



AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

THÈSE DE DOCTORAT DE
L'UNIVERSITÉ DE LORRAINE

Spécialité

Mécanique - Énergétique

École doctorale Énergie Mécanique et Matériaux ED 409 Nancy-Metz

Laboratoire d'Énergétique et de Mécanique Théorique et Appliquée

Présentée par :

Adel KHANFIR

Pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE LORRAINE

**Étude des mécanismes de diffusion acoustique d'une cavité et d'un réseau à
relief périodique et apériodique**

soutenance prévue le 30 Novembre 2012

devant le jury composé de :

M. Michel BERENGIER Directeur de recherche Institut Français des Sciences et Technologies des Transports de l'Aménagement et des Réseaux, France	Rapporteur
M. le Professeur Jean-Jacques EMBRECHTS Techniques du Son et de l'Image Institut Montefiore Université de Liège, Belgique	Rapporteur
M. Jacques CHATILLON Ingénieur de recherche - Directeur du laboratoire Réduction du Bruit au Travail Institut National de Recherche et de Sécurité - Vandœuvre-lès-Nancy, France	Examineur
M. Joël DUCOURNEAU Maître de conférence - HDR Laboratoire d'Énergétique et de Mécanique Théorique et Appliquée Université de Lorraine, France	Directeur de thèse
M. le Professeur Rachid EL GUERJOUMA Laboratoire d'Acoustique de l'Université du Maine Université du Maine, France	Examineur
M. Adil FAIZ Maître de conférence Laboratoire d'Énergétique et de Mécanique Théorique et Appliquée Université de Lorraine, France	Co-directeur de thèse
M. le Professeur Gérard JEANDEL Laboratoire d'Énergétique et de Mécanique Théorique et Appliquée Université de Lorraine, France	Examineur
M. Salaheddine SKALI-LAMI Maître de conférence - HDR Laboratoire d'Énergétique et de Mécanique Théorique et Appliquée Université de Lorraine, France	Examineur

Remerciements

Ce travail de thèse a été effectué au sein du laboratoire Réduction du Bruit au Travail (RBT) à l’Institut national de recherche et sécurité (INRS) de Vandœuvre-lès-Nancy. Je tiens à remercier les personnes qui m’ont accueilli en décembre 2009 dans ce laboratoire et qui ont pu ainsi permettre à cette thèse de voir le jour. Mes premiers remerciements vont d’abord à mon directeur de thèse, Monsieur Joël DUCOURNEAU, qui m’a accompagné tout au long de ces trois années. Sa disponibilité et son aide scientifique ont été d’une très grande qualité et d’une immense richesse ; merci infiniment. Je tiens à remercier vivement, mon codirecteur de thèse, Monsieur Adil FAIZ pour le soutien qu’il n’a cessé de m’apporter, sa disponibilité et ses précieux conseils qui ont permis de mener à bien ce travail. Je remercie aussi Monsieur Jacques CHATILLON, responsable du laboratoire RBT, pour son aide, sa contribution tout au long de ce travail.

J’ai ici l’agréable devoir d’exprimer mes remerciements aux rapporteurs et aux membres du jury :

Monsieur Michel BERENGIER, directeur de recherche à l’Institut Français des Sciences et Technologies des Transports de l’Aménagement et des Réseaux,

Monsieur le Professeur Jean-Jacques EMBRECHTS de l’Institut Montefiore, Université de Liège,

Monsieur le Professeur Rachid EL GUERJOUMA rattaché au Laboratoire d’Acoustique de l’Université du Maine, Université du Maine,

Monsieur le Professeur Gérard JEANDEL du Laboratoire d’Énergétique et de Méca-

nique Théorique et Appliquée, Université de Lorraine,

Monsieur Salaheddine SKALI-LAMI du Laboratoire d'Énergétique et de Mécanique Théorique et Appliquée, Université de Lorraine.

J'adresse aussi mes plus sincères remerciements à tous mes collègues de l'Institut national de recherche et de sécurité : Mme Isabelle MANET et Mme Geneviève JEAN-JEAN, M. Ange EBISSOU, M. Julien MARCHAND, M. Jean-Pierre ARZ, M. Patrick CHEVRET, M. Léon THIERY, M. Alain KUSY, M. Nicolas TROMPETTE, M. Daniel ROBINET, M. Armand NÉJADE. Je remercie également M. Didier BAPTISTE, directeur scientifique de l'INRS et également Mme Séverine BRUNET, chef de département Ingénierie des Equipement de Travail de l'INRS.

Enfin, j'adresse mes sincères remerciements à toutes les personnes, proches et amis, qui m'ont soutenu durant ces années de thèse et qui m'ont aidé à avancer dans ce travail.

Dédicaces

Je dédie le fruit de mes efforts à toutes les personnes chères à mon cœur, qui par leur soutien, leur amour et leur encouragement, ont contribué à l'aboutissement de ce travail.

À vous, chère mère et cher père, qui avez partagé tous mes moments de joie et d'an-goisse, qui avez consacré vos vies pour veiller au bien être de vos enfants et qui avez excellé dans vos devoirs de mère et de père, je vous offre ce modeste cadeau en signe de reconnaissance et d'Amour que je porte pour vous.

À mon frère Mohamed et ma sœur Emna pour leurs encouragements incessants. Qu'ils trouvent à travers cette œuvre l'expression de ma très grande affection et ma gratitude. Je vous souhaite tout le succès et le bonheur du monde.

À mon grand père Mahmoud qui m'a aidé tout au long de mon parcours universitaire.

À tous mes amis qui ont été toujours présents pour m'offrir les plus beaux moments, les plus mémorables souvenirs de ma vie universitaire.

À mes chers professeurs qui ont su me donner la passion et le goût des sciences pour aboutir à ce travail.

Une pensée particulière s'adresse à mon grand père Mohamed, qu'il trouve ici l'expression de ma reconnaissance en guise de ses précieux conseils, que dieu lui accorde son infinie miséricorde.

...Adel

Table des matières

Table des figures	viii
Liste des tableaux	xiv
Liste des symboles	xvi
Introduction	1
1 État de l’art des modèles théoriques du champ de pression acoustique réfléchi au dessus des parois à reliefs	4
1.1 Introduction	4
1.2 Définitions	5
1.3 Équation intégrale	5
1.4 Méthode des rayons sonores	7
1.5 Méthode des sources images	8
1.6 Approximation de Kirchhoff	9
1.7 Approximation de Born	10
1.8 Méthode de perturbation et "Homotopy perturbation method"	11

1.9	Méthode englobant l'approximation de Kirchhoff, de Born, et la méthode de perturbation	13
1.10	Méthode d'homogénéisation des milieux périodiques	14
1.11	Méthode des guides d'ondes	15
1.12	Méthode Holford	17
1.13	Méthode de Wiener-Hopf	18
1.14	Méthode de H. H. Park	18
1.15	La méthode Kobayashi Potential (KP)	19
1.16	Conclusion	21
2	Adaptation de la méthode Kobayashi Potential aux cas des réseaux contenant des cavités rectangulaires	22
2.1	Introduction	22
2.2	Développement du modèle dans le cas d'une cavité dans un écran infiniment rigide	23
2.2.1	Expression des différents champs mis en jeu	24
2.2.2	Calcul du champ acoustique diffracté	29
2.3	Analyse des amplitudes modales dans le champ de pression acoustique réfléchi diffracté Φ_d	35
2.4	Prise en compte de l'admittance non nulle des bords de cavités dans le modèle	38
2.5	Généralisation du modèle à un réseau de cavités rectangulaires parallèles	42
2.5.1	Développement du modèle	43

2.5.2	Expression des différents champs acoustiques mis en jeu	44
2.5.3	Étude théorique des termes de couplage $GC_{m,n,s,t}^{\mu_i,\nu_i,\mu_j,\nu_j}$	57
2.6	Cas du réseau de cavités rectangulaires non parallèles	67
2.7	Conclusion	70
3	Validation du modèle développé	72
3.1	Introduction	72
3.2	Décomposition en ondes planes du champ incident sphérique	73
3.3	Procédure expérimentale	74
3.4	Modélisation en éléments finis du champ de pression acoustique au dessus des réseaux étudiés	76
3.5	Convergence du modèle	78
3.6	Validation du modèle analytique développé	80
3.6.1	Cas d'une cavité excitée avec une source centrée	80
3.6.2	Cas d'une cavité excitée avec une source excentrée	86
3.6.3	Cas des réseaux de cavités rectangulaires parallèles	91
3.6.4	Cas des cavités rectangulaires non parallèles	102
3.7	Validation expérimentale du couplage entre cavités	105
3.8	Discussion et synthèse à propos du modèle développé	115
	Conclusion générale	120
	Bibliographie	123

Annexes	130
A.1 Détermination des fonctions inconnues $f_{cc}, f_{cs}, f_{sc}, f_{ss}$	130
A.2 Continuité de pression : cas d'une seule cavité	131
A.3 Développement des fonctions trigonométriques sur la base des polynômes de Jacobi. Orthogonalités des polynômes de Jacobi	133
A.3.1 Développement des fonctions trigonométriques sur la base des po- lynômes de Jacobi	133
A.3.2 Orthogonalités des polynômes de Jacobi	134
A.3.3 Application des relations d'orthogonalité à un développement des fonctions trigonométriques en série de polynômes de Jacobi	135
A.4 Orthogonalités des modes propres du guide d'ondes. Intégrales utiles . . .	136
A.5 Calcul des intégrales simples des fonctions $G(2m, 2n, 2s + 1, 2t + 1)$. . .	137
A.6 Calcul des intégrales des matrices de couplage $[GC_{m,n,s,t}^{\mu_i, \nu_i, \mu_j, \nu_j}]$	139

Table des figures

1.1	Volume V limité par une surface $S = S_i \cup S_e$	6
1.2	Réflexion des rayons sonores sur une paroi irrégulière	8
1.3	Réflexion d'une onde sphérique sur une interface simple représentée par une source image.	8
1.4	Sources images correspondant aux réflexions dans un guide aux parois parfaitement réfléchissantes.	9
1.5	Approximation de Kirchhoff	10
1.6	Variation de la hauteur z_0 de la surface rugueuse	11
1.7	Méthode d'homogénéisation des milieux périodiques	15
1.8	Modèle des guides d'ondes	17
2.1	Différents champs acoustiques mis en jeu dans le cas d'une cavité rectan- gulaire	24
2.2	Variation des amplitudes modales A_{mn} en fonction de la fréquence dans le cas d'une incidence normale pour une cavité de taille $(50 \times 50 \times 20) \text{ cm}^3$	37
2.3	Variation des amplitudes modales A_{mn} et C_{mn} en fonction de la fréquence dans le cas d'une incidence oblique : $\theta = \frac{\pi}{3}$ et $\phi = 0$ pour une cavité de taille $(50 \times 50 \times 20) \text{ cm}^3$	37

2.4	Différents champs acoustiques mis en jeu dans le cas d'un réseau de cavités rectangulaires parallèles	43
2.5	Géométrie du réseau de deux rainures.	59
2.6	Variation du coefficient de couplage pour un réseau contenant deux rainures à 220 Hz en fonction de la distance $\delta_{x_{12}}$	59
2.7	Variation du coefficient de couplage pour un réseau de deux rainures espacées de 0,02 m en fonction de la fréquence.	61
2.8	Variation du coefficient de couplage pour un réseau de deux cavités de distance entre les deux centres des deux repères locaux égale à zéro selon l'axe des y ($\delta_{y_{12}} = 0 m$) à 220 Hz en fonction de δ_{12}	62
2.9	Géométrie du réseau de deux cavités de distance entre les centres des repères locaux égale à zéro selon l'axe des y ($\delta_{y_{12}} = 0 m$).	62
2.10	Variation du coefficient de couplage pour un réseau de deux cavités de distance entre les centres des repères locaux égale à 0,52 m selon l'axe des y ($\delta_{y_{12}} = 0,52 m$) à 220 Hz en fonction de δ_{12}	63
2.11	Géométrie du réseau de deux cavités de distance 0,52 m entre les deux centres des deux repères locaux selon l'axe des y ($\delta_{y_{12}} = 0,52 m$).	64
2.12	Variation du coefficient de couplage pour un réseau de deux cavités espacées de 0,02 m selon l'axe des x en fonction de la fréquence.	65
2.13	Variation du coefficient de couplage pour un réseau de deux cavités espacées de 0,02 m selon l'axe des x et selon l'axe des y en fonction de la fréquence.	66
2.14	Position du repère local par rapport au repère de référence	67
3.1	Chaine de mesure.	75

3.2	Positions juxtaposées de l'antenne de 15 microphones	76
3.3	Principe de modélisation en éléments finis	78
3.4	Convergence du modèle analytique pour une cavité de taille $(0,48 \times 1,00 \times 0,21) m^3$ excitée par une source sphérique située à $0,86 m$ pour plusieurs fréquences : $230 Hz$, $780 Hz$, $1100 Hz$ et $1900 Hz$	79
3.5	Pression acoustique normalisée à $0,2 m$ au dessus de la cavité de taille $(0,46 \times 0,48 \times 0,21) m^3$ excitée par une source sphérique centrée située à $1 m$ au-dessus pour différentes fréquences : $230 Hz$, $780 Hz$, $1100 Hz$ et $1900 Hz$	81
3.6	Pression acoustique normalisée à $0,2 m$ au dessus de la cavité de taille $(0,46 \times 0,48 \times 0,21) m^3$ excitée par une source sphérique centrée située à $1 m$ au-dessus à $3100 Hz$	82
3.7	Pression acoustique normalisée à $0,2 m$ au dessus de la cavité de taille $(0,46 \times 0,48 \times 0,12) m^3$ excitée par une source sphérique centrée située à $0,85 m$ au-dessus pour différentes fréquences : $230 Hz$, $780 Hz$, $1100 Hz$ et $1900 Hz$	83
3.8	Pression acoustique normalisée à $0,2 m$ au dessus de la cavité de taille $(0,48 \times 1,00 \times 0,21) m^3$ excitée par une source sphérique centrée située à $0,85 m$ au-dessus pour différentes fréquences : $230 Hz$, $780 Hz$, $1100 Hz$ et $1900 Hz$	84
3.9	Pression acoustique normalisée à $0,2 m$ au dessus de la cavité de taille $(0,46 \times 0,48 \times 0,21) m^3$ excitée par une source sphérique excentrée située au point $(-0,51; 0; 0,89) m_{(O,x,y,z)}$ pour différentes fréquences : $230 Hz$, $780 Hz$, $1100 Hz$ et $1900 Hz$	88

3.10	Pression acoustique normalisée à $0,2 m$ au dessus de la cavité de taille $(0,46 \times 0,48 \times 0,12) m^3$ excitée par une source sphérique excentrée située au point $(-0,51; 0; 0,89) m_{(O,x,y,z)}$ pour différentes fréquences : $230 Hz$, $780 Hz$, $1100 Hz$ et $1900 Hz$	89
3.11	Pression acoustique normalisée à $0,2 m$ au dessus de la cavité de taille $(0,48 \times 1,00 \times 0,21) m^3$ excitée par une source sphérique excentrée située au point $(-0,51; 0; 0,89) m_{(O,x,y,z)}$ pour différentes fréquences : $230 Hz$, $780 Hz$, $1100 Hz$ et $1900 Hz$	90
3.12	Réseau à 3 cavités de taille $(0,48 \times 0,50 \times 0,21) m^3$ espacées de $0,34 m$.	92
3.13	Géométrie du réseau aperiodique formé par 9 cavités de tailles et d'espacements différents.	93
3.14	Pression acoustique normalisée à $0,2 m$ au dessus du réseau de 3 cavités étudié pour différentes fréquences : $230 Hz$, $500 Hz$, $730 Hz$ et $1500 Hz$.	95
3.15	Solution du problème non couplé	96
3.16	Solution du problème couplé	97
3.17	Pression acoustique normalisée à $0,2 m$ au dessus du réseau périodique de 9 cavités pour différentes fréquences : $230 Hz$, $400 Hz$, $780 Hz$ et $900 Hz$	98
3.18	Pression acoustique normalisée à $0,2 m$ au dessus du réseau aperiodique de 9 cavités pour différentes fréquences : $230 Hz$, $400 Hz$, $780 Hz$ et $900 Hz$	99
3.19	Champ acoustique diffracté Φ_d à $0,2 m$ au-dessus d'une cavité de taille $(0,46 \times 0,48 \times 0,21) m^3$ excitée par une source sphérique située à $1 m$ au-dessus à $3100 Hz$	101
3.20	Géométrie du réseau de deux cavités non parallèles	102

3.21	Pression acoustique normalisée à $0,2\text{ m}$ au dessus des deux cavités non parallèles pour différentes fréquences : 300 Hz , 500 Hz , 780 Hz et 1900 Hz	103
3.22	Pression acoustique normalisée à $0,2\text{ m}$ au dessus des deux cavités non parallèles le long de l'axe $y = -0,37\text{ m}$ pour différentes fréquences : 500 Hz , 700 Hz , 900 Hz et 1900 Hz	104
3.23	Géométrie des 5 réseaux étudiés	106
3.24	Pression acoustique normalisée à $0,2\text{ m}$ au dessus du réseau périodique de 3 cavités espacées de $0,02\text{ m}$ pour différentes fréquences : 230 Hz , 780 Hz , 1000 Hz et 1600 Hz	107
3.25	Pression acoustique normalisée à $0,2\text{ m}$ au dessus du réseau périodique de 3 cavités espacées de $0,07\text{ m}$ pour différentes fréquences : 230 Hz , 780 Hz , 1000 Hz et 1600 Hz	108
3.26	Pression acoustique normalisée à $0,2\text{ m}$ au dessus du réseau périodique de 3 cavités espacées de $0,12\text{ m}$ pour différentes fréquences : 230 Hz , 780 Hz , 1000 Hz et 1600 Hz	109
3.27	Pression acoustique normalisée à $0,2\text{ m}$ au dessus du réseau périodique de 3 cavités espacées de $0,17\text{ m}$ pour différentes fréquences : 230 Hz , 780 Hz , 1000 Hz et 1600 Hz	110
3.28	Pression acoustique normalisée à $0,2\text{ m}$ au dessus du réseau périodique de 3 cavités espacées de $0,34\text{ m}$ pour différentes fréquences : 230 Hz , 780 Hz , 1000 Hz et 1600 Hz	111
3.29	Comparaison des valeurs du paramètre $RMSE$ obtenus pour le modèle couplé et le modèle non couplé en fonction de la fréquence pour les 5 réseaux de 3 cavités périodique espacées de $0,02\text{ m}$; $0,07\text{ m}$; $0,12\text{ m}$; $0,17\text{ m}$; $0,34\text{ m}$ respectivement.	114

3.30	Représentation d'une ouverture illuminée en polarisation magnétique (situation 1), et d'une fente équivalente illuminée en polarisation électrique (situation 2).	118
3.31	Application du principe de Babinet pour étudier un relief sortant rectangulaire.	119
3.32	Application du principe de Babinet pour étudier un réseau de reliefs sortants rectangulaires.	119
33	Contour d'intégration de la fonction $f(z)$	137

Liste des tableaux

3.1	Ordres et temps de calcul nécessaires pour obtenir la convergence du modèle en 45 points pour une cavité de taille $(0,48 \times 1,00 \times 0,21) m^3$ excitée par une source sphérique située à $0,86 m$ pour plusieurs fréquences : $230 Hz$, $780 Hz$, $1100 Hz$ et $1900 Hz$	79
3.2	Erreur quadratique moyenne $RMSE$ du modèle analytique dans le cas des cavités de tailles $(0,46 \times 0,48 \times 0,21) m^3$, $(0,46 \times 0,48 \times 0,12) m^3$ et $(0,48 \times 1,00 \times 0,21) m^3$ excitées par une source centrée.	86
3.3	Erreur quadratique moyenne $RMSE$ du modèle analytique dans le cas des cavités de tailles $(0,46 \times 0,48 \times 0,21) m^3$, $(0,46 \times 0,48 \times 0,12) m^3$ et $(0,48 \times 1,00 \times 0,21) m^3$ excitées par une source excentrée.	91
3.4	Dimensions du réseau aperiodique à 9 cavités rectangulaires parallèles. .	93
3.5	Erreur quadratique moyenne $RMSE$ du modèle analytique couplé dans le cas des réseaux périodiques de 3 et 9 cavités et du réseau apériodique à 9 cavités.	101
3.6	Erreur quadratique moyenne $RMSE$ du modèle analytique couplé dans le cas des 2 cavités non parallèles sur les deux axes de mesure $y = 0 m$ et $y = -0,37 m$	105
3.7	Erreur quadratique moyenne $RMSE$ du modèle analytique couplé et du modèle des éléments finis dans le cas des 5 réseaux de 3 cavités étudiés. .	112

3.8	Fréquence de convergence entre le modèle couplé et le modèle non couplé.	115
-----	--	-----

Liste des symboles

Coordonnées

ξ_i, η_i	Coordonnées normalisées par les dimensions de la cavité i selon l'axe des x et l'axe des y respectivement.
r, θ, ϕ	Coordonnées sphériques.
x, y, z	Coordonnées cartésiennes.
x_i, y_i	Coordonnées locales dans le repère local (O, x_i, y_i, z) centré sur la cavité i .
x_s, y_s, z_s	Coordonnée de la source sphérique incidente.

Amplitudes modales

$A_{mn}, B_{mn}, C_{mn}, D_{mn}$	Amplitudes modales du champ diffracté par une cavité.
$A_{mn}^i, B_{mn}^i, C_{mn}^i, D_{mn}^i$	Amplitudes modales du champ diffracté par la cavité i .
E_{pq}^i, F_{pq}^i	Amplitudes modales de l'onde guidée à l'intérieur de la cavité i .
R_{rs}	Amplitude modale de l'onde réfléchie totale dans la méthode des guides d'ondes.

Constantes de propagation

α_r, β_s et γ_{rs}	Composantes du vecteur d'onde réfléchi modal dans la méthode des guides d'ondes selon les axes (Ox) , (Oy) et (Oz) respectivement.
--------------------------------------	--

κ_{pq}	Nombre d'onde modal de l'onde guidée dans une cavité rectangulaire.
κ_{pq}^i	Nombre d'onde modal de l'onde guidée à l'intérieur de la cavité i .
λ	Longueur d'onde.
c	Célérité des ondes acoustiques dans l'air.
f	Fréquence.
k	Nombre d'onde.
k_x, k_y, k_z	Composantes du vecteur d'onde incidente selon les axes (O, x) , (O, y) , (O, z) respectivement.

Grandeurs acoustique

η_{ad}	Admittance réduite du fond d'une cavité.
η_{ad}^i	Admittance réduite du fond de la cavité i .
η'_{ad}	Admittance réduite des bords d'une cavité.
Φ	Potentiel des vitesses du champ acoustique total.
Φ_d^i	Potentiel des vitesses du champ diffracté par la cavité i .
Φ_r	Champ réfléchi total au dessus d'une paroi dans la méthode des guides d'ondes ou champ réfléchi spéculaire dans la méthode Kobayashi Potential.
Φ_w^i	Champ à l'intérieur de la cavité i .
Φ_{d_η}	Champ diffracté généré par une cavité rectangulaire dans un écran épais qui présente une admittance η'_{ad} .
Φ_{inc}^{pl}	Potentiel des vitesses de l'onde plane incidente.
Φ_{inc}^{sph}	Potentiel des vitesses du champ incident sphérique.

Φ_{r_η} Potentiel des vitesses du champ réfléchi spéculaire dans le modèle Kobayashi Potential (modèle avec admittance sur les bords).

R Coefficient de réflexion des bords d'une cavité (modèle avec admittance sur les bords).

Indices

μ, ν, μ_i, ν_i Nombre entier prenant les valeurs 0 ou 1.

m, n Indices modaux définissant les modes du champ diffracté Φ_d .

p, q Indices des modes à l'intérieur d'une cavité.

s, t Indices des modes du champ réfléchi total au dessus d'un réseau de cavités rectangulaires dans la méthode des guides d'onde.

Divers

ϵ_p Indice égal à 1 ou 2 selon les relations d'orthogonalité des modes propres des guides d'onde.

$\Gamma(n)$ Fonction Gamma d'Euler.

$\Gamma_{pq}^\pm$ Fonction dépendant des indices modaux p et q .

$\Lambda_\eta, \Lambda, \Lambda_{s,t}^{\mu_i, \nu_i}$ Termes de second membre dans le système des équations matricielles permettant d'accéder aux amplitudes modales du champ diffracté.

σ, τ Nombres réels.

a, b, d Dimensions d'une cavité selon l'axe des x , l'axe des y et l'axe des z respectivement.

a_i, b_i, d_i Dimensions d'une cavité i selon l'axe des x , l'axe des y et l'axe des z respectivement.

$C_n^{(\sigma)}(x)$	Polynôme de Gegenbauer d'ordre n .
D	Domaine défini par la surface au dessus de la cavité.
D_c	Domaine complémentaire du domaine D .
G	Fonction définissant les coefficients du système d'équations matricielles du problème non couplé permettant d'accéder aux amplitudes modales inconnues A_{mn} , B_{mn} , C_{mn} et D_{mn} (modèle sans admittance).
G_η	Fonction définissant les coefficients du système d'équations matricielles permettant d'accéder aux amplitudes modales inconnues A_{mn} , B_{mn} , C_{mn} et D_{mn} (modèle avec admittance).
$G_n(\sigma, \tau, x)$	Polynôme de Jacobi d'ordre n .
$GC_{m,n,s,t}^{\mu_i, \nu_i, \mu_j, \nu_j}$	Fonction définissant les coefficients de couplage.
$J_n(x)$	Fonction de Bessel de première espèce d'ordre n .
N	Nombre de cavités dans un réseau de cavités rectangulaires.
N_x et N_y	Nombre de points considéré dans la décomposition en ondes planes.
S	Maximum des indices m , n , s et t : ordre nécessaire pour obtenir la convergence du modèle.

Introduction

Les parois dans les locaux industriels possèdent le plus souvent des irrégularités de type géométrique et/ou acoustique. Ces irrégularités sont généralement constituées de cavités de forme rectangulaire comme, par exemple, les portes et les fenêtres, poutres, mobilier, machines, etc. Ces cavités provoquent d'un point de vue acoustique une réflexion du champ incident dite diffuse.

Le logiciel Ray+ [1] mis au point par l'Institut national de recherche et sécurité (INRS) permet d'évaluer les niveaux sonores dans tout type de locaux industriels et de tracer des cartographies du champ de pression acoustique. Ce logiciel nécessite la connaissance des coefficients d'absorption ou de réflexion acoustique des parois, coefficients souvent connus pour des parois planes. Lorsque celles-ci possèdent un relief complexe, les mécanismes de diffusion acoustique induisent une atténuation du champ sonore à l'intérieur du milieu confiné [2]. On peut constater alors que la paroi à relief se comporte comme une paroi plane qui aurait un coefficient d'absorption que l'on peut qualifier d'apparent.

L'idée est donc d'étudier le comportement acoustique de ces reliefs complexes en commençant par des réseaux de profil périodique ou non périodique. Ceci permettra de déterminer le champ acoustique diffusé et de caractériser ainsi la paroi par un coefficient de réflexion ou d'absorption apparent. Il s'agit de remplacer la paroi à relief par une paroi plane équivalente possédant un coefficient de réflexion représentatif de la diffusion. Ce coefficient pourra être intégré, à terme, dans le logiciel Ray+ et d'autres logiciels prévisionnels du champ de pression acoustique à l'intérieur des locaux.

L'Unité Mixte Acoustique des Parois (UMAP qui résulte d'une collaboration scientifique établie entre l'INRS et le LEMTA de l'Université de Lorraine) s'intéresse depuis sa création en 2001 à la caractérisation acoustique des parois rencontrées dans les locaux industriels. L'élaboration d'un modèle théorique de réflexion des ondes acoustiques sur ces parois de profil périodique a fait l'objet d'une thèse soutenue par Lionel Bos en 2006 [3]. Ce modèle théorique repose sur une méthode qui consiste à subdiviser la surface irrégulière en des guides d'ondes de formes rectangulaires. Cette méthode a été appliquée sur des profils périodiques à une dimension puis généralisée à des profils périodiques selon deux dimensions. Cependant, ce modèle qui nécessite un temps de calcul important ne concerne que des réseaux périodiques.

L'objectif de ce travail de thèse est de développer un modèle plus rapide et/ou plus complet, fonctionnant sur une large bande fréquentielle et permettant de prédire le champ de pression acoustique réfléchi et diffus au dessus de parois à relief périodique ou apériodique.

Ce rapport est scindé en trois chapitres. Le premier présente une étude bibliographique des différents modèles existants dans la littérature scientifique et permettant d'étudier la réflexion des ondes acoustiques par des surfaces irrégulières. Les premières méthodes rencontrées sont insuffisantes pour résoudre le problème de diffusion d'ondes acoustiques par des réseaux apériodiques car elles sont soit limitées en fréquence, soit appropriées à des structures périodiques. La méthode Kobayashi Potential (KP), méthode issue de l'électromagnétisme pour étudier la diffusion par des fentes épaisses, a été choisie car elle s'applique aux géométries rectangulaires souvent rencontrées dans les parois industrielles.

Dans le deuxième chapitre, une adaptation de la méthode KP au cas d'une cavité dans un écran infiniment rigide a été développée. Une généralisation de ce modèle au cas d'un réseau de cavités rectangulaires parallèles et non parallèles dans un écran infiniment rigide est présentée également. Ce modèle ainsi généralisé tient compte des phénomènes

de couplage acoustique qui existent entre les différentes cavités. Une étude approfondie de ce couplage pour des réseaux de rainures et des réseaux de cavités a été effectuée pour comprendre son évolution fréquentielle en fonction de l'écartement entre les cavités.

Dans le troisième chapitre, une validation par la méthode des éléments finis et l'expérience a été effectuée pour des parois contenant une cavité, des réseaux de cavités périodiques, un réseau apériodique à neuf cavités parallèles et un réseau de deux cavités non parallèles.

Enfin, une conclusion générale tente d'effectuer la synthèse des différents points abordés tout en dégagant des perspectives de recherche visant à élargir le cadre d'application du modèle développé.

1

État de l'art des modèles théoriques du champ de pression acoustique réfléchi au dessus des parois à reliefs

1.1 Introduction

Ce chapitre présente les différents modèles existants dans la littérature scientifique pour l'étude de la propagation de l'onde acoustique en milieu fluide en présence de reliefs. Ces modèles permettent d'étudier les mécanismes de diffusion acoustique induits. Différentes méthodes de résolution de l'équation de propagation de l'onde existent. Elles sont présentées ici.

1.2 Définitions

La réflexion acoustique est dite spéculaire lorsque le rayon incident donne naissance à un rayon réfléchi unique vérifiant la loi de Snell-Descartes : angle d'incidence égal à l'angle de réflexion. Par la suite le champ acoustique généré par une réflexion spéculaire sera appelé champ réfléchi spéculaire.

Quand une onde lumineuse insonifie un obstacle ou une fente de dimensions proches de la longueur d'onde, de la lumière est partiellement perçue dans la zone d'ombre géométrique. Ce phénomène est appelé la diffraction des ondes lumineuses [4]. La diffraction des ondes acoustiques est définie de la même manière par analogie avec l'optique. Par la suite, un champ acoustique généré par le phénomène de diffraction sera appelé champ diffracté. Le champ total réfléchi issu des deux phénomènes : réflexion spéculaire et diffraction est appelé champ diffus.

1.3 Équation intégrale

L'objectif est de définir le potentiel des vitesses Φ du champ acoustique total en un point défini par le vecteur $\vec{r}$ dans un volume V limité par une surface intérieure S_i et une surface extérieure S_e (définie par une sphère) sous forme d'une intégrale de surface (voir figure 1.1).

On suppose qu'on est en régime sinusoïdal. Soit k le nombre d'onde.

Le théorème de Green permet d'écrire [5] :

$$\Phi(\vec{r}) = \int_{S=S_i \cup S_e} (\Phi \nabla \Psi - \Psi \nabla \Phi) \cdot \vec{n} dS = \int_V (\Phi \nabla^2 \Psi - \Psi \nabla^2 \Phi) dV \quad (1.1)$$

où $\vec{n}$ est le vecteur unitaire normal à la surface S pointant vers l'extérieur.

La fonction Ψ représente la fonction de Green G vérifiant l'équation de Helmholtz

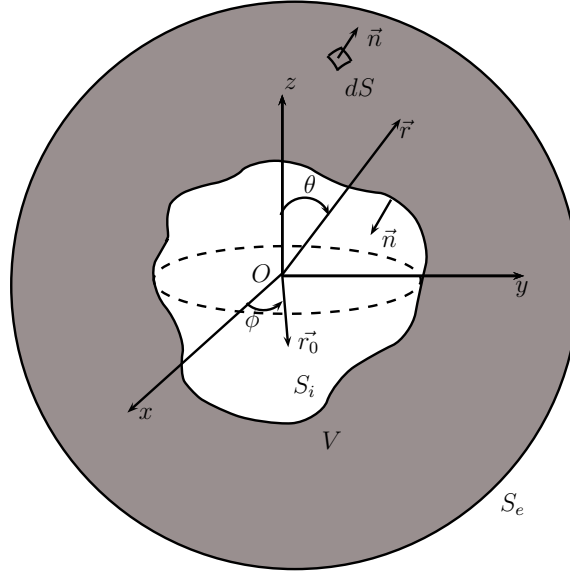


FIGURE 1.1 – Volume V limité par une surface $S = S_i \cup S_e$

pour une source impulsionnelle.

$$(\nabla^2 + k^2) G(\vec{r}_0, \vec{r}) = -\delta(\vec{r}_0 - \vec{r}) \quad / \vec{r}_0 \in S \quad (1.2)$$

Le potentiel des vitesses Φ est également solution de l'équation de Helmholtz (1.3). où f_s représente la source active.

$$(\nabla^2 + k^2) \Phi(\vec{r}) = -f_s(\vec{r}) \quad (1.3)$$

Les équations (1.1) et (1.2) permettent d'écrire alors :

$$K(\vec{r})\Phi(\vec{r}) = \Phi_{inc}^{pl}(\vec{r}) - \int_{S=S_i \cup S_e} (\Phi(\vec{r}_0) \nabla G(\vec{r}_0, \vec{r}) - G(\vec{r}_0, \vec{r}) \nabla \Phi(\vec{r}_0)) \vec{n} dS \quad (1.4)$$

La fonction de Green $G(\vec{r}_0, \vec{r})$ satisfait les conditions de radiation à l'infini. Alors l'intégrale sur S_e devient nulle quand le rayon de la surface sphérique S_e tend vers l'infini. Si on fait l'hypothèse aussi que l'on a une surface rigide, l'équation 1.4 devient :

$$K(\vec{r})\Phi(\vec{r}) = \Phi_{inc}^{pl}(\vec{r}) - \int_{S_i} \Phi(\vec{r}_0) \frac{\partial G(\vec{r}_0, \vec{r})}{\partial n} dS \quad (1.5)$$

$\Phi_{inc}^{pl}(\vec{r})$ représente le champ incident issu de la source, l'intégrale représente le champ

diffus induit par le relief de la surface et $K(\vec{r})$ est une fonction vérifiant :

$$K(\vec{r}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \vec{r} \in V \\ \frac{1}{2} & \text{si } \vec{r} \in S \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (1.6)$$

La résolution de l'équation complète (1.4) permet d'accéder au champ total diffus. Plusieurs méthodes de calcul permettent de résoudre cette équation, citons par exemple l'approximation de Kirchhoff, l'approximation de Born et la méthode de perturbation.

1.4 Méthode des rayons sonores

La méthode des rayons sonores [6] repose sur le postulat de l'équivalence des lois de la réflexion des ondes acoustiques et de celles des rayons lumineux (en optique géométrique).

La représentation de la propagation des ondes acoustiques s'effectue grâce à la notion de rayons acoustiques. Ces derniers peuvent être utilisés pour discrétiser un front d'onde acoustique. Les rayons sonores incidents sont orientés selon la normale au plan tangent au front d'onde au point considéré. Ces propos sont illustrés sur la figure 1.2 dans le cas d'un front d'onde plan. Chaque rayon sonore incident est réfléchi par la paroi comme si cette dernière était remplacée par son plan tangent au point d'impact du rayon, la réflexion sur ce plan tangent étant de nature spéculaire.

Cependant, cette méthode repose, pour que son développement informatique ne soit pas trop lourd, sur l'hypothèse que la variation du relief est faible par rapport à la longueur d'onde.

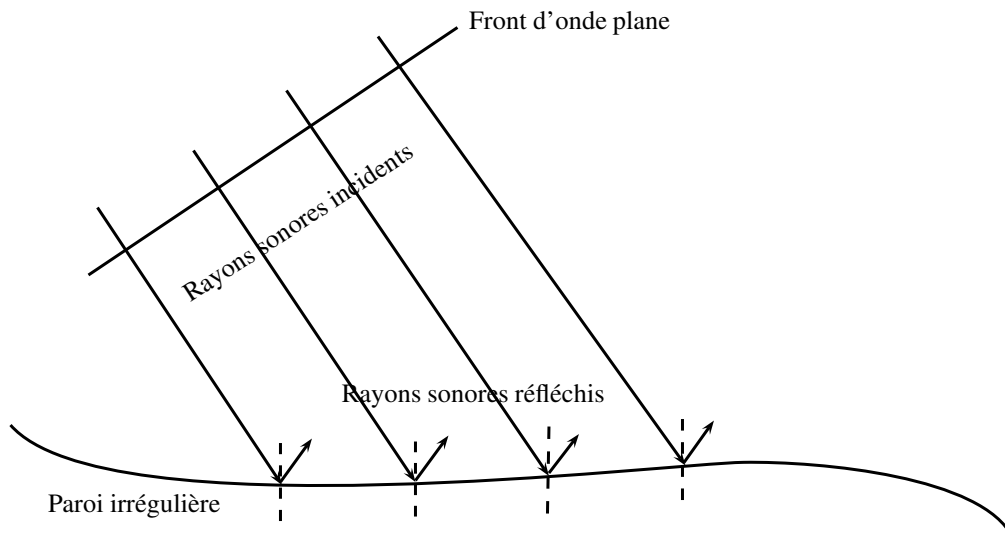


FIGURE 1.2 – Réflexion des rayons sonores sur une paroi irrégulière

1.5 Méthode des sources images

La méthode des sources images est couramment employée en acoustique des salles [7,8]. Elle est utile pour résoudre des problèmes dont la géométrie est relativement simple, mais elle devient rapidement inexploitable dans le cas de géométries plus complexes.

Elle modélise les ondes réfléchies sur des parois par une onde émise par une source image. La source image est symétrique à la source réelle par rapport à la paroi réfléchissante (figure 1.3) et son amplitude est affectée par le coefficient de réflexion de l'interface.

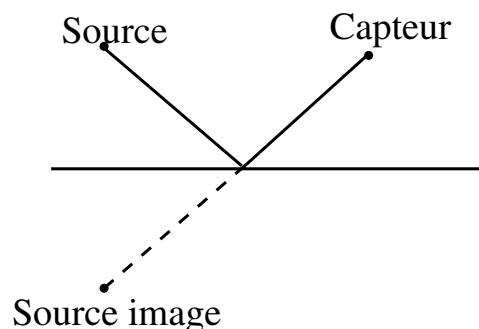


FIGURE 1.3 – Réflexion d'une onde sphérique sur une interface simple représentée par une source image.

Si deux parois font face comme dans un guide d'ondes (figure 1.4), il y a une infinité

de sources images, chacune correspondant à un trajet de l'onde dans le guide.

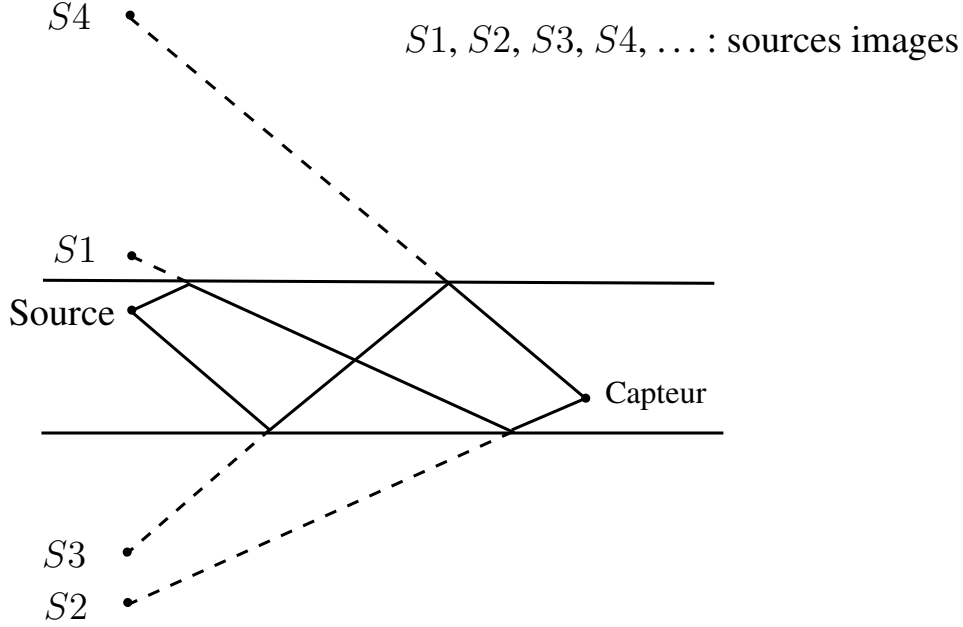


FIGURE 1.4 – Sources images correspondant aux réflexions dans un guide aux parois parfaitement réfléchissantes.

1.6 Approximation de Kirchhoff

Cette méthode suppose qu'en un point de la surface irrégulière les valeurs de la pression et de son gradient peuvent être approchées par celles qui existeraient si la paroi était localement remplacée par un plan tangent de dimensions infinies [6, 9] (Figure 1.5). Elle fournit une expression approchée de la solution de l'équation de Helmholtz. Cette méthode est valable en hautes fréquences ($ka_{lc} > 1.9$ où k est le nombre d'onde et a_{lc} est la longueur de corrélation de la surface rugueuse à étudier) [10]. J.J. Embrechts [6] a démontré l'équivalence entre la méthode des rayons sonores et l'approximation de Kirchhoff.

K. Lee et al [11] utilisent également cette méthode pour exprimer le champ diffus généré par un volume polygonal possédant en surface une admittance homogène.

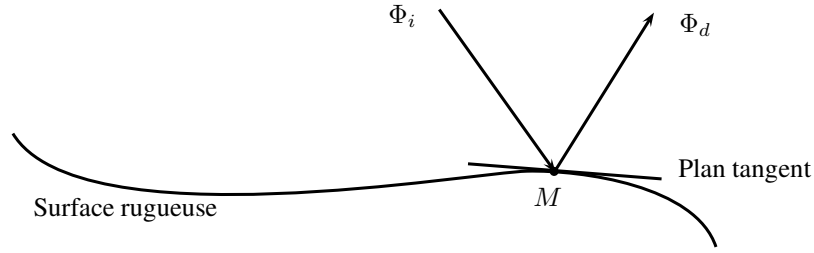


FIGURE 1.5 – Approximation de Kirchhoff

E. I. Thorsos [12] a cherché le domaine de validité de cette méthode en comparant les résultats avec ceux obtenus par résolution de l'équation intégrale pour une surface rugueuse. Ses résultats confirment que cette méthode est valable en hautes fréquences et pour des rugosités de faibles dimensions.

1.7 Approximation de Born

L'approximation de Born repose d'un point de vue mathématique sur la méthode de Picard [13,14]. L'équation intégrale (1.5) est transformée en une série récurrente de terme général Φ_m donné par l'équation (1.7). Le potentiel des vitesses recherché est obtenu de manière itérative en faisant tendre la variable d'itération vers l'infini comme le montre l'équation (1.8). Cette méthode itérative nécessite un temps de calcul important. L'ordre 2 permet d'avoir une bonne approximation du champ de pression acoustique pour des fréquences sismiques [10] en géophysique.

Le premier ordre de cette série signifie que l'onde réfléchie diffusée diffère peu de l'onde spéculaire. Ceci est obtenu quand la surface diffusante présente un faible relief.

$$K(\vec{r})\Phi_m(\vec{r}) = \Phi_{inc}^{pl}(\vec{r}) - \iint_S \Phi_{m-1}(\vec{r}_0) \frac{\partial G(\vec{r}_0, \vec{r})}{\partial n} dS$$

(1.7)

tel que $\Phi_0(\vec{r}) = \Phi_{inc}^{pl}(\vec{r}), m \in \mathbb{N}$

$$\Phi = \lim_{m \rightarrow \infty} \Phi_m(\vec{r}) \quad (1.8)$$

R. Huang et al [15] ont appliqué cette approximation pour étudier la diffusion des ondes

acoustiques dans les solides.

S. Hu [10] l'a utilisé en géophysique pour étudier la diffusion des ondes acoustiques par la surface de la terre. Cette étude a montré que l'approximation de Born est plus précise en moyennes fréquences ($1.9 < ka_{lc} < 6.5$ où k est le nombre d'onde et a_{lc} est la longueur de corrélation de la surface rugueuse à étudier).

1.8 Méthode de perturbation et "Homotopy perturbation method"

Cette méthode a été beaucoup utilisée pour étudier la diffusion des ondes acoustiques sur la surface de la mer [16–18]. Elle suppose que les variations du relief de la surface rugueuse sont faible par rapport à la longueur d'onde λ (voir figure 1.6). Cette technique consiste à séparer le champ acoustique en deux parties : une partie stable et une partie perturbé considérée comme une correction ($\frac{z(x_0, y_0)}{\lambda} \rightarrow 0$). Ainsi on exprime les solutions du problème par un développement limité en $\frac{z(x_0, y_0)}{\lambda}$.

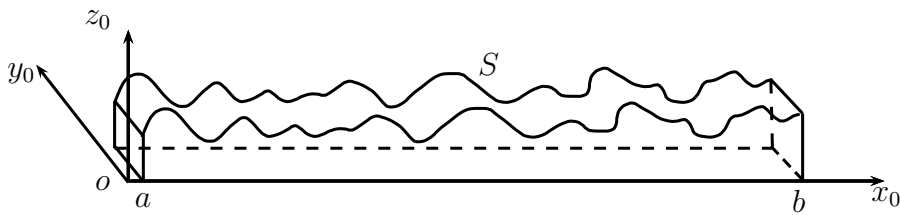


FIGURE 1.6 – Variation de la hauteur z_0 de la surface rugueuse

Une nouvelle technique de perturbation (Homotopy Perturbation Method) [10, 19] a été proposée. D'un point de vue mathématique, cette méthode utilise les séries de Neumann [9]. L'équation intégrale (1.5) est transformée, comme pour l'approximation de Born, en une série de fonctions. Pour illustrer brièvement cette méthode, considérons le cas d'une surface rugueuse définie par une variation de sa composante normale z_0 dans

un repère orthonormé (O, x_0, y_0, z_0) . Soit :

$$z_0 = \zeta h(x_0, y_0) \quad (1.9)$$

Où $\zeta \in [0, 1]$ est un paramètre d'homotopie. L'équation précédente permet de définir la dérivée par rapport à la variable z_0 par :

$$\frac{\partial}{\partial z_0} = \zeta \left(h_{x_0} \frac{\partial}{\partial x_0} + h_{y_0} \frac{\partial}{\partial y_0} \right) \quad (1.10)$$

Où h_{x_0} et h_{y_0} sont les dérivées partielles de $h(x_0, y_0)$ par rapport aux variables x_0 et y_0 respectivement.

Cette définition de la dérivée par rapport à la variable z_0 permet d'écrire le champ acoustique total sous la forme :

$$K(\vec{r})\Phi(\vec{r}) = \Phi_{inc}^{pl}(\vec{r}) - \zeta \int_S \Phi(\vec{r}_0) g(\vec{r}_0, \vec{r}, \zeta) dS \quad (1.11)$$

Avec :

$$g(\vec{r}_0, \vec{r}, \zeta) = \left(h_{x_0} \frac{\partial}{\partial x_0} + h_{y_0} \frac{\partial}{\partial y_0} \right) G(\vec{r}_0, \vec{r}) \quad (1.12)$$

L'équation (1.11) est une équation intégrale de Fredholm qui s'écrit, en se limitant à un problème à deux dimensions, sous cette forme :

$$K(\vec{r})\Phi(\vec{r}) = \Phi_{inc}^{pl}(\vec{r}) - \zeta \int_a^b \Phi(x_0) g(x_0, \vec{r}, \zeta) dx_0 \quad (1.13)$$

Où $a, b \in \mathbb{R}$ définissent les limites de la surface.

L'équation (1.13) est résolue en utilisant les séries de Neumann. Soient :

$$\begin{aligned}
K(\vec{r})\Phi_0(\vec{r}) &= \Phi_{inc}^{pl}(\vec{r}) \\
K(\vec{r})\Phi_1(\vec{r}) &= \Phi_{inc}^{pl}(\vec{r}) + \zeta \int_a^b \Phi_{inc}^{pl}(x_1)g(x_1, \vec{r}, \zeta)dx_1 \\
K(\vec{r})\Phi_2(\vec{r}) &= \Phi_{inc}^{pl}(\vec{r}) - \zeta \int_a^b \Phi_{inc}^{pl}(x_1)g(x_1, \vec{r}, \zeta)dx_1 \\
&\quad + \zeta^2 \iint_{[a,b]^2} \Phi_{inc}^{pl}(x_2)g(x_1, \vec{r}, \zeta)g(x_2, \vec{r}, \zeta)dx_1dx_2 \\
K(\vec{r})\Phi_n(\vec{r}) &= \sum_{i=0}^n (-\zeta)^i u_i(x) \quad \text{tels que} \\
u_0(\vec{r}) &= \Phi_{inc}^{pl}(\vec{r}) \\
u_1(\vec{r}) &= -\zeta \int_a^b \Phi_{inc}^{pl}(x_1)g(x_1, \vec{r}, \zeta)dx_1 \\
u_2(\vec{r}) &= \zeta^2 \iint_{[a,b]^2} \Phi_{inc}^{pl}(x_2)g(x_1, \vec{r}, \zeta)g(x_2, \vec{r}, \zeta)dx_1dx_2 \\
u_n(\vec{r}) &= (-\zeta)^n \int \dots \int_{[a,b]^n} g(x_1, \vec{r}, \zeta)g(x_2, \vec{r}, \zeta) \dots g(x_n, \vec{r}, \zeta) \Phi_{inc}^{pl}(x_n)dx_1dx_2 \dots dx_n
\end{aligned}$$

Où les variables x_n sont des variables muettes d'intégration. La solution de la série de Neumann est alors :

$$\Phi(\vec{r}) = \lim_{\zeta \rightarrow 1} \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_n(\vec{r}) = \lim_{\zeta \rightarrow 1} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n (-\zeta)^i u_i(\vec{r}) \quad (1.14)$$

Le potentiel des vitesses Φ du champ total au dessus de la paroi est déterminé de façon rapide. Cependant, la méthode s'applique dans un domaine fréquentiel restreint : en basses fréquences ($ka_{lc} < 1.9$ où k est le nombre d'onde et a_{lc} est la longueur de corrélation de la surface rugueuse à étudier) [10].

1.9 Méthode englobant l'approximation de Kirchhoff, de Born, et la méthode de perturbation

Cette méthode a été utilisée par S. Hu et al [10] en géophysique pour l'étude de la diffusion de l'onde acoustique par la surface de la terre. Cette méthode est relativement lourde

puisqu'elle nécessite l'utilisation simultanée des trois approches. Cela dit, elle couvre un domaine fréquentiel de validité assez large ($\mathcal{D}(\text{Perturbation}) \cup \mathcal{D}(\text{Born}) \cup \mathcal{D}(\text{Kirchhoff})$ où $\mathcal{D}$ fait référence au domaine de validité respectif de chaque méthode) mais la complexité des trois approches est assez rédhibitoire.

1.10 Méthode d'homogénéisation des milieux périodiques

Cette méthode a été beaucoup utilisée pour étudier les caractéristiques mécaniques des matériaux composites [20,21], particulièrement dans le cas des milieux dont la micro-structure est périodique, constituée d'une cellule élémentaire. Celle-ci est agrandie par une homothétie de rapport ϵ^{-1} et notée Θ . ϵ désigne un paramètre d'homothétie permettant de passer de l'échelle macroscopique à l'échelle de la cellule élémentaire. On considère que les hétérogénéités du milieu sont réparties périodiquement (la période est notée Y), et que leurs tailles sont très petites devant la taille de la structure. On est donc en présence de deux échelles de grandeurs respectivement associées à la taille H de la structure et de la période de base Y (voir figure 1.7) :

- l'échelle macroscopique liée à la grandeur H , pour laquelle la taille des hétérogénéités est petite. Le repère qui lui est associé est (O, x) .
- l'échelle microscopique liée à la grandeur Y est définie par l'intermédiaire d'une dilatation de rapport $\epsilon = \frac{L}{H} \ll 1$ (L est la plus grande dimension de la cellule de base). Par rapport à cette échelle la taille des hétérogénéités est de l'ordre de l'unité. Le repère qui lui est associé est (O, y) .

Si le rapport ϵ est très petit par rapport à 1, le nombre d'hétérogénéités au sein de la structure est très grand et leur taille est très petite devant la taille de la structure. Pour supprimer ce problème du grand nombre d'hétérogénéités réparties au sein de la structure, on cherche à associer à la structure un milieu homogène de comportement acoustique équivalent. Pour ce faire on montre que lorsque $\epsilon \rightarrow 0$, la solution du problème

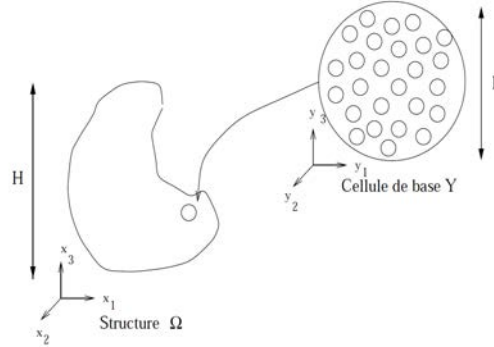


FIGURE 1.7 – Méthode d'homogénéisation des milieux périodiques

tend vers la solution du problème macroscopique.

Toutes les variables du problème acoustique (champ de pression, champ de vitesse), notées formellement $\phi(x)$ sont alors supposées dépendre séparément des variables x et y et vérifier des conditions de Y -périodicité par rapport à y , soit :

$$\phi(x) = \tilde{\phi}(x, y) = \tilde{\phi}(x, y + \mathbb{A}Y), \quad \forall \mathbb{A} \in \mathbb{Z}^{dim \times dim} \text{ diagonale} \quad (1.15)$$

Où $\mathbb{A}$ est une matrice diagonale telle que $x = \epsilon(y + \mathbb{A}Y)$, dim est la dimension du problème. La différentiation d'une variable s'exprimera alors :

$$\frac{\partial}{\partial x} \phi(x) = \frac{\partial}{\partial x} \tilde{\phi}(x, y) + \epsilon^{-1} \frac{\partial}{\partial y} \tilde{\phi}(x, y) \quad (1.16)$$

Cette approche est donc une véritable stratégie de calcul à deux échelles puisqu'elle permet non seulement de formuler un problème à l'échelle macroscopique mais aussi de remonter aux propriétés locales de la solution. Cependant, la théorie de l'homogénéisation repose sur des hypothèses fortes : la périodicité et un rapport d'échelle très grand. De plus, la structure ne peut être homogénéisée au niveau des frontières.

1.11 Méthode des guides d'ondes

La méthode des guides d'ondes a été utilisée par A. de Bruijn [22] pour étudier le problème de diffusion des ondes planes par des parois périodiques. L'élément de base est

une rainure. Elle a été généralisée par la suite à des réseaux de cavités rectangulaires périodiques par L. Bos [3]. J. J. Embrechts [23] utilise cette méthode pour déterminer le coefficient de diffusion des parois périodiques. La méthode consiste à exprimer le champ réfléchi par la structure sous forme modale (série de Fourier). Pour illustrer cette méthode, le cas d'un réseau périodique de cavités rectangulaires a été considéré. On suppose que les cavités sont de taille $(2a \times 2b \times d) \text{ cm}^3$. Le réseau est insonifié par une onde plane (pl) acoustique incidente (inc) Φ_{inc}^{pl} . Les champs à l'intérieur des cavités Φ_w^i s'expriment sous forme d'une onde guidée dans un conduit rectangulaire. Le champ réfléchi au dessus de la structure Φ_r , englobant la partie spéculaire et la partie diffuse, s'exprime sous forme modale. Ces propos sont illustrés dans la figure 1.8. Les expressions des différents champs mis en jeu sont données par les équations (1.17)-(1.19).

$$\Phi_{inc}^{pl} = Ae^{j(k_x x + k_y y + k_z z)} \quad (1.17)$$

$$\Phi_w^i = \sum_{p \geq 0} \sum_{q \geq 0} \cos\left(\frac{p\pi}{2}(\xi_i + 1)\right) \cos\left(\frac{q\pi}{2}(\eta_i + 1)\right) [E_{pq}^i e^{-\kappa_{pq} z} + F_{pq}^i e^{\kappa_{pq} z}]$$

$$\forall p, q \in \mathbb{N}, |\xi_i|, |\eta_i| < 1, -d \leq z \leq 0 \quad (1.18)$$

$$\Phi_r = \sum_{r,s=-\infty}^{+\infty} R_{rs} e^{j(\alpha_r x + \beta_s y + \gamma_{rs} z)}, \quad \forall r, s \in \mathbb{Z} \quad (1.19)$$

$$\xi_i = \frac{x_i}{a}, \quad \eta_i = \frac{y_i}{b}, \quad \vec{k} = \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \\ k_z \end{pmatrix} : \text{vecteur d'onde incidente} \quad (1.20)$$

$$\kappa_{pq} = \sqrt{\left(\frac{p\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{q\pi}{b}\right)^2 - k^2} \quad (1.21)$$

$$\alpha_r = k_x + \frac{2\pi}{L_x} r \quad (1.22)$$

$$\beta_s = k_y + \frac{2\pi}{L_y} s \quad (1.23)$$

$$\gamma_{rs} = \sqrt{\alpha_r^2 + \beta_s^2 - k^2} \quad (1.24)$$

Si N est le nombre de cavité considéré, alors $3N$ conditions aux limites (continuité de vitesse, continuité de pression et une condition au limite mixte au fond de chaque cavité) seront appliquées afin de déterminer les amplitudes inconnues E_{pq}^i , F_{pq}^i et R_{rs} .

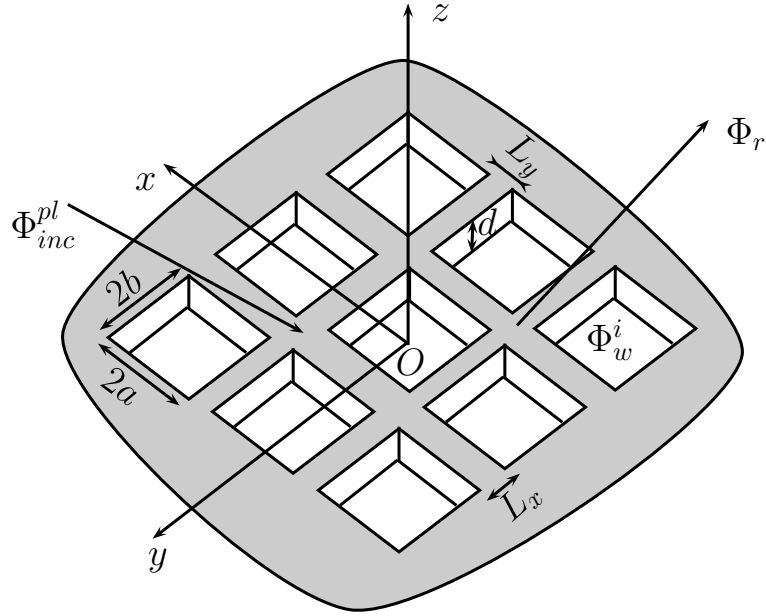


FIGURE 1.8 – Modèle des guides d’ondes

Ce modèle très intéressant couvre un large domaine fréquentiel mais demande un temps de calcul important, d’autant plus que la fréquence augmente, dès que l’on superpose plusieurs guides d’ondes et il ne concerne que les réseaux périodiques.

1.12 Méthode Holford

R. L. Holford [24] a proposé une méthode pour étudier la diffusion des ondes acoustiques par des surfaces périodiques. Cette technique consiste à représenter le champ acoustique réfléchi au-dessus des surfaces périodiques par une somme infinie d’ondes planes.

J. J. Embrechts et al. [25] ont comparé les différents coefficients de diffusion obtenus avec cette méthode, l’approximation de Kirchhoff, la méthode des éléments de frontière, la méthode des éléments finis avec ceux obtenus expérimentalement en chambre reverbérante [26].

Cette méthode est donc limitée aux cas des réseaux périodiques comme celle des guides d’ondes.

1.13 Méthode de Wiener-Hopf

La méthode de Wiener-Hopf n'est pas une méthode d'approximation car elle aboutit à une expression exacte de la solution. Toutefois, l'expression obtenue n'est pas facilement exploitable analytiquement : on utilise généralement la méthode de la phase stationnaire (méthode du point col) pour en déduire un comportement asymptotique. Elle repose d'un point de vue mathématique sur l'utilisation de transformations de Fourier partielles. Elle est particulièrement adaptée aux problèmes de propagation avec conditions aux limites discontinues. En effet, S. Koshikawa et al. [27] et K. Kobayashi et al. [28] utilisent cette méthode pour étudier le problème de diffraction des ondes électromagnétiques par des guides d'ondes rectangulaires fermés au fond. En acoustique, cette technique a été utilisée par B. Erbaş [29] afin d'étudier la diffraction des ondes acoustiques par un réseau de fentes rectangulaires. La démarche mathématique est complexe. C'est la raison pour laquelle elle ne sera pas détaillée dans ce rapport.

1.14 Méthode de H. H. Park

Cette technique consiste à exprimer le champ diffracté sous forme d'une série trigonométrique à partir des modes propres du guide d'onde et des conditions aux limites. Les inconnues dans ce modèle sont les amplitudes modales de l'onde guidée à l'intérieur du guide considéré. Cette technique a été initialement développée en électromagnétisme pour étudier la diffraction des ondes électromagnétiques par une rainure [30] et par une fente rectangulaire dans un écran conducteur épais (cas d'une fente rectangulaire épaisse) [31,32]. H. H. Park et al. [33] utilisent cette technique pour résoudre le problème de diffraction des ondes acoustiques par une fente placée également dans un écran épais. Cette méthode a été aussi utilisée par J. S. Seo et al. [34] pour étudier la diffusion des ondes acoustiques par deux ouvertures circulaires dans un plan rigide à épaisseur non

négligeable, et par H. H. Park et al. [35] pour étudier la diffusion des ondes électromagnétiques par un réseau de fentes rectangulaires dans un écran épais conducteur. Cette technique semble être une bonne méthode permettant de résoudre notre problème de diffusion des ondes acoustiques par des réseaux de cavités rectangulaires.

1.15 La méthode Kobayashi Potential (KP)

La méthode Kobayashi Potential (notée KP) est une méthode analytique développée par Iwao Kobayashi en 1931 pour déterminer le champ électromagnétique des disques circulaires. 35 ans plus tard, cette méthode a été nommée par I. N. Sneddon [36] Kobayashi Potential.

Cette méthode consiste à utiliser deux conditions aux limites :

- une condition aux limites mixte (prise en compte de l'admittance) sur les bords d'une fente,
- une vitesse acoustique non nulle au niveau de la fente.

Ceci permet d'avoir un système de deux équations intégrales qui se résout en utilisant les intégrales de Weber-Schafheitlin. Cette résolution permet d'exprimer le champ diffracté sous une forme modale. Les amplitudes modales seront déterminées ensuite en appliquant d'autres conditions aux limites (continuité de pression et de vitesse acoustique au niveau de la fente).

De nombreux travaux en électromagnétisme ont été effectués à l'aide de la méthode KP pour résoudre les problèmes de diffusion des ondes électromagnétiques. Par exemple, A. Imran et al [37] l'ont utilisée pour résoudre les problèmes de diffraction des ondes électromagnétiques planes par une facette rectangulaire possédant une admittance homogène.

K. Hongo et al [38] ont appliqué cette méthode pour étudier la diffraction des ondes

1.15 La méthode Kobayashi Potential (KP)

électromagnétiques par des disques parfaitement réfléchissants, ou des disques creux. Les résultats obtenus ont montré un bon accord avec les résultats expérimentaux.

A. Imran et al [39] l'ont exploitée pour exprimer le champ diffus des ondes électromagnétiques par une facette conductrice infiniment longue. Un bon accord est obtenu entre les résultats issus de la méthode KP et ceux utilisant la méthode des sources images.

A. Imran et al [40] et T. Otsuki [41] ont caractérisé la diffusion par deux fentes parallèles dans un plan infiniment long possédant une admittance homogène non nulle, tout en tenant compte des phénomènes de couplage qui existent entre les deux fentes.

Certains auteurs [42–45] ont utilisé la méthode KP pour étudier les phénomènes de diffraction des ondes électromagnétiques sur des facettes rectangulaires conductrices et des fentes rectangulaires dans des écrans conducteurs.

Cette technique a été utilisée par H. Serizawa et al. [46] pour étudier le rayonnement électromagnétique d'un guide d'onde rectangulaire. K. Hongo et al. [47, 48] ont généralisé la méthode KP au cas d'un réseau de N fentes et un réseau de N facettes parallèles, respectivement. Le couplage entre les différentes fentes et facettes a été également pris en compte.

K. Hongo et al [49] ont résolu le problème de diffraction acoustique des fentes rectangulaires dans un écran rigide infini à épaisseur négligeable avec la méthode KP. Les résultats théoriques ont été comparés avec ceux obtenus par la méthode de Kirchhoff et ont montré un bon accord. H. Serizawa et al [50] l'ont adaptée également pour résoudre les problèmes de diffusion des fentes de formes rectangulaires ou cylindriques à épaisseur non négligeable en acoustique.

1.16 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté quelques méthodes permettant de résoudre le problème de diffusion des ondes acoustiques par des surfaces à reliefs. Il existe dans la littérature scientifique d'autres méthodes comme celle de Rayleigh [51], les éléments de frontière [52], les éléments finis [53],... que nous n'avons pas présentées ici.

La méthode des rayons sonores, la méthode des sources images, l'approximation de Kirchhoff, l'approximation de Born et la méthode de perturbation présentent des limitations fréquentielles et ne tiennent pas compte des phénomènes de diffraction dus à une variation brusque dans la géométrie de la surface : les arêtes. La méthode des guides d'ondes et la méthode Holford sont plutôt adaptées à des surfaces périodiques. La méthode de H. H. Park et la méthode Kobayashi Potential (KP) sont de bonnes techniques pour résoudre le problème de diffraction des ondes acoustiques par des réseaux de cavités périodique/apériodique rectangulaires. La méthode KP utilise les propriétés de discontinuités des intégrales de Weber-Schafheitlin [54] pour exprimer le champ diffus réfléchi. Cette méthode est dédiée aux géométries telles que des facettes et des ouvertures circulaires ou rectangulaires. Elle correspond donc aux géométries qu'on cherche à étudier qui sont des cavités rectangulaires. Cette méthode a donc été retenue et adaptée au cas d'une cavité rectangulaire dans un écran infiniment rigide puis par juxtaposition, au cas de réseaux contenant plusieurs cavités rectangulaires parallèles et non parallèles. Le modèle ainsi adapté est détaillé dans le chapitre suivant.

2

Adaptation de la méthode Kobayashi Potential aux cas des réseaux contenant des cavités rectangulaires

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, une adaptation de la méthode KP développée à l'origine pour des fentes épaisses a été effectuée pour pouvoir étudier les phénomènes de diffraction acoustique engendrés par des cavités. Le but est d'étudier le champ acoustique réfléchi au dessus d'une cavité rectangulaire, celle-ci étant souvent présente dans le relief des parois qui délimitent les locaux industriels mais aussi dans celui de l'encombrement. La cavité peut alors être considérée comme la forme géométrique élémentaire qu'il est néces-

saire d'étudier en termes de comportement acoustique diffusant. Pour étudier la réflexion acoustique au dessus d'un relief plus complexe, la technique de juxtaposition de plusieurs cavités (plusieurs éléments) pourra alors être utilisée.

L'adaptation de la méthode KP à la géométrie d'une cavité a été effectuée en deux étapes. La première a consisté à obstruer le fond de la fente par un matériau pour définir une cavité élémentaire et ainsi à étudier le champ de pression acoustique au-dessus. La deuxième étape est une généralisation du modèle ainsi développé pour une cavité au cas d'un réseau périodique/apériodique formé de plusieurs cavités rectangulaires de différentes tailles et espacements.

2.2 Développement du modèle dans le cas d'une cavité dans un écran infiniment rigide

On considère un matériau plan infiniment rigide d'épaisseur d non négligeable qui possède une cavité de forme rectangulaire de dimensions $2a$ et $2b$, respectivement selon les directions (Ox) et (Oy) , obstruée par un matériau d'admittance η_{ad} . Les bords de la cavité sont infiniment rigides (le cas des bords qui présentent une admittance non nulle sera abordé dans la section §2.4).

Soit Φ_{inc}^{pl} une onde acoustique plane insonifiant le matériau contenant la cavité élémentaire. Ce dernier réfléchit spéculairement l'onde incidente en dehors de la zone définie par la cavité, donnant lieu à un champ acoustique réfléchi Φ_r . Quant à la cavité, elle donne naissance à deux champs : Φ_d pour $z \geq 0$, qui représente le champ diffracté créé par l'irrégularité géométrique, et Φ_w pour $z \leq 0$ qui correspond à une onde acoustique guidée dans un conduit rectangulaire.

On se propose d'exprimer chaque champ acoustique mis en jeu dans le phénomène de propagation. Le facteur temporel est par convention considéré égal à $e^{j\omega t}$.

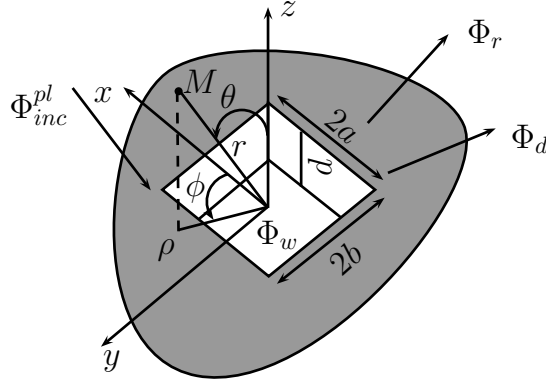


FIGURE 2.1 – Différents champs acoustiques mis en jeu dans le cas d'une cavité rectangulaire

2.2.1 Expression des différents champs mis en jeu

Le champ acoustique incident Φ_{inc}^{pl} (respectivement le champ réfléchi spéculaire Φ_r autour de la cavité sur les bords plans infiniment rigides) s'écrit sous la forme d'une onde plane monochromatique se propageant vers les $z < 0$ (respectivement vers les $z > 0$) représenté par l'équation (2.1) (respectivement (2.2)). Quant au champ à l'intérieur de la cavité, il s'écrit sous forme d'une onde guidée dans un conduit rectangulaire représentée par l'équation (2.3) [49, 50].

$$\Phi_{inc}^{pl}(\xi, \eta, z) = Ae^{jk_x a \xi} e^{jk_y b \eta} e^{jk_z z} \quad (2.1)$$

$$\Phi_r(\xi, \eta, z) = Ae^{jk_x a \xi} e^{jk_y b \eta} e^{-jk_z z} \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} \Phi_w(\xi, \eta, z) &= \sum_{p \geq 0} \sum_{q \geq 0} \cos\left(\frac{p\pi}{2}(\xi + 1)\right) \cos\left(\frac{q\pi}{2}(\eta + 1)\right) \\ &\times [E_{pq} e^{-\kappa_{pq} z} + F_{pq} e^{\kappa_{pq} z}], \quad |\xi|, |\eta| < 1, -d \leq z \leq 0, p, q \in \mathbb{N} \end{aligned} \quad (2.3)$$

Où $\vec{k}$ est le vecteur d'onde incident défini par l'équation (2.4). ξ et η représentent les coordonnées normalisées par rapport aux dimensions de la cavité selon l'axe (Ox) et l'axe (Oy) respectivement comme le montrent les équations (2.5) et (2.6). κ_{pq} est le nombre d'onde modal selon la direction (Oz) défini par l'équation (2.7). A est l'amplitude du champ acoustique incident Φ_{inc}^{pl} . E_{pq} et F_{pq} sont les amplitudes modales du champ à

l'intérieur de la cavité Φ_w .

$$\vec{k} = \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \\ k_z \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

$$\xi = \frac{x}{a} \quad (2.5)$$

$$\eta = \frac{y}{b} \quad (2.6)$$

$$\kappa_{pq} = \sqrt{\left(\frac{p\pi}{2a}\right)^2 + \left(\frac{q\pi}{2b}\right)^2 - k^2} \quad (2.7)$$

2.2.1.1 Détermination de l'expression du champ diffracté Φ_d

H. Serizawa et al. et K. Hongo et al. [49,50] ont cherché d'abord l'expression du champ diffracté transmis par une fente en utilisant les propriétés de discontinuité des intégrales de Weber-Schafheitlin pour en déduire l'expression du champ diffracté réfléchi. Dans ce paragraphe, nous allons utiliser les propriétés de discontinuité des intégrales de Weber-Schafheitlin pour déterminer directement l'expression du champ diffracté réfléchi par une cavité.

L'expression mathématique du champ diffracté Φ_d doit vérifier l'équation de propagation (2.8) et les conditions aux limites imposées par les paramètres acoustiques et géométriques de la structure (2.9)-(2.12).

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2\right)\Phi_d = 0, \quad \forall x, \forall y, z \geq 0 \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial}{\partial z}(\Phi_{inc}^{pl} + \Phi_r + \Phi_d) = \frac{\partial \Phi_d}{\partial z} = 0, \quad (x, y) \in D^c, z = 0 \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial}{\partial z}(\Phi_{inc}^{pl} + \Phi_r + \Phi_d) = \frac{\partial \Phi_d}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\Phi_w, \quad (x, y) \in D, z = 0 \quad (2.10)$$

$$\Phi_{inc}^{pl} + \Phi_r + \Phi_d = \Phi_w, \quad (x, y) \in D, z = 0 \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial \Phi_w}{\partial z} - jk\eta_{ad}\Phi_w = 0, \quad (x, y) \in D, z = -d \quad (2.12)$$

2.2 Développement du modèle dans le cas d'une cavité dans un écran infiniment rigide

Avec $D = \{(x, y) / |x| < a, |y| < b\} \subset \mathbb{R}^2$ est le domaine de la cavité et D^c son complémentaire. L'expression du champ acoustique total au dessus de la paroi, Φ , englobe le champ incident Φ_{inc}^{pl} , le champ réfléchi spéculaire Φ_r et le champ diffracté Φ_d .

$$\Phi(\xi, \eta, z) = \Phi_{inc}^{pl}(\xi, \eta, z) + \Phi_r(\xi, \eta, z) + \Phi_d(\xi, \eta, z), \forall \xi, \forall \eta, z \geq 0 \quad (2.13)$$

Le champ diffracté Φ_d vérifie l'équation de propagation (2.8) qui peut s'écrire en fonction des coordonnées normalisées ξ et η , données par les équations (2.5) et (2.6) :

$$\left(\frac{1}{a^2} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{1}{b^2} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2\right) \Phi_d = 0, \forall \xi, \forall \eta, z \geq 0 \quad (2.14)$$

Une transformée de Fourier bidimensionnelle selon les variables ξ et η (équation (2.15)) permet d'écrire l'équation de propagation sous la forme (2.16), qui possède une solution élémentaire de la forme (2.17).

$$\tilde{\Phi}_d = \iint_{\mathbb{R}^2} \Phi_d e^{-j\alpha\xi} e^{-j\beta\eta} d\xi d\eta \quad (2.15)$$

$$\left(-\frac{\alpha^2}{a^2} - \frac{\beta^2}{b^2} + k^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) \tilde{\Phi}_d = 0 \quad (2.16)$$

$$\tilde{\Phi}_d^{elt} = f(\alpha, \beta) e^{-\sqrt{\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} - k^2} z} \quad (2.17)$$

Où $f(\alpha, \beta)$ est une fonction qui dépend des deux variables muettes α et β . Cette fonction $f(\alpha, \beta)$ est inconnue et on cherche à la déterminer à partir des conditions aux limites.

Cette solution élémentaire de l'équation de propagation peut s'écrire alors sous la forme d'une double transformée de Fourier inverse (2.18). En utilisant la décomposition sous forme trigonométrique des fonctions exponentielles contenant les termes ξ et η , l'expression (2.18) peut être réécrite sous la forme (2.19).

$$\Phi_d^{elt}(\xi, \eta, z) = \iint_{\mathbb{R}^2} f(\alpha, \beta) e^{-\sqrt{\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} - k^2} z} e^{j\alpha\xi} e^{j\beta\eta} d\alpha d\beta, \forall \xi, \forall \eta, z \geq 0 \quad (2.18)$$

$$= \Phi_{cc}(\xi, \eta, z) + \Phi_{cs}(\xi, \eta, z) + \Phi_{sc}(\xi, \eta, z) + \Phi_{ss}(\xi, \eta, z) \quad (2.19)$$

Où :

$$\Phi_{cc}(\xi, \eta, z) = \iint_{\mathbb{R}_+^2} f_{cc}(\alpha, \beta) \cos(\alpha\xi) \cos(\beta\eta) e^{-\sqrt{\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} - k^2} z} d\alpha d\beta \quad (2.20)$$

$$\Phi_{cs}(\xi, \eta, z) = \iint_{\mathbb{R}_+^2} f_{cs}(\alpha, \beta) \cos(\alpha\xi) \sin(\beta\eta) e^{-\sqrt{\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} - k^2} z} d\alpha d\beta \quad (2.21)$$

$$\Phi_{sc}(\xi, \eta, z) = \iint_{\mathbb{R}_+^2} f_{sc}(\alpha, \beta) \sin(\alpha\xi) \cos(\beta\eta) e^{-\sqrt{\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} - k^2} z} d\alpha d\beta \quad (2.22)$$

$$\Phi_{ss}(\xi, \eta, z) = \iint_{\mathbb{R}_+^2} f_{ss}(\alpha, \beta) \sin(\alpha\xi) \sin(\beta\eta) e^{-\sqrt{\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} - k^2} z} d\alpha d\beta \quad (2.23)$$

Les fonctions f_{cc} , f_{cs} , f_{sc} , f_{ss} sont inconnues et à déterminer à partir des conditions aux limites. Les indices cc , cs , sc et ss signifient que l'on a un produit de deux fonctions trigonométriques (c si on a un cosinus et s si on a un sinus). Le premier indice signifie qu'on a une fonction trigonométrique qui dépend de ξ et le deuxième signifie qu'on a une fonction trigonométrique qui dépend de η .

La condition aux limites (2.9) définissant une vitesse acoustique nulle sur les bords de la cavité et l'équation (2.18) permettent d'écrire :

$$\begin{aligned} & \iint_{\mathbb{R}_+^2} (f_{cc}(\alpha, \beta) \cos(\alpha\xi) \cos(\beta\eta) + f_{cs}(\alpha, \beta) \cos(\alpha\xi) \sin(\beta\eta) + f_{sc}(\alpha, \beta) \sin(\alpha\xi) \cos(\beta\eta) \\ & + f_{ss}(\alpha, \beta) \sin(\alpha\xi) \sin(\beta\eta)) \sqrt{\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} - k^2} d\alpha d\beta = 0, (x, y) \in D^c, z = 0 \end{aligned} \quad (2.24)$$

Les équations (2.24) et (2.10) forment un système de deux equations intégrales qui se résout en utilisant les intégrales de Weber-Schafheitlin (2.25) et (2.26) [54,55] (voir annexe §A.1) :

$$\int_0^\infty \frac{J_{2n+\sigma}(t)}{t^\sigma} \cos(xt) dt = \begin{cases} 0 & (|x| > 1) \\ \frac{(-1)^n \Gamma(\sigma) \Gamma(2n+1)}{2^{1-\sigma} \Gamma(2n+2\sigma)} (1-x^2)^{\sigma-\frac{1}{2}} C_{2n}^{(\sigma)}(x), & (|x| < 1, n \in \mathbb{N}) \end{cases} \quad (2.25)$$

$$\int_0^\infty \frac{J_{2n+1+\sigma}(t)}{t^\sigma} \sin(xt) dt = \begin{cases} 0 & (|x| > 1) \\ \frac{(-1)^n \Gamma(\sigma) \Gamma(2n+2)}{2^{1-\sigma} \Gamma(2n+2\sigma+1)} (1-x^2)^{\sigma-\frac{1}{2}} C_{2n+1}^{(\sigma)}(x), & (|x| < 1, n \in \mathbb{N}) \end{cases} \quad (2.26)$$

2.2 Développement du modèle dans le cas d'une cavité dans un écran infiniment rigide

Où $C_n^{(\sigma)}(x)$ est un polynôme de Gegenbauer. $J_n(x)$ est la fonction de Bessel de première espèce d'ordre n . Et $\Gamma(n)$ est la fonction Gamma d'Euler.

Les fonctions f_{cc} , f_{cs} , f_{sc} et f_{ss} sont données par :

$$f_{cc}^{(m,n)}(\alpha, \beta) = A_{mn} \frac{J_{2m+\sigma}(\alpha) J_{2n+\tau}(\beta)}{\alpha^\sigma \beta^\tau \sqrt{\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} - k^2}} \quad (2.27)$$

$$f_{cs}^{(m,n)}(\alpha, \beta) = B_{mn} \frac{J_{2m+\sigma}(\alpha) J_{2n+1+\tau}(\beta)}{\alpha^\sigma \beta^\tau \sqrt{\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} - k^2}} \quad (2.28)$$

$$f_{sc}^{(m,n)}(\alpha, \beta) = C_{mn} \frac{J_{2m+1+\sigma}(\alpha) J_{2n+\tau}(\beta)}{\alpha^\sigma \beta^\tau \sqrt{\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} - k^2}} \quad (2.29)$$

$$f_{ss}^{(m,n)}(\alpha, \beta) = D_{mn} \frac{J_{2m+1+\sigma}(\alpha) J_{2n+1+\tau}(\beta)}{\alpha^\sigma \beta^\tau \sqrt{\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} - k^2}} \quad (2.30)$$

Par la suite :

$$\Phi_{cc}^{(m,n)}(\alpha, \beta) = A_{mn} \frac{J_{2m+\sigma}(\alpha) J_{2n+\tau}(\beta)}{\alpha^\sigma \beta^\tau \sqrt{\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} - k^2}} \cos(\alpha\xi) \cos(\beta\eta) \quad (2.31)$$

$$\Phi_{cs}^{(m,n)}(\alpha, \beta) = B_{mn} \frac{J_{2m+\sigma}(\alpha) J_{2n+1+\tau}(\beta)}{\alpha^\sigma \beta^\tau \sqrt{\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} - k^2}} \cos(\alpha\xi) \sin(\beta\eta) \quad (2.32)$$

$$\Phi_{sc}^{(m,n)}(\alpha, \beta) = C_{mn} \frac{J_{2m+1+\sigma}(\alpha) J_{2n+\tau}(\beta)}{\alpha^\sigma \beta^\tau \sqrt{\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} - k^2}} \sin(\alpha\xi) \cos(\beta\eta) \quad (2.33)$$

$$\Phi_{ss}^{(m,n)}(\alpha, \beta) = D_{mn} \frac{J_{2m+1+\sigma}(\alpha) J_{2n+1+\tau}(\beta)}{\alpha^\sigma \beta^\tau \sqrt{\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} - k^2}} \sin(\alpha\xi) \sin(\beta\eta) \quad (2.34)$$

A_{mn} , B_{mn} , C_{mn} , et D_{mn} sont des amplitudes modales.

Les variables σ et τ sont arbitraires [49] à condition que la solution du champ diffracté élémentaire Φ_d^{elt} (voir équation (2.18)) qui en résulte et qui vérifie la condition aux limites (2.9), converge. Nous avons choisi des variables σ et τ nulles car elles nous ont permis d'obtenir une solution plus précise et plus rapide du champ diffracté [49, 56].

Une solution générale du problème s'écrit comme une sommation de toutes les solutions élémentaires. Ceci permet d'exprimer le champ diffracté Φ_d au dessus d'une cavité sous une forme analogue à celle d'une fente rectangulaire épaisse [50]. Ainsi, le champ

diffraité Φ_d est exprimé comme suit :

$$\Phi_d = \sum_{m,n \geq 0} \iint_{\mathbb{R}_+^2} (\Phi_{cc}^{(m,n)} + \Phi_{cs}^{(m,n)} + \Phi_{sc}^{(m,n)} + \Phi_{ss}^{(m,n)}) e^{-\sqrt{\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} - k^2} z} d\alpha d\beta, \\ \forall \xi, \forall \eta, z \geq 0, m, n \in \mathbb{N} \quad (2.35)$$

2.2.2 Calcul du champ acoustique diffracté

Après avoir exprimé tous les champs mis en jeu, il est nécessaire de chercher les différentes amplitudes inconnues A_{mn} , B_{mn} , C_{mn} , et D_{mn} de l'équation (2.35) à partir des conditions aux limites (2.9)-(2.12).

2.2.2.1 Condition aux limites mixtes au fond de la cavité

La projection de l'équation (2.12) définissant les conditions aux limites au fond de la cavité sur la base des fonctions trigonométriques permet d'avoir une relation entre les deux coefficients E_{pq} et F_{pq} de l'équation (2.3).

$$F_{pq} = \frac{\kappa_{pq} + jk\eta_{ad}}{\kappa_{pq} - jk\eta_{ad}} e^{2\kappa_{pq}d} E_{pq}, \quad \forall p, q \in \mathbb{N} \quad (2.36)$$

2.2.2.2 Continuité de pression au niveau de la cavité

L'équation (2.11) définissant la continuité de pression au niveau de la cavité peut être divisée en quatre équations en utilisant la parité des fonctions en ξ et η et la parité des indices de sommation p et q (voir annexe §A.2) :

$$2A \cos(k_x a \xi) \cos(k_y b \eta) + \sum_{m,n \geq 0} A_{mn} \iint_{\mathbb{R}_+^2} \frac{J_{2m}(\alpha) J_{2n}(\beta) \cos(\alpha \xi) \cos(\beta \eta)}{\sqrt{\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} - k^2}} d\alpha d\beta \\ = \sum_{p,q \geq 0} \cos \frac{p\pi}{2} (\xi + 1) \cos \frac{q\pi}{2} (\eta + 1) \Gamma_{pq}^+ E_{pq}, \\ \forall m, n \in \mathbb{N}, \forall p, q \in 2\mathbb{N}, |\xi|, |\eta| \leq 1 \quad (2.37)$$

$$\begin{aligned}
& 2jA \cos(k_x a \xi) \sin(k_y b \eta) + \sum_{m,n \geq 0} B_{mn} \iint_{\mathbb{R}_+^2} \frac{J_{2m}(\alpha) J_{2n+1}(\beta) \cos(\alpha \xi) \sin(\beta \eta)}{\sqrt{\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} - k^2}} d\alpha d\beta \\
&= \sum_{p,q \geq 0} \cos \frac{p\pi}{2} (\xi + 1) \cos \frac{q\pi}{2} (\eta + 1) \Gamma_{pq}^+ E_{pq}, \\
&\forall m, n \in \mathbb{N}, \forall p \in 2\mathbb{N}, \forall q \in 2\mathbb{N} + 1, |\xi|, |\eta| \leq 1
\end{aligned} \tag{2.38}$$

$$\begin{aligned}
& 2jA \sin(k_x a \xi) \cos(k_y b \eta) + \sum_{m,n \geq 0} C_{mn} \iint_{\mathbb{R}_+^2} \frac{J_{2m+1}(\alpha) J_{2n}(\beta) \sin(\alpha \xi) \cos(\beta \eta)}{\sqrt{\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} - k^2}} d\alpha d\beta \\
&= \sum_{p,q \geq 0} \cos \frac{p\pi}{2} (\xi + 1) \cos \frac{q\pi}{2} (\eta + 1) \Gamma_{pq}^+ E_{pq}, \\
&\forall m, n \in \mathbb{N}, \forall p \in 2\mathbb{N} + 1, \forall q \in 2\mathbb{N}, |\xi|, |\eta| \leq 1
\end{aligned} \tag{2.39}$$

$$\begin{aligned}
& -2A \sin(k_x a \xi) \sin(k_y b \eta) + \sum_{m,n \geq 0} D_{mn} \iint_{\mathbb{R}_+^2} \frac{J_{2m+1}(\alpha) J_{2n+1}(\beta) \sin(\alpha \xi) \sin(\beta \eta)}{\sqrt{\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} - k^2}} d\alpha d\beta \\
&= \sum_{p,q \geq 0} \cos \frac{p\pi}{2} (\xi + 1) \cos \frac{q\pi}{2} (\eta + 1) \Gamma_{pq}^+ E_{pq}, \\
&\forall m, n \in \mathbb{N}, \forall p, q \in 2\mathbb{N} + 1, |\xi|, |\eta| \leq 1
\end{aligned} \tag{2.40}$$

Où :

$$\Gamma_{pq}^+ = 1 + \frac{\kappa_{pq} + jk\eta_{ad}}{\kappa_{pq} - jk\eta_{ad}} e^{2\kappa_{pq}d}, \quad p, q \in \mathbb{N} \tag{2.41}$$

Un développement des fonctions trigonométriques sur la base des polynômes de Jacobi, le $G_n^{(2, \frac{3}{2})}$ pour la fonction sin et le $G_n^{(1, \frac{1}{2})}$ pour la fonction cos, est appliqué aux équations (2.37)-(2.40). La multiplication de chaque équation par le facteur $(1 - \xi^2)^{\frac{1}{2}}(1 - \eta^2)^{\frac{1}{2}}$ et l'application des relations d'orthogonalité des polynômes de Jacobi permettent d'écrire (voir annexe §A.3) :

$$\begin{aligned}
& 2A \frac{J_{2s+1}(k_x a)}{k_x a} \frac{J_{2t+1}(k_y b)}{k_y b} + \sum_{m,n \geq 0} A_{mn} \iint_{\mathbb{R}_+^2} \frac{J_{2m}(\alpha) J_{2s+1}(\alpha) J_{2n}(\beta) J_{2t+1}(\beta)}{\alpha \beta \sqrt{\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} - k^2}} d\alpha d\beta \\
&= \sum_{p,q \geq 0} (-1)^{p+q} \frac{J_{2s+1}(p\pi)}{p\pi} \frac{J_{2t+1}(q\pi)}{q\pi} \Gamma_{2p,2q}^+ E_{2p,2q}, \quad \forall p, q, m, n, s, t \in \mathbb{N}
\end{aligned} \tag{2.42}$$

$$\begin{aligned}
& 2jA \frac{J_{2s+1}(k_x a)}{k_x a} \frac{J_{2t+2}(k_y b)}{k_y b} + \sum_{m,n \geq 0} B_{mn} \iint_{\mathbb{R}_+^2} \frac{J_{2m}(\alpha) J_{2s+1}(\alpha) J_{2n+1}(\beta) J_{2t+2}(\beta)}{\alpha \beta \sqrt{\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} - k^2}} d\alpha d\beta \\
&= \sum_{p,q \geq 0} (-1)^{p+q+1} \frac{J_{2s+1}(p\pi)}{p\pi} \frac{J_{2t+2}(\frac{2q+1}{2}\pi)}{\frac{2q+1}{2}\pi} \Gamma_{2p,2q+1}^+ E_{2p,2q+1}, \quad \forall p, q, m, n, s, t \in \mathbb{N}
\end{aligned} \tag{2.43}$$

2.2 Développement du modèle dans le cas d'une cavité dans un écran infiniment rigide

$$\begin{aligned}
& 2JA \frac{J_{2s+2}(k_x a)}{k_x a} \frac{J_{2t+1}(k_y b)}{k_y b} + \sum_{m,n \geq 0} C_{mn} \iint_{\mathbb{R}_+^2} \frac{J_{2m+1}(\alpha) J_{2s+2}(\alpha) J_{2n}(\beta) J_{2t+1}(\beta)}{\alpha \beta \sqrt{\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} - k^2}} d\alpha d\beta \\
&= \sum_{p,q \geq 0} (-1)^{p+q+1} \frac{J_{2s+2}(\frac{2p+1}{2}\pi)}{\frac{2p+1}{2}\pi} \frac{J_{2t+1}(q\pi)}{q\pi} \Gamma_{2p+1,2q}^+ E_{2p+1,2q}, \forall p, q, m, n, s, t \in \mathbb{N} \quad (2.44)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -2A \frac{J_{2s+2}(k_x a)}{k_x a} \frac{J_{2t+2}(k_y b)}{k_y b} + \sum_{m,n \geq 0} D_{mn} \iint_{\mathbb{R}_+^2} \frac{J_{2m+1}(\alpha) J_{2s+2}(\alpha) J_{2n+1}(\beta) J_{2t+2}(\beta)}{\alpha \beta \sqrt{\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} - k^2}} d\alpha d\beta \\
&= \sum_{p,q \geq 0} (-1)^{p+q} \frac{J_{2s+2}(\frac{2p+1}{2}\pi)}{\frac{2p+1}{2}\pi} \frac{J_{2t+2}(\frac{2q+1}{2}\pi)}{\frac{2q+1}{2}\pi} \Gamma_{2p+1,2q+1}^+ E_{2p+1,2q}, \forall p, q, m, n, s, t \in \mathbb{N} \quad (2.45)
\end{aligned}$$

2.2.2.3 Continuité de vitesse au niveau de la cavité

L'équation (2.10) définissant la continuité de la vitesse au niveau de la cavité peut être divisée en quatre équations en utilisant la parité des fonctions en ξ et η et la parité des indices de sommation p et q . On rappelle que la sommation des dérivées du champ incident et du champ réfléchi spéculaire par rapport à z s'annulent en $z = 0$.

$$\begin{aligned}
& \sum_{m,n \geq 0} A_{mn} \iint_{\mathbb{R}_+^2} J_{2m}(\alpha) J_{2n}(\beta) \cos(\alpha\xi) \cos(\beta\eta) d\alpha d\beta \\
&= \sum_{p,q \geq 0} \cos \frac{p\pi}{2} (\xi + 1) \cos \frac{q\pi}{2} (\eta + 1) \Gamma_{pq}^- E_{pq}, \\
&\forall |\xi|, |\eta| \leq 1, \forall p, q \in 2\mathbb{N}, m, n \in \mathbb{N} \quad (2.46)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{m,n \geq 0} B_{mn} \iint_{\mathbb{R}_+^2} J_{2m}(\alpha) J_{2n+1}(\beta) \cos(\alpha\xi) \sin(\beta\eta) d\alpha d\beta \\
&= \sum_{p,q \geq 0} \cos \frac{p\pi}{2} (\xi + 1) \cos \frac{q\pi}{2} (\eta + 1) \Gamma_{pq}^- E_{pq}, \\
&\forall |\xi|, |\eta| \leq 1, \forall p \in 2\mathbb{N}, \forall q \in 2\mathbb{N} + 1, m, n \in \mathbb{N} \quad (2.47)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{m,n \geq 0} C_{mn} \iint_{\mathbb{R}_+^2} J_{2m+1}(\alpha) J_{2n}(\beta) \sin(\alpha\xi) \cos(\beta\eta) d\alpha d\beta \\
&= \sum_{p,q \geq 0} \cos \frac{p\pi}{2} (\xi + 1) \cos \frac{q\pi}{2} (\eta + 1) \Gamma_{pq}^- E_{pq}, \\
& \forall |\xi|, |\eta| \leq 1, \forall p \in 2\mathbb{N} + 1, \forall q \in 2\mathbb{N}, m, n \in \mathbb{N}
\end{aligned} \tag{2.48}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{m,n \geq 0} D_{mn} \iint_{\mathbb{R}_+^2} J_{2m+1}(\alpha) J_{2n+1}(\beta) \sin(\alpha\xi) \sin(\beta\eta) d\alpha d\beta \\
&= \sum_{p,q \geq 0} \cos \frac{p\pi}{2} (\xi + 1) \cos \frac{q\pi}{2} (\eta + 1) \Gamma_{pq}^- E_{pq}, \\
& \forall |\xi|, |\eta| \leq 1, \forall p, q \in 2\mathbb{N} + 1, m, n \in \mathbb{N}
\end{aligned} \tag{2.49}$$

Où :

$$\Gamma_{pq}^- = 1 - \frac{\kappa_{pq} + jk\eta_{ad}}{\kappa_{pq} - jk\eta_{ad}} e^{2\kappa_{pq}d}, \quad p, q \in \mathbb{N} \tag{2.50}$$

L'orthogonalité des modes propres du guide d'onde appliquée aux équations (2.46)-(2.49) permet d'écrire (voir annexe §A.4) :

$$\begin{aligned}
& \sum_{m,n \geq} A_{mn} \iint_{\mathbb{R}_+^2} J_{2m}(\alpha) \frac{2\alpha \sin(\alpha)}{\alpha^2 - (p\pi)^2} J_{2n}(\beta) \frac{2\beta \sin(\beta)}{\beta^2 - (q\pi)^2} d\alpha d\beta \\
&= \gamma_{2p,2q} \epsilon_{2p} \epsilon_{2q} \Gamma_{2p,2q}^- E_{2p,2q}, \quad \forall m, n, p, q \in \mathbb{N}
\end{aligned} \tag{2.51}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{m,n \geq} B_{mn} \iint_{\mathbb{R}_+^2} J_{2m}(\alpha) \frac{2\alpha \sin(\alpha)}{\alpha^2 - (p\pi)^2} J_{2n+1}(\beta) \frac{2\beta \cos(\beta)}{\beta^2 - (\frac{2q+1}{2}\pi)^2} d\alpha d\beta \\
&= \gamma_{2p,2q+1} \epsilon_{2p} \epsilon_{2q+1} \Gamma_{2p,2q+1}^- E_{2p,2q+1}, \quad \forall m, n, p, q \in \mathbb{N}
\end{aligned} \tag{2.52}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{m,n \geq} C_{mn} \iint_{\mathbb{R}_+^2} J_{2m+1}(\alpha) \frac{2\alpha \cos(\alpha)}{\alpha^2 - (\frac{2p+1}{2}\pi)^2} J_{2n}(\beta) \frac{2\beta \sin(\beta)}{\beta^2 - (q\pi)^2} d\alpha d\beta \\
&= \gamma_{2p+1,2q} \epsilon_{2p+1} \epsilon_{2q} \Gamma_{2p+1,2q}^- E_{2p+1,2q}, \quad \forall m, n, p, q \in \mathbb{N}
\end{aligned} \tag{2.53}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{m,n \geq} D_{mn} \iint_{\mathbb{R}_+^2} J_{2m+1}(\alpha) \frac{2\alpha \cos(\alpha)}{\alpha^2 - (\frac{2p+1}{2}\pi)^2} J_{2n+1}(\beta) \frac{2\beta \cos(\beta)}{\beta^2 - (\frac{2q+1}{2}\pi)^2} d\alpha d\beta \\
&= \gamma_{2p+1,2q+1} \epsilon_{2p+1} \epsilon_{2q+1} \Gamma_{2p+1,2q+1}^- E_{2p+1,2q+1}, \quad \forall m, n, p, q \in \mathbb{N}
\end{aligned} \tag{2.54}$$

Où :

$$\epsilon_p = \begin{cases} 2 & \text{si } p = 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.55)$$

Le calcul des intégrales qui apparaissent dans les équations (2.51)-(2.54) est effectué d'une manière analytique en utilisant la formule de Cauchy (voir l'annexe §A.5).

Les conditions aux limites ont permis d'obtenir un système d'équations linéaires de 9 équations ((2.36), (2.42)-(2.45),(2.51)-(2.54)) à 6 inconnues. Les amplitudes A_{mn} , B_{mn} , C_{mn} et D_{mn} sont dépendantes de E_{pq} et F_{pq} . Le système d'équations se réduit alors à 4 équations à 4 inconnues. La résolution de ce système permet d'accéder aux amplitudes A_{mn} , B_{mn} , C_{mn} , et D_{mn} qui apparaissent dans l'expression du champ acoustique réfléchi diffracté donné par l'équation (2.35).

2.2.2.4 Détermination des amplitudes A_{mn} , B_{mn} , C_{mn} , et D_{mn} dans l'expression du champ diffracté Φ_d

La combinaison des équations provenant de la continuité des vitesses et des pressions au niveau de la cavité ((2.42)-(2.54)) permet de construire 4 systèmes d'équations linéaires (2.56)-(2.59). Les quatre amplitudes A_{mn} , B_{mn} , C_{mn} , et D_{mn} inconnues sont obtenues par inversion des systèmes.

$$[A_{mn}][G(2m, 2n, 2s + 1, 2t + 1)] = [\Lambda(2s + 1, 2t + 1)] \quad (2.56)$$

$$[B_{mn}][G(2m, 2n + 1, 2s + 1, 2t + 2)] = [\Lambda(2s + 1, 2t + 2)] \quad (2.57)$$

$$[C_{mn}][G(2m + 1, 2n, 2s + 2, 2t + 1)] = [\Lambda(2s + 2, 2t + 1)] \quad (2.58)$$

$$[D_{mn}][G(2m + 1, 2n + 1, 2s + 2, 2t + 2)] = [\Lambda(2s + 2, 2t + 2)] \quad (2.59)$$

Où :

$$\begin{aligned}
 & G(2m + \mu, 2n + \nu, 2s + 1 + \mu, 2t + 1 + \nu) \\
 &= \iint_{\mathbb{R}_+^2} \frac{J_{2m+\mu}(\alpha) J_{2s+1+\mu}(\alpha) J_{2n+\nu}(\beta) J_{2t+1+\nu}(\beta)}{\alpha\beta \sqrt{\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} - k^2}} d\alpha d\beta \\
 &- \sum_{p,q \geq 0} (-1)^{p+q+\mu+\nu} \left(\frac{1}{\epsilon_{2p+\mu} \epsilon_{2q+\nu} \gamma_{2p+\mu, 2q+\nu}} \frac{\Gamma_{2p+\mu, 2q+\nu}^+}{\Gamma_{2p+\mu, 2q+\nu}^-} \right. \\
 &\times \frac{J_{2s+1+\mu}(\frac{2p+\mu}{2}\pi)}{\frac{2p+\mu}{2}\pi} \int_0^\infty J_{2m+\mu}(\alpha) \frac{2\alpha \sin(\alpha + \mu\frac{\pi}{2})}{\alpha^2 - (\frac{2p+\mu}{2}\pi)^2} d\alpha \\
 &\times \left. \frac{J_{2t+1+\nu}(\frac{2q+\nu}{2}\pi)}{\frac{2q+\nu}{2}\pi} \int_0^\infty J_{2n+\nu}(\beta) \frac{2\beta \sin(\beta + \nu\frac{\pi}{2})}{\beta^2 - (\frac{2q+\nu}{2}\pi)^2} d\beta \right) \quad (2.60)
 \end{aligned}$$

$$\Lambda(2s + 1 + \mu, 2t + 1 + \nu) = -2j^{\mu+\nu} A \frac{J_{2s+1+\mu}(k_x a)}{k_x a} \frac{J_{2t+1+\nu}(k_y b)}{k_y b} \quad (2.61)$$

Avec :

$$(\mu, \nu) = \begin{cases} (0, 0) \text{ s'il s'agit de } A_{mn} \\ (0, 1) \text{ s'il s'agit de } B_{mn} \\ (1, 0) \text{ s'il s'agit de } C_{mn} \\ (1, 1) \text{ s'il s'agit de } D_{mn} \end{cases} \quad (2.62)$$

Les intégrales simples dans l'équation (2.60) sont calculées analytiquement en utilisant la formule de Cauchy (voir annexe §A.5). Par la suite l'équation (2.60) s'écrit :

$$\begin{aligned}
 & G(2m + \mu, 2n + \nu, 2s + 1 + \mu, 2t + 1 + \nu) \\
 &= \iint_{\mathbb{R}_+^2} \frac{J_{2m+\mu}(\alpha) J_{2s+1+\mu}(\alpha) J_{2n+\nu}(\beta) J_{2t+1+\nu}(\beta)}{\alpha\beta \sqrt{\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} - k^2}} d\alpha d\beta \\
 &- \sum_{p,q \geq 0} \left(\frac{\pi^2}{\epsilon_{2p+\mu} \epsilon_{2q+\nu} \gamma_{2p+\mu, 2q+\nu}} \frac{\Gamma_{2p+\mu, 2q+\nu}^+}{\Gamma_{2p+\mu, 2q+\nu}^-} \frac{J_{2m+\mu}(\frac{2p+\mu}{2}\pi) J_{2s+1+\mu}(\frac{2p+\mu}{2}\pi)}{\frac{2p+\mu}{2}\pi} \right. \\
 &\times \left. \frac{J_{2n+\nu}(\frac{2q+\nu}{2}\pi) J_{2t+1+\nu}(\frac{2q+\nu}{2}\pi)}{\frac{2q+\nu}{2}\pi} \right) \quad (2.63)
 \end{aligned}$$

Ces expressions font apparaître des intégrales très complexes qui n'ont pu être résolues de manière analytique. Une résolution numérique par la méthode de cubature de Gauss-Legendre [57] a été effectuée. Ces intégrales sont de la forme :

$$I = \iint_{\mathbb{R}_+^2} \frac{J_m(\alpha)J_s(\alpha)J_n(\beta)J_t(\beta)}{\alpha\beta\sqrt{\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} - k^2}} d\alpha d\beta \quad (2.64)$$

Un changement en coordonnées polaires permet d'écrire l'intégrale sous la forme :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{\mathbb{R}_+} 2 \frac{J_m(ar \cos(\theta))J_M(ar \cos(\theta))J_n(br \sin(\theta))J_N(br \sin(\theta))}{r \sin(2\theta)\sqrt{r^2 - k^2}} dr d\theta \quad (2.65)$$

L'intégrale est alors calculée sur deux zones. La première zone correspond à la zone où l'intégrale donne une valeur imaginaire pure et la deuxième correspond à sa partie réelle.

La même méthode de calcul d'intégrale mentionnée au dessus est utilisée pour le calcul du champ diffracté (voir (2.35)).

Toute la difficulté de la méthode réside dans le calcul de cette intégrale qui, comme nous l'avons souligné, n'a pas pu être résolue analytiquement. C'est donc numériquement que nous avons pu simuler l'intégralité du modèle. Cette simulation nécessite un temps de calcul important. Pour le réduire, nous avons choisi une programmation sous langage C++.

Le modèle KP adapté pour une cavité a donc été implanté dans une procédure de calcul. Ceci nous permet de présenter, dans le paragraphe qui suit, une analyse de l'évolution fréquentielle des amplitudes modales émergeant sous une incidence donnée.

2.3 Analyse des amplitudes modales dans le champ de pression acoustique réfléchi diffracté Φ_d

Les différentes amplitudes A_{mn} , B_{mn} , C_{mn} , et D_{mn} dépendent de la direction du vecteur d'onde incidente $\vec{k}$ (k_x et k_y). Pour une onde plane en incidente normale, uniquement A_{mn} est non nul et $A_{mn} = A_{nm}$, pour des raisons de symétries. En effet, dans le système

2.3 Analyse des amplitudes modales dans le champ de pression acoustique réfléchi diffracté Φ_d

des équations matricielles (2.56)-(2.59), les matrices $[\Lambda(2s+1, 2t+2)]$, $[\Lambda(2s+2, 2t+1)]$ et $[\Lambda(2s+2, 2t+2)]$ sont nulles car dans l'équation (2.61) qui les définit, les termes $\frac{J_{2s+1+\mu}(k_x a)}{k_x a} \frac{J_{2t+1+\nu}(k_y b)}{k_y b}$ tendent vers zéro pour $2s+1+\mu \geq 2$ et $2t+1+\nu \geq 2$. La figure 2.2 présente la variation de quelques amplitudes modales A_{mn} en fonction de la fréquence obtenues pour un ordre $S = 5$ (S représente le maximum des indices m, n, s et t), pour une cavité de taille $(50 \times 50 \times 20) \text{ cm}^3$ ayant un fond infiniment rigide (admittance nulle). Les courbes montrent aussi une pseudo-périodicité par rapport à une fréquence de résonance fondamentale $f_0 = \frac{c}{2d}$, où d est la profondeur de la cavité et c est la célérité du son dans l'air. Un maximum est obtenu pour des multiples impairs de $\frac{c}{4d}$. Le champ modal à l'intérieur de la cavité Φ_w est minimum à $z = 0$ à ces fréquences (multiples impairs de $\frac{c}{4d}$). La continuité de pression montre que les amplitudes de la partie spéculaire ($\Phi_{inc}^{pl} + \Phi_r$) et la partie diffractée (Φ_d) du champ total au dessus de la cavité sont proches et interfèrent d'une façon destructive. Le maximum de l'amplitude A_{mn} et par la suite la diffraction augmente en fonction de la fréquence.

Lorsque le vecteur d'onde incidente est parallèle au plan (O, y, z) (respectivement (O, x, z)), le champ diffracté est défini par les deux amplitudes modales A_{mn} et B_{mn} (respectivement A_{mn} et C_{mn}). La figure 2.3 présente la variation de quelques amplitudes modales A_{mn} et C_{mn} obtenues pour un ordre $S = 5$ pour une incidence oblique définie par $\theta = \frac{\pi}{3}$ et $\phi = 0$ (voir la figure 2.1 pour les angles). Seules les amplitudes modales A_{mn} et C_{mn} du champ diffracté sont excitées. Les amplitudes modales A_{mn} sont devenues plus faibles et les amplitudes modales C_{mn} sont devenues plus élevées comparées au cas de l'incidence normale.

2.3 Analyse des amplitudes modales dans le champ de pression acoustique réfléchi diffracté Φ_d

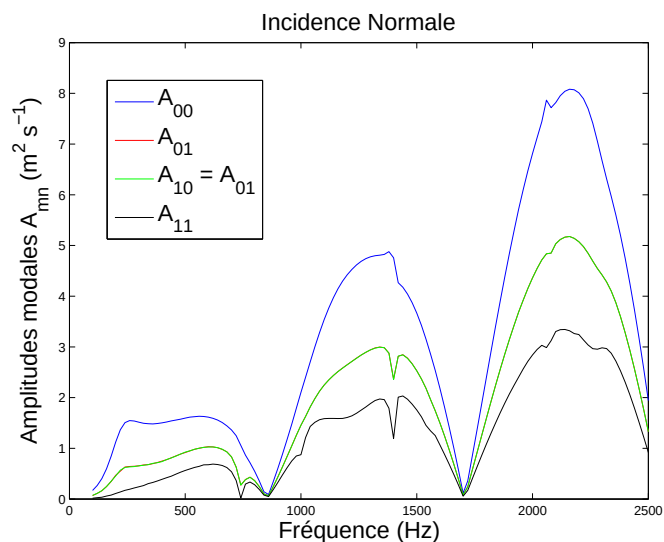


FIGURE 2.2 – Variation des amplitudes modales A_{mn} en fonction de la fréquence dans le cas d'une incidence normale pour une cavité de taille $(50 \times 50 \times 20) \text{ cm}^3$

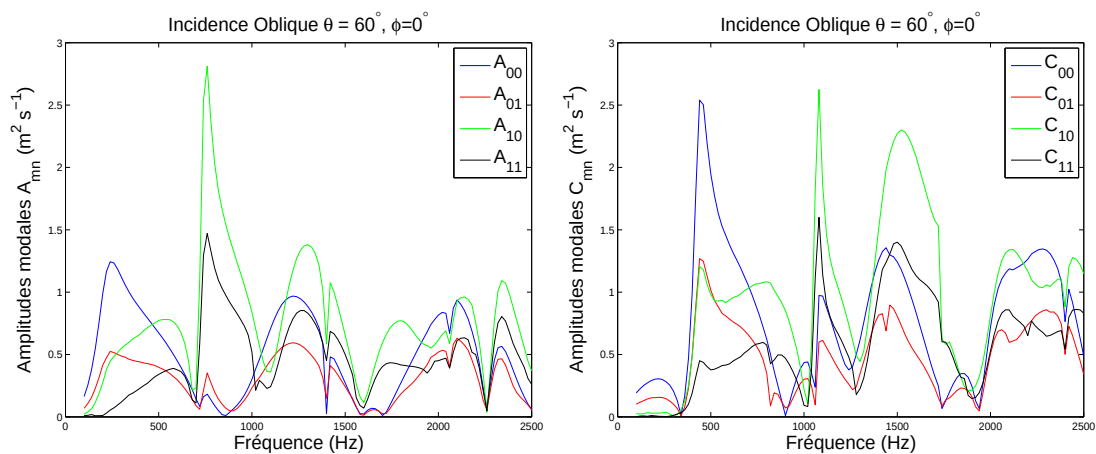


FIGURE 2.3 – Variation des amplitudes modales A_{mn} et C_{mn} en fonction de la fréquence dans le cas d'une incidence oblique : $\theta = \frac{\pi}{3}$ et $\phi = 0$ pour une cavité de taille $(50 \times 50 \times 20) \text{ cm}^3$

2.4 Prise en compte de l'admittance non nulle des bords de cavités dans le modèle

On considère un matériau plan d'admittance η'_{ad} d'épaisseur d non négligeable qui possède une cavité de forme rectangulaire de dimensions $2a$ et $2b$, respectivement selon les directions (Ox) et (Oy) , obstruée par un matériau d'admittance η_{ad} .

Soit Φ_{inc}^{pl} une onde acoustique plane insonifiant le matériau. Ce dernier réfléchit spéculairement l'onde incidente en dehors de la zone définie par la cavité, donnant lieu à un champ acoustique réfléchi spéculaire Φ_{r_η} . Quant à la cavité, elle donne naissance à deux champs :

- Φ_{d_η} pour $z \geq 0$, qui représente le champ diffracté créé par l'irrégularité géométrique,
- Φ_{w_η} pour $z \leq 0$ qui correspond à une onde acoustique guidée dans un conduit rectangulaire.

La partie de l'énergie acoustique transmise à l'intérieur du matériau est négligée puisqu'on suppose qu'elle sera suffisamment atténuée lorsqu'elle atteindra de nouveau la surface définie par le plan $z = 0$. On suppose aussi que les faces latérales de la cavité sont infiniment rigides.

Les expressions du champ incident et du champ à l'intérieur de la cavité ne changent pas par rapport au cas où les bords sont infiniment rigides (voir les équations (2.1) et (2.3)). Le champ réfléchi spéculaire Φ_{r_η} donné par l'équation (2.66) fait apparaître un coefficient de réflexion R prenant compte l'admittance des bords et définie par la relation (2.67).

$$\Phi_{r_\eta} = ARe^{jk_x a\xi} e^{jk_y b\eta} e^{-jk_z z}, \forall \xi, \forall \eta, z \geq 0 \quad (2.66)$$

$$R = \frac{k_z - k\eta'_{ad}}{k_z + k\eta'_{ad}} \quad (2.67)$$

Comme dans le cas d'une cavité de bords infiniment rigide, les différents champs mis en jeu : Φ_{inc}^{pl} , Φ_{r_η} , Φ_{d_η} et Φ_{w_η} vérifient les deux conditions aux limites (2.68) et (2.69)

2.4 Prise en compte de l'admittance non nulle des bords de cavités dans le modèle

traduisant respectivement la continuité de vitesse acoustique au niveau de la cavité et une condition aux limites mixte sur les bords plan (autour de la cavité) d'admittance η'_{ad} .

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} - jk\eta'_{ad}\right) (\Phi_{inc}^{pl} + \Phi_{r_\eta} + \Phi_{d_\eta}) = \left(\frac{\partial}{\partial z} - jk\eta'_{ad}\right) \Phi_{d_\eta} = \frac{\partial}{\partial z} \Phi_{w_\eta}, (x, y) \in D, z = 0 \quad (2.68)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} - jk\eta'_{ad}\right) (\Phi_{inc}^{pl} + \Phi_{r_\eta} + \Phi_{d_\eta}) = \left(\frac{\partial}{\partial z} - jk\eta'_{ad}\right) \Phi_{d_\eta} = 0, (x, y) \in D^c, z = 0 \quad (2.69)$$

Comme dans le cas d'une cavité dans un écran infiniment rigide, une solution élémentaire de l'équation de propagation donnée par la relation (2.14) est donnée par l'équation (2.70).

$$\Phi_{d_\eta}^{elt}(\xi, \eta, z) = \iint_{\mathbb{R}^2} f(\alpha, \beta) e^{-\sqrt{\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} - k^2} z} e^{j\alpha\xi} e^{j\beta\eta} d\alpha d\beta, \forall \xi, \forall \eta, z \geq 0 \quad (2.70)$$

$$= \Phi_{cc_\eta}(\xi, \eta, z) + \Phi_{cs_\eta}(\xi, \eta, z) + \Phi_{sc_\eta}(\xi, \eta, z) + \Phi_{ss_\eta}(\xi, \eta, z) \quad (2.71)$$

Où :

$$\Phi_{cc_\eta}(\xi, \eta, z) = \iint_{\mathbb{R}_+^2} f_{cc_\eta}(\alpha, \beta) \cos(\alpha\xi) \cos(\beta\eta) e^{-\sqrt{\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} - k^2} z} d\alpha d\beta \quad (2.72)$$

$$\Phi_{cs_\eta}(\xi, \eta, z) = \iint_{\mathbb{R}_+^2} f_{cs_\eta}(\alpha, \beta) \cos(\alpha\xi) \sin(\beta\eta) e^{-\sqrt{\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} - k^2} z} d\alpha d\beta \quad (2.73)$$

$$\Phi_{sc_\eta}(\xi, \eta, z) = \iint_{\mathbb{R}_+^2} f_{sc_\eta}(\alpha, \beta) \sin(\alpha\xi) \cos(\beta\eta) e^{-\sqrt{\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} - k^2} z} d\alpha d\beta \quad (2.74)$$

$$\Phi_{ss_\eta}(\xi, \eta, z) = \iint_{\mathbb{R}_+^2} f_{ss_\eta}(\alpha, \beta) \sin(\alpha\xi) \sin(\beta\eta) e^{-\sqrt{\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} - k^2} z} d\alpha d\beta \quad (2.75)$$

Les fonctions f_{cc_η} , f_{cs_η} , f_{sc_η} , f_{ss_η} sont inconnues et à déterminer à partir des conditions aux limites.

La condition aux limites (2.69) et l'équation (2.70) permettent d'écrire :

$$\begin{aligned} & \iint_{\mathbb{R}_+^2} (f_{cc_\eta}(\alpha, \beta) \cos(\alpha\xi) \cos(\beta\eta) + f_{cs_\eta}(\alpha, \beta) \cos(\alpha\xi) \sin(\beta\eta) + f_{sc_\eta}(\alpha, \beta) \sin(\alpha\xi) \cos(\beta\eta) \\ & + f_{ss_\eta}(\alpha, \beta) \sin(\alpha\xi) \sin(\beta\eta)) \left(\sqrt{\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} - k^2} + jk\eta'_{ad} \right) d\alpha d\beta = 0, (x, y) \in D^c, z = 0 \end{aligned} \quad (2.76)$$

2.4 Prise en compte de l'admittance non nulle des bords de cavités dans le modèle

Les équations (2.76) et (2.68) forment un système de deux equations intégrales qui se résout en utilisant les intégrales de Weber-Schafheitlin (2.25) et (2.26) comme dans le cas d'une cavité dans un écran infiniment rigide (voir annexe §A.1). Par conséquent :

$$f_{cc\eta}^{(m,n)}(\alpha, \beta) = A_{mn} \frac{J_{2m+\sigma}(\alpha) J_{2n+\tau}(\beta)}{\alpha^\sigma \beta^\tau \left(\sqrt{\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} - k^2} + jk\eta'_{ad} \right)} \quad (2.77)$$

$$f_{cs\eta}^{(m,n)}(\alpha, \beta) = B_{mn} \frac{J_{2m+\sigma}(\alpha) J_{2n+1+\tau}(\beta)}{\alpha^\sigma \beta^\tau \left(\sqrt{\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} - k^2} + jk\eta'_{ad} \right)} \quad (2.78)$$

$$f_{sc\eta}^{(m,n)}(\alpha, \beta) = C_{mn} \frac{J_{2m+1+\sigma}(\alpha) J_{2n+\tau}(\beta)}{\alpha^\sigma \beta^\tau \left(\sqrt{\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} - k^2} + jk\eta'_{ad} \right)} \quad (2.79)$$

$$f_{ss\eta}^{(m,n)}(\alpha, \beta) = D_{mn} \frac{J_{2m+1+\sigma}(\alpha) J_{2n+1+\tau}(\beta)}{\alpha^\sigma \beta^\tau \left(\sqrt{\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} - k^2} + jk\eta'_{ad} \right)} \quad (2.80)$$

Par la suite :

$$\Phi_{cc\eta}^{(m,n)}(\alpha, \beta) = A_{mn} \frac{J_{2m+\sigma}(\alpha) J_{2n+\tau}(\beta)}{\alpha^\sigma \beta^\tau \left(\sqrt{\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} - k^2} + jk\eta'_{ad} \right)} \cos(\alpha\xi) \cos(\beta\eta) \quad (2.81)$$

$$\Phi_{cs\eta}^{(m,n)}(\alpha, \beta) = B_{mn} \frac{J_{2m+\sigma}(\alpha) J_{2n+1+\tau}(\beta)}{\alpha^\sigma \beta^\tau \left(\sqrt{\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} - k^2} + jk\eta'_{ad} \right)} \cos(\alpha\xi) \sin(\beta\eta) \quad (2.82)$$

$$\Phi_{sc\eta}^{(m,n)}(\alpha, \beta) = C_{mn} \frac{J_{2m+1+\sigma}(\alpha) J_{2n+\tau}(\beta)}{\alpha^\sigma \beta^\tau \left(\sqrt{\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} - k^2} + jk\eta'_{ad} \right)} \sin(\alpha\xi) \cos(\beta\eta) \quad (2.83)$$

$$\Phi_{ss\eta}^{(m,n)}(\alpha, \beta) = D_{mn} \frac{J_{2m+1+\sigma}(\alpha) J_{2n+1+\tau}(\beta)}{\alpha^\sigma \beta^\tau \left(\sqrt{\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} - k^2} + jk\eta'_{ad} \right)} \sin(\alpha\xi) \sin(\beta\eta) \quad (2.84)$$

Les variable σ et τ sont prises égale à zéro pour les mêmes raisons mentionnées dans le paragraphe §2.2.1.1 dans le cas d'une cavité dans un écan infiniment rigide. Par conséquent :

$$\Phi_{d\eta} = \sum_{m,n \geq 0} \iint \frac{A_{mn} \Phi_{cc\eta}^{(m,n)} + B_{mn} \Phi_{cs\eta}^{(m,n)} + C_{mn} \Phi_{sc\eta}^{(m,n)} + D_{mn} \Phi_{ss\eta}^{(m,n)}}{e^{\sqrt{\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} - k^2} z}} d\alpha d\beta, \quad (2.85)$$

$\forall m, n \in \mathbb{N}, \forall \xi, \forall \eta, z \geq 0$

L'expression du champ diffracté $\Phi_{d\eta}$ est la même que celle du champ diffracté par une

2.4 Prise en compte de l'admittance non nulle des bords de cavités dans le modèle

fente puisqu'il est généré par ce qui émerge de la cavité. En d'autre termes, il est généré par la diffraction du champ modal, par la fente formée par l'ouverture de la cavité.

La même démarche présentée dans le paragraphe §2.2.2.4 a été utilisée pour déterminer les quatre amplitudes modales inconnues A_{mn} , B_{mn} , C_{mn} et D_{mn} du champ acoustique diffracté Φ_{d_η} . Un système de Cramer, donné par les équations (2.86)-(2.89), a été obtenu comme dans le cas d'une cavité sans admittance.

$$[A_{mn}][G_\eta(2m, 2n, 2s+1, 2t+1)] = [\Lambda_\eta(2s+1, 2t+1)] \quad (2.86)$$

$$[B_{mn}][G_\eta(2m, 2n+1, 2s+1, 2t+2)] = [\Lambda_\eta(2s+1, 2t+2)] \quad (2.87)$$

$$[C_{mn}][G_\eta(2m+1, 2n, 2s+2, 2t+1)] = [\Lambda_\eta(2s+2, 2t+1)] \quad (2.88)$$

$$[D_{mn}][G_\eta(2m+1, 2n+1, 2s+2, 2t+2)] = [\Lambda_\eta(2s+2, 2t+2)] \quad (2.89)$$

Avec :

$$\begin{aligned} G_\eta(2m+\mu, 2n+\nu, 2s+1+\mu, 2t+1+\nu) &= \underbrace{\iint_{\mathbb{R}_+^2} \frac{J_{2m+\mu}(\alpha) J_{2s+1+\mu}(\alpha) J_{2n+\nu}(\beta) J_{2t+1+\nu}(\beta)}{\alpha\beta \left(\sqrt{\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} - k^2} + jk\eta'_{ad} \right)} d\alpha d\beta}_{II_1} \\ &- \sum_{p,q \geq 0} \left(\frac{(-1)^{p+q}}{\epsilon_{2p+\mu} \epsilon_{2q+\nu} \gamma_{2p+\mu, 2q+\nu}} \frac{\Gamma_{2p+\mu, 2q+\nu}^+}{\Gamma_{2p+\mu, 2q+\nu}^-} \frac{J_{2s+1+\mu}(\frac{2p+\mu}{2}\pi)}{\frac{2p+\mu}{2}} \frac{J_{2t+1+\nu}(\frac{2q+\nu}{2}\pi)}{\frac{2q+\nu}{2}} \right. \\ &\times \underbrace{\iint_{\mathbb{R}_+^2} \frac{2\alpha \sin(\alpha + \mu\frac{\pi}{2})}{\alpha^2 - (\frac{2p+\mu}{2})^2} J_{2m+\mu}(\alpha) \frac{2\beta \sin(\beta + \nu\frac{\pi}{2})}{\beta^2 - (\frac{2q+\nu}{2})^2} J_{2n+\nu}(\beta) \frac{\sqrt{\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} - k^2}}{\sqrt{\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} - k^2 + jk\eta'_{ad}}} d\alpha d\beta}_{II_2} \left. \right) \end{aligned} \quad (2.90)$$

$$\begin{aligned} \Lambda_\eta(2s+1+\mu, 2t+1+\nu) &= -j^{\mu+\nu} A(R+1) \frac{J_{2s+1+\mu}(k_x a)}{k_x a} \frac{J_{2t+1+\nu}(k_y b)}{k_y b} \\ &- j^{\mu+\nu+1} k_z A(1-R) \sum_{p,q \geq 0} \frac{(-1)^{p+q}}{\epsilon_{2p+\mu} \epsilon_{2q+\nu} \gamma_{2p+\mu, 2q+\nu}} \frac{J_{2s+1+\mu}(\frac{2p+\mu}{2}\pi)}{\frac{2p+\mu}{2}} \frac{J_{2t+1+\nu}(\frac{2q+\nu}{2}\pi)}{\frac{2q+\nu}{2}} \\ &\times \frac{2k_x a \sin(k_x a + \mu\frac{\pi}{2})}{(k_x a)^2 - (\frac{2p+\mu}{2})^2} \frac{2k_y b \sin(k_y b + \nu\frac{\pi}{2})}{(k_y b)^2 - (\frac{2q+\nu}{2})^2} \frac{\Gamma_{2p+\mu, 2q+\nu}^+}{\Gamma_{2p+\mu, 2q+\nu}^-} \end{aligned} \quad (2.91)$$

La fonction G_η fait apparaître deux intégrales II_1 et II_2 difficiles à résoudre d'une

manière analytique. La même méthode de calcul d'intégrale numérique présentée dans le paragraphe §2.2.2.4 a été utilisée.

Il est possible de vérifier la robustesse des calculs en faisant tendre l'admittance des bords η'_{ad} vers zéro : bords infiniment rigides.

La simulation a été aussi effectuée en langage C++. Si on considère que le champ incident est sphérique, une décomposition en onde plane (voir §3.2) est nécessaire puisque le modèle développé est valable pour des ondes planes. Toutefois, le calcul des intégrales II_2 augmente considérablement le temps total de l'exécution du programme. Pour cela on s'est restreint au cas où les bords de la cavité sont infiniment rigides pour la phase de validation (voir chapitre 3).

2.5 Généralisation du modèle à un réseau de cavités rectangulaires parallèles

Le modèle analytique développé précédemment peut être généralisé à des réseaux périodiques et apériodiques formés par des cavités rectangulaires. Si les cavités sont suffisamment éloignées les unes des autres, les différents champs élémentaires issus de chaque cavité peuvent être simplement additionnés. Cependant, quand les cavités sont suffisamment proches les unes des autres, les champs acoustiques deviennent complexes à cause des phénomènes de couplages entre les différents éléments constituant le réseau. Dans ce chapitre, cette généralisation du modèle sera effectuée pour un réseau de cavités rectangulaires parallèles de dimensions différentes débouchant toutes à la même hauteur z en $z = 0$.

2.5.1 Développement du modèle

On considère un matériau plan infiniment rigide d'épaisseur non négligeable qui possède N cavités parallèles de forme rectangulaire. La $i^{\text{ème}}$ cavité est de dimension $2a_i$, $2b_i$ et d_i respectivement selon les directions (O_ix_i) , (O_iy_i) et (O_iz) du repère local (O_i, x_i, y_i, z) . δ_{x_i} et δ_{y_i} sont les coordonnées du point O_i dans le repère de référence (O, x, y) . Le fond étant un matériau d'admittance η_{ad}^i . Où $i \in \mathbb{N}$ et $0 < i \leq N$. Les bords de la cavité sont infiniment rigides.

Soit Φ_{inc}^{pl} une onde acoustique plane incidente insonifiant le matériau. Ce dernier réfléchit spéculairement l'onde incidente en dehors des zones définies par les cavités, donnant lieu à un champ acoustique réfléchi spéculaire Φ_r . Quant aux cavités, elles donnent naissance à $2N$ champs : Φ_d^i pour $z \geq 0$, qui représentent les différents champs diffractés créés par les irrégularités géométriques, et Φ_w^i pour $z \leq 0$ qui correspondent aux différentes ondes acoustiques guidées dans les différents conduits rectangulaires. (O, x, y, z) est le repère de référence.

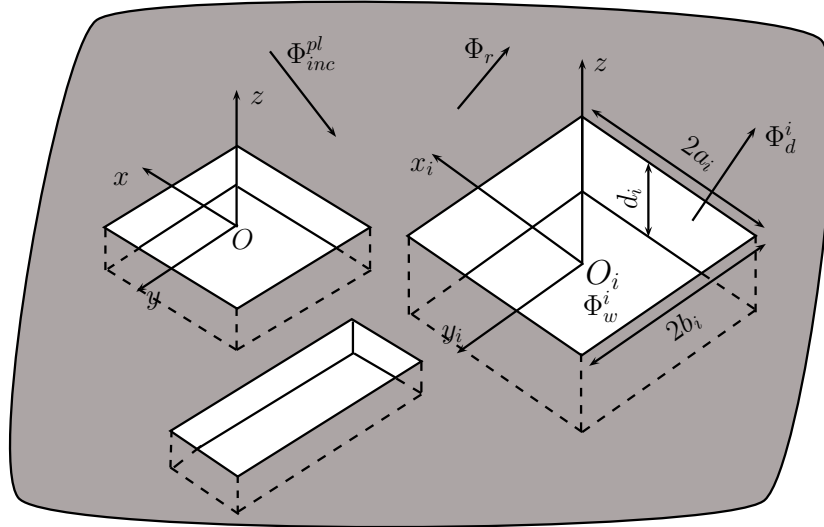


FIGURE 2.4 – Différents champs acoustiques mis en jeu dans le cas d'un réseau de cavités rectangulaires parallèles

2.5.2 Expression des différents champs acoustiques mis en jeu

Le champ acoustique incident (respectivement réfléchi spéculaire) s'écrit sous la forme d'une onde plane monochromatique se propageant vers les $z < 0$ (respectivement vers les $z > 0$) représenté par l'équation (2.1) (respectivement (2.2)). Quant au champ à l'intérieur de chaque cavité, il s'écrit sous forme d'une onde guidée dans un conduit rectangulaire représentée par l'équation (2.92) dans son propre repère local. Le champs diffracté Φ_d^i de la $i^{\text{ème}}$ cavité est donné par l'équation (2.93).

$$\Phi_w^i = \sum_{p \geq 0} \sum_{q \geq 0} \cos\left(\frac{p\pi}{2}(\xi_i + 1)\right) \cos\left(\frac{q\pi}{2}(\eta_i + 1)\right) \left[E_{pq}^i e^{-\kappa_{pq}^i \frac{z}{a_i}} + F_{pq}^i e^{\kappa_{pq}^i \frac{z}{a_i}} \right],$$

$$|\xi_i| < 1, |\eta_i| < 1, p, q \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq N \quad (2.92)$$

$$\Phi_d^i = \sum_{m, n \geq 0} \iint \frac{A_{mn}^i \Phi_{cc}^{(m,n)^i} + B_{mn}^i \Phi_{cs}^{(m,n)^i} + C_{mn}^i \Phi_{sc}^{(m,n)^i} + D_{mn}^i \Phi_{ss}^{(m,n)^i}}{e^{\sqrt{\alpha^2 + (\frac{a_i}{b_i}\beta)^2 - (ka_i)^2} \frac{z}{a_i}}} d\alpha d\beta,$$

$$\forall \xi_i, \forall \eta_i, z > 0, m, n \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq N \quad (2.93)$$

Où

$$\Phi_{cc}^{(m,n)^i}(\alpha, \beta) = \frac{J_{2m}(\alpha) J_{2n}(\beta)}{\sqrt{\alpha^2 + (\frac{a_i}{b_i}\beta)^2 - (ka_i)^2}} \cos(\alpha \xi_i) \cos(\beta \eta_i) \quad (2.94)$$

$$\Phi_{cs}^{(m,n)^i}(\alpha, \beta) = \frac{J_{2m}(\alpha) J_{2n+1}(\beta)}{\sqrt{\alpha^2 + (\frac{a_i}{b_i}\beta)^2 - (ka_i)^2}} \cos(\alpha \xi_i) \sin(\beta \eta_i) \quad (2.95)$$

$$\Phi_{sc}^{(m,n)^i}(\alpha, \beta) = \frac{J_{2m+1}(\alpha) J_{2n}(\beta)}{\sqrt{\alpha^2 + (\frac{a_i}{b_i}\beta)^2 - (ka_i)^2}} \sin(\alpha \xi_i) \cos(\beta \eta_i) \quad (2.96)$$

$$\Phi_{ss}^{(m,n)^i}(\alpha, \beta) = \frac{J_{2m+1}(\alpha) J_{2n+1}(\beta)}{\sqrt{\alpha^2 + (\frac{a_i}{b_i}\beta)^2 - (ka_i)^2}} \sin(\alpha \xi_i) \sin(\beta \eta_i) \quad (2.97)$$

ξ_i et η_i représentent les coordonnées locales normalisées par rapport aux dimensions de la cavité en question selon l'axe $(O_i x_i)$ et l'axe $(O_i y_i)$ respectivement comme le montrent les équations (2.98) et (2.99). κ_{pq}^i est le nombre d'onde modal selon la direction $(O_i z)$

définie par l'équation (2.100).

$$\xi_i = \frac{x_i}{a_i} \quad (2.98)$$

$$\eta_i = \frac{y_i}{b_i} \quad (2.99)$$

$$\kappa_{pq}^i = \sqrt{\left(\frac{p\pi}{2}\right)^2 + \left(\frac{q\pi}{2} \frac{a_i}{b_i}\right)^2 - (ka_i)^2} \quad (2.100)$$

La détermination du champ acoustique total au dessus du réseau revient donc à déterminer $6N$ inconnues : A_{mn}^i , B_{mn}^i , C_{mn}^i , D_{mn}^i , E_{pq}^i et F_{pq}^i , à partir des conditions aux limites.

2.5.2.1 Calcul du champ acoustique réfléchi diffracté

Afin d'uniformiser le système de coordonnées pour tous les champs acoustiques donnés par les équations (2.1), (2.2), (2.92) et (2.93), nous utilisons les relations (2.101)-(2.104) entre les différentes coordonnées locales. Cette étape permet d'exprimer toutes les coordonnées dans le repère local centré sur la $i^{\text{ème}}$ cavité.

$$x = x_i + \delta_{x_i} \quad (2.101)$$

$$y = y_i + \delta_{y_i} \quad (2.102)$$

$$x_j = x_i + \delta_{x_{ij}} \quad (2.103)$$

$$y_j = y_i + \delta_{y_{ij}} \quad (2.104)$$

Où $(\delta_{x_i}, \delta_{y_i})$ sont les coordonnées du centre du repère local (O, x_i, y_i, z) dans le repère de référence (O, x, y) . $\delta_{x_{ij}}$ et $\delta_{y_{ij}}$ sont données par les équations (2.105) et (2.106). Ils représentent les distances qui séparent les centres des deux repères locaux centrés sur les cavités i et j selon l'axe des x et selon l'axe des y respectivement.

$$\delta_{x_{ij}} = \delta_{x_i} - \delta_{x_j} \quad (2.105)$$

$$\delta_{y_{ij}} = \delta_{y_i} - \delta_{y_j} \quad (2.106)$$

Après avoir exprimé tous les champs mis en jeu dans le même système de coordonnées, il suffit maintenant de chercher les différentes amplitudes modales inconnues à partir des conditions aux limites (2.107)-(2.109).

$$\frac{\partial}{\partial z}(\Phi_{inc}^{pl} + \Phi_r + \Phi_d^i + \sum_{j \neq i} \Phi_d^j) = \frac{\partial}{\partial z} \Phi_w^i, \quad (x_i, y_i) \in D_i, z = 0, 1 \leq i \leq N \quad (2.107)$$

$$\Phi_{inc}^{pl} + \Phi_r + \Phi_d^i + \sum_{j \neq i} \Phi_d^j = \Phi_w^i, \quad (x_i, y_i) \in D_i, z = 0, 1 \leq i \leq N \quad (2.108)$$

$$\frac{\partial \Phi_w^i}{\partial z} - jk\eta_{ad}^i \Phi_w^i = 0, \quad (x_i, y_i) \in D_i, z = -d_i, 1 \leq i \leq N \quad (2.109)$$

Avec $D_i = \{(x, y) / |x_i| < a_i, |y_i| < b_i\} \subset \mathbb{R}^2$ est le domaine défini par la $i^{\text{ème}}$ cavité.

Le champ total au dessus du $i^{\text{ème}}$ élément contient le champ incident Φ_{inc}^{pl} , le réfléchi spéculaire Φ_r , le champ diffracté Φ_d^i généré par la $i^{\text{ème}}$ cavité elle même et les autres champs diffractés $\sum_{j \neq i} \Phi_d^j$ générés par les cavités voisines. Ce dernier terme traduit la contribution des autres cavités à la génération du champ diffracté total au dessus l' $i^{\text{ème}}$ élément. Il correspond donc au couplage entre les différentes cavités formant le réseau.

La projection de l'équation (2.109) sur la base des fonctions trigonométriques permet d'avoir une relation entre les deux coefficients E_{pq}^i et F_{pq}^i de l'équation (2.92).

$$E_{pq}^i + F_{pq}^i = (1 + \frac{\kappa_{pq}^i + jka_i\eta_{ad}^i}{\kappa_{pq}^i - jka_i\eta_{ad}^i} e^{2\kappa_{pq}^i \frac{d_i}{a_i}}) E_{pq}^i = \Gamma_{pq}^{+i} E_{pq}^i, \quad p, q \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq N \quad (2.110)$$

$$E_{pq}^i - F_{pq}^i = (1 - \frac{\kappa_{pq}^i + jka_i\eta_{ad}^i}{\kappa_{pq}^i - jka_i\eta_{ad}^i} e^{2\kappa_{pq}^i \frac{d_i}{a_i}}) E_{pq}^i = \Gamma_{pq}^{-i} E_{pq}^i, \quad p, q \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq N \quad (2.111)$$

L'équation (2.108) peut être divisée en quatre équations en utilisant la parité des fonctions en ξ_i et η_i et la parité des indices de sommation p et q . Mais avant tout, il faut ramener les repères locaux (O_j, x_j, y_j, z) des cavités voisines au repère local (O_i, x_i, y_i, z) de la cavité i étudiée en question. Ensuite, on utilise les relations trigonométriques de transformation d'une somme en produit. On obtient alors 4 équations différentes. Chacune fait apparaître une amplitude modale du champ diffracté généré par l' $i^{\text{ème}}$ cavité en plus des $4(N - 1)$ amplitudes des champs diffractés générés par les autres cavités voisines traduisant leurs contributions à la génération du champ diffracté Φ_d^i . Ces équations sont données par les

relations (2.112)-(2.115).

$$\begin{aligned}
& 2A \cos(k_x a_i \xi_i) \cos(k_y b_i \eta_i) e^{j k_x a_i \delta x_i} e^{j k_y b_i \delta y_i} \\
& + \sum_{m,n \geq 0} A_{mn}^i \iint_{\mathbb{R}_+^2} \frac{J_{2m}(\alpha) J_{2n}(\beta) \cos(\alpha \xi_i) \cos(\beta \eta_i)}{\sqrt{\alpha^2 + (\frac{a_i}{b_i} \beta)^2 - (k a_i)^2}} d\alpha d\beta \\
& + \sum_{j \neq i} \sum_{m,n \geq 0} \iint_{\mathbb{R}_+^2} \left[A_{mn}^j J_{2m}(\alpha) J_{2n}(\beta) \cos\left(\frac{a_i}{a_j} \alpha \xi_i\right) \cos\left(\frac{\delta x_{ij}}{a_j} \alpha\right) \cos\left(\frac{b_i}{b_j} \beta \eta_i\right) \cos\left(\frac{\delta y_{ij}}{b_j} \beta\right) \right. \\
& + B_{mn}^j J_{2m}(\alpha) J_{2n+1}(\beta) \cos\left(\frac{a_i}{a_j} \alpha \xi_i\right) \cos\left(\frac{\delta x_{ij}}{a_j} \alpha\right) \cos\left(\frac{b_i}{b_j} \beta \eta_i\right) \sin\left(\frac{\delta y_{ij}}{b_j} \beta\right) \\
& + C_{mn}^j J_{2m+1}(\alpha) J_{2n}(\beta) \cos\left(\frac{a_i}{a_j} \alpha \xi_i\right) \sin\left(\frac{\delta x_{ij}}{a_j} \alpha\right) \cos\left(\frac{b_i}{b_j} \beta \eta_i\right) \sin\left(\frac{\delta y_{ij}}{b_j} \beta\right) \\
& \left. + D_{mn}^j J_{2m+1}(\alpha) J_{2n+1}(\beta) \cos\left(\frac{a_i}{a_j} \alpha \xi_i\right) \sin\left(\frac{\delta x_{ij}}{a_j} \alpha\right) \cos\left(\frac{b_i}{b_j} \beta \eta_i\right) \sin\left(\frac{\delta y_{ij}}{b_j} \beta\right) \right] \\
& \times \frac{d\alpha d\beta}{\sqrt{\alpha^2 + (\frac{a_i}{b_j} \beta)^2 - (k a_j)^2}} \\
& = \sum_{p,q \geq 0} \cos\left(\frac{p\pi}{2}(\xi_i + 1)\right) \cos\left(\frac{q\pi}{2}(\eta_i + 1)\right) \Gamma_{pq}^{+i} E_{pq}^i, \forall p, q \in 2\mathbb{N}, |\xi_i|, |\eta_i| < 1, 1 \leq i \leq N
\end{aligned} \tag{2.112}$$

$$\begin{aligned}
 & 2jA \cos(k_x a_i \xi_i) \sin(k_y b_i \eta_i) e^{jk_x a_i \delta_{x_i}} e^{jk_y b_i \delta_{y_i}} \\
 & + \sum_{m,n \geq 0} B_{mn}^i \iint_{\mathbb{R}_+^2} \frac{J_{2m}(\alpha) J_{2n+1}(\beta) \cos(\alpha \xi_i) \sin(\beta \eta_i)}{\sqrt{\alpha^2 + \left(\frac{a_i}{b_i} \beta\right)^2 - (ka_i)^2}} d\alpha d\beta \\
 & + \sum_{j \neq i} \sum_{m,n \geq 0} \iint_{\mathbb{R}_+^2} \left[-A_{mn}^j J_{2m}(\alpha) J_{2n}(\beta) \cos\left(\frac{a_i}{a_j} \alpha \xi_i\right) \cos\left(\frac{\delta_{x_{ij}}}{a_j} \alpha\right) \sin\left(\frac{b_i}{b_j} \beta \eta_i\right) \sin\left(\frac{\delta_{y_{ij}}}{b_j} \beta\right) \right. \\
 & + B_{mn}^j J_{2m}(\alpha) J_{2n+1}(\beta) \cos\left(\frac{a_i}{a_j} \alpha \xi_i\right) \cos\left(\frac{\delta_{x_{ij}}}{a_j} \alpha\right) \sin\left(\frac{b_i}{b_j} \beta \eta_i\right) \cos\left(\frac{\delta_{y_{ij}}}{b_j} \beta\right) \\
 & - C_{mn}^j J_{2m+1}(\alpha) J_{2n}(\beta) \cos\left(\frac{a_i}{a_j} \alpha \xi_i\right) \sin\left(\frac{\delta_{x_{ij}}}{a_j} \alpha\right) \sin\left(\frac{b_i}{b_j} \beta \eta_i\right) \sin\left(\frac{\delta_{y_{ij}}}{b_j} \beta\right) \\
 & \left. + D_{mn}^j J_{2m+1}(\alpha) J_{2n+1}(\beta) \cos\left(\frac{a_i}{a_j} \alpha \xi_i\right) \sin\left(\frac{\delta_{x_{ij}}}{a_j} \alpha\right) \sin\left(\frac{b_i}{b_j} \beta \eta_i\right) \cos\left(\frac{\delta_{y_{ij}}}{b_j} \beta\right) \right] \\
 & \times \frac{d\alpha d\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \left(\frac{a_j}{b_j} \beta\right)^2 - (ka_j)^2}} \\
 & = \sum_{p,q \geq 0} \cos\left(\frac{p\pi}{2}(\xi_i + 1)\right) \cos\left(\frac{q\pi}{2}(\eta_i + 1)\right) \Gamma_{pq}^{+i} E_{pq}^i, \forall p \in 2\mathbb{N}, \forall q \in 2\mathbb{N} + 1, |\xi_i|, |\eta_i| < 1, \\
 & 1 \leq i \leq N
 \end{aligned} \tag{2.113}$$

$$\begin{aligned}
 & 2jA \sin(k_x a_i \xi_i) \cos(k_y b_i \eta_i) e^{jk_x a_i \delta_{x_i}} e^{jk_y b_i \delta_{y_i}} \\
 & + \sum_{m,n \geq 0} C_{mn}^i \iint_{\mathbb{R}_+^2} \frac{J_{2m+1}(\alpha) J_{2n}(\beta) \sin(\alpha \xi_i) \cos(\beta \eta_i)}{\sqrt{\alpha^2 + \left(\frac{a_i}{b_i} \beta\right)^2 - (ka_i)^2}} d\alpha d\beta \\
 & + \sum_{j \neq i} \sum_{m,n \geq 0} \iint_{\mathbb{R}_+^2} \left[-A_{mn}^j J_{2m}(\alpha) J_{2n}(\beta) \sin\left(\frac{a_i}{a_j} \alpha \xi_i\right) \sin\left(\frac{\delta_{x_{ij}}}{a_j} \alpha\right) \cos\left(\frac{b_i}{b_j} \beta \eta_i\right) \cos\left(\frac{\delta_{y_{ij}}}{b_j} \beta\right) \right. \\
 & - B_{mn}^j J_{2m}(\alpha) J_{2n+1}(\beta) \sin\left(\frac{a_i}{a_j} \alpha \xi_i\right) \sin\left(\frac{\delta_{x_{ij}}}{a_j} \alpha\right) \cos\left(\frac{b_i}{b_j} \beta \eta_i\right) \sin\left(\frac{\delta_{y_{ij}}}{b_j} \beta\right) \\
 & + C_{mn}^j J_{2m+1}(\alpha) J_{2n}(\beta) \sin\left(\frac{a_i}{a_j} \alpha \xi_i\right) \cos\left(\frac{\delta_{x_{ij}}}{a_j} \alpha\right) \cos\left(\frac{b_i}{b_j} \beta \eta_i\right) \cos\left(\frac{\delta_{y_{ij}}}{b_j} \beta\right) \\
 & \left. + D_{mn}^j J_{2m+1}(\alpha) J_{2n+1}(\beta) \sin\left(\frac{a_i}{a_j} \alpha \xi_i\right) \cos\left(\frac{\delta_{x_{ij}}}{a_j} \alpha\right) \cos\left(\frac{b_i}{b_j} \beta \eta_i\right) \sin\left(\frac{\delta_{y_{ij}}}{b_j} \beta\right) \right] \\
 & \times \frac{d\alpha d\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \left(\frac{a_j}{b_j} \beta\right)^2 - (ka_j)^2}} \\
 & = \sum_{p,q \geq 0} \cos\left(\frac{p\pi}{2}(\xi_i + 1)\right) \cos\left(\frac{q\pi}{2}(\eta_i + 1)\right) \Gamma_{pq}^{+i} E_{pq}^i, \forall p \in 2\mathbb{N} + 1, \forall q \in 2\mathbb{N}, |\xi_i|, |\eta_i| < 1, \\
 & 1 \leq i \leq N
 \end{aligned} \tag{2.114}$$

$$\begin{aligned}
& - 2A \sin(k_x a_i \xi_i) \cos(k_y b_i \eta_i) e^{j k_x a_i \delta_{x_i}} e^{j k_y b_i \delta_{y_i}} \\
& + \sum_{m,n \geq 0} D_{mn}^i \iint_{\mathbb{R}_+^2} \frac{J_{2m+1}(\alpha) J_{2n+1}(\beta) \sin(\alpha \xi_i) \sin(\beta \eta_i)}{\sqrt{\alpha^2 + \left(\frac{a_i}{b_i} \beta\right)^2 - (k a_i)^2}} d\alpha d\beta \\
& + \sum_{j \neq i} \sum_{m,n \geq 0} \iint_{\mathbb{R}_+^2} \left[A_{mn}^j J_{2m}(\alpha) J_{2n}(\beta) \sin\left(\frac{a_i}{a_j} \alpha \xi_i\right) \sin\left(\frac{\delta_{x_{ij}}}{a_j} \alpha\right) \sin\left(\frac{b_i}{b_j} \beta \eta_i\right) \sin\left(\frac{\delta_{y_{ij}}}{b_j} \beta\right) \right. \\
& - B_{mn}^j J_{2m}(\alpha) J_{2n+1}(\beta) \sin\left(\frac{a_i}{a_j} \alpha \xi_i\right) \sin\left(\frac{\delta_{x_{ij}}}{a_j} \alpha\right) \sin\left(\frac{b_i}{b_j} \beta \eta_i\right) \cos\left(\frac{\delta_{y_{ij}}}{b_j} \beta\right) \\
& - C_{mn}^j J_{2m+1}(\alpha) J_{2n}(\beta) \sin\left(\frac{a_i}{a_j} \alpha \xi_i\right) \cos\left(\frac{\delta_{x_{ij}}}{a_j} \alpha\right) \sin\left(\frac{b_i}{b_j} \beta \eta_i\right) \sin\left(\frac{\delta_{y_{ij}}}{b_j} \beta\right) \\
& \left. + D_{mn}^j J_{2m+1}(\alpha) J_{2n+1}(\beta) \sin\left(\frac{a_i}{a_j} \alpha \xi_i\right) \cos\left(\frac{\delta_{x_{ij}}}{a_j} \alpha\right) \sin\left(\frac{b_i}{b_j} \beta \eta_i\right) \cos\left(\frac{\delta_{y_{ij}}}{b_j} \beta\right) \right] \\
& \times \frac{d\alpha d\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \left(\frac{a_j}{b_j} \beta\right)^2 - (k a_j)^2}} \\
& = \sum_{p,q \geq 0} \cos\left(\frac{p\pi}{2}(\xi_i + 1)\right) \cos\left(\frac{q\pi}{2}(\eta_i + 1)\right) \Gamma_{pq}^{+i} E_{pq}^i, \forall p, q \in 2\mathbb{N} + 1, |\xi_i|, |\eta_i| < 1, 1 \leq i \leq N
\end{aligned} \tag{2.115}$$

Sur chaque sous-équation obtenue, on développe les fonctions trigonométriques en série de polynômes de Jacobi comme dans le cas d'une seule cavité, détaillé dans le chapitre précédent. Cette étape permet d'avoir quatre nouvelles relations données par les équations (2.116)-(2.119).

$$\begin{aligned}
 & 2A \frac{J_{2s+1}(k_x a_i)}{k_x a_i} \frac{J_{2t+1}(k_y b_i)}{k_y b_i} e^{jk_x a_i \delta_{x_i}} e^{jk_y b_i \delta_{y_i}} \\
 & + \sum_{m,n \geq 0} A_{mn}^i \iint_{\mathbb{R}_+^2} \frac{J_{2m}(\alpha) J_{2n}(\beta) J_{2s+1}(\alpha) J_{2t+1}(\beta)}{\alpha \beta \sqrt{\alpha^2 + (\frac{a_i}{b_i} \beta)^2 - (k a_i)^2}} d\alpha d\beta \\
 & + \sum_{j \neq i} \sum_{m,n \geq 0} \iint_{\mathbb{R}_+^2} \left[A_{mn}^j J_{2m}(\alpha) J_{2n}(\beta) \cos\left(\frac{\delta_{x_{ij}}}{a_j} \alpha\right) \cos\left(\frac{\delta_{y_{ij}}}{b_j} \beta\right) \right. \\
 & + B_{mn}^j J_{2m}(\alpha) J_{2n+1}(\beta) \cos\left(\frac{\delta_{x_{ij}}}{a_j} \alpha\right) \sin\left(\frac{\delta_{y_{ij}}}{b_j} \beta\right) \\
 & + C_{mn}^j J_{2m+1}(\alpha) J_{2n}(\beta) \sin\left(\frac{\delta_{x_{ij}}}{a_j} \alpha\right) \sin\left(\frac{\delta_{y_{ij}}}{b_j} \beta\right) \\
 & \left. + D_{mn}^j J_{2m+1}(\alpha) J_{2n+1}(\beta) \sin\left(\frac{\delta_{x_{ij}}}{a_j} \alpha\right) \sin\left(\frac{\delta_{y_{ij}}}{b_j} \beta\right) \right] \\
 & \times \frac{J_{2s+1}(\frac{a_i}{a_j} \alpha) J_{2t+1}(\frac{b_i}{b_j} \beta)}{\frac{a_i}{a_j} \alpha \frac{b_i}{b_j} \beta \sqrt{\alpha^2 + (\frac{a_j}{b_j} \beta)^2 - (k a_j)^2}} d\alpha d\beta \\
 & = \sum_{p,q \geq 0} (-1)^{p+q} \frac{J_{2s+1}(p\pi)}{p\pi} \frac{J_{2t+1}(q\pi)}{q\pi} \Gamma_{2p,2q}^{+i} E_{2p,2q}^i, \forall m, n, s, t, p, q \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq N \quad (2.116)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & 2JA \frac{J_{2s+1}(k_x a_i)}{k_x a_i} \frac{J_{2t+2}(k_y b_i)}{k_y b_i} e^{jk_x a_i \delta_{x_i}} e^{jk_y b_i \delta_{y_i}} \\
 & + \sum_{m,n \geq 0} B_{mn}^i \iint_{\mathbb{R}_+^2} \frac{J_{2m}(\alpha) J_{2n+1}(\beta) J_{2s+1}(\alpha) J_{2t+2}(\beta)}{\alpha \beta \sqrt{\alpha^2 + (\frac{a_i}{b_i} \beta)^2 - (k a_i)^2}} d\alpha d\beta \\
 & + \sum_{j \neq i} \sum_{m,n \geq 0} \iint_{\mathbb{R}_+^2} \left[-A_{mn}^j J_{2m}(\alpha) J_{2n}(\beta) \cos\left(\frac{\delta_{x_{ij}}}{a_j} \alpha\right) \sin\left(\frac{\delta_{y_{ij}}}{b_j} \beta\right) \right. \\
 & + B_{mn}^j J_{2m}(\alpha) J_{2n+1}(\beta) \cos\left(\frac{\delta_{x_{ij}}}{a_j} \alpha\right) \cos\left(\frac{\delta_{y_{ij}}}{b_j} \beta\right) \\
 & - C_{mn}^j J_{2m+1}(\alpha) J_{2n}(\beta) \sin\left(\frac{\delta_{x_{ij}}}{a_j} \alpha\right) \sin\left(\frac{\delta_{y_{ij}}}{b_j} \beta\right) \\
 & \left. + D_{mn}^j J_{2m+1}(\alpha) J_{2n+1}(\beta) \sin\left(\frac{\delta_{x_{ij}}}{a_j} \alpha\right) \cos\left(\frac{\delta_{y_{ij}}}{b_j} \beta\right) \right] \\
 & \times \frac{J_{2s+1}(\frac{a_i}{a_j} \alpha) J_{2t+1}(\frac{b_i}{b_j} \beta)}{\frac{a_i}{a_j} \alpha \frac{b_i}{b_j} \beta \sqrt{\alpha^2 + (\frac{a_j}{b_j} \beta)^2 - (k a_j)^2}} d\alpha d\beta \\
 & = \sum_{p,q \geq 0} (-1)^{p+q+1} \frac{J_{2s+1}(p\pi)}{p\pi} \frac{J_{2t+2}(\frac{2q+1}{2}\pi)}{\frac{2q+1}{2}\pi} \Gamma_{2p,2q+1}^{+i} E_{2p,2q+1}^i, \forall m, n, s, t, p, q \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq N \quad (2.117)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & 2jA \frac{J_{2s+2}(k_x a_i)}{k_x a_i} \frac{J_{2t+1}(k_y b_i)}{k_y b_i} e^{jk_x a_i \delta_{x_i}} e^{jk_y b_i \delta_{y_i}} \\
 & + \sum_{m,n \geq 0} C_{mn}^i \iint_{\mathbb{R}_+^2} \frac{J_{2m+1}(\alpha) J_{2n}(\beta) J_{2s+2}(\alpha) J_{2t+1}(\beta)}{\alpha \beta \sqrt{\alpha^2 + (\frac{a_i}{b_i} \beta)^2 - (k a_i)^2}} d\alpha d\beta \\
 & + \sum_{j \neq i} \sum_{m,n \geq 0} \iint_{\mathbb{R}_+^2} \left[-A_{mn}^j J_{2m}(\alpha) J_{2n}(\beta) \sin\left(\frac{\delta_{x_{ij}}}{a_j} \alpha\right) \cos\left(\frac{\delta_{y_{ij}}}{b_j} \beta\right) \right. \\
 & - B_{mn}^j J_{2m}(\alpha) J_{2n+1}(\beta) \sin\left(\frac{\delta_{x_{ij}}}{a_j} \alpha\right) \sin\left(\frac{\delta_{y_{ij}}}{b_j} \beta\right) \\
 & + C_{mn}^j J_{2m+1}(\alpha) J_{2n}(\beta) \cos\left(\frac{\delta_{x_{ij}}}{a_j} \alpha\right) \cos\left(\frac{\delta_{y_{ij}}}{b_j} \beta\right) \\
 & \left. + D_{mn}^j J_{2m+1}(\alpha) J_{2n+1}(\beta) \cos\left(\frac{\delta_{x_{ij}}}{a_j} \alpha\right) \sin\left(\frac{\delta_{y_{ij}}}{b_j} \beta\right) \right] \\
 & \times \frac{J_{2s+2}(\frac{a_i}{a_j} \alpha) J_{2t+1}(\frac{b_i}{b_j} \beta)}{\frac{a_i}{a_j} \alpha \frac{b_i}{b_j} \beta \sqrt{\alpha^2 + (\frac{a_i}{b_i} \beta)^2 - (k a_j)^2}} d\alpha d\beta \\
 & = \sum_{p,q \geq 0} (-1)^{p+q+1} \frac{J_{2s+1}(\frac{2p+1}{2} \pi)}{\frac{2p+1}{2} \pi} \frac{J_{2t+2}(q\pi)}{q\pi} \Gamma_{2p+1,2q}^{+i} E_{2p+1,2q}^i, \forall m, n, s, t, p, q \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq N
 \end{aligned} \tag{2.118}$$

$$\begin{aligned}
 & - 2A \frac{J_{2s+2}(k_x a_i)}{k_x a_i} \frac{J_{2t+2}(k_y b_i)}{k_y b_i} e^{jk_x a_i \delta_{x_i}} e^{jk_y b_i \delta_{y_i}} \\
 & + \sum_{m,n \geq 0} D_{mn}^i \iint_{\mathbb{R}_+^2} \frac{J_{2m+1}(\alpha) J_{2n+1}(\beta) J_{2s+2}(\alpha) J_{2t+2}(\beta)}{\alpha \beta \sqrt{\alpha^2 + (\frac{a_i}{b_i} \beta)^2 - (k a_i)^2}} d\alpha d\beta \\
 & + \sum_{j \neq i} \sum_{m,n \geq 0} \iint_{\mathbb{R}_+^2} \left[A_{mn}^j J_{2m}(\alpha) J_{2n}(\beta) \sin\left(\frac{\delta_{x_{ij}}}{a_j} \alpha\right) \sin\left(\frac{\delta_{y_{ij}}}{b_j} \beta\right) \right. \\
 & - B_{mn}^j J_{2m}(\alpha) J_{2n+1}(\beta) \sin\left(\frac{\delta_{x_{ij}}}{a_j} \alpha\right) \cos\left(\frac{\delta_{y_{ij}}}{b_j} \beta\right) \\
 & - C_{mn}^j J_{2m+1}(\alpha) J_{2n}(\beta) \cos\left(\frac{\delta_{x_{ij}}}{a_j} \alpha\right) \sin\left(\frac{\delta_{y_{ij}}}{b_j} \beta\right) \\
 & \left. + D_{mn}^j J_{2m+1}(\alpha) J_{2n+1}(\beta) \cos\left(\frac{\delta_{x_{ij}}}{a_j} \alpha\right) \cos\left(\frac{\delta_{y_{ij}}}{b_j} \beta\right) \right] \\
 & \times \frac{J_{2s+2}(\frac{a_i}{a_j} \alpha) J_{2t+2}(\frac{b_i}{b_j} \beta)}{\frac{a_i}{a_j} \alpha \frac{b_i}{b_j} \beta \sqrt{\alpha^2 + (\frac{a_j}{b_j} \beta)^2 - (k a_j)^2}} d\alpha d\beta \\
 & = \sum_{p,q \geq 0} (-1)^{p+q} \frac{J_{2s+2}(\frac{2p+1}{2} \pi)}{\frac{2p+1}{2} \pi} \frac{J_{2t+2}(\frac{2q+1}{2} \pi)}{\frac{2q+1}{2} \pi} \Gamma_{2p+1,2q+1}^{+i} E_{2p+1,2q+1}^i, \quad \forall m, n, s, t, p, q \in \mathbb{N}, \\
 & 1 \leq i \leq N
 \end{aligned} \tag{2.119}$$

La condition aux limites (2.107) traduisant la continuité de la vitesse acoustique au niveau de la cavité i peut être divisée en quatre équations en utilisant la parité des fonctions en ξ_i et η_i et la parité des indices de sommation p et q comme dans le cas de la continuité de pression détaillé précédemment. Chaque équation fait apparaître une amplitude modale du champ diffracté généré par la cavité en question en plus des $4(N-1)$ amplitudes des champs diffractés générés par les autres cavités traduisant leurs contributions à la génération du champ diffracté Φ_d^i . Comme dans le cas de la continuité de vitesse pour une seule cavité, l'orthogonalité des modes propres du guide est appliquée. Ces équations résultantes sont données par les équations (2.120)-(2.123).

$$\begin{aligned}
 & \sum_{m,n \geq 0} A_{mn}^i \iint_{\mathbb{R}_+^2} \frac{2\alpha \sin(\alpha)}{\alpha^2 - (p\pi)^2} J_{2m}(\alpha) \frac{2\beta \sin(\beta)}{\beta^2 - (q\pi)^2} J_{2n}(\beta) d\alpha d\beta \\
 & + \sum_{j \neq i} \frac{a_i}{a_j} \sum_{m,n \geq 0} \iint_{\mathbb{R}_+^2} \left[A_{mn}^j J_{2m}(\alpha) J_{2n}(\beta) \cos\left(\frac{\delta_{x_{ij}}}{a_j} \alpha\right) \cos\left(\frac{\delta_{y_{ij}}}{b_j} \beta\right) \right. \\
 & + B_{mn}^j J_{2m}(\alpha) J_{2n+1}(\beta) \cos\left(\frac{\delta_{x_{ij}}}{a_j} \alpha\right) \sin\left(\frac{\delta_{y_{ij}}}{b_j} \beta\right) \\
 & + C_{mn}^j J_{2m+1}(\alpha) J_{2n}(\beta) \sin\left(\frac{\delta_{x_{ij}}}{a_j} \alpha\right) \cos\left(\frac{\delta_{y_{ij}}}{b_j} \beta\right) \\
 & \left. + D_{mn}^j J_{2m+1}(\alpha) J_{2n+1}(\beta) \sin\left(\frac{\delta_{x_{ij}}}{a_j} \alpha\right) \sin\left(\frac{\delta_{y_{ij}}}{b_j} \beta\right) \right] \\
 & \times \frac{2 \frac{a_i}{a_j} \alpha \sin\left(\frac{a_i}{a_j} \alpha\right)}{\left(\frac{a_i}{a_j} \alpha\right)^2 - (p\pi)^2} \frac{2 \frac{b_i}{b_j} \beta \sin\left(\frac{b_i}{b_j} \beta\right)}{\left(\frac{b_i}{b_j} \beta\right)^2 - (q\pi)^2} d\alpha d\beta \\
 & = \gamma_{2p,2q}^i \epsilon_{2p} \epsilon_{2q} \Gamma_{2p,2q}^{-i} E_{2p,2q}^i, \forall m, n, s, t, p, q \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq N
 \end{aligned} \tag{2.120}$$

$$\begin{aligned}
 & \sum_{m,n \geq 0} B_{mn}^i \iint_{\mathbb{R}_+^2} \frac{2\alpha \sin(\alpha)}{\alpha^2 - (p\pi)^2} J_{2m}(\alpha) \frac{2\beta \cos(\beta)}{\beta^2 - (\frac{2q+1}{2}\pi)^2} J_{2n+1}(\beta) d\alpha d\beta \\
 & + \sum_{j \neq i} \frac{a_i}{a_j} \sum_{m,n \geq 0} \iint_{\mathbb{R}_+^2} \left[-A_{mn}^j J_{2m}(\alpha) J_{2n}(\beta) \cos\left(\frac{\delta_{x_{ij}}}{a_j} \alpha\right) \sin\left(\frac{\delta_{y_{ij}}}{b_j} \beta\right) \right. \\
 & + B_{mn}^j J_{2m}(\alpha) J_{2n+1}(\beta) \cos\left(\frac{\delta_{x_{ij}}}{a_j} \alpha\right) \cos\left(\frac{\delta_{y_{ij}}}{b_j} \beta\right) \\
 & - C_{mn}^j J_{2m+1}(\alpha) J_{2n}(\beta) \sin\left(\frac{\delta_{x_{ij}}}{a_j} \alpha\right) \sin\left(\frac{\delta_{y_{ij}}}{b_j} \beta\right) \\
 & \left. + D_{mn}^j J_{2m+1}(\alpha) J_{2n+1}(\beta) \sin\left(\frac{\delta_{x_{ij}}}{a_j} \alpha\right) \cos\left(\frac{\delta_{y_{ij}}}{b_j} \beta\right) \right] \\
 & \times \frac{2 \frac{a_i}{a_j} \alpha \sin\left(\frac{a_i}{a_j} \alpha\right)}{\left(\frac{a_i}{a_j} \alpha\right)^2 - (p\pi)^2} \frac{2 \frac{b_i}{b_j} \beta \cos\left(\frac{b_i}{b_j} \beta\right)}{\left(\frac{b_i}{b_j} \beta\right)^2 - (\frac{2q+1}{2}\pi)^2} d\alpha d\beta \\
 & = \gamma_{2p,2q+1}^i \epsilon_{2p} \epsilon_{2q+1} \Gamma_{2p,2q+1}^{-i} E_{2p,2q+1}^i, \forall m, n, s, t, p, q \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq N
 \end{aligned} \tag{2.121}$$

$$\begin{aligned}
 & \sum_{m,n \geq 0} C_{mn}^i \iint_{\mathbb{R}_+^2} \frac{2\alpha \cos(\alpha)}{\alpha^2 - (\frac{2p+1}{2}\pi)^2} J_{2m+1}(\alpha) \frac{2\beta \sin(\beta)}{\beta^2 - (q\pi)^2} J_{2n}(\beta) d\alpha d\beta \\
 & + \sum_{j \neq i} \frac{a_i}{a_j} \sum_{m,n \geq 0} \iint_{\mathbb{R}_+^2} \left[-A_{mn}^j J_{2m}(\alpha) J_{2n}(\beta) \sin\left(\frac{\delta_{x_{ij}}}{a_j} \alpha\right) \cos\left(\frac{\delta_{y_{ij}}}{b_j} \beta\right) \right. \\
 & - B_{mn}^j J_{2m}(\alpha) J_{2n+1}(\beta) \sin\left(\frac{\delta_{x_{ij}}}{a_j} \alpha\right) \sin\left(\frac{\delta_{y_{ij}}}{b_j} \beta\right) \\
 & + C_{mn}^j J_{2m+1}(\alpha) J_{2n}(\beta) \cos\left(\frac{\delta_{x_{ij}}}{a_j} \alpha\right) \cos\left(\frac{\delta_{y_{ij}}}{b_j} \beta\right) \\
 & \left. + D_{mn}^j J_{2m+1}(\alpha) J_{2n+1}(\beta) \cos\left(\frac{\delta_{x_{ij}}}{a_j} \alpha\right) \sin\left(\frac{\delta_{y_{ij}}}{b_j} \beta\right) \right] \\
 & \times \frac{2 \frac{a_i}{a_j} \alpha \cos\left(\frac{a_i}{a_j} \alpha\right)}{\left(\frac{a_i}{a_j} \alpha\right)^2 - (\frac{2p+1}{2}\pi)^2} \frac{2 \frac{b_i}{b_j} \beta \sin\left(\frac{b_i}{b_j} \beta\right)}{\left(\frac{b_i}{b_j} \beta\right)^2 - (q\pi)^2} d\alpha d\beta \\
 & = \gamma_{2p+1,2q}^i \epsilon_{2p+1} \epsilon_{2q} \Gamma_{2p+1,2q}^{-i} E_{2p+1,2q}^i, \forall m, n, s, t, p, q \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq N \quad (2.122)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \sum_{m,n \geq 0} D_{mn}^i \iint_{\mathbb{R}_+^2} \frac{2\alpha \cos(\alpha)}{\alpha^2 - (\frac{2p+1}{2}\pi)^2} J_{2m+1}(\alpha) \frac{2\beta \cos(\beta)}{\beta^2 - (\frac{2q+1}{2}\pi)^2} J_{2n+1}(\beta) d\alpha d\beta \\
 & + \sum_{j \neq i} \frac{a_i}{a_j} \sum_{m,n \geq 0} \iint_{\mathbb{R}_+^2} \left[A_{mn}^j J_{2m}(\alpha) J_{2n}(\beta) \sin\left(\frac{\delta_{x_{ij}}}{a_j} \alpha\right) \sin\left(\frac{\delta_{y_{ij}}}{b_j} \beta\right) \right. \\
 & - B_{mn}^j J_{2m}(\alpha) J_{2n+1}(\beta) \sin\left(\frac{\delta_{x_{ij}}}{a_j} \alpha\right) \cos\left(\frac{\delta_{y_{ij}}}{b_j} \beta\right) \\
 & - C_{mn}^j J_{2m+1}(\alpha) J_{2n}(\beta) \cos\left(\frac{\delta_{x_{ij}}}{a_j} \alpha\right) \sin\left(\frac{\delta_{y_{ij}}}{b_j} \beta\right) \\
 & \left. + D_{mn}^j J_{2m+1}(\alpha) J_{2n+1}(\beta) \cos\left(\frac{\delta_{x_{ij}}}{a_j} \alpha\right) \cos\left(\frac{\delta_{y_{ij}}}{b_j} \beta\right) \right] \\
 & \times \frac{2 \frac{a_i}{a_j} \alpha \cos\left(\frac{a_i}{a_j} \alpha\right)}{\left(\frac{a_i}{a_j} \alpha\right)^2 - (\frac{2p+1}{2}\pi)^2} \frac{2 \frac{b_i}{b_j} \beta \cos\left(\frac{b_i}{b_j} \beta\right)}{\left(\frac{b_i}{b_j} \beta\right)^2 - (\frac{2q+1}{2}\pi)^2} d\alpha d\beta \\
 & = \gamma_{2p+1,2q+1}^i \epsilon_{2p+1} \epsilon_{2q+1} \Gamma_{2p+1,2q+1}^{-i} E_{2p+1,2q+1}^i, \forall m, n, s, t, p, q \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq N \quad (2.123)
 \end{aligned}$$

Le calcul des intégrales simples qui apparaissent dans les équations (2.120)-(2.123) est effectué d'une manière analytique en utilisant de nouveau la formule de Cauchy. Leurs valeurs sont nulles. La démonstration est fournie dans l'annexe §A.6.

Les conditions aux limites ont permis d'avoir un système d'équations linéaires de $9 \times N$ équations à $6 \times N$ inconnues. Les amplitudes modales A_{mn}^i , B_{mn}^i , C_{mn}^i et D_{mn}^i

sont dépendantes de E_{pq}^i et F_{pq}^i . Le système d'équations linéaires se réduit alors à un système de $4 \times N$ équations à $4 \times N$ inconnues. Il suffit alors de résoudre ce système pour déterminer les $4 \times N$ amplitudes A_{mn}^i , B_{mn}^i , C_{mn}^i , et D_{mn}^i qui apparaissent dans l'expression du champ diffracté par l' $i^{\text{ème}}$ cavité (2.93).

2.5.2.2 Détermination des amplitudes A_{mn}^i , B_{mn}^i , C_{mn}^i , et D_{mn}^i

La combinaison des équations provenant de la continuité des vitesses et des pressions au niveau de la cavité permet d'avoir $4 \times N$ systèmes d'équations linéaires (2.124)-(2.127).

$$[A_{mn}^i][G_{m,n,s,t}^{0,0}] + \sum_{j \neq i} \sum_{\mu_j=0}^1 \sum_{\nu_j=0}^1 [\mathcal{A}_{mn}^{j,\mu_j,\nu_j}][GC_{m,n,s,t}^{0,0,\mu_j,\nu_j}] = [\Lambda_{s,t}^{0,0}], \quad 1 \leq i \leq N \quad (2.124)$$

$$[B_{mn}^i][G_{m,n,s,t}^{0,1}] + \sum_{j \neq i} \sum_{\mu_j=0}^1 \sum_{\nu_j=0}^1 [\mathcal{A}_{mn}^{j,\mu_j,\nu_j}][GC_{m,n,s,t}^{0,1,\mu_j,\nu_j}] = [\Lambda_{s,t}^{0,1}], \quad 1 \leq i \leq N \quad (2.125)$$

$$[C_{mn}^i][G_{m,n,s,t}^{1,0}] + \sum_{j \neq i} \sum_{\mu_j=0}^1 \sum_{\nu_j=0}^1 [\mathcal{A}_{mn}^{j,\mu_j,\nu_j}][GC_{m,n,s,t}^{1,0,\mu_j,\nu_j}] = [\Lambda_{s,t}^{1,0}], \quad 1 \leq i \leq N \quad (2.126)$$

$$[D_{mn}^i][G_{m,n,s,t}^{1,1}] + \sum_{j \neq i} \sum_{\mu_j=0}^1 \sum_{\nu_j=0}^1 [\mathcal{A}_{mn}^{j,\mu_j,\nu_j}][GC_{m,n,s,t}^{1,1,\mu_j,\nu_j}] = [\Lambda_{s,t}^{1,1}], \quad 1 \leq i \leq N \quad (2.127)$$

Où :

$$\mathcal{A}_{mn}^{j,\mu_j,\nu_j} = \begin{cases} A_{mn}^j & \text{si } (\mu_j, \nu_j) = (0, 0) \\ B_{mn}^j & \text{si } (\mu_j, \nu_j) = (0, 1) \\ C_{mn}^j & \text{si } (\mu_j, \nu_j) = (1, 0) \\ D_{mn}^j & \text{si } (\mu_j, \nu_j) = (1, 1) \end{cases} \quad (2.128)$$

$$\begin{aligned} G_{m,n,s,t}^{\mu_i,\nu_i} &= \iint_{\mathbb{R}_+^2} \frac{J_{2m+\mu_i}(\alpha) J_{2s+1+\mu_i}(\alpha) J_{2n+\nu_i}(\beta) J_{2t+1+\nu_i}(\beta)}{\alpha \beta \sqrt{\alpha^2 + \left(\frac{a_i}{b_i} \beta\right)^2 - (ka_i)^2}} d\alpha d\beta \\ &- \sum_{p,q \geq 0} \left(\frac{\pi^2}{\epsilon_{2p+\mu_i} \epsilon_{2q+\nu_i} \gamma_{2p+\mu_i, 2q+\nu_i}} \frac{\Gamma_{2p+\mu_i, 2q+\nu_i}^{+i}}{\Gamma_{2p+\mu_i, 2q+\nu_i}^{-i}} \frac{J_{2m+\mu_i} \left(\frac{2p+\mu_i}{2} \pi \right) J_{2s+1+\mu_i} \left(\frac{2p+\mu_i}{2} \pi \right)}{\frac{2p+\mu_i}{2} \pi} \right. \\ &\times \left. \frac{J_{2n+\nu_i} \left(\frac{2q+\nu_i}{2} \pi \right) J_{2t+1+\nu_i} \left(\frac{2q+\nu_i}{2} \pi \right)}{\frac{2q+\nu_i}{2} \pi} \right) \end{aligned} \quad (2.129)$$

$$\begin{aligned}
 GC_{m,n,s,t}^{\mu_i,\nu_i,\mu_j,\nu_j} &= (-1)^{\mu_j+\nu_j} \\
 &\times \iint_{\mathbb{R}_+^2} \frac{J_{2m+\mu_j}(\alpha) J_{2s+1+\mu_i}\left(\frac{a_i}{a_j}\alpha\right) J_{2n+\nu_j}(\beta) J_{2t+1+\nu_i}\left(\frac{b_i}{b_j}\beta\right)}{\frac{a_i}{a_j}\alpha \frac{b_i}{b_j}\beta \sqrt{\alpha^2 + \left(\frac{a_j}{b_j}\beta\right)^2 - (ka_j)^2}} \\
 &\times \cos\left(\frac{\delta_{x_{ij}}}{a_j}\alpha + (\mu_i + \mu_j)\frac{\pi}{2}\right) \cos\left(\frac{\delta_{y_{ij}}}{b_j}\beta + (\nu_i + \nu_j)\frac{\pi}{2}\right) d\alpha d\beta \quad (2.130)
 \end{aligned}$$

$$\Lambda_{s,t}^{\mu_i,\nu_i} = -2j^{\mu_i+\nu_i} A \frac{J_{2s+1+\mu_i}(k_x a_i)}{k_x a_i} \frac{J_{2t+1+\nu_i}(k_y b_i)}{k_y b_i} e^{jk_x \delta_{x_i}} e^{jk_y \delta_{y_i}} \quad (2.131)$$

Les termes $GC_{m,n,s,t}^{\mu_i,\nu_i,\mu_j,\nu_j}$ représentent les termes de couplages existant entre les cavités. Ces phénomènes de couplage seront étudiés dans le paragraphe suivant. Les $4 \times N$ amplitudes A_{mn}^i , B_{mn}^i , C_{mn}^i , et D_{mn}^i inconnues sont obtenues par inversion des systèmes par la méthode de Gauss-Seidel [58]. La méthode directe (factorisation LU, pivot de Gauss, etc.) n'a pas été utilisée à cause de la complexité du système : matrices de matrices. On appelle Ξ cette matrice. Cette méthode n'est valable que si la matrice Ξ est à diagonale dominante, c'est-à-dire $|\Xi_{ii}| \geq \sum_{j \neq i} |\Xi_{ij}| \forall i$. Ceci est vérifié sous l'hypothèse que les termes croisés représentant les termes de couplages restent faibles, même pour des petites distances entre cavités, par rapport à la solution du problème non couplé. La technique de résolution de Gauss-Seidel que nous utilisons est expliquée ici :

$$\mathbb{A}X = B \quad (2.132)$$

Où :

$$\mathbb{A} = L_* + U \quad (2.133)$$

$$\text{Où } L_* = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ et } U = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Le système peut être réécrit :

$$L_*X = B - UX \quad (2.134)$$

La méthode de Gauss-Seidel est une technique itérative qui permet de résoudre le côté gauche de l'équation (2.134), en utilisant la valeur précédente de x sur le côté droit. Analytiquement, cela peut être écrit sous la forme :

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j>i} a_{ij} x_j^{(k)} - \sum_{j<i} a_{ij} x_j^{(k+1)} \right), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.135)$$

La somme dans le calcul des $x_i^{(k+1)}$ nécessite tous les éléments $x^{(k)}$ à l'exception de $x_i^{(k)}$ lui-même. La procédure est poursuivie jusqu'à la convergence. Les valeurs initiales des $x^{(k)}$ sont arbitraires. Dans notre cas, la solution du problème non couplé a été considérée comme valeur initiale pour chaque amplitude afin de converger plus rapidement vers la solution du problème couplé puisque la solution exacte est considérée comme proche de la solution du problème non couplé.

2.5.3 Étude théorique des termes de couplage $GC_{m,n,s,t}^{\mu_i, \nu_i, \mu_j, \nu_j}$

2.5.3.1 Développement asymptotique des termes de couplage pour des rainures

Les coefficients de couplage sont donnés par la fonction $GC_{m,n,s,t}^{\mu_i, \nu_i, \mu_j, \nu_j}$ qui apparaît dans le système matriciel (2.130) et qui est proportionnelle à $GC_{\text{cavité}}^{\text{acoust}}$ donnée par l'équation (2.136). Cette expression résulte du développement des fonctions exponentielles en fonctions trigonométriques et de la parité à la fois des fonctions de Bessel et trigonométriques.

$$GC_{\text{cavité}}^{\text{acoust}} = \frac{1}{2} \iint_{\mathbb{R}^2} \frac{J_m(\alpha) J_s\left(\frac{a_i}{a_j} \alpha\right) J_n(\beta) J_t\left(\frac{b_i}{b_j} \beta\right)}{\frac{a_i}{a_j} \alpha \frac{b_i}{b_j} \beta \sqrt{\alpha^2 + \left(\frac{a_j}{b_j} \beta\right)^2 - (ka_j)^2}} e^{j \frac{\delta_{x_{ij}}}{a_j} \alpha} e^{j \frac{\delta_{y_{ij}}}{b_j} \beta} d\alpha d\beta \quad (2.136)$$

L'étude asymptotique des phénomènes de couplage en fonction de la fréquence f et de l'espacement entre les cavités se ramène donc à celle de $GC_{\text{cavité}}^{\text{acoust}}$.

Pour valider ces variations de couplage, on se propose de faire une analogie avec le modèle utilisé en électromagnétisme dans le cas d'un réseau de rainures [59]. Pour cela,

2.5 Généralisation du modèle à un réseau de cavités rectangulaires parallèles

nous allons faire tendre dans notre modèle les dimensions b_i et b_j vers l'infini afin de se rapprocher des conditions géométriques des rainures.

$$GC_{\text{rainure}}^{\text{racoust}} = \lim_{b_i, b_j \rightarrow \infty} GC_{\text{cavité}}^{\text{racoust}} \quad (2.137)$$

Dans la littérature les travaux effectués en électromagnétisme montrent que pour les rainures, l'expression de la fonction de couplage $GC_{\text{rainure}}^{\text{élec}}$ est donnée par [59] :

$$GC_{\text{rainure}}^{\text{élec}} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} \frac{J_m(\alpha) J_s\left(\frac{a_i}{a_j} \alpha\right)}{\sqrt{\alpha^2 - (ka_j)^2}} e^{j \frac{\delta_{x_{ij}}}{a_j} \alpha} e^{-\sqrt{\alpha^2 - (ka_j)^2} \tau} d\alpha \quad (2.138)$$

Le terme $e^{-\sqrt{\alpha^2 - (ka_j)^2} \tau}$ a été introduit pour pouvoir utiliser la méthode de la phase stationnaire. On effectue des changements de variable donnés par : $\alpha = ka_j \cos \theta$, $\frac{\delta_{x_{ij}}}{a_j} = w \cos \phi$ et $\tau = w \sin(\phi)$, l'équation (2.138) devient :

$$GC_{\text{rainure}}^{\text{élec}} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \int_{\mathcal{C}} J_m(ka_j \cos(\theta)) J_s(ka_i \cos(\theta)) e^{-jka_j w \cos(\theta - \phi)} e^{-\sqrt{\alpha^2 - (ka_j)^2} \tau} d\theta \quad (2.139)$$

Il est judicieux de remarquer que :

$$\alpha = ka_j \cos \theta = ka_j \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2} = \begin{cases} -\infty & \text{si } \theta = \pi + j\infty \\ +\infty & \text{si } \theta = j\infty \end{cases} \quad (2.140)$$

Par conséquent $\mathcal{C}$ est le chemin d'intégration allant de $\pi + j\infty$ à $j\infty$. L'équation (2.139) rentre alors dans le champ de la méthode de la phase stationnaire puisque l'argument de la fonction exponentielle $e^{-jka_j w \cos(\theta - \phi)}$ est minimum en $\theta = \phi$. Quand $\tau \rightarrow 0$, $\phi \rightarrow 0$. Et donc :

$$GC_{\text{rainure}}^{\text{élec}} = -\sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{j\frac{\pi}{4}} J_m(ka_j) J_s(ka_i) \frac{e^{-jk\delta_{x_{ij}}}}{\sqrt{k\delta_{x_{ij}}}} \quad (2.141)$$

On constate dans l'expression (2.141) une décroissance théorique en $(\delta_{x_{ij}})^{-\frac{1}{2}}$. $(\delta_{x_{ij}})$ représente la distance entre les deux centres des deux repères locaux relatifs aux deux rainures i et j . La figure 2.6 présente une comparaison entre les coefficients de couplage $GC_{\text{rainure}}^{\text{racoust}}$ et $GC_{\text{rainure}}^{\text{élec}}$ pour un réseau comprenant deux rainures en fonction de la distance $\delta_{x_{12}}$ (voir Figure 2.5). On se place volontairement en basse fréquence $f = 220 \text{ Hz}$ pour

2.5 Généralisation du modèle à un réseau de cavités rectangulaires parallèles

assurer un maximum de couplage. Les indices m , n , s et t dans le calcul des fonctions $GC_{\text{rainure}}^{\text{acoust}}$ et $GC_{\text{rainure}}^{\text{élec}}$ sont pris égaux à zéro. Les deux courbes obtenues sont proches, et on observe également comme en électromagnétisme, une décroissance en $(\delta_{x_{ij}})^{-\frac{1}{2}}$ (mode TM (transverse magnétique)) [59].

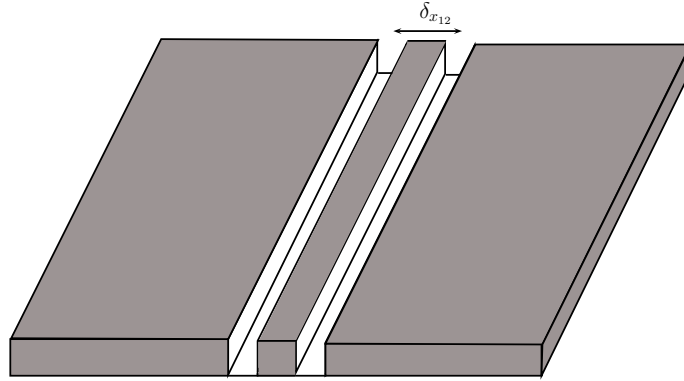


FIGURE 2.5 – Géométrie du réseau de deux rainures.

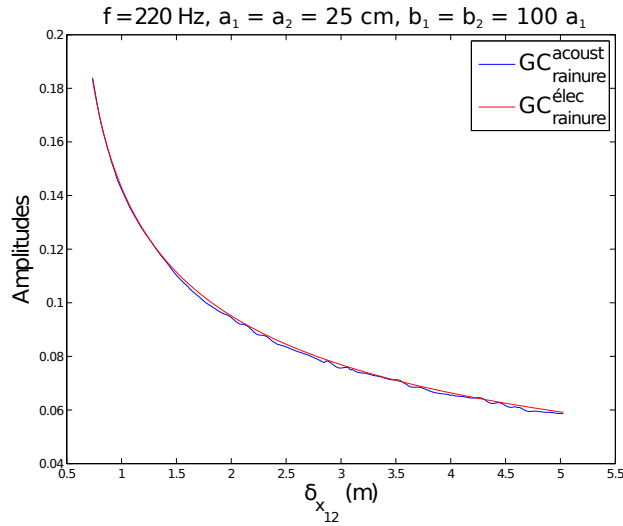


FIGURE 2.6 – Variation du coefficient de couplage pour un réseau contenant deux rainures à 220 Hz en fonction de la distance $\delta_{x_{12}}$.

Le développement en fonction de la fréquence a pu être effectué en utilisant un développement limité de la racine carrée dans les équations (2.137) et (2.138). Ces équations deviennent :

$$GC_{\text{rainure}}^{\text{acoust}}(\text{asympt}) = \lim_{b_i, b_j \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \iint_{\mathbb{R}^2} \frac{J_m(\alpha) J_s(\frac{a_i}{a_j} \alpha) J_n(\beta) J_t(\frac{b_i}{b_j} \beta)}{\frac{a_i}{a_j} \alpha \frac{b_i}{b_j} \beta k a_j} e^{j \frac{\delta_{x_{ij}}}{a_j} \alpha} e^{j \frac{\delta_{y_{ij}}}{b_j} \beta} d\alpha d\beta \quad (2.142)$$

$$GC_{\text{rainure}}^{\text{élec}}(\text{asympt}) = \int_{\mathbb{R}} \frac{J_m(\alpha) J_s(\frac{a_i}{a_j} \alpha)}{k a_j} e^{j \frac{\delta_{x_{ij}}}{a_j} \alpha} d\alpha \quad (2.143)$$

Ces expressions montrent une décroissance théorique en f^{-1} (k^{-1}). La figure 2.7 qui présente les variations des coefficients de couplage $GC_{\text{rainure}}^{\text{acoust}}(\text{asympt})$ et $GC_{\text{rainure}}^{\text{élec}}(\text{asympt})$ pour un espacement $\delta_{x_{12}} = 0,52 \text{ m}$ confirme cette décroissance en f^{-1} . Le coefficient de couplage $GC_{\text{rainure}}^{\text{acoust}}(\text{asympt})$ présente une pseudo-périodicité en $\frac{\lambda}{2}$ qui semble provenir de la distance $\delta_{x_{12}}$ qui sépare les centres des deux repères locaux des deux rainures. Ceci s'interprète par le fait que les phénomènes de couplage créent des interférences entre les rainures [60]. Le phénomène de couplage peut être interprété de la manière suivante : la première rainure génère un champ diffracté indépendamment de la deuxième. Le champ total ainsi obtenu (incident + diffracté de la première rainure) va jouer le rôle d'un nouveau champ incident pour la deuxième rainure. Celle-ci génère à son tour un champ diffracté qui va s'ajouter au champ total. Ce dernier va jouer à son tour et de nouveau, le rôle du champ incident pour la première rainure. Ceci présente une première interaction entre les deux rainures et ce processus est itératif. Cette interprétation se vérifie mathématiquement dans la méthode de Gauss-Seidel permettant d'inverser le système d'équations matricielles qui donne accès aux amplitudes du champ diffracté total.

2.5.3.2 Développement asymptotique des termes de couplage pour des cavités

Le développement asymptotique des termes de couplage $GC_{\text{cavité}}^{\text{acoust}}$ en fonction de la distance δ_{ij} (espacement entre les deux centres des deux repères locaux relatifs aux deux cavités i et j) n'a pas été effectué à cause de la difficulté de l'application de la méthode

2.5 Généralisation du modèle à un réseau de cavités rectangulaires parallèles

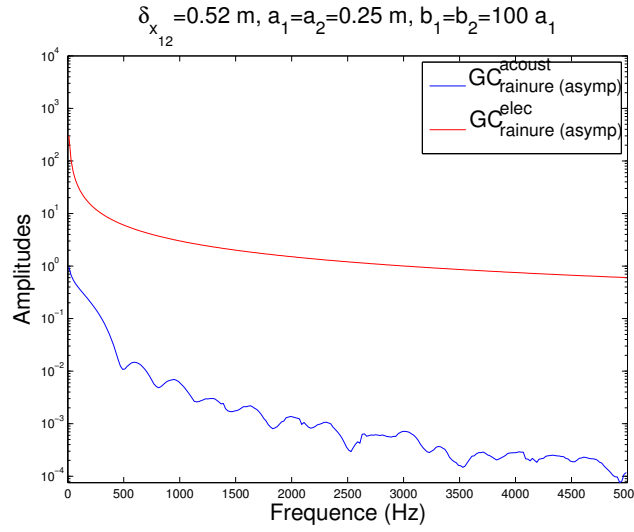


FIGURE 2.7 – Variation du coefficient de couplage pour un réseau de deux rainures espacées de $0,02\text{ m}$ en fonction de la fréquence.

de la phase stationnaire dans ce cas. Néanmoins, une étude numérique a été effectuée en utilisant des courbes de tendances. La figure 2.8 présente la variation du coefficient de couplage $GC_{\text{cavité}}^{\text{acoust}}$ pour un réseau de deux cavités rectangulaires alignées selon l'axe des x de taille $(0,5 \times 0,5)\text{ m}^2$ (voir figure 2.9). La variation du coefficient de couplage est étudiée en fonction de la distance entre les centres des deux cavités δ_{12} (seule la variable $\delta_{x_{12}}$ varie puisque $\delta_{y_{12}}$ est fixée à zéro (on note que $\delta_{12} = \sqrt{(\delta_{x_{12}})^2 + (\delta_{y_{12}})^2}$). Nous avons choisi une fréquence égale à 220 Hz pour assurer un maximum de couplage. On constate une décroissance en $(\delta_{12})^{-1}$.

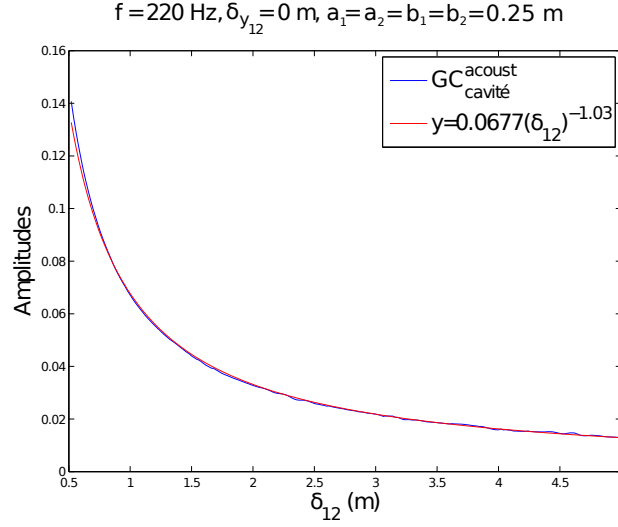


FIGURE 2.8 – Variation du coefficient de couplage pour un réseau de deux cavités de distance entre les deux centres des deux repères locaux égale à zéro selon l'axe des y ($\delta_{y_{12}} = 0 \text{ m}$) à 220 Hz en fonction de δ_{12} .

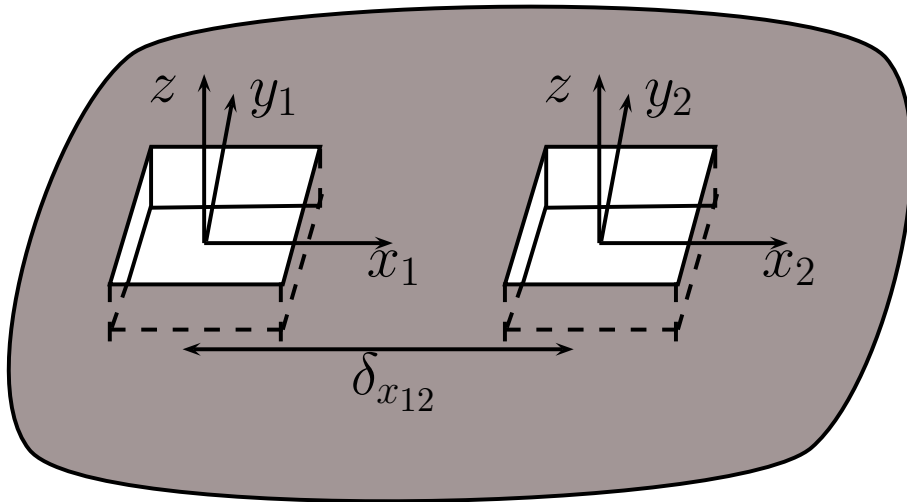


FIGURE 2.9 – Géométrie du réseau de deux cavités de distance entre les centres des repères locaux égale à zéro selon l'axe des y ($\delta_{y_{12}} = 0 \text{ m}$).

2.5 Généralisation du modèle à un réseau de cavités rectangulaires parallèles

La figure 2.10 présente la variation du coefficient de couplage $GC_{\text{cavité}}^{\text{acoust}}$ pour un réseau de deux cavités rectangulaires de taille $(0,5 \times 0,5) m^2$. La distance $\delta_{y_{12}}$ qui sépare les deux centres des deux repères locaux selon l'axe des y est prise égale à $0,52 m$ (voir figure 2.11). La variation étudiée est celle en fonction de la distance entre les centres des cavités δ_{12} (seule la variable $\delta_{x_{12}}$ varie puisque $\delta_{y_{12}}$ est fixée à $0,52 m$ (cela correspond à un espacement $e = 0,02 m$)). Nous avons choisi également une fréquence égale à $220 Hz$ et un espacement de $0,02 m$ selon l'axe des y pour assurer un maximum de couplage. On constate encore une décroissance en $(\delta_{12})^{-1}$. Les indices m, n, s et t sont pris égaux à zéro dans les calculs.

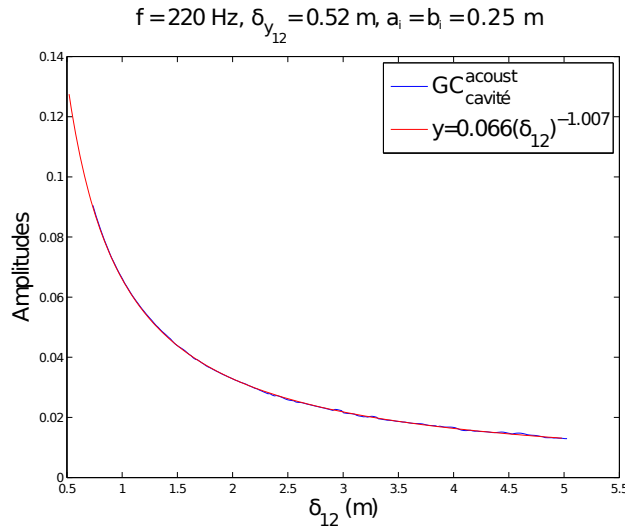


FIGURE 2.10 – Variation du coefficient de couplage pour un réseau de deux cavités de distance entre les centres des repères locaux égale à $0,52 m$ selon l'axe des y ($\delta_{y_{12}} = 0,52 m$) à $220 Hz$ en fonction de δ_{12} .

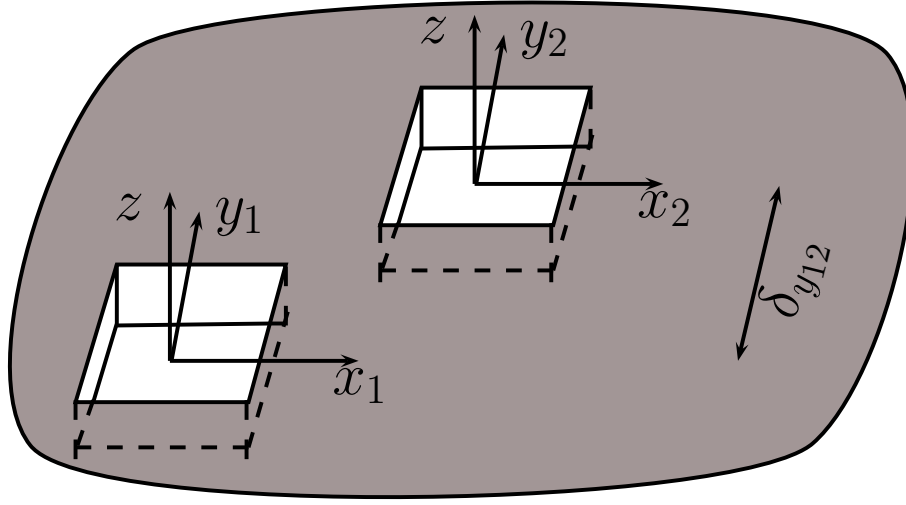


FIGURE 2.11 – Géométrie du réseau de deux cavités de distance $0,52\text{ m}$ entre les deux centres des deux repères locaux selon l'axe des y ($\delta_{y12} = 0,52\text{ m}$).

Le développement asymptotique en fréquence des termes de couplage dans le cas de deux cavités asymétriques a été effectué en utilisant un développement limité de la racine carrée dans l'équation (2.136). Cette équation devient :

$$GC_{\text{cavité (asyp)}}^{\text{acoust}} = \frac{1}{2} \iint_{\mathbb{R}^2} \frac{J_m(\alpha) J_s\left(\frac{a_i}{a_j} \alpha\right) J_n(\beta) J_t\left(\frac{b_i}{b_j} \beta\right)}{\frac{a_i}{a_j} \alpha \frac{b_i}{b_j} \beta k a_j} e^{j \frac{\delta_{xij}}{a_j} \alpha} e^{j \frac{\delta_{yij}}{b_j} \beta} d\alpha d\beta \quad (2.144)$$

Cette équation montre qu'on a une décroissance en f^{-1} (k^{-1}). Les figures 2.12 et 2.13 présentent la variation des coefficients de couplage $GC_{\text{cavité}}^{\text{acoust}}$ et $GC_{\text{cavité (asyp)}}^{\text{acoust}}$ en fonction de la fréquence pour un réseau de 2 cavités de taille $(0,5 \times 0,5)\text{ m}^2$. Dans le cas de la figure 2.12, la distance entre les deux centres des deux repères locaux est égale à zéro selon l'axe des y ($\delta_{y12} = 0\text{ m}$) et égale à $0,52\text{ m}$ selon l'axe des x (voir figure 2.9). Dans le cas de la figure 2.13, la distance entre les deux centres des deux repères locaux est égale à $0,52\text{ m}$ selon l'axe des y ($\delta_{y12} = 0,52\text{ m}$) et égale à $0,52\text{ m}$ selon l'axe des x (voir figure 2.11). Les décroissances similaires des deux fonctions $GC_{\text{cavité}}^{\text{acoust}}$ et $GC_{\text{cavité (asyp)}}^{\text{acoust}}$ à partir de 1000 Hz confirment la variation en f^{-1} . Comme dans le cas des rainures, le coefficient de couplage $GC_{\text{cavité}}^{\text{acoust}}$ présente une pseudo périodicité en $\frac{\lambda}{2}$ qui semble provenir de la distance δ_{12} qui sépare les repères locaux centrés sur les deux cavités. Le même raisonnement que pour

2.5 Généralisation du modèle à un réseau de cavités rectangulaires parallèles

les rainures peut être effectué pour interpréter ce phénomène.

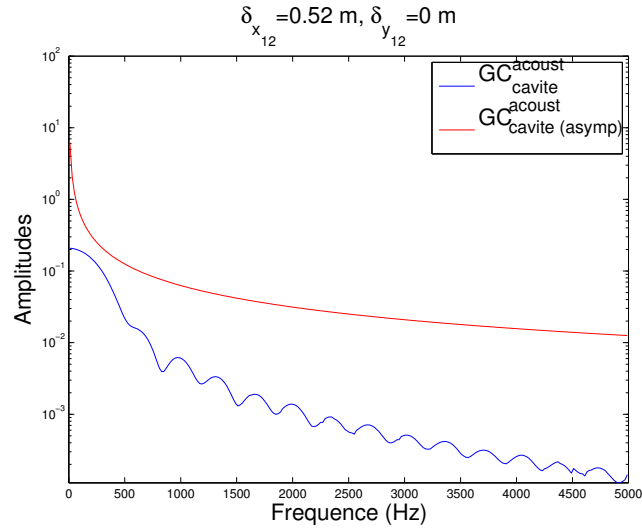


FIGURE 2.12 – Variation du coefficient de couplage pour un réseau de deux cavités espacées de $0,02 \text{ m}$ selon l'axe des x en fonction de la fréquence.

2.5 Généralisation du modèle à un réseau de cavités rectangulaires parallèles

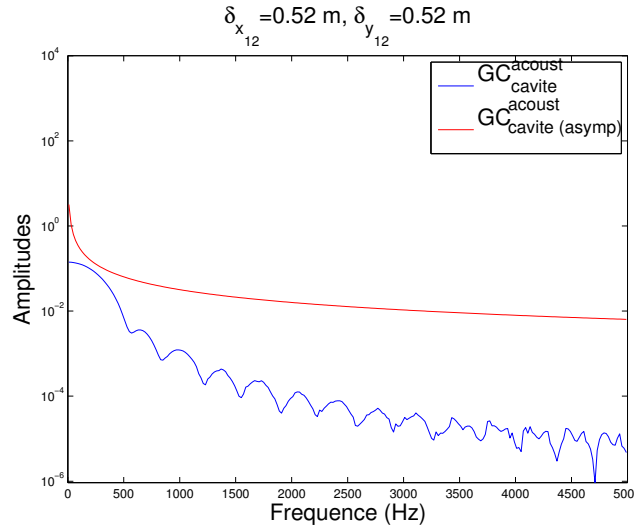


FIGURE 2.13 – Variation du coefficient de couplage pour un réseau de deux cavités espacées de $0,02\text{ m}$ selon l'axe des x et selon l'axe des y en fonction de la fréquence.

Cette étude du couplage a permis de pousser les limites de notre modèle au cas d'un réseau de rainures. Nous avons comparé l'expression analytique des termes de couplage issue de l'électromagnétisme avec celle issue de notre modèle en prenant les dimensions selon l'axe des y très grandes par rapport à celles selon l'axe des x . La bonne concordance obtenue a mis en évidence l'analogie acoustique-électromagnétisme mode TM. La décroissance en f^{-1} et avec l'inverse de la distance entre les cavités a été constatée. Cette décroissance sera également observée dans le chapitre 3 dédié à l'expérience.

On note que la fonction $GC_{\text{cavité}}^{\text{acoust}}$ définissant les termes de couplage ne dépend pas de la profondeur des cavités. Ceci s'interprète d'un point de vu physique par le fait que l'interaction entre les cavités s'effectue uniquement au dessus du réseau.

2.6 Cas du réseau de cavités rectangulaires non parallèles

On considère que les repères locaux (O_i, x_i, y_i, z) ne sont plus parallèles. Ces derniers ne sont plus définis par une simple translation du repère de référence. La transformation est donc la combinaison d'une rotation et d'une translation. Si l'on note $\mathcal{T}$ une translation et $\mathcal{R}$ une rotation, alors $\mathcal{T} \circ \mathcal{R} \neq \mathcal{R} \circ \mathcal{T}$. Pour cela il est indispensable de bien définir la relation qui existe entre les repères locaux et le repère de référence. Soit M un point de l'espace qui a pour coordonnées (x, y) et (x_i, y_i) respectivement dans le repère de référence (O, x, y) et dans le repère local (O_i, x_i, y_i) . Les axes de ce dernier font un angle θ_i avec ceux du repère de référence. Soit d_x (respectivement d_y) la distance entre le projeté du point M sur (O_i, x_i) (respectivement (O_i, y_i)) selon la direction (O_i, y_i) (respectivement (O_i, x_i)) et le point d'intersection entre l'axe (O_i, x_i) (respectivement (O_i, y_i)) et la droite passant par M et perpendiculaire à (O, x) (respectivement (O, y)). Ces explications sont illustrées dans la figure 2.14. La géométrie euclidienne permet d'avoir la relation entre les repères locaux et le repère de référence, donnée par l'équation (2.145).

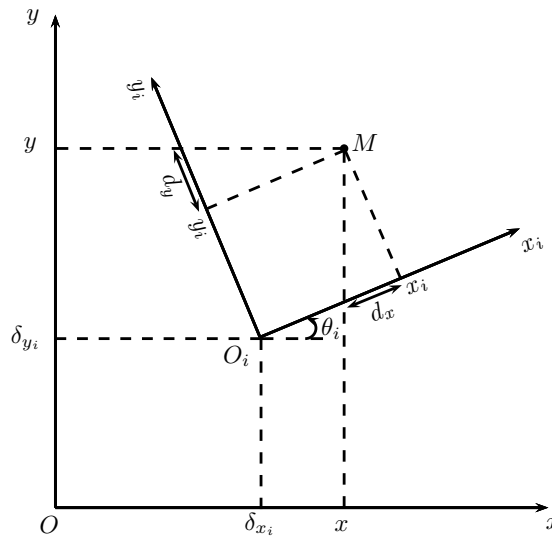


FIGURE 2.14 – Position du repère local par rapport au repère de référence

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix}}_{\text{rotation}} + \underbrace{\begin{pmatrix} \delta_{x_i} \\ \delta_{y_i} \end{pmatrix}}_{\text{translation}} \quad (2.145)$$

À partir de l'équation (2.145), on peut exprimer les relations entre les coordonnées des différents repères locaux par les équations (2.146) et (2.147).

$$x_j = \cos(\theta_{ij}) x_i - \sin(\theta_{ij}) y_i + \delta_{x_{ij}} \cos \theta_j + \delta_{y_{ij}} \sin \theta_j \quad (2.146)$$

$$y_j = \sin(\theta_{ij}) x_i + \cos(\theta_{ij}) y_i - \delta_{x_{ij}} \sin \theta_j + \delta_{y_{ij}} \cos \theta_j \quad (2.147)$$

Où :

$$\theta_{ij} = \theta_i - \theta_j \quad (2.148)$$

$\delta_{x_{ij}}$ et $\delta_{y_{ij}}$ sont données par les équations (2.105) et (2.106).

On applique la même procédure utilisée dans le cas d'un réseau à cavités parallèles pour déterminer les amplitudes inconnues : A_{mn}^i , B_{mn}^i , C_{mn}^i et D_{mn}^i . À cause de la complexité des équations issues de l'application des conditions aux limites, les détails de calcul ne seront pas présentés. Néanmoins, on donne le système d'équations final permettant d'extraire ces $4 \times N$ amplitudes inconnues.

$$[A_{mn}^i][G_{m,n,s,t}^{0,0}] + \sum_{j \neq i} \sum_{\mu_j=0}^1 \sum_{\nu_j=0}^1 [\mathcal{A}_{mn}^{j,\mu_j,\nu_j}][\mathcal{GC}_{m,n,s,t}^{0,0,\mu_j,\nu_j}] = [\Lambda_{s,t}^{0,0,\theta_i}], \quad 1 \leq i \leq N \quad (2.149)$$

$$[B_{mn}^i][G_{m,n,s,t}^{0,1}] + \sum_{j \neq i} \sum_{\mu_j=0}^1 \sum_{\nu_j=0}^1 [\mathcal{A}_{mn}^{j,\mu_j,\nu_j}][\mathcal{GC}_{m,n,s,t}^{0,1,\mu_j,\nu_j}] = [\Lambda_{s,t}^{0,1,\theta_i}], \quad 1 \leq i \leq N \quad (2.150)$$

$$[C_{mn}^i][G_{m,n,s,t}^{1,0}] + \sum_{j \neq i} \sum_{\mu_j=0}^1 \sum_{\nu_j=0}^1 [\mathcal{A}_{mn}^{j,\mu_j,\nu_j}][\mathcal{GC}_{m,n,s,t}^{1,0,\mu_j,\nu_j}] = [\Lambda_{s,t}^{1,0,\theta_i}], \quad 1 \leq i \leq N \quad (2.151)$$

$$[D_{mn}^i][G_{m,n,s,t}^{1,1}] + \sum_{j \neq i} \sum_{\mu_j=0}^1 \sum_{\nu_j=0}^1 [\mathcal{A}_{mn}^{j,\mu_j,\nu_j}][\mathcal{GC}_{m,n,s,t}^{1,1,\mu_j,\nu_j}] = [\Lambda_{s,t}^{1,1,\theta_i}], \quad 1 \leq i \leq N \quad (2.152)$$

Où :

$$\begin{aligned}
 & \mathcal{GC}_{m,n,s,t}^{\mu_i, \nu_i, \mu_j, \nu_j} \\
 &= (-1)^{\mu_j + \nu_j} \left\{ \iint_{\mathbb{R}_+^2} \frac{J_{2m+\mu_j}(\alpha) J_{2m+\nu_j}(\alpha)}{2} \right. \\
 & \times \left[\left(\frac{J_{2s+1+\mu_i}(\ell_1(\alpha, \beta))}{\ell_1(\alpha, \beta)} \frac{J_{2t+1+\nu_i}(\ell_2(\alpha, \beta))}{\ell_2(\alpha, \beta)} + \frac{J_{2s+1+\mu_i}(\ell_3(\alpha, \beta))}{\ell_3(\alpha, \beta)} \frac{J_{2t+1+\nu_i}(\ell_4(\alpha, \beta))}{\ell_4(\alpha, \beta)} \right) \right. \\
 & \times \cos \left(\Delta_x \alpha + (\mu_i + \mu_j) \frac{\pi}{2} \right) \cos \left(\Delta_y \beta + (\nu_i + \nu_j) \frac{\pi}{2} \right) \\
 & + \left(-\frac{J_{2s+1+\mu_i}(\ell_1(\alpha, \beta))}{\ell_1(\alpha, \beta)} \frac{J_{2t+1+\nu_i}(\ell_2(\alpha, \beta))}{\ell_2(\alpha, \beta)} + \frac{J_{2s+1+\mu_i}(\ell_3(\alpha, \beta))}{\ell_3(\alpha, \beta)} \frac{J_{2t+1+\nu_i}(\ell_4(\alpha, \beta))}{\ell_4(\alpha, \beta)} \right) \\
 & \times \sin \left(\Delta_x \alpha + (\mu_i + \mu_j) \frac{\pi}{2} \right) \sin \left(\Delta_y \beta + (\nu_i + \nu_j) \frac{\pi}{2} \right) \left. \right] d\alpha d\beta \\
 & - \sum_{p,q \geq 0} (-1)^{p+q} \frac{\pi^2}{\epsilon_{2p+\mu_i} \epsilon_{2q+\nu_i} \gamma_{2p+\mu_i, 2q+\nu_i}} \frac{\Gamma_{2p+\mu_i, 2q+\nu_i}^+ a_i}{\Gamma_{2p+\mu_i, 2q+\nu_i}^- a_j} \\
 & \times \iint_{\mathbb{R}_+^2} \frac{J_{2m+\mu_j}(\alpha) J_{2m+\nu_j}(\alpha)}{2} \\
 & \times \left[\left(\frac{\sin(\ell_1(\alpha, \beta) + \mu_i \frac{\pi}{2})}{\ell_1^2(\alpha, \beta) - (\frac{2p+\mu_i}{2}\pi)^2} \frac{\sin(\ell_2(\alpha, \beta) - \nu_i \frac{\pi}{2})}{\ell_2^2(\alpha, \beta) - (\frac{2q+\nu_i}{2}\pi)^2} + \frac{\sin(\ell_3(\alpha, \beta) + \mu_i \frac{\pi}{2})}{\ell_3^2(\alpha, \beta) - (\frac{2p+\mu_i}{2}\pi)^2} \frac{\sin(\ell_4(\alpha, \beta) - \nu_i \frac{\pi}{2})}{\ell_4^2(\alpha, \beta) - (\frac{2q+\nu_i}{2}\pi)^2} \right) \right. \\
 & \times \cos \left(\Delta_x \alpha + (\mu_i + \mu_j) \frac{\pi}{2} \right) \cos \left(\Delta_y \beta + (\nu_i + \nu_j) \frac{\pi}{2} \right) \\
 & + \left(-\frac{\sin(\ell_1(\alpha, \beta) + \mu_i \frac{\pi}{2})}{\ell_1^2(\alpha, \beta) - (\frac{2p+\mu_i}{2}\pi)^2} \frac{\sin(\ell_2(\alpha, \beta) - \nu_i \frac{\pi}{2})}{\ell_2^2(\alpha, \beta) - (\frac{2q+\nu_i}{2}\pi)^2} + \frac{\sin(\ell_3(\alpha, \beta) + \mu_i \frac{\pi}{2})}{\ell_3^2(\alpha, \beta) - (\frac{2p+\mu_i}{2}\pi)^2} \frac{\sin(\ell_4(\alpha, \beta) - \nu_i \frac{\pi}{2})}{\ell_4^2(\alpha, \beta) - (\frac{2q+\nu_i}{2}\pi)^2} \right) \\
 & \times \sin \left(\Delta_x \alpha + (\mu_i + \mu_j) \frac{\pi}{2} \right) \sin \left(\Delta_y \beta + (\nu_i + \nu_j) \frac{\pi}{2} \right) \left. \right] d\alpha d\beta \Big\}, \forall p, q, m, n, s, t \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq N
 \end{aligned}
 \tag{2.153}$$

$$\begin{aligned}
 \Lambda_{s,t}^{\mu_i, \nu_i, \theta_i} &= -2j^{\mu_i + \nu_i} A \frac{J_{2s+1+\mu_i}(a_i(k_x \cos \theta_i + k_y \sin \theta_i))}{a_i(k_x \cos \theta_i + k_y \sin \theta_i)} \frac{J_{2t+1+\nu_i}(b_i(-k_x \sin \theta_i + k_y \cos \theta_i))}{b_i(-k_x \sin \theta_i + k_y \cos \theta_i)} \\
 &\times e^{-jk_x \delta_{x_i}} e^{-jk_y \delta_{y_i}}
 \end{aligned}
 \tag{2.154}$$

Avec :

$$\ell_1(\alpha, \beta) = \frac{a_i}{a_j} \cos(\theta_{ij})\alpha + \frac{a_i}{b_j} \sin(\theta_{ij})\beta \quad (2.155)$$

$$\ell_2(\alpha, \beta) = \frac{b_i}{b_j} \cos(\theta_{ij})\beta + \frac{b_i}{a_j} \sin(\theta_{ij})\alpha \quad (2.156)$$

$$\ell_3(\alpha, \beta) = \frac{a_i}{a_j} \cos(\theta_{ij})\alpha - \frac{a_i}{b_j} \sin(\theta_{ij})\beta \quad (2.157)$$

$$\ell_4(\alpha, \beta) = \frac{b_i}{b_j} \cos(\theta_{ij})\beta - \frac{b_i}{a_j} \sin(\theta_{ij})\alpha \quad (2.158)$$

$$\Delta_x = \frac{\delta_{x_{ij}}}{a_j} \cos \theta_j + \frac{\delta_{y_{ij}}}{a_j} \sin \theta_j \quad (2.159)$$

$$\Delta_y = \frac{\delta_{y_{ij}}}{b_j} \cos \theta_j - \frac{\delta_{x_{ij}}}{b_j} \sin \theta_j \quad (2.160)$$

Dans le modèle développé pour des réseaux de cavités rectangulaires parallèles, on a montré analytiquement que l'intégrale sous la sommation discrète des indices p et q dans l'équation représentant les coefficients de couplages (équation (2.130)) est nulle. Pour cette même raison, on suppose que l'intégrale double sous la sommation discrète des indices p et q dans l'équation (2.153) est prise égale à zéro. Cette hypothèse est vérifiée par le bon accord observé entre les résultats théoriques et expérimentaux dans le chapitre suivant (voir §3.6.4).

2.7 Conclusion

Dans ce chapitre, un modèle analytique, s'inspirant de la méthode KP, a été développé dans le but d'étudier la diffraction d'une onde acoustique par une cavité rectangulaire. Une généralisation de ce modèle analytique au cas d'un réseau de cavités rectangulaires parallèles a été développée par juxtaposition de plusieurs cavités élémentaires. Une adaptation au cas où les cavités ne sont plus parallèles a été également effectuée. Ce modèle permet donc d'étudier la diffraction d'une onde acoustique par un réseau de cavités rectangulaires parallèles ou non parallèles. Il sépare bien les différents champs acoustiques mis en jeu au dessus du réseau : champ incident, champ réfléchi spéculaire et champ

diffracté.

Ce modèle théorique est valable pour des réseaux aperiodiques où les différentes cavités mises en jeu peuvent être de tailles différentes et espacées d'une façon non périodique.

Une étude théorique du couplage entre cavités a été effectuée. Cette étude a montré une décroissance des termes de couplage en f^{-1} et avec l'inverse de la distance entre les cavités. Cette étude a montré aussi que les coefficients de couplage présentent une pseudo-périodicité en $\frac{\lambda}{2}$ qui semble provenir de la distance qui sépare les repères locaux centrés sur les cavités.

Dans le chapitre suivant une validation de ce modèle avec l'expérience et la méthode des éléments finis est présentée.

3

Validation du modèle développé

3.1 Introduction

Le modèle théorique ayant été développé pour des réseaux de géométrie quelconque contenant des cavités rectangulaires, une campagne de mesure doit être menée en guise de validation. Des essais ont été effectués en chambre sourde sur différentes géométries et agencements de cavités rectangulaires. Pour appuyer cette étape de validation expérimentale, des comparaisons avec les résultats de calculs effectués par la méthode des éléments finis, ont été effectuées. Il a fallu d'abord adapter notre modèle théorique au cas des ondes sphériques rencontrées dans l'expérience. Pour cela, une décomposition du champ incident sphérique en ondes planes a été développée. Cette étape a permis aussi d'étudier la convergence des résultats du modèle en fonction de certains paramètres de calcul afin d'optimiser les temps de simulation.

3.2 Décomposition en ondes planes du champ incident sphérique

Notre modèle permet de déterminer le potentiel des vitesses réfléchi diffracté Φ_d par une cavité excitée par une onde plane acoustique d'incidence quelconque. Afin de se ramener aux conditions expérimentales, un champ acoustique sphérique est donc décomposé sur une base d'ondes planes [3]. Cette décomposition a été intégrée dans le modèle numérique. Le champ total diffracté est calculé par sommation de tous les champs diffractés générés par les différentes ondes planes issues de la décomposition.

Dans la simulation du modèle, les matrices dans les équations (2.56)-(2.59) ont été tronquées à la taille $S^2 \times S^2$. Où S est la valeur maximale de m , n , s et t . D'après le paragraphe 3.5 plusieurs simulations nous ont permis de constater qu'une convergence satisfaisante est obtenue pour $S \geq 2$ en basses fréquences et $S \geq 5$ en hautes fréquences en fonction de la taille des cavités (voir §3.5).

Cette technique consiste à décomposer le champ incident sphérique Φ_{inc}^{sph} en une somme d'ondes planes. Les amplitudes complexes $\tilde{A}$ des ondes planes sont déterminées par transformée de Fourier spatiale bidimensionnelle du champ incident sur le plan $z = 0$ [61, 62] :

$$\tilde{A}(k_x, k_y, 0) = \iint_{\mathbb{R}^2} \Phi_{inc}^{sph}(x, y, 0) e^{-j(k_x x + k_y y)} dx dy \quad (3.1)$$

La transformée de Fourier (3.1) est déterminée numériquement grâce à un algorithme de transformée de Fourier rapide (FFT). Les pas d'échantillonnage dx et dy ainsi que les nombres de points N_x et N_y de la FFT doivent vérifier les critères suivants :

- Afin que le champ incident soit échantillonné sans perte d'information, les pas d'échantillonnage dx et dy doivent respecter le théorème de Shannon [61] :

$$dx < \frac{c}{2f} \text{ et } dy < \frac{c}{2f} \quad (3.2)$$

où c représente la célérité des ondes acoustiques dans l'air et f la fréquence du champ incident.

- Les dimensions L_x et L_y de la grille d'échantillonnage doivent être assez importantes pour que le champ incident soit négligeable en dehors de cette grille (ici 100 m suffisent).
- Les nombres de points d'échantillonnage N_x et N_y doivent être des puissances de 2 afin que l'algorithme FFT fournisse un résultat exact.

$$N_x = 2^{E^+(\log_2(\frac{L_x}{d_x}))} \quad (3.3)$$

$$N_y = 2^{E^+(\log_2(\frac{L_y}{d_y}))} \quad (3.4)$$

où $E^+(var) = E(var) + 1$. $E(var)$ représente la partie entière du nombre décimal var .

3.3 Procédure expérimentale

Une campagne d'essais a été effectuée dans la chambre sourde de l'INRS afin de mesurer le champ de pression acoustique réfléchi total au dessus des parois à reliefs formées par des cavités rectangulaires et le comparer avec les résultats théoriques obtenus avec notre propre modèle.

Les cavités présentent un fond supposé infiniment rigide (acier ou carrelage). Quant aux bords, ils sont en polystyrène recouverts de carrelages et supposés ainsi infiniment rigides.

La source choisie est constituée d'un haut-parleur Pionner *TS E1077* de 10 cm de diamètre, fixé entre une corne et un corps cylindrique. La source ainsi constituée génère des ondes sphériques [63]. Ce haut-parleur est relié par l'intermédiaire d'un amplificateur et d'un égaliseur à un générateur de bruit Brüel & Kjaer (B&K) de type 1405 utilisé comme source de bruit blanc. L'égaliseur permet d'équilibrer la courbe de réponse globale de l'ensemble du dispositif émetteur. Les microphones utilisés dans le système d'acquisition sont des $\frac{1}{4}$ de pouce B&K de type 4935. Ils sont connectés à un conditionneur B&K de type Deltatron 2694. Le signal ainsi amplifié est adressé à la chaîne d'acquisition NetdB.

3.3 Procédure expérimentale

L'acquisition des signaux est réalisée à une fréquence d'échantillonnage $F_e = 25600 \text{ Hz}$ sur une durée de 30 s. Ces propos sont illustrés dans la figure 3.1.

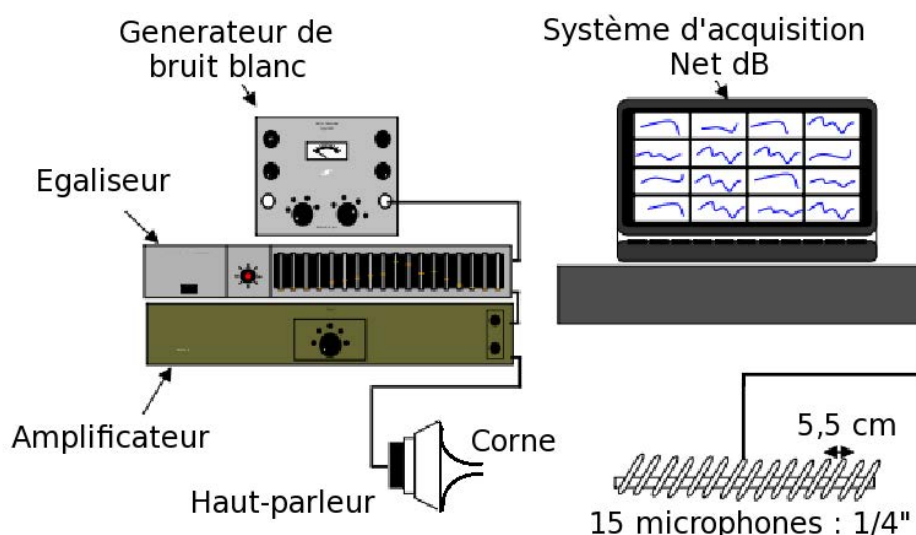


FIGURE 3.1 – Chaîne de mesure.

La mesure du profil de pression acoustique au dessus des parois est réalisée avec une antenne de 15 microphones. Les microphones sont espacés de $5,5 \text{ cm}$ les uns des autres. La pression acoustique est mesurée sur une ligne de 45 capteurs. La mesure est donc effectuée en trois étapes pour trois positions juxtaposées de l'antenne de 15 microphones. Ces propos sont illustrés dans la Figure 3.2 dans le cas d'une paroi contenant une seule cavité.

La mesure du champ de pression acoustique a été effectuée à $0,2 \text{ m}$ au-dessus des parois étudiées. Dans toutes les courbes de validation présentées dans la suite, l'axe des x présente l'emplacement des microphones et l'axe des y présente la pression acoustique normalisée par rapport à la pression acoustique mesurée par le microphone central.

Le modèle analytique est développé pour des surfaces infinies. Pour cette raison des mesures pour $|x| > 1,21 \text{ m}$ n'ont pas été réalisées et la source sphérique a été placée à une hauteur proche de la paroi ($< 1 \text{ m}$) afin d'éviter les phénomènes de bord dus à la taille finie de la structure étudiée.

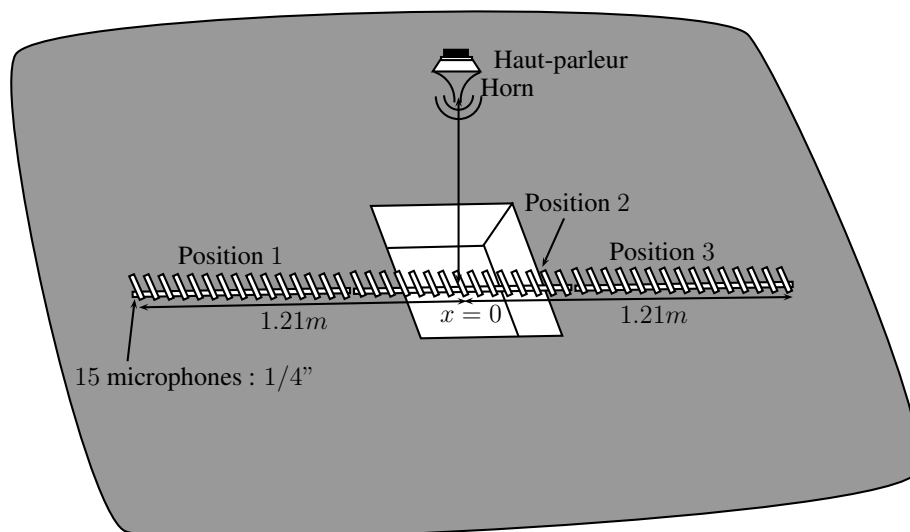


FIGURE 3.2 – Positions juxtaposées de l'antenne de 15 microphones

3.4 Modélisation en éléments finis du champ de pression acoustique au dessus des réseaux étudiés

La méthode des éléments finis est utilisée dans de nombreux domaines afin de résoudre des problèmes plus ou moins complexes d'acoustique, de mécanique, d'ingénierie et de physique. Dans le domaine de l'acoustique, son utilité principale réside dans le fait qu'elle permet de calculer le champ de pression acoustique d'une configuration, même complexe, de sources, matériaux et milieu de propagation.

Le principe de la modélisation dans notre cas consiste à découper en deux sections la structure étudiée (figure 3.3). La première section est une plaque d'acier avec une masse volumique $\rho = 7850 \text{ Kg m}^{-3}$ et une vitesse de propagation $v = 6400 \text{ m s}^{-1}$ incluant une cavité ou un réseau de cavités. Le choix de l'acier permet d'assurer une très forte réflexion acoustique ($R = 1$) sur les bords comme dans les conditions du modèle théorique. La deuxième section est un volume d'air qui simule l'élément de propagation. La surface étudiée est insonifiée par une source sphérique harmonique placée au-dessus. En périphérie de ces deux sections, une terminaison anéchoïque de type Perfectly Matched Layers

(PML) permet d'assurer une transmission totale de l'onde et donc aucune réflexion : condition de champ libre [53].

Cette simulation a été réalisée à l'aide du logiciel d'éléments finis Comsol ® Multi-physics 4.0.

D'une manière générale, chacune de ces sections est échantillonnée en une multitude de petits volumes élémentaires afin de discrétiser la structure. Cela demande, dans la plupart des cas, de redéfinir et d'approximer la géométrie réelle. Il faut ensuite établir un maillage définissant le pavage de la structure en plusieurs ensembles qui seront les éléments finis. Il existe de nombreux types d'éléments finis, du simple cube au tétraèdre ou encore des formes plus complexes. Nous avons choisi dans cette modélisation des éléments tétraédriques qui minimisent le nombre de nœuds.

Chaque élément possède des nœuds placés à différentes positions où seront calculées les solutions acoustiques locales. Ces nœuds peuvent être placés aux sommets ou au centre de l'élément mais aussi au milieu des arêtes. Le maillage ainsi établi est irrégulier. Les zones critiques (les interstices des cavités étudiées dans notre cas) sont raffinées afin d'obtenir localement une meilleure précision.

Le principe de base de la méthode des éléments finis consiste alors à résoudre de manière discrète des équations aux dérivées partielles définies sur ces domaines et comportant des conditions aux limites afin d'assurer l'existence et l'unicité de la solution. Il est important de noter que toute solution sera donc une approximation. La validation de ces solutions est bien souvent effectuée par convergence, une amélioration progressive de la précision du maillage est alors effectuée afin de s'assurer que l'on se dirige vers un même résultat. La phase de validation inclut aussi la vérification de la réponse du modèle avec des données expérimentales et analytiques.

Les mêmes paramètres géométriques ont été évidemment pris en compte dans le modèle analytique, l'expérience et dans le calcul des éléments finis pour pouvoir comparer

les trois approches.

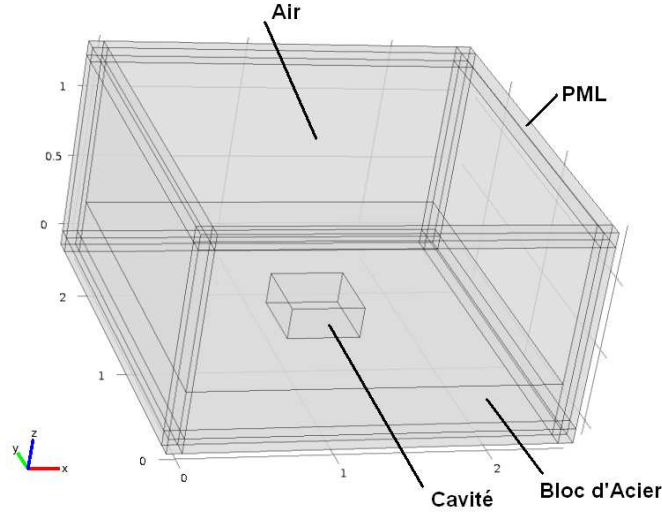


FIGURE 3.3 – Principe de modélisation en éléments finis

3.5 Convergence du modèle

Plusieurs simulations nous ont permis de constater qu'une convergence satisfaisante est obtenue pour $S = 2$ (S : valeur maximale de m , n , s et t) en basses fréquences ($f < 780 \text{ Hz}$) et $S = 5$ en hautes fréquences ($f > 1000 \text{ Hz}$). La figure 3.4 présente le profil de pression acoustique calculé pour 45 capteurs (voir figure 3.2) à $0,02 \text{ m}$ au dessus d'une cavité de taille $(0,48 \times 1,00 \times 0,21) \text{ m}^3$ excitée par une source sphérique (voir §3.2) située à $0,86 \text{ m}$ pour plusieurs fréquences : 230 Hz , 780 Hz , 1100 Hz et 1900 Hz . Cette figure illustre en fait la convergence de ces profils en fonction de l'ordre S et des temps de calcul. La simulation a été effectuée sur un processeur Xeon $3,07 \text{ GHz}$ avec une mémoire volatile (RAM) de 8 Go .

Le tableau 3.1 résume les ordres et les temps de calcul nécessaires pour obtenir la convergence.

3.5 Convergence du modèle

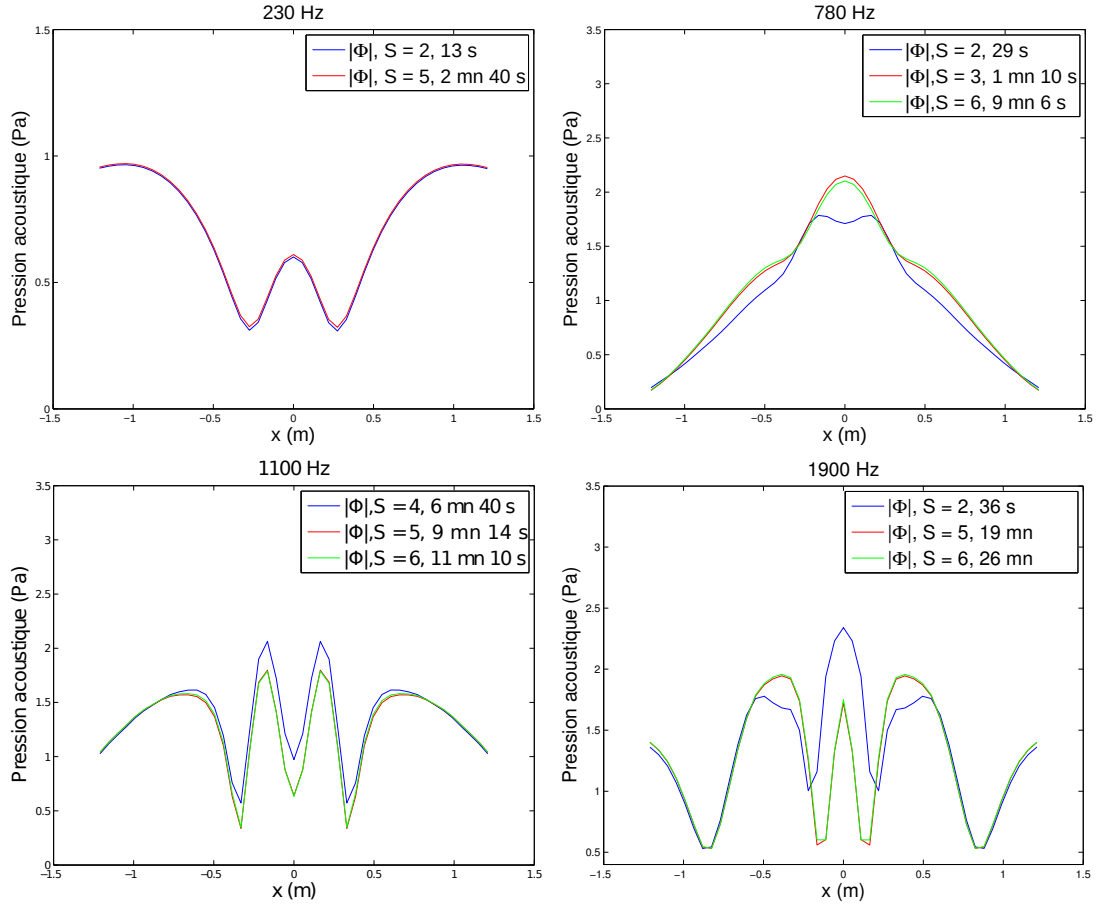


FIGURE 3.4 – Convergence du modèle analytique pour une cavité de taille $(0,48 \times 1,00 \times 0,21) m^3$ excitée par une source sphérique située à $0,86 m$ pour plusieurs fréquences : 230 Hz, 780 Hz, 1100 Hz et 1900 Hz.

	Ordre S	Temps de calcul
230 Hz	2	13 s
780 Hz	3	1 mn 10 s
1100 Hz	5	9 mn 14 s
1900 Hz	5	19 mn

TABLE 3.1 – Ordres et temps de calcul nécessaires pour obtenir la convergence du modèle en 45 points pour une cavité de taille $(0,48 \times 1,00 \times 0,21) m^3$ excitée par une source sphérique située à $0,86 m$ pour plusieurs fréquences : 230 Hz, 780 Hz, 1100 Hz et 1900 Hz.

3.6 Validation du modèle analytique développé

3.6.1 Cas d'une cavité excitée avec une source centrée

La figure 3.5 montre les différents profils de pression acoustique (module de pression acoustique) obtenus avec notre modèle théorique, la méthode des éléments finis et l'expérience pour les fréquences : 230 Hz , 780 Hz , 1100 Hz et 1900 Hz pour une cavité de dimensions $(0,46 \times 0,48 \times 0,21)\text{ m}^3$. La figure 3.6 illustre une comparaison entre les modules de pression acoustique obtenus avec le modèle analytique et l'expérience pour une fréquence de 3100 Hz .

Les profils de pression acoustique sont symétriques par rapport à la droite $x = 0$. Ceci est évidemment conforme à la géométrie symétrique de la cavité.

On constate qu'en hautes fréquences on obtient un profil de pression acoustique plus discontinu, plus variable sur l'axe, ce qui est justifiable d'une part par la directivité plus étroite du champ réfléchi à ces fréquences et d'autre part par le fait que la dimension des arrêtes devient grande devant la longueur d'onde, ceci provoquant une augmentation de la diffraction.

Jusqu'à 1900 Hz , les courbes montrent un bon accord entre les résultats numériques (modèle analytique et FEM) et expérimentaux. Pour des fréquences plus élevées (supérieures à 1900 Hz), la FEM exige un maillage trop fin pour être atteint avec la version du logiciel dont on dispose. C'est pourquoi les résultats de la FEM ne sont pas présentés dans la figure 3.6 à 3100 Hz .

3.6 Validation du modèle analytique développé

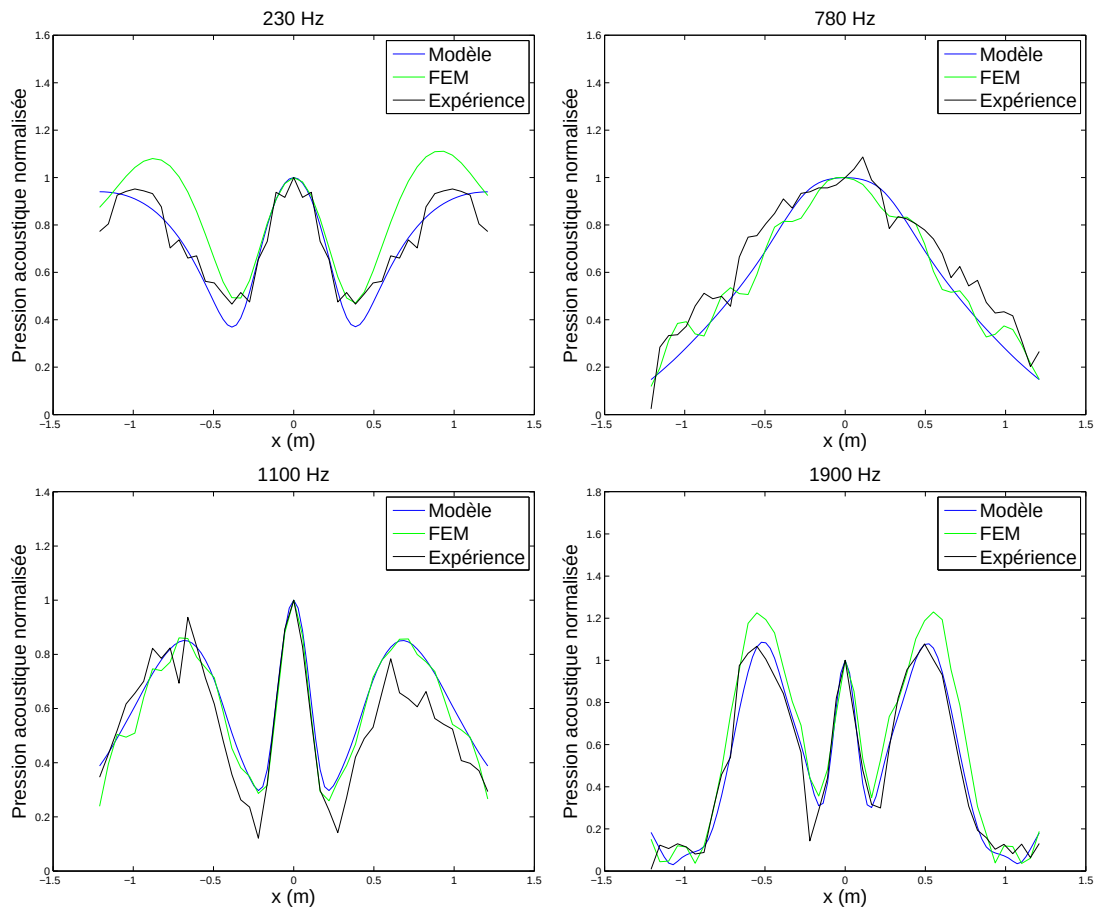


FIGURE 3.5 – Pression acoustique normalisée à $0,2\text{ m}$ au dessus de la cavité de taille $(0,46 \times 0,48 \times 0,21)\text{ m}^3$ excitée par une source sphérique centrée située à 1 m au-dessus pour différentes fréquences : 230 Hz , 780 Hz , 1100 Hz et 1900 Hz

3.6 Validation du modèle analytique développé

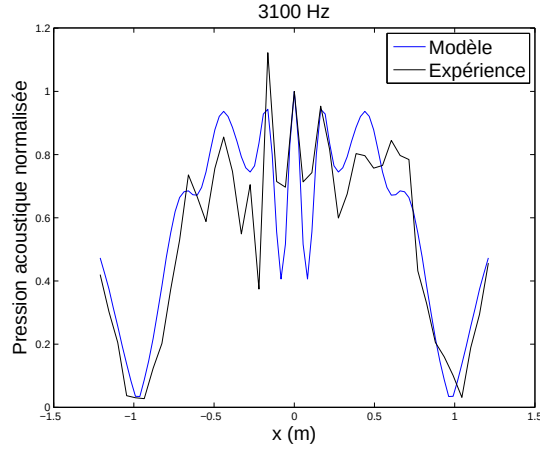


FIGURE 3.6 – Pression acoustique normalisée à $0,2\text{ m}$ au dessus de la cavité de taille $(0,46 \times 0,48 \times 0,21)\text{ m}^3$ excitée par une source sphérique centrée située à 1 m au-dessus à 3100 Hz

D'autres mesures ont été effectuées sur une cavité de taille $(0,46 \times 0,48 \times 0,12)\text{ m}^3$. Cette cavité ne diffère de la cavité étudiée précédemment que par sa profondeur. La figure 3.7 illustre la variation du profil de pression acoustique normalisée à $0,2\text{ m}$ au dessus de cette cavité étudiée pour différentes fréquences : 230 Hz , 780 Hz , 1100 Hz et 1900 Hz . Un bon accord entre les résultats théoriques et les résultats expérimentaux est obtenu. À 780 Hz les deux nœuds de pression acoustique théorique, situés à $\pm 0,23\text{ m}$ correspondant aux arêtes de la cavité tendent vers une valeur nulle. Ceci s'interprète par une interference destructive entre la partie spéculaire $(\Phi_{inc}^{sph} + \Phi_r^{sph})$ et la partie diffracté (Φ_d^{sph}) du champ total au dessus de la cavité.

3.6 Validation du modèle analytique développé

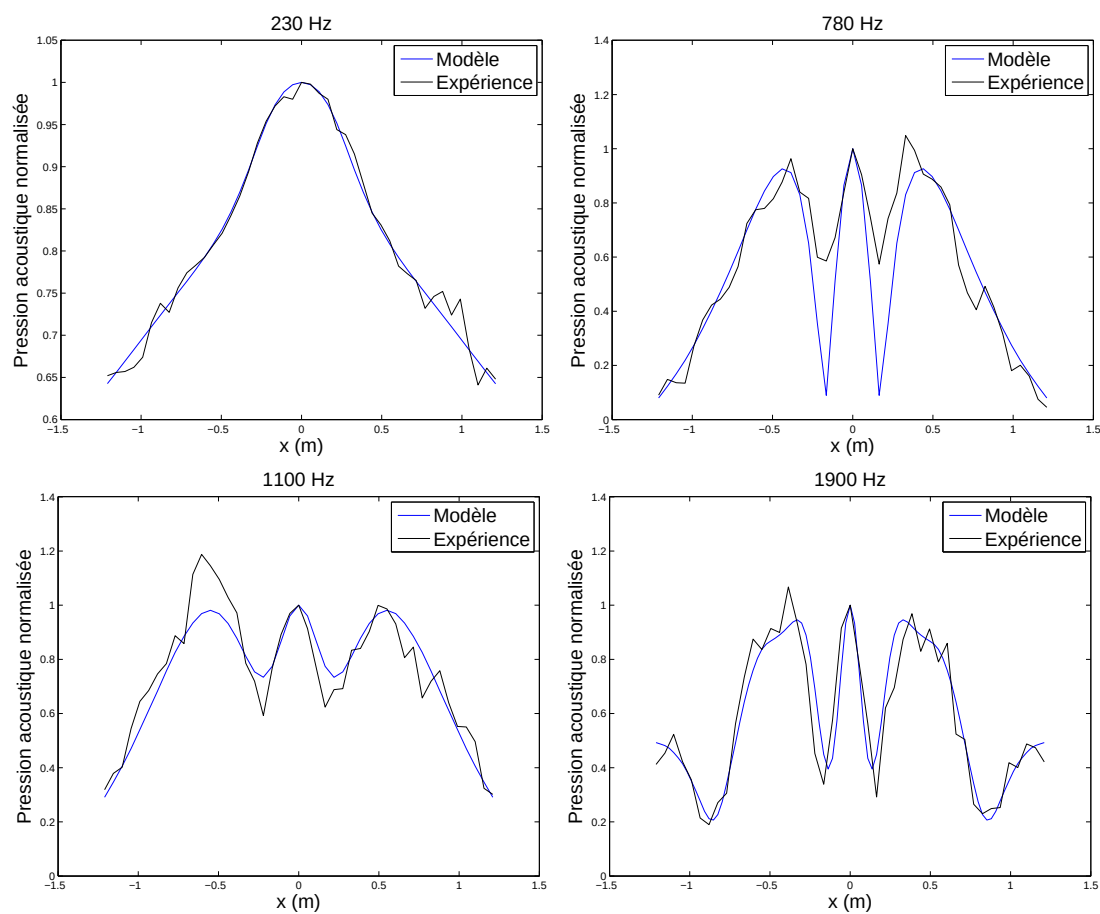


FIGURE 3.7 – Pression acoustique normalisée à $0,2\text{ m}$ au dessus de la cavité de taille $(0,46 \times 0,48 \times 0,12)\text{ m}^3$ excitée par une source sphérique centrée située à $0,85\text{ m}$ au-dessus pour différentes fréquences : 230 Hz , 780 Hz , 1100 Hz et 1900 Hz

3.6 Validation du modèle analytique développé

D'autres mesures ont été effectuées sur une cavité rectangulaire de taille $(0,48 \times 1,00 \times 0,21) m^3$. La figure 3.8 illustre la variation du profil de pression acoustique normalisée à $0,2 m$ au dessus de cette cavité étudiée pour différentes fréquences : $230 Hz$, $780 Hz$, $1100 Hz$ et $1900 Hz$. Un bon accord entre les résultats théoriques et les résultats expérimentaux est également observé.

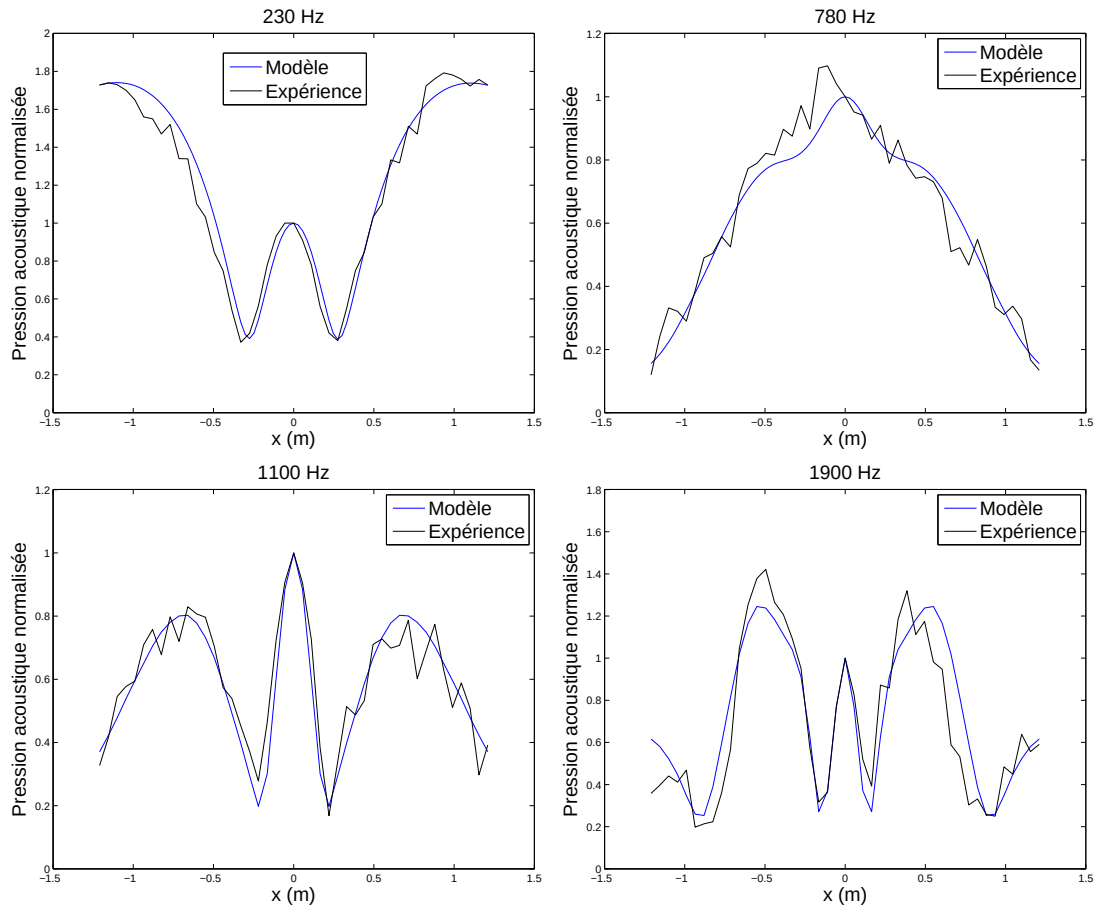


FIGURE 3.8 – Pression acoustique normalisée à $0,2 m$ au dessus de la cavité de taille $(0,48 \times 1,00 \times 0,21) m^3$ excitée par une source sphérique centrée située à $0,85 m$ au-dessus pour différentes fréquences : $230 Hz$, $780 Hz$, $1100 Hz$ et $1900 Hz$

3.6 Validation du modèle analytique développé

Les calculs sont effectués pour un ordre $S = 2$ en basses fréquences et $S = 5$ en hautes fréquences (voir §3.5), excepté pour la courbe obtenue à 3100 Hz dans le cas de la cavité de taille $(0,46 \times 0,48 \times 0,21)\text{ m}^3$. Dans ce cas, la convergence a été obtenue pour un ordre $S = 9$ et le temps de calcul était 35 minutes pour 45 récepteurs.

Pour évaluer la concordance des résultats expérimentaux et théoriques, nous avons calculé l'erreur quadratique moyenne ($RMSE$) [64] :

$$RMSE = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^M (x_{Théorique}^i - x_{Expérimental}^i)^2}{M}} \quad (3.5)$$

Où les $x_{Théorique}^i$ (respectivement $x_{Expérimental}^i$) représentent les valeurs théoriques obtenues du modèle (respectivement expérimentales). M est le nombre de valeurs expérimentales.

Le tableau 3.2 présente les valeurs du paramètre $RMSE$ entre le modèle analytique et l'expérience pour les quatre fréquences choisies : 230 Hz , 780 Hz , 1100 Hz et 1900 Hz dans le cas des cavités de taille $(0,46 \times 0,48 \times 0,21)\text{ m}^3$, $(0,46 \times 0,48 \times 0,12)\text{ m}^3$ et $(0,48 \times 1,00 \times 0,21)\text{ m}^3$ excitées par la source centrée. Certaines valeurs du paramètre $RMSE$ dépassent 0,15 comme dans le cas de la cavité de taille $(0,48 \times 1,00 \times 0,21)\text{ m}^3$ à 1900 Hz . Cette valeur est due à l'écart entre les résultats théoriques et expérimentaux. Ces derniers présentent parfois des fluctuations. Mais globalement les valeurs obtenues du paramètre $RMSE$ confirment encore le bon accord entre les résultats théoriques et les résultats expérimentaux. À 3100 Hz , l'erreur quadratique moyenne $RMSE$ du modèle analytique pour la cavité de taille $(0,46 \times 0,48 \times 0,21)\text{ m}^3$ est égale à 0,13, ce qui indique que le modèle est prometteur pour une bande fréquentielle assez large.

3.6 Validation du modèle analytique développé

	Fréq. <i>RMSE</i>	230 <i>Hz</i>	780 <i>Hz</i>	1100 <i>Hz</i>	1900 <i>Hz</i>	3100 <i>Hz</i>
$(0,46 \times 0,48 \times 0,21) m^3$	Modèle	0,07	0,09	0,11	0,08	0,13
	FEM	0,13	0,09	0,10	0,13	-
$(0,46 \times 0,48 \times 0,12) m^3$	Modèle	0,11	0,14	0,08	0,08	-
$(0,48 \times 1,00 \times 0,21) m^3$	Modèle	0,09	0,06	0,06	0,15	-

TABLE 3.2 – Erreur quadratique moyenne *RMSE* du modèle analytique dans le cas des cavités de tailles $(0,46 \times 0,48 \times 0,21) m^3$, $(0,46 \times 0,48 \times 0,12) m^3$ et $(0,48 \times 1,00 \times 0,21) m^3$ excitées par une source centrée.

3.6.2 Cas d'une cavité excitée avec une source excentrée

Après avoir validé le modèle analytique pour des cavités excitées par une source centrée par rapport à son axe, une deuxième campagne de mesures a été effectuée pour les mêmes cavités que précédemment, mais excitées par une source sphérique excentrée. La position de cette dernière S a été translatée selon l'axe des x . Ses nouvelles coordonnées sont données par : $\vec{OS} = \begin{pmatrix} -0,51 m \\ 0 m \\ 0,89 m \end{pmatrix}$. La figure 3.9 présente une comparaison entre les modules de pression acoustique obtenues avec notre modèle analytique et l'expérience pour différentes fréquences : 230 *Hz*, 780 *Hz*, 1100 *Hz* et 1900 *Hz* selon l'axe des x au dessus de la cavité de taille $(0,46 \times 0,48 \times 0,21) m^3$. Ces profils de pression acoustique sont toujours normalisés par rapport à la pression mesurée par le microphone central de l'antenne microphonique.

Les figures 3.10 et 3.11 présentent les mêmes variations du profil de pression acoustique respectivement pour la cavité de taille $(0,46 \times 0,48 \times 0,12) m^3$ et la cavité de taille $(0,48 \times 1,00 \times 0,21) m^3$.

L'ensemble des courbes présentées précédemment montrent que les résultats théo-

3.6 Validation du modèle analytique développé

riques et expérimentaux sont proches. Les valeurs du paramètre RMSE des différents profils de pression présentés sont illustrées dans le tableau 3.3. Comme dans le cas des cavités excitées par une source centrée les valeurs du paramètre *RMSE* confirment la validité du modèle. Quand la pression acoustique expérimentale atteint de fortes valeurs, de faibles fluctuations de celle-ci peuvent engendrer de fortes valeurs du paramètre *RMSE*. Par exemple 0,35 et 0,34 respectivement à 780 *Hz* et à 1900 *Hz* pour la cavité de dimensions $(0,46 \times 0,48 \times 0,12) \text{ m}^3$. Les faibles écarts obtenus entre les résultats expérimentaux et théoriques peuvent provenir de plusieurs facteurs :

- l’emplacement des microphones au-dessus de la cavité,
- l’omidirectionnalité de la source qui, ayant été vérifiée, n’est pas parfaite.

3.6 Validation du modèle analytique développé

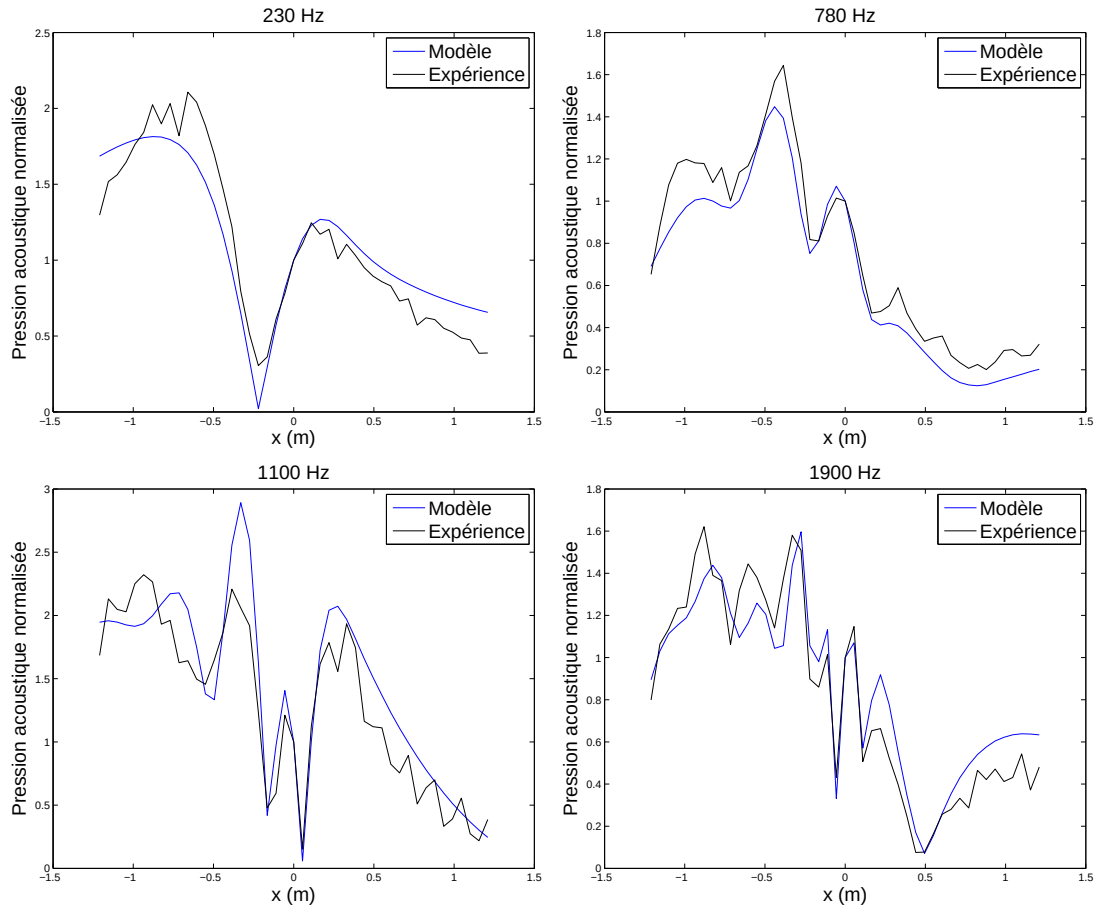


FIGURE 3.9 – Pression acoustique normalisée à $0,2\text{ m}$ au dessus de la cavité de taille $(0,46 \times 0,48 \times 0,21)\text{ m}^3$ excitée par une source sphérique excentrée située au point $(-0,51; 0; 0,89)\text{ m}_{(O,x,y,z)}$ pour différentes fréquences : 230 Hz , 780 Hz , 1100 Hz et 1900 Hz

3.6 Validation du modèle analytique développé

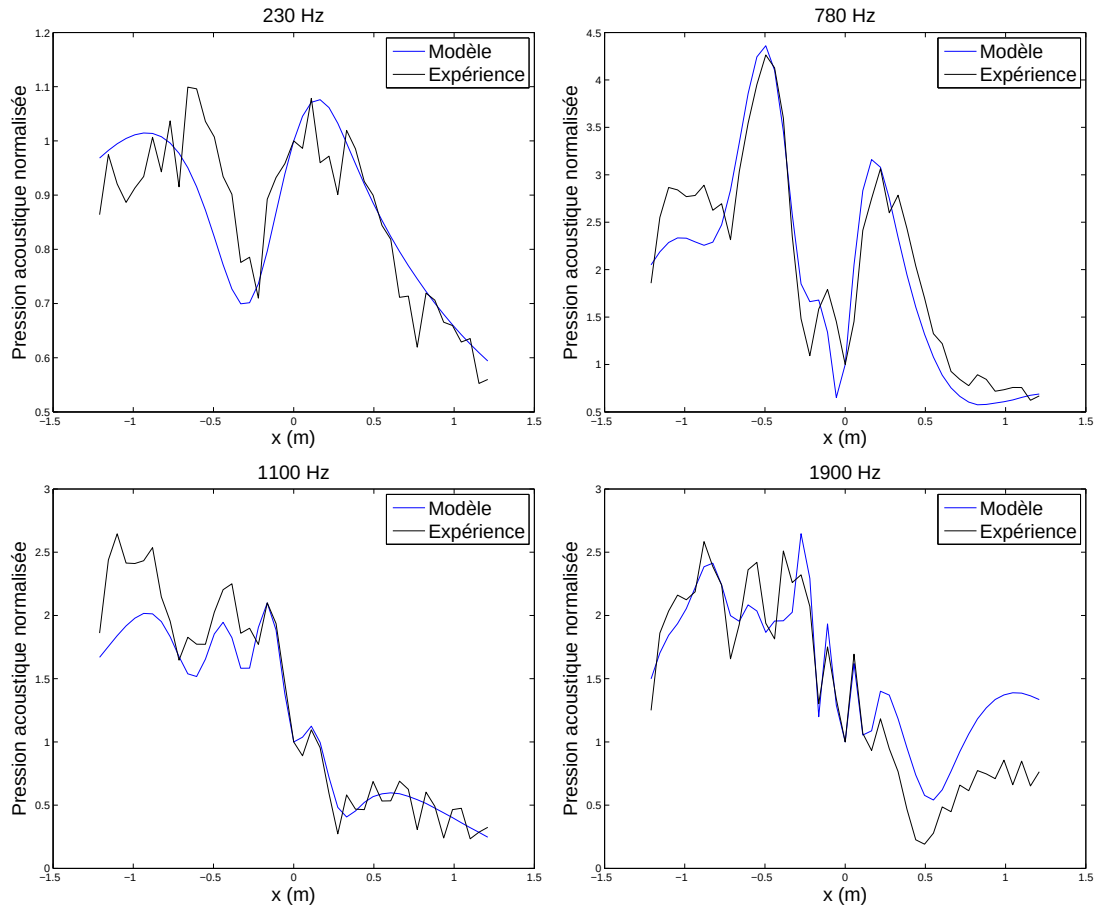


FIGURE 3.10 – Pression acoustique normalisée à $0,2\text{ m}$ au dessus de la cavité de taille $(0,46 \times 0,48 \times 0,12)\text{ m}^3$ excitée par une source sphérique excentrée située au point $(-0,51; 0; 0,89)\text{ m}_{(O,x,y,z)}$ pour différentes fréquences : 230 Hz , 780 Hz , 1100 Hz et 1900 Hz

3.6 Validation du modèle analytique développé

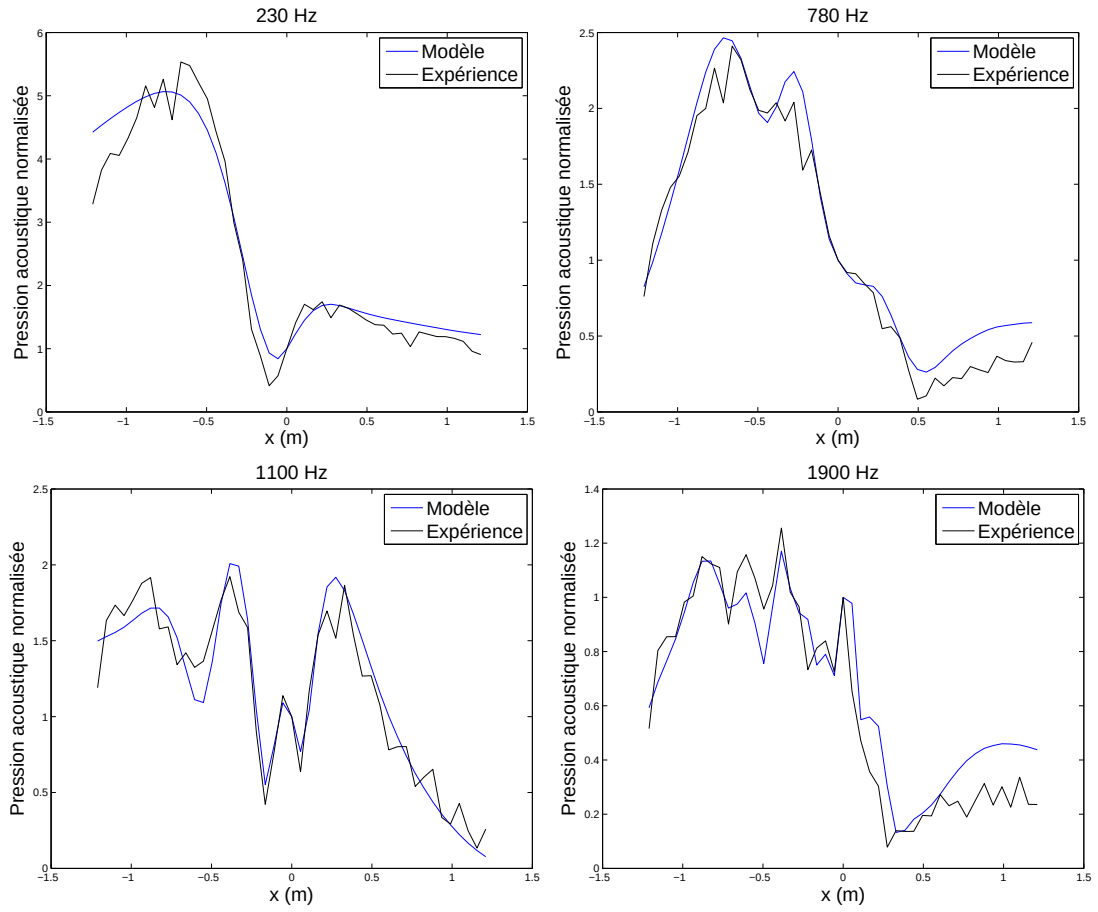


FIGURE 3.11 – Pression acoustique normalisée à $0,2\text{ m}$ au dessus de la cavité de taille $(0,48 \times 1,00 \times 0,21)\text{ m}^3$ excitée par une source sphérique excentrée située au point $(-0,51; 0; 0,89)\text{ m}_{(O,x,y,z)}$ pour différentes fréquences : 230 Hz , 780 Hz , 1100 Hz et 1900 Hz

	Fréq. <i>RMSE</i>	230 <i>Hz</i>	780 <i>Hz</i>	1100 <i>Hz</i>	1900 <i>Hz</i>
$(0,46 \times 0,48 \times 0,21) m^3$	Modèle	0,20	0,12	0,30	0,14
$(0,46 \times 0,48 \times 0,12) m^3$	Modèle	0,08	0,35	0,25	0,34
$(0,48 \times 1,00 \times 0,21) m^3$	Modèle	0,36	0,17	0,15	0,13

TABLE 3.3 – Erreur quadratique moyenne *RMSE* du modèle analytique dans le cas des cavités de tailles $(0,46 \times 0,48 \times 0,21) m^3$, $(0,46 \times 0,48 \times 0,12) m^3$ et $(0,48 \times 1,00 \times 0,21) m^3$ excitées par une source excentrée.

3.6.3 Cas des réseaux de cavités rectangulaires parallèles

La validation du modèle dans le cas de réseaux de cavités rectangulaires parallèles a été effectuée expérimentalement et par l'approche des éléments finis comme précédemment. Dans la simulation, les matrices $[G_{m,n,s,t}^{\mu_i,\nu_i,\mu_j,\nu_j}]$ et $[G_{m,n,s,t}^{\mu_i,\nu_i}]$ dans les équations (2.124) - (2.127) ont été tronquées à la taille $S^2 \times S^2$ (S est la valeur maximale de m , n , s et t comme vu précédemment dans le paragraphe 3.5). Plusieurs simulations nous ont permis de constater qu'une convergence satisfaisante est atteinte pour un nombre d'itérations égal à 3 dans la méthode de Gauss-Seidel et pour des fréquences inférieures à 1000 *Hz* (voir §3.7).

Trois réseaux de cavités rectangulaires ont été étudiés :

- Le premier réseau contient 3 cavités espacées de 0,34 *m* présentant un fond infiniment rigide (acier). Quant aux bords, ils sont en polystyrène recouverts de carrelages supposés infiniment rigides. La source est située à 0,85 *m* au dessus de la cavité centrale. Les trois cavités sont de taille $(0,48 \times 0,50 \times 0,21) m^3$. La mesure des profils de pression acoustique est selon l'axe (*Ox*) passant par les 3 centres des 3 cavités. Ces propos sont illustrés dans la figure 3.12.

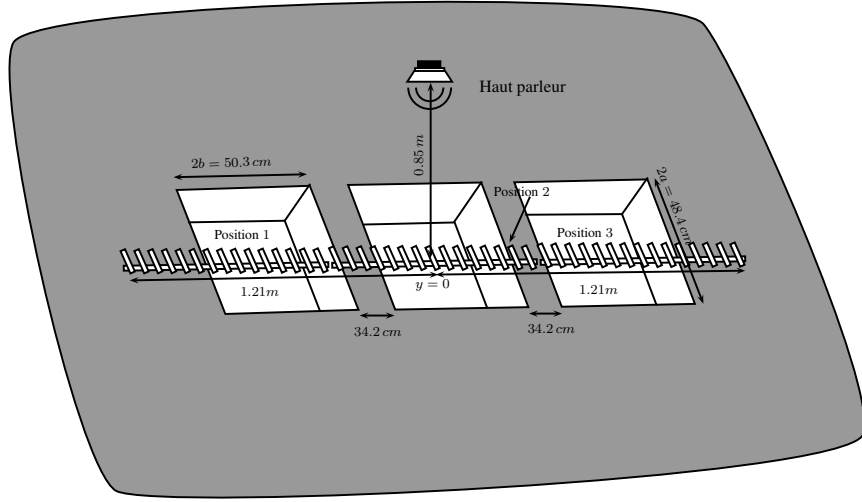


FIGURE 3.12 – Réseau à 3 cavités de taille $(0,48 \times 0,50 \times 0,21) m^3$ espacées de $0,34 m$

- Le deuxième est un réseau périodique formé par 9 cavités de tailles $(0.50 \times 0.48 \times 0.21) m^3$. Les périodicités sont $0,34 m$ et $0,52 m$ selon l'axe des x et l'axe des y respectivement. Le repère de référence est centré sur la cavité centrale du réseau. Les coordonnées de la source sont $(0; 0; 0,85)_{(O,x,y,z)} m$.
- Le troisième est un réseau aperiodique formé par 9 cavités de tailles et d'espacements différents (voir figure 3.13). Les tailles et les positions des différentes cavités sont données dans le tableau 3.4. Le repère de référence est pris centré sur la première cavité. Les coordonnées de la source sont $(0,26; 0,03; 0,85)_{(O,x,y,z)} m$.



FIGURE 3.13 – Géométrie du réseau aperiodique formé par 9 cavités de tailles et d'espacements différents.

tailles	$(x_{O_i}, y_{O_i}, z_{O_i})_{(O,x,y,z)}$
$(1,00 \times 0,48 \times 0,21) m^3$	$(0; 0; 0) m$
$(0,50 \times 0,48 \times 0,21) m^3$	$(1,10; 1,01; 0) m$
$(0,50 \times 0,48 \times 0,07) m^3$	$(0,25; 1,01; 0) m$
$(0,50 \times 0,48 \times 0,12) m^3$	$(1,10; -1,01; 0) m$
$(0,50 \times 0,48 \times 0,21) m^3$	$(0,25; -1,01; 0) m$
$(0,50 \times 0,48 \times 0,21) m^3$	$(-0,77; -1,01; 0) m$
$(0,50 \times 0,30 \times 0,21) m^3$	$(1,10; -0,09; 0) m$
$(0,50 \times 0,10 \times 0,21) m^3$	$(-0,59; 1,20; 0) m$
$(0,50 \times 0,20 \times 0,21) m^3$	$(-0,59; 0,86; 0) m$

TABLE 3.4 – Dimensions du réseau aperiodique à 9 cavités rectangulaires parallèles.

3.6 Validation du modèle analytique développé

La figure 3.14 montre les différents modules de pression acoustique obtenus avec notre modèle avec et sans couplage et l'expérience dans le cas du réseau de 3 cavités périodiques pour les fréquences : 230 Hz , 500 Hz , 730 Hz et 1500 Hz selon l'axe des x . Ces profils de pression acoustique sont normalisés par rapport à la pression mesurée par le microphone central de l'antenne. L'ensemble des courbes montre un bon accord entre les résultats numériques et expérimentaux.

Les profils de pression acoustique pour chaque cavité sont symétriques par rapport à la droite $x = 0$. Ceci est tout à fait normal puisque la position des cavités est symétrique par rapport au plan (Oyz) et les mesures sont effectuées selon un axe perpendiculaire à ce plan (Oyz) .

On effectue en hautes fréquences les mêmes observations que dans le cas d'une seule cavité à savoir, un profil de pression acoustique plus discontinu dû à la diffraction plus directive à ces fréquences.

Le bon accord observé entre les résultats théoriques et expérimentaux, permet de confirmer l'hypothèse suivante : les termes croisés dans la matrice de couplage Ξ représentant le couplage sont faibles par rapport à la solution du problème non couplé (voir paragraphe §2.5.2.2). Ceci étant une condition permettant de faire converger la méthode de résolution de Gauss-Seidel.

3.6 Validation du modèle analytique développé

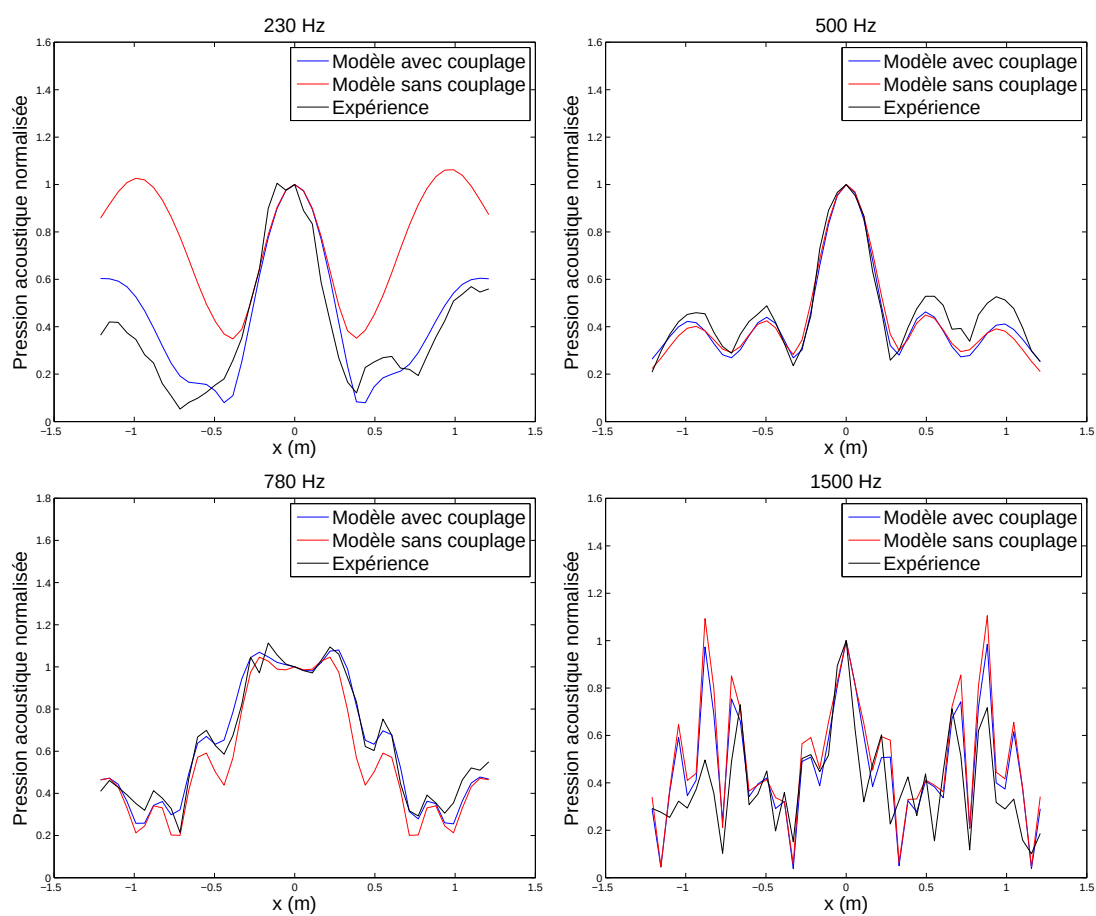


FIGURE 3.14 – Pression acoustique normalisée à $0,2\text{ m}$ au dessus du réseau de 3 cavités étudié pour différentes fréquences : 230 Hz , 500 Hz , 730 Hz et 1500 Hz

Pour clarifier la définition du problème non couplé, nous soulignons que celui-ci est obtenue en négligeant les phénomènes de couplage qui existent entre les cavités : chaque cavité i génère son champ diffracté Φ_d^i indépendamment des autres cavités voisines comme si elle est isolée (voir figure 3.15).

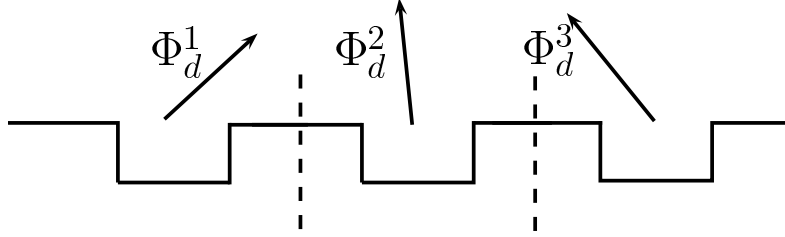


FIGURE 3.15 – Solution du problème non couplé

Par contre, la solution du problème couplé prend en compte les phénomènes de couplage entre les cavités. Dans le cas du réseau de 3 cavités étudié ici, le champ diffracté généré par la première cavité est influencé par ceux générés par la deuxième et la troisième cavité. Le champ diffracté généré par la deuxième est influencé par ceux générés par la première et la troisième, etc. (voir figure 3.16). Ces propos se traduisent d'un point de vue mathématique par les relations qui existent entre les différentes amplitudes modales des différents champs diffractés dans les équations (2.124)-(2.127).

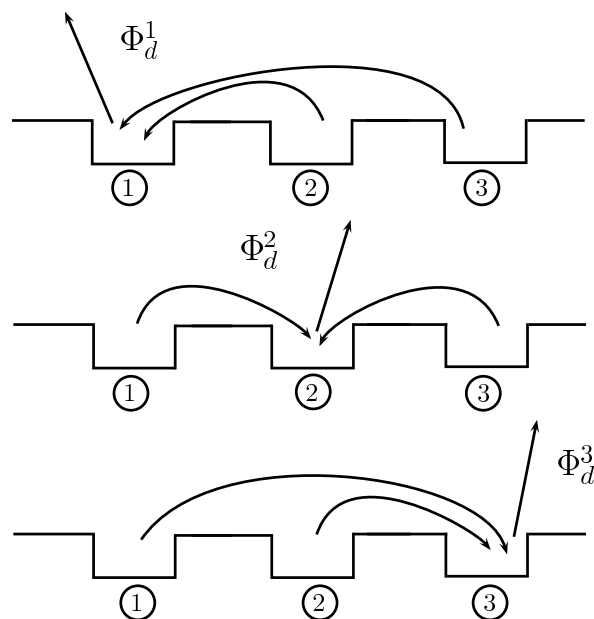


FIGURE 3.16 – Solution du problème couplé

Les figures 3.17 et 3.18 présentent la variation du module de pression acoustique normalisé obtenu avec notre modèle et l'expérience pour les fréquences 230 Hz , 400 Hz , 780 Hz et 900 Hz le long de l'axe (Ox) dans le cas du réseau contenant 9 cavités périodiques et respectivement apériodiques.

3.6 Validation du modèle analytique développé

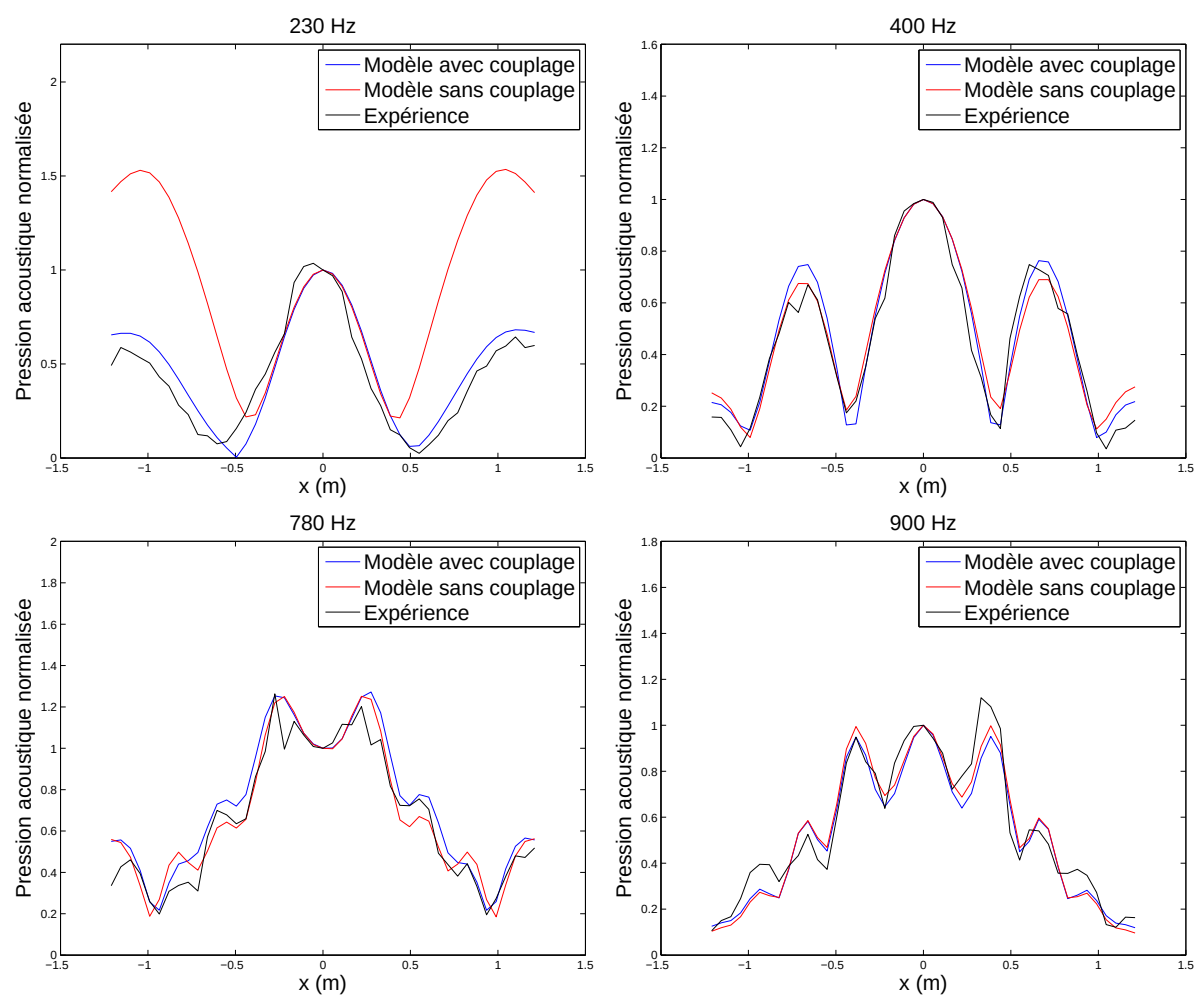


FIGURE 3.17 – Pression acoustique normalisée à $0,2\text{ m}$ au dessus du réseau périodique de 9 cavités pour différentes fréquences : 230 Hz , 400 Hz , 780 Hz et 900 Hz

3.6 Validation du modèle analytique développé

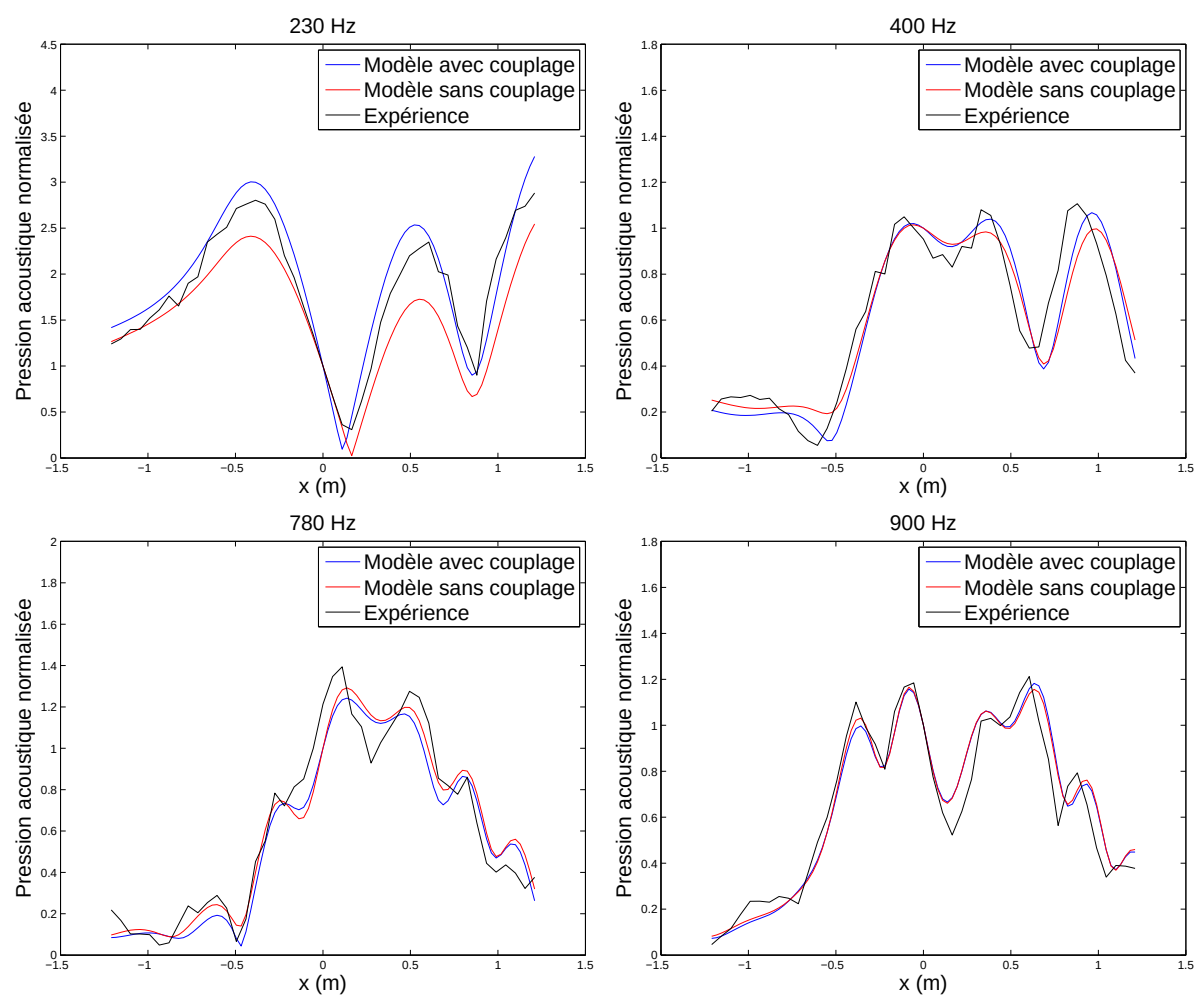


FIGURE 3.18 – Pression acoustique normalisée à $0,2\text{ m}$ au dessus du réseau apériodique de 9 cavités pour différentes fréquences : 230 Hz , 400 Hz , 780 Hz et 900 Hz

3.6 Validation du modèle analytique développé

Les profils de pression acoustique dans la figure 3.18 ne sont pas symétriques à cause de l'asymétrie et l'apériodicité de la structure. Les termes de couplage sont plus importants dans les basses fréquences comme dans le cas des deux réseaux périodiques étudiés précédemment.

Plus la géométrie de la structure est complexe, plus le nombre de cavités devient important et les calculs nécessitent des outils informatiques plus performants. C'est la raison pour laquelle on s'est limité à la fréquence 1500 Hz dans le cas du réseau périodique à 3 cavités et à 900 Hz dans le cas du réseau apériodique.

Le couplage est plus important à 230 Hz pour les 3 réseaux étudiés. Les interactions de couplage acoustique entre les cavités sont plus importantes en basses fréquences comme constaté lors de l'étude théorique des termes de couplage au paragraphe 2.5.3. En basses fréquences le rayonnement acoustique d'une cavité a plus de facilité à venir perturber le champ insonifiant la cavité voisine. Plus on monte en fréquence, plus les champs couplés et non couplés deviennent très proches. Le couplage est donc faible en hautes fréquences. Ceci peut s'expliquer par le fait que le rayonnement d'une cavité étant plus directif, il a moins de faculté à venir perturber le champ insonifiant la cavité voisine. Ceci est illustré dans la figure 3.19 montrant la variation du champ diffracté Φ_d à $0,2\text{ m}$ au dessus d'une cavité de taille $(0,46 \times 0,48 \times 0,21)\text{ m}^3$ excitée par une source sphérique située 1 m au-dessus. Cette figure montre des fluctuations directives au-dessus de la cavité. De plus, en hautes fréquences, la distance entre les cavités devient grande par rapport à la longueur d'onde.

3.6 Validation du modèle analytique développé

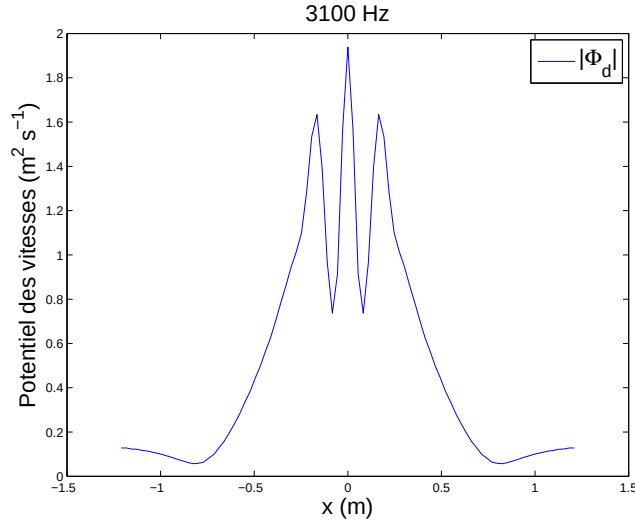


FIGURE 3.19 – Champ acoustique diffracté Φ_d à $0,2\text{ m}$ au-dessus d’une cavité de taille $(0,46 \times 0,48 \times 0,21)\text{ m}^3$ excitée par une source sphérique située à 1 m au-dessus à 3100 Hz

Le tableau 3.5 présente les valeurs du paramètre $RMSE$ pour les fréquences sélectionnées dans le cas des deux réseaux périodiques à 3 et à 9 cavités et du réseau apériodique à 9 cavités, respectivement. Les valeurs du paramètre $RMSE$ sont inférieures à 0,16 dans les trois cas, ce qui confirme la bonne concordance entre le modèle analytique et l’expérience.

	Fréq. $RMSE$	230 Hz	400 Hz	780 Hz	900 Hz	1500 Hz
3 cavités (périodique)	Modèle	0,11	0,08	0,05	-	0,16
9 cavités (périodique)	Modèle	0,10	0,06	0,09	0,08	-
9 cavités (apériodique)	Modèle	0,16	0,11	0,11	0,09	-

TABLE 3.5 – Erreur quadratique moyenne $RMSE$ du modèle analytique couplé dans le cas des réseaux périodiques de 3 et 9 cavités et du réseau apériodique à 9 cavités.

La simulation a été effectuée pour un ordre $S = 2$. Le temps de calcul est de 5 minutes à la plus haute fréquence dans le cas du réseau périodique de 3 cavités et 40 minutes dans le cas des deux réseaux périodique et apériodique à 9 cavités.

3.6.4 Cas des cavités rectangulaires non parallèles

Un ensemble de deux cavités rectangulaires non parallèles a été étudié. Il est formé par une cavité de taille $(0,50 \times 0,48 \times 0,21) \text{ m}^3$ centrée sur le repère de référence et une deuxième cavité de taille $(0,35 \times 0,34 \times 0,21) \text{ m}^3$ pivotée de 45° . Les coordonnées du centre de son repère local sont $(0,56; 0,50)_{(O,x,y)} \text{ m}$ (voir figure 3.20).

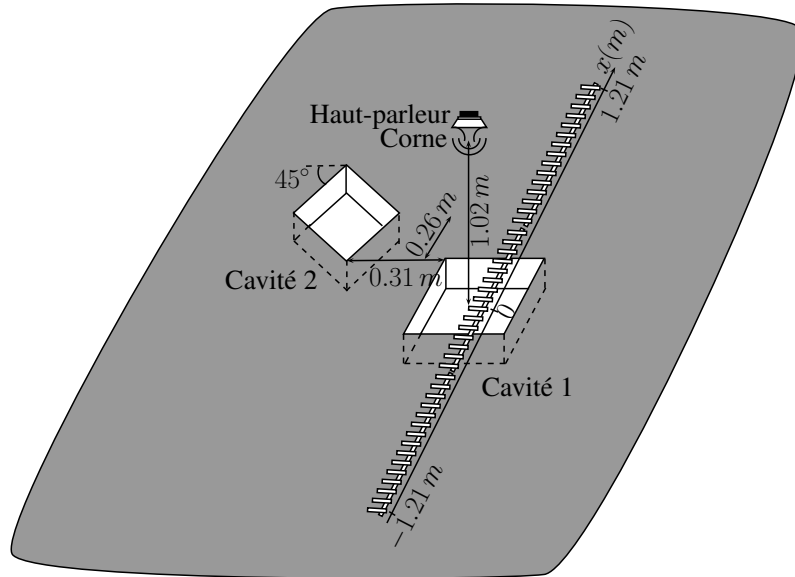


FIGURE 3.20 – Géométrie du réseau de deux cavités non parallèles

La figure 3.21 présente la variation du module de pression acoustique normalisé obtenu avec notre modèle, le modèle des éléments finis et l'expérience pour les fréquences 300 Hz , 500 Hz , 780 Hz et 1900 Hz le long de l'axe (Ox) dans le cas du réseau apériodique de deux cavités non parallèles. Un bon accord a été obtenu. Les profils de pression acoustique ne sont évidemment pas symétriques à cause de l'asymétrie et de l'apériodicité de la structure. Les termes de couplage sont plus importants en basses fréquences comme dans

3.6 Validation du modèle analytique développé

le cas des réseaux périodiques et du réseau apériodique présentés précédemment.

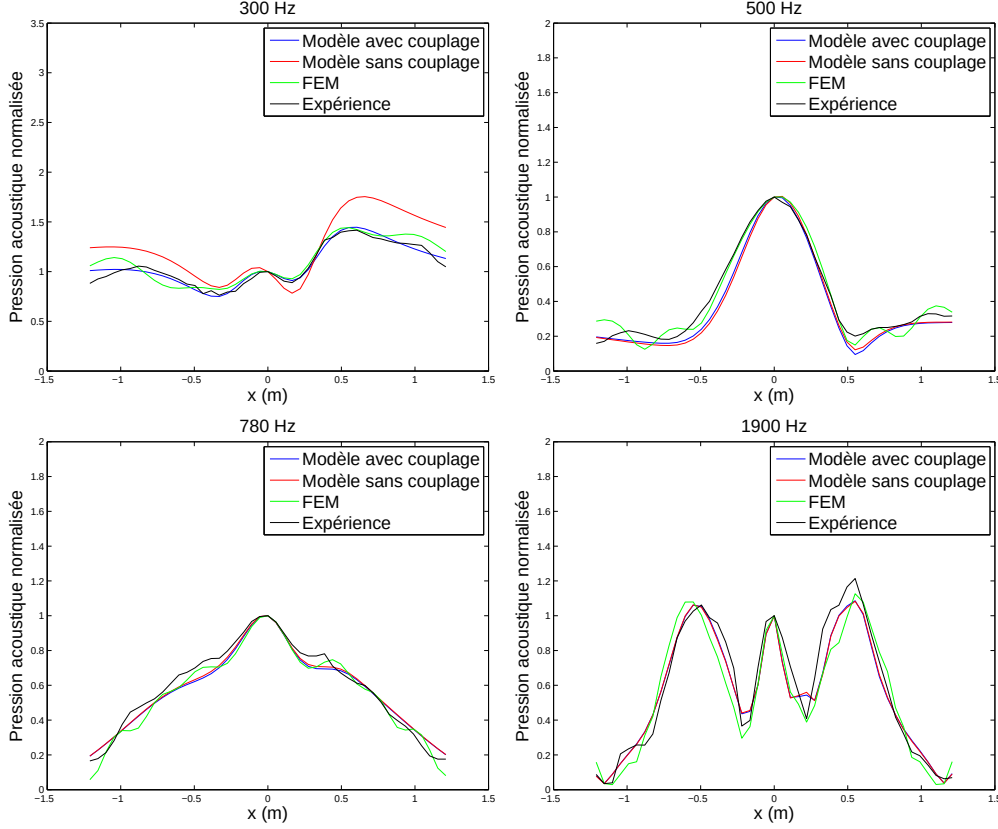


FIGURE 3.21 – Pression acoustique normalisée à $0,2\text{ m}$ au dessus des deux cavités non parallèles pour différentes fréquences : 300 Hz , 500 Hz , 780 Hz et 1900 Hz

La figure 3.22 montre les mêmes variations du module de pression acoustique (sauf pour les éléments finis) pour les mêmes fréquences 300 Hz , 500 Hz , 780 Hz et 1900 Hz selon l'axe $y = -0,37\text{ m}$ dans le cas du même ensemble de deux cavités non parallèles. On constate qu'à partir de 780 Hz les profils de pression deviennent symétriques. Cette symétrie se traduit par une contribution négligeable de la cavité la plus éloignée de l'axe de mesure à ces fréquences. Ceci est de nouveau dû à la directivité de plus en plus étroite des ondes acoustiques diffractées au fur et à mesure qu'on augmente la fréquence, et au fait que la longueur d'onde devient de plus en plus faible en hautes fréquences.

Le temps de calcul est de 120 minutes à la plus haute fréquence de simulation.

3.6 Validation du modèle analytique développé

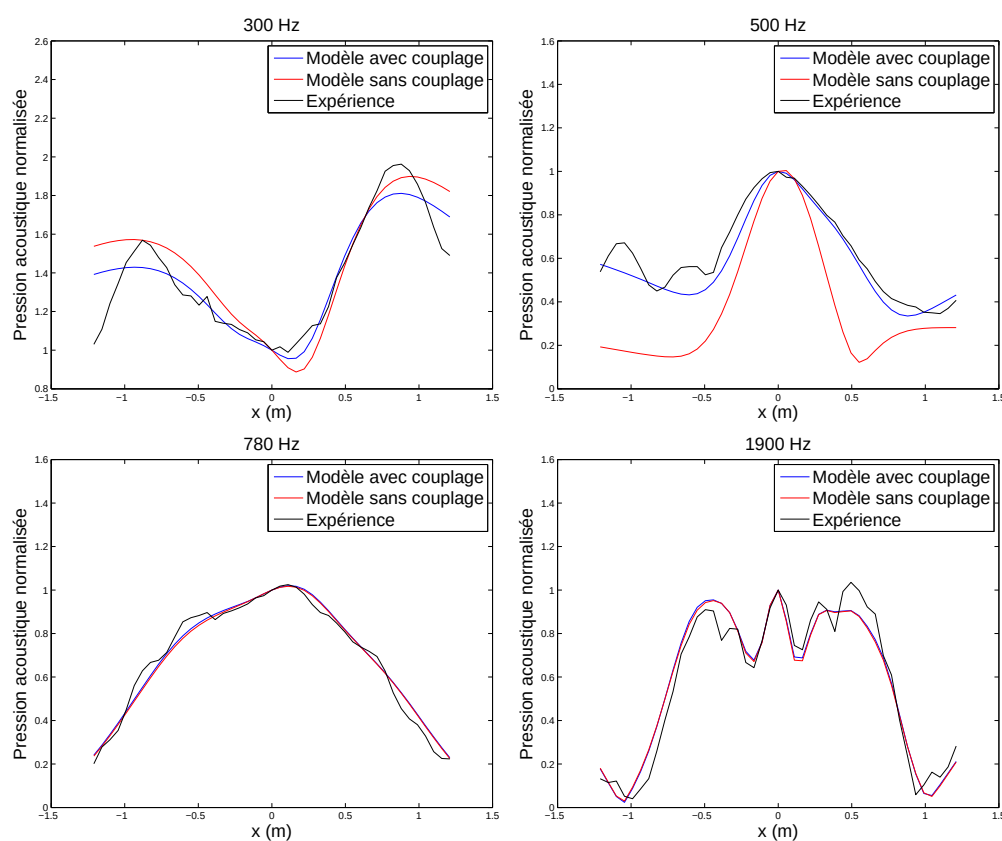


FIGURE 3.22 – Pression acoustique normalisée à $0,2\text{ m}$ au dessus des deux cavités non parallèles le long de l'axe $y = -0,37\text{ m}$ pour différentes fréquences : 500 Hz , 700 Hz , 900 Hz et 1900 Hz

3.7 Validation expérimentale du couplage entre cavités

Le tableau 3.6 présente les valeurs du paramètre $RMSE$ pour les fréquences sélectionnées dans le cas des 2 cavités non parallèles sur les deux axes de mesure $y = 0\text{ m}$ et $y = -0,37\text{ m}$. Les valeurs du paramètre $RMSE$ sont inférieures à 0,11 sur les deux axes de mesure, ce qui confirme la bonne concordance entre le modèle analytique, le modèle des éléments finis et l'expérience.

	Fréq. $RMSE$	300 Hz	500 Hz	780 Hz	1900 Hz
$y = 0\text{ m}$	Modèle	0,04	0,05	0,04	0,08
	FEM	0,08	0,04	0,05	0,11
$y = -0,37\text{ m}$	Modèle	0,10	0,06	0,03	0,07

TABLE 3.6 – Erreur quadratique moyenne $RMSE$ du modèle analytique couplé dans le cas des 2 cavités non parallèles sur les deux axes de mesure $y = 0\text{ m}$ et $y = -0,37\text{ m}$.

Par ailleurs, le bon accord observé entre notre modèle, la méthode des éléments finis et l'expérience confirme l'hypothèse de l'intégrale nulle qui apparaît sous la sommation discrète des indices p et q dans l'équation (2.153) représentant les coefficients de couplage. Cette hypothèse a été faite dans la section 2.6 dédié à l'étude des réseaux de cavités rectangulaires non parallèles.

3.7 Validation expérimentale du couplage entre cavités

Après avoir validé notre modèle analytique, on se propose de vérifier expérimentalement les phénomènes de couplages entre cavités. Pour cela, nous avons choisi un réseau de 3 cavités périodiques de taille $(0,50 \times 0,48 \times 0,21)\text{ m}^3$ et nous avons fait varier l'espacement e entre les cavités selon l'axe des x : $e = 0,02\text{ m}, 0,07\text{ m}, 0,12\text{ m}, 0,17\text{ m}, 0,34\text{ m}$. Le décalage selon l'axe des y est pris égal à zéro. La mesure des profils de pression acoustique a été effectuée selon l'axe des x à $0,2\text{ m}$ au dessus du réseau et la source a été placée

1 m au dessus de la cavité centrale (voir figure 3.23).

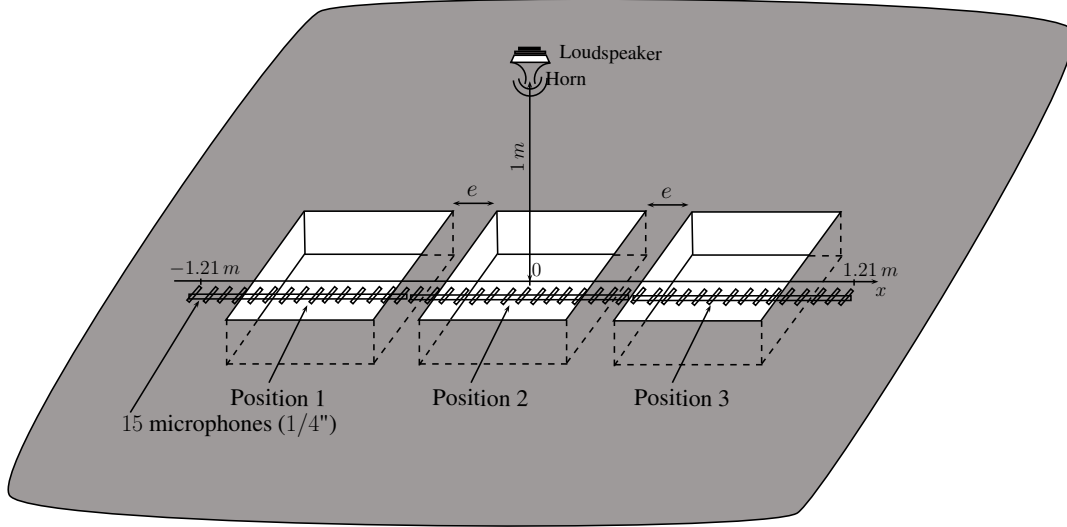


FIGURE 3.23 – Géométrie des 5 réseaux étudiés

La figure 3.24 présente les différents modules de pression acoustique obtenus avec notre modèle avec et sans couplage, le modèle des éléments finis et l'expérience pour les fréquences : 230 Hz , 780 Hz , 1000 Hz et 1600 Hz selon l'axe des x pour le réseau de 3 cavités espacées de 0.02 m . Cet espacement a été choisi car il est faible et il engendre un couplage important entre les cavités comme nous avons vu dans le paragraphe 2.5.3 dédié au couplage théorique. Les figures 3.25, 3.26, 3.27 et 3.28 présentent les mêmes modules de pression acoustique aux mêmes fréquences : 230 Hz , 780 Hz , 1000 Hz et 1600 Hz pour les réseaux de 3 cavités espacées de $e = 0,07\text{ m}$, $0,12\text{ m}$, $0,17\text{ m}$, $0,34\text{ m}$ respectivement. Ces profils de pression acoustique sont normalisés par rapport à la pression mesurée par le microphone central de l'antenne.

3.7 Validation expérimentale du couplage entre cavités

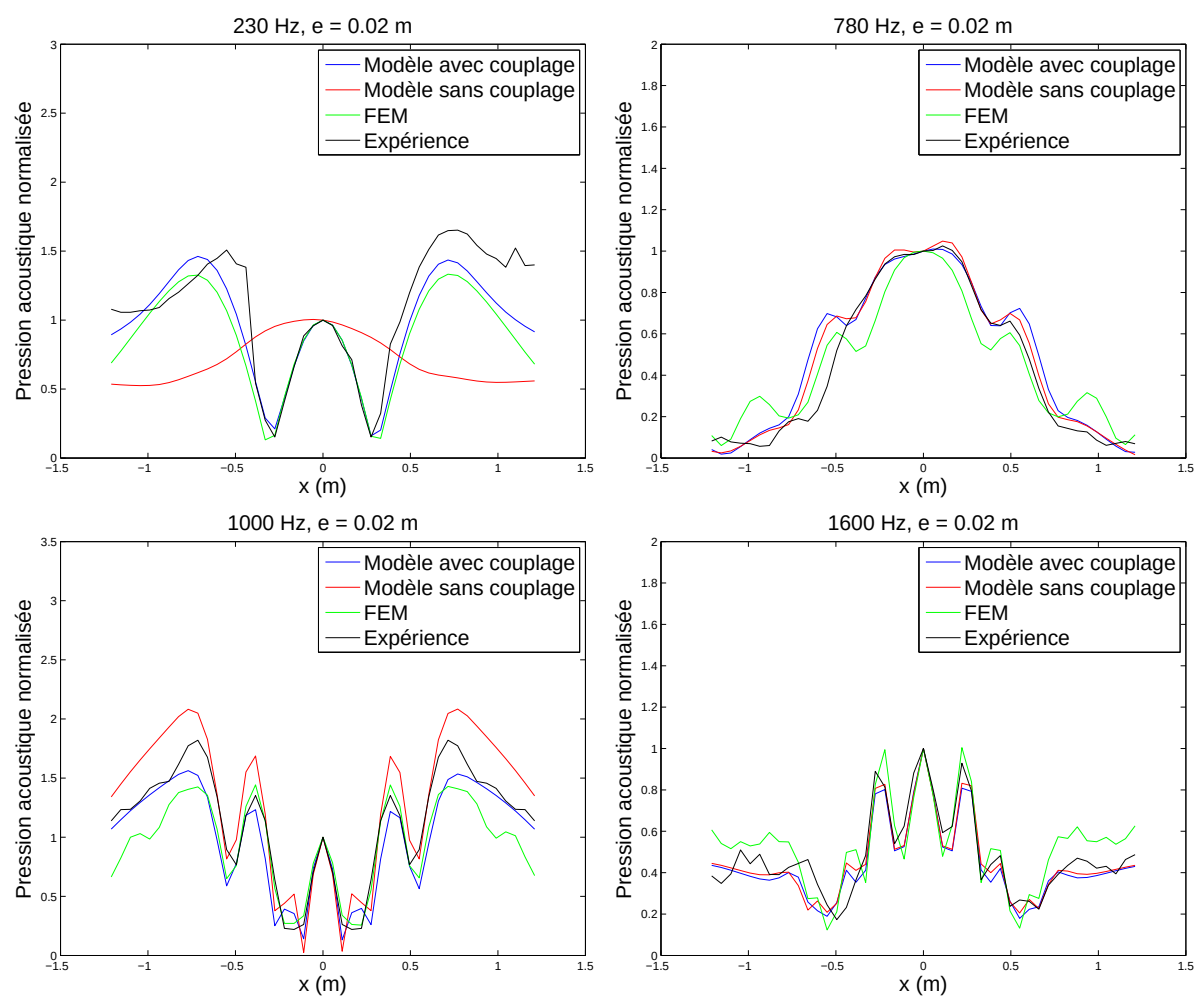


FIGURE 3.24 – Pression acoustique normalisée à $0,2$ m au dessus du réseau périodique de 3 cavités espacées de $0,02$ m pour différentes fréquences : 230 Hz, 780 Hz, 1000 Hz et 1600 Hz

3.7 Validation expérimentale du couplage entre cavités

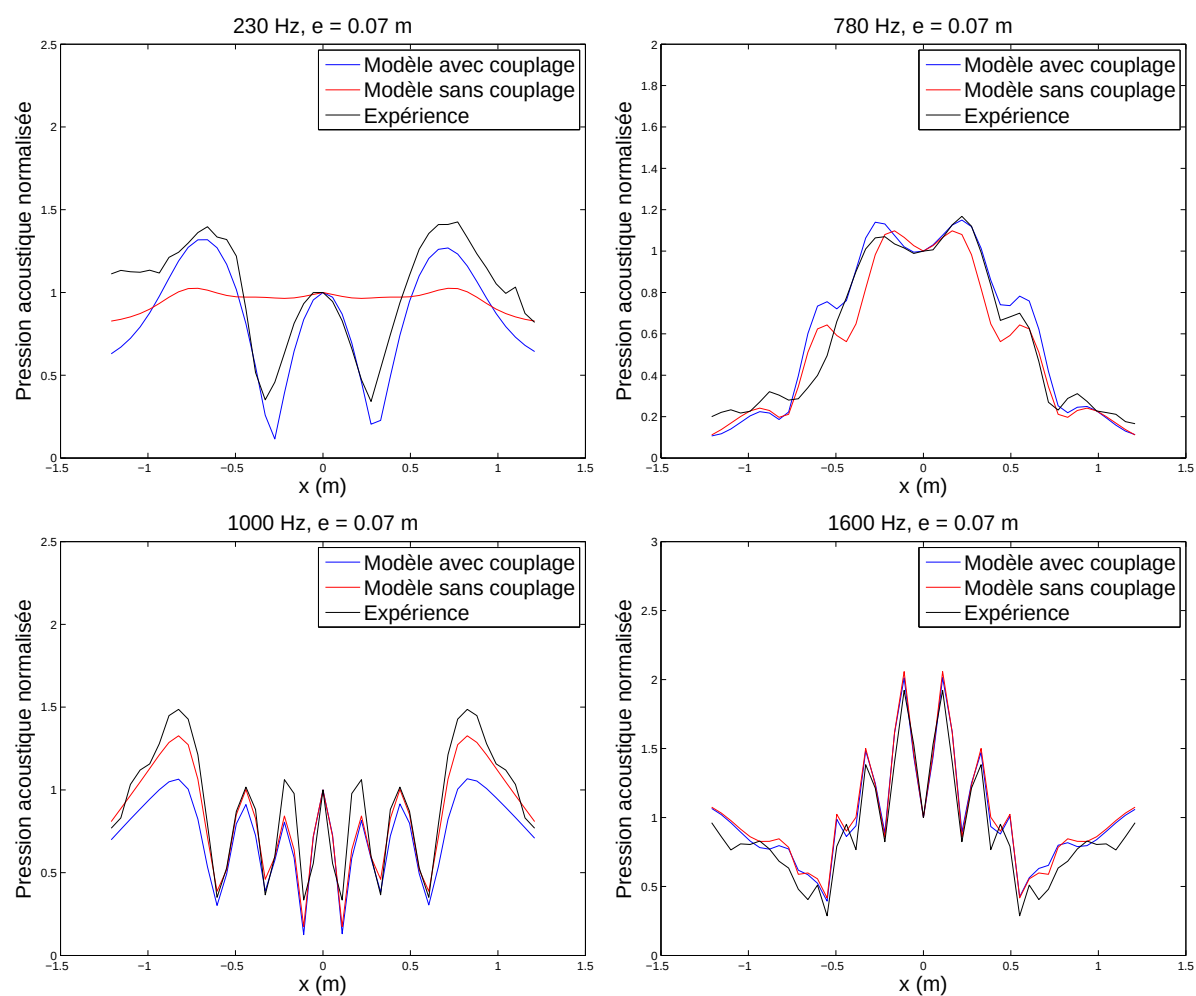


FIGURE 3.25 – Pression acoustique normalisée à $0,2$ m au dessus du réseau périodique de 3 cavités espacées de $0,07$ m pour différentes fréquences : 230 Hz, 780 Hz, 1000 Hz et 1600 Hz

3.7 Validation expérimentale du couplage entre cavités

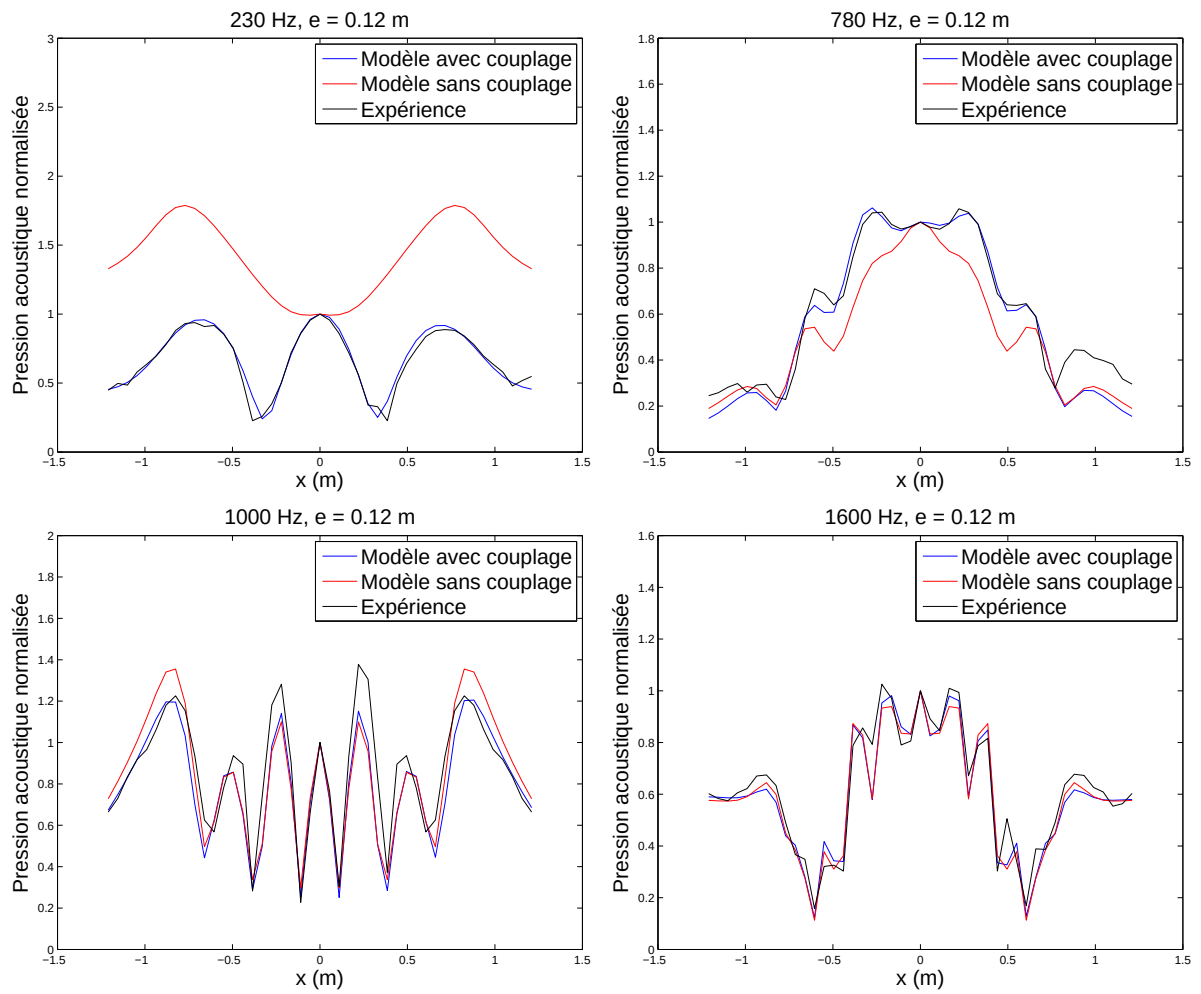


FIGURE 3.26 – Pression acoustique normalisée à $0,2$ m au dessus du réseau périodique de 3 cavités espacées de $0,12$ m pour différentes fréquences : 230 Hz, 780 Hz, 1000 Hz et 1600 Hz

3.7 Validation expérimentale du couplage entre cavités

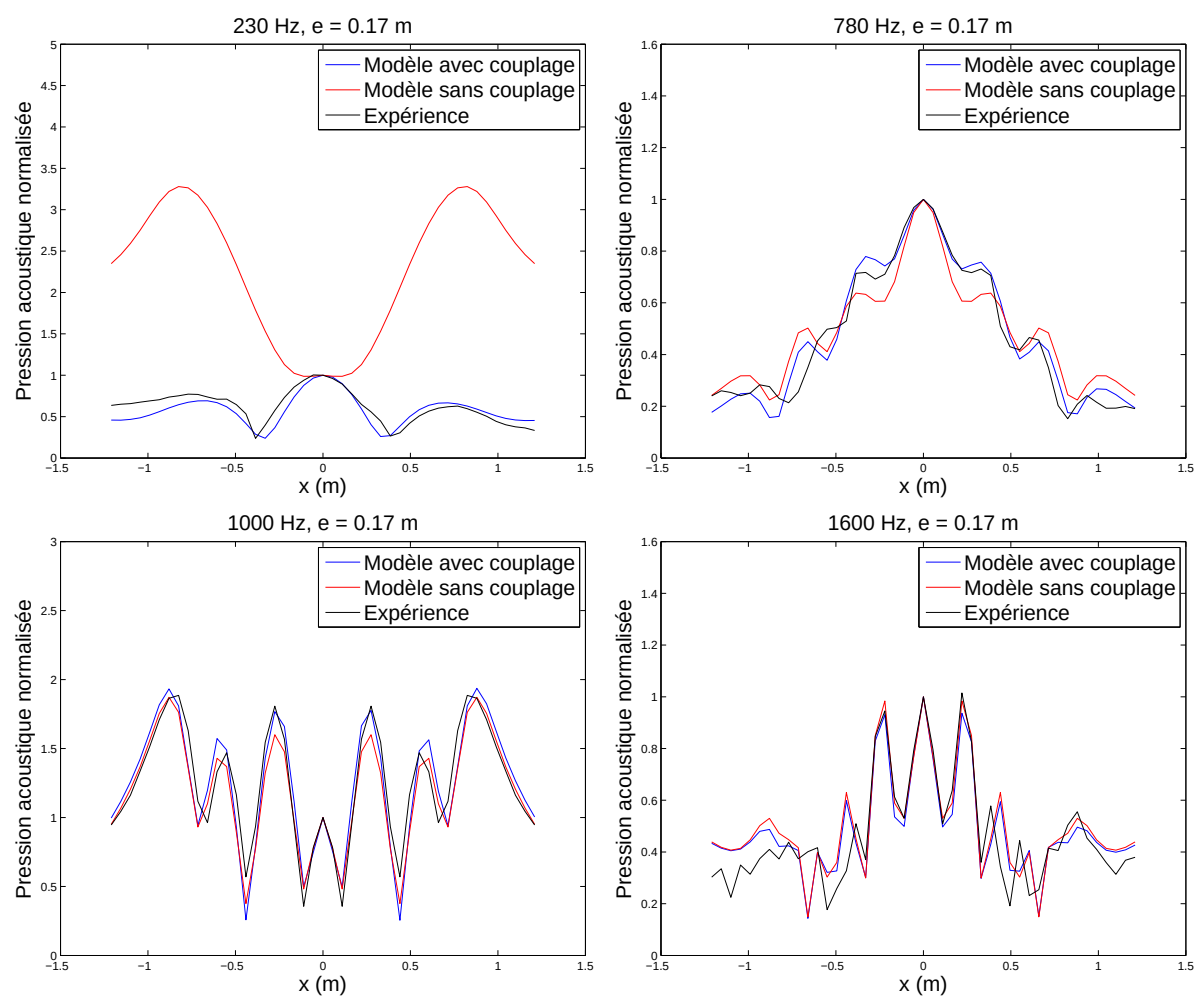


FIGURE 3.27 – Pression acoustique normalisée à $0,2$ m au dessus du réseau périodique de 3 cavités espacées de $0,17$ m pour différentes fréquences : 230 Hz, 780 Hz, 1000 Hz et 1600 Hz

3.7 Validation expérimentale du couplage entre cavités

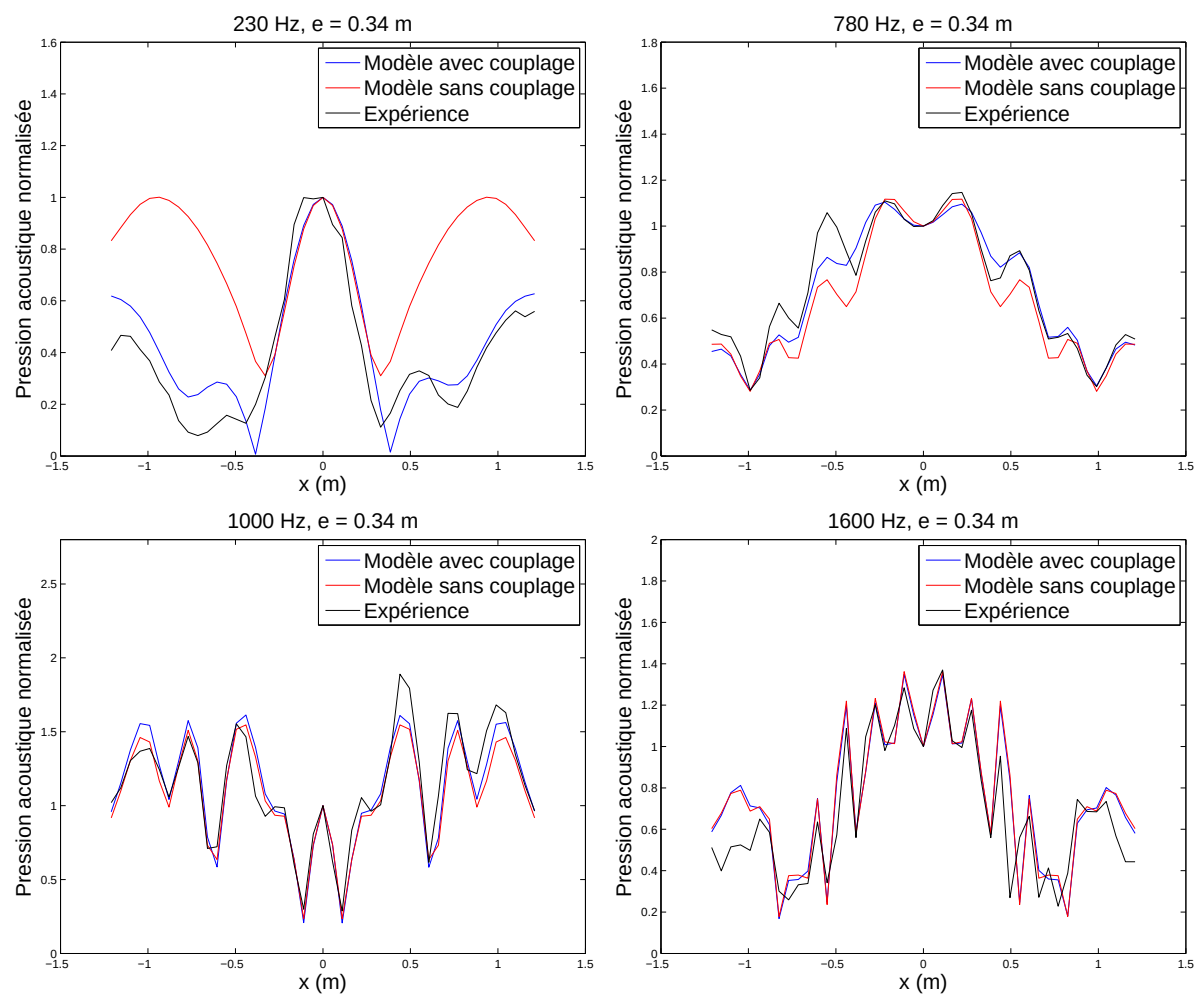


FIGURE 3.28 – Pression acoustique normalisée à $0,2$ m au dessus du réseau périodique de 3 cavités espacées de $0,34$ m pour différentes fréquences : 230 Hz, 780 Hz, 1000 Hz et 1600 Hz

3.7 Validation expérimentale du couplage entre cavités

Le tableau 3.7 présente les valeurs du paramètre $RMSE$ pour les quatre fréquences choisies : 230 Hz , 780 Hz , 1000 Hz et 1600 Hz pour les 5 configurations : $e = 0,02\text{ m}$; $0,07\text{ m}$; $0,12\text{ m}$; $0,17\text{ m}$; $0,34\text{ m}$. Les valeurs du paramètre $RMSE$ obtenues confirment le bon accord entre le modèle théorique et l'expérience.

	Fréq. $RMSE$	230 Hz	780 Hz	1000 Hz	1600 Hz
$e = 0,02\text{ m}$	Modèle	0,20	0,10	0,19	0,07
	FEM	0,28	0,12	0,25	0,12
$e = 0,07\text{ m}$	Modèle	0,20	0,09	0,23	0,16
$e = 0,12\text{ m}$	Modèle	0,04	0,08	0,13	0,06
$e = 0,17\text{ m}$	Modèle	0,10	0,05	0,14	0,10
$e = 0,34\text{ m}$	Modèle	0,10	0,06	0,13	0,16

TABLE 3.7 – Erreur quadratique moyenne $RMSE$ du modèle analytique couplé et du modèle des éléments finis dans le cas des 5 réseaux de 3 cavités étudiés.

La figure 3.29 présente une comparaison entre les valeurs du paramètre $RMSE$ obtenus pour le modèle couplé et le modèle non couplé pour les 5 espacements étudiés : $e = 0,02\text{ m}$; $0,07\text{ m}$; $0,12\text{ m}$; $0,17\text{ m}$; $0,34\text{ m}$ respectivement. Ces courbes montrent, comme vu dans le paragraphe 2.5.3, que la convergence entre le modèle couplé et le modèle non couplé est obtenue plus rapidement lorsque l'espacement entre les cavités est plus important. Le tableau 3.8 illustre les différentes fréquences de convergence entre le modèle couplé et le modèle non couplé. Pour les 3 cavités les plus rapprochées (espacées de $0,02\text{ m}$) cette convergence est obtenue vers 1000 Hz , alors que pour les plus éloignées (espacement de $0,34\text{ cm}$) celle-ci est obtenue vers 500 Hz . Par conséquent, la convergence entre le modèle couplé et le modèle non couplé est obtenue à partir de 1000 Hz pour tous les espacements considérés. Il est possible donc de gagner en temps de calcul en négligeant les phénomènes de couplage entre cavités à partir de cette fréquence. Cette limite reste

3.7 Validation expérimentale du couplage entre cavités

valable uniquement pour cette configuration étudiée.

3.7 Validation expérimentale du couplage entre cavités

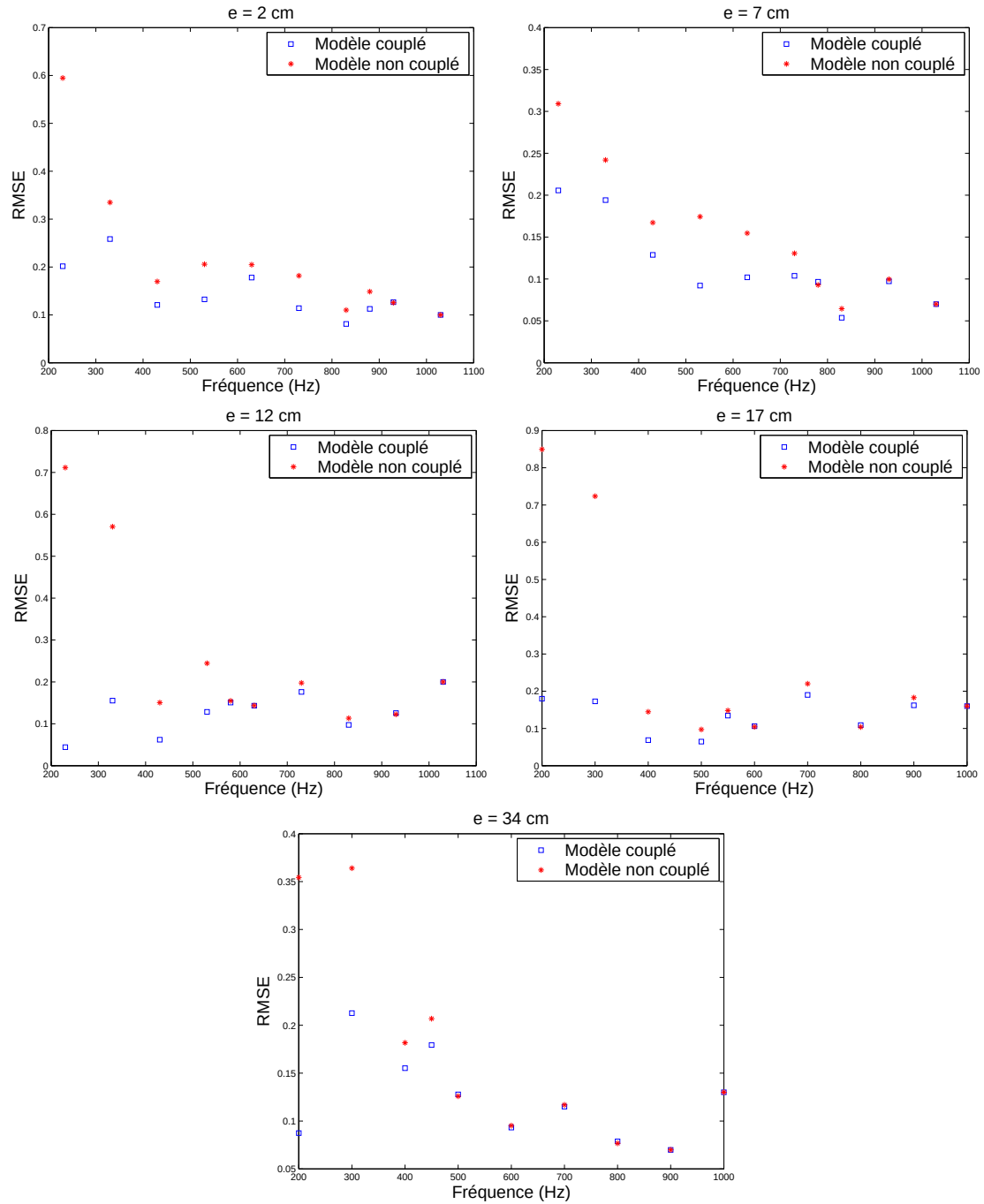


FIGURE 3.29 – Comparaison des valeurs du paramètre $RMSE$ obtenus pour le modèle couplé et le modèle non couplé en fonction de la fréquence pour les 5 réseaux de 3 cavités périodique espacées de $0,02\text{ m}$; $0,07\text{ m}$; $0,12\text{ m}$; $0,17\text{ m}$; $0,34\text{ m}$ respectivement.

Espacement	Fréquence de convergence
$e = 0,02\ m$	$930\ Hz$
$e = 0,07\ m$	$780\ Hz$
$e = 0,12\ m$	$580\ Hz$
$e = 0,17\ m$	$550\ Hz$
$e = 0,34\ m$	$500\ Hz$

TABLE 3.8 – Fréquence de convergence entre le modèle couplé et le modèle non couplé.

3.8 Discussion et synthèse à propos du modèle développé

- Notre modèle permet de prévoir le champ de pression acoustique au dessus des réseaux de cavités rectangulaires excités par des ondes planes. Une décomposition en ondes planes du champ sphérique incident a été effectuée et intégrée dans le modèle pour se rapprocher de la réalité. Cette intégration est à l'origine de la limitation du modèle développé car elle nécessite une taille de mémoire informatique importante en hautes fréquences ($\approx 8\ Go$ de RAM à $900\ Hz$ pour un réseau de 9 cavités rectangulaires). La résolution du système d'équations matricielles nécessite des opérations d'inversion de matrices par méthode directe (factorisation LU) et méthode itérative (Gauss-Seidel) et des produits matriciels. Ces opérations deviennent très coûteuses d'un point de vue du temps de calcul lorsque la taille des matrices devient importante. Il serait donc judicieux de repenser le développement du modèle en intégrant dès le départ une onde sphérique comme onde incidente. En effet, le même raisonnement effectué pour des ondes planes peut être fait pour des ondes sphériques : une vitesse acoustique nulle sur les bords de la cavité (surface plane rigide) et non nulle au dessus de la cavité (continuité de vitesse). Ceci permettant d'exprimer le

champ diffracté par une expression analogue à celle du champ diffracté dans le cas des ondes planes.

Pour avoir un maximum de précision, il faut augmenter l'ordre S (maximum des indices m, n, s et t). Cette opération est aussi très coûteuse d'un point de vue de l'espace mémoire nécessaire et du temps de calcul car la décomposition a été intégrée dans le système matriciel (les matrices des amplitudes modales sont de taille $N_x N_y \times S^2$).

- Notre modèle pourrait être aussi utilisé pour caractériser les réseaux de cavités rectangulaires par :
 - une admittance réduite équivalente. Celle-ci pourrait être estimée en utilisant une condition aux limites mixte au niveau de la surface plane équivalente donnée par :

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} - jk\eta_{eq} \right) \Phi = 0, z = 0 \quad (3.6)$$

Avec Φ est le champ total au dessus des cavités. Dans ce cas :

$$\eta_{eq}(x, y) = \frac{j}{k} \frac{\frac{\partial \Phi_d}{\partial z} \big|_{z=0}}{2Ae^{jk_x x} e^{jk_y y} + \Phi_d(x, y, z=0)} \quad (3.7)$$

- Il serait alors possible de déduire également un coefficient de réflexion equivalent $R_{eq}(x, y)$ et un coefficient d'absorption equivalent $\alpha_{eq}(x, y)$ donnés par :

$$R_{eq}(x, y) = \frac{k_z - k\eta_{eq}(x, y)}{k_z + k\eta_{eq}(x, y)} \quad (3.8)$$

$$\alpha_{eq}(x, y) = 1 - |R_{eq}(x, y)|^2 \quad (3.9)$$

Ceci permettra par la suite de simplifier l'étude des parois à relief dans les milieux confinés. En effet, la paroi à reliefs peut être remplacée par une paroi plane équivalente caractérisée par une impédance réduite équivalente. Et par la suite, une condition aux limites mixte au niveau de la paroi plane peut être appliquée.

- Notre modèle peut être utilisé pour traiter les problèmes inverses par une utilisation de techniques d'optimisations permettant de faire varier tous les paramètres

du modèle afin de trouver une configuration de cavités rectangulaires équivalente à la mesure effectuée au dessus d'une paroi à reliefs. Ces techniques d'optimisations peuvent permettre aussi de trouver une configuration optimale donnant un coefficient d'absorption ou de diffusion donné.

- Le coefficient de diffusion est défini comme étant le rapport entre l'énergie réfléchie de manière diffuse et l'énergie totale réfléchie. D'un point de vue expérimental il peut être déterminé par la méthode de Mommertz et Vörlander [52, 65] en champ libre. Notre modèle permet d'accéder directement à l'énergie diffuse puisqu'il sépare les champs et permet de calculer chacun d'entre eux en tout point au-dessus du relief. Ainsi, il permettrait d'accéder au coefficient de diffusion théorique par la relation suivante [23] :

$$s_{\text{diffusion}}(r, \theta, \phi, k) = 1 - |A_{R_0}|^2 \quad (3.10)$$

où A_{R_0} est l'amplitude de l'onde réfléchie dans la direction spéculaire. A l'aide de notre modèle, cette amplitude peut être déterminée à partir de la relation (3.8) définissant le coefficient de réflexion équivalent de la surface à relief étudiée. Ce coefficient traduit la réflexion des ondes diffuses de manière locale, c'est pourquoi il dépend des coordonnées sphériques r , θ et ϕ (voir figure 2.1). A_{R_0} peut donc être déterminé à partir de R_{eq} dans la direction (r, θ, ϕ) spéculaire.

- A termes, il serait également intéressant d'étudier le comportement acoustique diffusant d'un volume sortant, comme par exemple un ou plusieurs cubes de dimensions différentes. Ce type de relief sortant peut être obtenu par juxtaposition de plusieurs cavités. La résolution d'un tel problème conduira à remplacer les conditions aux limites des parois latérales des cavités par des conditions de continuité puisque dans ce cas, les cavités sont jointes (pas d'espacement entre elles). Par ailleurs, il est également possible de caractériser d'un point de vue acoustique les volumes sortants en utilisant le principe de Babinet déjà utilisé dans l'électromagnétisme. En effet, ce principe stipule que la diffraction électromagnétique engendrée par la juxtaposition

d'une fente et d'un écran (infiniment mince et infiniment conducteur) est identique à celle résultant de la juxtaposition d'un écran et d'une fente (profil inverse). Ce principe est valable si on change de polarisation du champ incident entre les deux cas : de type TE (Transverse Electrique) pour le premier, de type TM (Transverse Magnetique) pour le deuxième (voir figure 3.30) [66]. Ce théorème a été utilisé par K. Hongo et al. [47] pour déduire le champ électromagnétique diffracté par un réseau de deux plaques conductrices à partir de celui développé pour étudier la diffraction des ondes électromagnétiques par un réseau de fentes. Dans notre cas, le profil complémentaire d'une fente épaisse rectangulaire espacée d'un écran est un relief sortant rectangulaire (voir figure 3.31). Le cas d'un réseau de reliefs rectangulaires sortants se ramène donc à étudier un réseau de fentes rectangulaires espacées d'un écran (figure 3.32).

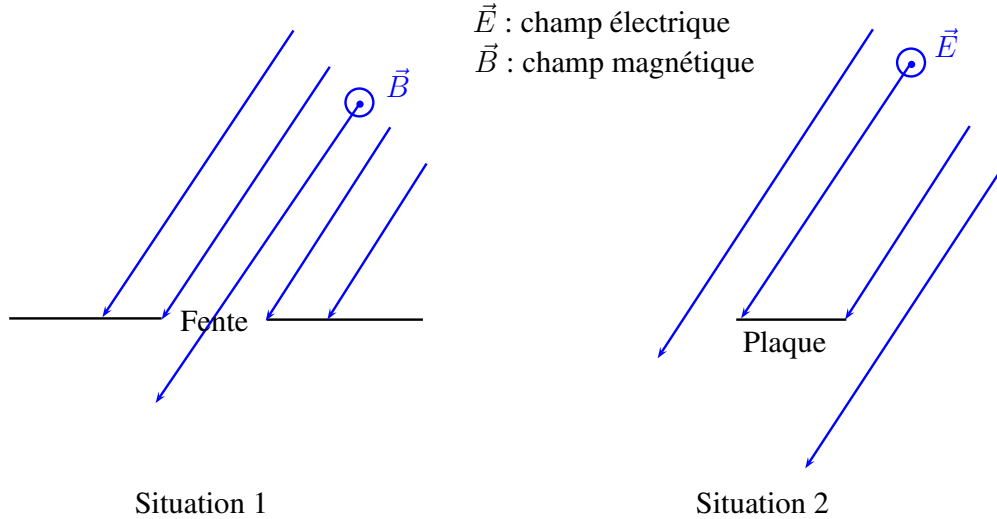


FIGURE 3.30 – Représentation d'une ouverture illuminée en polarisation magnétique (situation 1), et d'une fente équivalente illuminée en polarisation électrique (situation 2).



FIGURE 3.31 – Application du principe de Babinet pour étudier un relief sortant rectangulaire.

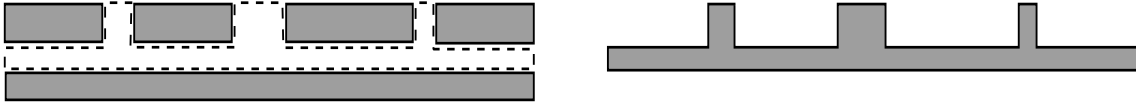


FIGURE 3.32 – Application du principe de Babinet pour étudier un réseau de reliefs sortants rectangulaires.

- D'autre part, une étude plus approfondie concernant l'influence des phénomènes de couplage sur les amplitudes modales à l'intérieur de la cavité devrait être menée. En effet, le système des équations matricielles donné par les équations (2.149)-(2.152) (cas d'un réseau de cavités rectangulaires non parallèles) ou (2.124)-(2.127) (cas d'un réseau de cavités rectangulaires parallèles) montre que le couplage modifie les amplitudes modales des cavités. Cette étude n'a pu être effectuée dans le cadre de cette thèse pour des raisons de temps mais elle n'était pas nécessaire au bon fonctionnement du modèle qui prend en compte les phénomènes de couplage entre cavités. Cette étude est intéressante à titre complémentaire.
- Enfin, des études mathématiques sur les familles d'intégrales définissant le champ diffracté ou ses amplitudes ou les coefficients de couplages que nous n'avons pas pu résoudre d'une manière analytique doivent être menées afin de pouvoir gagner en temps de calcul et surtout avoir une expression plus explicite du champ diffracté, de ses amplitudes modales et des coefficients de couplage.

Conclusion générale

L'objectif de cette étude est de développer un modèle prévisionnel du champ de pression acoustique au dessus d'une paroi à relief périodique et/ou apériodique. Ce type de géométrie est souvent rencontré dans les parois qui délimitent les locaux industriels.

Une étude bibliographique a permis d'étudier les modèles théoriques existants non limités en fréquence qui permettent de déterminer une expression analytique du champ réfléchi diffracté au dessus d'un profil apériodique contenant des cavités rectangulaires :

1. La méthode des sources images, la méthode des rayons sonores et la méthode de Kirchhoff, valables dans les hypothèses de l'optique géométrique, sont limitées en hautes fréquences et ne tiennent pas compte du phénomène de diffraction des ondes acoustiques sur les bords du relief,
2. L'approximation de Born, basée d'un point de vue mathématique sur la méthode de Picard, est limitée en moyennes fréquences,
3. La méthode de perturbation exige que la variation de hauteur du relief soit faible par rapport à la longueur d'onde, ce qui limite son domaine de validité en basses fréquences,
4. Un modèle regroupant les approximations de Kirchhoff, de Born et la méthode de perturbation, chacune valable dans son domaine fréquentiel, n'a pas pu être utilisé à cause de la lourdeur de simulation,
5. La méthode d'homogénéisation périodique, la méthode Holford et la méthode des guides d'ondes sont des méthodes valables pour des structures à reliefs uniquement périodiques,

6. La méthode Wiener-Hopf, la méthode de H. H. Park et la méthode Kobayashi Potential (KP) sont à l'origine adaptées aux problèmes de propagation des ondes dans les fentes épaisses. Ces trois dernières techniques ne sont pas des méthodes d'approximation car elles aboutissent à une expression exacte du champ de pression acoustique réfléchi au dessus de ces fentes. La méthode KP a été retenue car elle permet d'étudier le champ acoustique réfléchi au dessus d'une cavité élémentaire une fois que l'on a obstrué le fond de la fente par un matériau.

Le modèle KP a donc été adapté pour étudier le profil de pression acoustique au-dessus d'une cavité élémentaire. Par juxtaposition, ce modèle a été généralisé au cas de réseaux périodiques et apériodiques contenant plusieurs cavités rectangulaires. Les phénomènes de couplage existants entre les cavités sont pris en compte. Une étude de ce couplage en fonction de l'espacement entre cavités et en fonction de la fréquence a pu être effectuée théoriquement et validée expérimentalement.

Plusieurs campagnes de mesures ont été réalisées en chambre sourde pour valider le modèle analytique développé : étude du profil de pression acoustique au-dessus d'une cavité, d'un ensemble de 3 cavités, d'un réseau périodique puis apériodique contenant 9 cavités rectangulaires parallèles. L'expérience corrobore bien la théorie ce qui a permis de valider le modèle sur une large bande fréquentielle. Une validation par la méthode des éléments finis a été également effectuée et a ainsi permis de confirmer la robustesse du modèle.

Une adaptation au cas d'un réseau de cavités rectangulaires non parallèles a été également effectuée. Un ensemble de deux cavités rectangulaires non parallèles (une cavité est pivotée de 45°) a été étudié sur deux axes de mesure : $y = 0\text{ m}$ et $y = -0,37\text{ m}$. Une confrontation des trois approches : modèle analytique, FEM et expérience a été effectuée pour le premier axe de mesure. Sur le deuxième axe de mesure, uniquement une confrontation avec l'expérience a été faite. Un bon accord a été obtenu entre les différents approches confirmant la validité de notre modèle.

Plusieurs réseaux périodiques de 3 cavités de différents espacements entre cavités ont été étudiés. Le bon accord obtenu entre les résultats théoriques (modèle et FEM) et expérimentaux a permis de valider la prise en compte des phénomènes de couplage entre cavités dans le modèle. Un développement asymptotique a été effectué pour des rainures en faisant tendre une dimension vers l'infini. Le coefficient de couplage ainsi obtenu a été comparé avec le coefficient de couplage obtenu pour des rainures en électromagnétisme. Un bon accord a été obtenu prouvant que notre modèle peut être utilisé pour étudier la réflexion des ondes acoustiques par des rainures en faisant tendre une dimension vers l'infini. Cette première étude a montré une décroissance en f^{-1} et en $\delta_{x_{ij}}^{-\frac{1}{2}}$ (distance séparant les centres des deux rainures i et j) comme celle obtenue pour des rainures en électromagnétisme mode TM (transverse magnétique). Une étude du couplage a été ensuite effectuée pour deux réseaux de deux cavités. Le premier présente une distance nulle selon l'axe Oy entre les deux centres des deux repères locaux centrés sur les deux cavités. Des courbes de tendance théoriques ont montré à travers le modèle une décroissance du couplage en f^{-1} et en δ_{ij}^{-1} (distance séparant les centres des deux cavités i et j). Cette étude a montré également que les coefficients de couplage existants entre deux cavités présentent une pseudo-périodicité en $\frac{\lambda}{2}$. Celle-ci provient de la distance qui sépare les deux repères locaux centrés sur les deux cavités respectivement.

En conclusion, nous avons développé un modèle valable sur une large bande fréquentielle, et qui sépare bien des différents champs mis en jeu : champ incident, champ réfléchi spéculaire et champ diffracté, au dessus de réseaux de cavités aperiodiques parallèles et non parallèles. Ceci permettra de calculer un coefficient de diffusion acoustique pour différents réseaux à cavités rectangulaires parallèles ou non parallèles. Cette technique pourrait permettre à terme de chercher une configuration optimale de relief donnant un fort coefficient de diffusion.

Bibliographie

- [1] A. M. Ondet and J. L. Barbry. Modeling of sound propagation in fitted workshops using ray tracing. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 85(2) :787–796, 1989.
- [2] J. Ducourneau and V. Planeau. Etude de l’influence apportée par des parois épaisses non planes sur le champ acoustique dans un local industriel. Document de travail UMAP NP/01DT-009/JD, Institut national de recherche et de sécurité, Vandœuvre-lès-Nancy, France, 2001.
- [3] L. Bos. *Caractérisation acoustique des parois épaisses périodiques dans les locaux industriels*. Thèse de doctorat, Université Henri Poincaré Nancy I, 2006.
- [4] P. V. Naik. *Principles of Physics*. PHI, New Delhi, 4th edition, 2010.
- [5] M. Bruneau. *Manuel d’acoustique fondamentale*. Hermes, 1998.
- [6] J. J. Embrechts. Simulation of first and second order scattering by rough surfaces with a sound ray formalism. *Journal of Sound and Vibration*, 229(1) :65 – 87, 2000.
- [7] S. M. Dance and B. M. Shield. The complete image-source method for the prediction of sound distribution in non-diffuse enclosed spaces. *Journal of Sound and Vibration*, 201(4) :473 – 489, 1997.
- [8] J. B. Allen and D. A. Berkley. Image method for efficiently simulating small-room acoustics. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 65(4) :943–950, 1979.
- [9] D. Habault. Analytic expansions and approximation methods. In *Acoustics*, pages 159 – 188. Academic Press, London, 1999.

-
- [10] S. Hu, L. Fu, and Z. Yao. Comparison of various approximation theories for randomly rough surface scattering. *Wave Motion*, 46(5) :281 – 292, 2009.
- [11] K. Lee and W. Seong. Time-domain kirchhoff model for acoustic scattering from an impedance polygon facet. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 126(1) :EL14–EL21, 2009.
- [12] E. I. Thorsos. The validity of the kirchhoff approximation for rough surface scattering using a gaussian roughness spectrum. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 83(1) :78–92, 1988.
- [13] D. Feyel. Sur la methode de picard (edo et eds). In Jacques Azéma, Marc Yor, and Paul Meyer, editors, *Séminaire de Probabilités XXI*, volume 1247 of *Lecture Notes in Mathematics*, pages 515–519. Springer Berlin / Heidelberg, 1987. 10.1007/BFb0077652.
- [14] K. Arbenz and A. Wohlhauser. *Analyse numérique*. PPUR presses polytechniques, 1983.
- [15] R. Huang, L. W. Schmerr, and A. Sedov. Improving the born approximation for the scattering of ultrasound in elastic solids. *Ultrasonics*, 44(Supplement 1) :e981 – e984, 2006. Proceedings of Ultrasonics International (UI’05) and World Congress on Ultrasonics (WCU).
- [16] W. A. Kuperman and H. Schmidt. Rough surface elastic wave scattering in a horizontally stratified ocean. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 79(6) :1767–1777, 1986.
- [17] J. Liu and C. Huang. Acoustic plane-wave reflection from a rough surface over a random fluid half-space. *Ocean Engineering*, 28(7) :751 – 762, 2001.
- [18] K. Chandra, S. K. Isler, and C. Thompson. Acoustic scattering in three-dimensional fluid media. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 98(6) :3462–3468, 1995.

- [19] S. M. Mirzaei. Fredholm integral equations of the first kind solved by using the homotopy perturbation method. *Int. Journal of Math. Analysis*, 5(19) :935 – 940, 2011.
- [20] E. Lenglet. *Contribution au developpement d'une méthode d'homogénéisation des composites à fibres actives*. Thèse de doctorat, Université des sciences et technologie de Lille, 2003.
- [21] A. Nouy. *Une stratégie de calcul multiéchelle avec homogénéisation en temps et en espace pour le calcul de structures fortement hétérogènes*. Thèse de doctorat, École Normale Supérieure de Cachan, 2003.
- [22] A. de Bruijn. The sound absorption of an absorbing periodically uneven surface of rectangular profile. *Acustica*, 18 :123–131, 1967.
- [23] J.-J. Embrechts and A. Billon. Theoretical determination of the random-incidence scattering coefficients of infinite rigid surfaces with a periodic rectangular roughness profile. *Acta Acustica united with Acustica*, 97(4) :607–617, 2011.
- [24] R. L. Holford. Scattering of sound waves at a periodic, pressure-release surface : An exact solution. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 70(4) :1116–1128, 1981.
- [25] J.-J. Embrechts, L. De Geetere, G. Vermeir, M. Vorlander, and T. Sakuma. Calculation of the random-incidence scattering coefficients of a sine-shaped surface. *Acta Acustica united with Acustica*, 92(4) :593–603, 2006.
- [26] M. Vorlander, J.-J. Embrechts, L. De Geetere, G. Vermeir, and M. H. de Avelar Gomes. Case studies in measurement of random incidence scattering coefficients. *Acta Acustica united with Acustica*, 90(5) :858–867, 2004.
- [27] S. Koshikawa and K. Kobayashi. Diffraction by parallel-plate waveguide cavity with dielectric/ferrite loading : Part ii - the case of h polarisation. *Progress In Electromagnetics Research*, 8 :427 – 458, 1994.

-
- [28] K. Kobayashi, S. Koshikawa, and A. Sawai. Diffraction by parallel-plate waveguide cavity with dielectric/ferrite loading : Part i - the case of e polarisation. *Progress In Electromagnetics Research*, 8 :377 – 426, 1994.
- [29] B. Erbaş and I. D. Abrahams. Scattering of sound waves by an infinite grating composed of rigid plates. *Wave Motion*, 44(4) :282 – 303, 2007.
- [30] T. J. Park, H. J. Eom, and K. Yoshitomi. An analysis of transverse-electric scattering from a rectangular channel in a conducting plane. *Radio Sci.*, 28 :663 – 673, 1993.
- [31] T. J. Park, S. H. Kang, and H. J. Eom. TE scattering from a slit in a thick conducting screen : Revisited. *IEEE Trans. Antennas Propag.*, 42 :112 – 114, 1994.
- [32] S. H. Kang, H. J. Eom, and T. J. Park. TM scattering from a slit in a thick conducting screen : Revisited. *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, 41 :895 – 899, 1993.
- [33] H. H. Park and H. J. Eom. Acoustic scattering from a rectangular aperture in a thick hard screen. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 101(1) :595–598, 1997.
- [34] J. S. Seo, Hyo J. Eom, and H. S. Lee. Acoustic scattering from two circular apertures in a thick hard plane. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 107(5) :2338–2343, 2000.
- [35] H. H. Park and H. J. Eom. Electromagnetic scattering from multiple rectangular apertures in a thick conducting screen. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 47(6) :1056–1060, 1999.
- [36] I. N. Sneddon. *Mixed Boundary Value Problems in Potential Theory*. North-Holland Pub. Co., 1966.
- [37] A. Imran, Q. A. Naqvi, and K. Hongo. Diffraction of electromagnetic plane wave by an impedance strip. *Progress In Electromagnetics Research*, 75 :303 – 118, 2007.
- [38] K. Hongo and Q. A. Naqvi. Diffraction of electromagnetic wave by disk and circular hole in a perfectly conducting plane. *Progress In Electromagnetics Research*, 68 :113 – 150, 2007.

-
- [39] A. Imran, Q. A. Naqvi, and K. Hongo. Diffraction of electromagnetic plane wave by an infinitely long conducting strip on dielectric slab. *Optics Communications*, 282(4) :443 – 450, 2009.
- [40] A. Imran, Q. A. Naqvi, and K. Hongo. Diffraction of plane wave by two parallel slits in an infinitely long impedance plane using the method of kobayashi potential. *Progress In Electromagnetics Research*, 63 :107–123, 2006.
- [41] T. Otsuki. Diffraction by two parallel slits in a plane. *Journal of Mathematical Physics*, 19(4) :911–915, 1978.
- [42] K. Hongo and G. Ishii. Diffraction of an electromagnetic plane wave by a thick slit. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 26(3) :494 – 499, 1978.
- [43] K. Hongo and H. Serizawa. Diffraction of electromagnetic plane wave by a rectangular plate and a rectangular hole in the conducting plate. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 47(6) :1029 – 1041, 1999.
- [44] A. Imran, Q. A. Naqvi, and K. Hongo. Diffraction of electromagnetic plane wave from a slit in pemc plane. *Progress In Electromagnetics Research*, 8 :67–77, 2009.
- [45] K. Hongo and H. Kobayashi. Evaluation of the surface field scattered by an impedance polygonal cylinder. *Electromagnetics*, 21(4) :319–339, 2001.
- [46] H. Serizawa and K. Hongo. Radiation from a flanged rectangular waveguide. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 53(12) :3953 – 3962, 2005.
- [47] K. Hongo, N. Furusawa, and H. Horis. Two-dimensional multiple scattering for n slit array. *Electronics and Communications in Japan (Part I : Communications)*, 63(5) :89–96, 1980.
- [48] K. Hongo. Radiation characteristics of flanged parallel-plate waveguide arrays. *Trans. Inst. Electronics and Comm. Engrg in Japan*, 61-B :161 – 165, 1978.

- [49] K. Hongo and H. Serizawa. Diffraction of an acoustic plane wave by a rectangular hole in an infinitely large rigid screen. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 106(1) :29–35, 1999.
- [50] H. Serizawa and K. Hongo. Evaluation of an acoustic plane wave transmitted through a rectangular hole in a thick hard screen. *Wave Motion*, 36(2) :103 – 117, 2002.
- [51] N. R. Hill and V. Celli. Limits of convergence of the rayleigh method for surface scattering. *Phys. Rev. B*, 17 :2478–2481, Mar 1978.
- [52] T. J. Cox and P. D’Antonio. *Acoustic Absorbers and Diffusers : Theory, Design and Application*. Taylor & Francis, 2009.
- [53] N. González-Salido, A. Islas-Cital, F. Camarena, R. Pico, and P. R. Atkins. Scattering of complex geometries by finite element method. In *Proceedings of the Acoustics 2012 Nantes Conference*, Nantes, France, April 2012.
- [54] M. Abramowitz and I. A. Stegun. *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. Dover, New York, ninth dover printing, tenth gpo printing edition, 1964.
- [55] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik. *Table of Integrals, Series, and Products*. Alan Jeffrey and Daniel Zwillinger, seventh edition, 2007.
- [56] R. E. Collin. *Field theory of guided waves*. IEEE, New York, 2nd edition edition, 1991.
- [57] M. Hill and I. Robinson. d2lri : A nonadaptive algorithm for two-dimensional cubature. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 112(1-2) :121 – 145, 1999.
- [58] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, and B. P. Flannery. *Numerical Recipes in C. The Art of Scientific Computing*. Cambridge University Press, 1992.
- [59] K. Hongo. Radiation characteristics of flanged parallel-plate waveguide arrays. *Electronics and Communications in Japan*, 61-B(3) :53–57, 1978.

-
- [60] C. Wu. Characteristics of coupling between parallel-plate waveguides with and without dielectric plugs. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 18(2) :188 – 194, 1970.
- [61] J. Ducourneau, L. Bos, V. Planeau, A. Faiz, S. Skali-Lami, and A. Nejade. Prediction of the acoustic pressure above periodically uneven facings in industrial workplaces. *Journal of Sound and Vibration*, 329(11) :2276 – 2290, 2010.
- [62] T. Kozacki. Numerical errors of diffraction computing using plane wave spectrum decomposition. *Optics Communications*, 281(17) :4219 – 4223, 2008.
- [63] J. S. Suh and P. A. Nelson. Measurement of transient response of rooms and comparison with geometrical acoustic models. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 105(4) :2304–2317, 1999.
- [64] Cees H. Taal, Richard C. Hendriks, Richard Heusdens, and Jesper Jensen. An evaluation of objective measures for intelligibility prediction of time-frequency weighted noisy speech. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 130(5) :3013–3027, 2011.
- [65] M. Vorländer and E. Mommertz. Definition and measurement of random-incidence scattering coefficients. *Applied Acoustics*, 60(2) :187 – 199, 2000.
- [66] Paul Poincelot. Sur le théorème de babinet au sens de la théorie électromagnétique. *Annals of Telecommunications*, 12 :410–414, 1957. 10.1007/BF03015997.

Annexes

A.1 Détermination des fonctions inconnues f_{cc} , f_{cs} , f_{sc} ,

$$f_{ss}$$

Les équations (2.24) et (2.10) (vitesse nulle du champ diffracté sur les bords de la cavité, vitesse non nulle du champ diffracté au dessus de la cavité) forment un système de deux equations intégrales :

$$\left\{ \begin{array}{l} \iint_{\mathbb{R}_+^2} \left(f_{cc}(\alpha, \beta) \cos(\alpha\xi) \cos(\beta\eta) + f_{cs}(\alpha, \beta) \cos(\alpha\xi) \sin(\beta\eta) + f_{sc}(\alpha, \beta) \sin(\alpha\xi) \cos(\beta\eta) \right. \\ \left. + f_{ss}(\alpha, \beta) \sin(\alpha\xi) \sin(\beta\eta) \right) \sqrt{\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} - k^2} d\alpha d\beta = 0, (x, y) \in D^c, z = 0 \\ \iint_{\mathbb{R}_+^2} \left(f_{cc}(\alpha, \beta) \cos(\alpha\xi) \cos(\beta\eta) + f_{cs}(\alpha, \beta) \cos(\alpha\xi) \sin(\beta\eta) + f_{sc}(\alpha, \beta) \sin(\alpha\xi) \cos(\beta\eta) \right. \\ \left. + f_{ss}(\alpha, \beta) \sin(\alpha\xi) \sin(\beta\eta) \right) \sqrt{\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} - k^2} d\alpha d\beta \neq 0, (x, y) \in D, z = 0 \end{array} \right.$$

La parité des fonctions en ξ et η permet de diviser ce système en 4 systèmes différents :

$$\left\{ \begin{array}{l} \iint_{\mathbb{R}_+^2} f_{cc}(\alpha, \beta) \cos(\alpha\xi) \cos(\beta\eta) \sqrt{\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} - k^2} d\alpha d\beta = 0, (x, y) \in D^c, z = 0 \\ \iint_{\mathbb{R}_+^2} f_{cc}(\alpha, \beta) \cos(\alpha\xi) \cos(\beta\eta) \sqrt{\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} - k^2} d\alpha d\beta \neq 0, (x, y) \in D, z = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \iint_{\mathbb{R}_+^2} f_{cs}(\alpha, \beta) \cos(\alpha\xi) \sin(\beta\eta) \sqrt{\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} - k^2} d\alpha d\beta = 0, (x, y) \in D^c, z = 0 \\ \iint_{\mathbb{R}_+^2} f_{cs}(\alpha, \beta) \cos(\alpha\xi) \sin(\beta\eta) \sqrt{\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} - k^2} d\alpha d\beta \neq 0, (x, y) \in D, z = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \iint_{\mathbb{R}_+^2} f_{sc}(\alpha, \beta) \sin(\alpha\xi) \cos(\beta\eta) \sqrt{\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} - k^2} d\alpha d\beta = 0, (x, y) \in D^c, z = 0 \\ \iint_{\mathbb{R}_+^2} f_{sc}(\alpha, \beta) \sin(\alpha\xi) \cos(\beta\eta) \sqrt{\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} - k^2} d\alpha d\beta \neq 0, (x, y) \in D, z = 0 \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} \iint_{\mathbb{R}_+^2} f_{ss}(\alpha, \beta) \sin(\alpha\xi) \sin(\beta\eta) \sqrt{\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} - k^2} d\alpha d\beta = 0, & (x, y) \in D^c, z = 0 \\ \iint_{\mathbb{R}_+^2} f_{ss}(\alpha, \beta) \sin(\alpha\xi) \sin(\beta\eta) \sqrt{\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} - k^2} d\alpha d\beta \neq 0, & (x, y) \in D, z = 0 \end{cases}$$

Par identification avec les deux systèmes (2.25) et (2.26) rappelés ci-dessous :

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{J_{2n+\sigma}(t)}{t^\sigma} \cos(xt) dt &= \begin{cases} 0 & (|x| > 1) \\ \frac{(-1)^n \Gamma(\sigma) \Gamma(2n+1)}{2^{1-\sigma} \Gamma(2n+2\sigma)} (1-x^2)^{\sigma-\frac{1}{2}} C_{2n}^{(\sigma)}(x), & (|x| < 1, n \in \mathbb{N}) \end{cases} \\ \int_0^\infty \frac{J_{2n+1+\sigma}(t)}{t^\sigma} \sin(xt) dt &= \begin{cases} 0 & (|x| > 1) \\ \frac{(-1)^n \Gamma(\sigma) \Gamma(2n+2)}{2^{1-\sigma} \Gamma(2n+2\sigma+1)} (1-x^2)^{\sigma-\frac{1}{2}} C_{2n+1}^{(\sigma)}(x), & (|x| < 1, n \in \mathbb{N}) \end{cases} \end{aligned}$$

on obtient les expressions (2.27)-(2.30) :

$$\begin{aligned} f_{cc}^{(m,n)}(\alpha, \beta) &= A_{mn} \frac{J_{2m+\sigma}(\alpha) J_{2n+\tau}(\beta)}{\alpha^\sigma \beta^\tau \sqrt{\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} - k^2}} \\ f_{cs}^{(m,n)}(\alpha, \beta) &= B_{mn} \frac{J_{2m+\sigma}(\alpha) J_{2n+1+\tau}(\beta)}{\alpha^\sigma \beta^\tau \sqrt{\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} - k^2}} \\ f_{sc}^{(m,n)}(\alpha, \beta) &= C_{mn} \frac{J_{2m+1+\sigma}(\alpha) J_{2n+\tau}(\beta)}{\alpha^\sigma \beta^\tau \sqrt{\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} - k^2}} \\ f_{ss}^{(m,n)}(\alpha, \beta) &= D_{mn} \frac{J_{2m+1+\sigma}(\alpha) J_{2n+1+\tau}(\beta)}{\alpha^\sigma \beta^\tau \sqrt{\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} - k^2}} \end{aligned}$$

Où A_{mn} , B_{mn} , C_{mn} , et D_{mn} sont des amplitudes modales inconnues.

A.2 Continuité de pression : cas d'une seule cavité

L'équation de continuité (2.11) peut être écrite, en remplaçant chaque champ acoustique mis en jeu par leur expression respective, sous la forme :

$$\begin{aligned} & 2Ae^{jk_x a \xi} e^{jk_y b \eta} + \sum_{m,n \geq 0} \iint_{\mathbb{R}_+^2} \left(A_{mn} J_{2m}(\alpha) J_{2n}(\beta) \cos(\alpha\xi) \cos(\beta\eta) \right. \\ & + B_{mn} J_{2m}(\alpha) J_{2n+1}(\beta) \cos(\alpha\xi) \sin(\beta\eta) + C_{mn} J_{2m+1}(\alpha) J_{2n}(\beta) \sin(\alpha\xi) \cos(\beta\eta) \\ & \left. + D_{mn} J_{2m+1}(\alpha) J_{2n+1}(\beta) \sin(\alpha\xi) \sin(\beta\eta) \right) \left(\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} - k^2 \right)^{-\frac{1}{2}} d\alpha d\beta \\ & = \sum_{p,q \geq 0} \cos \frac{p\pi}{2} (\xi + 1) \cos \frac{q\pi}{2} (\eta + 1) \Gamma_{pq}^+ E_{pq}, \forall m, n, p, q \in \mathbb{N}, |\xi|, |\eta| \leq 1 \end{aligned} \quad (11)$$

En décomposant les exponentielles sous forme trigonométrique et les sommations en fonctions de la parité des indices p et q , on obtient l'équation suivante :

$$\begin{aligned}
& 2A \left(\cos(k_x a \xi) \cos(k_y b \eta) + j \cos(k_x a \xi) \sin(k_y b \eta) + j \sin(k_x a \xi) \cos(k_y b \eta) \right. \\
& \quad \left. - \sin(k_x a \xi) \sin(k_y b \eta) \right) + \sum_{m,n \geq 0} \iint_{\mathbb{R}^2_+} \left(A_{mn} J_{2m}(\alpha) J_{2n}(\beta) \cos(\alpha \xi) \cos(\beta \eta) \right. \\
& \quad + B_{mn} J_{2m}(\alpha) J_{2n+1}(\beta) \cos(\alpha \xi) \sin(\beta \eta) + C_{mn} J_{2m+1}(\alpha) J_{2n}(\beta) \sin(\alpha \xi) \cos(\beta \eta) \\
& \quad \left. + D_{mn} J_{2m+1}(\alpha) J_{2n+1}(\beta) \sin(\alpha \xi) \sin(\beta \eta) \right) \left(\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} - k^2 \right)^{-\frac{1}{2}} d\alpha d\beta \\
& = \left(\sum_{(p \in 2\mathbb{N}) \geq 0} \sum_{(q \in 2\mathbb{N}) \geq 0} + \sum_{(p \in 2\mathbb{N}) \geq 0} \sum_{(q \in 2\mathbb{N}+1) \geq 0} + \sum_{(p \in 2\mathbb{N}+1) \geq 0} \sum_{(q \in 2\mathbb{N}) \geq 0} + \sum_{(p \in 2\mathbb{N}+1) \geq 0} \sum_{(q \in 2\mathbb{N}+1) \geq 0} \right) \\
& \cos \frac{p\pi}{2} (\xi + 1) \cos \frac{q\pi}{2} (\eta + 1) \Gamma_{pq}^+ E_{pq}, \forall m, n \in \mathbb{N}, |\xi|, |\eta| \leq 1
\end{aligned}$$

Or :

$$\cos \frac{p\pi}{2} (\xi + 1) \propto \begin{cases} \cos(n\pi\xi) & \text{si } p = 2n, n \in \mathbb{N} \\ \sin(n\pi\xi) & \text{si } p = 2n + 1, n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Par conséquent, nous obtenons quatre équations en utilisant la parité des fonctions en ξ et η et la parité des indices de sommation p et q :

$$\begin{aligned}
& 2A \cos(k_x a \xi) \cos(k_y b \eta) + \sum_{m,n \geq 0} A_{mn} \iint_{\mathbb{R}^2_+} \frac{J_{2m}(\alpha) J_{2n}(\beta) \cos(\alpha \xi) \cos(\beta \eta)}{\sqrt{\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} - k^2}} d\alpha d\beta \\
& = \sum_{p,q \geq 0} \cos \frac{p\pi}{2} (\xi + 1) \cos \frac{q\pi}{2} (\eta + 1) \Gamma_{pq}^+ E_{pq}, \\
& \forall m, n \in \mathbb{N}, \forall p, q \in 2\mathbb{N}, |\xi|, |\eta| \leq 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 2jA \cos(k_x a \xi) \sin(k_y b \eta) + \sum_{m,n \geq 0} B_{mn} \iint_{\mathbb{R}^2_+} \frac{J_{2m}(\alpha) J_{2n+1}(\beta) \cos(\alpha \xi) \sin(\beta \eta)}{\sqrt{\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} - k^2}} d\alpha d\beta \\
& = \sum_{p,q \geq 0} \cos \frac{p\pi}{2} (\xi + 1) \cos \frac{q\pi}{2} (\eta + 1) \Gamma_{pq}^+ E_{pq}, \\
& \forall m, n \in \mathbb{N}, \forall p \in 2\mathbb{N}, \forall q \in 2\mathbb{N} + 1, |\xi|, |\eta| \leq 1
\end{aligned}$$

A.3 Développement des fonctions trigonométriques sur la base des polynômes de Jacobi.
Orthogonalités des polynômes de Jacobi

$$\begin{aligned}
& 2jA \sin(k_x a \xi) \cos(k_y b \eta) + \sum_{m,n \geq 0} C_{mn} \iint_{\mathbb{R}_+^2} \frac{J_{2m+1}(\alpha) J_{2n}(\beta) \sin(\alpha \xi) \cos(\beta \eta)}{\sqrt{\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} - k^2}} d\alpha d\beta \\
&= \sum_{p,q \geq 0} \cos \frac{p\pi}{2} (\xi + 1) \cos \frac{q\pi}{2} (\eta + 1) \Gamma_{pq}^+ E_{pq}, \\
&\forall m, n \in \mathbb{N}, \forall p \in 2\mathbb{N} + 1, \forall q \in 2\mathbb{N}, |\xi|, |\eta| \leq 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -2A \sin(k_x a \xi) \sin(k_y b \eta) + \sum_{m,n \geq 0} D_{mn} \iint_{\mathbb{R}_+^2} \frac{J_{2m+1}(\alpha) J_{2n+1}(\beta) \sin(\alpha \xi) \sin(\beta \eta)}{\sqrt{\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} - k^2}} d\alpha d\beta \\
&= \sum_{p,q \geq 0} \cos \frac{p\pi}{2} (\xi + 1) \cos \frac{q\pi}{2} (\eta + 1) \Gamma_{pq}^+ E_{pq}, \\
&\forall m, n \in \mathbb{N}, \forall p, q \in 2\mathbb{N} + 1, |\xi|, |\eta| \leq 1
\end{aligned}$$

Où :

$$\Gamma_{pq}^+ = 1 + \frac{\gamma_{pq} + jk\eta_1}{\gamma_{pq} - jk\eta_1} e^{2\gamma_{pq}d}, \quad p, q \in \mathbb{N}$$

A.3 Développement des fonctions trigonométriques sur la base des polynômes de Jacobi. Orthogonalités des polynômes de Jacobi

A.3.1 Développement des fonctions trigonométriques sur la base des polynômes de Jacobi

Le développement de la fonction de bessel de première espèce est donné par [54] :

$$\xi^{-\sigma} J_{\sigma}(\alpha \xi) = \sum_{n \geq 0} \frac{\sqrt{8} (2n + \sigma + \frac{3}{2}) \Gamma(n + \sigma + \frac{3}{2})}{\Gamma(n + 1) \Gamma(\sigma + 1)} \frac{J_{2n + \sigma + \frac{3}{2}}(\alpha)}{\alpha^{\frac{3}{2}}} G_n \left(\sigma + \frac{3}{2}, \sigma + 1, \xi^2 \right)$$

Si $\sigma = -\frac{1}{2}$:

$$J_{-\frac{1}{2}}(\alpha \xi) = \sum_{n \geq 0} \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} (2n + 1) \frac{J_{2n+1}(\alpha)}{\alpha^{\frac{3}{2}}} \xi^{-\frac{1}{2}} G_n \left(1, \frac{1}{2}, \xi^2 \right)$$

Or [54] :

$$\cos(x) = \sqrt{\frac{\pi x}{2}} J_{-\frac{1}{2}}(x)$$

Par conséquent :

$$\cos(\alpha\xi) = \sqrt{\frac{\pi\alpha}{2}} \sum_{n \geq 0} \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} (2n+1) \frac{J_{2n+1}(\alpha)}{\alpha^{\frac{3}{2}}} G_n \left(1, \frac{1}{2}, \xi^2 \right)$$

Si $\sigma = \frac{1}{2}$:

$$J_{\frac{1}{2}}(\alpha\xi) = \sum_{n \geq 0} \frac{8\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} (n+1)^2 \frac{J_{2n+2}(\alpha)}{\alpha^{\frac{3}{2}}} \xi^{\frac{1}{2}} G_n \left(2, \frac{3}{2}, \xi^2 \right)$$

Or [54] :

$$\sin(x) = \sqrt{\frac{\pi x}{2}} J_{\frac{1}{2}}(x)$$

Par conséquent :

$$\sin(\alpha\xi) = \sqrt{\frac{\pi\alpha}{2}} \sum_{n \geq 0} \frac{8\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} (n+1)^2 \frac{J_{2n+2}(\alpha)}{\alpha^{\frac{3}{2}}} \xi G_n \left(2, \frac{3}{2}, \xi^2 \right)$$

A.3.2 Orthogonalités des polynômes de Jacobi

Les polynômes de Jacobi $G_n(\sigma + \frac{3}{2}, \sigma + 1, x)$ d'ordre n appartiennent à une famille de polynômes orthogonaux. Cette orthogonalité se traduit par la relation qui suit [54] :

$$\begin{aligned} & \int_0^1 x^\sigma (1-x)^{\frac{1}{2}} G_n(\sigma + \frac{3}{2}, \sigma + 1, x) G_{n'}(\sigma + \frac{3}{2}, \sigma + 1, x) \\ &= \frac{\Gamma(n+1) \Gamma^2(\sigma+1) \Gamma(n + \frac{3}{2})}{(2n + \sigma + \frac{3}{2}) \Gamma(n + \sigma + 1) \Gamma(n + \sigma + \frac{3}{2})} \delta_{nn'} \end{aligned}$$

Où :

$$\delta_{nn'} = \begin{cases} 1 & \text{si } n = n' \\ 0 & \text{si } n \neq n' \end{cases}$$

Si $\sigma = -\frac{1}{2}$:

$$\int_0^1 x^{-\frac{1}{2}}(1-x)^{\frac{1}{2}} G_n(1, \frac{1}{2}, x) G_{n'}(1, \frac{1}{2}, x) = \frac{\pi}{2} \delta_{nn'}$$

Si $\sigma = \frac{1}{2}$:

$$\int_0^1 x^{\frac{1}{2}}(1-x)^{\frac{1}{2}} G_n(2, \frac{3}{2}, x) G_{n'}(2, \frac{3}{2}, x) = \frac{\pi}{8(n+1)^2} \delta_{nn'}$$

A.3.3 Application des relations d'orthogonalité à un développement des fonctions trigonométriques en série de polynômes de Jacobi

Le but est de calculer les intégrales suivantes :

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \cos(k_x a \xi) (1 - \xi^2)^{\frac{1}{2}} G_{s'}(1, \frac{1}{2}, \xi^2) d\xi \\ & \int_0^1 \sin(k_y b \eta) \eta (1 - \eta^2)^{\frac{1}{2}} G_{t'}(1, \frac{1}{2}, \eta^2) d\eta \end{aligned}$$

Pour cela, nous allons développer les fonctions trigonométriques sous forme d'une série de polynômes de Jacobi (voir §A.3.1) et appliquer les relations d'orthogonalité de ces derniers (voir §A.3.2) :

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \cos(k_x a \xi) (1 - \xi^2)^{\frac{1}{2}} G_{s'}(1, \frac{1}{2}, \xi^2) d\xi \\ &= \frac{\sqrt{\pi k_x a}}{2} \int_0^1 \xi^{\frac{1}{2}} \xi^{-\frac{1}{2}} (1 - \xi^2)^{\frac{1}{2}} \sum_{s \geq 0} (2s+1) \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \frac{J_{2s+1}(k_x a)}{(k_x a)^{\frac{3}{2}}} G_s(1, \frac{1}{2}, \xi^2) G_{s'}(1, \frac{1}{2}, \xi^2) \end{aligned}$$

La convergence uniforme de la série ci-dessus permet d'intervertir l'intégrale et la somme.

Par la suite, l'orthogonalité des polynômes de Jacobi permet d'écrire :

$$\int_0^1 \cos(k_x a \xi) (1 - \xi^2)^{\frac{1}{2}} G_{s'}(1, \frac{1}{2}, \xi^2) d\xi = (2s+1) \frac{\pi}{2} \frac{J_{2s+1}(k_x a)}{k_x a} \delta_{ss'}$$

De la même manière on montre que :

$$\int_0^1 \sin(k_y b \eta) \eta (1 - \eta^2)^{\frac{1}{2}} G_{tt'}(1, \frac{1}{2}, \xi^2) d\eta = (2t + 1) \frac{\pi}{2} \frac{J_{2s+2}(k_y b)}{k_y b} \delta_{tt'}$$

A.4 Orthogonalités des modes propres du guide d'ondes. Intégrales utiles

L'application des relations d'orthogonalité des modes propres des guides d'ondes à l'équation (2.10) définissant la continuité de la vitesse au niveau de la cavité se fait grâce aux relations suivantes :

$$\int_{-1}^1 \cos \frac{p\pi}{2} (\xi + 1) \cos \frac{p'\pi}{2} (\xi + 1) d\xi = \epsilon_p \delta_{pp'}$$

Où :

$$\epsilon_p = \begin{cases} 2 & \text{si } p = 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 \cos(\alpha \xi) \cos \frac{p\pi}{2} (\xi + 1) d\xi \\ &= \left[\frac{\sin \left(\left(\alpha - \frac{p\pi}{2} \right) \xi - \frac{p\pi}{2} \right)}{2 \left(\alpha - \frac{p\pi}{2} \right)} + \frac{\sin \left(\left(\alpha + \frac{p\pi}{2} \right) \xi + \frac{p\pi}{2} \right)}{2 \left(\alpha + \frac{p\pi}{2} \right)} \right]_{-1}^1 \\ &= \frac{\sin \left(\alpha - \frac{p\pi}{2} - \frac{p\pi}{2} \right)}{2 \left(\alpha + \frac{p\pi}{2} \right)} - \frac{\sin \left(-\alpha + \frac{p\pi}{2} - \frac{p\pi}{2} \right)}{2 \left(\alpha + \frac{p\pi}{2} \right)} \\ &= \frac{2\alpha \sin(\alpha)}{\alpha^2 - \left(\frac{p\pi}{2} \right)^2} \end{aligned}$$

De la même manière on montre que :

$$\int_{-1}^1 \sin(\alpha \xi) \cos \frac{p\pi}{2} (\xi + 1) d\xi = \frac{2\alpha \cos(\alpha)}{\alpha^2 - \left(\frac{p\pi}{2} \right)^2}$$

A.5 Calcul des intégrales de la forme $\int_0^\infty \frac{2x \sin(x)}{x^2 - \beta^2} J_{2m}(x) dx$ et de la forme $\int_0^\infty \frac{2x \cos(x)}{x^2 - \beta^2} J_{2m+1}(x) dx$

La formule de Cauchy est utilisée pour calculer ces types d'intégrale. Pour cela, soit la fonction

$$f(z) = \frac{ze^{iz}}{z^2 - \beta^2} J_\nu(z)$$

Où $z = x + iy$. Sur la droite réelle :

$$f(x) = \frac{x \cos(x)}{x^2 - \beta^2} J_\nu(x) + i \frac{x \sin(x)}{x^2 - \beta^2} J_\nu(x)$$

La fonction $f(z)$ présente deux singularités : $z = \pm\beta$. Ces derniers présentent deux pôles simples puisque :

$$\lim_{x \rightarrow \pm\beta} |f(z)| = +\infty$$

On considère $\Gamma = C_R \cup [-R, \beta - r] \cup C_{r_1} \cup [-\beta + r, \beta - r] \cup C_{r_2} \cup [\beta + r, R]$ (voir la figure 33).

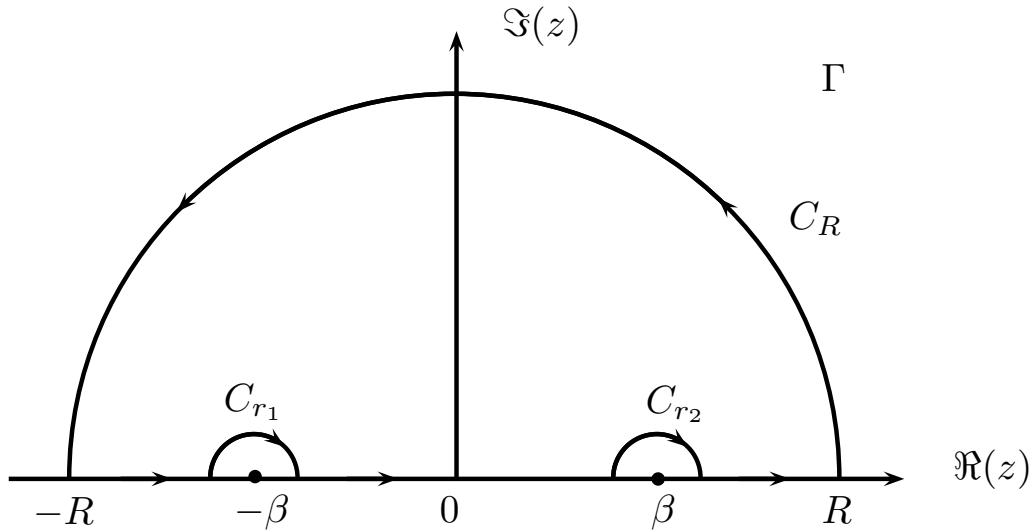


FIGURE 33 – Contour d'intégration de la fonction $f(z)$

La fonction $f(z)$ est holomorphe sur Γ . Donc, d'après la formule de Cauchy :

$$I = \int_{\Gamma} f(z) dz = 0$$

On pose :

$$I = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5 + I_6$$

Où :

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{-R}^{-(\beta+r)} f(x) dx, & I_2 &= \int_{C_{r_1}} f(z) dz \\ I_3 &= \int_{-\beta+r}^{\beta-r} f(x) dx, & I_4 &= \int_{C_{r_2}} f(z) dz \\ I_5 &= \int_{\beta+r}^R f(x) dx, & I_6 &= \int_{C_R} f(z) dz \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow -\beta} (z + \beta) f(z) &= (-1)^\nu \frac{e^{-\imath\beta} J_\nu(\beta)}{2} \\ \xrightarrow[\text{de Jordan}]{3^{\text{ème}} \text{ lemme}} \lim_{r \rightarrow 0} I_2 &= -\imath \frac{(-1)^\nu \pi}{2} e^{-\imath\beta} J_\nu(\beta) \end{aligned}$$

De même :

$$\lim_{r \rightarrow 0} I_4 = -\imath \frac{\pi}{2} e^{\imath\beta} J_\nu(\beta)$$

$$\begin{aligned} \left| \lim_{R \rightarrow \infty} I_6 \right| &\leq \lim_{R \rightarrow \infty} |I_6| \\ &\leq \lim_{R \rightarrow \infty} \left| \frac{R^2 J_\nu(R e^{\imath\theta})}{R^2 e^{2\imath\theta} - \beta^2} \right| d\theta = 0 \\ &\Rightarrow \lim_{R \rightarrow \infty} I_6 = 0 \end{aligned}$$

Et par la suite :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \imath \frac{\pi}{2} (e^{\imath\beta} + (-1)^\nu e^{-\imath\beta}) J_\nu(\beta)$$

$$\text{Deux cas se présentent : } \begin{cases} \nu \in 2\mathbb{N} + 1 \\ \nu \in 2\mathbb{N} \end{cases}$$

Premier cas $\nu \in 2\mathbb{N} + 1$

On pose $\nu = 2m + 1$ où $m \in \mathbb{N}$.

$$\frac{I}{2} = \int_0^\infty \frac{x \cos(x)}{x^2 - \beta^2} J_{2m+1}(x) dx = -\frac{\pi}{2} \sin(\beta) J_{2m+1}(\beta)$$

Premier cas $\nu \in 2\mathbb{N}$

On pose $\nu = 2m$ où $m \in \mathbb{N}$.

$$\frac{I}{2} = \int_0^\infty \frac{x \sin(x)}{x^2 - \beta^2} J_{2m}(x) dx = \frac{\pi}{2} \cos(\beta) J_{2m}(\beta)$$

A.6 Calcul des intégrales des matrices de couplage $[GC_{m,n,s,t}^{\mu_i,\nu_i,\mu_j,\nu_j}]$

Dans cette partie un seul type d'intégrale sera calculé et le reste des intégrales sera calculé de la même façon. Soit

$$I = \int_0^\infty \frac{J_{2m}(\alpha) \cos\left(\frac{\delta_{x_{ij}}}{a_j} \alpha\right)}{\left(\frac{a_i}{a_j} \alpha\right)^2 - (p\pi)^2} 2 \frac{a_i}{a_j} \alpha \sin\left(\frac{a_i}{a_j} \alpha\right) d\alpha$$

On pose

$$h(z) = \frac{J_{2m}(z) \cos\left(\frac{\delta_{x_{ij}}}{a_j} z\right)}{\left(\frac{a_i}{a_j} z\right)^2 - (p\pi)^2} 2 \frac{a_i}{a_j} z e^{i \frac{a_i}{a_j} z}$$

La fonction $h(z)$ admet une limite finie au voisinage des points $z_{0,1} = \pm \frac{a_j}{a_i} p\pi$. Donc, elle est prolongeable par continuité.

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow z_0} h(z) &= \lim_{Z = z - z_0 \rightarrow 0} \left(\frac{a_i}{a_j}\right)^2 \frac{J_{2m}(Z + z_0) \cos\left(\frac{\delta_{x_{ij}}}{a_j} z\right)}{(Z + z_0)^2 - \left(\frac{a_j}{a_i} p\pi\right)^2} 2 \frac{a_i}{a_j} (Z + z_0) e^{i \frac{a_i}{a_j} (Z + z_0)} \\ &= \lim_{Z \rightarrow 0} \left(\frac{a_i}{a_j}\right)^2 \frac{J_{2m}(Z + z_0) \cos\left(\frac{\delta_{x_{ij}}}{a_j} z\right)}{Z(Z + 2z_0)} 2(-1)^p \left(\frac{a_i}{a_j} Z + p\pi\right) e^{i \frac{a_i}{a_j} Z} \\ &= (-1)^p \left(\frac{a_i}{a_j}\right)^3 \frac{J_{2m}\left(\frac{a_j}{a_i} p\pi\right)}{\frac{a_j}{a_i} p\pi} \text{ (finie)} \end{aligned}$$

De même, au voisinage de z_1 , $h(z)$ est prolongeable par continuité. Donc, pour utiliser la formule de Cauchy, il faut créer des singularités. Ceci peut être réalisé en effectuant une intégration par partie. L'intégrale I peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\infty f(\alpha) g'(\alpha) d\alpha \\ &= [f(\alpha)g(\alpha)]_0^\infty - \int_0^\infty f'(\alpha)g(\alpha) \end{aligned}$$

Où

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= \frac{J_{2m}(\alpha) \cos\left(\frac{\delta_{x_{ij}}}{a_j} \alpha\right)}{\left(\frac{a_i}{a_j} \alpha\right)^2 - (p\pi)^2} \\ g'(\alpha) &= 2 \frac{a_i}{a_j} \alpha \sin\left(\frac{a_i}{a_j} \alpha\right) \end{aligned}$$

et $g(\alpha)$ est une primitive de $g'(\alpha)$ qu'il faut la chercher. Il est judicieux de remarquer que :

$$\int x e^{ax} dx = \left(\frac{x}{a} - \frac{1}{a^2}\right) e^{ax}$$

Si l'on suppose que $a = ib$, on pourra déduire que :

$$\begin{aligned} \int x \cos(bx) &= \frac{\cos(bx)}{b^2} + \frac{x \sin(bx)}{b} \\ \int x \sin(bx) &= \frac{\sin(bx)}{b^2} - \frac{x \cos(bx)}{b} \end{aligned}$$

Et par la suite :

$$g(\alpha) = 2 \left[\frac{a_j}{a_i} \sin\left(\frac{a_i}{a_j} \alpha\right) - \alpha \cos\left(\frac{a_i}{a_j} \alpha\right) \right]$$

Et donc :

$$\begin{aligned}
 I &= \underbrace{\left[\frac{J_{2m}(\alpha) \cos\left(\frac{\delta_{x_{ij}}}{a_j} \alpha\right)}{\left(\frac{a_i}{a_j} \alpha\right)^2 - (p\pi)^2} 2 \left(\frac{a_j}{a_i} \sin\left(\frac{a_i}{a_j} \alpha\right) - \alpha \cos\left(\frac{a_i}{a_j} \alpha\right) \right) \right]_0^\infty}_{=0} - \int_0^\infty f'(\alpha) g(\alpha) d\alpha \\
 \Leftrightarrow I &= - \int_0^\infty f'(\alpha) g(\alpha) d\alpha \\
 &= 2 \int_0^\infty \frac{\left(\frac{2m}{\alpha} J_{2m}(\alpha) - J_{2m-1}(\alpha)\right) \cos\left(\frac{\delta_{x_{ij}}}{a_j} \alpha\right)}{\left(\frac{a_i}{a_j} \alpha\right)^2 - (p\pi)^2} \left[\frac{a_j}{a_i} \sin\left(\frac{a_i}{a_j} \alpha\right) - \alpha \cos\left(\frac{a_i}{a_j} \alpha\right) \right] d\alpha \\
 &\quad + 2 \frac{\delta_{x_{ij}}}{a_j} \int_0^\infty \frac{J_{2m}(\alpha) \sin\left(\frac{\delta_{x_{ij}}}{a_j} \alpha\right)}{\left(\frac{a_i}{a_j} \alpha\right)^2 - (p\pi)^2} \left[\frac{a_j}{a_i} \sin\left(\frac{a_i}{a_j} \alpha\right) - \alpha \cos\left(\frac{a_i}{a_j} \alpha\right) \right] d\alpha \\
 &\quad + 4 \left(\frac{a_i}{a_j}\right)^2 \int_0^\infty \frac{\alpha J_{2m}(\alpha) \cos\left(\frac{\delta_{x_{ij}}}{a_j} \alpha\right)}{\left(\frac{a_i}{a_j} \alpha\right)^2 - (p\pi)^2} \left[\frac{a_j}{a_i} \sin\left(\frac{a_i}{a_j} \alpha\right) - \alpha \cos\left(\frac{a_i}{a_j} \alpha\right) \right] d\alpha
 \end{aligned}$$

En appliquant la formule de Cauchy, on montre que :

$$\begin{aligned}
 I &= (-1)^p 2\pi \left(\frac{a_j}{a_i}\right)^2 \left(4m \frac{J_{2m}\left(\frac{a_j}{a_i} p\pi\right)}{\frac{a_j}{a_i} p\pi} - J_{2m+1}\left(\frac{a_j}{a_i} p\pi\right) - J_{2m-1}\left(\frac{a_j}{a_i} p\pi\right) \right) \\
 &= (-1)^p 2\pi \left(\frac{a_j}{a_i}\right)^2 \left(4m \frac{J_{2m}\left(\frac{a_j}{a_i} p\pi\right)}{\frac{a_j}{a_i} p\pi} - 4m \frac{J_{2m}\left(\frac{a_j}{a_i} p\pi\right)}{\frac{a_i}{a_j} p\pi} \right) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Publications et communications

Publications dans des revues internationales à comité de lecture

A. Khanfir, A. Faiz, J. Ducourneau, J. Chatillon and S. Skali-Lami. Scattered acoustic field above a grating of parallel rectangular cavities. *Journal of Sound and Vibration*, 332(4) : 1047-1060, 2013.

J. Ducourneau, A. Faiz, A. Khanfir and J. Chatillon. Measurement of sound diffusion coefficients of scattering surface in a reverberant workplace : principle and validation of the method. *Applied acoustics*. Accepté.

Publications dans des revues françaises

A. Faiz, J. Ducourneau, A. Khanfir and J. Chatillon. Mesure du coefficient de diffusion d'objets encombrants présents dans les locaux industriels. *Acoustique et Technique*. Accepté.

Congrès internationaux avec actes

A. Khanfir, A. Faiz, J. Ducourneau and J. Chatillon. Scattered sound field above a grating of rectangular cavities. *In Proceedings of the Internoise 2012 New York Conference*,

NewYork, USA, August 2012.

A. Khanfir, A. Faiz, J. Ducourneau and J. Chatillon. Scattering sound field prediction over periodic facing walls containing rectangular cavities. *In Proceedings of the Acoustics 2012 Nantes Conference*, Nantes, France, April 2012.

A. Faiz, J. Ducourneau, A. Khanfir and J. Chatillon. Measurement of sound diffusion coefficients of scattering furnishing volumes present in workplaces. *In Proceedings of the Acoustics 2012 Nantes Conference*, Nantes, France, April 2012.

Communications sans actes

J. Ducourneau, A. Faiz, A. Khanfir and J. Chatillon. Measuring the acoustic diffusion coefficient of a wall panels with periodic and a periodic relief in industrial rooms. *Mediterranean Congress on Acoustics*, Salé, Morocco, October 2010.

J. Ducourneau, A. Faiz, A. Khanfir and J. Chatillon. Méthode de mesure du coefficient de diffusion acoustique des parois à relief dans les locaux industriels. Modélisation du champ de pression acoustique au-dessus d'une paroi à relief périodique et apériodique. *Journées Techniques Acoustique - Plénière du LCPC*, Wissembourg, France, June 2010.

Sound scattering mechanisms modelization of a cavity, periodic and aperiodic gratings

Abstract

The purpose of this research project was to develop a theoretical model dealing with reflection of acoustic waves over a grating of N rectangular cavities. Thus, the diffracted acoustic fields were determined by adapting the Kobayashi Potential (KP) method to the case of a cavity. Then, this developed model was generalized to the case of parallel rectangular cavities gratings and then extended to the case of non parallel rectangular cavities ones. A study of the coupling was achieved in order to understand the variation in the acoustic interaction between cavities with spacings and frequency. This model was compared with theoretical results obtained from the finite element method (FEM) and experimental results obtained in a semi-anechoic chamber for a single cavity and gratings of parallel and non-parallel rectangular cavities. The validity of the theoretical model is supported by the agreement between the numerical and experimental results observed.

Keywords : Acoustic waves, Mathematical model, Diffusion, Resonant cavities.

Étude des mécanismes de diffusion acoustique d'une cavité et d'un réseau à relief périodique et apériodique

Résumé

L'objectif de cette étude est de développer un modèle théorique du champ de pression acoustique réfléchi au-dessus d'un réseau constitué de N cavités rectangulaires. Pour cela, une adaptation de la méthode Kobayashi Potentiel (KP) a été effectuée au cas d'une cavité rectangulaire dans un écran rigide à épaisseur non négligeable. Ce modèle ainsi adapté a été généralisé au cas de réseaux contenant plusieurs cavités rectangulaires parallèles, puis étendu au cas de réseaux de cavités rectangulaires non parallèles. Une étude du couplage a été menée pour comprendre la variation de l'interaction acoustique existant entre les cavités en fonction de l'espacement et de la fréquence. Ce modèle a été comparé aux résultats théoriques, issus de la méthode des éléments finis (FEM), et aux résultats expérimentaux obtenus dans une chambre semi-anéchoïque pour une seule cavité, des réseaux de cavités rectangulaires parallèles et non parallèles. La validité du modèle théorique est soutenu par l'accord observé entre les résultats théoriques et expérimentaux.

Mots clés : Ondes acoustiques, Modèle mathématique, Diffusion, Cavités résonnantes.