Mémoire de stage

Fait à l'IECL dans le cadre du M2 Recherche Mention Mathématiques et applications spécialité Mathématiques Fondamentales parcours Algèbre et Géométrie de l'université de Rennes 1

Petits écarts entre les nombres premiers

David Feutrie

Directeur : Cécile Dartyge
Codirecteur : Gérald Tenenbaum

Soutenu le 2 Juillet 2015

Table des matières

Introduction

Ce mémoire porte sur l'étude détaillée d'un article de James Maynard [**?**], où l'auteur a permis une avancée importante dans la théorie analytique des nombres, en particulier sur la conjecture des nombres premiers jumeaux.

Le mémoire sera divisé en plusieurs chapitres.

Le premier chapitre se bornera à des notions de théorie analytique des nombres qui seront utiles pour les démonstrations de l'article, en particulier les principales notations utilisées dans l'article et quelques définitions, comme les fonctions arithmétiques et leurs propriétés, ainsi que des formules asymptotiques et des théorèmes qui seront admis.

Le deuxième chapitre introduira des notions plus spécifiques à l'article, fera un résumé historique des résultats découverts avant Maynard et énoncera tous les résultats que ce dernier démontrera dans la suite de son article.

Le troisième chapitre sert à voir l'amélioration que Maynard fait de la méthode GPY, une méthode inventée quelques années auparavant par Goldston, Pintz et Yıldırım, ainsi que les techniques de Zhang, et à donner les idées clés de toute la démonstration de Maynard.

Le quatrième chapitre donne quelques notations nouvelles qui ne pouvaient être introduites avant car elles découlent des chapitres précédents.

Le cinquième chapitre énonce deux propositions dont on démontre que si on les admet, alors les théorèmes du début de l'article en découlent.

Le reste de l'article se borne alors à démontrer ces deux propriétés : les chapitres 7 et 8 contiennent la démonstration de la première propriété, et les deux derniers contiennent la démonstration de l'autre résultat.

Chapitre 1

Préliminaires

Commençons par quelques notions de théorie analytique des nombres avec quelques notations, définitions, propriétés et théorèmes qui sont admis et qui jouent un rôle important dans les résultats exposés. La plupart des notions abordées dans ce chapitre provient de l'ouvrage [?] :

1.1 Notations

Dans tout le mémoire, concernant les notations asymptotiques, la notation de Landau $f = O(g)$ et la notation de Vinogradov $f \ll g$ sont utilisées indifféremment pour signifier que $|f| \leqslant C|g|$ avec C une constante positive, qui peut quelquefois dépendre de quelques paramètres, auquel cas la dépendance sera notée en indice (par exemple $f \ll_A g$ si le C concerné dépend de A).

Tous les sommes, produits et bornes supérieures sont supposés comme étant indicés par des variables de l'ensemble $\mathbb{N}^* = \{1, 2, ...\}$ sauf mention contraire. L'exception se fait quand les sommes et les produits sont indicés par p, qui est dans l'ensemble des nombres premiers, noté $\mathcal{P}$.

Voici un inventaire de notations qui sont utilisées dans ce mémoire :
- $\tau_r(n)$ désigne le nombre de façons d'écrire un entier $n \in \mathbb{N}$ en un produit de r entiers naturels strictement positifs.
- ε est, à chaque fois qu'il apparait, un réel strictement positif, et à certains moments, il est supposé assez petit.
- $\#\mathcal{A}$ désigne le cardinal de l'ensemble $\mathcal{A}$, dans le cas où celui-ci est fini.
- Pour a et b entiers avec $a < b$, $[[a, b]]$ désigne l'ensemble des entiers compris entre a et b.
- Pour $x \in \mathbb{R}$, $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière de x, i.e. le plus grand des entiers n tels que $n \leqslant x$, et $\lceil x \rceil$ le plus petit des entiers n tels que $n \geqslant x$.
- Pour a, b entiers, (a, b) désigne le pgcd de a et de b.
- Pour a, b réels, $[a, b]$ désigne le segment de la droite réelle d'extrémités a et b, sauf dans le chapitre 6, où $[a, b]$ désignera le ppcm de a et de b si a et b sont des entiers.
- Pour a, b entiers, on note :

$$\delta_{a,b} = \begin{cases} 1 & \text{si } a = b \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1.2 Fonctions arithmétiques

Définition 1.1.
- *Une fonction f est dite **arithmétique** si f est une fonction définie sur $\mathbb{N}^*$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$.*
- *Une fonction arithmétique f est dite **multiplicative** si*

$$\begin{cases} f(1) &= 1 \\ f(mn) &= f(m)f(n) \text{ si } m \text{ et } n \text{ sont premiers entre eux} \end{cases}$$

- *Une fonction arithmétique f est dite **complètement (ou totalement) multiplicative** si*

$$\begin{cases} f(1) &= 1 \\ f(mn) &= f(m)f(n) \qquad \forall (m, n) \in \mathbb{N}^2 \end{cases}$$

Définition 1.2. *Les fonctions définies ici sont toutes arithmétiques.*
- *La* ***fonction indicatrice d'Euler*** *est la fonction φ définie par*

$$\varphi(n) = |(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*|$$

- *La* ***fonction de Möbius*** *est la fonction μ définie par :*

$$\mu(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est divisible par le carré d'un entier.} \\ (-1)^{\omega(n)} & \text{sinon} \end{cases}$$

$\omega(n)$ désigne le nombre de facteurs premiers distincts de n.
- *La* ***fonction de Van Mangoldt*** *est la fonction Λ définie par*

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \ln p & \text{si } n = p^\nu \text{ pour un } \nu \geqslant 1 \\ 0 & \text{sinon (i.e. si } \omega(n) \geqslant 2) \end{cases}$$

Propriété 1.3. *Toutes les fonctions de la définition précédente sont des fonctions multiplicatives.*

Propriété 1.4. *Pour tout entier $n \geqslant 1$, on a :*
-
$$n = \sum_{d|n} \varphi(d)$$
-
$$\varphi(n) = n \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

Propriété 1.5.

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Propriété 1.6. *Soit f une fonction multiplicative. On note, pour $u \in \mathbb{N}^*$, $P^+(u)$ son plus grand facteur premier. Alors, pour $R \in \mathbb{N}^*$:*

$$\sum_{\substack{u \\ P^+(u) < R}} \mu^2(u) f(u) = \prod_{p<R} \big(1 + f(p)\big)$$

Propriété 1.7. *Soient n un entier sans facteur carré et f une fonction multiplicative. Alors :*

$$\prod_{p|n} \big(1 + f(p)\big) = \sum_{d|n} f(d)$$

1.3 Nombres premiers

Théorème 1.8. *La suite des nombres premiers est infinie.*

Notation.
- *Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note p_n le n-ième nombre premier. Ainsi, $p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, \ldots$*
- *Pour $x \in \mathbb{R}^+$, on note $\pi(x)$ le nombre des nombres premiers n'excédant pas x.*

Remarque. *Pour tout entier n, $\pi(p_n) = n$.*

Propriété 1.9 (Théorème des nombres premiers)**.**

$$\pi(x) \overset{x \to +\infty}{\sim} \frac{x}{\ln x}$$

Définition 1.10. *Soient a, q deux entiers, $x \in \mathbb{R}^+$*
-
$$\pi(x; a, q) = \#\{p \leqslant x, p \text{ premier}, p \equiv a \pmod q\}$$
-
$$\psi(x; a, q) = \sum_{\substack{n \leqslant x \\ n \equiv a \pmod q}} \Lambda(n)$$

Définition 1.11. *On définit les formules sommatoires de Tchébychev :*

- $$\psi(x) = \sum_{n \leqslant x} \Lambda(n)$$

- $$\vartheta(x) = \sum_{p \leqslant x} \ln(p)$$

D'après [?], le théorème des nombres premiers entraine les résultats suivants :

Propriété 1.12. *On a les formules asymptotiques suivantes :*

- *Il existe une constante $c > 0$ telle que*

$$\vartheta(x) = x + O(xe^{-c\sqrt{\ln x}})$$

- $$\sum_{n \leqslant x} \frac{\Lambda(n)}{n} = \ln x - \gamma + o(1)$$

  où γ est la constante d'Euler.

- $$\sum_{n \leqslant x} \tau_k(n) = xP_{k-1}(\ln x) + O_k(x^{1-\delta_k})$$

  où P_{k-1} est un polynôme de degré $k-1$ et δ_k une constante positive.

1.4 Théorèmes admis

La formule de Mertens sera utile pour majorer certaines formules dans les preuves.

Théorème 1.13 (Formule de Mertens)**.** *On note γ la constante d'Euler. Pour $x \geqslant 2$, on a :*

$$\prod_{p \leqslant x} \left(1 - \frac{1}{p}\right) = \frac{e^{-\gamma}}{\ln x}\left\{1 + O(\frac{1}{\ln x})\right\}$$

Le théorème de Bombieri-Vinogradov est un résultat fondamental dans les travaux de Maynard. Voici son énoncé :

Théorème 1.14 (Bombieri-Vinogradov)**.** *Soit $\theta < \frac{1}{2}$. Pour tout $A > 0$, alors*

$$\sum_{q \leqslant x^\theta} \max_{y \leqslant x} \max_{\substack{1 \leqslant a \leqslant q \\ (a,q)=1}} \left| \pi(y; a, q) - \frac{\pi(y)}{\varphi(q)} \right| \ll_A \frac{x}{(\ln x)^A}$$

1.5 Conjecture des nombres premiers jumeaux

Cette conjecture est un résultat auquel les travaux de Maynard ont permis d'avancer, dans le but de pouvoir un jour démontrer ou réfuter ces résultats.

Conjecture 1.15 (des nombres premiers jumeaux)**.** *Il existe une infinité de nombres premiers p telle que $p+2$ soit aussi premier.*

Plusieurs théorèmes ont permis d'avancer sur cette conjecture. On va noter deux résultats importants :

Théorème 1.16 (Brun (1924))**.**

$$\sum_{\substack{p \\ p+2 \text{ premier}}} \frac{1}{p} < \infty$$

Théorème 1.17 (Chen (1973))**.** *Il existe une infinité de nombres premiers p tels que $p+2$ ait au plus deux facteurs premiers.*

Néanmoins, ces résultats n'interviendront pas dans les travaux de Maynard.

Chapitre 2

Résultats principaux

Commençons par une définition fondamentale dans la suite de cet exposé.

Définition 2.1. *Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{H} = \{h_1, \cdots, h_k\}$ un ensemble de k nombres positifs deux à deux distincts. $\mathcal{H}$ est dit* ***admissible*** *si*

$$\forall p \text{ premier}, \exists a_p \in \mathbb{Z} \text{ tel que } a_p \not\equiv h \pmod{p}\ \forall h \in \mathcal{H}$$

Cette définition nous permet alors de nous intéresser à la conjecture suivante, avec k un entier strictement positif :

Conjecture 2.2 (Conjecture des k-uplets de nombres premiers)**.** *Soit $\mathcal{H} = \{h_1, ..., h_k\}$ un ensemble admissible. Alors il y a une infinité d'entiers n telle que $\forall j \in [[1; k]]$, $n + h_j$ est premier.*

Remarque 2.3. *Si $k = 2$ et $\mathcal{H} = \{0, 2\}$ (qui est bien admissible), on retrouve la conjecture des nombres premiers jumeaux.*

Dans tous les cas où $k > 1$, la Conjecture 2.2 n'a pas été démontré. Cependant, l'étude des approximations de cette conjecture a eu plus de succès, principalement en montrant l'existence de petits écarts entre les nombres premiers.

Nous allons maintenant faire un historique des résultats qui ont abouti à ceux de Maynard.

2.1 Historique

Pour commencer, notons

$$d_n = p_{n+1} - p_n$$

La conjecture des nombres premiers jumeaux implique qu'il y a une infinité d'entiers n tels que $d_n = 2$, c'est-à-dire que $\liminf_n d_n = 2$. Comme il est assez compliqué de majorer directement $\liminf_n d_n$, les mathématiciens ont préféré chercher à majorer un terme plus faible, qui est :

$$\Delta = \liminf_n \frac{d_n}{\ln p_n}$$

Cette expression est en effet plus facile à majorer car par le théorème des nombres premiers, on sait déjà que $\Delta \leqslant 1$. Les chercheurs ont alors conjecturé que

$$\Delta = 0$$

Les avancées principales qui ont permis de réduire la borne de majoration de Δ dans le but de démontrer cette conjecture ont été les suivantes :

- En 1926, Hardy et Littlewood ont montré que si on admet l'hypothèse de Riemann généralisée, alors $\Delta \leqslant \frac{2}{3}$.
- En 1940, Erdös a montré qu'il existe $c < 1$ tel que $\Delta \leqslant c$.
- En 1966, Bombieri et Davenport ont établi que $c < \frac{1}{2}$.
- En 1988, Maier a montré que $c < \frac{1}{4}$.

Mais c'est à partir de 2009 que cette conjecture sera démontrée et que d'autres résultats suivront :

- Dans un article devenu célèbre [?] , Goldston, Pintz et Yıldırım ont développé en 2009 une méthode permettant de compter les n-uplets de nombres premiers vérifiant certaines conditions, ce qui leur a ainsi permis de montrer que

  $$\Delta = 0 \tag{2.1}$$

- Zhang, en avril 2013, avec l'article [?] a fait une percée extraordinaire qui a permis d'améliorer le résultat précédent en montrant que

  $$\liminf_{n} d_n \leqslant 70000000 \tag{2.2}$$

  Ce résultat constitue un véritable changement dans le domaine de la conjecture des nombres premiers jumeaux car il permet désormais d'affirmer qu'il existe une borne M telle que la Conjecture 5 soit vraie pour $\mathcal{H} = \{0, M\}$. (i.e. $\exists M \leqslant 7.10^7$ tel qu'il y a un nombre infini de nombres premiers p tels que $p + M$ soit aussi premier).
  De plus, une conséquence du théorème de Zhang (qui s'énonce ainsi : pour $\mathcal{H} = \{h_1, \ldots, h_k\}$ admissible avec $k \geqslant 3, 5.10^6$, il y a une infinité de nombres positifs n telle que le k-uplet $\{n + h_1, \ldots, n + h_k\}$ contienne au moins 2 nombres premiers) est que le nombre d'ensembles admissibles de taille 2 inclus dans $[1, x]^2$ vérifiant la conjecture des 2-uplets de nombres premiers est $\gg x^2$ pour x assez grand. Ce qui signifie qu'il y a une proportion strictement positive d'ensembles admissibles de taille 2 qui vérifient la conjecture des 2-uplets de nombres premiers.
- Le récent projet Polymath [?] a permis de réduire la borne de l'inéquation (2.2) à 4680 en affinant les démonstrations de Zhang et en introduisant des nouvelles améliorations.

Tous les résultats énoncés ci-dessus qui ont été démontrés après 2009 ont été obtenus en utilisant la méthode dite "méthode GPY" (pour Goldston-Pintz-Yıldırım) dans le but d'étudier les uplets de nombres premiers et les petits écarts entre les nombres premiers. Cette méthode repose principalement sur la distribution des nombres premiers dans les progressions arithmétiques.

Définition 2.4. *Pour $\theta > 0$, on dit que les nombres premiers ont un* ***niveau de distribution*** *θ si $\forall A > 0$,*

$$\sum_{q \leqslant x^\theta} \max_{(a,q)=1} \left| \pi(x; q, a) - \frac{\pi(x)}{\varphi(q)} \right| \ll_A \frac{x}{(\ln x)^A} \tag{2.3}$$

Le théorème de Bombieri-Vinogradov permet d'affirmer que les nombres premiers ont un niveau de distribution θ pour tout $\theta < \frac{1}{2}$.

Une conjecture publiée dans [?] en 1969 vient étendre ce résultat :

Conjecture 2.5 (Elliott-Halberstam)**.** *Les nombres premiers ont un niveau de distribution θ pour tout $\theta < 1$.*

De plus, Friedlander et Granville [?] ont montré en 1989 que (2.3) ne serait plus vraie si on remplaçait x^θ par $\frac{x}{(\ln x)^B}$ pour tout entier B fixé, et qu'ainsi, la conjecture d'Elliott-Halberstam est en un certain sens le résultat le plus fort de ce type que l'on puisse espérer.

Si on admet cette conjecture, elle entraine d'autres résultats. Ainsi, les travaux de Goldston, Pintz et Yıldırım ont permis de montrer qu'il existe une borne finie d'écarts entre les nombres premiers si la majoration (2.3) est vraie pour un certain $\theta > \frac{1}{2}$. De plus, si la conjecture d'Elliott-Halberstam est admise, alors on obtient comme résultat $\liminf_n (p_{n+1} - p_n) \leqslant 16$. La percée importante des résultats de Zhang a permis d'établir qu'une version plus faible de l'équation (2.3) est valide pour un $\theta > \frac{1}{2}$.

Si on cherche des intervalles de longueur finie contenant deux ou plusieurs nombres premiers, alors la méthode GPY ne permet pas de démontrer des résultats aussi forts. On est seulement capable sans aucune condition d'améliorer la borne triviale du théorème des nombres premiers, qui énonce que $\liminf_n \frac{p_{n+1} - p_n}{\ln p_n} \leqslant 1$, d'un facteur constant (i.e. remplacer 1 par α avec $0 < \alpha < 1$), d'après [?]. Même en admettant la conjecture d'Elliott-Halberstam, le meilleur résultat possible, d'après [?] p.823, est

$$\liminf_{n} \frac{p_{n+2} - p_n}{\ln p_n} = 0 \tag{2.4}$$

Finissons maintenant l'historique par les résultats de James Maynard qui sont énoncés dans son article. En novembre 2013, il réussit à réduire la borne de l'inéquation (2.2) à 600, et sait même la réduire à 12 si on admet la conjecture d'Elliott-Halberstam.

L'espoir des mathématiciens désormais est, après les résultats de Maynard, de pouvoir réduire encore plus cet écart pour arriver à 2, ce qui permettrait de démontrer complètement la conjecture des nombres premiers jumeaux.

Terminons cet historique par un passage d'un article du site Techno-science.net [?] qui traite d'une possible amélioration des résultats de Maynard grâce à sa méthode :

> Arrivera-t-on un jour à démontrer la véracité de la conjecture des nombres premiers jumeaux en employant la "méthode Maynard" ? [Pour Maynard,] "J'adorerais ça, mais je pense que non. Il y a de grosses difficultés pour résoudre ce problème. Avec ma méthode, on devrait pouvoir atteindre un écart de 6. Mais il faudra une autre approche pour arriver à 2. Je suis persuadé que l'hypothèse est vraie, il y a de très bonnes raisons de le penser."

2.2 Résultats de Maynard

Le but de l'article de Maynard est d'introduire une amélioration de la méthode GPY qui puisse permettre de franchir le seuil du $\theta = \frac{1}{2}$ pour pouvoir établir des écarts bornés entre les nombres et ainsi permettre de montrer l'existence de plusieurs nombres premiers dans des intervalles bornés quelconques. Ces résultats permettront alors de répondre à la deuxième et à la troisième question posées dans le document [?] sur les extensions de la méthode GPY (la première question ayant été résolue par les résultats trouvés par Zhang). Cette nouvelle méthode a aussi l'avantage de donner des résultats numériquement supérieurs aux approches précédentes.

Voici le premier résultat que l'on démontrera dans la suite :

Théorème 2.6. *[Maynard] Soit $m \in \mathbb{N}$. Alors :*

$$\liminf_n (p_{n+m} - p_n) \ll m^3 e^{4m}$$

On peut remarquer que la borne du Théorème 2.6 est assez loin de celle prédite approximativement à $m \ln m$ par la conjecture des m-uplets de nombres premiers (cette borne est due au fait que, comme on le verra plus tard, $\{p_{\pi(m)+1}, \ldots, p_{\pi(m)+n}\}$ est admissible, d'où $\liminf_n p_{n+m} - p_n \leqslant p_{\pi(m)+m} - p_{\pi(m)+1} \ll m \ln m$).

La démonstration se généralise de façon naturelle (mais avec une borne plus faible) à des sous-suites de nombres premiers qui ont un niveau de distribution $\theta > 0$. Par exemple, on peut montrer des résultats équivalents pour les nombres premiers qui sont contenus dans des intervalles de la forme $[N; N + N^{\frac{7}{12}+\varepsilon}]$ pour tout $\varepsilon > 0$ ou dans des progressions arithmétiques modulo $q \ll (\ln N)^A$. En particulier, cette méthode donne aussi quelques résultats pour le cas des nombres premiers qui sont les images de fonctions linéaires et qui présentent un certain intérêt. Ainsi : pour k fonctions linéaires distinctes $L_i(n) = a_i n + b_n$, avec $i \in [[1; k]]$, à coefficients dans $\mathbb{N}^*$, telles que le produit $\Pi(n) = \prod_{i=1}^k L_i(n)$ n'ait pas de diviseur premier fixé (i.e. $\nexists p$ premier tel que $p | \Pi(n)\ \forall n$), la méthode présentée dans l'article montre qu'il y a une infinité d'entiers n telle qu'au moins $(\frac{1}{4} + o_{k\to+\infty}(1)) \ln k$ des $L_i(n)$ soient premier.

Le deuxième résultat de Maynard est le suivant :

Théorème 2.7. *Soit $m \in \mathbb{N}$. Soit $r \in \mathbb{N}$ assez grand et dépendant de m. Soit $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, \ldots, a_r\}$ un ensemble de r entiers distincts. Alors :*

$$\frac{\#\{\{h_1, \ldots, h_m\} \subseteq \mathcal{A} \text{ : pour une infinité de } n, \text{ tous les } n + h_i, i \in [[1; m]] \text{ sont premiers}\}}{\#\{\{h_1, \ldots, h_m\} \subseteq \mathcal{A}\}} \gg_m 1$$

Ainsi une proportion strictement positive de m-uplets admissibles satisfait la conjecture des m-uplets de nombres premiers pour tout m dans un sens approprié.

Le troisième résultat est :

Théorème 2.8. *On a :*

$$\liminf_n (p_{n+1} - p_n) \leqslant 600$$

Soulignons toutefois que le résultat ci-dessus n'utilise pas les techniques mises en place par Zhang pour démontrer l'existence d'écarts bornés entre les nombres premiers. La démonstration, dans l'ensemble, est assez élémentaire, et s'appuie surtout sur le théorème de Bombieri-Vinogradov.

Si on admet que les nombres premiers ont un niveau de distribution plus grand que dans le théorème de Bombieri-Vinogradov, on peut obtenir des résultats plus forts, en particulier ceux énoncés dans le théorème suivant, qui constitue le dernier résultat de Maynard :

Théorème 2.9. *On admet ici que les nombres premiers ont un niveau de distribution θ pour tout $\theta < 1$. Alors :*

$$\liminf_n (p_{n+1} - p_n) \leqslant 12$$

$$\liminf_n (p_{n+2} - p_n) \leqslant 600$$

Maynard pensait que si la constante 12 dans ce théorème semble optimale à travers la méthode employée sous sa forme actuelle, autant la constante 600 qui apparait dans ce théorème et dans le Théorème 2.8 ne l'est sûrement pas. Il estimait aussi qu'en améliorant un peu plus les calculs numériques, notre méthode pourrait produire une borne plus forte, et la plupart des idées des travaux de Zhang (et ainsi que des précisions apportées par le projet Polymath) pourraient être fusionnées avec cette méthode pour réduire cette constante.

Le projet Polymath8b a en réalité depuis réussi à réduire ces deux constantes : selon l'article [**?**], la borne du Théorème 2.8 a été réduite à 270 et celle du Théorème 2.9 à 6.

Remarquons pour terminer que l'hypothèse de la conjecture d'Elliott-Halberstam permet de réduire la majoration de la borne $O(m^3 e^{2m})$ dans le Théorème 2.6.

Chapitre 3

Une amélioration de la méthode du crible de Goldston, Pintz et Yıldırım

Avant de démontrer complètement les résultats énoncés dans la partie précédente, on va d'abord donner une explication de l'idée principale qui se trouve derrière cette nouvelle approche.

L'idée de départ de la méthode GPY est d'étudier, pour $\mathcal{H} = \{h_1, \ldots, h_k\}$, la somme

$$S(N,\rho) = \sum_{N \leqslant n < 2N} \Big(\sum_{i=1}^{k} \chi_{\mathbb{P}}(n+h_i) - \rho \Big) w_n \tag{3.1}$$

où $\chi_{\mathbb{P}}$ désigne la fonction caractéristique des nombres premiers (i.e. $\chi_{\mathbb{P}}(n) = 1$ si n est premier et 0 sinon), $\rho \in \mathbb{R}_+^*$ et les w_n sont des coefficients positifs, qui seront appelés dans la suite des poids.

On remarque vite que si on sait montrer que $S(N,\rho) > 0$, alors :

$$\exists n \in [[N, 2N-1]] \ : \Big(\sum_{i=1}^{k} \chi_{\mathbb{P}}(n+h_i) - \rho \Big) w_n > 0$$

Or par hypothèse, $w_n \geqslant 0$, donc $\sum_{i=1}^{k} \chi_{\mathbb{P}}(n+h_i) - \rho > 0$, i.e. $\sum_{i=1}^{k} \chi_{\mathbb{P}}(n+h_i) > \rho$. Comme $\sum_{i=1}^{k} \chi_{\mathbb{P}}(n+h_i)$ est entier, alors $\sum_{i=1}^{k} \chi_{\mathbb{P}}(n+h_i) \geqslant \lfloor \rho+1 \rfloor$. Cette inégalité signifie qu'il y a au moins $\lfloor \rho+1 \rfloor$ nombres parmi les $n+h_i$ qui sont premiers. Ce qui, en résumé, nous donne : il existe $n \in [[N, 2N]]$ tel qu'au moins $\lfloor \rho+1 \rfloor$ éléments de l'ensemble $\{n+h_1, \ldots, n+h_k\}$ soient premiers.

On en déduit alors que si on a $S(N,\rho) > 0$ pour tout N assez grand (i.e. pour un nombre infini de N), alors il y a une infinité d'entiers n pour lesquels au moins $\lfloor \rho+1 \rfloor$ éléments de l'ensemble $\{n+h_1, \ldots, n+h_k\}$ soient premiers (et de là, il y a une infinité d'intervalles de longueur finie contenant au moins $\lfloor \rho+1 \rfloor$ nombres premiers).

Les poids w_n sont en général choisis pour imiter ceux utilisés dans le crible de Selberg. Estimer (3.1) peut être interprété comme un problème de crible "k-dimensionnel". Les poids k-dimensionnel habituels du crible de Selberg (lesquels peuvent se révéler optimaux dans certains contextes) sont :

$$w_n = \Big(\sum_{\substack{d \mid \prod_{i=1}^{k}(n+h_i) \\ d<R}} \lambda_d \Big)^2, \qquad \lambda_d = \mu(d) \Big(\ln\big(\frac{R}{d}\big) \Big)^k \tag{3.2}$$

Avec le choix de tels poids dans notre contexte, on ne parvient pas à montrer l'existence d'écarts bornés entre nombres premiers si on admet la conjecture d'Elliott-Halberstam. La nouvelle idée essentielle de l'article de Goldston, Pintz et Yıldırım [?] a été de considérer des poids de crible plus globaux de la forme

$$\lambda_d = \mu(d) F\Big(\ln\big(\frac{R}{d}\big) \Big) \tag{3.3}$$

avec F une fonction C^∞ convenable. Goldston, Pintz et Yıldırım ont choisi de prendre $F(x) = x^{k+\ell}$ avec un $\ell \in \mathbb{N}$ qui convient, lequel s'est révélé assez optimal lorsque k est assez grand. Ce qui a permis de gagner un facteur d'environ 2 pour k assez grand par rapport aux choix précédents de poids de crible. Par conséquent si on ne sait pas montrer les écarts bornés en utilisant juste le fait que les nombres premiers ont un niveau de distribution θ pour tout $\theta < \frac{1}{2}$, on y arrive par contre si on admet le fait qu'ils ont un niveau de distribution $\theta > \frac{1}{2}$.

Le nouvel ingrédient dans l'approche de Maynard est de considérer une forme plus générale des poids de crible :

$$w_n = \Big(\sum_{d_i | n+h_i \ \forall i} \lambda_{d_1,\ldots,d_k} \Big)^2 \tag{3.4}$$

Utiliser des poids tels que $\lambda_{d_1,\ldots,d_k}$ est la caractéristique essentielle de la méthode utilisée dans l'article de Maynard. Cela permet d'améliorer le choix précédent des poids de crible par un facteur assez grand pris de façon arbitraire, à condition que k soit suffisamment grand. C'est l'extrême flexibilité gagnée en permettant aux poids de dépendre des diviseurs de chaque facteur individuellement, qui nous donne cette amélioration. L'idée d'utiliser de tels poids n'est pas entièrement nouvelle. Ainsi, Selberg ([?], page 245) l'avait déjà suggéré en voulant utiliser des poids similaires dans ses travaux sur les approximations de la conjecture des nombres premiers jumeaux, et Goldston et Yıldırım [?] avaient ensuite considéré des poids similaires dans un travail antérieur à la méthode GPY, mais avec un support restreint à $d_i < R^{\frac{1}{k}}$ pour tout i.

On peut d'ailleurs remarquer que le choix utilisé ici des $\lambda_{d_1,\ldots,d_k}$ ressemblera à

$$\lambda_{d_1,\ldots,d_k} \approx \Big(\prod_{i=1}^{k} \mu(d_i) \Big) f(d_1, \ldots, d_k) \tag{3.5}$$

avec f fonction C^∞ qui convient dans notre cas. Pour le choix précis de $\lambda_{d_1,\ldots,d_k}$ (qui sera donné dans la Proposition 5.1), on trouvera pratique de donner une forme légèrement différente de $\lambda_{d_1,\ldots,d_k}$, mais les poids de la forme (3.5) devraient donner à peu près les mêmes résultats.

Afin de démontrer ses résultats, Maynard utilise les mêmes moyens que Goldston, Pintz, et Yıldırım, mais avec l'amélioration du crible citée précédemment. Pour cela, il commence par décomposer $S(N,\rho)$ en la mettant sous la forme $S(N,\rho) = S_2 - \rho S_1$, avec

$$S_1 = \sum_{\substack{N \leqslant n < 2N \\ n \equiv v_0 \pmod W}} \Big(\sum_{d_i | n+h_i \ \forall i} \lambda_{d_1,\ldots,d_k} \Big)^2 \quad ; \quad S_2 = \sum_{\substack{N \leqslant n < 2N \\ n \equiv v_0 \pmod W}} \Big(\sum_{i=1}^{k} \chi_{\mathbb{P}}(n+h_i) \Big) \Big(\sum_{d_i | n+h_i \ \forall i} \lambda_{d_1,\ldots,d_k} \Big)^2$$

On remarque que S_2 et S_1 peuvent être vues comme des formes quadratiques en les $\lambda_{d_1,\ldots,d_k}$. Maynard, en reprenant les idées de la méthode du crible de Selberg, fait un changement de variables $y_{r_1,\ldots,r_k}$ pour écrire les deux sommes comme des expressions en deux formes quadratiques diagonales (i.e. qui peuvent s'écrire comme une somme de carrés des $y_{r_1,\ldots,r_k}$). Tous ces calculs feront l'objet du chapitre 6. En particulier, le calcul de S_2 nécessite le fait que les nombres premiers ont un certain niveau de distribution θ, sans préciser pour le moment l'intervalle de définition de θ.

Ensuite, en reprenant une idée de Goldston, Pintz, et Yıldırım, il généralise l'expression de $y_{r_1,\ldots,r_k}$ par rapport à une fonction F, ce qui veut dire qu'au lieu d'écrire y comme une fonction F à une variable, F est ici à k variables. Maynard utilise alors un lemme démontré par Goldston, Pintz, et Yıldırım afin d'écrire S_1 et S_2 en une expression où les sommes disparaissent. Ces transformations feront l'objet du chapitre 7. On peut remarquer qu'au lieu d'une intégrale pour les travaux de Goldston, Pintz, et Yıldırım, ceux de Maynard feront apparaitre k intégrales, ceci étant du à sa généralisation.

Le rapport des termes principaux de S_1 et S_2 devient tout simplement une expression de la forme $\frac{J_k(F)}{I_k(F)}$. On choisit alors un ensemble de fonctions $\mathcal{S}_k$ tel que cette fraction soit bien définie et ne s'annule pas (de manière à vérifier la remarque faite au début de ce chapitre). On va ensuite minorer le mieux possible

$$M_k = \sup_{F \in \mathcal{S}_k} \frac{J_k(F)}{I_k(F)}$$

pour les valeurs de k qui se révèleront être les plus intéressantes à prendre.

Les calculs sur S_2 entraînent que R doit être défini par rapport à N et θ, ce qui entraîne que ρ doit aussi être choisi comme dépendant de θ. Ainsi, tous les résultats de Maynard ne dépendent que de la valeur θ et de la minoration de M_k.

Concernant la minoration de M_k, on choisit des valeurs de k pour lesquelles il existe bien un ensemble admissible à k éléments et pour que M_k soit minoré par des nombres entiers convenables, c'est -à-dire que cette borne ne soit pas trop faible pour éviter que $\lfloor \rho+1 \rfloor$ soit trop faible (par exemple que $\rho \leqslant 1$) ou trop forte, afin de pouvoir avoir $\lfloor \rho+1 \rfloor$ soit égal à 2 ou 3 selon les résultats à démontrer (pour $k = 5$, on a $M_k > 2$, et pour $k = 105$, $M_k > 4$). Les calculs de ces minorations seront faits au chapitre 9. On obtient alors les troisième et quatrième théorèmes de Maynard selon qu'on a besoin que $\theta < \frac{1}{2}$ (et on utilise le théorème de Bombieri-Vinogradov) ou que $\theta < 1$ (et on admet la conjecture d'Elliott-Halberstam).

Le premier résultat portant sur une majoration asymptotique de $\liminf_n (p_{n+m} - p_n)$ avec $m \in \mathbb{N}$ fixé, il convient de chercher à minorer M_k dans le cas où k est assez grand. Le chapitre 8 traite des calculs pour ce cas. La démonstration finale de ce résultat ne nécessite également que le théorème de Bombieri-Vinogradov.

Enfin le deuxième théorème de Maynard peut être démontré en utilisant un résultat de la démonstration précédente puis des arguments combinatoires.

Chapitre 4

Notations

Dans tout cet exposé, on fixe k un entier strictement positif, et $\mathcal{H} = \{h_1, ..., h_k\}$ un ensemble admissible. En particulier, aucune des constantes implicites par la notation asymptotique o, O ou $\ll$ ne dépendra de k ou de $\mathcal{H}$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on notera $\mathcal{H}_n = \{n + h_1, \ldots, n + h_k\}$.

N est un entier assez grand, et chaque notation asymptotique se réfère toujours à la limite $N \to +\infty$.

Chapitre 5

Étapes de la démonstration

On jugera dans la suite pratique de choisir les poids w_n tels que $w_n = 0$ quand $n \notin v \pmod W$, où v est une classe résiduelle fixée et $W = \prod_{p \leqslant D_0} p$. Cette modification minime permet d'éviter des complications techniques dans le traitement de l'effet des petits facteurs premiers. Le choix précis de D_0 n'est pas très important, mais il suffit de choisir

$$D_0 = \ln\ln\ln N \tag{5.1}$$

On remarque que $\vartheta(D_0) = \ln W$, donc par le théorème des nombres premiers, $W = e^{D_0(1+o(1))} \ll e^{2D_0} = (\ln\ln N)^2$, donc $W \ll (\ln\ln N)^2$.

Comme $\mathcal{H}$ est admissible, alors $\forall p \leqslant D_0,\ \exists a_p \ /\ a_p \not\equiv h_i \pmod p\ \forall i \in [[1,k]]$, alors, avec $W = \prod_{j=1}^{\ell} p_j$, on étudie le système

$$\begin{cases} x & \equiv & a_{p_1} \pmod{p_1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x & \equiv & a_{p_\ell} \pmod{p_\ell} \end{cases}$$

On choisit v_0 tel que $\forall i \in [[1,k]]$, $v_0 + h_i$ et W soient premiers entre eux. Un tel choix est possible : en effet, comme les p_j sont premiers entre eux, par le théorème chinois, $\exists!\ y \pmod W$ tel que $y \equiv a_p \pmod p\ \forall p \leqslant D_0$, ce qui signifie que $\forall i \in [[1,k]], \forall p \leqslant D_0,\ y \not\equiv h_i \pmod p$, i.e. $-y + h_i \not\equiv 0 \pmod p$. On prend alors $v_0 = -y$.

Quand $n \equiv v_0 \pmod W$, on choisit alors nos poids w_n de la forme (3.4).

On va maintenant chercher à estimer les sommes suivantes :

$$S_1 = \sum_{\substack{N \leqslant n < 2N \\ n \equiv v_0 \pmod W}} \Big(\sum_{d_i | n+h_i\ \forall i} \lambda_{d_1,\dots,d_k} \Big)^2 \tag{5.2}$$

$$S_2 = \sum_{\substack{N \leqslant n < 2N \\ n \equiv v_0 \pmod W}} \Big(\sum_{i=1}^{k} \chi_{\mathbb{P}}(n+h_i) \Big) \Big(\sum_{d_i | n+h_i\ \forall i} \lambda_{d_1,\dots,d_k} \Big)^2 \tag{5.3}$$

Remarque. *L'expression $S(N,\rho)$ défini par* (3.1) *vaut alors $S(N,\rho) = S_2 - \rho S_1$.*

On évalue ces sommes à partir de la propriété suivante :

Proposition 5.1. *Ici, les nombres premiers ont un niveau de distribution $\theta > 0$; soit $R = N^{\frac{\theta}{2}-\delta}$ avec $\delta > 0$ fixé. Soit $\lambda_{d_1,\dots,d_k}$ défini en fonction de F, une fonction C^∞, par :*

$$\lambda_{d_1,\dots,d_k} = \Big(\prod_{i=1}^{k} \mu(d_i) d_i \Big) \sum_{\substack{r_1,\dots,r_k \\ d_i | r_i,\ \forall i \\ (r_i, W)=1,\ \forall i}} \frac{\mu(\prod_{i=1}^{k} r_i)^2}{\prod_{i=1}^{k} \varphi(r_i)} F\Big(\frac{\ln r_1}{\ln R}, \dots, \frac{\ln r_k}{\ln R} \Big)$$

quand $(\prod_{i=1}^{k} d_i, W) = 1$, et $\lambda_{d_1,\dots,d_k} = 0$ sinon.

De plus, on suppose que F est à support dans $\mathcal{R}_k = \{(x_1, \ldots, x_k) \in [0,1]^k : \sum_{i=1}^k x_i \leqslant 1\}$. Alors on a :

$$S_1 = \frac{(1+o(1))\varphi(W)^k N(\ln R)^k}{W^{k+1}} I_k(F) \quad et \quad S_2 = \frac{(1+o(1))\varphi(W)^k N(\ln R)^{k+1}}{W^{k+1}\ln N} \sum_{m=1}^{k} J_k^{(m)}(F)$$

sous les conditions $I_k(F) \neq 0$ et $\forall m \in [[1;k]]$, $J_k^{(m)}(F) \neq 0$, avec :

$$I_k(F) = \int_0^1 \ldots \int_0^1 F(t_1, \ldots, t_k)^2 \mathrm{d}t_1 \ldots \mathrm{d}t_k$$

$$J_k^{(m)}(F) = \int_0^1 \ldots \int_0^1 \Big(\int_0^1 F(t_1, \ldots, t_k)\mathrm{d}t_m \Big)^2 \mathrm{d}t_1 \ldots \mathrm{d}t_{m-1}\mathrm{d}t_{m+1} \ldots \mathrm{d}t_k$$

On rappelle que si $S_2 \gg S_1$, alors, d'après l'égalité (3.1), en utilisant la méthode GPY, on peut montrer qu'il y a une infinité d'entiers n tels que plusieurs entiers parmi les $n + h_i$ soient premiers. La propriété suivante montre cette affirmation de façon plus précise :

Proposition 5.2. *Ici, les nombres premiers ont un niveau de distribution $\theta > 0$. Soit $\mathcal{H} = \{h_1, \ldots, h_k\}$ un ensemble admissible. Soient $I_k(F)$ et $J_k^{(m)}(F)$ définis comme dans la proposition précédente. Soit $\mathcal{S}_k$ l'ensemble des fonctions Riemann-intégrables $F : [0,1]^k \to \mathbb{R}$ à support dans $\mathcal{R}_k = \{(x_1, \ldots, x_k) \in [0,1]^k : \sum_{i=1}^k x_i \leqslant 1\}$ avec $I_k(F) \neq 0$ et $\forall m \in [[1;k]]$, $J_k^{(m)}(F) \neq 0$. Soit*

$$M_k = \sup_{F \in \mathcal{S}_k} \frac{\sum_{m=1}^k J_k^{(m)}(F)}{I_k(F)}, \qquad r_k = \left\lceil \frac{\theta M_k}{2} \right\rceil$$

Alors il y a une infinité de n tels qu'au moins r_k éléments de l'ensemble $\mathcal{H}_n$ soient premiers. En particulier, on a :

$$\liminf_n (p_{n+r_k-1} - p_n) \leqslant \max_{1 \leqslant i,j \leqslant k} (h_i - h_j).$$

On va maintenant démontrer la Proposition 5.2 en admettant la Proposition 5.1.

Démonstration de la Proposition 5.2. On pose $S = S_2 - \rho S_1$. Alors

$$S = \sum_{\substack{N \leqslant n \leqslant 2N \\ n \equiv v_0 \pmod W}} \Big(\sum_{i=1}^k \chi_{\mathbb{P}}(n+h_i) - \rho \Big) \Big(\sum_{d_i | (n+h_i)\ \forall i} \lambda_{d_1, \ldots, d_k} \Big)^2$$

On rappelle, d'après ce qui a été vu au début du chapitre 3 sur $S(N, \rho)$ et par hypothèse sur le support de $\lambda_{d_1,\ldots,d_k}$, que si on montre que $S > 0$ pour N assez grand, alors il y a une infinité d'entiers n tels qu'au moins $\lfloor \rho + 1 \rfloor$ éléments de la famille $(n + h_i)_{1 \leqslant i \leqslant k}$ soient premiers. Commençons donc par montrer que $S > 0$ pour N assez grand.

Soit $R = N^{\frac{\theta}{2} - \delta}$ pour $\delta > 0$ petit. Par définition de M_k, $\exists F_0 \in \mathcal{S}_k / \ M_k - \delta < \frac{\sum_{m=1}^k J_k^{(m)}(F_0)}{I_k(F_0)}$. Donc $\sum_{m=1}^k J_k^{(m)}(F_0) > \underbrace{(M_k - \delta)}_{>0} \times \underbrace{I_k(F_0)}_{\substack{>0 \\ \text{par définition et par hypothèse}}} > 0$. De plus, comme F_0 est une fonction Riemann-intégrable et que les fonctions C^∞ sont denses dans les fonctions Riemann-intégrables, alors il existe une fonction C^∞, F_1 telle que $\sum_{m=1}^k J_k^{(m)}(F_1) > (M_k - 2\delta) I_k(F_1) > 0$. D'après la Proposition 5.1, on peut choisir $\lambda_{d_1,\ldots,d_k}$ tel que

$$\begin{aligned}
S &= \frac{(1+o(1))\varphi(W)^k N(\ln R)^{k+1}}{W^{k+1}\ln N} \sum_{m=1}^k J_k^{(m)}(F_1) - \rho \frac{(1+o(1))\varphi(W)^k N(\ln R)^k}{W^{k+1}} I_k(F_1) \\
&= \frac{\varphi(W)^k N(\ln R)^k}{W^{k+1}} \bigg(\Big(1 + o(1)\Big) \frac{\ln R}{\ln N} \sum_{m=1}^k J_k^{(m)}(F_1) - \rho \Big(1+o(1)\Big) I_k(F_1) \bigg) \\
&= \frac{\varphi(W)^k N(\ln R)^k}{W^{k+1}} \bigg(\frac{\ln R}{\ln N} \sum_{m=1}^k \underbrace{J_k^{(m)}(F_1)}_{>(M_k - 2\delta) I_k(F_1)} - \rho I_k(F_1) + o(1) \bigg) \\
&\geqslant \frac{\varphi(W)^k N(\ln R)^k I_k(F_1)}{W^{k+1}} \bigg(\frac{\ln R}{\ln N} (M_k - 2\delta) - \rho + o(1) \bigg) \\
&\geqslant \frac{\varphi(W)^k N(\ln R)^k I_k(F_1)}{W^{k+1}} \bigg((\frac{\theta}{2} - \delta)(M_k - 2\delta) - \rho + o(1) \bigg)
\end{aligned}$$

Pour la dernière ligne, l'expression est due au fait que $R = N^{\frac{\theta}{2}-\delta}$, donc que $\ln R = (\frac{\theta}{2} - \delta)\ln N$.

On va maintenant définir plus explicitement ρ. Comme on l'a défini dès le début de cette démonstration, il ne dépend pas de δ, et on a même à la place la dépendance de δ par rapport à ρ. On pose alors $\rho = \frac{\theta M_k}{2} - \varepsilon$; en prenant δ suffisamment petit (et qui dépend donc de ε), on obtient bien : $S > 0$ pour N suffisamment grand. Donc il y a une infinité d'entiers n tels qu'au moins $\lfloor \rho+1 \rfloor$ éléments de la famille $(n+h_i)_{1\leqslant i\leqslant k}$ soient premiers. Or $\lfloor \rho+1 \rfloor = \lfloor \frac{\theta M_k+1}{2} + 1 - \varepsilon \rfloor = \lceil \frac{\theta M_k}{2} \rceil$ pour ε assez petit. La propriété 5.2 est ainsi démontrée. □

Remarque 5.3. *Le cas particulier énoncé à la fin de la proposition se déduit assez naturellement, dans le sens où : si on change la numérotation des h_i pour les ranger par ordre croissant, et si on prend la famille $(n+h_i)_{1\leqslant i\leqslant r_k}$ telle que chaque élément de cette famille soit premier, alors si $p_m = h_1 + n$ pour un certain $m \in \mathbb{N}$, nécessairement $p_{m+r_k-1} \leqslant n + h_{r_k}$. D'où $\liminf_n (p_{n+r_k-1} - p_n) \leqslant (n+h_{r_k}) - (n+h_1) = h_{r_k} - h_1$, ce qui donne bien le résultat.*

Ainsi, si les nombres premiers ont un niveau de distribution θ fixé, pour montrer l'existence de plusieurs éléments de la famille $(n+h_i)_{1\leqslant i\leqslant k}$ comme étant premiers pour une infinité de $n \in \mathbb{N}$, on a besoin d'une bonne minoration de M_k. La proposition suivante établit une telle minoration pour différentes valeurs de k.

Proposition 5.4. *Soit $k \in \mathbb{N}$; soit M_k comme dans la Proposition* 5.2. *Alors :*
1. $M_5 > 2$.
2. $M_{105} > 4$
3. Pour k suffisamment grand, $M_k > \ln k - 2\ln\ln k - 2$.

La fin de cette partie sera consacrée à la démonstration des Théorèmes 2.6, 2.7, 2.8 et 2.9 à partir des Propositions 5.2 et 5.4.

Commençons par le Théorème 2.8.

Démonstration du Théorème 2.8. On choisit ici $k = 105$. Par la Proposition 5.4, on a donc $M_{105} > 4$.

Par le théorème de Bombieri-Vinogradov, les nombres premiers ont un niveau de distribution $\theta = \frac{1}{2} - \varepsilon$, $\forall \varepsilon > 0$.

Si on prend ε suffisamment petit, on a $\frac{\theta M_{105}}{2} > 1$. Donc, en reprenant les notations de la propriétés 5.2, $r_k \leqslant 2$. D'où $p_{n+1} - p_n \leqslant p_{n+r_k-1} - p_n$. Par la propriété 5.2, on a alors

$$\liminf_n (p_{n+1} - p_n) \leqslant \max_{1\leqslant i,j\leqslant 105} (h_i - h_j)$$

pour tout ensemble admissible $\mathcal{H} = \{h_1, \ldots, h_{105}\}$. En reprenant des opérations mises au point par Thomas Engelsma (non publié), on peut alors prendre $\mathcal{H}$ tel que $0 \leqslant h_1 < \ldots < h_{105}$ et $h_{105} - h_1 = 600$ [1]. Ceci conclut la démonstration. □

Passons à la démonstration du Théorème 2.9. Pour ce théorème, on rappelle que la conjecture d'Elliott-Halberstam est admise.

Démonstration du Théorème 2.9. Comme la conjecture d'Elliott-Halberstam est admise, les nombres premiers ont un niveau de répartition $\theta < 1$. θ est donc de la forme $\theta = 1 - \varepsilon$, avec $\varepsilon > 0$.

Pour démontrer le second résultat, on prend $k = 105$ et $\mathcal{H}$ comme dans la démonstration précédente. Or pour ε suffisamment petit, et parce que $M_{105} > 4$ par la Proposition 5.4, on a $\frac{\theta M_{105}}{2} > 2$. On peut donc utiliser la Proposition 5.2 avec $r_k = 3$, ce qui donne $\liminf_n (p_{n+2} - p_n) = \liminf_n (p_{n+r_k-1} - p_n) \leqslant \max_{1\leqslant i,j\leqslant 105}(h_i - h_j)$. Dans notre cas, $\max_{1\leqslant i,j\leqslant 105}(h_i - h_j) = 600$, d'où $\liminf_n (p_{n+2} - p_n) \leqslant 600$. Le deuxième résultat du Théorème 2.9 est démontré.

Pour démontrer le premier résultat, on prend $k = 5$ et $\mathcal{H} = \{0, 2, 6, 8, 12\}$. Ici, comme $M_5 > 2$ par la Proposition 5.4, on obtient $\frac{\theta M_5}{2} > 1$ pour ε suffisamment petit. On applique alors la Proposition 5.2 avec $r_k = 2$, et on obtient $\liminf_n (p_{n+1} - p_n) = \liminf_n (p_{n+r_k-1} - p_n) \leqslant \max_{1\leqslant i,j\leqslant 5}(h_i - h_j) = 12$. Le premier résultat est démontré. □

On va maintenant démontrer le Théorème 2.6. Pour cette démonstration et la suivante, on va prendre le cas où k est suffisamment grand, et les constantes implicites dans les notations asymptotiques qui seront utilisées dans chaque démonstration seront indépendantes de k.

1. De façon explicite, on prend $\mathcal{H} = \{0, 10, 12, 24, 28, 30, 34, 42, 48, 52, 54, 64, 70, 72, 78, 82, 90, 94, 100, 112, 114, 118, 120, 124, 132, 138, 148, 154, 168, 174, 178, 180, 184, 190, 192, 202, 204, 208, 220, 222, 232, 234, 250, 252, 258, 262, 264, 268, 280, 288, 294, 300, 310, 322, 324, 328, 330, 334, 342, 352, 358, 360, 364, 372, 378, 384, 390, 394, 400, 4002, 408, 412, 418, 420, 430, 432, 442, 444, 450, 454, 462, 468, 472, 478, 484, 490, 492, 498, 504, 510, 528, 532, 534, 538, 544, 558, 562, 570, 574, 580, 582, 588, 594, 598, 600\}$

Démonstration du Théorème 2.6. Par le théorème de Bombieri-Vinogradov, on peut prendre $\theta = \frac{1}{2} - \varepsilon$ avec $\varepsilon > 0$. Par la Proposition 5.4, on a, pour k assez grand :

$$\begin{aligned} \frac{\theta M_k}{2} &\geqslant (\frac{1}{2} - \varepsilon) \times \frac{1}{2} \times (\ln k - \ln\ln k - 2) \\ &\geqslant (\frac{1}{4} - \frac{\varepsilon}{2})(\ln k - 2\ln\ln k - 2) \end{aligned}$$

On prend $\varepsilon = \frac{1}{k}$, et on observe alors que $\frac{\theta M_k}{2} > (\frac{1}{4} - \frac{1}{2k})(\ln k - 2\ln\ln k - 2)$. En choisissant k tel que $k \geqslant Cm^2e^{4m}$ avec C indépendant de m et de k, on a alors $-\frac{1}{k} \geqslant -\frac{1}{Cm^2e^{4m}}$ et comme $x \mapsto \ln(\frac{x}{(\ln x)^2})$ est une fonction croissante si $x \geqslant e^2$, on a alors $\frac{k}{(\ln k)^2} \geqslant \frac{Cm^2e^{4m}}{\ln(Cm^2e^{4m})}$ si $m \geqslant 1$ et $C > \frac{1}{2}$. Donc

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2k}\right)\left(\ln k - 2\ln\ln k - 2\right) &= \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2k}\right)\left(\ln(\frac{k}{(\ln k)^2}) - 2\right) \\ &\geqslant \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2k}\right)\left(\ln(\frac{Cm^2e^{4m}}{(\ln(Cm^2e^{4m}))^2}) - 2\right) \\ &\geqslant m + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2Cm^2e^{4m}}\right)\underbrace{\left(\ln\left(\frac{Cm^2}{(\ln(Cm^2e^{4m}))^2}\right) - 2\right)}_{>1 \text{ pour } C \text{ assez grand}} - \frac{2}{Cme^{4m}} \\ &> m. \end{aligned}$$

Ainsi, $\frac{\theta M_k}{2} > m$ si $k \geqslant Cm^2e^{4m}$ et C bien choisi donc $\lceil \frac{\theta M_k}{2} \rceil \geqslant m+1$. Ce qui implique, par la propriété 5.2, que pour tout ensemble admissible $\mathcal{H} = \{h_1, \ldots, h_k\}$ avec $k \geqslant Cm^2e^{4m}$, il y a une infinité d'entiers n telle qu'au moins $m+1$ éléments de $\mathcal{H}_n$ soient premiers.

On va maintenant choisir un ensemble admissible qui nous convient. Prenons $\mathcal{H} = \{p_{\pi(k)+1}, \ldots, p_{\pi(k)+k}\}$ qui est l'ensemble des k premiers nombres premiers qui sont plus grands que k par définition de $\pi(k)$.

Cet ensemble est admissible : en effet, aucun des éléments de $\mathcal{H}$ n'est un multiple d'un nombre premier plus petit que k puisqu'ils sont tous premiers et supérieurs à k (pour $p \leqslant k$ premier, on peut prendre $a_p = 0$ en reprenant les notations de la définition d'un ensemble admissible) ; de plus, comme il n'y a que k éléments dans $\mathcal{H}$, pour $p > k$ premier, on obtient alors le fait que le cardinal de $\bar{\mathcal{H}}$ qui est l'ensemble des éléments de $\mathcal{H}$ réduits modulo p, est strictement plus petit que $p = \#\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, donc l'existence des a_p est établie pour chaque $p > k$.

$\mathcal{H}$ a pour diamètre (le diamètre étant la plus grande différence entre deux éléments de $\mathcal{H}$) $p_{\pi(k)+k} - p_{\pi(k)+1}$. Or $p_{\pi(k)+k} - p_{\pi(k)+1} \leqslant p_{\pi(k)+k} \ll (\pi(k)+k)\ln(\pi(k)+k) \ll k\ln k$. Donc $\liminf_n(p_{n+m} - p_n) \ll k\ln k$. Enfin, si on prend $k = \lceil Cm^2e^{4m} \rceil$ (qui vérifie bien notre hypothèse sur k), on obtient :

$$\begin{aligned} k\ln k &\leqslant (Cm^2e^{4m}+1)\ln(Cm^2e^{4m}+1) \ll Cm^2e^{4m}(\ln C + 2\ln m + 4m) \\ &\ll m^2e^{4m} \times 4m = m^3e^{4m} \end{aligned}$$

On obtient au final $\liminf_n(p_{n+m} - p_n) \ll m^3e^{4m}$, qui est le résultat attendu. □

Terminons cette partie par la démonstration du Théorème 2.7 qui se fait grâce à un simple argument de comptage.

Démonstration. Pour m fixé, on pose $k = \lceil Cm^2e^{4m} \rceil$ comme dans la partie précédente. Si $\mathcal{H} = \{h_1, \ldots, h_k\}$ est un ensemble admissible, d'après ce qu'on a déjà vu, il y a une infinité d'entiers n tels qu'au moins m éléments de $\mathcal{H}_n$ soient premiers. Réécrit autrement, $\exists \{h'_1, \ldots, h'_m\} \subseteq \{h_1, \ldots, h_k\}$ tel qu'il y a une infinité d'entiers n pour lesquels tous les $n + h'_i$ soient premiers avec $i \in [[1, m]]$.

On note $\mathcal{A}$ l'ensemble $\{a_1, \ldots, a_r\}$. On enlève à cet ensemble tous les éléments de la classe résiduelle modulo p_1 qui contient le plus petit nombre d'entiers. On fait ensuite la même chose pour p_2, et ainsi de suite pour tous les nombres premiers qui sont plus petits que k. On note $\mathcal{A}_2$ l'ensemble obtenu au final.

On peut alors montrer par récurrence sur le rang des nombres premiers que $\#\mathcal{A}_2 \geqslant \prod_{p \leqslant k}(1 - \frac{1}{p})$. En effet, si on note $\mathcal{A}_{2,j}$ l'ensemble $\mathcal{A}$ après avoir fait l'opération pour les j premiers nombres premiers inférieurs ou égaux à k, on remarque que $\#\mathcal{A}_{2,j} \geqslant \#\mathcal{A}_{2,j-1} - \#\mathcal{A}_{2,j-1} \times \frac{1}{p_j} = \mathcal{A}_{2,j-1}(1 - \frac{1}{p_j})$ pour $j \geqslant 2$ car à chaque opération, on retire au maximum $\#\mathcal{A}_{2,j-1} \times \frac{1}{p_j}$ éléments de l'ensemble précédent ; de même, $\#\mathcal{A}_{2,1} \geqslant r - \frac{r}{p_1} = r(1 - \frac{1}{p_1})$. De plus, $\prod_{p \leqslant k}(1 - \frac{1}{p}) \gg_m 1$ car k est fixé et ne dépend que de m. On a également que tous les sous-ensembles de $\mathcal{A}_2$ formés de k éléments sont admissibles car ils ne peuvent couvrir toutes les classes résiduelles modulo p pour tout nombre premier $p \leqslant k$ par définition de $\mathcal{A}_2$, et ils ne recouvrent pas non plus toutes les classes résiduelles modulo p pour tout nombre premier $p > k$ par cardinalité.

On pose $s = \#\mathcal{A}_2$, et comme r est supposé suffisamment grand, on peut supposer que $s > k$.

On remarque qu'il y a $\binom{s}{k}$ ensembles $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{A}_2$ de taille k. Comme chacun de ces ensembles est admissible, ils contiennent tous au moins un sous-ensemble $\{h'_1, \ldots, h'_m\} \subseteq \mathcal{A}_2$ qui vérifie la conjecture des m-uplets de nombres premiers. Or tout ensemble admissible $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}_2$ de taille m est contenu dans $\binom{s-m}{k-m}$ ensembles $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{A}_2$ de taille k. Il y a donc au final $\binom{s}{k}\binom{s-m}{k-m}^{-1}$ ensembles admissibles $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}_2$ de taille m qui vérifient la conjecture des m-uplets de nombres premiers. Or $\binom{s}{k}\binom{s-m}{k-m}^{-1} = \frac{s!(k-m)!}{k!(s-m)!} \gg_m s^m \gg r^m$; comme on a $\binom{r}{m}$ ensembles $\{h_1, \ldots, h_k\} \subseteq \mathcal{A}$ et que $\binom{r}{m} \leqslant r^m$. On obtient bien le résultat demandé. $\square$

Notre travail se résume donc maintenant à démontrer les Propositions 5.1 et 5.4.

Chapitre 6

Les manipulations du crible de Selberg

Dans cette partie, on va perfectionner les manipulations initiales dans le but de démontrer la Proposition 5.1. Les arguments utilisés sont des généralisations à plusieurs dimensions des arguments de crible utilisés dans [**?**]. En particulier, notre approche va être basée sur les idées combinatoires élémentaires de Selberg. Notre but va être ici d'introduire un changement de variables pour réécrire les sommes S_1 et S_2 sous une forme plus simple. Pour cela, on s'inspire de la méthode du crible de Selberg. En effet, on peut remarquer que S_1 et S_2 peuvent être vues comme des formes quadratiques en les $\lambda_{d_1,\dots,d_k}$. Grâce au changement de variables, ces deux sommes pourront apparaitre comme des formes quadratiques diagonales (i.e. en une somme de carrés).

Dans toute la suite de ce rapport, on supposera que les nombres premiers ont un niveau de distribution θ fixé, et on pose $R = N^{\frac{\theta}{2}-\delta}$. $\lambda_{d_1,\dots,d_k}$ est supposé à support dans

$$\{(d_1,\dots,d_k)/\ d = \prod_{i=1}^{k} d_i \leqslant R;\ (d,W)=1;\ \mu(d)^2 = 1\}.$$

Remarquons que la condition $\mu(d)^2 = 1$ implique que d est sans facteur carré, et donc que $(d_i, d_j) = 1$ pour tout i,j avec $i \neq j$.

6.1 Étude de S_1

Lemme 6.1. *Soit, pour $(r_1,\dots,r_k) \in (\mathbb{N}^*)^k$,*

$$y_{r_1,\dots,r_k} = \left(\prod_{i=1}^{k} \mu(r_i)\varphi(r_i)\right) \sum_{\substack{d_1,\dots,d_k \\ r_i | d_i\ \forall i}} \frac{\lambda_{d_1,\dots,d_k}}{\prod_{i=1}^{k} d_i}$$

Soit $y_{\max} = \sup_{r_1,\dots,r_k} |y_{r_1,\dots,r_k}|$. On a alors :

$$S_1 = \frac{N}{W} \sum_{r_1,\dots,r_k} \frac{y_{r_1,\dots,r_k}^2}{\prod_{i=1}^{k}\varphi(r_i)} + O\left(\frac{y_{\max}^2 \varphi(W)^k N (\ln R)^k}{W^{k+1} D_0}\right)$$

Démonstration. On commence par développer le carré dans S_1 :

$$\text{(6.1)} \qquad \begin{aligned} S_1 &= \sum_{\substack{N \leqslant n < 2N \\ n \equiv v_0 \pmod W}} \left(\sum_{d_i | n+h_i\ \forall i} \lambda_{d_1,\dots,d_k}\right)^2 = \sum_{\substack{N \leqslant n < 2N \\ n \equiv v_0 \pmod W}} \sum_{\substack{d_i | (n+h_i)\ \forall i \\ e_i | (n+h_i)\ \forall i}} \lambda_{d_1,\dots,d_k}\lambda_{e_1,\dots,e_k} \\ &= \sum_{\substack{N \leqslant n < 2N \\ n \equiv v_0 \pmod W}} \sum_{[d_i,e_i] | (n+h_i)\ \forall i} \lambda_{d_1,\dots,d_k}\lambda_{e_1,\dots,e_k} \end{aligned}$$

On rappelle que dans cette partie $[a,b]$ désigne le ppcm de a et b pour a,b entiers.

On échange maintenant l'ordre de sommation, ce qui nous donne :

$$S_1 = \sum_{\substack{d_1,\dots,d_k \\ e_1,\dots,e_k}} \sum_{\substack{N \leqslant n < 2N \\ n \equiv v_0 \pmod W \\ [d_i,e_i] | (n+h_i)\ \forall i}} \lambda_{d_1,\dots,d_k}\lambda_{e_1,\dots,e_k} = \sum_{\substack{d_1,\dots,d_k \\ e_1,\dots,e_k}} \lambda_{d_1,\dots,d_k}\lambda_{e_1,\dots,e_k} \sum_{\substack{N \leqslant n < 2N \\ n \equiv v_0 \pmod W \\ [d_i,e_i] | (n+h_i)\ \forall i}} 1 \tag{6.2}$$

Dans le cas où les entiers $W, [d_1, e_1], \dots, [d_k, e_k]$ sont deux à deux premiers entre eux, par le théorème des restes chinois, la somme interne peut être écrite comme une somme indicée par une seule classe de résidus modulo $q = W\prod_{i=1}^k [d_i, e_i]$. Pour $a \in [[0, q-1]]$ un représentant de cette classe, cette somme interne devient :

$$\sum_{\substack{N \leqslant n < 2N \\ n \equiv v_0 \pmod W \\ [d_i,e_i] | (n+h_i)\ \forall i}} 1 = \sum_{\substack{N \leqslant n < 2N \\ n \equiv a \pmod q}} 1 = \#\{N \leqslant n < 2N / n \equiv a \pmod q\} = B$$

Or les n comptés dans cette somme sont du type $a + \lambda q$ avec $N \leqslant a + \lambda q < 2N$, donc $B < \frac{N}{q} - \frac{a}{q} + 1 \leqslant \frac{N}{q} + 1$, donc cette somme interne vaut $\frac{N}{q} + O(1)$.

Dans le cas où les entiers $W, [d_1, e_1], \dots, [d_k, e_k]$ ne sont pas deux à deux premiers entre eux, la somme interne est nulle. Pour justifier cette affirmation, on va distinguer deux cas :

- Il existe i tel que $(W, [d_i, e_i]) \neq 1$
  Il existe alors p premier tel que $p|W$ et $p|[d_i, e_i]$, ce qui implique que $p|n + h_i$ par hypothèse sur la somme interne. De plus, $n \equiv v_0 \pmod W$; comme $p|W$, alors $n \equiv v_0 \pmod p$. Comme $p|n + h_i$ et $p|v_0 - n$, alors $p|n + h_i + (v_0 - n) = v_0 + h_i$, donc $(v_0 + h_i, W) \neq 1$, ce qui est impossible car v_0 avait été choisi de telle manière que $(v_0 + h_i, W) = 1$.
- Il existe i et j avec $i \neq j$ tels que $([d_i, e_i], [d_j, e_j]) \neq 1$.
  Il existe donc p premier tel que $p|([d_i, e_i], [d_j, e_j])$, i.e. $p|(n+h_i, n+h_j)$. Ainsi, $p|h_i - h_j$, ce qui est impossible car $p > W$.

On obtient donc pour S_1,

$$S_1 = \frac{N}{W} \sum'_{\substack{d_1,\dots,d_k \\ e_1,\dots,e_k}} \frac{\lambda_{d_1,\dots,d_k}\lambda_{e_1,\dots,e_k}}{\prod_{i=1}^k [d_i, e_i]} + O\Big(\sum'_{\substack{d_1,\dots,d_k \\ e_1,\dots,e_k}} |\lambda_{d_1,\dots,d_k}\lambda_{e_1,\dots,e_k}|\Big) \tag{6.3}$$

où $\sum'$ est une notation utilisée ici pour exprimer le fait que l'on impose que $W, [d_1, e_1], \dots, [d_k, e_k]$ soient deux à deux premiers entre eux. Pour simplifier les notations on pose $\lambda_{\max} = \sup_{d_1,\dots,d_k} |\lambda_{d_1,\dots,d_k}|$.

Par hypothèse, $\lambda_{d_1,\dots,d_k} \neq 0$ seulement si $\prod_{i=1}^k d_i < R$, et le terme d'erreur qui est dans l'équation (6.3) est :

$$\ll \lambda_{\max}^2 \sum'_{\substack{d_1,\dots,d_k \\ e_1,\dots,e_k}} 1 = \lambda_{\max}^2 \Big(\sum'_{d_1,\dots,d_k} 1\Big)^2$$

Or

$$\sum'_{d_1,\dots,d_k} 1 \leqslant \sum_{d<R} \sum_{\substack{d_1,\dots,d_k \\ \prod_{i=1}^k d_i = R}} 1 = \sum_{d<R} \tau_k(d) \ll R(\ln R)^{k-1}$$

en utilisant la Propriété 1.12.

Le terme d'erreur est donc un

$$O(\lambda_{\max}^2 R^2 (\ln R)^{2k}) \tag{6.4}$$

terme qui sera négligeable, comme on le verra dans la suite.

Concernant la somme principale, on va chercher à supprimer la dépendance entre les d_i et les e_i. Pour cela, on va se servir de l'égalité

$$\frac{1}{[d_i, e_i]} = \frac{1}{d_i e_i} \sum_{u_i | (d_i, e_i)} \varphi(u_i) \tag{6.5}$$

qui se justifie par le fait que $[d_i,e_i](d_i,e_i)=d_ie_i$, donc que $\frac{1}{[d_i,e_i]}=\frac{1}{d_ie_i}(d_i,e_i)=\frac{1}{d_ie_i}\sum_{u_i|(d_i,e_i)}\varphi(u_i)$.

Le terme principal, que l'on va noter $S_1^{(1)}$, peut alors se réécrire :

$$
\begin{aligned}
S_1^{(1)} &= \frac{N}{W}\sideset{}{'}\sum_{\substack{d_1,\dots,d_k\\ e_1,\dots,e_k}} \lambda_{d_1,\dots,d_k}\lambda_{e_1,\dots,e_k}\prod_{i=1}^{k}\frac{1}{[d_i,e_i]} \\
&= \frac{N}{W}\sideset{}{'}\sum_{\substack{d_1,\dots,d_k\\ e_1,\dots,e_k}} \lambda_{d_1,\dots,d_k}\lambda_{e_1,\dots,e_k}\prod_{i=1}^{k}\Big(\frac{1}{d_ie_i}\sum_{u_i|(d_i,e_i)}\varphi(u_i)\Big) \\
&= \frac{N}{W}\sideset{}{'}\sum_{\substack{d_1,\dots,d_k\\ e_1,\dots,e_k}} \lambda_{d_1,\dots,d_k}\lambda_{e_1,\dots,e_k}\frac{1}{(\prod_{i=1}^k d_i)(\prod_{i=1}^k e_i)}\prod_{i=1}^{k}\Big(\sum_{u_i|d_i,e_i}\varphi(u_i)\Big)
\end{aligned}
\tag{6.6}
$$

$$
= \frac{N}{W}\sideset{}{'}\sum_{\substack{d_1,\dots,d_k\\ e_1,\dots,e_k}} \lambda_{d_1,\dots,d_k}\lambda_{e_1,\dots,e_k}\frac{1}{(\prod_{i=1}^k d_i)(\prod_{i=1}^k e_i)}\Big(\sum_{\substack{u_1,\dots,u_k\\ u_j|(d_j,e_j)\ \forall j}}\prod_{i=1}^{k}\varphi(u_i)\Big)
$$

On échange l'ordre de sommation, ce qui nous donne :

$$
S_1^{(1)} = \frac{N}{W}\sum_{u_1,\dots,u_k}\sideset{}{'}\sum_{\substack{d_1,\dots,d_k\\ e_1,\dots,e_k\\ u_j|(d_j,e_j)\ \forall j}} \lambda_{d_1,\dots,d_k}\lambda_{e_1,\dots,e_k}\frac{1}{(\prod_{i=1}^k d_i)(\prod_{i=1}^k e_i)}\prod_{i=1}^{k}\varphi(u_i)
$$

Au final, le terme principal peut donc s'écrire :

$$
S_1^{(1)} = \frac{N}{W}\sum_{u_1,\dots,u_k}\prod_{i=1}^{k}\varphi(u_i)\sideset{}{'}\sum_{\substack{d_1,\dots,d_k\\ e_1,\dots,e_k\\ u_j|(d_j,e_j)\ \forall j}}\frac{\lambda_{d_1,\dots,d_k}\lambda_{e_1,\dots,e_k}}{(\prod_{i=1}^k d_i)(\prod_{i=1}^k e_i)}
\tag{6.7}
$$

Rappelons ici que $\lambda_{d_1,\dots,d_k}$ est à support dans

$$\{(d_1,\dots,d_k)\in\mathbb{N}^k/\ (d_i,W)=1\ \forall i;\ (d_i,d_j)=1\ \forall i\neq j\}.$$

On peut donc laisser tomber la condition que W soit premier avec chacun des $[d_i,e_i]$ dans la somme, puisque ces termes n'apportent aucune contribution : en effet, si cette condition n'est pas respectée alors $\lambda_{d_1,\dots,d_k}=0$. De même, on peut laisser tomber la condition que les entiers d_i soient deux à deux premiers entre eux ; on peut laisser tomber la même condition pour les e_i. Ainsi, la seule condition restante par rapport à la primalité entre W, $[d_1,e_1],\dots,[d_k,e_k]$ est celle qui nous dit que $(d_i,e_j)=1\ \forall i\neq j$.

On va laisser également tomber cette condition en multipliant, à l'intérieur de la somme interne de l'équation (6.7), par $\sum_{s_{i,j}|(d_i,e_j)}\mu(s_{i,j})$, expression dont on rappelle qu'elle vaut 1 si $(d_i,e_j)=1$ et 0 sinon. On fait cette multiplication pour tout $i\neq j$, ce qui transforme $S_1^{(1)}$ en l'expression suivante :

$$
\begin{aligned}
S_1^{(1)} &= \frac{N}{W}\sum_{u_1,\dots,u_k}\prod_{i=1}^{k}\varphi(u_i)\sum_{\substack{d_1,\dots,d_k\\ e_1,\dots,e_k\\ u_j|(d_j,e_j)\ \forall j}}\frac{\lambda_{d_1,\dots,d_k}\lambda_{e_1,\dots,e_k}}{(\prod_{i=1}^k d_i)(\prod_{i=1}^k e_i)}\prod_{\substack{1\leqslant i,j\leqslant k\\ i\neq j}}\sum_{s_{i,j}|(d_i,e_j)}\mu(s_{i,j}) \\
&= \frac{N}{W}\sum_{u_1,\dots,u_k}\prod_{i=1}^{k}\varphi(u_i)\sum_{\substack{d_1,\dots,d_k\\ e_1,\dots,e_k\\ u_j|(d_j,e_j)\ \forall j}}\frac{\lambda_{d_1,\dots,d_k}\lambda_{e_1,\dots,e_k}}{(\prod_{i=1}^k d_i)(\prod_{i=1}^k e_i)}\sum_{\substack{s_{1,2},\dots,s_{k,k-1}\\ s_{i,j}|(d_i,e_j)\ \forall i\neq j}}\prod_{\substack{1\leqslant i,j\leqslant k\\ i\neq j}}\mu(s_{i,j}).
\end{aligned}
\tag{6.8}
$$

On échange à nouveau l'ordre de sommation et on obtient :

$$
S_1^{(1)} = \frac{N}{W}\sum_{u_1,\dots,u_k}\prod_{i=1}^{k}\varphi(u_i)\sum_{s_{1,2},\dots,s_{k,k-1}}\prod_{\substack{1\leqslant i,j\leqslant k\\ i\neq j}}\mu(s_{i,j})\sum_{\substack{d_1,\dots,d_k\\ e_1,\dots,e_k\\ u_j|(d_j,e_j)\ \forall j\\ s_{i,j}|(d_i,e_j)\ \forall i\neq j}}\frac{\lambda_{d_1,\dots,d_k}\lambda_{e_1,\dots,e_k}}{(\prod_{i=1}^k d_i)(\prod_{i=1}^k e_i)}.
\tag{6.9}
$$

On peut maintenant restreindre les $s_{i,j}$ aux conditions $(s_{i,j}, u_i) = 1$ et $(s_{i,j}, u_j) = 1$ $\forall i \neq j$ car les termes avec $s_{i,j}$ qui vérifient $(s_{i,j}, u_i) \neq 1$ pour un certain i et un certain j ou $(s_{i,j}, u_j) \neq 1$ pour un certain i ou un certain j n'apportent aucune contribution à notre somme car dans ce cas, $(d_i, d_j) \neq 1$, ce qui veut dire que $\lambda_{d_1,\ldots,d_k} = 0$. De la même manière, on peut restreindre les $s_{i,j}$ aux conditions $(s_{i,j}, s_{i,a}) = 1$ et $(s_{i,j}, s_{b,j}) = 1$ $\forall a \neq j$ et $\forall b \neq i$. On va noter la somme d'indices $s_{1,2}, \ldots, s_{k,k-1}$ avec les restrictions évoquées précédemment par Σ^*.

On va maintenant introduire un changement de variables pour faire une estimation de la somme de façon plus simple. On pose pour cela :

$$y_{r_1,\ldots,r_k} = \Big(\prod_{i=1}^{k} \mu(r_i)\varphi(r_i)\Big) \sum_{\substack{d_1,\ldots,d_k \\ r_i | d_i \forall i}} \frac{\lambda_{d_1,\ldots,d_k}}{\prod_{i=1}^{k} d_i}. \tag{6.10}$$

Remarquons d'abord que par définition du support de $\lambda_{d_1,\ldots,d_k}$, $y_{r_1,\ldots,r_k}$ est à support dans $\{(r_1, \ldots, r_k) \in \mathbb{N}^k,\ r = \prod_{i=1}^{k} r_i \text{ sans facteur carré},\ r < R,\ (r, W) = 1\}$.

Ce changement de variables est inversible. En effet, pour $d_1, \ldots, d_k$ avec $\prod_{i=1}^{k} d_i$ sans facteur carré, on obtient :

$$\sum_{\substack{r_1,\ldots,r_k \\ d_i | r_i\ \forall i}} \frac{y_{r_1,\ldots,r_k}}{\prod_{i=1}^{k} \varphi(r_i)} = \sum_{\substack{r_1,\ldots,r_k \\ d_i | r_i\ \forall i}} \Big(\prod_{i=1}^{k} \mu(r_i) \sum_{\substack{e_1,\ldots,e_k \\ r_i | e_i \forall i}} \frac{\lambda_{e_1,\ldots,e_k}}{\prod_{i=1}^{k} e_i}\Big) \tag{6.11}$$

Or

$$\sum_{\substack{e_1,\ldots,e_k \\ r_i | e_i \forall i}} \frac{\lambda_{e_1,\ldots,e_k}}{\prod_{i=1}^{k} e_i} = \sum_{\substack{e_1,\ldots,e_k \\ r_i | e_i \forall i \\ \prod_{i=1}^{k} e_i \text{ sans facteur carré}}} \frac{\lambda_{e_1,\ldots,e_k}}{\prod_{i=1}^{k} e_i}. \tag{6.12}$$

par définition du support de $\lambda_{e_1,\ldots,e_k}$. On a alors, en échangeant l'ordre de sommation de l'équation (6.11) :

$$\sum_{\substack{r_1,\ldots,r_k \\ d_i | r_i\ \forall i}} \frac{y_{r_1,\ldots,r_k}}{\prod_{i=1}^{k} \varphi(r_i)} = \sum_{\substack{e_1,\ldots,e_k \\ \prod_{i=1}^{k} e_i \text{ sans facteur carré}}} \frac{\lambda_{e_1,\ldots,e_k}}{\prod_{i=1}^{k} e_i} \sum_{\substack{r_1,\ldots,r_k \\ d_i | r_i\ \forall i \\ r_i | e_i\ \forall i}} \prod_{i=1}^{k} \mu(r_i). \tag{6.13}$$

On va maintenant simplifier l'expression

$$\sum_{\substack{r_1,\ldots,r_k \\ d_i | r_i\ \forall i \\ r_i | e_i\ \forall i}} \prod_{i=1}^{k} \mu(r_i).$$

Comme $\prod_{i=1}^{k} e_i$ est sans facteur carré, chaque indice r_i de la somme est aussi sans facteur carré. Comme $d_i | r_i$ $\forall i$ et que $r_i | e_i$ $\forall i$, on peut poser $r_i' = \frac{r_i}{d_i}$ et $e_i' = \frac{e_i}{d_i}$, ce qui nous donne :

$$\sum_{\substack{r_1,\ldots,r_k \\ d_i | r_i\ \forall i \\ r_i | e_i\ \forall i}} \prod_{i=1}^{k} \mu(r_i) = \sum_{\substack{r_1',\ldots,r_k' \\ r_i' | e_i'\ \forall i}} \prod_{i=1}^{k} \mu(r_i' d_i) \tag{6.14}$$

Or $d_i | r_i$, $r_i | e_i$ et $\mu^2(e_i) = 1$ donc $(d_i, e_i') = 1$. Ainsi pour tout $r_i' | e_i'$, $(r_i', d_i) = 1$. Ceci nous donne :

(6.15)

$$\sum_{\substack{r_1,\ldots,r_k \\ d_i | r_i\ \forall i \\ r_i | e_i\ \forall i}} \prod_{i=1}^{k} \mu(r_i) = \sum_{\substack{r_1',\ldots,r_k' \\ r_i' | e_i'\ \forall i}} \prod_{i=1}^{k} \mu(r_i')\mu(d_i) = \Big(\prod_{i=1}^{k} \mu(d_i)\Big) \sum_{\substack{r_1',\ldots,r_k' \\ r_i' | e_i'\ \forall i}} \prod_{i=1}^{k} \mu(r_i') = \Big(\prod_{i=1}^{k} \mu(d_i)\Big) \prod_{i=1}^{k} \Big(\sum_{r_i' | e_i'} \mu(r_i')\Big)$$

$$= \Big(\prod_{i=1}^{k} \mu(d_i)\Big)\Big(\prod_{i=1}^{k} \delta_{e_i',1}\Big) = \Big(\prod_{i=1}^{k} \mu(d_i)\Big)\Big(\prod_{i=1}^{k} \delta_{d_i,e_i}\Big)$$

les dernières égalités venant du fait que : ($e'_i = 1 \Leftrightarrow d_i = e_i$).

Finalement, l'égalité (6.11) est devenue :

(6.16)

$$\sum_{\substack{r_1,\dots,r_k \\ d_i|r_i\ \forall i}} \frac{y_{r_1,\dots,r_k}}{\prod_{i=1}^k \varphi(r_i)} = \sum_{\substack{e_1,\dots,e_k \\ \prod_{i=1}^k e_i \text{ sans facteur carré}}} \frac{\lambda_{e_1,\dots,e_k}}{\prod_{i=1}^k e_i} \prod_{i=1}^k \mu(d_i) \prod_{i=1}^k \delta_{d_i,e_i} = \lambda_{d_1,\dots,d_k} \prod_{i=1}^k \frac{\mu(d_i)}{d_i} = \frac{\lambda_{d_1,\dots,d_k}}{\prod_{i=1}^k \mu(d_i) d_i}$$

la dernière égalité venant du fait que les d_i sont sans facteur carré, et donc que $\mu(d_i)^2 = 1$.

Ainsi chaque choix de $y_{r_1,\dots,r_k}$ qui sera à support dans $\{(r_1,\dots,r_k) \in \mathbb{N}^k,\ r = \prod_{i=1}^k r_i$ sans facteur carré, $r < R,\ (r,W) = 1\}$ nous donnera un choix convenable de $\lambda_{d_1,\dots,d_k}$ c'est-à-dire avec $\lambda_{d_1,\dots,d_k}$ qui sera à support dans l'ensemble que nous avions défini au début de ce chapitre.

On note $y_{\max} = \sup_{r_1,\dots,r_k} |y_{r_1,\dots,r_k}|$.

Pour le calcul suivant, on aura besoin de l'égalité ci-dessous, avec d sans facteur carré :

$$\frac{d}{\varphi(d)} = \sum_{e|d} \frac{1}{\varphi(e)}.$$

Cette égalité se justifie ainsi : comme

$$d = \sum_{e|d} \varphi(e) = \sum_{e|d} \varphi(\frac{d}{e})$$

et que pour $e|d$, $(\frac{d}{e}, e) = 1$ (sinon d a un facteur carré), on a

$$\frac{d}{\varphi(d)} = \sum_{e|d} \frac{1}{\varphi(d)} \varphi(\frac{d}{e}) = \sum_{e|d} \frac{\cancel{\varphi(\frac{d}{e})}}{\cancel{\varphi(\frac{d}{e})}\varphi(e)} = \sum_{e|d} \frac{1}{\varphi(e)}.$$

On aura aussi besoin de poser $r' = \prod_{i=1}^k \frac{r_i}{d_i}$.

En reprenant l'égalité (6.16), on a :

(6.17)

$$|\lambda_{d_1,\dots,d_k}| \leqslant \Big(\prod_{i=1}^k |\mu(d_i)| d_i\Big) \sum_{\substack{r_1,\dots,r_k \\ d_i|r_i\ \forall i}} \frac{|y_{r_1,\dots,r_k}|}{\prod_{i=1}^k \varphi(r_i)} \leqslant \Big(\prod_{i=1}^k d_i\Big) \sum_{\substack{r_1,\dots,r_k \\ d_i|r_i\ \forall i \\ \prod_{i=1}^k r_i < R \\ \prod_{i=1}^k r_i \text{ sans facteur carré}}} \frac{|y_{r_1,\dots,r_k}|}{\prod_{i=1}^k \varphi(r_i)}$$

$$\leqslant \Big(\prod_{i=1}^k d_i\Big) y_{\max} \sum_{\substack{r_1,\dots,r_k \\ d_i|r_i\ \forall i \\ \prod_{i=1}^k r_i < R \\ \prod_{i=1}^k r_i \text{ sans facteur carré}}} \frac{\mu(\prod_{i=1}^k r_i)^2}{\prod_{i=1}^k \varphi(r_i)}.$$

Ainsi :

(6.18)

$$\lambda_{\max} \leqslant \sup_{\substack{d_1,\dots,d_k \\ \prod_{i=1}^k d_i \text{ sans facteur carré}}} \Big(\prod_{i=1}^k d_i\Big) y_{\max} \sum_{\substack{r_1,\dots,r_k \\ d_i|r_i\ \forall i \\ \prod_{i=1}^k r_i < R}} \prod_{i=1}^k \frac{\mu(r_i)^2}{\varphi(r_i)}$$

$$\leqslant y_{\max} \sup_{\substack{d_1,\dots,d_k \\ \prod_{i=1}^k d_i \text{ sans facteur carré}}} \Big(\prod_{i=1}^k d_i\Big) \sum_{r' < \frac{R}{\prod_{i=1}^k d_i}} \sum_{\substack{r_1,\dots,r_k \\ d_i|r_i\ \forall i \\ r' = \prod_{i=1}^k \frac{r_i}{d_i}}} \prod_{i=1}^k \frac{\mu(r_i)^2}{\varphi(r_i)}.$$

On utilise ici le fait que les r_i soient sans facteur carré et que $(r_i, r_j) = 1$ si $i \neq j$:

$$
\begin{aligned}
\lambda_{\max} &\leqslant y_{\max} \sup_{\substack{d_1,\ldots,d_k \\ \prod_{i=1}^k d_i \text{ sans facteur carré}}} \left(\prod_{i=1}^k d_i\right) \sum_{r' < \frac{R}{\prod_{i=1}^k d_i}} \sum_{\substack{r_1,\ldots,r_k \\ d_i | r_i \ \forall i \\ r' = \prod_{i=1}^k \frac{r_i}{d_i}}} \frac{\mu(r')^2}{\varphi(r')} \prod_{i=1}^k \frac{\mu(d_i)^2}{\varphi(d_i)} \\
&\leqslant y_{\max} \sup_{\substack{d_1,\ldots,d_k \\ \prod_{i=1}^k d_i \text{ sans facteur carré}}} \left(\prod_{i=1}^k d_i\right) \prod_{i=1}^k \frac{\mu(d_i)^2}{\varphi(d_i)} \sum_{\substack{r' < \frac{R}{\prod_{i=1}^k d_i} \\ (r', \prod_{i=1}^k d_i) = 1}} \frac{\mu(r')^2}{\varphi(r')} \underbrace{\sum_{r_1,\ldots,r_k} 1}_{= \tau_k(r')} \\
&\leqslant y_{\max} \sup_{\substack{d_1,\ldots,d_k \\ \prod_{i=1}^k d_i \text{ sans facteur carré}}} \left(\frac{\prod_{i=1}^k d_i}{\varphi(\prod_{i=1}^k d_i)}\right) \sum_{\substack{r' < \frac{R}{\prod_{i=1}^k d_i} \\ (r', \prod_{i=1}^k d_i) = 1}} \frac{\mu(r')^2 \tau_k(r')}{\varphi(r')} \\
&\leqslant y_{\max} \sup_{\substack{d_1,\ldots,d_k \\ \prod_{i=1}^k d_i \text{ sans facteur carré}}} \left(\sum_{d | \prod_{i=1}^k d_i} \frac{1}{\varphi(d)}\right) \sum_{\substack{r' < \frac{R}{\prod_{i=1}^k d_i} \\ (r', \prod_{i=1}^k d_i) = 1}} \frac{\mu(r')^2 \tau_k(r')}{\varphi(r')} \\
&\leqslant y_{\max} \sup_{d_1,\ldots,d_k} \left(\sum_{d | \prod_{i=1}^k d_i} \frac{\mu(d)^2}{\varphi(d)}\right) \sum_{\substack{r' < \frac{R}{\prod_{i=1}^k d_i} \\ (r', \prod_{i=1}^k d_i) = 1}} \frac{\mu(r')^2 \tau_k(r')}{\varphi(r')}
\end{aligned}
$$

$$
\leqslant y_{\max} \sup_{d_1,\ldots,d_k} \sum_{d | \prod_{i=1}^k d_i} \sum_{\substack{r' < \frac{R}{\prod_{i=1}^k d_i} \\ (r', \prod_{i=1}^k d_i) = 1}} \frac{\mu(d)^2}{\varphi(d)} \frac{\mu(r')^2 \tau_k(dr')}{\varphi(r')}
$$

Or pour tout $d_1, \ldots, d_k$ fixé, on a :

$$
\sum_{d | \prod_{i=1}^k d_i} \sum_{\substack{r' < \frac{R}{\prod_{i=1}^k d_i} \\ (r', \prod_{i=1}^k d_i) = 1}} \frac{\mu(d)^2}{\varphi(d)} \frac{\mu(r')^2 \tau_k(dr')}{\varphi(r')} \leqslant \sum_{u < R} \frac{\mu(u)^2 \tau_k(u)}{\varphi(u)}. \tag{6.19}
$$

Au final, on obtient :

$$
\begin{aligned}
\lambda_{\max} \leqslant{} & y_{\max} \sup_{d_1,\ldots,d_k} \sum_{u < R} \frac{\mu(u)^2 \tau_k(u)}{\varphi(u)} \leqslant y_{\max} \sum_{P^+(u) < R} \frac{\mu(u)^2 \tau_k(u)}{\varphi(u)} = y_{\max} \prod_{p < R} \left(1 + \frac{\tau_k(p)}{\varphi(p)}\right) \\
\leqslant{} & y_{\max} \prod_{p < R} \left(1 + \frac{k}{\varphi(p)}\right)
\end{aligned} \tag{6.20}
$$

avec $P^+(u)$ étant le plus grand facteur premier de u et l'égalité venant du fait que $n \mapsto \frac{\tau_k(n)}{\varphi(n)}$ est une fonction multiplicative. On a :

$$
1 + \frac{k}{\varphi(p)} \ll \left(1 + \frac{1}{p}\right)^k
$$

Ainsi :

$$
\lambda_{\max} \ll y_{\max} \prod_{p < R} \left(1 + \frac{1}{p}\right)^k \ll y_{\max} (\ln R)^k \tag{6.21}
$$

car

$$
\begin{aligned}
\prod_{p < R} \left(1 + \frac{1}{p}\right) &= \underbrace{\prod_{p < R} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right)}_{\text{convergent}} \prod_{p < R} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1} \\
&\ll \ln R \quad \text{par la formule de Mertens}
\end{aligned}
$$

En utilisant la formule (6.4) et avec la formule ci-dessus, on a :

$$(\lambda_{\max}^2 R^2 (\ln R)^{2k}) \ll (y_{\max}^2 R^2 (\ln R)^{4k})$$

Le terme d'erreur est donc un $O(y_{\max}^2 R^2 (\ln R)^{4k})$.

Continuons les calculs pour le terme principal de S_1, en reprenant l'expression (6.9) :

$$\begin{aligned}
S_1^{(1)} &= \frac{N}{W} \sum_{u_1,\dots,u_k} \Big(\prod_{i=1}^{k} \varphi(u_i)\Big) \sum_{s_{1,2},\dots,s_{k,k-1}}^{*} \prod_{\substack{1\leqslant i,j\leqslant k\\ i\neq j}} \mu(s_{i,j}) \sum_{\substack{d_1,\dots,d_k\\ e_1,\dots,e_k\\ u_i \mid (d_i,e_i)\ \forall i\\ s_{i,j}\mid (d_i,e_j)\ \forall i\neq j}} \frac{\lambda_{d_1,\dots,d_k}\lambda_{e_1,\dots,e_k}}{(\prod_{i=1}^k d_i)(\prod_{i=1}^k e_i)} \\
&= \frac{N}{W} \sum_{u_1,\dots,u_k} \Big(\prod_{i=1}^{k} \varphi(u_i)\Big) \sum_{s_{1,2},\dots,s_{k,k-1}}^{*} \prod_{\substack{1\leqslant i,j\leqslant k\\ i\neq j}} \mu(s_{i,j}) \Big(\sum_{\substack{d_1,\dots,d_k\\ u_i\mid d_i\ \forall i\\ s_{i,j}\mid d_i\ \forall i\neq j}} \frac{\lambda_{d_1,\dots,d_k}}{(\prod_{i=1}^k d_i)} \Big)\Big(\sum_{\substack{e_1,\dots,e_k\\ u_i\mid e_i\ \forall i\\ s_{i,j}\mid e_j\ \forall i\neq j}} \frac{\lambda_{e_1,\dots,e_k}}{(\prod_{i=1}^k e_i)} \Big) \\
&= \frac{N}{W} \sum_{u_1,\dots,u_k} \Big(\prod_{i=1}^{k} \varphi(u_i)\Big) \sum_{s_{1,2},\dots,s_{k,k-1}}^{*} \prod_{\substack{1\leqslant i,j\leqslant k\\ i\neq j}} \mu(s_{i,j}) \Big(\sum_{\substack{d_1,\dots,d_k\\ u_i \prod_{i\neq j} s_{i,j} \mid d_i\\ \forall i\neq j}} \frac{\lambda_{d_1,\dots,d_k}}{(\prod_{i=1}^k d_i)} \Big)\Big(\sum_{\substack{e_1,\dots,e_k\\ u_j \prod_{i\neq j} s_{i,j} \mid e_j\\ \forall i\neq j}} \frac{\lambda_{e_1,\dots,e_k}}{(\prod_{i=1}^k e_i)} \Big)
\end{aligned}$$

La dernière égalité est due aux restrictions que nous avons posés sur les $s_{i,j}$ et les u_i. On pose $a_j = u_j \prod_{i\neq j} s_{j,i}$ et $b_j = u_j \prod_{i\neq j} s_{i,j}$. On fait alors le changement de variables (6.10) ce qui donne :

$$\begin{aligned}
S_1^{(1)} &= \frac{N}{W} \sum_{u_1,\dots,u_k} \left(\prod_{i=1}^{k} \varphi(u_i)\right) \sum_{s_{1,2},\dots,s_{k,k-1}}^{*} \prod_{\substack{1\leqslant i,j\leqslant k\\ i\neq j}} \mu(s_{i,j}) \Big(\sum_{\substack{d_1,\dots,d_k\\ a_i\mid d_i\ \forall i}} \frac{\lambda_{d_1,\dots,d_k}}{(\prod_{i=1}^k d_i)} \Big)\Big(\sum_{\substack{e_1,\dots,e_k\\ b_j\mid e_j\ \forall j}} \frac{\lambda_{e_1,\dots,e_k}}{(\prod_{i=1}^k e_i)} \Big) \\
&= \frac{N}{W} \sum_{u_1,\dots,u_k} \Big(\prod_{i=1}^{k} \varphi(u_i)\Big) \sum_{s_{1,2},\dots,s_{k,k-1}}^{*} \prod_{\substack{1\leqslant i,j\leqslant k\\ i\neq j}} \mu(s_{i,j}) \frac{y_{a_1,\dots,a_k}}{\prod_{i=1}^k \mu(a_i)\varphi(a_i)} \frac{y_{b_1,\dots,b_k}}{\prod_{i=1}^k \mu(b_i)\varphi(b_i)}
\end{aligned}$$

Au final, S_1 est devenu :

$$\begin{aligned}
(6.22) \qquad S_1 &= \frac{N}{W} \sum_{u_1,\dots,u_k} \Big(\prod_{i=1}^{k} \varphi(u_i)\Big) \times \\
&\quad \sum_{s_{1,2},\dots,s_{k,k-1}}^{*} \Big(\prod_{\substack{1\leqslant i,j\leqslant k\\ i\neq j}} \mu(s_{i,j}) \Big) \prod_{i=1}^{k} \frac{\mu(a_i)\mu(b_i)}{\varphi(a_i)\varphi(b_i)} y_{a_1,\dots,a_k} y_{b_1,\dots,b_k} + O(y_{\max}^2 R^2 (\ln R)^{4k}).
\end{aligned}$$

Grâce aux restrictions sur les $s_{i,j}$ et sur les u_i, on a :

$$\mu(a_j) = \mu(u_j) \prod_{i\neq j} \mu(s_{j,i}); \quad \varphi(a_j) = \varphi(u_j) \prod_{i\neq j} \varphi(s_{j,i}); \quad \mu(b_j) = \mu(u_j) \prod_{i\neq j} \mu(s_{i,j}); \quad \varphi(b_j) = \varphi(u_j) \prod_{i\neq j} \varphi(s_{i,j})$$

Cela donne pour S_1 :

$$\begin{aligned}
(6.23) \ S_1 &= \frac{N}{W} \sum_{u_1,\dots,u_k} \left(\cancel{\prod_{i=1}^{k} \varphi(u_i)}\right) \times \\
&\quad \sum_{s_{1,2},\dots,s_{k,k-1}}^{*} \Big(\prod_{\substack{1\leqslant i,j\leqslant k\\ i\neq j}} \mu(s_{i,j}) \Big) \prod_{i=1}^{k} \left(\frac{\mu(u_i)^2 \Big(\prod_{j\neq i} \mu(s_{i,j})\Big)\Big(\prod_{j\neq i} \mu(s_{j,i})\Big)}{\varphi(u_i)^{\cancel{2}} \Big(\prod_{j\neq i} \varphi(s_{i,j})\Big)\Big(\prod_{j\neq i} \varphi(s_{j,i})\Big)} \right) y_{a_1,\dots,a_k} y_{b_1,\dots,b_k} \\
&\quad + O(y_{\max}^2 R^2 (\ln R)^{4k}) \\
&= \frac{N}{W} \sum_{u_1,\dots,u_k} \sum_{s_{1,2},\dots,s_{k,k-1}}^{*} \Big(\prod_{\substack{1\leqslant i,j\leqslant k\\ i\neq j}} \mu(s_{i,j}) \Big) \prod_{i=1}^{k} \frac{\mu(u_i)^2}{\varphi(u_i)} \times \frac{\Big(\prod_{\substack{1\leqslant i,j\leqslant k\\ i\neq j}} \mu(s_{i,j})\Big)^2}{\Big(\prod_{\substack{1\leqslant i,j\leqslant k\\ j\neq i}} \varphi(s_{i,j})\Big)^2} y_{a_1,\dots,a_k} y_{b_1,\dots,b_k} \\
&\quad + O(y_{\max}^2 R^2 (\ln R)^{4k})
\end{aligned}$$

$$(6.24)\quad S_1 = \frac{N}{W}\sum_{u_1,\dots,u_k}\prod_{i=1}^{k}\frac{\mu(u_i)^2}{\varphi(u_i)}\sum^{*}_{s_{1,2},\dots,s_{k,k-1}}\Bigg(\prod_{\substack{1\leqslant i,j\leqslant k\\ i\neq j}}\frac{\mu(s_{i,j})}{\varphi(s_{i,j})^2}\Bigg)y_{a_1,\dots,a_k}y_{b_1,\dots,b_k}+O(y_{\max}^2R^2(\ln R)^{4k}).$$

On remarque qu'il n'y a aucune contribution des $s_{i,j}$ qui vérifient $(s_{i,j},W)\neq 1$ à cause du support de $y_{a_1,\dots,a_k}y_{b_1,\dots,b_k}$. On a donc juste besoin de considérer les cas où $s_{i,j}=1$ et $s_{i,j}>D_0$.

La contribution des $s_{i,j}$ quand $s_{i,j}>D_0$ dans l'équation (6.24) est :

$$(6.25)\quad \begin{aligned} &\ll \frac{N}{W}\sum_{u_1,\dots,u_k}\prod_{i=1}^{k}\frac{\mu(u_i)^2}{\varphi(u_i)}\sum^{*}_{\substack{s_{1,2},\dots,s_{k,k-1}\\ s_{i,j}>D_0}}\Bigg(\prod_{\substack{1\leqslant i,j\leqslant k\\ i\neq j}}\frac{|\mu(s_{i,j})|}{\varphi(s_{i,j})^2}\Bigg)y_{a_1,\dots,a_k}y_{b_1,\dots,b_k}\\ &\ll \frac{N}{W}\sum_{\substack{u_1,\dots,u_k\\ \prod_{i=1}^k u_i<R\\ (\prod_{i=1}^k u_i,W)=1\\ \prod_{i=1}^k u_i \text{ sans facteur carré}}}\prod_{i=1}^{k}\frac{\mu(u_i)^2}{\varphi(u_i)}\sum^{*}_{\substack{s_{1,2},\dots,s_{k,k-1}\\ s_{i,j}>D_0}}\Bigg(\prod_{\substack{1\leqslant i,j\leqslant k\\ i\neq j}}\frac{|\mu(s_{i,j})|}{\varphi(s_{i,j})^2}\Bigg)y_{a_1,\dots,a_k}y_{b_1,\dots,b_k}\end{aligned}$$

Cette dernière inéquation est due au fait qu'à cause du support de $y_{a_1,\dots,a_k}y_{b_1,\dots,b_k}$, on a : $\prod_{i=1}^k u_i\prod_{j\neq i}s_{i,j}<R$; ce produit est sans facteur carré, et il est premier avec W. On pose dans la suite $u=\prod_{i=1}^k u_i$, ce qui nous donne :

$$\begin{aligned} &\ll \frac{N}{W}\Bigg(\sum_{\substack{u\\ u<R\\ (u,W)=1\\ u \text{ sans facteur carré}}}\frac{\mu(u)^2}{\varphi(u)}\Bigg)^k\sum_{s_{i,j}>D_0}\frac{\mu(s_{i,j})^2}{\varphi(s_{i,j})^2}\prod_{\substack{1\leqslant\alpha,\beta\leqslant k\\ \alpha\neq i,\beta\neq j}}\sum_{s_{\alpha,\beta}\geqslant 1}\frac{\mu(s_{\alpha,\beta})^2}{\varphi(s_{\alpha,\beta})^2}y_{\max}^2\\ &\ll \frac{y_{\max}^2N}{W}\Bigg(\sum_{\substack{u<R\\ (u,W)=1}}\frac{\mu(u)^2}{\varphi(u)}\Bigg)^k\sum_{s_{i,j}>D_0}\frac{\mu(s_{i,j})^2}{\varphi(s_{i,j})^2}\Bigg(\sum_{s\geqslant 1}\frac{\mu(s)^2}{\varphi(s)^2}\Bigg)^{k^2-k-1}\end{aligned}$$

De la même manière que pour l'équation (6.21) et en reprenant les notations de cette équation, on a :

$$(6.26)\quad \begin{aligned}\sum_{\substack{u<R\\ (u,W)=1}}\frac{\mu(u)^2}{\varphi(u)} &\leqslant \sum_{\substack{P^+(u)<R\\ (u,W)=1}}\frac{\mu(u)^2}{\varphi(u)} = \prod_{D_0<p<R}\Big(1+\frac{1}{\varphi(p)}\Big)\\ &\ll \prod_{p<R}\Big(1+\frac{1}{p}\Big)\prod_{p<D_0}\Big(1+\frac{1}{p}\Big)^{-1} \ll \prod_{p<R}\Big(1+\frac{1}{p}\Big)\prod_{p<D_0}\Big(1-\frac{1}{p}\Big)\\ &\ll \ln R\prod_{p\mid W}\Big(1-\frac{1}{p}\Big) \ll \frac{\varphi(W)}{W}\ln R\end{aligned}$$

On a aussi :

$$(6.27)\quad \sum_{s_{i,j}>D_0}\frac{\mu(s_{i,j})^2}{\varphi(s_{i,j})^2}\ll\frac{1}{D_0}$$

En effet, $(\frac{n}{\varphi(n)})^2=\sum_{d\mid n}\lambda(d)$ avec $\lambda(d)=\mu(d)^2\prod_{p\mid d}\frac{2p-1}{(p-1)^2}\leqslant\mu(d)^2\frac{6^{\omega(d)}}{d}$, ce qui fait que l'on a :

$$\sum_{s_{i,j}>D_0}\frac{\mu(s_{i,j})^2}{\varphi(s_{i,j})^2} = \sum_{d\geqslant 1}\lambda(d)\sum_{m>\frac{D_0}{d}}\frac{1}{m^2d^2}\ll\sum_{d\geqslant 1}\frac{\lambda(d)}{d(D_0+d)}\ll\frac{1}{D_0}\sum_{d\geqslant 1}\frac{\lambda(d)}{d}\ll\frac{1}{D_0}$$

ce qui nous donne bien (6.27).

La troisième somme est une constante indépendante de tous les termes non fixés.

La contribution au final est donc

$$(6.28)\quad \ll \frac{y_{\max}^2N\varphi(W)^k(\ln R)^k}{W^{k+1}D_0}$$

Il reste maintenant à se focaliser sur le cas où $s_{i,j} = 1$ pour tout $i \neq j$. Le calcul est évident et on obtient finalement pour S_1 :

$$S_1 = \frac{N}{W} \sum_{u_1,\dots,u_k} \frac{y^2_{u_1,\dots,u_k}}{\prod_{i=1}^k \varphi(u_i)} + O\Big(\frac{y^2_{\max} N \varphi(W)^k (\ln R)^k}{W^{k+1} D_0} + y^2_{\max} R^2 (\ln R)^{4k}\Big) \tag{6.29}$$

De plus, $R^2 = N^{\theta - 2\delta} \leqslant N^{1-2\delta}$ et $W \ll N^\delta$ par hypothèse sur W, donc

$$y^2_{\max} R^2 (\ln R)^{4k} \times \frac{W^{k+1} D_0}{y^2_{\max} N \varphi(W)^k (\ln R)^k} = \frac{R^2 W^{k+1} D_0 (\ln R)^{3k}}{N \varphi(W)^k} \ll \frac{W^k D_0 (\ln R)^{3k}}{\varphi(W)^k} \times \frac{1}{N^\delta}$$

qui est majoré par croissances comparées. Donc le premier terme d'erreur de l'expression (6.29) domine. On a donc le résultat demandé pour S_1. □

6.2 Étude de S_2

On va maintenant s'intéresser à S_2. Pour cela, on réécrit S_2 ainsi : $S_2 = \sum_{m=1}^k S_2^{(m)}$, où :

$$S_2^{(m)} = \sum_{\substack{N \leqslant n < 2N \\ n \equiv v_0 \pmod W}} \chi_{\mathbb{P}}(n + h_m) \Big(\sum_{\substack{d_1,\dots,d_k \\ d_i | n+h_i \ \forall i}} \lambda_{d_1,\dots,d_k} \Big)^2 \tag{6.30}$$

On va réécrire $S_2^{(m)}$ de la même manière qu'on l'a fait pour S_1. Pour plusieurs parties de la démonstration suivante, on se référera à la démonstration précédente.

Lemme 6.2. *Soit*

$$y^{(m)}_{r_1,\dots,r_k} = \Big(\prod_{i=1}^k \mu(r_i) g(r_i) \Big) \sum_{\substack{d_1,\dots,d_k \\ r_i | d_i \ \forall i \\ d_m = 1}} \frac{\lambda_{d_1,\dots,d_k}}{\prod_{i=1}^k \varphi(d_i)}$$

où g est la fonction totalement multiplicative définie sur les nombres premiers par : $g(p) = p - 2$. Soit $y^{(m)}_{\max} = \sup_{r_1,\dots,r_k} |y^{(m)}_{r_1,\dots,r_k}|$. Alors pour tout $A > 0$ fixé, on a :

$$S_2^{(m)} = \frac{N}{\varphi(W) \ln N} \sum_{r_1,\dots,r_k} \frac{(y^{(m)}_{r_1,\dots,r_k})^2}{\prod_{i=1}^k g(r_i)} + O\Big(\frac{(y^{(m)}_{\max})^2 \varphi(W)^{k-2} N (\ln N)^{k-2}}{W^{k+1} D_0}\Big) + O\Big(\frac{y^2_{\max} N}{(\ln N)^A}\Big)$$

Démonstration. On commence par développer le carré dans $S_2^{(m)}$ puis on échange l'ordre de sommation, ce qui donne

$$\begin{aligned} S_2^{(m)} &= \sum_{\substack{N \leqslant n < 2N \\ n \equiv v_0 \pmod W}} \chi_{\mathbb{P}}(n + h_m) \Big(\sum_{\substack{d_1,\dots,d_k \\ e_1,\dots,e_k \\ d_i | n+h_i \ \forall i \\ e_i | n+h_i \ \forall i}} \lambda_{d_1,\dots,d_k} \lambda_{e_1,\dots,e_k} \Big) \\ &= \sum_{\substack{d_1,\dots,d_k \\ e_1,\dots,e_k}} \sum_{\substack{N \leqslant n < 2N \\ n \equiv v_0 \pmod W \\ [d_i, e_i] | n+h_i \ \forall i}} \chi_{\mathbb{P}}(n + h_m) \lambda_{d_1,\dots,d_k} \lambda_{e_1,\dots,e_k} \\ &= \sum_{\substack{d_1,\dots,d_k \\ e_1,\dots,e_k}} \lambda_{d_1,\dots,d_k} \lambda_{e_1,\dots,e_k} \sum_{\substack{N \leqslant n < 2N \\ n \equiv v_0 \pmod W \\ [d_i, e_i] | n+h_i \ \forall i}} \chi_{\mathbb{P}}(n + h_m) \end{aligned} \tag{6.31}$$

De la même manière que pour S_1, la somme intérieure peut être réécrite comme une somme sur une seule classe de résidus modulo $q = W \prod_{i=1}^k [d_i, e_i]$ à condition que W, $[d_1, e_1]$, …, $[d_k, e_k]$ soient 2 à 2 premiers entre eux. Dans ce cas, l'entier $n + h_m$ est dans une classe résiduelle premier avec q si et seulement si $d_m = e_m = 1$. En effet, le fait que $(n + h_m, q) = 1$ entraîne $1 = (n + h_m, [d_m, e_m]) = [d_m, e_m]$ car $[d_m, e_m] | n + h_m$; on a bien $d_m = e_m = 1$; et réciproquement, on sait déjà que $(n + h_m, W) = 1$ car $n \equiv v_0 \pmod W$ par hypothèse sur v_0. Concernant $(n + h_m, [d_i, e_i])$ avec $i \neq m$, si ce nombre était différent de 1, alors il existerait un nombre premier p tel que $n + h_m \equiv 0 \pmod p$ et par hypothèse sur $[d_i, e_i]$, $n + h_i \equiv 0 \pmod p$ ce qui veut dire que $p | (h_m - h_i)$, mais $p > D_0$ puisque $(p, W) = 1$ à cause des hypothèses $([d_i, e_i], W) = 1$ et $p|[d_i, e_i]$; comme les h_i sont fixés, on peut choisir D_0 assez grand pour que la chose soit impossible.

Dans ce cas, la somme intérieure peut se réécrire, par le théorème chinois :

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{N\leqslant n<2N \\ n\equiv v_0 \pmod W \\ [d_i,e_i]|n+h_i\ \forall i}} \chi_{\mathbb{P}}(n+h_m) &= \sum_{\substack{N\leqslant n<2N \\ n\equiv a \pmod q}} \chi_{\mathbb{P}}(n+h_m) \\ &= \sum_{\substack{N+h_m\leqslant n+h_m<2N+h_m \\ n+h_m\equiv a+h_m \pmod q}} \chi_{\mathbb{P}}(n+h_m)\end{aligned}$$

avec a dépendant de $\mathcal{H}$ et de v_0. D'après ce qu'on a pu voir précédemment, si on prend $a' = a + h_m$, comme $n + h_m \equiv a' \pmod q$, alors $(a', q) = 1$.

Avec le changement de variables $n' = n + h_m$, cette somme devient :

$$\sum_{\substack{N+h_m\leqslant n'<2N+h_m \\ n'\equiv a' \pmod q}} \chi_{\mathbb{P}}(n')$$

En retirant un élément fini de n' de la somme, cette dernière devient :

$$C + \sum_{\substack{N\leqslant n<2N \\ n\equiv a' \pmod q}} \chi_{\mathbb{P}}(n)$$

avec C une constante. Au final :

$$\begin{aligned}\Big| \sum_{\substack{N\leqslant n<2N \\ n\equiv a \pmod q}} \chi_{\mathbb{P}}(n+h_m) - \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{N\leqslant n<2N} \chi_{\mathbb{P}}(n)\Big| &\ll 1 + \Big| \sum_{\substack{N\leqslant n<2N \\ n\equiv a' \pmod q}} \chi_{\mathbb{P}}(n) - \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{N\leqslant n<2N} \chi_{\mathbb{P}}(n)\Big| \\ &\ll 1 + \sup_{(a,q)=1} \Big| \sum_{\substack{N\leqslant n<2N \\ n\equiv a \pmod q}} \chi_{\mathbb{P}}(n) - \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{N\leqslant n<2N} \chi_{\mathbb{P}}(n)\Big|\end{aligned}$$

Finalement, la somme intérieure de S_1 est de la forme $\frac{X_N}{\varphi(q)} + O(E(N, q))$ avec

$$E(N,q) = 1 + \sup_{(a,q)=1} \Big| \sum_{\substack{N\leqslant n<2N \\ n\equiv a \pmod q}} \chi_{\mathbb{P}}(n) - \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{N\leqslant n<2N} \chi_{\mathbb{P}}(n)\Big| \tag{6.32}$$

$$X_N = \sum_{N\leqslant n<2N} \chi_{\mathbb{P}}(n). \tag{6.33}$$

Dans le cas où deux entiers de la famille $(W, [d_1, e_1], \ldots, [d_k, e_k])$ ont un facteur commun ou si d_m ou e_m sont différents de 1, alors leur contribution pour la somme est nulle. En effet :

- Le cas $(W, [d_i, e_i]) \neq 1$ a déjà été vu dans la démonstration du lemme 6.1. Idem pour le cas $([d_i, e_i], [d_j, e_j]) \neq 1$.
- Si $d_m \neq 1$ (et on aura la même chose pour $e_m \neq 1$), alors $1 \neq [d_m, e_m] \mid (n + h_m)$. Donc $n + h_m$ n'est pas premier, et $\chi_{\mathbb{P}}(n + h_m) = 0$.

A ce stade-ci, $S_2^{(m)}$ est de la forme :

$$\begin{aligned}S_2^{(m)} &= \sideset{}{'}\sum_{\substack{d_1,\ldots,d_k \\ e_1,\ldots,e_k \\ d_m=e_m=1}} \lambda_{d_1,\ldots,d_k}\lambda_{e_1,\ldots,e_k} \left(\frac{X_N}{\varphi(q)} + O\Big(E(N,q)\Big)\right) \\ &= \frac{X_N}{\varphi(W)} \sideset{}{'}\sum_{\substack{d_1,\ldots,d_k \\ e_1,\ldots,e_k \\ d_m=e_m=1}} \frac{\lambda_{d_1,\ldots,d_k}\lambda_{e_1,\ldots,e_k}}{\prod_{i=1}^k \varphi([d_i,e_i])} + O\Big(\sum_{\substack{d_1,\ldots,d_k \\ e_1,\ldots,e_k}} |\lambda_{d_1,\ldots,d_k}\lambda_{e_1,\ldots,e_k}| E(N,q)\Big)\end{aligned} \tag{6.34}$$

La décomposition de $\varphi(W)$ est permise grâce aux conditions sur W et les $[d_i, e_i]$.

Traitons maintenant de la contribution des termes d'erreur. Remarquons d'abord qu'avec le support de $\lambda_{d_1,\dots,d_k}\lambda_{e_1,\dots,e_k}$, on a : $q = W\prod_{i=1}^k [d_i, e_i] \leqslant W(\prod_{i=1}^k d_i)(\prod_{i=1}^k e_i) < WR^2$; de plus q est sans facteur carré car W les d_i et les e_i sont sans facteur carré. On a donc juste besoin de considérer q sans facteur carré et vérifiant $q < R^2W$. Si on prend un entier r sans facteur carré, et en remarquant que $r = W\prod_{i=1}^k (\frac{d_i}{(d_i,e_i)}(d_i, e_i)\frac{e_i}{(d_i,e_i)}$, on en déduit qu'il y a au plus $\tau_{3k}(r)$ choix de $d_1, \dots, d_k, e_1, \dots, e_k$ tels que $r = W\prod_{i=1}^k [d_i, e_i]$. Rappelons aussi, si on reprend l'équation (6.21), que $\lambda_{\max} \ll y_{\max}(\ln R)^k$. Le terme d'erreur devient :

$$(6.35)\qquad \begin{aligned} \sum_{\substack{d_1,\dots,d_k\\ e_1,\dots,e_k}} |\lambda_{d_1,\dots,d_k}\lambda_{e_1,\dots,e_k}|E(N,q) &= \sum_{\substack{d_1,\dots,d_k\\ e_1,\dots,e_k\\ q<R^2W\\ q=W\prod_{i=1}^k[d_i,e_i]\\ q \text{ sans facteur carré}}} |\lambda_{d_1,\dots,d_k}\lambda_{e_1,\dots,e_k}|E(N,q) \\ &\ll \sum_{\substack{r<R^2W\\ r \text{ sans facteur carré}}} \sum_{\substack{d_1,\dots,d_k\\ e_1,\dots,e_k\\ W\prod_{i=1}^k[d_i,e_i]=r}} \lambda_{\max}^2 E(N,r) \\ &\ll \lambda_{\max}^2 \sum_{\substack{r<R^2W\\ r \text{ sans facteur carré}}} E(N,r) \sum_{\substack{d_1,\dots,d_k\\ e_1,\dots,e_k\\ W\prod_{i=1}^k[d_i,e_i]=r}} 1 \\ &\ll \Big(y_{\max}(\ln R)^k\Big)^2 \sum_{r<R^2W} E(N,r)\tau_{3k}(r)\mu(r)^2. \end{aligned}$$

On applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz, ce qui nous donne :

$$\ll \quad y_{\max}^2(\ln R)^{2k}\Big(\sum_{r<R^2W}\mu(r)^2\tau_{3k}^2(r)E(N,r)\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\sum_{r<R^2W}\mu(r)^2E(N,r)\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Or $E(N,r) \ll \frac{N}{\varphi(r)}$, donc

$$\ll \quad y_{\max}^2(\ln R)^{2k}\Big(\sum_{r<R^2W}\mu(r)^2\tau_{3k}^2(r)\frac{N}{\varphi(r)}\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\sum_{r<R^2W}\mu(r)^2E(N,r)\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Remarquons que

$$E(N,r) \leqslant 1 + \max_{(a,q)=1}\Big|\pi(2N;a,q) - \frac{\pi(2N)}{\varphi(q)}\Big| + \max_{(a,q)=1}\Big|\pi(N;a,q) - \frac{\pi(N)}{\varphi(q)}\Big|.$$

En utilisant le fait que les nombres premiers ont un niveau de distribution $\theta > 0$, pour tout $A > 0$ fixé, on a :

$$\sum_{r<R^2W}\mu(r)^2E(N,r) \ll \frac{2N}{(\ln(2N))^A} + \frac{N}{(\ln N)^A} \ll \frac{N}{(\ln N)^A}.$$

En réutilisant ce que nous avons vu avec l'égalité (6.21), on a :

$$\sum_{r<R^2W}\mu(r)^2\tau_{3k}^2(r)\frac{N}{\varphi(r)} \ll \Big(\ln(R^2W)\Big)^{3k}N \ll (\ln R)^{3k}N.$$

Enfin, $\ln R \ll \ln N$, donc au final,

$$(6.36)\qquad \sum_{\substack{d_1,\dots,d_k\\ e_1,\dots,e_k}} |\lambda_{d_1,\dots,d_k}\lambda_{e_1,\dots,e_k}|E(N,q) \ll y_{\max}^2\frac{N(\ln N)^{\frac{7k}{2}}}{(\ln N)^{\frac{A}{2}}} \ll \frac{y_{\max}^2N}{(\ln N)^A}.$$

Intéressons-nous maintenant à la somme principale. De la même manière que nous l'avons fait pour S_1 dans la démonstration du Lemme 6.1, on réécrit les conditions $(d_i, e_j) = 1$ en multipliant notre expression par $\sum_{s_{i,j}|(d_i,e_j)}\mu(s_{i,j})$. De la même façon, on restreint $s_{i,j}$ à être premier avec u_i, u_j, $s_{i,a}$, $s_{b,j}$ pour tout $a \neq j$ et $b \neq i$. La somme restreinte sera notée $\sum^*$. Dans la suite, on utilisera l'égalité ci-dessous qui n'est valable que pour d_i et e_i sans facteur carré :

$$(6.37)\qquad \frac{1}{\varphi([d_i, e_i])} = \frac{1}{\varphi(d_i)\varphi(e_i)}\sum_{u_i|d_i,e_i} g(u_i)$$

où g est la fonction totalement multiplicative définie sur les nombres premiers par $g(p) = p - 2$. Cette égalité se vérifie facilement : il suffit de voir que $\varphi(d_i)\varphi(e_i) = \varphi([d_i, e_i])\varphi((d_i, e_i))$ du au fait que les d_i et les e_i soient sans facteur carré, et ensuite de vérifier que $\varphi((e_i, d_i)) = \sum_{u_i|(d_i,e_i)} g(u_i)$, vérification qui se fait en montrant par récurrence sur l que $\varphi(d) = \sum_{u|d} g(d)$, où d est le produit de l nombres premiers différents.

En faisant à peu près les mêmes opérations que dans la démonstration précédente, le terme principal devient

$$(6.38)\qquad \frac{X_N}{\varphi(W)} \sum_{\substack{d_1,\ldots,d_k\\ e_1,\ldots,e_k\\ d_m=e_m=1}} \lambda_{d_1,\ldots,d_k}\lambda_{e_1,\ldots,e_k} \prod_{i=1}^{k} \Big(\frac{1}{\varphi(d_i)\varphi(e_i)} \sum_{u_i|(d_i,e_i)} g(u_i) \Big) \sideset{}{^*}\sum_{s_{i,j}|(d_i,e_j)} \prod_{\substack{1\leqslant i,j\leqslant k\\ i\neq j}} \mu(s_{i,j})$$

$$= \frac{X_N}{\varphi(W)} \sum_{\substack{d_1,\ldots,d_k\\ e_1,\ldots,e_k\\ d_m=e_m=1}} \frac{\lambda_{d_1,\ldots,d_k}\lambda_{e_1,\ldots,e_k}}{\prod_{i=1}^{k}\varphi(d_i)\varphi(e_i)} \sum_{u_1,\ldots,u_k} \prod_{\substack{i=1\\ u_i|(d_i,e_i)}}^{k} g(u_i) \sideset{}{^*}\sum_{s_{i,j}|(d_i,e_j)} \prod_{\substack{1\leqslant i,j\leqslant k\\ i\neq j}} \mu(s_{i,j})$$

$$= \frac{X_N}{\varphi(W)} \sum_{u_1,\ldots,u_k} \Big(\prod_{i=1}^{k} g(u_i) \Big) \sideset{}{^*}\sum_{s_{1,2},\ldots,s_{k,k-1}} \prod_{\substack{1\leqslant i,j\leqslant k\\ i\neq j}} \mu(s_{i,j}) \sum_{\substack{d_1,\ldots,d_k\\ e_1,\ldots,e_k\\ u_i|(d_i,e_i)\ \forall i\\ s_{i,j}|(d_i,e_j)\ \forall i\neq j\\ d_m=e_m=1}} \frac{\lambda_{d_1,\ldots,d_k}\lambda_{e_1,\ldots,e_k}}{\prod_{i=1}^{k}\varphi(d_i)\varphi(e_i)}$$

Maintenant que nous avons séparé les dépendances entre les variables e et d, on peut alors faire une nouvelle substitution. On pose :

$$(6.39)\qquad y^{(m)}_{r_1,\ldots,r_k} = \Big(\prod_{i=1}^{k} \mu(r_i)g(r_i) \Big) \sum_{\substack{d_1,\ldots,d_k\\ r_i|d_i\ \forall i\\ d_m=1}} \frac{\lambda_{d_1,\ldots,d_k}}{\prod_{i=1}^{k}\varphi(d_i)}.$$

On remarque que $y^{(m)}_{r_1,\ldots,r_k} = 0$ sauf si $r_m = 1$. Ici, comme les calculs sont exactement les mêmes que pour le Lemme 6.1, nous allons les passer en se référant à ceux du lemme du précédent. Le terme principal devient :

$$(6.40)\qquad \frac{X_N}{\varphi(W)} \sum_{u_1,\ldots,u_k} \Big(\prod_{i=1}^{k} \frac{\mu(u_i)^2}{g(u_i)} \Big) \sideset{}{^*}\sum_{s_{1,2},\ldots,s_{k,k-1}} \Big(\prod_{\substack{1\leqslant i,j\leqslant k\\ i\neq j}} \frac{\mu(s_{i,j})}{g(s_{i,j})^2} \Big) y^{(m)}_{a_1,\ldots,a_k} y^{(m)}_{b_1,\ldots,b_k}$$

où $a_j = u_j \prod_{i\neq j} s_{j,i}$ et $b_j = u_j \prod_{i\neq j} s_{i,j}$ pour tout $j \in [[1;k]]$. Et comme avant, on remplace $\mu(a_j)$ par $\mu(u_j)\prod_{i\neq j}\mu(s_{j,i})$ (idem pour $g(a_j)$, $\mu(b_j)$ et $g(b_j)$). Cela est possible car les termes en a_j et b_j qui ont un facteur carré n'apportent aucune contribution.

Pour la contribution des $s_{i,j} \neq 1$, les calculs sont aussi les mêmes. On obtient au final que la contribution des $s_{i,j} \neq 1$ est de taille

$$(6.41)\qquad \ll \frac{(y^{(m)}_{\max})^2 N}{\varphi(W)\ln N} \Big(\sum_{\substack{u<R\\ (u,W)=1}} \frac{\mu(u)^2}{g(u)} \Big)^{k-1} \Big(\sum_{s} \frac{\mu(s)^2}{g(s)^2} \Big)^{k(k-1)-1} \sum_{s_{i,j}>D_0} \frac{\mu(s_{i,j})^2}{g(s_{i,j})^2}.$$

En réutilisant à nouveau les résultats de la démonstration précédente avec les inégalités (6.26) et (6.27), on obtient :

$$\sum_{\substack{u<R\\ (u,W)=1}} \frac{\mu(u)^2}{g(u)} \ll \frac{\varphi(W)}{W}\ln R \qquad ; \qquad \sum_{s_{i,j}>D_0} \frac{\mu(s_{i,j})^2}{g(s_{i,j})^2} \ll \frac{1}{D_0}$$

L'inégalité (6.41) devient

$$(6.42)\qquad \ll \frac{(y^{(m)}_{\max})^2 N}{\varphi(W)\ln N} \Big(\frac{\varphi(W)}{W}\ln R \Big)^{k-1} \frac{1}{D_0} = \frac{(y^{(m)}_{\max})^2 \varphi(W)^{k-2} N (\ln R)^{k-1}}{W^{k-1} D_0 \ln N}.$$

Tout ceci nous donne pour $S_2^{(m)}$ l'égalité suivante :

$$(6.43)\qquad S_2^{(m)} = \frac{X_N}{\varphi(W)} \sum_{u_1,\ldots,u_k} \frac{(y^{(m)}_{u_1,\ldots,u_k})^2}{\prod_{i=1}^{k} g(u_i)} + O\Big(\frac{(y^{(m)}_{\max})^2 \varphi(W)^{k-2} N (\ln R)^{k-1}}{W^{k-1} D_0 \ln N} \Big) + O\Big(\frac{y^2_{\max} N}{(\ln N)^A} \Big).$$

Par le théorème des nombres premiers,

$$X_N = \pi(2N-1) - \pi(N-1) = \frac{N}{\ln(N)} + O(\frac{N}{(\ln N)^2}).$$

La contribution du terme d'erreur est :

$$\begin{aligned}
(6.44) \qquad & \ll \frac{N}{(\ln N)^2 \varphi(W)} \sum_{u_1,\dots,u_k} \frac{(y^{(m)}_{u_1,\dots,u_k})^2}{\prod_{i=1}^k g(u_i)} \ll \frac{N(y^{(m)}_{\max})^2}{(\ln N)^2\varphi(W)} \Big(\sum_{\substack{u<R \\ (u,W)=1}} \frac{\mu(u)^2}{g(u)} \Big)^{k-1} \\
& \ll \frac{N(y^{(m)}_{\max})^2}{(\ln N)^2\varphi(W)} \Big(\frac{\varphi(W)}{W} \ln R \Big)^{k-1} \\
& \ll \frac{(y^{(m)}_{\max})^2 \varphi(W)^{k-2} N (\ln R)^{k-3}}{W^{k-1}}.
\end{aligned}$$

Ce terme peut alors être inséré dans le premier terme d'erreur de l'équation (6.43), ce qui conclut notre démonstration. □

6.3 Lien entre S_1 et S_2

On va maintenant relier les variables $y^{(m)}_{r_1,\dots,r_k}$ qui ont été définies avec S_2 aux variables $y_{r_1,\dots,r_k}$ de S_1.

Lemme 6.3. *Si $r_m = 1$, alors*

$$y^{(m)}_{r_1,\dots,r_k} = \sum_{a_m} \frac{y_{r_1,\dots,r_{m-1},a_m,r_{m+1},\dots,r_k}}{\varphi(a_m)} + O\Big(\frac{y_{\max}\varphi(W)\ln R}{WD_0} \Big)$$

Démonstration. On va supposer durant toute cette démonstration que $r_m = 1$. Reprenons d'abord la définition (6.39) de $y^{(m)}_{r_1,\dots,r_k}$:

$$y^{(m)}_{r_1,\dots,r_k} = \Big(\prod_{i=1}^k \mu(r_i) g(r_i) \Big) \sum_{\substack{d_1,\dots,d_k \\ r_i | d_i \ \forall i \\ d_m=1}} \frac{\lambda_{d_1,\dots,d_k}}{\prod_{i=1}^k \varphi(d_i)}.$$

En utilisant l'expression (6.16) pour réécrire $\lambda_{d_1,\dots,d_k}$, on obtient :

$$(6.45) \qquad y^{(m)}_{r_1,\dots,r_k} = \Big(\prod_{i=1}^k \mu(r_i) g(r_i) \Big) \sum_{\substack{d_1,\dots,d_k \\ r_i | d_i \ \forall i \\ d_m=1}} \sum_{\substack{a_1,\dots,a_k \\ d_i | a_i \ \forall i}} \frac{y_{a_1,\dots,a_k}}{\prod_{i=1}^k \varphi(a_i)} \times \prod_{i=1}^k \frac{\mu(d_i) d_i}{\varphi(d_i)}.$$

On échange l'ordre de sommation entre les d et les a, et notre expression devient :

$$\begin{aligned}
(6.46) \qquad y^{(m)}_{r_1,\dots,r_k} &= \Big(\prod_{i=1}^k \mu(r_i) g(r_i) \Big) \sum_{\substack{a_1,\dots,a_k \\ r_i | a_i \ \forall i}} \sum_{\substack{d_1,\dots,d_k \\ r_i | d_i \ \forall i \\ d_i | a_i \ \forall i \\ d_m=1}} \frac{y_{a_1,\dots,a_k}}{\prod_{i=1}^k \varphi(a_i)} \times \prod_{i=1}^k \frac{\mu(d_i) d_i}{\varphi(d_i)} \\
&= \Big(\prod_{i=1}^k \mu(r_i) g(r_i) \Big) \sum_{\substack{a_1,\dots,a_k \\ r_i | a_i \ \forall i}} \frac{y_{a_1,\dots,a_k}}{\prod_{i=1}^k \varphi(a_i)} \sum_{\substack{d_1,\dots,d_k \\ r_i | d_i \ \forall i \\ d_i | a_i \ \forall i \\ d_m=1}} \prod_{i=1}^k \frac{\mu(d_i) d_i}{\varphi(d_i)}.
\end{aligned}$$

On va maintenant chercher à évaluer explicitement la somme sur $d_1, \dots, d_k$. Rappelons d'abord qu'à cause du support de y, les a_i sont sans facteur carré, donc tout diviseur d'un des a_i est aussi sans facteur carré :

$$\sum_{\substack{d_1,\dots,d_k \\ r_i | d_i \ \forall i \\ d_i | a_i \ \forall i \\ d_m=1}} \prod_{i=1}^k \frac{\mu(d_i) d_i}{\varphi(d_i)} = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq m}} \sum_{\substack{d_i \\ r_i | d_i \\ d_i | a_i}} \frac{\mu(d_i) d_i}{\varphi(d_i)}.$$

Maintenant on pose, pour $i \in [[1;k]]$, $d_i = \alpha_i r_i$. Pour toute fonction multiplicative f, on a alors $f(d_i) = f(\alpha_i)f(r_i)$ du au fait que d_i est sans facteur carré. De plus comme $n \mapsto \frac{\mu(n)n}{\varphi(n)}$ est multiplicative, on pourra utiliser la Propriété 1.7. La somme devient alors

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{d_i \\ r_i|d_i \\ d_i|a_i}} \frac{\mu(d_i)d_i}{\varphi(d_i)} &= \frac{\mu(r_i)r_i}{\varphi(r_i)} \sum_{\alpha_i | \frac{a_i}{r_i}} \frac{\mu(\alpha_i)\alpha_i}{\varphi(\alpha_i)} = \frac{\mu(r_i)r_i}{\varphi(r_i)} \prod_{p|\frac{a_i}{r_i}} \Big(1 + \frac{\mu(p)p}{\varphi(p)}\Big) = \frac{\mu(r_i)r_i}{\varphi(r_i)} \prod_{p|\frac{a_i}{r_i}} \Big(1 - \frac{p}{p-1}\Big) \\
&= \frac{\mu(r_i)r_i}{\varphi(r_i)} \prod_{p|\frac{a_i}{r_i}} \frac{\mu(p)}{\varphi(p)} = \frac{\mu(r_i)r_i}{\varphi(r_i)} \times \frac{\mu(\frac{a_i}{r_i})}{\varphi(\frac{a_i}{r_i})} = \frac{\mu(a_i)r_i}{\varphi(a_i)}.
\end{aligned}$$

Cela nous donne pour $y^{(m)}_{r_1,\ldots,r_k}$:

$$y^{(m)}_{r_1,\ldots,r_k} = \Big(\prod_{i=1}^{k} \mu(r_i)g(r_i)\Big) \sum_{\substack{a_1,\ldots,a_k \\ r_i|a_i \ \forall i}} \frac{y_{a_1,\ldots,a_k}}{\prod_{i=1}^{k}\varphi(a_i)} \prod_{\substack{i=1 \\ i\neq m}}^{k} \frac{\mu(a_i)r_i}{\varphi(a_i)}. \tag{6.47}$$

On remarque, d'après le support de $y_{a_1,\ldots,a_k}$, qu'on peut restreindre la sommation indicée par a_j à $(a_j, W) = 1$, i.e.$(\frac{a_j}{r_j}, W) = 1$ pour tout diviseur r_j de a_j. Dans ce cas, on a soit $\frac{a_j}{r_j} = 1$, soit $\frac{a_j}{r_j} > D_0$, c'est-à-dire que soit $a_j = r_j$, soit $a_j > D_0 r_j$. Alors pour $j \neq m$, la contribution totale des a_j quand $a_j \neq r_j$ est :

$$\begin{aligned}
&\ll \Big(\prod_{i=1}^{k} \mu(r_i)^2 g(r_i)\Big) \sum_{\substack{a_j > D_0 r_j \\ r_j|a_j}} \sum_{\substack{a_m < R \\ (a_m,W)=1}} \sum_{\substack{a_1,\ldots,a_k \\ a_i \notin \{a_j,a_m\} \\ r_i|a_i}} \frac{y_{a_1,\ldots,a_k}}{\prod_{i=1}^{k}\varphi(a_i)} \prod_{\substack{i=1 \\ i\neq m}}^{k} \frac{\mu(a_i)^2 r_i}{\varphi(a_i)} \\
&\ll y_{\max}\Big(\prod_{i=1}^{k} \mu(r_i)^2 g(r_i) r_i\Big)\Big(\sum_{\substack{a_j > D_0 r_j \\ r_j|a_j}} \frac{\mu(a_j)^2}{\varphi(a_j)^2}\Big)\Big(\sum_{\substack{a_m < R \\ (a_m,W)=1}} \frac{\mu(a_m)^2}{\varphi(a_m)}\Big) \sum_{\substack{a_1,\ldots,a_k \\ a_i \notin \{a_j,a_m\} \\ r_i|a_i}} \Big(\prod_{\substack{i=1 \\ i\neq j,m}}^{k} \frac{\mu(a_i)^2}{\varphi(a_i)^2}\Big) \\
&\ll y_{\max}\Big(\prod_{i=1}^{k} \mu(r_i)^2 g(r_i) r_i\Big)\Big(\sum_{\substack{a_j > D_0 r_j \\ r_j|a_j}} \frac{\mu(a_j)^2}{\varphi(a_j)^2}\Big)\Big(\sum_{\substack{a_m < R \\ (a_m,W)=1}} \frac{\mu(a_m)^2}{\varphi(a_m)}\Big) \prod_{\substack{i=1 \\ i\neq j,m}}^{k} \Big(\sum_{r_i|a_i} \frac{\mu(a_i)^2}{\varphi(a_i)^2}\Big).
\end{aligned} \tag{6.48}$$

La première somme est un $O(\frac{1}{D_0})$, la deuxième est un $O(\frac{\varphi(W)}{W}\ln R)$ et la troisième est une somme convergente. Cette contribution est alors :

$$\ll y_{\max}\Big(\prod_{i=1}^{k} \mu(r_i)^2 g(r_i) r_i\Big) \frac{1}{D_0} \frac{\varphi(W)}{W} \ln R \ll \frac{y_{\max}\varphi(W)\ln R}{W D_0}. \tag{6.49}$$

On remarque donc que la principale contribution se fait quand $a_j = r_j$ pour tout $j \neq m$. On obtient alors :

$$\begin{aligned}
y^{(m)}_{r_1,\ldots,r_k} &= \Big(\prod_{i=1}^{k} \cancel{\mu(r_i)} g(r_i)\Big) \sum_{a_m} \frac{y_{r_1,\ldots,r_{m-1},a_m,r_{m+1},\ldots,r_k}}{\varphi(a_m)\prod_{i\neq j}^{k}\varphi(r_i)} \prod_{\substack{i=1 \\ i\neq m}}^{k} \frac{\cancel{\mu(r_i)} r_i}{\varphi(r_i)} + O\Big(\frac{y_{\max}\varphi(W)\ln R}{W D_0}\Big) \\
&= \Big(\prod_{i=1}^{k} \frac{g(r_i)r_i}{\varphi(r_i)^2}\Big) \sum_{a_m} \frac{y_{r_1,\ldots,r_{m-1},a_m,r_{m+1},\ldots,r_k}}{\varphi(a_m)} + O\Big(\frac{y_{\max}\varphi(W)\ln R}{W D_0}\Big).
\end{aligned} \tag{6.50}$$

On remarque que

$$\frac{g(p)p}{\varphi(p)^2} = \frac{(p-2)p}{(p-1)^2} = 1 - \frac{1}{p^2} = 1 + O(p^{-2}).$$

De plus, comme la contribution est nulle sauf si $\prod_{i=1}^{k} r_i$ est premier à W, alors le produit $\prod_{i=1}^{k} \frac{g(r_i)}{r_i}\varphi(r_i)^2$ peut être remplacé par $1 + O(\frac{1}{D_0})$, car chaque facteur premier de r_i pour tout i est premier à W donc $> D_0$, et comme $\prod_{i=1}^{k} r_i$ est sans facteur carré, on va noter $\prod_{i=1}^{k} r_i = \prod_{i=1}^{\ell} p_i^{(1)}$ où pour tout $i \in [[1,\ell]]$, $p_i^{(1)}$ est premier et $> D_0$; et donc

$$\prod_{i=1}^{k} \frac{g(r_i)r_i}{\varphi(r_i)^2} = \prod_{i=1}^{\ell} \frac{g(p_i^{(1)})(p_i)^{(1)}}{\varphi(p_i^{(1)})^2} = \prod_{i=1}^{\ell} \Big(1 + O(\frac{1}{(p_i^{(1)})^2})\Big) = 1 + O(\frac{1}{D_0}).$$

La contribution du terme d'erreur est donc de taille :

$$\ll \quad \frac{1}{D_0} \sum_{a_m} \frac{y_{r_1,\ldots,r_{m-1},a_m,r_{m+1},\ldots,r_k}}{\varphi(a_m)} \ll \frac{y_{\max}}{D_0} \sum_{\substack{a_m < R \\ (a_m,W)=1}} \frac{\mu(a_m)^2}{\varphi(a_m)} \ll \frac{y_{\max}\varphi(W)\ln R}{WD_0}. \tag{6.51}$$

Ce terme d'erreur peut donc être inséré dans celui de l'expression (6.50). Cela nous donne le résultat souhaité. □

Chapitre 7

Choix lisses de y

Dans cette partie, on va choisir des valeurs appropriées à nos variables y et compléter la démonstration de la Proposition 5.1.

Commençons par donner quelques commentaires de ce que nous allons faire pour motiver notre choix des variables y, dont nous pensons qu'elles sont quasiment optimales. On aimerait choisir y de façon à maximiser le rapport des termes principaux de S_2 et de S_1. Si on utilise les multiplicateurs de Lagrange pour maximiser ce rapport (en traitant tous les termes d'erreur comme étant nuls), on arrive à la condition

$$\lambda y_{r_1,\ldots,r_k} = \Big(\prod_{i=1}^{k} \frac{\varphi(r_i)}{g(r_i)}\Big) \sum_{m=1}^{k} \frac{g(r_m)}{\varphi(r_m)} y^{(m)}_{r_1,\ldots,r_{m-1},1,r_{m+1},\ldots,r_k} \tag{7.1}$$

avec λ une constante fixée. Les termes en y sont à support sur les entiers sans petits facteurs premiers, et pour la plupart des entiers r sans petit facteur premier, on a $g(r) \approx \varphi(r) \approx r$, et ainsi la condition ci-dessus se réduit à :

$$\lambda y_{r_1,\ldots,r_k} = \sum_{m=1}^{k} y^{(m)}_{r_1,\ldots,r_{m-1},1,r_{m+1},\ldots,r_k}. \tag{7.2}$$

Cette condition semble lisse (il n'y a pas de dépendance par rapport à la décomposition en produit de facteurs premiers des r_i) et doit être en mesure d'être satisfaite si $y_{r_1,\ldots,r_k}$ est une fonction lisse par rapport aux variables r_i. Motivés par tout ce que nous avons vu dans les parties précédentes, on choisit, quand le produit $r = \prod_{i=1}^{k} r_i$ satisfait aux conditions $(r, W) = 1$ et $\mu(r)^2 = 1$:

$$y_{r_1,\ldots,r_k} = F\Big(\frac{\ln r_1}{\ln R}, \ldots, \frac{\ln r_k}{\ln R}\Big), \tag{7.3}$$

avec $F : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ une fonction lisse à support dans $\mathcal{R}_k = \{(x_1, \ldots, x_k) \in [0,1]^k : \sum_{i=1}^{k} x_i \leqslant 1\}$. Comme on l'avait noté précédemment, on suppose que $y_{r_1,\ldots,r_k} = 0$ si le produit r soit n'est pas premier avec W, soit a un facteur carré. Avec un tel choix de y, on peut obtenir des estimations asymptotiques appropriées pour S_1 et S_2. On va utiliser le lemme suivant pour pouvoir estimer les sommes S_1 et S_2 avec de tels choix de y.

Lemme 7.1. *Soient A_1, A_2, $L > 0$. Soit γ une fonction multiplicative vérifiant*

$$0 \leqslant \frac{\gamma(p)}{p} \leqslant 1 - A_1$$

et

$$-L \leqslant \sum_{w \leqslant p \leqslant z} \frac{\gamma(p) \ln p}{p} - \ln \frac{z}{w} \leqslant A_2$$

pour tout $2 \leqslant w \leqslant z$. Soit g_1 la fonction totalement multiplicative définie sur les nombres premiers par $g_1(p) = \frac{\gamma(p)}{p-\gamma(p)}$. Enfin, soit $G : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction lisse et soit $G_{\max} = \sup_{t \in [0,1]}(|G(t)| + |G'(t)|)$. Alors :

$$\sum_{d<z} \mu(d)^2 g_1(d) G\Big(\frac{\ln d}{\ln z}\Big) = \mathfrak{S} \ln z \int_0^1 G(x)\mathrm{d}x + O_{A_1,A_2}(\mathfrak{S} L G_{\max})$$

où

$$\mathfrak{S} = \prod_p \Big(1 - \frac{\gamma(p)}{p}\Big)^{-1} \Big(1 - \frac{1}{p}\Big)$$

Ici la constante implicite du terme en O est indépendant de G et de L.

Démonstration. La démonstration est faite dans le document [?] avec le Lemme 4, où il faut prendre $\kappa = 1$ et faire quelques modifications de notation, c'est-à-dire prendre G, $G_{\max}$, $\mathfrak{S}$ et g_1 à la place de $F(1-.)$, $M(F)$, c_γ et g respectivement. □

On va maintenant terminer nos estimations de S_1 et de $S_2^{(m)}$ pour compléter la démonstration de la Proposition 5.1. Commençons par estimer S_1.

Lemme 7.2. *Soit $y_{r_1,\dots,r_k}$ donnée à partir des termes de la fonction lisse F par l'expression (7.3) avec F à support dans $\mathcal{R}_k = \{(x_1,\dots,x_k) \in [0,1]^k : \sum_{i=1}^k x_i \leqslant 1\}$. Soit*

$$F_{\max} = \sup_{(t_1,\dots,t_k)\in[0,1]^k} |F(t_1,\dots,t_k)| + \sum_{i=1}^k \Big|\frac{\partial F}{\partial t_i}(t_1,\dots,t_k)\Big|.$$

Alors on a :

$$S_1 = \frac{\varphi(W)^k N(\ln R)^k}{W^{k+1}} I_k(F) + O\Big(\frac{F_{\max}^2 \varphi(W)^k N(\ln R)^k}{W^{k+1}D_0}\Big),$$

où

$$I_k(F) = \int_0^1 \dots \int_0^1 F(t_1,\dots,t_k)^2 \mathrm{d}t_1 \dots \mathrm{d}t_k.$$

Démonstration. On remplace le choix de y que nous avons écrit dans l'expression (7.3) dans l'expression de S_1 en fonction de $y_{r_1,\dots,r_k}$ donné par le Lemme 6.1. Cela nous donne :

$$\begin{aligned}
(7.4) \qquad S_1 &= \frac{N}{W} \sum_{\substack{u_1,\dots,u_k \\ \prod_{i=1}^k u_i \text{ sans facteur carré} \\ \prod_{i=1}^k u_i < R \\ (u_i,W)=1\ \forall i}} \frac{y^2_{u_1,\dots,u_k}}{\prod_{i=1}^k \varphi(u_i)} + O\left(\frac{y^2_{\max}\varphi(W)^k N(\ln R)^k}{W^{k+1}D_0}\right) \\
&= \frac{N}{W} \sum_{\substack{u_1,\dots,u_k \\ (u_i,u_j)=1\ \forall i\neq j \\ \prod_{i=1}^k u_i < R \\ (u_i,W)=1\ \forall i}} \frac{y^2_{u_1,\dots,u_k}\prod_{i=1}^k \mu(u_i)^2}{\prod_{i=1}^k \varphi(u_i)} + O\left(\frac{y^2_{\max}\varphi(W)^k N(\ln R)^k}{W^{k+1}D_0}\right) \\
&= \frac{N}{W} \sum_{\substack{u_1,\dots,u_k \\ (u_i,u_j)=1\ \forall i\neq j \\ (u_i,W)=1\ \forall i}} \left(\prod_{i=1}^k \frac{\mu(u_i)^2}{\varphi(u_i)}\right) F\Big(\frac{\ln u_1}{\ln R},\dots,\frac{\ln u_k}{\ln R}\Big)^2 + O\left(\frac{F^2_{\max}\varphi(W)^k N(\ln R)^k}{W^{k+1}D_0}\right).
\end{aligned}$$

La condition $\prod_{i=1}^k u_i < R$ a disparu à cause du support de F.

On peut remarquer que si on a deux entiers a et b tels que $(a,W) = (b,W) = 1$, mais que $(a,b) \neq 1$, alors a et b ont un facteur premier p commun, mais comme $(a,W) = 1$, alors nécessairement $p > D_0$. Ceci permet de laisser tomber la condition $(u_i,u_j) = 1$, car le coût de l'erreur pour la condition $(u_i,u_j) \neq 1$ est de taille :

$$(7.5) \qquad \ll \frac{F^2_{\max}N}{W} \sum_{p>D_0} \sum_{\substack{u_1,\dots,u_k<R \\ p|(u_i,u_j) \\ (u_i,W)=1\ \forall i}} \prod_{i=1}^k \frac{\mu(u_i)^2}{\varphi(u_i)}.$$

Or

$$(7.6) \qquad \sum_{\substack{u_1,\dots,u_k<R \\ p|(u_i,u_j) \\ (u_i,W)=1\ \forall i}} \prod_{i=1}^k \frac{\mu(u_i)^2}{\varphi(u_i)} \ll \frac{1}{\varphi(p)^2} \prod_{i=1}^k \sum_{\substack{u_i<R \\ (u_i,W)=1}} \frac{\mu(u_i)^2}{\varphi(u_i)} = \frac{1}{(p-1)^2}\Big(\sum_{\substack{u<R \\ (u,W)=1}} \frac{\mu(u)^2}{\varphi(u)}\Big)^k.$$

Le terme d'erreur devient de taille :

$$\begin{aligned}
(7.7) \qquad &\ll \frac{F^2_{\max}N}{W} \sum_{p>D_0} \frac{1}{(p-1)^2}\Big(\sum_{\substack{u<R \\ (u,W)=1}} \frac{\mu(u)^2}{\varphi(u)}\Big)^k \ll \frac{F^2_{\max}N}{W} \sum_{p>D_0} \frac{1}{(p-1)^2}\Big(\frac{\varphi(W)}{W}\ln R\Big)^k \\
&\ll \frac{F^2_{\max}\varphi(W)^k N(\ln R)^k}{W^{k+1}D_0}.
\end{aligned}$$

Il me reste à évaluer la somme

$$\sum_{\substack{u_1,\ldots,u_k\\(u_i,W)=1\ \forall i}}\left(\prod_{i=1}^{k}\frac{\mu(u_i)^2}{\varphi(u_i)}\right)F\Big(\frac{\ln u_1}{\ln R},\ldots,\frac{\ln u_k}{\ln R}\Big)^2. \tag{7.8}$$

Pour cela, il suffit de faire k applications du Lemme 7.1 en traitant la somme sur chacun des u_i à leur tour. Pour chacune de ces applications, on prend :

$$\gamma(p) = \begin{cases} 1 & \text{si } p\nmid W\\ 0 & \text{sinon}\end{cases} \tag{7.9}$$

$$L \ll 1+\sum_{p|W}\frac{\ln p}{p}\ll \ln D_0 \tag{7.10}$$

La dernière inégalité est due à l'une des formules asymptotiques admises au début de ce rapport. De plus A_1 et A_2 sont choisis de taille convenable.

On va faire l'application pour u_1 et les autres applications se feront par itération. Pour cela, G est ici la fonction

$$x\mapsto F\big(x,\frac{\ln u_2}{\ln R},\ldots,\frac{\ln u_k}{\ln R}\big)^2,$$

et pour tout p premier, avec $(p,W)=1$,

$$g_1(p)=\frac{\gamma(p)}{p-\gamma(p)}=\frac{1}{p-1}=\frac{1}{\varphi(p)},$$

de plus, g_1 et $\frac{1}{\varphi}$ sont des fonctions multiplicatives ; pour u_1 sans facteur carré, $g_1(u_i)=\frac{1}{\varphi(u_i)}$. Comme g_1 est nulle pour tout $p|W$, on peut retirer la condition $(p,W)=1$.

Enfin, calculons $\mathfrak{S}$ avec notre choix de γ.

$$\mathfrak{S}=\prod_p\Big(1-\frac{\gamma(p)}{p}\Big)^{-1}\Big(1-\frac{1}{p}\Big)=\prod_{p|W}\Big(1-\frac{1}{p}\Big)=\frac{\varphi(W)}{W}.$$

La somme devient :

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{u_2,\ldots,u_k<R\\(u_i,W)=1\ \forall i}}\left(\prod_{i=2}^{k}\frac{\mu(u_i)^2}{\varphi(u_i)}\right)\sum_{u_1<R}\frac{\mu(u_1)^2}{\varphi(u_1)}F\Big(\frac{\ln u_1}{\ln R},\ldots,\frac{\ln u_k}{\ln R}\Big)^2 \qquad (7.11)\\
&=\sum_{\substack{u_2,\ldots,u_k<R\\(u_i,W)=1\ \forall i}}\left(\prod_{i=2}^{k}\frac{\mu(u_i)^2}{\varphi(u_i)}\right)\left(\mathfrak{S}\ln R\int_0^1 F\Big(x,\frac{\ln u_2}{\ln R},\ldots,\frac{\ln u_k}{\ln R}\Big)^2\mathrm{d}x+O_{A_1,A_2}(\mathfrak{S}LF_{\max}^2)\right)\\
&=\frac{\varphi(W)\ln R}{W}\sum_{\substack{u_2,\ldots,u_k<R\\(u_i,W)=1\ \forall i}}\left(\prod_{i=2}^{k}\frac{\mu(u_i)^2}{\varphi(u_i)}\right)\int_0^1 F\Big(x,\frac{\ln u_2}{\ln R},\ldots,\frac{\ln u_k}{\ln R}\Big)^2\mathrm{d}x\\
&\qquad+\sum_{\substack{u_2,\ldots,u_k<R\\(u_i,W)=1\ \forall i}}\left(\prod_{i=2}^{k}\frac{\mu(u_i)^2}{\varphi(u_i)}\right)\times O_{A_1,A_2}\Big(\frac{\varphi(W)}{W}\ln D_0\ F_{\max}^2\Big).
\end{aligned}$$

Or en reprenant l'expression (6.26), on obtient :

$$\sum_{\substack{u_2,\ldots,u_k<R\\(u_i,W)=1\ \forall i}}\Big(\prod_{i=2}^{k}\frac{\mu(u_i)^2}{\varphi(u_i)}\Big) = \Big(\sum_{\substack{u<R\\(u,W)=1}}\frac{\mu(u)^2}{\varphi(u)}\Big)^{k-1}\ll\Big(\frac{\varphi(W)\ln R}{W}\Big)^{k-1}. \tag{7.12}$$

Donc la somme devient :

$$(7.13) \qquad \frac{\varphi(W)\ln R}{W} \sum_{\substack{u_2,\dots,u_k<R\\(u_i,W)=1\ \forall i}} \Big(\prod_{i=2}^{k}\frac{\mu(u_i)^2}{\varphi(u_i)}\Big)\int_0^1 F\Big(x,\frac{\ln u_2}{\ln R},\dots,\frac{\ln u_k}{\ln R}\Big)^2 \mathrm{dx}$$
$$+O_{A_1,A_2}\Big(\frac{\varphi(W)^k(\ln R)^{k-1}}{W^k}\ln D_0\ F_{\max}^2\Big).$$

En faisant ces calculs pour chacune des variables u_i, on obtient :

$$(7.14) \qquad \sum_{\substack{u_2,\dots,u_k<R\\(u_i,W)=1\ \forall i}} \Big(\prod_{i=2}^{k}\frac{\mu(u_i)^2}{\varphi(u_i)}\Big)\sum_{u_1<R}\frac{\mu(u_1)^2}{\varphi(u_1)}F\Big(\frac{\ln u_1}{\ln R},\dots,\frac{\ln u_k}{\ln R}\Big)^2$$
$$= \frac{\varphi(W)^k(\ln R)^k}{W^k}I_k(F)+O_{A_1,A_2}\Big(\frac{\varphi(W)^k(\ln R)^{k-1}}{W^k}\ln D_0\ F_{\max}^2\Big)$$

On combine maintenant l'expression précédente avec les expressions (7.4) et (7.7), et on obtient :

$$(7.15)S_1 \quad = \quad \frac{N}{W}\times\frac{\varphi(W)^k(\ln R)^k}{W^k}I_k(F)+O\Big(\frac{\varphi(W)^k(\ln R)^{k-1}}{W^k}\ln D_0\ F_{\max}^2\Big)+O\Big(\frac{F_{\max}^2\varphi(W)^kN(\ln R)^k}{W^{k+1}D_0}\Big)$$

Or $\ln D_0 D_0 \ll \ln R$, donc le premier terme d'erreur peut être inséré dans le second terme d'erreur. On obtient alors le résultat souhaité. □

Estimons maintenant $S_2^{(m)}$.

Lemme 7.3. *Soient $y_{r_1,\dots,r_k}$, F et $F_{\max}$ comme dans le lemme précédent. Alors :*

$$S_2^{(m)} = \frac{\varphi(W)^kN(\ln R)^{k+1}}{W^{k+1}\ln N}J_k^{(m)}(F)+O\Big(\frac{F_{\max}^2\varphi(W)^kN(\ln R)^k}{W^{k+1}D_0}\Big)$$

où

$$J_k^{(m)}(F)=\int_0^1\dots\int_0^1\Big(\int_0^1 F(t_1,\dots,t_k)\mathrm{d}t_m\Big)^2\mathrm{d}t_1\dots\mathrm{d}t_{m-1}\mathrm{d}t_{m+1}\dots\mathrm{d}t_k.$$

Démonstration. L'estimation de S_2 est similaire à celle de S_1. On va d'abord estimer $y^{(m)}_{r_1,\dots,r_k}$. On rappelle que $y^{(m)}_{r_1,\dots,r_k}$ est à support dans $\{(r_1,\dots,r_k)\in\mathbb{N}^k/r_m=1,\ (\prod_{i=1}^k r_i,W)=1,\ \mu(r)^2=1\}$. Dans ce cas, $y^{(m)}_{r_1,\dots,r_k}$ est donné en fonction de $y_{r_1,\dots,r_k}$ comme dans le Lemme 6.3. On va d'abord s'attarder sur le cas où $y^{(m)}_{r_1,\dots,r_k}\neq 0$. Pour cela on remplace notre choix de y du (7.3) dans l'expression du Lemme 6.3. Ceci nous donne :

(7.16)

$$\begin{aligned} y^{(m)}_{r_1,\dots,r_k} &= \sum_{\substack{a_m\\ a_m\prod_{i\neq m}r_i \text{ sans facteur carré}\\(a_m\prod_{i\neq m}r_i,W)=1\\ a_m\prod_{i\neq m}r_i<R}}\frac{y_{r_1,\dots,r_{m-1},a_m,r_{m+1},\dots,r_m}}{\varphi(a_m)}+O\Big(\frac{y_{\max}\varphi(W)\ln R}{WD_0}\Big)\\ &= \sum_{\substack{a_m\\(a_m\prod_{i=1}^k r_i,W)=1\\ a_m\prod_{i=1}^k r_i<R}}\frac{\mu(a_m\prod_{i\neq m}r_i)^2}{\varphi(a_m)}F\Big(\frac{\ln r_1}{\ln R},\dots,\frac{\ln r_{m-1}}{\ln R},\frac{\ln a_m}{\ln R},\frac{\ln r_{m+1}}{\ln R},\dots,\frac{\ln r_k}{\ln R}\Big)+O\Big(\frac{F_{\max}\varphi(W)\ln R}{WD_0}\Big)\\ &= \sum_{\substack{u\\(u,W\prod_{i=1}^k r_i)=1}}\frac{\mu(u)^2}{\varphi(u)}F\Big(\frac{\ln r_1}{\ln R},\dots,\frac{\ln r_{m-1}}{\ln R},\frac{\ln u}{\ln R},\frac{\ln r_{m+1}}{\ln R},\dots,\frac{\ln r_k}{\ln R}\Big)+O\Big(\frac{F_{\max}\varphi(W)\ln R}{WD_0}\Big). \end{aligned}$$

On peut immédiatement remarquer que $y^{(m)}_{\max} \ll \frac{\varphi(W)F_{\max}\ln R}{W}$. On va maintenant estimer la somme sur u dans l'expression (7.16). Pour cela, on va à nouveau appliquer le Lemme 7.1 avec

$$\gamma(p) = \begin{cases} 1, & p \nmid W\prod_{i=1}^k r_i \\ 0, & \text{sinon,} \end{cases} \tag{7.17}$$

$$\begin{aligned} L &\ll 1 + \sum_{p|W\prod_{i=1}^k r_i} \frac{\ln p}{p} \ll \sum_{p<\ln R}\frac{\ln p}{p} + \sum_{\substack{p|W\prod_{i=1}^k r_i\\ p>\ln R}} \underbrace{\frac{\ln p}{p}}_{\substack{x\mapsto \frac{\ln x}{x} \text{ décroissante}\\ \text{à partir d'un certain rang}}} \\ &\leqslant \sum_{p<\ln R}\frac{\ln p}{p} + \sum_{\substack{p|W\prod_{i=1}^k r_i\\ p>\ln R}} \frac{\ln\ln R}{\ln R} \\ &\ll \sum_{p<\ln R}\frac{\ln p}{p} + \frac{\ln\ln R}{\ln R}\underbrace{\#\{p/\ p|W\prod_{i=1}^k r_i,\ p>\ln R\}}_{\ll D_0} \ll \ln\ln N \end{aligned} \tag{7.18}$$

et avec A_1 et A_2 constantes fixées convenables.

On prend

$$G : x \mapsto F\Big(\frac{\ln r_1}{\ln R},\ldots,\frac{\ln r_{m-1}}{\ln R}, x, \frac{\ln r_{m+1}}{\ln R},\ldots,\frac{\ln r_k}{\ln R}\Big).$$

On obtient, pour p premier avec $(p, W\prod_{i=1}^k r_i) = 1$,

$$g_1(p) = \frac{\gamma(p)}{p-\gamma(p)} = \frac{1}{p-1}$$

et 0 sinon.

De même que précédemment, ici,

$$\mathfrak{S} = \frac{\varphi(W\prod_{i=1}^k r_i)}{W\prod_{i=1}^k r_i} = \frac{\varphi(W)}{W}\times\prod_{i=1}^k\frac{\varphi(r_i)}{r_i}.$$

Cela donne pour $y^{(m)}_{r_1,\ldots,r_k}$:

(7.19)

$$\begin{aligned} y^{(m)}_{r_1,\ldots,r_k} &= \mathfrak{S}\ln R\int_0^1 F\Big(\frac{\ln r_1}{\ln R},\ldots,\frac{\ln r_{m-1}}{\ln R}, u, \frac{\ln r_{m+1}}{\ln R},\ldots,\frac{\ln r_k}{\ln R}\Big)\mathrm{d}u + O\Big(\frac{F_{\max}\varphi(W)\ln R}{WD_0}\Big) + O(\mathfrak{S}LG_{\max}) \\ &\quad + O\Big(\frac{F_{\max}\varphi(W)\ln R}{WD_0}\Big) \\ &= (\ln R)\frac{\varphi(W)}{W}\Big(\prod_{i=1}^k\frac{\varphi(r_i)}{r_i}\Big)F^{(m)}_{r_1,\ldots,r_k} + O\Big(\frac{F_{\max}\varphi(W)\ln R}{WD_0}\Big) + O\Big(\frac{\varphi(W)\ln\ln N F_{\max}}{W}\Big) \end{aligned}$$

avec

$$F^{(m)}_{r_1,\ldots,r_k} = \int_0^1 F\Big(\frac{\ln r_1}{\ln R},\ldots,\frac{\ln r_{m-1}}{\ln R}, t_m, \frac{\ln r_{m+1}}{\ln R},\ldots,\frac{\ln r_k}{\ln R}\Big)\mathrm{d}t_m \tag{7.20}$$

Or $\ln\ln N \ll \frac{\ln N}{\ln\ln\ln N} \ll \frac{\ln R}{D_0}$. Donc le second terme d'erreur s'insère dans le premier terme d'erreur. On obtient :

$$y^{(m)}_{r_1,\ldots,r_k} = (\ln R)\frac{\varphi(W)}{W}\Big(\prod_{i=1}^k\frac{\varphi(r_i)}{r_i}\Big)F^{(m)}_{r_1,\ldots,r_k} + O\Big(\frac{F_{\max}\varphi(W)\ln R}{WD_0}\Big) \tag{7.21}$$

Ainsi, on a montré que si $r_m = 1$ et si, $r = \prod_{i=1}^k r_i$ satisfait $\mu(r)^2 = 1$ et $(r, W) = 1$, alors $y^{(m)}_{r_1,\ldots,r_k}$ est donné par l'expression (7.21) et $y^{(m)}_{r_1,\ldots,r_k} = 0$ sinon. On va maintenant remplacer cette expression dans celle du Lemme 6.2. On avait trouvé :

$$S_2^{(m)} = \frac{N}{\varphi(W)\ln N}\sum_{r_1,\ldots,r_k}\frac{(y^{(m)}_{r_1,\ldots,r_k})^2}{\prod_{i=1}^k g(r_i)} + O\Big(\frac{(y^{(m)}_{\max})^2\varphi(W)^{k-2}N(\ln N)^{k-2}}{W^{k+1}D_0}\Big) + O\Big(\frac{y^2_{\max}N}{(\ln N)^A}\Big) \tag{7.22}$$

On obtient :

$$(7.23)\quad S_2^{(m)} = \frac{N}{\cancel{\varphi(W)}\ln N} \sum_{\substack{r_1,\dots,r_k \\ (r_i,W)=1 \\ (r_i,r_j)=1\ \forall i\neq j \\ r_m=1}} (\ln R)^2 \frac{\varphi(W)^{\cancel{2}}}{W^2} \prod_{i=1}^k \frac{\mu(r_i)^2\varphi(r_i)^2}{r_i^2 g(r_i)} (F^{(m)}_{r_1,\dots,r_k})^2$$

$$+ \frac{N}{\cancel{\varphi(W)}\ln N} \sum_{\substack{r_1,\dots,r_k<R \\ (r_i,W)=1 \\ (r_i,r_j)=1\ \forall i\neq j \\ r_m=1}} \Big(\prod_{i=1}^k \frac{\mu(r_i)^2\varphi(r_i)}{r_i g(r_i)}\Big)(\ln R)\frac{\cancel{\varphi(W)}}{W} \times O\Big(\frac{F_{\max}^2 \varphi(W)\ln R}{W D_0}\Big)$$

$$+ O\Big(\frac{F_{\max}^2\varphi(W)^2(\ln R)^2}{W^2 D_0^2}\Big) + O\Big(\frac{(y_{\max}^{(m)})^2\varphi(W)^{k-2}N(\ln N)^{k-2}}{W^{k+1}D_0}\Big) + O\Big(\frac{y_{\max}^2 N}{(\ln N)^A}\Big)$$

Or

$$(7.24)\quad \sum_{\substack{r_1,\dots,r_k<R \\ (r_i,W)=1 \\ (r_i,r_j)=1\ \forall i\neq j \\ r_m=1}} \Big(\prod_{i=1}^k \frac{\mu(r_i)^2\varphi(r_i)}{r_i g(r_i)}\Big) = \Big(\sum_{\substack{r<R \\ (r,W)=1}} \frac{\mu(r)^2\varphi(r)}{r g(r)}\Big)^{k-1} \leqslant \Big(\prod_{D_0<p<R}(1+\frac{\varphi(p)}{p g(p)})\Big)^{k-1}$$

$$\ll \Big(\prod_{D_0<p<R}(1+\frac{1}{p})\Big)^{k-1} \ll \Big(\frac{\varphi(W)}{W}\ln R\Big)^{k-1}$$

Tout ceci prouve que la deuxième somme de $S_2^{(m)}$ dans l'expression (7.23) est un

$$O\Big(\frac{F_{\max}^2\varphi(W)^k N(\ln R)^k}{W^{k+1}D_0}\Big)$$

$S_2^{(m)}$ est donc devenu de la forme :

$$(7.25)\quad S_2^{(m)} = \frac{N}{\cancel{\varphi(W)}\ln N} \sum_{\substack{r_1,\dots,r_k \\ (r_i,W)=1 \\ (r_i,r_j)=1\ \forall i\neq j \\ r_m=1}} (\ln R)^2 \frac{\varphi(W)^{\cancel{2}}}{W^2} \prod_{i=1}^k \frac{\mu(r_i)^2\varphi(r_i)^2}{r_i^2 g(r_i)} (F^{(m)}_{r_1,\dots,r_k})^2$$

$$+ O\Big(\frac{F_{\max}^2\varphi(W)^k N(\ln R)^k}{W^{k+1}D_0}\Big) + O\Big(\frac{F_{\max}^2\varphi(W)^2(\ln R)^2}{W^2 D_0^2}\Big)$$

$$+ O\Big(\frac{(y_{\max}^{(m)})^2\varphi(W)^{k-2}N(\ln N)^{k-2}}{W^{k+1}D_0}\Big) + O\Big(\frac{y_{\max}^2 N}{(\ln N)^A}\Big)$$

On va maintenant rassembler tous les termes d'erreur en un seul terme d'erreur :
- Le deuxième terme d'erreur peut clairement être inséré dans le premier terme d'erreur.
- Comme on l'a déjà vu, $y_{\max}^{(m)} \ll \frac{\varphi(W)F_{\max}\ln R}{W}$, donc le troisième terme d'erreur s'insère dans le premier terme d'erreur.
- On a $W^{k+1}D_0 \ll (\ln\ln N)^{2k+2}\ln\ln\ln N \ll (\ln N)^k$, donc pour tout $A>0$, $\frac{1}{(\ln R)^{A+k}} \ll \frac{1}{W^{k+1}D_0}$, donc on peut intégrer le quatrième terme d'erreur dans le premier.

Finalement,

$$(7.26)\quad S_2^{(m)} = \frac{\varphi(W)N(\ln R)^2}{W^2\ln N} \sum_{\substack{r_1,\dots,r_k \\ (r_i,W)=1 \\ (r_i,r_j)=1\ \forall i\neq j \\ r_m=1}} \prod_{i=1}^k \frac{\mu(r_i)^2\varphi(r_i)^2}{r_i^2 g(r_i)} (F^{(m)}_{r_1,\dots,r_k})^2 + O\Big(\frac{F_{\max}^2\varphi(W)^k N(\ln R)^k}{W^{k+1}D_0}\Big)$$

On retire la condition $(r_i,r_j)=1$ de la même manière qu'on l'a fait pour S_1. A la place de l'expression (7.7), on a ici une erreur qui est de taille :

$$
\begin{aligned}
(7.27)\qquad &\ll \frac{\varphi(W)N(\ln R)^2}{W^2\ln N} \sum_{\substack{r_1,\dots,r_k\\(r_i,W)=1\ \forall i\\(r_i,r_j)\neq 1 \text{ pour un } i\neq j\\ r_m=1}} (F^{(m)}_{r_1,\dots,r_k})^2 \prod_{i=1}^{k} \frac{\mu(r_i)^2\varphi(r_i)^2}{g(r_i)r_i^2}\\
&\ll \frac{\varphi(W)N(\ln R)^2}{W^2\ln N} \sum_{p>D_0} \sum_{\substack{r_1,\dots,r_k<R\\(r_i,W)=1\ \forall i\\ p|(r_i,r_j) \text{ pour un } j\neq i\\ r_m=1}} \underbrace{(F^{(m)}_{r_1,\dots,r_k})^2}_{\leqslant F_{\max}} \prod_{i=1}^{k} \frac{\mu(r_i)^2\varphi(r_i)^2}{g(r_i)r_i^2}\\
&\ll \frac{\varphi(W)N(\ln R)^2F_{\max}^2}{W^2\ln N} \sum_{p>D_0} \Big(\frac{\mu(p)\varphi(p)^2}{g(p)p^2}\Big)^2 \sum_{\substack{r_1,\dots,r_k<R\\(r_i,W)=1\ \forall i\\ r_m=1}} \prod_{i=1}^{k} \frac{\mu(r_i)^2\varphi(r_i)^2}{g(r_i)r_i^2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\ll \frac{\varphi(W)N(\ln R)^2F_{\max}^2}{W^2\ln N} \sum_{p>D_0} \frac{\varphi(p)^4}{g(p)^2p^4} \prod_{\substack{i=1\\ i\neq m}}^{k} \Big(\sum_{\substack{r_i<R\\(r_i,W)=1}} \frac{\mu(r_i)^2\varphi(r_i)^2}{g(r_i)r_i^2}\Big)\\
&\ll \frac{\varphi(W)N(\ln R)^2F_{\max}^2}{W^2\ln N} \Big(\sum_{p>D_0} \frac{\varphi(p)^4}{g(p)^2p^4}\Big)\Big(\sum_{\substack{r<R\\(r,W)=1}} \frac{\mu(r)^2\varphi(r)^2}{g(r)r^2}\Big)^{k-1}
\end{aligned}
$$

Or

$$\frac{\varphi(p)^4}{g(p)^2p^4} \ll \frac{1}{p^2}$$

donc

$$\sum_{p>D_0} \frac{\varphi(p)^4}{g(p)^2p^4} \ll \frac{1}{D_0}$$

De plus,

$$\sum_{\substack{r<R\\(r,W)=1}} \frac{\mu(r)^2\varphi(r)^2}{g(r)r^2} \ll \prod_{D_0<p<R} \Big(1+\frac{1}{p}\Big) \ll \frac{\varphi(W)}{W}\ln R$$

L'erreur est donc de taille

$$(7.28)\qquad \ll \frac{\varphi(W)^kN(\ln R)^kF_{\max}^2}{W^{k+1}D_0}$$

Cette erreur peut donc s'intégrer dans le terme d'erreur déjà existant dans (7.26).

Il nous reste maintenant à évaluer la somme

$$(7.29)\qquad \sum_{\substack{r_1,\dots,r_{m-1},r_{m+1},\dots,r_k\\(r_i,W)=1}} \prod_{\substack{i=1\\ i\neq m}}^{k} \frac{\mu(r_i)^2\varphi(r_i)^2}{r_i^2 g(r_i)} (F^{(m)}_{r_1,\dots,r_k})^2$$

Pour cela, on va à nouveau utiliser le Lemme 7.1 et l'appliquer $k-1$ fois pour chaque variable de sommation une par une. Pour chaque application, on prend :

$$(7.30)\qquad \gamma(p) = \begin{cases} 1-\frac{p^2-3p+1}{p^3-p^2-2p+1} & p\nmid W\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

$$(7.31)\qquad L \ll 1+\sum_{p|W}\frac{\ln p}{p} \leqslant 1+\frac{\ln D_0}{D_0}\sum_{p\leqslant D_0} 1 \ll \ln D_0$$

et A_1 et A_2 des constantes fixées de taille convenable. On va faire l'application pour r_1 et les autres applications se feront par itération.

Tout d'abord, pour p premier avec $(p,W)=1$,

$$g_1(p)=\frac{(p-1)^2}{p^2(p-2)}=\frac{\varphi(p)^2}{g(p)p^2}$$

De plus,

$$G(x)=\Big(\int_0^1 F(x,\frac{\ln r_2}{\ln R},\dots,\frac{\ln r_k}{\ln R})\mathrm{d}t_m\Big)^2$$

et

$$\begin{aligned}\mathfrak{S} &= \prod_{p|W}\Big(1-\frac{1}{p}\Big)\times\prod_{p\nmid W}\Big(1-\frac{(p-1)^2}{p^3-p^2-2p+1}\Big)^{-1}\Big(1-\frac{1}{p}\Big)\\ &= \frac{\varphi(W)}{W}\underbrace{\prod_{p>D_0}\Big(1-\frac{(p-1)^2}{p^3-p^2-2p+1}\Big)^{-1}\Big(1-\frac{1}{p}\Big)}_{\ll 1}\end{aligned}$$

En appliquant notre lemme et en fixant $r_2,\dots,r_{k-1},r_{k+1},\dots,r_k$, on obtient :

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{r_1\\(r_1,W)=1}}\frac{\mu(r_1)^2\varphi(r_1)^2}{r_1^2g(r_1)}(F^{(m)}_{r_1,\dots,r_k})^2 &= \sum_{r_1<R}\mu(r_1)^2g_1(r_1)(F^{(m)}_{r_1,\dots,r_k})^2\\ &= \mathfrak{S}\ln R\int_0^1 G(x)\mathrm{d}x+O(\mathfrak{S}LG_{\max})\end{aligned}\tag{7.32}$$

De la même manière qu'on l'a fait pour les termes d'erreur avec S_1, on majore

$$\mathfrak{S}LG_{\max}\times\sum_{\substack{r_2,\dots,r_{m-1},r_{m+1},\dots,r_k\\(r_i,W)=1}}\prod_{\substack{i=1\\i\neq 1,m}}^k\frac{\mu(r_i)^2\varphi(r_i)^2}{r_i^2g(r_i)}(F^{(m)}_{r_1,\dots,r_k})^2$$

et on fait la même chose pour le terme d'erreur qu'entraîne $\mathfrak{S}$ dans la somme, et on en déduit que

$$\sum_{\substack{r_1,\dots,r_{m-1},r_{m+1},\dots,r_k\\(r_i,W)=1}}\prod_{\substack{i=1\\i\neq m}}^k\frac{\mu(r_i)^2\varphi(r_i)^2}{r_i^2g(r_i)}(F^{(m)}_{r_1,\dots,r_k})^2 = \frac{\varphi(W)\ln R}{W}\sum_{\substack{r_2,\dots,r_{m-1},r_{m+1},\dots,r_k\\(r_i,W)=1}}\prod_{\substack{i=1\\i\neq 1,m}}^k\frac{\mu(r_i)^2\varphi(r_i)^2}{r_i^2g(r_i)}\int_0^1 G(x)\mathrm{d}x\tag{7.33}$$

En faisant pareil pour r_2 et ainsi de suite, on obtient au final :

$$S_2^{(m)} = \frac{\varphi(W)^kN(\ln R)^{k+1}}{W^{k+1}\ln N}+O\Big(\frac{F_{\max}^2\varphi(W)^kN(\ln N)^k}{W^{k+1}D_0}\Big)\tag{7.34}$$

où

$$J_k^{(m)} = \int_0^1\dots\int_0^1\Big(\int_0^1 F(t_1,\dots,t_k)\mathrm{d}t_m\Big)^2\mathrm{d}t_1\dots\mathrm{d}t_{m-1}\mathrm{d}t_{m+1}\dots\mathrm{d}t_k\tag{7.35}$$

On obtient le résultat demandé. □

Chapitre 8

Choix de poids lisses pour k assez grand

Dans cette partie on démontrera le troisième point de la propriété 5.4. Commençons par quelques notations.

Soit $\mathcal{S}_k$ l'ensemble des fonctions Riemann-intégrables $F : [0,1]^k \to \mathbb{R}$ à support dans $\mathcal{R}_k = \{(x_1, \dots, r_k) \in [0,1]^k : \sum_{i=1}^k x_i \leqslant 1\}$ qui vérifient $I_k(F) \neq 0$ et $J_k^{(m)}(F) \neq 0$ pour tout m. On aimerait alors avoir une borne plus faible pour

$$M_k = \sup_{F \in \mathcal{S}_k} \frac{\sum_{i=1}^k J_k^{(m)}(F)}{I_k(F)} \tag{8.1}$$

On obtient une borne plus faible pour M_k quand on construit une fonction $F = F_k$ qui rend la fonction $\frac{\sum_{i=1}^k J_k^{(m)}(F)}{I_k(F)}$ grande à la condition que k soit grand. On choisit F de la forme :

$$F(t_1, \dots, t_k) = \begin{cases} \prod_{i=1}^k g_2(kt_i) & \text{si } \sum_{i=1}^k t_i \leqslant 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{8.2}$$

avec $g_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction lisse à support dans $[0, T]$ avec $T > 0$. On remarque qu'avec un tel choix, F est symétrique et qu'alors $J_k^{(m)}(F)$ est indépendant de m. On a dons seulement besoin de considérer $J_k = J_k^{(1)}(F)$. Pour simplifier, on va aussi écrire dans la suite I_k au lieu de $I_k(F)$.

L'observation principale que l'on peut faire est que le centre de masse $\frac{\int_0^\infty u g_2(u)^2 \mathrm{d}u}{\int_0^\infty g_2(u)^2 \mathrm{d}u}$ de g_2^2 est strictement inférieur à 1, donc pour k assez grand, on s'attend à ce qu'on laisse tomber les contraintes $\sum_{i=1}^k t_i \leqslant 1$ dont le coût d'erreur serait petite. Cela est du (par concentration de la mesure) à la contribution principale des intégrales non restreintes

$$I_k' = \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \prod_{i=1}^k g_2(kt_i)^2 \mathrm{d}t_1 \dots \mathrm{d}t_k$$

et

$$J_k' = \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \Big(\int_0^\infty \prod_{i=1}^k g_2(kt_i) \mathrm{d}t_1 \Big)^2 \mathrm{d}t_2 \dots \mathrm{d}t_k$$

qui proviendra principalement de $(t_1, \dots, t_k)$ tels que $\sum_{i=1}^k t_i$ soit proche du centre de masse. En conséquence on espérera que la contribution quand $\sum_{i=1}^k t_i > 1$ est en effet petite si le centre de masse est $\leqslant 1$ et qu'ainsi I_k et J_k soient bien approchées par I_k' et J_k' dans ce cas.

Pour faciliter les notations, on posera $\gamma = \int_{u \geqslant 0} g_2(u)^2 \mathrm{d}u$ et on restreint notre attention à g_2 tel que $\gamma > 0$.

Commençons par majorer I_k. On a :

$$(8.3)\qquad \begin{aligned} I_k &= \int_{\mathcal{R}_k}\!\!\dots\!\int F(t_1,\dots,t_k)^2 \mathrm{d}t_1\dots\mathrm{d}t_k = \int_{\mathcal{R}_k}\!\!\dots\!\int \prod_{i=1}^k g_2(kt_i)^2\mathrm{d}t_1\dots\mathrm{d}t_k \\ &\leqslant \int_0^1\dots\int_0^1 \prod_{i=1}^k g_2(kt_i)^2\mathrm{d}t_1\dots\mathrm{d}t_k = \Big(\int_0^1 g_2(kt)^2\mathrm{d}t\Big)^k = (\int_0^k g_2(u)^2\frac{\mathrm{d}u}{k}\Big)^k \\ &\leqslant k^{-k}\Big(\int_0^\infty g_2(u)^2\mathrm{d}u\Big)^k = k^{-k}\gamma^k \end{aligned}$$

Maintenant, minorons J_k. Comme les carrés sont positifs, on obtient une borne plus faible pour J_k si on restreint l'intégrale à $\sum_{i=2}^k t_i < 1-\frac{T}{k}$ (et dans ce cas $0 \leqslant t_1 \leqslant \frac{T}{k}$). Cette restriction a l'avantage que, grâce au support de g_2, il n'y a pas de nouvelles restrictions pour l'intégrale intérieure. Ainsi :

$$(8.4)\qquad \begin{aligned} J_k &= \int_0^1\dots\int_0^1 \Big(\int_0^1 F(t_1,\dots,t_k)\mathrm{d}t_1\Big)^2\mathrm{d}t_2\dots\mathrm{d}t_k \\ &\geqslant \int\limits_{\substack{t_2,\dots,t_k\geqslant 0\\ \sum_{i=2}^k t_i\leqslant 1-\frac{T}{k}}}\!\!\dots\!\int \Big(\int_0^{\frac{T}{k}} F(t_1,\dots,t_k)\mathrm{d}t_1\Big)^2\mathrm{d}t_2\dots\mathrm{d}t_k \\ &\geqslant \int\limits_{\substack{t_2,\dots,t_k\geqslant 0\\ \sum_{i=2}^k t_i\leqslant 1-\frac{T}{k}}}\!\!\dots\!\int \Big(\int_0^{\frac{T}{k}} (\prod_{i=1}^k g_2(kt_i))\mathrm{d}t_1\Big)^2\mathrm{d}t_2\dots\mathrm{d}t_k \end{aligned}$$

On réécrit le côté droit de l'inégalité (8.4) de la forme $J'_k - E_k$, où J'_k est :

$$(8.5)\qquad \begin{aligned} \int\limits_{t_2,\dots,t_k\geqslant 0}\!\!\dots\!\int (\int_0^{\frac{T}{k}} \Big(\prod_{i=1}^k g_2(kt_i))\mathrm{d}t_1\Big)^2\mathrm{d}t_2\dots\mathrm{d}t_k &= \int\limits_{t_2,\dots,t_k\geqslant 0}\!\!\dots\!\int \Big(\prod_{i=2}^k g_2(kt_i)\Big)^2\Big(\int_0^{\frac{T}{k}} g_2(kt_1)\mathrm{d}t_1\Big)^2\mathrm{d}t_2\dots\mathrm{d}t_k \\ &= \prod_{i=2}^k\Big(\int_{t_i\geqslant 0} g_2(kt_i)\mathrm{d}t_i\Big)\Big(\int_0^T g_2(u_1)\frac{\mathrm{d}u_1}{k}\Big)^2 \\ &= \Big(\int_0^\infty g_2(kt)\mathrm{d}t\Big)^{k-1}\Big(\int_0^\infty g_2(u_1)\mathrm{d}u_1\Big)^2 k^{-2} \\ &= k^{-k-1}\Big(\int_0^\infty g_2(u)\mathrm{d}u\Big)^{k-1}\Big(\int_0^\infty g_2(u_1)\mathrm{d}u_1\Big)^2 \\ &= k^{-k-1}\gamma^{k-1}\Big(\int_0^\infty g_2(u)\mathrm{d}u\Big)^2 \end{aligned}$$

Dans les égalités précédentes, on a utilisé le fait que g_2 est à support dans $[0,T]$ et fait le changement de variables $u = kt$ deux fois.

E_k, quand à lui, est de la forme :

$$(8.6)\qquad \begin{aligned} E_k &= \int\limits_{\substack{t_2,\dots,t_k\geqslant 0\\ \sum_{i=2}^k t_i > 1-\frac{T}{k}}}\!\!\dots\!\int \Big(\int_0^{\frac{T}{k}} (\prod_{i=1}^k g_2(kt_i))\mathrm{d}t_1\Big)^2\mathrm{d}t_2\dots\mathrm{d}t_k \\ &= \Big(\int_0^{\frac{T}{k}} g_2(kt_1)\mathrm{d}t_1\Big)^2 \int\limits_{\substack{t_2,\dots,t_k\geqslant 0\\ \sum_{i=2}^k t_i > 1-\frac{T}{k}}}\!\!\dots\!\int (\prod_{i=2}^k g_2(kt_i))^2\mathrm{d}t_2\dots\mathrm{d}t_k \\ &= \Big(\int_0^T g_2(u_1)\frac{\mathrm{d}u_1}{k}\Big)^2 \int\limits_{\substack{u_2,\dots,u_k\geqslant 0\\ \sum_{i=2}^k u_i > k-T}}\!\!\dots\!\int (\prod_{i=2}^k g_2(u_i))^2\mathrm{d}u_2\dots\mathrm{d}u_k k^{-(k-1)} \\ &= k^{-k-1}\Big(\int_0^\infty g_2(u_1)\mathrm{d}u_1\Big)^2 \int\limits_{\substack{u_2,\dots,u_k\geqslant 0\\ \sum_{i=2}^k u_i > k-T}}\!\!\dots\!\int (\prod_{i=2}^k g_2(u_i)^2)\mathrm{d}u_2\dots\mathrm{d}u_k \end{aligned}$$

Tout d'abord on veut montrer que l'erreur d'intégrale E_k est petit. On va faire cela par comparaison avec un deuxième terme. On s'attend à ce que la borne de la majoration de E_k (qui sera dans l'expression (8.16)) soit petit si le centre de masse de g_2^2 est strictement plus petit que $\frac{k-T}{k-1}$. En conséquence on introduit la restriction sur g_2 que

$$\mu = \frac{\int_0^\infty u g(u)^2 \mathrm{d}u}{\int_0^\infty g(u)^2 \mathrm{d}u} < 1 - \frac{T}{k} \tag{8.7}$$

Pour simplifier les notations, on pose $\eta = \frac{k-T}{k-1} - \mu$ qui est strictement positif car

$$\frac{k-T}{k-1} - \mu > \frac{k-T}{k-1} - 1 + \frac{T}{k} = \frac{k-T}{k(k-1)} > 0$$

Si $\sum_{i=2}^k u_i > k - T$, alors $\sum_{i=2}^k u_i > (k-1)(\mu+\eta)$ car $k - T = (\eta+\mu)(k-1)$, donc $(\frac{1}{k-1}\sum_{i=2}^k u_i - \mu)^2 \geqslant \eta^2$, ce qui au final donne

$$1 \leqslant \eta^{-2}(\frac{1}{k-1}\sum_{i=2}^k u_i - \mu)^2 \tag{8.8}$$

Puisque le côté droit de (8.8) et positif pour tout u_i, on obtient une borne plus grande pour E_k si on multiplie l'intégrante par $\eta^{-2}(\frac{1}{k-1}\sum_{i=2}^k u_i - \mu)^2$ et qu'on abandonne alors la condition $\sum_{i=1}^k u_i > k - T$. Ce qui nous donne :

$$E_k \leqslant \eta^{-2} k^{-k-1} \Big(\int_0^\infty g_2(u_1)\mathrm{d}u_1\Big)^2 \underset{\substack{u_2,\ldots,u_k \geqslant 0 \\ \sum_{i=2}^k u_i > k-T}}{\int \cdots \int} \Big(\frac{1}{k-1}\sum_{i=2}^k u_i - \mu\Big)^2 \Big(\prod_{i=2}^k g_2(u_i)^2\Big) \mathrm{d}u_2 \ldots \mathrm{d}u_k \tag{8.9}$$

On développe le carré :

$$\begin{aligned} \Big(\frac{1}{k-1}\sum_{i=2}^k u_i - \mu\Big)^2 &= \frac{1}{(k-1)^2}\sum_{i=1}^k\sum_{j=1}^k u_i u_j - 2\frac{\mu}{k-1}\sum_{i=1}^k u_i + \mu^2 \\ &= \frac{2}{(k-1)^2}\sum_{i=1}^k u_i^2 + \frac{2\sum_{2\leqslant i<j\leqslant k} u_i u_j}{(k-1)^2} - \frac{2\mu\sum_{i=2}^k u_i}{k-1} + \mu^2 \end{aligned} \tag{8.10}$$

Tous les termes qui ne sont pas de la forme u_j^2 peuvent être calculés explicitement comme une expression en fonction de μ et de γ. Faisons ces calculs terme par terme.

Tout d'abord,

$$\int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \mu^2 \Big(\prod_{i=2}^k g_2(u_i)^2\Big) \mathrm{d}u_2 \ldots \mathrm{d}u_k = \mu^2 \prod_{i=2}^k \Big(\int_0^\infty g_2(u_i)^2 \mathrm{d}u_i\Big) = \mu^2 \gamma^{k-1} \tag{8.11}$$

Ensuite :

(8.12)

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \frac{-2\mu\sum_{i=2}^k u_i}{k-1}\Big(\prod_{i=2}^k g_2(u_i)^2\Big)\mathrm{d}u_2 \ldots \mathrm{d}u_k &= -\frac{2\mu}{k-1}\sum_{i=2}^k \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty u_i \prod_{j=2}^k g_2(u_j)^2 \mathrm{d}u_i \\ &= -\frac{2\mu}{k-1}\sum_{i=2}^k \prod_{\substack{j=2 \\ j\neq i}}^k \Big(\int_0^\infty g_2(u_j)^2 \mathrm{d}u_j\Big) \times \int_0^\infty u_i g_2(u_i)^2 \mathrm{d}u_i \\ &= -\frac{2\mu}{k-1}\sum_{i=2}^k \gamma^{k-1} \times \mu\gamma = -2\gamma^{k-1}\mu^2 \end{aligned}$$

Enfin,

$$\text{(8.13)} \quad \frac{2}{(k-1)^2}\int_0^\infty \dots \int_0^\infty \sum_{2\leqslant i<j\leqslant k} u_i u_j \Big(\prod_{i=2}^k g_2(u_i)^2\Big)\mathrm{d}u_2\dots\mathrm{d}u_k$$

$$= \frac{2}{(k-1)^2}\sum_{2\leqslant i,j\leqslant k}\Big(\int_0^\infty u_i g_2(u_i)^2\mathrm{d}u_i\Big)\Big(\int_0^\infty u_j g_2(u_j)\mathrm{d}u_j\Big)\prod_{\substack{l=2\\ l\neq i,j}}^k\Big(\int_0^\infty g_2(u_l)\mathrm{d}u_l\Big)$$

$$= \frac{2}{(k-1)^2}\sum_{2\leqslant i,j\leqslant k}\gamma\mu\times\gamma\mu\times\gamma^{k-3} = \frac{\gamma^{k-1}\mu^2(k-2)}{k-1}$$

On somme maintenant les égalités (8.11), (8.12) et (8.13), et on obtient :

$$\text{(8.14)} \qquad \mu^2\gamma^{k-1} - 2\gamma^{k-1}\mu^2 + \frac{\gamma^{k-1}\mu^2(k-2)}{k-1} = -\frac{\gamma^{k-1}\mu^2}{k-1}$$

Il reste les termes en u_j^2. On va essayer de les majorer pour obtenir aussi une expression en fonction de μ et de γ. Pour cela, on remarque que $u_j^2 g_2(u_j)^2 \leqslant T u_j g_2(u_j)^2$ à cause du support de g. Donc :

$$\text{(8.15)} \quad \begin{aligned}\int_0^\infty \dots \int_0^\infty u_j^2\Big(\prod_{i=2}^k g_2(u_i)^2\Big)\mathrm{d}u_2\dots\mathrm{d}u_k &\leqslant T\int_0^\infty \dots \int_0^\infty u_j\Big(\prod_{i=2}^k g_2(u_i)^2\Big)\mathrm{d}u_2\dots\mathrm{d}u_k \\ &\leqslant T\Big(\prod_{\substack{i=2\\ i\neq j}}^k\int_0^\infty g_2(u_i)^2\mathrm{d}u_i\Big)\times\int_0^\infty u_j g_2(u_j)^2\mathrm{d}u_j \\ &\leqslant T\gamma^{k-1}\times\mu\gamma = \mu T\gamma^{k-1}\end{aligned}$$

Après tous ces calculs, l'inégalité (8.9) est devenu :

$$\text{(8.16)} \quad \begin{aligned} E_k &\leqslant \eta^{-2}k^{-k-1}\Big(\int_0^\infty g_2(u)\mathrm{d}u\Big)^2\Big(\frac{\mu T\gamma^{k-1}\cancel{(k-1)}}{(k-1)^{\cancel{2}}} - \frac{\mu^2\gamma^{k-1}}{k-1}\Big) \\ &\leqslant \frac{\eta^{-2}\mu T k^{-k-1}\gamma^{k-1}}{k-1}\Big(\int_0^\infty g_2(u)\mathrm{d}u\Big)^2\end{aligned}$$

La dernière inégalité est due au fait que $\mu>0$.

On a

$$(k-1)\mu^2 = \frac{1}{k-1}(k-T-\mu(k-1))^2 > \frac{1}{k}(k-T-\mu k)^2 > k(1-\frac{T}{k}-\mu)^2$$

De plus, $\mu\leqslant 1$. Ces deux inégalités nous seront utiles pour les calculs suivants.

En reprenant les expressions (8.3) et (8.4), on a

$$\text{(8.17)} \qquad \frac{kJ_k}{I_k} \geqslant \frac{k(J_k'-E_k)}{k^{-k}\gamma^k}$$

Avec les expressions (8.5) et (8.16), on a :

$$\text{(8.18)} \quad \begin{aligned}\frac{kJ_k}{I_k} &\geqslant \frac{k\Big(k^{-k-1}\gamma^{k-1}\big(\int_0^\infty g_2(u)\mathrm{d}u\big)^2 - \frac{\eta^{-2}\mu T k^{-k-1}\gamma^{k-1}}{k-1}\big(\int_0^\infty g_2(u)\mathrm{d}u\big)^2\Big)}{k^{-k}\gamma^k} \\ &\geqslant \frac{(\int_0^\infty g_2(u)\mathrm{d}u)^2}{\gamma}\Big(1-\frac{\mu T}{(k-1)\eta^2}\Big) \\ &\geqslant \frac{(\int_0^\infty g_2(u)\mathrm{d}u)^2}{\int_0^\infty g_2(u)^2\mathrm{d}u}\Big(1-\frac{T}{k(1-\frac{T}{k}-\mu)^2}\Big)\end{aligned}$$

La dernière inégalité provient des deux inégalités évoquées précédemment.

Pour maximiser le minorant de l'expression (8.18), on cherche à maximiser $\int_0^T g_2(u)\mathrm{d}u$ sous les contraintes $\int_0^T g_2(u)^2\mathrm{d}u = \gamma$ et $\int_0^T ug_2(u)^2\mathrm{d}u = \mu\gamma$.

En utilisant les multiplicateurs de Lagrange, on remarque que cela revient à maximiser l'expression

$$\int_0^T g_2(u)\mathrm{d}u - \alpha\Big(\int_0^T g_2(u)^2\mathrm{d}u - \gamma\Big) - \beta\Big(\int_0^T ug_2(u)^2\mathrm{d}u - \mu\gamma\Big) \tag{8.19}$$

par rapport aux variables α, β et g_2. Par l'équation d'Euler-Lagrange, cela se produit quand $\frac{\partial}{\partial g_2}(g_2(t)-\alpha g_2(t)^2-\beta t g_2(t)^2) = 0$ pour tout $t \in [0,T]$, ce qui nous donne $1-2\alpha g_2(t) - 2t\beta g_2(t) = 0$, et donc

$$g_2(t) = \frac{1}{2\alpha+2\beta t} \quad \forall t \in [0,T] \tag{8.20}$$

Comme la fraction que l'on cherche n'est pas affectée si on multiplie g_2 par une constante positive, on restreint notre attention sur les fonctions g_2 qui sont de la forme

$$g_2(t) = \frac{1}{1+At} \qquad \forall t \in [0,T]$$

avec $A > 0$ constante. Pour un tel choix de g_2, on obtient :

$$\int_0^T g_2(u)\mathrm{d}u = \frac{1}{A}[\ln(1+At)]_0^T = \frac{\ln(1+AT)}{A} \tag{8.21}$$

$$\int_0^T g_2(u)^2\mathrm{d}u = \frac{1}{A}[-\frac{1}{1+At}]_0^T = \frac{1}{A}(1-\frac{1}{1+AT}) \tag{8.22}$$

$$\int_0^T ug_2(u)^2\mathrm{d}u = \frac{1}{A}\Big(\int_0^T \frac{1}{1+Au}\mathrm{d}u - \int_0^T \frac{1}{(1+Au)^2}\mathrm{d}u\Big) = \frac{1}{A^2}\Big(\ln(1+AT) - 1 + \frac{1}{1+AT}\Big) \tag{8.23}$$

Maintenant, on va choisir T tel que $1+AT = e^A$, ce qui fait que nos expressions de g_2 deviennent :

$$\begin{aligned} \int_0^T g_2(u)\mathrm{d}u &= 1 \\ \int_0^T g_2(u)^2\mathrm{d}u &= \frac{1}{A}(1-e^{-A}) \\ \int_0^T ug_2(u)^2\mathrm{d}u &= \frac{1}{A^2}(A-1+e^{-A}) \end{aligned}$$

On a également

$$\mu = \frac{\frac{1}{A^2}\big(\ln(1+AT)-1+\frac{1}{1+AT}\big)}{\frac{1}{A}(1-\frac{1}{AT+1})} = \frac{1}{A}\Big(A-1+\frac{1}{1+AT}\Big) \times \frac{1}{1-\frac{1}{AT+1}} = \frac{1}{1-\frac{1}{AT+1}} - \frac{1}{A} = \frac{1}{1-e^{-A}} - A^{-1}$$

et

$$T = \frac{e^A - 1}{A} \leqslant \frac{e^A}{A}$$

Ainsi,

$$1-\frac{T}{k}-\mu \geqslant 1-\frac{e^A}{Ak}-\frac{1}{1-e^{-A}}+\frac{1}{A} = \frac{1}{A}\Big(A-\frac{A}{1-e^{-A}}-\frac{e^A}{k}+1\Big) = \frac{1}{A}\Big(\frac{A}{1-e^A}+1-\frac{e^A}{k}\Big) = A^{-1}\Big(1-\frac{A}{e^A-1}-\frac{e^A}{k}\Big)$$

On va maintenant utiliser nos trois expressions de g_2 et l'inégalité précédente pour les appliquer dans l'expression (8.18). On obtient alors :

$$\begin{aligned} \frac{kJ_k}{I_k} &\geqslant \frac{1}{\frac{1}{A}(1-e^{-A})}\Big(1-\frac{T}{kA^{-1}(1-\frac{A}{e^A-1}-\frac{e^A}{k})^2}\Big) \\ &\geqslant \frac{A}{1-e^{-A}}\Big(1-\frac{(e^A-1)A}{k(1-\frac{A}{e^A-1}-\frac{e^A}{k})^2}\Big) \end{aligned} \tag{8.24}$$

Or comme le côté droit est positif, on peut minorer $\frac{A}{1-e^{-A}}$ par A et majorer $(e^A-1)A$ par $e^A A$, donc

$$\frac{kJ_k}{I_k} \geqslant A\Big(1-\frac{Ae^A}{k(1-\frac{A}{e^A-1}-\frac{e^A}{k})^2}\Big) \tag{8.25}$$

Pour terminer, on choisit $A = \ln k - 2\ln\ln k > 0$. Pour k assez grand, on a :

$$(8.26) \qquad 1 - \frac{T}{k} - \mu \;\geqslant\; A^{-1}\Big(1 - \frac{A}{e^A - 1} - \frac{e^A}{k}\Big) = A^{-1}\Big(1 - \frac{(\ln k)^3 - (\ln k)^2\ln(\ln k)^2}{k - (\ln k)^2} - \frac{1}{(\ln k)^2}\Big)$$

Or

$$(8.27) \qquad \frac{(\ln k)^3 - (\ln k)^2\ln(\ln k)^2}{k - (\ln k)^2} \;\leqslant\; \frac{(\ln k)^3}{k}$$

par comparaison des fonctions $x \mapsto \frac{(\ln x)^3 - (\ln x)^2\ln(\ln x)^2}{x - (\ln x)^2}$ et $x \mapsto \frac{(\ln x)^3}{x}$.

En étudiant la fonction $x \mapsto 1 - \frac{(\ln x)^3}{k} - \frac{1}{(\ln x)^2}$, on remarque que

$$(8.28) \qquad A^{-1}(1 - \frac{(\ln k)^3 - (\ln k)^2\ln(\ln k)^2}{k - (\ln k)^2} - \frac{1}{(\ln k)^2}) \;>\; 0$$

pour k assez grand. De plus , $\mu < 1 - \frac{T}{k}$ d'après (8.7). Par le choix que nous avons fait sur A, on obtient :

$$(8.29) \qquad \begin{aligned} M_k \geqslant \frac{kJ_k}{I_k} &\geqslant (\ln k - 2\ln\ln k)\Bigg(1 - \frac{(\ln k - 2\ln\ln k)(\frac{k}{(\ln k)^2})}{k(1 - \frac{\ln k - 2\ln\ln k}{(\frac{k}{(\ln k)^2}) - 1}) - \frac{1}{(\ln k)^2})^2}\Bigg) \\ &\geqslant (\ln k - 2\ln\ln k)\Bigg(1 - \frac{\ln k}{(\ln k)^2 - \underbrace{(\ln k)^2\frac{(k\ln k - 2\ln\ln k)}{\frac{k}{(\ln k)^2} - 1} - 1}_{=O(1)}}\Bigg) \\ &\geqslant (\ln k - 2\ln\ln k)\Big(1 - \frac{\ln k}{(\ln k)^2 + O(1)}\Big) \\ &\geqslant \ln k - 2\ln\ln k - \underbrace{\frac{(\ln k)^2 - 2\ln\ln k}{(\ln k)^2 + O(1)}}_{\text{si } \overset{\longrightarrow 1}{k \to +\infty}} \\ &\geqslant \ln k - 2\ln\ln k - 2 \text{ pour } k \text{ assez grand} \end{aligned}$$

On a ainsi démontré le troisième point de la Proposition 5.4. Il reste donc à montrer les deux premiers points de cette proposition.

Chapitre 9

Choix de poids pour k petit

Dans cette partie, on va prouver les points 1 et 2 de la Proposition 5.4. Pour pouvoir avoir une borne pour M_k assez faible et convenable, on va s'intéresser à des approximations de la fonction optimale F de la forme

$$F(t_1,\dots,t_k) = \begin{cases} P(t_1,\dots,t_k) & \text{si } (t_1,\dots,t_k)\in\mathcal{R}_k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{9.1}$$

avec P un polynôme. Par symétrie de $\sum_{m=1}^{k} J_k^{(m)}(F)$ et $I_k(F)$, on restreint notre attention aux polynômes qui sont des polynômes symétriques en $t_1,\dots,t_k$. De tels polynômes peuvent s'écrire comme une expression polynômiale en identités de Newton $P_j=\sum_{i=1}^{k} t_i^j$.

Lemme 9.1. *Soit $P_j=\sum_{i=1}^{k} t_i^j$ la j-ème somme de Newton. Alors on a*

$$\int\dots\int_{\mathcal{R}_k}(1-P_1)^a P_j^b \mathrm{d}t_1\dots\mathrm{d}t_k = \frac{a!}{(k+jba)!}G_{b,j}(k),$$

où

$$G_{b,j}(x) = b!\sum_{r=1}^{b}\binom{x}{r}\sum_{\substack{b_1,\dots,b_r\geqslant 1\\ \sum_{i=1}^{r} b_i=b}}\prod_{i=1}^{r}\frac{(jb_i)!}{b_i!}$$

est un polynôme de degré b qui ne dépend que de b et de j.

Démonstration. Montrons d'abord par récurrence sur k que pour tout $(a,a_1,\dots,a_k)\in\mathbb{N}^{k+1}$:

$$\int\dots\int_{\mathcal{R}_k}\Big(1-\sum_{i=1}^{k} t_i\Big)^a\prod_{i=1}^{k} t_i^{a_i}\mathrm{d}t_1\dots\mathrm{d}t_k = \frac{a!\prod_{i=1}^{k} a_i!}{(k+a+\sum_{i=1}^{k} a_i)!} \tag{9.2}$$

Notons $H(k,a(a_1,\dots,a_k))$ le terme de gauche.

Commençons par le cas $k=1$:

$$\int_0^1(1-t_1)^a t_1^{a_1}\mathrm{d}t_1 = B(a_1+1,a+1)=\frac{\Gamma(a_1+1)\Gamma(a+1)}{\Gamma(a+a_1+2)}=\frac{a_1!a!}{(a+a_1+1)!} \tag{9.3}$$

On a le résultat pour $k=1$. Avant de continuer la récurrence, faisons une remarque qui nous sera utile pour la suite :

$$(t_1,\dots,t_k)\in\mathcal{R}_k \Longleftrightarrow \begin{cases} 0\leqslant t_1\leqslant 1-\sum_{i=1}^{k} t_i \\ (t_2,\dots,t_k)\in\mathcal{R}_{k-1} \end{cases} \tag{9.4}$$

Regardons alors l'intégration par rapport à t_1. Faisons le changement de variables $v=\frac{t_1}{(1-\sum_{i=2}^{k} t_i)}$. v, qui, par la remarque précédente, est entre 0 et 1. Ainsi,

$$(9.5)$$
$$\begin{aligned}
\int_0^{1-\sum_{i=2}^k t_i}\Big(1-\sum_{i=1}^k t_i\Big)^a\Big(\prod_{i=1}^k t_i^{a_i}\Big)\mathrm{d}t_1 &= \Big(\prod_{i=2}^k t_i^{a_i}\Big)\int_0^{1-\sum_{i=2}^k t_i}\Big(1-\sum_{i=1}^k t_i\Big)^a t_1^{a_1}\mathrm{d}t_1\\
&= \Big(\prod_{i=2}^k t_i^{a_i}\Big)\int_0^1\Big(1-\sum_{i=2}^k t_i - v\Big(1-\sum_{i=2}^k t_i\Big)\Big)^a\Big(v\Big(1-\sum_{i=2}^k t_i\Big)\Big)^{a_1}\mathrm{d}v\Big(1-\sum_{i=2}^k t_i\Big)\\
&= \Big(\prod_{i=2}^k t_i^{a_i}\Big)\Big(1-\sum_{i=2}^k t_i\Big)^{a+a_1+1}\int_0^1(1-v)^a v^{a_1}\mathrm{d}v\\
&= \frac{a_1!a!}{(a+a_1+1)!}\Big(\prod_{i=2}^k t_i^{a_i}\Big)\Big(1-\sum_{i=2}^k t_i\Big)^{a+a_1+1}
\end{aligned}$$

Au final, $H(k,a,(a_1,\dots,a_k)) = \frac{a!a_1!}{(a+a_1+1)!}H(k-1,a+a_1+1,(a_2,\dots,a_k))$ Par hypothèse de récurrence,

$$\begin{aligned}
(9.6)\qquad H(k,a,(a_1,\dots,a_k)) &= \frac{a!a_1!}{\cancel{(a+a_1+1)!}}\frac{\cancel{(a+a_1+1)!}\prod_{i=2}^k a_i!}{(k-1+a+a_1+1+\sum_{i=2}^k a_i)!}\\
&= \frac{a!\prod_{i=1}^k a_i!}{(k+a+\sum_{i=1}^k a_i)!}
\end{aligned}$$

L'égalité (9.2) est donc bien démontrée.

Par le théorème binomial,

$$(9.7)\qquad P_j^b = \sum_{\substack{b_1,\dots,b_k\\ \sum_{i=1}^k b_i=b}}\frac{b!}{\prod_{i=1}^k b_i!}\prod_{i=1}^k t_i^{jb_i}.$$

On applique l'égalité (9.2), et on obtient :

$$\begin{aligned}
(9.8)\qquad \int\underset{\mathcal{R}_k}{\cdots}\int(1-P_1)^a P_j^b\mathrm{d}t_1\dots\mathrm{d}t_k &= \sum_{\substack{b_1,\dots,b_k\\ \sum_{i=1}^k b_i=b}}\frac{b!}{\prod_{i=1}^k b_i!}\int\underset{\mathcal{R}_k}{\cdots}\int\Big(1-\sum_{i=1}^k t_i\Big)^a\Big(\prod_{i=1}^k t_i^{tb_i}\Big)\mathrm{d}t_1\dots\mathrm{d}t_k\\
&= \sum_{\substack{b_1,\dots,b_k\\ \sum_{i=1}^k b_i=b}}\frac{b!}{\prod_{i=1}^k b_i!}\frac{a!\prod_{i=1}^k(jb_i)!}{\Big(k+a+j\underbrace{\sum_{i=1}^k b_i}_{=b}\Big)!}\\
&= \frac{b!a!}{(k+a+jb)!}\sum_{\substack{b_1,\dots,b_k\\ \sum_{i=1}^k b_i=b}}\prod_{i=1}^k\frac{(jb_i)!}{b_i!}
\end{aligned}$$

Pour les calculs, b sera petit, et on jugera plus convenable de diviser la somme comme dépendant du nombre de b_i qui ne sont pas nuls. Si on prend un entier r, il y a $\binom{k}{r}$ manières de choisir r éléments parmi $b_1,\dots,b_k$ qui soient non nuls. Ainsi :

$$\begin{aligned}
(9.9)\qquad \sum_{\substack{b_1,\dots,b_k\\ \sum_{i=1}^k b_i=b}}\prod_{i=1}^k\frac{(jb_i)!}{b_i!} &= \sum_{r=1}^k \#\{(b_1,\dots,b_k))\in\mathbb{N}^k/\#\{i\in[[1,k]]/b_i\neq 0\}=r\}\}\sum_{\substack{b_1,\dots,b_r\\ \sum_{i=1}^r b_i=b}}\prod_{i=1}^k\frac{(jb_i)!}{b_i!}\\
&= \sum_{r=1}^k\binom{k}{r}\sum_{\substack{b_1,\dots,b_r\\ \sum_{i=1}^r b_i=b}}\prod_{i=1}^k\frac{(jb_i)!}{b_i!}
\end{aligned}$$

On a obtenu le résultat demandé dans l'énoncé du lemme. □

Il est facile d'étendre le Lemme 9.1 à des combinaisons plus générales des identités de Newton. Dans la suite, on va se concentrer sur le cas où P est une expression polynômiale ne dépendant que de P_1 et de P_2 afin de simplifier les choses. On remarque que les polynômes $G_{b,j}$ ne sont pas problématiques pour calculer numériquement dans le cas de petites valeurs pour b. On utilise maintenant le Lemme 9.1 pour avoir une expression convenable concernant $I_k(F)$ et $J_k^{(m)}(F)$ avec ce choix de P.

Lemme 9.2. *Soit F une fonction donnée en fonction de P par la formule* (9.1)*. Soit P donnée en fonction d'une expression polynômiale des sommes de Newton $P_1 = \sum_{i=1}^k t_i$ et $P_2 = \sum_{i=1}^k t_i^2$ par $P = \sum_{i=1}^d a_i(1-P_1)^{b_i} P_2^{c_i}$ avec $a_i \in \mathbb{R}$ et $(b_i, c_i) \in \mathbb{N}^2$. Alors pour tout $m \in [[1,k]]$, on a*

$$\begin{aligned} I_k(F) &= \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant d} a_i a_j \frac{(b_i+b_j)! G_{c_i+c_j,2}(k)}{(k+b_i+b_j+2c_i+2c_j)!}, \\ J_k^{(m)}(F) &= \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant d} a_i a_j \sum_{c_1'=0}^{c_i} \sum_{c_2'=0}^{c_j} \binom{c_i}{c_1'} \binom{c_j}{c_2'} \frac{\gamma_{b_i,b_j,c_i,c_j,c_1',c_2'} G_{c_1'+c_2',2}(k-1)}{(k+b_i+b_j+2c_i+2c_j+1)!} \end{aligned}$$

où

$$\gamma_{b_i,b_j,c_i,c_j,c_1',c_2'} = \frac{b_i! b_j! (2c_i-2c_1')!(2c_j-2c_2')!(b_i+b_j+2c_i+2c_j-2c_1'-2c_2'+2)!}{(b_i+2c_i-2c_1'+1)!(b_j+2c_j-2c_2'+1)!}$$

où G est le polynôme donné dans le Lemme 9.1*.*

Démonstration. On va commencer par étudier $I_k(F)$.
Par définition de F, on a :

$$I_k(F) = \int_0^1 \dots \int_0^1 F(t_1,\dots,t_k)^2 \mathrm{d}t_1 \dots \mathrm{d}t_k = \int \dots \int_{\mathcal{R}_k} P(t_1,\dots t_k)^2 \mathrm{d}t_1 \dots \mathrm{d}t_k \tag{9.10}$$

Or $P^2 = (\sum_{i=1}^k a_i(1-P_1)^{b_i} P_2^{c_i})^2 = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant d} a_i a_j (1-P_1)^{b_i+b_j} P_2^{c_i+c_j}$. Donc

$$I_k(F) = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant d} a_i a_j \int \dots \int_{\mathcal{R}_k} (1-P_1)^{b_i+b_j} P_2^{c_i+c_j} \mathrm{d}t_1 \dots \mathrm{d}t_k \tag{9.11}$$

On utilise le Lemme 9.1 avec $a = b_i + b_j$, $b = c_i + c_j$ et $j = 2$ (ici, le j est celui du lemme précédent, pas l'indice de la somme). On obtient :

$$I_k(F) = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant d} a_i a_j \frac{(b_i+b_j)! G_{c_i+c_j,2}(k)}{(k+b_i+b_j+2c_i+2c_j)!} \tag{9.12}$$

Étudions maintenant $J_k^{(m)}(F)$. Comme F est symétrique dans $t_1,\dots,t_k$, on remarque que $J_k^{(m)}(F)$ est indépendant de m. Il suffit donc d'étudier $J_k^{(1)}(F)$. Pour cela, étudions d'abord $\int_0^{1-\sum_{i=2}^k t_i} (1-P_1)^b P_2^c \mathrm{d}t_1$

$$P_2^c = \left(t_1^2 + \sum_{i=2}^k t_i^2\right)^c = \sum_{c'=0}^{c} \binom{c}{c'} \Big(\sum_{i=2}^k t_i^2\Big)^{c'} (t_1^2)^{c-c'} \tag{9.13}$$

Donc

$$\int_0^{1-\sum_{i=2}^k t_i} (1-P_1)^b P_2^c \mathrm{d}t_1 = \sum_{c'=0}^{c} \binom{c}{c'} \Big(\sum_{i=2}^k t_i^2\Big)^{c'} \int_0^{1-\sum_{i=2}^k t_i} (1-P_1)^b t_1^{2c-2c'} \mathrm{d}t_1 \tag{9.14}$$

On pose $u = \frac{t_1}{1-\sum_{i=2}^k t_i}$. Ainsi :

$$\begin{aligned} \int_0^{1-\sum_{i=2}^k t_i} (1-P_1)^b t_1^{2c-2c'} \mathrm{d}t_1 &= \left(1 - \sum_{i=2}^k t_i\right)^{b+2c-2c'+1} \int_0^1 (1-u)^b u^{2c-2c'} \mathrm{d}u \\ &= \left(1 - \sum_{i=2}^k t_i\right)^{b+2c-2c'+1} B(2c-2c'+1, b+1) \\ &= (1-P_1')^{b+2c-2c'+1} \frac{b!(2c-2c')!}{(b+2c-2c'+1)!} \end{aligned} \tag{9.15}$$

avec $P_1' = \sum_{i=2}^k t_i$. On pose en plus $P_2' = \sum_{i=2}^k P_i^2$. On obtient donc

$$\int_0^{1-\sum_{i=2}^k t_i} (1-P_1)^b P_2^c \mathrm{d}t_1 \quad = \quad \sum_{c'=0}^{c} \binom{c}{c'} (P_2')^{c'} (1-P_1')^{b+2c-2c'+1} \frac{b!(2c-2c')!}{(b+2c-2c'+1)!} \tag{9.16}$$

Avec $(t_2, \ldots, t_k) \in \mathcal{R}_{k-1}$, on a :

$$\begin{aligned}
\Big(\int_0^1 F\mathrm{d}t_1\Big)^2 \quad &= \quad \Big(\int_0^{1-\sum_{i=2}^k t_i} P(t_1,\ldots,t_k)\mathrm{d}t_1\Big)^2 \\
&= \quad \sum_{1\leqslant i,j\leqslant d} a_i a_j \int_0^{1-\sum_{l=2}^k t_l} (1-P_1)^{b_i} P_2^{c_i} \mathrm{d}t_1 \times \int_0^{1-\sum_{l=2}^k t_l} (1-P_1)^{b_j} P_2^{c_j} \mathrm{d}t_1
\end{aligned} \tag{9.17}$$

$$\begin{aligned}
= \quad & \sum_{1\leqslant i,j\leqslant d} a_i a_j \Big(\sum_{c_1'=0}^{c_i} \binom{c_i}{c_1'} (P_2')^{c_1'} (1-P_1')^{b+2c_i-2c_1'+1} \frac{b_i!(2c_i-2c_1')!}{(b_i+2c_i-2c_1'+1)!} \Big) \\
& \times \Big(\sum_{c_2'=0}^{c_j} \binom{c_j}{c_2'} (P_2')^{c_2'} (1-P_1')^{b+2c_j-2c_2'+1} \frac{b!(2c_j-2c_2')!}{(b+2c_j-2c_2'+1)!} \Big) \\
= \quad & \sum_{1\leqslant i,j\leqslant d} a_i a_j \sum_{c_1'=0}^{c_i} \sum_{c_2'=0}^{c_j} \binom{c_i}{c_1'} \binom{c_j}{c_2'} (P_2')^{c_1'+c_2'} (1-P_1')^{b_i+b_j+2c_i+2c_j-2c_1'-2c_2'+2)!} \\
& \times \frac{b_i!b_j!(2c_i-2c_1')!(2c_j-2c_2')!}{(b_i+2c_i-2c_1'+1)!(b_j+2c_j'-2c_2'+1)!}
\end{aligned}$$

Pour éviter des formules trop longues, on pose

$$d_{i,j} = \frac{b_i!b_j!(2c_i-2c_1')!(2c_j-2c_2')!}{(b_i+2c_i-2c_1'+1)!(b_j+2c_j'-2c_2'+1)!}$$

On voit que $J_k^{(1)}(F)$ est de la forme

$$C \sum_{b,c} \int \ldots \int_{\mathcal{R}_{k-1}} (1-P_1')^b (P_2')^c \mathrm{d}t_2 \ldots \mathrm{d}t_k$$

pour certaines valeurs de b et c et avec C une constante. Or d'après le Lemme 9.1,

$$\int \ldots \int_{\mathcal{R}_{k-1}} (1-P_1')^b (P_2')^c \mathrm{d}t_2 \ldots \mathrm{dt_k} \quad = \quad \frac{b!}{(k-1+2c+b)!} G_{c,2}(k-1). \tag{9.18}$$

Donc

$$\begin{aligned}
J_k^{(1)}(F) \quad = \quad & \sum_{1\leqslant i,j\leqslant d} a_i a_j \sum_{c_1'=0}^{c_i} \sum_{c_2'=0}^{c_j} \binom{c_i}{c_1'} \binom{c_j}{c_2'} d_{i,j} \\
& \times \int \ldots \int_{\mathcal{R}_{k-1}} (P_2')^{c_1'+c_2'} (1-P_1')^{b_i+b_j+2c_i+2c_j-2c_1'-2c_2'+2)!} \mathrm{d}t_2 \ldots \mathrm{dt_k} \\
= \quad & \sum_{1\leqslant i,j\leqslant d} a_i a_j \sum_{c_1'=0}^{c_i} \sum_{c_2'=0}^{c_j} \binom{c_i}{c_1'} \binom{c_j}{c_2'} d_{i,j} \\
& \times \frac{(b_i+b_j+2c_i+2c_j-2c_1'-2c_2'+2)!}{(k-1+b_i+b_j+2c_i+2c_j-2c_1'-2c_2'+2+2c_1'+2c_2')!} G_{c_1'+c_2',2}(k-1)
\end{aligned} \tag{9.19}$$

On obtient bien le résultat annoncé dans l'énoncé. □

On remarque d'après le Lemme 9.2 que $I_k(F)$ et $\sum_{i=1}^k J_k^{(m)}(F)$ peuvent s"exprimer comme des formes quadratiques par rapport aux coefficients $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_d)$ du polynôme P. De plus, ces formes quadratiques sont réelles définies positives. En particulier, on a :

$$\frac{\sum_{m=1}^k J_k^{(m)}(F)}{I_k(F)} = \frac{{}^t\mathbf{a}A_2\mathbf{a}}{{}^t\mathbf{a}A_1\mathbf{a}} \tag{9.20}$$

avec $A_1, A_2 \in M_d(\mathbb{R})$ matrices symétriques définies positives, qui peuvent être calculées explicitement par rapport k pour n'importe quel choix des exposants b_i et c_i. Maximiser les expressions de cette forme a une solution connue.

Lemme 9.3. *Soient A_1, A_2 des matrices réelles symétriques définies positives. Alors*

$$\frac{{}^t\mathbf{a}A_2\mathbf{a}}{{}^t\mathbf{a}A_1\mathbf{a}}$$

est maximisé quand $\mathbf{a}$ *est un vecteur propre de $A_1^{-1}A_2$ pour la valeur propre maximale de $A_1^{-1}A_2$. La valeur maximale de cette fraction vaut cette valeur propre.*

Démonstration. On remarque que multiplier $\mathbf{a}$ par un scalaire non nul ne modifie pas la fraction, ce qui fait qu'on peut supposer sans perte de généralité que ${}^t\mathbf{a}A_1\mathbf{a} = 1$. Or par la théorie des multiplicateurs de Lagrange, ${}^t\mathbf{a}A_2\mathbf{a}$ est maximisé sous la contrainte ${}^t\mathbf{a}A_1\mathbf{a} = 1$ quand

$$L(\mathbf{a}, \lambda) = {}^t\mathbf{a}A_2\mathbf{a} - \lambda({}^t\mathbf{a}A_1\mathbf{a} - 1) \tag{9.21}$$

est stationnaire. Cela implique nécessairement que

$$0 = \frac{\partial L}{\partial a_i} \quad \forall i \tag{9.22}$$

Or par symétrie de A_1 et de A_2,

$$\frac{\partial L}{\partial a_i} = \big((2A_2 - 2\lambda A_1)\mathbf{a}\big)_i \quad \forall i \tag{9.23}$$

Comme A_1 est définie positive, elle est inversible. Donc

$$\begin{aligned} 0 = \big((2A_2 - 2\lambda A_1)\mathbf{a}\big)_i \quad \forall i &\iff (A_2 - \lambda A_1)\mathbf{a} = 0 \\ &\iff A_1^{-1}A_2\mathbf{a} = \lambda\mathbf{a} \end{aligned} \tag{9.24}$$

Donc λ est valeur propre de $A_1^{-1}A_2$ dont $\mathbf{a}$ est un vecteur propre non nul. De plus, on a bien ${}^t\mathbf{a}A_2\mathbf{a} = \lambda {}^t\mathbf{a}A_1\mathbf{a}$. On a bien le résultat demandé. □

Après ces deux lemmes, nous allons pouvoir conclure ce mémoire en démontrant complètement la Proposition 5.4.

Démonstration des parties 1 *et* 2 *de la Proposition* 5.4. Pour cette démonstration, on aura recours à des calculs sur ordinateur pour calculer une borne plus faible pour M_k. Ces calculs seront admis.

Soit F en fonction de P comme dans l'expression (9.1). Soit P écrit comme une expression polynômiale en les $P_1 = \sum_{i=1}^k t_i$ et $P_2 = \sum_{i=1}^k t_i^2$ et qui est une combinaison linéaire de tous les monômes $(1-P_1)^b P_2^c$ avec $b + 2c \leqslant 11$. Or il y a 42 monômes de cette sorte [1]. Avec $k = 105$, on peut calculer les matrices symétriques rationnelles de taille 42×42 A_1 et A_2 correspondant aux formes quadratiques $I_k(F)$ et $\sum_{i=1}^k J_k^{(m)}(F)$. Après calcul sur logiciel, on trouve que la plus grande valeur propre de $A_1^{-1}A_2$, en reprenant les notations du lemme précédent, est

$$\lambda \approx 4.0020697... > 4. \tag{9.25}$$

Or $M_{105} \geqslant \lambda$ par définition de M_k, donc $M_{105} > 4$. Le deuxième point de la proposition est démontrée.
Pour le premier point de la proposition, on prend $k = 5$ et

$$P = (1-P_1)P_2 + \frac{7}{10}(1-P_1)^2 + \frac{1}{14}P_2 - \frac{3}{14}(1-P_1) \tag{9.26}$$

Avec un tel choix, on trouve :

$$M_5 \geqslant \frac{\sum_{m=1}^k J_k^{(m)}(F)}{I_k(F)} = \frac{1417255}{708216} > 2 \tag{9.27}$$

On a ainsi terminé la démonstration de la Proposition 5.4, ce qui conclut notre mémoire. □

1. Les paires (b, c) possibles sont : $(0,0), (0,1), (0,2), (0,3), (0,4), (0,5), (1,0), (1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (2,0), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (3,0), (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (4,0), (4,1), (4,2), (4,3), (5,0), (5,1), (5,2), (5,3), (6,0), (6,1), (6,2), (7,0), (7,1), (7,2), (8,0), (8,1), (9,0), (9,1), (10,0), (11,0)$

Annexe

Fonction Bêta

Définition 1. *Pour tous $x, y \in \mathbb{R}_*^+$, on pose :*

$$\begin{aligned}\Gamma(x) &= \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t \\ B(x,y) &= \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Propriété 2. $\forall x > 0, \quad \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$. *En particulier,* $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$.

Propriété 3. *Pour tous $x, y > 0$,*

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

Sommes de Newton

Définition 4. *Soient $t_1, \ldots, t_k$ des variables. Pour $j \in [[1,k]]$, on appelle j**-ième somme de Newton** le polynôme $P_j = \sum_{i=1}^k t_i^j$.*

Théorème 5. *Pour tout polynôme symétrique R à k indéterminées, il existe un polynôme Q à k indéterminées tel que $R(t_1, \ldots, t_k) = Q(P_1(t_1, \ldots, t_k), \ldots, P_k(t_1, \ldots, t_k))$*

Multiplicateurs de Lagrange

L'énoncé est repris de l'ouvrage [**?**]

Théorème 6. *Soient $f, g_1, \ldots, g_p$ des fonctions réelles de classe C^1 sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$, et X l'ensemble défini par les équations*

$$g_1(x) = 0, \ldots, g_p(x) = 0 \qquad \forall x \in U$$

Si la restriction de f à X admet un extremum local en $a \in X$, et si les différentielles $Dg_1(a), \ldots, Dg_p(a)$ sont des formes linéaires indépendantes sur $\mathbb{R}^n$, alors nécessairement les formes linéaires $Df(a), Dg_1(a), \ldots, Dg_p(a)$ sont liées.

*Donc $\exists(\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p$, appelés **multiplicateurs de Lagrange**, tels que*

$$Df(a) = \sum_{i=1}^k \lambda_i Dg_i(a)$$

Équation d'Euler-Lagrange

Théorème 7. *Soit J la fonction définie par : pour toute fonction x de classe C^1,*

$$J(x) = \int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), \dot{x}(t))\mathrm{d}t$$

Une condition nécessaire pour que J soit stationnaire est que l'on ait :

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}\right) = 0$$

Bibliographie

[1] Régis De la Bretèche. Petits écarts entre nombres premiers et polymath : une nouvelle manière de faire de la recherche en mathématiques ? *Gazette des mathématiciens*, (140) :19–31, avril 2014. http ://smf4.emath.fr/Publications/Gazette/2014/140/smf_gazette_140_19-31 .pdf.

[2] Peter D.T.A. Elliott and Heini Halberstam. *A conjecture in prime number theory*, volume IV (INDAM, Rome, 1968-1969) of *Symposia Mathematica*, chapter 23, pages 59–72. Academic Press, 1970. MR 0276195. Zbl 0238.10030.

[3] John Friedlander and Andrew Granville. Limitations to the equi-distribution of primes. I. *Annals of Mathematics*, 129 :363–382, 1989. MR 0986796. Zbl 0671.10041. http ://dx.doi.org/10.2307/1971450.

[4] Daniel Goldston, Sidney Graham, János Pintz, and Cem Yıldırım. Small gaps between products of two primes. *London Mathematical Society*, 98 :741–774, 2009. MR 2500871. Zbl 1213.11171. http ://dx.doi.org/10.1112/plms/pdm046.

[5] Daniel Goldston, János Pintz, and Cem Yıldırım. Primes in tuples. III. on the difference $p_{n+\nu} - p_n$. *Functiones et Approximatio Commentarii Mathematici*, 35 :79–89, 2006. MR 2271608. Zbl 1196.11123. http ://dx.doi.org/10.7169/facm/1229442618.

[6] Daniel Goldston, János Pintz, and Cem Yıldırım. Primes in tuples. I. *Annals of Mathematics*, 170 :819–862, 2009. MR 2552109. Zbl 1207.11096. http ://dx.doi.org/10.4007/annals.2009.170.819.

[7] Daniel Goldston and Cem Yıldırım. Higher correlations of divisor sums related to primes. III. small gaps between primes. *London Mathematical Society*, 95 :653–686, 2007. MR 2368279. Zbl 1118.11040. http ://dx.doi.org/10.1112/plms/pdm021.

[8] Isabelle. www.techno-science.net, janvier 2014. http ://www.techno-science.net/ ?onglet=news&news=12383.

[9] James Maynard. Small gaps between primes. *Annals of Mathematics*, 181 :383–413, 2015. http ://dx.doi.org/10.4007/annals.2015.181.1.7.

[10] D. H. J. Polymath. New equidistribution estimates of zhang type, and bounded gaps between primes. preprint. arXiv 1402.0811.

[11] François Rouvière. *Petit guide de calcul différentiel.* Cassini, 2009.

[12] Atle Selberg. *Collected Papers*, volume II. Springer-Verlag, New York, 1991. with a foreword by K. CChandrasekharan. MR 1295844. Zbl 0729.11001.

[13] Gérald Tenenbaum. *Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres.* Belin, 2008.

[14] Yitang Zhang. Bounded gaps between primes. *Annals of Mathematics*, 179 :1121–1174, 2014. MR 3171761.Zbl 06302171. http ://dx.doi.org/10.4007/annals.2014.179.3.7.

Résumé et mots clés

Résumé
Le but de ce rapport est d'étudier en détail l'article de James Maynard publié en 2013. Cet article constituait une étape supplémentaire dans la démonstration de la conjecture des nombres premiers jumeaux. En effet, si on note p_n le n-ième nombre premier et $d_n = p_{n+1} - p_n$, cette conjecture serait équivalente à $\liminf_n d_n = 2$. Or avant la publication de cet article, on avait su prouver que $\liminf_n d_n \leqslant 7.10^7$. Maynard, quand à lui, réussit à réduire la majoration à 600 en montrant d'abord que $\liminf_n (p_{n+m} - p_n)$ est fini. Pour cela, il reprend une méthode mise en place par Goldston, Pintz et Yıldırım, appelée méthode GPY, et qui utilise le crible de Selberg. L'originalité de l'auteur est de généraliser ce crible à une dimension supérieure. On peut noter que la méthode GPY nécessite le théorème de Bombieri-Vinogradov. Maynard a su également montrer dans cet article que si on admet une généralisation de ce théorème, appelée conjecture de Elliott-Halberstam, alors la borne 600 peut être réduite à 12 et $\liminf_n (p_{n+2} - p_n) \leqslant 600$.

Mots-clés : crible, nombres premiers.

Small gaps between primes

Abstract
The aim of this report was to study in detail Maynard's article which was published in 2013. In this article, the author introduced a refinement of a method created by Goldston, Pintz and Y ildırım based on sieve methods, called GPY sieve method, for studying prime k-tuples and small gaps between primes. This refinement avoids previous limitations of the method and allows to show that for each k, the prime k-tuples conjecture holds for a positive proportion of admissible k-tuples. In particular, $\liminf_n (p_{n+m} - p_n) < \infty$ fot every integer m. In this article, it was also showed that $\liminf_n (p_{n+1} - p_n) \leqslant 600$ and, if the Elliott-Halberstam conjecture if assumed, then $\liminf_n (p_{n+1} - p_n) \leqslant 12$ and $\liminf_n (p_{n+2} - p_n) \leqslant 600$.