepte de payer pour une extension de garantie.
- **Option IV :** Maintenance préventive périodique durant la période de garantie du système. Pour cette option on considèrera les deux cas suivants :
    - Option IV-1 : les actions de maintenance préventive ne sont appliquées que durant la période de garantie de base. Elles ne continuent pas durant la période de garantie étendue pour le cas où le consommateur ne paye pas pour la garantie étendue.
    - Option IV-2 : les actions de maintenance préventive sont effectuées durant toute la période de garantie et sont étendue jusqu'à l'expiration de la garantie étendue si le consommateur accepte d'acheter l'extension de garantie.

On considère les mêmes notations données dans (§ II.4) du chapitre précédent, la fonction de taux de panne du système prend en considération les conditions d'utilisation de ce dernier et on la note :

$r(t,Z)$: taux de défaillance du système à l'instant t sous les conditions Z.

III.3.2. Détermination du taux de défaillance du système

Dans ce qui suit, nous prenons en considération les conditions de l'utilisation du produit ainsi que les conditions de l'environnement dans lequel il est exploité. Pour ce faire, nous utiliserons le modèle à risques proportionnels **Lyonnet P. (2006)**. Bien qu'il fût initialement utilisé dans le domaine médical, ce modèle a été utilisé pour mesurer l'effet de traitements thérapeutiques sur des populations humaines. Ce ne fut que bien plus tard qu'on l'utilisât dans le domaine industriel et plus précisément, dans le domaine de la maintenance. Le modèle à risques proportionnels se définit par une variation du taux de défaillance proportionnellement aux conditions de fonctionnement. En considérant ces variables explicatives, la fonction de défaillance s'exprime par :

$$r(t,Z) = r_0(t).g(Z) \qquad \text{(III.1)}$$

$g(Z)$: Fonction de risque dépendant du vecteur Z,

La fonction de risque est représentée par une fonction log-linéaire représentant des effets similaires de la forme $g(Z) = e^{\sum_i b_i Z_i}$. Par ailleurs, lorsque $g(Z) \succ 1$ le taux de défaillances augmente, et par conséquent, ce taux diminue pour $g(Z) \prec 1$.

Pour déterminer les coefficients associés aux variables explicatives dans le modèle à risques proportionnels, **Cox D.R. (1972)** a proposé la méthode du maximum de vraisemblance partielle. Cette méthode est dérivée du maximum de vraisemblance classique et ne nécessite pas la connaissance de la distribution des durées de vies. Cette vraisemblance partielle se calcule comme le produit des contributions pour chaque date de défaillance suivant les variables explicatives (facteurs de risques) associées. D'après **Lyonnet P. (2000),** « la contribution Vi du composant i défaillant en ti à la vraisemblance partielle V* est égale à la probabilité conditionnelle, que ce soit le sujet soumis aux contraintes (facteurs de risques) Zi qui soit défaillant en ti, connaissant la population à risque en cet instant n(ti) » avec i = {1, 2, …,n}. Dans cette définition, il est clairement précisé que le composant i est soumis à des contraintes Zi, ce qui signifie que ces conditions de fonctionnement sont constantes au cours du temps. Autrement dit, entre deux dates de défaillances consécutives, les valeurs des variables explicatives restent inchangées.

Cette méthode nécessite la détermination, à l'avance, des niveaux de gravité associés aux facteurs de risque. Ces niveaux de gravité visent à classer les conditions opérationnelles et environnementales dans certaines catégories. Ces facteurs de risque sont organisés selon trois niveaux de gravité:

$$(Z1, Z2) = \begin{cases} (0,0) & \textit{conditions environnementales nominales} \\ (1,1) & \textit{conditions environnementales agressives} \\ (2,2) & \textit{conditions environnementales très agressives} \end{cases}$$

Le modèle de Cox exige que les facteurs de risque soient associés à chaque instant de défaillance. Ils sont déterminés par un raisonnement de logique floue, ce modèle fournit un formalisme logique pour refléter les incertitudes. A partir de la moyenne des facteurs de risque, les poids «bi» (i = 1,2, ..., n) peuvent être calculés en maximisant la probabilité du modèle de Cox. La probabilité est écrite comme étant le produit des probabilités conditionnelles calculées pour chaque instant ti (i = 1,2, ..., n). Elle est donnée par l'équation suivante:

$$\Pi = \sum_{i=1}^{n} \left[b_i . z_i - \ln\left(\sum_{j \in n(t_i)} e^{b_j . z_i} \right) \right] \qquad \text{(III.3)}$$

où $n(t_i)$ représente l'ensemble des éléments défaillants à l'instant ti.

La probabilité de Cox est une fonction des poids 'bi'. Ainsi, pour déterminer les valeurs de bi, il est nécessaire de résoudre l'équation différentielle partielle du système suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \pi}{\partial b_1} = 0 \\ \dfrac{\partial \pi}{\partial b_2} = 0 \end{cases} \qquad \text{(III.4)}$$

Il est à noter que nous considérons la même notion d'âge virtuel proposée par **Kim C.S. et al. (2004)** détaillée dans (§ II.5.1). Pour la détermination du taux de défaillance du système, les équations [(II.3), (II.4), (II.5), (II.6), (II.7) et (II.8)] restent valables pour ce cas.

III.3.3. Détermination du coût de garantie étendue

Soit C_{Xn} et M_{Xy} les coûts totaux respectifs de maintenance payée par le consommateur et le fabricant pour l'option X (X=I, II, III-1, III-2, IV-1 et IV-2) de maintenance, respectivement pour le cas sans garantie étendue (n) ou avec garantie étendue (y)

III.3.3.1. Détermination du cout maximum que le consommateur devrait payer pour la garantie étendue

Dans ce qui suit nous déterminons, pour chaque option, la condition qui doit être satisfaite pour que l'achat de la période de garantie étendue soit avantageux pour le consommateur et le fabricant. Cette condition est basée sur le fait que l'achat de la garantie étendue sera bénéfique pour le consommateur si le coût total supporté au cours du cycle de vie du système, est inférieur à ce qu'il lui coûterait au cas où il ne prendrait pas la garantie étendue.

- ***Option I***:

$$C_{CIy} + Cw \leq C_{CIn}$$

$$\Rightarrow Cw \leq C_r \int_{W}^{We} r(t,Z)dt \tag{III.5}$$

- ***Option II*** :

$$C_{CIIy} + Cw \leq C_{CIIn}$$

$$\Rightarrow Cw \leq Cr \begin{bmatrix} \displaystyle\int_{W}^{\tau_{n_1+1}} r(v_{n_1} + t - \tau_{n_1}, Z)dt + \sum_{j=n_1+1}^{n_2-1} \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} r(v_j + t - \tau_j, Z)dt \\ \displaystyle - \int_{We}^{\tau_{n_4+1}} r(v_{n_4} + t - \tau_{n_4}, Z)dt - \sum_{j=n_4+1}^{n_2-1} \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} r(v_j + t - \tau_j, Z)dt \end{bmatrix} \tag{III.6}$$

- ***Option III** :*
  - ***Option III-1*** :

$$C_{CIII-1y} + Cw \leq C_{CIII-1n}$$

$$\Rightarrow Cw \leq C_r \begin{bmatrix} \displaystyle\int_{W}^{\tau_1} r(t,Z)dt + \sum_{j=1}^{n_3-1} \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} \left[r(\tau_1, Z) - r_m(\tau_1, Z) + r(v_j + t - \tau_j, Z) \right] dt - \int_{We}^{\tau_{n_5+1}} \left[r(\tau_1, Z) - r_m(\tau_1, Z) + r(v_{n_5} + t - \tau_{n_5}, Z) \right] - \\ \displaystyle\sum_{j=n_5+1}^{n_3-1} \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} \left[r(\tau_1, Z) - r_m(\tau_1, Z) + r(v_j + t - \tau_j, Z) \right] dt \end{bmatrix} \tag{III.7}$$

  - ***Option III-2*** :

$$C_{CIII-2y} + Cw \leq C_{CIII-2n}$$

$$\Rightarrow Cw \leq C_r \left[\begin{bmatrix} \int_{W}^{\tau_1} r(t,Z)dt + \\ \sum_{j=1}^{n_3-1} \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} \left[r(\tau_1,Z) - r_m(\tau_1,Z) + r(\nu_j + t - \tau_j, Z) \right] dt \\ + \int_{\tau_{n_3}}^{L} \left[r(\tau_1,Z) - r_m(\tau_1,Z) + r(\nu_{n_3} + t - \tau_{n_3}, Z) \right] dt \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \int_{We}^{\tau_1} r(t,Z)dt + \\ \sum_{j=1}^{n_6-1} \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} \left[r(\tau_1,Z) - r_m(\tau_1,Z) + r(\nu_j + t - \tau_j, Z) \right] dt \\ + \int_{\tau_{n_6}}^{L} \left[r(\tau_1,Z) - r_m(\tau_1,Z) + r(\nu_{n_6} + t - \tau_{n_6}, Z) \right] dt \end{bmatrix} \right] + C_m (n_3 - n_6) \qquad \text{(III.8)}$$

- ***Option IV :***

  - ***Option IV-1*** **:**

$$C_{CIV-1y} + Cw \leq C_{CIV-1n}$$

$$\Rightarrow Cw \leq C_r \left[\int_{W}^{L} r(\nu_{n_1} + t - \tau_{n_1}, Z)dt - \int_{We}^{L} r(\nu_{n_1} + t - \tau_{n_1}, Z)dt \right] \qquad \text{(III.9)}$$

  - ***Option IV-2 :***

$$C_{CIV-2y} + Cw \leq C_{CIV-2n}$$

$$\Rightarrow Cw \leq C_r \left[\int_{W}^{L} r_0(\nu_{n_1} + t - \tau_{n_1}, Z)dt - \int_{We}^{L} r_0(\nu_{n_4} + t - \tau_{n_4}, Z)dt \right] - C_m . n_5 \qquad \text{(III.10)}$$

III.3.3.2. Détermination du cout maximum que le fabricant devrait payer pour la garantie étendue

Nous établissons ci-dessous, pour chaque option, la condition qui doit être satisfaite pour que la vente de la période de garantie étendue soit profitable pour le fabricant. Cette condition est basée sur le fait que la vente de la garantie étendue serait bénéfique pour le fabricant si le total des coûts encourus pour lui au cours du cycle de vie du système, était inférieur à ce qu'il lui coûterait au cas où il n'acceptera pas de vendre la garantie étendue.

- ***Option I*** :

$$C_{MIy} - Cw \leq C_{MIn}$$

$$\Rightarrow Cw \geq C_r \left[\int_{W}^{We} r(t,Z)dt \right] \qquad \text{(III.11)}$$

- ***Option II*** :

$$C_{MIIy} - Cw \leq C_{MIIn}$$

$$\Rightarrow Cw \geq C_r \begin{bmatrix} \int_{W}^{\tau_{n_1+1}} r\ (\nu_{n_1} + t - \tau_{n_1}, Z)dt + \\ \sum_{j=n_1+1}^{n_4-1} \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} r(\nu_j + t - \tau_j, Z)dt + \\ \int_{\tau_{n_4}}^{We} r(\nu_{n_4} + t - \tau_{n_4}, Z)dt \end{bmatrix} \tag{III.12}$$

- ***Option III*** **:**
  - ***Option III-1*** :

$$C_{MIII-1y} - Cw \leq C_{MIII-1n}$$

$$\Rightarrow Cw \geq C_r \begin{bmatrix} \int_{W}^{\tau_1} r(t, Z)dt + \\ \sum_{j=1}^{n_5-1} \int_{\tau_j}^{\tau_j+1} \left[r(\tau_1, Z) - r_m(\tau_1, Z) + r(\nu_j + t - \tau_j, Z) \right] dt + \\ \int_{\tau_{n_5}}^{We} \left[r(\tau_1, Z) - r_m(\tau_1, Z) + r(\nu_{n_5} + t - \tau_{n_5}, Z) \right] dt \end{bmatrix} \tag{III.13}$$

  - ***Option III-2*** :

$$C_{MIII-2y} - Cw \leq C_{MIII-2n}$$

$$\Rightarrow Cw \geq C_r \left[\int_{W}^{We} r\ (t)dt \right] \tag{III.14}$$

- ***Option IV :***
  - ***Option IV-1 :***

$$C_{MIV-1y} - Cw \leq C_{MIV-1n}$$

$$\Rightarrow Cw \geq C_r \left[\int_{W}^{We} r\ (\nu_{n_1} + t - \tau_{n_1}, Z)dt \right] \tag{III.15}$$

  - ***Option IV-2 :***

$$C_{MIV-2y} - Cw \leq C_{MIV-2n}$$

$$\Rightarrow Cw \geq C_r \left[\begin{array}{l} \int_{W}^{\tau_{n_1}+1} r\,(\nu_{n_1} + t - \tau_{n_1}, Z)dt + \sum_{j=n_1+1}^{n_4-1} \int_{\tau_j}^{\tau_j+1} r\,(\nu_j + t - \tau_j, Z)dt + \\ \int_{\tau_{n4}}^{We} r\,(\nu_{n_4} + t - \tau_{n_4}, Z)dt \end{array} \right] \tag{III.16}$$

III.4. Exemple numérique

Nous considérons l'exemple d'une pompe à eau réparable dont les temps inter défaillances suivent une distribution de Weibull avec paramètre de forme α et paramètre d'échelle λ en tenant compte de l'utilisation et des facteurs reliés à l'environnement de l'exploitation de la pompe. La fiabilité de celle-ci sera alors exprimée comme suit:

$$R(t,Z) = e^{-(\frac{t}{\lambda})^{\alpha-1}.g(Z)} \tag{III.17}$$

La fonction du taux de défaillances est alors donnée par:

$$r(t,Z) = \left(\frac{\alpha}{\lambda}\right) . \left(\frac{t}{\lambda}\right)^{(\alpha-1)} g(Z) \tag{III.18}$$

Le facteur de risque Z1 lié aux conditions de l'environnement dispose de trois niveaux de gravité:
Z1=0 : la pompe fonctionne à l'abri de la pluie et du froid,

Z1=1 : la pompe fonctionne à l'abri de la pluie,

Z1=2 : la pompe n'est pas sous le couvert,

Le facteur de risque Z2 lié aux conditions d'utilisation dispose de deux niveaux de gravité :

Z2=0 : l'eau est filtrée,

Z2=1 : l'eau n'est pas filtrée,

Par ailleurs, nous considérons les deux poids suivants :

b1 = 0,5,
b2 = 1,1,

Nous considérons la même expression pour $\delta(m)$ (une fonction décroissante de m) utiliseé par **Kim C.S. et al. (2004)**: $\delta(m)=(1+m)e^{-m}, m \geq 0$ étant un nombre entier. On considère les mêmes niveaux discrets de la maintenance préventive ainsi que les coûts correspondants donnés dans le chapitre précédent (tableau II.2)

Les défaillances du système considéré suivent une loi de Weibull de paramètre de forme $\alpha = 2$ et de paramètre d'échelle $\lambda = 1$

Le système est vendu avec une période de garantie de base W=2 années qui peut être étendue d'une année We=3 années pour un cycle de vie total de L=9 années. Les actions de maintenance préventive sont entreprises avec une fréquence de $\Delta = 0.33$ année. Pour toute défaillance entre deux actions de maintenance préventive une action de réparation minimale est entreprise avec un coût unitaire de C_r = 200 unité monétaire.

Nous avons effectué des calculs en utilisant les données d'entrée mentionnées ci-dessus. Nous avons examiné, pour chaque option de maintenance et pour chaque niveau de maintenance préventive, l'existence d'un intervalle de compromis (win-win) [a, b] où «a» est le prix minimum à partir duquel le fabricant devrait vendre la garantie étendue et «b» représente le coût supplémentaire maximum que le consommateur doit payer pour la garantie étendue. Les tableaux (III.1 à III.6) montrent les résultats obtenus.

Z2 \ Z1	0	1	2
0	[1000, 1000]	[1648.7, 1648.7]	[2718.2, 2718.2]
1	[3004.1, 3004.1]	[4953.0, 4953.0]	[8166.1, 8166.1]

Tableau III.1: Intervalles de compromis pour la garantie étendue pour l'option I

- Pour les options I, III-1 et IV-1 (tableau III-1,III-2 et III-3), on peut remarquer que le choix d'une période de garantie étendue ne serait pas intéressant ni pour le consommateur ni pour le fabricant. L'intervalle gagnant-gagnant est réduit dans ce cas à une valeur unique identique pour les deux. Pour l'option I, dans des conditions nominales (Z1 = 0, Z2 = 0), par exemple, si le coût de garantie étendue est supérieur à 1000 unités monétaires, cette extension de la garantie ne serait pas avantageuse pour le consommateur. Cette conclusion est également valable pour le fabricant si le coût de garantie étendue est inférieur à 1000 unités monétaires. Les seuils de valeurs obtenues pour le consommateur et le fabricant sont les mêmes, ceci est due au fait que les deux bornes de l'intervalle correspondent aux coûts de réparation minimales encourue au cours de l'intervalle [W,We].

	Z2 \ Z 1	0	1	2
m=1	0	[794.0, 794.0]	[1309.2, 1309.2]	[2158.5, 2158.5]
	1	[2385.5, 2385.5]	[3933.0, 3933.0]	[6484.5, 6484.5]
m=2	0	[532.7, 532.7]	[878.3, 878.3]	[1448.0, 1448.0]
	1	[1600.3, 1600.3]	[2638.5, 2638.5]	[4350.2, 4350.2]
m=3	0	[366.4, 366.4]	[604.0, 604.0]	[995.9, 995.9]
	1	[1100.7, 1100.7]	[1814.7, 1814.7]	[2992.0, 2992.0]
m=4	0	[279.2, 279.2]	[460.4, 460.4]	[759.1, 759.1]
	1	[839.0, 839.0]	[1383.2, 1383.2]	[2280.6, 2280.6]
m=5	0	[239.6, 239.6]	[395.1, 395.1]	[651.5, 651.5]
	1	[720.0, 720.0]	[1187.1, 1187.1]	[1957.2, 1957.2]

Tableau III.2: Intervalles de compromis pour la garantie étendue pour l'option III-1

Pour ces trois options, on peut clairement remarquer que plus les conditions d'utilisation (Z1) et les conditions d'environnement (Z2) deviennent plus sévères, le coût de garantie étendue devient plus élevé. Ceci est prévisible parce que le nombre de défaillances (réparations minimales) au cours de [W, We] augmente avec la détérioration de l'utilisation et les conditions de l'environnement. La variation des conditions d'utilisation et d'environnement n'a aucun effet sur la décision du consommateur (respectivement fabricant) pour l'achat (vente) de la période de garantie étendue.

	Z1 / Z2	0	1	2
m=1	0	[731.48, 731.48]	[1206.0, 1206.0]	[1988.3, 1988.3]
	1	[2197.5, 2197.5]	[3623.0, 3623.0]	[5973.4, 5973.4]
m=2	0	[730.83, 730.83]	[1204.9, 1204.9]	[1986.6, 1986.6]
	1	[2195.5, 2195.5]	[3619.8, 3619.8]	[5968.0, 5968.0]
m=3	0	[730.41, 730.41]	[1204.2, 1204.2]	[1985.4, 1985.4]
	1	[2194.2, 2194.2]	[3617.7, 3617.7]	[5964.6, 5964.6]
m=4	0	[730.19, 730.19]	[1203.8, 1203.8]	[1984.8, 1984.8]
	1	[2193.6, 2193.6]	[3616.6, 3616.6]	[5962.9, 5962.9]
m=5	0	[730.09, 730.09]	[1203.7, 1203.7]	[1984.6, 1984.6]
	1	[2193.3, 2193.3]	[3616.2, 3616.2]	[5962.1, 5962.1]

Tableau III.3: Intervalles de compromis pour la garantie étendue pour l'option IV-1

Pour l'option II (actions de maintenance préventive réalisées sur tout le cycle de vie du système), d'après le tableau III.4, il est intéressant de remarquer que pour un faible niveau de maintenance préventive (m = 1), l'intervalle de compromis pour la garantie étendue n'existe pas. Cela peut s'expliquer par les coûts des actions de réparation minimales payés par le fabricant qui ne seront pas compensés par les coûts des actions de maintenance préventive payées par le consommateur au cours de cette période de garantie étendue.

	Z2 \ Z1	0	1	2
m=1	0	Ø	Ø	Ø
	1	Ø	Ø	Ø
m=2	0	[407.6, 460.8]	[672.1, 759.7]	[1108.2, 1252.6]
	1	[1224.7, 1384.3]	[2019.3, 2282.3]	[3329.2, 3763.0]
m=3	0	[211.4, 648.7]	[348.5, 1069.6]	[574.7, 1763.4]
	1	[635.1, 1948.9]	[1047.2, 3213.2]	[1726.5, 5297.7]
m=4	0	[108.6, 747.1]	[179.1, 1231.9]	[295.2, 2031.0]
	1	[326.3, 2244.6]	[538.0, 3700.8,]	[887.0, 6101.7]
m=5	0	[61.9, 791.9]	[102.0, 1305.6]	[168.2, 2152.7]
	1	[185.9, 2379.1]	[306.6, 3922.5,]	[505.5, 6467.1]

Tableau III.4: Intervalles de compromis pour la garantie étendue pour l'option II

Cependant, pour un ensemble de conditions externes (Zi), on remarque que plus le niveau des actions de maintenance préventive (m) devient plus efficace, plus on trouve des intervalles de compromis, on remarque que ces intervalles sont plus larges en augmentant le niveau des actions de maintenance préventive. Ceci est lié à l'amélioration de la fiabilité du système. Nous pouvons aussi voir que pour l'option II avec un niveau de maintenance préventive (m = 5) et des conditions externes (Z1 = 1, Z2 = 1), l'intervalle gagnant-gagnant pour le coût de garantie étendue se trouve entre 306,6 et 3922,5 unités monétaires, qui représentent les valeurs de seuil, respectivement, pour le fabricant et le consommateur. Le meilleur compromis serait correspondent au milieu de cet intervalle avec un coût de garantie prolongée de 2114.55 unités monétaires.

On peut remarquer dans le cas de cette même option que pour un niveau donné de la maintenance préventive, la variation des conditions extérieures (conditions d'utilisation et de l'environnement Zi) a le même effet que pour les options (I), (III-1) et (IV -1). Par ailleurs, nous observons que lorsque les conditions d'utilisation et de l'environnement deviennent plus sévères, le prix à payer pour la garantie étende augmente pour le consommateur et pour le fabricant. Cela est dû à l'augmentation du nombre (coût) des réparations minimales effectuées au cours de la période de garantie étendue en raison de la croissance de l'agressivité des conditions extérieures.

Pour le cas de l'option III-2 (actions de maintenance préventive effectuées à la fin de la période de garantie étendue), comme indiqué dans le tableau III-5, il n'est pas avantageux pour le consommateur de payer pour la garantie étendue pour des niveaux de maintenance préventive m $\in \{1,2,3\}$.Cependant, la garantie étendue devient rentable pour des niveaux plus élevés de maintenance préventive.

	Z2 \ Z 1	0	1	2
m=1	0	Ø	Ø	Ø
	1	Ø	Ø	Ø
m=2	0	Ø	Ø	Ø
	1	Ø	Ø	Ø
m=3	0	Ø	Ø	Ø
	1	Ø	Ø	Ø
m=4	0	[1000, 1210.81]	[1648.7, 1801.6]	[2718.2, 2775.8]
	1	Ø	Ø	Ø
m=5	0	[1000, 1833.84]	[1648.7, 2712.1]	[2718.2, 4160.1]
	1	[3004.1, 4547.1]	[4953, 7185.6]	[8166.1, 11535.6]

Tableau III.5: Intervalles de compromis pour la garantie étendue pour l'option III-2

Du point de vue fabricant, puisque les actions de maintenance préventive commencent après la fin de la période de garantie, ces actions n'affectent pas la décision du fabricant. Ainsi, pour tous les niveaux de maintenance préventive, le prix minimum pour la garantie étendue correspond aux coûts des réparations minimales au cours de la période [W, We] (par exemple: 1000 unités monétaires pour les conditions nominales).

Pour un niveau de maintenance préventive (m = 4), la décision d'adopter une politique de garantie étendue dépend des conditions extérieures. Pour des conditions relativement sévères ($Z1 = \{0,1,2\}$, $Z2 = 1$), il n'est pas opportun pour le consommateur, ni pour le fabricant de payer pour la garantie étendue.

Il est également intéressant de noter dans le tableau III.5, pour le niveau de maintenance préventive (m =5), que lorsque les conditions d'utilisation (Z2) sont de plus en plus sévères, l'intervalle de compromis pour la garantie étendue devient plus grand des deux côtés. Cela est dû au fait que l'augmentation du niveau d'agressivité de ces conditions à pour effet d'augmenter le taux de défaillance du système et donc le coût de réparation. Pour ce cas, il serait plus rentable pour le consommateur de payer plus pour profiter de la garantie étendue et il serait de même pour le fabricant.

- Dans le cas de l'option IV-2, d'après le tableau III.6, (actions de maintenance préventive effectuées durant l'intervalle $[0, We)$, pour toute combinaison donnée de conditions d'utilisation et de l'environnement, l'intervalle gagnant-gagnant pour le coût de garantie étendue devient plus grand en augmentant le niveau des actions de maintenance préventive (valeur du seuil inférieur pour le fabricant et la valeur du seuil supérieur pour le consommateur). En effet, du côté du fabricant, comme les actions de maintenance préventive deviennent plus efficaces, le nombre de réparations diminue. Par conséquent, il paierait moins pour les réparations et donc la valeur du seuil pour le coût de garantie étendue diminue. Du côté du consommateur, en acceptant de payer pour la garantie étendue, le produit arrive à la période post-garantie avec une meilleure fiabilité, grâce aux actions de maintenance préventive effectuées au cours de l'intervalle [W, We]. Par conséquent, le consommateur serait prêt à payer plus pour la garantie étendue ainsi que pour des actions de maintenance préventive plus efficaces ce qui permettra d'avoir une plus grande fiabilité et moins de réparations au cours de la période post-garantie.

	Z2 \ Z 1	0	1	2
m=1	0	[757.01, 1381.83]	[1248.1, 2297.7]	[2057.7, 3807.7]
	1	[2274.1, 4211.3]	[3749.5, 6962.8]	[6181.9, 11499.3]
m=2	0	[448.6, 1844.56]	[739.6, 3099.5]	[1219.4, 5168.6]
	1	[1347.6, 5721.7]	[2221.9, 9491.9]	[3663.4, 15707.9]
m=3	0	[252.35, 2087.2]	[416.0, 3557.9]	[685.9, 5982.8]
	1	[758.1, 6631.0]	[1249.9, 11049.5]	[2060.7, 18334.3]
m=4	0	[149.55, 2141.44]	[246.5, 3725.2]	[406.5, 6336.5]
	1	[449.2, 7034.4]	[740.7, 11792.5]	[1221.2, 19637.2]
m=5	0	[102.82, 2040.64]	[169.5, 3675.8]	[279.5, 6371.8]
	1	[308.8, 7092.4]	[509.2, 12004.8]	[839.6, 20103.9]

Tableau III.6: intervalles de compromis pour la garantie étendue pour l'option IV-2

Globalement, lorsque les conditions d'utilisation et de l'environnement sont plus agressives, on peut observer que le coût de garantie étendue augmente pour le consommateur et diminue pour le fabricant. Cela signifie que le consommateur aura plus tendance à payer pour la garantie étendue et le fabricant serait prêt à vendre la garantie étendue pour un prix moins cher.

III.5. Conclusion

Ce chapitre est une extension du deuxième chapitre. Nous y avons traité le modèle de garantie étendue proposé dans le chapitre précédent en prenant en considération les conditions d'utilisation du produit et l'environnement de son exploitation. Nous avons cherché à déterminer le coût de garantie supplémentaire maximum que devrait payer le consommateur pour la garantie étendue et le coût minimum pour lequel le fabricant pourrait vendre la garantie étendue sous différentes options de maintenance adoptées durant le cycle de vie du produit.

Une analyse de sensibilité a été réalisée afin d'étudier l'influence des différentes conditions sous lesquelles le système fonctionne sur la décision du consommateur et du fabricant quant à l'adoption une période de garantie étendue.

Dans le chapitre suivant nous étendrons nos travaux à l'étude de l'opportunité apportée par une garantie étendue dans le cas où il s'agit de garantie bidimensionnelle, ceci des deux points de vue du consommateur et du fabricant.

Chapitre 4

Étude de l'opportunité d'adoption de la garantie étendue dans le cas de garantie bidimensionnelle avec approche déterministe du comportement de l'usager

Sommaire

IV.1. Introduction

Il s'agit dans ce chapitre d'étendre les travaux de **Bouguerra et al. (2012.a)** présentés dans le chapitre 2, aux situations où la garantie offerte est bidimensionnelle.

Nous développons un modèle d'aide à la décision pour étudier l'opportunité d'adopter une garantie étendue bidimensionnelle aussi bien pour le consommateur que pour le fabricant, ceci pour différentes politiques de maintenance pouvant être adoptées pour le produit durant son cycle de vie et en considérant différentes catégories d'utilisateurs. Cette partie de notre travail a fait l'objet de la communication **Bougerra et al. (2012.b)**

IV.2. Stratégie de garantie étendue bidimensionnelle

Dans plusieurs domaines tels que l'industrie automobile et l'aéronautique, le contrat de garantie est basé sur une région de garantie bidimensionnelle. Dans ces types de contrat, la garantie est généralement caractérisée par une région à deux dimensions avec un axe qui représente l'âge du système et un axe qui représente son usage. Dans le cas des voitures par exemple, une dimension représente l'âge de la voiture (le temps) et l'autre dimension représente le nombre de kilomètres parcourus (l'usage). La garantie prend fin à partir du moment où l'une des deux variables (âge ou usage) atteint la limite contractuelle. Ces stratégies bidimensionnelles ont été traitées par plusieurs chercheurs tel que nous l'avions décrit dans la revue de la littérature (§ I.2.3).

Dans ce qui suit, nous développerons un modèle mathématique pour étudier l'opportunité apportée par la garantie étendue bidimensionnelle des points de vue du consommateur et du fabricant. Nous exprimerons le coût total de maintenance encouru par le consommateur et par le fabricant durant le cycle de vie du produit afin d'aider le consommateur et le fabricant à décider quant à l'adoption ou non d'une garantie étendue bidimensionnelle, ceci pour différentes politiques de maintenance qui seraient adoptées pour le produit.

Pour l'analyse des garanties bidimensionnelles, les défaillances des systèmes sont considérées comme des points 'aléatoires' dans la région de garantie. Dans la littérature, deux approches différentes ont été considérées pour modéliser les défaillances du système :

Approche bidimensionnelle : les instants des défaillances du système suivent une distribution bivariée.

Approche unidimensionnelle : le problème bidimensionnel est réduit à un problème unidimensionnel en modélisant l'usage du système comme étant une fonction aléatoire de l'âge.

Dans ce chapitre, nous adopterons la deuxième approche (unidimensionnelle) en considérant un comportement déterministe des usagers.

IV.3. Modèle mathématique

IV.3.1. Notations et hypothèses de travail

Nous utiliserons les notations suivantes pour caractériser les deux dimensions de la région de garantie:

re: taux d'usage nominal par unité de temps,

Ai: taux d'usage du produit pour un type d'utilisateur (i) exprimé en unité d'usage (tu)/unité de temps (th) (par exemple : le nombre de kilomètres par année dans le cas d'une automobile),

K: durée du cycle de vie du produit,

Kw: durée de la période de garantie de base,

Ke: durée de la période de garantie y compris la garantie étendue,

L: usage nominal du système à la fin de son cycle de vie,

Lw: usage nominal du système à la fin de la période de garantie de base,

Le: usage nominal du système à la fin de la période de garantie étendue,

Δh : période entre deux actions de maintenance préventive,

Δu : usage entre deux actions de maintenance préventive $\Delta u = \Delta h * re$,

Cr : coût moyen d'une action de réparation minimale suite à l'occurrence d'une panne,

Cm : coût moyen d'une action de maintenance préventive payé par le consommateur, on suppose que ce coût ne varie pas avec l'efficacité des actions de maintenance préventive.

Nous considérons des produits sujets à des défaillances aléatoires, vendus avec une région de garantie bidimensionnelle de base [Kw, Lw] avec la possibilité d'être étendue jusqu'à [Ke, Le] pour un coût supplémentaire Cw payé par le consommateur au moment de l'achat du produit (figure IV.1).

Le taux d'usage nominal (re) est le taux d'usage pour lequel l'usage (exemple : le nombre de kilomètres) défini dans le contrat de garantie est atteint par le consommateur exactement à la fin de la période contractuelle de garantie. On considère également ici que les utilisateurs ont un comportement déterministe dans le sens que chaque utilisateur est caractérisé par un taux d'usage connu (Ai).

Nous classons les utilisateurs en deux catégories (figure V.1) :

- Utilisateurs agressifs : ce sont les utilisateurs ayant un taux d'usage (Ai>re), pour lesquels l'usage (Lw) (respectivement (Le)) défini dans leur contrat de garantie est atteint avant l'expiration de la période (Kw) de la garantie de base (respectivement (Ke) pour la garantie étendue).
- Utilisateurs modérés : ce sont les utilisateurs avec un taux d'usage (Ai<re), pour ce type d'utilisateurs l'usage (Lw) (respectivement (Le)) défini dans leur contrat de garantie est atteint après l'expiration de la période (Kw) de la garantie de base (respectivement (Ke) pour la garantie étendue).

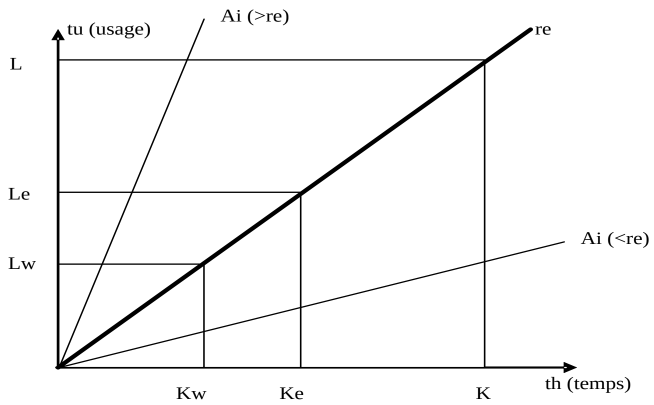


Figure IV.1: Régions de garantie bidimensionnelle avec différents taux d'usage

Nous limitons notre étude au cas où la période de garantie de base et la période de garantie étendue sont similaires du point de vue de la forme, ceci nous conduit à exprimer le taux d'usage nominal comme suit:

$$re = \frac{Lw}{Kw} = \frac{Le}{Ke} = \frac{L}{K} \tag{IV.1}$$

Des réparations minimales sont effectuées suite à chaque défaillance du système durant la période de garantie de base et la période de garantie étendue. Ces actions sont payées par le fabricant durant la période de garantie de base et étendue et par le consommateur durant la période post garantie.

On considère également que des actions de maintenance préventive sont effectuées périodiquement aux instants τj, j=1, 2,…; avec $\tau_0 = 0$. Le coût de ces actions est toujours supporté par le consommateur. Nous modélisons leur effet à l'aide du modèle de réduction d'intensité arithmétique (ARI). Nous utilisons pour cela l'approche de **Chan and Shaw (**1993) selon laquelle les actions de maintenance préventive réduisent le taux de défaillance du système d'une quantité (ρ) proportionnelle au taux de défaillance actuel.

Le modèle correspondant est exprimé par :

$$r_m(t) = r_0(t) - \rho \sum_{j=0}^{N_t - 1} (1-\rho) r_0\left(\tau_{N_t - j}\right) \tag{IV.2}$$

Avec

$0 < \rho < 1$

N_t : Nombre d'actions de maintenance préventive réalisées jusqu'à l'instant t

r_0 : fonction du taux de défaillance du système pour le cas sans maintenance préventive.

Le tableau IV.1 présente l'expression du nombre d'actions de maintenance préventive réalisées durant chaque intervalle du cycle de vie du produit en termes de temps et en termes d'usage.

Ai<re

Nombre	N_1	N_3	N_5	N_7	N_9	N_{11}
Intervalle	$[Kw, K]$	$[Ke, K]$	$[0, Kw]$	$[0, Ke]$	$[0, K]$	$[Kw, Ke]$
Valeur	$\left\lfloor \frac{K - Kw}{\Delta_h} \right\rfloor$	$\left\lfloor \frac{K - Ke}{\Delta_h} \right\rfloor$	$\left\lfloor \frac{Kw}{\Delta_h} \right\rfloor$	$\left\lfloor \frac{Ke}{\Delta_h} \right\rfloor$	$\left\lfloor \frac{K}{\Delta_h} \right\rfloor$	$\left\lfloor \frac{Ke - Kw}{\Delta_h} \right\rfloor$

Ai>re

Nombre	N_2	N_4	N_6	N_8	N_{10}	N_{12}

Intervalle	$[Lw, L]$	$[Le, L]$	$[0, Lw]$	$[0, Le]$	$[0, L]$	$[Lw, Le]$
Valeur	$\left\lfloor \frac{L-Lw}{\Delta_u} \right\rfloor$	$\left\lfloor \frac{L-Le}{\Delta_u} \right\rfloor$	$\left\lfloor \frac{Lw}{\Delta_u} \right\rfloor$	$\left\lfloor \frac{Le}{\Delta_u} \right\rfloor$	$\left\lfloor \frac{L}{\Delta_u} \right\rfloor$	$\left\lfloor \frac{Le-Lw}{\Delta_u} \right\rfloor$

Tableau IV.1. Nombre d'actions de maintenance préventive durant chaque intervalle

IV.3.2. Détermination du taux de défaillance du système

Dans la suite nous développons un modèle mathématique pour déterminer l'intervalle de compromis pour le coût de la garantie étendue en tenant compte des options de maintenance déjà adoptées et décrites dans les chapitres précédents et qui sont brièvement rappelées ci-dessous:

- **Option I :** pas d'actions de maintenance préventive durant $[0, L]$
- **Option II** : maintenance préventive périodique durant $[0, L]$
- **Option III** : maintenance préventive périodique durant la période post garantie se terminant à la fin du cycle de vie du produit. Pour cette option on considérera deux possibilités en ce qui concerne la réalisation des actions de maintenance préventive :
  - Option III-1 : Les actions de maintenance préventive sont effectuées dés que la période de garantie de base prend fin si le consommateur n'accepte pas de payer pour une extension de la garantie.
  - Option III-2 : Les actions de maintenance préventive commencent après l'achèvement de la période de garantie étendue si le consommateur accepte de payer pour une extension de garantie.
- **Option IV :** Maintenance préventive périodique durant la période de garantie du système. Pour cette option on considèrera les deux cas suivants :
  - Option IV-1 : les actions de maintenance préventive ne sont appliquées que durant la période de garantie de base. Elles ne continuent pas durant la période de garantie étendue pour le cas où le consommateur ne paye pas pour la garantie étendue.
  - Option IV-2 : les actions de maintenance préventive sont effectuées durant toute la période de garantie et sont étendue jusqu'à l'expiration de la garantie étendue si le consommateur accepte d'acheter l'extension de garantie.

Les expressions du taux de défaillance $r_m(t)$ correspondant à chacune des options énumérées ci-dessus sont données comme suit pour chaque catégorie d'utilisateurs (modéré ou agressif):

- Option I :

Utilisateurs modérés (Ai<re)

$$r_m(t_h) = r_0(t_h) \tag{IV.3}$$

Utilisateurs agressifs (Ai>re):

$$r_m(t_u) = r_0(t_u) \tag{IV.4}$$

- Option II :

Utilisateurs modérés (Ai<re)

$$r_m(t) = \begin{cases} r_0(t_h) & si\ t_h \le \tau \\ r_0(t_h) - \rho.\sum_{j=0}^{N_t-1}(1-\rho)^j\ r_0(\tau_{N_t-j}) & si\ \tau_1 < t_h \le \tau_{N_9} \\ r_0(t_h) - \rho.\sum_{j=0}^{N_9-1}(1-\rho)^j\ r_0(\tau_{N_9-j}) & si\ t_h > \tau_{N_9} \end{cases} \tag{IV.5}$$

Utilisateurs agressifs (Ai>re):

$$r_m(t) = \begin{cases} r_0(t_u) & si\ t_u \le \tau_1 \\ r_0(t_u) - \rho.\sum_{j=0}^{N_t-1}(1-\rho)^j\ r_0(\tau_{N_t-j}) & si\ \tau_1 < t_u \le \tau_{N_{10}} \\ r_0(t_u) - \rho.\sum_{j=0}^{N_{10}-1}(1-\rho)^j\ r_0(\tau_{N_{10}-j}) & si\ t_u > \tau_{N_{10}} \end{cases} \tag{IV.6}$$

- Option III-1 :

Utilisateurs modérés (Ai<re)

$$r_m(t) = \begin{cases} r_0(t_h) & si\ t_h \le \tau_1 \\ r_0(t_h) - \rho.\sum_{j=0}^{N_t-1}(1-\rho)^j\ r_0(\tau_{N_t-j}) & si\ \tau_1 < t_h \le \tau_{N_1} \\ r_0(t_h) - \rho.\sum_{j=0}^{N_1-1}(1-\rho)^j\ r_0(\tau_{N_1-j}) & si\ t_h > \tau_{N_1} \end{cases} \tag{IV.7}$$

Utilisateurs agressifs (Ai>re):

$$r_m(t)=\begin{cases} r_0(t_h) & si\ t_h \le \tau_1 \\ r_0(t_h)-\rho.\sum_{j=0}^{N_t-1}(1-\rho)^j\ r_0(\tau_{N_t-j}) & si\ \tau_1 < t_h \le \tau_{N_3} \\ r_0(t_h)-\rho.\sum_{j=0}^{N_3-1}(1-\rho)^j\ r_0(\tau_{N_3-j}) & si\ t_h > \tau_{N_3} \end{cases} \tag{IV.8}$$

- Option III-2 :

Utilisateurs modérés (Ai<re)

$$r_m(t)=\begin{cases} r_0(t_h) & si\ t_h \le \tau_1 \\ r_0(t_h)-\rho.\sum_{j=0}^{N_t-1}(1-\rho)^j\ r_0(\tau_{N_t-j}) & si\ \tau_1 < t_h \le \tau_{N_3} \\ r_0(t_h)-\rho.\sum_{j=0}^{N_3-1}(1-\rho)^j\ r_0(\tau_{N_3-j}) & si\ t_h > \tau_{N_3} \end{cases} \tag{IV.9}$$

Utilisateurs agressifs (Ai>re):

$$r_m(t)=\begin{cases} r_0(t_u) & si\ t_u \le \tau_1 \\ r_0(t_u)-\rho.\sum_{j=0}^{N_t-1}(1-\rho)\ r_0(\tau_{N_t-j}) & si\ t_u \le \tau_1 \\ r_0(t_u)-\rho.\sum_{j=0}^{N_6-1}(1-\rho)\ r_0(\tau_{N_6-j}) & si\ t_u \ge \tau_{N_6} \end{cases} \tag{IV.10}$$

- Option IV-1 :

Utilisateurs modérés (Ai<re)

$$r_m(t)=\begin{cases} r_0(t_h) & si\ t_h \le \tau_1 \\ r_0(t_h)-\rho.\sum_{j=0}^{N_t-1}(1-\rho)^j\ r_0(\tau_{N_t-j}) & si\ \tau_1 \le t_h \le \tau_{N_5} \\ r_0(t_h)-\rho.\sum_{j=0}^{N_5-1}(1-\rho)^j\ r_0(\tau_{N_5-j}) & si\ t_h \ge \tau_{N_5} \end{cases} \tag{IV.11}$$

Utilisateurs agressifs (Ai>re):

$$r_m(t)=\begin{cases} r_0(t_u) & si\ t_u \le \tau_1 \\ r_0(t_u)-\rho.\sum_{j=0}^{N_t-1}(1-\rho)\ r_0(\tau_{N_t-j}) & si\ t_u \le \tau_1 \\ r_0(t_u)-\rho.\sum_{j=0}^{N_6-1}(1-\rho)\ r_0(\tau_{N_6-j}) & si\ t_u \ge \tau_{N_6} \end{cases} \tag{IV.12}$$

- Option IV-2 :

Utilisateurs modérés (Ai<re)

$$r_m(t)=\begin{cases} r_0(t_h) & si\ t_h \le \tau_1 \\ r_0(t_h)-\rho.\sum\limits_{j=0}^{N_t-1}(1-\rho)^j\ r_0(\tau_{N_t-j}) & si\ \tau_1 \le t_h \le \tau_{N_7} \\ r_0(t_h)-\rho.\sum\limits_{j=0}^{N_7-1}(1-\rho)^j\ r_0(\tau_{N_7-j}) & si\ t_h \ge \tau_{N_7} \end{cases} \qquad (IV.13)$$

Utilisateurs agressifs (Ai>re):

$$r_m(t)=\begin{cases} r_0(t_u) & si\ t_u \le \tau_1 \\ r_0(t_u)-\rho.\sum\limits_{j=0}^{N_t-1}(1-\rho)^j\ r_0(\tau_{N_t-j}) & si\ \tau_1 \le t_u \le \tau_{N_8} \\ r_0(t_u)-\rho.\sum\limits_{j=0}^{N_8-1}(1-\rho)^j\ r_0(\tau_{N_8-j}) & si\ t_u \ge \tau_{N_8} \end{cases} \qquad (IV.14)$$

Pour chaque option, les instants des actions successives de maintenance préventive (τ_i) peuvent être exprimés comme suit (tableau IV.2)

Option	τ_k	
II IV-1 IV-2	$\tau_k = N_j.\Delta_h$	si Ai<re
	$\tau_k = N_j.\Delta_u$	si Ai>re
III-1	$\tau_k = (N_j.\Delta_h)+Kw$	si Ai<re
	$\tau_k = (N_j.\Delta_u)+Lw$	si Ai>re
III-2	$\tau_k = (N_j.\Delta_h)+Ke$	si Ai<re
	$\tau_k = (N_j.\Delta_u)+Le$	si Ai>re

Tableau IV.2: Les instants des actions de maintenance préventive pour chaque option de maintenance

IV.3.3. Détermination du coût maximum que le consommateur devrait payer pour la garantie étendue

Dans ce qui suit, nous désignerons par C_{Xn} et C_{Xy}, les coûts encourus pour le consommateur pour l'option X(X=I, II, III-1, III-2, IV-1 et IV-2) respectivement pour le cas sans garantie étendue (n) et le cas avec garantie étendue (y).

Nous déterminons ensuite la condition qui doit être satisfaite pour que l'adoption de la garantie étendue soit économiquement avantageuse pour le consommateur. Cette condition est basée sur le fait que l'achat de la garantie étendue serait bénéfique pour le consommateur si le total des coûts encourus, au cours du cycle de vie du produit (C_{Xy}), serait inférieur à ce que ça lui coûterait au cas où il n'achète pas la garantie étendue (C_{Xn}). Soit Cw le coût maximum que le consommateur devrait payer pour la garantie étendue. Pour chaque option de maintenance considérée, ce seuil de coût de garantie étendue (Cw) peut être exprimé comme suit:

- Option I
  - Cas sans garantie étendue :

$$\left| \begin{array}{l} \rightarrow si\ A_i \leq re \\ C_{In} = \begin{cases} 0 & pour \quad t_h \in [0, Kw) \\ C_r \int\limits_{Kw}^{K} r_m(t_h)dt_h & pour \quad t_h \in [Kw, K) \end{cases} \\ \rightarrow si\ Ai \geq re \\ C_{In} = \begin{cases} 0 & pour \quad t_u \in [0, Lw) \\ C_r \int\limits_{Lw}^{L} r_m(t_u)dt_u & pour \quad t_u \in [Lw, L) \end{cases} \end{array} \right. \qquad (IV.15)$$

  - Cas avec garantie étendue :

$$\left| \begin{array}{l} \rightarrow si\ A_i \leq re \\ C_{Iy} = \begin{cases} 0 & pour \quad t_h \in [0, Ke) \\ C_r \int\limits_{Ke}^{K} r_m(t_h)dt_h & pour \quad t_h \in [Ke, K) \end{cases} \\ \rightarrow si\ Ai \geq re \\ C_{Iy} = \begin{cases} 0 & pour \quad t_u \in [0, Le) \\ C_r \int\limits_{Le}^{L} r_m(t_u)dt_u & pour \quad t_u \in [Le, L) \end{cases} \end{array} \right. \qquad (IV.16)$$

Ainsi, le prix maximum Cw que le consommateur pourrait payer pour la garantie étendue supplémentaire de durée (We–W) devrait satisfaire la condition suivante.

$$C_{Iy} + Cw \leq C_{In}$$

$$\left| \begin{array}{l} \rightarrow si\ A_i \leq re \\ Cw \leq Cr\left[\int_{Kw}^{K} r_m(t_h)dt_h - \int_{Ke}^{K} r_m(t_h)dt_h \right] \\ \rightarrow si\ Ai \geq re \\ Cw \leq Cr\left[\int_{Lw}^{L} r_m(t_u)dt_u - \int_{Le}^{L} r_m(t_u)dt_u \right] \end{array} \right. \quad \text{(IV.17)}$$

- Option II
  - Cas sans garantie étendue :

$$\left| \begin{array}{l} \rightarrow si\ A_i \leq re \\ C_{IIn} = \begin{cases} N_5.Cm & pour \quad t_h \in [0, Kw) \\ C_r \int_{Kw}^{K} r_m(t_h)dt_h + N_1.Cm & pour \quad t_h \in [Kw, K) \end{cases} \\ \rightarrow si\ Ai \geq re \\ C_{IIn} = \begin{cases} N_6.Cm & pour \quad t_u \in [0, Lw) \\ C_r \int_{Lw}^{L} r_m(t_u)dt_u + N_2.Cm & pour \quad t_u \in [Lw, L) \end{cases} \end{array} \right. \quad \text{(IV.18)}$$

  - Cas avec garantie étendue :

$$\left| \begin{array}{l} \rightarrow si\ A_i \leq re \\ C_{IIy} = \begin{cases} N_7.Cm & pour \quad t_h \in [0, Ke) \\ C_r \int_{Ke}^{K} r_m(t_h)dt_h + N_3.Cm & pour \quad t_h \in [Ke, K) \end{cases} \\ \rightarrow si\ Ai \geq re \\ C_{IIy} = \begin{cases} N_8.Cm & pour \quad t_u \in [0, Le) \\ C_r \int_{Le}^{L} r_m(t_u)dt_u + N_4.Cm & pour \quad t_u \in [Le, L) \end{cases} \end{array} \right. \quad \text{(IV.19)}$$

Par conséquent, le prix maximum Cw que le consommateur pourrait payer pour la garantie étendue supplémentaire de durée (We–W) devrait satisfaire la condition suivante.

$$C_{IIy} + Cw \leq C_{IIn}$$

$$\left|\begin{array}{l} \rightarrow si\ A_i \le re \\ Cw \le Cr\left[\int_{Kw}^{K} r_m(t_h)dt_h - \int_{Ke}^{K} r_m(t_h)dt_h\right] + Cm\left[N_5 + N_1 - N_7 - N_3\right] \\ \rightarrow si\ Ai \ge re \\ Cw \le Cr\left[\int_{Lw}^{L} r_m(t_u)dt_u - \int_{Le}^{L} r_m(t_u)dt_u\right] + Cm\left[N_6 + N_2 - N_8 - N_4\right] \end{array}\right. \tag{IV.20}$$

- Option III-1
  - Cas sans garantie étendue :

$$\left|\begin{array}{l} \rightarrow si\ A_i \le re \\ C_{III-1n} = \begin{cases} 0 & pour \quad t_h \in [0, Kw) \\ C_r \int_{Kw}^{K} r_m(t_h)dt_h + N_1.Cm & pour \quad t_h \in [Kw, K) \end{cases} \\ \rightarrow si\ Ai \ge re \\ C_{III-1n} = \begin{cases} 0 & pour \quad t_u \in [0, Lw) \\ C_r \int_{Lw}^{L} r_m(t_u)dt_u + N_2.Cm & pour \quad t_u \in [Lw, L) \end{cases} \end{array}\right. \tag{IV.21}$$

  - Cas avec garantie étendue :

$$\left|\begin{array}{l} \rightarrow si\ A_i \le re \\ C_{III-1y} = \begin{cases} N_{11}.Cm & pour \quad t_h \in [0, Ke) \\ C_r \int_{Ke}^{K} r_m(t_h)dt_h + N_3.Cm & pour \quad t_h \in [Ke, K) \end{cases} \\ \rightarrow si\ Ai \ge re \\ C_{III-1y} = \begin{cases} N_{12}.Cm & pour \quad t_u \in [0, Le) \\ C_r \int_{Le}^{L} r_m(t_u)dt_u + N_4.Cm & pour \quad t_u \in [Le, L) \end{cases} \end{array}\right. \tag{IV.22}$$

Ainsi, le prix maximum Cw que le consommateur pourrait payer pour la garantie étendue supplémentaire de durée (We–W) devrait satisfaire la condition suivante.

$$\left|\begin{array}{l} \rightarrow si\ A_i \le re \\ Cw \le Cr\left[\int_{Kw}^{K} r_m(t_h)\,dt_h - \int_{Ke}^{K} r_m(t_h)\,dt_h\right] \\ \rightarrow si\ A_i > re \\ Cw \le Cr\left[\int_{Lw}^{L} r_m(t_u)\,dt_u - \int_{Le}^{L} r_m(t_u)\,dt_u\right] + Cm\left[N_2 - N_{12} - N_4\right] \end{array}\right. \tag{IV.23}$$

- Option III-2
    - Cas sans garantie étendue :

$$\left| \begin{array}{l} \rightarrow si\ A_i \leq re \\ C_{III-2n} = \begin{cases} 0 & pour \quad t_h \in [0, Kw) \\ C_r \int_{Kw}^{K} r_m(t_h) dt_h + N_1.Cm & pour \quad t_h \in [Kw, K) \end{cases} \\ \rightarrow si\ Ai \geq re \\ C_{III-2n} = \begin{cases} 0 & pour \quad t_u \in [0, Lw) \\ C_r \int_{Lw}^{L} r_m(t_u) dt_u + N_2.Cm & pour \quad t_u \in [Lw, L) \end{cases} \end{array} \right.$$

(IV.24)

- Cas avec garantie étendue :

$$\left| \begin{array}{l} \rightarrow si\ A_i \leq re \\ C_{III-2y} = \begin{cases} 0 & pour \quad t_h \in [0, Ke) \\ C_r \int_{Ke}^{K} r_m(t_h) dt_h + N_3.Cm & pour \quad t_h \in [Ke, K) \end{cases} \\ \rightarrow si\ Ai \geq re \\ C_{III-2y} = \begin{cases} 0 & pour \quad t_u \in [0, Le) \\ C_r \int_{Le}^{L} r_m(t_u) dt_u + N_4.Cm & pour \quad t_u \in [Le, L) \end{cases} \end{array} \right. \tag{IV.25}$$

En conséquence, le prix maximum Cw que le consommateur pourrait payer pour la garantie étendue supplémentaire de durée (We–W) devrait satisfaire la condition suivante.

$$C_{III-2y} + Cw \leq C_{III-2n}$$

$$\left| \begin{array}{l} \rightarrow si\ A_i \leq re \\ Cw \leq Cr\left[\int_{Kw}^{K} r_m(t_h)\, dt_h - \int_{Ke}^{K} r_m(t_h)\, dt_h \right] + Cm[N_1 - N_3] \\ \rightarrow si\ A_i > re \\ Cw \leq Cr\left[\int_{Lw}^{L} r_m(t_u)\, dt_u - \int_{Le}^{L} r_m(t_u)\, dt_u \right] + Cm[N_2 - N_4] \end{array} \right. \tag{IV.26}$$

- Option IV-1
  - Cas sans garantie étendue :

$$\left|\begin{array}{l} \rightarrow si\ A_i \leq re \\ C_{IV-1n} = \begin{cases} N_5.Cm & pour \quad t_h \in [0, Kw) \\ C_r \int_{Kw}^{K} r_m(t_h)dt_h & pour \quad t_h \in [Kw, K) \end{cases} \\ \rightarrow si\ Ai \geq re \\ C_{IV-1n} = \begin{cases} N_6.Cm & pour \quad t_u \in [0, Lw) \\ C_r \int_{Lw}^{L} r_m(t_u)dt_u & pour \quad t_u \in [Lw, L) \end{cases} \end{array}\right. \qquad (IV.27)$$

  - Cas avec garantie étendue :

$$\left|\begin{array}{l} \rightarrow si\ A_i \leq re \\ C_{IV-1y} = \begin{cases} N_5.Cm & pour \quad t_h \in [0, Ke) \\ C_r \int_{Ke}^{K} r_m(t_h)dt_h & pour \quad t_h \in [Ke, K) \end{cases} \\ \rightarrow si\ Ai \geq re \\ C_{IV-1y} = \begin{cases} N_6.Cm & pour \quad t_u \in [0, Le) \\ C_r \int_{Le}^{L} r_m(t_u)dt_u & pour \quad t_u \in [Le, L) \end{cases} \end{array}\right. \qquad (IV.28)$$

Ainsi, le prix maximum Cw que le consommateur pourrait payer pour la garantie étendue supplémentaire de durée (We–W) devrait satisfaire la condition suivante.

$$C_{IV-1y} + Cw \leq C_{IV-1n}$$

$$\left|\begin{array}{l} \rightarrow si\ A_i \leq re \\ Cw \leq Cr\left[\int_{Kw}^{K} r_m(t_h)\,dt_h - \int_{Ke}^{K} r_m(t_h)\,dt_h \right] \\ \rightarrow si\ A_i > re \\ Cw \leq Cr\left[\int_{Lw}^{L} r_m(t_u)\,dt_u - \int_{Le}^{L} r_m(t_u)\,dt_u \right] \end{array}\right. \qquad (IV.29)$$

- Option IV-2
    - Cas sans garantie étendue :

$$
\begin{array}{|l}
\rightarrow si\ A_i \leq re \\
C_{IV-2n} = \begin{cases} N_5.Cm & pour \quad t_h \in [0, Kw) \\ C_r \int_{Kw}^{K} r_m(t_h)dt_h & pour \quad t_h \in [Kw, K) \end{cases} \\
\rightarrow si\ Ai \geq re \\
C_{IV-2n} = \begin{cases} N_6.Cm & pour \quad t_u \in [0, Lw) \\ C_r \int_{Lw}^{L} r_m(t_u)dt_u & pour \quad t_u \in [Lw, L) \end{cases}
\end{array} \tag{IV.30}
$$

- Cas avec garantie étendue :

$$
\begin{array}{|l}
\rightarrow si\ A_i \leq re \\
C_{IV-1y} = \begin{cases} N_7.Cm & pour \quad t_h \in [0, Ke) \\ C_r \int_{Ke}^{K} r_m(t_h)dt_h & pour \quad t_h \in [Ke, K) \end{cases} \\
\rightarrow si\ Ai \geq re \\
C_{IV-1y} = \begin{cases} N_8.Cm & pour \quad t_u \in [0, Le) \\ C_r \int_{Le}^{L} r_m(t_u)dt_u & pour \quad t_u \in [Le, L) \end{cases}
\end{array} \tag{IV.31}
$$

De ce fait, le prix maximum Cw que le consommateur pourrait payer pour la garantie étendue supplémentaire de durée (We–W) devrait satisfaire la condition suivante.

$$C_{IV-2y} + Cw \leq C_{IV-2n}$$

$$
\begin{array}{|l}
\rightarrow si\ A_i \leq re \\
Cw \leq Cr\left[\int_{Kw}^{K} r_m(t_h)\,dt_h - \int_{Ke}^{K} r_m(t_h)\,dt_h\right] + Cm[N_5 - N_7] \\
\rightarrow si\ A_i > re \\
Cw \leq Cr\left[\int_{Lw}^{L} r_m(t_u)\,dt_u - \int_{Le}^{L} r_m(t_u)\,dt_u\right] + [N_6 - N_8]
\end{array} \tag{IV.32}
$$

IV.3.4. Détermination du cout minimum que le fabricant peut accepter pour vendre la garantie étendue

Nous établissons ci-dessous, la condition qui doit être satisfaite de telle sorte que la vente de la garantie étendue bidimensionnelle soit profitable pour le fabricant. Cette condition est basée sur le fait que la vente de la garantie étendue serait bénéfique pour le fabricant si le total des coûts encourus, au cours du cycle de vie du produit (My), seraient inférieur à ce que ça lui coûterait au cas où il ne la vend pas (Mn). Pour chaque option de maintenance le coût de garantie étendue (Cw) peut être exprimé comme suit:

- Cas sans garantie étendue :

$$\left|\begin{array}{l} \rightarrow si\ A_i \leq re \\ M_n = \begin{cases} Cr \int_0^{Kw} r_m(t_h)dt_h & pour \quad t_h \in [0, Kw) \\ 0 & pour \quad t_h \in [Kw, K) \end{cases} \\ \rightarrow si\ Ai \geq re \\ M_n = \begin{cases} Cr \int_0^{Lw} r_m(t_u)dt_u & pour \quad t_u \in [0, Lw) \\ 0 & pour \quad t_u \in [Lw, L) \end{cases} \end{array}\right. \tag{IV.33}$$

- Cas avec garantie étendue :

$$\left|\begin{array}{l} \rightarrow si\ A_i \leq re \\ M_y = \begin{cases} C_r \int_0^{Ke} r_m(t_h)dt_h & pour \quad t_h \in [0, Ke) \\ 0 & pour \quad t_h \in [Ke, K) \end{cases} \\ \rightarrow si\ Ai \geq re \\ M_y = \begin{cases} C_r \int_0^{Le} r_m(t_u)dt_u & pour \quad t_u \in [0, Le) \\ 0 & pour \quad t_u \in [Le, L) \end{cases} \end{array}\right. \tag{IV.34}$$

Ainsi, le prix maximum Cw que le consommateur pourrait payer pour la garantie étendue supplémentaire de durée (We–W) devrait satisfaire la condition suivante.

$$M_y - Cw \leq M_n$$

$$\left|\begin{array}{l} \rightarrow si\ A_i \leq re \\ Cw \geq Cr\left[\int_0^{Ke} r_m(t_h)\, dt_h - \int_0^{Kw} r_m(t_h)\, dt_h\right] \\ \rightarrow si\ A_i > re \\ Cw \leq Cr\left[\int_0^{Le} r_m(t_u)\, dt_u - \int_0^{Lw} r_m(t_u)\, dt_u\right] \end{array}\right. \tag{IV.35}$$

IV.4. Exemple numérique

Afin d'illustrer notre approche, nous considérons une situation avec des données d'entrée arbitrairement choisies. Les unités considérées pour l'âge et l'usage sont exprimées respectivement en années et en multiples de 1000 km. Nous considérons un système de transport avec une période de garantie de base Kw = 2 années qui peut être prolongée d'un an jusqu'à Ke = 3 années. Pour un cycle de vie du système K = 9 années. L'usage correspondant du système est Lw = 12, Le = 18 et L = 54 impliquant une utilisation nominale par unité de temps re = 6. Les actions de maintenance préventive sont effectuées selon une périodicité de Δ = 0,33 années pour un coût Cm = 100 unités monétaires payé par le consommateur. Le coût d'une réparation minimale suite aux pannes est Cr = 200 unités monétaires.

On suppose que les défaillances du système suivent une loi de Weibull avec les paramètres suivants: paramètre de forme $\alpha = 2.0$ et paramètre d'échelle $\lambda = 1.0$. Le facteur de réduction du taux de défaillance suite à chaque action de maintenance préventive est $\rho=0.5$.

Nous avons appliqué le modèle avec les données d'entrée mentionnés ci-dessus. Nous avons examiné, pour chaque option de maintenance et pour les deux catégories de consommateurs (agressifs et modérés), l'existence d'un intervalle de compromis (gagnant-gagnant) [a, b] où 'a' est le prix minimum à partir duquel le fabricant devrait vendre la garantie étendue, et 'b' représente le coût supplémentaire maximum que le consommateur devrait payer pour la garantie étendue lors de l'achat du produit. Le tableau IV.3 illustre les résultats obtenus pour l'exemple traité.

	Option I	**Option II**	**Option III-1**	**Option III-2**	**Option IV-1**	**Option IV-2**
Utilisateurs modérés	[1000,1000]	[213.57, 224.92]	Ø	Ø	Ø	[341.69, 3003.11]
Utilisateurs agressifs	[4000,4000]	[854.28, 899.69]	Ø	Ø	Ø	[1155.81, 11112.44]

Tableau IV.3: Intervalle de compromis pour le coût de garantie étendue pour les deux types d'utilisateurs pour chaque option de maintenance

A partir des résultats obtenus et illustrés dans le tableau ci-dessus, par exemple, on peut remarquer que, pour les options II et IV-2 l'intervalle de compromis pour le coût de la garantie étendue existe pour les utilisateurs agressifs et modérés. Pour l'option IV-2 et pour les utilisateurs modérés, le prix de garantie étendue minimum que le fabricant pourrait adopter pour vendre la garantie étendue est égal à 341,69 unités monétaires et le montant supplémentaire maximum que le consommateur ne devrait pas dépasser pour payer pour la garantie étendue est de 3003,11 unités monétaires.

D'autre part, il est intéressant de remarquer que pour les deux options (II, IV-2), les deux seuils de coût sont plus élevés lorsque le comportement des usagers est plus agressif. Ceci est évidemment dû au fait qu'avec un utilisateur agressif, le taux de défaillance augmente et les coûts de maintenance sont donc plus élevés.

Nous pouvons également noter que pour l'option I, il n'y a pas de zone de compromis pour le coût de garantie étendue bidimensionnelle. Pour cette option, on peut remarquer que l'intervalle gagnant-gagnant est réduit à une valeur unique identique pour les deux points de vue. Si le coût de garantie étendue est supérieur à 1000 unités monétaires, l'adoption de la garantie étendue ne serait pas avantageuse pour le consommateur; cette conclusion est également valable pour le fabricant si le coût de garantie étendue est inférieur à 1000 unités monétaires. Le seuil de valeurs obtenues pour le consommateur et le fabricant est le même en raison du fait que ces bornes correspondent aux coûts des réparations minimales effectuées au cours de la garantie étendue. Puisque pour cette option on ne fait pas de maintenance préventive, le nombre de réparations minimales dans cette région ($[K_w,K_e]\times[L_w,L_e]$) reste évidemment le même avec ou sans la garantie étendue.

Pour les options III-1, III-2 et IV-1, les actions de maintenance préventive sont effectuées pendant une courte période sur la durée de cycle de vie du système. Par conséquent, ces actions n'ont presque aucun effet sur le taux de défaillance du système. Par conséquent, on peut remarquer l'inexistence d'une zone de compromis pour la garantie étendue pour ces options. Cela est du au fait que le coût total de maintenance encouru par le fabricant dans la région de garantie étendue bidimensionnelle est beaucoup plus élevé que le coût total de maintenance encouru par le consommateur.

IV.5. Etude des effets de la variation de l'efficacité des actions de maintenance préventive

Dans cette section nous cherchons à étudier l'effet de la variation de l'efficacité des actions de maintenance préventive (variation du paramètre ρ) et par conséquent du nombre d'actions de réparation minimale durant le cycle de vie du produit, sur la décision du consommateur et du fabricant d'adopter ou non une garantie bidimensionnelle étendue.

On considère trois différentes valeurs de ρ :

$\rho =0.25$ $\rho =0.5$ $\rho =0.75$

On cherche à déterminer l'intervalle gagnant-gagnant représentant un compromis entre le fabricant et le consommateur en ce qui concerne le prix de la garantie étendue bidimensionnelle en variant le coût des actions de réparation de 20 unités monétaires à 500 unités monétaire pour les trois valeurs de ρ. La variation du paramètre (ρ) a une influence sur les coûts de garantie étendue pour les options II, III-2 et IV-2, les résultats obtenus sont regroupés dans les tableaux (IV.4, IV.5 et IV.6) ci-dessous pour différentes options de maintenance.

	ρ =0,5		ρ =0,25		ρ =0,75	
Cr	Utilisateurs modérés	Utilisateurs agressifs	Utilisateurs Modérés	Utilisateurs agressifs	Utilisateurs modérés	Utilisateurs agressifs
20,0	[21,4, 22,5]	[85,4, 90,0]	[42,4, 43,8]	[169,5, 175,2]	[12,4, 13,8]	[49,5, 55,2]
100,0	[106,8, 112,5]	[427,1, 449,8]	[211,9, 218,9]	[847,6, 875,8]	[61,9, 69,0]	[247,7, 276,1]
200,0	[213,6, 224,9]	[854,3, 899,7]	[423,8, 437,9]	[1695,2, 1751,6]	[123,9, 138,0]	[495,5, 552,1]
300,0	[320,4, 337,4]	[1281,4, 1349,5]	[635,7, 656,8]	[2542,8, 2627,4]	[185,8, 207,1]	[743,2, 828,2]
400,0	[427,1, 449,8]	[1708,6, 1799,4]	[847,6, 875,8]	[3390,4, 3503,2]	[247,7, 276,1]	[991,0, 1104,3]
500,0	[533,9, 562,3]	[2135,7, 2249,2]	[1059,5, 1094,7]	[4238,0, 4379,0]	[309,7, 345,1]	[1238,7, 1380,3]

Tableau IV.4: Effet de la variation de l'efficacité des actions de maintenance préventive pour l'option II

	ρ =0,5		ρ =0,25		ρ =0,75	
Cr	Utilisateurs modérés	Utilisateurs agressifs	Utilisateurs modérés	Utilisateurs agressifs	Utilisateurs Modérés	Utilisateurs agressifs
20	[34,2, 570,3]	[115,6, 1381,2]	[34,2, 566,5]	[115,6, 1366,0]	[34,2, 562,8]	[115,6, 1351,2]
100	[170,8, 1651,6]	[577,9, 5706,2]	[170,8, 1632,5]	[577,9, 5630,1]	[170,8, 1614,0]	[577,9, 5555,9]
200	[341,7, 3003,1]	[1155,8, 11112,4]	[341,7, 2965,0]	[1155,8, 10960,2]	[341,7, 2927,9]	[1155,8, 10811,7]
300	[512,5, 4354,7]	[1733,7, 16518,7]	[512,5, 4297,6]	[1733,7, 16290,3]	[512,5, 4241,9]	[1733,7, 16067,6]
400	[683,4, 5706,2]	[2311,6, 21924,9]	[683,4, 5630,1]	[2311,6, 21620,4]	[683,4, 5555,9]	[2311,6, 21323,4]

500	[854,2, 7057,8]	[2889,5, 27331,1]	[854,2, 6962,6]	[2889,5, 26950,4]	[854,2, 6869,8]	[2889,5, 26579,3]

Tableau IV.5: Effet de la variation de l'efficacité des actions de maintenance préventive pour l'option IV-2

D'après les résultats obtenus et illustrés dans les tableaux (IV.4 et IV.5) ci-dessus, on peut conclure dans le cas de l'exemple considéré que pour les options II et IV-2 l'intervalle de compromis pour la garantie étendue existe quelque soit le niveau d'efficacité des actions de maintenance préventive et le coût des actions de réparation minimale. On remarque aussi, que plus le niveau des actions de maintenance préventive est élevé (ρ augmente) plus le coût de la garantie étendue bidimensionnelle pour le consommateur et le fabricant diminue. Ceci est du au fait que plus on améliore le niveau d'efficacité des actions de maintenance préventive, plus le taux de défaillance du système diminue et par conséquent le nombre de réparations durant le cycle de vie du système.

	ρ =0,5		ρ =0,25		ρ =0,75	
Cr	Utilisateurs modérés	Utilisateurs agressifs	Utilisateurs modérés	Utilisateurs agressifs	Utilisateurs modérés	Utilisateurs agressifs
20	[100,0, 281,2]	Ø	[100,0, 279,3]	Ø	[100,0, 285,7]	Ø
100	Ø	Ø	Ø	Ø	Ø	Ø
200	Ø	Ø	Ø	Ø	Ø	Ø
300	Ø	Ø	Ø	Ø	Ø	Ø
400	Ø	Ø	Ø	Ø	Ø	Ø
500	Ø	Ø	Ø	Ø	Ø	Ø

Tableau IV.6: Effet de la variation de l'efficacité des actions de maintenance préventive pour l'option III-2

Pour l'option III-2, on remarque que pour de faibles coûts de réparation minimale (Cr<100) l'intervalle de compromis pour le coût de la garantie étendue bidimensionnelle existe pour les utilisateurs modérés et n'existe pas pour des utilisateurs agressifs. En effet, dans le cas des utilisateurs agressifs, le nombre de pannes est élevé augmentant ainsi la charge du fabricant. Ceci même pour une maintenance préventive plus efficace.

IV.5. Conclusion

Dans ce chapitre nous avons développé un modèle mathématique pour étudier l'opportunité apportée par la garantie étendue bidimensionnelle pour le consommateur et le fabricant. Ceci en considérant le comportement de l'usager comme étant déterministe. Nous avons traité ce problème avec différentes politiques de maintenance et en classant les utilisateurs en deux catégories (agressifs et modérés).

Une étude de sensibilité a été réalisée afin d'étudier l'effet de l'efficacité des actions de maintenance préventive sur la décision prise par le consommateur et le fabricant par rapport l'adoption de la garantie étendue bidimensionnelle.

Dans le chapitre suivant, nous traiterons le même problème d'adoption d'une garantie étendue bidimensionnelle en considérant une approche stochastique pour caractériser le comportement des usagers.

Chapitre 5

Adoption d'une région de garantie étendue bidimensionnelle avec approche stochastique du comportement de l'usager

Sommaire

V.1. Introduction

Ce chapitre présente une continuité de l'approche présentée dans le chapitre précédent. Dans cette partie nous proposons toujours un modèle d'aide à la décision pour l'adoption d'une région de garantie étendue bidimensionnelle mais en considérant cette fois-ci une approche stochastique du comportement des usagers. Une étude de l'effet de variation du type d'utilisateur sur sa décision d'adopter ou non la région de garantie étendue est réalisée afin d'étudier l'effet de la variation du comportement des usagers sur la décision de payer ou non pour une garantie étendue.

Ce travail a fait l'objet d'une communication **Bouguerra et al. (2012.c)**.

V.2. Stratégie de garantie étendue bidimensionnelle

V.2.1. Notations

Dans ce chapitre nous considérons les mêmes notations du chapitre précédent détaillées dans § (IV.3.1) et nous ajoutons les notations suivantes :

r : taux d'usage du produit. Il varie d'un utilisateur à un autre. Le taux d'usage est exprimé en unités d'usage / unités de temps. Il est défini comme une variable aléatoire positive avec une fonction de distribution $G(r)$

$\lambda_0(t/r)$: taux de panne du système sans maintenance préventive sachant son taux d'usage r,

$\lambda(t/r)$: taux de panne du système avec maintenance préventive sachant son taux d'usage r,

Xe : instant correspondant à l'usage du système à l'instant de fin de la période de garantie étendue pour un utilisateur r, $Xe = \frac{Le}{r}$

Xw : instant correspondant à l'usage du système à l'instant de fin de la période de garantie de base pour un utilisateur r, $Xw = \frac{Lw}{r}$

X : instant correspondant à l'usage du système à l'instant de fin de son cycle de vie pour un utilisateur r, $X = \frac{L}{r}$

Δ : période entre deux actions de maintenance préventives,

Ni : nombre d'actions de maintenance préventive dans un intervalle donné :

r<re

Nombre	n_1	n_3	n_5	n_7	n_9	n_{11}
Intervalle	$[Kw, K]$	$[Ke, K]$	$[0, Kw]$	$[0, Ke]$	$[0, K]$	$[Kw, Ke]$
Valeur	$\left\lfloor \frac{K-Kw}{\Delta} \right\rfloor$	$\left\lfloor \frac{K-Ke}{\Delta} \right\rfloor$	$\left\lfloor \frac{Kw}{\Delta} \right\rfloor$	$\left\lfloor \frac{Ke}{\Delta} \right\rfloor$	$\left\lfloor \frac{K}{\Delta} \right\rfloor$	$\left\lfloor \frac{Ke-Kw}{\Delta} \right\rfloor$

r>re

Nombre	n_2	n_4	n_6	n_8	n_{10}	n_{12}
Intervalle	$[Xw, X]$	$[Xe, X]$	$[0, Xw]$	$[0, Xe]$	$[0, X]$	$[Xw, Xe]$
Valeur	$\left\lfloor \frac{X-Xw}{\Delta} \right\rfloor$	$\left\lfloor \frac{X-Xe}{\Delta} \right\rfloor$	$\left\lfloor \frac{Xw}{\Delta} \right\rfloor$	$\left\lfloor \frac{Xe}{\Delta} \right\rfloor$	$\left\lfloor \frac{X}{\Delta} \right\rfloor$	$\left\lfloor \frac{Xe-Xw}{\Delta} \right\rfloor$

$\lfloor x \rfloor$: Partie entière d'un nombre réel.

Tableau V.1: nombre d'actions de maintenance préventive réalisées durant chaque intervalle

V.2.2. Stratégie de garantie

Le système est vendu avec une garantie FRW bidimensionnelle caractérisée par une région rectangulaire [Kw, Lw] avec la possibilité d'être étendue à une région prédéfinie [Ke, Le] pour un coût supplémentaire Cw payé par le consommateur au moment de l'achat du produit. Les périodes de garantie de base et étendue expirent quand le système atteint respectivement un âge Kw (Ke) ou l'usage total excède le niveau Lw (Le).

Nous limitons notre étude pour le cas où la période de garantie de base et étendue sont de forme similaire (Figure V.1), ceci implique que $re = \frac{Lw}{Kw} = \frac{Le}{Ke} = \frac{L}{K}$

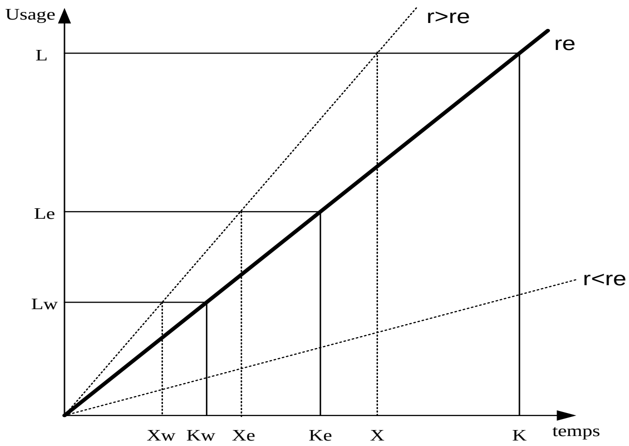


Figure V.1: Régions de garantie bidimensionnelle pour différents taux d'usage

Les actions de réparation minimale sont effectuées suite à chaque défaillance du système durant la période de garantie de base et la période de garantie étendue. Ces actions sont payées par le fabricant durant la période de garantie de base et étendue et par le consommateur durant la période post garantie.

On considère également que des actions de maintenance préventive sont effectuées périodiquement aux instants τj, j=1, 2,…; avec $\tau_0 = 0$. Le coût de ces actions est toujours supporté par le consommateur. Nous modélisons leur effet à l'aide du modèle de réduction d'intensité arithmétique (ARI). Nous utilisons pour cela l'approche de **Chan and Shaw** (1993) selon laquelle les actions de maintenance préventive réduisent le taux de défaillance du système d'une quantité (ρ) proportionnelle au taux de défaillance actuel.

Le modèle correspondant est exprimé par :

$$\lambda_m(t) = \lambda_0(t) - \rho \sum_{j=0}^{N_t-1} (1-\rho)\,\lambda_0\left(\tau_{N_t-j}\right) \tag{V.1}$$

Avec

$0 < \rho < 1$

Les différentes stratégies de maintenance détaillées dans les chapitres précédents sont aussi considérées dans ce modèle de garantie étendue bidimensionnelle et sont brièvement rappelées ci-dessous :

- Option I: aucune action de maintenance préventive durant tout le cycle de vie du système. Seules les actions de réparation minimales sont effectuées suite aux pannes.

• Option II: actions de maintenance préventive périodiques réalisées sur tout le cycle de vie du système {[0, K)×[0,L)}. A noter que le cycle de vie finit au moment où l'une des limites K ou L est atteinte.

• Option III: actions de maintenance préventive périodiques effectuées durant la région post-garantie. Pour cette option, nous considérons deux possibilités différentes:

- Option III-1: les actions de maintenance préventive sont effectuées à partir de la fin de la région de garantie de base {[Kw, K)×[Lw,L)},

- Option III-2: les actions de maintenance préventive sont effectuées à partir de la fin de la région de garantie étendue {[Ke, K)×[Le,L)},

• Option IV: actions de maintenance préventive périodiques effectuées durant la région de garantie. Pour cette option, nous distinguons aussi deux possibilités différentes:

- Option IV-1: les actions de maintenance préventive ne sont effectuées que dans la région de garantie de base {[0, Kw)×[0,Lw)},

- Option IV-2: les actions de maintenance préventive sont effectuées dans la région de garantie de base et dans celle de la garantie étendue {[0,Ke)×[0,Le)},

V.2.3. Modélisation des défaillances du système

Afin de modéliser les défaillances du système considéré, nous adoptons l'approche unidimensionnelle (où le problème est réduit à un problème unidimensionnel) proposé par **Iskander B.P et Murthy D.N.P. (2003).** On note t=0 l'instant d'achat du système. X(t) et T(t) désignent respectivement l'usage et l'âge du système à l'instant t. Selon cette approche unidimensionnelle, l'usage du système X(t) est modélisé comme étant une fonction de son âge T(t). **Iskander B.P et Murthy D.N.P (2003)** admettent que cette relation est linéaire de coefficient positif r et ils la définissent comme suit : $X(t) = r.T(t)$

Pour un utilisateur donné, nous considérons que le taux d'usage r est constant durant tout le cycle de vie du système. Or, dans la pratique r varie aléatoirement d'un utilisateur à un autre. Ainsi, il est défini comme une variable aléatoire positive avec une fonction de distribution $G(r)$.

Sans perte de généralité, on considèrera dans ce qui suit le cas où r est uniformément distribué sur $[r_l, r_u]$, avec $0 < r_l < r_u < \infty$

$g(r)$ peut être exprimée comme suit:

$$g(r)=\begin{cases}\dfrac{1}{[r_u-r_l]} & si\ r_l<r<r_u\\ 0 & \text{sinon}\end{cases} \tag{V.2}$$

Les défaillances du système sont définies par 'point process' avec une fonction de défaillance dépendant de l'âge et l'usage du système. En modélisant l'usage du système comme une fonction aléatoire de son âge, la fonction du taux de défaillance est réduite à une seule variable t.

$\lambda(t/r)$ représente la probabilité que le système fonctionnant à l'instant t tombe en panne à l'instant $[t,t+\delta t)$ sachant son usage r. Les pannes du système se produisent selon un processus de poisson $\lambda(t/r), t>0$ modélisé par :

$$\lambda(t/r)=\varphi(T(t),X(t)) \tag{V.3}$$

Avec $\varphi(t,x)$ une fonction décroissante de t et x.

Ceci implique que la probabilité de défaillance du système est décroissante avec l'âge et l'usage.

Murthy D.N.P et Wilson R.J (1991) ont considéré la forme suivante :

$$\lambda(t/r)=\theta_0+\theta_1 r+(\theta_2+\theta_3 r)t \tag{V.4}$$

Avec θ_i : paramètres de la loi de poisson, $\theta_i>0$ *pour* $0\le i\le 3$

L'expression du taux de défaillance du système $\lambda(t/r)$ pour chaque option de maintenance considérée est donnée comme suit:

Option I :

$$\lambda_0(t/r)=\theta_0+\theta_1 r+(\theta_2+\theta_3 r)t \tag{V.5}$$

Option II :

$si\ r<re$

$$\lambda(t/r)=\begin{cases}\lambda_0(t/r) & si\ t\le\tau_1\\ \lambda_0(t/r)-\rho.\sum\limits_{j=0}^{N_t-1}(1-\rho)^j\ \lambda_0(\tau_{N_t-j}/r) & si\ \tau_1<t\le\tau_{N_9}\\ \lambda_0(t/r)-\rho.\sum\limits_{j=0}^{N_9-1}(1-\rho)^j\ \lambda_0(\tau_{N_9-j}/r) & si\ t>\tau_{N_9}\end{cases} \tag{V.6}$$

$$\begin{array}{|l} si\ r > re \\ \lambda(t/r) = \begin{cases} \lambda_0(t/r) & si\ t \le \tau_1 \\ \lambda_0(t/r) - \rho.\sum_{j=0}^{N_t-1}(1-\rho)^j\ \lambda_0(\tau_{N_t-j}/r) & si\ \tau_1 < t \le \tau_{N_{10}} \\ \lambda_0(t/r) - \rho.\sum_{j=0}^{N_{10}-1}(1-\rho)^j\ \lambda_0(\tau_{N_{10}-j}/r) & si\ t > \tau_{N_{10}} \end{cases} \end{array} \quad (V.7)$$

Option III-1 :

$$\begin{array}{|l} si\ r < re \\ \lambda(t/r) = \begin{cases} \lambda_0(t/r) & si\ t \le \tau_1 \\ \lambda_0(t/r) - \rho.\sum_{j=0}^{N_t-1}(1-\rho)^j\ \lambda_0(\tau_{N_t-j}/r) & si\ \tau_1 < t \le \tau_{N_1} \\ \lambda_0(t/r) - \rho.\sum_{j=0}^{N_1-1}(1-\rho)^j\ \lambda_0(\tau_{N_1-j}/r) & si\ t > \tau_{N_1} \end{cases} \end{array} \quad (V.8)$$

$$\begin{array}{|l} si\ r > re \\ \lambda(t/r) = \begin{cases} \lambda_0(t/r) & si\ t \le \tau_1 \\ \lambda_0(t/r) - \rho.\sum_{j=0}^{N_t-1}(1-\rho)^j\ \lambda_0(\tau_{N_t-j}/r) & si\ \tau_1 < t \le \tau_{N_2} \\ \lambda_0(t/r) - \rho.\sum_{j=0}^{N_2-1}(1-\rho)^j\ \lambda_0(\tau_{N_2-j}/r) & si\ t > \tau_{N_2} \end{cases} \end{array} \quad (V.9)$$

Option III-2 :

$$\begin{array}{|l} si\ r < re \\ \lambda(t/r) = \begin{cases} \lambda_0(t/r) & si\ t \le \tau_1 \\ \lambda_0(t/r) - \rho.\sum_{j=0}^{N_t-1}(1-\rho)^j\ \lambda_0(\tau_{N_t-j}/r) & si\ \tau_1 < t \le \tau_{N_3} \\ \lambda_0(t/r) - \rho.\sum_{j=0}^{N_3-1}(1-\rho)^j\ \lambda_0(\tau_{N_3-j}/r) & si\ t > \tau_{N_3} \end{cases} \end{array} \quad (V.10)$$

$$\begin{array}{|l} si\ r > re \\ \lambda(t/r) = \begin{cases} \lambda_0(t/r) & si\ t \le \tau_1 \\ \lambda_0(t/r) - \rho.\sum_{j=0}^{N_t-1}(1-\rho)^j\ \lambda_0(\tau_{N_t-j}/r) & si\ \tau_1 < t \le \tau_{N_4} \\ \lambda_0(t/r) - \rho.\sum_{j=0}^{N_4-1}(1-\rho)^j\ \lambda_0(\tau_{N_4-j}/r) & si\ t > \tau_{N_4} \end{cases} \end{array} \quad (V.11)$$

Option IV-1 :

$$\left|\begin{array}{l} si\ r < re \\ \lambda(t/r) = \begin{cases} \lambda_0(t/r) & si\ t \le \tau_1 \\ \lambda_0(t/r) - \rho.\sum_{j=0}^{N_t-1}(1-\rho)^j\ \lambda_0(\tau_{N_t-j}/r) & si\ \tau_1 < t \le \tau_{N_5} \\ \lambda_0(t/r) - \rho.\sum_{j=0}^{N_5-1}(1-\rho)^j\ \lambda_0(\tau_{N_5-j}/r) & si\ t > \tau_{N_5} \end{cases} \quad (V.12) \\ si\ r > re \\ \lambda(t/r) = \begin{cases} \lambda_0(t/r) & if\ t \le \tau_1 \\ \lambda_0(t/r) - \rho.\sum_{j=0}^{N_t-1}(1-\rho)^j\ \lambda_0(\tau_{N_t-j}/r) & if\ \tau_1 < t \le \tau_{N_6} \\ \lambda_0(t/r) - \rho.\sum_{j=0}^{N_6-1}(1-\rho)^j\ \lambda_0(\tau_{N_6-j}/r) & if\ t > \tau_{N_6} \end{cases} \quad (V.13) \end{array}\right.$$

Option IV-2

$$\left|\begin{array}{l} si\ r < re \\ \lambda(t/r) = \begin{cases} \lambda_0(t/r) & si\ t \le \tau_1 \\ \lambda_0(t/r) - \rho.\sum_{j=0}^{N_t-1}(1-\rho)^j\ \lambda_0(\tau_{N_t-j}/r) & si\ \tau_1 < t \le \tau_{N_7} \\ \lambda_0(t/r) - \rho.\sum_{j=0}^{N_7-1}(1-\rho)^j\ \lambda_0(\tau_{N_7-j}/r) & si\ t > \tau_{N_7} \end{cases} \quad (V.14) \\ si\ r > re \\ \lambda(t/r) = \begin{cases} \lambda_0(t/r) & si\ t \le \tau_1 \\ \lambda_0(t/r) - \rho.\sum_{j=0}^{N_t-1}(1-\rho)^j\ \lambda_0(\tau_{N_t-j}/r) & si\ \tau_1 < t \le \tau_{N_8} \\ \lambda_0(t/r) - \rho.\sum_{j=0}^{N_8-1}(1-\rho)^j\ \lambda_0(\tau_{N_8-j}/r) & si\ t > \tau_{N_8} \end{cases} \quad (V.15) \end{array}\right.$$

V.3. Détermination du coût de garantie étendue bidimensionnelle

Dans ce qui suit nous allons déterminer la condition pour laquelle l'achat ou la vente de la garantie étendue serait avantageux pour le consommateur et le fabricant. Pour cela, on cherchera à déterminer le coût maximum que devrait payer le consommateur pour la garantie étendue et le coût minimum que le fabricant pourrait accepter pour vendre la garantie étendue.

V.3.1. Détermination du coût maximum que pourrait payer le consommateur pour la garantie étendue

Nous désignons par C_{XS} et C_{XA}, les coûts encourus par le consommateur pour l'option X(X=I, II, III-1, III-2, IV-1 et IV-2) respectivement pour le cas sans garantie étendue (S) et le cas avec garantie étendue (A).

Nous déterminons ensuite la condition qui doit être satisfaite pour que l'adoption de la région de garantie étendue soit économiquement avantageuse pour le consommateur. Cette condition est basée sur le fait que l'achat de la garantie étendue serait bénéfique pour le consommateur si le total des coûts encourus, au cours du cycle de vie du produit (C_{XA}), serait inférieur à ce que ça lui coûterait au cas où il ne n'achète pas la garantie étendue (C_{XS}). Soit Cw le coût maximum que le consommateur devrait payer pour la garantie étendue. Pour chaque option de maintenance considérée, ce seuil de coût de garantie étendue (Cw) peut être exprimé comme suit :

- **Option I**
  - Cas sans garantie étendue :

$$\left|\begin{array}{l} \rightarrow si\ r \leq re \\ C_{IS} = \begin{cases} 0 & pour \quad t \in [0, Kw) \\ \int_0^{re} \int_{Kw}^{K} \lambda(t/r) g(r) dr\, dt & pour \quad t \in [Kw, K) \end{cases} \\ \rightarrow si\ r \geq re \\ C_{IS} = \begin{cases} 0 & pour \quad t \in [0, Xw) \\ \int_{re}^{\infty} \int_{Xw}^{X} \lambda(t/r) g(r) dr\, dt & pour \quad t \in [Xw, X) \end{cases} \end{array}\right. \tag{V.16}$$

  - Cas avec garantie étendue :

$$\left|\begin{array}{l} \rightarrow si\ r \leq re \\ C_{IA} = \begin{cases} 0 & pour \quad t \in [0, Ke) \\ \int_0^{re} \int_{Ke}^{K} \lambda(t/r) g(r) dr\, dt & pour \quad t \in [Ke, K) \end{cases} \\ \rightarrow si\ r \geq re \\ C_{IA} = \begin{cases} 0 & pour \quad t \in [0, Xe) \\ \int_{re}^{\infty} \int_{Xe}^{X} \lambda(t/r) g(r) dr\, dt & pour \quad t \in [Xe, X) \end{cases} \end{array}\right. \tag{V.17}$$

Ainsi, le prix maximum Cw que le consommateur pourrait payer pour la garantie étendue supplémentaire de durée (We–W) devrait satisfaire la condition suivante.

$$C_{IA} + Cw \le C_{IS}$$

$$Cw < Cr\begin{bmatrix} \int_0^{re}\int_{Kw}^{K}\lambda(t/r)g(r)dr\,dt + \int_{re}^{\infty}\int_{Xw}^{X}\lambda(t/r)g(r)dr\,dt \\ -\int_0^{re}\int_{Ke}^{K}\lambda(t/r)g(r)dr\,dt - \int_{re}^{\infty}\int_{Xe}^{X}\lambda(t/r)g(r)dr\,dt \end{bmatrix} \tag{V.18}$$

- **Option II**
  - Cas sans garantie étendue :

$$\left|\begin{array}{l} \rightarrow si\ r \le re \\ C_{IIS} = \begin{cases} Cm.N_5 & pour \quad t \in [0, Kw) \\ \int_0^{re}\int_{Kw}^{K}\lambda(t/r)g(r)dr\,dt + Cm.N_1 & pour \quad t \in [Kw, K) \end{cases} \\ \rightarrow si\ r \ge re \\ C_{IIS} = \begin{cases} Cm.N_6 & pour \quad t \in [0, Xw) \\ \int_{re}^{\infty}\int_{Xw}^{X}\lambda(t/r)g(r)dr\,dt + Cm.N_2 & pour \quad t \in [Xw, X) \end{cases} \end{array}\right. \tag{V.19}$$

  - Cas avec garantie étendue :

$$\left|\begin{array}{l} \rightarrow si\ r \le re \\ C_{IIA} = \begin{cases} Cm.N_7 & pour \quad t \in [0, Ke) \\ \int_0^{re}\int_{Ke}^{K}\lambda(t/r)g(r)dr\,dt + Cm.N_3 & pour \quad t \in [Ke, K) \end{cases} \\ \rightarrow si\ r \ge re \\ C_{IIA} = \begin{cases} Cm.N_8 & pour \quad t \in [0, Xe) \\ \int_{re}^{\infty}\int_{Xe}^{X}\lambda(t/r)g(r)dr\,dt + Cm.N_4 & pour \quad t \in [Xe, X) \end{cases} \end{array}\right. \tag{V.20}$$

Ainsi, le prix maximum Cw que le consommateur pourrait payer pour la garantie étendue supplémentaire de durée (We–W) devrait satisfaire la condition suivante.

$$C_{IIA} + Cw \le C_{IIS}$$

$$Cw < Cr\begin{bmatrix} \int_0^{re}\int_{Kw}^{K}\lambda(t/r)g(r)dr\,dt + \int_{re}^{\infty}\int_{Xw}^{X}\lambda(t/r)g(r)dr\,dt \\ -\int_0^{re}\int_{Ke}^{K}\lambda(t/r)g(r)dr\,dt - \int_{re}^{\infty}\int_{Xe}^{X}\lambda(t/r)g(r)dr\,dt \end{bmatrix} + Cm\begin{bmatrix} N_1 + N_2 \\ -N_3 - N_4 \end{bmatrix} \tag{V.21}$$

- **Option III-1**
  - Cas sans garantie étendue :

$$\left|\begin{array}{l} \rightarrow si\ r \leq re \\ C_{III-1S} = \begin{cases} 0 & pour \quad t \in [0, Kw) \\ \int_0^{re}\int_{Kw}^{K} \lambda(t/r) g(r) dr\, dt + Cm.N_1 & pour \quad t \in [Kw, K) \end{cases} \\ \rightarrow si\ r \geq re \\ C_{III-1S} = \begin{cases} 0 & pour \quad t \in [0, Xw) \\ \int_{re}^{\infty}\int_{Xw}^{X} \lambda(t/r) g(r) dr\, dt + Cm.N_2 & pour \quad t \in [Xw, X) \end{cases} \end{array}\right. \quad \text{(V.22)}$$

  - Cas avec garantie étendue :

$$\left|\begin{array}{l} \rightarrow si\ r \leq re \\ C_{III-1A} = \begin{cases} Cm.N_{11} & pour \quad t \in [0, Ke) \\ \int_0^{re}\int_{Ke}^{K} \lambda(t/r) g(r) dr\, dt + Cm.N_3 & pour \quad t \in [Ke, K) \end{cases} \\ \rightarrow si\ r \geq re \\ C_{III-1A} = \begin{cases} Cm.N_{12} & pour \quad t \in [0, Xe) \\ \int_{re}^{\infty}\int_{Xe}^{X} \lambda(t/r) g(r) dr\, dt + Cm.N_4 & pour \quad t \in [Xe, X) \end{cases} \end{array}\right. \quad \text{(V.23)}$$

Ainsi, le prix maximum Cw que le consommateur pourrait payer pour la garantie étendue supplémentaire de durée (We–W) devrait satisfaire la condition suivante :

$$C_{III-1A} + Cw \leq C_{III-1S}$$

$$Cw < Cr\begin{bmatrix} \int_0^{re}\int_{Kw}^{K} \lambda(t/r) g(r) dr\, dt + \int_{re}^{\infty}\int_{Xw}^{X} \lambda(t/r) g(r) dr\, dt \\ -\int_0^{re}\int_{Ke}^{K} \lambda(t/r) g(r) dr\, dt - \int_{re}^{\infty}\int_{Xe}^{X} \lambda(t/r) g(r) dr\, dt \end{bmatrix} + Cm\begin{bmatrix} N_1 + N_2 - N_{11} \\ -N_3 - N_{12} - N_4 \end{bmatrix} \quad \text{(V.24)}$$

- **Option III-2**
  - Cas sans garantie étendue :

$$\left|\begin{array}{l} \rightarrow si\ r \le re \\ C_{III-2S} = \begin{cases} 0 & pour \quad t \in [0, Kw) \\ \int_0^{re}\int_{Kw}^{K} \lambda(t/r) g(r) dr\, dt + Cm.N_1 & pour \quad t \in [Kw, K) \end{cases} \\ \rightarrow si\ r \ge re \\ C_{III-2S} = \begin{cases} 0 & pour \quad t \in [0, Xw) \\ \int_{re}^{\infty}\int_{Xw}^{X} \lambda(t/r) g(r) dr\, dt + Cm.N_2 & pour \quad t \in [Xw, X) \end{cases} \end{array}\right. \qquad (V.25)$$

  - Cas avec garantie étendue :

$$\left|\begin{array}{l} \rightarrow si\ r \le re \\ C_{III-2A} = \begin{cases} 0 & pour \quad t \in [0, Ke) \\ \int_0^{re}\int_{Ke}^{K} \lambda(t/r) g(r) dr\, dt + Cm.N_3 & pour \quad t \in [Ke, K) \end{cases} \\ \rightarrow si\ r \ge re \\ C_{III-2A} = \begin{cases} 0 & pour \quad t \in [0, Xe) \\ \int_{re}^{\infty}\int_{Xe}^{X} \lambda(t/r) g(r) dr\, dt + Cm.N_4 & pour \quad t \in [Xe, X) \end{cases} \end{array}\right. \qquad (V.26)$$

Ainsi, le prix maximum Cw que le consommateur pourrait payer pour la garantie étendue supplémentaire de durée (We–W) devrait satisfaire la condition suivante :

$$C_{III-2A} + Cw \le C_{III-2S}$$

$$Cw < Cr\left[\begin{array}{l} \int_0^{re}\int_{Kw}^{K} \lambda(t/r) g(r) dr\, dt + \int_{re}^{\infty}\int_{Xw}^{X} \lambda(t/r) g(r) dr\, dt \\ -\int_0^{re}\int_{Ke}^{K} \lambda(t/r) g(r) dr\, dt - \int_{re}^{\infty}\int_{Xe}^{X} \lambda(t/r) g(r) dr\, dt \end{array}\right] + Cm\left[\begin{array}{l} N_1 + N_2 \\ -N_3 - N_4 \end{array}\right] \qquad (V.27)$$

- **Option IV-1**
  - Cas sans garantie étendue :

$$\left|\begin{array}{l} \rightarrow si\ r \le re \\ C_{IV-1S} = \begin{cases} Cm.N_5 & pour \quad t \in [0, Kw) \\ \int_0^{re}\int_{Kw}^{K} \lambda(t/r) g(r) dr\, dt & pour \quad t \in [Kw, K) \end{cases} \end{array}\right. \qquad (V.28)$$

$$\rightarrow si\ r \geq re$$
$$C_{IV-1S} = \begin{cases} Cm.N_6 & pour \quad t \in [0, Xw) \\ \int_{re}^{\infty}\int_{Xw}^{X} \lambda(t/r)g(r)dr\,dt & pour \quad t \in [Xw, X) \end{cases}$$

- Cas avec garantie étendue :

$$\rightarrow si\ r \leq re$$
$$C_{IV-1A} = \begin{cases} Cm.N_5 & pour \quad t \in [0, Ke) \\ \int_{0}^{re}\int_{Ke}^{K} \lambda(t/r)g(r)dr\,dt & pour \quad t \in [Ke, K) \end{cases}$$
$$\rightarrow si\ r \geq re \qquad \text{(V.29)}$$
$$C_{IIV-1A} = \begin{cases} Cm.N_6 & pour \quad t \in [0, Xe) \\ \int_{re}^{\infty}\int_{Xe}^{X} \lambda(t/r)g(r)dr\,dt & pour \quad t \in [Xe, X) \end{cases}$$

Ainsi, le prix maximum Cw que le consommateur pourrait payer pour la garantie étendue supplémentaire de durée (We–W) devrait satisfaire la condition suivante :

$$C_{IV-1A} + Cw \leq C_{IV-1S}$$

$$Cw < Cr\begin{bmatrix} \int_{0}^{re}\int_{Kw}^{K} \lambda(t/r)g(r)dr\,dt + \int_{re}^{\infty}\int_{Xw}^{X} \lambda(t/r)g(r)dr\,dt \\ -\int_{0}^{re}\int_{Ke}^{K} \lambda(t/r)g(r)dr\,dt - \int_{re}^{\infty}\int_{Xe}^{X} \lambda(t/r)g(r)dr\,dt \end{bmatrix} \qquad \text{(V.30)}$$

- **Option IV-2**
  - Cas sans garantie étendue :

$$\rightarrow si\ r \leq re$$
$$C_{IV-2S} = \begin{cases} Cm.N_5 & pour \quad t \in [0, Kw) \\ \int_{0}^{re}\int_{Kw}^{K} \lambda(t/r)g(r)dr\,dt & pour \quad t \in [Kw, K) \end{cases}$$
$$\rightarrow si\ r \geq re \qquad \text{(V.31)}$$
$$C_{IV-2S} = \begin{cases} Cm.N_6 & pour \quad t \in [0, Xw) \\ \int_{re}^{\infty}\int_{Xw}^{X} \lambda(t/r)g(r)dr\,dt & pour \quad t \in [Xw, X) \end{cases}$$

- Cas avec garantie étendue :

$$\left|\begin{array}{l}\rightarrow si\ r \leq re \\ C_{IV-2A} = \begin{cases} Cm.N_7 & pour \quad t \in [0, Ke) \\ \int_0^{re}\int_{Ke}^{K} \lambda(t/r)g(r)dr\,dt & pour \quad t \in [Ke, K) \end{cases} \\ \rightarrow si\ r \geq re \\ C_{IIV-2A} = \begin{cases} Cm.N_8 & pour \quad t \in [0, Xe) \\ \int_{re}^{\infty}\int_{Xe}^{X} \lambda(t/r)g(r)dr\,dt & pour \quad t \in [Xe, X) \end{cases}\end{array}\right. \tag{V.32}$$

Ainsi, le prix maximum Cw que le consommateur pourrait payer pour la garantie étendue supplémentaire de durée (We–W) devrait satisfaire la condition suivante :

$$C_{IV-2A} + Cw \leq C_{IV-2S}$$

$$Cw < Cr\begin{bmatrix} \int_0^{re}\int_{Kw}^{K} \lambda(t/r)g(r)dr\,dt + \int_{re}^{\infty}\int_{Xw}^{X} \lambda(t/r)g(r)dr\,dt \\ -\int_0^{re}\int_{Ke}^{K} \lambda(t/r)g(r)dr\,dt - \int_{re}^{\infty}\int_{Xe}^{X} \lambda(t/r)g(r)dr\,dt \end{bmatrix} + Cm\begin{bmatrix} N_5 + N_6 \\ -N_7 - N_8 \end{bmatrix} \tag{V.33}$$

V.3.2. Détermination du coût minimum que le fabricant pourrait accepter pour vendre la garantie étendue

On pose M_S et M_A le coût total de maintenance payé par le fabricant durant le cycle de vie du système pour le cas avec garantie étendue (A) et sans garantie étendue (S). Dans ce qui suit, nous chercherons à déterminer le seuil minimum pour lequel le fabricant accepterait de vendre la garantie étendue. Cette condition est satisfaite si les coûts de maintenance encourus par le fabricant en vendant la garantie étendue sont inférieurs à ce qu'il dépenserait s'il ne la vend pas.

- Cas sans garantie étendue :

$$\left|\begin{array}{l}\rightarrow si\ r \leq re \\ M_S = Cr\int_0^{re}\int_0^{K_w} \lambda(t/r)dt.g(r)dr \\ \rightarrow si\ r \geq re \\ M_S = Cr\int_{re}^{\infty}\int_0^{X_w} \lambda(t/r)dt.g(r)dr\end{array}\right. \tag{V.34}$$

- Cas avec garantie étendue :

$$\left|\begin{array}{l} \rightarrow si\ r \leq re \\ M_A = Cr\int\limits_0^{re}\int\limits_0^{K_e}\lambda(t/r)dt.g(r)dr \\ \rightarrow si\ r \geq re \\ M_A = Cr\int\limits_{re}^{\infty}\int\limits_0^{X_e}\lambda(t/r)dt.g(r)dr \end{array}\right. \qquad (V.35)$$

Ainsi, le prix minimum Cw que le fabricant pourrait accepter pour vendre la garantie étendue supplémentaire de durée (We–W) devrait satisfaire la condition suivante :

$$M_A - Cw \leq M_S$$

$$Cw \geq \begin{bmatrix} \int\limits_0^{re}\int\limits_0^{K_e}\lambda(t/r)dt.g(r)dr + \int\limits_{re}^{\infty}\int\limits_0^{X_e}\lambda(t/r)dt.g(r)dr \\ -\int\limits_0^{re}\int\limits_0^{K_w}\lambda(t/r)dt.g(r)dr - \int\limits_{re}^{\infty}\int\limits_0^{X_w}\lambda(t/r)dt.g(r)dr \end{bmatrix} Cr \qquad (V.36)$$

V.4. Exemple numérique

Pour illustrer notre approche, nous avons considéré l'exemple d'un véhicule avec des données d'entrées arbitrairement choisies. L'unité considérée pour l'âge du système est en année et pour son usage une unité est équivalente à 1000 Km. La période de base considérée est [Kw,Lw]=[2,4]. Elle peut être étendue jusqu'à [Ke,Le]=[3,6] pour une durée de vie totale du système [K,L]=[9, 18]. Pour ce système, le taux d'usage nominal $re = \frac{Lw}{Kw} = \frac{Le}{Ke} = \frac{L}{K} = 2$

La période entre deux actions de maintenance préventive est Δ=0.33 et le coût moyen d'une action de ce type est Cm=100 unités monétaires. Chaque panne du système est réparée avec une réparation minimale de coût moyen Cr=200 unités monétaires.

Après chaque action de maintenance préventive, l'état du système est amélioré selon un coefficient ρ=0.5.

Les défaillances du système suivent le processus de poisson de paramètres :

θ_0=0.1	
θ_1=0.2	âge moyen à la première défaillance E [T] =1.2237 (année)
θ_2=0.3	usage moyen à la première défaillance E[X] =1.2237
θ_3=0.3	

Nous avons considéré trois catégories pour les valeurs de r_l et r_u qui correspondent à trois types d'utilisateurs : les utilisateurs modérés, les utilisateurs moyens et les utilisateurs agressifs. Les paramètres correspondants à chaque type sont donnés comme suit :

Type d'utilisateur	r_l	r_u
Modéré (l)	0.1	0.9
Moyen (m)	0.7	1.3
Agressif (h)	1.1	2.9

Tableau V.2: Les différents types d'utilisateurs considérés

Nous avons appliqué notre modèle avec les différentes données d'entrée mentionnées ci-dessus. Nous avons cherché pour chaque option de maintenance et pour chaque type d'utilisateur l'existence d'un intervalle de compromis pour la garantie étendue (intervalle gagnant-gagnant) [a,b] où 'a' représente le prix minimum pour lequel le fabricant accepterait de vendre la garantie étendue, et 'b' le coût maximum que pourrait payer le consommateur pour la garantie étendue. Le tableau V.3 présente les différents résultats obtenus.

Type d'utilisateur	Option I	Option II	Option III-1	Option III-2	Option IV-1	Option IV-2
Modéré (l)	[315.7, 315.7]	[55.1, 60.6]	Ø	Ø	[93,26, 94,54]	[55,15, 897,83]
Moyen (m)	[354.6, 354.6]	[60.6, 66.9]	Ø	Ø	[102,73, 104,45]	[60,62, 976,09]
Agressif (h)	[253.1, 253.1]	[42.6, 47.3]	Ø	Ø	[72,43, 73,79]	[42,68, 733,51]

Table V.3: Intervalles de compromis pour la garantie étendue pour les différents types d'utilisateurs

En se référant aux résultats obtenus et illustrés dans le tableau V.3, nous pouvons constater, par exemple, pour les options II, IV-1 et IV-2, que l'intervalle de compromis pour la garantie étendue existe. Pour l'option IV-2 et pour des utilisateurs moyens (m), l'intervalle gagnant-gagnant existe pour un intervalle compris entre 60.62 et 976.09 unités monétaires, le meilleur compromis pour le consommateur et le fabricant serait au milieu de cet intervalle pour un coût de garantie étendue de 518.35 unités monétaires. On remarque aussi que pour une option donnée (exemple option II), les utilisateurs à usage moyen ont une marge plus grande que celle des utilisateurs à usage agressif et modéré pour le coût de la garantie étendue.

Il est également intéressant de remarquer que pour l'option I (pas de maintenance préventive), l'adoption de la région de garantie étendue n'est pas intéressante ni pour le consommateur ni pour le fabricant pour les différents types d'utilisateurs. L'intervalle de compromis est réduit à une seule valeur. Le seuil du coût de la garantie étendue obtenu est le même. Il correspond aux coûts des réparations minimales encouru durant l'intervalle [Kw, Ke].

Pour les options III-1 et III-2 pour lesquels on ne trouve pas d'intervalle de compromis, les actions de maintenance préventive sont effectuées en dehors de la région de garantie étendue. A ce moment, le système est dans un état endommagé (taux de panne très élevé) surtout pour les consommateurs agressifs (h). Par conséquent, les coûts payés par le consommateur pour la garantie étendue seraient inferieurs aux coûts payés par le fabricant pour effectuer des actions de réparation minimale durant les périodes de garantie de base et étendue. Ceci explique le fait de l'inexistence d'un intervalle gagnant-gagnant.

V.6. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié l'opportunité d'adopter une région de garantie étendue bidimensionnelle pour différents types d'utilisateurs à comportement stochastique (modérés, moyens et agressifs). Cette approche nous a permis de chercher pour chaque option de maintenance proposée l'existence d'un intervalle de compromis pour le coût de la garantie étendue. Les résultats numériques obtenus ont confirmé qu'un tel compromis n'est pas toujours possible, ceci dépend de la stratégie de maintenance adoptée et du comportement du consommateur (type d'utilisateur).

Conclusion générale

Le recours à des équipements dont la technologie est de plus en plus complexe oblige le consommateur et le fabricant à apporter plus d'attention aux actions de maintenance et une attention particulière à la période de garantie qui joue un rôle de plus en plus important. La garantie qui accompagne la vente et l'acquisition d'un produit a plusieurs objectifs incluant la protection du consommateur et du fabricant. L'importance que prennent les actions de maintenance durant la période de garantie explique en grande partie les travaux de recherche qui sont devenus de plus en plus nombreux sur ce sujet depuis quelques années.

Dans la première partie de cette thèse, nous avons effectué une synthèse bibliographique de différentes stratégies de maintenance tenant compte de la période de garantie. Dans notre synthèse, nous avons classé les stratégies de garantie selon quatre catégories différentes : le type de produit, les différents types d'actions de maintenance exécutées sur le produit, la dimension de la garantie (unidimensionnelle ou bidimensionnelle), le type de garantie dans le sens que celle-ci soit renouvelable ou non.

Dans la suite de notre travail, nous avons développé un modèle mathématique pour déterminer simultanément la condition sous laquelle il serait dans l'intérêt du consommateur d'acheter une garantie étendue et le seuil de rentabilité de cette garantie étendue pour le fabricant. Nous avons étudié cette problématique en considérant plusieurs options de politiques de maintenance qui seraient adoptées durant le cycle de vie du produit. Nous avons considéré l'opportunité de faire de la maintenance préventive durant la période de garantie de base et/ou durant la période étendue, ceci en considérant différents niveaux d'efficacité des actions préventives.

Nous avons testé le modèle développé en réalisant des calculs numériques avec des données arbitrairement choisies tout en prenant soin de vérifier leur cohérence. Nous avons déterminé pour chaque politique de maintenance l'intervalle gagnant-gagnant représentant un compromis entre le fabricant et le consommateur en ce qui concerne le prix de la garantie étendue.

Une analyse de sensibilité de l'intervalle de compromis à la variation des distributions des durées inter-défaillances pour une stratégie FRW ainsi qu'une étude de l'influence de la périodicité des actions de maintenance préventive ont été effectuées.

Dans le troisième chapitre nous nous sommes concentrés sur l'étude des effets des conditions d'utilisation et de l'environnement sur le choix d'une période de garantie étendue. Ce modèle est basé sur le modèle à risque proportionnel proposé par **Cox D.R. (1972)**. Cette étude nous a permis d'étudier la variation du coût de garantie étendue par rapport aux variations des conditions d'utilisation du système.

Dans le chapitre suivant, nous nous sommes intéressés aux garanties bidimensionnelles. Dans ce contexte nous avons étudié l'opportunité apportée par une garantie étendue bidimensionnelle dans le cas d'un comportement déterministe des usagers. Dans cette étude nous avons considéré deux classes d'utilisateurs (utilisateurs modérés et ceux agressifs). Nous avons exprimé pour chaque classe et pour chaque stratégie de maintenance adoptée pour le produit, le coût de garantie étendue minimum que peut accepter le fabricant pour vendre la garantie étendue et le coût de garantie maximum que peut payer le consommateur pour la garantie étendue. Ceci nous a permis de déterminer s'il existe un intervalle de compromis pour le coût de la garantie étendue bidimensionnelle entre le consommateur et le fabricant. De plus, une étude de sensibilité de cet intervalle par rapport à l'efficacité des actions de maintenance préventive a été réalisée.

Le dernier chapitre a été consacré au traitement de la même problématique que celle du chapitre précédent mais en considérant cette fois-ci un comportement stochastique des usagers.

Parmi les perspectives de ce travail, il serait intéressant de considérer un niveau de maintenance préventive variable durant le cycle de vie du système. Une autre extension serait de considérer d'autres types d'actions de maintenance comme par exemple les actions imparfaites (correctives et/ou préventives). Pour cela le processus de quasi-renouvellement serait parmi les outils de modélisation qui pourraient être adoptés. Ces extensions sont en cours d'investigation.

Références

Bai J. Pham H. (2005), Repair-limit risk-free warranty policies with imperfect repair, *IEEE transaction on systems, man and cybernetics-part a: Systems and Humans*, Vol 35, NO. 6, pp 765-772.

Baik J., Murthy D.N.P, Jack N. (2004), Two-dimensional modeling with minimal repair, *Naval Research Logistics,* Vol 51 (3), 345-362.

Barlow R.E., Hunter L.C. (1960), Optimal preventive maintenance policies, *Operations research*, Vol.8, pp 90-100.

Berke T.M. and Zaino N.A. (1991), Warranties: what are they? What do they really cost*?, Proceedings of the 1991 IEEE Annual reliability and maintainability symposium.*pp 326-330.

Blischke W.R and Murthy D.N.P (1992), Product warranty management-I; A taxonomy for warranty policies. *European journal of operational research, vol 62, pp 127-148.*

Boland P.J. (1982), Periodic replacement when minimal repair costs vary with time, *Naval research logistics quarterly,* Vol. 29, pp 541-546.

Bouguerra S., Chelbi A., Rezg N., (2010), Opportunity study on the adoption of an extended warranty based on use and environment conditions**,** *8th International Conference of Modeling and Simulation-MOSIM'10, "evaluation and optimization of innovative production systems of goods and services"*-May 10-12,2010-Hammamet-Tunisia.

Bouguerra S., Chelbi A., Rezg N., (2012.a), A decision model for adopting an extended warranty under different maintenance policies, *International Journal of Production Economics* , volume 135, issue 2, 840-849.

Bouguerra S., Rezg N., Chelbi A. (2012.b), Opportunity study on the adoption of an extended two-dimensional warranty for a randomly failing product, *9th International Conference on Modeling, Optimization & SIMulation Performance, interoperability and safety for sustainable development*, June 6-8, Bordeaux, France.

Bouguerra S., Rezg N., Chelbi A. (2012.c), A decision model for adopting an extended two-dimensional warranty considering different maintenance policies with variable customer's behavior, *14th IFAC symposium on information control prolems in manufacturing, May 23-25, Bucharest, Romania.*

Chan and Shaw (1993), Modeling repairable systems with failure rates that depend on age and maintenance**,** *IEEE transactions on reliability***,** vol. 42, no4, pp. 566-571.

Chattopadhyay G.N. and Murthy D.N.P. (2000), Warranty cost analysis for second-hand products, *Mathematical and computer modeling*, 31, pp. 81-88.

Chen J., Yao D.E., Zheng S., (1998), Quality control for products supplied with warranty, *Operations Research*, 46, 107–115.

Chen J.A. and Chien Y.H. (2007), Renewing warranty and preventive maintenance for products with failure penalty post-warranty, *Quality and Reliability Engineering International*, 23, 107-121.

Chen C.K. and Lo C.C (2006), optimal production run length for products sold with warranty in an imperfect production system with allowable shortage, *Mathematical and Computer Modelling*, 44, 319-331.

Chen T.M., Popova E. (2000), Bayesian maintenance policies during a warranty period, *Communications in Statics-Stochastic Models,* 16 (1), 121-142.

Chien Y.H. (2005), Determining optimal warranty periods from the seller's perspective and optimal out-of-warranty replacement age from the buyer's perspective, *International Journal of Systems Science*, vol. 36, no. 10, pp 193-205.

Chien Y.H. (2008), Optimal age-replacement policy under an imperfect renewing free replacement warranty, *IEEE Transactions Relability*, vol. 57, no. 1, pp 125-132.

Chien Y.H (2010), Optimal age for preventive replacement under a combined fully renewable free replacement with a pro-rata warranty, *International Journal of Production Economics*, 124, 198-205.

Chin C.W., Chao Y.C., Chikong H. (2007), Optimal burn-in time and warranty length under fully renewing combination free replacement and pro-rata warranty, *Reliability Engineering and System Safety*, 92, 914-920.

Chukova S., Johnston M.R. (2006), Two-dimensional warranty repair strategy based on minimal and complete repairs, *Mathematical and computer modeling*, 44, pp 1133-1143.

Chun Y.H. (1992), Optimal number of periodic preventive maintenance operations under warranty, *Reliability engineering and system safetey*, 37, pp 223-225.

Chun Y.H. and Lee C.S. (1992), Optimal replacement policy for a warranted system with imperfect preventive maintenance operations, *Microelectron reliability*, Vol. 32, No. 6, pp 839-843.

Coit DW and Smith AE (1996), Reliability optimization of series-parallel systems using a genetic algorithme, *IEEE Trans reliability*, 45, pp. 254-260.

Cox D. R. (1972), Regression Models and life-tables, *Journal of the Royel Statistical Society*. Series B (Methodological), Vol.34, No.2 (1972), pp.187-220

Dagpunar J.S. and jack N. (1992), Optimal repair-cost limit for a consumer following expiry of warranty, *IMA J. Of Mathemathics applied in Business & Industry*, 14, 155-161.

Dagpunar J.S. and Jack N. (1994), Preventative maintenance strategy for equipment under warranty, *Microelectron reliability*, Vol. 34, No. 6, pp 1089-1093.

Djamaludin I., Murthy D.N.P., Wilson R.J., (1994), Quality control through lot sizing for items sold with warranty, *International Journal of Production Economics*, 33, 97–107.

Giri B.C., Dohi T. (2007), Inspection scheduling for imperfect production processes under free repair warranty contract. *European Journal of Operational Research*, 183, 238-252.

Gülay S. and Mehmet R. (2009), The role of repair strategy in warranty cost minimization: An investigation via quasi-renewal processes, *European Journal of Operational Research*, 197, 632-641.

Hussain A.Z.M.O., Murthy D.N.P. (2003), Warranty and optimal reliability improvement through product development, *Mathematical and computer modeling*, 38,pp 1211-1217.

Huang H.Z., Liu Z.J., Murthy D.N.P (2007), Optimal reliability, warranty and price for new product, *IEEE Transaction*, 39, 819-827.

Iskander B.P and Murthy D.N.P (2003), Repair-replace strategies for two-dimensional warranty policies, *Mathematical and computer modeling*, 38, 1233-1241.

Iskander B.P., Murthy D.N.P. and Jack N. (2005), A new repair-replace strategy for items sold with a two-dimensional warranty, *Computers and operational research*, 32, pp 669-682.

Jack N. and Dagpunar J.S. (1994), An optimal imperfect policy over a warranty period, *Microelectron reliability*, Vol. 34, No. 3, pp 529-534.

Jack N., Van der Duyn Schouten F. (2000), Optimal repair-replace strategies for a warranted product, *International journal of production economics*, 67, pp. 95-100.

Jack N. and D.N.P. Murthy (2001), A servicing strategy for items sold under warranty, *Journal of the operational research society*, 52, pp. 1284-1288.

Jain M., Maheswari S. (2006), Discounted costs for repairable units under hybrid warranty, *Applied Mathematics and computation*, 173, 887-901.

Jiang X., Jardine A.K.S, Lugitigheid D. (2006), On a conjecture of optimal repair-replacement strategies for warranted products, *Mathematical and Computer Modelling*, 44, 963-972.

Jung M. and Bai D.S. (2007), Analysis of field data under two-dimensional warranty, *Reliability engineering and system safety*, 92, 135-143.

Jung M.G. and Park D.H. (2003), Optimal maintenance policies during the post-warranty period, *Reliability engineering and system safety*, 82, 173-185.

Jun W., Min X., Tsan S.A.N (2011), On a general periodic preventive maintenance policy incorporationg warranty conracts and system ageing losses, *International Journal of Production Economics*, 129, 102-110.

Kar T.R., Nachlas J.A. (1997), Coordinated warranty and burn-in strategies, *IEEE transactions on Reliaility*, 46, 512-518.

Kim C.S., Djamaludin I. and Murthy D.N.P (2004), Warranty and discrete preventive maintenance, *Reliability engineering and system safety*, 84, pp. 301-309.

Lam Y. and Lam P.K.W (2001), An extended warranty policy with options open to consumer, *European Journal of Operational Research*, 131, pp 514-529.

Lin D., Zuo M.J., Yam R.C.M., Meng M.Q-H (2000), Optimal system design considering warranty, periodic preventive maintenance, and minimal repair, *Journal of the Operational Research Society*, 51, 869-874.

Lyonnet P. (2000), La maintenance: mathématiques et méthodes, *édition 4*, pp 110-113.

Lyonnet P. (2006), Ingénieurie de la fiabilité, Edition Tec et Doc, Paris.

Manna D.K., Surajit P., Sagnik S. (2006), Optimal determination of warranty region for 2D policy: A customers' perspective, *Computers & Industrial Engineering*, 50, 161-174.

Manna D.K., Surajit P., Sagnik S. (2007), A use-rate based failure model for two-dimensional warranty, *Computers & Industrial Engineering*, 52, 229-240.

Manna D.K., Surajit P., Sagnik S. (2008), A note on calculating cost of two-dimensional warranty policy, *Computers & Industrial Engineering*, 54, 1071-1077.

Monga A., Zuo M.J. and Toogood R. (1995.a), Reliability design for minimal life cycle costs, *Shmeise BW and Uzsoy R (Eds) Proceedings of the 4th Industrial Engineering Research Conference, IIE, Norcross, GA*, pp 335-341.

Monga A., Zuo M.J. and Toogood R. (1995.b), System design with deteriorative components for minimal life cycle costs, *Proceedings of the 1995 IEEE International Conference on Systems, Man and Cybernetics, IEEE, Piscataway NJ*, pp 1843-1848.

Monga A., Zuo M.J. and Toogood R. (1997), Reliability-based design of systems considering preventive maintenance and minimal repair, *Int J Reliabil, Quality and Safety Engng 4*: pp55-71.

Moskowitz H. et Chun Y.H. (1988), A Bayesian approach to the Two-Attribute Warranty Policy. *Paper No 950, Krannert Graduate school of management, Purdue University, West Lafayette, Indiana.*

Murthy D.N.P (1990), Product warranty: A review and technology Management Implications. *In proceeding of the second International Conference on management of technology, Miami, Florida.*

Murthy D .N.P. (1992), A usage dependent model for warranty costing, *European Journal Of Operational Research*, 57, 89-99.

Murthy D.N.P. et al. (1995), Two-dimensional failure-free warranty policies: Two-dimensional point process models, *Operations research*, Vol 43, No 2, pp 356-366.

Murthy D.N.P , Nguyen D.G. (1998), An optimal repair-cost limit policy for servicing warranty, *Math Comput Modelling*, 11, 595-599.

Murthy D.N.P et Wilson R.J. (1991), Modelling two-dimensional failure free warranties, *In Proc. Of the fifth Simpon Applied stochastic Models and Data Analysis*, Granada, spain 1991.

Murthy D.N.P. et Blishke W.R. (1992), Product warranty Management-II, An Integrated framework for study, *European journal of operational research*, 63, pp 261-281.

Nakagawa T. (1980), A summary of imperfect preventive maintenance policies with minimal repair, *R.A.I.R.O*, Vol.14, pp 249-255.

Nakagawa T. (1981), A summary of periodic replacement with minimal repair at failure, *Journal of the Operations Research Society of Japan*, Vol 24, pp 213-227.

Nguyen D.G. (1984), Studies in warranty policies and product reliability. *Phd Thesis, The University of Queensland, Australia.*

Nguyen DG, Murthy DNP. (1982) Optimal burn-in time to minimize cost for products sold under warranty. *IIE Trans*, 14,167–74.

Nguyen D.G. and Murthy D.N.P. (1986), An optimal policy for servicing warranty, *Journal of the Operational Research Society*, vol. 37, no. 11, pp 1081-1086.

Nguyen D.G. and Murthy D.N.P. (1989), Optimal replace - repair strategy for servicing products sold with warranty, *European Journal of Operational Research*, vol. 39, pp 206-212.

Padmanabhan V. (1995), Usage Heterogeneity and Extended Warranties, *Journal of economics and Management Strategy*, 4(1), pp 33-53.

Pascual R., Ortega J.H. (2006), Optimal replacement and overhaul decisions with imperfect maintenance and warranty contracts, *Reliability Engineering and System Safety*, 91, 241-248.

Rinsaka K., Sandoh H. (2006), A stochastic model with an additional warranty contract, *Computers and Mathematics with applications*, 51, 179-188.

Ruey H.Y, Tzu H.C. (2006), Optimal lot size and inspection policy for products sold with warranty, *European Journal of Operational Research*, 174, 766-776.

Singpurwalla N.D. (1987), A strategy for setting Optimal Warranties, *Report GWU/IRRA/Serial TR-87/4, The George Washington University, Washington, D.C.*

Sahin I. and Polatoglu H. (1996), maintenance strategies following the expiration of warranty, *IEEE Transaction On Reliability*, 45, 220-228.

Sheu S.H., Chien Y.H. (2005), Optimal burn-in time to minimize the cost for general repairable products sold under warranty. *European Journal of Operational Research*;163:445–61.

Shaomin W. , Huiquing, L. (2007), Warranty cost analysis for products with a dormant state, *European Journal Of Operational Research*, 182, 1285-1293.

Shaomin W. , Phil L. (2011), Optimizing age-replacement and extended non-renewing warranty policies in lifecycle costing, *International Journal of Production Economics*, 130, 262-267.

Wang, C.H., Sheu, S.H. (2003), Optimal lot sizing for products sold under free-repair warranty. *European Journal of Operational Research*, 149 (1), 131–141.

Wang, C.H., (2004), The impact of free-repair warranty policy on EMQ model for imperfect production systems. *Computers and Operations Research*, 31, 2021–2035.

Won.Young.Yun et al. (2008), Warranty servicing with imperfect repair, *International Journal of Production Economics, vol 111, pp 159-169.*

Yun WY, Lee YW, Ferreira L. (2002), Optimal burn-in time under cumulative free replacement warranty. *Reliability Engineering System Safety*, 78:93–100.

Yeh R.H., Lo H.C. (1998), Quality control for products under free-repair warranty, *International Journal of Operations and Quantitative Management*, 4, 265–275.

Yeh, R.H., Ho, W.T., Tseng, S.T. (2000), Optimal production run length for products sold with warranty. *European Journal of Operational Research*, 120, 575–582.

Yeh R.H., Chen G.C. and Chen M.Y (2005), Optimal age-replacement policy for non-repairable products under renewing free-replacement warranty, *IEEE Transactions Reliability*, vol. 54, no. 1, pp 92-97.

Yeh R.H. , Chen M.Y., Lin C.Y. (2007), Optimal periodic replacement policy for repairable products under free-repair warranty, *European Journal of Operational Research*, 176,1678-1686.

Yeo W.M. and Yuan X.M. (2009), Optimal warranty policies for systems with imperfect repair, *European Journal of Operational Research*, 199,187-197.

Résumé

Nous nous proposons dans ce travail de développer des modèles mathématiques pour étudier l'opportunité apportée par la période de garantie étendue pour les deux cas unidimensionnel et bidimensionnel aussi bien pour le consommateur que pour le fabricant du produit pour différentes situations. Nous exprimerons pour cela le coût total moyen encouru le long du cycle de vie du produit, ceci pour les deux points de vue : celui du consommateur et celui du fabriquant. Nous considèrerons également différentes options concernant les politiques de maintenance à adopter (faire de la maintenance préventive ou non) pour le produit durant les périodes suivantes : la période de garantie de base, la période de garantie étendue et la période post-garantie se terminant à la fin du cycle de vie du produit.

Nous exprimerons pour cela le coût total moyen encouru le long du cycle de vie du produit pour les points de vue consommateur et fabricant.

Pour tester les performances du modèle analytique, des calculs numériques ont été effectués afin de déterminer la zone de compromis pour la garantie étendue.

Abstract

In this study mathematical models are developed to study the opportunity provided by the extended warranty period for both two-dimensional and one-dimensional case for the consumer and the manufacturer of the product for different situations. We will express the total average cost incurred along the life cycle of the product, this to the two points of view: the consumer and the manufacturer. Also we will consider various options regarding maintenance policies to adopt (performing preventive maintenance or not) for the product during the following periods: the basic warranty period, the extended warranty period and post-warranty at the end of the life cycle of the product.

We will express the total average cost incurred along the life cycle of the product for the consumer and the manufacturer.

To test the performance of the analytical model, numerical calculations were performed to determine the area of compromise for the extended warranty.