



AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

THÈSE

présentée pour l'obtention du titre de

Docteur de l'Université de Lorraine

en Mathématiques

par

Joseph BASQUIN

Trois études autour de sommes de fonctions multiplicatives sur les entiers friables

Soutenue publiquement le 21 novembre 2012

Membres du Jury :

M. Régis de la Bretèche	Rapporteur	Professeur à l'Université Paris Diderot
M. Joël Rivat	Président & Rapporteur	Professeur à l'Université d'Aix-Marseille
M. Olivier Robert	Examineur	Maître de conférences à l'Université de Saint-Étienne
M. Thomas Stoll	Examineur	Professeur à l'Université de Lorraine
M. Gérard Tenenbaum	Directeur de Thèse	Professeur à l'Université de Lorraine
M. Jie Wu	Examineur	Chargé de recherches à l'Université de Lorraine

Remerciements

Je tiens tout d'abord à exprimer ma profonde gratitude à Gérard Tenenbaum pour avoir dirigé mes recherches au cours de cette thèse — et bien avant celle-ci, pour m'avoir mené vers la théorie analytique des nombres. Sa grande disponibilité, son élan mathématique, son soutien et son exigence ont été autant de qualités inestimables qui m'ont permis de mener à bien ce travail.

Les riches enseignements dont j'ai ainsi bénéficié m'accompagneront tout au long de ma carrière, et me seront utiles, bien au-delà de la discipline mathématique. Pour cela, et pour bien d'autres choses encore, j'aimerais lui témoigner ma sincère reconnaissance.

Je voudrais ici remercier chaleureusement Jie Wu, pour les fructueuses discussions que nous avons pu avoir au cours de ces années. Son aide bienveillante m'a souvent guidé et permis d'avancer dans de bonnes directions.

Je souhaite également remercier les rapporteurs Régis de la Bretèche et Joël Rivat, ainsi que les examinateurs Olivier Robert, Thomas Stoll et Jie Wu, pour avoir accepté de participer à mon jury de thèse.

Lors de mon arrivée à l'IECN en 2007, ce fut une chance que de pouvoir croiser la route de collègues (et désormais amis) tels que Cécile Dartyge, Aurélien Deya, Viet-Cuong Do, François Drout, Alain Genestier, Vladimir Latocha, Régine Marchand, Bruno Martin, Yannick Privat, Christophe Profeta, Anne de Roton, Bernard Schorp, André Stef, Bertrand Thierry — et d'avance je demande pardon à toutes celles et ceux que j'ai sans doute omis de mentionner.

Je n'oublie pas les membres du personnel technique et administratif qui n'ont pas hésité à m'aider et à m'accompagner tout au long de mon passage à l'Institut Élie Cartan.

Ces quatre années passées à Nancy ont été également l'occasion de partager des moments inoubliables avec Matthias et Anka, M. Bergé, Steven et Jeanne, Lucie, Sophie et Martin, Florian et Solène, Thomas, Amélie, Guilier, Pierre et Cassis. Que de bons souvenirs, et de futures aventures à rêver ! Merci aussi, Loïs et Roxanne, Alison, et les deux Aurore, pour les projets musicaux en cours et à venir.

C'est un plaisir d'exprimer mes remerciements à mes parents Gilbert et Jeanine, à qui je dois — entre mille autres choses — le goût de la curiosité (qu'elle soit scientifique ou de toute autre nature). Par ailleurs, ils n'ont pas manqué de m'inciter à aller jusqu'au bout de ce travail : qu'ils en soient ici encore remerciés. Je salue également mes grands-parents Jean et Colette, ma soeur Claire, mon frère François, son épouse Danielle et leurs enfants.

Enfin, j'aimerais avoir une pensée toute particulière pour ma compagne Gaëlle qui m'a soutenu, encouragé, et supporté (dans tous les sens du terme) durant ces années de thèse.

À mon fils Jean, dont le sourire rayonnant m'illumine chaque jour.

Table des matières

1	Notations	7
2	Introduction	9
3	Sommes friables de fonctions multiplicatives aléatoires	19
4	Valeurs moyennes de fonctions multiplicatives sur les entiers friables translatés	45
5	Loi de répartition moyenne des diviseurs des entiers friables	67

Notations

Nous utilisons, dans tout le présent document, les notations suivantes.

La lettre n désigne, sauf indication contraire, un nombre entier, et la lettre p un nombre premier.

La mention $a|b$ indique que a divise b , et $p^\nu \parallel n$ signifie que $p^\nu | n$ et $p^{\nu+1} \nmid n$.

Nous écrivons (a, b) pour le plus grand commun diviseur des entiers a et b .

La notation $P(n)$ désigne le plus grand facteur premier de l'entier n , avec la convention $P(1) = 1$.

Lorsqu'il s'avère nécessaire (notamment dans la première partie) de distinguer les plus grand et plus petit facteurs premiers d'un entier n , nous utilisons la notation $P^+(n)$ (resp. $P^-(n)$) pour le plus grand (resp. petit) facteur premier de n avec la convention $P^+(1) = 1$ (resp. $P^-(1) = \infty$).

Nous ferons systématiquement usage de la notation $S(x, y) := \{n \leq x : P(n) \leq y\}$ pour désigner l'ensemble des entiers y -friables inférieurs à x et on note $\Psi(x, y)$ le cardinal de $S(x, y)$. On désigne également par $\Psi^*(x, y)$ le nombre d'entiers y -friables, sans facteur carré, inférieurs à x . Dans ce contexte, nous utilisons la notation $u := (\log x) / \log y$.

Étant donné un nombre réel x , nous notons $[x]$ sa partie entière.

Nous utilisons, conformément à l'usage, la lettre s pour un nombre complexe, dont on note alors respectivement σ et τ la partie réelle et imaginaire : $s = \sigma + i\tau$.

Nous désignons par $\log_k$ la k -ième itérée de la fonction logarithme népérien : $\log_1(x) = \log(x)$ et $\log_k(x) = \log(\log_{k-1}(x))$ pour $k \geq 2$.

Pour des fonctions d'une variable réelle f et g , nous utilisons la notation de Landau $f = O(g)$ ou celle de Vinogradov $f \ll g$, lorsqu'il existe une constante positive C telle que $|f| \leq C|g|$.

Nous utilisons la notation $\mathbb{P}$ pour désigner une probabilité (définies sur des espaces probabilisés adéquats Ω) et $\mathbb{E}(X)$ pour l'espérance d'une variable aléatoire X . La mention ps. indique que l'assertion qui s'y rapporte est vérifiée *presque-partout*, c'est-à-dire, pour un sous-ensemble de Ω , dont le complémentaire est de probabilité nulle.

Introduction

La présente thèse s'articule autour de trois parties indépendantes, toutes dédiées à l'étude de sommes de certaines fonctions multiplicatives sur les entiers friables, et à leurs applications dans le cadre de différentes situations arithmétiques.

Notant par $P(n)$ le plus grand facteur premier d'un entier naturel n strictement positif, avec la convention $P(1) = 1$, nous désignons par

$$S(x, y) = \{n \leq x, P(n) \leq y\}$$

l'ensemble des entiers dits *y-friables*, inférieurs à x .

L'étude du cardinal de $S(x, y)$, noté $\Psi(x, y)$, a suscité de très nombreux travaux, notamment par Dickman [5], De Bruijn [2], Hildebrand [12] et Hildebrand & Tenenbaum [13], pour n'en citer que quelques uns ; travaux qui ont successivement étendu le domaine de validité des estimations disponibles.

Par ailleurs, l'obtention de résultats asymptotiques fournissant des évaluations pour les sommes de fonctions arithmétiques f (en particulier dans les cas où f est une fonction additive ou multiplicative) du type

$$M_f(x) := \sum_{n \leq x} f(n)$$

est également centrale dans la théorie (voir notamment les célèbres théorèmes de Delange, Wirsing, Halász, développés au cours de la seconde moitié du vingtième siècle).

L'importance grandissante évoquée plus haut de l'étude des entiers friables a donc tout naturellement conduit certains auteurs à obtenir des résultats sur les sommes de fonctions multiplicatives sur les entiers friables

$$\Psi_f(x, y) := \sum_{n \in S(x, y)} f(n),$$

dans des domaines en (x, y) toujours plus vastes.

De nombreux cas particuliers (par exemple, pour f étant la fonction de Möbius $\mu(n)$, les fonctions $\mu^2(n)$ et $\mu^2(n)/\varphi(n)$, la fonction de Piltz $\tau_\kappa(n)$, la fonction $z^{\Omega(n)}$, où z est un nombre complexe et $\Omega(n)$ désigne le nombre total de facteurs premiers de n comptés avec multiplicité, etc.) ont été étudiés, avant de donner naissance à des théorèmes généraux sur de telles sommes. A ce titre, on pourra consulter les travaux de De Bruijn & van Lint [3], Levin & Fainleib [15], Song [18], Tenenbaum & Wu [20].

Le présent travail vise à obtenir des renseignements sur la fonction sommatoire de divers types de fonctions multiplicatives sur les entiers friables (ou sur d'autres ensembles liés à ceux-ci).

Ainsi, dans la première partie, nous étudierons plus particulièrement le cas de certaines sommes de fonctions multiplicatives *aléatoires*. Suite à des travaux comme ceux de Wintner, l'idée d'étayer les grandes conjectures de la discipline par une analyse d'un problème probabiliste qui s'y rattache prend une réelle place en théorie analytique des nombres.

Dans l'article intitulé *Random factorizations and Riemann's hypothesis* [22], Wintner considère ainsi des fonctions multiplicatives aléatoires⁽¹⁾ définies de la façon suivante : pour chaque nombre premier p , $f(p)$ est une variable aléatoire de Bernoulli, prenant les valeurs 1 et -1 avec probabilité $1/2$, et f est étendue à l'ensemble des entiers sans facteur carré par *multiplicativité* : pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f(n)$ est défini par

$$f(n) := \mu(n)^2 \prod_{p|n} f(p).$$

Wintner [22] obtient la majoration presque-sûre suivante, pour tout $\varepsilon > 0$.

$$(1) \quad M_f(x) \ll x^{1/2+\varepsilon},$$

ce qui lui permet de formuler un support heuristique à l'hypothèse de Riemann.

Il faut cependant noter que cette dernière est équivalente à l'assertion (1), dans le cas particulier où $f = \mu$, c'est-à-dire $f(p) = -1$ pour tout p premier, situation somme toute assez éloignée de l'hypothèse d'équirépartition entre $+1$ et -1 mentionnée plus haut.

Les investigations d'Erdős [6] puis Halász [11] permettent de préciser cette estimation et d'obtenir une majoration du type

$$(2) \quad M_f(x) \ll \sqrt{x} e^{c_1 \sqrt{(\log_2 x) \log_3 x}} \quad (x \geq 16) \quad \text{ps.}$$

Nous nous proposons, au cours de cette première partie, d'établir des résultats similaires dans le cas friable, à savoir des majorations de $\Psi_f(x, y)$ dans un domaine en (x, y) le plus vaste possible.

Revenons un instant sur la preuve du résultat de Halász. Celle-ci repose sur deux points essentiels :

* la majoration de moyennes de $M_f(x)$ autour d'une suite de points-tests $x = x_k$, avec $\{x_k\}_{k \geq 0}$ une suite d'entiers positifs tendant vers l'infini,

* l'obtention de bornes supérieures concernant les différences $|M_f(x) - M_f(x_k)|$, lorsque x s'éloigne peu des points-tests x_k .

1. Ces fonctions seront appelées par la suite *fonctions multiplicatives aléatoires au sens de Wintner*.

La conjonction d'un renseignement sur l'ordre de grandeur de $|M_f|$ autour de points-tests, et sur la faible variation de $M_f(x)$ lorsque x ne s'éloigne pas trop des points-tests permet en effet d'obtenir le résultat (2).

Un des outils essentiels utilisés pour cela réside notamment dans l'étude de moments d'ordres élevés des fonctions multiplicatives aléatoires, du type

$$\mathbb{E} \left| \sum_{a < n \leq b} f(n) \right|^\ell,$$

lorsque ℓ est un entier pair positif.

Afin de traiter le cas de sommes de fonctions multiplicatives sur les entiers friables, la première nécessité a été de pouvoir estimer les variations de $\Psi_f(x, y)$, lorsque x et y évoluent peu autour de points-tests $x = x_k$ et $y = y_k$, en généralisant la méthode développée par Halász.

Il s'est ainsi avéré nécessaire de pouvoir majorer les différences $|\Psi_f(x, y) - \Psi_f(x_k, y)|$, uniformément pour x variant autour de x_k et y dans une vaste plage dépendant d'un paramètre y_k , ce qui revient plus précisément à estimer la quantité

$$\max_{\substack{y \leq y_k \\ x_{k-1} < x \leq x_k}} |\Psi_f(x, y) - \Psi_f(x_k, y)|.$$

Pour majorer une probabilité concernant un *supremum* sur une vaste plage d'un paramètre, comme

$$\mathbb{P} \left(\max_{y \leq Y} Z_y \right),$$

l'usage d'outils probabilistes comme l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev eut été particulièrement avantageuse. Cependant, il faut d'emblée noter que la suite $y \mapsto \Psi_f(x, y)$ n'étant pas une somme de variables aléatoires indépendantes, l'utilisation d'outils de ce type s'avère impossible.

Il est donc indispensable de pouvoir se tourner vers des inégalités probabilistes plus générales que celles limitées au cadre des sommes de variables aléatoires indépendantes. La théorie des *martingales* s'avère être le cadre naturel pour cette requête.

Pour $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, $\{X_n\}_{n \geq 0}$ une suite de variables aléatoires et $\mathcal{F} = \{\mathcal{F}_n\}_{n \geq 0}$ une filtration, i.e. une famille croissante de sous-tribus de $\mathcal{A}$, $\{X_n\}_{n \geq 0}$ est dite une $\mathcal{F}$ -martingale (resp. une $\mathcal{F}$ -sous-martingale) si, pour tout entier $n \geq 0$, X_n est $\mathcal{F}_n$ -mesurable, $\mathbb{E}(|X_n|) < \infty$ et pour tout entier $n \geq 1$,

$$\mathbb{E}(X_n | \mathcal{F}_{n-1}) = X_{n-1} \quad \text{ps} \quad (\text{resp. } \geq X_{n-1}).$$

L'inégalité de Doob pour les sous-martingales positives – énonçant que, pour $\{X_n\}_{n \geq 0}$ une $\mathcal{F}$ -sous-martingale positive, nous avons

$$\mathbb{P} \left(\max_{k \leq n} X_k \geq t \right) \leq \frac{\mathbb{E}(X_n)}{t} \quad (t > 0, n \geq 0),$$

nous permet d'accéder au type d'outils demandés plus haut, sous réserve que la suite $y \mapsto \Psi_f(x, y)$ soit une martingale.

Cette propriété est bien vérifiée. Considérant une fonction aléatoire au sens de Wintner f , la tribu $\mathcal{F}_y := \sigma\{f(p) : p \leq y\}$ engendrée par les variables aléatoires $\{f(p)\}_{p \leq y}$, et la filtration $\mathcal{F} := \{\mathcal{F}_y\}_{y \geq 2}$, nous avons la propriété suivante.

Proposition. *Soit f une fonction multiplicative aléatoire au sens de Wintner. Pour tout $x \geq 1$, la suite de variables aléatoires $\{\Psi_f(x, y)\}_{y \geq 2}$ est une $\mathcal{F}$ -martingale.*

Cet outil s'avère essentiel afin de pouvoir obtenir diverses majorations importantes : conjugué avec l'utilisation d'une généralisation d'une inégalité d'Hájek-Rényi (version pondérée de l'inégalité de Doob évoquée plus haut, voir [21]), il devient ainsi possible d'obtenir des majorations presque-sûres sur de vastes plages du paramètre de friabilité y .

Grâce à ces outils, nous sommes en mesure d'énoncer notre résultat principal. Nous notons ici par $\Psi^*(x, y)$ le nombre d'entiers y -friables inférieurs à x , sans facteur carré.

Théorème I. *Soit f une fonction multiplicative aléatoire au sens de Wintner. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe des constantes positives c_1, c_2, c_3, c_4 , telles que nous ayons presque sûrement,*

$$\Psi_f(x, y) \begin{cases} \ll \sqrt{x} (\log_2 x)^{2+\varepsilon} & \text{si } x^{c_1 (\log_3 x) / \log_2 x} \leq y \leq x \\ & \text{et } x \geq 16, \\ \ll \sqrt{\Psi^*(x, y)} e^{c_2 u} (\log x)^{c_3} & \text{si } c_4 \log x \leq y < x^{c_1 (\log_3 x) / \log_2 x}, \\ & \text{et } x \geq 16. \end{cases}$$

Remarque. Dans le cas particulier $y = x$, le résultat précédent fournit la majoration

$$(3) \quad M_f(x) \ll \sqrt{x} (\log_2 x)^{2+\varepsilon} \quad \text{ps,}$$

qui améliorerait le meilleur résultat connu concernant la majoration de la fonction sommatoire de fonctions multiplicatives aléatoires, obtenu par Lau, Tenenbaum et Wu [14] (d'autres estimations ont été obtenues depuis).

Les perspectives de ce travail sont diverses : étant donné la nature très différente des arguments utilisés par Halász afin d'obtenir des résultats de minoration, nous n'avons pu à ce jour apporter de réponse positive à l'obtention de minoration presque sûres de la fonction $\Psi_f(x, y)$. Il semblerait ainsi particulièrement intéressant de pouvoir étudier si certaines des méthodes employées ici pourraient être utilisées afin de traiter le cas de bornes inférieures pour $\Psi_f(x, y)$.

Par ailleurs, l'étude de nouvelles techniques afin de savoir s'il est possible d'améliorer l'exposant $2 + \varepsilon$ dans (3) est particulièrement intéressante. En particulier, peut-on espérer obtenir une majoration du type *loi du logarithme itéré* :

$$M_f(x) \ll \sqrt{x \log_2 x} \quad \text{ps,}$$

ou même dépasser cette limite, et obtenir $M_f(x) \ll \sqrt{x}$ ps, comme le suggère Montgomery ([17], appendice *Some unsolved problems*)? Toutes ces questions méritent pleinement notre attention pour de futurs travaux.

Dans une seconde partie, nous nous penchons sur l'étude de sommes de fonctions multiplicatives, non pas sur les entiers friables eux-mêmes, mais sur leurs translatés.

De par leur structure multiplicative, la question de savoir si les entiers friables conservent des propriétés (les différenciant d'entiers quelconques), lorsqu'on les translate *additivement* est toute naturelle. De nombreux problèmes de cette nature ont été étudiés : un des plus classiques est sans doute le problème des diviseurs de Titchmarsh⁽²⁾, qui consiste à évaluer asymptotiquement la fonction sommatoire $T(x) := \sum_{p \leq x} \tau(p-1)$, où p désigne systématiquement un nombre premier et τ est la fonction nombre de diviseurs. L'ensemble des nombres premiers a ici été translaté additivement, et le résultat vise à établir à quel point la somme $T(x)$ se comporte comme si les entiers $p-1$ étaient des entiers "ordinaires". On a, avec $A_0 := \zeta(2)\zeta(3)/\zeta(6)$ et $A_1 := \gamma - \sum_p (\log p)/(1+p(p-1))$, l'estimation

$$T(x) = A_0(x + 2A_1 \operatorname{li}(x)) + O(x(\log x)^{-A}).$$

En moyenne, les entiers $p-1$ possèdent ainsi $A_0 \log p$ diviseurs, estimation à rapprocher de la formule bien connue

$$\sum_{n \leq x} \tau(n) = x(\log x + 2\gamma - 1) + O(\sqrt{x}).$$

C'est un problème de même nature que nous pouvons étudier en considérant, pour f une fonction multiplicative, la quantité

$$\Theta_f(x, y) := \sum_{\substack{n \in S(x, y) \\ n > 1}} f(n-1)$$

Loiperdinger et Shparlinski ont obtenu, dans [16], le résultat suivant concernant la fonction sommatoire de la fonction indicatrice d'Euler $n \mapsto \varphi(n)$ sur les entiers friables translatés :

$$\Theta_\varphi(x, y) = \frac{3}{\pi^2} x \Psi(x, y) \left\{ 1 + O\left(\frac{(\log_2 x) \log_2 y}{\log y}\right) \right\},$$

2. Voir [7].

uniformément dans le domaine

$$x \geq x_0, \quad \exp\{c\sqrt{(\log x) \log_3 x}\} \leq y \leq x.$$

Cette deuxième partie de la thèse sera dévolue à une extension du domaine de validité de cette dernière estimation, ainsi qu'à une généralisation de ce résultat à une classe de fonctions multiplicatives (comprenant notamment la fonction φ d'Euler).

Nous obtenons ainsi un énoncé fournissant la valeur moyenne de certaines fonctions multiplicatives sur les entiers friables translatés, valable dans le domaine

$$(H_\varepsilon) \quad x \geq 3, \quad \exp\{(\log_2 x)^{5/3+\varepsilon}\} \leq y \leq x.$$

Théorème II. *Soit f une fonction multiplicative vérifiant la condition*

$$|f * \mu(d)| \leq \frac{B}{d^\beta} \quad (d \geq 1),$$

avec $\beta, B > 0$. Nous avons alors uniformément, pour tout x, y dans (H_ε) ,

$$(4) \quad \Theta_f(x, y) = \Psi(x, y) \left\{ C(f) + O\left(\frac{\log(u+1)}{\log y}\right) \right\},$$

où

$$C(f) := \prod_p \left(1 - \frac{1}{p}\right) \sum_{\nu \geq 0} \frac{f(p^\nu)}{p^\nu}.$$

Pour obtenir un résultat pour une telle classe de fonctions, il est nécessaire de disposer d'un résultat concernant les sommes d'une fonction multiplicative f sur les entiers friables, dans le cas où la fonction f peut prendre des valeurs positives et négatives.

Sous certaines conditions sur la fonction f , que nous détaillerons dans le corps du document — assurant essentiellement que la densité des p pour lesquels $f(p) < 0$ est suffisamment réduite — nous montrons l'estimation suivante, qui étend ainsi le cas particulier $\kappa = 1$ du corollaire 2.3 de [20] (formulé pour des fonctions multiplicatives à valeurs positives) à certaines fonctions multiplicatives réelles :

$$\Psi_f(x, y) = \Psi(x, y) \left\{ C(f) + O\left(\frac{\log(u+1)}{\log y}\right) \right\},$$

uniformément dans (H_ε) , où le produit $C(f)$ est convergent grâce aux hypothèses faites sur f .

D'autres lemmes intermédiaires s'avéreront nécessaires pour montrer le résultat précité. En effet, afin d'évaluer la quantité $\Theta_f(x, y)$, nous écrivons

$$(5) \quad \Theta_f(x, y) = \sum_{d \leq x} \lambda(d) \{ \Psi(x, y; 1, d) - 1 \} \quad (x, y \geq 2),$$

où l'on a posé $\lambda := f * \mu$ et où

$$\Psi(x, y; a, d) := |\{n \in S(x, y) : n \equiv a \pmod{d}\}|$$

désigne le nombre d'entiers y -friables inférieurs x dans la progression arithmétique $n \equiv a \pmod{d}$.

Il apparaît ainsi clairement que l'étude de sommes de fonctions multiplicatives sur les translatés des entiers friables se ramène à la connaissance de la répartition des entiers friables en progressions arithmétiques, sujet qui fait l'objet d'une littérature à part entière : on pourra notamment consulter Balog & Pomerance [1], Fouvry & Tenenbaum [8], [9], Granville [10], etc.

Pour notre étude, nous aurons besoin d'un résultat analogue au théorème 4 de [10].

Proposition. *Nous avons uniformément pour x, y satisfaisant (H_ε) , $1 \leq q \leq x$ et $(a, q) = 1$,*

$$\Psi(x, y; a, q) \ll \frac{\Psi(x, y)}{q \varrho(u_q)},$$

où nous avons posé $u_q := \min\{(\log qy)/\log y, u\}$ et où ϱ désigne la fonction de Dickman.

Une telle majoration sera utile pour traiter le cas des progressions arithmétiques de grands modules dans la décomposition (5). Les quantités $\Psi(x, y; a, d)$ pour des progressions arithmétiques de petits modules pourront, quant à eux, être étudiés par des méthodes de type Bombieri-Vinogradov, disponibles dans la littérature sus-mentionnée.

La conjonction de ces différents arguments nous conduit au résultat (4).

Le troisième volet de cette thèse porte sur la répartition en moyenne des diviseurs d'un entier n dans l'intervalle $[1, n]$. Désignons pour cela par

$$F_n(v) := \frac{1}{\tau(n)} \sum_{d|n, d \leq n^v} 1$$

la proportion des diviseurs de n qui sont inférieurs à n^v .

La *loi de l'arcsinus*, obtenue par Dress, Deshouillers et Tenenbaum [4] stipule que l'on a, uniformément pour $x \geq 2$, $0 \leq v \leq 1$,

$$(6) \quad \frac{1}{x} \sum_{n \leq x} F_n(v) = \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{v} + O\left(\frac{1}{\sqrt{\log x}}\right).$$

Ce résultat illustre notamment le fait qu'un entier a , en moyenne, beaucoup de petits et de grands diviseurs, propriété de l'arcsinus bien connue des probabilistes : petites et grandes valeurs sont très probables, valeurs moyennes sont peu probables.

Le résultat (6) peut s'obtenir au moyen de formules asymptotiques portant sur

$$\sum_{n \leq x} \frac{1}{\tau(nd)},$$

pour $x \geq 2$ et où d est un paramètre entier strictement positif. L'application de la méthode de Selberg-Delange (voir notamment [19], §II.6) permet d'aboutir à de telles estimations.

Nous nous proposons d'étudier une généralisation du résultat (6) aux entiers friables : il est naturel de s'interroger sur l'existence d'une répartition en moyenne des diviseurs des entiers friables.

Pour cela, nous nous proposons d'étudier la quantité

$$\frac{1}{\Psi(x, y)} \sum_{n \in S(x, y)} F_n(v),$$

uniformément pour (x, y) dans un domaine le plus vaste possible. La question sous-jacente est ici celle de l'existence d'une loi limite, semblable à la loi de l'arcsinus. Nous pouvons répondre par l'affirmative : posant

$$J_u(v) := \frac{1}{\varrho(u)} \int_0^{uv} \varrho_{1/2}(t) \varrho_{1/2}(u-t) dt \quad (u \geq 1, 0 \leq v \leq 1),$$

(où $\varrho_{1/2}$ désigne la puissance fractionnaire de convolution d'ordre $\frac{1}{2}$ de la fonction ϱ de Dickman), nous montrons le résultat suivant.

Théorème III. *Nous avons uniformément, pour $0 \leq v \leq 1$ et $(x, y) \in (H_\varepsilon)$,*

$$\frac{1}{\Psi(x, y)} \sum_{n \in S(x, y)} F_n(v) = J_u(v) + O\left(\frac{\log(u+1)}{\log y} + \frac{1}{\sqrt{\log y}}\right).$$

La méthode mise en oeuvre ici fait usage de résultats sur les sommes de fonctions multiplicatives sur les entiers friables, que nous appliquons à des sommes du type

$$\sum_{n \in S(x, y)} \frac{1}{\tau(nd)},$$

pour (x, y) dans un domaine qui sera précisé ultérieurement et d un paramètre entier strictement positif.

La nécessité d'un résultat *uniforme* en le paramètre d nous conduit à une méthode visant à approcher — via un argument de convolution — la fonction $\tau(d)/\tau(nd)$ par la fonction $1/\tau(n)$.

Nous nous intéressons ensuite à caractériser la loi limite $J_u(v)$ ainsi obtenue. En étudiant la dérivée logarithmique de la fonction $\varrho_{1/2}$, nous pouvons montrer que, pour u suffisamment grand ($u \geq 2t_0$ disons), la fonction

$$f_u(t) := \varrho_{1/2}(t) \varrho_{1/2}(u - t)$$

est croissante sur $]t_0, u/2]$ puis décroissante sur $[u/2, u - t_0[$.

Enfin, une étude plus fine de la loi limite nous permet d'établir son caractère gaussien lorsque u est suffisamment grand. Nous pouvons ainsi mettre en évidence le glissement, lorsque u croît, d'une situation de type loi de l'arc sinus vers un comportement de type gaussien.

Bibliographie

- [1] A. Balog, C. Pomerance, The distribution of smooth numbers in arithmetic progressions, *Proc. Amer. Math. Soc.* **115** (1992), 33–43.
- [2] N.G. de Bruijn, On the number of positive integers x and free of prime factors $> y$, I, *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A* **54** (1951), 50–60.
- [3] N.G. de Bruijn, J.H. van Lint, Incomplete sums of multiplicative function, I, II, *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A* **67** (1966), 339–347 ; 348–359.
- [4] J.-M. Deshouillers, F. Dress & G. Tenenbaum, Lois de répartition des diviseurs, 1, *Acta Arith.* **34** (1979), 273–285.
- [5] K. Dickman, On the frequency of numbers containing prime factors of a certain relative magnitude, *Ark. Math. Astr. Fys.* **22** (1930), 1–14.
- [6] P. Erdős, Some unsolved problems, *Magyar Tud. Akad. Kutató Int. Közl.* **6** (1961), 221–254.
- [7] E. Fouvry, Sur le problème des diviseurs de Titchmarsh, *J. reine angew. Math.* **357** (1985), 51–76.
- [8] E. Fouvry, G. Tenenbaum, Entiers sans grand facteur premier en progressions arithmétiques, *Proc. London Math. Soc.* (3) **63** (1991), 449–494.
- [9] E. Fouvry, G. Tenenbaum, Répartition statistique des entiers sans grand facteur premier dans les progressions arithmétiques *Proc. London Math. Soc.* (3) **72** (1996), 481–514.
- [10] A. Granville, Integers, without large prime factors, in arithmetic progressions, I, *Acta Math.* **170** (1993), 255–273.
- [11] G. Halász, On random multiplicative functions, Hubert Delange colloquium (Orsay, 1982), *Publ. Math. Orsay* **83** (4) (1983), 74–96.
- [12] A. Hildebrand, On the number of positive integers $\leq x$ and free of prime factors $> y$, *J. Number Theory* **22** (1986), 289–307.
- [13] A. Hildebrand, G. Tenenbaum, On integers free of large prime factors, *Trans. Amer. Math. Soc.* **296** (1986), 265–290.
- [14] Y.-K. Lau, G. Tenenbaum, J. Wu, Mean values of random multiplicative functions, prépublication, sept. 2010 ; version finale : *Proc. Amer. Math. Soc.*, à paraître.
- [15] B.V. Levin, A.S. Fainleib, The generalized problem of numbers with small and large prime divisors and its applications (en russe, résumé en anglais), *Dolk. Akad. Nauk. SSSR* **3** (1966), 3–7.

- [16] S. Loiperdinger & I. Shparlinski, On the distribution of the Euler function of shifted smooth numbers, *Colloq. Math.*, à paraître.
- [17] H. L. Montgomery, Ten lectures on the interface between analytic number theory and harmonic analysis, CBMS No. 84, Amer. Math. Soc., Providence, 1994.
- [18] J. M. Song, Sums of nonnegative multiplicative functions over integers free of large prime factors I, *Acta Arith.*, **97**, 4 (2001), 329-351.
- [19] G. Tenenbaum, *Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres*, Troisième Edition, Belin, 2008.
- [20] G. Tenenbaum, J. Wu, Moyennes de certaines fonctions multiplicatives sur les entiers friables, *J. Reine Angew. Math.* **564** (2003), 119-166.
- [21] T. Tórnács, Z. Lőbor, A Hájek-Renyi type inequality and its applications, *Ann. Math. et Inform.* **33** (2006), 141-149.
- [22] A. Wintner, Random factorizations and Riemann's hypothesis, *Duke Math. J.* **11** (1944), 267-275.

Sommes friables de fonctions multiplicatives aléatoires

Abstract. We consider a sequence $\{f(p)\}_{p \text{ prime}}$ of independent random variables taking values ± 1 with probability $1/2$, and extend f to a multiplicative arithmetic function defined on the squarefree integers. We investigate upper bounds for $\Psi_f(x, y)$, the summatory function of f on y -friable integers $\leq x$.

We obtain estimations of the type $\Psi_f(x, y) \ll \Psi(x, y)^{1/2+\varepsilon}$, more precise formulas being given in suitable regions for x, y .

In the special case $y = x$, this leads to the estimate $M_f(x) = \Psi_f(x, x) \ll \sqrt{x} (\log \log x)^{2+\varepsilon}$, which improves on previous bounds.

Sommaire

1	Introduction et description des résultats.....	2
1.1	Fonctions multiplicatives aléatoires.....	2
1.2	Entiers friables.....	3
1.3	Résultats.....	4
2	Lemmes.....	5
2.1	Évaluation d'une somme de fonction multiplicative.....	5
2.2	Espérance de fonctions multiplicatives aléatoires.....	6
2.3	Entiers friables sans facteur carré.....	6
3	Comportement local de $\Psi_f(x, y)$	11
3.1	Martingale $y \mapsto \Psi_f(x, y)$ et inégalité maximale.....	11
3.2	Étude des variations de $\Psi_f(x, y)$	13
3.3	Moyenne de $\Psi_f(x, y)$ autour de points-tests.....	17
4	Preuve du Théorème 1.2.....	22
5	Preuve du Corollaire 1.3.....	25

1. Introduction et description des résultats

1.1. Fonctions multiplicatives aléatoires

L'étude des sommes de fonctions multiplicatives est un domaine central de la théorie analytique des nombres. Ces fonctions possèdent, dans la plupart des cas intéressants, un comportement statistique complexe.

D'où l'idée, mise en pratique par plusieurs auteurs, de considérer des fonctions multiplicatives *aléatoires*, dont les variations, que l'on peut appréhender par les outils de la théorie des probabilités, fournissent un modèle pertinent de la situation arithmétique. Selon les hypothèses effectuées sur les variables aléatoires en cause, de tels modèles peuvent être adaptés aux diverses situations concrètes rencontrées en théorie des nombres.

La voie privilégiée par Wintner dans [14] consiste à considérer, pour chaque nombre premier p , une variable aléatoire de Bernoulli $f(p)$, prenant les valeurs 1 et -1 avec probabilité $1/2$, et à étendre par *multiplicativité* cette fonction f à l'ensemble des entiers sans facteur carré. Ceci donne lieu à la définition suivante.

Définition 1.1. Notant $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers, soient $\{f(p)\}_{p \in \mathcal{P}}$ une suite de variables aléatoires de Bernoulli indépendantes prenant les valeurs $+1$ et -1 avec probabilité $1/2$, et f la fonction multiplicative définie pour $n \in \mathbb{N}^*$ par

$$f(n) := \mu(n)^2 \prod_{p|n} f(p).$$

Sous ces hypothèses, nous dirons que f est une fonction multiplicative aléatoire au sens de Wintner.

Posons

$$M_f(x) := \sum_{n \leq x} f(n) \quad (x \geq 1).$$

Une mesure de l'indépendance statistique des facteurs premiers des entiers est obtenue en comparant la fonction sommatoire de telles fonctions multiplicatives aléatoires à celle d'un modèle probabiliste, comme par exemple celui d'une somme de variables aléatoires centrées indépendantes relevant du théorème central limite.

Citons un premier résultat de Wintner [14] allant dans cette direction. Nous utilisons dorénavant la mention *ps* pour qualifier une assertion aléatoire valide presque sûrement.

Théorème A. Soit f une fonction multiplicative aléatoire au sens de Wintner. Pour tout $\varepsilon > 0$, nous avons

$$M_f(x) \ll x^{1/2+\varepsilon} \quad (x \geq 1) \quad \text{ps.}$$

L'enjeu essentiel du problème est de comparer le cas étudié ici au cas sans contrainte arithmétique, c'est-à-dire $f(n) = \pm 1$ avec probabilité $1/2$, pour lequel la loi du logarithme itéré fournit l'estimation⁽¹⁾

$$M_f(x) \ll \sqrt{x \log_2 x},$$

et ainsi d'élucider l'influence de la condition arithmétique de multiplicativité.

Dans un travail non publié, Erdős obtient l'existence d'une constante $c_1 > 0$ pour laquelle on a la majoration

$$M_f(x) \ll \sqrt{x} (\log x)^{c_1} \quad \text{ps.}$$

Halász [5] précise cette majoration et établit le résultat suivant.

Théorème B. *Soit f une fonction multiplicative aléatoire au sens de Wintner. Il existe une constante $c_2 > 0$ telle que l'on ait*

$$M_f(x) \ll \sqrt{x} e^{c_2 \sqrt{(\log_2 x) \log_3 x}} \quad (x \geq 16) \quad \text{ps.}$$

Dans une version préliminaire [9] (améliorée depuis) d'un récent travail, Lau, Tenenbaum et Wu précisent encore cette majoration et obtiennent, pour une fonction multiplicative aléatoire au sens de Wintner f ,

$$(1.1) \quad M_f(x) \ll \sqrt{x} (\log_2 x)^{5/2+\varepsilon} \quad \text{ps.}$$

1.2. Entiers friables

Nous utilisons la notation $P^+(n)$ (resp. $P^-(n)$) pour le plus grand (resp. petit) facteur premier d'un entier n avec la convention $P^+(1) := 1$ (resp. $P^-(1) := \infty$). Un entier dont le plus grand facteur premier ne dépasse pas y est dit y -friable. Nous désignons par $S(x, y)$ l'ensemble des entiers y -friables inférieurs ou égaux à x et par $\Psi(x, y)$ son cardinal. Pour une fonction arithmétique f , nous posons de plus

$$\Psi_f(x, y) := \sum_{n \in S(x, y)} f(n).$$

Nous notons

$$\Psi^*(x, y) := \Psi_{\mu^2}(x, y)$$

pour le nombre des entiers y -friables, sans facteur carré et n'excédant pas x .

L'étude de la friabilité et de son interaction avec les critères usuels de description utilisés en théorie probabiliste des nombres constitue une branche essentielle de

1. Ici et dans la suite, nous désignons par $\log_k$ la k -ième itérée de la fonction logarithme.

l'arithmétique. Ce sujet fait l'objet d'une importante littérature depuis les années 1950, en particulier ces vingt dernières années.

1.3. Résultats

Nous nous proposons ici d'étudier les sommes friables $\Psi_f(x, y)$ d'une fonction multiplicative aléatoire au sens de Wintner f .

Un raisonnement statistique laissant augurer que les termes de la somme se comportent comme des variables aléatoires indépendantes, il est raisonnable d'espérer que la somme se comporte comme la racine carrée du nombre de termes, éventuellement multipliée par un facteur à faible croissance en x et y .

Posons $\vartheta(y) := \sum_{p \leq y} \log p$. Nous pouvons à présent énoncer notre résultat principal.

Théorème 1.2. *Soit f une fonction multiplicative aléatoire au sens de Wintner. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe des constantes positives c_3, c_4, c_5, c_6 , telles que nous ayons presque sûrement,*

$$\Psi_f(x, y) \begin{cases} \ll \sqrt{x} (\log_2 x)^{2+\varepsilon} & \text{si } x^{c_3 (\log_3 x) / \log_2 x} \leq y \leq x \\ & \text{et } x \geq 16, \\ \ll \sqrt{\Psi^*(x, y)} e^{c_4 u} (\log x)^{c_5} & \text{si } c_6 \log x \leq y < x^{c_3 (\log_3 x) / \log_2 x}, \\ & \text{et } x \geq 16. \end{cases}$$

Remarques. (i) Dans le cas particulier $y = x$, il est à noter que le théorème précédent fournit une amélioration du résultat (1.1) :

$$M_f(x) \ll \sqrt{x} (\log_2 x)^{2+\varepsilon} \quad \text{ps.}$$

(ii) Lorsque $\vartheta(y) \leq \log x$ et $x \geq 2$, nous avons

$$\Psi_f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{avec probabilité } 1 - 2^{-\pi(y)}, \\ 2^{\pi(y)} & \text{avec probabilité } 2^{-\pi(y)}. \end{cases}$$

En effet, dans ce domaine, on a

$$\Psi_f(x, y) = \sum_{P^+(n) \leq y} f(n) = \prod_{p \leq y} (1 + f(p)) = 0$$

si et seulement s'il existe $p \leq y$ tel que $f(p) = -1$, ce qui intervient avec probabilité $1 - 2^{-\pi(y)}$.

Le Théorème 1.2 implique le résultat suivant.

Corollaire 1.3. *Soient f une fonction multiplicative au sens de Wintner et $\varepsilon > 0$. Il existe une constante positive C_ε telle que, pour $x, y \geq 2$ et $y \geq C_\varepsilon \log x$, nous ayons*

$$\Psi_f(x, y) \ll \Psi^*(x, y)^{1/2+\varepsilon}.$$

2. Lemmes

2.1. Évaluation d'une somme de fonction multiplicative

Nous désignons par $\sum_n^{y,z}$ une sommation dont l'indice entier n est soumis à la condition $p \mid n \Rightarrow y < p \leq z$.

Pour $y \geq 2$, nous posons de plus $L(y) := \exp\{(\log y)^{3/5}/(\log_2 y)^{1/5}\}$.

La majoration suivante, obtenue par Lau, Tenenbaum et Wu ([9]) pour certaines sommes de fonctions multiplicatives, prolonge le lemme 3 de [5].

Lemme 2.1. *Soient $\gamma, \delta > 0$, $y \geq 2$, $\kappa \geq 1$ et $a, b \in \mathbb{N}^*$ tels que $b > a$. Il existe des constantes $c_7, c_8, c_9 > 0$ telles que nous ayons, uniformément pour $\gamma \geq c_8/L(y)^{c_9}$ et $y \geq \{b/(b-a)\}^{1+\delta}$,*

$$\sum_{a < r \leq b}^{y, y^{1+\gamma}} \mu(r)^2 \kappa^{\omega(r)} \leq c_7 \frac{b-a}{\log y} \kappa e^{2\gamma \kappa}.$$

Démonstration. En suivant la méthode employée par Halász dans [5] (lemme 3 (ii)), il vient

$$A := \sum_{a < r \leq b}^{y, y^{1+\gamma}} \mu(r)^2 \kappa^{\omega(r)} \leq \frac{1}{\log a} \sum_{m \leq b/y}^{y, y^{1+\gamma}} \mu(m)^2 \kappa^{\omega(m)+1} \sum_{a/m < p \leq b/m} \log p.$$

Notons que l'on peut supposer $b > y$, car dans le cas contraire, la somme à estimer est nulle. Observons également que les hypothèses $y \geq \{b/(b-a)\}^{1+\delta}$ et $m \leq b/y$ impliquent

$$(2.1) \quad \frac{b-a}{m} \geq \frac{b}{m y^{1/(1+\delta)}} \geq \left(\frac{b}{m}\right)^{1-1/(1+\delta)} > 1.$$

Le théorème de Brun-Titchmarsh (voir [10], théorème I.4.16) nous permet alors, pour $m \leq b/y$, de majorer la somme en p de la façon suivante

$$\sum_{a/m < p \leq b/m} \log p \leq \log(b/m) \sum_{a/m < p \leq b/m} 1 \leq c_{10} \frac{(b-a) \log(b/m)}{m \log((b-a)/m)}.$$

La relation (2.1) implique par ailleurs que

$$\begin{aligned} A &\leq c_{10} \frac{(b-a) \kappa \log(b/m)}{(\log a) \log((b-a)/m)} \sum_{m \leq b/y}^{y, y^{1+\gamma}} \frac{\mu(m)^2 \kappa^{\omega(m)}}{m} \\ &\leq c_{10} \frac{(b-a) \kappa}{\log a} \prod_{y < p \leq y^{1+\gamma}} \left(1 + \frac{\kappa}{p}\right). \end{aligned}$$

On conclut en faisant usage de l'estimation suivante, découlant par exemple du lemme 3.6 de [3],

$$\sum_{y < p \leq y^{1+\gamma}} \frac{1}{p} = \log(1 + \gamma) + O\left(\frac{1}{L(y)^{c_9}}\right) \leq 2\gamma,$$

dès lors que $\gamma \geq c_8/L(y)^{c_9}$. □

2.2. *Espérance de fonctions multiplicatives aléatoires*

Le lemme suivant est dû Bonami [1]. Halász ([5], lemme 2) en a donné une nouvelle démonstration. La formulation donnée ici est adaptée au cas des fonctions multiplicatives aléatoires.

Lemme 2.2. *Soient f une fonction multiplicative aléatoire au sens de Wintner, $\ell \geq 2$ un entier pair, et $\{a_n\}_{n \geq 1}$ une suite de nombres complexes. Nous avons*

$$\left| \mathbb{E} \left\{ \left(\sum_{n \geq 1} a_n f(n) \right)^\ell \right\} \right| \leq \left(\sum_{n \geq 1} \mu(n)^2 |a_n|^2 (\ell - 1)^{\Omega(n)} \right)^{\ell/2}.$$

Cette majoration s'avère cruciale pour évaluer les moments d'ordre pair de fonctions multiplicatives aléatoires.

Remarque. Pour $\ell = 2$ et $\{a_n\}_{n \geq 1}$ égale à la fonction indicatrice des entiers y -friables inférieurs à x , la majoration fournie par le lemme précédent est en fait une égalité. Nous avons en effet

$$(2.2) \quad \mathbb{E} (\Psi_f(x, y)^2) = \Psi^*(x, y) \quad (x, y \geq 2).$$

Cela résulte du développement du carré sous la forme

$$\mathbb{E} (\Psi_f(x, y)^2) = \mathbb{E} \left\{ \sum_{m, n \in S(x, y)} f(m) f(n) \right\} = \sum_{m, n \in S(x, y)} \mathbb{E} f(m) f(n).$$

Il suffit ensuite d'observer que, si m et n sont sans facteur carré et $m \neq n$, il existe un nombre premier p tel que $p \parallel mn$.⁽²⁾ Il en découle

$$\mathbb{E} (f(m) f(n)) = \mathbb{E} (f(p)) \mathbb{E} (f(mn/p)) = 0.$$

2.3. *Entiers friables sans facteur carré*

Le résultat suivant, obtenu par La Bretèche et Tenenbaum [2], fournit une description de la répartition des entiers friables sans facteur carré dans les petits intervalles.

2. Ici $p^\nu \parallel a$ signifie : $p^\nu | a$ et $p^{\nu+1} \nmid a$.

Lemme 2.3. Soit $\kappa \geq 1$. Nous avons, uniformément sous les conditions $x \geq y \geq 2$ et $\max(1, xy^{-\kappa}) \leq z \leq x$,

$$\Psi^*(x+z, y) - \Psi^*(x, y) \ll \frac{z}{x} \Psi^*(x, y).$$

Posons à présent $\varphi(s, y) := \sum_{p \leq y} \log(1 + 1/p^s)$ ($s \geq 0$) et désignons par $\alpha = \alpha(x, y)$ l'unique solution positive de l'équation

$$(2.3) \quad -\varphi'(\alpha, y) = \sum_{p \leq y} \frac{\log p}{1 + p^\alpha} = \log x.$$

Par ailleurs, nous désignons par $\beta := \beta(x, y)$ l'unique solution positive de l'équation

$$\sum_{p \leq y} \frac{\log p}{p^\beta - 1} = \log x.$$

Pour $t > 0$, $t \neq 1$, nous définissons $\xi(t)$ comme l'unique solution réelle non nulle de l'équation

$$e^\xi = 1 + t\xi,$$

et posons $\xi(1) = 0$.

Rappelons que pour $\varepsilon > 0$, $x \geq x_0(\varepsilon)$ et $(\log x)^{1+\varepsilon} < y \leq x$, nous avons les estimations (voir (7.8) de [7] et (2.17) de [2])

$$(2.4) \quad \left. \begin{array}{l} \alpha(x, y) \\ \beta(x, y) \end{array} \right\} = 1 - \frac{\xi(u)}{\log y} + O\left(\frac{1}{L_\varepsilon(y)} + \frac{1}{u(\log y)^2}\right),$$

où nous avons posé

$$L_\varepsilon(y) := \exp\{(\log y)^{3/5-\varepsilon}\}.$$

Le résultat suivant est un analogue du théorème 2.4 de [3], énoncé ici dans le cas des entiers friables sans facteur carré.

Lemme 2.4. Il existe des constantes absolues positives b_1, b_2 , et une fonction $b = b(x, y; d) \in [b_1, b_2]$ telles que, sous les conditions

$$x \geq y \geq 2, \quad \vartheta(y) > 2 \log x, \quad 1 \leq d \leq x,$$

nous avons uniformément

$$(2.5) \quad \Psi^*\left(\frac{x}{d}, y\right) = \frac{\Psi^*(x, y)}{d^\alpha} e^{-bt^2/u} \left\{ 1 + O\left(\frac{t}{\sqrt{u}} + \frac{1}{u_y}\right) \right\},$$

où $t := (\log d)/\log y$, $u_y := u + (\log y)/\log(u+2)$, et $\alpha = \alpha(x, y)$ est défini par (2.3).

Démonstration. Notons que nous pouvons supposer x et y assez grands. En effet, lorsque x est borné, le résultat est acquis sous réserve que les constantes implicites des termes d'erreurs soient choisies suffisamment grandes. Si y est borné, la relation $\vartheta(y) > 2 \log x$ implique que x est borné à son tour, d'où le résultat. Nous supposons donc dans toute la suite que x et y sont suffisamment grands.

Plaçons-nous tout d'abord dans le domaine

$$(2.6) \quad y > (\log x)^3, \quad x \geq x_0.$$

Nous pouvons faire appel aux résultats de [3] concernant le comportement local de $\Psi(x, y)$. Au vu de l'estimation (2.4), nous avons $\beta \geq 3/5$, dès que y est assez grand. Les quantités $\zeta(2\beta, y)$ et $\prod_{p \leq y} (1 + p^{-2\beta})$ étant bornées, le corollaire 2.6 de [3] nous permet alors d'écrire

$$\Psi^*(x, y) = \frac{\Psi(x, y)}{\zeta(2\beta, y)} \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{u_y}\right) \right\},$$

où nous avons posé, pour $y \geq 2$,

$$\zeta(s, y) := \sum_{P^+(n) \leq y} \frac{1}{n^s} = \prod_{p \leq y} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}.$$

Nous avons d'une part

$$\zeta(2\beta, y) = \zeta(2\beta) + O(1/u_y),$$

et d'autre part,

$$\sum_{p \leq y} \frac{(\beta - \alpha)(\log p)^2}{p^\beta - 1} \ll \sum_{p \leq y} \frac{(p^\beta - p^\alpha) \log p}{(p^\alpha + 1)(p^\beta - 1)} = \sum_{p \leq y} \frac{2 \log p}{(p^\alpha + 1)(p^\beta - 1)} \ll 1,$$

ce qui implique encore

$$\beta - \alpha \ll 1/u(\log y)^2.$$

Le théorème 2.4 de [3] implique alors

$$\Psi^*\left(\frac{x}{d}, y\right) = \frac{\Psi^*(x, y)}{d^\alpha} \exp \left\{ \frac{-bt^2}{u} + (\alpha - \beta) \log d \right\} \left\{ 1 + O\left(\frac{t}{u} + \frac{1}{u_y}\right) \right\},$$

sous la condition (2.6), ce qui fournit bien la formule (2.5) dans ce domaine. De plus, on peut y remplacer $t/\sqrt{u}$ par t/u dans le terme d'erreur.

Il reste à examiner le cas

$$x \geq x_0, \quad 2 \log x < \vartheta(y) \leq (\log x)^3,$$

Nous pouvons nous limiter à prouver le résultat lorsque $t \leq u - 1$, i.e. $d \leq x/y$. En effet, si nous supposons le résultat établi dans ce sous-domaine, nous avons, lorsque $x/y < d \leq x$,

$$\begin{aligned} \Psi^*\left(\frac{x}{d}, y\right) &\asymp \frac{x}{d} = \frac{x}{d} y \ll \frac{x}{d} \frac{\Psi^*(x, y)}{(x/y)^\alpha} \sqrt{u} e^{-b(u-1)^2/u} \\ &\ll \frac{\Psi^*(x, y)}{d^\alpha} e^{-bu/2} \ll \frac{\Psi^*(x, y)}{d^\alpha} e^{-bt^2/2u}, \end{aligned}$$

car $\alpha < 1$ d'après le lemme 2.8 de [2] sous la forme

$$\alpha = \left\{1 + O\left(\frac{1}{\log y}\right)\right\} \frac{\log(1+z)}{\log y},$$

où $z := z(x, y) > 0$ est implicitement défini par la relation $\vartheta(y) = (2+z) \log y$.

Notons que dans le domaine considéré, nous avons $u \gg u_y$ et le théorème 2.1 de [2] fournit, pour $1 \leq d \leq x/y$,

$$\Psi^*\left(\frac{x}{d}, y\right) = e^{h(u-t)} \left\{1 + O\left(\frac{t+1}{u}\right)\right\},$$

où nous avons posé

$$h(v) := \alpha_v v \log y + \varphi(\alpha, y) + g(\alpha \sqrt{\sigma_2}), \quad \alpha_v := \alpha(y^v, y) \quad (v \geq 1),$$

$$g(z) := \log \left\{ \frac{e^{z^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \int_z^\infty e^{-t^2/2} dt \right\}, \quad \sigma_2 := \frac{d^2 \varphi}{ds^2}(\alpha, y).$$

Il est établi en (2.35) de [2] que l'on a,

$$(2.7) \quad h'(v) = \alpha_v \log y + O\left(\frac{1}{\sqrt{v} + v \log(1+z)} + \frac{1}{v}\right) \quad (v \geq 1).$$

Il vient alors, pour $t \leq u - 1$,

$$h(u-t) = h(u) - \alpha_u t \log y - I + R,$$

avec $R \ll \int_{u-t}^u dv / \sqrt{v} \ll t / \sqrt{u}$ et

$$I := (\log y) \int_{u-t}^u \{\alpha_v - \alpha_u\} dv \asymp \int_{u-t}^u \int_v^u \frac{dw dv}{w} = -(u-t) \log \left(\frac{u}{u-t}\right) + t,$$

grâce à l'estimation $\alpha'_v \asymp -1/(v \log y)$ ($v \geq 1$) obtenue dans [2]. Il vient ainsi

$$I \asymp t^2/u,$$

ce qui fournit le résultat car $-I + R \asymp -t^2/u + O(1)$ lorsque $t > \sqrt{u}$.

Notons cependant que l'on peut estimer R plus précisément lorsque $t \gg \sqrt{u} \log u$:

$$\begin{aligned} R &\ll \int_1^u \frac{\log(2u/v) dv}{\sqrt{v} + v \log(2u/v - 1)} \asymp \int_1^{2u-1} \frac{u \log(w+1) dw}{w\sqrt{wu} + uw \log w} \\ &\ll \int_1^{1+1/\sqrt{u}} \sqrt{u} + \int_{1+1/\sqrt{u}}^{2u-1} \frac{\log(w+1) dw}{w \log w} \ll \log u. \end{aligned}$$

□

Remarque. La démonstration précédente montre également que l'on peut remplacer $t/\sqrt{u}$ par t/u dans le terme d'erreur de (2.5), dans tout domaine du type

$$x \geq y \geq 2, \quad \vartheta(y) \geq (2 + \varepsilon) \log x,$$

puisque dans ce cas, (2.7) fournit $R \ll \int_{u-t}^u dv/v \ll \log(u/(u-t)) \ll t/u$ pour $t \leq u/2$.

Le lemme suivant s'avère utile pour évaluer certaines sommes portant sur les nombres premiers.

Lemme 2.5. *Nous avons, uniformément pour $x \geq y \geq 2$ et $2 \log x < \vartheta(y)$,*

$$(2.8) \quad \sum_{p \leq y} \frac{1}{p^\alpha} = \log_2 y + \frac{uw}{w-1} \left(1 + O\left(\frac{1}{\log y} + \frac{1}{\log 2u} \right) \right),$$

où $w := \vartheta(y)/\log x$ et $\alpha = \alpha(x, y)$ est défini par (2.3).

Démonstration. Le lemme 3.6 de [3] fournit, pour $y \geq 2$,

$$\sum_{p \leq y} \frac{1}{p^\alpha} = \log_2 y + \left\{ 1 + O\left(\frac{1-\alpha}{L(y)^{c_{11}}} \right) \right\} \int_1^{v_\alpha} t \xi'(t) dt + O(1),$$

où nous avons posé

$$v_\alpha := \frac{y^{1-\alpha} - 1}{(1-\alpha) \log y}.$$

Il découle du lemme 2.7 de [2] que

$$\log x = \frac{y^{1-\alpha} - 1}{(1+y^{-\alpha})(1-\alpha)} \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{\log y} \right) \right\} + O(1)$$

et des formules (2.17) et (2.18) de [2] que

$$1 + y^{-\alpha} = \frac{w}{w-1} \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{\log y} \right) \right\} \quad (x \geq y \geq 2, \ 2 \log x < \vartheta(y)).$$

Nous obtenons alors l'estimation

$$v_\alpha = \frac{uw}{w-1} \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{\log y} \right) \right\}$$

et la relation

$$\xi'(t) = \frac{1}{t} \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{\log 2t} \right) \right\} \quad (t \geq 1)$$

permet de conclure. □

3. Comportement local de $\Psi_f(x, y)$

3.1. Martingale $y \mapsto \Psi_f(x, y)$ et inégalité maximale

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, $\{X_n\}_{n \geq 0}$ une suite de variables aléatoires et $\mathcal{F} = \{\mathcal{F}_n\}_{n \geq 0}$ une filtration, i.e. une famille croissante de sous-tribus de $\mathcal{A}$.

Nous rappelons que $\{X_n\}_{n \geq 0}$ est dite une $\mathcal{F}$ -martingale (resp. une $\mathcal{F}$ -sous-martingale) si, pour tout entier $n \geq 0$, X_n est $\mathcal{F}_n$ -mesurable, $\mathbb{E}(|X_n|) < \infty$ et pour tout entier $n \geq 1$,

$$\mathbb{E}(X_n | \mathcal{F}_{n-1}) = X_{n-1} \quad \text{ps} \quad (\text{resp. } \geq X_{n-1}).$$

Rappelons l'inégalité de Doob pour les sous-martingales positives (voir par exemple [13], §14.6, *Theorem*).

Lemme 3.1. *Soit $\{X_n\}_{n \geq 0}$ une $\mathcal{F}$ -sous-martingale positive. Pour tous $t > 0$ et $n \geq 0$, nous avons*

$$\mathbb{P}\left(\max_{k \leq n} X_k \geq t\right) \leq \frac{\mathbb{E}(X_n)}{t}.$$

Rappelons également l'assertion suivante (voir [13], §14.6, *Lemma (b)*).

Lemme 3.2. *Si $\{X_n\}_{n \geq 0}$ est une $\mathcal{F}$ -martingale, ℓ est un nombre entier ≥ 1 , et $\mathbb{E}|X_n^\ell| < \infty$ ($n \geq 0$), alors $\{X_n^\ell\}_{n \geq 0}$ est une $\mathcal{F}$ -sous-martingale.*

Considérant une fonction aléatoire au sens de Wintner f , nous désignons à présent par $\mathcal{F}_y := \sigma\{f(p) : p \leq y\}$ la tribu engendrée par les variables aléatoires $\{f(p)\}_{p \leq y}$, et par $\mathcal{F}$ la filtration $\{\mathcal{F}_y\}_{y \geq 2}$.

Proposition 3.3. *Soit f une fonction multiplicative aléatoire au sens de Wintner. Pour tout $x \geq 1$, la suite de variables aléatoires $\{\Psi_f(x, y)\}_{y \geq 2}$ est une $\mathcal{F}$ -martingale.*

Démonstration. Notons d'emblée que $\Psi_f(x, y)$ est $\mathcal{F}_y$ -mesurable, pour $y \geq 2$. Par ailleurs, nous avons pour tout $y \geq 2$ premier,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\Psi_f(x, y) | \mathcal{F}_{y-1}) &= \mathbb{E}(\Psi_f(x, y-1) | \mathcal{F}_{y-1}) \\ &\quad + \mathbb{E}(f(y)\Psi_f(x/y, y-1) | \mathcal{F}_{y-1}) \\ &= \Psi_f(x, y-1) + \Psi_f(x/y, y-1)\mathbb{E}(f(y)) \\ &= \Psi_f(x, y-1), \end{aligned}$$

car $\mathbb{E}(f(y)) = 0$.

Pour y non premier, la relation précédente est bien encore vérifiée car $\Psi_f(x, y) = \Psi_f(x, y-1)$.

Nous avons montré que $\{\Psi_f(x, y)\}_{y \geq 2}$ est une $\mathcal{F}$ -martingale. $\square$

Le résultat suivant est un cas particulier du théorème 2.1 de [12].

Lemme 3.4. Soient $\{u_n\}_{n \geq 0}$ une suite de réels positifs, et $\{X_n\}_{n \geq 0}$ une suite de variables aléatoires. Supposons qu'il existe une constante $c_{12} > 0$ telle que pour tout $n \geq 0$ et $t > 0$, nous ayons

$$\mathbb{P}\left(\sup_{k \leq n} |X_k| \geq t\right) \leq \frac{c_{12}}{t} \sum_{k \leq n} u_k.$$

Alors il existe une constante $c_{13} > 0$, telle que pour toute suite croissante de réels positifs $\{v_n\}_{n \geq 0}$, nous ayons, pour tout $n \geq 0$ et $t > 0$,

$$\mathbb{P}\left(\sup_{k \leq n} \frac{|X_k|}{v_k} \geq t\right) \leq \frac{c_{13}}{t} \sum_{k \leq n} \frac{u_k}{v_k}.$$

Nous pouvons en déduire l'estimation suivante.

Lemme 3.5. Soit

$$(3.1) \quad N_j := \int_1^X \frac{\Psi_f(v, z_j)^2}{v^2} dv.$$

Nous avons, pour tout $t > 0$,

$$\mathbb{P}\left(\sup_{j \leq J} \frac{N_j}{\log z_j} > t\right) \ll \frac{\log h}{t},$$

avec $X \geq 2$, $z_0 \geq 2$, $h := \log X / \log z_0$, $\gamma > 0$, $z_j := z_0^{(1+\gamma)^j}$ ($j \geq 1$), $J := \min\{j \geq 1 : z_j \geq X\}$.

Démonstration. La relation (2.2) et l'estimation du théorème III.5.1 de [10]

$$(3.2) \quad \Psi(x, y) \ll x e^{-u/2} \quad (x \geq y \geq 2)$$

impliquent pour $v \geq 2$,

$$\mathbb{E} (\Psi_f(v, z_j)^2) = \Psi^*(v, z_j) \leq \Psi(v, z_j) \ll v e^{-(\log v)/(2 \log z_j)}.$$

Par conséquent, pour tout $j \leq J$, nous obtenons

$$\mathbb{E} N_j = \int_1^X \frac{\mathbb{E} \Psi_f(v, z_j)^2}{v^2} dv \ll \int_1^X \frac{e^{-(\log v)/(2 \log z_j)}}{v} dv \ll \log z_j.$$

Le Proposition 3.3 nous assure que $\{\Psi_f(v, z_j)\}_{j \leq J}$ est une $\{\mathcal{F}_{z_j}\}_{j \leq J}$ -martingale et donc que la suite $\{N_j / \log z_0\}_{j \leq J}$ est une $\{\mathcal{F}_{z_j}\}_{j \leq J}$ -sous-martingale. Nous avons

ainsi, par l'inégalité de Doob pour les sous-martingales positives, pour tout $t > 0$ et tout $j \leq J$,

$$\mathbb{P}\left(\sup_{k \leq j} \frac{N_k}{\log z_0} > t\right) \leq \frac{\mathbb{E} N_j}{t \log z_0} \leq c_{14} \frac{(1+\gamma)^j}{t} \leq c_{14} \frac{\sum_{k \leq j} u_k}{t},$$

où nous avons posé $u_0 := 1$ et $u_k := \gamma(1+\gamma)^k$ ($k \geq 1$). En effet, nous avons $\sum_{k \leq j} u_k = (1+\gamma)^{j+1} - \gamma \geq (1+\gamma)^j$ pour tout $j \leq J$.

Appliquons le Lemme 3.4 avec la suite croissante $v_k := (1+\gamma)^k$ ($k \geq 0$), et il vient

$$\mathbb{P}\left(\sup_{j \leq J} \frac{N_j}{\log z_j} > t\right) = \mathbb{P}\left(\sup_{j \leq J} \frac{N_j}{v_j(\log z_0)} > t\right) \leq c_{15} \frac{\sum_{j \leq J} u_j/v_j}{t} \ll \frac{1+\gamma J}{t},$$

d'où le résultat, puisque nous avons $J \asymp (\log h)/\gamma$. $\square$

Remarque. La majoration triviale donnant

$$\mathbb{P}\left(\sup_{j \leq J} \frac{N_j}{\log z_j} > t\right) \leq \sum_{j \leq J} \mathbb{P}\left(\frac{N_j}{\log z_j} > t\right) \ll \frac{J}{t} \asymp \frac{\log h}{\gamma t},$$

le précédent lemme permet donc de gagner un facteur $1/\gamma$.

3.2. Étude des variations de $\Psi_f(x, y)$

Nous ferons usage des notations additionnelles suivantes. Étant donné une suite strictement croissante d'entiers $\{x_k\}_{k \geq 1}$, nous posons, pour tout $j, k \geq 1$,

$$y_{k,j} := x_k^{1/j},$$

et désignons l'ensemble de tous les intervalles dyadiques inclus dans $]x_{k-1}, x_k]$ par

$$(3.3) \quad \mathcal{D}_k := \left\{ [x_{k-1} + (s-1)2^m, s2^m] : s \geq 1, m \geq 0, s2^m \leq x_k - x_{k-1} \right\}.$$

En vue d'obtenir une majoration des quantités $|\Psi_f(x, y) - \Psi_f(x_k, y)|$, pour $x_{k-1} < x \leq x_k$ et $y \leq x_k$, nous établissons le lemme suivant, analogue du lemme 1 de [5]. La différence réside ici dans la prise en compte d'un paramètre de friabilité. Nous faisons ici pleinement usage de la martingale $y \mapsto \Psi_f(x, y)$, afin d'obtenir des majorations uniformes sur de larges plages du paramètre y .

Lemme 3.6. Soient f une fonction multiplicative aléatoire au sens de Wintner. Il existe des constantes $c_{16} \in]0, 1[$ et $c_{17} > 0$ telles que, posant⁽³⁾

$$x_k := [\exp\{k^{c_{16}}\}], \quad J_k := \max \left\{ j \geq 1 : 2 \log x_k < \vartheta(y_{k,j}) \right\} \quad (k \geq 1),$$

nous ayons

$$\max_{\substack{]a,b] \in \mathcal{D}_k \\ y \leq y_{k,j}}} |\Psi_f(b, y) - \Psi_f(a, y)| \ll \frac{\sqrt{\Psi^*(x_k, y_{k,j})} e^{c_{17} j}}{\log x_k} \quad (k \geq 1, j \leq J_k) \quad \text{ps.}$$

Démonstration. Utilisant le Lemme 2.2, nous avons pour tous entiers $b > a \geq 2$ et $y \geq 2$,

$$\mathbb{E} \left\{ (\Psi_f(b, y) - \Psi_f(a, y))^4 \right\} \leq \left\{ \sum_{\substack{a < n \leq b \\ P^+(n) \leq y}} \mu(n)^2 3^{\omega(n)} \right\}^2 =: E_{a,b}^y.$$

Étant donnés $k \geq 1$, $1 \leq j \leq J_k$ et $R_{k,j} \geq 1$, un paramètre qui sera fixé ultérieurement, nous considérons l'événement

$$A_{k,j} := \left\{ \max_{\substack{]a,b] \in \mathcal{D}_k \\ y \leq y_{k,j}}} |\Psi_f(b, y) - \Psi_f(a, y)| \geq R_{k,j} \right\}.$$

Une application de l'inégalité de Doob à la sous-martingale positive (cf. Proposition 3.3 et Lemme 3.2) $\{(\Psi_f(b, y) - \Psi_f(a, y))^4\}_{y \geq 2}$ fournit

$$\mathbb{P} \left(\max_{y \leq y_{k,j}} |\Psi_f(b, y) - \Psi_f(a, y)| \geq R_{k,j} \right) \leq \frac{1}{R_{k,j}^4} E_{a,b}^{y_{k,j}}.$$

Il vient alors, par sommation,

$$\mathbb{P}(A_{k,j}) \leq \frac{1}{R_{k,j}^4} \sum_{]a,b] \in \mathcal{D}_k} E_{a,b}^{y_{k,j}}.$$

Utilisons à présent le fait que $E_{a,b}^y + E_{b,c}^y \leq E_{a,c}^y$ pour tous entiers $c > b > a \geq 2$ et $y \geq 2$, pour obtenir la majoration

$$\begin{aligned} \sum_{]a,b] \in \mathcal{D}_k} E_{a,b}^{y_{k,j}} &= \sum_{2^m \leq x_k - x_{k-1}} \sum_{s \leq (x_k - x_{k-1})/2^m} E_{x_{k-1} + (s-1)2^m, x_{k-1} + s2^m}^{y_{k,j}} \\ &\leq \sum_{2^m \leq x_k - x_{k-1}} E_{x_{k-1}, x_k}^{y_{k,j}} \ll (\log x_k) E_{x_{k-1}, x_k}^{y_{k,j}}. \end{aligned}$$

3. Nous désignons par $[x]$ la partie entière d'un nombre réel x .

Ainsi

$$(3.4) \quad \mathbb{P}(A_{k,j}) \ll \frac{\log x_k}{R_{k,j}^4} E_{x_{k-1}, x_k}^{y_{k,j}}.$$

Nous avons, par l'inégalité de Hölder,

$$\begin{aligned} E_{x_{k-1}, x_k}^{y_{k,j}} &= \left\{ \sum_{\substack{x_{k-1} < n \leq x_k \\ P^+(n) \leq y_{k,j}}} \mu(n)^2 3^{\omega(n)} \right\}^2 \\ &\leq \left\{ \Psi^*(x_k, y_{k,j}) - \Psi^*(x_{k-1}, y_{k,j}) \right\}^{4/3} \left\{ \sum_{n \in S(x_k, y_{k,j})} \mu(n)^2 3^{\omega(n)} \right\}^{2/3}. \end{aligned}$$

Nous avons, pour $x, y \geq 2$ et $\vartheta(y) > 2 \log x$,

$$\begin{aligned} \sum_{n \in S(x, y)} \mu(n)^2 3^{\omega(n)} &\leq \sum_{d \in S(x, y)} \mu(d)^2 26^{\omega(d)} \Psi^*\left(\frac{x}{d}, y\right) \leq \Psi^*(x, y) \sum_{P^+(d) \leq y} \frac{\mu(d)^2 26^{\omega(d)}}{d^\alpha} \\ &\leq \Psi^*(x, y) \prod_{p \leq y} \left(1 + \frac{26}{p^\alpha}\right) \leq \Psi^*(x, y) (\log y)^{26} \exp\{c_{17} u\}, \end{aligned}$$

où nous avons fait appel à (2.5) et (2.8). En appliquant de plus le Lemme 2.3, valable sous réserve de l'existence d'une constante positive K telle que

$$(3.5) \quad \frac{x_k - x_{k-1}}{x_{k-1}} \geq \frac{1}{x_k^{K/j}},$$

nous obtenons enfin, pour tout $j \leq J_k$,

$$E_{x_{k-1}, x_k}^{y_{k,j}} \ll \left(\frac{x_k - x_{k-1}}{x_{k-1}} \right)^{4/3} \Psi^*(x_k, y_{k,j})^2 (\log x_k)^{52/3} e^{c_{17} j},$$

Considérons l'événement

$$A_k := \bigcup_{j \leq J_k} A_{k,j}$$

et posons

$$R_{k,j} := \frac{\sqrt{\Psi^*(x_k, y_{k,j})} e^{c_{17} j}}{\log x_k} \quad (k \geq 1, 1 \leq j \leq J_k).$$

Nous avons, compte tenu de (3.4),

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A_k) &\leq \sum_{j \leq J_k} \mathbb{P}(A_{k,j}) \ll \left(\frac{x_k - x_{k-1}}{x_{k-1}} \right)^{4/3} (\log x_k)^{67/3} \sum_{j \leq J_k} e^{-3c_{17} j} \\ &\ll \left(\frac{x_k - x_{k-1}}{x_{k-1}} \right)^{4/3} (\log x_k)^{67/3}. \end{aligned}$$

Soit $0 < c_{16} < 1$. Posons $x_k = \lfloor \exp\{k^{c_{16}}\} \rfloor$. L'estimation

$$(3.6) \quad \frac{x_k - x_{k-1}}{x_{k-1}} \sim \frac{c_{16}}{k^{1-c_{16}}}$$

assure tout d'abord que la condition (3.5) est bien vérifiée. En effet, le fait que $2 \log x_k \leq \vartheta(y_{k,j})$ implique qu'il existe une constante $c_{18} > 0$ telle que $x_k^{c_{18}/j} \geq \log x_k$. D'autre part, la relation (3.6) fournit

$$\mathbb{P}(A_k) \ll \frac{1}{k^{5/4}},$$

en choisissant par exemple $c_{16} = 1/356$.

Le lemme de Borel-Cantelli permet alors d'obtenir

$$\mathbb{P}\left(\limsup_{k \geq 1} A_k\right) = 0$$

puisque $\sum_{k \geq 1} \mathbb{P}(A_k) < \infty$. Ainsi, presque sûrement, il existe un entier k_0 tel que, pour tout $k \geq k_0$, et pour tout $j \leq J_k$,

$$\max_{\substack{]a,b] \in \mathcal{D}_k \\ y \leq y_{k,j}}} |\Psi_f(b, y) - \Psi_f(a, y)| \leq R_{k,j}.$$

□

Corollaire 3.7. *Sous les mêmes hypothèses, nous avons pour $k \geq 1$ et $j \leq J_k$,*

$$\max_{\substack{x_{k-1} \leq x \leq x_k \\ y \leq y_{k,j}}} |\Psi_f(x, y) - \Psi_f(x_k, y)| \ll \sqrt{\Psi^*(x_k, y_{k,j})} e^{c_{17} j} \quad \text{ps.}$$

Démonstration. Soit $K \geq 0$. Tout entier positif $n \leq 2^{K+1} - 1$ peut s'écrire

$$(3.7) \quad n = \sum_{j \leq K} a_j(n) 2^j \quad (a_j(n) \in \{0, 1\}, \forall j \in [0, K]).$$

Pour tout $k \geq 2$, le choix $K = \log(x_k - x_{k-1} + 1)/(\log 2) - 1$ est donc suffisant pour pouvoir écrire tout entier $n \leq x_k - x_{k-1}$ sous la forme (3.7). Cela implique, pour $x_{k-1} < x \leq x_k$, que tout intervalle $]x_{k-1}, x]$ peut s'écrire comme la réunion disjointe d'au plus $O(\log x_k)$ intervalles dyadiques de $\mathcal{D}_k$, où $\mathcal{D}_k$ a été défini en (3.3).

Désignons alors par $\mathcal{D}(]x_{k-1}, x])$ l'ensemble des intervalles dyadiques apparaissant dans la décomposition de $]x_{k-1}, x]$ dont le nombre de termes est minimal.

Nous avons alors, pour tout $x_{k-1} < x \leq x_k$,

$$\begin{aligned} |\Psi_f(x, y) - \Psi_f(x_{k-1}, y)| &\leq \sum_{]a,b] \in \mathcal{D}(]x_{k-1}, x])} |\Psi_f(b, y) - \Psi_f(a, y)| \\ &\ll (\log x_k) \max_{\substack{]a,b] \in \mathcal{D}_k \\ y \leq y_{k,j}}} |\Psi_f(b, y) - \Psi_f(a, y)|. \end{aligned}$$

On conclut par le lemme précédent.

□

3.3. Moyenne de $\Psi_f(x, y)$ autour de points-tests

Nous pouvons à présent démontrer le résultat suivant.

Lemme 3.8. *Soit f une fonction multiplicative aléatoire au sens de Wintner. Soit $\{x_k\}_{k \geq 1}$ définie comme au Lemme 3.6. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une constante $c_{19} > 0$, telle que, uniformément pour*

$$\exp \left\{ c_{19} \frac{\log x_k}{\log_2 x_k} \right\} \leq y \leq x_k, \quad k \geq k_0,$$

nous ayons

$$\frac{1}{x_k - x_{k-1}} \int_{x_{k-1}}^{x_k} \Psi_f(x, y) dx \ll \sqrt{x_k} (\log_2 x_k)^{2+\varepsilon} \quad \text{ps.}$$

Démonstration. Il est nécessaire d'introduire tout d'abord un certain nombre de paramètres qui seront fixés ultérieurement. Soient donc $\gamma > 0$, $X \geq 2$ et $z_0 \geq 2$. Posons de plus

$$(3.8) \quad k_X := \left\{ k \geq 1 : \sqrt{X} < x_k \leq X \right\}, \quad h := \frac{\log X}{\log z_0},$$

en notant d'emblée que $|k_X| \leq (\log X)^{1/c_{16}}$. Enfin, soit $\{z_j\}_{j \geq 0}$ une suite de nombres réels positifs définie de telle sorte que $z_j := z_{j-1}^{1+\gamma} = z_0^{(1+\gamma)^j}$ ($j \geq 1$).

Nous pouvons, lorsque $2 \leq x \leq X$ et $y > z_0$, décomposer la somme $\Psi_f(x, y)$ selon la taille de $P^+(n)$ de la façon suivante

$$\Psi_f(x, y) = \Psi_f(x, z_0) + \sum_{j \leq J_0(y)-1} \sum_{\substack{n \leq x \\ P^+(n) \in]z_j, z_{j+1}]} f(n) + \sum_{\substack{n \leq x \\ P^+(n) \in]z_{J_0}, y]} f(n),$$

où l'on a posé $J_0 = J_0(y) := \max\{j : z_j \leq y\}$ en observant que $J_0(y) \leq J := \min\{j : z_j \geq X\}$. Cela implique

$$\begin{aligned} \Psi_f(x, y) &= \Psi_f(x, z_0) + \sum_{j \leq J_0(y)-1} \sum_{1 < r \leq x}^{z_j, z_{j+1}} f(r) \Psi_f\left(\frac{x}{r}, z_j\right) \\ &\quad + \sum_{1 < r \leq x}^{z_{J_0}, y} f(r) \Psi_f\left(\frac{x}{r}, z_{J_0}\right). \end{aligned}$$

Nous pouvons à présent écrire, pour la suite $\{x_k\}_{k \geq 1}$ définie au Lemme 3.6,

$$(3.9) \quad \frac{1}{x_k - x_{k-1}} \left| \int_{x_{k-1}}^{x_k} \Psi_f(x, y) dx \right| \leq V_k + \sum_{j \leq J} W_{k,j}^*,$$

avec

$$V_k := \frac{1}{x_k - x_{k-1}} \left| \int_{x_{k-1}}^{x_k} \Psi_f(x, z_0) dx \right|,$$

$$W_{k,j}(z) := \frac{1}{x_k - x_{k-1}} \sum_{1 < r \leq x_k}^{z_j, z} f(r) \int_{x_{k-1}}^{x_k} \Psi_f\left(\frac{x}{r}, z_j\right) dx,$$

et

$$W_{k,j}^* := \max_{z_j < z \leq z_{j+1}} |W_{k,j}(z)|, \quad Z_{k,j} := W_{k,j}(z_{j+1}).$$

Soit R un paramètre réel positif qui sera fixé ultérieurement (voir (3.17)), et considérons les événements

$$A := \bigcup_{k \in k_X} \left\{ \frac{1}{x_k - x_{k-1}} \max_{z_0 < y \leq x_k} \left| \int_{x_{k-1}}^{x_k} \Psi_f(x, y) dx \right| \geq 3\sqrt{x_k} R \right\},$$

$$B := \bigcup_{k \in k_X} \left\{ V_k \geq \sqrt{x_k} R \right\},$$

$$C_j := \bigcup_{k \in k_X} \left\{ W_{k,j}^* \geq \sqrt{x_k} R / J \right\}, \quad C := \bigcup_{j \leq J} C_j.$$

La relation (3.9) implique directement

$$(3.10) \quad A \subset B \cup C.$$

Voyons comment majorer $\mathbb{P}(B)$. Il vient, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\mathbb{E}(V_k^2) \leq \frac{1}{x_k - x_{k-1}} \int_{x_{k-1}}^{x_k} \mathbb{E} \Psi_f(x, z_0)^2 dx \leq \Psi(x_k, z_0).$$

car, d'après la relation (2.2),

$$\mathbb{E} \Psi_f(x, z_0)^2 = \Psi^*(x_k, z_0) \leq \Psi(x_k, z_0).$$

L'inégalité de Markov et la majoration (3.2) pour $\Psi(x, y)$ impliquent

$$\mathbb{P}(V_k \geq \sqrt{x_k} R) \leq \frac{\Psi^*(x_k, z_0)}{x_k R^2} \ll \frac{e^{-\log x_k / (2 \log z_0)}}{R^2},$$

et

$$(3.11) \quad \mathbb{P}(B) \ll (\log X)^{1/c_{16}} \frac{e^{-h/4}}{R^2}.$$

Il nous reste donc à majorer $\mathbb{P}(C)$. Donnons-nous un entier pair $\ell \geq 2$ et introduisons la quantité

$$D_{k,j} := \frac{1}{x_k} \sum_{1 < r \leq x_k}^{z_j, z_{j+1}} \mu(r)^2 (\ell - 1)^{\Omega(r)} \left\{ \frac{1}{x_k - x_{k-1}} \int_{x_{k-1}}^{x_k} \Psi_f\left(\frac{x}{r}, z_j\right) dx \right\}^2.$$

Nous avons, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, pour tout $k \in k_X$,

$$\begin{aligned}
 D_{k,j} &\leq \frac{1}{x_k} \sum_{1 < r \leq x_k}^{z_j, z_{j+1}} \mu(r)^2 (\ell - 1)^{\Omega(r)} \left\{ \frac{1}{x_k - x_{k-1}} \int_{x_{k-1}}^{x_k} \Psi_f\left(\frac{x}{r}, z_j\right)^2 dx \right\} \\
 &\leq \sum_{1 < r \leq x_k}^{z_j, z_{j+1}} \mu(r)^2 (\ell - 1)^{\Omega(r)} \left\{ \frac{r/x_k}{x_k - x_{k-1}} \int_{x_{k-1}/r}^{x_k/r} \Psi_f(v, z_j)^2 dv \right\} \\
 &\leq \int_1^{x_k/z_j} \frac{\Psi_f(v, z_j)^2}{v} \left\{ \frac{1}{x_k - x_{k-1}} \sum_{x_{k-1}/v < r \leq x_k/v}^{z_j, z_{j+1}} \mu(r)^2 (\ell - 1)^{\Omega(r)} \right\} dv \\
 &\leq \frac{c_{20} \ell e^{2\gamma \ell}}{\log z_j} \int_1^{x_k/z_j} \frac{\Psi_f(v, z_j)^2}{v^2} dv \leq \frac{c_{20} \ell e^{2\gamma \ell}}{\log z_j} N_j.
 \end{aligned}$$

où l'on utilise la notation N_j définie en (3.1), et où la dernière somme en r a été estimée par le Lemme 2.1, pourvu que l'on ait, pour $\delta > 0$ convenablement fixé,

$$(3.12) \quad z_0 > \left(\frac{x_k}{x_k - x_{k-1}} \right)^{1+\delta}$$

et

$$(3.13) \quad \gamma \geq \frac{c_{21}}{L(z_0)^{c_9}}.$$

Notons que la condition (3.12) est impliquée par l'inégalité

$$(3.14) \quad h \leq c_{22} \frac{\log X}{\log_2 X},$$

où h a été défini en (3.8). Les assertions (3.14) et (3.13) seront respectivement vérifiées en (3.16) et (3.18) lors du choix des paramètres h et γ .

Soit à présent R' un paramètre réel positif fixé ultérieurement. Posons

$$F_j := \{N_j \leq R' \cdot \log z_j\}.$$

Nous sommes maintenant en mesure d'évaluer $\mathbb{P}(C)$. Nous avons

$$C_j = (C_j \cap F_j) \cup (C_j \cap \overline{F_j})$$

d'où

$$\begin{aligned}
 (3.15) \quad C &= \bigcup_{j \leq J} C_j = \bigcup_{j \leq J} (C_j \cap F_j) \cup \bigcup_{j \leq J} (C_j \cap \overline{F_j}) \\
 &\subset \bigcup_{j \leq J} (C_j \cap F_j) \cup \bigcup_{j \leq J} \overline{F_j}
 \end{aligned}$$

Grâce à l'inégalité de Doob appliquée à la sous-martingale $\{W_{k,j}(z)^\ell\}_{z>z_j}$ nous pouvons écrire, puisque $F_j \in \mathcal{F}_{z_j}$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(C_j \cap F_j) &\leq \sum_{k \in k_X} \mathbb{P}\left(\{W_{k,j}^* \geq \sqrt{x_k} R/J\} \cap F_j\right) \\ &\leq \sum_{k \in k_X} \frac{\mathbb{E}\left(\mathbf{1}_{F_j} Z_{k,j}^\ell\right)}{x_k^{\ell/2} (R/J)^\ell} \leq \sum_{k \in k_X} \frac{\mathbb{E}\left(\mathbf{1}_{F_j} \mathbb{E}\left(Z_{k,j}^\ell \mid \mathcal{F}_{z_j}\right)\right)}{x_k^{\ell/2} (R/J)^\ell}. \end{aligned}$$

Une simple application du Lemme 2.2 fournit l'évaluation de l'espérance conditionnelle précédente sous la forme

$$\mathbb{E}\left(Z_{k,j}^\ell \mid \mathcal{F}_{z_j}\right) \leq (x_k \cdot D_{k,j})^{\ell/2}.$$

Il en résulte alors

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(C_j \cap F_j) &\leq \sum_{k \in k_X} \mathbb{E}\left(\mathbf{1}_{F_j} \cdot \frac{D_{k,j}^{\ell/2}}{(R/J)^\ell}\right) \\ &\leq (\log X)^{1/c_{16}} e^{\gamma \ell^2} \left(\frac{c_{20} \cdot \ell \cdot R' \cdot J^2}{R^2}\right)^{\ell/2}. \end{aligned}$$

D'autre part, le Lemme 3.5 fournit

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{j \leq J} \overline{F_j}\right) = \mathbb{P}\left(\max_{j \leq J} \frac{N_j}{\log z_j} > R'\right) \ll \frac{\log h}{R'}.$$

Il découle de (3.10), (3.11), (3.15) et du fait que $J \asymp \log h/\gamma$, que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A) &\leq \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) \\ &\ll (\log X)^{1/c_{16}} \left\{ J^{\ell+1} \left(\frac{c_{20} \cdot \ell \cdot R'}{R^2}\right)^{\ell/2} e^{\gamma \ell^2} + \frac{e^{-h/4}}{R^2} \right\} + \frac{\log h}{R'} \\ &\leq (\log X)^{1/c_{16}} \left\{ \frac{(\log h)^{\ell+1}}{\gamma^{\ell+1}} \left(\frac{c_{20} \cdot \ell \cdot R'}{R^2}\right)^{\ell/2} e^{\gamma \ell^2} + \frac{e^{-h/4}}{R^2} \right\} + \frac{\log h}{R'}. \end{aligned}$$

Prenons $\gamma := 1/\ell$. Il vient

$$\mathbb{P}(A) \leq (\log X)^{c_{23}} \left\{ \left(\frac{\sqrt{R' \log h}}{R}\right)^\ell (c_{24} \ell)^{3\ell/2+1} + \frac{e^{-h/4}}{R^2} \right\} + \frac{\log h}{R'}.$$

Le choix

$$\ell = 2 \left\lceil \frac{1}{2} \left(\frac{R}{(\sqrt{R' \log h})}\right)^{2/3} \right\rceil$$

conduit à l'estimation

$$\mathbb{P}(A) \ll (\log X)^{c_{23}} \left\{ \exp \left\{ -\frac{c_{25}R^{2/3}}{R'^{1/3}(\log h)^{2/3}} \right\} + \frac{e^{-h/4}}{R^2} \right\} + \frac{\log h}{R'}.$$

Remarquons qu'en fixant

$$(3.16) \quad h = c_{26} \log_2 X,$$

nous avons

$$\mathbb{P}(A) \ll (\log X)^{c_{23}} \exp \left\{ -\frac{c_{25}R^{2/3}}{(R'^{1/3}(\log_3 X)^{2/3})} \right\} + \frac{1}{R^2} + \frac{\log_3 X}{R'},$$

et que la condition (3.14) est bien remplie, comme annoncé précédemment. Le choix $R' = c_{27}(\log_2 X)^{1+\varepsilon}$ fournit enfin

$$\mathbb{P}(A) \ll (\log X)^{c_{23}} \exp \left\{ -\frac{c_{25}R^{2/3}}{(\log_2 X)^{1/3+\varepsilon}} \right\} + \frac{1}{R^2} + \frac{1}{(\log_2 X)^{1+\varepsilon/2}}.$$

Nous pouvons ainsi fixer

$$(3.17) \quad R = (\log_2 X)^{2+\varepsilon},$$

en notant que dans ce cas, la condition (3.13) est bien vérifiée puisque

$$(3.18) \quad \gamma \gg \left(\frac{\sqrt{R'} \log h}{R} \right)^{2/3} \gg \frac{1}{\sqrt{\log X}} \gg \frac{1}{L(z_0)^{c_9}}.$$

Posant $X = X_s := \exp\{2^s\}$, nous avons clairement

$$\mathbb{P}(A_{X_s}) \leq \frac{1}{s^{1+\varepsilon}}.$$

Le lemme de Borel-Cantelli permet alors d'établir, puisque la série $\sum_{s \geq 1} \mathbb{P}(A_{X_s})$ est convergente, que

$$\mathbb{P}\left(\limsup_{s \geq 1} A_{X_s}\right) = 0.$$

Il existe ainsi, presque sûrement, un entier k_1 tel que pour $k \geq k_1$,

$$\max_{z_0 < y \leq x_k} \frac{1}{x_k - x_{k-1}} \int_{x_{k-1}}^{x_k} \Psi_f(x, y) dx \leq 3\sqrt{x_k} R.$$

□

4. Preuve du Théorème 1.2

Pour x fixé, nous définissons k_1 comme l'unique entier tel que

$$(4.1) \quad x_{k_1-1} < x \leq x_{k_1},$$

Nous scindons la démonstration du Théorème 1.2 en plusieurs cas, selon la taille relative de y par rapport à x .

Premier cas.

Supposons $x \geq y \geq \exp\{c_{19} \log x / \log_2 x\}$. Nous avons, dans ce domaine,

$$\begin{aligned} |\Psi_f(x, y)| &\leq \min_{x_{k_1-1} < x' \leq x_{k_1}} |\Psi_f(x', y)| + \max_{x_{k_1-1} < x' \leq x_{k_1}} |\Psi_f(x_{k_1}, y) - \Psi_f(x', y)| \\ &\leq \frac{1}{x_{k_1} - x_{k_1-1}} \int_{x_{k_1-1}}^{x_{k_1}} \Psi_f(x', y) dx' \\ &\quad + \max_{x_{k_1-1} < x' \leq x_{k_1}} |\Psi_f(x_{k_1}, y) - \Psi_f(x', y)|. \end{aligned}$$

Il vient alors

$$(4.2) \quad \Psi_f(x, y) \ll \sqrt{x_{k_1}} (\log_2 x_{k_1})^{2+\varepsilon} + x_k \ll \sqrt{x} (\log_2 x)^{2+\varepsilon},$$

en appliquant respectivement le Corollaire 3.7 et le Lemme 3.8.

Deuxième cas.

Nous supposons ici que l'on a $\vartheta(y) > 2 \log x$. Posons à présent

$$j_k := \max \left\{ 1, \left\lceil \frac{\log x_k}{\log y} \right\rceil \right\}, \quad y_k := x_k^{1/j_k} \quad (k \leq k_1).$$

Le Corollaire 3.7, fournit directement

$$|\Psi_f(x_k, y) - \Psi_f(x_{k-1}, y)| \leq \sqrt{\Psi^*(x_k, y_k)} e^{c_{17} j_k} \quad (k \leq k_1)$$

et

$$|\Psi_f(x_{k_1}, y) - \Psi_f(x, y)| \leq \sqrt{\Psi^*(x_{k_1}, y_{k_1})} e^{c_{17} j_{k_1}}.$$

Notons que, pour tout $k \leq k_1$, nous avons

$$\begin{aligned} j_k &\leq \max \left\{ 1, \frac{\log x_k}{\log y} \right\} \leq \frac{\log x_{k_1}}{\log y} \leq \frac{\log x_{k_1-1}}{\log y} + \frac{\log(x_{k_1}/x_{k_1-1})}{\log y} \\ &\leq u + O\left(\frac{1}{\log y}\right), \end{aligned}$$

en vertu de la relation (4.1). Supposant provisoirement l'estimation

$$(4.3) \quad M_1 := \sup_{k \leq k_1} \frac{\Psi^*(x_k, y_k)}{\Psi^*(x, y)} = \exp \left\{ O \left(\frac{u}{L_\varepsilon(y)} + \log(u+1) \right) \right\}$$

acquise, nous pouvons en déduire la majoration

$$(4.4) \quad \begin{aligned} |\Psi_f(x, y)| &\leq \sum_{k \leq k_1} |\Psi_f(x_k, y) - \Psi_f(x_{k-1}, y)| + |\Psi_f(x, y) - \Psi_f(x_{k_1}, y)| \\ &\ll k_1 \sqrt{M_1} \sqrt{\Psi^*(x, y)} e^{c_{17}u} \ll \sqrt{\Psi^*(x, y)} e^{c_{28}u} (\log x)^{c_{29}}, \end{aligned}$$

où l'on a utilisé le fait que $k_1 \ll (\log x)^{1/c_{16}}$.

Établissons à présent la relation (4.3). Lorsque x est suffisamment grand et $(\log x)^3 < y \leq x$, nous avons $\beta(x, y) \geq 3/5$. En appliquant le corollaire 2.6 de [3] et le théorème III.5.21 de [10], il vient

$$\begin{aligned} M_1 &\asymp \sup_{k \leq k_1} \frac{\Psi(x_k, y_k)}{\Psi(x, y)} \\ &\leq \sup_{k \leq k_1} \frac{x_k}{x} \frac{\varrho(\log x_k / \log y - 1)}{\varrho(u)} \exp \left\{ O \left(\frac{\log(u+1)}{\log y} + \frac{u}{L_\varepsilon(y)} + \frac{1}{u} \right) \right\}. \end{aligned}$$

Faisant usage de la croissance de la fonction $x \mapsto x \varrho(\log x / \log y - 1)$ pour x suffisamment grand et $y \leq x \leq \exp\{y^{1/3}\}$, nous obtenons

$$\begin{aligned} M_1 &\leq \frac{x_{k_1}}{x} \frac{\varrho(\log x_{k_1} / \log y - 1)}{\varrho(u)} \exp \left\{ O \left(\frac{\log(u+1)}{\log y} + \frac{u}{L_\varepsilon(y)} + \frac{1}{u} \right) \right\} \\ &= \exp \left\{ O \left(\frac{u}{L_\varepsilon(y)} + \log(u+1) \right) \right\}. \end{aligned}$$

Plaçons-nous à présent dans le domaine

$$2 \log x < \vartheta(y) \leq (\log x)^3.$$

Puisque $j_k \geq \log x_k / \log y - 1$, nous avons $y \leq y_k \leq y + y^{3/4}$ si l'on suppose de plus que

$$(4.5) \quad x_k \geq \exp\{y^{1/4}(\log y)^2\}.$$

En remarquant que nous avons trivialement

$$\Psi^*(x_k, y_k) \leq x_k \leq \exp \left\{ O \left(\frac{u}{L_\varepsilon(y)} \right) \right\},$$

pour tous les entiers k ne vérifiant pas (4.5), et que $x_k \leq e x$ ($k \leq k_1$), il vient

$$\begin{aligned} M_1 &\ll \frac{\Psi^*(x, y + y^{3/4})}{\Psi^*(x, y)} = 1 + \sum_{\substack{d > 1 \\ P^-(d) > y, P^+(d) \leq y + y^{3/4}}} \mu(d)^2 \frac{\Psi^*(x/d, y)}{\Psi^*(x, y)} \\ &\ll 1 + \sum_{\substack{d > 1 \\ P^-(d) > y, P^+(d) \leq y + y^{3/4}}} \frac{\mu(d)^2}{d^\alpha} \ll \exp \left\{ \sum_{y < p \leq y + y^{3/4}} \frac{1}{p^\alpha} \right\}, \end{aligned}$$

où α a été défini en (2.3). Posant

$$w(t) = w(t; x, y) := \frac{t^{1-\alpha} - 1}{(1-\alpha) \log t} \quad (t \geq 2),$$

le lemme 3.6 de [3] fournit, pour $y \geq 2$,

$$\begin{aligned} \sum_{y < p \leq y + y^{3/4}} \frac{1}{p^\alpha} &= \log \left(\frac{\log(y + y^{3/4})}{\log y} \right) + \int_{w(y)}^{w(y + y^{3/4})} t \xi'(t) dt + O\left(\frac{y^{1-\alpha}}{L(y)^{c_{30}}}\right) \\ &\ll w(y + y^{3/4}) - w(y) + \frac{y^{1-\alpha}}{L(y)^{c_{30}}} \ll \frac{y^{3/4}}{y^\alpha \log y} + \frac{y^{1-\alpha}}{L(y)^{c_{30}}} \\ &\ll \frac{u}{L_\varepsilon(y)}, \end{aligned}$$

car on a $y^{1-\alpha} \asymp \log x$ dans le domaine considéré. Cela achève la démonstration de l'estimation (4.3) et donc de (4.4).

Un calcul simple permet enfin d'observer que l'estimation (4.4) est meilleure que celle résultant de (4.2) si

$$x \geq 16, \quad y \leq \exp \left\{ c_{31} \frac{\log x \log_3 x}{\log_2 x} \right\}.$$

où c_{31} est une constante positive convenable.

Troisième cas.

Il s'agit à présent d'évaluer le domaine dans lequel la majoration triviale

$$(4.6) \quad |\Psi_f(x, y)| \leq \Psi^*(x, y)$$

est meilleure que l'estimation (4.4). Nous supposons ici que $\vartheta(y) > 2 \log x$.

D'une part, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que l'on ait

$$(4.7) \quad v := \log(\vartheta(y)/\log x - 1) \leq \varepsilon \log y,$$

lorsque $y \leq (\log x)^{1+\delta}$. Aussi, sous cette dernière hypothèse, le corollaire 2.3 de [2] fournit la minoration

$$(4.8) \quad \Psi^*(x, y) \geq \exp\{(1-\varepsilon)\pi(y)v/(e^v+1)\} \geq \exp\{(1-\varepsilon')vu\},$$

d'où

$$\Psi^*(x, y) \gg \sqrt{\Psi^*(x, y)} e^{c_4 u} (\log x)^{c_5}$$

lorsque v est suffisamment grand.

D'autre part, lorsque $y \geq (\log x)^{1+\delta}$, il découle de l'estimation de $\Psi(x, y)$ par Hildebrand et Tenenbaum (théorème III.5.21 de [10]) que

$$\sqrt{\Psi^*(x, y)} \asymp \sqrt{\Psi(x, y)} \gg e^{c_4 u} (\log x)^{c_5}$$

et donc que l'estimation (4.4) est toujours de qualité supérieure à la majoration triviale (4.6) lorsque $y \geq (\log x)^{1+\delta}$ et x est suffisamment grand.

Au vu des observations précédentes, la majoration fournie par (4.4) est meilleure que la majoration triviale (4.6) lorsque $\vartheta(y) \geq c_{32} \log x$, où c_{32} est une constante positive.

□

5. Preuve du Corollaire 1.3

Déterminons dans quel domaine les majorations apportées par le Théorème 1.2 fournissent une estimation du type $\Psi_f(x, y) \ll_\varepsilon \Psi^*(x, y)^{1/2+\varepsilon}$ pour tout $\varepsilon > 0$. Tout d'abord, il apparaît clairement (en utilisant par exemple la formule asymptotique issue du corollaire III.5.19 de [10]) que l'on a

$$\sqrt{x} (\log_2 x)^{2+\varepsilon'} \ll \Psi(x, y)^{1/2+\varepsilon} \asymp \Psi^*(x, y)^{1/2+\varepsilon}$$

lorsque $x \geq y \geq x^{c_3 (\log_3 x) / \log_2 x}$ et x suffisamment grand.

Par ailleurs, pour $(\log x)^{1+\delta} \leq y \leq x^{c_3 (\log_3 x) / \log_2 x}$ et x suffisamment grand, le théorème III.5.21 de [10] nous assure que

$$\Psi^*(x, y) e^{c_4 u} (\log x)^{c_5} \ll \Psi^*(x, y)^{1/2+\varepsilon}$$

puisque l'on a alors

$$\Psi^*(x, y)^\varepsilon \asymp \Psi(x, y)^\varepsilon \gg e^{c_4 u} (\log x)^{c_5}.$$

Enfin, la minoration (4.8), valable dans le domaine $y \leq (\log x)^{1+\delta}$, $\vartheta(y) > 2 \log x$ nous assure que

$$\Psi^*(x, y)^\varepsilon \gg e^{c_4 u} (\log x)^{c_5}$$

lorsque εv est suffisamment grand (rappelons que v est défini en (4.7)), c'est-à-dire lorsque $y \geq C_\varepsilon \log x$. Ceci implique directement la majoration

$$\Psi^*(x, y) e^{c_4 u} (\log x)^{c_5} \ll \Psi^*(x, y)^{1/2+\varepsilon}.$$

□

Bibliographie

- [1] A. Bonami, Étude des coefficients de Fourier des fonctions de $L^p(G)$, *Ann. Inst. Fourier* **20** (1970), 335–402.
- [2] R. de la Bretèche, G. Tenenbaum, Sur les lois locales de la répartition du k -ième diviseur d'un entier, *Proc. London Math. Soc.* (3) **84** (2002).
- [3] R. de la Bretèche, G. Tenenbaum, Propriétés statistiques des entiers friables, *Ramanujan J.* **9** (2005), 139–202.
- [4] P. Erdős, Some unsolved problems, *Magyar Tud. Akad. Kutató Int. Közl.* **6** (1961), 221–254.
- [5] G. Halász, On random multiplicative functions, Hubert Delange colloquium (Orsay, 1982), *Publ. Math. Orsay* **83** (4) (1983), 74–96.
- [6] A. J. Harper, On the limit distributions of some sums of a random multiplicative function, à paraître.
- [7] A. Hildebrand, G. Tenenbaum, On integers free of large prime factors, *Trans. Amer. Math. Soc.* **296** (1986), 265–290.
- [8] A. Hildebrand, G. Tenenbaum, Integers without large prime factors. *J. Théor. Nombres Bordeaux* **5** (1993), no. 2, 411–484.
- [9] Y.-K. Lau, G. Tenenbaum, J. Wu, Mean values of random multiplicative functions, prépublication, sept. 2010 ; version finale : *Proc. Amer. Math. Soc.*, à paraître.
- [10] G. Tenenbaum, *Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres*, Troisième Edition, Belin, 2008.
- [11] G. Tenenbaum, J. Wu, Moyennes de certaines fonctions multiplicatives sur les entiers friables, *J. Reine Angew. Math.* **564** (2003), 119–166.
- [12] T. Tórnács, Z. Lőbor, A Hájek-Rényi type inequality and its applications, *Ann. Math. et Inform.* **33** (2006), 141–149.
- [13] D. Williams, *Probability with martingales*, Cambridge University Press, 1991.
- [14] A. Wintner, Random factorizations and Riemann's hypothesis, *Duke Math. J.* **11** (1944), 267–275.

Joseph Basquin
 Institut Élie Cartan
 Université Henri Poincaré–Nancy 1
 BP 239
 54506 Vandœuvre Cedex
 France
 internet : joseph.basquin@iecn.u-nancy.fr

Valeurs moyennes de fonctions multiplicatives sur les entiers friables translatés

Abstract. We provide asymptotic estimates for sums of multiplicative functions of a certain class over shifted friable integers. The relevant class comprises functions f such that $f(p)$ is close to 1 in a suitable sense.

Sommaire

1	Introduction	1
1.1	Contexte	1
1.2	Notations et définitions additionnelles	3
1.3	Énoncé des résultats	3
2	Résultats auxiliaires	5
3	Démonstration du Théorème 1.1	16
4	Preuves des corollaires	20
4.1	Démonstration du Corollaire 1.2	20
4.2	Démonstration du Corollaire 1.3	20

1. Introduction

1.1. Contexte

Désignons par $P(n)$ le plus grand facteur premier d'un entier naturel positif n , avec la convention $P(1) = 1$, et par $S(x, y) := \{n \leq x : P(n) \leq y\}$ l'ensemble des entiers y -friables n'excédant pas x . Pour $x, y \geq 2$, nous posons, conformément à l'usage, $\Psi(x, y) := |S(x, y)|$ et $u := (\log x)/\log y$.

Étant donnée une fonction arithmétique f , nous introduisons les quantités

$$(1.1) \quad \Psi_f(x, y) := \sum_{n \in S(x, y)} f(n), \quad \Theta_f(x, y) := \sum_{\substack{n \in S(x, y) \\ n > 1}} f(n-1)$$

AMS (2010) Subject Classification : 11N25, 11N37.

* Des corrections ont été apportées par rapport à la version publiée.

La comparaison de Θ_f et Ψ_f est un exemple de question concernant l'effet d'une perturbation additive, ici $n \mapsto n - 1$ (et plus généralement $n \mapsto n + a$, avec a un entier non nul), sur une suite définie par des contraintes multiplicatives. Un autre exemple est le problème classique des diviseurs de Titchmarsh,⁽¹⁾ qui consiste à évaluer asymptotiquement la quantité $\sum_{p \leq x} \tau(p - 1)$, où p désigne systématiquement un nombre premier et τ est la fonction nombre de diviseurs.

Fouvry et Tenenbaum [3] ont considéré les quantités (1.1) dans le cas où $f = \tau$. Ils ont mis en lumière une divergence radicale entre les quantités $\Theta_\tau(x, y)$ et $\Psi_\tau(x, y)$. Alors qu'il est établi dans [3] que

$$(1.2) \quad \Theta_\tau(x, y) = \Psi(x, y) \log x \left\{ 1 + O\left(\frac{\log(u+1)}{\log y}\right) \right\} \quad (x^{c_1 \log_3 x / \log_2 x} \leq y \leq x),$$

il découle des résultats de Smida [9] ou de Tenenbaum et Wu ([11], corollaire 2.3) que l'estimation

$$(1.3) \quad \Psi_\tau(x, y) = \Psi(x, y)(\log x) \frac{\varrho_2(u)}{u\varrho(u)} \left\{ 1 + O\left(\frac{\log(u+1)}{\log y}\right) \right\}$$

est valable dans le domaine

$$(H_\varepsilon) \quad x \geq 3, \quad \exp\{(\log_2 x)^{5/3+\varepsilon}\} \leq y \leq x,$$

où, pour $\kappa > 0$, nous notons ϱ_κ l'unique fonction continue sur $]0, \infty[$ et dérivable sur $[1, \infty[$ satisfaisant à

$$(1.4) \quad \begin{cases} \varrho_\kappa(u) = u^{\kappa-1} / \Gamma(\kappa) & (0 < u \leq 1), \\ u\varrho'_\kappa(u) + (1 - \kappa)\varrho_\kappa(u) + \kappa\varrho_\kappa(u-1) = 0 & (u > 1) \end{cases}$$

et $\varrho := \varrho_1$. On déduit de la relation (3.10) de [8] que le facteur dépendant de u dans le membre de droite de (1.3) vaut⁽²⁾

$$\frac{\varrho_2(u)}{u\varrho(u)} = 2^{u+O(u/\log(u+1))} \quad (u \rightarrow \infty).$$

Dans le même esprit, Loiperdinger et Shparlinski [7] ont récemment étudié la fonction sommatoire de la fonction indicatrice d'Euler $n \mapsto \varphi(n)$ sur les entiers friables translatés, soit

$$\Theta_\varphi(x, y) = \sum_{\substack{n \in S(x, y) \\ n > 1}} \varphi(n - 1).$$

Ils obtiennent le résultat suivant.

-
1. Voir notamment les travaux de Fouvry [2] pour des estimations précises à ce sujet.
 2. Voir [6] pour un développement asymptotique des quantités ϱ_κ , et plus généralement, des solutions de certaines équations différentielles aux différences analogues à (1.4).

Théorème A. *Il existe une constante $c_1 > 0$ telle que la relation*

$$\Theta_\varphi(x, y) = \frac{3}{\pi^2} x \Psi(x, y) \left\{ 1 + O\left(\frac{(\log_2 x) \log_2 y}{\log y}\right) \right\}$$

ait lieu uniformément dans le domaine

$$x \geq x_0, \quad \exp\{c_1 \sqrt{(\log x) \log_3 x}\} \leq y \leq x.$$

Nous nous proposons ici de préciser et généraliser ce résultat sous forme d'une estimation générale de la valeur moyenne de certaines fonctions multiplicatives sur les entiers friables translatés. Nos résultats englobent le cas de la fonction indicatrice d'Euler.

1.2. Notations et définitions additionnelles

Les fonctions de Möbius, somme des diviseurs et identité sont notées respectivement μ , σ et j .

Nous définissons également

$$\Psi_d(x, y) := |\{n \in S(x, y) : (n, d) = 1\}|,$$

$$\Psi(x, y; a, d) := |\{n \in S(x, y) : n \equiv a \pmod{d}\}|$$

et notons $E(x, y; a, d) := \Psi(x, y; a, d) - \Psi_d(x, y)/\varphi(d)$.

Nous disons qu'un produit infini $\prod_{n \geq 1} a_n$ est convergent s'il existe un entier $N \geq 1$, tel que $P_N := \lim_{k \rightarrow \infty} \prod_{N < n \leq k} a_n$ soit fini et non nul ; nous posons alors $\prod_{n \geq 1} a_n := (\prod_{n \leq N} a_n) P_N$.

Étant donnée une fonction arithmétique f , nous écrivons formellement

$$(1.5) \quad E_f(p) := \left(1 - \frac{1}{p}\right) \sum_{\nu \geq 0} \frac{f(p^\nu)}{p^\nu} \quad (p \geq 2), \quad C(f) := \prod_p E_f(p).$$

1.3. Énoncé des résultats

Afin d'évaluer la quantité $\Theta_f(x, y)$, nous introduisons la fonction $\lambda := f * \mu$. Remarquons que

$$\Theta_f(x, y) = \sum_{d \leq x} \lambda(d) \{\Psi(x, y; 1, d) - 1\} \quad (x, y \geq 2).$$

Compte tenu des résultats de la littérature sur la répartition des entiers friables dans les progressions arithmétiques, on s'attend à une relation asymptotique du type

$$\Theta_f(x, y) \approx \sum_{d \leq x} \frac{\lambda(d)}{\varphi(d)} \Psi_d(x, y) \approx \Psi(x, y) \sum_{d \leq x} \frac{\lambda(d)}{d}.$$

Dans le cas où la fonction multiplicative f est suffisamment proche — dans un sens à préciser ultérieurement — de la fonction $\mathbf{1}$, il est raisonnable de penser que la fonction λ est petite en valeur absolue, de sorte que, avec la notation (1.5),

$$\sum_{d \geq 1} \frac{\lambda(d)}{d} = C(f)$$

est bien définie. Nous pouvons alors conjecturer que, sous des hypothèses adéquates concernant f , nous avons

$$\Theta_f(x, y) \approx C(f)\Psi(x, y) \approx \Psi_f(x, y).$$

Guidé par ce raisonnement heuristique, nous obtenons le résultat suivant.

Théorème 1.1. *Soient $\beta > 0$, $B > 0$, et f une fonction multiplicative vérifiant*

$$(1.6) \quad |\lambda(d)| \leq \frac{B}{d^\beta}.$$

Alors le produit $C(f)$ converge et, pour tous x, y satisfaisant (H_ε) , nous avons

$$\Theta_f(x, y) = \Psi(x, y) \left\{ C(f) + O\left(\frac{\log(u+1)}{\log y}\right) \right\},$$

où la constante implicite dépend au plus de β et B .

Corollaire 1.2. *Sous les mêmes hypothèses, posant $F(n) := nf(n)$ ($n \geq 1$), nous avons pour tous x, y satisfaisant (H_ε) ,*

$$\Theta_F(x, y) = x\Psi(x, y) \left\{ \frac{1}{2}C(f) + O\left(\frac{\log(u+1)}{\log y}\right) \right\}.$$

Le corollaire suivant étend et précise le Théorème A. Nous posons

$$\varphi_1(n) := (-1)^{n-1}\varphi(n) \quad (n \geq 1),$$

$$f_1(2^\nu) := -\nu + 1 \quad (\nu \geq 1), \quad f_1(p^\nu) := 1 \quad (p \neq 2, \nu \geq 1).$$

Les fonctions φ_1 et f_1 fournissent des exemples d'application du Corollaire 1.2 au cas de fonctions de signe non constant ou de valeur moyenne nulle.

Corollaire 1.3. *Pour tous x, y satisfaisant (H_ε) , nous avons*

$$\Theta_\varphi(x, y) = \frac{3}{\pi^2}x\Psi(x, y) \left\{ 1 + O\left(\frac{\log(u+1)}{\log y}\right) \right\},$$

$$\Theta_\sigma(x, y) = \frac{\pi^2}{12}x\Psi(x, y) \left\{ 1 + O\left(\frac{\log(u+1)}{\log y}\right) \right\},$$

$$\Theta_{\varphi_1}(x, y) = \frac{1}{\pi^2}x\Psi(x, y) \left\{ 1 + O\left(\frac{\log(u+1)}{\log y}\right) \right\},$$

$$\Theta_{f_1}(x, y) \ll \frac{\Psi(x, y) \log(u+1)}{\log y}.$$

2. Résultats auxiliaires

Nous commençons par une estimation concernant certaines intégrales.

Lemme 2.1. *Nous avons, uniformément pour $0 \leq \gamma \leq 1$, $\beta \in \mathbb{R}$ et $y \geq w > 1$,*

$$\int_w^y \frac{dt}{t^\beta \exp\{(\log t)^\gamma\}} \ll \int_w^y \frac{dt}{t \exp\{(\frac{1}{4} \log t)^\gamma\}} + \frac{y^{1-\beta} - 1}{(1-\beta) \exp\{(\frac{1}{4} \log y)^\gamma\}}.$$

Démonstration. L'estimation annoncée résulte du lemme 3.2 de [11]. Vérifions que les hypothèses en sont satisfaites. Soit $R(t) := \exp\{(\log t)^\gamma\}$, avec $0 \leq \gamma \leq 1$. Nous avons $\varphi(v) := \log R(e^v) = v^\gamma$ ($v > 0$). La fonction φ' est décroissante sur $]0, \infty[$ et l'on a, pour tout $0 \leq \gamma \leq 1$,

$$\frac{1}{2} \varphi'(\frac{1}{2}v) \leq \frac{3}{4} \int_{\frac{1}{4}}^1 \varphi'(tv) dt \quad (v > 0).$$

En effet, cette dernière condition équivaut à

$$\frac{\gamma}{2^\gamma} \leq \frac{3}{4} \left(1 - \frac{1}{4^\gamma}\right) \quad (0 \leq \gamma \leq 1),$$

qui est bien vérifiée car

$$4\gamma/3 \leq 2\gamma \log 2 \leq 2 \operatorname{sh}(\gamma \log 2) = 2^\gamma - 2^{-\gamma} \quad (0 \leq \gamma \leq 1).$$

Le résultat découle alors du lemme précité appliqué avec $b := \frac{1}{4}$. □

Soit $\alpha = \alpha(x, y)$ défini comme l'unique solution positive de l'équation

$$\sum_{p \leq y} \frac{\log p}{p^\alpha - 1} = \log x.$$

Rappelons tout d'abord l'estimation classique (voir [10], formule (III.5.74)),

$$(2.1) \quad 1 - \alpha(x, y) \ll \frac{\log(u+1)}{\log y} \quad (x \geq x_0(\varepsilon), (\log x)^{1+\varepsilon} \leq y \leq x).$$

Le résultat suivant, relatif au comportement local de $\Psi(x, y)$, est établi dans [1], théorème 2.4.

Lemme 2.2. *Il existe une constante $c_2 > 0$, telle que pour $x \geq 2$, $x \geq y \geq \log x$ et $1 \leq z \leq T := \exp\{c_2 \sqrt{\log(u+1) \log x}\}$, nous avons*

$$\Psi\left(\frac{x}{z}, y\right) = \frac{\Psi(x, y)}{z^\alpha} \left(1 + O\left(\frac{\log(u+1)}{\log y} + \frac{\log z}{\log x}\right)\right).$$

Par ailleurs, pour $x \geq y \geq 2$ et $1 \leq z \leq x$, nous avons

$$(2.2) \quad \Psi\left(\frac{x}{z}, y\right) \ll \frac{\Psi(x, y)}{z^\alpha}.$$

Pour $A > 0$, $C > 0$, $\varepsilon > 0$ et $\eta \in]0, \frac{1}{2}[$, nous posons

$$L_\varepsilon(x) := \exp\{(\log x)^{3/5-\varepsilon}\} \quad (x \geq 1)$$

et nous désignons par $\mathcal{M}_1(A, C, \eta, \varepsilon)$ la classe des fonctions multiplicatives réelles positives ou nulles f satisfaisant aux conditions

$$(2.3) \quad \left| \sum_{p \leq z} f(p) \log p - z \right| \leq \frac{Cz}{L_\varepsilon(z)} \quad (z \geq 2),$$

$$(2.4) \quad \sum_p \sum_{\nu \geq 2} \frac{|f(p^\nu)|}{p^{(1-\eta)\nu}} \leq A.$$

De même, nous notons $\mathcal{M}^\pm(A, C, \eta, \varepsilon)$ la classe des fonctions multiplicatives réelles f vérifiant la condition (2.4) et

$$(2.5) \quad \sum_{\substack{p \leq z \\ f(p) < 0}} |f(p)| \log p + \left| \sum_{p \leq z} f(p) \log p - z \right| \leq \frac{Cz}{L_\varepsilon(z)} \quad (z \geq 2).$$

Le résultat suivant est une extension à certaines fonctions multiplicatives réelles du cas particulier $\kappa = 1$ du corollaire 2.3 de [11].

Lemme 2.3. *Soient $A > 0$, $C > 0$, $\varepsilon > 0$ et $\eta \in]0, \frac{1}{2}[$. Pour tout $f \in \mathcal{M}^\pm(A, C, \eta, \varepsilon)$, le produit $C(f)$ converge et nous avons, uniformément pour $(x, y) \in (H_\varepsilon)$ et $f \in \mathcal{M}^\pm(A, C, \eta, \varepsilon/2)$,*

$$\Psi_f(x, y) = \Psi(x, y) \left\{ C(f) + O\left(\frac{\log(u+1)}{\log y}\right) \right\}.$$

Démonstration. Le cas où la fonction f est positive ou nulle est établi au corollaire 2.3 de [11].

Soient g et h les fonctions multiplicatives définies par⁽³⁾

$$g(p^\nu) = \{f(p)^+\}^\nu / \nu! \quad (p \geq 2, \nu \geq 1), \quad f = g * h.$$

3. Pour $a \in \mathbb{R}$, nous notons $a^+ := \max\{a, 0\}$ et $a^- := \min\{a, 0\}$.

Montrons tout d'abord que pour $(x, y) \in (H_\varepsilon)$, nous avons

$$(2.6) \quad \sum_{\substack{p \leq y \\ \nu \geq 1}} \frac{|h(p^\nu)|(\log p^\nu)^j}{p^{\nu\alpha}} \ll 1 \quad (j \in \{0, 1, 2\}).$$

Il est suffisant d'établir le cas $j = 2$. Observons que $h(p) = -f(p)^-$. Par sommation d'Abel et compte tenu de la condition (2.5), il suit, pour $(x, y) \in (H_\varepsilon)$,

$$\begin{aligned} U_1 &:= \sum_{p \leq y} \frac{|h(p)| \log p}{p^\alpha} = \sum_{\substack{p \leq y \\ f(p) < 0}} \frac{|f(p)| \log p}{p^\alpha} \ll \int_1^y \frac{dz}{z^\alpha L_{\varepsilon/2}(z)} \\ &\ll 1 + \frac{y^{1-\alpha} - 1}{(1-\alpha)L_{\varepsilon/2}(y^{1/4})}, \end{aligned}$$

en vertu du Lemme 2.1. L'inégalité $(e^r - 1)/r \leq e^r$ ($r > 0$) permet alors d'établir

$$U_1 \ll 1 + y^{1-\alpha} \frac{\log y}{L_{\varepsilon/2}(y^{1/4})} \ll 1 + \frac{(\log x) \log(u+1)}{L_{\varepsilon/2}(y^{1/4})} \ll 1 \quad ((x, y) \in (H_\varepsilon)),$$

compte tenu de la relation (3.3) de [1]. D'autre part, l'expression explicite de h , donnée par

$$h(p^\nu) = \sum_{j+k=\nu} (-1)^j f(p^k) \{f(p)^+\}^j / j! \quad (p \geq 2, \nu \geq 1),$$

nous permet d'effectuer la majoration

$$\sum_{\nu \geq 2} \frac{|h(p^\nu)|(\log p^\nu)^2}{p^{\nu\alpha}} \leq \sum_{k \geq 0} \frac{|f(p^k)|(\log p)^2}{p^{k\alpha}} \sum_{j \geq \max\{0, 2-k\}} \frac{\{f(p)^+\}^j (j+k)^2}{j! p^{j\alpha}}.$$

Désignons par S_k la somme intérieure. La relation

$$(2.7) \quad f(p) \ll \frac{p}{L_{\varepsilon/2}(p) \log p},$$

découlant directement de la condition (2.3), nous assure que l'on a, pour $p \leq y$,

$$\begin{aligned} \frac{f(p)}{p^\alpha} &\ll \exp\{(1-\alpha) \log p - (\log p)^{3/5-\varepsilon/2}\} \\ &\ll \exp\{(\log p)^{3/5-\varepsilon/2}((1-\alpha)(\log y)^{2/5+\varepsilon/2} - 1)\}. \end{aligned}$$

Nous avons donc, grâce à l'estimation (2.1),

$$\frac{f(p)}{p^\alpha} \ll 1 \quad ((x, y) \in (H_\varepsilon), p \leq y).$$

Posons $\xi := f(p)^+/p^\alpha$. Nous pouvons à présent établir les majorations

$$\begin{aligned} S_0 &= \xi(e^\xi - 1 + \xi e^\xi) \ll \xi^2 \leq f(p)^2/p^{2\alpha}, \\ S_1 &= e^\xi - 1 + 3\xi e^\xi + \xi^2 e^\xi \ll \xi \leq |f(p)|/p^\alpha, \\ S_k &= e^\xi(k^2 + 2\xi k + \xi + \xi^2) \ll k^2 \quad (k \geq 2). \end{aligned}$$

Nous en déduisons

$$(2.8) \quad \sum_{\substack{p \leq y \\ \nu \geq 1}} \frac{|h(p^\nu)|(\log p^\nu)^2}{p^{\nu\alpha}} \ll 1 + \sum_{p \leq y} \frac{f(p)^2(\log p)^2}{p^{2\alpha}} + \sum_{\substack{p \leq y \\ k \geq 2}} \frac{|f(p^k)|(\log p^k)^2}{p^{k\alpha}}.$$

Posons $N(t) := \sum_{p \leq t} f(p) \log p$. Les relations (2.5) et (2.7) impliquent alors que

$$\begin{aligned} \sum_{p \leq y} \frac{f(p)^2(\log p)^2}{p^{2\alpha}} &\ll \sum_{p \leq y} \frac{f(p) \log p}{p^{2\alpha-1} L_{\varepsilon/2}(p)} = \int_{2^-}^y \frac{dN(t)}{t^{2\alpha-1} L_{\varepsilon/2}(t)} \\ (2.9) \quad &= \left[\frac{N(t)}{t^{2\alpha-1} L_{\varepsilon/2}(t)} \right]_{2^-}^y + \int_{2^-}^y \frac{1 - 2\alpha - (3/5 - \varepsilon/2)(\log t)^{-2/5-\varepsilon/2}}{t^{2\alpha} L_{\varepsilon/2}(t)} N(t) dt \\ &\ll \frac{y^{2-2\alpha}}{L_{\varepsilon/2}(y)} + \int_2^y \frac{t^{1-2\alpha}}{L_{\varepsilon/2}(t)} dt \ll 1 + \frac{y^{2-2\alpha} - 1}{(1-\alpha)L_{\varepsilon/2}(y^{1/4})} \ll 1, \end{aligned}$$

pour $(x, y) \in (H_\varepsilon)$, par les mêmes arguments que ceux qui nous ont conduit à la majoration de la quantité U_1 .

Il existe une constante $c_3 > 0$ telle que, pour x, y assez grands dans le domaine (H_ε) , nous ayons $\alpha - (1 - \eta) \geq c_3$. Par conséquent, la seconde somme du membre de droite de (2.8) est majorée par

$$\sum_{\substack{p \leq y \\ k \geq 2}} \frac{|f(p^k)|}{p^{(1-\eta)k}} \frac{(\log p^k)^2}{p^{c_3 k}} \leq c_4 A,$$

où $c_4 := \sup_{t \geq 1} (\log t)^2 / t^{c_3}$. Ceci achève la démonstration de la majoration (2.6).

Montrons à présent que pour $(x, y) \in (H_\varepsilon)$, l'on a

$$(2.10) \quad \sum_{P(m) \leq y} \frac{|h(m)|(\log m)^j}{m^\alpha} \ll 1 \quad (j \in \{0, 1, 2\}).$$

Remarquant que le cas $j = 1$ découle naturellement des cas $j = 0$ et 2 , il est suffisant de démontrer ceux-ci. Le cas $j = 0$ de (2.6) implique directement le cas $j = 0$ de (2.10) par application du théorème II.1.3 de [10]. Pour établir le cas $j = 2$ de (2.10), nous observons que

$$(\log m)^2 = \sum_{p^\nu || m} (\log p^\nu)^2 + \sum_{p^\nu q^\mu || m, p \neq q} (\log p^\nu)(\log q^\mu) \quad (m \geq 1).$$

Ceci nous permet d'écrire

$$\begin{aligned} \sum_{P(m) \leq y} \frac{|h(m)|(\log m)^2}{m^\alpha} &\leq \sum_{\substack{p \leq y \\ \nu \geq 1}} \frac{|h(p^\nu)|(\log p^\nu)^2}{p^{\nu\alpha}} \sum_{P(m) \leq y} \frac{|h(m)|}{m^\alpha} \\ &+ \left(\sum_{\substack{p \leq y \\ \nu \geq 1}} \frac{|h(p^\nu)|(\log p^\nu)}{p^{\nu\alpha}} \right)^2 \sum_{P(m) \leq y} \frac{|h(m)|}{m^\alpha} \ll 1, \end{aligned}$$

par application de (2.6) pour $j = 1$ et 2 , ce qui fournit l'estimation (2.10) pour $j = 2$.

L'intégralité des estimations précédentes reste valable, en remplaçant formellement dans les formules le paramètre α par 1 et en faisant tendre y vers l'infini. Cela résulte immédiatement du fait que les intégrales du type $\int_1^\infty dz / \{z L_{\varepsilon/2}(z)\}$ sont convergentes. Nous en déduisons

$$(2.11) \quad \sum_{m \geq 1} \frac{|h(m)|(\log m)^j}{m} \ll 1 \quad (j \in \{0, 1, 2\}).$$

La méthode de Rankin permet de montrer que, pour tout $V \geq 2$,

$$(2.12) \quad \sum_{\substack{m > V \\ P(m) \leq y}} \frac{|h(m)|}{m^\alpha} \leq \sum_{P(m) \leq y} \frac{|h(m)|(\log m)^2}{m^\alpha (\log V)^2} \ll \frac{1}{(\log V)^2},$$

$$(2.13) \quad \sum_{m > V} \frac{|h(m)|}{m} \leq \sum_{m \geq 1} \frac{|h(m)|(\log m)^2}{m (\log V)^2} \ll \frac{1}{(\log V)^2}.$$

Par ailleurs, l'inégalité des accroissements finis et la relation (2.1) impliquent que, pour $(x, y) \in (H_\varepsilon)$,

$$(2.14) \quad \sum_{P(m) \leq y} |h(m)| \left\{ \frac{1}{m^\alpha} - \frac{1}{m} \right\} \leq \sum_{P(m) \leq y} \frac{|h(m)|(1 - \alpha) \log m}{m^\alpha} \ll \frac{\log(u + 1)}{\log y}.$$

Nous sommes à présent en mesure d'évaluer la somme annoncée. Nous avons

$$(2.15) \quad \Psi_f(x, y) = \sum_{m \in S(x, y)} h(m) \Psi_g\left(\frac{x}{m}, y\right)$$

Si $f \in \mathcal{M}^\pm(A, C, \eta, \varepsilon/2)$, il est clair que $g \in \mathcal{M}_1(A, C, \eta, \varepsilon/2)$ et nous pouvons ainsi utiliser le résultat déjà établi pour cette classe — comme rappelé en début de preuve — qui fournit, pour x, y satisfaisant (H_ε) et $1 \leq m \leq x$,

$$(2.16) \quad \Psi_g\left(\frac{x}{m}, y\right) = C(g) \Psi\left(\frac{x}{m}, y\right) \left\{ 1 + O\left(\frac{\log(u + 1)}{\log y} + \frac{1}{\log(2x/m)}\right) \right\}.$$

D'autre part, nous avons pour $x \geq 2$, $y \geq \log x$ et $m \leq T := \exp\{\sqrt{\log x}\}$, grâce au Lemme 2.2,

$$(2.17) \quad \Psi\left(\frac{x}{m}, y\right) = \frac{\Psi(x, y)}{m^\alpha} \left\{ 1 + O\left(\frac{\log(u+1)}{\log y} + \frac{\log m}{\log x}\right) \right\}.$$

Posons, sous réserve de convergence,

$$H(s) := \sum_{m \geq 1} \frac{h(m)}{m^s}, \quad H_T(s; y) := \sum_{m \in S(T, y)} \frac{h(m)}{m^s}.$$

La relation (2.15) nous permet d'écrire $\Psi_f(x, y) = \Sigma_1 + \Sigma_2$ avec

$$\Sigma_1 := \sum_{m \in S(T, y)} h(m) \Psi_g\left(\frac{x}{m}, y\right), \quad \Sigma_2 := \sum_{\substack{m \in S(x, y) \\ m > T}} h(m) \Psi_g\left(\frac{x}{m}, y\right).$$

Il s'ensuit, grâce (2.16) et (2.17), que, pour $(x, y) \in (H_\varepsilon)$,

$$\Sigma_1 = C(g) H_T(\alpha; y) \Psi(x, y) \left(1 + O\left(\frac{\log(u+1)}{\log y}\right) \right) + O\left(\frac{\Psi(x, y)}{\log x}\right),$$

d'après (2.10) pour $j = 1$. Les majorations issues de (2.2) et (2.12) fournissent l'évaluation pleinement suffisante

$$\Sigma_2 \ll \Psi(x, y) \sum_{\substack{m > T \\ P(m) \leq y}} \frac{|h(m)|}{m^\alpha} \ll \frac{\Psi(x, y)}{\log y}.$$

Soit $T_y := \min\{T, y\}$. Nous avons alors

$$\begin{aligned} |H_T(\alpha; y) - H(1)| &= \left| \sum_{\substack{m \leq T \\ P(m) \leq y}} h(m) \left\{ \frac{1}{m^\alpha} - \frac{1}{m} \right\} - \sum_{m > T \text{ ou } P(m) > y} \frac{h(m)}{m} \right| \\ &\leq \sum_{P(m) \leq y} |h(m)| \left\{ \frac{1}{m^\alpha} - \frac{1}{m} \right\} + \sum_{m > T_y} \frac{|h(m)|}{m} \\ &\ll \frac{\log(u+1)}{\log y} + \frac{1}{\log x} + \frac{1}{(\log y)^2} \ll \frac{\log(u+1)}{\log y}, \end{aligned}$$

d'après (2.14) et (2.13).

Montrons à présent que le produit $C(f)$ converge. Remarquons tout d'abord que l'on peut écrire $E_f(p) = 1 + u_p + v_p$, où

$$u_p := \frac{f(p) - 1}{p}, \quad v_p := \sum_{\nu \geq 2} \frac{f(p^\nu) - f(p^{\nu-1})}{p^\nu} \quad (p \geq 2).$$

Le Lemme III.4.3 de [10] nous assure que, sous les hypothèses $\sum_p u_p^2 < \infty$, $\sum_p |v_p| < \infty$, une condition nécessaire et suffisante pour que le produit $C(f)$ converge est la convergence de la série $\sum_p u_p$.

D'une part, l'inégalité $(a + b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$ ($a, b \in \mathbb{R}$) et le fait que l'on ait $\sum_p f(p)^2/p^2 < \infty$ (la démonstration est en tout point similaire à celle de (2.9)) impliquent que la série $\sum_p u_p^2$ est convergente. Il en est de même de la série $\sum_p v_p$, ce qu'on établit par sommation d'Abel grâce à la condition (2.5).

D'autre part, la série $\sum_p v_p$ est absolument convergente. En effet, nous avons

$$|v_p| \leq |f(p)|/p^2 + 2 \sum_{\nu \geq 2} |f(p^\nu)|/p^\nu \quad (p \geq 2).$$

La relation $\sum_p |f(p)|/p^2 < \infty$ découle de la majoration (2.7) et la convergence absolue de la série $\sum_p v_p$ résulte ainsi de (2.4). Le lemme précité assure donc bien la convergence du produit $C(f)$.

Enfin, nous avons bien $C(g)H(1) = C(f)$, puisque

$$\sum_{\nu \geq 0} \frac{g(p^\nu)}{p^\nu} \sum_{\nu \geq 0} \frac{h(p^\nu)}{p^\nu} = \sum_{\nu \geq 0} \frac{f(p^\nu)}{p^\nu} \quad (p \geq 2).$$

Finalement, nous avons, pour x, y satisfaisant (H_ε) ,

$$\Psi_f(x, y) = \Psi(x, y) \left\{ C(f) + O\left(\frac{\log(u+1)}{\log y}\right) \right\}.$$

□

Le résultat suivant est nécessaire pour établir le Corollaire 1.2, et plus généralement pour étudier la somme friable d'une fonction proche de l'identité.

Lemme 2.4. *Soit $\varepsilon > 0$. Pour $(\log x)^{1+\varepsilon} \leq y \leq x$ et $x \geq x_0(\varepsilon)$, nous avons uniformément*

$$\begin{aligned} \int_1^x \Psi(t, y) dt &= \frac{1}{2} x \Psi(x, y) \left\{ 1 + O\left(\frac{\log(u+1)}{\log y}\right) \right\}, \\ \sum_{n \in S(x, y)} n &= \frac{1}{2} x \Psi(x, y) \left\{ 1 + O\left(\frac{\log(u+1)}{\log y}\right) \right\}. \end{aligned}$$

Démonstration. Une intégration par parties permet d'écrire, pour $x, y \geq 2$,

$$\sum_{n \in S(x, y)} n = x\Psi(x, y) - \int_1^x \Psi(t, y) dt = x\Psi(x, y) - x \int_1^x \Psi\left(\frac{x}{z}, y\right) \frac{dz}{z^2}.$$

Le Lemme 2.2 fournit pour $x \geq y \geq \log x$ et $z \leq T = \exp\{c_2 \sqrt{\log(u+1) \log x}\}$,

$$\begin{aligned} \int_1^T \Psi\left(\frac{x}{z}, y\right) \frac{dz}{z^2} &= \Psi(x, y) \left\{ 1 + O\left(\frac{\log(u+1)}{\log y}\right) \right\} \int_1^T \frac{dz}{z^{2+\alpha}} + O\left(\frac{\Psi(x, y)}{\log x}\right) \\ &= \frac{\Psi(x, y)}{1+\alpha} \left\{ 1 + O\left(\frac{\log(u+1)}{\log y} + \frac{1}{T}\right) \right\}. \end{aligned}$$

Par ailleurs, nous avons trivialement

$$\int_T^x \Psi\left(\frac{x}{z}, y\right) \frac{dz}{z^2} \ll \frac{\Psi(x, y)}{T} \ll \frac{\Psi(x, y) \log(u+1)}{\log y}.$$

Enfin, l'évaluation

$$\frac{1}{1+\alpha} = \frac{1}{2} + O\left(\frac{\log(u+1)}{\log y}\right),$$

valable pour $(\log x)^{1+\varepsilon} \leq y \leq x$ et $x \geq x_0(\varepsilon)$ découle de (2.1). Cela implique bien le résultat annoncé. $\square$

Le résultat suivant est une reformulation du théorème 2 de [4].

Lemme 2.5. *Il existe des constantes $c_5 > 0$, $c_6 > 0$ telles que, pour $x, y \geq 2$, nous ayons*

$$\sum_{d \leq z} |E(x, y; 1, d)| \ll \frac{\Psi(x, y)}{\log x},$$

où $z := \min\{\sqrt{x}/(\log x)^{c_6}, y^{c_5 \log_2 y / \log_3 y}\}$.

Le lemme suivant fournit une estimation du nombre des entiers friables dans les progressions arithmétiques de grands modules. Nous suivons la méthode employée pour établir la proposition 1 de [4] et donnons une version légèrement modifiée du théorème 4 de [4].

Lemme 2.6. *Nous avons uniformément pour x, y satisfaisant (H_ε) , $1 \leq q \leq x$ et $(a, q) = 1$,*

$$(2.18) \quad \Psi(x, y; a, q) \ll \frac{\Psi(x, y)}{q \varrho(u_q)},$$

où nous avons posé $u_q := \min\{(\log qy)/\log y, u\}$.

Remarque. Notons que pour $q \geq x/y$, la méthode employée ici ne peut fournir davantage que la majoration triviale $\Psi(x, y; a, q) \ll x/q$.

Démonstration. Soit $x_0 \geq 2$ et $x_1 \geq 2x_0$. Posons, pour $x \geq x_0$, $y \geq 2$ et $1 \leq q \leq x$,

$$\Delta(x) := \max_{(a,q)=1} \frac{\Psi(x, y; a, q)}{\Psi(x, y)}, \quad \Delta^*(x) := \max_{x_0 \leq z \leq x} \Delta(z).$$

En évaluant les sommes $\sum_{n \in S(x, y)} \log n$ et $\sum_{\substack{n \in S(x, y) \\ n \equiv a \pmod q}} \log n$ de deux manières différentes, nous obtenons les identités classiques (voir [4] et [5])

$$(2.19) \quad \Psi(x, y) \log x = \int_1^x \frac{\Psi(t, y)}{t} dt + \sum_{\substack{p \leq y \\ p^m \leq x}} \Psi(x/p^m, y) \log p,$$

$$(2.20) \quad \Psi(x, y; a, q) \log x = \int_1^x \frac{\Psi(t, y; a, q)}{t} dt + \sum_{\substack{p \leq y \\ p^m \leq x}} \left(\sum_{\substack{k \in S(x/p^m, y) \\ kp^m \equiv a \pmod q}} 1 \right) \log p.$$

Si $p \nmid q$, nous avons, notant p^{-m} l'inverse de p^m modulo q ,

$$\sum_{\substack{k \in S(x/p^m, y) \\ kp^m \equiv a \pmod q}} 1 = \Psi(x/p^m, y; ap^{-m}, q),$$

et, dans le cas contraire, cette somme est nulle car les relations $p|q$ et $kp^m \equiv a \pmod q$ impliquent $(a, q) > 1$, ce qui contredit l'hypothèse faite sur a . Il vient alors, pour $x_0, q, y \leq x$, grâce à l'identité (2.20),

$$\Delta(x) \Psi(x, y) \log x \leq \int_{x_0}^x \Delta(t) \frac{\Psi(t, y)}{t} dt + \sum_{\substack{p \leq y \\ p^m \leq x/x_0}} \Delta(x/p^m) \Psi(x/p^m, y) \log p + H,$$

où nous avons posé

$$\begin{aligned} H &:= \int_1^{x_0} \max_{(a,q)=1} \Psi(t, y; a, q) \frac{dt}{t} + \sum_{\substack{p \leq y \\ x/x_0 < p^m \leq x}} \max_{(a,q)=1} \Psi(x/p^m, y; a, q) \log p \\ &\leq \left(\max_{(a,q)=1} \Psi(x_0, y; a, q) \right) \left(\int_1^{x_0} \frac{1}{t} dt + \sum_{\substack{p \leq y \\ x/x_0 < p^m \leq x}} \log p \right). \end{aligned}$$

Remarquons que la relation

$$\sum_{m \geq 1, x/x_0 < p^m \leq x} 1 \leq \frac{\log x}{\log p} - \frac{\log x/x_0}{\log p} + O(1) = \frac{\log x_0}{\log p} + O(1)$$

implique la majoration

$$\sum_{\substack{p \leq y \\ x/x_0 < p^m \leq x}} \log p \leq (\log x_0) \pi(y) + O(y) \ll \pi(y) (\log x_0 + \log y).$$

Nous en déduisons ainsi que la quantité

$$H \ll \left(\max_{(a,q)=1} \Psi(x_0, y; a, q) \right) (\pi(y) + 1) \log(x_0 y)$$

est bornée indépendamment de x . Nous avons, pour $x \geq 2x_0$,

$$\begin{aligned} \Delta(x) \Psi(x, y) \log x &\leq \Delta^*(x/2) \left\{ \int_{x_0}^x \frac{\Psi(t, y)}{t} dt + \sum_{\substack{p \leq y \\ p^m \leq x/x_0}} \Psi(x/p^m, y) \log p \right\} \\ &\quad + \{ \Delta^*(x) - \Delta^*(x/2) \} \int_{x/2}^x \frac{\Psi(t, y)}{t} dt + H \\ &\leq \Delta^*(x/2) \Psi(x, y) \log x + \{ \Delta^*(x) - \Delta^*(x/2) \} \Psi(x, y) \log 2 + H, \end{aligned}$$

où la dernière inégalité découle de l'identité (2.19). Pour $x \geq 2x_0 \geq 4$, nous obtenons

$$\begin{aligned} \Delta(x) &\leq \Delta^*(x/2) + (\Delta^*(x) - \Delta^*(x/2)) \frac{\log 2}{\log x} + \frac{H}{\Psi(x, y) \log x} \\ &\leq \frac{1}{2} \Delta^*(x/2) + \frac{1}{2} \Delta^*(x) + \frac{H}{\Psi(x, y) \log x}, \end{aligned}$$

car $2 \log 2 \leq \log x$.

Supposons à présent que $x \geq 4x_0$. Pour tout $x/2 \leq z \leq x$, nous pouvons donner la majoration

$$\begin{aligned} \Delta(z) &\leq \frac{1}{2} \Delta^*(z/2) + \frac{1}{2} \Delta^*(z) + \frac{H}{\Psi(z, y) \log z} \\ &\leq \frac{1}{2} \Delta^*(x/2) + \frac{1}{2} \Delta^*(x) + \frac{H}{\Psi(x/2, y) \log(x/2)}. \end{aligned}$$

D'autre part, pour tout $x_0 \leq z \leq x/2$, nous avons trivialement, par croissance de la fonction Δ^* , la majoration $\Delta(z) \leq \Delta^*(x/2) \leq \frac{1}{2} \Delta^*(x/2) + \frac{1}{2} \Delta^*(x)$.

Nous obtenons finalement pour $x \geq 4x_0$,

$$\Delta^*(x) \leq \Delta^*(x/2) + \frac{2H}{\Psi(x/2, y) \log(x/2)}.$$

En utilisant cette relation de façon récurrente, nous obtenons, pour $x \geq 4x_0$,

$$\Delta(x) \leq \Delta^*(x_1) + 2H \sum_{j \geq 0, x_1 2^j \leq x} \frac{1}{\Psi(x_1 2^j, y) \log(x_1 2^j)}.$$

Le Lemme 2.2 permet de majorer la dernière somme par la quantité

$$\frac{1}{\Psi(x_1, y)(\log x_1)} \sum_{j \geq 0} \frac{1}{2^{j\alpha(x, y)}}.$$

L'estimation (2.1) nous assure ainsi que l'on a, pour $x \geq 4x_0$ et $(x, y) \in (H_\varepsilon)$,

$$\Delta(x) \leq \Delta^*(x_1) + O\left(\frac{H}{\Psi(x_1, y)(\log x_1)}\right).$$

La majoration $\Psi(z, y; a, q) \ll z/q$, valable pour $z \geq q$, appliquée dans l'intervalle $x_0 \leq z \leq x_1$ nous permet d'obtenir, pour $x \geq 4x_0 \geq 4q$,

$$\Delta(x) \ll \frac{1}{q} \left\{ \max_{x_0 \leq z \leq x_1} \frac{z}{\Psi(z, y)} + \frac{x_0 y \log(x_0 y)}{\Psi(x_1, y)(\log x_1)} \right\}.$$

Choisissons $x_0 = q$ et $x_1 = qy$. Il vient alors pour $x \geq q \max\{4, y\}$,

$$\Delta(x) \ll \frac{1}{q} \max_{q \leq z \leq qy} \frac{z}{\Psi(z, y)} \ll \frac{1}{q \varrho(u_q)},$$

compte tenu de l'estimation classique $\Psi(z, y) \asymp x \varrho(u)$ valide pour $(z, y) \in (H_\varepsilon)$.

Le cas $x \leq q \max\{4, y\}$ se traite par la majoration triviale $\Psi(x, y; a, q) \ll x/q$. $\square$

Lemme 2.7. *Nous avons uniformément pour $\beta > 0$ et $z \geq 1$,*

$$\sum_{n > z} \frac{1}{n^\beta \varphi(n)} \ll \frac{1}{\beta z^\beta}.$$

Démonstration. L'identité $\sum_{d|n} \mu(d)^2 / \varphi(d) = n / \varphi(n)$ ($n \geq 1$) fournit

$$\begin{aligned} \sum_{n > z} \frac{1}{n^\beta \varphi(n)} &= \sum_{n > z} \frac{1}{n^{1+\beta}} \sum_{d|n} \frac{\mu(d)^2}{\varphi(d)} = \sum_{d \geq 1} \frac{\mu(d)^2}{\varphi(d)} \sum_{\substack{n > z \\ n \equiv 0 \pmod{d}}} \frac{1}{n^{1+\beta}} \\ &\ll \frac{1}{\beta z^\beta} \sum_{d \geq 1} \frac{\mu(d)^2}{d \varphi(d)} \ll \frac{1}{\beta z^\beta}. \end{aligned}$$

$\square$

3. Démonstration du Théorème 1.1

De manière à pouvoir évaluer des sommes sur les entiers friables translatés, nous sommes amené à traiter séparément les contributions des entiers friables dans les progressions arithmétiques de petits modules — pour lesquels l'on dispose de résultats de type Bombieri-Vinogradov — et de grands modules.

Nous donnons ainsi les étapes de la démonstration sous forme d'énoncés distincts.

Lemme 3.1. *Soit f une fonction multiplicative telle que $\lambda := f * \mu$ vérifie (1.6). Nous avons, uniformément pour tous x, y satisfaisant (H_ε) et $\beta > 0$,*

$$\sum_{d \leq z} \frac{\lambda(d)}{\varphi(d)} \Psi_d(x, y) = \Psi(x, y) \left\{ C(f) + O\left(\frac{\log(u+1)}{\log y} + \frac{1}{\beta z^\beta}\right) \right\},$$

où la constante implicite dépend au plus de B .

Démonstration. Intervertissant les sommations, nous obtenons, pour $z \geq 2$,

$$\begin{aligned} S &= \sum_{d \leq z} \frac{\lambda(d)}{\varphi(d)} \Psi_d(x, y) = \sum_{n \in S(x, y)} \sum_{\substack{d \leq z \\ (n, d)=1}} \frac{\lambda(d)}{\varphi(d)} \\ &= \sum_{n \in S(x, y)} \left\{ \sum_{\substack{d \geq 1 \\ (n, d)=1}} \frac{\lambda(d)}{\varphi(d)} + O\left(\sum_{d > z} \frac{|\lambda(d)|}{\varphi(d)}\right) \right\}, \end{aligned}$$

où les séries sont convergentes puisque l'on a $|\lambda(d)|/\varphi(d) \ll 1/d^{1+\beta/2}$ ($d \geq 1$) sous la condition (1.6).

Posons $G_p := \sum_{\nu \geq 0} \lambda(p^\nu)/\varphi(p^\nu)$ ($p \geq 2$). La condition (1.6) implique encore

$$(3.1) \quad |G_p - 1| = \left| \sum_{\nu \geq 1} \frac{\lambda(p^\nu)}{\varphi(p^\nu)} \right| \leq \sum_{\nu \geq 1} \frac{B}{p^{\beta\nu} \varphi(p^\nu)} \leq \frac{4B}{p^{1+\beta}} \quad (p \geq 2).$$

Cette relation implique en particulier que $G_p \neq 0$ pour $p \geq 4B$, et ainsi que G_p n'est négatif ou nul que pour au plus un nombre fini de valeurs de p . Il vient ainsi,

$$(3.2) \quad \left| \frac{1}{G_p} - 1 \right| \leq \frac{8B}{p^{1+\beta}} \quad (p \geq 8B).$$

L'estimation (3.1) assure la convergence des produits $C_1 := \prod_{G_p \neq 0} G_p$ et

$$\prod_{p \nmid n} G_p = \sum_{\substack{d \geq 1 \\ (n, d)=1}} \frac{\lambda(d)}{\varphi(d)}.$$

Nous avons ainsi, par le Lemme 2.7,

$$S = \sum_{n \in S(x,y)} \prod_{p \nmid n} G_p + O\left(\frac{\Psi(x,y)}{\beta z^\beta}\right).$$

Les seuls termes non nuls de la dernière somme friable sont ceux pour lesquels l'indice n est divisible par $Q := \prod_{G_p=0} p$, où le produit est fini, comme indiqué précédemment. Ainsi, nous avons

$$S = C_1 \sum_{n \in S(x/Q,y)} h(n) + O\left(\frac{\Psi(x,y)}{\beta z^\beta}\right),$$

où

$$h(n) := \prod_{\substack{p|n \\ G_p \neq 0}} \frac{1}{G_p}.$$

La fonction h vérifie les hypothèses (2.4) et (2.5). Les deux estimations étant semblables, bornons-nous à montrer que h vérifie (2.5). Nous avons, pour $z \geq 2$, grâce à la relation (3.2),

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{p \leq z \\ h(p) < 0}} |h(p)| \log p + \left| \sum_{p \leq z} h(p) \log p - z \right| &\ll 1 + \left| \sum_{p \leq z} \log p - z \right| + \sum_{p \leq z} \frac{1}{p^{1+\beta}} \\ &\ll \frac{z}{L_\varepsilon(z)} + \log_2 z \ll \frac{z}{L_\varepsilon(z)}, \end{aligned}$$

où les constantes implicites ne dépendent que de B .

Nous pouvons donc évaluer la somme friable de la fonction multiplicative h par le Lemme 2.3. Nous avons alors pour x, y vérifiant (H_ε) ,

$$\sum_{n \in S(x/Q,y)} h(n) = \Psi\left(\frac{x}{Q}, y\right) \left\{ C(h) + O\left(\frac{\log(u+1)}{\log y}\right) \right\}.$$

Par ailleurs, le Lemme 2.2 et l'estimation (2.1) nous assurent que si (x, y) est dans le domaine (H_ε) et si Q vérifie $\log(Q+1) \leq (\log y)/\log(u+1)$, nous avons

$$\Psi\left(\frac{x}{Q}, y\right) = \frac{\Psi(x,y)}{Q} \left\{ 1 + O\left(\frac{\log(Q+1) \log(u+1)}{\log y} + \frac{\log Q}{\log x}\right) \right\}$$

et ainsi

$$\sum_{n \in S(x/Q,y)} h(n) = \Psi(x,y) \left\{ \frac{C(h)}{Q} + O\left(\frac{\log(Q+1) \log(u+1)}{Q \log y}\right) \right\}.$$

L'égalité $\varphi(p^\nu) = p^\nu(1 - 1/p)$ ($p \geq 2, \nu \geq 1$) permet d'établir la relation

$$G_p = E_f(p) + \frac{E_f(p) - 1}{p - 1} \quad (p \geq 2),$$

qui nous assure que l'on a $G_p = 0$ si et seulement si $E_f(p) = 1/p$. De plus, la relation (1.6) implique que le produit $C(f)$ est convergent (voir par exemple le § I.3.8 des notes de [10]). Par conséquent,

$$\frac{C_1 C(h)}{Q} = \prod_{E_f(p) \neq 1/p} G_p \left(1 - \frac{1}{p}\right) \left(1 + \frac{G_p^{-1}}{p - 1}\right) \prod_{E_f(p) = 1/p} \frac{1}{p} = \prod_p E_f(p).$$

Nous avons finalement, pour $(x, y) \in (H_\varepsilon)$,

$$S = \Psi(x, y) \left\{ C(f) + O\left(\frac{\log(u + 1)}{\log y} + \frac{1}{\beta z^\beta}\right) \right\}.$$

□

Lemme 3.2. Soit λ une fonction arithmétique vérifiant la condition (1.6). Il existe une constante $c_7 := c_7(\beta, B) > 0$, telle que, pour

$$(3.3) \quad (x, y) \in (H_\varepsilon), \quad c_7(\log x)^{3/\beta} \leq z \leq x,$$

nous avons uniformément

$$\sum_{z < d \leq x} |\lambda(d)| \Psi(x, y; 1, d) \ll \frac{\Psi(x, y)}{\log x}.$$

Démonstration. Posons $Z := \exp\{y^{\beta/8}\}$. En appliquant la majoration (2.18), l'estimation $1/\varrho(u) \ll \exp\{u \log u + O(u \log_2 u)\}$ ($u \geq 3$) et la méthode de Rankin, nous avons pour $(x, y) \in (H_\varepsilon)$,

$$\begin{aligned} \sum_{z < d \leq Z} |\lambda(d)| \Psi(x, y; 1, d) &\leq \Psi(x, y) \sum_{z < d \leq Z} \frac{B}{d^{1+\beta}} d^{2(\log_2 d)/\log y} (\log d)^2 \\ &\ll \frac{\Psi(x, y)}{z^{\beta/3}} \sum_{1 \leq d \leq Z} \frac{1}{d^{1+\beta/3}} \ll \frac{\Psi(x, y)}{\beta z^{\beta/3}}, \end{aligned}$$

compte tenu de l'hypothèse (1.6). La majoration triviale $\Psi(x, y; 1, d) \ll x/d$ fournit par ailleurs

$$\sum_{Z < d \leq x} |\lambda(d)| \Psi(x, y; 1, d) \ll x \sum_{Z < d} \frac{|\lambda(d)|}{d} \ll \frac{x}{\beta Z^{\beta/3}} \ll \frac{\Psi(x, y)}{\log x},$$

où la dernière inégalité est clairement vérifiée dans le domaine (H_ε) . □

Fin de la démonstration du Théorème 1.1. Utilisons la relation de convolution $f = \lambda * \mathbf{1}$. Il vient pour tout $z \geq 2$,

$$\Theta_f(x, y) = \sum_{d \leq x} \lambda(d) \{ \Psi(x, y; 1, d) - 1 \} = S_1 + S_2 + S_3 - S_4,$$

où

$$\begin{aligned} S_1 &:= \sum_{d \leq z} \frac{\lambda(d)}{\varphi(d)} \Psi_d(x, y), \\ S_2 &:= \sum_{d \leq z} \lambda(d) E(x, y; 1, d), \\ S_3 &:= \sum_{z < d \leq x} \lambda(d) \Psi(x, y; 1, d), \\ S_4 &:= \sum_{d \leq x} \lambda(d). \end{aligned}$$

Le Lemme 3.1 fournit, pour le choix de z effectué au Lemme 2.5,

$$S_1 = \Psi(x, y) \left\{ C(f) + O\left(\frac{\log(u+1)}{\log y}\right) \right\} \quad ((x, y) \in (H_\varepsilon)).$$

Le Lemme 2.5 conduit à la majoration

$$|S_2| \ll \sum_{d \leq z} |E(x, y; 1, d)| \ll \frac{\Psi(x, y)}{\log x} \quad ((x, y) \in (H_\varepsilon)).$$

Par ailleurs, nous déduisons du Lemme 3.2 que nous avons une majoration du même ordre de grandeur pour S_3 , dans le domaine (H_ε) . En effet, la condition (3.3) du Lemme 3.2 est, compte tenu du choix du paramètre z , remplie dans ce domaine.

Enfin, l'hypothèse (1.6) nous assure que S_4 est un terme d'erreur : cela est immédiat lorsque $\beta \geq 1$, et pour $0 < \beta < 1$ fixé, on a

$$|S_4| \ll \frac{x^{1-\beta}}{1-\beta} \ll \frac{\Psi(x, y)}{\log y} \quad ((x, y) \in (H_\varepsilon)),$$

au vu des estimations classiques de $\Psi(x, y)$ et $\varrho(u)$, données respectivement par le Corollaire III.5.19 et le Théorème III.5.13 de [10]. $\square$

4. Preuves des corollaires

4.1. Démonstration du Corollaire 1.2

Nous avons pour x, y satisfaisant (H_ε) ,

$$\Theta_F(x, y) = \sum_{\substack{1 < n \leq x \\ n \in S(x, y)}} (n-1)f(n-1) = (x-1)\Theta_f(x, y) - \int_1^x \Theta_f(t, y) dt.$$

Posons $E_{u,y} := \{\log(u+1)\}/\log y$. Le Théorème 1.1 impliquant trivialement

$$\Theta_f(t, y) = \Psi(t, y) \left\{ C(f) + O\left(E_{u,y} + \frac{1}{\log 2t}\right) \right\} \quad (1 \leq t \leq x),$$

il vient, en vertu du Lemme 2.4,

$$(4.1) \quad \begin{aligned} \int_1^x \Theta_f(t, y) dt &= \int_1^x \Psi(t, y) dt \left\{ C(f) + O(E_{u,y}) \right\} + O\left(\int_1^y \frac{t dt}{\log 2t}\right) \\ &= x\Psi(x, y) \left\{ \frac{1}{2}C(f) + O(E_{u,y}) \right\}. \end{aligned}$$

En effet, comme $x \geq y$, le terme $\int_1^y t dt / \log 2t \ll y^2 / \log y \ll x\Psi(x, y) / \log y$ est clairement englobé par le dernier terme d'erreur de (4.1).

Nous pouvons ainsi déduire des estimations précédentes que

$$\begin{aligned} \Theta_F(x, y) &= (x-1)\Psi(x, y) \left\{ C(f) + O(E_{u,y}) \right\} - x\Psi(x, y) \left\{ \frac{1}{2}C(f) + O(E_{u,y}) \right\} \\ &= x\Psi(x, y) \left\{ \frac{1}{2}C(f) + O(E_{u,y}) \right\}. \end{aligned}$$

4.2. Démonstration du Corollaire 1.3

L'identité de convolution $\varphi(n)/n = \sum_{d|n} \mu(d)/d$ ($n \geq 1$), montre que la fonction $d \mapsto \mu(d)/d$ vérifie trivialement la condition (1.6) du Théorème 1.1. De plus, nous avons

$$C(\varphi/j) = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^2}\right) = \frac{6}{\pi^2}.$$

D'après le Corollaire 1.2, cela fournit l'estimation annoncée pour $\Theta_\varphi(x, y)$.

Il en va de même pour $\Theta_\sigma(x, y)$, grâce aux relations $\sigma(n)/n = \sum_{d|n} 1/d$ ($n \geq 1$) et

$$C(\sigma/j) = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^2}\right)^{-1} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Par ailleurs, nous avons $\varphi_1/j = \lambda_1 * \mathbf{1}$, avec

$$\lambda_1(2) = \frac{1}{2}, \quad \lambda_1(p) = -1/p \quad (p \geq 3), \quad \lambda_1(p^\nu) = 0 \quad (p \geq 2, \nu \geq 2).$$

Le Corollaire 1.2 permet donc encore de conclure dans le cas de φ_1 .

Enfin, il est immédiat que l'on a $C(f_1) = 0$ et que f_1 vérifie la condition (1.6) : cela fournit bien l'estimation attendue, grâce au Théorème 1.1.

Bibliographie

- [1] R. de la Bretèche & G. Tenenbaum, Propriétés statistiques des entiers friables, *Ramanujan J.* **9** (2005), 139–202.
- [2] E. Fouvry, Sur le problème des diviseurs de Titchmarsh, *J. reine angew. Math.* **357** (1985), 51–76.
- [3] E. Fouvry & G. Tenenbaum, Diviseurs de Titchmarsh des entiers sans grand facteur premier, *Proc. Jap.-Fr. Symp., Tokyo/Jap.* 1988, Lect. Notes Math. 1434, (1990), 86–102.
- [4] A. Granville, Integers, without large prime factors, in arithmetic progressions, I, *Acta Math.* **170** (1993), 255–273.
- [5] A. Hildebrand, On the number of positive integers $\leq x$ and free of large prime factors $> y$, *J. Number Theory* **22** (1986), 289–307.
- [6] A. Hildebrand & G. Tenenbaum, On a class of differential-difference equations arising in number theory, *J. Analyse* **61** (1993), 145–179.
- [7] S. Loiperdinger & I. Shparlinski, On the distribution of the Euler function of shifted smooth numbers, *Colloq. Math.*, à paraître.
- [8] H. Smida, Sur les puissances de convolution de la fonction de Dickman, *Acta Arith.* **59** (1991), 123–143.
- [9] H. Smida, Valeur moyenne des fonctions de Piltz sur les entiers sans grand facteur premier, *Acta Arith.* **63** (1993), 21–50.
- [10] G. Tenenbaum, *Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres*, troisième édition, Belin, 2008.
- [11] G. Tenenbaum & J. Wu, Moyennes de certaines fonctions multiplicatives sur les entiers friables, *J. Reine Angew. Math.* **564** (2003), 119–166.

Joseph Basquin
 Institut Élie Cartan
 Université Henri Poincaré–Nancy 1
 BP 239
 54506 Vandœuvre Cedex
 France
 internet : joseph.basquin@iecn.u-nancy.fr

Loi de répartition moyenne des diviseurs des entiers friables

Abstract. In this paper we consider an extension to friable integers of the arcsine law for the mean distribution of the divisors of integers, originally due to Deshouillers, Dress and Tenenbaum.

We describe the limit law and show that it departs from the arcsine law when the friability parameter $u := \log x / \log y$ increases. More precisely, as $u \rightarrow \infty$, the mean distribution shifts from the arcsine law towards Gaussian behaviour.

Sommaire

1	Introduction	1
1.1	Contexte	1
1.2	Entiers friables	2
1.3	Énoncés des résultats	3
2	Résultats auxiliaires	4
2.1	Évaluation asymptotique concernant la fonction de Dickman $\varrho_{1/2}$	4
2.2	Dérivée logarithmique de $\varrho_{1/2}$	7
3	Moyennes friables de fonctions arithmétiques	10
4	Démonstration du Théorème 1.1	20
5	Étude asymptotique de la loi limite	22
5.1	Démonstration du Théorème 1.2	22
5.2	Démonstration du Corollaire 1.3	23

1. Introduction

1.1. Contexte

L'étude de la répartition des diviseurs d'un entier n a été abordée sous de nombreux aspects : la question des ordres moyens et extrémaux de la fonction nombre de diviseurs $\tau(n)$ fait, depuis bien longtemps, partie des problèmes classiques de la discipline.

La répartition des diviseurs d'un entier n a, quant à elle, été étudiée plus récemment. Désignons par

$$F_n(v) := \frac{1}{\tau(n)} \sum_{d|n, d \leq n^v} 1$$

la proportion des diviseurs de n qui sont inférieurs à n^v .

Dress, Deshouillers et Tenenbaum [2] obtiennent le résultat suivant, communément désigné sous le nom de *loi de l'arcsinus*.

2010 *Mathematics Subject Classification*. Primary : 11N25, 11N37. *Key words and phrases* : arcsine law, divisors, friable integers, multiplicative functions.

Théorème ([2]). *Nous avons uniformément pour $x \geq 2$, $0 \leq v \leq 1$,*

$$(1.1) \quad \frac{1}{x} \sum_{n \leq x} F_n(v) = \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{v} + O\left(\frac{1}{\sqrt{\log x}}\right).$$

Ce résultat met en lumière notamment le fait qu'un entier a , en moyenne, beaucoup de petits et de grands diviseurs. En effet, les grandes et les petites valeurs sont très probables : si U est une variable aléatoire répartie selon la loi de l'arcsinus, on a $\mathbb{P}(U < 0,1 \text{ ou } U > 0,9) \approx 0,41$.

1.2. Entiers friables

Désignons par $P(n)$ le plus grand facteur premier d'un entier naturel positif n , avec la convention $P(1) = 1$, et notons $S(x, y) := \{n \leq x : P(n) \leq y\}$ l'ensemble des entiers y -friables n'excédant pas x . Pour $x, y \geq 2$, nous posons, conformément à l'usage, $\Psi(x, y) := |S(x, y)|$ et $u := (\log x)/\log y$.

L'étude des entiers friables a fait l'objet, depuis plusieurs décennies, d'une littérature importante, tant de par ses interactions avec des domaines connexes comme l'algorithmique ou la cryptographie, que par ses implications mêmes en théorie des nombres.

Avant de préciser le sujet de notre présente étude, rappelons quelques notations. Étant donné $\kappa > 0$, nous considérons la fonction ϱ_κ , puissance fractionnaire de convolution d'ordre κ de la fonction de Dickmann $\varrho = \varrho_1$: ϱ_κ est définie comme l'unique fonction continue sur $]0, \infty[$ et dérivable sur $[1, \infty[$ satisfaisant à

$$(1.2) \quad \begin{cases} u\varrho'_\kappa(u) + (1 - \kappa)\varrho_\kappa(u) + \kappa\varrho_\kappa(u - 1) = 0 & (u > 1), \\ \varrho_\kappa(u) = u^{\kappa-1}/\Gamma(\kappa) & (0 < u \leq 1), \\ \varrho_\kappa(u) = 0 & (u \leq 0). \end{cases}$$

La fonction ϱ_κ apparaît naturellement dans l'évaluation de sommes du type

$$\sum_{n \in S(x, y)} \tau_\kappa(n),$$

où, pour un nombre complexe z , τ_z désigne la fonction arithmétique définie par l'identité $\zeta(s)^z := \sum_{n \geq 1} \tau_z(n) n^{-s}$ ($\Re s > 1$) et $\zeta(s)$ la fonction de Riemann.

On a en effet (voir [7]),

$$\sum_{n \in S(x, y)} \tau_\kappa(n) \sim x\varrho_\kappa(u)(\log y)^{\kappa-1},$$

uniformément pour x, y vérifiant

$$(H_\varepsilon) \quad x \geq 3, \quad \exp\{(\log_2 x)^{5/3+\varepsilon}\} \leq y \leq x.$$

Les entiers friables étant définis par une contrainte sur les facteurs premiers, il est naturel de s'interroger sur la répartition de leurs diviseurs.

Ainsi, la question de la répartition des facteurs premiers des entiers friables a été étudiée en détail dans le travail de La Bretèche et Tenenbaum [1]. Y est établi notamment le résultat suivant concernant la fonction $\omega_t(n) := \sum_{\substack{p|n \\ p \leq t}} 1$.

Théorème ([1]). Soient $b > 1$ et T_x une fonction positive tendant vers l'infini avec x . Pour tous les entiers n de $S(x, y)$ sauf au plus $o(\Psi(x, y))$ ($x \rightarrow \infty$) d'entre eux et pour $T_x \leq t \leq y \leq x$, on a

$$|\omega_t(n) - W(t)| \leq W(t)^{2/3} \{\log W(t)\}^{b/3},$$

où $W(t) := \sum_{n \leq t} p^{-\alpha}$ et où $\alpha(x, y)$ est défini comme l'unique solution positive de l'équation $\sum_{p \leq y} (\log p)/(p^\alpha - 1) = \log x$.

Les facteurs premiers des entiers friables suivent donc (sauf pour un nombre négligeable d'entre eux) une répartition régulière, représentée par la fonction $W(t)$. On se référera à [1] pour d'autres résultats concernant les facteurs premiers des entiers friables.

1.3. Énoncés des résultats

Nous nous proposons ici de mener une étude de la répartition en moyenne des diviseurs d'un entier y -friable n dans l'intervalle $[1, n]$. Posons

$$(1.3) \quad J_u(v) := \frac{1}{\varrho(u)} \int_0^{uv} \varrho_{1/2}(t) \varrho_{1/2}(u-t) dt \quad (u \geq 1, 0 \leq v \leq 1).$$

Nous obtenons le résultat suivant.

Théorème 1.1. Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $0 \leq v \leq 1$ et $(x, y) \in (H_\varepsilon)$, nous avons

$$(1.4) \quad \frac{1}{\Psi(x, y)} \sum_{n \in S(x, y)} F_n(v) = J_u(v) + O\left(\frac{1}{\sqrt{\log y}} + \frac{\log(u+1)}{\log y}\right).$$

Remarque. Nous retrouvons en particulier, pour $y = x$ et $0 \leq v \leq 1$,

$$J_1(v) = \frac{1}{\pi} \int_0^v \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)}} = \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{v},$$

de sorte que l'estimation (1.4) pour $y = x$ est équivalente à (1.1).

Pour $t > 0$, $t \neq 1$, désignons par $\xi = \xi(t)$ l'unique racine réelle non nulle de l'équation

$$(1.5) \quad e^\xi = 1 + t\xi,$$

avec la convention $\xi(1) = 0$.

L'étude de la dérivée logarithmique de $\varrho_{1/2}$ (voir le Lemme 2.3, *infra*) nous permet de caractériser la loi limite — en particulier d'illustrer ses variations, ainsi que son caractère gaussien lorsque le paramètre u tend vers l'infini. Nous montrons le résultat suivant⁽¹⁾.

Théorème 1.2. *Nous avons, pour $u \geq 3$ et $|h| \leq \min\{u/2 - 1, u^{3/4}\}$,*

$$(1.6) \quad \frac{\varrho_{1/2}(u/2 + h) \varrho_{1/2}(u/2 - h)}{\varrho(u)} = \sqrt{\frac{2\xi'(u)}{\pi}} e^{-2h^2\xi'(u)} \left(1 + O\left(\frac{1}{u} + \frac{h^4}{u^3}\right)\right).$$

On observe ainsi, lorsque le paramètre u croît, un glissement de la répartition des diviseurs en moyenne d'une loi de type arcsinus vers une loi de type gaussien.

Posons, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\Phi(x) := \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2} dt.$$

Le résultat suivant exprime sous forme quantitative la convergence de J_u vers une fonction de répartition gaussienne.

Corollaire 1.3. *Pour $u \geq 3$ et $0 \leq v \leq 1$, nous avons*

$$(1.7) \quad J_u(v) = \Phi\left(u\sqrt{2\xi'(u)}\left(v - \frac{1}{2}\right)\right) + O\left(\frac{1}{u}\right).$$

2. Résultats auxiliaires

2.1. Évaluation asymptotique concernant la fonction de Dickman $\varrho_{1/2}$

Citons un cas particulier du théorème 1 de [6] (appliqué dans le cas $\kappa = 1/2$, $K = 1$) permettant l'évaluation asymptotique⁽²⁾ de $\varrho_{1/2}$.

Lemme 2.1. *Nous avons uniformément, pour $u \geq 1$,*

$$(2.1) \quad \varrho_{1/2}(u) = \sqrt{\frac{e^{\gamma\xi'(2u)}}{\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2} \int_1^{2u} \xi(t) dt\right\} \left\{1 + \delta(u) + O\left(\frac{1}{u^2}\right)\right\},$$

où γ désigne la constante d'Euler et δ est une fonction dérivable vérifiant

$$(2.2) \quad \delta(u) \ll 1/u, \quad \delta'(u) \ll 1/u^2 \quad (u \geq 1).$$

1. Dans un but purement heuristique, on rappelle ici que $\xi'(u) \sim 1/u$ ($u \geq 3$).

2. Voir plus généralement [3] pour une étude des solutions de certaines équations différentielles aux différences telles que les fonctions ϱ_κ .

La formulation (2.1) découle simplement des relations (3.5) et (3.6) de [6]. En effet, posant

$$I(s) := \int_0^s \frac{e^v - 1}{v} dv \quad (s \in \mathbb{C}), \quad \sigma_j := \sigma_j(v) = \frac{1}{2} I^{(j)}(\xi(2v)) \quad (j \geq 0, v \geq 1),$$

on note que, par changement de variable $t = \xi(v)$ dans l'expression de $\sigma_0(v)$, l'on obtient, pour $v \geq 1/2$,

$$\sigma_0(v) = \frac{1}{2} \int_1^{2v} t \xi'(t) dt,$$

d'où l'expression intégrale

$$\sigma_0(v) - v \xi(2v) = -\frac{1}{2} \int_1^{2v} \xi(t) dt.$$

D'autre part, par définition de $\sigma_j(v)$ et de $I(s)$, nous avons

$$\sigma_1(v) = \frac{1}{2} I'(\xi(2v)) = \frac{1}{2} \frac{e^{\xi(2v)} - 1}{\xi(2v)} = v,$$

d'où il vient, pour $v \geq 1$,

$$\sigma_2(v) = \frac{1}{2} (I')'(\xi(2v)) = \frac{(I'(\xi(2v)))'}{\xi(2v)'} = \frac{1}{2\xi'(2v)}.$$

Enfin, la relation (3.6) de [6] montre que la fonction $\delta(u)$ de (2.1) a pour expression $\delta(u) = \sigma_4/(8\sigma_2) - 5\sigma_3^2/(8\sigma_2^2)$.

Il sera par la suite nécessaire de pouvoir comparer les quantités $\varrho_{1/2}(u)$ et $\varrho(u)$. Rappelons à cette fin la relation (3.10) de [6] — qui découle également du lemme précédent. Pour $k = 1/2$, nous avons

$$(2.3) \quad \varrho_{1/2}(u) = 2^{-u+O(u/\log(u+1))} \varrho(u) \quad (u \geq 1).$$

Par ailleurs, on peut aussi écrire, grâce à l'estimation (3.5) de [6] appliquée pour $k = 1/2$ et $k = 1$,

$$(2.4) \quad \varrho_{1/2}(u/2)^2 = \sqrt{\frac{2\xi'(u)}{\pi}} \varrho(u) \left(1 + O\left(\frac{1}{u}\right)\right) \quad (u \geq 1).$$

Citons également, à fin de référence ultérieure, la majoration (3.27) de [9].

$$(2.5) \quad \varrho_{1/2}(u-v) \ll \varrho_{1/2}(u) e^{v\xi(2u)} \quad (u \geq 1, 0 \leq v \leq u-1/2).$$

L'estimation suivante fournit une majoration utile de la dérivée de la fonction $\varrho_{1/2}$, en tenant compte de sa discontinuité pour $t = 1$.

Lemme 2.2. *Nous avons*⁽³⁾

$$(2.6) \quad \varrho'_{1/2}(t) \ll \varrho_{1/2}(t) \left(\log(t+2) + \sqrt{\left(\frac{1}{t-1}\right)^+} + \frac{1}{t} \right) \quad (t > 0, t \neq 1).$$

Remarque. En particulier, on a

$$(2.7) \quad \varrho'_{1/2}(t) \ll \sqrt{\left(\frac{1}{t-1}\right)^+} \quad (1/2 \leq t \leq 3, t \neq 1).$$

Démonstration. La relation (1.2) donne, pour $t > 1$,

$$\varrho'_{1/2}(t) = \frac{-1}{2t} \left\{ \varrho_{1/2}(t) + \varrho_{1/2}(t-1) \right\}.$$

En faisant usage de l'inégalité (2.5) sous la forme

$$\varrho_{1/2}(t-1) \ll (t \log t) \varrho_{1/2}(t) \quad (t \geq 3/2)$$

et de la positivité de la fonction $\varrho_{1/2}$, on obtient, pour $t \geq 3/2$,

$$(2.8) \quad \varrho'_{1/2}(t) \ll (\log t) \varrho_{1/2}(t).$$

Pour $0 < t \leq 1$, la relation (2.6) est bien vérifiée car on a $\varrho_{1/2}(t) = 1/\sqrt{\pi t}$. Pour $1 < t \leq 2$, nous avons

$$\varrho_{1/2}(t) = \frac{2 - \log(-1 + 2t + 2\sqrt{t(t-1)})}{2\sqrt{\pi t}}.$$

Un simple calcul de dérivée montre que l'on a, pour $1 < t \leq 3/2$,

$$\varrho'_{1/2}(t) \ll \frac{1}{\sqrt{t-1}}.$$

□

3. On pose, pour tout a réel, $a^+ := \max\{a, 0\}$.

2.2. Dérivée logarithmique de $\varrho_{1/2}$

Posons

$$r_{1/2}(t) := -\frac{\varrho'_{1/2}(t)}{\varrho_{1/2}(t)} \quad (t > 1).$$

Montrons une propriété concernant la dérivée logarithmique de $\varrho_{1/2}$.

Lemme 2.3. *Il existe une constante $t_0 > 0$, telle que la fonction $r_{1/2}$ soit croissante sur $[t_0, \infty[$. On a de plus, uniformément pour $t > 1$,*

$$r_{1/2}(t) = \xi(2t) + O\left(\frac{\log(t+1)}{t}\right), \quad (2.9)$$

$$r'_{1/2}(t) = 2\xi'(2t) + O\left(\frac{(\log(t+1))^2}{t^2}\right). \quad (2.10)$$

Démonstration. Nous écrivons, pour alléger les notations, et dans ce paragraphe uniquement,

$$\begin{aligned} \varrho &:= \varrho_{1/2}(t), & \varrho_{-1} &:= \varrho_{1/2}(t-1) & \xi &:= \xi(2t), & \xi_{-1} &:= \xi(2(t-1)), \\ \varrho' &:= \varrho'_{1/2}(t), & \varrho'_{-1} &:= \varrho'_{1/2}(t-1), & \xi' &:= \xi'(2t), & \xi'_{-1} &:= \xi'(2(t-1)), \end{aligned}$$

et de même pour les dérivées d'ordre supérieures. En tenant compte du fait que

$$\xi^{(j)}(v) := (-1)^{j-1} \frac{(j-1)!}{v^j} \left(1 + O_j\left(\frac{1}{\log(v+1)}\right)\right) \quad (v \geq 1, j \geq 1),$$

nous avons, par utilisation de formules de Taylor,

$$\begin{aligned} \frac{\xi'_{-1}}{\xi'} &= 1 - \frac{2\xi''}{\xi'} + O\left(\frac{1}{t^2}\right), \\ \int_{2(t-1)}^{2t} \xi(v) dv &= \int_0^2 \left(\xi - v\xi' + O\left(\frac{v^2}{t^2}\right)\right) dv \\ &= 2\xi - 2\xi' + O\left(\frac{1}{t^2}\right), \end{aligned}$$

et, avec la fonction δ définie en (2.2),

$$\frac{1 + \delta(t-1) + O(1/t^2)}{1 + \delta(t) + O(1/t^2)} = 1 + O\left(\frac{1}{t^2}\right).$$

Il en découle directement, grâce à (2.1),

$$\begin{aligned} \frac{\varrho_{-1}}{\varrho} &= \left(1 - \frac{\xi''}{\xi'} + O\left(\frac{1}{t^2}\right)\right) e^\xi \exp\left\{-\xi' + O\left(\frac{1}{t^2}\right)\right\} \left(1 + O\left(\frac{1}{t^2}\right)\right) \\ &= (1 + 2t\xi) \left(1 - \xi' - \frac{\xi''}{\xi'} + O\left(\frac{1}{t^2}\right)\right) \\ &= 2t\xi \left(1 - \xi' - \frac{\xi''}{\xi'} + \frac{1}{2t\xi} + O\left(\frac{1}{t^2}\right)\right), \end{aligned}$$

d'où

$$(2.11) \quad s(t) := \frac{\varrho-1}{2t\varrho} = \xi - \xi\xi' - \frac{\xi\xi''}{\xi'} + \frac{1}{2t} + O\left(\frac{\xi}{t^2}\right).$$

Nous avons donc, pour $t > 1$,

$$(2.12) \quad r_{1/2}(t) = \frac{\varrho + \varrho-1}{2t\varrho} = \frac{1}{2t} + s(t) = \xi(1 + O(1/t)),$$

ce qui prouve l'assertion (2.9).

Montrons à présent (2.10). Les estimations

$$\begin{aligned} \xi_{-1} &= \xi - 2\xi' + O(1/t^2), \\ \xi'_{-1} &= \xi' + O(1/t^2) = \xi'(1 + O(1/t)), \\ \xi''_{-1} &= \xi'' + O(1/t^3) = \xi''(1 + O(1/t)) \end{aligned}$$

nous permettent d'écrire

$$\begin{aligned} s(t-1) &= \xi_{-1} \left(1 - \xi'_{-1} - \frac{\xi''_{-1}}{\xi'_{-1}} \right) + \frac{1}{2(t-1)} + O\left(\frac{\xi}{t^2}\right) \\ &= \left(\xi - 2\xi' + O\left(\frac{1}{t^2}\right) \right) \left(1 - \xi' + O\left(\frac{1}{t^2}\right) - \frac{\xi''}{\xi'} \left(1 + O\left(\frac{1}{t}\right) \right) \right) \\ &\quad + \frac{1}{2(t-1)} + O\left(\frac{\xi}{t^2}\right) \\ &= \left(\xi - 2\xi' + O\left(\frac{1}{t^2}\right) \right) \left(1 - \xi' - \frac{\xi''}{\xi'} + O\left(\frac{1}{t^2}\right) \right) + \frac{1}{2(t-1)} + O\left(\frac{\xi}{t^2}\right) \\ &= \xi - \xi\xi' - \frac{\xi\xi''}{\xi'} - 2\xi' + \frac{1}{2(t-1)} + O\left(\frac{\xi}{t^2}\right). \end{aligned}$$

Dérivons à présent la fonction $r_{1/2}$. On a

$$\begin{aligned} (2.13) \quad r'_{1/2}(t) &= -\frac{1}{t^2} + s(t) \left(s(t) - s(t-1) - \frac{1}{2(t-1)} - \frac{1}{2t} \right) \\ &= s(t) \left(2\xi' - \frac{1}{t} + O\left(\frac{\xi}{t^2}\right) \right) + O\left(\frac{1}{t^2}\right). \end{aligned}$$

On tire de (1.5) la relation $\xi'(v) = 1/(v - (v-1)/\xi(v))$ ($v > 1$), ce qui implique

$$2\xi' - \frac{1}{t} - \frac{2\xi'}{\xi} = \frac{-1}{t(2\xi t - 2t + 1)} \ll \frac{1}{\xi t^2}.$$

En injectant cette dernière estimation ainsi que (2.11) dans (2.13), il vient

$$\begin{aligned} r'_{1/2}(t) &= \left(\xi + O\left(\frac{\xi}{t}\right) \right) \left(\frac{2\xi'}{\xi} + O\left(\frac{\xi}{t^2}\right) \right) + O\left(\frac{1}{t^2}\right) \\ &= 2\xi' + O\left(\frac{\xi^2}{t^2}\right) > 0 \end{aligned}$$

pour t assez grand, ce qui achève la démonstration. $\square$

Posons, pour $u \geq 1$ et $0 < t < u$,

$$f_u(t) := \varrho_{1/2}(t) \varrho_{1/2}(u - t).$$

Nous pouvons à présent préciser les variations de f_u sur l'intervalle $]0, u[$.

Lemme 2.4. *Soit $u \geq 2t_0$, où t_0 est la constante définie au Lemme 2.3. La fonction f_u est croissante sur $[t_0, u/2]$ et décroissante sur $[u/2, u - t_0]$.*

Démonstration. Soit $g_u(t) := \log f_u(t)$. Nous avons

$$g'_u(t) = \frac{\varrho'_{1/2}(t)}{\varrho_{1/2}(t)} - \frac{\varrho'_{1/2}(u - t)}{\varrho_{1/2}(u - t)} = r_{1/2}(u - t) - r_{1/2}(t).$$

Le Lemme 2.3 implique directement la décroissance de $g'_u(t)$ sur $[t_0, u - t_0]$. Comme par ailleurs $g'_u(u/2) = 0$, on en déduit que g'_u est positive (donc f_u est croissante) sur $[t_0, u/2]$ et g'_u négative (f_u est donc décroissante) sur $[u/2, u - t_0]$. $\square$

Lemme 2.5. *Nous avons, pour $u \geq 1$ et $0 < t \leq u/2$,*

$$\varrho_{1/2}(t) \varrho_{1/2}(u - t) \ll \left(1 + \frac{1}{\sqrt{t}}\right) \varrho(u)$$

et, pour $0 < u \leq 1$ et $0 < t \leq u/2$,

$$\varrho_{1/2}(t) \varrho_{1/2}(u - t) \ll \frac{1}{t}.$$

Démonstration. Notons que sous les hypothèses effectuées, nous avons toujours $u - t \geq t$. Pour montrer la première assertion, plaçons nous tout d'abord dans le cas où $t \geq t_0$, avec t_0 la constante absolue définie au Lemme 2.3. Puisque f_u est croissante sur $[t_0, u/2]$, nous avons

$$f_u(t) \leq f_u(u/2) = \varrho_{1/2}(u/2)^2 \ll \varrho(u),$$

d'après (2.4). Supposons maintenant $0 < t \leq t_0$. Nous avons, en appliquant (2.5) — car $u \geq 1$ et $t \leq u - 1/2$ — ainsi que l'estimation (2.3),

$$f_u(t) \ll \varrho_{1/2}(u) e^{t\xi(2u)} \varrho_{1/2}(t) \ll \varrho_{1/2}(u) u^{O(1)} \varrho_{1/2}(t) \ll \varrho(u) \left(1 + \frac{1}{\sqrt{t}}\right).$$

La seconde assertion, quant à elle, découle aisément du fait que, pour $0 < t \leq 1$,

$$(2.14) \quad \varrho_{1/2}(t) = \frac{1}{\Gamma(1/2)\sqrt{t}} = \frac{1}{\sqrt{\pi t}}.$$

$\square$

3. Moyennes friables de fonctions arithmétiques

Énonçons tout d'abord un résultat valable pour toute fonction multiplicative positive ou nulle f satisfaisant à

$$(3.1) \quad f(p) = \frac{1}{2} + O(1/\sqrt{p}) \quad (p \geq 2)$$

et

$$(3.2) \quad \sum_p \sum_{\nu \geq 2} \frac{f(p^\nu)}{p^{(3/4)\nu}} \ll 1.$$

Posons à cette fin

$$C(f) := \prod_p \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{1/2} \sum_{\nu \geq 0} f(p^\nu)/p^\nu.$$

Lemme 3.1. *Soit $\varepsilon > 0$ et f une fonction multiplicative positive ou nulle satisfaisant à (3.1) et (3.2). Nous avons, uniformément pour $(x, y) \in (H_\varepsilon)$,*

$$(3.3) \quad \Psi_f(x, y) = \frac{C(f) x \varrho_{1/2}(u)}{\sqrt{\log y}} \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{\log y}} + \frac{\log(u+1)}{\log y}\right) \right\}.$$

Lorsque $2 \leq x \leq y$, nous avons

$$(3.4) \quad \Psi_f(x, y) = \frac{C(f) x \varrho_{1/2}(u)}{\sqrt{\log y}} \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{\log x}\right) \right\}.$$

Démonstration. L'assertion (3.3) résulte directement du Corollaire 2.3 de [9], appliqué avec $\kappa = \frac{1}{2}$. En effet, l'hypothèse (3.1) assure que l'on a, pour $z \geq 2$,

$$\left| \sum_{p \leq z} f(p) \log p - \frac{1}{2} z \right| \leq \frac{1}{2} \left| \sum_{p \leq z} \log p - z \right| + O\left(\sum_{p \leq z} \frac{\log p}{p^{1/2}} \right) \ll z \exp\{-(\log z)^{3/5-\varepsilon}\},$$

et les conditions sont ainsi pleinement remplies pour appliquer le résultat précité.

L'estimation (3.4), quant à elle, découle du fait que $S(x, y) = \{n \leq x\} = S(x, x)$ lorsque $2 \leq x \leq y$, et de l'application de la méthode de Selberg-Delange (voir [8], §II.5.2). On observe pour cela que l'on a, sous réserve de convergence,

$$\sum_{n \geq 1} \frac{f(n)}{n^s} = \zeta(s)^{1/2} \sum_{n \geq 1} \frac{\beta(n)}{n^s},$$

où β est la fonction multiplicative déterminée par

$$\sum_{k \geq 1} \beta(p^k) x^k = (1-x)^{1/2} \sum_{k \geq 1} f(p^k) x^k \quad (-1 < x < 1).$$

Les conditions (3.1) et (3.2) — impliquant notamment que $\beta(p) = f(p) - \frac{1}{2} \ll 1/\sqrt{p}$ — nous assurent de l'absolue convergence de $\sum \beta(n)/n^s$ pour $\sigma > 3/4$, ce qui est suffisant pour appliquer le Théorème II.5.2 de [8]. On a alors, pour $2 \leq x \leq y$,

$$\Psi_f(x, y) = \Psi_f(x, x) = \frac{C(f)x}{\sqrt{\pi \log x}} \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{\log x}\right) \right\} = \frac{C(f)x \varrho_{1/2}(u)}{\sqrt{\log y}} \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{\log x}\right) \right\},$$

en utilisant (2.14). $\square$

Soit à présent, pour $d \geq 1$,

$$\varphi_d(n) := \frac{\tau(d)}{\tau(nd)} \quad (n \geq 1).$$

La fonction φ_d est multiplicative et on a l'identité

$$(3.5) \quad \varphi_d(n) = \prod_p \frac{v_p(d) + 1}{v_p(n) + v_p(d) + 1} \quad (d \geq 1, n \geq 1).$$

Nous souhaitons approcher la fonction φ_d par la fonction $\varphi_1 = 1/\tau$. Dans ce but, nous désignons par h_d la fonction multiplicative définie par la relation de convolution⁽⁴⁾

$$(3.6) \quad \varphi_d = h_d * \varphi_1$$

et posons

$$H_d(t, y) := \sum_{\substack{m \leq t \\ P(m) \leq y}} \frac{h_d(m)}{m}, \quad \tilde{H}_d(y) := \sum_{\substack{m \geq 1 \\ P(m) \leq y}} \frac{h_d(m)}{m}.$$

Soit encore g la fonction multiplicative définie par

$$(3.7) \quad g(p^\nu) := \left(\sum_{j \geq 0} \frac{p^{-j}}{j + \nu + 1} \right) \left(\sum_{j \geq 0} \frac{p^{-j}}{j + 1} \right)^{-1}.$$

4. Un autre choix envisageable aurait été d'approcher φ_d par la fonction $\tau_{1/2}$, en posant $\varphi_d = h_d * \tau_{1/2}$, ce qui aurait fourni l'expression de h_d suivante : $h_d = \varphi_d * \tau_{-1/2}$.

Lemme 3.2. *Nous avons, pour tout $d \geq 1$,*

$$\sum_{m \geq 1} \frac{h_d(m)}{m} = \tau(d)g(d).$$

Il existe une constante absolue $C_1 > 0$ telle que, posant

$$(3.8) \quad M(d) := \prod_{p|d} \left(1 + \frac{C_1}{\sqrt{p}}\right) \quad (d \geq 1),$$

on ait les estimations pour $t, y \geq 1$

$$(3.9) \quad \sum_{m > t} \frac{|h_d(m)|}{m} \ll \frac{M(d)}{\sqrt{t}},$$

$$(3.10) \quad H_d(t, y) = \tilde{H}_d(y) + O\left(\frac{M(d)}{\sqrt{t}}\right),$$

$$(3.11) \quad \tilde{H}_d(y) = \tau(d)g(d) + O\left(\frac{M(d)}{\sqrt{y}}\right).$$

Démonstration. On déduit de l'identité (3.6) que nous avons $h_d(p^\nu) = 0$ si $p \nmid d$, ainsi que la relation

$$(3.12) \quad h_d(p^\nu) = \sum_{j+k=\nu} \alpha(p^j) \varphi_d(p^k) \quad (p \geq 2, \nu \geq 1),$$

où α est l'inverse de convolution de la fonction $\varphi_1 = 1/\tau$. La fonction α vérifie

$$\left(\sum_{k \geq 0} \alpha(p^k) x^k\right) \left(\sum_{k \geq 0} (1/\tau(p^k)) x^k\right) = 1 \quad (0 < x < 1),$$

ce qui implique que la série génératrice s'écrit, pour $0 < x < 1$,

$$(3.13) \quad \sum_{k \geq 0} \alpha(p^k) x^k = \frac{-x}{\log(1-x)}.$$

La suite $\{\alpha(p^k)\}_{k \geq 0}$, appelée suite des coefficients de Gregory, a fait l'objet de nombreuses études (voir [4]). Steffensen ([5]) montre⁽⁵⁾ notamment que $\alpha(p^k) \ll 1/\{k(\log k)^2\}$ ($k \geq 1$), d'où l'on tire

$$|h_d(p^\nu)| \ll 1 \quad (p \geq 2).$$

5. Par souci de complétion, notons que (3.13) implique directement

$$\sum_{k \geq 0} \alpha(p^k) x^k = \int_0^1 (1-x)^t dt = \int_0^1 \sum_{k \geq 0} \binom{t}{k} (-x)^k dt = \sum_{k \geq 0} \left((-1)^k \int_0^1 \binom{t}{k} dt \right) x^k$$

et

$$|\alpha(p^k)| \leq \int_0^1 \left| \binom{t}{k} \right| dt \leq \max_{t \in [0,1]} \frac{t(1-t) \cdots (k-1-t)}{k!} \leq \frac{1}{k} \quad (k \geq 1),$$

d'où l'on déduit, à l'aide de (3.12), l'estimation suffisante $|h_d(p^\nu)| \leq 2 + \log(\nu + 1)$, pour $p \geq 2$.

Cela nous permet d'établir la convergence de

$$\sum_{m \geq 1} \frac{|h_d(m)|}{\sqrt{m}} = \prod_p \sum_{\nu \geq 0} \frac{|h_d(p^\nu)|}{p^{\nu/2}} \leq \prod_{p|d} \left(1 + \frac{C_1}{\sqrt{p}}\right) =: M(d),$$

où C_1 est une constante absolue.

Montrons à présent la première assertion du lemme. De l'identité de convolution (3.6), on peut déduire le calcul de la somme

$$\sum_{m \geq 1} \frac{h_d(m)}{m} = \sum_{m \geq 1} \frac{\tau(d)}{\tau(md)m} \left(\sum_{m \geq 1} \frac{1}{\tau(m)m} \right)^{-1}.$$

Comme d'une part, nous avons

$$\sum_{m \geq 1} \frac{1}{\tau(m)m} = \prod_p \sum_{\nu \geq 0} \frac{1}{\tau(p^\nu)p^\nu} = \prod_p \sum_{\nu \geq 0} \frac{1}{(\nu+1)p^\nu}$$

et que, d'autre part, grâce à (3.5), nous avons

$$\sum_{m \geq 1} \frac{\tau(d)}{\tau(md)m} = \prod_p \sum_{\nu \geq 0} \frac{\tau(d)}{\tau(dp^\nu)p^\nu} = \prod_p \sum_{\nu \geq 0} \frac{v_p(d) + 1}{(v_p(d) + \nu + 1)p^\nu},$$

il vient finalement

$$\begin{aligned} \sum_{m \geq 1} \frac{h_d(m)}{m} &= \prod_{p|d} \left(\sum_{\nu \geq 0} \frac{v_p(d) + 1}{(v_p(d) + \nu + 1)p^\nu} \right) \left(\sum_{\nu \geq 0} \frac{1}{(\nu+1)p^\nu} \right)^{-1} \\ &= \tau(d) \prod_{p|d} \left(\sum_{\nu \geq 0} \frac{1}{(v_p(d) + \nu + 1)p^\nu} \right) \left(\sum_{\nu \geq 0} \frac{1}{(\nu+1)p^\nu} \right)^{-1} \\ &= \tau(d)g(d). \end{aligned}$$

Par ailleurs, nous avons, pour tout $t \geq 1$,

$$\sum_{m > t} \frac{h_d(m)}{m} \ll \frac{1}{\sqrt{t}} \sum_{m \geq 1} \frac{|h_d(m)|}{\sqrt{m}} \ll \frac{M(d)}{\sqrt{t}}.$$

On peut ensuite écrire, pour tout $t \geq 1$,

$$|\tilde{H}_d(y) - H_d(t, y)| = \left| \sum_{\substack{m > t \\ P(m) \leq y}} \frac{h_d(m)}{m} \right| \leq \sum_{m > t} \frac{|h_d(m)|}{m} \ll \frac{M(d)}{\sqrt{t}},$$

et pour $y \geq 1$,

$$|\tau(d)g(d) - \tilde{H}_d(y)| = \left| \sum_{\substack{m \geq 1 \\ P(m) > y}} \frac{h_d(m)}{m} \right| \leq \sum_{m > y} \frac{|h_d(m)|}{m} \ll \frac{M(d)}{\sqrt{y}}.$$

□

Nous donnons à présent une extension du Théorème II.6.8 de [8].

Posons $h := \prod_p \sqrt{p(p-1)} \log\{1/(1-1/p)\}$ et

$$(3.14) \quad E_1(x, y) := \frac{1}{\sqrt{\log y}} + \frac{\log(u+1)}{\log y}.$$

Lemme 3.3. *Soit $\varepsilon > 0$. Pour $d \geq 1$ et $(x, y) \in (H_\varepsilon)$, nous avons*

$$(3.15) \quad \sum_{n \in S(x, y)} \frac{\tau(d)}{\tau(nd)} = \frac{h x \varrho_{1/2}(u) g(d) \tau(d)}{\sqrt{\log y}} \left\{ 1 + O(M(d) E_1(x, y)) \right\}.$$

où g et M sont les fonctions multiplicatives positives définies respectivement en (3.7) et (3.8).

Remarque. Nous utiliserons également (3.15) sous la forme affaiblie

$$(3.16) \quad \sum_{n \in S(x, y)} \frac{1}{\tau(nd)} \ll \frac{x \varrho_{1/2}(u) g(d) M(d)}{\sqrt{\log y}} \quad ((x, y) \in (H_\varepsilon), d \geq 1).$$

Démonstration. Afin d'évaluer la somme requise, nous effectuons la décomposition suivante. Pour $x \geq y \geq 2$, nous avons

$$\Psi_{\varphi_d}(x, y) = \sum_{m \in S(x, y)} h_d(m) \Psi_{1/\tau}\left(\frac{x}{m}, y\right) = \Sigma_1 + \Sigma_2,$$

où

$$\Sigma_1 := \sum_{m \in S(\sqrt{x}, y)} h_d(m) \Psi_{1/\tau}\left(\frac{x}{m}, y\right), \quad \Sigma_2 := \sum_{\substack{\sqrt{x} < m \leq x \\ P(m) \leq y}} h_d(m) \Psi_{1/\tau}\left(\frac{x}{m}, y\right).$$

Notons d'emblée, en vertu du Lemme 3.2 et puisque $0 < 1/\tau(n) \leq 1$, que

$$|\Sigma_2| \leq \sum_{\sqrt{x} < m \leq x} |h_d(m)| \sum_{n \leq x/m} 1 \leq x \sum_{m > \sqrt{x}} \frac{|h_d(m)|}{m} \ll M(d) x^{3/4} \ll \frac{x \varrho_{1/2}(u) M(d)}{(\log y)^2},$$

car, dans le domaine considéré, $\varrho_{1/2}(u) \gg x^{-1/4}(\log y)^2$, d'après (2.1). Cela implique que Σ_2 est un terme d'erreur.

Appliquons maintenant le Lemme 3.1 à la fonction $\varphi_1 = 1/\tau$. En posant $u_t := (\log t)/\log y$ pour $m \geq 2$, nous avons, pour $x/m \geq y \geq 2$,

$$\Psi_{1/\tau}\left(\frac{x}{m}, y\right) = \frac{h x \varrho_{1/2}(u - u_m)}{m \sqrt{\log y}} \left\{ 1 + O(E_1(x, y)) \right\}$$

et, lorsque $2 \leq x/m < y$,

$$\begin{aligned}\Psi_{1/\tau}\left(\frac{x}{m}, y\right) &= \Psi_{1/\tau}\left(\frac{x}{m}, \frac{x}{m}\right) = \frac{hx}{m\sqrt{\pi \log(x/m)}} \left\{1 + O\left(\frac{1}{\log(x/m)}\right)\right\} \\ &= \frac{hx\varrho_{1/2}(u - u_m)}{m\sqrt{\log y}} \left\{1 + O\left(\frac{1}{\log(x/m)}\right)\right\}.\end{aligned}$$

On peut donc écrire, puisque $m \leq \sqrt{x}$ implique $\log(x/m) \gg \log x \geq \log y$,

$$\begin{aligned}(3.17) \quad \Sigma_1 &= \frac{hx}{\sqrt{\log y}} \sum_{m \in S(\sqrt{x}, y)} \frac{h_d(m)}{m} \varrho_{1/2}(u - u_m) \\ &\quad \times \left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{\log y}} + \frac{\log(u+1)}{\log y} + \frac{1}{\log(x/m)}\right)\right) \\ &= \frac{hx \Sigma_3}{\sqrt{\log y}} \left\{1 + O(E_1(x, y))\right\},\end{aligned}$$

avec

$$\Sigma_3 := \sum_{m \in S(\sqrt{x}, y)} \frac{h_d(m)}{m} \varrho_{1/2}(u - u_m) = \int_{1^-}^{\sqrt{x}} \varrho_{1/2}(u - u_t) dH_d(t, y).$$

Observons que la fonction $\varrho_{1/2}$ est continue, dérivable pour tout $v \neq 1$, et sa dérivée est intégrable sur tout segment ne contenant pas 0 d'après le Lemme 2.2 (on peut notamment écrire, pour $v > 0$, $\varrho_{1/2}(v) = -\int_v^\infty \varrho'_{1/2}(t) dt$).

Ceci nous permet de traiter Σ_3 par intégration par parties. On obtient alors, en appliquant de plus la relation (3.10),

$$\begin{aligned}\Sigma_3 &= \varrho_{1/2}(u/2) H_d(\sqrt{x}, y) + \int_1^{\sqrt{x}} H_d(t, y) \frac{\varrho'_{1/2}(u - u_t)}{t \log y} dt \\ &= \varrho_{1/2}(u/2) \left(\tilde{H}_d(y) + O\left(\frac{M(d)}{x^{1/4}}\right) \right) \\ &\quad + \int_1^{\sqrt{x}} \left(\tilde{H}_d(y) + O\left(\frac{M(d)}{\sqrt{t}}\right) \right) \frac{\varrho'_{1/2}(u - u_t)}{t \log y} dt \\ &= \tilde{H}_d(y) \varrho_{1/2}(u) + R,\end{aligned}$$

avec

$$(3.18) \quad R \ll \frac{M(d)}{x^{1/4}} + \frac{M(d)}{\log y} \int_1^{\sqrt{x}} |\varrho'_{1/2}(u - u_t)| t^{-3/2} dt.$$

Lorsque $u \geq 3$, l'intégrale précédente est clairement

$$\ll \varrho_{1/2}(u) \log(u+1) \int_1^{\sqrt{x}} t^{\xi(2u)/\log y - 3/2} dt \ll \varrho_{1/2}(u) \log(u+1),$$

où l'on a utilisé (2.6) car $u - u_t \geq u/2 \geq 3/2$ et (2.5) car $u \geq 1$ et $u_t \leq u/2 \leq u - 1/2$.

Lorsque $1 \leq u \leq 3$, il faut tenir compte de la discontinuité de la dérivée de $\varrho_{1/2}$ en 1, et l'intégrale de (3.18) vaut, en vertu de la majoration (2.7),

$$\begin{aligned}
 (3.19) \quad & \ll \int_1^{\sqrt{x}} t^{-3/2} \sqrt{\left(\frac{1}{u - u_t - 1}\right)^+} dt \\
 & \ll \int_1^{\sqrt{x}} t^{-3/2} dt + \sqrt{\log y} \int_{x/(ey)}^{x/y} \frac{t^{-3/2}}{\sqrt{\log(x/(ty))}} dt \\
 & \ll 1 + \sqrt{\log y} \left(\frac{y}{x}\right)^{1/2} \int_0^1 \frac{e^{w/2} dw}{\sqrt{w}} \\
 & \ll \varrho_{1/2}(u) \left(1 + \left(\frac{y}{x}\right)^{1/2} \sqrt{\log y}\right).
 \end{aligned}$$

Ainsi

$$(3.20) \quad R \ll M(d) \varrho_{1/2}(u) E_1(x, y).$$

Finalement, en appliquant (3.11), il vient

$$\begin{aligned}
 (3.21) \quad \Sigma_3 &= \tau(d)g(d)\varrho_{1/2}(u) + O\left(\frac{M(d)\varrho_{1/2}(u)}{\sqrt{y}}\right) + R \\
 &= \varrho_{1/2}(u) \left(\tau(d)g(d) + O\left(M(d)E_1(x, y)\right)\right).
 \end{aligned}$$

En injectant cette estimation dans (3.17), on obtient

$$\Sigma_1 = \frac{h x \varrho_{1/2}(u)}{\sqrt{\log y}} \left\{ \tau(d)g(d) + O\left(\tau(d)g(d) + M(d)E_1(x, y)\right) \right\}.$$

Or, pour tout $d \geq 1$, on a $M(d) \leq \tau(d)g(d)M(d)$ car $\tau(d)g(d) \geq 1$. Cette dernière assertion s'obtient en remarquant dans (3.7) que $(\nu + 1)/(j + \nu + 1) \geq 1/(j + 1)$. On obtient alors le résultat attendu.

Remarque. Lorsque $u \geq 1 + (\log_2 y)/\log y$, le terme d'erreur (3.19) est en fait $\ll \varrho_{1/2}(u) \log(u + 1)$, impliquant les améliorations respectives de (3.20) et (3.21)

$$R \ll \frac{M(d)\varrho_{1/2}(u) \log(u + 1)}{\log y},$$

$$\Sigma_3 = \varrho_{1/2}(u) \left\{ \tau(d)g(d) + O\left(\frac{M(d) \log(u + 1)}{\log y}\right) \right\}.$$

Le lemme suivant fait apparaître la loi limite $J_u(v)$, définie en (1.3).

Lemme 3.4. *Soit $\varepsilon > 0$ et f une fonction multiplicative positive ou nulle satisfaisant à (3.1) et (3.2). Nous avons, pour $0 \leq v \leq 1/2$ et $(x, y) \in (H_\varepsilon)$,*

$$(3.22) \quad \sum_{d \in S(x^v, y)} \frac{f(d) \varrho_{1/2}(u - u_d)}{C(f) d \sqrt{\log y}} = \varrho(u) \left\{ J_u(v) + O\left(\frac{1}{\sqrt{\log y}} + \frac{\log(u+1)}{\log y} \right) \right\},$$

où $u_d := (\log d) / \log y$.

Démonstration. Désignons par S_1 le membre de gauche de (3.22) et posons, pour $t > 0$ et $y > 1$,

$$F(t, y) := \frac{1}{C(f) \sqrt{\log y}} \sum_{n \in S(y^t, y)} f(n).$$

Lorsque $t \geq 1$, nous pouvons appliquer l'estimation (3.3) pour $(y^t, y) \in (H_\varepsilon)$. Pour $\varepsilon_y := (\log 2) / \log y \leq t < 1$, nous faisons usage de la relation (3.4). Il vient

$$F(t, y) = \frac{y^t \varrho_{1/2}(t)}{\log y} + R(t, y),$$

où

$$R(t, y) \ll \begin{cases} \frac{y^t \varrho_{1/2}(t)}{t(\log y)^2} & (\varepsilon_y \leq t \leq 1), \\ \frac{y^t \varrho_{1/2}(t)}{\log y} E_1(x, y) & (t > 1), \end{cases}$$

où le terme $E_1(x, y)$ est défini en (3.14).

Supposons maintenant que $x^v \geq 2$. On peut écrire

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{\varrho_{1/2}(u)}{C(f) \sqrt{\log y}} + \int_{2^-}^{x^v} d^{-1} \varrho_{1/2}\left(u - \frac{\log d}{\log y}\right) dF\left(u - \frac{\log d}{\log y}, y\right) \\ &= \int_{\varepsilon_y^-}^{u^v} y^{-t} \varrho_{1/2}(u - t) dF(t, y) + O\left(\frac{\varrho(u)}{\sqrt{\log y}}\right) \\ &= \int_{\varepsilon_y}^{u^v} \varrho_{1/2}(u - t) \left\{ \varrho_{1/2}(t) + \frac{\varrho'_{1/2}(t)}{\log y} \right\} dt + S_2 + O\left(\frac{\varrho(u)}{\sqrt{\log y}}\right) \\ &= \varrho(u) \left\{ J_u(v) + O\left(\frac{1}{\sqrt{\log y}}\right) \right\} - S_4 + S_3 + S_2, \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} S_2 &:= \int_{\varepsilon_y}^{u^v} y^{-t} \varrho_{1/2}(u - t) dR(t, y), \\ S_3 &:= \frac{1}{\log y} \int_{\varepsilon_y}^{u^v} \varrho_{1/2}(u - t) \varrho'_{1/2}(t) dt, \\ S_4 &:= \int_0^{\varepsilon_y} \varrho_{1/2}(u - t) \varrho_{1/2}(t) dt. \end{aligned}$$

Majorons tout d'abord la quantité S_4 . Pour $y \geq 4$, nous avons $\varepsilon_y \leq 1/2$ et

$$S_4 \ll \int_0^{\varepsilon_y} \frac{\varrho_{1/2}(u-t)}{\sqrt{t}} dt \ll \frac{\varrho_{1/2}(u)u^2}{\sqrt{\log y}} \ll \frac{\varrho(u)}{\sqrt{\log y}},$$

où nous avons fait usage des relations (2.5) et (2.3).

Évaluons maintenant S_3 , grâce au Lemme 2.2. On a

$$(3.23) \quad S_3 \ll \frac{1}{\log y} \left(\int_{\varepsilon_y}^{1/2} \varrho_{1/2}(u-t)t^{-3/2} dt + \int_{1/2}^1 \varrho_{1/2}(u-t) dt \right. \\ \left. + \int_1^{3/2} \frac{\varrho_{1/2}(u-t)}{\sqrt{t-1}} dt + \int_{3/2}^{u/2} \varrho_{1/2}(u-t)\varrho_{1/2}(t) \log(t) dt \right),$$

où les deux dernières intégrales ne sont en réalité présentes que lorsque $u \geq 2$.

Pour la première de ces quatre intégrales, nous utilisons la relation, valable pour t borné,

$$\varrho_{1/2}(u-t) \ll \varrho_{1/2}(u) e^{t\xi(2u)} \ll \varrho_{1/2}(u) u^{O(1)} \ll \varrho(u) \quad (u \geq 1, u-t \geq 1/2),$$

qui découle de (2.5) et (2.3). Nous utilisons encore cette majoration pour traiter la seconde intégrale, dans le cas $u \geq 3/2$ (en notant que, dans le cas contraire, cette seconde intégrale est trivialement $\ll \varrho(u)$). Il en va de même pour la troisième intégrale, qui n'est présente que lorsque $u \geq 2$. La quatrième de ces intégrales, quant à elle, est majorée en écrivant

$$\int_{3/2}^{u/2} \varrho_{1/2}(u-t)\varrho_{1/2}(t) \log(t) dt \ll \log(u+1) \int_0^u \varrho_{1/2}(u-t)\varrho_{1/2}(t) dt = \log(u+1)\varrho(u).$$

Il vient ainsi

$$S_3 \ll \frac{\varrho(u)}{\log y} \left(\sqrt{\log y} + O(1) + \log(u+1) \right) \ll \varrho(u) E_1(x, y).$$

Il nous reste à présent à traiter le terme S_2 . Par une intégration par parties, nous avons

$$(3.24) \quad S_2 = \left[y^{-t} R(t, y) \varrho_{1/2}(u-t) \right]_{\varepsilon_y}^{uv} \\ + \int_{\varepsilon_y}^{uv} R(t, y) y^{-t} (\varrho_{1/2}(u-t) \log y + \varrho'_{1/2}(u-t)) dt.$$

Le terme entre crochets est clairement

$$\ll \frac{\varrho_{1/2}(uv)\varrho_{1/2}(u(1-v))}{\log y} + \frac{\varrho_{1/2}(\varepsilon_y)\varrho_{1/2}(u-\varepsilon_y)}{\log y} \ll \frac{\varrho(u)}{\sqrt{\log y}}.$$

Posons

$$I_2 := \frac{1}{\log y} \int_{\varepsilon_y}^{u/2} \varrho_{1/2}(t) \varrho'_{1/2}(u-t) dt.$$

L'intégrale de (3.24) est

$$\begin{aligned} &\ll \int_{\varepsilon_y}^{1/2} \frac{\varrho_{1/2}(t) \varrho_{1/2}(u-t)}{t \log y} dt + E_1(x, y) \int_{1/2}^{u/2} \varrho_{1/2}(t) \varrho_{1/2}(u-t) dt + I_2 \\ &\ll \frac{1}{\log y} \int_{\varepsilon_y}^{1/2} \varrho_{1/2}(u-t) t^{-3/2} dt + \varrho(u) E_1(x, y) + I_2 \ll \varrho(u) E_1(x, y) + I_2, \end{aligned}$$

Lorsque $u \geq 3$, nous avons $u-t \geq u(1-v) \geq u/2 \geq 3/2$ et par (2.6), il vient

$$I_2 \ll \frac{\log(u+1)}{\log y} \int_{\varepsilon_y}^{u/2} \varrho_{1/2}(t) \varrho_{1/2}(u-t) dt \ll \varrho(u) E_1(x, y).$$

Pour $1 \leq u \leq 3$, on a aisément

$$I_2 \ll \frac{1}{\sqrt{\log y}} \int_{\varepsilon_y}^{u/2} \varrho'_{1/2}(u-t) dt \ll \frac{1}{\sqrt{\log y}} \int_{1/2}^3 \varrho'_{1/2}(w) dw \ll \frac{1}{\sqrt{\log y}} \ll \frac{\varrho(u)}{\sqrt{\log y}}.$$

Ceci montre finalement que

$$S_2 \ll \varrho(u) E_1(x, y),$$

ce qui achève la démonstration lorsque $x^v \geq 2$.

Dans le cas où $x^v < 2$, nous avons $S_1 = \varrho_{1/2}(u)/(C(f)\sqrt{\log y})$. Le membre de droite de (3.22) est

$$\ll S_4 + O\left(\frac{\varrho(u)}{\sqrt{\log y}}\right) \ll \frac{\varrho(u)}{\sqrt{\log y}},$$

et la relation (3.22) est donc bien vérifiée. $\square$

En appliquant ce résultat pour les fonctions g et M définies en (3.7) et (3.8), nous obtenons les estimations suivantes.

Lemme 3.5. *Soit $\varepsilon > 0$. Pour $0 \leq v \leq 1/2$ et $(x, y) \in (H_\varepsilon)$, nous avons*

$$(3.25) \quad \sum_{d \in S(x^v, y)} \frac{h g(d) \varrho_{1/2}(u - u_d)}{d \sqrt{\log y}} = \varrho(u) \left\{ J_u(v) + O\left(\frac{1}{\sqrt{\log y}} + \frac{\log(u+1)}{\log y}\right) \right\}$$

et

$$(3.26) \quad \sum_{d \in S(\sqrt{x}, y)} \frac{g(d) M(d) \varrho_{1/2}(u - u_d)}{d \sqrt{\log y}} \ll \varrho(u).$$

Démonstration. Les fonctions g et $n \mapsto g(n)M(n)$ vérifient toutes deux les conditions (3.1) et (3.2). En effet, on a d'une part $g(p) = 1/2 + O(1/p)$ et $M(p) = 1 + O(1/\sqrt{p})$, et, d'autre part, pour tout $\nu \geq 1$, $0 \leq g(p^\nu) \leq 1$ et $0 \leq g(p^\nu)M(p^\nu) \ll 1$.

La relation (3.25) découle donc simplement de (3.22) appliqué pour $f = g$. Par ailleurs, pour $f = gM$, la formule (3.22) fournit

$$(3.27) \quad \sum_{d \in S(x^v, y)} \frac{g(d)M(d) \varrho_{1/2}(u - u_d)}{C(gM) d \sqrt{\log y}} = \varrho(u) \left\{ J_u(v) + O\left(\frac{1}{\sqrt{\log y}} + \frac{\log(u+1)}{\log y}\right) \right\},$$

et l'on en déduit (3.26) en prenant $v = 1/2$. $\square$

4. Démonstration du Théorème 1.1

Posons

$$S(x, y; v) := \frac{1}{\Psi(x, y)} \sum_{n \in S(x, y)} F_n(v).$$

En observant que

$$F_n(v) = 1 - F_n(1 - v) + O\left(\frac{1}{\tau(n)}\right),$$

il vient, grâce à (3.16) et (2.3),

$$S(x, y; v) + S(x, y; 1 - v) = 1 + O\left(\frac{1}{\Psi(x, y)} \sum_{n \in S(x, y)} \frac{1}{\tau(n)}\right) = 1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{\log y}}\right).$$

De plus, pour $0 \leq v \leq 1/2$, on obtient, par changement de variable et par convolution,

$$J_u(v) + J_u(1 - v) = \frac{1}{\varrho(u)} \int_0^u \varrho_{1/2}(w) \varrho_{1/2}(u - w) dw = 1.$$

Il suffit donc d'établir le résultat pour $0 \leq v \leq 1/2$. Nous avons

$$(4.1) \quad \begin{aligned} S(x, y; v) &= \frac{1}{\Psi(x, y)} \sum_{n \in S(x, y)} \frac{1}{\tau(n)} \left\{ \sum_{d|n, d \leq x^v} 1 - \sum_{d|n, n^v < d \leq x^v} 1 \right\} \\ &= T(x, y; v) - R_1(x, y; v), \end{aligned}$$

avec

$$T(x, y; v) := \frac{1}{\Psi(x, y)} \sum_{d \in S(x^v, y)} \sum_{m \in S(x/d, y)} \frac{1}{\tau(md)}$$

et

$$R_1(x, y; v) := \frac{1}{\Psi(x, y)} \sum_{d \in S(x^v, y)} \sum_{\substack{m \in S(x/d, y) \\ (md)^v < d}} \frac{1}{\tau(md)}.$$

Utilisons encore la notation $u_d := (\log d)/\log y$. Le Lemme 3.3 nous amène à écrire

$$T(x, y; v) = \frac{hx}{\Psi(x, y)} \sum_{d \in S(x^v, y)} \frac{g(d) \varrho_{1/2}(u - u_d)}{d \sqrt{\log y}} + R_2,$$

avec

$$\begin{aligned} R_2 &\ll \frac{x}{\Psi(x, y)} \left\{ E_1(x, y) \sum_{\substack{d \in S(\sqrt{x}, y) \\ d \leq x/y}} \frac{g(d) M(d) \varrho_{1/2}(u - u_d)}{d \sqrt{\log y}} + \sum_{\substack{d \in S(\sqrt{x}, y) \\ d > x/y}} \frac{g(d) M(d) \varrho_{1/2}(u - u_d)}{d \sqrt{\log y} \log(x/d)} \right\} \\ &\ll \frac{x E_1(x, y)}{\Psi(x, y)} \sum_{d \in S(\sqrt{x}, y)} \frac{g(d) M(d) \varrho_{1/2}(u - u_d)}{d \sqrt{\log y}} \ll \frac{x \varrho(u) E_1(x, y)}{\Psi(x, y)} \ll E_1(x, y), \end{aligned}$$

puisque $d \leq \sqrt{x}$ implique $x/d \geq \sqrt{x}$ et $1/\log(x/d) \ll 1/\log x \leq E_1(x, y)$. Notons que l'on a ici fait usage de la majoration (3.26), et du résultat classique valable dans (H_ε) (voir par exemple [8], Corollaire III.5.19)

$$\Psi(x, y) = x \varrho(u) \left(1 + O\left(\frac{\log u + 1}{\log y} \right) \right).$$

Le Lemme 3.5 nous permet donc à présent d'obtenir

$$T(x, y; v) = J_u(v) + O\left(\frac{1}{\sqrt{\log y}} + \frac{\log(u + 1)}{\log y} \right).$$

Voyons maintenant comment nous pouvons estimer la quantité R_1 . Nous supposons $x^v \geq 2$, car dans le cas contraire ce terme est nul. En vertu de la majoration (3.16), nous avons, avec $\varepsilon_y := (\log 2)/\log y$,

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{1}{\Psi(x, y)} \sum_{\substack{d \in S(x^v, y) \\ d \geq 2}} \sum_{m \in S(d^{(1-v)/v}, y)} \frac{1}{\tau(md)} \\ &\ll \frac{1}{\Psi(x, y) \sqrt{\log y}} \sum_{d \in S(x^v, y), d \geq 2} g(d) M(d) d^{(1-v)/v} \varrho_{1/2}\left(\frac{1-v}{v} \log d \right) \\ &\ll \frac{1}{\Psi(x, y) \sqrt{\log y}} \int_{\varepsilon_y}^{uv} y^{t/v-t} \varrho_{1/2}(t/v - t) d\Psi_{gM}(y^t, y). \end{aligned}$$

Il vient, par intégration par parties, grâce à (3.27),

$$\begin{aligned} R_1 &\ll \frac{1}{\Psi(x, y)} \int_{\varepsilon_y}^{uv} \varrho_{1/2}(t) \varrho_{1/2}(t/v - t) y^{t/v} dt \\ &\ll \frac{1}{\Psi(x, y)} \int_{\varepsilon_y/v}^u \varrho_{1/2}(tv) \varrho_{1/2}(t - tv) y^t v dt. \end{aligned}$$

Nous pouvons ensuite écrire, en faisant usage du Lemme 2.5,

$$\begin{aligned} R_1 &\ll \frac{1}{\Psi(x, y)} \left(\int_{2\varepsilon_y}^1 \frac{y^t}{t} dt + \int_1^u \varrho(t) y^t \sqrt{v} dt \right) \\ &\ll \frac{y}{\Psi(x, y) \log y} + \frac{1}{\Psi(x, y)} \int_1^u \varrho(t) y^t dt \\ &\ll \frac{1}{\log y} + \frac{x}{\Psi(x, y)} \int_0^{u-1} \varrho(u-s) y^{-s} ds. \end{aligned}$$

En appliquant le Corollaire III.5.15 de [8], il vient enfin

$$\begin{aligned} R_1 &\ll \frac{1}{\log y} + \frac{x\varrho(u)}{\Psi(x, y)} \int_0^{u-1} y^{-s+s\xi(u)/\log y} ds \\ &\ll \frac{1}{\log y} + \int_0^\infty y^{-s/2} ds \ll \frac{1}{\log y}, \end{aligned}$$

ce qui montre que R_1 peut être considéré comme un terme d'erreur. Cela achève la preuve du Théorème 1.1. $\square$

5. Étude asymptotique de la loi limite

5.1. Démonstration du Théorème 1.2

Le Lemme 2.1 implique, pour $u \geq 3$ et $|h| \leq u/2 - 1$,

$$\begin{aligned} \frac{\varrho_{1/2}(u/2+h) \varrho_{1/2}(u/2-h)}{\varrho_{1/2}(u/2)^2} &= \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int_u^{u+2h} \xi(t) dt + \frac{1}{2} \int_{u-2h}^u \xi(t) dt \right\} \\ &\quad \times \sqrt{\frac{\xi'(u+2h)\xi'(u-2h)}{\xi'(u)^2}} \left(1 + O\left(\frac{1}{u}\right) \right). \end{aligned}$$

Le terme sous la racine est

$$\frac{(\xi'(u) + 2h\xi''(u) + O(h^2/u^3))(\xi'(u) - 2h\xi''(u) + O(h^2/u^3))}{\xi'(u)^2} = 1 + O\left(\frac{h^2}{u^2}\right),$$

tandis que

$$\begin{aligned} \int_u^{u+2h} \xi(t) dt &= \int_u^{u+2h} \left\{ \xi(u) + (t-u)\xi'(u) + \frac{(t-u)^2}{2}\xi''(u) + O\left(\frac{(t-u)^3}{u^3}\right) \right\} dt \\ &= 2h\xi(u) + 2h^2\xi'(u) + \frac{4h^3}{3}\xi''(u) + O\left(\frac{h^4}{u^3}\right). \end{aligned}$$

Il vient alors, pour $u \geq 3$ et $|h| \leq u/2 - 1$,

$$\frac{\varrho_{1/2}(u/2 + h) \varrho_{1/2}(u/2 - h)}{\varrho_{1/2}(u/2)^2} = \exp \left\{ -2h^2 \xi'(u) + O\left(\frac{h^4}{u^3}\right) \right\} \left(1 + O\left(\frac{1}{u} + \frac{h^2}{u^2}\right) \right).$$

Utilisant enfin l'estimation (2.4), nous obtenons, sous la condition supplémentaire $|h| \leq u^{3/4}$,

$$\frac{\varrho_{1/2}(u/2 + h) \varrho_{1/2}(u/2 - h)}{\varrho(u)} = \sqrt{\frac{2\xi'(u)}{\pi}} \exp \left\{ -2h^2 \xi'(u) \right\} \left(1 + O\left(\frac{1}{u} + \frac{h^4}{u^3}\right) \right).$$

□

5.2. Démonstration du Corollaire 1.3

Étant donné la symétrie⁽⁶⁾ par rapport à $v = 1/2$ de $J_u(v)$ et du membre de droite de (1.7), nous pouvons nous limiter à montrer (1.7) pour $v \in [0, 1/2]$.

Pour $u \geq 3$, posons $\eta_u := \sqrt{(\log u)/u}$ et

$$K_u(v) := \int_{u(1/2 - \eta_u)}^{uv} \frac{\varrho_{1/2}(u - t) \varrho_{1/2}(t)}{\varrho(u)} dt.$$

En effectuant le changement de variable $h := t - u/2$ et en appliquant (1.6), nous obtenons pour $1/2 - \eta_u \leq v \leq 1/2$,

$$\begin{aligned} K_u(v) &= \left(1 + O\left(\frac{1}{u}\right) \right) \sqrt{\frac{2\xi'(u)}{\pi}} \int_{-\sqrt{u \log u}}^{u(v-1/2)} e^{-2h^2 \xi'(u)} dh \\ &= \left(1 + O\left(\frac{1}{u}\right) \right) \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\sqrt{2u\xi'(u) \log u}}^{\sqrt{2\xi'(u) u(v-1/2)}} e^{-w^2} dw \\ &= \left(1 + O\left(\frac{1}{u}\right) \right) \left\{ \Phi\left(u\sqrt{2\xi'(u)}\left(v - \frac{1}{2}\right)\right) - \Phi\left(-\sqrt{2u\xi'(u) \log u}\right) \right\} \\ &= \Phi\left(u\sqrt{2\xi'(u)}\left(v - \frac{1}{2}\right)\right) + O\left(\frac{1}{u}\right), \end{aligned}$$

où l'on a fait usage des estimations classiques

$$\Phi(-x) \ll e^{-x^2/2} \quad (x \geq 0)$$

et

$$v \xi'(v) = 1 + \frac{1}{\log(v)} + O\left(\frac{\log_2 v}{(\log v)^2}\right) \quad (v \geq 3).$$

6. On a, plus précisément, $J_u(1 - v) = 1 - J_u(v)$ pour $v \in [0, 1]$ et $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

Écrivons ensuite

$$\begin{aligned} J_u(1/2) &= \tfrac{1}{2}J_u(1) = \tfrac{1}{2} \\ &= J_u(1/2 - \eta_u) + K_u(1/2) \\ &= J_u(1/2 - \eta_u) + \tfrac{1}{2} + O\left(\tfrac{1}{u}\right). \end{aligned}$$

Comme $v \mapsto J_u(v)$ est croissante, cela prouve, pour $0 \leq v \leq 1/2 - \eta_u$, que

$$J_u(v) \leq J_u(1/2 - \eta_u) \ll \tfrac{1}{u},$$

et (1.7) est donc bien vérifiée dans ce cas.

Dans l'intervalle complémentaire $1/2 - \eta_u \leq v \leq 1/2$, nous avons

$$\begin{aligned} J_u(v) &= J_u(1/2 - \eta_u) + K_u(v) \\ &= \Phi\left(u\sqrt{2\xi'(u)}\left(v - \tfrac{1}{2}\right)\right) + O\left(\tfrac{1}{u}\right), \end{aligned}$$

ce qui nous permet de conclure. □

Bibliographie

- [1] R. de la Bretèche, G. Tenenbaum, Entiers friables : inégalité de Turán-Kubilius et applications, *Invent. Math.* **159** (2005), 531–588.
- [2] J.-M. Deshouillers, F. Dress & G. Tenenbaum, Lois de répartition des diviseurs, 1, *Acta Arith.* **34** (1979), 273–285.
- [3] A. Hildebrand & G. Tenenbaum, On a class of differential-difference equations arising in number theory, *J. Analyse* **61** (1993), 145–179.
- [4] G. Nemes, An asymptotic expansion for the Bernoulli numbers of the second kind, *J. Integer Seq.*, **14** (2011), article 11.4.8.
- [5] J. F. Steffensen, On Laplaces and Gauss summation-formulas, *Skandinavisk Aktuarietidskrift* (1924), 2–4.
- [6] H. Smida, Sur les puissances de convolution de la fonction de Dickman, *Acta Arith.* **59** (1991), 123–143.
- [7] H. Smida, Valeur moyenne des fonctions de Piltz sur les entiers sans grand facteur premier, *Acta Arith.* **63** (1993), 21–50.
- [8] G. Tenenbaum, *Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres*, troisième édition, Belin, 2008.
- [9] G. Tenenbaum, J. Wu, Moyennes de certaines fonctions multiplicatives sur les entiers friables, *J. Reine Angew. Math.* **564** (2003), 119–166.

Joseph Basquin
Institut Élie Cartan
Université Henri Poincaré–Nancy 1
BP 239
54506 Vandœuvre Cedex
France
internet : joseph.basquin@iecn.u-nancy.fr

Ce travail est consacré à l'étude de trois problèmes liés à l'évaluation de sommes de fonctions multiplicatives sur les entiers friables. On dit qu'un nombre entier n est y -friable si son plus grand facteur premier $P(n)$ n'excède pas y . Dans une première partie, nous considérons une fonction multiplicative aléatoire au sens de Wintner, c'est-à-dire une fonction arithmétique multiplicative f supportée par les entiers sans facteur carré, telle que, pour tout entier premier p , $f(p)$ est une variable aléatoire de Bernoulli prenant les valeurs $+1$ et -1 avec probabilité $\frac{1}{2}$. Dans la continuité de travaux de Wintner, Erdős, Halász, Lau, Tenenbaum et Wu, notre étude est dédiée à l'obtention d'une majoration presque sûre de la fonction sommatoire de f sur les entiers y -friables n'excédant pas x . Un second volet est dévolu à l'évaluation asymptotique des fonctions sommatoires de certaines fonctions multiplicatives, notamment la fonction φ d'Euler, sur les translatés des entiers friables. La méthode employée fait appel à des résultats de répartition des entiers friables dans les progressions arithmétiques. La troisième partie consiste en une étude de la loi moyenne de répartition des diviseurs des entiers friables. Nous établissons le glissement, lorsque le paramètre de friabilité $u = \log x / \log y$ croît, depuis la loi de l'arcsinus (établie en 1979 dans les travaux de Dress, Deshouillers et Tenenbaum) jusqu'à une loi approximativement gaussienne. La loi limite obtenue s'exprime au moyen d'une convolution faisant apparaître les fonctions de Dickman ϱ et $\varrho_{1/2}$.

This dissertation is devoted to studying three problems, all linked to estimates for sums of multiplicative functions over friable integers. An integer n is called y -friable if its largest prime factor $P(n)$ does not exceed y . In a first part, we consider a random multiplicative function in the sense of Wintner, i.e. a multiplicative arithmetic function f supported on squarefree integers and such that, for each prime p , $f(p)$ is a Bernoulli random variable taking each value $+1$ and -1 with probability $\frac{1}{2}$. Elaborating on previous works by Wintner, Erdős, Halász, Lau, Tenenbaum and Wu, we investigate upper bounds for the summatory function of f over y -friable integers not exceeding x . In the second part, we provide asymptotic estimates for sums of certain multiplicative functions, including Euler's totient, over shifted friable integers. This study depends on the distribution of friable integers in arithmetic progressions. In the third part, we consider a friable extension of the Arcsine law for the mean distribution of the divisors of integers. The original study is due to Deshouillers, Dress and Tenenbaum (1979). We describe the limit law in terms of the Dickman functions ϱ and $\varrho_{1/2}$ and we show that, as the friability parameter $u = \log x / \log y$ increases, the mean distribution drifts from the Arcsine law towards a Gaussian behaviour.

Mots-clefs : entiers friables, fonctions multiplicatives, fonctions multiplicatives aléatoires, martingale, entiers friables translatés, répartition des diviseurs, loi de l'arcsinus, fonction de Dickman.
