



AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : ddoc-memoires-contact@univ-lorraine.fr

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>



UNIVERSITÉ
DE LORRAINE



Faculté des Sciences et Technologies de Nancy

Master 2 de Mathématiques Fondamentales et Appliquées,

Parcours Recherche

Rapport de stage

Etude des variations d'ordre supérieur d'un modèle mixte à deux paramètres

Rédigé par :

TOUIBI Rim

Encadrants :

DOZZI Marco

NOURDIN Ivan

13 Septembre 2013

Résumé

L'objectif de ce mémoire, dont l'outil mathématique principal est l'un des champs aléatoires gaussiens anisotropes, est, premièrement, de présenter le drap Brownien fractionnaire en citant ses propriétés, deuxièmement, d'étudier ses variations d'ordre supérieur en montrant en particulier un théorème limite central, troisièmement, d'introduire les modèles mixtes à deux paramètres et d'étudier le comportement asymptotique de ses variations d'ordre supérieur et, finalement, de montrer l'équivalence entre ce modèle mixte et un drap Brownien dans le cas où ses paramètres de Hurst sont plus grands que $3/4$.

Mots clés : Drap Brownien fractionnaire, modèles mixtes à deux paramètres, variations d'ordre supérieur, théorème ergodique, théorème limite, paramètres de Hurst, mesures équivalentes.

Remerciements

Ce mémoire décrit mes premiers pas d'activités de recherches que j'ai menées durant mon stage de master 2 au sein de l'IECL.

Je tiens tout d'abord à remercier mon encadreur Mr.Marco Dozzi pour avoir accepté d'encadrer ce travail, pour sa disponibilité permanente, pour le suivi, les relectures, pour ses conseils, son encouragement et pour nos discussions qui m'ont toujours été enrichissantes.

Mr.Ivan Nourdin merci. Merci pour votre disponibilité permanente, pour nos discussions, pour vos idées. Merci pour votre gentillesse, votre compétence, votre encouragement et surtout votre aide depuis mon arrivée à Nancy. Merci.

Je voudrais remercier Mr.Pierre Vallois d'avoir accepté de faire partie de mon jury, ainsi qu'au responsable du master Mr. Seraphin Méfire.

Je remercie également l'ensemble des enseignants de FSM et l'ESSTHS que j'ai pu avoir tout au long de mes études et en dernier lieu les enseignants de l'IECL, pour m'avoir transmis leur savoir, souvent leur passion.

Je tiens aussi à remercier Mr.Alfredo Lopez et Mme. Ekaterina Kolkoviska, les visiteurs de CIMAT (Guanajuato, Mexique), de me donner l'occasion de présenter mon travail, d'en discuter, pour leurs conseils et leur gentillesse.

Enfin, mes plus affectueux remerciements vont à mes chers parents, à Mr. Monji Mefteh, à mes chères soeurs et à mes amis pour leur soutien constant et leur rôle au-delà de ce mémoire. Merci Meriem Naili.

Table des matières

Remerciements	iii
Introduction	1
1 Préliminaires	6
1.1 Bruit blanc	6
1.2 Un lemme de D. Feyel et A. De La Pradelle	7
1.3 Les polynômes d’Hermite	7
1.4 Le théorème du moment d’ordre quatrième et sa version multidimensionnelle	8
2 Le drap Brownien fractionnaire	10
2.1 Définition et existence du drap Brownien fractionnaire (dBf)	10
2.2 Stationnarité et auto-similarité	12
2.2.1 La stationnarité	12
2.2.2 L’auto-similarité	14
2.3 Régularité des trajectoires	14
2.4 Représentations intégrales du dBf	15
3 Etude des variations d’ordre supérieur du dBf	16
3.1 Théorème ergodique	16
3.2 Le comportement asymptotique des variations d’ordre supérieur du dBf	23
4 Modèle mixte à deux paramètres	30
4.1 Etude des variations d’ordre supérieur d’un modèle mixte à deux paramètres	30
4.1.1 Centralisation des variations	31
4.1.2 Etude du comportement asymptotique des variations d’ordre supérieur mixtes	31
4.2 Equivalence entre un modèle mixte et un drap Brownien	34
Conclusion	40

Introduction

Ces dernières années, beaucoup d'attentions ont été accordées à l'étude des variations de puissances pondérées des processus stochastiques vu qu'elles jouent un rôle crucial dans le monde de la statistique et des équations différentielles stochastiques (EDS en abrégé). En effet, plusieurs propriétés statistiques ont été déduites. Par exemple, l'étude des variations de puissances pondérées a été utilisée par Barndorff-Nielsen et Shephard dans [6] et [7] pour résoudre certains problèmes économétriquement financiers (les applications à l'économétrie sont également données par [8]). Ces résultats théoriques ont également été utilisés dans plusieurs domaines d'applications tels que l'estimation de la volatilité intégrée (voir par exemple [29]), les estimations stochastiques pour le mouvement brownien fractionnaire (mBf en abrégé) et les processus multi-fractionnaires [4], ainsi que pour tester les sauts d'un processus observé en temps discret comme par exemple dans [28]. De plus, ces variations servent aussi à étudier les EDS dirigées par un mBf comme dans [19] et [21].

Rappelons-nous du cas du mouvement Brownien fractionnaire introduit par Kolmogorov et développé par Mandelbrot et Van Ness. On considère $B^H = (B_t^H)_{t \geq 0}$ un mBf de paramètre de Hurst $H \in (0, 1)$. Alors B^H est le seul processus vérifiant :

1. gaussien avec $EB_1^H = 0$ et $E[B_1^H]^2 = 1$. Sa fonction de covariance est

$$R_H(t, s) = \frac{1}{2}(s^{2H} + t^{2H} - |t - s|^{2H})$$

2. autosimilarité : $\forall a > 0, (a^{-H}B_{at}^H)_{t \geq 0}$ a la même loi que $(B_t^H)_{t \geq 0}$ au sens des lois fini-dimensionnelles.
3. accroissements stationnaires : $\forall h > 0, (B_{t+h}^H - B_h^H)_{t \geq 0}$ et $(B_t^H)_{t \geq 0}$ ont la même loi au sens des distributions fini-dimensionnelles.

Les variations de p -puissance pondérées du B^H sont définies par :

$$V_n := \sum_{i=1}^n f(B_{\frac{i-1}{n}}^H)(B_{\frac{i}{n}}^H - B_{\frac{i-1}{n}}^H)^p,$$

où f une fonction à valeurs réelles suffisamment régulière. L'étude du comportement asymptotique de ce type de variations est un problème relativement ancien dans la littérature. On cite à titre d'exemple : [5], [11], [31], [19], [21]...

Dans ce contexte, l'étude de ce comportement (pour le cas $f = 1$) se résume comme suite :

- Cas r pair :
- Si $H \in (0, \frac{3}{4})$,

$$n^{-\frac{1}{2}} \sum_{i=1}^n ((n^H (B_{\frac{i}{n}}^H - B_{\frac{i-1}{n}}^H))^r - \mu_r) \Longrightarrow \mathcal{N}(0, \sigma_{H,r}^2),$$

où :

$$\begin{aligned} \mu_r &= E(N(0, 1))^r, \\ \sigma_{H,r}^2 &= \sum_{q=1}^{\frac{r}{2}} \frac{(q!)^2}{(2q)!((r-2q)!!)^2} \sum_{i \in \mathbb{Z}} \rho_H^{2q}(i), \end{aligned}$$

et

$$\rho_H(i) = \frac{1}{2} (|i+1|^{2H} + |i-1|^{2H} - 2|i|^{2H}).$$

- Si $H = \frac{3}{4}$,

$$(n \log n)^{-\frac{1}{2}} \sum_{i=1}^n ((n^H (B_{\frac{i}{n}}^H - B_{\frac{i-1}{n}}^H))^r - \mu_r) \Longrightarrow \mathcal{N}(0, \sigma_{\frac{3}{4},r}^2).$$

- Si $H \in (\frac{3}{4}, 1)$,

$$n^{1-2H} \sum_{i=1}^n ((n^H (B_{\frac{i}{n}}^H - B_{\frac{i-1}{n}}^H))^r - \mu_r) \Longrightarrow \zeta_{H,r},$$

où $\zeta_{H,r}$ est une variable aléatoire de "Rosenblatt".

- Cas r impair :

- Si $H \in (0, \frac{1}{2}]$,

$$n^{-\frac{1}{2}} \sum_{i=1}^n (n^H (B_{\frac{i}{n}}^H - B_{\frac{i-1}{n}}^H))^r \Longrightarrow \mathcal{N}(0, \sigma_{H,r}^2),$$

où

$$\sigma_{H,r}^2 = \sum_{q=0}^{\frac{(r-1)}{2}} \frac{(r!)^2}{(2q+1)!((r-2q-1)!!)^2} \sum_{i \in \mathbb{Z}} \rho_H^{2q+1}(i).$$

- Si $H \in (\frac{1}{2}, 1)$,

$$n^{-H} \sum_{i=1}^n (n^H (B_{\frac{i}{n}}^H - B_{\frac{i-1}{n}}^H))^r \Longrightarrow \mathcal{N}(0, \mu_{r+1}^2).$$

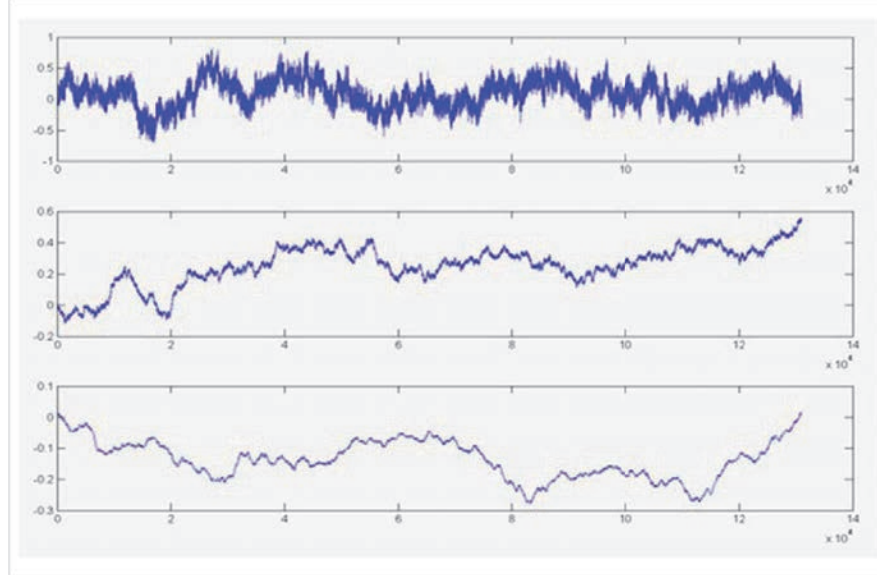


FIG. 1 – Trajectoires du mBf pour $H = 0.2$, $H = 0.5$ et $H = 0.7$.

Le mouvement Brownien fractionnaire est un sujet d'étude en soi passionnant mais, du point de vue des applications à la modélisation des phénomènes rugueux, c'est un modèle trop pauvre. Expliquons cela à partir d'un exemple tiré du traitement de l'image. Dans ce domaine les trajectoires du mBf ont été utilisées pour simuler le profil d'un massif montagneux. Si l'on se reporte à l'encadré, la figure où $H = 0.7$ semble convenir pour un massif plus ancien que celles pour $H = 0.5$ et $H = 0.2$. Plus le massif est ancien, plus les profils des montagnes sont réguliers. Si on raffine cette démarche on peut se souvenir que plus la roche du sol est dure, plus le massif est escarpé et plus grande sera l'irrégularité de la trajectoire. Dans ce cas, on autorise le paramètre H à dépendre de la position du point x . En fait la fonction $x \mapsto H(x)$ est souvent la fonction d'intérêt car elle traduit la nature géologique du sous-sol. Cependant, quand on revient à la présentation mathématique du mBf, on s'aperçoit que H ne peut pas varier. Plus grave, l'auto-similarité est une propriété d'invariance qui concerne l'ensemble de la trajectoire. Des raisons plus profondes issues notamment de l'étude de la turbulence ont conduit un certain nombre d'auteurs à proposer une généralisation du mBf : le mouvement Brownien multifractionnaire.

Dans ce contexte, une simple approche de ce type de processus, qui nous paraît intéressante, a été étudiée par M. Dozzi et al. dans [10], dite modèle mixte, qui consiste en une combinaison linéaire de mBf indépendants avec des paramètres de Hurst différents. Plus précisément, il s'agit d'une combinaison linéaire d'un mBf de paramètre de Hurst égale à $\frac{1}{2}$ et un mBf qui, lui est indépendant et s'écrit sous cette forme :

$$M_t^H = aB_t^H + bW_t^H, t \geq 0,$$

où a et b sont des coefficients non nuls.

Ce type de modèle, ainsi que ses applications ont été abordés par plusieurs mathématiciens,

citons quelques références : [9], [2], [12], [16], [17].

L'étude du comportement asymptotique de variations de puissance S_n de M^H :

$$S_n := \sum_{i=1}^n (n^{rH+\frac{p}{2}} (W_{\frac{i}{n}} - W_{\frac{i-1}{n}})^p (B_{\frac{i}{n}}^H - B_{\frac{i-1}{n}}^H)^r - \mu_p \mu_r),$$

a été abordée par M. Dozzi et al. (voir [10]), dans l'intention de construire des estimateurs fortement consistants des paramètres de ce modèle. Cette étude se résume comme suite :

– Si p et r sont pairs, $r \geq 2$, alors, lorsque $n \rightarrow \infty$,

- pour $H \in (0, \frac{3}{4})$ on a

$$n^{-\frac{1}{2}} S_n \Rightarrow N(0, \sigma_{H,r}^2 \mu_p^2 + \sigma_{p,r}^2),$$

où

$$\sigma_{p,r}^2 = \mu_{2r} (\mu_{2p} - \mu_p^2).$$

- pour $H = \frac{3}{4}$,

$$(n \log n)^{-\frac{1}{2}} S_n \Rightarrow N(0, \sigma_{\frac{3}{4},r}^2 \mu_p^2 + \sigma_{p,r}^2),$$

- pour $H \in (\frac{3}{4}, 1)$,

$$n^{1-2H} S_n \Rightarrow \zeta_{H,p,r}.$$

– Si p est impair, alors pour tout $H \in (0, 1)$,

$$n^{-\frac{1}{2}} S_n \Rightarrow N(0, \mu_{2p} \mu_{2r}).$$

– Si p est pair et r est impair, alors, lorsque $n \rightarrow \infty$,

- pour $H \in (0, \frac{1}{2})$, on a

$$n^{-\frac{1}{2}} S_n \Rightarrow N(0, \sigma_{H,r}^2 \mu_p^2 + \sigma_{p,r}^2),$$

- pour $H \in (\frac{1}{2}, 1)$,

$$n^{-H} S_n \Rightarrow N(0, \mu_p^2 \mu_{r+1}^2).$$

Vu son rôle important dans la modélisation des champs aléatoires anisotropes avec une dépendance à long terme et son apparition remarquable dans l'étude des équations aux dérivées partielles stochastiques, nous avons pensé nous intéresser au mBf à deux paramètres, connu par drap Brownien fractionnaire (dBf) introduit par A. Kamont en 1996 dans [15], Ayache et al. en 2002 dans [1], et étendre les résultats concernant le cas du mBf à un seul paramètre (au début de l'introduction).

Ainsi, l'objectif de ce mémoire est d'étudier le comportement asymptotique des variations d'ordre supérieur dans un premier lieu, du dBf, puis ceux d'un modèle mixte à deux paramètres, en d'autres termes, étendre les résultats obtenus dans le cas d'un processus à un seul paramètre mentionnés dans [10], dans le but de construire des estimateurs fortement consistants des paramètres du modèle à deux paramètres.

Le premier chapitre est réservé à des rappels concernant quelques notions et résultats utiles le long du rapport.

L'introduction au dBf fera l'objet du deuxième chapitre : il s'agit d'une version bidimensionnelle du mBf, c'est à dire indexé par un paramètre bidimensionnel. Comme le mBf, le dBf est un processus gaussien, centré, auto-similaire, dont les accroissements sont stationnaires. Ce processus, contrairement au mouvement Brownien à deux paramètres, permet, via la corrélation entre les réalisations, de prendre en compte les valeurs passées du bruit dans la modélisation. Les trajectoires seront influencées par les paramètres de ce processus dits de Hurst et au point de vue modélisation, le dBf, contrairement au mBf, tient compte des caractéristiques géométriques et probabilistes du modèle étudié, selon les différentes directions.

Dans le troisième chapitre, nous nous intéressons, en premier lieu, à la loi des grands nombres d'un dBf, en d'autres termes, nous prouvons le théorème ergodique usuel appliqué à un dBf (voir théorème 3.1.1) en utilisant les polynômes d'Hermite, et plus précisément, leur propriété d'orthogonalité. En fait, il s'agit d'une extension du théorème ergodique tel qu'il est formulé par I.Nourdin (voir théorème 2.1 du chapitre 2 dans [24]) tout en suivant le même raisonnement, grâce à la forme de la fonction de covariance du dBf comme produit de deux fonctions de covariance de deux mBf. Puis, nous étudions les variations d'ordre supérieur d'un dBf tout en commençant par prouver une extension du théorème de Breuer-Major [20] appliquée à notre cas, en utilisant le remarquable théorème du moment quatrième et quelques outils du calcul de Malliavin (section 3.2).

Le quatrième chapitre est consacré, premièrement, à l'étude des variations d'ordre supérieur appliquées au modèle mixte à deux paramètres (section 4.1.2) : Nous démontrons une convergence en loi des variations d'ordre supérieur, convenablement normalisées, en se basant sur les résultats de l'étude des variations d'ordre supérieur du dBf (section 3.2). Puis, nous abordons le problème d'équivalence entre un modèle mixte à deux paramètres et le drap Brownien tout en généralisant l'un des résultats étudiés par Cheridito dans [9] : la mesure induite par un modèle mixte à deux paramètres est équivalente à celle d'un drap Brownien pour paramètres de Hurst dans l'intervalle $(\frac{3}{4}, 1)$. Par conséquent, on ne pourra pas trouver des estimateurs fortement consistants à partir de l'observation des trajectoires de notre modèle mixte dans ce cas. Ce qui nous permettra de minimiser les cas d'estimation des paramètres.

On finira par une conclusion et quelques perspectives.

Chapitre 1

Préliminaires

Il nous a semblé intéressant de consacrer un chapitre au rappel de certaines notions et résultats assez importants et utiles ultérieurement.

1.1 Bruit blanc

Définition 1.1.1 – Soit ν la mesure de Lebesgue de \mathbb{R}^2 et \mathcal{F} un ensemble de boréliens, de mesure de Lebesgue finie. Un bruit blanc de \mathbb{R}^2 est une fonction

$$W : \Omega \times \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$$

vérifiant :

- Pour tout $A \in \mathcal{F}$, la variable aléatoire $W(\cdot, A)$ est gaussienne de moyenne nulle et de variance $\nu(A)$.
- Si $A, C \in \mathcal{F}$ sont disjoints, alors $W(\cdot, A)$ et $W(\cdot, C)$ sont indépendantes et on a presque sûrement

$$W(\cdot, A \cup C) = W(\cdot, A) + W(\cdot, C)$$

- L'intégrale stochastique d'une fonction $\phi \in L^2(\mathbb{R}^2)$ par rapport au bruit blanc W est une variable aléatoire gaussienne centrée de variance $\|\phi\|_2^2$. De plus, on a la propriété d'orthogonalité et d'isométrie suivante :

$$E\left(\int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) \mathbf{1}_A(x, y) dW_{x,y} \int_{\mathbb{R}^2} g(x, y) \mathbf{1}_C(x, y) dW_{x,y}\right) = \int_{\mathbb{R}^2} (gf)(x, y) \mathbf{1}_{A \cap C}(x, y) dx dy.$$

En particulier, lorsque $A \cap C = \emptyset$,

$$E\left[\int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) \mathbf{1}_A(x, y) dW_{x,y} \right] \left[\int_{\mathbb{R}^2} g(x, y) \mathbf{1}_C(x, y) dW_{x,y} \right] = 0,$$

et comme il s'agit de variables aléatoires gaussiennes centrées, $\int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) \mathbf{1}_A(x, y) dW_{x,y}$ et $\int_{\mathbb{R}^2} g(x, y) \mathbf{1}_C(x, y) dW_{x,y}$ sont indépendantes.

1.2 Un lemme de D. Feyel et A. De La Pradelle

Soit $(X_{s,t})_{(s,t) \in \mathbb{R}^+}$ un processus gaussien à deux paramètres, nul sur les axes, tel que :
 $\forall s, t, h, k \in (0, +\infty), \exists p > 1, \exists x, y \in (\frac{1}{p}, +\infty),$

$$\|X_{s+h,t+k} - X_{s+h,t} - X_{s,t+k} + X_{s,t}\|_p \leq C|h|^x|k|^y$$

Alors, ce processus admet une modification \tilde{X} dont les trajectoires sont continues.

De plus, les trajectoires de \tilde{X} sont holderiennes d'exposant $(x', y'), \forall x' \in (0, x - \frac{1}{p}),$

$\forall y' \in (0, y - \frac{1}{p})$ au sens suivant :

$\forall \omega \in \Omega, \exists C_\omega > 0$ telle que $\forall s, s', t, t',$

$$\left| \tilde{X}_{s,t}(\omega) - \tilde{X}_{s',t}(\omega) - \tilde{X}_{s,t'}(\omega) + \tilde{X}_{s',t'}(\omega) \right| \leq C_\omega |s - s'|^{x'} |t - t'|^{y'}.$$

(Voir [13] pour la preuve).

1.3 Les polynômes d'Hermite

Commençons par définir la famille des polynômes d'Hermite :

Définition 1.3.1 Pour tout $k \geq 1$, on définit le $k^{\text{ème}}$ polynôme d'Hermite H_k comme suit :

$$H_k = \delta^k 1,$$

où 1 est la fonction constante égale à 1 et $\delta : C^1(\mathbb{R}) \rightarrow C^0(\mathbb{R})$ est un opérateur linéaire défini par :

$$(\delta\varphi)(x) = x\varphi(x) - \varphi'(x), x \in \mathbb{R}.$$

Et on a, par convention, $H_{-1} = 0$ et $H_0 = 1$. De plus, $H_1 = x, H_2 = x^2 - 1$ et $H_3 = x^3 - 3x$ sont les premiers polynômes d'Hermite.

Citons, maintenant, quelques propriétés importantes de ces polynômes.

Proposition 1.3.1 Soit $(H_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}[X]$ une famille de polynômes d'Hermite. Alors :

1. La famille $(\frac{1}{\sqrt{k!}} H_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une base orthonormale de $L^2(\mathbb{R}, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx)$.
2. Soit (U, V) un vecteur gaussien, avec $U, V \sim N(0, 1)$. Alors, pour tout $k, l \in \mathbb{N}$, on a :

$$E[H_k(U)H_l(V)] = \begin{cases} k!(EU^k)(EV^k) & \text{si } k = l \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1.4 Le théorème du moment d'ordre quatrième et sa version multidimensionnelle

Dans un article fondateur publié en 2005 ([22]), Nualart et Peccati ont découvert un théorème limite centrale impressionnant (appelée le théorème de moment quatrième) pour l'ensemble des intégrales stochastiques multiples d'un ordre fixé : dans ce contexte, la convergence vers une loi normale centrée réduite est seulement équivalente à la convergence du moment quatrième. Un peu plus tard, Peccati et Tudor ont donné une version multidimensionnelle de cette caractérisation (voir [30]).

On commence par citer quelques définitions et notations utiles ([23]) :

Définition 1.4.1 1. Soit H un espace de Hilbert séparable. Pour tout $q \geq 1$, on définit $H^{\otimes q}$ le q ème produit tensoriel de H et on note par $H^{\odot q}$ le q ème produit tensoriel symétrique de H muni de la norme $\sqrt{q!} \|\cdot\|_{H^{\otimes q}}$. Soit $X = \{X(h); h \in H\}$ un processus gaussien isonormal sur H , càd il s'agit d'un processus gaussien centré indexé par H défini sur un espace de probabilité (Ω, \mathcal{F}, P) et tel que, pour tout $h, k \in H$

$$E[X(h)X(k)] = \langle h, k \rangle_H.$$

2. On note par \mathbf{H}_n la fermeture du sous-espace vectoriel de $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ engendré par :

$$\{H_n(X(h)), h \in H; \|h\|_H = 1\}$$

dit le n ème Chaos de Wiener associé à X .

3. Soit $q \geq 1$ et $f \in H^{\odot q}$. L'intégrale multiple par rapport à X , le processus isonormal sur H , est définie par :

$$I_q(f) = \delta^q(f),$$

avec δ l'opérateur linéaire défini dans 1.3.1.

On énonce, maintenant, les deux théorèmes surprenants correspondant à notre cas, sans reprendre les preuves détaillées (voir [30]).

Théorème 1.4.1 (Nualart-Peccati 2005) Soit $q \geq 2$ un entier. Soit $(f_{n,m})_{n,m \in \mathbb{N}}$ une suite des fonctions tel que :

$$\forall n, m; f_{n,m} \in H^{\odot q},$$

et

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} E[I_q^X(f_{n,m})]^2 = \sigma^2 > 0.$$

Alors, les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) $I_q^X(f_{n,m}) \xrightarrow{\mathcal{L}} N \sim N(0, \sigma^2)$.
- (ii) $E [I_q^X(f_{n,m})]^4 \rightarrow EN^4; n, m \rightarrow \infty$.
- (iii) $\|f_{n,m} \otimes_r f_{n,m}\|_{H^{\otimes 2(q-r)}} \xrightarrow{n,m \rightarrow \infty} 0, \forall r = 1, \dots, q-1$, où

$$f_{n,m} \otimes_r f_{n,m}(x_1, \dots, x_{2q-2r}) = \langle f_{n,m}(x_1, \dots, x_{q-r}, \cdot), f_{n,m}(x_{q-r+1}, \dots, x_{2q-2r}, \cdot) \rangle_{H^{\otimes r}}.$$

On termine par citer :

Théorème 1.4.2 (Peccati-Tudor, 2005) *On considère l entiers $q_1, \dots, q_l \geq 1$, avec $l \geq 2$. Supposons que tous les q_i sont deux à deux différents. Soit l'ensemble $\{(f_{n,m}^1, \dots, f_{n,m}^l); n, m \in \mathbb{N}^*\}$ tel que $f_{n,m}^i \in H^{\odot i}, \forall i = 1, \dots, l$ et vérifiant :*

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} \|f_{n,m}^i\|_{H^{\odot i}}^2 = \sigma_i^2 > 0,$$

et $\forall 1 \leq i < j \leq l$,

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} E \left[I_{q_i}^X(f_{n,m}^i) I_{q_j}^X(f_{n,m}^j) \right] = 0.$$

Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) $\forall 1 \leq i \leq l; I_{q_i}^X(f_{n,m}^i) \xrightarrow{\mathcal{L}} N \sim N(0, \sigma_i^2)$.
- (ii) $(I_{q_1}^X(f_{n,m}^1), \dots, I_{q_l}^X(f_{n,m}^l)) \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0, \text{diag}(\sigma_1^2, \dots, \sigma_l^2)); n, m \rightarrow \infty$.

Chapitre 2

Le drap Brownien fractionnaire

De nombreux ensembles de données provenant de divers domaines scientifiques, tels que le traitement de l'image, l'hydrologie, la géostatistique et les statistiques spatiales ont la nature anisotrope dans le sens où elles n'ont pas les mêmes caractéristiques géométriques et probabilistes selon des directions différentes, d'où le mouvement Brownien fractionnaire n'est pas suffisant pour modéliser ces phénomènes. Dans ce cadre, plusieurs classes de champs aléatoires gaussiens anisotropiques ont été introduites. Parmi lesquelles, on s'intéresse, dans ce chapitre, au drap Brownien fractionnaire introduit par A. Kamont dans [15] et défini comme une double intégrale fractionnaire d'un bruit blanc (voir aussi [1]).

2.1 Définition et existence du drap Brownien fractionnaire (dBf)

On définit le drap Brownien fractionnaire sur $(\mathbb{R}^+)^2$ par

$$B_{s,t}^{\alpha,\beta} = \int_{\mathbb{R}^2} f_\alpha(s,u) f_\beta(t,v) dW_{u,v}, \quad (2.1)$$

où

$f_\alpha(s,u) = (s-u)_+^{\alpha-\frac{1}{2}} - (-u)_+^{\alpha-\frac{1}{2}}$, $f_\beta(t,v) = (t-v)_+^{\beta-\frac{1}{2}} - (-v)_+^{\beta-\frac{1}{2}}$ et α, β sont deux paramètres réels à valeurs dans $(0, 1)$.

Remarque 2.1.1 – Les deux paramètres α, β sont bien choisis de tel sorte que, pour tout $(s, t) \in (\mathbb{R}^+)^2$, $f_\alpha(s, \cdot), f_\beta(t, \cdot) \in L^2(\mathbb{R}^2)$.

– f_α et f_β sont les intégrandes (aux constantes près) d'un mBf classique de paramètres respectifs α et β .

Proposition 2.1.1 1. Le champ $B^{\alpha,\beta}$ est un champ aléatoire gaussien centré nul sur les axes et de fonction de covariance

$$E(B_{s,t}^{\alpha,\beta} B_{s',t'}^{\alpha,\beta}) = \frac{c_\alpha}{2}(|s|^{2\alpha} + |s'|^{2\alpha} - |s - s'|^{2\alpha}) \frac{c_\beta}{2}(|t|^{2\beta} + |t'|^{2\beta} - |t - t'|^{2\beta}) \quad (2.2)$$

où

$$c_\alpha = \int_{\mathbb{R}} f_\alpha^2(1, u) du, \quad c_\beta = \int_{\mathbb{R}} f_\beta^2(1, v) dv.$$

2. Si $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$, alors le dBf n'est qu'un drap Brownien.

Preuve.

1. Soit $\alpha, \beta \in (0, 1)$, $B^{\alpha,\beta}$ est un processus gaussien par construction. Notons que

$$\text{Var}(B_{s,t}^{\alpha,\beta}) = \left(\int_{\mathbb{R}} f_\alpha^2(s, u) du \right) \left(\int_{\mathbb{R}} f_\beta^2(t, v) dv \right) = c_\alpha s^{2\alpha} c_\beta t^{2\beta}.$$

Alors,

$$B_{s,t}^{\alpha,\beta} \sim N(0, c_\alpha c_\beta t^{2\beta} s^{2\alpha}).$$

En calculant la fonction de covariance de $B^{\alpha,\beta}$:

$$E(B_{s,t}^{\alpha,\beta} B_{s',t'}^{\alpha,\beta}) = \left(\int_{\mathbb{R}} f_\alpha(s, u) f_\alpha(s', u) du \right) \left(\int_{\mathbb{R}} f_\beta(t, v) f_\beta(t', v) dv \right),$$

on obtient le produit de deux covariances du mBf classique de paramètres respectifs α et β .

Pour achever la preuve, il suffit de remarquer que :

$$B_{(s,0)}^{\alpha,\beta} = B_{(0,t)}^{\alpha,\beta} = B_{(0,0)}^{\alpha,\beta} = 0.$$

2. Comme dans le cas du mBf, il suffit de remarquer que la fonction de covariance de $B^{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}$ est réduit à $((s, t), (s', t')) \mapsto (s \wedge t)(s' \wedge t')$.

□

Remarque 2.1.2

- comme dans le cas du mBf, si $(\alpha, \beta) \neq (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, le dBf n'est pas une semi-martingale.
- Les deux processus $s \mapsto B_{s,t}^{\alpha,\beta}$ et $t \mapsto B_{s,t}^{\alpha,\beta}$ sont des mBf d'indices de Hurst, respectivement, α et β , ayant les mêmes lois que $s \mapsto s^\alpha B^\alpha$ et $t \mapsto t^\beta B^\beta$, respectivement, où pour $\gamma = \alpha, \beta$, $B^\gamma := B_1^\gamma$.
- On dit que $B^{\alpha,\beta}$ est un dBf standard si $c_\alpha = c_\beta = 1$.

2.2 Stationnarité et auto-similarité

Dans cette section, nous présentons deux propriétés très importantes du dBf.

2.2.1 La stationnarité

Nous définissons, ici, la première propriété du dBf.

Définition 2.2.1 Soit $T \subset \mathbb{R}^2$. Un processus gaussien $X = (X_{s,t}, (s,t) \in T)$ est dit stationnaire si, $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall ((s_1, t_1), (s_2, t_2), \dots, (s_n, t_n)) \in T^n$, la loi de

$$(X_{s+s_1, t+t_1}, X_{s+s_2, t+t_2}, \dots, X_{s+s_n, t+t_n})$$

ne dépend pas de (s, t) .

On définit les accroissements rectangulaires du processus $B^{\alpha, \beta}$ par :

$$\Delta_{s,t} B_{h,k}^{\alpha, \beta} = B_{s+h, t+k}^{\alpha, \beta} - B_{s+h, t}^{\alpha, \beta} - B_{s, t+k}^{\alpha, \beta} + B_{s,t}^{\alpha, \beta}.$$

Alors, on a la proposition suivante :

Proposition 2.2.1 Le processus $B^{\alpha, \beta}$ est à accroissements stationnaires.

Preuve. Il faut montrer que, pour tout $(s, t) \in \mathbb{R}^{+2}$, les lois de dimension finie du processus accroissements $(h, k) \mapsto \Delta_{s,t} B_{h,k}^{\alpha, \beta}$ ne dépendent pas de (s, t) , c'est à dire que

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall ((h_1, k_1), (h_2, k_2), \dots, (h_n, k_n)) \in (\mathbb{R}^{+2})^n$, le vecteur $(\Delta_{s,t} B_{h_1, k_1}^{\alpha, \beta}, \Delta_{s,t} B_{h_2, k_2}^{\alpha, \beta}, \dots, \Delta_{s,t} B_{h_n, k_n}^{\alpha, \beta})$ est de même loi que le vecteur $(\Delta_{0,0} B_{h_1, k_1}^{\alpha, \beta}, \Delta_{0,0} B_{h_2, k_2}^{\alpha, \beta}, \dots, \Delta_{0,0} B_{h_n, k_n}^{\alpha, \beta})$.

Et comme $\Delta_{s,t} B_{h,k}^{\alpha, \beta}$ est gaussien (sa loi est entièrement déterminée par sa moyenne et sa fonction de covariance), il suffit de montrer que

$E(\Delta_{s,t} B_{h_i, k_i}^{\alpha, \beta})$, $Var(\Delta_{s,t} B_{h_i, k_i}^{\alpha, \beta})$ et $E(\Delta_{s,t} B_{h_i, k_i}^{\alpha, \beta} \Delta_{s,t} B_{h_j, k_j}^{\alpha, \beta})$ ne dépendent pas de s et t , pour tout h_i, k_i et pour tout h_j, k_j .

Pour cela, nous allons commencer par expliciter $\Delta_{s,t} B_{h,k}^{\alpha, \beta}$:

$$\begin{aligned} \Delta_{s,t} B_{h,k}^{\alpha, \beta} &= \int_{\mathbb{R}^2} [f_\alpha(s+h, u) f_\beta(t+k, v) - f_\alpha(s, u) f_\beta(t+k, v) - f_\alpha(s+h, u) f_\beta(t, v) + f_\alpha(s, u) f_\beta(t, v)] dW_{u,v} \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} [f_\alpha(s+h, u) - f_\alpha(s, u)] [f_\beta(t+k, v) - f_\beta(t, v)] dW_{u,v} \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \left[(s+h-u)_+^{\alpha-\frac{1}{2}} - (s-u)_+^{\alpha-\frac{1}{2}} \right] \left[(t+k-v)_+^{\beta-\frac{1}{2}} - (t-v)_+^{\beta-\frac{1}{2}} \right] dW_{u,v}. \end{aligned}$$

1. $E(\Delta_{s,t}B_{h,k}^{\alpha,\beta}) = 0$ par définition de l'intégrale par rapport au bruit blanc.

2. Calculons maintenant $Var(\Delta_{s,t}B_{h,k}^{\alpha,\beta})$:

$$Var(\Delta_{s,t}B_{h,k}^{\alpha,\beta}) = \left(\int_{\mathbb{R}} \left[(s+h-u)_+^{\alpha-\frac{1}{2}} - (s-u)_+^{\alpha-\frac{1}{2}} \right]^2 du \right) \left(\int_{\mathbb{R}} \left[(t+k-v)_+^{\beta-\frac{1}{2}} - (t-v)_+^{\beta-\frac{1}{2}} \right]^2 dv \right).$$

On réalise le changement de variable : $hx = u - s$ et $ky = v - t$, et l'on obtient :

$$Var(\Delta_{s,t}B_{h,k}^{\alpha,\beta}) = c_{\alpha}h^{2\alpha}c_{\beta}k^{2\beta}.$$

Donc, $Var(\Delta_{s,t}B_{h,k}^{\alpha,\beta})$ ne dépend pas de s et t .

3. Calculons la fonction de covariance $E(\Delta_{s,t}B_{h,k}^{\alpha,\beta})(\Delta_{s,t}B_{h',k'}^{\alpha,\beta})$, pour tout

$h, h', k, k' \in \mathbb{R}^+$:

$$E(\Delta_{s,t}B_{h,k}^{\alpha,\beta})(\Delta_{s,t}B_{h',k'}^{\alpha,\beta})$$

$$\begin{aligned} &= \left(\int_{\mathbb{R}} \left[(s+h-u)_+^{\alpha-\frac{1}{2}} - (s-u)_+^{\alpha-\frac{1}{2}} \right] \left[(s+h'-u)_+^{\alpha-\frac{1}{2}} - (s-u)_+^{\alpha-\frac{1}{2}} \right] du \right) \\ &\times \left(\int_{\mathbb{R}} \left[(t+k-v)_+^{\beta-\frac{1}{2}} - (t-v)_+^{\beta-\frac{1}{2}} \right] \left[(t+k'-v)_+^{\beta-\frac{1}{2}} - (t-v)_+^{\beta-\frac{1}{2}} \right] dv \right). \end{aligned}$$

On obtient le produit de deux covariances d'accroissements de deux mBf de paramètres respectifs α et β , c-à-d :

$$E(\Delta_{s,t}B_{h,k}^{\alpha,\beta})(\Delta_{s,t}B_{h',k'}^{\alpha,\beta}) = \frac{c_{\alpha}c_{\beta}}{4}(|h|^{2\alpha} + |h'|^{2\alpha} - 2|h-h'|^{2\alpha})(|k|^{2\beta} + |k'|^{2\beta} - 2|k-k'|^{2\beta}),$$

et la covariance ne dépend ni de s ni de t .

□

Notation :

On notera par $\Delta B^{\alpha,\beta}$ l'accroissement qui définit un processus indépendant de (s, t) et qui vérifie le corollaire suivant :

Corollaire 1 *Le processus accroissement $\Delta B^{\alpha,\beta}$ est un champ aléatoire gaussien centré de fonction de covariance*

$$\frac{1}{4}c_{\alpha}c_{\beta}(|h|^{2\alpha} + |h'|^{2\alpha} - 2|h-h'|^{2\alpha})(|k|^{2\beta} + |k'|^{2\beta} - 2|k-k'|^{2\beta}).$$

2.2.2 L'auto-similarité

D'après Benoit Mandelbrot, 1999 : (Un objet est dit auto-similaire si le tout, c'est-à-dire l'objet tout entier, peut être découpé en parties, dont chacune se déduit du tout par une similitude, c'est-à-dire une réduction ou compression linéaire. Du point de vue mathématique, le processus de réduction peut être répété indéfiniment. Il s'ensuit nécessairement qu'un objet mathématique auto-similaire contient des détails infinitésimaux). Mathématiquement, cela s'écrit :

Définition 2.2.2 *Un processus stochastique à deux paramètres $X = (X_{t,s}, (t, s) \in T)$, $T \subset (\mathbb{R}^+)^2$ est dit auto-similaire d'ordre (α, β) si, pour tout $h, k > 0$, le processus $(\tilde{X}_{s,t})_{(s,t) \in T}$*

$$\tilde{X}_{s,t} := h^\alpha k^\beta X_{\frac{s}{h}, \frac{t}{k}}$$

a la même loi que le processus X .

Nous allons montrer que le champ $B^{\alpha,\beta}$ est statistiquement auto-similaire de la même façon que le champ Brownien fractionnaire.

Proposition 2.2.2 *Le drap brownien fractionnaire $B^{\alpha,\beta}$ est un processus auto-similaire dans le sens où : si $\forall h, k \in \mathbb{R}_*^+$, le processus $\tilde{B}^{\alpha,\beta}$ défini par*

$$\tilde{B}_{s,t}^{\alpha,\beta} = h^\alpha k^\beta B_{\frac{s}{h}, \frac{t}{k}}^{\alpha,\beta},$$

est de même loi que $B^{\alpha,\beta}$.

Preuve. Il est évident que $\tilde{B}_{s,t}^{\alpha,\beta}$ est un champ gaussien. Donc, pour montrer que les deux champs aléatoires ont la même loi, il suffit de montrer qu'ils ont la même moyenne et la même fonction de covariance. Pour cela, il suffit d'appliquer les deux propriétés de base du dBf.

□

2.3 Régularité des trajectoires

Comme dans le cas du mouvement Brownien fractionnaire, le drap Brownien fractionnaire admet des trajectoires continues pour tout $\alpha, \beta \in (0, 1)$. La preuve est basée sur un lemme de D. Feyel et A. De La Pradelle (section 1.2).

Proposition 2.3.1 Si $\alpha, \beta \in (0, 1)$, $B^{\alpha, \beta}$ admet une modification $\tilde{B}^{\alpha, \beta}$ dont les trajectoires sont continues sur $(\mathbb{R}^+)^2$. De plus, les trajectoires de $\tilde{B}^{\alpha, \beta}$ sont Holderiennes d'exposants (α', β') , $\forall \alpha' \in (0, \alpha), \beta' \in (0, \beta)$ au sens défini dans 1.2.

Preuve. D'après le corollaire 1, $\Delta B^{\alpha, \beta}$ suit une loi gaussienne $N(0, c_\alpha c_\beta h^{2\alpha} k^{2\beta})$. Or les moments des lois gaussiennes sont liés par la relation :

$$E(|X|^r) = \frac{2^{\frac{r}{2}} \Gamma(\frac{r+1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})} \|X\|_2^r,$$

pour tout $r > 0$ (r paire). Donc,

$$E\left(|\Delta B^{\alpha, \beta}(h, k)|^r\right)^{\frac{1}{r}} = \left(\frac{2^{\frac{r}{2}} \Gamma(\frac{r+1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})}\right)^{\frac{1}{r}} \sqrt{c_\alpha c_\beta} h^\alpha k^\beta = c_{\alpha, \beta, r} h^\alpha k^\beta,$$

où $c_{\alpha, \beta, r} = \sqrt{c_\alpha c_\beta} \left(\frac{2^{\frac{r}{2}} \Gamma(\frac{r+1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})}\right)^{\frac{1}{r}}$. En choisissant $r > \sup(\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta})$, on conclut avec le lemme de D. Feyel et A. La Pradelle (1.2) car $\alpha, \beta \in (0, 1)$.

□

2.4 Représentations intégrales du dBf

Rappelons qu'un mBf d'indice de Hurst α , B^α admet une représentation intégrale sous la forme suivante (voir [3]) :

$$B_t^\alpha = \int_0^t K_\alpha(t, s) dW_s,$$

où W est un mouvement Brownien standard et le noyau K_α est donné par :

$$K_\alpha(t, s) = \left[d_\alpha (t-s)^{\alpha-\frac{1}{2}} + d_\alpha \left(\frac{1}{2} - \alpha\right) \int_s^t (u-s)^{\alpha-\frac{3}{2}} \left(1 - \left(\frac{s}{u}\right)\right)^{\frac{1}{2}-\alpha} du \right] \mathbf{1}_{[0, t]}(s)$$

avec d_α est la constante de normalisation suivante :

$$d_\alpha = \left(\frac{2\alpha \Gamma(\frac{3}{2} - \alpha)}{\Gamma(\alpha + \frac{1}{2}) \Gamma(2 - 2\alpha)}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

En tenant compte de l'expression précédente au cas du mBf, on peut définir le dBf comme suit :

$$B_{t,s}^{\alpha, \beta} = \int_0^t \int_0^s K_\alpha(t, u) K_\beta(s, v) dW_{u,v}.$$

Chapitre 3

Etude des variations d'ordre supérieur du dBf

Nous débutons ce chapitre avec des énoncés d'intérêt propre, le théorème ergodique, qui affirme que la loi des grands nombres est applicable dans le cas de notre processus envisagé ici (dBf standard). Dans la suite, nous étudions le comportement asymptotique de ses variations puissance, inspiré des résultats faits par I.Nourdin dans [24].

3.1 Théorème ergodique

Par analogie au théorème 2.1 dans [24] et en remplaçant le mBf avec un dBf, nous obtenons :

Théorème 3.1.1 *Soit $G \sim N(0,1)$. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable tel que $Ef(G)^2 < \infty$. Soit $B^{\alpha,\beta}$ un dBf standard de paramètres de Hurst $\alpha, \beta \in (0,1)$. Alors, quand $n, m \rightarrow \infty$, on a :*

$$\frac{1}{nm} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(\Delta_{i,j} B^{\alpha,\beta}) \xrightarrow{L^2} Ef(G), \quad (3.1)$$

où

$$\Delta_{i,j} B^{\alpha,\beta} := B^{\alpha,\beta}(i, j) - B^{\alpha,\beta}(i, j-1) - B^{\alpha,\beta}(i-1, j) + B^{\alpha,\beta}(i-1, j-1).$$

Remarque 3.1.1 *En utilisant la propriété d'autosimilarité de $B^{\alpha,\beta}$, on déduit du théorème précédent que :*

$$\frac{1}{nm} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(n^\alpha m^\beta \Delta_{i,j}^{n,m} B^{\alpha,\beta}) \xrightarrow{L^2} Ef(G); \quad n, m \rightarrow \infty \quad (3.2)$$

où

$$\Delta_{i,j}^{n,m} B^{\alpha,\beta} := B^{\alpha,\beta}\left(\frac{i}{n}, \frac{j}{m}\right) - B^{\alpha,\beta}\left(\frac{i}{n}, \frac{j-1}{m}\right) - B^{\alpha,\beta}\left(\frac{i-1}{n}, \frac{j}{m}\right) + B^{\alpha,\beta}\left(\frac{i-1}{n}, \frac{j-1}{m}\right).$$

Preuve.

- Cas $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$, on a bien évidemment la convergence par la loi des grands nombres ([27]) du à la propriété d'indépendance des accroissements d'un drap Brownien.
- Cas $(\alpha, \beta) \neq (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$:
Comme $Ef(G)^2 < \infty$, on peut exprimer f en fonction des polynôme d'Hermite (voir la proposition 1.3.1) et on obtient ainsi,

$$f(x) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{c_l}{\sqrt{l!}} H_l(x). \quad (3.3)$$

La propriété d'orthogonalité des polynômes d'Hermite (1. prop 1.3.1) implique :

$$\sum_{l=0}^{\infty} c_l^2 = Ef(G)^2 < \infty.$$

Aussi, en choisissant $x = G$ et en prenant l'espérance de (3.3), on obtient :

$$c_0 = Ef(G).$$

Donc :

$$\frac{1}{nm} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(\Delta_{i,j} B^{\alpha,\beta}) - Ef(G) = \frac{1}{nm} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{l=1}^{\infty} \frac{c_l}{\sqrt{l!}} H_l(\Delta_{i,j} B^{\alpha,\beta}).$$

Etant donné que $\Delta_{i,j} B^{\alpha,\beta} \sim N(0, 1)$ et d'après la proposition (2.prop 1.3.1), on déduit :

$$\begin{aligned} & E \left[\left(\frac{1}{nm} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(\Delta_{i,j} B^{\alpha,\beta}) - Ef(G) \right)^2 \right] \\ &= E \left[\left(\frac{1}{nm} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(\Delta_{i,j} B^{\alpha,\beta}) - Ef(G) \right) \left(\frac{1}{nm} \sum_{i'=1}^n \sum_{j'=1}^m f(\Delta_{i',j'} B^{\alpha,\beta}) - Ef(G) \right) \right] \\ &= \frac{1}{(nm)^2} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{c_l^2}{l!} \sum_{i,i'=1}^n \sum_{j,j'=1}^m E(H_l(\Delta_{i,j} B^{\alpha,\beta}) H_l(\Delta_{i',j'} B^{\alpha,\beta})) \\ &= \frac{1}{(nm)^2} \sum_{l=1}^{\infty} c_l^2 \sum_{i,i'=1}^n \sum_{j,j'=1}^m (E[\Delta_{i,j} B^{\alpha,\beta} \Delta_{i',j'} B^{\alpha,\beta}])^l. \end{aligned}$$

Or on a, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwartz :

$$\left| E[\Delta_{i,j} B^{\alpha,\beta} \Delta_{i',j'} B^{\alpha,\beta}] \right| \leq \sqrt{E(\Delta_{i,j} B^{\alpha,\beta})^2} \sqrt{E(\Delta_{i',j'} B^{\alpha,\beta})^2} = 1.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
& E \left[\left(\frac{1}{nm} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(\Delta_{i,j} B^{\alpha,\beta}) - E f(G) \right)^2 \right] \\
& \leq \frac{1}{(nm)^2} \left(\sum_{l=1}^{\infty} c_l^2 \right) \sum_{i,i'=1}^n \sum_{j,j'=1}^m \left| E \left[\Delta_{i,j} B^{\alpha,\beta} \Delta_{i',j'} B^{\alpha,\beta} \right] \right| \\
& = \frac{1}{(nm)^2} \text{Var}(f(G)) \sum_{i,i'=1}^n \sum_{j,j'=1}^m \left| E \left[\Delta_{i,j} B^{\alpha,\beta} \Delta_{i',j'} B^{\alpha,\beta} \right] \right|.
\end{aligned}$$

Et comme

$$E \left[\Delta_{i,j} B^{\alpha,\beta} \Delta_{i',j'} B^{\alpha,\beta} \right] = \rho_{\alpha}(i - i') \rho_{\beta}(j - j'),$$

où pour $\gamma = \alpha, \beta$, on a

$$\rho_{\gamma}(x) = \rho_{\gamma}(|x|) = \frac{1}{2} (|x+1|^{2\gamma} + |x-1|^{2\gamma} - 2|x|^{2\gamma}).$$

D'où,

$$\begin{aligned}
& E \left[\left(\frac{1}{nm} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(\Delta_{i,j} B^{\alpha,\beta}) - E f(G) \right)^2 \right] \\
& \leq \frac{1}{(nm)^2} \text{Var}(f(G)) \sum_{i,i'=1}^n \sum_{j,j'=1}^m |\rho_{\alpha}(i - i') \rho_{\beta}(j - j')| \\
& = \frac{1}{(nm)^2} \text{Var}(f(G)) \left(\sum_{i,i'=1}^n |\rho_{\alpha}(i - i')| \right) \left(\sum_{j,j'=1}^m |\rho_{\beta}(j - j')| \right).
\end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned}
\sum_{i,i'=1}^n |\rho_{\alpha}(i - i')| &= \sum_{i=1}^n \sum_{i'=1-i}^{n-i} |\rho_{\alpha}(i')| \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} |\rho_{\alpha}(i)| + \sum_{i=2}^n \sum_{i'=1-i}^{n-i} |\rho_{\alpha}(i)| \\
&\leq 2n \sum_{i=0}^{n-1} |\rho_{\alpha}(i)|.
\end{aligned}$$

De même,

$$\sum_{j,j'=1}^m |\rho_{\beta}(j - j')| \leq 2m \sum_{j=0}^{m-1} |\rho_{\beta}(j)|.$$

Ainsi,

$$E \left[\left(\frac{1}{nm} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(\Delta_{i,j} B^{\alpha,\beta}) - E f(G) \right)^2 \right] \leq \frac{4}{nm} \text{Var}(f(G)) \left(\sum_{i=0}^{n-1} |\rho_{\alpha}(i)| \right) \left(\sum_{j=0}^{m-1} |\rho_{\beta}(j)| \right).$$

Pour conclure, on a besoin du comportement asymptotique de

$$\sum_{i=0}^{k-1} |\rho_\gamma(i)|,$$

où $k = n, m$ et $\gamma = \alpha, \beta$.

On a bien

$$\rho_\gamma(i) \underset{i \rightarrow +\infty}{\sim} \gamma(2\gamma - 1)i^{(2\gamma-2)}.$$

* Si $\gamma < \frac{1}{2}$, alors :

$$\sum_{i=1}^{k-1} |\rho_\gamma(i)| \underset{k \rightarrow \infty}{\longrightarrow} \sum_{i=1}^{\infty} |\rho_\gamma(i)| < +\infty.$$

Ce qui implique :

$$\frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} |\rho_\gamma(i)| \underset{k \rightarrow \infty}{\longrightarrow} 0.$$

On en déduit le résultat.

* Si $\frac{1}{2} < \gamma < 1$, alors on a, quand $k \rightarrow \infty$,

$$\sum_{i=1}^{k-1} |\rho_\gamma(i)| \sim \gamma(2\gamma - 1) \sum_{i=1}^{k-1} i^{(2\gamma-2)} \sim \gamma k^{2\gamma-1},$$

et on en déduit le résultat car $\gamma < 1$.

□

Comme un résultat directe du théorème précédent, on déduit les p -variations du dBf :

Corollaire 2 Soit $B^{\alpha,\beta}$ un dBf d'indices de Hurst $(\alpha, \beta) \in (0, 1)^2$, et soit $p \in [1, +\infty)$. Alors, quand $n, m \rightarrow \infty$:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \left| \Delta_{i,j}^{n,m} B^{\alpha,\beta} \right|^p \xrightarrow{L^2} l$$

où :

$$l = \begin{cases} 0 & \text{si } \begin{cases} p > \frac{1}{\alpha} & \text{et } p > \frac{1}{\beta} \\ p = \frac{1}{\alpha} & \text{et } \alpha < \beta \\ p = \frac{1}{\beta} & \text{et } \beta < \alpha \end{cases} \\ E|G|^p & \text{si } p = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\beta}, \text{ avec } G \sim N(0, 1) \\ \infty & \text{si } \begin{cases} p < \frac{1}{\alpha} & \text{et } p < \frac{1}{\beta} \\ p = \frac{1}{\alpha} & \text{et } \alpha > \beta \\ p = \frac{1}{\beta} & \text{et } \beta > \alpha \end{cases} \end{cases}$$

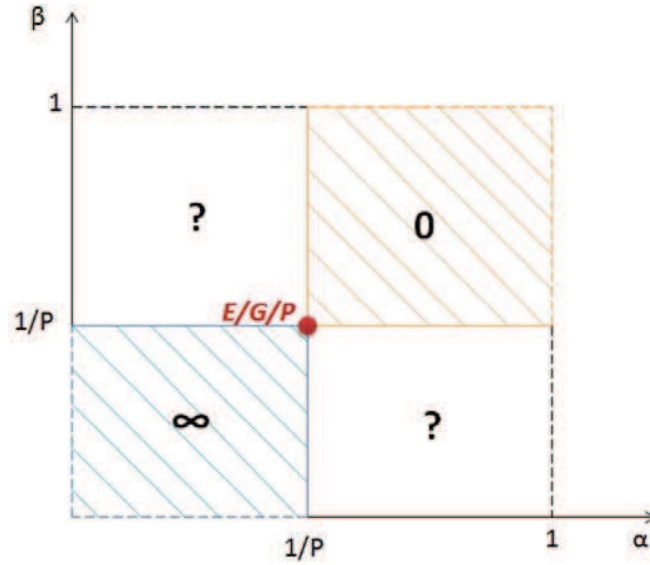


FIG. 3.1 – p -variations d'un dBf (cas $n \neq m$).

Remarque 3.1.2 Si on suppose que $n = m$, c'est à dire, on considère une même discrétisation de l'intervalle $[0, 1]$ dans les deux directions, on aura un résultat plus précis du comportement de p -variation du dBf, quand $n \rightarrow \infty$

$$\sum_{i,j=1}^n |\Delta_{i,j}^{n,n} B^{\alpha,\beta}|^p \xrightarrow{L^2} \begin{cases} 0 & \text{si } p > \frac{2}{\alpha+\beta} \\ E|G|^p & \text{si } p = \frac{2}{\alpha+\beta} \\ \infty & \text{sinon} \end{cases}$$

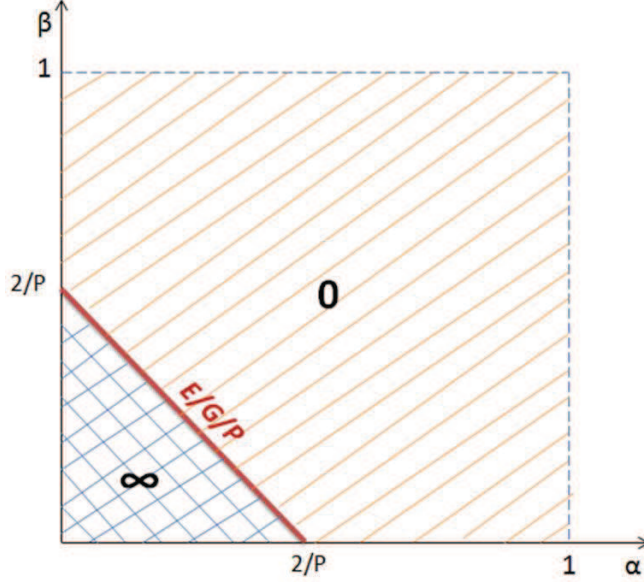


FIG. 3.2 – p -variations d'un dBf (cas $n = m$)

Nous verrons plus loin (chapitre 5) que le théorème ergodique, en particulier le résultat suivant, sera un outil nécessaire dans l'étude du comportement des variations puissance du modèle mixte.

Théorème 3.1.2 Soient ξ et ς deux variables aléatoires *i.i.d* $\sim N(0, 1)$.

Soient $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions mesurables tels que $E[f^2(\xi)] < \infty$ et $E[g^2(\varsigma)] < \infty$.

Soit $B^{\alpha, \beta} = \{B_{s,t}^{\alpha, \beta}, (s, t) \in (\mathbb{R}^+)^2\}$ un dBf d'indices de Hurst $(\alpha, \beta) \in (0, 1)^2$, et soit

$W = \{W_{s,t}, (s, t) \in (\mathbb{R}^+)^2\}$ un drap Brownien indépendant de $B^{\alpha, \beta}$.

Alors, on a, lorsque $n, m \rightarrow \infty$:

$$\frac{1}{nm} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(\Delta_{i,j} B^{\alpha, \beta}) g(\Delta_{i,j} W) \xrightarrow{L^2} E f(\xi) E g(\varsigma). \quad (3.4)$$

Preuve. On procède comme dans la preuve du théorème précédent : Par hypothèse, on a $E f^2(\xi) < +\infty$ et $E g^2(\varsigma) < \infty$, ce qui implique qu'on peut exprimer f et g en fonction des polynômes d'Hermite :

$$f(x) = \sum_{k \geq 0} a_k H_k(x).$$

$$g(x) = \sum_{k' \geq 0} b_{k'} H_{k'}(x).$$

En utilisant la proposition 1.3.1, on obtient :

$$\begin{aligned}
& E\left(\frac{1}{nm} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(\Delta_{i,j} B^{\alpha,\beta}) g(\Delta_{i,j} W) - E f(\xi) E g(\varsigma)\right)^2 \\
&= E \left[\frac{1}{(nm)^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (a_0 + \sum_{k \geq 1} a_k H_k(\Delta_{i,j} B^{\alpha,\beta})) (b_0 + \sum_{k' \geq 1} b_{k'} H_{k'}(\Delta_{i,j} W)) - a_0 b_0 \right]^2 \\
&:= (1) + (2) + (3) + (4) + (5) + (6),
\end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned}
(1) &:= \frac{1}{(nm)^2} E \left(a_0 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{k' \geq 1} b_{k'} H_{k'}(\Delta_{i,j} W) \right)^2 \\
&= a_0^2 E \left(\frac{1}{nm} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m g(\Delta_{i,j} W) - E g(\varsigma) \right)^2.
\end{aligned}$$

Comme le drap Brownien est à accroissements indépendants, on a, d'après la loi des grands nombres :

$$(1) \xrightarrow{n,m \rightarrow \infty} 0.$$

$$\begin{aligned}
(2) &:= \frac{1}{(nm)^2} E \left(b_0 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{k \geq 1} a_k H_k(\Delta_{i,j} B^{\alpha,\beta}) \right)^2 \\
&= \frac{b_0^2}{(nm)^2} \sum_{i,i'=1}^n \sum_{j,j'=1}^m \sum_{k \geq 1} a_k^2 (E [\Delta_{i,j} B^{\alpha,\beta} \Delta_{i',j'} B^{\alpha,\beta}])^k \\
&= \frac{b_0^2}{(nm)^2} \sum_{i,i'=1}^n \sum_{j,j'=1}^m \sum_{k \geq 1} a_k^2 \rho_\alpha^k(i-i') \rho_\beta^k(j-j') \\
&\leq \frac{4b_0^2}{nm} \text{Var}(f(G)) \left(\sum_{i=0}^{n-1} |\rho_\alpha(i)| \right) \left(\sum_{j=0}^{m-1} |\rho_\beta(j)| \right) \xrightarrow{n,m \rightarrow \infty} 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(3) &:= \frac{2a_0 b_0}{(nm)^2} \sum_{i,i'=1}^n \sum_{j,j'=1}^m \sum_{k,k' \geq 1} a_k b_{k'} E(H_k(\Delta_{i,j} B^{\alpha,\beta}) H_{k'}(\Delta_{i',j'} W)) \\
&= \frac{2a_0 b_0}{(nm)^2} \sum_{i,i'=1}^n \sum_{j,j'=1}^m \sum_{k \geq 1} a_k b_k (E [\Delta_{i,j} B^{\alpha,\beta} \Delta_{i',j'} W])^k = 0.
\end{aligned}$$

Car $(\Delta_{i,j} B^{\alpha,\beta})$ et $(\Delta_{i,j} W)$ sont deux processus gaussiens centrés indépendants.

$$\begin{aligned}
(4) &:= \frac{1}{(nm)^2} E \left[\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (\sum_{k \geq 1} a_k H_k(\Delta_{i,j} B^{\alpha,\beta})) (\sum_{k' \geq 1} b_{k'} H_{k'}(\Delta_{i,j} W)) \right]^2 \\
&= \frac{1}{(nm)^2} \sum_{i,i'=1}^n \sum_{j,j'=1}^m \sum_{k,k' \geq 1} a_k^2 b_{k'}^2 (E [\Delta_{i,j} B^{\alpha,\beta} \Delta_{i',j'} B^{\alpha,\beta}])^k (E [\Delta_{i,j} W \Delta_{i',j'} W])^{k'} \xrightarrow{n,m \rightarrow \infty} 0.
\end{aligned}$$

$$(5) := \frac{2a_0}{(nm)^2} \sum_{i,i'=1}^n \sum_{j,j'=1}^m \sum_{k,k' \geq 1} a_k b_{k'}^2 E \left[H_k(\Delta_{i,j} B^{\alpha,\beta}) H_{k'}(\Delta_{i,j} W) H_{k'}(\Delta_{i',j'} W) \right] = 0.$$

Enfin,

$$(6) := \frac{2b_0}{(nm)^2} \sum_{i,i'=1}^n \sum_{j,j'=1}^m \sum_{k,k' \geq 1} a_k^2 b_{k'} E \left[H_k(\Delta_{i,j} B^{\alpha,\beta}) H_k(\Delta_{i',j'} B^{\alpha,\beta}) H_{k'}(\Delta_{i',j'} W) \right] = 0.$$

D'où :

$$E \left(\frac{1}{nm} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(\Delta_{i,j} B^{\alpha,\beta}) g(\Delta_{i,j} W) - E f(\xi) E g(\varsigma) \right)^2 \xrightarrow{n,m \rightarrow \infty} 0.$$

□

3.2 Le comportement asymptotique des variations d'ordre supérieur du dBf

Dans cette section, nous abordons l'étude des variations puissances du dBf tout en commençant par prouver un théorème limite central clé, qui présente une extension du théorème Breuer-Major appliqué à un processus stationnaire gaussien centré.

Théorème 3.2.1 (Breuer-Major) *Soit $B^{\alpha,\beta}$ un dBf de paramètres de Hurst $(\alpha, \beta) \in (0, 1)^2$ défini dans un espace de probabilité complet (Ω, \mathcal{F}, P) où $\mathcal{F} = \sigma(B^{\alpha,\beta})$. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré N qui s'écrit sous la forme :*

$$P(x) = \sum_{q=d}^N a_q H_q(x),$$

où H_q est le q ème polynôme d'Hermite et $d \geq 1$ est le rang d'Hermite de P .

Supposons que $\sum_{(k,k') \in \mathbb{Z}^2} |\rho(k, k')|^d < +\infty$ où ρ est la fonction de covariance de $n^\alpha m^\beta \Delta_{i,j}^{n,m} B^{\alpha,\beta}$ donnée par :

$$\rho(k, k') = \frac{1}{2} (|k+1|^{2\alpha} + |k-1|^{2\alpha} - 2|k|^{2\alpha}) \times \frac{1}{2} (|k'+1|^{2\beta} + |k'-1|^{2\beta} - 2|k'|^{2\beta}).$$

Alors, lorsque m, n tendent vers l'infini, on a :

$$V_{n,m} := \frac{1}{\sqrt{nm}} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m P(n^\alpha m^\beta \Delta_{i,j}^{n,m} B^{\alpha,\beta}) \Longrightarrow \mathcal{N}(0, \sigma^2), \quad (3.5)$$

où :

$$\sigma^2 = \sum_{q=d}^N q! a_q^2 \sum_{(k,k') \in \mathbb{Z}^2} \rho(k, k')^q \in [0, \infty).$$

Preuve. La preuve de ce théorème est inspirée de celle du théorème de Breuer-Major dans le cas d'un processus gaussien stationnaire centré, détaillée dans [20].

Par autosimilarité de $B^{\alpha, \beta}$, on a :

$$n^\alpha m^\beta \Delta_{i,j}^{n,m} B^{\alpha, \beta} \stackrel{\mathcal{L}}{=} \Delta_{i,j} B^{\alpha, \beta}.$$

Vérifions, tout d'abord, la limite de variation de $V_{n,m}$:

$$\begin{aligned} EV_{n,m}^2 &= \frac{1}{nm} E \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{q=d}^N a_q H_q(\Delta_{i,j} B^{\alpha, \beta}) \right)^2 \\ &= \frac{1}{nm} \sum_{q,q'=d}^N a_q a_{q'} \sum_{i,i'=1}^n \sum_{j,j'=1}^m E(H_q(\Delta_{i,j} B^{\alpha, \beta}) H_{q'}(\Delta_{i',j'} B^{\alpha, \beta})) \\ &= \frac{1}{nm} \sum_{q=d}^N q! a_q^2 \sum_{i,i'=1}^n \sum_{j,j'=1}^m \rho(i-i', j-j')^q \\ &= \frac{1}{nm} \sum_{q=d}^N q! a_q^2 \sum_{r,r' \in \mathbb{Z}} \rho(r, r')^q (n - |r|)(m - |r'|) \mathbf{1}_{|r| < n} \mathbf{1}_{|r'| < m} \end{aligned}$$

D'autre part, on a :

$$\frac{1}{nm} q! a_q^2 \rho(r, r')^q (n - |r|) \mathbf{1}_{|r| < n} (m - |r'|) \mathbf{1}_{|r'| < m} \xrightarrow{n,m \rightarrow \infty} q! a_q^2 \rho(r, r')^q.$$

Et on a :

$$\frac{1}{nm} q! a_q^2 |\rho(r, r')|^q (n - |r|) \mathbf{1}_{|r| < n} (m - |r'|) \mathbf{1}_{|r'| < m} \leq q! a_q^2 |\rho(r, r')|^d.$$

De plus, on a par hypothèse :

$$\left(\sum_{q=d}^N q! a_q^2 \right) \sum_{r,r' \in \mathbb{Z}} |\rho(r, r')|^d = E(P(B_{(1,1)}^{\alpha, \beta})^2) \sum_{r,r' \in \mathbb{Z}} |\rho(r, r')|^d < +\infty$$

Alors, d'après le théorème de convergence dominée, on a :

$$EV_{n,m}^2 \xrightarrow{n,m \rightarrow \infty} \sum_{q=d}^N q! a_q^2 \sum_{r,r' \in \mathbb{Z}} \rho(r, r')^d.$$

La preuve de convergence en loi se fait en deux étapes :

- Cas où $P = H_q, (q \geq d)$
- Cas où $P \in \mathbb{R}[X]$

On commence par montrer la convergence dans le premier cas.

- Cas où $P = H_q (q \geq d)$:

Réduction du problème : On note par $\mathcal{H}^{\alpha,\beta}$ l'espace d'Hilbert généré par le processus gaussien $B^{\alpha,\beta}$ défini comme la fermeture de l'espace vectoriel engendré par les fonctions indicatrices dans $[0, 1]^2$, muni du produit scalaire

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{1}_{[0,s] \times [0,t]}, \mathbf{1}_{[0,s'] \times [0,t']} \rangle_{\mathcal{H}^{\alpha,\beta}} &= EB_{s,t}^{\alpha,\beta} B_{(s',t')}^{\alpha,\beta} = \frac{1}{2}(s^{2\alpha} + s'^{2\alpha} - |s - s'|^{2\alpha}) \frac{1}{2}(t^{2\beta} + t'^{2\beta} - |t - t'|^{2\beta}) \\ &= \rho_\alpha(s, s') \rho_\beta(t, t'). \end{aligned}$$

D'une façon générale, pour tout $f, g \in \mathcal{H}^{\alpha,\beta}$ tel que

$$\int_{[0,1]^4} |f(u, v)g(u', v')| |u - u'|^{2\alpha-2} |v - v'|^{2\beta-2} dudvdu'dv' < \infty,$$

on a :

$$\langle f, g \rangle_{\mathcal{H}^{\alpha,\beta}} = a(\alpha)a(\beta) \int_{[0,1]^4} f(u, v)g(u', v') |u - u'|^{2\alpha-2} |v - v'|^{2\beta-2} dudvdu'dv'.$$

Et on note par \mathbf{H}_n le n ème Chaos de Wiener associé à $B^{\alpha,\beta}$.

Il existe une isométrie entre le produit tensoriel symétrique $(\mathcal{H}^{\alpha,\beta})^{\odot n}$ muni de la norme $\sqrt{n!} \|\cdot\|_{H^{\otimes n}}$ et \mathbf{H}_n muni de la norme $L^2(\Omega)$ (voir théorème 2.7.7 de [23]), donnée par :

$$I_n(h^{\otimes n}) = n! H_n(B^{\alpha,\beta}(h)),$$

où I_n est l'intégrale multiple d'ordre $n > 1$ définie dans définition 1.4.1.

De plus, on peut écrire $\Delta_{i,j} B^{\alpha,\beta}$ comme suit :

$$\Delta_{i,j} B^{\alpha,\beta} = I_1(\mathbf{1}_{\Delta_{i,j}}),$$

où $\forall i, j > 0, \Delta_{i,j} = [i - 1, i] \times [j - 1, j]$.

D'où

$$H_q(I_1(\mathbf{1}_{\Delta_{i,j}})) = \frac{1}{q!} I_q(\mathbf{1}_{\Delta_{i,j}}^{\otimes q}),$$

et

$$V_{n,m} = \frac{1}{q!} I_q(f_{n,m}),$$

où

$$f_{n,m} = \frac{1}{\sqrt{nm}} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \mathbf{1}_{\Delta_{i,j}}^{\otimes q}.$$

On a vérifié précédemment que $EV_{n,m}^2 \xrightarrow[n,m \rightarrow \infty]{} \sigma^2$. Donc, par le théorème 1.4.1, il suffit de vérifier que pour tout $r = 1, \dots, q-1$, on a :

$$\|f_{n,m} \otimes_r f_{n,m}\|_{(\mathcal{H}^{\alpha,\beta})^{\otimes 2q-2r}} \xrightarrow[n,m \rightarrow \infty]{} 0.$$

On a :

$$\begin{aligned} f_{n,m} \otimes_r f_{n,m} &= \frac{1}{nm} \sum_{i,i'=1}^n \sum_{j,j'=1}^m \mathbf{1}_{\Delta_{i,j}}^{\otimes q} \otimes_r \mathbf{1}_{\Delta_{i',j'}}^{\otimes q} \\ &= \frac{1}{nm} \sum_{i,i'=1}^n \sum_{j,j'=1}^m \left\langle \mathbf{1}_{\Delta_{i,j}}^{\otimes r}, \mathbf{1}_{\Delta_{i',j'}}^{\otimes r} \right\rangle_{(\mathcal{H}^{\alpha,\beta})^{\otimes r}} \mathbf{1}_{\Delta_{i,j}}^{\otimes q-r} \otimes \mathbf{1}_{\Delta_{i',j'}}^{\otimes q-r} \\ &= \frac{1}{nm} \sum_{i,i'=1}^n \sum_{j,j'=1}^m \left\langle \mathbf{1}_{\Delta_{i,j}}, \mathbf{1}_{\Delta_{i',j'}} \right\rangle_{\mathcal{H}^{\alpha,\beta}}^r \mathbf{1}_{\Delta_{i,j}}^{\otimes q-r} \otimes \mathbf{1}_{\Delta_{i',j'}}^{\otimes q-r} \\ &= \frac{1}{nm} \sum_{i,i'=1}^n \sum_{j,j'=1}^m \rho^r(i-i', j-j') \mathbf{1}_{\Delta_{i,j}}^{\otimes q-r} \otimes \mathbf{1}_{\Delta_{i',j'}}^{\otimes q-r}. \end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned} &\|f_{n,m} \otimes_r f_{n,m}\|_{(\mathcal{H}^{\alpha,\beta})^{\otimes 2q-2r}}^2 \\ &= \frac{1}{(nm)^2} \sum_{i,i',k,k'=1}^n \sum_{j,j',l,l'=1}^m \rho^r(i-i', j-j') \rho^r(k-k', l-l') \left\langle \mathbf{1}_{\Delta_{i,j}}^{\otimes q-r} \otimes \mathbf{1}_{\Delta_{i',j'}}^{\otimes q-r}, \mathbf{1}_{\Delta_{k,l}}^{\otimes q-r} \otimes \mathbf{1}_{\Delta_{k',l'}}^{\otimes q-r} \right\rangle_{(\mathcal{H}^{\alpha,\beta})^{\otimes 2q-2r}} \\ &= \frac{1}{(nm)^2} \sum_{i,i',k,k'=1}^n \sum_{j,j',l,l'=1}^m \rho^r(i-i', j-j') \rho^r(k-k', l-l') \left\langle \mathbf{1}_{\Delta_{i,j}}, \mathbf{1}_{\Delta_{k,l}} \right\rangle_{\mathcal{H}^{\alpha,\beta}}^{q-r} \left\langle \mathbf{1}_{\Delta_{i',j'}}, \mathbf{1}_{\Delta_{k',l'}} \right\rangle_{\mathcal{H}^{\alpha,\beta}}^{q-r} \\ &= \frac{1}{(nm)^2} \sum_{i,i',k,k'=1}^n \sum_{j,j',l,l'=1}^m \rho^r(i-i', j-j') \rho^r(k-k', l-l') \rho^{q-r}(i-k, j-l) \rho^{q-r}(i'-k', j'-l') \\ &= \frac{1}{(nm)^2} \sum_{i,i',k,k'=1}^n \sum_{j,j',l,l'=1}^m \rho_\alpha^r(i-i') \rho_\beta^r(j-j') \rho_\alpha^r(k-k') \rho_\beta^r(l-l') \rho_\alpha^{q-r}(i-k) \rho_\beta^{q-r}(j-l) \rho_\alpha^{q-r}(i'-k') \rho_\beta^{q-r}(j'-l'). \end{aligned}$$

Or, on a, d'après l'inégalité de Young, pour $k = n, m$ et $\gamma = \alpha, \beta$

$$|\rho_\gamma(t-s)|^r |\rho_\gamma(s-k)|^{r-q} \leq |\rho_\gamma(t-s)|^q + |\rho_\gamma(s-k)|^q,$$

et on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{k} \sum_{s,s'=1}^k |\rho_\gamma(s-s')|^q &\leq \sum_{s \in \mathbb{Z}} |\rho_\gamma(s)|^q, \\ \frac{1}{k} \sum_{s,s'=1}^k |\rho_\gamma(s-s')|^r &\leq \sum_{|s| < k} |\rho_\gamma(s)|^r. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} &\|f_{n,m} \otimes_r f_{n,m}\|_{(\mathcal{H}^{\alpha,\beta})^{\otimes 2q-2r}}^2 \\ &\leq \frac{1}{(nm)^2} \sum_{i,i',k,k'=1}^n \sum_{j,j',l,l'=1}^m \left[\rho_\alpha^r(i-i') (\rho_\alpha^q(i-k) + \rho_\alpha^q(k-k')) \rho_\alpha^{q-r}(i'-k') \right] \\ &\times \left[\rho_\beta^r(j-j') (\rho_\beta^q(j-l) + \rho_\beta^q(l-l')) \rho_\beta^{q-r}(j'-l') \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \left(\frac{2}{n} \sum_{k \in Z} |\rho_\alpha(k)|^q \sum_{|i| < n} |\rho_\alpha(i)|^r \sum_{|i'| < n} |\rho_\alpha(i')|^{q-r}\right) \\
&\times \left(\frac{2}{m} \sum_{k \in Z} |\rho_\beta(k)|^q \sum_{|j| < m} |\rho_\beta(j)|^r \sum_{|j'| < m} |\rho_\beta(j')|^{q-r}\right) \\
&\leq 4 \left(\sum_{k, k' \in Z} |\rho_\alpha(k)|^d |\rho_\beta(k')|^d\right) \left(n^{-\frac{q-r}{q}} \sum_{|i| < n} |\rho_\alpha(i)|^r\right) \left(n^{\frac{r}{q}} \sum_{|i'| < n} |\rho_\alpha(i')|^{q-r}\right) \\
&\times \left(m^{-\frac{q-r}{q}} \sum_{|j| < m} |\rho_\beta(j)|^r\right) \left(m^{\frac{r}{q}} \sum_{|j'| < m} |\rho_\beta(j')|^{q-r}\right).
\end{aligned}$$

Pour achever la preuve, il suffit de vérifier que :

$$S_n(r) := n^{-\frac{q-r}{q}} \sum_{|i| < n} |\rho_\alpha(i)|^r \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, r = 1, \dots, q-1,$$

$$S_m(r) := m^{-\frac{q-r}{q}} \sum_{|i'| < m} |\rho_\alpha(i')|^r \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0, r = 1, \dots, q-1.$$

Soit $r = 1, \dots, q-1$. Fixons $\delta \in (0, 1)$.

$$S_k(r) = k^{-\frac{q-r}{q}} \sum_{|i| < k} |\rho_\gamma(i)|^r = S_{1,k}(\delta, r) + S_{2,k}(\delta, r),$$

où :

$$S_{1,k}(\delta, r) = k^{-\frac{q-r}{q}} \sum_{|i| < [k\delta]} |\rho_\gamma(i)|^r,$$

et

$$S_{2,k}(\delta, r) = k^{-\frac{q-r}{q}} \sum_{[k\delta] \leq |i| < k} |\rho_\gamma(i)|^r.$$

Par l'inégalité de Holder, on a :

$$S_{1,k}(\delta, r) \leq k^{-\frac{q-r}{q}} \left(\sum_{|i| < [k\delta]} (|\rho_\gamma(i)|^r)^{\frac{q}{r}}\right)^{\frac{r}{q}} \left(\sum_{|i| < [k\delta]} 1\right)^{\frac{q-r}{q}} \leq c_1 \delta^{\frac{q-r}{q}},$$

$$S_{2,k}(\delta, r) \leq k^{-\frac{q-r}{q}} \left(\sum_{[k\delta] \leq |i| < k} (|\rho_\gamma(i)|^r)^{\frac{q}{r}}\right)^{\frac{r}{q}} \left(\sum_{[k\delta] \leq |i| < k} 1\right)^{\frac{q-r}{q}} \leq c_2 \left(\sum_{[k\delta] \leq |i|} (|\rho_\gamma(i)|^r)^{\frac{q}{r}}\right)^{\frac{r}{q}}.$$

D'où,

$$S_k(r) \leq c_1 \delta^{\frac{q-r}{q}} + c_2 \left(\sum_{[k\delta] \leq |i|} (|\rho_\gamma(i)|^r)^{\frac{q}{r}}\right)^{\frac{r}{q}} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0,$$

avec c_1 et c_2 des constantes.

– Cas où $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré N :

En combinant les résultats du premier cas et le théorème 1.4.2, on obtient :

$$\left(\frac{1}{\sqrt{nm}} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m H_d(\Delta_{i,j} B^{\alpha,\beta}), \dots, \frac{1}{\sqrt{nm}} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m H_N(\Delta_{i,j} B^{\alpha,\beta})\right) \implies \mathcal{N}(0, \text{diag}(\sigma_d^2, \dots, \sigma_N^2)),$$

avec

$$\sigma_i^2 = q! a_q^2 \sum_{k, k' \in Z} (\rho(k, k'))^q.$$

On déduit le résultat. □

En appliquant le théorème précédent sur $P : x \mapsto x^r - \mu_r$ où $\mu_r = E(N(0, 1))^r, r \in \mathbb{N}$, on obtient le résultat suivant :

Proposition 3.2.1 – Cas r pair : Si $\alpha, \beta \in (0, \frac{3}{4})$,

$$(nm)^{\frac{-1}{2}} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \left((n^\alpha m^\beta \Delta_{i,j}^{n,m} B^{\alpha,\beta})^r - \mu_r\right) \implies \mathcal{N}(0, \sigma_{\alpha,\beta,r}^2), \quad (3.6)$$

où

$$\mu_r = E(N(0, 1))^r$$

et

$$\sigma_{\alpha, \beta, r}^2 = \sum_{q=1}^{\frac{r}{2}} \frac{(q!)^2}{(2q)!((r-2q)!!)^2} \sum_{(i,j) \in \mathbb{Z}^2} \rho^{2q}(i, j)$$

– Cas r impair : Si $\alpha, \beta \in (0, \frac{1}{2})$,

$$(nm)^{\frac{-1}{2}} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (n^\alpha m^\beta \Delta_{i,j}^{n,m} B^{\alpha, \beta})^r \implies \mathcal{N}(0, \sigma_{\alpha, \beta, r}^2), \quad (3.7)$$

où

$$\sigma_{\alpha, \beta, r}^2 = \sum_{q=0}^{\frac{(r-1)}{2}} \frac{(l!)^2}{(2q+1)!((r-2q-1)!!)^2} \sum_{(i,j) \in \mathbb{Z}^2} \rho^{2q+1}(i, j).$$

Preuve. Il suffit de voir que :

– Si r est pair, on a $d = 2$ et

$$P(x) = \sum_{q=2}^r \frac{(\frac{q}{2})!}{q!(r-q)!!} H_q(x).$$

– Si r est impair, on a $d = 1$ et P s'écrit comme suit :

$$P(x) = \sum_{q=1}^r \frac{(\frac{q-1}{2})!}{q!(r-q)!!} H_q(x).$$

De plus, on peut tirer la condition sur α et β à partir de l'hypothèse :

$$\sum_{(k,k') \in \mathbb{Z}^2} |\rho(k, k')|^d < +\infty$$

En effet, on a

$$|\rho(k, k')|^2 \underset{k, k' \rightarrow \infty}{\sim} 16\alpha^2(2\alpha-1)^2\beta^2(2\beta-1)^2|k|^{4\alpha-4}|k'|^{4\beta-4}$$

alors

$$\sum_{(k,k') \in \mathbb{Z}^2} |\rho(k, k')|^2 < +\infty,$$

si $\alpha, \beta \in (0, \frac{3}{4})$.

Et

$$|\rho(k, k')| \underset{k, k' \rightarrow \infty}{\sim} 4\alpha(2\alpha-1)\beta(2\beta-1)|k|^{2\alpha-2}|k'|^{2\beta-2}.$$

D'où si $\alpha, \beta \in (0, \frac{1}{2})$,

$$\sum_{(k, k') \in \mathbb{Z}^2} |\rho(k, k')| < +\infty.$$

□

Chapitre 4

Modèle mixte à deux paramètres

Les propriétés d'auto-similarité et la stationnarité du dBf ont restreint l'application de ce processus à la modélisation de plusieurs phénomènes de la vie courante. Pour cette raison, dans notre étude, nous envisageons des processus qui ne sont pas intrinsèquement auto-similaires et bien précisément, nous introduisons ce qu'on appelle modèle mixte.

Dans ce chapitre et en suivant le même raisonnement et les mêmes démarches utilisés dans [10], nous ouvrons la porte devant l'extension d'étude du comportement asymptotique des variations d'ordre supérieur d'un modèle mixte, faite dans le cas d'un champ à un seul paramètre, au cas d'un champ à deux paramètres, ainsi qu'au problème d'équivalence entre ce type de processus et un drap Brownien.

4.1 Etude des variations d'ordre supérieur d'un modèle mixte à deux paramètres

Soit $W = \{W_{s,t}, s, t \geq 0\}$ un drap Brownien standard et $B^{\alpha,\beta} = \{B_{s,t}^{\alpha,\beta}; s, t \geq 0\}$ un dBf standard de paramètres de Hurst $(\alpha, \beta) \in (0, 1)^2$ indépendant de W définis sur un espace de probabilité complet (Ω, \mathcal{F}, P) . On considère le processus à deux paramètres suivant :

$$M_{s,t}^{\alpha,\beta} = aB_{s,t}^{\alpha,\beta} + bW_{s,t}; s, t \geq 0.$$

Cette partie est consacrée à étudier le comportement asymptotique des variations d'ordre supérieur de ce modèle mixte suivantes, lorsque $n, m \rightarrow \infty$,

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (\Delta_{i,j}^{n,m} W)^p (\Delta_{i,j}^{n,m} B^{\alpha,\beta})^r,$$

où $p \geq 0, r \geq 0$ sont des entiers fixés. Par autosimilarité de W et $B^{\alpha,\beta}$, la suite $\left\{ ((nm)^{\frac{1}{2}} \Delta_{i,j}^{n,m} W, n^\alpha m^\beta \Delta_{i,j}^{n,m} B^{\alpha,\beta}), 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m \right\}$ est équivalente en loi à $\{(\xi_{i,j}, \zeta_{i,j}), 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m\}$, où $\{\xi_{i,j}, \zeta_{i,j}\}$ une famille de variables gaussiennes

standards indépendants à deux paramètres et $\{\zeta_{i,j}, i, j \geq 0\}$ une suite stationnaire de variables gaussiennes standards, indépendante de $\{\xi_{i,j}, i, j \geq 0\}$, de fonction de covariance

$$\rho(i, j) = E[\zeta_{0,0}\zeta_{i,j}] = \rho_\alpha(i)\rho_\beta(j) = \frac{1}{4}(|i+1|^{2\alpha} + |i-1|^{2\alpha} - 2|i|^{2\alpha})(|j+1|^{2\beta} + |j-1|^{2\beta} - 2|j|^{2\beta}).$$

4.1.1 Centralisation des variations

En appliquant le résultat du théorème ergodique (théorème 3.1.2) avec $f : x \mapsto x^r$ et $g : x \mapsto x^p$, nous obtenons une limite au sens de L^2 des variations d'ordre supérieur mixte bien centré :

$$n^{r\alpha + \frac{p}{2} - 1} m^{r\beta + \frac{p}{2} - 1} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (\Delta_{i,j}^{n,m} W)^p (\Delta_{i,j}^{n,m} B^{\alpha,\beta})^r \xrightarrow{n,m \rightarrow \infty} \mu_p \mu_r,$$

où, pour tout $m \geq 0$,

$$\mu_m = E[N(0, 1)^m] = (m-1)!! \mathbf{1}_{\{m \text{ pair}\}}$$

le moment d'ordre m d'une loi normale centrée réduite. Alors, on étudiera, bien évidemment, la somme centrée suivante :

$$S_{n,m} := \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (n^{r\alpha + \frac{p}{2}} m^{r\beta + \frac{p}{2}} (\Delta_{i,j}^{n,m} W)^p (\Delta_{i,j}^{n,m} B^{\alpha,\beta})^r - \mu_p \mu_r). \quad (4.1)$$

4.1.2 Etude du comportement asymptotique des variations d'ordre supérieur mixtes

Le théorème suivant présente une extension d'étude du comportement asymptotique des variations d'un modèle mixte à un seul paramètre résumé comme suit :

Théorème 4.1.1 – Si p et r sont pairs, $r \geq 2$, alors, pour $\alpha, \beta \in (0, \frac{3}{4})$ on a

$$(nm)^{-\frac{1}{2}} S_{n,m} \Rightarrow N(0, \sigma_{\alpha,\beta,r}^2 \mu_p^2 + \sigma_{p,r}^2), \quad (4.2)$$

où

$$\sigma_{\alpha,\beta,r}^2 = \sum_{q=1}^{\frac{r}{2}} \frac{(q!)^2}{(2q)!((r-2q)!!)^2} \sum_{(i,j) \in \mathbb{Z}^2} \rho^{2q}(i, j), \quad \sigma_{p,r}^2 = \mu_{2r}(\mu_{2p} - \mu_p^2).$$

– Si p est pair et r est impair, alors, pour $\alpha, \beta \in (0, \frac{1}{2})$ on a :

$$(nm)^{-\frac{1}{2}} S_{n,m} \Rightarrow N(0, \sigma_{\alpha,\beta,r}^2 \mu_p^2 + \sigma_{p,r}^2), \quad (4.3)$$

où

$$\sigma_{\alpha,\beta,r}^2 = \sum_{q=0}^{\frac{(r-1)}{2}} \frac{(q!)^2}{(2q+1)!((r-2q-1)!!)^2} \sum_{(i,j) \in \mathbb{Z}^2} \rho^{2q+1}(i,j).$$

– Si r et p sont impairs et $(\alpha, \beta) \in (0, 1)^2$, on a :

$$(nm)^{-\frac{1}{2}} S_{n,m} \Rightarrow N(0, \mu_{2p}\mu_{2r}). \quad (4.4)$$

Preuve.

– Supposons que p et r sont pairs.

L'idée principale est d'écrire la somme comme suit :

$$S_{n,m} = S'_{n,m} + S''_{n,m},$$

où

$$S'_{n,m} = n^{r\alpha} m^{r\beta} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (\Delta_{i,j}^{n,m} B^{\alpha,\beta})^r (n^{\frac{p}{2}} m^{\frac{p}{2}} (\Delta_{i,j}^{n,m} W)^p - \mu_p) = n^{r\alpha} m^{r\beta} R_{n,m} K_{n,m},$$

$$S''_{n,m} = \mu_p \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (n^{r\alpha} m^{r\beta} (\Delta_{i,j}^{n,m} B^{\alpha,\beta})^r - \mu_r),$$

et,

$$R_{n,m} = \frac{1}{K_{n,m}} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \lambda_{i,j}^{n,m} (n^{\frac{p}{2}} m^{\frac{p}{2}} (\Delta_{i,j}^{n,m} W)^p - \mu_p),$$

$$K_{n,m} = ((\mu_{2p} - \mu_p^2) \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (\lambda_{i,j}^{n,m})^2)^{\frac{1}{2}}; \lambda_{i,j}^{n,m} = (\Delta_{i,j}^{n,m} B^{\alpha,\beta})^r,$$

et d'appliquer les résultats concernant le comportement asymptotique de $S''_{n,m}$ donnés par la proposition 3.2.1, et on étudie $S'_{n,m}$ conditionnellement au dBf.

On écrit

$$(nm)^{-\frac{1}{2}} S_{n,m}^{\alpha,\beta,p,r} = A'_{n,m} + A''_{n,m}$$

où

$$A'_{n,m} = (nm)^{-\frac{1}{2}} S'_{n,m}$$

et

$$A''_{n,m} = (nm)^{-\frac{1}{2}} S''_{n,m}.$$

* Etude de $A''_{n,m}$:

D'après la proposition (3.2.1), on a pour $n, m \rightarrow \infty$,

$$A''_{n,m} \Rightarrow N(0, \mu_p^2 \sigma_{\alpha,\beta,r}^2).$$

* Etude de $A'_{n,m}$:

$B^{\alpha,\beta}$ est uniformément continue comme fonction continue au sens de Holder sur un compact $[0, 1]$, alors $\max_{1 \leq i \leq n} \max_{1 \leq j \leq m} \lambda_{i,j}^{n,m} \rightarrow 0, n, m \rightarrow \infty$. Par indépendance de W et $B^{\alpha,\beta}$ et par un calcul simple, on montre que, conditionnellement à $B^{\alpha,\beta}$, $Var(R_{n,m}) = 1$. Et comme le drap Brownien est un processus à accroissements indépendants, on a, d'après le théorème

limite central (TLC), que la distribution de $R_{n,m}$, conditionnellement à $B^{\alpha,\beta}$, converge vers celle d'une loi normale standard, lorsque $n, m \rightarrow \infty$.

D'autre part, d'après le théorème (3.1.1), on a, dans L^2 :

$$\frac{1}{nm} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (n^\alpha m^\beta \Delta_{i,j}^{n,m} B^{\alpha,\beta})^{2r} \xrightarrow{n,m \rightarrow \infty} \mu_{2r}.$$

Ce qui donne,

$$n^{r\alpha - \frac{1}{2}} m^{r\beta - \frac{1}{2}} K_{n,m} \xrightarrow{L^2} (\mu_{2r} (\mu_{2p} - \mu_p^2)^{\frac{1}{2}}) := \sigma_{p,r}.$$

Alors, d'après le théorème de Slutsky, la distribution conditionnelle à $B^{\alpha,\beta}$ de $A'_{n,m}$ tend vers $N(0, \sigma_{p,r}^2)$ lorsque $n, m \rightarrow \infty$.

D'où, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\int_{\mathbb{R}} e^{itx} P((nm)^{-\frac{1}{2}} S'_{n,m} \in dx B^{\alpha,\beta}) \xrightarrow{n,m \rightarrow \infty} e^{-\frac{t^2}{2} \sigma_{p,r}^2}. \quad (4.5)$$

Pour achever la preuve du premier cas, il suffit de vérifier que pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\psi_{(nm)^{-\frac{1}{2}} S'_{n,m} B^{\alpha,\beta}}(t) \xrightarrow{n,m \rightarrow \infty} \psi_X(t),$$

où

$$X \sim N(0, \sigma_{\alpha,\beta,r}^2 \mu_p^2 + \sigma_{p,r}^2),$$

et ψ_X la fonction caractéristique de X . On écrit :

$$\begin{aligned} E \left[e^{it(nm)^{-\frac{1}{2}} S_{n,m}} \right] &= E \left[E \left[e^{it(nm)^{-\frac{1}{2}} (S'_{n,m} + S''_{n,m})} / B^{\alpha,\beta} \right] \right] \\ &= E \left[e^{it(nm)^{-\frac{1}{2}} S''_{n,m}} \int_{\mathbb{R}} e^{itx} P((nm)^{-\frac{1}{2}} S'_{n,m} \in dx / B^{\alpha,\beta}) \right]. \end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned} \left| E \left[e^{it(nm)^{-\frac{1}{2}} S_{n,m}} \right] - e^{-\frac{t^2}{2} (\sigma_{p,r}^2 + \mu_r^2 \sigma_{\alpha,\beta,r})} \right| &\leq \left| E \left[\left(\int_{\mathbb{R}} e^{itx} P((nm)^{-\frac{1}{2}} S'_{n,m} \in dx / B^{\alpha,\beta}) - e^{-\frac{t^2}{2} \sigma_{p,r}^2} \right) e^{it(nm)^{-\frac{1}{2}} S''_{n,m}} \right] \right| \\ &\quad + e^{-\frac{t^2}{2} \sigma_{p,r}^2} \left| E \left[e^{it(nm)^{-\frac{1}{2}} S''_{n,m}} \right] - e^{-\frac{t^2}{2} \mu_r^2 \sigma_{\alpha,\beta,r}} \right| \\ &=: E_1 + E_2. \end{aligned}$$

Or, d'après (4.5) et le théorème de convergence dominée, on a

$$E_1 \xrightarrow{n,m \rightarrow \infty} 0,$$

$$E_2 \xrightarrow{n,m \rightarrow \infty} 0.$$

- Supposons que p est pair et r est impair.

Dans ce cas, $S_{n,m}$ est sous cette forme

$$S_{n,m} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m n^{r\alpha + \frac{p}{2}} m^{r\beta + \frac{p}{2}} (\Delta_{i,j}^{n,m} W)^p (\Delta_{i,j}^{n,m} B^{\alpha,\beta})^r,$$

et on écrit

$$(nm)^{-\frac{1}{2}} S_{n,m} = n^{r\alpha - \frac{1}{2}} m^{r\beta - \frac{1}{2}} R_{n,m} K_{n,m} + Z_{n,m},$$

où $R_{n,m}$ et $K_{n,m}$ définis précédemment, et $Z_{n,m} = n^{r\alpha - \frac{1}{2}} m^{r\beta - \frac{1}{2}} \mu_p \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (\Delta_{i,j}^{n,m} B^{\alpha,\beta})^r$. D'après la proposition (3.2.1), on a, pour $\alpha, \beta \in (0, \frac{1}{2})$

$$Z_{n,m} \Rightarrow N(0, \mu_p^2 \sigma_{\alpha,\beta,r}^2); \quad n, m \rightarrow \infty.$$

En procédant de la même manière que dans le premier cas, on peut conclure.

- Supposons que r et p sont impairs et $(\alpha, \beta) \in (0, 1)^2$. Dans ce cas, $Z_{n,m} = 0$. D'où le résultat est immédiat.

□

Remarque 4.1.1 *Ce qui concerne les autres cas, c'est à dire, les cas qui n'ont pas été mentionné dans notre étude, le comportement asymptotique des variations du dBf, ainsi que le modèle mixte reste une question ouverte.*

4.2 Equivalence entre un modèle mixte et un drap Brownien

Nous commençons par rappeler le concept d'entropie qui sera utile dans la démonstration du notre résultat d'équivalence.

Définition 4.2.1 *Soient Q_1 et Q_2 deux mesures de probabilité dans un espace mesurable (Ω, \mathcal{E}) . On note par \mathcal{P} l'ensemble des partitions finies de Ω ,*

$$\Omega = \cup_{j=1}^n E_j$$

où $E_j \in \mathcal{E}$ et $E_i \cap E_j = \emptyset$ si $i \neq j$.

L'entropie de Q_1 relativement à Q_2 est donnée par :

$$H(Q_1 \setminus Q_2) := \sup_{\mathcal{P}} \sum_{j=1}^n \log\left(\frac{Q_1[E_j]}{Q_2[E_j]}\right) Q_1[E_j],$$

où on suppose que $\frac{0}{0} = 0 \log(0) = 0$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit $Y_n : C[0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}^{n^2}$ par :

$$Y_n(\omega) = \begin{pmatrix} (\omega(\frac{1}{n}, \frac{j+1}{n}) - \omega(\frac{1}{n}, \frac{j}{n}) - \omega(0, \frac{j+1}{n}) + \omega(0, \frac{j}{n}))_{0 \leq j \leq n-1}^t \\ (\omega(\frac{2}{n}, \frac{j+1}{n}) - \omega(\frac{2}{n}, \frac{j}{n}) - \omega(\frac{1}{n}, \frac{j+1}{n}) + \omega(\frac{1}{n}, \frac{j}{n}))_{0 \leq j \leq n-1}^t \\ \vdots \\ (\omega(\frac{i}{n}, \frac{j+1}{n}) - \omega(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}) - \omega(\frac{i-1}{n}, \frac{j+1}{n}) + \omega(\frac{i-1}{n}, \frac{j}{n}))_{0 \leq j \leq n-1}^t \\ \vdots \\ (\omega(1, \frac{j+1}{n}) - \omega(1, \frac{j}{n}) - \omega(\frac{n-1}{n}, \frac{j+1}{n}) + \omega(\frac{n-1}{n}, \frac{j}{n}))_{0 \leq j \leq n-1}^t \end{pmatrix},$$

et $\mathcal{B}_n = \sigma(Y_n)$. On note que $\bigvee_{n=1}^{\infty} \mathcal{B}_n$ est égale au σ -algèbre \mathcal{B} généré par "cylinder sets". On note par $Q_{M^{\alpha,\beta}}$ la mesure induite par $M^{\alpha,\beta}$ sur $(C[0,1]^2, \mathcal{B})$ et Q_W la mesure de Wiener sur $(C[0,1]^2, \mathcal{B})$. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit les restrictions de $Q_{M^{\alpha,\beta}}$ et Q_W à \mathcal{B}_n respectivement par $Q_{M^{\alpha,\beta}}^n$ et Q_W^n .

Sans perte de généralité, on s'intéresse, dans la suite, au modèle mixte $M_{s,t} = aB_{s,t}^{\alpha,\beta} + bW_{s,t}$ avec $b = 1$ et $(s, t) \in (0, 1)^2$.

Enonçons, maintenant, le résultat d'équivalence :

Théorème 4.2.1 *Si $(\alpha, \beta) \in (\frac{3}{4}, 1)^2$, alors $M^{\alpha,\beta}$ est équivalent à un drap brownien.*

Preuve. L'idée de preuve est inspirée de la section 5 dans [9] qui est basé sur des concepts liés à la notion d'entropie définie ci-haut.

Commençons la démonstration par énoncer le lemme suivant :

Lemme 4.2.2 *Si*

$$\sup_n H(Q_{M^{\alpha,\beta}}^n \setminus Q_W^n) < \infty,$$

alors $Q_{M^{\alpha,\beta}}$ et Q_W sont équivalentes.

Preuve :

On a $\mathcal{B}_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathcal{B}$, alors, d'après le lemme 6.2 de Hida–Hitsuda ([14] page 123), on a $Q_{M^{\alpha,\beta}}$ est absolument continue par rapport à Q_W . Supposons que $Q_{M^{\alpha,\beta}}$ et Q_W sont disjointes. Or d'après le lemme 6.3 de Hida–Hitsuda [14], on a $Q_{M^{\alpha,\beta}}$ est absolument continue par rapport à Q_W . Ce qui implique que $Q_{M^{\alpha,\beta}} = 0$ (par propriétés des mesures disjointes). Ce qui est absurde. Alors, d'après le théorème de Hida–Hitsuda ([14] page 128), on a bien l'équivalence entre les deux mesures.

Pour achever la preuve, il suffit de prouver le lemme suivant :

Lemme 4.2.3

$$\sup_n H(Q_{M^{\alpha,\beta}}^n \setminus Q_W^n) < \infty.$$

Preuve :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, Y_n est un vecteur gaussien centré sous les deux mesures $Q_{M^{\alpha,\beta}}^n$ et Q_W^n :

* Sous $Q_{M^{\alpha,\beta}}^n$:

$$Y_n = (\Delta_{1,1}^{n,n} M^{\alpha,\beta}, \Delta_{1,2}^{n,n} M^{\alpha,\beta}, \dots, \Delta_{1,n}^{n,n} M^{\alpha,\beta}, \dots, \Delta_{n,1}^{n,n} M^{\alpha,\beta}, \dots, \Delta_{n,n}^{n,n} M^{\alpha,\beta})^t \in \mathbb{R}^{n^2}$$

et la matrice de covariance est donnée par :

$$E_{Q_{M^{\alpha,\beta}}^n}(Y_n Y_n^t) = \frac{1}{n^2} I_{n^2} + a^2 C_n$$

où

$$C_n = (Cov(\Delta_{ij}^{n,n} B^{\alpha,\beta}, \Delta_{i'j'}^{n,n} B^{\alpha,\beta}))_{(i,j),(i',j') \in \{1,\dots,n\}^2} \in \mathcal{M}_{n^2}(\mathbb{R})$$

* Sous Q_W^n :

$$Y_n = (\Delta_{1,1}^{n,n} W, \Delta_{1,2}^{n,n} W, \dots, \Delta_{1,n}^{n,n} W, \dots, \Delta_{n,1}^{n,n} W, \dots, \Delta_{n,n}^{n,n} W)^t \in \mathbb{R}^{n^2},$$

et la matrice de covariance est donnée par :

$$E_{Q_W^n}(Y_n Y_n^t) = \frac{1}{n^2} I_{n^2}.$$

Comme C_n est symétrique, il existe une matrice orthogonale $U_n \in \mathcal{M}_{n^2}(\mathbb{R})$, telle que :

$$U_n C_n U_n^t = D_n = \text{diag}(\lambda_{1,1}^n, \dots, \lambda_{1,n}^n, \lambda_{2,1}^n, \dots, \lambda_{2,n}^n, \dots, \lambda_{n,1}^n, \dots, \lambda_{n,n}^n).$$

On pose $X_n = n U_n Y_n$. Il s'agit d'un vecteur gaussien centré sous les deux mesures $Q_{M^{\alpha,\beta}}^n$ et Q_W^n , et sa matrice de covariance est donnée par :

$$E_{Q_{M^{\alpha,\beta}}^n}(X_n X_n^t) = n^2 U_n E_{Q_{M^{\alpha,\beta}}^n}(Y_n Y_n^t) U_n^t = I_{n^2} + (na)^2 D_n,$$

$$E_{Q_W^n}(X_n X_n^t) = I_{n^2}.$$

Soient $R_{M^{\alpha,\beta}}^n$ et R_W^n les mesures induites par $M^{\alpha,\beta}$ et W respectivement dans $(C[0,1]^2, \tilde{\mathcal{B}})$, avec :

$$\tilde{\mathcal{B}} = \bigvee_{n=1}^{\infty} \tilde{\mathcal{B}}_n,$$

et

$$\tilde{\mathcal{B}}_n = \sigma(X_n).$$

Il s'agit de deux mesures gaussiennes non dégénérées, et par suite elles sont équivalentes. On note par φ_n la dérivée Radon–Nikodym de $R_{M^{\alpha,\beta}}^n$ par rapport à R_W^n . De plus, on a

$$H(Q_{M^{\alpha,\beta}}^n \setminus Q_W^n) = H(R_{M^{\alpha,\beta}}^n \setminus R_W^n).$$

Alors, on a par le lemme 6.1 de [14],

$$\begin{aligned}
H(R_{M^{\alpha,\beta}}^n \setminus R_W^n) &= \int_{\Omega} \log(\varphi_n(\omega)) \varphi_n(\omega) R_W^n(d\omega) \\
&= \int_{\Omega} \log(\varphi_n(\omega)) R_{M^{\alpha,\beta}}^n(d\omega) \\
&= E_{R_{M^{\alpha,\beta}}^n}(\log \varphi_n) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n ((n\alpha)^2 \lambda_{i,j}^n - \log(1 + (n\alpha)^2 \lambda_{i,j}^n)).
\end{aligned}$$

D'autre part, pour tout $x \geq 0$, on a

$$x - \log(1 + x) = \int_0^x \frac{u}{1+u} du \leq \int_0^x u du = \frac{1}{2} x^2.$$

D'où

$$H(R_{M^{\alpha,\beta}}^n \setminus R_W^n) \leq \frac{(n\alpha)^4}{4} \sum_{i,j=1}^n (\lambda_{i,j}^n)^2.$$

Ainsi, pour terminer la preuve, il suffit de vérifier que :

$$\sup_n n^4 \sum_{i,j=1}^n (\lambda_{i,j}^n)^2 < \infty. \quad (4.6)$$

On procède exactement de la même façon que dans [9] :

Par orthogonalité de la matrice U_n , on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j=1}^n (\lambda_{i,j}^n)^2 &= \|D_n\|_{HS}^2 = \|C_n\|_{HS}^2 \\
&= \sum_{i,j=1}^n \sum_{i',j'=1}^n (\text{cov}(\Delta_{i,j}^{n,n} B^{\alpha,\beta}, \Delta_{i',j'}^{n,n} B^{\alpha,\beta}))^2,
\end{aligned}$$

où $\|\cdot\|_{HS}$ est la norme de Hilbert-Schmidt. Et comme

$$\text{cov}(\Delta_{i,j}^{n,n} B^{\alpha,\beta}, \Delta_{i',j'}^{n,n} B^{\alpha,\beta}) = \text{cov}(\Delta_i^n B^\alpha, \Delta_{i'}^n B^\alpha) \times \text{cov}(\Delta_j^n B^\beta, \Delta_{j'}^n B^\beta),$$

où B^α et B^β sont des mBf d'indice de Hurst respectivement α et β , et pour $\gamma = \alpha, \beta$,

$$\Delta_i^n B^\gamma = B_{\frac{i}{n}}^\gamma - B_{\frac{i-1}{n}}^\gamma,$$

on a

$$\sum_{i,j=1}^n (\lambda_{i,j}^n)^2 = \left(\sum_{i,i'=1}^n (\text{cov}(\Delta_i^n B^\alpha, \Delta_{i'}^n B^\alpha))^2 \right) \left(\sum_{j,j'=1}^n (\text{cov}(\Delta_j^n B^\beta, \Delta_{j'}^n B^\beta))^2 \right).$$

Par stationnarité de $\Delta_i^n B^\gamma$, on a

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^n (\lambda_{i,j}^n)^2 &\leq (2n \sum_{i=1}^n (\text{cov}(\Delta_i^n B^\alpha, \Delta_1^n B^\alpha))^2) (2n \sum_{j=1}^n (\text{cov}(\Delta_j^n B^\beta, \Delta_1^n B^\beta))^2) \\ &= \left[2nn^{-4\alpha} (1 + (\frac{2^{2\alpha}}{2} - 1)^2) + 2n \sum_{i=3}^n (\text{cov}(\Delta_i^n B^\alpha, \Delta_1^n B^\alpha))^2 \right] \\ &\quad \times \left[2nn^{-4\beta} (1 + (\frac{2^{2\beta}}{2} - 1)^2) + 2n \sum_{j=3}^n (\text{cov}(\Delta_j^n B^\beta, \Delta_1^n B^\beta))^2 \right]. \end{aligned}$$

Comme $\frac{3}{4} < \gamma = \alpha, \beta < 1$,

$$n^2 2n n^{-4\gamma} (1 + (\frac{2^{2\gamma}}{2} - 1)^2) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Donc, pour prouver (4.6), il suffit de vérifier que

$$\sup_n n^3 \sum_{k=3}^n (\text{cov}(\Delta_k^n B^\gamma, \Delta_1^n B^\gamma))^2 < \infty. \quad (4.7)$$

Or pour tout $k \geq 3$, on a :

$$\begin{aligned} \text{cov}(\Delta_k^n B^\gamma, \Delta_1^n B^\gamma) &= \frac{n^{-2\gamma}}{2} (k^{2\gamma} - 2(k-1)^{2\gamma} + (k-2)^{2\gamma}) \\ &\leq \frac{n^{-2\gamma}}{2} (\frac{\partial}{\partial k} k^{2\gamma} - \frac{\partial}{\partial k} (k-2)^{2\gamma}) \\ &= \gamma n^{-2\gamma} (k^{2\gamma-1} - (k-2)^{2\gamma-1}) \\ &\leq \gamma n^{-2\gamma} 2 \frac{\partial}{\partial k} (k-2)^{2\gamma-1} = 2\gamma(2\gamma-1) n^{-2\gamma} (k-2)^{2\gamma-2}. \end{aligned}$$

Ainsi, on obtient :

$$\begin{aligned} n^3 \sum_{k=3}^n (\text{cov}(\Delta_k^n B^\gamma, \Delta_1^n B^\gamma))^2 &\leq 4\gamma^2 (2\gamma-1)^2 n^{3-4\gamma} \sum_{k=1}^{n-2} k^{4\gamma-4} \\ &\leq 4\gamma^2 (2\gamma-1)^2 n^{3-4\gamma} \int_0^{n-2} x^{4\gamma-4} dx \\ &= \frac{4\gamma^2 (2\gamma-1)^2}{4\gamma-3} n^{3-4\gamma} (n-2)^{4\gamma-3} \\ &\leq \frac{4\gamma^2 (2\gamma-1)^2}{4\gamma-3}. \end{aligned}$$

Par conséquent, (4.7) est vérifié et le lemme est bien prouvé.

□

Remarque 4.2.1 *On peut considérer l'estimation des paramètres du modèle mixte comme une application du résultat du théorème 4.2.1. En effet, pour $(\alpha, \beta) \in (\frac{3}{4}, 1)^2$, la mesure induite par $M^{\alpha, \beta}$ dans $C[0, 1]^2$ est équivalente à celle de W . D'où, la propriété de convergence presque sûre dans ce cas est indépendante de (α, β) . Par conséquent, on ne pourra pas trouver des estimateurs fortement consistants à partir de l'observation des trajectoires de $M^{\alpha, \beta}$.*

Conclusion

Dans ce mémoire, nous nous sommes attachés à montrer l'intérêt de l'utilisation du drap Brownien fractionnaire, un champ aléatoire gaussien anisotropique et du modèle mixte à deux paramètres comme un processus qui n'est pas intrèsequement auto-similaire.

En premier lieu, nous avons présenté une extension du mouvement Brownien fractionnaire ordinaire, à savoir le drap Brownien fractionnaire. Cet outil constitue le coeur mathématique de ce mémoire. Nous avons cité ses différentes propriétés, parmi lesquelles nous nous concentrons sur l'auto-similarité et la stationnarité des accroissements qui sont considéré comme des points faibles de ce processus. Ce sont des propriétés mathématiques souhaitables, mais ne sont pas toujours satisfaites en réalité. En effet, l'autosimilarité, par exemple, est une propriété d'invariance qui concerne l'ensemble de la trajectoire du processus. Ainsi du point de vue modélisation, il s'agit d'un modèle qui présente une irrégularité uniforme sans tenir compte des spécificités du problème modélisé. Cela a motivé l'introduction du mouvement Brownien multifractionnaire (à plusieurs paramètres).

Dans ce contexte, et pas loin de ce type de processus, nous avons introduit le modèle mixte à deux paramètres à la fin de ce rapport.

Ensuite, nous avons étudié les variations d'ordre supérieur du drap Brownien fractionnaire tout en commençant par prouver la loi des grands nombres, ou encore le théorème ergodique usuel appliqué au processus gaussien stationnaire centré à deux paramètres. Cette preuve a été basée sur les propriétés de polynômes d'Hermite.

Finalement, nous avons également étudié les variations d'ordre supérieur du modèle mixte à deux paramètres en utilisant les résultats obtenus au cas du drap Brownien fractionnaire.

Mais, on note que nous n'avons pas distingué tous les cas dépendant des valeurs des paramètres de Hurst dans notre étude à cause d'ambiguïté au niveau de possibilité d'étendre les outils utilisés pour un processus à un seul paramètre parmi lesquels : le théorème de Dobrushin-Major dans [11]. Ces cas sont :

- Cas r pair et $\alpha = \beta = \frac{3}{4}$,
- Cas r impair et $\alpha, \beta \in (\frac{1}{2}, 1)$,
- cas où α, β n'appartiennent pas au même intervalle.

Notre étude engendre certaines questions que nous énonçons et qui nous permettent également de donner des pistes de réflexion :

- Au niveau de construction du modèle mixte, peut-on se débarrasser de la condition d'indépendance des deux processus, le drap Brownien fractionnaire et le drap Brownien, tout en la remplaçant par une condition imposée sur l'espace sur lequel on va travailler ?
- L'étude des variations pondérées (cas $f \neq 1$) d'un modèle mixte à deux paramètres.
- Pour construire des estimateurs consistants des paramètres de notre modèle mixte à deux paramètres, peut-on procéder de la même manière que dans [10] tout en fixant à chaque fois l'un des paramètres de Hurst ?
- Peut-on trouver d'autres conditions sur les paramètres de Hurst d'un dBf afin d'avoir l'équivalence entre un modèle mixte à deux paramètres et un drap Brownien ? et sous quelles conditions ?
- L'étude des variations en puissance pondérées pour un mouvement Brownien multifractionnaire (mBm) à deux paramètres.
- Il n'existe pas, à notre connaissance, d'études théoriques des EDS dirigées par un mBm à deux paramètres.

Nous pensons que certains points devraient probablement être résolus, en partie du moins, dans les mois ou années à venir car la recherche au niveau de l'étude des variations du drap Brownien fractionnaire a été déclenchée. En 2010, Réveillac et al. ont publié un article [26] qui porte sur les variations d'Hermite du dBf.

Bibliographie

- [1] A. Ayache, S. Leger et M. Pontier : *Drap brownien fractionnaire*. Potential Analysis 17, p 31 – 43, 2002.
- [2] T. Androschuk et Y. Mishura : *Mixed Brownian-fractional Brownian model : absence of arbitrage and related topics*. Stochastics 78(5), p 281 – 300, 2006.
- [3] E. Alos, O. Mazet et D. Nualart : *Stochastic calculus with respect to Gaussian processes*. Ann. Probab. 29 (2), p 766 – 801, 2001.
- [4] A. Benassi, S. Cohen et J. Istas : *Identifying the multifractional function of a Gaussian process*. Statist. Probab. Lett. 39(4), p 337 – 345, 1998.
- [5] P. Breuer et P. Major : *Central limit theorems for nonlinear functionals of Gaussian fields*. J. Multivariate Analysis, 13, p 425 – 441, 1983.
- [6] O. Barndorff-Nielsen et N. Shephard : *Realized power variation and stochastic volatility models*. Bernoulli, 9(2), p 243 – 265, 2003.
- [7] O. Barndorff-Nielsen et N. Shephard : *Power and bipower variation with stochastic volatility and jumps*. J. Financial Econometrics, 2, p 1 – 48, 2004.
- [8] O. Barndorff-Nielsen, S. Graversen et J. Jacod, N. Shephard : *Limit theorems for bipower variation in financial econometrics*. 2005, disponible sur : <http://www.nuff.ox.ac.uk/users/shephard/papers/jacodapp.pdf>
- [9] P. Cheridito : *Mixed fractional Brownian motion*. Bernoulli 7(6), p 913 – 934, 2001.
- [10] M. Dozzi, Y. Mishura et G. Shevchenko : *Asymptotic behavior of mixed power variations and statistical estimation in mixed models*. 2013, disponible sur le site : <http://arxiv.org/pdf/1301.0993v2.pdf>.
- [11] R.L. Dobrushin et P. Major : *Non-central limit theorems for non-linear functionals of Gaussian fields*. Z. Wahrsch. Verw. Gebiete, 50, p 27 – 52, 1979.
- [12] D. Filatova : *Mixed fractional Brownian motion : some related questions for computer network traffic modeling*. International Conference on Signals and Electronic Systems, Krakow, Poland, p 393 – 396, 2008.
- [13] D. Feyel et A. De La Pradelle : *Fractionnal integrals and Brownian processes*. Potential Analysis, 10(3), p 273 – 288, 1999.
- [14] T. Hida et M. Hitsuda : *Gaussian Processes. American Mathematical Society : Translations of Mathematical Monographs*. Vol. 120, Tokyo, 1976.
- [15] A. Kamont : *On the fractional anisotropic wiener field*. Probability and Mathematical Statistics, vol. 16, Fssc 1, p 85 – 98, 1996.

- [16] Y.S. Mishura : *Stochastic calculus for fractional Brownian motion and related processes*. Lecture Notes in Mathematics 1929. Springer-Verlag, Berlin, 2008.
- [17] Y. Mishura et G. Shevchenko : *Mixed stochastic differential equations with long-range dependence : Existence, uniqueness and convergence of solutions*. Disponible sur : <http://arxiv.org/pdf/1112.2332.pdf>.
- [18] B.B. Mandelbrot et J.W. Van Ness : *Fractional Brownian motions, fractional noises and applications*. SIAM Review, 10, p 422 – 437, 1968.
- [19] I. Nourdin : *Asymptotic behavior of weighted quadratic and cubic variations of fractional Brownian motion*. Ann. Probab. 36(6), p 2159 – 2175, 2008.
- [20] I. Nourdin : *Lectures on Gaussian approximations with Malliavin calculus*. 2012, disponible sur la page web de I. Nourdin.
- [21] I. Nourdin, D. Nualart et C.A. Tudor : *Central and noncentral limit theorems for weighted power variations of fractional Brownian motion*. Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat. 46(6), p 1055 – 1079, 2010.
- [22] D. Nualart et G. Peccati : *Central limit theorems for sequences of multiple stochastic integrals*. Ann. Probab, 33, p 173 – 193, 2005
- [23] I. Nourdin et G. Peccati : *Normal approximations with Malliavin calculus From Stein's method to universality*. 1ère édition, USA, Cambridge University Press, 2012.
- [24] I. Nourdin : *Selected aspects of fractional Brownian motion*. Italia, Springer-Verlag, 2012.
- [25] A. Réveillac : *Estimation of quadratic variations for two parameter diffusions*. disponible sur : <http://arxiv.org/pdf/0801.3027v1.pdf>.
- [26] A. Réveillac, M. Stauch et C.A. Tudor : *Hermite variations of the fractional Brownian sheet*. Publié sur le site <http://arxiv.org/pdf/1010.0143.pdf>.
- [27] R. Smythe : *Strong laws of large numbers for r-dimensional arrays of random variables*. Ann. Probab, vol. 1, n.1, p 164 – 170, 1973.
- [28] Y. Ait Sahalia et J. Jacod : *Testing for jumps in discretely observed process*. Ann. Stat. Vol. 37, n. 1, p 184 – 222, 2009.
- [29] Y. Ait Sahalia et J. Jacod : *Volatility estimators for discretely sampled Lévy process*. Ann. Stat. 35(1), p 335 – 392, 2007.
- [30] G. Peccati et C.A. Tudor : *Gaussian limits for vector-valued multiple stochastic integrals*. Lecture Notes in Mathematics 1857, p 247 – 262, 2005.
- [31] M.S. Taqqu : *Convergence of integrated processes of arbitrary Hermite rank*. Z. Wahrsch. Verw. Gebiete, 50 (1), p 53 – 83, 1979.