



## AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : [ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr](mailto:ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr)

## LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

[http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg\\_droi.php](http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php)

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>



---

---

# Analyse de stabilité des systèmes à commutations singulièrement perturbés

---

---

## THESE

pour l'obtention du

**DOCTORAT DE L'UNIVERSITE DE LORRAINE**

présentée par

**Fouad El Hachemi**

---

Soutenue publiquement le 5 Décembre 2012

Devant la Commission d'Examen

## JURY

Rapporteurs :	M. Ugo Boscain	Directeur de recherche au CNRS
	M. Didier Henrion	Directeur de recherche au CNRS
Examineurs :	M. Francesco Rossi	Maître de conférences
	M. Marius Tucsnack	Professeur des universités
Directeur de thèse :	M. Jamal Daafouz	Professeur des universités
Co-directeur de thèse :	M. Mario Sigalotti	Chargé de recherche à l'INRIA







---

# Remerciements

Au nom de Dieu, Le Clément, Le Miséricordieux.

Avant d'exposer mes travaux de thèse, je souhaite remercier l'ensemble des personnes qui m'ont apporté soutien et conseils durant ces trois années de thèse.

Tout d'abord, je tiens à exprimer ma plus sincère reconnaissance à mes directeurs de thèse, Messieurs Jamal Daafouz et Mario Sigalotti pour m'avoir donné l'occasion d'effectuer cette thèse, pour leurs conseils, leur aide, leur patience, et le temps qu'ils ont pu me consacrer pour mener à bien ces travaux.

Je remercie également Monsieur Gérard Bloch qui m'a dirigé vers cette thèse.

Je tiens à exprimer ma gratitude à chacun des membres du jury, d'une part Messieurs Ugo Boscain et Didier Henrion pour avoir accepté de rapporter ce travail, et d'autre part Messieurs Francesco Rossi et Marius Tusnack pour avoir accepté le rôle d'examineur et de président du jury pour ce dernier.

Je remercie l'ensemble des membres du CRAN avec lesquels j'ai pu collaborer dans la bonne humeur (vous vous reconnaitrez). Un grand merci aux secrétaires Carole Courier et Christine Pierson pour leur aide précieuse et leur patience lors de mes démarches administratives. Enfin, je n'oublie pas de témoigner ma sympathie à mes camarades de thèse Carlos, Hassan, Julien, Mahmoud et Pascal, qui ont partagé cette expérience avec moi.

## Remerciements

---

Pour terminer, et même si les mots ne peuvent traduire ce que je souhaite exprimer, je ne remercierai jamais assez ma famille pour leur soutien et leur amour inconditionnels, en particulier mes parents. Que Dieu vous préserve.

Louanges à Allah

---

# Table des matières

<b>Notations</b>	<b>1</b>
<b>Introduction générale</b>	<b>6</b>
<b>I Outils</b>	<b>7</b>
1 Analyse de stabilité des systèmes non linéaires (sans commutations) . . . . .	7
1.1 Cas des systèmes non-linéaires à temps continu . . . . .	7
1.2 Cas des systèmes non-linéaires à temps discret . . . . .	9
2 Analyse de stabilité des systèmes singulièrement perturbés . . . . .	11
3 Stabilité des systèmes linéaires à commutations . . . . .	16
3.1 Présentation des systèmes linéaires à commutations et des problèmes de stabilité correspondants . . . . .	16
3.2 Synthèse de lois de commutations stabilisantes . . . . .	17
3.3 Stabilité des systèmes linéaires à commutations quelque soit la loi de commutations . . . . .	20
3.3.1 Stabilité des inclusions différentielles . . . . .	21
3.3.2 Fonctions de Lyapunov quadratiques communes . . . . .	23
3.3.3 Fonctions de Lyapunov poly-quadratiques . . . . .	25
3.3.4 Rayon spectral joint . . . . .	26
4 Conclusion . . . . .	27
<b>II Systèmes à commutations singulièrement perturbés à temps continu</b>	<b>29</b>
1 Positionnement du problème . . . . .	30



## Table des matières

---

1.1	Contre-exemple . . . . .	30
1.2	Approche géométrique dans le cas planaire . . . . .	33
2	Analyse de stabilité des SCSPs dans le cas planaire . . . . .	36
2.1	Conditions nécessaires et suffisantes . . . . .	36
2.2	Caractérisation des transitions de stabilité . . . . .	43
2.3	Comparaison des résultats . . . . .	46
2.3.1	Conditions basées sur des LMIs . . . . .	46
2.3.2	Systèmes singulièrement perturbés vus comme des inclusions différentielles . . . . .	47
3	Conclusion . . . . .	49
<b>III Systèmes à commutations singulièrement perturbés à temps discret</b>		<b>51</b>
1	Discrétisation des systèmes linéaires à commutations . . . . .	51
1.1	L'exponentielle de la matrice . . . . .	52
1.1.1	Préservation de la stabilité . . . . .	53
1.1.2	Préservation des Fonctions de Lyapunov . . . . .	54
1.2	Approximations de Padé . . . . .	55
1.2.1	Préservation de la stabilité dans le cas linéaire . . . . .	55
1.2.2	Non préservation de la stabilité pour les systèmes à commutations	56
1.2.3	Préservation des fonctions de Lyapunov quadratiques . . . . .	57
1.2.4	Préservation de la stabilité dans un cas particulier . . . . .	57
1.3	Discrétisation d'Euler . . . . .	59
1.3.1	Préservation de la stabilité . . . . .	59
1.3.2	Préservation des CQLFs . . . . .	59
2	Stabilité des systèmes à commutations singulièrement perturbés à temps discret	60
2.1	Discrétisation exacte . . . . .	61
2.2	Echantillonnage d'ordre 1 ou échantillonnage lent . . . . .	63
2.2.1	Cas des SSPs linéaires . . . . .	63
2.2.2	Cas des systèmes à commutations . . . . .	65
2.3	Echantillonnage d'ordre $\epsilon$ . . . . .	69
2.3.1	Cas des systèmes sans commutations . . . . .	69
2.3.2	Cas des systèmes à commutations . . . . .	70
2.4	Echantillonnage d'ordre $\epsilon^2$ . . . . .	74
2.4.1	Fonctions de Lyapunov et cas sans commutations . . . . .	77
2.4.2	Fonctions de Lyapunov : cas des systèmes à commutations . . . . .	78

3	Conclusion . . . . .	80
	<b>Conclusion générale et perspectives</b>	<b>83</b>
	<b>Annexe</b>	<b>85</b>
1	Modèles à temps discret des systèmes à commutations singulièrement perturbés	85
1.1	Modèle discrétisé à l'ordre 1 . . . . .	87
1.2	Modèle discrétisé à l'ordre $\epsilon$ . . . . .	88
1.3	Modèle discrétisé à l'ordre $\epsilon^2$ . . . . .	89
	<b>Références bibliographiques</b>	<b>91</b>

## Table des matières

---

---

# Notations

- $\mathbb{R}$  : ensemble des nombres réels,
- $\mathbb{C}$  : ensemble des nombres complexes,
- $\mathbb{N}$  : ensemble des nombres entiers naturels,
- $[a, b]$  : intervalle fermé de  $\mathbb{R}$  d'extrémités  $a$  et  $b$ ,
- $(a, b)$  : intervalle ouvert de  $\mathbb{R}$  d'extrémités  $a$  et  $b$ ,
- $[a, b)$  ou  $(a, b]$  : intervalle semi-ouvert de  $\mathbb{R}$  d'extrémités  $a$  et  $b$ ,
- $\mathbb{R}^n$  : espace vectoriel de dimensions  $n$  construit sur le corps des réels,
- $x^T$  : transposée du vecteur  $x \in \mathbb{R}^n$ ,
- $M_n(\mathbb{K})$  : ensemble des matrices de dimension  $n \times n$  à coefficients dans  $\mathbb{K}$  ( $= \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ),
- $I$  : matrice identité,
- $X > 0$  : matrice carrée symétrique définie positive,
- $X^{-1}$  : inverse de la matrice carrée non-singulière  $X$ ,

- $X^T$  : transposée de la matrice  $X$ ,
- $\text{tr}(X)$  : trace de la matrice  $X$ ,
- $\det(X)$  : déterminant de la matrice  $X$ ,
- $\text{rang}(X)$  : rang de la matrice  $X$ ,
- $\|X\|$  : norme matricielle induite par la norme euclidienne,
- $\text{spec}(X)$  : spectre de la matrice  $X$ ,
- $\text{dim}(X)$  : dimension de la matrice  $X$ ,
- $\langle f, g \rangle$  : produit scalaire de  $f$  et de  $g$ ,
- $\text{co}(\mathcal{E})$  : enveloppe convexe d'un ensemble  $\mathcal{E}$ ,
- $\mathcal{J} = \{1, 2, \dots, N\}$ .

---

# Introduction générale

## Introduction générale

De manière générale, l'automatique est une discipline permettant l'étude des systèmes, et dont les domaines d'application sont très nombreux, tels que l'électricité, la mécanique, l'aérospatial, la robotique, la chimie, la biologie, l'économie, etc . . . Comme l'indique le titre de ce mémoire, nous nous intéresserons dans la suite à des problèmes de stabilité qui occupent une place importante dans ce domaine. Cette thèse entre dans le cadre de l'analyse de stabilité des systèmes à commutations qui représentent une classe importante des systèmes hybrides. Ces derniers ont suscité un intérêt croissant depuis la fin des années 90, intérêt justifié notamment par le développement des systèmes embarqués. Un système à commutations est décrit simultanément par une dynamique continue (un ensemble de sous-systèmes) et une dynamique discrète (que l'on appelle la loi de commutation et qui indique quel sous-système est actif à chaque instant). Afin d'illustrer concrètement les systèmes à commutations, intéressons au déplacement d'une voiture dont on souhaite connaître la position et la vitesse à chaque instant. Pour cela, on cherche à coller un modèle mathématique au déplacement de la voiture. Or, on sait que le comportement du véhicule varie selon le rapport de vitesse enclenché. C'est pourquoi nous associons à chaque rapport de vitesse une équation pour décrire le déplacement de la voiture lorsque celui-ci est engagé. Ainsi, si la voiture possède 5 rapports de vitesse pour aller en avant et un rapport pour la marche-arrière. On a alors sept équations pour décrire le mouvement du véhicule, la septième correspondant à la roue-libre (pied sur l'embrayage ou levier de vitesse au point mort). Bien évidemment, un seul rapport de vitesse est enclenché à chaque instant et donc une seule équation décrira le mouvement à chaque instant. Dans cet exemple, une commutation représente un changement de vitesse (de la première à la deuxième, de la deuxième à

la première etc. . . ) qui est permis grâce au levier de la boîte à vitesses qui joue le rôle de la loi de commutations.

La notion de système singulièrement perturbé est bien connue en automatique. Les premiers travaux remontent aux années 50, et plus particulièrement aux travaux de Tikhonov menés dans l'ancienne Union soviétique. Cette notion signifie la présence de plusieurs échelles de temps dans le système, c'est-à-dire que le système est décrit par des variables qui évoluent à des vitesses différentes. La théorie des perturbations singulières permet alors de séparer les variables lentes des variables rapides. En pratique, il arrive que les systèmes soient caractérisés par ces deux propriétés. Toutefois, de tels systèmes sont numériquement raides, et donc, difficiles à analyser. L'exemple du contrôle de guidage de bande pendant le processus de laminage dans un laminoir à chaud permet de souligner l'intérêt d'étudier les systèmes à commutations singulièrement perturbés. Cette application est décrite dans [39] où il est montré que le contrôle du guidage de bande pour la dernière phase de ce processus se réduit à la synthèse d'une commande pour un système à commutations singulièrement perturbé. D'autres exemples tirés du domaine du génie électrique peuvent également illustrer la présence conjointe de ces deux phénomènes.

Dans cette thèse, nous nous intéressons à l'analyse de stabilité des systèmes à commutations singulièrement perturbés à temps continu en nous plaçant dans le cas planaire. Ensuite, nous étudions la discrétisation de ces systèmes pour différentes périodes d'échantillonnage, en privilégiant l'aspect de la préservation de la stabilité du temps continu vers le temps discret.

## Structure du mémoire

### Chapitre I

Dans ce premier chapitre, après l'introduction des notions générales de stabilité pour les systèmes non linéaires, nous rappelons formellement la méthode de séparation des échelles de temps pour les systèmes singulièrement perturbés. Ensuite, nous présentons la classe des systèmes linéaires à commutations en rappelant des problématiques liées à la stabilité de ces derniers, et nous rappelons quelques résultats de la littérature.

### Chapitre II

Nous commençons ce second chapitre en introduisant notre problématique, et en donnant un contre-exemple permettant de montrer la non-validité de l'approche classique de séparation des

échelles de temps pour les systèmes à commutations singulièrement perturbés. Nous rappelons également le concept de la *pire trajectoire* sur lequel repose le principal résultat de cette partie. S'en suit alors le résultat de stabilité caractérisant complètement le comportement asymptotique des systèmes auxquels on s'intéresse. Nous engageons ensuite une discussion sur ce résultat, notamment en le comparant avec deux autres approches, l'une à base d'inégalités matricielles linéaires, et l'autre basée sur une approche de type séparation des échelles de temps mais dans le cadre des inclusions différentielles.

## Chapitre III

Le dernier chapitre concerne la discrétisation des systèmes à commutations singulièrement perturbés. Dans un premier temps, nous rappelons les récents résultats concernant la discrétisation des systèmes linéaires à commutations et la préservation de la stabilité sous différents modèles de discrétisation. Ensuite, nous proposons trois modèles obtenus pour trois choix différents de la période d'échantillonnage. Pour chacun d'eux, nous tentons de déterminer si la stabilité (ou un type de stabilité particulier) est préservée. En particulier, le dernier modèle proposé est obtenu pour un choix de la période d'échantillonnage qui n'a pas été considéré dans le cadre des systèmes singulièrement perturbés sans commutations, et, comme nous le verrons, permet de préserver certaines fonctions de Lyapunov.

Nous terminons ce manuscrit par une conclusions générale et des perspectives envisageables.

## Références

Les travaux effectués durant cette thèse ont donné lieu aux publications suivantes.

### Revue internationale avec comité de lecture

- F. El Hachemi, M. Sigalotti et J. Daafouz. Stability analysis of singularly perturbed switched linear systems. Dans *IEEE Transactions On Automatic Control*, 8(57) : 2116–2121, 2011.

### Conférences internationales avec comité de lecture

- F. El Hachemi, M. Sigalotti et J. Daafouz. Stability of planar singularly perturbed switched systems. Dans *Proceedings of the 2011 IEEE American Control Conference*,



pages 1464–1469, San Francisco, USA, 2011.

- F. El Hachemi, M. Sigalotti et J. Daafouz. Characterization of stability transitions and practical stability of planar singularly perturbed linear switched systems. Dans *Proceedings of the 50th IEEE Conference On Decision and Control and European Control Conference*, pages 423–428, Orlando, USA, 2011.

---

---

# Chapitre I

---

## Outils

Dans ce premier chapitre, nous introduisons quelques concepts d'automatique, en particulier sur la stabilité des systèmes. Dans un premier temps, un rappel sur la stabilité des systèmes non linéaires (au sens classique du terme) est donné. Nous présentons ensuite les systèmes singulièrement perturbés ainsi que l'analyse de stabilité de ces systèmes par la méthode de séparation des échelles de temps. Enfin, nous terminons ce chapitre en introduisant les systèmes linéaires à commutations et quelques résultats de stabilité liés à cette classe de systèmes.

### 1 Analyse de stabilité des systèmes non linéaires (sans commutations)

#### 1.1 Cas des systèmes non-linéaires à temps continu

Considérons le système autonome invariant dans le temps suivant

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) \tag{I.1}$$

où  $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n$  est une fonction Lipschitzienne et  $\Omega$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ . Les points d'équilibre de (I.1) sont les solutions de l'équation  $f(x) = 0$ .

**Définition 1.** *Un point d'équilibre  $x^*$  du système (I.1) est dit*

- *stable si  $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0$  tel que*

$$\|x(0) - x^*\| < \delta \Rightarrow \|x(t) - x^*\| < \epsilon, \forall t \geq 0,$$

- *asymptotiquement stable si  $x^*$  est stable et si il existe  $\delta > 0$  tel que*

$$\|x(0) - x^*\| < \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x^*,$$

- globalement asymptotiquement stable si  $x^*$  est stable et  $\forall x(0) \in \mathbb{R}^n$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x^*.$$

- localement exponentiellement stable s'il existe trois nombres réels positifs  $c, K$  and  $\lambda$  tels que

$$\forall \|x(0) - x^*\| < c, \|x(t) - x^*\| \leq K \|x(0) - x^*\| e^{-\lambda t},$$

- instable s'il n'est pas stable.

Sans perte de généralité, nous considérons dans la suite  $x^* = 0$ . La théorie de Lyapunov est un outil important en automatique, permettant de conclure sur la stabilité d'un point d'équilibre du système. Elle repose sur l'existence de fonctions, vérifiant certains critères, et qui représentent d'une certaine manière l'énergie du système. Ce qui suit donne plus de détails sur de telles fonctions et sur la stabilité au sens de Lyapunov. Ces résultats, maintenant classiques, peuvent être trouvés dans n'importe quel ouvrage d'automatique de référence [21, 24, 27].

**Définition 2.** Une fonction  $V(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  continûment différentiable est dite définie positive dans une région  $\Omega$  autour de l'origine si :

- $V(0) = 0$
  - $V(x) > 0$  pour tout  $x \in \Omega - \{0\}$
- (I.2)

Si (I.2) est remplacée par  $V(x) \geq 0$  alors la fonction est dite semi-définie positive. Une classe de fonctions souvent utilisée pour l'analyse des systèmes est celle des fonctions quadratiques  $V(x) = x^T P x$  où  $P$  est une matrice symétrique réelle.

**Définition 3.** Une fonction quadratique  $V(x) = x^T P x$  est dite définie positive (respectivement semi-définie positive) si toutes les valeurs propres de la matrice  $P$  sont strictement positives (respectivement positives).

**Théorème 1.** Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  une région incluant l'origine. L'état d'équilibre  $x^* = 0$  est

- localement stable s'il existe une fonction continûment dérivable  $V(x)$  telle que :
  - $V$  est définie positive,
  - $\frac{dV(x)}{dt} \leq 0, \quad \forall x \in \Omega - \{0\}$ .

- *localement asymptotiquement stable s'il existe une fonction continûment dérivable  $V(x)$  telle que :*
  - *$V$  est définie positive,*
  - $\frac{dV(x)}{dt} < 0, \quad \forall x \in \Omega - \{0\}.$
- *globalement asymptotiquement stable s'il existe une fonction continûment dérivable  $V(x)$  telle que :*
  - *$V$  est définie positive,*
  - $\frac{dV(x)}{dt} < 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n - \{0\}$
  - $V(x) \rightarrow \infty$  lorsque  $\|x\| \rightarrow \infty.$

La fonction  $V(x)$  est appelée fonction de Lyapunov.

Dans le cas particulier des systèmes linéaires invariants dans le temps (LTI) s'écrivant

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \tag{I.3}$$

l'origine est asymptotiquement stable si et seulement si toutes les valeurs propres de  $A$  sont à partie réelle strictement négative.

**Théorème 2.** *Le point d'équilibre  $x^* = 0$  de (I.3) est quadratiquement stable si et seulement si, pour toute matrice  $Q = Q^T > 0$ , il existe une matrice  $P = P^T > 0$  vérifiant l'équation de Lyapunov*

$$A^T P + P A + Q = 0.$$

On remarque que pour les systèmes LTI, la stabilité asymptotique est équivalente à la stabilité quadratique.

## 1.2 Cas des systèmes non-linéaires à temps discret

Considérons maintenant un système non-linéaire à temps-discret, s'écrivant

$$x(k+1) = f(x(k)). \tag{I.4}$$

On note  $x^* = 0$  le point d'équilibre de (I.4). Comme dans le cas du temps continu, la théorie de Lyapunov permet encore de fournir des conditions suffisantes de stabilité dans le cas général.

**Théorème 3.** *On considère le système dynamique non-linéaire (I.4). L'équilibre  $x^* = 0$  est dit*

► *localement stable s'il existe une fonction  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  et un voisinage  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  de l'origine tels que :*

- $V(x) > 0 \quad \forall x \in \Omega \setminus \{0\}$  et  $V(0) = 0$ ,
- $\Delta V(x(k)) \leq 0, \quad \forall x \in \Omega, x \neq 0$ ,

► *localement asymptotiquement stable s'il existe une fonction  $V(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  et un voisinage  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  de l'origine tels que :*

- $V(x) > 0 \quad \forall x \in \Omega$  et  $V(0) = 0$ ,
- $\Delta V(x(k)) < 0, \quad \forall x \in \Omega, x \neq 0$ ,

► *globalement asymptotiquement stable s'il existe une fonction  $V(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  telle que :*

- $V(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$  et  $V(0) = 0$ ,
- $\Delta V(x(k)) < 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0$ ,
- $V(x) \rightarrow \infty$  lorsque  $\|x\| \rightarrow \infty$ ,

avec  $\Delta V(x(k)) = V(x(k+1)) - V(x(k))$ .

Dans le cas particulier des systèmes linéaires à temps-discret, à l'instar du cas à temps-continu, la condition d'existence d'une fonction de Lyapunov s'avère être nécessaire et suffisante. En effet, considérons le système

$$x(k+1) = Ax(k), \tag{I.5}$$

avec  $x^* = 0$  le point d'équilibre. De la même manière que pour les systèmes LTI à temps continu, le théorème suivant rappelle l'équivalence entre la stabilité asymptotique et la stabilité quadratique pour les systèmes LTI à temps discret.

**Théorème 4.** *Le point d'équilibre  $x^* = 0$  de (I.5) est asymptotiquement stable si et seulement si, pour toute matrice  $Q = Q^T > 0$ , il existe une matrice  $P = P^T > 0$  vérifiant l'équation de Lyapunov*

$$A^T P A - P + Q = 0.$$

Pour le cas des systèmes LTI à temps-discret, un autre outil permet d'obtenir des conditions nécessaires et suffisantes pour la stabilité asymptotique du point d'équilibre  $x^*$  de (I.5). Celui-ci est le rayon spectral de la matrice  $A$ , qui caractérise le taux de croissance des puissances successives de la matrice  $A$ .

**Définition 4.** *Le rayon spectral d'une matrice est défini comme étant le plus grand module des valeurs propres*

$$\rho(A) = \max\{|\lambda|, \text{ tel que } \lambda \in \mathbb{C} \text{ est une valeur propre de } A\}.$$

**Théorème 5.** *Le point d'équilibre du système (I.5) est globalement asymptotiquement stable (GAS) si et seulement si  $\rho(A) < 1$ .*

Dans la suite, afin d'alléger l'écriture, nous utiliserons les expressions système stable (respectivement, asymptotiquement stable, quadratiquement stable, instable) pour désigner un système ayant l'origine comme point d'équilibre unique stable (respectivement, asymptotiquement stable, quadratiquement stable, instable).

## 2 Analyse de stabilité des systèmes singulièrement perturbés

Dans le cas des systèmes dynamiques sans commutations, la théorie des perturbations singulières fournit un ensemble d'outils pour analyser la stabilité en séparant les échelles de temps (voir, par exemple, [28, 51]). Le principe de séparation en deux échelles de temps permet de définir deux sous-systèmes, correspondant aux dynamiques lente et rapide du système, et dont, la stabilité asymptotique de chacun d'eux implique la stabilité asymptotique du système complet de départ pour de petites valeurs du paramètre de perturbation ( $\epsilon$ ). Considérons le système singulièrement perturbé (SSP) non linéaire suivant

$$\dot{x}(t) = f(x(t), z(t), \epsilon, t) \tag{I.6}$$

$$\epsilon \dot{z} = g(x(t), z(t), \epsilon, t), \tag{I.7}$$

où  $x(t)$ ,  $z(t)$  représentent respectivement des vecteurs colonnes de  $\mathbb{R}^n$ ,  $\mathbb{R}^m$ , et  $f$  et  $g$  sont des fonctions continûment différentiables,  $\epsilon$  est un réel strictement positif, et  $t$  représente le temps. Opérant dans deux échelles de temps différentes,  $t$  et  $\tau = \epsilon t$  ( $\epsilon$  assez petit), l'analyse de

stabilité des SSPs semble assez complexe au premier abord. Une manière d'établir la convergence consiste à analyser les dynamiques lentes et rapides séparément (indépendamment), pour pouvoir conclure sur le système de départ pour de petites valeurs positives de  $\epsilon$ .

Dans un grand nombre d'applications, il est d'usage de négliger la dynamique rapide du système (le régime transitoire) pour ne considérer que la dynamique lente (le régime permanent), opération dite de réduction d'ordre. Pour ce faire, il suffit de poser  $\epsilon = 0$  dans les équations ci-dessus, ce qui transforme la deuxième équation différentielle en une équation algébrique

$$0 = g(\bar{x}(t), \bar{z}(t), 0, t) \quad (\text{I.8})$$

où  $\bar{x}$  et  $\bar{z}$  représentent les variables d'états pour  $\epsilon = 0$ . Ainsi, l'ordre du système, qui était de  $n + m$ , est réduit à  $n$ . On suppose que (I.8) a  $p \geq 1$  racines réelles distinctes :

$$\bar{z}(t) = h_i(\bar{x}(t), t) \quad (\text{I.9})$$

avec  $i = 1, 2, \dots, p$ . Ainsi à chaque racine (I.9) on associe le modèle réduit (modèle lent) de dimension  $n$  suivant

$$\dot{\bar{x}} = f(\bar{x}, h_i(\bar{x}, t), 0, t)$$

avec la même condition initiale  $x_0$ . Quant à la dynamique rapide  $\bar{z}(t)$ , sa condition initiale est contrainte par  $\bar{z}_0 = h(\bar{x}_0, 0)$  qui, a priori, est différent de  $z_0$ . Ainsi, alors que l'approximation de la dynamique lente

$$x(t) - \bar{x}(t) = O(\epsilon) \quad (\text{I.10})$$

est valable sur  $[0, T]$ , l'approximation de la dynamique rapide

$$z(t) - \bar{z}(t) = O(\epsilon) \quad (\text{I.11})$$

ne peut-être valide que sur l'intervalle  $[t_1, T]$  avec  $t_1 > 0$ . Cette approximation (I.11) nécessite que durant l'intervalle de temps  $[0, t_1]$ , la variable  $z$  s'approche de  $\bar{z}$  pour rester proche de celle-ci sur l'intervalle  $[t_1, T]$ . Pour savoir si cette condition est satisfaite, intéressons nous à la dynamique rapide du système de départ, à savoir  $\epsilon \dot{z}$ . Pour cela, posons le changement de variable suivant

$$\epsilon \frac{dz}{dt} = \frac{dz}{d\tau}, \quad \text{ou encore} \quad \frac{dt}{d\tau} = \epsilon$$

qui correspond au changement d'échelle de temps. Nous introduisons le terme correcteur  $\hat{z}$  tel

que

$$\hat{z} = z - \bar{z}$$

et

$$\frac{d\hat{z}}{d\tau} = g(x_0, \hat{z}(\tau), 0, 0), \quad (\text{I.12})$$

avec la condition initiale  $\hat{z}_0 = z_0 - \bar{z}_0$ . Ainsi, la solution  $\hat{z}$  peut être utilisée comme terme correcteur de (I.11) pour l'approximation uniforme de  $z$  suivante

$$z(t) = \bar{z}(t) + \hat{z}(\tau) + O(\epsilon) \quad (\text{I.13})$$

qui converge vers (I.11) si le terme de correction  $\hat{z}$  tend vers zéro lorsque  $\tau \rightarrow \infty$ . Le théorème suivant donne les conditions afin que les approximation (I.10) et (I.11) soient valables.

**Théorème 6.** [28] *On suppose que le point d'équilibre  $\hat{z}(\tau) = 0$  de (I.12) soit uniformément asymptotiquement stable et que  $\hat{z}_0 = z_0 - \bar{z}(0)$  appartienne à son bassin d'attraction. Supposons également que les valeurs propres de  $\frac{\partial g}{\partial z}$  évaluées pour  $\epsilon = 0$  le long de  $\bar{x}(t), \bar{z}(t)$  sont à partie réelle strictement négative. Alors, les approximations (I.10) et (I.13) sont valables pour tout  $t \in [0, T]$ , et il existe  $t_1 > 0$  tel que (I.11) soit valable pour tout  $t \in [t_1, T]$ .*

Les résultats donnés ci-dessus sont valables dans le cas des systèmes singulièrement perturbés non linéaires. Dans le cas des SSPs linéaires, les équations (I.6) et (I.7) deviennent

$$\dot{x}(t) = A_{11}x(t) + A_{12}z(t) \quad (\text{I.14})$$

$$\epsilon \dot{z}(t) = A_{21}x(t) + A_{22}z(t). \quad (\text{I.15})$$

Le changement de variable

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ \eta(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{I}_n & 0 \\ L(\epsilon) & \mathbb{I}_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

permet de réécrire (I.14) et (I.15) de la manière suivante

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \epsilon \dot{\eta}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} - A_{12}L & A_{12} \\ R(L, \epsilon) & A_{22} + \epsilon LA_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ \eta(t) \end{pmatrix} \quad (\text{I.16})$$

avec

$$R(L, \epsilon) = A_{21} - A_{22}L + \epsilon LA_{11} - \epsilon LA_{12}L. \quad (\text{I.17})$$

La solution  $L(\epsilon)$  satisfaisant  $R(L, \epsilon) = 0$  nous amène à réécrire (I.16) sous une forme triangulaire



par blocs

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \epsilon \dot{\eta}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} - A_{12}L & A_{12} \\ 0 & A_{22} + \epsilon LA_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ \eta(t) \end{pmatrix}.$$

La question qui se pose est de savoir si une telle solution  $L(\epsilon)$  existe, et si elle est unique. Le lemme qui suit répond à cette question.

**Lemme 1.** [28] *On suppose que  $A_{22}$  est régulière et on écrit  $A_s = A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}$ . Alors il existe  $\epsilon_0 \geq 0$  tel que pour tout  $\epsilon \in [0, \epsilon_0]$ , il existe une solution  $L(\epsilon)$  à l'équation (I.17) qui est approximée par*

$$L(\epsilon) = A_{22}^{-1}A_{21} + \epsilon A_{22}^{-2}A_{21}A_s + O(\epsilon^2). \quad (\text{I.18})$$

**Démonstration.** Le premier terme de (I.18) n'est rien d'autre que la solution de (I.17) pour  $\epsilon = 0$ , c'est-à-dire,

$$L(0) = A_{22}^{-1}A_{21}.$$

Pour retrouver le deuxième terme du développement limité de  $L(\epsilon)$  en 0, c'est-à-dire  $\left. \frac{dL}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0}$ , on dérive  $R(L, \epsilon)$  par rapport à  $\epsilon$ , ce qui donne

$$[A_{22} + \epsilon L(\epsilon)A_{12}] \frac{dL}{d\epsilon} - \epsilon \frac{dL}{d\epsilon} [A_{11} - A_{12}L(\epsilon)] = L(\epsilon)A_{11} - L(\epsilon)A_{12}L(\epsilon).$$

L'unique solution de cette équation en  $\epsilon = 0$  est

$$\left. \frac{dL}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} = A_{22}^{-1}L(0)[A_{11} - A_{12}L(0)] = A_{22}^{-2}A_{21}A_s.$$

On note que  $L(\epsilon)$  définie par (I.18) est unique dans la mesure où, bien que l'équation (I.17) puisse avoir plusieurs solutions, une seule parmi elles est approximé par (I.18).  $\square$

Cette matrice triangulaire par blocs nous permet d'obtenir son polynôme caractéristique

$$\Phi(s, \epsilon) = \Phi_s(s, \epsilon)\Phi_f(p, \epsilon) = 0$$

avec

$$\Phi_s(s, \epsilon) = \det(s\mathbb{I}_n - (A_{11} - A_{12}L))$$

le polynôme caractéristique du sous-système lent, et

$$\Phi_f(p, \epsilon) = \det(p\mathbb{I}_m - (A_{22} + \epsilon LA_{12}))$$

le polynôme caractéristique du sous-système rapide pris dans l'échelle des hautes fréquences  $p = \epsilon s$ . Ainsi, les  $n + m$  valeurs propres du système (I.14), (I.15) correspondent aux racines des équations caractéristiques associées aux sous-systèmes lent et rapide suivantes

$$\begin{aligned}\Phi_s(s, \epsilon) &= 0 \\ \Phi_f(p, \epsilon) &= 0.\end{aligned}$$

Pour  $\epsilon = 0$ , les racines de l'équation caractéristique du sous-système lent

$$\Phi_s(s, \epsilon) = \det(s\mathbb{I}_n - (A_{11} - A_{12}L(0))) = 0$$

correspondent aux valeurs propres de  $A_s$ , et les racines de l'équation caractéristique du sous-système rapide

$$\Phi_f(p, 0) = \det(p\mathbb{I}_m - A_{22}) = 0$$

correspondent aux valeurs propres de la matrice  $A_{22}$ . Le théorème suivant dit comment les valeurs propres associées aux sous-systèmes lent et rapide (obtenues pour  $\epsilon = 0$ ) approximent les valeurs propres du système initial (I.14), (I.15).

**Théorème 7.** [28] *Si  $A_{22}^{-1}$  existe, alors lorsque  $\epsilon \rightarrow 0$  les  $n$  premières valeurs propres du système (I.14), (I.15) convergent vers des points fixes dans le plan complexe définis par les valeurs propres de  $A_s$ , alors que les  $m$  valeurs propres restantes du système (I.14), (I.15) tendent vers l'infini, avec un taux de croissance d'ordre  $1/\epsilon$ , le long des asymptotes définies par les valeurs propres de  $A_{22}$ .*

Il s'en suit le résultat de stabilité asymptotique suivant.

**Corollaire 1.** *Si  $A_{22}^{-1}$  existe, et si  $A_s$  et  $A_{22}$  sont des matrices Hurwitz, alors il existe  $\epsilon_0 > 0$  tel que pour tout  $\epsilon \in (0, \epsilon_0]$  le système (I.14), (I.15) est asymptotiquement stable.*

Ainsi l'analyse de stabilité des sous-systèmes lent et rapide permet de conclure sur la stabilité du système de départ pour  $\epsilon > 0$  assez petit. Nous verrons plus loin que ceci n'est plus vrai dans le cas des systèmes à commutations singulièrement perturbés.

### 3 Stabilité des systèmes linéaires à commutations

#### 3.1 Présentation des systèmes linéaires à commutations et des problèmes de stabilité correspondants

Un système linéaire à commutations (SLC) est un système dynamique composé d'un nombre fini de sous-systèmes et d'une loi dite de commutation permettant de gérer les commutations entre ces différents sous-systèmes. En temps continu, un système linéaire à commutations est décrit par le modèle suivant

$$\dot{x}(t) = A_{\sigma(t)}x(t) \tag{I.19}$$

avec  $x \in \mathbb{R}^n$  l'état du système,  $t \in \mathbb{R}$  le temps,  $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{J}$  la loi de commutations,  $A_{\sigma(t)} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$  la matrice dynamique du système, et  $\mathcal{J}$  l'ensemble des indices  $\{1, \dots, N\}$  représentant les sous-systèmes ou encore les modes du système linéaire à commutations (I.19). De la même manière, en temps discret, un SLC a la forme

$$x(k+1) = A_{\sigma(k)}x(k) \tag{I.20}$$

avec  $x \in \mathbb{R}^n$  l'état du système,  $k \in \mathbb{N}^+$  le temps,  $\sigma : \mathbb{N}^+ \rightarrow \mathcal{J}$  la loi de commutations,  $A_{\sigma(k)} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$  la matrice dynamique du système, et  $\mathcal{J}$  l'ensemble des indices  $\{1, \dots, N\}$  représentant les modes du système linéaire à commutations (I.20). Nous remarquons que l'origine  $x^* = 0$  est un équilibre de (I.19) et (I.20). L'analyse de stabilité qui est le cadre des travaux de cette thèse, a été un des domaines de recherche qui a connu beaucoup de développements durant ces quinze dernières années. L'analyse de stabilité dans le cas des systèmes linéaires à commutations est différente du cas LTI dans la mesure où l'on observe certains phénomènes intéressants. Parmi eux, on peut citer le cas où bien que tous les modes (sous-systèmes) soient asymptotiquement stables, on peut trouver une loi de commutations qui déstabilise le système (I.19) [17, 31]. Inversement, on peut trouver une loi de commutations qui stabilise un SLC composé de sous-systèmes instables [17, 31]. Ainsi ces phénomènes mettent en avant le fait que la stabilité asymptotique des sous-systèmes ne suffit pas pour garantir la stabilité des systèmes linéaires à commutations mais qu'il faut prendre en compte les propriétés de la loi de commutations. Donc, l'analyse de stabilité des systèmes linéaires à commutations peut être divisée en deux parties :

- d'une part, trouver les conditions de stabilité du système linéaire à commutations quelque soit la loi de commutations
- d'autre part, trouver les conditions sur la loi de commutations telles que le SLC soit

stable.

Dans la suite, nous donnons quelques résultats concernant les deux problématiques citées ci-dessus. Nous aborderons brièvement la deuxième problématique dans un premier temps, puis porterons une attention plus particulière au premier problème qui correspond au cadre du sujet de ce mémoire pour une classe particulière de systèmes à commutations. Pour plus de détails, nous renvoyons le lecteur vers les articles suivants [17, 31, 33, 35, 65] qui font un état de l'art de ce qui existe dans ce domaine.

Pour mener à bien ce travail, il convient de définir quelques notions complémentaires de stabilité des SLCs. Tout d'abord, nous rappelons qu'une fonction continue  $\beta : [0, +\infty) \times [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$  est de classe  $\mathcal{KL}$  si, pour tout  $r \geq 0$ ,  $\beta(r, \cdot)$  est décroissante,  $\beta(\cdot, r)$  est croissante, et  $\beta(0, r) = \lim_{s \rightarrow +\infty} \beta(r, s) = 0$ .

**Définition 5.** *Le système à commutations (I.19) est dit instable s'il admet une trajectoire qui tend vers l'infini.*

**Définition 6.** *Le système (I.19) est globalement uniformément asymptotiquement stable (GUAS) s'il existe une fonction  $\beta$  de classe  $\mathcal{KL}$  telle que pour tout signal de commutations  $\sigma$  et pour toute condition initiale  $x(0)$ , la solution de (I.19) vérifie l'inégalité*

$$|x(t)| \leq \beta(|x(0)|, t), \quad \forall t \geq 0.$$

**Définition 7.** *Le système (I.19) est dit globalement uniformément exponentiellement stable (GUES), s'il existe deux réels  $c, \lambda > 0$  tels que pour tout signal de commutation  $\sigma$  et pour toute condition initiale  $x(0)$ , la solution de (I.19) vérifie l'inégalité*

$$|x(t)| \leq ce^{-\lambda t} |x(0)|.$$

Il convient de noter que les définitions de GUES et GUAS données précédemment sont équivalentes pour les systèmes linéaires à commutations [16, 47].

### 3.2 Synthèse de lois de commutations stabilisantes

Dans la littérature, la recherche des conditions sur la loi de commutations afin que le SLC soit asymptotiquement stable s'est faite principalement selon deux approches. La première consiste à faire dépendre la loi de commutations de l'état du système, c'est-à-dire, que l'on partage l'espace d'état du système en plusieurs régions délimitées par des frontières, où chaque

région correspond à un mode du système, les commutations correspondantes aux transitions des frontières. Quant à la seconde, elle consiste à commuter relativement lentement, c'est-à-dire à imposer un temps minimal entre deux instants de commutations, afin que le SLC soit asymptotiquement stable.

Dans le cas où les matrices  $A_i$ , pour  $i = 1, \dots, N$ , sont Hurwitz, alors le problème de stabilisation du système (I.19) est trivial puisque l'activation d'un seul mode permet d'arriver à notre fin. A contrario, lorsque les matrices  $A_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , sont instables, trouver une loi de commutations qui stabilise le système défini par (I.19) est moins banal. Le résultat suivant donne des conditions suffisantes pour la stabilité asymptotique [72, 73].

**Théorème 8.** *Soit  $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_N\}$  un ensemble de matrices instables (c'est-à-dire qui ont des valeurs propres dans le demi-plan droit fermé du plan complexe). Une condition suffisante pour l'existence de  $\sigma(t)$  telle que SLC (I.19) soit stable est qu'il existe une combinaison convexe stable des matrices  $A_i$ , c'est-à-dire, qu'il existe  $\alpha_i > 0$ ,  $\sum_i \alpha_i = 1$ , tel que*

$$A_{eq} = \sum_{i=1}^n \alpha_i A_i$$

*soit une matrice stable (c'est-à-dire qui a des valeurs propres dans le demi-plan gauche ouvert du plan complexe).*

Ce résultat repose donc sur l'existence d'une combinaison convexe stable des matrices  $A_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ . Cependant, trouver la combinaison convexe lorsqu'elle existe est un problème NP-difficile [9, 10]. De plus, l'existence d'une telle combinaison convexe n'est pas une condition nécessaire, et donc, il se peut qu'il existe une loi de commutations stabilisante alors qu'il n'existe pas de combinaison convexe stable.

Pour donner un aperçu sur la manière dont on peut construire une loi de commutations stabilisante dépendante de l'état, plaçons nous dans le cas bimodale, c'est-à-dire  $N = 2$ . Dans ce contexte, trouver une combinaison convexe stable, c'est-à-dire trouver  $\alpha \in [0, 1]$  telle que

$$A_{eq} = \alpha A_1 + (1 - \alpha) A_2$$

soit une matrice de Hurwitz, est une condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'une loi de commutations  $\sigma(t)$  telle que le système (I.19) soit quadratiquement stable [72, 73].

Ainsi, lorsque  $A_{eq}$  existe, quelque soit la matrice  $Q > 0$ , il est possible de construire  $P$  telle que

$$A_{eq}^T P + P A_{eq} = -Q$$

c'est-à-dire de trouver une loi de commutations  $\sigma(t)$  telle que  $V(x) = x^T P x$  vérifie

$$\dot{V}(x) = \left[ \frac{\partial}{\partial x} V(x) \right] A_{\sigma(t)} x < -\epsilon x^T x.$$

Pour trouver une telle loi de commutations, on définit pour  $i = 1, 2$  les matrices  $Q_i$  suivantes

$$Q_i = -(A_i^T P + P A_i)$$

et les régions de l'espace d'état  $\Omega_i$  associées

$$\Omega_i = \{x \in \mathbb{R}^n \mid -x^T Q_i x < 0\}.$$

Ainsi on a découpé l'espace d'état en deux régions coniques  $\Omega_1, \Omega_2$  telles que la fonction de Lyapunov  $V(x)$  est décroissante dans chacune des régions  $\Omega_i$  pour les solutions de  $\dot{x} = A_i x(t)$ . Avec ce partitionnement de l'espace d'état, nous pouvons construire des surfaces de commutation telles que  $V(x)$  soit strictement décroissante pour les solutions de (I.19)

$$\begin{aligned} s_1(x) &= x^T (Q_1 - \epsilon Q_2) x = 0 \\ s_2(x) &= x^T (Q_2 - \epsilon Q_1) x = 0, \end{aligned}$$

où  $\epsilon > 0$  est un scalaire suffisamment petit déterminé par l'utilisateur.

Lorsque toutes les matrices appartenant à l'ensemble  $\{A_1, \dots, A_N\}$  sont Hurwitz, il paraît naturel que si le temps entre deux commutations successives est assez grand, alors la stabilité asymptotique du système (I.19) sera assurée. On comprend donc que la stabilité asymptotique du système (I.19) peut être obtenue en imposant un temps minimal d'activation des modes, que l'on appelle "temps de séjour" [50].

**Définition 8.** *Un réel positif  $\tau_d$  est appelé "temps de séjour" d'une loi de commutations, si l'intervalle de temps entre deux instants de commutation est supérieur à  $\tau_d$ .*

Une généralisation de ce "temps de séjour" a été donnée dans [22], où les auteurs généralisent la notion de "temps de séjour" en introduisant le "temps de séjour moyen". En effet, ils autorisent

que le temps entre deux instants de commutation soit occasionnellement inférieur au "temps de séjour", pourvu que cela n'arrive pas trop fréquemment.

**Définition 9.** *Un réel  $\tau_a$  est appelé "temps de séjour moyen" d'une loi de commutations si*

$$N_\sigma(t, \tau) \leq N_0 + \frac{t - \tau}{\tau_a}$$

*est vérifiée pour tout  $t \geq \tau \geq 0$  et pour  $N_0 \geq 0$ , où  $N_\sigma(t, \tau)$  représente le nombre de commutations de la loi  $\sigma$  sur l'intervalle  $(t, \tau)$ .*

Ainsi, en autorisant des commutations plus rapides occasionnellement, le "temps de séjour" doit rester en moyenne supérieur à  $\tau_a$ .

**Théorème 9.** [22] *On suppose que tous les modes du SLC (I.19) sont Hurwitz. Alors, il existe  $\tau_a^* > 0$  assez grand tel que le système (I.19) est exponentiellement stable.*

Des extensions de ce résultat ont été données, notamment lorsque l'on considère que notre ensemble de matrices  $\{A_1, \dots, A_N\}$  n'est plus composé uniquement de matrices Hurwitz, mais également de matrices instables (dont les valeurs propres ont des parties réelles positives) [77]. Dans ce cas, les auteurs montrent qu'il faut s'assurer que les modes instables ne restent pas activés trop longtemps. Plus de détails sont donnés dans [22, 50, 77] ainsi que dans les références de ces articles.

### 3.3 Stabilité des systèmes linéaires à commutations quelque soit la loi de commutations

Intéressons-nous maintenant aux conditions de stabilité de (I.19) quelque soit la loi de commutations. Une condition nécessaire est de supposer que toutes les matrices  $A_i$ , pour  $i = 1, \dots, N$ , sont Hurwitz (c'est-à-dire que toutes leurs valeurs propres sont à partie réelle négative). En effet, cette hypothèse est nécessaire afin d'assurer la stabilité asymptotique de (I.19) pour les lois de commutation du type  $\sigma(t) = i$  pour tout  $t \geq 0$  (on active un seul mode tout le temps). Dans certains cas particuliers, cette hypothèse s'avère être également suffisante. C'est le cas lorsque les matrices  $A_i$  commutent deux à deux [53], ou lorsqu'elles sont symétriques [78], ou encore lorsqu'elles sont normales [79]. D'autre part, s'il existe une fonction de Lyapunov commune pour tous les modes, alors la stabilité asymptotique du SLC (I.19) est garantie quelque soit la loi de commutations. Dans [16, 43, 47], les auteurs montrent que la réciproque est également vraie, c'est-à-dire que si le SLC (I.19) est GUES, alors il admet une fonction de Lyapunov commune. Cependant, une telle fonction n'est pas toujours facile à trouver.

### 3.3.1 Stabilité des inclusions différentielles

L'analyse de stabilité des SLCs est étroitement liée à celle des inclusions différentielles. En effet, nous admettrons que les résultats donnés dans le cadre des inclusions différentielles sont applicables aux SLCs (pour plus de détails, voir [3, 66]). Considérons l'inclusion différentielle linéaire suivante

$$\dot{x} \in F(x), \quad F(x) = \{y \mid y = Ax, A \in \{A_1, \dots, A_N\}\} \quad (\text{I.21})$$

avec  $x \in \mathbb{R}^n$ , et  $\{A_1, \dots, A_N\}$  un ensemble compact de matrices carrées de dimension  $n$ . Dans [47], Molchanov et Pyatnitskiy donnent des conditions nécessaires et suffisantes pour la stabilité asymptotique de (I.21).

**Théorème 10.** [47] *L'origine de l'inclusion différentielle (I.21) est asymptotiquement stable si et seulement s'il existe une fonction de Lyapunov strictement convexe, homogène (du second ordre), qui a la forme quasi-quadratique*

$$V(x) = x^T P(x) x \quad (\text{I.22})$$

avec

$$\begin{aligned} P^T(x) &= P(x) = P(\tau x), \\ x &\neq 0, \\ \tau &\neq 0, \\ V(0) &= 0, \end{aligned}$$

dont la dérivée le long des solutions de (I.21) vérifie

$$\max_{y \in F(x)} \lim_{h \rightarrow 0} h^{-1} (V(x + hy) - V(x)) \leq -\gamma \|x\|^2, \quad \gamma > 0.$$

En particulier, lorsque l'ensemble  $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_N\}$  est un polyèdre convexe, cela se traduit par le critère algébrique suivant :

**Théorème 11.** [47] *L'origine de l'inclusion différentielle*

$$\dot{x} \in \{Ax, A \in \text{co}\mathcal{A}\}, \quad \mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_N\}$$

est asymptotiquement stable si et seulement s'il existe un entier  $m \geq n$ , une matrice  $\mathcal{L} \in$



$\mathbb{M}_{n \times m}(\mathbb{R})$  de rang  $n$  et des matrices carrées de dimension  $m$

$$\Gamma_s = (\gamma_{ij}^{(s)})_{i,j=1}^m, \quad s = 1, \dots, N,$$

à diagonale dominante négative, c'est-à-dire qui vérifie les conditions

$$\gamma_{ii}^{(s)} + \sum_{j \neq i} |\gamma_{ij}^{(s)}| < 0, \quad i = 1, \dots, m; s = 1, \dots, N,$$

telles que les relations matricielles

$$A_s^T \mathcal{L} = \mathcal{L} \Gamma_s^T, \quad s = 1, \dots, N,$$

soient vérifiées.

En général, il est assez difficile de mettre en application ce résultat en raison de la difficulté à trouver la matrice  $\mathcal{L}$ . Plus généralement, la recherche numérique d'une fonction de Lyapunov quasi-quadratique (I.22) est assez complexe. Une première approche pour déterminer de telles fonctions de Lyapunov a été d'approximer les surfaces de niveaux de ces fonctions par des fonctions de Lyapunov linéaires par morceaux de la forme [47, 54] :

$$V_m(x) = \max_{1 \leq i \leq m} |\langle l_i, x \rangle|,$$

où les éléments  $l_i \in \mathbb{R}^n$ , pour  $i = 1, \dots, m$ , représentent des vecteurs constants appelés vecteurs générateurs. Il a été montré dans [46], que pour un nombre de vecteurs générateurs suffisamment grands, l'existence d'une telle fonction s'avère être nécessaire et suffisante pour la stabilité. Bien que l'utilisation de telles fonctions puisse paraître très puissant théoriquement, il existe très peu de méthodes permettant de vérifier l'existence d'une fonction de Lyapunov linéaire par morceaux pour les systèmes à commutations. En particulier, la difficulté réside dans la spécification des vecteurs générateurs. Un moyen de montrer l'existence d'une fonction de Lyapunov linéaire par morceaux consiste en l'analyse du spectre de l'enveloppe convexe des matrices de l'ensemble des matrices  $A_i, \forall i \in \mathcal{J}$ . Des conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence d'une fonction de Lyapunov linéaire par morceaux pour une paire de matrices du second ordre ont été données dans [74]. Dans [75], les auteurs proposent une approche numérique dans le cas général.

### 3.3.2 Fonctions de Lyapunov quadratiques communes

Nous avons vu que dans le cas des systèmes LTI, la stabilité asymptotique du système (I.3) est équivalente à l'existence d'une fonction de Lyapunov quadratique. Ainsi, il paraît normal de s'intéresser aux fonctions de Lyapunov quadratiques communes dans le cas des SLCs. En effet, l'existence d'une telle fonction de Lyapunov garantit la stabilité asymptotique de (I.19).

**Théorème 12.** *S'il existe une matrice  $P$  symétrique définie positive vérifiant*

$$A_i^T P + P A_i < 0, \quad \text{pour } i = 1, \dots, N \quad (\text{I.23})$$

*alors la fonction  $V(x) = x^T P x$  est une fonction de Lyapunov quadratique commune (CQLF) pour le système (I.19). Le système à commutations (I.19) est alors GUAS.*

Le système d'inégalités matricielles linéaires (LMIs) (I.23) est dit faisable s'il existe une solution  $P$ , sinon il est dit infaisable. Ainsi, déterminer l'existence d'une CQLF revient à vérifier la faisabilité des LMIs (I.23). Ces dernières décennies, des algorithmes d'optimisation convexe ont vu le jour, permettant de résoudre ce type de LMIs [13]. De plus, dans [34], les auteurs proposent un algorithme permettant de converger vers une CQLF en un nombre de pas fini. Inversement, il a été démontré dans [25] que lorsqu'il existe des matrices  $R_i = R_i^T > 0$ , pour  $i \in \mathcal{J}$ , telles que

$$\sum_i A_i^T R_i + R_i A_i > 0$$

alors il n'existe pas de fonction de Lyapunov pour le SLC (I.19).

Jusqu'à présent, trouver les conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence d'une CQLF reste un problème ouvert dans le cas général. De nombreux chercheurs se sont penchés sur cette problématique, dont quelques résultats sont donnés ci-après.

Une première approche consiste à s'intéresser aux matrices triangulaires ou trigonalisables. En effet, il est montré dans [49, 61] que lorsque toutes les matrices Hurwitz qui composent le SLC sont sous la forme triangulaire supérieure, alors le SLC possède une CQLF. De plus, la matrice  $P$  qui définit la CQLF peut être choisie diagonale. Ce résultat s'étend au cas où il existe une matrice de passage commune  $T$  inversible, qui permet de triangulariser toutes les matrices  $A_i$  en même temps.

**Théorème 13.** [49] *Soit le SLC (I.19). Si toutes les matrices  $A_i, i \in \mathcal{J}$  sont Hurwitz, et s'il*

existe une matrice carrée  $T \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$  inversible telle que toutes les matrices

$$D_i = T^{-1}A_iT$$

soient triangulaires supérieures, alors il existe une CQLF pour le SLC (I.19).

Le théorème reste valable si la matrice de passage  $T$  permet d'obtenir des matrices  $D_i$  triangulaires inférieures. Cependant, il n'est pas toujours facile de déterminer si toutes les matrices composant le SLC peuvent être mises sous forme triangulaire supérieure simultanément. Dans [53], il est établie que si les matrices  $A_i$ , pour  $1 \leq i \leq N$ , sont Hurwitz et qu'elles commutent deux à deux, c'est-à-dire

$$A_iA_j = A_jA_i \quad \forall i, j \in \{1, \dots, N\}$$

alors le SLC (I.19) admet une CQLF. Or, il est bien connu que des matrices réelles qui commutent peuvent être mises sous forme triangulaire [23]. Ainsi, la relation de commutation entre les matrices  $A_i$  joue un rôle important. Un outil très utile pour comprendre cette relation est l'algèbre de Lie

$$\mathfrak{g} = \text{Lie}\{A_i : i \in \mathcal{J}\}_{LA}.$$

Dans [1, 31, 32], les auteurs utilisent cette approche afin de montrer l'existence d'une CQLF.

**Théorème 14.** [32] *Si l'algèbre de Lie  $\mathfrak{g} = \text{Lie}\{A_i : i \in \mathcal{J}\}_{LA}$  est solvable alors le système à commutations (I.19) admet une CQLF, et il est GUAS.*

La preuve repose sur le fait que les matrices d'une algèbre de Lie solvable peuvent être mises sous une forme triangulaire supérieure simultanément et qu'une famille de systèmes linéaires décrits par des matrices triangulaires supérieures stables partagent une CQLF. Agrachev et Liberzon ont généralisé ce résultat dans [1].

Dans certains cas particuliers, des conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence d'une CQLF ont été données. Etant donné deux matrices  $A_1, A_2$ , on définit la matrice suivante

$$\gamma_\alpha(A_1, A_2) = \alpha A_1 + (1 - \alpha)A_2$$

pour  $\alpha \in [0, 1]$ . Le théorème ci-dessous donne les conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence d'une CQLF pour un système linéaire à commutations défini par une paire de matrices du second ordre.

**Théorème 15.** [62–64] *Soit  $A_1, A_2$  deux matrices Hurwitz appartenant à  $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ . Pour tout  $\alpha \in [0, 1]$ , les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. il existe une CQLF pour le système à commutations (I.19) décrit par  $A_1$  et  $A_2$  ;
2. les matrices  $\gamma_\alpha(A_1, A_2)$  et  $\gamma_\alpha(A_1, A_2^{-1})$  sont Hurwitz ;
3. les matrices  $A_1 A_2$  et  $A_1 A_2^{-1}$  n'ont aucune valeur propre réelle négative.

En dimension  $n > 2$ , des conditions nécessaires et suffisantes ont également été données pour l'existence d'une CQLF dans [60].

**Théorème 16.** [60] Soit  $A_1, A_2$  deux matrices Hurwitz qui appartiennent à  $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ . Une condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'une CQLF est que les produits de matrices  $A_1[\alpha A_1 + (1 - \alpha)A_2]$  et  $A_1[\alpha A_1 + (1 - \alpha)A_2]^{-1}$  n'aient aucune valeur propre réelle négative pour tout  $0 \leq \alpha \leq 1$ .

Egalement, dans [63] une condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'une CQLF pour un système à commutations du second ordre avec un nombre fini de modes est donnée.

**Théorème 17.** [63] Soit  $A_1, \dots, A_N$  un nombre fini de matrices Hurwitz appartenant à  $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$  avec  $a_{21_i} \neq 0$  pour tout  $i = 1, \dots, N$ . Une condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'une CQLF est qu'une CQLF existe pour tout triplet  $\{A_i, A_j, A_k\}$  du système,  $i \neq j \neq k$ , pour tout  $i, j, k \in \{1, \dots, N\}$ .

Cependant, dans le cas général, l'existence d'une CQLF n'est pas une condition nécessaire pour garantir que le système (I.19) est GUES. En effet, dans [16], les auteurs montrent que dans le cas d'un SLC du second ordre, en considérant deux modes, le système peut être asymptotiquement stable alors qu'il n'existe pas de CQLF.

### 3.3.3 Fonctions de Lyapunov poly-quadratiques

Nous avons déjà mentionné le conservatisme des CQLFs. Plusieurs chercheurs se sont intéressés à d'autres fonctions de Lyapunov moins conservatives, notamment les fonctions de Lyapunov poly-quadratiques [15, 19] pour les systèmes à temps discret. Etant donné que tous les sous-systèmes sont asymptotiquement stables, pour tout  $i \in \mathcal{J}$ , ils admettent tous une fonction de Lyapunov quadratique caractérisée par une matrice symétrique définie positive  $P_i$ . L'idée est de rassembler ces matrices  $P_i$  à l'aide de la loi de commutations afin de construire une fonction de Lyapunov du type

$$V(k, x(k)) = x^T(k) P_{\sigma(k)} x(k). \quad (\text{I.24})$$

La stabilité asymptotique peut être alors vérifiée en résolvant certaines LMIs comme on peut le voir dans le théorème suivant.

**Théorème 18.** [15] *Les propositions suivantes sont équivalentes :*

1. *Il existe une fonction de Lyapunov de la forme (I.24) strictement décroissante le long des trajectoires de (I.20).*
2. *Il existe des matrices symétriques définies positives  $P_i$ , pour tout  $i \in \mathcal{J}$ , vérifiant les inégalités matricielles linéaires*

$$\begin{pmatrix} P_i & A_i^T P_j \\ P_j A_i & P_j \end{pmatrix} > 0, \quad \forall (i, j) \in \mathcal{J} \times \mathcal{J}.$$

3. *Il existe des matrices symétriques définies positives  $S_i$  et des matrices  $G_i \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$  vérifiant*

$$\begin{pmatrix} -P_i & A_i G_i \\ G_i^T A_i^T & P_j - G_i - G_i^T \end{pmatrix} < 0, \quad \forall (i, j) \in \mathcal{J} \times \mathcal{J}.$$

Ce résultat peut être vu comme une généralisation des CQLFs puisqu'en posant  $P_i = P$  pour tout  $i \in \mathcal{J}$  dans (I.24), nous retombons sur une CQLF.

### 3.3.4 Rayon spectral joint

A l'instar des méthodes basées sur les fonctions de Lyapunov citées précédemment, une approche spécifique aux SLCs à temps discret permet d'obtenir des conditions nécessaires et suffisantes pour la stabilité asymptotique uniforme de (I.20). Celle-ci repose sur la notion de rayon spectral joint (JSR) d'un ensemble de matrices, qui est une généralisation de la notion de rayon spectral d'une matrice, et qui caractérise le taux de croissance asymptotique maximal de la norme de tous les produits possibles de matrices prises dans l'ensemble  $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_N\}$  [26, 68].

**Définition 10.** *On considère un ensemble fini de matrices  $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_N\}$ . Le rayon spectral joint de l'ensemble  $\mathcal{A}$  est défini de la manière suivante*

$$\hat{\rho}(\mathcal{A}) = \limsup_{p \rightarrow \infty} \rho_p(\mathcal{A})$$

avec

$$\rho_p(\mathcal{A}) = \sup_{A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_p} \in \mathcal{A}} \|A_{i_1} \cdot A_{i_2} \dots A_{i_p}\|^{1/p}, \quad i_j \in \mathcal{J} \quad \forall p \in \mathbb{N}^*.$$

Il s'en suit le résultat suivant.

**Théorème 19** ([26]). *Pour tout ensemble fini de matrices  $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_N\}$ , le SLC à temps discret associé est GUAS si et seulement si  $\hat{\rho}(\mathcal{A}) < 1$ .*

Néanmoins, le calcul du JSR est un problème NP-difficile [69]. Dans [8, 26, 68], des approximations sont données permettant d'encadrer le JSR.

## 4 Conclusion

Après avoir introduit les notions générales de stabilité asymptotique pour les systèmes non linéaires, incluant la théorie de Lyapunov, nous avons présenté la théorie des perturbations singulières. En particulier, nous rappelons que cette dernière permet d'effectuer l'analyse de stabilité en séparant les deux échelles de temps du système. La stabilité des deux sous-systèmes ainsi identifiés permet de conclure sur la stabilité du système complet de départ.

Ensuite, nous passons en revue un certain nombre de problèmes et de résultats concernant la stabilité des systèmes linéaires à commutations. Nous rappelons notamment les conditions nécessaires et suffisantes pour la stabilité asymptotique uniforme des SLCs, tout en précisant la difficulté à de la mise en pratique de ces conditions. Egaleme<sup>n</sup>t, nous faisons remarquer que la plupart des résultats reposent sur les fonctions de Lyapunov, qu'elles soient quadratiques ou non.

Dans le chapitre qui suit nous abordons la question de la stabilité asymptotique sous une loi de commutations arbitraire des systèmes à commutations singulièrement perturbés (SCSPs). En particulier, nous donnons une caractérisation complète des SCSPs dans le cas planaire, c'est-à-dire en dimension deux, et en considérant deux modes. Pour cela, nous utilisons une approche différente des fonctions de Lyapunov que nous rappelons en début de chapitre [4, 5, 11, 12].



---

---

## Chapitre II

---

### Systèmes à commutations singulièrement perturbés à temps continu

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à la stabilité des systèmes à commutations singulièrement perturbés (SCSPs) à temps continu décrits par des équations différentielles de la forme

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{I}_n & 0 \\ 0 & \epsilon^{-1}\mathbb{I}_m \end{pmatrix} M_{\sigma(t)} \begin{pmatrix} x(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \quad (\text{II.1})$$

avec  $x$  et  $z$  de dimensions respectives  $n$  et  $m$ ,  $M_{\sigma(t)} \in \mathbb{M}_{n+m}(\mathbb{R})$ ,  $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{J}$  une fonction constante par morceaux qui représente la loi de commutations,  $\mathcal{J}$  l'ensemble des indices  $\{1, \dots, N\}$ , et  $\epsilon > 0$  le paramètre de perturbation singulière. En particulier, nous nous intéressons aux SCSPs du second ordre ( $n = m = 1$ ) et composés de deux modes  $N = 2$ , c'est pourquoi nous adopterons l'écriture suivante

$$\dot{x} = \sigma(t)A_1^\epsilon x(t) + (1 - \sigma(t))A_2^\epsilon x(t) \quad (\text{II.2})$$

où  $\sigma : [0, +\infty) \rightarrow \{0, 1\}$  est une fonction constante par morceaux, et

$$A_i^\epsilon = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \epsilon^{-1} \end{pmatrix} M_i, \quad i \in \{1, 2\}, \quad (\text{II.3})$$

et  $M_1, M_2 \in \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ .

Dans un premier temps, nous donnons un contre-exemple tiré de [37] permettant de montrer que l'approche faite dans le cas des SSPs, c'est-à-dire la séparation des échelles de temps, n'est plus valable lorsque que l'on considère les SCSPs. Nous présentons ensuite une méthode géométrique permettant de caractériser complètement un SLC dans le cas planaire (méthode que l'on utilisera pour l'étude de (II.2)). Également, nous rappelons quelques résultats de la



littérature concernant la stabilité des SCSPs. Ensuite nous donnons la caractérisation complète du comportement asymptotique des SCSPs dans le cas planaire.

Enfin, nous comparons ces résultats avec les résultats donnés dans [37], ainsi qu'avec un résultat donné dans le cadre des inclusions différentielles singulièrement perturbées [71] que nous appliquons au cas planaire.

## 1 Positionnement du problème

### 1.1 Contre-exemple

Nous avons vu dans la section 2 du chapitre précédent que la stabilité d'un SSP peut être déduite de la stabilité des sous-systèmes lent et rapide qui lui sont associés. Naturellement, il vient à l'esprit de se demander si cette approche reste valable lorsque l'on considère les SCSPs. L'exemple ci-dessous permet de répondre à cette question par la négative. Il est nécessaire au préalable de redéfinir les notions de stabilité pour les SCSPs.

**Définition 11.** *Le SCSP (II.2) est GUAS (respectivement, quadratiquement stable/instable) lorsque  $\epsilon \rightarrow 0^+$  s'il existe  $\epsilon_0 > 0$  tel que pour tout  $\epsilon$  appartenant à  $(0, \epsilon_0)$ , le système à commutations décrit par (II.2) (avec  $\epsilon$  fixé) est GUAS (respectivement, quadratiquement stable/instable).*

**Exemple 1.** [37] *On considère le SCSP de la forme (II.2) où les matrices  $M_1, M_2$  sont définies par*

$$M_1 = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad M_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}.$$

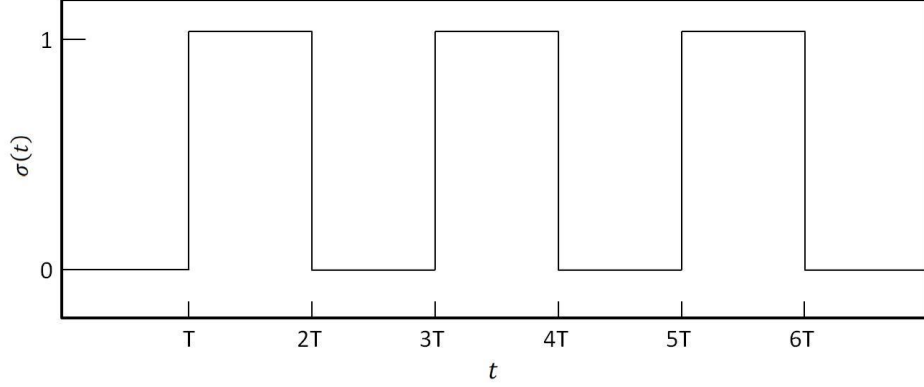
*En appliquant la méthode de séparation des échelles de temps, on identifie deux sous-systèmes, qui sont d'une part le système à commutations dit "lent"*

$$\dot{x}_s(t) = A_{s,\sigma(t)}x_s \quad \text{avec} \quad A_{s,1} = A_{s,2} = -1, \quad (\text{II.4})$$

*et d'autre part le système à commutations dit "rapide"*

$$\dot{z}_f(t) = A_{f,\sigma(t)}z_f(t) \quad \text{avec} \quad A_{f,1} = A_{f,2} = -1. \quad (\text{II.5})$$

*Ces deux systèmes (II.4) et (II.5) sont asymptotiquement stables quelque soit la loi de commutations. Cependant, on peut trouver une loi de commutations qui déstabilise le système de départ. Par exemple, prenons une loi de commutations périodique, de période  $2T$ , c'est-à-dire, toutes les  $T$  secondes, on commute d'un mode à un autre. On pose  $T = \epsilon$ . Ainsi, nous obtenons*



**Figure II.1** – La loi de commutations périodique  $\sigma(t)$

un système dynamique périodique dont la stabilité peut être analysée en considérant la matrice :

$$D(\epsilon) = e^{A_1^T \epsilon} e^{A_2^T \epsilon}.$$

Le développement limité du rayon spectral de  $D(\epsilon)$ , pour  $\epsilon$  proche de 0, donne

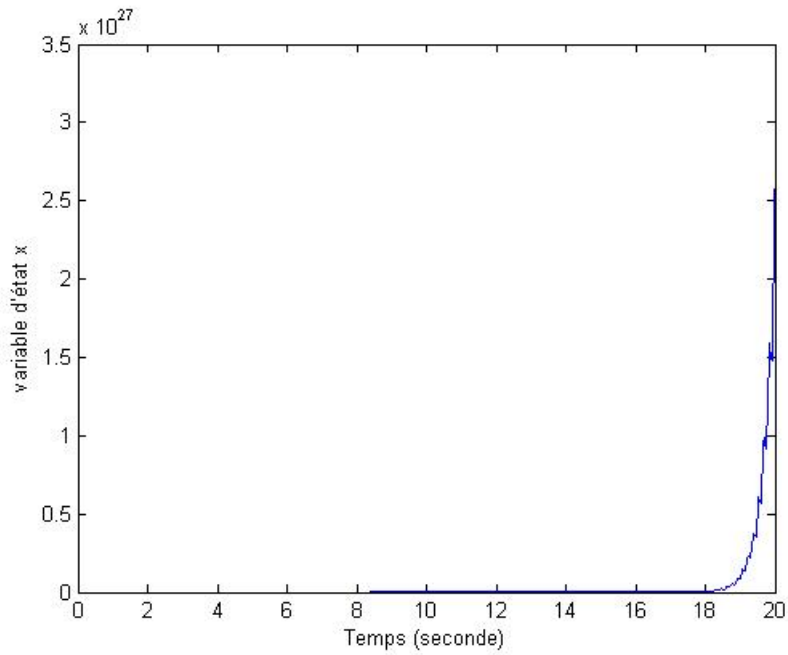
$$\rho(D(\epsilon)) = 1 + 9.5529\epsilon - 28.72.11\epsilon^2 + O(\epsilon^3).$$

Donc, il existe  $\epsilon_0 > 0$  tel que pour tout  $\epsilon \in (0, \epsilon_0)$ ,  $D(\epsilon) > 1$ , c'est-à-dire, que le SCSP est instable. Ce qui montre bien que l'approche classique ne tient plus dans le cas des systèmes à commutations. Les figures (II.2) et (II.3) ci-dessous illustrent le cas  $\epsilon = 0.076$ ,  $T = 0.35s$ .

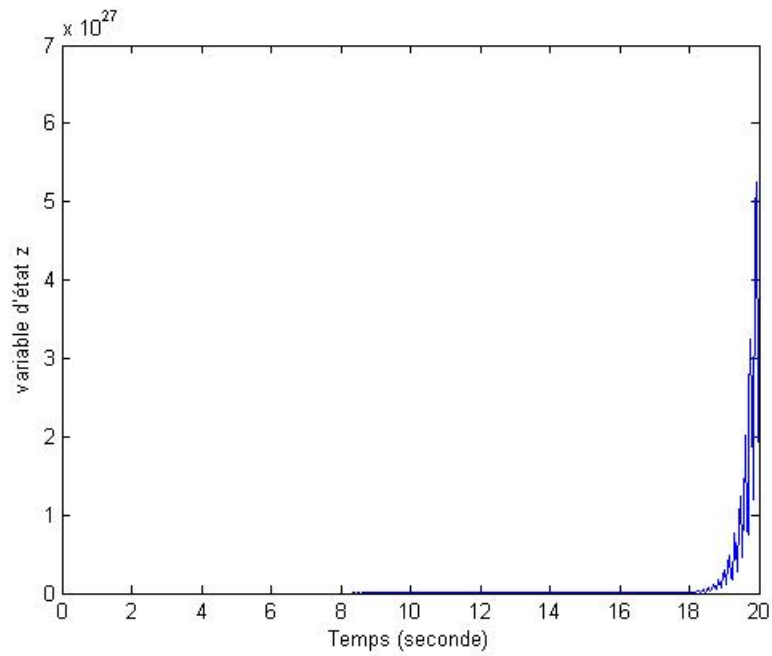
Parmi les résultats de stabilité des SCSPs, on peut citer [2], où les auteurs étendent le résultat concernant le temps de séjour moyen donné dans [77] au cas des systèmes singulièrement perturbés à commutations et à retards. Cependant, à notre connaissance, un seul résultat concernant la notion de stabilité asymptotique sous une loi de commutations arbitraire existe. Celui-ci a été donné dans [37, 38] et est rappelé dans le théorème ci-dessous.

**Théorème 20.** [37, 38] On suppose qu'il existe des matrices  $P_f = P_f^T > 0$ ,  $Q_f^i = Q_f^{iT} > 0$ ,  $P_s = P_s^T > 0$ ,  $Q_s^i = Q_s^{iT} > 0$  de dimensions appropriées telles que les LMIs

$$\begin{aligned} A_s^i P_s + P_s A_s^{iT} + Q_s^i &< 0, \\ A_{22}^i P_f + P_f A_{22}^{iT} + Q_f^i &< 0, \\ \begin{bmatrix} Q_s^i - A_{12}^i Y^i - Y^{iT} A_{12}^{iT} & -(A_{22}^i Y^i + P_f A_{12}^{iT}) \\ (*)^T & Q_f^i \end{bmatrix} &> 0 \end{aligned}$$



**Figure II.2** – variable d'état  $x(t)$



**Figure II.3** – variable d'état  $z(t)$

soient vérifiées  $\forall i \in J$ , avec  $Y^i = - \sum_{\substack{h=1 \\ h \neq i}}^n A_{22}^h{}^{-1} A_{21}^h P_s$ . Alors, il existe un scalaire positif  $\epsilon_{max}$

tel que le SCSP (II.1) soit asymptotiquement stable  $\forall \epsilon \in (0, \epsilon_{max}]$  et quelque soit la loi de commutations.

Quelques points sont à souligner concernant ce résultat. Tout d'abord, on remarque que ces conditions sont indépendantes du paramètre de perturbation  $\epsilon$ . Egalement, on voit que parmi ces conditions, les deux premières sont les conditions indépendantes de stabilité pour les sous-systèmes lent et rapide pris séparément. La dernière condition quant à elle représente une condition de couplage.

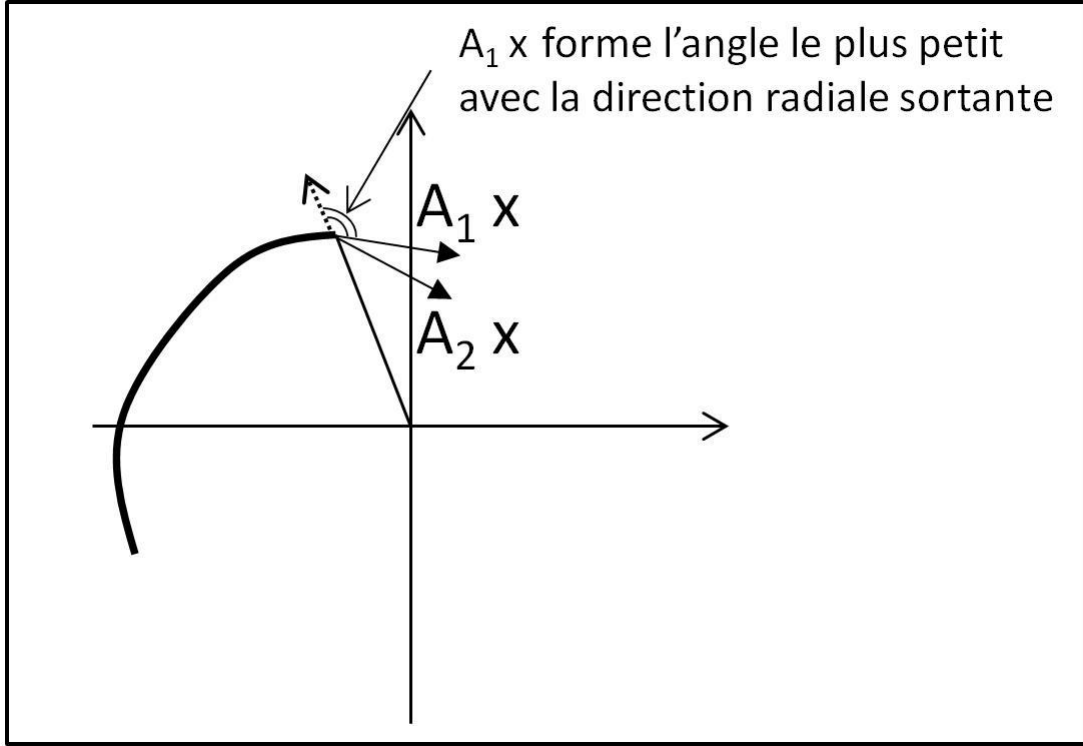
Enfin, nous pouvons également citer les travaux effectués dans le cadre des inclusions différentielles, où les auteurs proposent des résultats de type séparation en deux échelles de temps [18, 56, 70, 71]. En effet, en émettant quelques hypothèses structurelles et de stabilité, ils montrent que toutes solutions de l'inclusion différentielle de départ se rapprochent d'une solution de l'inclusion différentielle dégénérée (obtenue en posant  $\epsilon = 0$ ) lorsque le paramètre de perturbation  $\epsilon$  tend vers 0. Les résultats généraux de [71] seront appliqués au cas des SCSP planaire et en considérant deux modes afin de comparer cette approche avec nos résultats.

## 1.2 Approche géométrique dans le cas planaire

A présent, nous allons exposer une méthode géométrique permettant de déterminer la stabilité des SLCs. Considérons le système linéaire à commutations suivant

$$\dot{x} = \sigma(t)A_1x(t) + (1 - \sigma(t))A_2x(t) \tag{II.6}$$

avec  $A_1, A_2 \in \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$  et  $\sigma : [0, +\infty) \rightarrow \{0, 1\}$  mesurable. Dans une série de papiers [4, 5, 11, 12], Boscain en collaboration avec Balde et Mason, a fourni une caractérisation complète de la stabilité du système linéaire à commutation (II.6). Alors que la majorité des résultats de la littérature qui reposent sur les fonctions de Lyapunov, une approche géométrique est développée dans ces papiers qui consiste à utiliser les invariants du système et la notion de pire trajectoire. Cette pire trajectoire est obtenue en activant le mode dont le champ de vecteur forme l'angle le plus petit avec la direction radiale sortante comme le montre la figure II.4. L'analyse de stabilité de cette trajectoire détermine le comportement de tous les systèmes : si elle converge vers l'origine, alors le système est GUAS.



**Figure II.4** – Schéma illustrant le concept de la pire trajectoire en gras. La flèche en pointillée indique la direction radiale sortante et les flèches en traits pleins indiquent les champs de vecteurs.

Aux deux matrices  $X, Y \in \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ , on associe les paramètres suivants [5] :

$$\delta(X) = \text{tr}(X)^2 - 4 \det(X), \quad (\text{II.7a})$$

$$\Gamma(X, Y) = \frac{1}{2}(\text{tr}(X)\text{tr}(Y) - \text{tr}(XY)), \quad (\text{II.7b})$$

$$\tau(X, Y) = \begin{cases} \frac{\text{tr}(X)}{\sqrt{|\delta(X)|}} & \text{si } \delta(X) \neq 0, \\ \frac{\text{tr}(X)}{\sqrt{|\delta(Y)|}} & \text{si } \delta(X) = 0 \text{ et } \delta(Y) \neq 0, \\ \frac{\text{tr}(X)}{2}, & \text{si } \delta(X) = \delta(Y) = 0, \end{cases} \quad (\text{II.7c})$$

$$\Delta(X, Y) = 4(\Gamma(X, Y)^2 - \det(X) \det(Y)), \quad (\text{II.7d})$$

$$t(X, Y) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{\text{tr}(X)\text{tr}(Y)(k(X, Y)\tau(X, Y) + \tau(Y, X))}{2\tau(X, Y)\tau(Y, X)\sqrt{\Delta(X, Y)}} & \text{si } \delta(X) < 0, \\ \frac{2\sqrt{\Delta(X, Y)}}{\tau(X, Y)(\text{tr}(XY) - \frac{1}{2}\text{tr}(X)\text{tr}(Y))} & \text{si } \delta(X) = 0, \\ \text{arctanh} \frac{2\tau(X, Y)\tau(Y, X)\sqrt{\Delta(X, Y)}}{\text{tr}(X)\text{tr}(Y)(k(X, Y)\tau(X, Y) - \tau(Y, X))} & \text{si } \delta(X) > 0, \end{cases} \quad (\text{II.7e})$$

$$k(X, Y) = \frac{2\tau(X, Y)\tau(Y, X)}{\text{tr}(X)\text{tr}(Y)} \left( \text{tr}(XY) - \frac{1}{2}\text{tr}(X)\text{tr}(Y) \right), \quad (\text{II.7f})$$

$$\mathcal{R}(X, Y) = \frac{2\Gamma(X, Y) + \sqrt{\Delta(X, Y)}}{2\sqrt{\det(X) \det(Y)}} \times e^{\tau(X, Y)t(X, Y) + \tau(Y, X)t(Y, X)}, \quad (\text{II.7g})$$

où  $\delta(X)$  représente le discriminant du polynôme caractéristique de  $X$ , et les autres quantités représentent les invariants associés au système planaire à commutation  $\dot{x} = \sigma(t)A_1 + (1-\sigma(t))A_2$ , avec  $A_1, A_2 \in \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$  et  $\sigma : [0, +\infty) \rightarrow \{0, 1\}$ . De plus, les trois cas dans la définition de  $t(X, Y)$  correspondent respectivement aux cas où les valeurs propres de la matrice  $X$  sont complexes, réelles ou nulles. Concernant  $\mathcal{R}$ , il correspond au taux d'accroissement de la pire trajectoire après une période comme l'illustre la figure II.5. Nous noterons que  $\Gamma(X, Y)$ ,  $k(X, Y)$ ,  $\Delta(X, Y)$  et  $\mathcal{R}(X, Y)$  sont symétriques par rapport à leurs deux arguments, tandis que ce n'est pas le cas pour  $\tau(X, Y)$  et  $t(X, Y)$ .

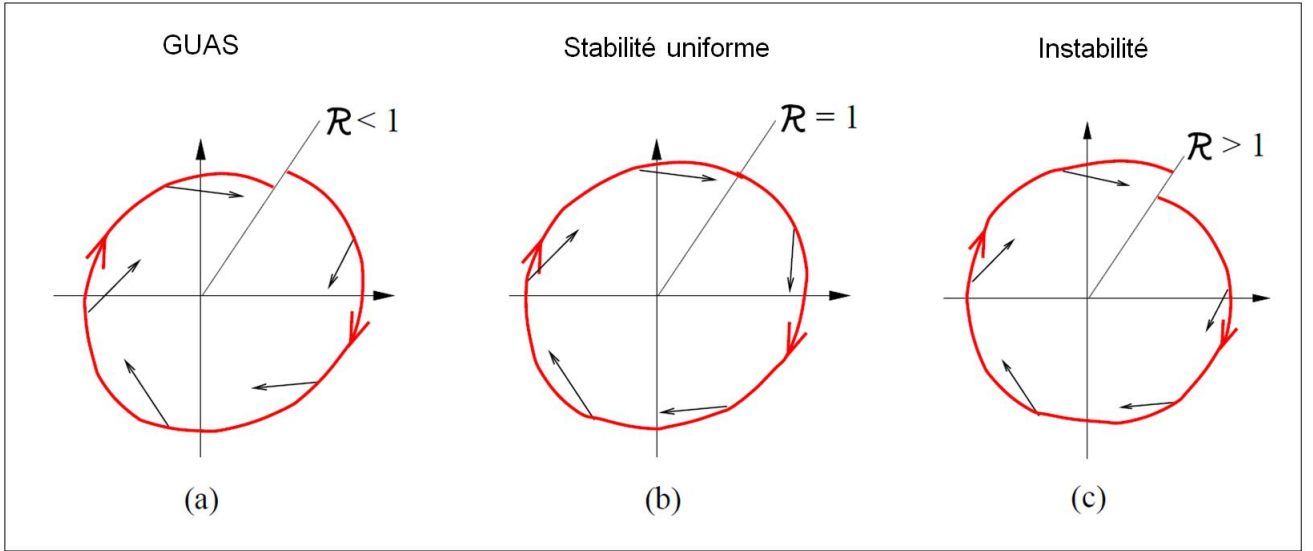


Figure II.5 – Les trois cas possibles pour  $\mathcal{R}$

**Théorème 21** ([5]). Soit  $A_1, A_2 \in \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$  deux matrices Hurwitz. Alors, la stabilité du système à commutations (II.6) est déterminée par les quatre cas suivants :

- (S1) Le système (II.6) est quadratiquement stable si et seulement si  $\Gamma(A_1, A_2) > -\sqrt{\det(A_1) \det(A_2)}$  et  $\text{tr}(A_1 A_2) > -2\sqrt{\det(A_1) \det(A_2)}$ ;
- (S2) Si  $\Gamma(A_1, A_2) < -\sqrt{\det(A_1) \det(A_2)}$ , alors (II.6) est instable ;
- (S3) Si  $\Gamma(A_1, A_2) = -\sqrt{\det(A_1) \det(A_2)}$ , alors (II.6) est uniformément stable mais pas GUAS ;
- (S4) Si  $\Gamma(A_1, A_2) > \sqrt{\det(A_1) \det(A_2)}$  et  $\text{tr}(A_1 A_2) \leq -2\sqrt{\det(A_1) \det(A_2)}$ , alors (II.6) est respectivement GUAS, uniformément stable, ou instable selon que  $\mathcal{R}(A_1, A_2) < 1$ ,  $\mathcal{R}(A_1, A_2) =$

1 ou  $\mathcal{R}(A_1, A_2) > 1$ .

Nous noterons que le théorème classe le comportement asymptotique du système à commutations planaire en 6 cas (la condition (S4) peut-être divisée en 3 sous-cas distincts). Une approche du même type basée sur des méthodes variationnelles et de commande optimale, permettant de caractériser complètement la stabilité des systèmes à commutations dans le cas planaire, a été proposé dans [40–42].

## 2 Analyse de stabilité des SCSPs dans le cas planaire

### 2.1 Conditions nécessaires et suffisantes

Dans le cas des systèmes planaires, c'est-à-dire du second ordre ( $n = 2$ ) et avec 2 modes ( $\mathcal{J} = \{0, 1\}$ ), nous donnons des conditions nécessaires et suffisantes pour la stabilité asymptotique quelque soit la loi de commutations. Nous donnons également les conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence d'une fonction de Lyapunov quadratique commune. Cela est traduit par le théorème qui vient ci-après, où ces conditions sont données à partir des invariants introduits (II.7a–II.7g).

Une première condition nécessaire pour que le SCSP planaire (II.2) soit asymptotiquement stable quelque soit la loi de commutations est que pour  $\epsilon > 0$  assez petit, chaque mode soit asymptotiquement stable, en d'autres termes, que la matrice

$$A_i^\epsilon = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \epsilon^{-1} \end{pmatrix} M_i$$

soit Hurwitz pour  $\epsilon$  assez petit. En posant

$$M_i = \begin{pmatrix} a_i & b_i \\ c_i & d_i \end{pmatrix},$$

la matrice  $A_i^\epsilon$ ,  $i = 1, 2$ , est Hurwitz pour  $\epsilon$  assez petit si  $M_1, M_2$  appartiennent à l'ensemble

$$\Lambda = \left\{ M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid \det(M) > 0 \text{ and } (d < 0 \text{ ou } (d = 0 \text{ et } a < 0)) \right\}. \quad (\text{II.8})$$

**Théorème 22.** Soit  $M_1, M_2$  appartenant à  $\Lambda$  défini par (II.8). Le comportement asymptotique du SCSP (II.2) est décrit par les 5 cas suivants :

- (SP1) Le système (II.2) est quadratiquement stable lorsque  $\epsilon \rightarrow 0^+$  si et seulement si  $\Gamma(M_1, M_2) > -\sqrt{\det(M_1) \det(M_2)}$  et au moins une des conditions suivantes est vérifiée
1.  $\Gamma(M_1, M_2) \leq \sqrt{\det(M_1) \det(M_2)}$ ,
  2.  $d_1 d_2 \neq 0$ ,
  3.  $d_1 d_2 = 0$  avec  $d_1^2 + d_2^2 \neq 0$ , et  $b_1 c_2 + b_2 c_1 \geq -2\sqrt{\det(M_1) \det(M_2)}$ .
- (SP2) Si  $\Gamma(M_1, M_2) > \sqrt{\det(M_1) \det(M_2)}$ ,  $d_1 d_2 = 0$  avec  $d_1^2 + d_2^2 \neq 0$ , et  $b_1 c_2 + b_2 c_1 < -2\sqrt{\det(M_1) \det(M_2)}$ , alors (II.2) est GUAS lorsque  $\epsilon \rightarrow 0^+$ .
- (SP3) Si  $\Gamma(M_1, M_2) = -\sqrt{\det(M_1) \det(M_2)}$ , alors pour tout  $\epsilon > 0$ , (II.2) est uniformément stable mais pas GUAS.
- (SP4) Si  $\Gamma(M_1, M_2) > \sqrt{\det(M_1) \det(M_2)}$  et  $d_1 = d_2 = 0$ , alors (II.2) est instable lorsque  $\epsilon \rightarrow 0^+$ .
- (SP5) Si  $\Gamma(M_1, M_2) < -\sqrt{\det(M_1) \det(M_2)}$ , alors pour tout  $\epsilon > 0$  (II.2) est instable.

Dans le cas particulier où  $d_1 = d_2 = 0$ , le corollaire suivant permet de simplifier le théorème ci-dessus.

**Corollaire 2.** On suppose que  $M_1, M_2$  appartiennent à  $\Lambda$ . Si  $d_1 = d_2 = 0$ , alors le SCSP est GUAS lorsque  $\epsilon \rightarrow 0^+$  si et seulement si  $b_1 c_2 = b_2 c_1 < 0$ .

**Démonstration du théorème 22.** Les preuves de (SP3) et (SP5) viennent simplement des propositions (S2) et (S3) du théorème 21, du fait de l'homogénéité de  $\epsilon \mapsto \det(A_i^\epsilon)$  et  $\epsilon \mapsto \Gamma(A_1^\epsilon, A_2^\epsilon)$ , c'est-à-dire

$$\det(A_i^\epsilon) = \frac{\det(M_i)}{\epsilon},$$

$$\Gamma(A_1^\epsilon, A_2^\epsilon) = \frac{\Gamma(M_1, M_2)}{\epsilon}.$$

Concernant (SP1), nous souhaitons prouver que sous l'hypothèse

$$\Gamma(M_1, M_2) > -\sqrt{\det(M_1) \det(M_2)},$$

si une des trois conditions ci-dessus



1.  $\Gamma(M_1, M_2) \leq \sqrt{\det(M_1) \det(M_2)}$ ,
2.  $d_1 d_2 \neq 0$ ,
3.  $d_1 d_2 = 0$  avec  $d_1^2 + d_2^2 \neq 0$ , et  $b_1 c_2 + b_2 c_1 \geq -2\sqrt{\det(M_1) \det(M_2)}$ ,

est vérifiée, alors

$$\mathrm{tr}(A_1^\epsilon A_2^\epsilon) > -2\sqrt{\det(A_1^\epsilon) \det(A_2^\epsilon)} \quad (\text{II.9})$$

pour tout  $\epsilon > 0$  assez petit. Par la suite, nous pouvons conclure à partir de (S1) du théorème 21. Nous remarquons que

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}(A_1^\epsilon A_2^\epsilon) &= \frac{d_1 d_2}{\epsilon^2} + \frac{b_1 c_2 + b_2 c_1}{\epsilon} + a_1 a_2, \\ -2\sqrt{\det(A_1^\epsilon) \det(A_2^\epsilon)} &= -2\frac{\sqrt{\det(M_1) \det(M_2)}}{\epsilon}. \end{aligned}$$

Il a été montré dans [5] que

$$-\sqrt{\det(A_1^\epsilon) \det(A_2^\epsilon)} < \Gamma(A_1^\epsilon, A_2^\epsilon) \leq \sqrt{\det(A_1^\epsilon) \det(A_2^\epsilon)}$$

c'est-à-dire

$$-\sqrt{\det(M_1) \det(M_2)} < \Gamma(M_1, M_2) \leq \sqrt{\det(M_1) \det(M_2)}$$

implique automatiquement que l'inéquation (II.9) est vérifiée pour tout  $\epsilon > 0$ , ce qui prouve (SP1.1).

Comme  $M_1$  et  $M_2$  appartiennent à  $\Lambda$ , si  $d_1 d_2 \neq 0$ , alors nécessairement  $d_1, d_2 < 0$ . Ainsi, il existe  $\epsilon_0 > 0$  tel que, pour tout  $\epsilon \in (0, \epsilon_0)$

$$d_1 d_2 + (b_1 c_2 + b_2 c_1)\epsilon + a_1 a_2 \epsilon^2 > -2\epsilon\sqrt{\det(M_1) \det(M_2)},$$

ce qui prouve (SP1.2).

Si maintenant  $d_1 d_2 = 0$  et  $b_1 c_2 + b_2 c_1 > -2\sqrt{\det(M_1) \det(M_2)}$  alors là encore l'inéquation (II.9) est vérifiée pour  $\epsilon > 0$  assez petit. Afin de prouver (SP1.3), il nous reste à considérer le cas où

$$b_1 c_2 + b_2 c_1 = -2\sqrt{\det(M_1) \det(M_2)} \quad (\text{II.10})$$

et  $d_1 d_2 = 0$ ,  $d_1^2 + d_2^2 \neq 0$ . Sans perte de généralité, on prend  $d_1 = 0$  and  $d_2 \neq 0$ . D'autre part,  $b_1 c_1$  et  $d_2$  sont négatifs. L'équation (II.10) implique que

$$(b_1 c_2 - b_2 c_1)^2 = -4b_1 c_1 a_2 d_2.$$

Donc,  $a_2 \leq 0$ . De plus, le cas  $a_2 = 0$  entrainerait que

$$-\det(M_2) = b_2c_2 < 0,$$

impliquant

$$(b_1c_2)(b_2c_1) > 0.$$

Donc,  $b_1c_2 - b_2c_1$  serait différent de zéro, ce qui est contradictoire. Par conséquent  $a_2 < 0$ . Nous avons alors  $a_1a_2 > 0$  et l'inéquation (II.9) est vérifiée pour tout  $\epsilon > 0$ . Ceci termine la preuve de (SP1.3), et donc, de (SP1).

Il reste à prouver (SP2) et (SP4). Dans les deux cas, on a

$$\begin{aligned} \Gamma(M_1, M_2) &> \sqrt{\det(M_1) \det(M_2)}, \\ d_1d_2 &= 0, \\ b_1c_2 + b_2c_1 &< -2\sqrt{\det(M_1) \det(M_2)}. \end{aligned}$$

Pour (SP2), nous supposons (sans perte de généralité) que  $a_2 \neq 0$ , tandis que pour (SP4), nous supposons que  $d_1 = d_2 = 0$ .

**Cas (SP4) :**  $d_1 = d_2 = 0$ . Comme nous l'avons déjà fait remarquer, l'appartenance de  $M_1$  et  $M_2$  à  $\Lambda$  entraîne alors que  $a_1, a_2 < 0$  et  $b_1c_1, b_2c_2 < 0$ .

Plus particulièrement,

$$\text{sign}(b_i) = -\text{sign}(c_i),$$

et donc

$$\text{sign}(b_1c_2) = \text{sign}(b_2c_1).$$

De plus, comme

$$b_1c_2 + b_2c_1 < -2\sqrt{\det(M_1) \det(M_2)},$$

nous avons

$$b_1c_2, b_2c_1 < 0.$$

Ainsi, pour  $\epsilon$  assez petit,

$$b_1c_2 + b_2c_1 + \epsilon a_1a_2 < -2\sqrt{\det(M_1) \det(M_2)}$$

ce qui nous place dans le cas (S4) du Théorème 21. Par conséquent, le comportement asymptotique du système dépend du signe de  $\mathcal{R}^\epsilon - 1$ .

On pose

$$C_\Delta = 4(\Gamma(M_1, M_2)^2 - \det(M_1) \det(M_2)) \quad (\text{II.11})$$

ce qui permet d'écrire

$$\sqrt{\Delta^\epsilon} = \sqrt{C_\Delta}/\epsilon.$$

Nous rappelons que

$$\mathcal{R}^\epsilon = \frac{\Gamma(M_1, M_2) + \sqrt{C_\Delta}}{\sqrt{\det(M_1) \det(M_2)}} e^{\tau_1^\epsilon t_1^\epsilon + \tau_2^\epsilon t_2^\epsilon}$$

où, d'après les définitions données de  $t(\cdot, \cdot)$  et  $\tau(\cdot, \cdot)$  dans la section 1.2 du chapitre précédent et tenant compte du fait que  $d_1 = d_2 = 0$ , on a pour  $\epsilon > 0$  assez petit

$$t_i^\epsilon = \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{\text{tr}(A_i^\epsilon) \text{tr}(A_{3-i}^\epsilon) (k^\epsilon \tau_i^\epsilon + \tau_{3-i}^\epsilon)}{2\tau_1^\epsilon \tau_2^\epsilon \sqrt{\Delta^\epsilon}},$$

$$\tau_i^\epsilon = \frac{\text{tr}(A_i^\epsilon)}{\sqrt{-\delta_i^\epsilon}} = \frac{a_i}{\sqrt{-a_i^2 - \frac{4b_i c_i}{\epsilon}}}.$$

En particulier,  $t_1^\epsilon$  et  $t_2^\epsilon$  appartiennent à  $(0, \pi)$  pour  $\epsilon$  assez petit. Lorsque  $\epsilon \rightarrow 0$ , on peut écrire la série de Taylor de  $\tau_i^\epsilon$  comme suit

$$\tau_i^\epsilon = C_{\tau_i} \sqrt{\epsilon} + O(\epsilon^{3/2}), \quad \text{avec} \quad C_{\tau_i} = \frac{a_i}{2\sqrt{-b_i c_i}}. \quad (\text{II.12})$$

Donc

$$\tau_1^\epsilon t_1^\epsilon + \tau_2^\epsilon t_2^\epsilon \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0^+} 0$$

ce qui implique que

$$e^{\tau_1^\epsilon t_1^\epsilon + \tau_2^\epsilon t_2^\epsilon} \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0^+} 1. \quad (\text{II.13})$$

Etant donné que nous avons supposé que  $\Gamma(M_1, M_2) > \sqrt{\det(M_1) \det(M_2)}$ , nous avons

$$\frac{\Gamma(M_1, M_2) + \sqrt{C_\Delta}}{\sqrt{\det(M_1) \det(M_2)}} > 1$$

et nous concluons que, lorsque  $\epsilon \rightarrow 0^+$ ,  $\mathcal{R}^\epsilon$  converge vers une constante supérieure à un. Ainsi, le système est instable pour  $\epsilon > 0$  assez petit.

**Case (SP2) :**  $d_1 = 0, d_2 \neq 0$ . Pour  $\epsilon > 0$  assez petit, nous pouvons supposer que  $\delta_1^\epsilon < 0$  et

$\delta_2^\epsilon > 0$ , et donc

$$\begin{aligned} t_1^\epsilon &= \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{a_1 \operatorname{tr}(A_2^\epsilon)(k^\epsilon \tau_1^\epsilon + \tau_2^\epsilon)}{2\tau_1^\epsilon \tau_2^\epsilon \sqrt{\Delta^\epsilon}}, \\ t_2^\epsilon &= \operatorname{arctanh} \frac{2\tau_1^\epsilon \tau_2^\epsilon \sqrt{\Delta^\epsilon}}{\operatorname{tr}(A_1^\epsilon) \operatorname{tr}(A_2^\epsilon)(k^\epsilon \tau_2^\epsilon - \tau_1^\epsilon)}. \end{aligned}$$

Comme ci-dessus, notre objectif est d'étudier le signe de  $\mathcal{R}^\epsilon - 1$  lorsque  $\epsilon \rightarrow 0^+$ . Afin de caractériser la quantité  $\mathcal{R}^\epsilon$ , nous utilisons la série de Taylor pour  $\tau_1^\epsilon$  lorsque  $\epsilon \rightarrow 0^+$  obtenue dans (II.12), c'est-à-dire,

$$\tau_1^\epsilon = C_{\tau_1} \sqrt{\epsilon} + O(\epsilon^{3/2}), \quad \text{avec} \quad C_{\tau_1} = \frac{a_1}{2\sqrt{-b_1 c_1}}, \quad (\text{II.14})$$

et la série de Taylor suivante pour  $\tau_2^\epsilon$ ,

$$\tau_2^\epsilon = \frac{\frac{d_2}{\epsilon} + a_2}{\sqrt{(\frac{d_2}{\epsilon} - a_2)^2 + \frac{4b_2 c_2}{\epsilon}}} = -1 + O(\epsilon).$$

En utilisant ces développements dans les expressions de  $t_1^\epsilon$  et  $t_2^\epsilon$ , nous obtenons

$$\begin{aligned} t_1^\epsilon &= \pi + C_{t_1} \sqrt{\epsilon} + O(\epsilon), \\ t_2^\epsilon &= \operatorname{arctanh} \left( \frac{\sqrt{C_\Delta}}{2\Gamma(M_1, M_2)} \right) + O(\epsilon), \end{aligned}$$

avec  $C_{t_1} = \frac{\sqrt{C_\Delta}}{d_2 b_1 c_1}$ .

Grâce aux séries ci-dessus, nous obtenons

$$\tau_1^\epsilon t_1^\epsilon + \tau_2^\epsilon t_2^\epsilon = -\operatorname{arctanh} \left( \frac{\sqrt{C_\Delta}}{2\Gamma(M_1, M_2)} \right) + \pi C_{\tau_1} \sqrt{\epsilon} + O(\epsilon),$$

ce qui nous amène à écrire

$$\begin{aligned} e^{\tau_1^\epsilon t_1^\epsilon + \tau_2^\epsilon t_2^\epsilon} &= e^{-\operatorname{arctanh} \frac{\sqrt{C_\Delta}}{2\Gamma(M_1, M_2)}} e^{\pi C_{\tau_1} \sqrt{\epsilon}} + O(\epsilon) \\ &= e^{-\operatorname{arctanh} \frac{\sqrt{C_\Delta}}{2\Gamma(M_1, M_2)}} (1 + \pi C_{\tau_1} \sqrt{\epsilon}) + O(\epsilon). \end{aligned}$$

La formule  $\operatorname{arctanh}(x) = \log \left( \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \right)$ , valable pour  $x \in (-1, 1)$ , nous permet de réécrire, lorsque

$\epsilon \rightarrow 0^+$ ,

$$e^{\tau_1^\epsilon t_1^\epsilon + \tau_2^\epsilon t_2^\epsilon} = \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{C_\Delta}}{2\Gamma(M_1, M_2)}}{1 + \frac{\sqrt{C_\Delta}}{2\Gamma(M_1, M_2)}}} (1 + \pi C_{\tau_1} \sqrt{\epsilon}) + O(\epsilon).$$

En remplaçant,  $C_\Delta$  par son expression (II.11), nous obtenons

$$e^{\tau_1^\epsilon t_1^\epsilon + \tau_2^\epsilon t_2^\epsilon} = \sqrt{\frac{1 - \sqrt{1 - \frac{\det(M_1) \det(M_2)}{\Gamma(M_1, M_2)^2}}}{1 + \sqrt{1 - \frac{\det(M_1) \det(M_2)}{\Gamma(M_1, M_2)^2}}}} \times (1 + \pi C_{\tau_1} \sqrt{\epsilon}) + O(\epsilon).$$

Posons

$$\xi = \det(M_1) \det(M_2) / \Gamma(M_1, M_2)^2.$$

Comme

$$\frac{\Gamma(M_1, M_2) + \sqrt{\Gamma(M_1, M_2)^2 - \det(M_1) \det(M_2)}}{\sqrt{\det(M_1) \det(M_2)}} = \frac{1 + \sqrt{1 - \xi}}{\xi},$$

alors on peut réécrire

$$\begin{aligned} \mathcal{R}^\epsilon &= \frac{1 + \sqrt{1 - \xi}}{\xi} \sqrt{\frac{1 - \sqrt{1 - \xi}}{1 + \sqrt{1 - \xi}}} (1 + \pi C_{\tau_1} \sqrt{\epsilon}) + O(\epsilon) \\ &= \frac{\sqrt{1 + \sqrt{1 - \xi}} \sqrt{1 - \sqrt{1 - \xi}}}{\sqrt{\xi}} (1 + \pi C_{\tau_1} \sqrt{\epsilon}) + O(\epsilon) \\ &= 1 + \pi C_{\tau_1} \sqrt{\epsilon} + O(\epsilon). \end{aligned}$$

Puisque  $C_{\tau_1}$  est négatif, nous en déduisons que  $\mathcal{R}^\epsilon$  est inférieur à 1 pour  $\epsilon$  assez petit. Par conséquent, le système est GUAS lorsque  $\epsilon \rightarrow 0^+$ . Ceci termine la preuve.  $\square$

**Démonstration du corollaire 2.** Dans le cas où  $d_1 = d_2 = 0$ ,

$$\Gamma(M_1, M_2) = -(b_1 c_2 + b_2 c_1) / 2$$

et

$$\sqrt{\det(M_1) \det(M_2)} = \sqrt{b_1 b_2 c_1 c_2}.$$

Etant donné que  $M_1$  et  $M_2$  appartiennent à  $\Lambda$ , alors il en découle que  $b_1 c_1, b_2 c_2 < 0$ , c'est-à-dire que  $\text{sign}(b_i) = -\text{sign}(c_i)$  pour  $i = 1, 2$ . Donc,  $\text{sign}(b_1 c_2) = \text{sign}(b_2 c_1)$ . Si  $b_1 c_2 < 0$ , alors  $\Gamma(M_1, M_2) \geq \sqrt{\det(M_1) \det(M_2)}$ , puisque  $(\sqrt{-b_1 c_2} - \sqrt{-b_2 c_1})^2 \geq 0$ . De la même manière, si  $b_1 c_2 > 0$ , alors  $\Gamma(M_1, M_2) \leq -\sqrt{\det(M_1) \det(M_2)}$ , puisque  $(\sqrt{b_1 c_2} - \sqrt{b_2 c_1})^2 \geq 0$ .  $\square$

La preuve du théorème 22 étant établie, il est intéressant de souligner quelques points.

## 2.2 Caractérisation des transitions de stabilité

Tout d'abord, nous tirons du théorème 22 les conditions nécessaires et suffisantes pour la stabilité asymptotique du SCSP (II.2) qui correspondent aux conditions (SP1) et (SP2). Le théorème donne également les conditions nécessaires et suffisantes pour la stabilité quadratique qui correspondent aux conditions (SP1).

D'autre part, le cas (S4) dans [5], rappelé dans le théorème 21, donne lieu aux deux cas (SP2) et (SP4) dans le théorème 22. On remarque que dans (S4) le système peut être asymptotiquement stable, stable, ou instable, selon la valeur de  $\mathcal{R}(A_1, A_2)$ . Les cas (SP2) et (SP4) correspondent respectivement au cas où  $\mathcal{R}^\epsilon$  converge vers un par valeurs inférieures, et au cas où  $\mathcal{R}^\epsilon$  converge vers une constante supérieure à un. Le cas  $\mathcal{R}(A_1, A_2) = 1$  ne donne lieu à aucun cas dans le théorème 22, étant donné qu'il est impossible que  $\mathcal{R}^\epsilon$  soit égal à 1 lorsque  $\epsilon > 0$  varie dans un voisinage de 0 (il peut valoir 1 uniquement pour des valeurs isolées de  $\epsilon$ ).

La classification donnée dans le théorème 22 garantit que pour  $\epsilon > 0$  dans un voisinage de 0, le système (II.2) appartient à une des catégories données par le théorème 21. Plus particulièrement, lorsque  $\epsilon$  tend vers 0, le comportement asymptotique du système (II.2) ne peut changer un nombre infini de fois. C'est-à-dire que ce système ne peut être asymptotiquement stable, puis devenir stable, puis redevenir asymptotiquement stable, puis instable, et ainsi de suite... Il est néanmoins possible que, lorsque  $\epsilon > 0$  croît dans un voisinage de 0 tout en restant petit pour vérifier les hypothèses du théorème 22, (II.2) change de comportement asymptotique, passant d'une catégorie à une autre du théorème 21. Cependant, le nombre de transition possible reste limité. Nous donnons ci-dessous le nombre de transitions et les transitions possibles lorsque  $\epsilon$  augmente.

Tout d'abord, nous rappelons que parler des catégories données dans théorème 21 n'a de sens que si  $A_1^\epsilon$  and  $A_2^\epsilon$  sont Hurwitz. Si  $a_i \leq 0$  alors  $A_i^\epsilon$  est Hurwitz pour tout  $\epsilon > 0$ , puisque  $\text{tr}(A_i^\epsilon)$  est négative pour tout  $\epsilon > 0$ . Par contre, si  $a_i > 0$  alors  $A_i^\epsilon$  est Hurwitz pour  $\epsilon < -d_i/a_i$ .

Pour des raisons d'homogénéité, les transitions ne peuvent avoir lieu qu'entre les catégories (S1) and (S4) et elles nécessitent que la condition  $\Gamma(M_1, M_2) > \sqrt{\det(M_1) \det(M_2)}$  soit vérifiée.

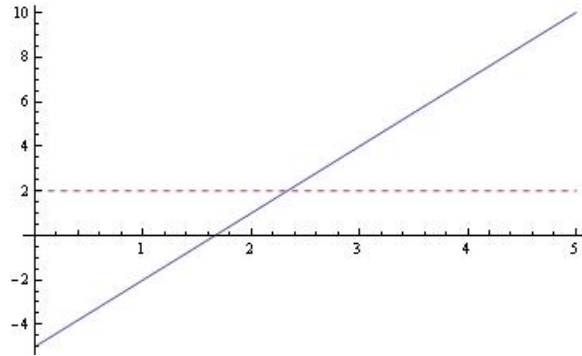
Chaque transition a lieu au changement de signe de

$$\begin{aligned}\eta(\epsilon) &= \text{tr}(A_1^\epsilon A_2^\epsilon) + 2\sqrt{\det(A_1^\epsilon) \det(A_2^\epsilon)} \\ &= \frac{d_1 d_2}{\epsilon^2} + \frac{b_1 c_2 + b_2 c_1 + 2\sqrt{\det(M_1) \det(M_2)}}{\epsilon} + a_1 a_2.\end{aligned}$$

Si  $d_1 = d_2 = 0$  alors  $a_1 a_2 > 0$  et  $\epsilon \eta(\epsilon)$  est affine par rapport à  $\epsilon$ , avec un coefficient multiplicatif positif et  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon \eta(\epsilon) < 0$ . On en déduit qu'une seule transition de (S4) vers (S1) aura lieu. Par exemple le SCSP planaire caractérisé par les matrices

$$M_1 = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M_2 = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

illustre ce cas de figure. En effet, nous calculons de manière aisée,  $\epsilon_0 = 7/3$  tel que pour tout  $\epsilon \in (0, \epsilon_0)$  le SCSP sera décrit par le cas (S4) et pour tout  $\epsilon \in (\epsilon_0, +\infty)$  il sera décrit par le cas (S1) (voir figure II.6).



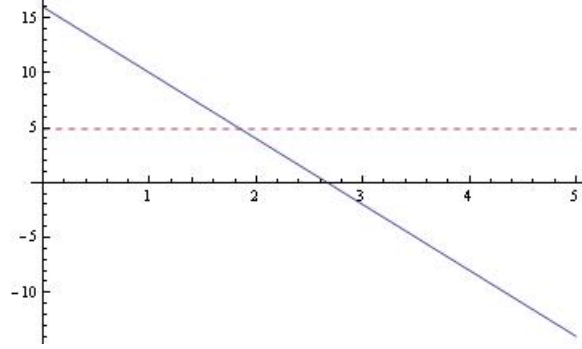
**Figure II.6** – Les courbes en trait continu et en pointillés sont les courbes des fonctions respectives  $\epsilon \rightarrow \text{tr}(A_1^\epsilon, A_2^\epsilon)$  et  $\epsilon \rightarrow -2\epsilon\sqrt{\det(A_1^\epsilon) \det(A_2^\epsilon)}$

Dans le cas général où  $d_1 d_2 = 0$  (c'est-à-dire que l'on peut avoir uniquement un des  $d_i$  nul), les transitions possibles sont soit une transition simple (« unidirectionnelle ») de (S4) vers (S1), soit une transition simple de (S1) vers (S4). L'exemple du SCSP planaire caractérisé par les matrices

$$M_1 = \begin{pmatrix} -6 & -4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M_2 = \begin{pmatrix} 0.2 & 2 \\ -0.12 & -1 \end{pmatrix}$$

illustre ce type de transition de (S1) vers (S4). Nous calculons facilement  $\epsilon_0 = \frac{8-\sqrt{6}}{3}$  tel que pour tout  $\epsilon \in (0, \epsilon_0)$  le SCSP sera décrit par cas (S1) et pour tout  $\epsilon \in (\epsilon_0, +\infty)$  il sera décrit

par le cas (S4) (voir figure II.7).



**Figure II.7** – Les courbes en trait continu et en pointillés sont les courbes des fonctions respectives  $\epsilon \rightarrow \epsilon \text{tr}(A_1^\epsilon, A_2^\epsilon)$  et  $\epsilon \rightarrow -2\epsilon \sqrt{\det(A_1^\epsilon) \det(A_2^\epsilon)}$

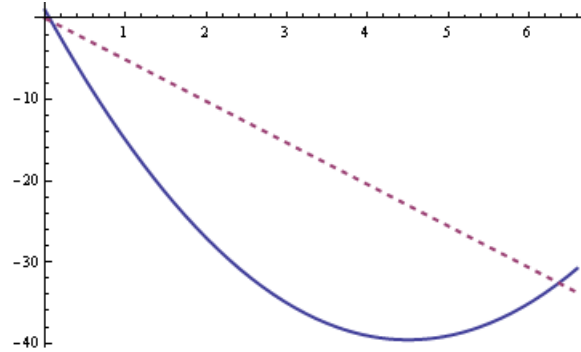
Si  $d_1 d_2 \neq 0$  alors  $\eta(\epsilon)$  peut changer de signe zéro, une, ou deux fois lorsque  $\epsilon$  varie dans  $(0, +\infty)$ . D'où, (II.2) peut passer du cas (S1) vers (éventuellement) le cas (S4) et ensuite (éventuellement) revenir vers le cas (S1) lorsque  $\epsilon$  augmente. Toutes les transitions identifiées ci-dessus sont vraiment possibles et peuvent être illustrées au moyen d'exemples. L'exemple ci-dessous traite le cas  $d_1 d_2 \neq 0$ , montrant une double transition, tout d'abord de (S1) vers (S4), puis le retour vers (S4). De plus, les trois sous-catégories de (S4) sont également balayées lorsque  $\epsilon$  varie. Considérons le SPSS caractérisé par les matrices

$$M_1 = \begin{pmatrix} -1 & -9 \\ 0.01 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad M_2 = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

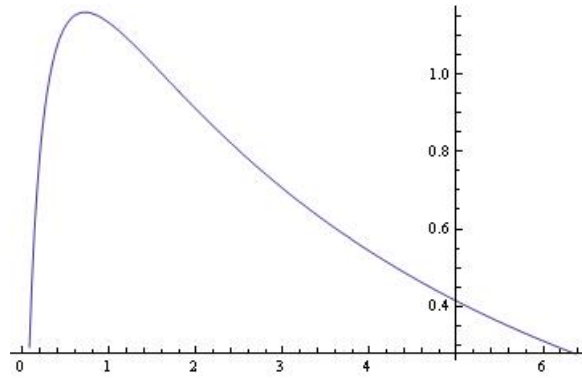
Les solutions de  $\text{tr}(A_1^\epsilon A_2^\epsilon) = -2\sqrt{\det(A_1^\epsilon) \det(A_2^\epsilon)}$  sont  $\epsilon_0 = 0.0784$  et  $\epsilon_1 = 6.3742$ , et donc pour tout  $\epsilon \in (0, \epsilon_0) \cup (\epsilon_1, \infty)$  le système est de type (S1), tandis que pour  $\epsilon \in (\epsilon_0, \epsilon_1)$  il est de type (S4) (voir Figure II.8).

En analysant les valeurs de  $\mathcal{R}^\epsilon$ , on trouve  $\epsilon_2 = 0.32$  et  $\epsilon_3 = 1.62$ , solutions de  $\mathcal{R}^\epsilon - 1 = 0$ , et donc, que pour tout  $\epsilon \in (\epsilon_0, \epsilon_2) \cup (\epsilon_3, \epsilon_1)$  nous avons  $\mathcal{R}^\epsilon - 1 < 0$  et pour tout  $\epsilon \in (\epsilon_2, \epsilon_3)$  cette même quantité est positive (voir Figure II.9). D'où, lorsque  $\epsilon$  varie dans  $(\epsilon_0, \epsilon_1)$  les trois sous-catégories de (S4) illustrées. Géométriquement, cela signifie que la pire trajectoire converge pour  $\epsilon$  assez petit et assez grand, qu'elle devient périodique pour  $\epsilon = \epsilon_2, \epsilon_3$ , et qu'elle diverge pour  $\epsilon \in (\epsilon_2, \epsilon_3)$ .





**Figure II.8** – Les courbes en trait continu et en pointillés sont les graphes respectifs de  $\epsilon \mapsto \epsilon^2 \operatorname{tr}(A_1^\epsilon A_2^\epsilon)$  et  $\epsilon \mapsto -2\epsilon^2 \sqrt{\det(A_1^\epsilon) \det(A_2^\epsilon)}$



**Figure II.9** – Graphe de  $(\epsilon_0, \epsilon_1) \ni \epsilon \mapsto \mathcal{R}^\epsilon$

## 2.3 Comparaison des résultats

### 2.3.1 Conditions basées sur des LMIs

Afin de mesurer l'apport des conditions que nous donnons, considérons l'exemple suivant introduit dans [37, 38], où le SCSP (II.2) est décrit par les matrices suivantes

$$M_1 = \begin{pmatrix} -1 & \alpha \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ \alpha & -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{II.15})$$

Les conditions suffisantes basées sur des inégalités matricielles linéaires ([13]) qui ont été rappelées dans le théorème 20 pour la stabilité asymptotique sous une loi de commutations arbitraire, permettent de conclure que le SCSP décrit par (II.15) est quadratiquement stable pour  $-1 < \alpha < 1$ . En utilisant notre condition (SP1), qui fournit les conditions nécessaires et suffisantes pour la stabilité asymptotique lorsque  $\epsilon \rightarrow 0^+$ , nous montrons que le système décrit par

(II.15) admet une CQLF lorsque  $\epsilon \rightarrow 0^+$  si et seulement si  $\alpha \in (-2, 2)$ . En effet, la condition

$$\Gamma(M_1, M_2) > -\sqrt{\det(M_1) \det(M_2)}$$

se traduit par

$$\frac{2 - \alpha^2}{2} > -1,$$

qui est équivalente à

$$4 - \alpha^2 > 0.$$

Donc, les conditions basées sur des LMIs données dans [37, 38] s'avèrent être uniquement suffisantes (et non nécessaires) pour la stabilité quadratique sous une loi de commutations arbitraire. Pour  $\alpha = 2$  et  $\alpha > 2$ , les conditions (SP3) et (SP5) permettent de conclure que le système décrit par (II.15) est respectivement uniformément stable et instable. D'où la conclusion suivante, lorsque  $\epsilon \rightarrow 0^+$ , le SCSP décrit par (II.15) est GUAS si et seulement si il admet une CQLF.

Il est possible d'interpréter géométriquement la caractérisation donnée ci-dessus des valeurs de  $\alpha$  pour lesquelles le SCSP décrit par (II.15) est GUAS lorsque  $\epsilon \rightarrow 0^+$ . En effet, les champs de vecteurs  $x \mapsto A_1^\epsilon x$  et  $x \mapsto A_2^\epsilon x$  sont linéairement indépendants sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  si et seulement si  $|a| < 2$ , et ce, indépendamment de  $\epsilon$  puisque  $\epsilon \det(A_1^\epsilon x, A_2^\epsilon x) = -\alpha(x_1^2 - \alpha x_1 x_2 + x_2^2)$ . En raison des contraintes géométriques, dans le plan, deux champs de vecteurs globalement asymptotiquement stables qui ne sont jamais colinéaires en dehors de l'origine, définissent un système à commutations GUAS. Cette dernière assertion est également vérifiée dans le cas non-linéaire, pour plus de détails, voir [12]. L'approche géométrique développée dans [41, 42] va dans le même sens et permet d'obtenir les mêmes conclusions.

### 2.3.2 Systèmes singulièrement perturbés vus comme des inclusions différentielles

Des extensions de la théorie classique des systèmes singulièrement perturbés aux inclusions différentielles ont déjà été considérées par plusieurs auteurs, voir [18, 56, 70, 71]. De tels résultats peuvent être utilisés dans le cadre des SCSPs pour prouver le théorème 23 ci-dessous. Nous rappelons qu'un SCSP de la forme (II.2) est dit *pratiquement stable* s'il existe une fonction  $\beta$  de classe  $\mathcal{KL}$  telle que, pour tout  $\delta > 0$ , il existe  $\epsilon_0 > 0$  tel que toute trajectoire de (II.2) avec  $\epsilon \in (0, \epsilon_0)$  vérifie

$$\|(x_1(t), x_2(t))\| \leq \beta(\|(x_1(0), x_2(0))\|, t) + \delta, \quad t \geq 0. \quad (\text{II.16})$$

La notion de stabilité pratique donnée ci-dessus n'est pas comparable avec la notion de stabilité asymptotique uniforme globale lorsque  $\epsilon \rightarrow 0^+$  définie en début de ce chapitre. En effet, aucune des deux notions n'est *a priori* plus forte que l'autre. Tandis que la stabilité pratique se focalise sur l'uniformité par rapport à  $\epsilon$ , la notion d'uniformité dans la définition de GUAS lorsque  $\epsilon \rightarrow 0^+$  est uniquement par rapport aux conditions initiales et la loi de commutations, et ce, pour  $\epsilon$  fixé. De plus, GUAS, lorsque  $\epsilon \rightarrow 0^+$  garantie la convergence vers l'origine lorsque  $t \rightarrow +\infty$  pour  $\epsilon$  assez petit, ce qui n'est pas le cas pour la stabilité pratique. Le résultat que nous proposons ci-dessous (théorème 23) est obtenu en appliquant les résultats de [71] à notre contexte. Ensuite, sous les hypothèse du théorème 23, nous nous référons à notre classification donnée dans le théorème 22 pour conclure à la stabilité quadratique sous ces conditions.

**Théorème 23.** *On suppose que*

$$d_1, d_2 < 0 \quad (\text{II.17})$$

et

$$a_i d_j - b_i c_j > 0, \quad \text{pour } i, j = 1, 2. \quad (\text{II.18})$$

Alors (II.2) est pratiquement stable.

**Démonstration.** La stabilité pratique est démontrée à l'aide d'un résultat général obtenu par Watbled dans [71], dans le cadre des inclusions différentielles non-linéaires singulièrement perturbées. Pour cela, considérons l'inclusion différentielle suivante

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \epsilon \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} \in F(x_1(t), x_2(t)) \quad (\text{II.19})$$

avec

$$F(x_1(t), x_2(t)) := \text{co} \left\{ M_1 \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}, M_2 \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} \right\}$$

et où  $\text{co}(\cdot)$  représente l'enveloppe convexe.  $F$  est un fermé convexe de  $\mathbb{R}^2$ . L'équation (II.19) peut être vue comme le convexifié de (II.2).

On définit  $P_1$  (respectivement,  $P_2$ ) comme étant la projection de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  sur la première (respectivement, seconde) composante  $\mathbb{R}$ .

Pour tout  $x_1 \in \mathbb{R}$ , on considère l'inclusion différentielle

$$\dot{x}_2 \in P_2 F(x_1, x_2) = \text{co} \{ c_1 x_1 + d_1 x_2, c_2 x_1 + d_2 x_2 \}. \quad (\text{II.20})$$

L'ensemble des équilibres de l'inclusion différentielle (II.20) est

$$S(x_1) = \text{co} \left\{ -\frac{c_1}{d_1}x_2, -\frac{c_2}{d_2}x_2 \right\}. \quad (\text{II.21})$$

On pose

$$\begin{aligned} D(x_1) &= \text{co}P_1(F(S(x_1), x_1)) = \text{co}\{b_i y + a_i x_1 \mid i = 1, 2, y \in S(x_1)\} \\ &= \text{co} \left\{ \left( -\frac{b_1 c_1}{d_1} + a_1 \right) x_1, \left( -\frac{b_2 c_1}{d_2} + a_1 \right) x_1, \left( -\frac{b_1 c_2}{d_1} + a_2 \right) x_1, \left( -\frac{b_2 c_2}{d_2} + a_2 \right) x_1 \right\}. \end{aligned}$$

Le théorème 3.1 dans [71] garantit que si  $S(x_1)$  est asymptotiquement stable pour (II.20) et si le point  $\{0\}$  est un équilibre asymptotiquement stable pour l'inclusion différentielle

$$\dot{x}_1 \in D(x_1) \quad (\text{II.22})$$

alors le système (II.2) est pratiquement stable. La stabilité asymptotique de (II.21) pour (II.20) est garantie par l'hypothèse (II.17). D'autre part, (II.18) implique que  $\{0\}$  est asymptotiquement stable pour l'inclusion différentielle (II.22), concluant la preuve du théorème 23.  $\square$

Sous les hypothèses du théorème 23, nous établissons également le résultat suivant.

**Corollaire 3.** *Si les hypothèses (II.17) et (II.18) permettant d'obtenir la stabilité pratique de (II.2) sont vérifiées, alors (II.2) est quadratiquement stable.*

**Démonstration.** Pour montrer cela, nous remarquons que (II.17) et (II.18) impliquent que  $a_1 d_2 - b_1 c_2$  et  $a_2 d_1 - b_2 c_1$  soient positifs. Ainsi

$$2\Gamma(M_1, M_2) = a_1 d_2 + a_2 d_1 - b_1 c_2 - b_2 c_1$$

est positif, et donc

$$\Gamma(M_1, M_2) > 0 > -\sqrt{\det M_1 \det M_2}.$$

Comme  $d_1 d_2 \neq 0$ , nous nous retrouvons dans le cas (SP1).  $\square$

### 3 Conclusion

Dans ce chapitre, de la même manière que cela a été fait dans [5] pour les systèmes linéaires à commutations dans le cas planaire, nous avons donné une classification complète du

comportement asymptotique (quadratiquement stable, GUAS, stable ou instable) des SCSPs planaires, lorsque le paramètre de perturbation  $\epsilon > 0$  tend vers 0. En effet, nous avons montré que pour  $\epsilon > 0$  assez petit, le comportement asymptotique du SCSP (II.2) est unique. Dans le cas général, c'est-à-dire en dimension supérieure à deux et avec plus de modes, cela reste un problème ouvert. Alors que les résultats dans [5] distinguent six cas, nous n'en distinguons que cinq pour le cas des SCSPs. En effet, le sixième s'avère être instable par rapport au paramètre de perturbation dans le sens où il ne peut avoir lieu que pour des valeurs isolées de  $\epsilon$ . De plus, les conditions nécessaires et suffisantes pour la stabilité quadratique permettent de pallier le conservatisme des conditions à base de LMIs données antérieurement dans [37, 38].

Egalement, nous avons étudié ce qui se passe lorsque l'on fait croître  $\epsilon$ , combien de fois le comportement asymptotique du SCSP peut changer (stabilité asymptotique, stabilité, instabilité), et quelles transitions sont possibles.

Enfin, nous avons analysé la stabilité pratique à partir de résultats existants dans le cadre des inclusions différentielles. Dans le cas des systèmes planaires, il s'avère que lorsque l'on peut conclure que le système est pratiquement stable, alors il est également GUAS. Pour les SCSPs de dimensions supérieures, la question reste ouverte.

---

---

# Chapitre III

---

## Systèmes à commutations singulièrement perturbés à temps discret

Dans ce chapitre, nous abordons la stabilité des systèmes à commutations singulièrement perturbés à temps discret. En particulier, nous nous intéressons à la discrétisation des SCSPs à temps continu, et nous cherchons quel est le choix approprié pour la période d'échantillonnage  $T_s$  permettant de préserver la stabilité et/ou les fonctions de Lyapunov quadratiques du SCSP à temps continu vers le SCSP à temps discret. A notre connaissance, il n'existe aucun résultat de ce type concernant les SCSPs.

Dans un premier temps, nous rappellerons quelques résultats récents concernant la discrétisation des systèmes linéaires à commutations et les types de stabilité qu'elles préservent. Ensuite, nous proposons et analysons des modèles à temps discret obtenus pour différents choix de la période d'échantillonnage  $T_s$  que nous comparons avec ceux donnés dans la littérature [51]. Enfin, nous montrons qu'il est nécessaire de choisir une période d'échantillonnage d'ordre  $\epsilon^k, k \geq 2$ , afin de préserver les fonctions de Lyapunov quadratiques du système à temps continu vers le système à temps discret.

### 1 Discrétisation des systèmes linéaires à commutations

On considère un SLC à temps continu dont on rappelle le modèle ci-dessous

$$\dot{x}(t) = A_{\sigma(t)}x(t) \tag{III.1}$$

avec  $x$  un vecteur de  $\mathbb{R}^n$ ,  $A_{\sigma(t)} \in \{A_1, \dots, A_N\}$  où les matrices  $A_i$  sont de dimensions  $n \times n$  à coefficients réels pour tout  $i \in \{1, \dots, N\}$  et  $\sigma : \mathbb{R}^+ \rightarrow \{1, \dots, N\}$  constante par morceaux.

On associe à ce système à commutations à temps continu son homologue à temps discret

$$x(k+1) = A_{\sigma(k)}^d x(k), \quad (\text{III.2})$$

où  $A_i^d$ ,  $i=1, \dots, N$ , est une approximation de  $\exp(A_i T_s)$ , avec  $T_s$  la période d'échantillonnage. Dans ce qui suit, nous rappelons quelques méthodes d'approximation de  $\exp(A_s T_s)$  en spécifiant si elles préservent la stabilité asymptotique uniforme globale, ou encore la stabilité quadratique.

**Définition 12.** *On dit que la discrétisation (III.2) préserve la stabilité de (III.1) si lorsque (III.1) est GUAS, alors (III.2) est GUAS.*

**Définition 13.** *On dit que la discrétisation (III.2) préserve les CQLFs de (III.1) si lorsque  $V(x)$  est une CQLF pour (III.1), alors  $V(x)$  est également une CQLF pour (III.2).*

Dans la suite, lorsque nous parlerons de préservation de la stabilité, on signifie par là, la préservation du temps continu vers le temps discret. Lorsqu'il s'agira de préservation du temps discret vers le temps continu, nous le préciserons.

## 1.1 L'exponentielle de la matrice

L'utilisation de l'exponentielle de la matrice pour discrétiser le système à temps continu (III.1) peut sembler naturelle du fait que les solutions de

$$\dot{x}(t) = Ax(t) \quad (\text{III.3})$$

sont du type

$$x(t) = e^{At} x_0.$$

Ainsi, on considère dans cette section la transformation du temps continu vers le temps discret suivante

$$A_i^d = \exp(A_i T_s), \quad i = 1, \dots, N. \quad (\text{III.4})$$

Cependant, cette méthode présente quelques inconvénients, notamment, que l'exponentielle n'est pas bijective du fait de sa périodicité sur  $\mathbb{C}$ , ce qui implique qu'à plusieurs matrices distinctes en temps discret on peut associer la même matrice en temps continu [68]. Nous allons voir brièvement comment cette transformation préserve à la fois la stabilité et les CQLFs du temps continu vers le temps discret tandis qu'elle ne préserve ni la stabilité ni les fonctions de Lyapunov du temps discret vers le temps continu.

### 1.1.1 Préservation de la stabilité

Cette méthode de discrétisation préserve la stabilité, c'est-à-dire que si l'on considère un SLC à temps continu GUAS, alors son homologue à temps discret obtenu par l'exponentielle de la matrice le sera également. Cette affirmation tient du fait que toute trajectoire générée par

$$x(k+1) = \exp(A_i T_s)x(k), \quad i = 1, \dots, N \quad (\text{III.5})$$

est elle même une discrétisation des trajectoires du système

$$\dot{x}(t) = A_i x(t), \quad i = 1, \dots, N.$$

Par conséquent, si le système à temps continu est GUAS (toutes ses trajectoires convergent vers l'origine), alors son homologue à temps discret est GUAS (les trajectoires discrètes convergent également).

L'exemple suivant permet de montrer que l'inverse n'est pas vrai, c'est-à-dire que si le système à commutations à temps discret est asymptotiquement stable, il se peut que le système à temps continu correspondant ne le soit pas. Considérons la paire de matrices [68]

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} -0.5 & -15 \\ 1 & -1/15 \end{pmatrix}$$

qui caractérise le système linéaire à commutations (III.1), dont l'instabilité peut être prouvée en appliquant alternativement  $A_2$  et  $A_1$  pendant une durée respective de 0.5 et 0.7. Le système est alors caractérisé par la matrice suivante

$$e^{0.7A_1} e^{0.5A_2} \approx \begin{pmatrix} -0.2 & -1.11 \\ -0.03 & -1.10 \end{pmatrix}$$

dont les valeurs propres sont approximativement  $-0.16$  et  $-1.15$ . Le module d'une valeur propre étant supérieur à 1, ce système est instable. Quant à son homologue à temps discret décrit, pour  $T_s = 1$ , par la paire de matrices

$$\{e^{A_1}, e^{A_2}\},$$

il est asymptotiquement stable car son rayon spectral joint est compris dans l'intervalle  $[0.85, 0.92]$ .



### 1.1.2 Préservation des Fonctions de Lyapunov

Nous venons de voir que cette transformation permet de préserver la stabilité du temps continu vers le temps discret uniquement. La même affirmation peut être faite en ce qui concerne la préservation des CQLFs. En effet, s'il existe une CQLF pour le système à commutations à temps continu, alors elle l'est aussi pour le système à commutations en temps discret qui lui est associé par la transformation exponentielle. Comme pour la préservation de la stabilité, on justifie cela du fait que les trajectoires du système à temps discret sont un sous ensemble de celles du système à temps continu, la fonction de Lyapunov du système à temps continu reste donc une fonction de Lyapunov pour le système à temps discret.

Comme nous l'avons déjà mentionné, l'inverse n'est pas vrai, c'est-à-dire qu'il est possible qu'un système à temps continu soit asymptotiquement stable sans admettre de CQLF alors que le système à temps discret associé soit asymptotiquement stable en admettant une CQLF. Pour justifier cela, considérons l'exemple suivant.

**Exemple 2.** *Considérons le système linéaire à commutations suivant [16]*

$$\dot{x} = A_i x(t), \quad A_i \in \{A_1, A_2\} \quad (\text{III.6})$$

avec

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A_2 = \begin{pmatrix} -1 & -a \\ 1/a & -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{III.7})$$

Il a été montré dans [16] que pour  $a \in [1, 10]$ , (III.7) est asymptotiquement stable, tandis que pour  $a \geq 3 + \sqrt{8}$ , ce système à commutations n'admet pas de CQLFs. Par conséquent, en choisissant  $a = 6$ , le système à commutations à temps continu est asymptotiquement stable mais n'admet pas de CQLFs. En discrétisant ce système avec une période d'échantillonnage  $T_s = 1$ , on obtient le système à commutations à temps discret décrit par

$$A_1^d = e^{A_1} = \begin{pmatrix} 0.1988 & -0.3096 \\ 0.3096 & 0.1988 \end{pmatrix}, \quad A_2^d = e^{A_2} = \begin{pmatrix} 0.1988 & -1.8574 \\ 0.0516 & 0.1988 \end{pmatrix},$$

qui admet la CQLF  $V(x) = x^T P x$  avec

$$P = \begin{pmatrix} 2.7532 & -1.7378 \\ -1.7378 & 15.6606 \end{pmatrix},$$

*c'est-à-dire*

$$A_i^{dT} P A_i^d - P = -Q_i, \quad i = 1, 2.$$

*avec*

$$Q_1 = \begin{pmatrix} 1.35721 & -2.63012 \\ -2.63012 & 14.5639 \end{pmatrix}, \quad Q_2 = \begin{pmatrix} 2.63835 & -0.979699 \\ -0.979699 & 4.25994 \end{pmatrix}$$

*dont les valeurs propres respectives sont*  $\{15.0684, 0.852686\}$  *et*  $\{4.72084, 2.17745\}$ .

## 1.2 Approximations de Padé

On s'intéresse maintenant aux approximations de Padé. En considérant  $T_s$  la période d'échantillonnage, l'approximation de Padé d'ordre  $p$  de  $\exp(A_i T_s)$  est définie comme

$$A^d(T_s) = Z_p(A_i T_s) Z_p(-A_i T_s)^{-1}$$

avec

$$Z_p(X) = \sum_{i=0}^p c_i X^i, \quad c_i = \frac{(2p-i)! p!}{(2p)! i! (p-i)!}.$$

En particulier, lorsque  $p = 1$ , l'approximation de  $\exp(Ah)$  peut s'écrire

$$A^d(T_s) = \left( \mathbb{I} + \frac{T_s}{2} A \right) \left( \mathbb{I} - \frac{T_s}{2} A \right)^{-1}.$$

Cette approximation de Padé du premier ordre est également connu sous le nom de transformation bilinéaire, ou encore transformation de Tustin.

### 1.2.1 Préservation de la stabilité dans le cas linéaire

Une première propriété intéressante est la préservation de la stabilité dans le cas des systèmes linéaires invariants dans le temps, et ce, aussi bien du temps continu vers le temps discret que du temps discret vers le temps continu. En effet, l'image du demi plan gauche ouvert du plan complexe par cette transformation est l'intérieur ouvert du disque unité. On considère le système suivant

$$\dot{x}(t) = Ax(t). \tag{III.8}$$

A partir des approximations de Padé, et quelque soit la période d'échantillonnage, on lui associe le système à temps discret

$$x(k+1) = A^d x(k), \tag{III.9}$$

où  $A^d$  est l'approximation de Padé d'ordre un de  $\exp(AT_s)$ .

**Théorème 24** ([59]). *On considère les systèmes linéaires (III.8) et (III.9). Alors,*

- *si  $V$  est fonction de Lyapunov quadratique pour (III.8), alors  $V$  est aussi une fonction de Lyapunov quadratique pour (III.9) ;*
- *pour les approximations de Padé du premier ordre,  $V$  est une fonction de Lyapunov quadratique pour (III.8) si et seulement si elle l'est également pour (III.9).*

Dans [59], les auteurs donnent une condition supplémentaire afin que la réciproque de la première assertion du théorème 24 soit vérifiée quelque soit l'ordre de l'approximation.

**Théorème 25** ([59]). *On suppose que, pour tout  $h > 0$ , la matrice  $A^d(T_s)$  est une approximation de Padé (d'ordre fixe  $p$  quelconque) de  $\exp(Ah)$ . Alors,  $V(x) = x^T P x$  est une fonction de Lyapunov quadratique pour (III.8) si et seulement si elle l'est également pour (III.9) et que la condition suivante*

$$\lim_{T_s \rightarrow 0} \frac{A^d(T_s)^T P A^d(T_s) - P}{T_s} = A^T P + P A$$

*est vérifiée.*

### 1.2.2 Non préservation de la stabilité pour les systèmes à commutations

Nous venons de voir que dans le cas des systèmes LTI, cette transformation préserve la stabilité dans les deux sens. Cependant, dans le cas des systèmes linéaires à commutations, ce résultat n'est plus valable. En effet, considérons l'exemple suivant illustrant un système linéaire à commutations GUAS (sans admettre de CQLF), mais dont le discrétisé est instable. Soit le système à commutations décrit par l'ensemble  $\{A_1, A_2, A_3\}$  avec

$$A_1 = \begin{pmatrix} -19 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & -0.1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} -19 & -10 & -18.75 \\ 0 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & -0.1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} -19 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 0 \\ 18.75 & 8.75 & -0.1 \end{pmatrix}.$$

Quant au système à temps discret qui lui est associé, pour  $h = 0.25$ , il est décrit par l'ensemble  $\{A_{d1}, A_{d2}, A_{d3}\}$ , avec

$$A_1^d = \begin{pmatrix} -0.4 & 0 & 0 \\ 0 & -0.6 & 0 \\ 0 & 0 & 0.98 \end{pmatrix}, \quad A_2^d = \begin{pmatrix} -0.4 & 0 & 0 \\ -0.35 & -0.6 & 0 \\ -1.37 & 0 & 0.98 \end{pmatrix}, \quad A_3^d = \begin{pmatrix} -0.4 & 0 & 1.37 \\ 0 & -0.6 & 1.01 \\ 0 & 0 & 0.98 \end{pmatrix}.$$

En activant successivement les modes 1, 2 et 3, la dynamique du système est caractérisée par la matrice  $D = A_3^d A_2^d A_1^d$ , dont les valeurs propres sont approximativement  $\{-0.0002, 0.606, -1.0357\}$ . La dernière valeur propre étant en dehors du cercle unité, cette séquence de commutations répétée périodiquement déstabilise le système. Ainsi, on voit que l'on peut perdre la stabilité asymptotique en utilisant cette transformation.

### 1.2.3 Préservation des fonctions de Lyapunov quadratiques

Nous venons de voir que de manière générale, les approximations de Padé ne préservent pas la stabilité des systèmes linéaires à commutations. Néanmoins, cette transformation a la particularité de préserver les fonctions de Lyapunov quadratiques du temps continu vers le temps discret pour les systèmes linéaires à commutations. On considère le système linéaire à commutations à temps continu suivant

$$\dot{x}(t) = A_{\sigma(t)}x(t), \quad A_{\sigma(t)} \in \{A_1, \dots, A_N\}. \quad (\text{III.10})$$

auquel on associe le système linéaire à commutations à temps discret suivant

$$x(k+1) = A_{\sigma(k)}^d x(k), \quad A_{\sigma(k)}^d \in \{A_1^d, \dots, A_N^d\}. \quad (\text{III.11})$$

obtenu via les approximations de Padé.

**Théorème 26.** *On considère les systèmes linéaires à commutations (III.1) et (III.2). Alors*

- *si  $V$  est fonction de Lyapunov quadratique pour (III.1), alors  $V$  est aussi une fonction de Lyapunov quadratique pour (III.2) ;*
- *pour les approximations de Padé du premier ordre,  $V$  est une fonction de Lyapunov quadratique commune pour (III.1) si et seulement si elle l'est également pour (III.2).*

### 1.2.4 Préservation de la stabilité dans un cas particulier

Nous rappelons que l'existence d'une fonction de Lyapunov quadratique commune est une condition uniquement suffisante pour la stabilité asymptotique uniforme des systèmes linéaires à commutations [16]. Dans ce contexte, toujours dans [59], les auteurs montrent que les approximations de Padé d'un système linéaire à commutations préservent la stabilité uniforme exponentielle si toutes les matrices de l'ensemble  $\{A_1, \dots, A_N\}$  sont Hurwitz et que chaque paire

de matrices a  $n - 1$  vecteurs propres communs [58]. On pose

$$Q_p(s) = \sum_{i=0}^p c_i s^i, \quad c_i = \frac{(2p - i)! p!}{(2p)! i! (p - i)!}$$

et

$$\bar{\alpha}_p = \begin{cases} \text{la plus grande racine réelle de } Q_p(s), \\ -\infty & \text{si } Q_p(s) \text{ n'a pas de racines réelles.} \end{cases}$$

**Théorème 27.** *On suppose que  $\nu = \{v_1, \dots, v_{n+1}\}$  est un ensemble de vecteurs de  $\mathbb{R}^n$  tel que quels que soient les  $n$  vecteurs que l'on considère dans  $\nu$ , ils sont linéairement indépendants. Pour tout  $i \in \{1, 2, \dots, n + 1\}$ , on construit une matrice carrée  $M_i$  de dimension  $n$  comme suit :  $M_1 = (v_1 \dots v_{i-1} v_{i+1} \dots v_n)$  et pour  $2 \leq i \leq n + 1$  on définit  $M_i = (v_1 \dots v_{n+1} v_i \dots v_n)$ , c'est-à-dire que  $M_i$  est obtenue en remplaçant la  $(i - 1)^{\text{ème}}$  colonne de  $M_1$  par le vecteur  $v_{n+1}$ . On suppose également que l'on a  $N$  matrices diagonales différentes dont tous les éléments sont négatifs. On définit  $A_{i,h} = M_i D_h M_i^{-1}$ , pour  $1 \leq i \leq n + 1$  et  $1 \leq h \leq N$ . Soit  $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_N\}$  un sous-ensemble de  $\{A_{i,h} : 1 \leq i \leq n + 1, 1 \leq h \leq N\}$ . On pose*

$$\alpha_m = \min\{\alpha : \alpha \text{ est une valeur propre de } A \text{ et } A \in \{A_1, \dots, A_N\}\}.$$

Quelque soit  $p$  entier positif, on définit

$$\bar{h}_p = \begin{cases} \frac{\bar{\alpha}_p}{\alpha_m} & \text{si } Q_p(s) \text{ a une racine réelle,} \\ \infty & \text{si } Q_p(s) \text{ n'a pas de racines réelles.} \end{cases}$$

Soit  $\{A_1^d, \dots, A_N^d\}$  un sous ensemble fini de  $\{A^d(h) : A \in \{A_1, \dots, A_N\} \text{ et } 0 < h < \bar{h}_p\}$ . Alors le système à commutations à temps discret (III.11) est globalement exponentiellement stable.

Nous pouvons également citer les travaux effectués dans [57] concernant la préservation de certains types de fonctions de Lyapunov polyédrales. En effet, les auteurs montrent sous l'hypothèse que toutes les valeurs propres du système linéaire (sans commutations) sont distinctes, que le système linéaire et son discrétisé par la méthode de Padé partagent toujours une fonction de Lyapunov polyédrale.

### 1.3 Discrétisation d'Euler

Dans le cas des systèmes linéaires (sans commutations), il est bien connu qu'en choisissant  $T_s$  très petit, la discrétisation d'Euler

$$A_{T_s}^d = \mathbb{I} + T_s A$$

permet d'approximer relativement bien l'exponentielle  $\exp(AT_s)$ . En particulier, lorsque  $T_s$  est assez petit, une telle transformation permet de préserver la stabilité du système linéaire à temps continu de départ.

#### 1.3.1 Préservation de la stabilité

Concernant les systèmes linéaires à commutations, dans [48], A. P. Molchanov et P. H. Bauer établissent le lien entre la stabilité du système à temps continu et celle du système à temps discret obtenu par la discrétisation d'Euler. On considère le système linéaire à commutations suivant

$$\dot{x}(t) = A_{\sigma(t)}x(t), \quad A_{\sigma(t)} \in \{A_1, \dots, A_N\} \quad (\text{III.12})$$

auquel on associe le système à commutations à temps discret

$$x(k+1) = A_{\sigma(k)}^d x(k), \quad A_{\sigma(k)}^d \in \{\mathbb{I} + T_s A_1, \dots, \mathbb{I} + T_s A_N\}. \quad (\text{III.13})$$

Nous avons alors le résultat suivant.

**Théorème 28** ([48]). *On suppose que (III.12) est GUAS. Il existe  $T_{s_0} > 0$  tel que pour tout  $T_s \in (0, T_{s_0})$  (III.13) est GUAS.*

#### 1.3.2 Préservation des CQLFs

En plus de préserver la stabilité asymptotique uniforme du type (III.12), cette méthode de discrétisation permet également de préserver les fonctions de Lyapunov quadratiques communes. On suppose qu'il existe une matrice symétrique définie positive  $P$  telle que  $V(x) = x^T P x$  est une fonction de Lyapunov pour (III.12), c'est-à-dire que les inégalités matricielles suivantes sont vérifiées

$$A_i^T P + P A_i < 0, \quad i = 1, \dots, N.$$

Pour que  $V$  soit également une fonction de Lyapunov pour (III.13), on doit vérifier les inégalités matricielles suivantes

$$A_i^{dT} P A_i^d - P < 0, \quad i = 1, \dots, N. \quad (\text{III.14})$$

Or, on a

$$\begin{aligned} A_i^{dT} P A_i^d - P &= (\mathbb{I} + T_s A_i)^T P (\mathbb{I} + T_s A_i) - P \\ &= T_s (A_i^T P + P A_i) + T_s^2 (A_i^T P A_i). \end{aligned}$$

Ainsi, il existe  $T_{s_0} > 0$  tel que pour tout  $T_s \in (0, T_{s_0})$ , (III.14) est vérifiée.

Pour plus de détails concernant la discrétisation des systèmes à commutations et la préservation de la stabilité, nous renvoyons le lecteur vers les articles suivants et les références qu'ils contiennent [7, 55, 59, 67, 76].

## 2 Stabilité des systèmes à commutations singulièrement perturbés à temps discret

On considère un SCSP à temps continu de la forme

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \epsilon \dot{z}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}^{\sigma(t)} & A_{12}^{\sigma(t)} \\ A_{21}^{\sigma(t)} & A_{22}^{\sigma(t)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \quad (\text{III.15})$$

ou, de manière équivalente,

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix} = A_\epsilon^{\sigma(t)} \begin{pmatrix} x(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{I}_{d_s} & 0 \\ 0 & \epsilon^{-1} \mathbb{I}_{d_f} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11}^{\sigma(t)} & A_{12}^{\sigma(t)} \\ A_{21}^{\sigma(t)} & A_{22}^{\sigma(t)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

avec  $x \in \mathbb{R}^{d_s}$ ,  $z \in \mathbb{R}^{d_f}$ ,  $\sigma(t) \in \{1, \dots, N\}$ , et où  $\epsilon > 0$  représente le paramètre de perturbation singulière. On associe à (III.15) son homologue en temps discret décrit par

$$\begin{pmatrix} x(k+1) \\ z(k+1) \end{pmatrix} = F_{q,\epsilon}^{\sigma(k)} \begin{pmatrix} x(k) \\ z(k) \end{pmatrix} \quad (\text{III.16})$$

avec  $F_{q,\epsilon}^{\sigma(k)} = \exp(A_\epsilon^{\sigma(k)} T_s)$ . La discrétisation des SCSPs du type (III.15), consiste à choisir une période d'échantillonnage  $T_s = T_s(\epsilon)$  de manière à approximer l'exponentielle  $F_{q,\epsilon}^{\sigma(k)}$ . La question

qui se pose alors est quelle est la condition sur la période d'échantillonnage afin de préserver un type de stabilité particulier, en l'occurrence, la stabilité quadratique. Pour cela, nous définissons un nouveau système à temps discret

$$\begin{pmatrix} x(k+1) \\ z(k+1) \end{pmatrix} = G_\epsilon^{\sigma(k)} \begin{pmatrix} x(k) \\ z(k) \end{pmatrix} \quad (\text{III.17})$$

avec  $G_\epsilon^{\sigma(k)} \approx F_{q,\epsilon}^{\sigma(k)} = \exp(A_\epsilon^{\sigma(k)} T_s)$ . On définit alors la préservation de la stabilité et la préservation des CQLFs comme suit.

**Définition 14.** *On dit que la discrétisation (III.17) préserve la stabilité de (III.15) si, lorsque (III.15) est GUAS quand  $\epsilon \rightarrow 0^+$ , alors (III.17) est GUAS quand  $\epsilon \rightarrow 0^+$ .*

**Définition 15.** *On dit que la discrétisation (III.17) préserve les CQLFs de (III.15) si, lorsque  $V(x)$  est une CQLF pour (III.15) quand  $\epsilon \rightarrow 0^+$ , alors  $V(x)$  est également une CQLF pour (III.17) quand  $\epsilon \rightarrow 0^+$ .*

Comme pour la section précédente, pour ce qui suit, préserver la stabilité (respectivement les CQLFs) signifiera préserver la stabilité (respectivement les CQLFs) du temps continu vers le temps discret, et nous préciserons, le cas échéant, lorsqu'il s'agira de préserver la stabilité (respectivement les CQLFs) du temps discret vers le temps continu.

## 2.1 Discrétisation exacte

Le modèle obtenu ci-dessous est basé sur l'hypothèse suivante.

**Hypothèse 1.** *Pour tout  $\sigma \in \{1, \dots, N\}$ , la matrice  $A_{22}^\sigma$  est inversible.*

Sous l'Hypothèse 1, pour tout  $\sigma \in \{1, \dots, N\}$  et tout  $\epsilon$  dans un voisinage de zéro, il existe une solution unique  $L_\epsilon^\sigma$  à l'équation matricielle suivante

$$A_{21}^\sigma + \epsilon L_\epsilon^\sigma A_{11}^\sigma - A_{22}^\sigma L_\epsilon^\sigma - \epsilon L_\epsilon^\sigma A_{12}^\sigma L_\epsilon^\sigma = 0. \quad (\text{III.18})$$

On définit

$$A_{s,\epsilon}^\sigma = A_{11}^\sigma - A_{12}^\sigma L_\epsilon^\sigma \quad (\text{III.19})$$

$$A_{f,\epsilon}^\sigma = A_{22}^\sigma + \epsilon L_\epsilon^\sigma A_{12}^\sigma \quad (\text{III.20})$$



et l'on considère la solution  $M_\epsilon^\sigma$  de

$$-\epsilon A_{s,\epsilon} M_\epsilon^\sigma + M_\epsilon^\sigma A_{f,\epsilon} + A_{12}^\sigma = 0, \quad (\text{III.21})$$

qui est bien définie et unique pour tout  $\sigma \in \{1, \dots, N\}$  et tout  $\epsilon$  dans un voisinage de zéro.

Il est également utile d'étendre les définitions ci-dessus au cas  $\epsilon = 0$  en définissant

$$\begin{aligned} L_0^\sigma &= (A_{22}^\sigma)^{-1} A_{21}^\sigma, \\ M_0^\sigma &= -A_{12}^\sigma (A_{22}^\sigma)^{-1}, \\ A_{s,0}^\sigma &= A_{11}^\sigma - A_{12}^\sigma (A_{22}^\sigma)^{-1} A_{21}^\sigma, \\ A_{f,0}^\sigma &= A_{22}^\sigma. \end{aligned}$$

Introduisons les nouvelles variables  $x_s$  et  $z_f$  définies par

$$\begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} = H_\epsilon^\sigma \begin{pmatrix} x_s \\ z_f \end{pmatrix}, \quad H_\epsilon^\sigma = \begin{pmatrix} \mathbb{I}_{d_s} & -\epsilon M_\epsilon^\sigma \\ -L_\epsilon^\sigma & \mathbb{I}_{d_f} + \epsilon L_\epsilon^\sigma M_\epsilon^\sigma \end{pmatrix}.$$

On note que  $x_s$  et  $z_f$  peuvent dépendre en général de  $\sigma$  et que

$$(H_\epsilon^\sigma)^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbb{I}_{d_s} + \epsilon M_\epsilon^\sigma L_\epsilon^\sigma & \epsilon M_\epsilon^\sigma \\ L_\epsilon^\sigma & \mathbb{I}_{d_f} \end{pmatrix}.$$

Ce changement de variable nous permet de découpler les dynamiques lentes et rapides, en réécrivant (III.15) de la manière suivante

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_s \\ \dot{z}_f \end{pmatrix} = \Lambda_\epsilon^\sigma \begin{pmatrix} x_s \\ z_f \end{pmatrix}, \quad \Lambda_\epsilon^\sigma = (H_\epsilon^\sigma)^{-1} A_\epsilon^\sigma H_\epsilon^\sigma = \begin{pmatrix} A_{s,\epsilon}^\sigma & 0 \\ 0 & \epsilon^{-1} A_{f,\epsilon}^\sigma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_s \\ z_f \end{pmatrix}. \quad (\text{III.22})$$

Afin d'obtenir un modèle à temps discret associé à (III.15), posons  $T_s$  la période d'échantillonnage. Alors, la discrétisation de (III.15) s'écrit

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x(k+1) \\ z(k+1) \end{pmatrix} &= e^{A_\epsilon^\sigma T_s} \begin{pmatrix} x(k) \\ z(k) \end{pmatrix} = H_\epsilon^\sigma e^{\Lambda_\epsilon^\sigma T_s} (H_\epsilon^\sigma)^{-1} \begin{pmatrix} x(k) \\ z(k) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} F_{11}^{\sigma,\epsilon}(T_s) & F_{12}^{\sigma,\epsilon}(T_s) \\ F_{21}^{\sigma,\epsilon}(T_s) & F_{22}^{\sigma,\epsilon}(T_s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(k) \\ z(k) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{III.23})$$

avec

$$\begin{aligned}
 F_{11}^{\sigma,\epsilon}(T_s) &= \exp(A_{s,\epsilon}^\sigma T_s)(\mathbb{I}_{d_s} + \epsilon M_\epsilon^\sigma L_\epsilon^\sigma) - \epsilon M_\epsilon^\sigma \exp\left(\frac{A_{f,\epsilon}^\sigma T_s}{\epsilon}\right) L_\epsilon^\sigma, \\
 F_{12}^{\sigma,\epsilon}(T_s) &= \epsilon \left[ \exp(A_{s,\epsilon}^\sigma T_s) M_\epsilon^\sigma - M_\epsilon^\sigma \exp\left(\frac{A_{f,\epsilon}^\sigma T_s}{\epsilon}\right) \right], \\
 F_{21}^{\sigma,\epsilon}(T_s) &= -L_\epsilon^\sigma \exp(A_{s,\epsilon}^\sigma T_s)(\mathbb{I}_{d_s} + \epsilon M_\epsilon^\sigma L_\epsilon^\sigma) + (\mathbb{I}_{d_f} + \epsilon L_\epsilon^\sigma M_\epsilon^\sigma) \exp\left(\frac{A_{f,\epsilon}^\sigma T_s}{\epsilon}\right) L_\epsilon^\sigma, \\
 F_{22}^{\sigma,\epsilon}(T_s) &= -\epsilon L_\epsilon^\sigma \exp(A_{s,\epsilon}^\sigma T_s) M_\epsilon^\sigma + (\mathbb{I}_{d_f} + \epsilon L_\epsilon^\sigma M_\epsilon^\sigma) \exp\left(\frac{A_{f,\epsilon}^\sigma T_s}{\epsilon}\right).
 \end{aligned}$$

Nous notons que bien que le changement de variables  $(x, z) \mapsto (x_s, z_f)$  puisse dépendre du mode  $\sigma$ , il est utilisé uniquement pour le calcul de l'exponentielle de  $A_\epsilon^\sigma$ ; l'expression dans (III.23) est dans les coordonnées de départ.

De plus, le modèle obtenu ci-dessus est obtenu par le calcul exact de l'exponentielle et est équivalent à celui en temps continu pour des instants de commutations qui sont des multiples entiers de  $T_s$ . Par conséquent, si le SCSP de départ (en temps continu) est GUAS, alors il est évident que le discrétisé exact ci-dessus est également GUAS, et ce, indépendamment de  $T_s$ . Dans la suite, nous considérons des approximations des matrices  $F_\epsilon^\sigma(T_s)$  selon différents choix de  $T_s = T_s(\epsilon)$  et on étudie la stabilité du SCSP à temps discret obtenu en remplaçant  $F_\epsilon^\sigma(T_s)$  par ces approximations dans (III.16).

## 2.2 Echantillonnage d'ordre 1 ou échantillonnage lent

On parle d'échantillonnage lent lorsque  $T_s = 1$  (ou  $T_s = c$ , avec  $c > 0$ , ce qui est équivalent pour la suite). Dans le but d'identifier une limite lorsque  $\epsilon \rightarrow 0^+$  de  $F_{22}^{\sigma,\epsilon}(1)$ ,  $\sigma = 1, \dots, N$ , il est nécessaire de renforcer l'Hypothèse 1 comme suit.

**Hypothèse 2.** *Pour tout  $\sigma \in \{1, \dots, N\}$ , la matrice  $A_{22}^\sigma$  est Hurwitz.*

Sous l'Hypothèse 2, il existe  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \epsilon^{-k} \exp\left(\frac{A_{f,\epsilon}^\sigma}{\epsilon}\right) = 0$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ .

### 2.2.1 Cas des SSPs linéaires

La discrétisation des systèmes singulièrement perturbés (sans commutations), c'est-à-dire en prenant  $N = 1$  dans (III.15), a été étudiée dans les années 80s [30, 51, 52]. Afin d'approximer

le modèle discret exact associé au système linéaire singulièrement perturbé

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix} = A_\epsilon \begin{pmatrix} x(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{I}_{d_s} & 0 \\ 0 & \epsilon^{-1}\mathbb{I}_{d_f} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ z(t) \end{pmatrix}. \quad (\text{III.24})$$

dans [36], les auteurs proposent le modèle suivant pour une période d'échantillonnage  $T_s = 1$

$$\begin{pmatrix} x(k+1) \\ z(k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_{11} & \epsilon E_{12} \\ E_{21} & \epsilon E_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(k) \\ z(k) \end{pmatrix} \quad (\text{III.25})$$

où

$$\begin{aligned} E_{11} &= \exp(A_{s,0}), \\ E_{12} &= -\exp(A_{s,0})A_{12}A_{22}^{-1}, \\ E_{21} &= -A_{22}^{-1}A_{21}\exp(A_{s,0}), \\ E_{22} &= A_{22}^{-1}A_{21}\exp(A_{s,0})A_{12}A_{22}^{-1}. \end{aligned}$$

Avant de discuter de la préservation de la stabilité de ce modèle, nous proposons le lemme suivant que nous utiliserons dans la preuve des propositions 1 et 3.

**Lemme 2.** *On suppose que l'hypothèse 1 est vérifiée et que (III.24) est GUAS lorsque  $\epsilon \rightarrow 0$ . Alors  $A_{s,0}$  et  $A_{22}$  sont Hurwitz.*

**Démonstration.** En partant de (III.22), il est clair que si (III.24) est GUAS lorsque  $\epsilon \rightarrow 0^+$  alors  $A_{s,\epsilon}$  et  $A_{f,\epsilon}$  sont Hurwitz pour  $\epsilon$  assez petit. En particulier, comme nous supposons que  $A_{22} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} A_{f,\epsilon}$  est inversible, nous avons nécessairement que  $A_{22}$  est Hurwitz. Quant à  $A_{s,0}$ , pour raisonner de la même manière que pour  $A_{22}$ , nous devons montrer qu'elle est inversible. On sait que  $A_{s,\epsilon}$  est Hurwitz (en particulier, inversible) pour  $\epsilon > 0$  assez petit et que  $\epsilon \rightarrow A_{s,\epsilon}$  est analytique. En particulier, pour tout vecteur non-nul  $v$ , la courbe  $\epsilon \rightarrow A_{s,\epsilon}v$  est analytique et différente de la courbe constante à l'origine. Donc, il doit exister un entier positif  $p$  tel que

$$\bigcap_{q=0}^p \text{Ker} A_{s,0}^{(q)} = (0),$$

avec

$$A_{s,0}^{(q)} = \left. \frac{d^q}{d\epsilon^q} A_{s,\epsilon} \right|_{\epsilon=0}.$$

On raisonne par l'absurde en supposant que  $A_{s,0}$  est singulière et on montre que pour tout  $q \in \mathbb{N}$  le noyau de  $A_{s,0}$  est inclu dans le noyau de  $A_{s,0}^{(q)}$ .

On rappelle que  $A_{s,\epsilon}$  est définie par (III.19) avec  $L_\epsilon$  solution de (III.18), c'est-à-dire,

$$L_\epsilon = A_{22}^{-1}(A_{21} + \epsilon L_\epsilon A_{s,\epsilon}).$$

D'où, pour tout  $q \geq 1$ ,

$$L_0^{(q)} = \left. \frac{d^q}{d\epsilon^q} L_\epsilon \right|_{\epsilon=0} = A_{22}^{-1} \sum_{k=0}^{q-1} \binom{q-1}{k} L_0^{(k)} A_{s,0}^{(q-1-k)}$$

et

$$A_{s,0}^{(q)} = -A_{12} L_0^{(q)}.$$

Une simple récurrence montre alors que  $\text{Ker}(A_{s,0}) \subset \text{Ker}(A_{s,0}^{(q)})$ , ce qui termine la preuve du lemme.  $\square$

Nous pouvons alors montrer la proposition ci-dessous qui affirme que le modèle discrétisé (III.25) préserve la stabilité du SSP (III.24).

**Proposition 1.** *On suppose que  $N = 1$  et que  $A_{22}$  est Hurwitz. Alors la discrétisation (III.25) préserve la stabilité de (III.24).*

**Démonstration.** Tout d'abord, on rappelle que si  $E_{11}$  et  $\epsilon(E_{22} - E_{21}E_{11}^{-1}E_{12})$  sont stables au sens du temps discret (c'est-à-dire Schur), alors il existe  $\epsilon_0 > 0$  tel que pour tout  $\epsilon \in (0, \epsilon_0)$ , le système (III.25) soit asymptotiquement stable [29, 30]. Or,

$$\begin{aligned} E_{11} &= \exp(A_{s,0}), \\ E_{22} - E_{21}E_{11}^{-1}E_{12} &= 0. \end{aligned}$$

Il suffit alors de montrer que  $E_{11}$  est Schur, c'est-à-dire que  $A_{s,0}$  est Hurwitz. On conclut par le lemme 2 qui permet d'affirmer que  $A_{s,0}$  est Hurwitz si (III.24) est GUAS lorsque  $\epsilon \rightarrow 0^+$ .  $\square$

### 2.2.2 Cas des systèmes à commutations

Dans le cas des SCSPs, on fait le choix d'approximer chacun des quatre termes  $\epsilon \mapsto F_{jk}^{\sigma,\epsilon}(1)$  (see (III.23)) par leurs termes d'ordre zéro par rapport à  $\epsilon$ , ce qui nous permet d'obtenir le modèle à commutations discrétisé lent suivant

$$\begin{pmatrix} x(k+1) \\ z(k+1) \end{pmatrix} = S^{\sigma(k)} \begin{pmatrix} x(k) \\ z(k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11}^{\sigma(k)} & 0 \\ S_{21}^{\sigma(k)} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(k) \\ z(k) \end{pmatrix}, \quad \sigma(k) \in \{1, \dots, N\}, \quad (\text{III.26})$$

avec

$$\begin{aligned} S_{11}^\sigma &= \exp(A_{s,0}^\sigma), \\ S_{21}^\sigma &= -L_0^\sigma \exp(A_{s,0}^\sigma). \end{aligned}$$

En comparant (III.26) avec (III.25), on peut voir que nous avons décidé de négliger dans (III.26) les termes d'ordre  $\epsilon$  qui approximent  $F_{12}^{\sigma,\epsilon}$  and  $F_{22}^{\sigma,\epsilon}$ , ce qui n'a pas d'impact sur l'analyse de stabilité qui est faite ci-dessous.

On peut interpréter le système (III.26) de la manière suivante. Si l'ordre du temps entre deux instants de commutations dans le système (III.15) est plus grand que celui du paramètre de perturbation  $\epsilon$  alors les variables lentes se comportent comme des constantes dans la dynamique rapide pour un temps assez long, pour permettre à cette dernière de converger vers  $S_{21}^\sigma x(k)$ , indépendamment de la condition  $z(k)$  à l'instant  $k$ . Egalement, sur l'intervalle de temps  $[k, k+1]$ , les composantes lentes évoluent indépendamment de  $z(k)$ . Elles évoluent comme si  $z$  était constamment égale à  $S_{21}^\sigma x(k)$ .

De cette interprétation, la stabilité du modèle échantillonné lent (III.26) paraît claire : il est GUAS si et seulement si le sous-système

$$x(k+1) = S_{11}^{\sigma(k)} x(k), \quad \sigma(k) \in \{1, \dots, N\}, \quad (\text{III.27})$$

est GUAS, c'est-à-dire, comme rappelé dans le Théorème 19, si et seulement si le rayon spectral joint de  $\{S_{11}^\sigma \mid \sigma = 1, \dots, N\}$  est plus petit que 1.

Nous pouvons alors prouver le résultat suivant.

**Proposition 2.** *On suppose que l'Hypothèse 2 est vérifiée. Si (III.27) est GUAS, alors le système à temps discret (III.16) où  $T_s = 1$  est GUAS lorsque  $\epsilon \rightarrow 0$ .*

**Démonstration.** On suppose que (III.27) est GUAS. Alors le rayon spectral joint associé au système à commutations à temps discret (III.26) est également inférieur à 1. Ceci tient du fait que le rayon spectral joint des systèmes à commutations triangulaires par blocs correspond au maximum parmi les rayons spectraux joints des systèmes associés aux blocs diagonaux [26, Proposition 1.5]). En effet, si les  $N$  matrices  $A_i$  d'un ensemble  $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_N\}$  ont la forme suivante

$$A_i = \begin{pmatrix} B_i & C_i \\ 0 & D_i \end{pmatrix}, \quad i = 1, \dots, N$$

alors le rayon spectral joint est  $\hat{\rho}(\mathcal{A}) = \max(\hat{\rho}(\{B_1, \dots, B_N\}), \hat{\rho}(\{D_1, \dots, D_N\}))$ .

Il reste à montrer que si (III.26) est GUAS alors (III.16) est GUAS lorsque  $\epsilon \rightarrow 0$ . Pour cela, rappelons à quoi correspond la distance d’Hausdorff. On note  $\Sigma_1 = \{F_\epsilon^1, \dots, F_\epsilon^N\}$  et  $\Sigma_2 = \{S^1, \dots, S^N\}$ . La distance d’Hausdorff permet de mesurer la distance des ensembles de points dans un espace métrique

$$D(\Sigma_1, \Sigma_2) = \max\left\{\sup_{A \in \Sigma_1} \left\{\inf_{A' \in \Sigma_2} \|A - A'\|\right\}, \sup_{A' \in \Sigma_2} \left\{\inf_{A \in \Sigma_1} \|A - A'\|\right\}\right\}.$$

De plus, le rayon spectral joint des ensembles de matrices bornés est continu par rapport à la distance de Hausdorff dans  $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$  (voir [26, Proposition 1.10]), c’est-à-dire, pour tout ensemble de matrices borné  $\Sigma_1, \Sigma_2 \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ , et pour tout  $\gamma > 0$ , il existe un scalaire  $\delta > 0$  tel que

$$d(\Sigma_1, \Sigma_2) < \delta \rightarrow |\hat{\rho}(\Sigma_1) - \hat{\rho}(\Sigma_2)| < \gamma.$$

On peut alors conclure que pour  $\epsilon$  assez petit (III.16) est GUAS.  $\square$

Concernant la préservation de la stabilité de manière générale, la question reste ouverte. L’exemple qui suit permet de montrer la non-préservation des CQLFs du temps discret vers le temps continu.

**Exemple 3.** Soit le SCSP où  $N = 2$ ,  $d_s = 1$ ,  $d_f = 1$  et caractérisé par les matrices suivantes

$$A_\epsilon^1 = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1/\epsilon & -5/\epsilon \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A_\epsilon^2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2/\epsilon & -6/\epsilon \end{pmatrix}, \quad (\text{III.28})$$

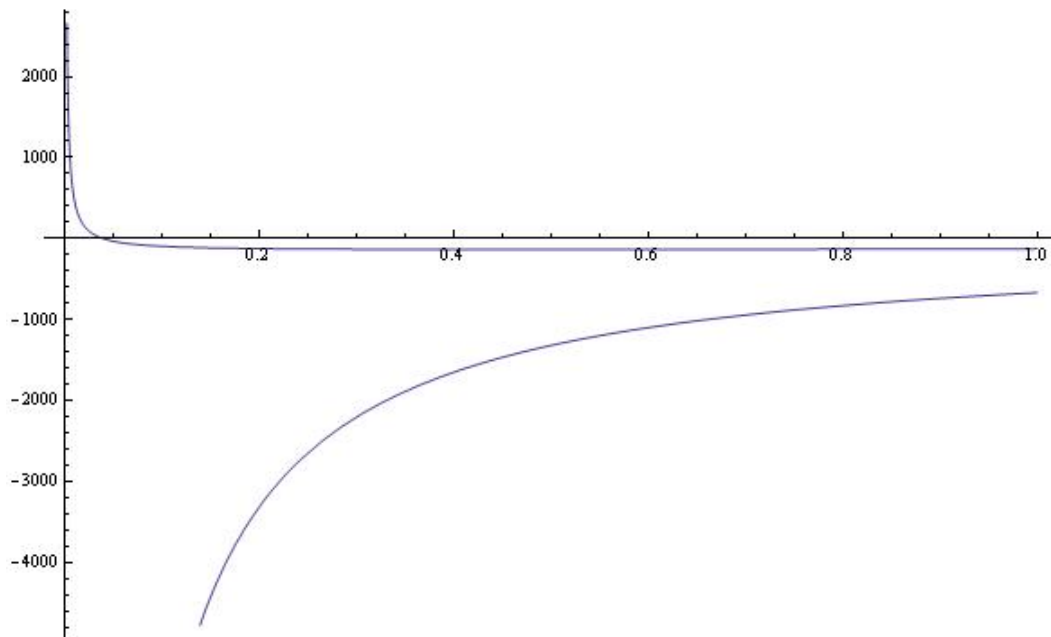
qui a pour discrétisé d’ordre 1 le système à temps discret décrit par

$$S^1 = \begin{pmatrix} 0.2466 & 0 \\ 0.0493 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad S^2 = \begin{pmatrix} 0.2636 & 0 \\ 0.0879 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{III.29})$$

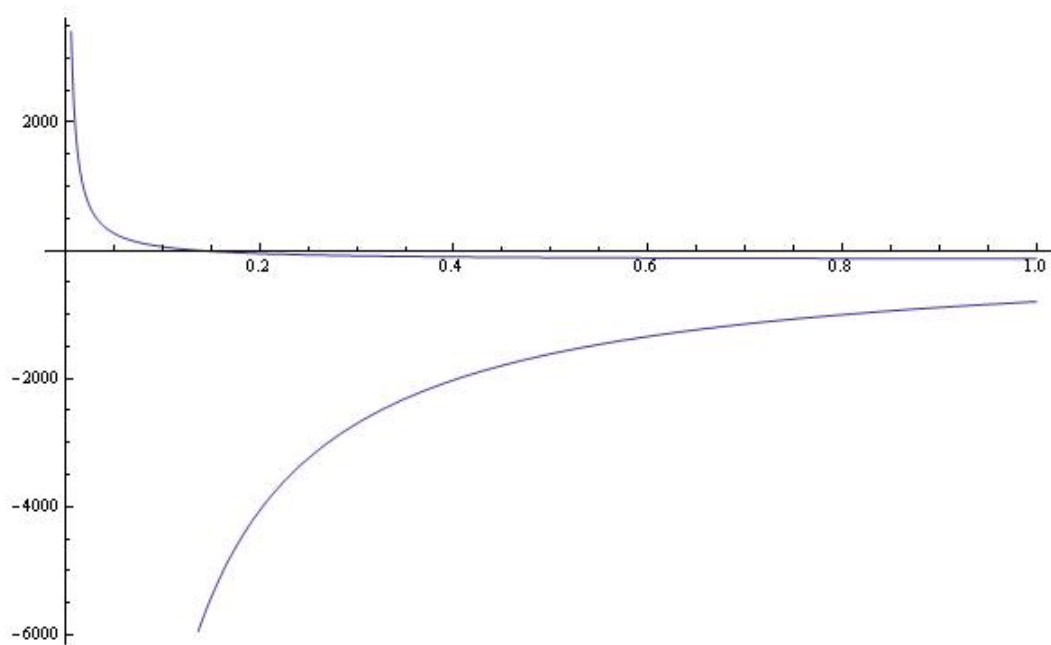
Or, le système à commutations décrit par (III.29) admet pour CQLF la fonction  $V(x) = x^T P x$  avec

$$P = \begin{pmatrix} 67.7050 & -0.2242 \\ -0.2242 & 66.0945 \end{pmatrix}.$$

En effet, les valeurs propres de  $S^{1T} P S^1 - P$  et  $S^{2T} P S^2 - P$  sont respectivement  $\{-66.1133, -63.4138\}$  et  $\{-66.1085, -62.4868\}$ . Quant aux équations  $A_\epsilon^{1T} P + P A_\epsilon^1$  et  $A_\epsilon^{2T} P + P A_\epsilon^2$  leurs valeurs propres sont représentées respectivement sur les figures III.1 et III.2. On voit sur ces figures que pour chacun des modes, une valeur propre est positive lorsque  $\epsilon \rightarrow 0$ , et donc que  $V$  n’est pas une



**Figure III.1** – Valeurs propres de  $\epsilon \mapsto A_\epsilon^{1T} P(\epsilon) + P A_\epsilon^1$



**Figure III.2** – Valeurs propres de  $\epsilon \mapsto A_\epsilon^{2T} P(\epsilon) + P A_\epsilon^2$

fonction de Lyapunov pour le SCSP décrit par (III.29). Nous noterons tout de même que le système à temps continu est GUAS. En effet,

$$\frac{\delta}{\epsilon} = \Gamma(A_\epsilon^1, A_\epsilon^2) > -\sqrt{\det(A_\epsilon^1) \det(A_\epsilon^2)} = -\frac{2\sqrt{14}}{\epsilon}.$$

En nous reportant au théorème 22, on conclut que le système à temps continu est quadratiquement stable (cas SP1.1).

Ainsi, lorsque l'on s'intéresse à l'échantillonnage des SCSPs, choisir une période d'échantillonnage d'ordre 1 ne permet pas de préserver les CQLFs du temps discret vers le temps continu.

### 2.3 Echantillonnage d'ordre $\epsilon$

On considère dans cette section le choix d'une période d'échantillonnage de l'ordre de  $\epsilon$ . Sans perte de généralité, nous prendrons  $T_s = \epsilon$ . Nous associons alors à (III.15) le modèle discrétisé d'ordre  $\epsilon$  suivant

$$\begin{pmatrix} x(k+1) \\ z(k+1) \end{pmatrix} = D_\epsilon^\sigma \begin{pmatrix} x(k) \\ z(k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{I}_{d_s} + \epsilon D_{11}^\sigma & \epsilon D_{12}^\sigma \\ D_{21}^\sigma & D_{22}^\sigma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(k) \\ z(k) \end{pmatrix}, \quad (\text{III.30})$$

avec

$$D_{11}^\sigma = A_{s,0}^\sigma + M_0^\sigma (\mathbb{I}_{d_s} - \exp(A_{22}^\sigma)) L_0^\sigma, \quad (\text{III.31a})$$

$$D_{12}^\sigma = M_0^\sigma (\mathbb{I}_{d_s} - \exp(A_{22}^\sigma)), \quad (\text{III.31b})$$

$$D_{21}^\sigma = (\exp(A_{22}^\sigma) - \mathbb{I}_{d_f}) L_0^\sigma, \quad (\text{III.31c})$$

$$D_{22}^\sigma = \exp(A_{22}^\sigma). \quad (\text{III.31d})$$

Voir en annexe pour plus de détails sur l'obtention du modèle. Nous notons que le modèle que nous donnons ci-dessus est identique (à la dépendance de  $\sigma$  près) au modèle standard de discrétisation pour les systèmes singulièrement perturbés (sans commutations) proposé dans [6, 36].

#### 2.3.1 Cas des systèmes sans commutations

Dans cette section, on considère des systèmes singulièrement perturbés du type (III.15), où un seul mode est considéré ( $N = 1$ ), c'est-à-dire, décrit par (III.24). Dans ce cas, la discrétisation



d'ordre  $\epsilon$  de (III.24) donne lieu au modèle

$$\begin{pmatrix} x(k+1) \\ z(k+1) \end{pmatrix} = D_\epsilon \begin{pmatrix} x(k) \\ z(k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{I}_{d_s} + \epsilon D_{11} & \epsilon D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(k) \\ z(k) \end{pmatrix} \quad (\text{III.32})$$

où les matrices  $D_{ij}$ ,  $i, j = 1, 2$ , sont obtenues comme décrit précédemment en prenant  $N = 1$ . Le modèle étant donné, nous pouvons énoncer la proposition suivante.

**Proposition 3.** *On considère que  $N = 1$  et que  $A_{22}$  est inversible. La discrétisation (III.32) préserve la stabilité de (III.24).*

**Démonstration.** Il a été montré dans [36] (voir également [28]) qu'il existe  $\epsilon_0 > 0$  tel que pour tout  $\epsilon \in (0, \epsilon_0)$  (III.32) est asymptotiquement stable lorsque  $D_{22}$  est Schur-stable et  $D_{11} + D_{12}(\mathbb{I}_{d_f} - D_{22})^{-1}D_{21}$  est Hurwitz et que cela est vérifié si  $A_{s,0}$  et  $A_{22}$  sont Hurwitz, puisque

$$\begin{aligned} A_{s,0} &= D_{11} + D_{12}(\mathbb{I}_{d_f} - D_{22})^{-1}D_{21}, \\ D_{22} &= \exp(A_{22}). \end{aligned}$$

Il reste donc à prouver que si (III.24) est GUAS lorsque  $\epsilon \rightarrow 0^+$  alors  $A_{s,0}$  et  $A_{22}$  sont Hurwitz. Le lemme 2 permet alors de conclure.  $\square$

### 2.3.2 Cas des systèmes à commutations

**Proposition 4.** *On suppose que l'hypothèse 1 est vérifiée. Alors la discrétisation (III.30) ne préserve pas les CQLFs de (III.15).*

Pour illustrer la proposition ci-dessus, considérons l'exemple suivant d'un SCSP admettant une CQLF qui ne l'est pas pour le discrétisé.

**Exemple 4.** *On considère le SCSP de dimension deux avec  $N = 2$  décrit par les deux matrices suivantes*

$$A_\epsilon^1 = \begin{pmatrix} -1.35 & 0.5 \\ -1.8/\epsilon & -0.001/\epsilon \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A_\epsilon^2 = \begin{pmatrix} -0.65 & 1 \\ -1/\epsilon & -0.001/\epsilon \end{pmatrix} \quad (\text{III.33})$$

Le théorème 22 permet d'affirmer que pour  $\epsilon$  petit, il existe une CQLF pour ce SCSP. En

appliquant le théorème 20, on calcule pour  $\epsilon$  petit, une CQLF  $V(x) = x^T P(\epsilon)x$  avec

$$P(\epsilon) = \begin{pmatrix} 49.9891 + 40.8828\epsilon & 45.4253\epsilon \\ 45.4253\epsilon & 50.4726\epsilon \end{pmatrix}.$$

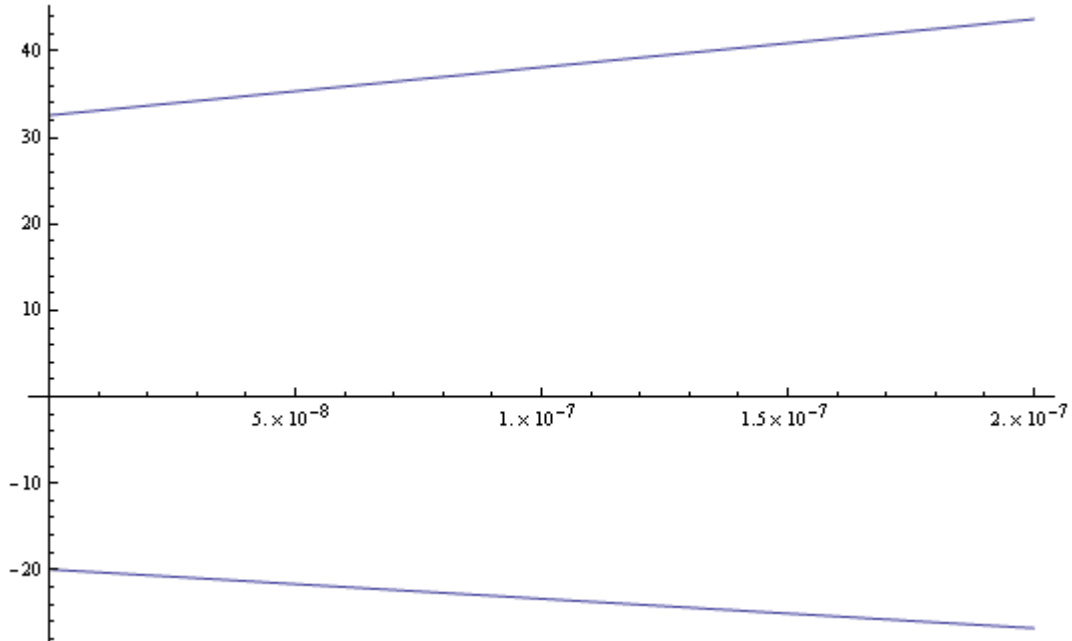
En effet, il existe  $\epsilon_0 \approx 1.9 * 10^{-7}$  tel que pour tout  $\epsilon \in (0, \epsilon_0)$

$$A_\epsilon^i P(\epsilon) + P(\epsilon) A_\epsilon^{iT} < 0 \quad i = 1, 2.$$

On associe à (III.33) son discrétisé à l'ordre  $\epsilon$  qui est caractérisé par les matrices

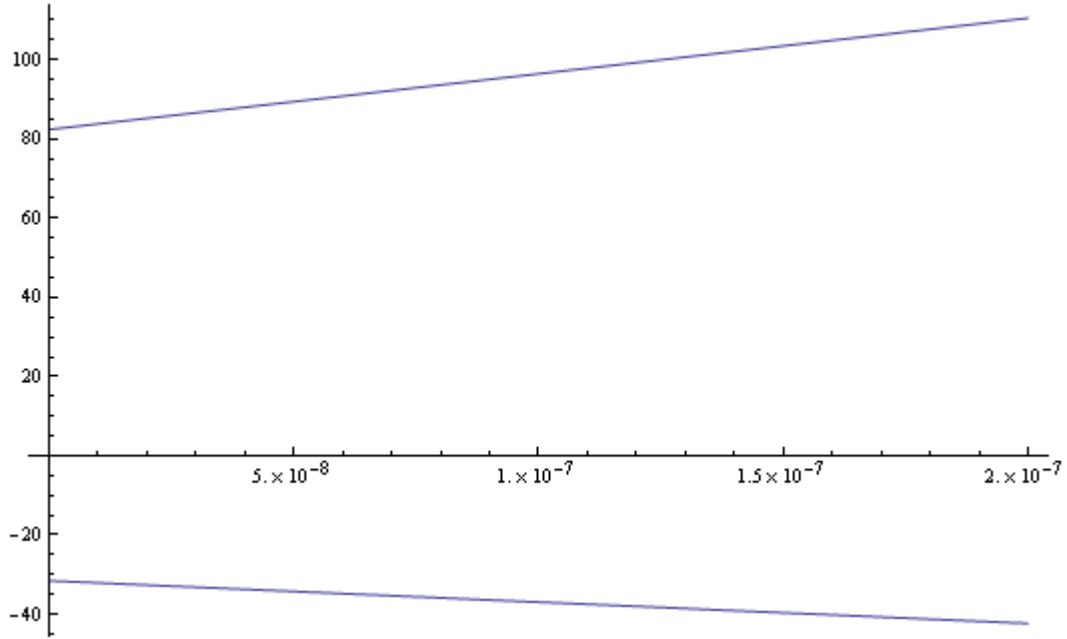
$$D_\epsilon^1 = \begin{pmatrix} 1 - 1.79985\epsilon & -1.7991\epsilon \\ 0.49975 & 0.999 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D_\epsilon^2 = \begin{pmatrix} 1 - 1.14983\epsilon & -0.9995\epsilon \\ 0.9995 & 0.999 \end{pmatrix}.$$

Les figures III.3 et III.4 représentent les valeurs propres associées respectivement aux équations de Lyapunov  $D_\epsilon^{1T} P(\epsilon) D_\epsilon^1 - P(\epsilon)$  et  $D_\epsilon^{2T} P(\epsilon) D_\epsilon^2 - P(\epsilon)$ . On peut voir sur ces figures que pour chacun des modes, on a une valeur propre positive lorsque  $\epsilon \rightarrow 0$ . D'où la conclusion de la non-préservation des CQLFs par la discrétisation d'ordre  $\epsilon$ .



**Figure III.3** – Valeurs propres de  $\epsilon \mapsto D_\epsilon^{1T} P(\epsilon) D_\epsilon^1 - P(\epsilon)$

Quant à la préservation de la stabilité asymptotique uniforme du modèle (III.30), la question



**Figure III.4** – Valeurs propres de  $\epsilon \mapsto D_\epsilon^{2T} P(\epsilon) D_\epsilon^2 - P(\epsilon)$

reste ouverte. Enfin, l'exemple qui suit montre un SCSP à temps continu instable qui admet pour discrétisé un système quadratiquement stable, c'est-à-dire que ni la stabilité ni les CQLFs ne sont préservées du temps discret vers le temps continu.

**Exemple 5.** *Considérons le SCSP planaire*

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/\epsilon \end{pmatrix} A^\sigma \begin{pmatrix} x(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \quad (\text{III.34})$$

où  $\sigma = 1, 2$  et  $A^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ ,  $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1.1 \\ 1 & -1.1 \end{pmatrix}$ . Alors

$$\Gamma(A_\epsilon^1, A_\epsilon^2) = -\frac{2.1}{2\epsilon}, \quad \sqrt{\det(A_\epsilon^1) \det(A_\epsilon^2)} = \frac{\sqrt{1.1}}{\epsilon},$$

et par conséquent le système est instable pour tout  $\epsilon > 0$ .

Nous montrons ensuite l'existence, pour  $\epsilon > 0$  assez petit, d'une CQLF dépendante de  $\epsilon$

pour le SCSP planaire à temps discret obtenu par la discrétisation (III.30), c'est-à-dire

$$\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ z_{k+1} \end{pmatrix} = D_\epsilon^\sigma \begin{pmatrix} x_k \\ z_k \end{pmatrix} \quad \text{with } \sigma = 1, 2$$

avec

$$D_\epsilon^1 = \begin{pmatrix} 1 - 0.367879\epsilon & 0.632121\epsilon \\ -0.632121 & 0.367879 \end{pmatrix}, \quad D_\epsilon^2 = \begin{pmatrix} 1 - 0.393519\epsilon & -0.667129\epsilon \\ 0.606481 & 0.332871 \end{pmatrix}.$$

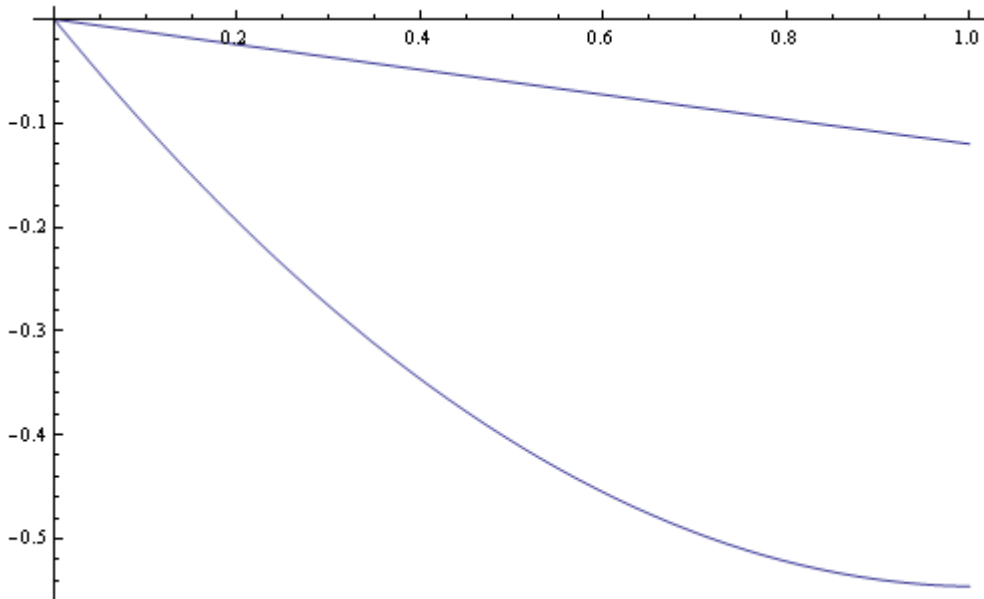
Effectivement, pour tout  $\sigma = 1, 2$  et  $\epsilon \in (0, \epsilon_0)$ , en prenant

$$P(\epsilon) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \epsilon \end{pmatrix},$$

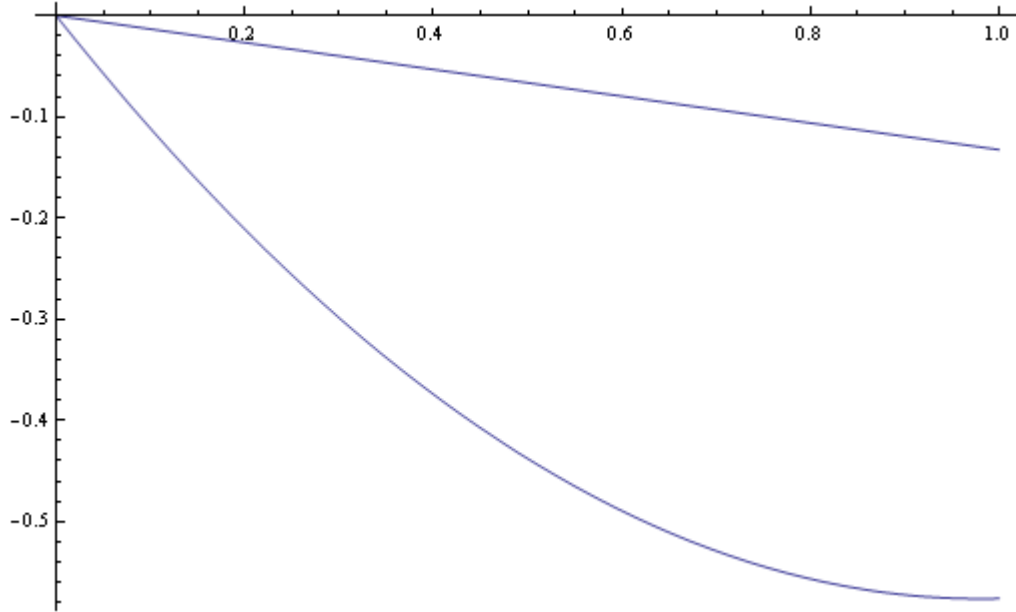
nous obtenons l'inégalité suivante

$$D_\epsilon^{\sigma T} P(\epsilon) D_\epsilon^\sigma - P(\epsilon) < 0 \quad (\text{III.35})$$

pour  $\epsilon$  assez petit, permettant de conclure sur la stabilité quadratique du discrétisé (voir figures III.5 et III.6).



**Figure III.5** – Valeurs propres de  $\epsilon \mapsto D_\epsilon^{1T} P(\epsilon) D_\epsilon^1 - P(\epsilon)$



**Figure III.6** – Valeurs propres de  $\epsilon \mapsto D_\epsilon^{2T} P(\epsilon) D_\epsilon^2 - P(\epsilon)$

Ainsi, à travers les deux exemples précédents, nous voyons que la discrétisation d'ordre  $\epsilon$  ne permet pas de préserver les CQLFs, que ce soit du temps continu vers le temps discret, ou vice-versa.

## 2.4 Échantillonnage d'ordre $\epsilon^2$

Les sections précédentes ont montré que choisir une période d'échantillonnage d'ordre 1 ou  $\epsilon$  n'est pas suffisant pour préserver la stabilité ou les CQLFs du SCSP à temps continu de départ.

Dans cette section, nous allons montrer que choisir une période d'échantillonnage de l'ordre de  $\epsilon^2$  permet de préserver des fonctions de Lyapunov quadratiques communes de (III.15). Pour cela, nous introduisons l'opérateur- $\delta$  ( $\delta = (q - \mathbb{I})/T_s$ ) permettant de décrire les systèmes à temps discret. Nous rappelons que cet opérateur, que l'on peut voir comme l'opérateur de dérivation discret, a été introduit dans les années quatre-vingts par Goodwin et Middleton [20, 44, 45], afin de surmonter les problèmes de sensibilité numérique qui apparaissent lorsque l'on échantillonne des systèmes linéaires

$$\dot{x}(t) = Ax(t) \tag{III.36}$$

avec une fréquence d'échantillonnage élevée. L'opérateur- $\delta$  permet d'associer à (III.36), le mo-

dèle à temps discret

$$\delta x(k) = A_\delta x(k)$$

avec  $A_\delta = \frac{\exp(AT_s) - \mathbb{I}}{T_s}$  et  $\delta x(k) = (x(k+1) - x(k))/T_s$ . Ainsi, le SCSP à temps discret (III.16) peut être réécrit de façon équivalente en utilisant l'opérateur- $\delta$  de la manière suivante

$$\begin{pmatrix} \delta x(k) \\ \delta z(k) \end{pmatrix} = A_{\delta, T_s}^{\sigma(k)} \begin{pmatrix} x(k) \\ z(k) \end{pmatrix} \quad (\text{III.37})$$

où  $A_{\delta, T_s}^{\sigma(k)} = (\exp(A_\epsilon^{\sigma(k)} T_s) * -\mathbb{I})/T_s$ .

La propriété intéressante qui nous amène à utiliser cette écriture est la convergence de  $A_\delta$  vers  $A$  lorsque  $T_s$  tend vers 0 dans le cas linéaire non singulièrement perturbé. Dans le cas des SCSPs, on peut choisir  $T_s = f(\epsilon)$  de manière à ce que cette propriété de convergence des matrices du modèle à temps discret vers les matrices du modèle à temps continu. La propriété se traduit alors par

$$\begin{pmatrix} \mathbb{I}_{d_1} & 0 \\ 0 & \epsilon \mathbb{I}_{d_2} \end{pmatrix} (A_{\delta, T_s}^\sigma - A_\epsilon^\sigma) \rightarrow 0 \text{ lorsque } \epsilon \rightarrow 0 \text{ pour tout } \sigma \in \{1, \dots, N\}. \quad (\text{III.38})$$

et est très importante pour les résultats de préservation des CQLFs des SCSPs que l'on donne dans la suite. Nous notons que la convergence du modèle à temps discret vers le modèle à temps continu n'est plus vérifiée lorsque la période d'échantillonnage est prise égale à 1 ou à  $\epsilon$ . En effet, lorsque  $T_s = 1$ , on a

$$A_{\delta, 1}^\sigma = \begin{pmatrix} \exp(A_s^\sigma) - \mathbb{I}_{d_s} & 0 \\ -L_0^\sigma \exp(A_s^\sigma) & -\mathbb{I}_{d_f} \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \mathbb{I}_{d_s} & 0 \\ 0 & \epsilon \mathbb{I}_{d_f} \end{pmatrix} (A_{\delta, 1}^\sigma - A_\epsilon^\sigma) &= \begin{pmatrix} \mathbb{I}_{d_s} & 0 \\ 0 & \epsilon \mathbb{I}_{d_f} \end{pmatrix} \left( \begin{pmatrix} \exp(A_s^\sigma) - \mathbb{I}_{d_s} & 0 \\ -L_0^\sigma \exp(A_s^\sigma) & -\mathbb{I}_{d_f} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} A_{11}^\sigma & A_{12}^\sigma \\ A_{21}^\sigma & A_{22}^\sigma \end{pmatrix} \right), \\ &= \begin{pmatrix} \exp(A_s^\sigma) - \mathbb{I}_{d_s} - A_{11}^\sigma & -A_{12}^\sigma \\ -\epsilon L_0^\sigma \exp(A_s^\sigma) - A_{21}^\sigma & -\epsilon \mathbb{I}_{d_f} - A_{22}^\sigma \end{pmatrix} \end{aligned}$$

qui ne vérifie pas (III.38).

De même, lorsque  $T_s = \epsilon$ , on a

$$A_{\delta,\epsilon}^\sigma = \begin{pmatrix} D_{11}^\sigma & D_{12}^\sigma \\ \epsilon^{-1}D_{21}^\sigma & \epsilon^{-1}D_{22}^\sigma \end{pmatrix}$$

avec  $D_{11}^\sigma, D_{12}^\sigma, D_{21}^\sigma$  et  $D_{22}^\sigma$  défini par (III.5). De plus,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \mathbb{I}_{d_s} & 0 \\ 0 & \epsilon \mathbb{I}_{d_f} \end{pmatrix} (A_{\delta,\epsilon}^\sigma - A_\epsilon^\sigma) &= \begin{pmatrix} A_{s,0}^\sigma + M_0^\sigma(\mathbb{I}_{d_s} - \exp(A_{22}^\sigma))L_0^\sigma & M_0^\sigma(\mathbb{I}_{d_s} - \exp(A_{22}^\sigma)) \\ (\exp(A_{22}^\sigma) - \mathbb{I}_{d_f})L_0^\sigma & \exp(A_{22}^\sigma) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} A_{11}^\sigma & A_{12}^\sigma \\ A_{21}^\sigma & A_{22}^\sigma \end{pmatrix}, \\ &= \begin{pmatrix} A_{s,0}^\sigma + M_0^\sigma(\mathbb{I}_{d_s} - \exp(A_{22}^\sigma))L_0^\sigma - A_{11}^\sigma & M_0^\sigma(\mathbb{I}_{d_s} - \exp(A_{22}^\sigma)) - A_{12}^\sigma \\ (\exp(A_{22}^\sigma) - \mathbb{I}_{d_f})L_0^\sigma - A_{21}^\sigma & (\exp(A_{22}^\sigma) - \mathbb{I}_{d_f}) - A_{22}^\sigma \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Nous considérons maintenant le choix  $T_s = \epsilon^2$  dans la discrétisation exacte (III.37) et nous approximons le modèle- $\delta$  par

$$\begin{pmatrix} \delta x(k) \\ \delta z(k) \end{pmatrix} = A_{\delta,\epsilon^2}^\sigma \begin{pmatrix} x(k) \\ z(k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{I}_{d_s} & 0 \\ 0 & \epsilon^{-1}\mathbb{I}_{d_f} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G_{11,\epsilon^2}^\sigma & G_{12,\epsilon^2}^\sigma \\ G_{21,\epsilon^2}^\sigma & G_{22,\epsilon^2}^\sigma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(k) \\ z(k) \end{pmatrix}, \quad (\text{III.39})$$

où les matrices  $G_{jk,\epsilon^2}^\sigma$  sont les termes d'ordre 1 obtenus dans les séries de Taylor par rapport à  $\epsilon$  de  $F_{jk}^{\sigma,\epsilon}(\epsilon^2) - \delta_{jk}\mathbb{I}$ , c'est-à-dire,

$$\begin{aligned} G_{11,\epsilon^2}^\sigma &= A_{11}^\sigma, \\ G_{12,\epsilon^2}^\sigma &= A_{12}^\sigma, \\ G_{21,\epsilon^2}^\sigma &= A_{21}^\sigma, \\ G_{22,\epsilon^2}^\sigma &= A_{22}^\sigma. \end{aligned}$$

La discrétisation d'ordre  $\epsilon^2$  ainsi obtenue est alors identique à la discrétisation d'Euler en prenant  $T_s = \epsilon^2$ . Si les termes d'ordres supérieures par rapport à  $\epsilon$  sont considérés, alors la discrétisation d'Euler correspondrait à la limite lorsque  $\epsilon \rightarrow 0$ , dans la mesure où (III.38) est vérifiée.

Le but des sections suivantes est d'étudier comment la stabilité se comporte sous une discrétisation dont la période d'échantillonnage est de l'ordre de  $\epsilon^2$  (ou, plus généralement,  $o(\epsilon)$ ) et qui satisfait (III.38).

### 2.4.1 Fonctions de Lyapunov et cas sans commutations

Nous commençons par faire quelques remarques sur la préservation de la stabilité quadratique pour les systèmes singulièrement perturbés sans commutations.

**Lemme 3.** *On suppose que  $N = 1$  et que l'Hypothèse 1 est vérifiée. Si un système singulièrement perturbé à temps continu  $\dot{x} = A_\epsilon x$  est GUAS lorsque  $\epsilon \rightarrow 0^+$ , alors il existe  $\epsilon_0 > 0$  et une matrice  $Q$  de dimension  $d \times d$  définie positive telle que pour tout  $\epsilon \in (0, \epsilon_0)$  il existe une matrice définie positive*

$$P(\epsilon) = \begin{pmatrix} P_{11}(\epsilon) & P_{12}(\epsilon) \\ P_{12}(\epsilon)^T & P_{22}(\epsilon) \end{pmatrix} \quad (\text{III.40})$$

avec  $P_{11}(\epsilon), P_{12}(\epsilon)$  et  $P_{22}(\epsilon)$  des matrices de dimensions respectives  $d_s \times d_s, d_s \times d_f$  et  $d_f \times d_f$ , qui vérifient  $P_{12}(\epsilon) = O(\epsilon), P_{22}(\epsilon) = O(\epsilon)$ , et  $A_\epsilon^T P(\epsilon) + P(\epsilon) A_\epsilon = -Q + O(\epsilon)$  lorsque  $\epsilon \rightarrow 0$ .

**Démonstration.** La preuve repose sur la diagonalisation par blocs introduite dans la section 2.1. On remarque que  $H_\epsilon, A_{s,\epsilon}, A_{f,\epsilon}$  sont analytiques par rapport  $\epsilon$  dans un voisinage de zero. On rappelle que

$$A_\epsilon = H_\epsilon \begin{pmatrix} A_{s,\epsilon} & 0 \\ 0 & A_{f,\epsilon} \end{pmatrix} H_\epsilon^{-1}$$

et que

$$H_\epsilon^{-1} = \begin{pmatrix} O(1) & O(\epsilon) \\ O(1) & O(1) \end{pmatrix} \quad \text{lorsque } \epsilon \rightarrow 0.$$

Nous rappelons également que la stabilité asymptotique uniforme globale lorsque  $\epsilon \rightarrow 0^+$  de  $\dot{x} = A_\epsilon x$  implique que  $A_{s,0}$  est Hurwitz, comme nous l'avons montré dans la Proposition 3.

Soit  $Q_1$  et  $Q_2$  deux matrices définies positives de dimensions respectives  $d_s$  et  $d_f$ , telles que

$$\begin{aligned} A_{s,0}^T Q_1 + Q_1 A_{s,0} &= -\mathbb{I}_{d_s}, \\ A_{f,0}^T Q_2 + Q_2 A_{f,0} &= -\mathbb{I}_{d_f}. \end{aligned}$$

Soit  $P(\epsilon)$  définie de la manière suivante

$$P(\epsilon) = \left( H_\epsilon^{-1} \right)^T \begin{pmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & \epsilon Q_2 \end{pmatrix} H_\epsilon^{-1}.$$

En particulier,  $P(\epsilon)$  est définie positive pour  $\epsilon$  assez petit et  $P_{12}(\epsilon) = O(\epsilon), P_{22}(\epsilon) = O(\epsilon)$ .



Alors, un simple calcul montre que

$$A_\epsilon^T P(\epsilon) + P(\epsilon) A_\epsilon = (H_\epsilon^T)^{-1} (-\mathbb{I}_d + O(\epsilon)) H_\epsilon^{-1} = - (H_0^T)^{-1} H_0^{-1} + O(\epsilon),$$

avec

$$H_0 = \begin{pmatrix} \mathbb{I}_{d_s} & 0 \\ -L_0 & \mathbb{I}_{d_f} \end{pmatrix}.$$

On termine la démonstration en prenant  $Q = (H_0^T)^{-1} H_0^{-1}$ .  $\square$

Nous allons voir dans la prochaine section, que l'existence d'une fonction de Lyapunov telle que celle garantie par le Lemme 3 fournit la stabilité de la discrétisation d'Euler pour une période d'échantillonnage de l'ordre de  $o(\epsilon)$ .

### 2.4.2 Fonctions de Lyapunov : cas des systèmes à commutations

Le théorème ci-dessous donne une condition suffisante sur la période d'échantillonnage afin que l'on préserve les CQLFs des SCSPs.

**Théorème 29.** *On suppose que l'hypothèse 1 est vérifiée. Considérons un SCSP de la forme (III.15) admettant, pour tout  $\epsilon > 0$ , une CQLF qui correspond à une matrice définie positive  $P(\epsilon)$  comme dans (III.40) avec  $P_{12}(\epsilon) = O(\epsilon)$ ,  $P_{22}(\epsilon) = O(\epsilon)$ , et, pour tout  $\sigma = 1, \dots, N$ ,  $(A_\epsilon^\sigma)^T P(\epsilon) + P(\epsilon) A_\epsilon^\sigma = -Q^\sigma + O(\epsilon)$  lorsque  $\epsilon \rightarrow 0$ , avec  $Q^\sigma$  une matrice définie positive. On suppose, de plus, que la discrétisation  $A_\delta^\sigma(\epsilon)$  avec la période d'échantillonnage  $T_s$  qui dépend de  $\epsilon$  est donnée telle que*

$$\begin{pmatrix} \mathbb{I}_{d_1} & 0 \\ 0 & \epsilon \mathbb{I}_{d_2} \end{pmatrix} (A_\delta^\sigma(\epsilon) - A_\epsilon^\sigma) = o(1) \text{ lorsque } \epsilon \rightarrow 0 \text{ pour tout } \sigma \in \{1, \dots, N\}. \quad (\text{III.41})$$

Alors la discrétisation préserve la CQLF de (III.15) si  $T_s = o(\epsilon)$ .

**Démonstration.** La démonstration consiste simplement à tester la fonction de Lyapunov  $x^T P(\epsilon) x$  pour le système à commutations à temps discret  $\delta x_k = A_\delta^\sigma(\epsilon) x_k$ .

Notons tout d'abord que, en raison de (III.41) et des relations  $P_{12}(\epsilon) = O(\epsilon)$ ,  $P_{22}(\epsilon) = O(\epsilon)$ , nous avons

$$P(\epsilon) A_\delta^\sigma(\epsilon) = P(\epsilon) A_\epsilon^\sigma + o(1) = O(1).$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} (\mathbb{I} + T_s A_\delta^\sigma(\epsilon))^T P(\epsilon) (\mathbb{I} + T_s A_\delta^\sigma(\epsilon)) - P(\epsilon) &= T_s (A_\delta^\sigma(\epsilon)^T P(\epsilon) + P(\epsilon) A_\delta^\sigma(\epsilon)) + T_s^2 A_\delta^\sigma(\epsilon)^T P(\epsilon) A_\delta^\sigma(\epsilon) \\ &= T_s ((A_\epsilon^\sigma)^T P(\epsilon) + P(\epsilon) A_\epsilon^\sigma + o(1)) + T_s^2 A_\delta^\sigma(\epsilon)^T O(1) \\ &\leq T_s Q^\sigma + T_s o(1) + T_s^2 O(\epsilon^{-1}). \end{aligned}$$

Etant donné que  $T_s = o(\epsilon)$ , on conclut que  $(\mathbb{I} + T_s A_\delta^\sigma(\epsilon))^T P(\epsilon) (\mathbb{I} + T_s A_\delta^\sigma(\epsilon)) - P(\epsilon) \leq T_s (Q^\sigma + o(1)) < 0$  pour  $\epsilon$  petit. Et donc,  $\delta x_k = A_{\delta, \epsilon}^\sigma x_k$  est GUAS lorsque  $\epsilon \rightarrow 0^+$ .  $\square$

Il s'en suit les deux corollaires suivants, le premier pour le cas sans commutations, et le second pour les systèmes à commutations.

**Corollaire 4.** *On considère  $N = 1$  et que l'hypothèse 1 est vérifiée. Si une discrétisation vérifie (III.41) et si, de plus,  $T_s = o(\epsilon)$  alors elle préserve également la stabilité. En particulier, la discrétisation d'ordre  $\epsilon^2$  préserve la stabilité.*

**Démonstration.** On suppose que  $N = 1$  et que (III.15) est GUAS. Alors le lemme 3 nous assure l'existence d'une fonction de Lyapunov quadratique pour (III.15). Le théorème 29 garantit alors que, pour  $T_s = o(\epsilon)$  et  $\epsilon$  assez petit, cette fonction est également une fonction de Lyapunov pour (III.39).  $\square$

**Corollaire 5.** *On suppose que l'hypothèse 1 est vérifiée. Si les conditions du théorème 20 sont vérifiées, alors la discrétisation d'ordre  $\epsilon^2$  préserve la stabilité.*

**Démonstration.** Il suffit de montrer que les conditions du théorème 20 impliquent l'existence d'une CQLF pour le système (III.39). On suppose que (III.15) admet une CQLF vérifiant les conditions du théorème 20. Etant donné que

$$(\mathbb{I} + \epsilon^2 A_{\delta, \epsilon^2}^\sigma)^T P(\epsilon) (\mathbb{I} + \epsilon^2 A_{\delta, \epsilon^2}^\sigma) - P(\epsilon) = \epsilon^2 ((A_{\delta, \epsilon^2}^\sigma)^T P(\epsilon) + P(\epsilon) A_{\delta, \epsilon^2}^\sigma) + \epsilon^4 (A_{\delta, \epsilon^2}^\sigma)^T P(\epsilon) A_{\delta, \epsilon^2}^\sigma,$$

et que  $A_{\delta, \epsilon^2}^\sigma = A_\epsilon^\sigma$ , alors il existe  $\epsilon_0 > 0$  tel que pour tout  $\epsilon \in (0, \epsilon_0)$ , on a

$$(\mathbb{I} + \epsilon^2 A_{\delta, \epsilon^2}^\sigma)^T P(\epsilon) (\mathbb{I} + \epsilon^2 A_{\delta, \epsilon^2}^\sigma) - P(\epsilon) < 0,$$

ce qui termine la preuve.  $\square$


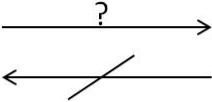
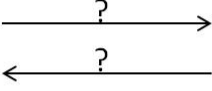
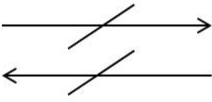
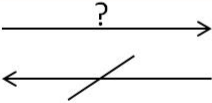
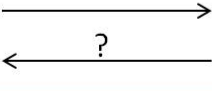
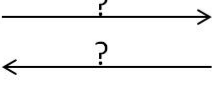
### 3 Conclusion

Cette section a d'abord permis de mettre en avant l'insuffisance du choix  $T_s = 1$ . Alors que dans le cadre des systèmes singulièrement perturbés sans commutations, le discrétisé d'ordre 1 permet de préserver la stabilité, lorsque l'on considère les SCSPs, le modèle discrétisé d'ordre 1 obtenu ne préserve pas les CQLFs du temps discret vers le temps continu.

Pour ce qui est de la discrétisation d'ordre  $\epsilon$ , nous avons proposé deux exemples permettant de montrer qu'elle ne préserve pas les CQLFs, et ce, aussi bien du temps continu vers le temps discret, que du temps discret vers le temps continu. Quant à la préservation de la stabilité asymptotique uniforme globale, cela reste un problème ouvert.

Enfin, nous avons proposé un modèle discrétisé avec une période d'échantillonnage  $T_s = \epsilon^2$  permettant de préserver les CQLFs pour les SCSPs. En effet, nous avons montré qu'en considérant les modèles- $\delta$ , ce choix pour la période d'échantillonnage permet d'obtenir la propriété intéressante de convergence des matrices du temps discret vers celles du temps continu, de la même manière que pour les systèmes linéaires, ce qui n'est pas le cas pour les choix précédents de  $T_s$ . La figure III.7 résume quel type de stabilité est préservé selon le choix de la période d'échantillonnage.

## Discrétisation des SCSPs

$T_s$	Temps Continu		Temps Discret
1	CQLF		CQLF
	GUAS		GUAS
$\varepsilon$	CQLF		CQLF
	GUAS		GUAS
$\varepsilon^2$	CQLF		CQLF
	GUAS		GUAS

**Figure III.7** – Tableau rassemblant les différents liens possibles entre les SCSPs à temps continu et leurs discrétisés selon le choix de la période d'échantillonnage. Les flèches simples correspondent aux cas préservant la stabilité qui ont été démontrés. Les flèches barrées correspondent aux cas qui ne préservent pas le type de stabilité considéré. Enfin, les flèches surmontées d'un point d'interrogation correspondent aux différents cas où ni exemple ni démonstration n'ont pu être fournis.



---

## Conclusion générale et perspectives

Dans ce mémoire, il a été question d'analyse de stabilité des systèmes à commutations singulièrement perturbés. Alors que de nombreux résultats concernant la stabilité des systèmes linéaires à commutations ont vu le jour ces 15 dernières années, très peu de travaux ont été consacrés à la stabilité de cette classe de systèmes. Cette thèse se penche donc sur cette dernière quelle que soit la loi de commutations.

Dans un premier temps, nous avons pu caractériser complètement les SCSPs dans le cas planaire et comportant deux modes, et ce, grâce à une approche géométrique. En effet, nos résultats permettent de conclure sur le comportement asymptotique d'un SCSP du second ordre, qu'il soit quadratiquement stable, GUAS, stable ou instable. De plus, nous donnons les conditions nécessaires et suffisantes pour la stabilité quadratique qui permettent de mettre en évidence le conservatisme des résultats à base de LMIs donnés dans [37, 38]. Nous avons également entamé une discussion permettant de caractériser le comportement du SCSP lorsque l'on fait croître le paramètre de perturbation. En particulier, nous montrons qu'au maximum deux changements de comportement peuvent se produire.

Ensuite, nous nous sommes intéressés à la discrétisation des SCSPs. Dans le cadre des systèmes à commutations, la discrétisation est un sujet auquel les chercheurs commencent tout juste à s'intéresser. En effet, alors que les autres problématiques concernant les systèmes à commutations ont connu un certain succès ces 15 dernières années, très peu de résultats pour la discrétisation des systèmes à commutations existent. Nous en avons rappelé quelques uns pour introduire le dernier chapitre. Pour la discrétisation des SCSPs, il n'existe pas travaux antérieurs à notre connaissance. Nous avons proposé des modèles pour différents choix de périodes d'échantillonnage que nous comparons avec les modèles proposés dans la littérature dans le cas des systèmes linéaires sans commutations. En particulier, nous avons discuté de la préservation

## Conclusion générale et perspectives

---

de la stabilité du temps continu vers le temps discret des différents modèles. Enfin, nous avons introduit un nouveau modèle permettant de préserver des fonctions de Lyapunov quadratiques.

A la suite de ce travail, plusieurs perspectives peuvent être envisagées. Dans le cadre de l'analyse de stabilité des SCSPs à temps continu, les conditions nécessaires et suffisantes pour la stabilité asymptotique du système quelle que soit la loi de commutations sont toujours manquantes. Même dans le cas des systèmes linéaires à commutations classiques, le problème est ouvert. Une perspective intéressante et accessible consiste à trouver des conditions moins conservatives pour l'existence de CQLFs que celles proposées dans [37]. Une autre piste de recherche concerne l'évaluation de la valeur maximale de  $\epsilon$  qui garantit la stabilité. Déterminer cette valeur est un problème difficile. Quelques travaux ont permis de proposer des bornes supérieures conservatives (voir [14] et les références qu'il contient). Enfin, concernant la discrétisation des SCSPs, la figure III.7 montre plusieurs "transitions" non élucidées. On peut donc tenter de trouver des contre-exemples ou des preuves permettant de montrer la préservation ou la non-préservation de la stabilité et des CQLFs dans les cas restants.

---

# Annexe

## 1 Modèles à temps discret des systèmes à commutations singulièrement perturbés

Dans le dernier chapitre, nous avons proposé des modèles de discrétisation pour différents choix de la période d'échantillonnage  $T_s$  pour les SCSPs à temps continu. Nous détaillons ici les calculs permettant d'obtenir ces modèles. On rappelle qu'un SCSP à temps continu s'écrit sous sa forme standard

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \epsilon \dot{z}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}^{\sigma(t)} & A_{12}^{\sigma(t)} \\ A_{21}^{\sigma(t)} & A_{22}^{\sigma(t)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \quad (\text{III.1})$$

ou, de manière équivalente,

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix} = A_\epsilon^{\sigma(t)} \begin{pmatrix} x(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{I}_{d_s} & 0 \\ 0 & \epsilon^{-1} \mathbb{I}_{d_f} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11}^{\sigma(t)} & A_{12}^{\sigma(t)} \\ A_{21}^{\sigma(t)} & A_{22}^{\sigma(t)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \quad (\text{III.2})$$

avec  $x \in \mathbb{R}^{d_s}$ ,  $z \in \mathbb{R}^{d_f}$ ,  $\sigma(t) \in \{1, \dots, N\}$ , et où  $\epsilon > 0$  représente le paramètre de perturbation singulière.

Sous l'hypothèse que  $(A_{22}^i)^{-1}$  est inversible pour tout  $i = \{1, \dots, N\}$ , nous rappelons également que le discrétisé exact associé à (III.2) s'écrit

$$\begin{pmatrix} x(k+1) \\ z(k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{11}^{\sigma, \epsilon}(T_s) & F_{12}^{\sigma, \epsilon}(T_s) \\ F_{21}^{\sigma, \epsilon}(T_s) & F_{22}^{\sigma, \epsilon}(T_s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(k) \\ z(k) \end{pmatrix} \quad (\text{III.3})$$



avec

$$\begin{aligned}
 F_{11}^{\sigma,\epsilon}(T_s) &= \exp(A_{s,\epsilon}^\sigma T_s)(\mathbb{I}_{d_s} + \epsilon M_\epsilon^\sigma L_\epsilon^\sigma) - \epsilon M_\epsilon^\sigma \exp\left(\frac{A_{f,\epsilon}^\sigma T_s}{\epsilon}\right) L_\epsilon^\sigma, \\
 F_{12}^{\sigma,\epsilon}(T_s) &= \epsilon \left[ \exp(A_{s,\epsilon}^\sigma T_s) M_\epsilon^\sigma - M_\epsilon^\sigma \exp\left(\frac{A_{f,\epsilon}^\sigma T_s}{\epsilon}\right) \right], \\
 F_{21}^{\sigma,\epsilon}(T_s) &= -L_\epsilon^\sigma \exp(A_{s,\epsilon}^\sigma T_s)(\mathbb{I}_{d_s} + \epsilon M_\epsilon^\sigma L_\epsilon^\sigma) + (\mathbb{I}_{d_f} + \epsilon L_\epsilon^\sigma M_\epsilon^\sigma) \exp\left(\frac{A_{f,\epsilon}^\sigma T_s}{\epsilon}\right) L_\epsilon^\sigma, \\
 F_{22}^{\sigma,\epsilon}(T_s) &= -\epsilon L_\epsilon^\sigma \exp(A_{s,\epsilon}^\sigma T_s) M_\epsilon^\sigma + (\mathbb{I}_{d_f} + \epsilon L_\epsilon^\sigma M_\epsilon^\sigma) \exp\left(\frac{A_{f,\epsilon}^\sigma T_s}{\epsilon}\right).
 \end{aligned}$$

et où  $L_\epsilon^\sigma$  et  $M_\epsilon^\sigma$  sont les solutions respectives des équations suivantes

$$\begin{aligned}
 A_{21}^\sigma + \epsilon L_\epsilon^\sigma A_{11}^\sigma - A_{22}^\sigma L_\epsilon^\sigma - \epsilon L_\epsilon^\sigma A_{12}^\sigma L_\epsilon^\sigma &= 0, \\
 -\epsilon A_{s,\epsilon} M_\epsilon^\sigma + M_\epsilon^\sigma A_{f,\epsilon} + A_{12}^\sigma &= 0,
 \end{aligned}$$

et  $A_{s,\epsilon}^\sigma, A_{f,\epsilon}^\sigma$  sont définies comme ci-dessous

$$\begin{aligned}
 A_{s,\epsilon}^\sigma &= A_{11}^\sigma - A_{12}^\sigma L_\epsilon^\sigma \\
 A_{f,\epsilon}^\sigma &= A_{22}^\sigma + \epsilon L_\epsilon^\sigma A_{12}^\sigma.
 \end{aligned}$$

Les différents modèles que l'on a proposés et/ou qui ont été donnés dans la littérature résultent de l'approximation, lorsque  $\epsilon \rightarrow 0$ , de chacun des termes  $F_{ij}^{\sigma,\epsilon}(T_s)$ ,  $i, j = 1, 2$ , en fonction du choix de la période d'échantillonnage  $T_s$ . Pour cela, il est utile d'étendre les définitions ci-dessus au cas  $\epsilon = 0$ , c'est-à-dire

$$\begin{aligned}
 L_0^\sigma &= (A_{22}^\sigma)^{-1} A_{21}^\sigma, \\
 M_0^\sigma &= -A_{12}^\sigma (A_{22}^\sigma)^{-1}, \\
 A_{s,0}^\sigma &= A_{11}^\sigma - A_{12}^\sigma (A_{22}^\sigma)^{-1} A_{21}^\sigma, \\
 A_{f,0}^\sigma &= A_{22}^\sigma.
 \end{aligned}$$

### 1.1 Modèle discrétisé à l'ordre 1

Ainsi, en posant  $T_s = 1$  dans (III.3), les quatres matrices  $F_{ij}^{\sigma,\epsilon}(T_s)$ ,  $i, j = 1, 2$  s'écrivent

$$\begin{aligned} F_{11}^{\sigma,\epsilon}(1) &= \exp(A_{s,\epsilon}^\sigma)(\mathbb{I}_{d_s} + \epsilon M_\epsilon^\sigma L_\epsilon^\sigma) - \epsilon M_\epsilon^\sigma \exp\left(\frac{A_{f,\epsilon}^\sigma}{\epsilon}\right) L_\epsilon^\sigma, \\ F_{12}^{\sigma,\epsilon}(1) &= \epsilon \left[ \exp(A_{s,\epsilon}^\sigma) M_\epsilon^\sigma - M_\epsilon^\sigma \exp\left(\frac{A_{f,\epsilon}^\sigma}{\epsilon}\right) \right], \\ F_{21}^{\sigma,\epsilon}(1) &= -L_\epsilon^\sigma \exp(A_{s,\epsilon}^\sigma)(\mathbb{I}_{d_s} + \epsilon M_\epsilon^\sigma L_\epsilon^\sigma) + (\mathbb{I}_{d_f} + \epsilon L_\epsilon^\sigma M_\epsilon^\sigma) \exp\left(\frac{A_{f,\epsilon}^\sigma}{\epsilon}\right) L_\epsilon^\sigma, \\ F_{22}^{\sigma,\epsilon}(1) &= -\epsilon L_\epsilon^\sigma \exp(A_{s,\epsilon}^\sigma) M_\epsilon^\sigma + (\mathbb{I}_{d_f} + \epsilon L_\epsilon^\sigma M_\epsilon^\sigma) \exp\left(\frac{A_{f,\epsilon}^\sigma}{\epsilon}\right). \end{aligned}$$

et dont le développement limité d'ordre 1 par rapport à  $\epsilon$  est

$$\begin{aligned} F_{12}^{\sigma,\epsilon}(1) &= \exp(A_{s,0}^\sigma) + O(\epsilon), \\ F_{12}^{\sigma,\epsilon}(1) &= O(\epsilon), \\ F_{21}^{\sigma,\epsilon}(1) &= -L_\epsilon^\sigma \exp(A_{s,0}^\sigma) + O(\epsilon), \\ F_{22}^{\sigma,\epsilon}(1) &= O(\epsilon). \end{aligned}$$

Ainsi, en ne gardant que les termes d'ordre 1 dans le développement limité des quatres expressions ci-dessus, nous obtenons le modèle discrétisé à l'ordre 1 proposé dans la section 2.2 du chapitre précédent

$$\begin{pmatrix} x(k+1) \\ z(k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11}^{\sigma(k)} & 0 \\ S_{21}^{\sigma(k)} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(k) \\ z(k) \end{pmatrix}, \quad \sigma(k) \in \{1, \dots, N\}, \quad (\text{III.4})$$

avec

$$\begin{aligned} S_{11}^\sigma &= \exp(A_{s,0}^\sigma), \\ S_{21}^\sigma &= -L_0^\sigma \exp(A_{s,0}^\sigma). \end{aligned}$$

## 1.2 Modèle discrétisé à l'ordre $\epsilon$

En posant  $T_s = \epsilon$  dans (III.3), les blocs de la matrices  $F_\epsilon^\sigma$  se réécrivent

$$\begin{aligned} F_{11}^{\sigma,\epsilon}(\epsilon) &= \exp(A_{s,\epsilon}^\sigma)(\mathbb{I}_{d_s} + \epsilon M_\epsilon^\sigma L_\epsilon^\sigma) - \epsilon M_\epsilon^\sigma \exp(A_{f,\epsilon}^\sigma) L_\epsilon^\sigma, \\ F_{12}^{\sigma,\epsilon}(\epsilon) &= \epsilon \left[ \exp(A_{s,\epsilon}^\sigma) M_\epsilon^\sigma - M_\epsilon^\sigma \exp(A_{f,\epsilon}^\sigma) \right], \\ F_{21}^{\sigma,\epsilon}(\epsilon) &= -L_\epsilon^\sigma \exp(A_{s,\epsilon}^\sigma)(\mathbb{I}_{d_s} + \epsilon M_\epsilon^\sigma L_\epsilon^\sigma) + (\mathbb{I}_{d_f} + \epsilon L_\epsilon^\sigma M_\epsilon^\sigma) \exp(A_{f,\epsilon}^\sigma) L_\epsilon^\sigma, \\ F_{22}^{\sigma,\epsilon}(\epsilon) &= -\epsilon L_\epsilon^\sigma \exp(A_{s,\epsilon}^\sigma) M_\epsilon^\sigma + (\mathbb{I}_{d_f} + \epsilon L_\epsilon^\sigma M_\epsilon^\sigma) \exp(A_{f,\epsilon}^\sigma). \end{aligned}$$

L'obtention du modèle discrétisé à l'ordre  $\epsilon$  se fait de manière à ce que seul le premier terme non nul apparaisse dans le modèle  $\delta$ , qui rappelons-le est caractérisé par les matrices

$$A_{\delta,\epsilon}^i = (F_\epsilon^i - \mathbb{I})/\epsilon, \quad i = 1, \dots, N$$

Ainsi, en approximant  $L_\epsilon^\sigma$ ,  $M_\epsilon^\sigma$ ,  $A_{s,\epsilon}^\sigma$ ,  $A_{f,\epsilon}^\sigma$ , et  $\exp(A_{s,\epsilon}^\sigma)$  par respectivement  $L_0^\sigma$ ,  $M_0^\sigma$ ,  $A_{s,0}^\sigma$ ,  $A_{f,0}^\sigma$ , et  $\mathbb{I} + \epsilon A_{s,0}^\sigma$  lorsque  $\epsilon \rightarrow 0$ , on obtient

$$\begin{aligned} F_{11}^{\sigma,\epsilon}(\epsilon) &= \mathbb{I} + (A_{s,0}^\sigma + M_0^\sigma(\mathbb{I} - \exp(A_{f,0}^\sigma))L_0^\sigma)\epsilon + O(\epsilon^2), \\ F_{12}^{\sigma,\epsilon}(\epsilon) &= \epsilon M_0^\sigma(\mathbb{I} - \exp(A_{f,0}^\sigma)) + O(\epsilon^2), \\ F_{21}^{\sigma,\epsilon}(\epsilon) &= -(\mathbb{I} - \exp(A_{f,0}^\sigma))L_0 + O(\epsilon), \\ F_{22}^{\sigma,\epsilon}(\epsilon) &= \exp(A_{f,0}^\sigma) + O(\epsilon) \end{aligned}$$

qui permet de définir notre système discrétisé d'ordre  $\epsilon$  approximant (III.3) par

$$\begin{pmatrix} x(k+1) \\ z(k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{I}_{d_s} + \epsilon D_{11}^\sigma & \epsilon D_{12}^\sigma \\ D_{21}^\sigma & D_{22}^\sigma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(k) \\ z(k) \end{pmatrix},$$

avec

$$\begin{aligned} D_{11}^\sigma &= A_{s,0}^\sigma + M_0^\sigma(\mathbb{I}_{d_s} - \exp(A_{22}^\sigma))L_0^\sigma, \\ D_{12}^\sigma &= M_0^\sigma(\mathbb{I}_{d_s} - \exp(A_{22}^\sigma)), \\ D_{21}^\sigma &= (\exp(A_{22}^\sigma) - \mathbb{I}_{d_f})L_0^\sigma, \\ D_{22}^\sigma &= \exp(A_{22}^\sigma). \end{aligned}$$

### 1.3 Modèle discrétisé à l'ordre $\epsilon^2$

Enfin, le dernier modèle permettant de préserver les CQLFs est obtenu en posant  $T_s = \epsilon^2$  dans (III.3). On a alors

$$\begin{aligned} F_{11}(\epsilon^2) &= \exp(A_{s,\epsilon}^\sigma \epsilon^2)(\mathbb{I}_s + \epsilon M_\epsilon^\sigma L_\epsilon^\sigma) - \epsilon M_\epsilon^\sigma \exp(A_{f,\epsilon}^\sigma \epsilon) L_\epsilon^\sigma, \\ F_{12}(\epsilon^2) &= \epsilon(\exp(A_{s,\epsilon}^\sigma \epsilon^2) M_\epsilon^\sigma - M_\epsilon^\sigma \exp(A_{f,\epsilon}^\sigma \epsilon)), \\ F_{21}(\epsilon^2) &= -L_\epsilon^\sigma \exp(A_{s,\epsilon}^\sigma \epsilon^2)(\mathbb{I}_s + \epsilon M_\epsilon^\sigma L_\epsilon^\sigma) + (\mathbb{I}_f + \epsilon L_\epsilon^\sigma M_\epsilon^\sigma) \exp(A_{f,\epsilon}^\sigma \epsilon) L_\epsilon^\sigma, \\ F_{22}(\epsilon^2) &= \epsilon L_\epsilon^\sigma \exp(A_{s,\epsilon}^\sigma \epsilon^2) M_\epsilon^\sigma + (\mathbb{I}_{d_f} + \epsilon L_\epsilon^\sigma M_\epsilon^\sigma) \exp(A_{f,\epsilon}^\sigma \epsilon). \end{aligned}$$

En approximant  $L_\epsilon^\sigma$ ,  $M_\epsilon^\sigma$ ,  $\exp(A_{s,\epsilon}^\sigma \epsilon^2)$  et  $\exp(A_{f,\epsilon}^\sigma \epsilon)$  lorsque  $\epsilon \rightarrow 0$  par respectivement  $L_0^\sigma$ ,  $M_0^\sigma$ ,  $(\mathbb{I}_s + \epsilon^2 A_{s,0}^\sigma)$  et  $(\mathbb{I}_f + \epsilon A_{f,0}^\sigma)$ , on obtient alors

$$\begin{aligned} F_{11}(\epsilon^2) &= (\mathbb{I}_s + \epsilon^2 A_{s,0}^\sigma)(\mathbb{I}_s + \epsilon M_0^\sigma L_0^\sigma) \epsilon M_0^\sigma (\mathbb{I}_f + \epsilon A_{f,0}^\sigma) L_0^\sigma + O(\epsilon^2), \\ F_{12}(\epsilon^2) &= \epsilon((\mathbb{I}_s + \epsilon^2 A_{s,0}^\sigma) M_0^\sigma - M_0^\sigma (\mathbb{I}_f + \epsilon A_{f,0}^\sigma)), \\ F_{21}(\epsilon^2) &= -L_0^\sigma (\mathbb{I}_s + \epsilon^2 A_{s,0}^\sigma)(\mathbb{I}_s + \epsilon M_0^\sigma L_0^\sigma) + (\mathbb{I}_f + \epsilon L_0^\sigma M_0^\sigma) (\mathbb{I}_f + \epsilon A_{f,0}^\sigma) L_0^\sigma, \\ F_{22}(\epsilon^2) &= \epsilon L_0^\sigma (\mathbb{I}_s + \epsilon^2 A_{s,0}^\sigma) M_0^\sigma + (\mathbb{I}_{d_f} + \epsilon L_0^\sigma M_0^\sigma) (\mathbb{I}_f + \epsilon A_{f,0}^\sigma). \end{aligned}$$

Après, développement et simplification, ces équations se réécrivent

$$\begin{aligned} F_{11}(\epsilon^2) &= \mathbb{I}_s + \epsilon^2 (A_{s,0}^\sigma - M_0^\sigma A_{f,0}^\sigma L_0^\sigma) + O(\epsilon^2), \\ F_{12}(\epsilon^2) &= -\epsilon^2 M_0^\sigma A_{f,0}^\sigma + O(\epsilon^2), \\ F_{21}(\epsilon^2) &= \epsilon A_{f,0}^\sigma L_0^\sigma + O(\epsilon), \\ F_{22}(\epsilon^2) &= \mathbb{I}_{d_f} + \epsilon A_{f,0}^\sigma + O(\epsilon). \end{aligned}$$

Enfin, en remplaçant  $A_{s,0}^\sigma$  et  $A_{f,0}^\sigma$  par leur expressions, on obtient

$$\begin{aligned} F_{11}(\epsilon^2) &= \mathbb{I}_s + \epsilon^2 A_{11}^\sigma + O(\epsilon^2), \\ F_{12}(\epsilon^2) &= \epsilon^2 A_{12}^\sigma + O(\epsilon^2), \\ F_{21}(\epsilon^2) &= \epsilon A_{21}^\sigma + O(\epsilon), \\ F_{22}(\epsilon^2) &= \mathbb{I}_{d_f} + \epsilon A_{22}^\sigma + O(\epsilon). \end{aligned}$$

Nous pouvons ainsi approximer (III.3) lorsque  $\epsilon \rightarrow 0$  par le modèle suivant

$$\begin{pmatrix} x(k+1) \\ z(k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{I}_{d_s} + \epsilon^2 G_{11}^\sigma & \epsilon^2 G_{12}^\sigma \\ \epsilon G_{21}^\sigma & \mathbb{I}_{d_f} + \epsilon G_{22}^\sigma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(k) \\ z(k) \end{pmatrix},$$

ou de manière équivalente sous la forme du modèle- $\delta$  donné dans la section 2.4 du chapitre III

$$\begin{pmatrix} \delta x(k) \\ \delta z(k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_{11}^\sigma & G_{12}^\sigma \\ G_{21}^\sigma & G_{22}^\sigma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(k) \\ z(k) \end{pmatrix},$$

avec

$$\begin{aligned} G_{11}^\sigma &= A_{11}^\sigma, \\ G_{12}^\sigma &= A_{12}^\sigma, \\ G_{21}^\sigma &= A_{21}^\sigma, \\ G_{22}^\sigma &= A_{22}^\sigma. \end{aligned}$$

De la même manière que pour l'échantillonnage d'ordre  $\epsilon$ , l'obtention du modèle discrétisé à l'ordre  $\epsilon^2$  ci-dessus se fait de manière à ce que seul le premier terme non nul apparaisse dans le modèle  $\delta$ .

---

## Références bibliographiques

- [1] A. A. Agrachev and D. Liberzon. Lie-algebraic stability criteria for switched systems. *SIAM J. Control Optim.*, 40 :253–269, 2001. [24](#)
- [2] M. Alwan, X. Liu, and B. Ingalls. Exponential stability of singularly perturbed switched systems with time delay. *Nonlinear Analysis : Hybrid Systems*, 2(3) :913–921, 2008. [31](#)
- [3] J.-P. Aubin and A. Cellina. *Differential inclusions*, volume 264 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, 1984. Set-valued maps and viability theory. [21](#)
- [4] M. Balde and U. Boscain. Stability of planar switched systems : the nondiagonalizable case. *Commun. Pure Appl. Anal.*, 7(1) :1–21, 2008. [27](#), [33](#)
- [5] M. Balde, U. Boscain, and P. Mason. A note on stability conditions for planar switched systems. *Internat. J. Control*, 82(10) :1882–1888, 2009. [27](#), [33](#), [34](#), [35](#), [38](#), [43](#), [49](#), [50](#)
- [6] G. Blankenship. Singularly perturbed difference equations in optimal control problems. *IEEE Trans. Automat. Control*, 26(4) :911–917, 1981. [69](#)
- [7] V. Blondel and J. Theys. On the relations between discrete and continuous time stability for switched linear systems. In *16th International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems 2004*, Leuven, Belgium, 2004. [60](#)
- [8] V. D. Blondel, Y. Nesterov, and J. Theys. On the accuracy of the ellipsoid norm approximation of the joint spectral radius. *Linear Algebra Appl.*, 394 :91–107, 2005. [27](#)
- [9] V. D. Blondel and J. N. Tsitsiklis. NP-hardness of some linear control design problems. *SIAM J. Control Optim.*, 35(6) :2118–2127, 1997. [18](#)
- [10] V. D. Blondel and J. N. Tsitsiklis. Complexity of stability and controllability of elementary hybrid systems. *Automatica J. IFAC*, 35(3) :479–489, 1999. [18](#)

## Références bibliographiques

---

- [11] U. Boscain. Stability of planar switched systems : the linear single input case. *SIAM J. Control Optim.*, 41(1) :89–112, 2002. [27](#), [33](#)
- [12] U. Boscain, G. Charlot, and M. Sigalotti. Stability of planar nonlinear switched systems. *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 15(2) :415–432, 2006. [27](#), [33](#), [47](#)
- [13] S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan. *Linear matrix inequalities in system and control theory*, volume 15 of *SIAM Studies in Applied Mathematics*. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 1994. [23](#), [46](#)
- [14] B. Chen and C. Lin. On the stability bounds of singularly perturbed systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 35(11) :1265–1270, 1990. [84](#)
- [15] J. Daafouz, P. Riedinger, and C. Iung. Stability analysis and control synthesis for switched systems : a switched Lyapunov function approach. *IEEE Trans. Automat. Control*, 47(11) :227–234, 2002. [25](#), [26](#)
- [16] W. P. Dayawansa and C. F. Martin. A converse Lyapunov theorem for a class of dynamical systems which undergo switching. *IEEE Trans. Automat. Control*, 44(4) :751–760, 1999. [17](#), [20](#), [25](#), [54](#), [57](#)
- [17] R. A. Decarlo, M. S. Branicky, S. Pettersson, and B. Lennartson. Perspectives and results on the stability and stabilizability of hybrid systems. In *Proceedings of the IEEE : Special Issue Hybrid Systems*, pages 1069–1082, 2000. [16](#), [17](#)
- [18] A. Dontchev, T. Donchev, and I. Slavov. A Tikhonov-type theorem for singularly perturbed differential inclusions. *Nonlinear Anal.*, 26(9) :1547–1554, 1996. [33](#), [47](#)
- [19] L. Fang, H. Lin, and P. J. Antsaklis. Stabilization and performance analysis for a class of switched systems. In *43rd IEEE Conference on Decision and Control*, pages 3265–3270, 2004. [25](#)
- [20] G. Goodwin, R. Middleton, and H. Poor. High-speed digital signal processing and control. *Proceedings of the IEEE*, 80(2) :240–259, feb 1992. [74](#)
- [21] Y. Granjon. *Automatique - Systèmes linéaires, non linéaires, temps continu, temps discret, représentation d'état*. Dunod, 2007. Collection Sciences Sup. ISBN 978-2-10-050397-1. [8](#)
- [22] J. Hespanha and A. Morse. Stability of switched systems with average dwell-time. In *38th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 2655–2660, Phoenix, USA, 1999. [19](#), [20](#)
- [23] R. Horn and C. Johnson. *Matrix analysis*, volume 41 of *Cambridge University Press*. 1985. [24](#)
- [24] R. Husson, C. Iung, J.-F. Aubry, J. Daafouz, and D. Wolf. *Automatique : du cahier des charges à la réalisation de systèmes*. Dunod, 2007. Collection Sciences Sup. ISBN 978-2-10-050397-1. [8](#)

- [25] M. Johansson and A. Rantzer. Computation of piecewise quadratic Lyapunov functions for hybrid systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 43 :555–559, 1998. [23](#)
- [26] R. Jungers. *The joint spectral radius*, volume 385 of *Lecture Notes in Control and Information Sciences*. Springer-Verlag, Berlin, 2009. Theory and applications. [26](#), [27](#), [66](#), [67](#)
- [27] H. Khalil. *Nonlinear systems*. Prentice Hall, 1996. [8](#)
- [28] P. V. Kokotović, H. K. Khalil, and J. O’Reilly. *Singular perturbation methods in control : analysis and design*. Academic Press Inc., London, 1986. [11](#), [13](#), [14](#), [15](#), [70](#)
- [29] T.-H. S. Li, J.-S. Chiou, and F.-C. Kung. Stability bounds of singularly perturbed discrete systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 44(10) :1934–1938, oct 1999. [65](#)
- [30] T.-H. S. Li and J.-H. Li. Stabilization bound of discrete two-time-scale systems. *Systems and Control Letters*, 18(6) :479 – 489, 1992. [63](#), [65](#)
- [31] D. Liberzon. *Switching in systems and control*. Systems & Control : Foundations & Applications. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 2003. [16](#), [17](#), [24](#)
- [32] D. Liberzon, J. P. Hespanha, and A. S. Morse. Stability of switched systems : a Lie-algebraic condition. *Systems Control Lett.*, 37(3) :117–122, 1999. [24](#)
- [33] D. Liberzon and A. S. Morse. Basic problems in stability and design of switched systems. *IEEE Control Systems*, 19(5) :59–70, 1999. [17](#)
- [34] D. Liberzon and R. Tempo. Common Lyapunov functions and gradient algorithms. *IEEE Trans. Automat. Control*, 49(6) :990–994, 2004. [23](#)
- [35] H. Lin and P. J. Antsaklis. Stability and stabilizability of switched linear systems : A survey of recent results. *IEEE Trans. Automat. Control*, 54(2) :308–322, 2009. [17](#)
- [36] B. Litkouhi and H. Khalil. Multirate and composite control of two-time-scale discrete-time systems. *IEEE Trans. Automat. Control*, 30(7) :645–651, 1985. [64](#), [69](#), [70](#)
- [37] I. Mallocci. *Two time scale switched systems : An application to steering control in hot strip mills*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Lorraine, 2009. [29](#), [30](#), [31](#), [46](#), [47](#), [50](#), [83](#), [84](#)
- [38] I. Mallocci, J. Daafouz, and C. Iung. Stabilization of continuous-time singularly perturbed switched systems. In *48th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 6371–6376, Shanghai, China, 2009. [31](#), [46](#), [47](#), [50](#), [83](#)
- [39] I. Mallocci, J. Daafouz, C. Iung, R. Bonidal, and P. Szczepanski. Switched system modeling and robust steering control of the tail end phase in a hot strip mill. *Nonlinear Analysis : Hybrid Systems*, 3(3) :239–250, August 2009. [4](#)



## Références bibliographiques

---

- [40] M. Margaliot. Stability analysis of switched systems using variational principles : an introduction. *Automatica J. IFAC*, 42(12) :2059–2077, 2006. [36](#)
- [41] M. Margaliot and M. S. Branicky. Nice reachability for planar bilinear control systems with applications to planar linear switched systems. *IEEE Trans. Automat. Control*, 54(6) :1430–1435, 2009. [36](#), [47](#)
- [42] M. Margaliot and G. Langholz. Necessary and sufficient conditions for absolute stability : the case of second-order systems. *IEEE Trans. Circuits Systems I Fund. Theory Appl.*, 50(2) :227–234, 2003. [36](#), [47](#)
- [43] P. Mason, U. Boscain, and Y. Chitour. Common polynomial Lyapunov functions for linear switched systems. *SIAM J. Control Optim.*, 45(1) :226–245 (electronic), 2006. [20](#)
- [44] R. Middleton and G. Goodwin. Improved finite word length characteristics in digital control using delta operators. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 31(11) :1015 – 1021, nov 1986. [74](#)
- [45] R. Middleton and G. Goodwin. *Digital Control and Estimation : A Unified Approach*. Englewood Cliffs. NJ : Prentice-Hall, 1990. [74](#)
- [46] A. Molchanov and Y. Pyatnitskiy. Lyapunov functions that specify necessary and sufficient conditions of absolute stability of nonlinear nonstationary control systems iii. *Automation and Remote Control*, 47 :620–630, 1986. [22](#)
- [47] A. Molchanov and Y. Pyatnitskiy. Criteria of asymptotic stability of differential and difference inclusions encountered in control theory. *Systems and Control Letters*, 13(1) :59 – 64, 1989. [17](#), [20](#), [21](#), [22](#)
- [48] A. P. Molchanov and P. H. Bauer. Robust stability of linear time-varying delta-operator formulated discrete-time systems. *IEEE Trans. Automat. Control*, 44(2) :325–327, 1999. [59](#)
- [49] Y. Mori, T. Mori, and Y. Kuroe. A solution to the common Lyapunov function problem for continuous-time systems. In *36th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 3530–3531, San Diego, USA, 1997. [23](#)
- [50] A. S. Morse. Supervisory control of families of linear set-point controllers. I. Exact matching. *IEEE Trans. Automat. Control*, 41(10) :1413–1431, 1996. [19](#), [20](#)
- [51] D. S. Naidu. *Singular perturbation methodology in control systems*, volume 34 of *IEE Control Engineering Series*. Peter Peregrinus Ltd., Hitchin, 1988. [11](#), [51](#), [63](#)
- [52] D. S. Naidu, D. B. Price, and J. L. Hibey. Singular perturbations and time scales (spats) in discrete control systems-an overview. In *Decision and Control, 1987. 26th IEEE Conference on*, volume 26, pages 2096 –2103, dec. 1987. [63](#)

- [53] K. Narendra and J. Balakrishnan. A common Lyapunov function for stable LTI systems with commuting A-matrices. *IEEE Trans. Automat. Control*, 39 :2469–2471, 1994. [20](#), [24](#)
- [54] Y. Ohta, H. Imanishi, and H. Haneda. Computer generated Lyapunov functions for a class of nonlinear systems. *IEEE Trans. Circuits Systems I Fund. Theory Appl.*, 40(5) :343–354, 1993. [22](#)
- [55] A. Pietrus and V. M. Veliov. On the discretization of switched linear systems. *Systems Control Lett.*, 58(6) :395–399, 2009. [60](#)
- [56] M. Quincampoix. Singular perturbations for differential equations and inclusions : an approach through constrained systems. *Nonlinear Anal.*, 32(5) :697–710, 1998. [33](#), [47](#)
- [57] F. Rossi, P. Colaneri, and R. Shorten. Padé discretization for linear systems with polyhedral Lyapunov functions. *IEEE Trans. Automat. Control*, 56(11) :2717–2722, 2011. [58](#)
- [58] R. Shorten and F. Ó. Cairbre. A proof of global attractivity for a class of switching systems using a non-quadratic Lyapunov approach. *IMA J. Math. Control Inform.*, 18(3) :341–353, 2001. [58](#)
- [59] R. Shorten, M. Corless, S. Sajja, and S. Solmaz. On Padé approximations, quadratic stability and discretization of switched linear systems. *Systems Control Lett.*, 60(9) :683–689, 2011. [56](#), [57](#), [60](#)
- [60] R. Shorten, O. Mason, F. Cairbre, and P. Curran. A unifying framework for the siso circle criterion and other quadratic stability criteria. *Internat. J. Control*, 77(1) :1–8, 2004. [25](#)
- [61] R. Shorten and K. Narendra. On the stability and existence of common Lyapunov functions for stable linear switching systems. In *37th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 3723–3724, Tampa, USA, 1998. [23](#)
- [62] R. Shorten and K. Narendra. Necessary and sufficient conditions for the existence of a common quadratic Lyapunov function for M stable second order linear time-invariant systems. In *Proceedings of the 2000 American Control Conference.*, 2000. [24](#)
- [63] R. Shorten and K. Narendra. Necessary and sufficient conditions for the existence of a CQLF for a finite number of stable LTI systems. *Int. J. Adaptive Control Signal Processing*, 16(10) :709–728, 2002. [24](#), [25](#)
- [64] R. Shorten and K. Narendra. A result on common quadratic Lyapunov functions. *IEEE Trans. Automat. Control*, 48(1) :110–113, 2003. [24](#)
- [65] R. Shorten, F. Wirth, O. Mason, K. Wulff, and C. King. Stability criteria for switched and hybrid systems. *SIAM Review*, 49 :545–592, 2005. [17](#)
- [66] G. V. Smirnov. *Introduction to the theory of differential inclusions*, volume 41 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2002. [21](#)

- [67] S. Solmaz, R. Shorten, K. Wulff, and F. O. Cairbre. A design methodology for switched discrete time linear systems with applications to automotive roll dynamics control. *Automatica J. IFAC*, 44(9) :2358–2363, 2008. [60](#)
- [68] J. Theys. *Joint spectral radius : Theory and Approximations*. PhD thesis, Université Catholique de Louvain, 2005. [26](#), [27](#), [52](#), [53](#)
- [69] J. N. Tsitsiklis and V. D. Blondel. Lyapunov exponents of pairs of matrices. A correction : “The Lyapunov exponent and joint spectral radius of pairs of matrices are hard—when not impossible—to compute and to approximate”. *Math. Control Signals Systems*, 10(4) :381, 1997. [27](#)
- [70] V. Veliov. A generalization of the Tikhonov theorem for singularly perturbed differential inclusions. *J. Dynam. Control Systems*, 3(3) :291–319, 1997. [33](#), [47](#)
- [71] F. Watbled. On singular perturbations for differential inclusions on the infinite interval. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 310(2) :362–378, 2005. [30](#), [33](#), [47](#), [48](#), [49](#)
- [72] M. Wicks, P. Peleties, and R. DeCarlo. Construction of piece-wise Lyapunov functions for stabilizing switched systems. In *33rd IEEE Conference on Decision and Control*, pages 3492–3497, Orlando, USA, 1994. [18](#)
- [73] M. Wicks, P. Peleties, and R. DeCarlo. Switched controller synthesis for the quadratic stabilization of a pair of unstable linear systems. *Eur. J. Contr.*, 4 :140–147, 1998. [18](#)
- [74] K. Wulff, R. Shorten, and P. Curran. On the 45 degree region and the uniform asymptotic stability of classes of second order parameter varying and switched systems. *Internat. J. Control*, 75 :812–823, 2002. [22](#)
- [75] C. A. Yfoulis and R. Shorten. A numerical technique for stability analysis of linear switched systems. In *HSCC’04*, pages 631–645, 2004. [22](#)
- [76] A. Zappavigna, P. Colaneri, S. Kirkland, and R. Shorten. Essentially negative news about positive systems. *Linear Algebra Appl.*, 436(9) :3425–3442, 2012. [60](#)
- [77] G. Zhai, B. Hu, K. Yasuda, and A. N. Michel. Stability analysis of switched systems with stable and unstable subsystems : An average dwell time approach. *International Journal of Systems Science*, 32(8) :1055–1061, 2001. [20](#), [31](#)
- [78] G. Zhai and H. Lin. Controller failure time analysis for symmetric H-infinite control systems. *Internat. J. Control*, 77(6) :598–605, 2004. [20](#)
- [79] G. Zhai, X. Xu, H. Lin, and A. N. Michel. Analysis and design of switched normal systems. *Nonlinear Anal.*, 65(12) :2248–2259, 2006. [20](#)

---

## Résumé

Un grand nombre de phénomènes nous entourant peuvent être décrit par des modèles hybrides, c'est-à-dire, mettant en jeu simultanément une dynamique continue et une dynamique discrète. Également, il n'est pas rare que ces dynamiques puissent évoluer dans des échelles de temps différentes. Dans cette thèse, nous nous intéressons à l'analyse de stabilité des systèmes à commutations singulièrement perturbés à temps continu. En présence de commutations, l'analyse de stabilité des systèmes singulièrement perturbés dite "classique" (séparation des échelles de temps) n'est plus valable. En nous plaçant en dimension deux et en considérant deux modes, nous donnons une caractérisation complète du comportement asymptotique de tels systèmes lorsque le paramètre de perturbation tend vers zéro. Ensuite, nous étudions la discrétisation des systèmes à commutations singulièrement perturbés, en portant un intérêt particulier aux méthodes de discrétisation permettant de préserver la stabilité et les fonctions de Lyapunov quadratiques communes.

Mots clés : systèmes à commutations, perturbation singulière, stabilité, discrétisation.

## Abstract

Many phenomena we encounter can be described by hybrid models, namely, consisting of one continuous dynamic and one discrete dynamic at the same time. Moreover, these dynamics often evolve in different time scales. In this thesis, we deal with the stability analysis of singularly perturbed switched systems in continuous time. When we consider switchings, the "classical" approach (decoupling fast and slow dynamics) allowing to analyse stability of singularly perturbed systems doesn't hold anymore. Considering second order singularly perturbed switched systems with two modes, we completely characterize the stability behavior of such systems when the perturbation parameter goes to zero. Then, we study the discretization of singularly perturbed switched systems. In particular, we focus on methods allowing to preserve stability and common quadratic Lyapunov functions.

Keywords : switched systems, singular perturbation, stability, discretization.